

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Departamento de Matemática Aplicada I

**GRAFOS  
CON TAMAÑO MÁXIMO  
Y  
CINTURA INFERIORMENTE ACOTADA**

María Encarnación Abajo Casado  
Sevilla, 2009



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**  
Departamento de Matemática Aplicada I

**GRAFOS**  
**CON TAMAÑO MÁXIMO**  
**Y**  
**CINTURA INFERIORMENTE ACOTADA**

Memoria presentada por  
María Encarnación Abajo Casado  
para optar al grado de  
Doctor en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla

V<sup>o</sup> B<sup>o</sup>  
de la Directora

Fdo: Ana Rosa Diánez Martínez  
Profesora Titular de Universidad  
Departamento de Matemática Aplicada I  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2009



A mi madre, Manolo, Manuel y Vasiliy.



When I know the time is right for me,

I'll cross the stream.

*ABBA, "I have a dream."*





# Resumen

Los contenidos de esta memoria forman parte de un área particular de la Teoría de Grafos conocida como Teoría Extremal de Grafos. Uno de sus problemas más representativos es el denominado *Problema de Turán*, cuyo inicio data de 1941, y en el que se estudia el tamaño máximo que puede alcanzar un grafo que no contiene como subgrafo a un grafo completo dado. En los últimos años se han tratado distintos problemas extremales como extensiones de él y concretamente en uno de ellos se puede enmarcar el objetivo de nuestro trabajo.

En particular, profundizamos en la determinación en función del orden, de la máxima cantidad de aristas que pueden contener los grafos libres de ciclos hasta una longitud prefijada. Paralelamente, como en todo problema extremal, nos planteamos la caracterización de los grafos que alcanzan el valor extremo y que son denominados grafos extremales.

Para iniciar el estudio consideramos una familia particular de grafos, los que contienen una cantidad prefijada de aristas más que de vértices. Para este conjunto de grafos, en 1998 B. Bollobás planteó el estudio de la máxima cintura en función del orden. Comprobamos que esta cuestión está relacionada con el estudio del problema extremal que nos interesa.

Debido a la dificultad que conlleva la resolución del problema planteado, diversos autores han intentado obtener propiedades comunes a todos los grafos extremales. En particular, se han cuestionado la existencia obligatoria de algún ciclo de longitud  $n + 1$  en cualquier grafo extremal libre de

ciclos con longitud menor o igual que  $n$ . En caso de respuesta negativa, nos preguntamos acerca del valor máximo que puede alcanzar la cintura de los grafos extremales.

Aunque el problema extremal que abordamos no es nuevo, los resultados conocidos son escasos. Casi todos ellos se centran en determinar la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo sin triángulos ni cuadriláteros, en acotar la función extremal y en estudiar la cintura de los grafos extremales.

Siguiendo con esta línea de trabajo, centramos nuestro interés en la aportación de más valores exactos y asintóticos de la función extremal, en la caracterización de familias de grafos extremales y en el estudio de propiedades comunes a todos ellos.

# Agradecimientos

Aprovecho estas líneas para agradecer a todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este trabajo. Por un lado, a los miembros del grupo de investigación Invariantes en Teoría de Grafos y Optimización, por facilitar mi introducción en este campo, y por otro, a mis compañeros del Departamento de Matemáticas I, y en particular, a los de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla por creer y confiar en mí y por el apoyo recibido en estos años de duro trabajo. Es justo admitir que es un placer desarrollar mi labor docente e investigadora entre ellos.

Mi agradecimiento se extiende de una manera muy especial a la profesora Ana Rosa Diánez Martínez. Trabajar con ella ha sido una de las experiencias más positivas que me han sucedido. Como directora de esta memoria, por su constante disponibilidad a ayudarme siempre que la he necesitado, como compañera porque siempre nos comprendemos y fundamentalmente, como amiga porque puedo confiar y contar con ella tanto en los buenos como en los malos momentos.

Quiero también reconocer el continuo apoyo recibido de mis padres durante mis primeros años de formación. Finalmente, quiero mostrar un agradecimiento muy especial a Manolo, por su comprensión y paciencia, y a Manuel y Vasily, por la madurez que han mostrado en estos años. Ellos me han brindado siempre la ilusión de seguir adelante.

Todos habéis contribuido a convertir en fáciles los momentos difíciles.



# Introducción

El trabajo que aquí se presenta se enmarca dentro de la Teoría Extremal del Grafos. En términos sencillos, un *grafo* es la representación de las relaciones existentes entre los elementos de un cierto conjunto. Por otra parte, la palabra *extremal* nos sugiere la búsqueda del mayor o menor valor que toma una función sobre un conjunto finito o infinito y con o sin restricciones. Si unimos estos dos conceptos podemos decir que los problemas abordados en la Teoría Extremal del Grafos tratan de determinar el mayor o menor valor que puede alcanzar un parámetro de una cierta familia de grafos a la que se le exige adicionalmente una propiedad. Paralelamente, surge el interés por la caracterización de los grafos que alcanzan tal valor extremo, que son denominados *grafos extremales*, y por las propiedades generales de estos.

Uno de los problemas extremales más representativos es el conocido como *Problema de Turán*. En 1941, P. Turán [78] se cuestiona tanto la determinación del máximo tamaño que puede alcanzar un grafo sin contener al grafo completo  $K_p$  como subgrafo, así como la identificación de los grafos extremales asociados a tal problema. Ambas cuestiones quedan resueltas en [78] y la familia de grafos extremales es conocida actualmente como Grafos de Turán, que son los grafos  $p - 1$ -partitos completos con todas sus clases lo más homogéneas posible.

Podemos decir que a raíz de este trabajo, surgen una serie de problemas extremales que se agrupan bajo la denominación de *Problemas de Turán*, en los

que se estudia el tamaño máximo de un grafo que no contiene a un subgrafo o a una familia de subgrafos prohibidos  $\mathcal{F}$ . Para cada orden  $\nu$ , se suele denotar por  $ex(\nu; \mathcal{F})$  a la función extremal y a cada familia de grafos extremales por  $EX(\nu; \mathcal{F})$ .

Dentro de este contexto, por su similitud al problema de Turán original, queremos mencionar el denominado *Problema Topológico de Turán*. Se inicia en [37, 65] y plantea determinar el mayor tamaño de un grafo con  $\nu$  vértices que no contiene a una subdivisión del grafo completo  $K_p$ . Entre todos los trabajos que tratan esta cuestión nos gustaría resaltar a [32, 67, 68], ya que en ellos se resuelve este problema de forma exacta cuando  $p \leq 5$ , y a [8, 25, 26, 50], porque sus autores proponen un nuevo enfoque del problema, relacionando los parámetros  $\nu$  y  $p$ , mediante el cual determinan el valor de la función extremal asociada cuando

$$\left\lceil \frac{7\nu + 7}{12} \right\rceil \leq p \leq \nu.$$

Otro planteamiento similar es el denominado *Problema de Turán para menores completos* o *Problema de Turán con contracción de aristas*. En este caso, se trata de determinar el mayor tamaño de un grafo de orden  $\nu$  no contractible a un grafo completo  $K_p$ . Es conocido el valor de la función extremal asociada cuando  $p \leq 8$  [32, 58, 66] y, en caso contrario, recientemente en [81] se ha determinado también cuando

$$\left\lceil \frac{3\nu + 3}{5} \right\rceil \leq p \leq \nu.$$

Por otra parte, otro gran bloque de problemas extremales sobre el que se ha trabajado es el referente a la ausencia de determinados ciclos en lugar de grafos completos. Así, P. Erdős [35] propone hallar la máxima cantidad de aristas de un grafo de orden  $\nu$  sin contener cuadriláteros. En [38] se establece su comportamiento asintótico

$$ex(\nu; \{C_4\}) = \left( \frac{1}{2} + o(1) \right)^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}.$$

Buscando valores exactos de la función, W. G. Brown [24] prueba que

$$ex(q^2 + q + 1; \{C_4\}) \geq \frac{q(q+1)^2}{2}$$

cuando  $q$  es potencia de un número primo, Z. Füredi demuestra que la igualdad anterior se alcanza cuando  $q$  es una potencia de 2 [45] o cuando  $q \geq 13$  es potencia de un número primo [46]. En [29] se proporciona el valor de  $ex(\nu; \{C_4\})$  cuando  $\nu \leq 21$ .

En el artículo [47] se determinan las mejores cotas conocidas de la función extremal  $ex(\nu; \{C_6\})$  dadas por

$$0.5338\nu^{\frac{4}{3}} \leq ex(\nu; \{C_6\}) = 0.627\nu^{\frac{4}{3}} + O\left(\nu^{\frac{7}{6}}\right).$$

Por otra parte, recordemos que el problema original de Turán [78] para el caso  $p = 3$ , proporciona el valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3\})$  y determina que los grafos bipartitos completos con ambas clases lo más iguales posibles son los únicos grafos extremales, es decir,

$$EX(\nu; \{C_3\}) = K_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor, \lceil \frac{\nu}{2} \rceil}.$$

Como una extensión natural a lo anteriormente expuesto, en 1975 P. Erdős plantea la determinación en función del orden  $\nu$  de la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo sin triángulos ni cuadriláteros, y conjetura en [36] que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4\}) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}.$$

Con el objetivo de hallar el valor de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  se diseña en [83] un algoritmo capaz de generar grafos con orden dado y cintura 5. Mediante su utilización se construyen grafos con las propiedades requeridas, cuyos tamaños proporcionan cotas inferiores de la función extremal cuando  $\nu \leq 200$ . En principio, la bondad de este proceso iterativo parece confirmarse, ya que estas cotas

coinciden con los valores conocidos de la función para  $\nu \leq 30$  y  $\nu = 50$  [51, 52]. Sin embargo, recientemente, en [1] para  $\nu \geq 104$  se han mejorado muchas de las cotas anteriormente mencionadas.

Además de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  es parcialmente conocido su comportamiento asintótico (véase [51]) dado por

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4\})}{\nu^{3/2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Con estos precedentes, resulta natural la consideración de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de orden  $\nu$  que no contiene ciclos de hasta una longitud  $n \geq 4$  predeterminada.

Una cota inmediata de esta función deriva de su relación con los ciclos de longitud par (véase [21] y la página 158 del libro de B. Bollobás [17]),

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2k}\}) \leq ex(\nu; \{C_{2k}\}) \leq 90k\nu^{1+\frac{1}{k}}.$$

Por otra parte, cuando  $n$  es impar, P. Erdős y M. Simonovits en [40] probaron que para todo  $k \geq 1$  entero se verifica que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2k}, C_{2k+1}\}) \leq \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1+\frac{1}{k}} + 2^k \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Referente a las cotas inferiores, se sabe [76] que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq c_n \nu^{1+\frac{1}{n-1}}.$$

En particular, cuando  $n = 2s+1$ , F. Lazebnik, V. A. Ustimenko y A. J. Woldar [62] mejoran la cota inferior anterior construyendo una familia de grafos que muestra que para una sucesión infinita de órdenes  $\nu$  se cumple que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2s+1}\}) \geq d_s \nu^{1+\frac{2}{3s-3+\epsilon}},$$



siendo  $\epsilon = 0$  cuando  $s \geq 3$  es impar y  $\epsilon = 1$  cuando  $s \geq 2$  es par.

Recientemente, para los casos concretos  $n \in \{5, 6, 7\}$  y órdenes  $\nu$  pequeños se encuentran en [77] mejores cotas inferiores de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . Para ello, sus autores implementan un algoritmo más general que el proporcionado en [83], pues construye grafos para cualquier cintura y orden dados, tratando a su vez de que estos contengan la máxima cantidad de aristas posible.

Poco más se conoce de forma general del valor exacto de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . En [63] se prueba que

$$ex(2n + 2; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = 2n + 4 \text{ cuando } n \geq 12$$

y en [9] que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu \text{ cuando } n + 1 \leq \nu \leq n + 1 + \left\lfloor \frac{n - 2}{2} \right\rfloor.$$

La razón del casi desconocimiento de valores exactos de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  radica en las escasas hipótesis de trabajo. Esto motiva que surjan diversos trabajos que abordan el estudio de características o propiedades comunes que puedan tener los grafos extremales.

En particular, todos los grafos de cualquier familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen cintura inferiormente acotada y parece entonces lógico preguntarse sobre los valores que ésta puede tomar. A este respecto, en [63] se prueba que en cada una de las citadas familias existe algún grafo con cintura  $n + 1$ . Por otra parte, se ha planteado el establecimiento de condiciones bajo las cuales se pueda asegurar que cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene necesariamente cintura  $n + 1$ .

Concretamente, para los primeros valores de  $n$  esta cuestión está ya resuelta, pues para  $n = 4$ ,  $\nu \geq 7$  [52],  $n = 5$ ,  $\nu \geq 8$  [63] y  $n = 6$ ,  $\nu \geq 12$

con  $\nu \neq 15$  [1, 9, 77] todo grafo de cualquier conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  contiene algún ciclo de longitud  $n + 1$ .

Para el caso general  $n \geq 7$ , el mejor resultado conocido hasta el momento es el proporcionado en [10] en el que se garantiza cintura  $n + 1$  cuando

$$\nu > \frac{2(n-2)^{n-2} + n - 5}{n - 3}.$$

En [9] se abordan otras propiedades. Concretamente, se prueba que los grafos extremales sin ciclos de longitud menor o igual que  $n$  tienen diámetro a lo sumo  $n - 1$  y máxima conectividad por aristas.

Aunque los contenidos de esta memoria se relacionan fundamentalmente con el problema extremal para ciclos anteriormente expuesto, queremos introducir una breve reseña sobre otros dos problemas extremales que en principio parecen no tener relación con la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . En ambos juega un papel fundamental la *cintura* de un grafo, que es el parámetro que mide la longitud de su ciclo más corto.

El primero de tales problemas, fue iniciado por F. Kárteszi [59], y para  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$  enteros plantea la determinación de la existencia de grafos  $r$ -regulares con cintura  $g$ , y en tal caso obtener su mínimo orden. La respuesta a la existencia de estos  $(r; g)$ -grafos se proporciona en 1963 cuando P. Erdős y H. Sachs [39] prueban que para cada entero  $r \geq 3$  y  $g \geq 3$  existe algún grafo simple  $r$ -regular con cintura  $g$ . Los  $(r; g)$ -grafos con mínimo orden se denominan *jaulas* y para la mayoría de los valores  $r, g$  su conocimiento es todavía un problema abierto.

Dada una  $(r; g)$ -jaula  $G$ , contando el número de vértices a distancias  $1, 2, \dots$  de un vértice o de una arista de ella, una primera acotación de su orden puede expresarse mediante la desigualdad (ver [14], página 180)

$$\nu(G) \geq \nu_0(r, g) = \begin{cases} 1 + r \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (1)$$

Las  $(r; g)$ -jaulas cuyo orden es  $\nu_0(r, g)$  se denominan *jaulas minimales*.

La extensión de la cota (1) a grafos no regulares fue planteada en el año 1978 por B. Bollobás en [17] (p.163, problema 10) y cuestionada hasta que finalmente en el año 2002 N. Alon, S. Hoory y L. Linial prueban la mejor acotación conocida hasta este momento del orden de cualquier grafo  $G$  con valencia media  $\bar{d}$  y cintura  $g$ , y que viene dada por

$$\nu(G) \geq \nu_0(\bar{d}, g) = \begin{cases} 1 + \bar{d} \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (\bar{d}-1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (\bar{d}-1)^i & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (2)$$

Mediante la desigualdad (2) que relaciona el orden, cintura y valencia media de cualquier grafo  $G$ , se deduce una cota superior de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . Para el caso  $n$  par esta cota se incluye explícitamente en [60] como

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2s}\}) \leq \frac{1}{2} \nu^{1+\frac{1}{s}} + \nu.$$

El otro problema extremal que queremos recordar fue introducido por B. Bollobás en [18]. Para  $\nu \geq 3$  y  $0 \leq k \leq \binom{\nu}{2} - \nu$ , plantea hallar el valor de la máxima cintura de los grafos con orden  $\nu$  y tamaño  $\nu + k$ , cintura que denota por  $g(\nu, k)$ .

B. Bollobás junto con E. Szemerédi, determinan en [19] el valor de la cintura  $g(\nu, k)$  para  $k \in \{0, 1, 2\}$ , la acotan superiormente cuando  $k \in \{3, 4, 5\}$  y en caso contrario, proporcionan una cota superior asintótica.

Tras este breve acercamiento a la evolución del problema extremal para ciclos, continuamos haciendo unos breves comentarios sobre esta memoria. Con el objeto de hacer más clara su lectura y comprensión, la hemos estructurado en seis capítulos, cuyos contenidos y resultados principales describimos a continuación.

Para iniciar, en el *Capítulo 1*, a la vez que fijamos la notación que vamos a emplear, recordamos las definiciones y resultados básicos, tanto de la Teoría de Grafos como de la Teoría Extremal de Grafos, que necesitamos en el desarrollo posterior de los contenidos de esta memoria.

En el *Capítulo 2* nos centramos en una familia particular de grafos, concretamente en aquellos para los cuales la diferencia entre su tamaño y su orden es igual a una constante dada  $k \geq 0$ . Siguiendo con la definición de B. Bollobás y E. Szemerédi en [19], decimos que los grafos de esta familia tienen *exceso*  $k$ , lo que motiva que consideremos para cada una de las familias extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . Comprobamos que es creciente en  $\nu$  pero no necesariamente de forma estricta, lo que implica la existencia de un intervalo de valores  $\nu$  para los cuales  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  se mantiene constante. A tal intervalo le denominamos *intervalo extremal de exceso constante* y para cualquier orden  $\nu$  de él, la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  queda totalmente determinada.

De esta forma, reconducimos el conocimiento de la función extremal a la determinación de los valores iniciales de tales intervalos, valores que denotamos  $\nu_k(n)$ . La importancia de estas cantidades radica en la igualdad de conjuntos siguiente

$$\left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k \right\} = \left[ \nu_k(n), \nu_{k+1}(n) \right).$$

Por otra parte, B. Bollobás propuso en [18] la determinación de la máxima cintura  $g(\nu, k)$  que puede alcanzar un grafo con exceso  $k$  en función de su orden  $\nu$ .

Demostremos que ambos problemas extremales, el estudio de  $g(\nu, k)$  y de  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , están relacionados de modo que la resolución de uno aporta la del otro.

Asimismo probamos que infinitos grafos extremales son homeomorfos entre sí, pues se obtienen mediante una sucesión de subdivisiones elementales de ciertos grafos, que denominamos *esqueletos*, hasta que se supera la cota inferior prefijada de la cintura.

En particular señalamos que grafos bien conocidos, como son el grafo completo  $K_4$ , el grafo bipartito  $K_{3,3}$ , las jaulas de Petersen y la de Heawood, son esqueletos con excesos  $k \in \{2, 3, 5, 7\}$  y mediante subdivisiones de ellos es posible obtener grafos extremales para todo  $n \geq 4$ .

Mediante la construcción de familias de grafos homeomorfos entre sí obtenemos en el *Capítulo 3* las primeras cantidades  $\nu_k(n)$  para  $k \leq 5$  y acotamos las correspondientes a  $k \in \{6, 7, 8\}$ , lo cual conduce a la determinación del valor exacto de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $n \geq 4$  y para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil$ .

Además probamos que todas las  $(r; g)$ -jaulas minimales no son solamente grafos extremales, sino que son los únicos elementos de cada familia extremal  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ , es decir,

$$EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\}) = \{(r; g)\text{-jaulas minimales}\}$$

Como consecuencia de ello, y debido a la existencia de una infinidad de jaulas minimales cuando la cintura  $g \in \{6, 8, 12\}$ , (véanse [12, 54, 64, 82, 86]), deducimos el valor exacto de una subsucesión de  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  en los casos  $n \in \{5, 7, 11\}$ , lo que aporta información sobre el comportamiento de la función extremal cuando el orden  $\nu$  se hace infinitamente grande. Concretamente,

se prueba que para  $n \in \{5, 7, 11\}$  se verifica que

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{\frac{n+1}{n-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Como consecuencia de ello y considerando el carácter decreciente en  $n$  de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  se obtiene, para  $n \in \{4, 6, 10\}$ , que

$$\frac{1}{2^{1+\frac{2}{n}}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{1+\frac{2}{n}}} \leq \frac{1}{2}$$

que coincide para  $n = 4$  con el obtenido en [51].

El estudio que hemos realizado, el cual nos ha permitido obtener una infinidad de valores exactos de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , hace posible la caracterización en el *Capítulo 4* de todos los grafos extremales cuyo orden es a lo sumo  $3n - 3$ . En este proceso observamos que hay órdenes  $\nu$  (los del inicio del intervalo extremal de exceso constante) para los cuales los grafos extremales son únicos o casi únicos, mientras que para otros órdenes  $\nu$  (los del final del intervalo señalado) puede existir un amplio abanico de grafos extremales.

Otra de las cuestiones que ha suscitado interés en la Teoría Extremal de Grafos es la búsqueda de propiedades generales de los correspondientes grafos extremales. A ello dedicamos el *Capítulo 5*, centrando nuestro estudio en la cintura, diámetro y valencia máxima de los grafos de cualquier conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

En particular, resolvemos dos cuestiones planteadas previamente en [51] y en [52]. En la primera de ellas, D.K. Garnick, Y.H.H. Kwong y F. Lazebnik cuestionan la determinación de la máxima cintura  $g_{max}(n)$  que puede alcanzar cualquier grafo extremal con independencia de su orden. En este capítulo probamos que

$$g_{max}(n) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor.$$

En la segunda D.K. Garnick y N.A. Nieuwejaar plantean la existencia de

una constante  $c$  de modo que para todo  $\nu \geq cn$  todo grafo extremal tenga cintura  $n + 1$ . Probamos que la respuesta a esta cuestión es negativa.

Con este mismo propósito de establecer condiciones bajo las cuales se pueda asegurar que cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene necesariamente cintura  $n + 1$ , probamos que esto ocurre al inicio de cada intervalo extremal de exceso constante, es decir, que todos los grafos de cualquier familia  $EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen cintura  $n + 1$ .

Planteamos una cuestión más ambiciosa como es la determinación de la máxima cintura que puede alcanzar un grafo del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  en función de  $n$  y de su orden  $\nu$ . Probamos que esta cintura, que denotamos por  $g_{\max}(\nu, n)$ , está relacionada con la cintura  $g(\nu, k)$  introducida por B. Bollobás [18], de modo que se verifica que

$$g_{\max}(\nu, n) = g(\nu, k) \text{ cuando } \nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)].$$

No sólo determinamos para todo  $n \geq 4$  y  $\nu \leq 3n - 3$  el valor exacto de las cinturas  $g_{\max}(\nu, n)$  y  $g(\nu, k)$ , sino que además construimos grafos con las características deseadas en los cuales se alcanza el valor de tales cinturas. Asimismo, y haciendo uso de la desigualdad (2), mejoramos ampliamente la cota asintótica de la cintura  $g(\nu, k)$  obtenida en [19].

Incluso, demostramos que si consideramos la familia  $EX_k(n)$  de grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y para los cuales la diferencia entre su tamaño y orden es igual a una constante prefijada  $k \geq 0$ , se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{g(G) : G \in EX_k(n)\} - (n + 1) = \infty.$$

Es evidente que todos los grafos pertenecientes a un mismo conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen igual exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . Al estudiar las propiedades y características de los distintos grafos extremales de

cada conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  probamos que no sólo la cintura sino que también los mayores valores del diámetro y de la valencia máxima dependen de  $n$  y  $\nu$  a través de su exceso, lo cual facilita la determinación del valor de estos dos últimos parámetros para casi todo  $\nu \leq 3n - 3$ .

En el *Capítulo 6*, seguimos con la línea de trabajo iniciada en [51] y [52], en la cual sus autores D.K. Garnick, Y.H.H. Kwong, F. Lazebnik y N.A. Nieuwejaar calculan el valor exacto de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  para  $\nu \leq 30$ . Concretamente, en esta memoria nos centramos en los casos  $n \in \{5, 6, 7, 11\}$ , determinando valores exactos y cotas tanto superiores como inferiores de la función extremal asociada  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

Las demostraciones de los resultados de este capítulo son constructivas de modo que, para cada  $n$  y cada uno de los órdenes  $\nu$  estudiados, es necesario encontrar al menos un grafo con el orden, tamaño y cintura deseados. En este proceso comprobamos que al eliminar vértices de las (3; 6), (4; 6), (5; 6), (3; 7) y (3; 8)-jaulas se obtienen grafos extremales. La manera de eliminar estos vértices no es arbitraria sino que observamos que existe un *método* óptimo que hace uso de las familias de grafos homeomorfos que hemos construido en el Capítulo 3 para determinar las cantidades  $\nu_k(n)$ . Para muchos de los órdenes  $\nu$ , para los cuales no hemos conseguido determinar el valor exacto de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , queremos señalar que las cotas inferiores aportadas se obtienen haciendo uso de este método, de ahí nuestro convencimiento de que realmente son valores exactos.

Hasta ahora la construcción de grafos con orden y cintura dados y con gran cantidad de aristas se había hecho mediante algoritmos [77, 83] que no relacionan entre sí los grafos obtenidos para órdenes diferentes. Para  $n$  dado, según hemos comentado, el valor de  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para cada  $\nu$ , está influenciado por su comportamiento en valores cercanos a  $\nu$ . En este capítulo presentamos un nuevo algoritmo que contempla esta idea y en general produce mejores resultados



que el diseñado en [77].

Finalmente, incluimos en el apartado *Bibliografía* una selección de los textos y artículos a los cuales hacemos referencia a lo largo de esta memoria. Queremos agradecer a sus autores el esfuerzo y trabajo realizado ya que en sus resultados y cuestiones hemos encontrado nuestra base de trabajo y fuente de inspiración.



# Contenido

<b>1 Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1 Notaciones . . . . .	1
1.2 Resultados previos del problema extremal en ciclos. . . . .	10
<b>2 Grafos con exceso constante.</b>	<b>21</b>
2.1 Introducción . . . . .	21
2.2 Grafos extremales como subdivisiones. . . . .	23
2.3 Máxima cintura de los grafos de orden y exceso dados. . . . .	39
2.4 Conclusiones y problemas abiertos. . . . .	56
<b>3 Función Extremal.</b>	<b>59</b>
3.1 Introducción . . . . .	60
3.2 Valores $\nu_k(n)$ para $k \in \{0, 1, 2\}$ . . . . .	61
3.3 Valores $\nu_k(n)$ para $k \geq 3$ . . . . .	64
3.4 Jaulas minimales como grafos extremales. . . . .	93

3.5	Comportamiento asintótico. . . . .	98
3.6	Problemas abiertos y conjeturas. . . . .	101
<b>4</b>	<b>Familias Extremales.</b>	<b>109</b>
4.1	Introducción . . . . .	109
4.2	Caracterización de los grafos extremales con orden $\nu \leq 3n - 3$ . . . . .	111
4.3	Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Propiedades.</b>	<b>151</b>
5.1	Introducción . . . . .	151
5.2	Acerca de la cintura de los grafos extremales . . . . .	156
5.3	Acerca del diámetro de los grafos extremales . . . . .	175
5.4	Acerca de la valencia máxima de los grafos extremales. . . . .	186
5.5	Problemas abiertos y conjeturas. . . . .	189
<b>6</b>	<b>Casos <math>n \in \{5, 6, 7, 11\}</math>.</b>	<b>191</b>
6.1	Introducción . . . . .	191
6.2	Cotas de $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . . . . .	193
6.3	Valores exactos de $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . . . . .	195
6.4	Relación entre los grafos extremales y las $(\mathbf{D}; \mathbf{g})$ -jaulas. . . . .	225
6.5	Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	230

# Capítulo 1

## Preliminares.

En este primer capítulo vamos a introducir las notaciones y conceptos necesarios para el desarrollo posterior de los resultados obtenidos en esta memoria. En primer lugar, incluimos los relativos a la Teoría de Grafos y en segundo lugar, los específicos de los Problemas Extremales en Grafos.

En este sentido, cualquiera de los manuales que tratan los principios de la Teoría de Grafos como *Graph Theory* de R. Diestel [31], *Graph Theory* de F. Harary [55], *Graphs and Digraphs* de G. Chartrand y L. Lesniak [28] o *Extremal Graph Theory* de B. Bollobás [17] son referencias adecuadas para toda la terminología y resultados básicos que usamos en esta memoria.

### 1.1 Notaciones

Comenzamos con un repaso de los conceptos elementales de la teoría de grafos de los cuales hacemos uso a lo largo de este trabajo. Al mismo tiempo, aprovechamos esta sección para fijar la notación que usamos posteriormente, la cual junto con los conceptos que incluimos pueden ampliarse consultando en [17, 31, 55, 28].

Un *grafo*  $G$  es un par  $(V, E)$ , donde  $E$  es un subconjunto de  $V \times V$ . Los elementos del conjunto  $V$  se denominan *vértices* del grafo y los de  $E$  *aristas* del grafo. Para evitar cualquier tipo de confusión denotamos por  $V(G)$  y  $E(G)$  al conjunto de vértices y aristas del grafo  $G$ , respectivamente.

Dentro del conjunto de grafos nos centramos en los *grafos no dirigidos* para los cuales una arista  $e = \{u, v\} \in E(G)$  de un grafo  $G$  es un par no ordenado de elementos de  $V(G)$ , y habitualmente se denota por  $e = uv$ . Si existe la arista  $e = uv$  en  $E(G)$ , decimos que los vértices  $u$  y  $v$  son *adyacentes* y en caso contrario, que son *disjuntos*. Un conjunto de vértices se dice *independiente* si dos a dos son disjuntos. Si un vértice no es adyacente a ningún otro del grafo, diremos que es un vértice *aislado*. Decimos que la arista  $uv \in E(G)$  une los vértices  $u$  y  $v$  y que la arista es *incidente* con cada uno de los vértices. Dos aristas son *adyacentes* si ambas son incidentes con algún vértice común.

Un *lazo* es una arista cuyos vértices incidentes son iguales, es decir, una arista de la forma  $uu$  que une un vértice consigo mismo. Un grafo que contiene al menos un lazo se denomina *pseudografo*.

Decimos que un grafo  $G$  contiene *aristas múltiples* cuando existen al menos dos vértices en  $V(G)$  unidos por más de una arista de  $E(G)$ . Un grafo sin lazos pero con aristas múltiples se denomina *multigrafo*.

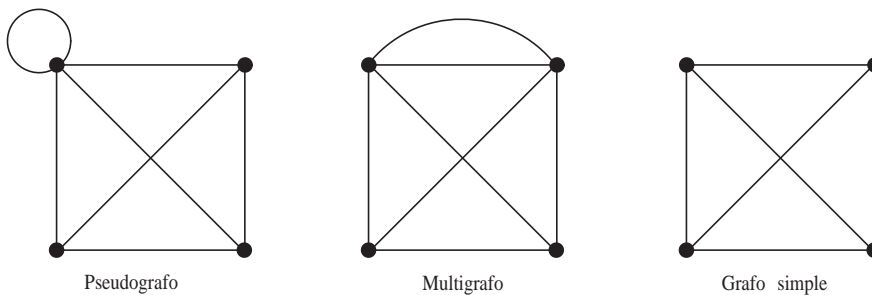


Figura 1.1: Ejemplos de un pseudografo, un multigrafo y un grafo simple.

Un grafo sin lazos ni aristas múltiples se denomina *grafo simple*. Estos son los grafos en los que centramos fundamentalmente nuestro estudio. (Véase la Figura 1.1).

Los grafos que nos interesan son *finitos*, es decir, con una cantidad finita de vértices y aristas. Se denota por  $|A|$  al número de elementos de un conjunto  $A$ , y nos referiremos a éste como el *cardinal* de  $A$ . En particular, se denomina *orden*, y se denota por  $\nu(G)$ , al cardinal del conjunto de vértices de  $G$  dado por  $|V(G)|$ . Análogamente, el cardinal del conjunto de aristas,  $|E(G)|$ , se denomina *tamaño* del grafo, y se denota por  $e(G)$ .

A continuación, describimos algunos conceptos relacionados con el número de aristas incidentes con un vértice concreto. Si  $u$  es un vértice de un grafo  $G$ , se representa por  $N_G(u)$  al conjunto de vértices de  $G$  que son adyacentes a  $u$ . Este conjunto se denomina *entorno* de  $u$ . El cardinal del entorno de un vértice  $u$  se denomina *valencia* o *grado* de  $u$ , y se denota por  $\delta_G(u)$  o simplemente  $\delta(u)$ . Un vértice con valencia 1 se denomina *hoja*. Por otra parte, se define la *valencia mínima* de un grafo  $G$  como  $\delta(G) = \min \{\delta_G(u) : u \in V(G)\}$  y su *valencia máxima* como el valor  $\Delta(G) = \max \{\delta_G(u) : u \in V(G)\}$ .

Para estudiar un comportamiento más global de un grafo  $G$  se considera la *valencia media* definida como

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{u \in V(G)} \delta(u)}{\nu(G)}.$$

Es evidente que las valencias mínima, media y máxima, están relacionadas por las desigualdades

$$\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \Delta(G).$$

Si un grafo es tal que todos sus vértices tienen valencia  $r$ , se dice que es *regular* o *r-regular*.

Uno de los resultados básicos de la Teoría de Grafos (véase [31]) relaciona el tamaño de un grafo  $G$  con las valencias de sus vértices mediante la igualdad

$$2 e(G) = \sum_{u \in V(G)} \delta(u) \quad (1.1)$$

de donde se deduce que

$$\bar{d}(G) = \frac{2 e(G)}{\nu(G)},$$

y se obtiene una buena cota de la valencia máxima dada por

$$\Delta(G) \geq \left\lceil \bar{d}(G) \right\rceil = \left\lceil \frac{2 e(G)}{\nu(G)} \right\rceil. \quad (1.2)$$

Es usual denotar por  $n_h(G)$  o  $n_h$  la cantidad de vértices de valencia  $h$  en un grafo dado  $G$ . De la ecuación (1.1) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_\Delta & = \nu(G) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + \Delta n_\Delta & = 2e(G) \end{cases} \quad (1.3)$$

y en particular, cuando el grafo no contiene vértices de valencia 1 se cumple que

$$n_3 + 2n_4 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta = 2(e(G) - \nu(G)). \quad (1.4)$$

Un conjunto de aristas de un grafo,  $\{u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{p-1}u_p\}$  tales que los vértices  $u_0, u_1, \dots, u_p$  son distintos, decimos que es un *camino* de *longitud*  $p$  que une los vértices  $u_0$  con  $u_p$ . Los vértices  $u_0, u_p$  se denominan *vértices finales*, y los vértices  $u_1, \dots, u_{p-1}$  *vértices internos* del camino. Usamos indistintamente la lista de aristas o la lista de vértices para representar un camino, es decir, el camino definido por las aristas  $\{u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{p-1}u_p\}$  es el mismo que el dado por el conjunto de vértices  $\{u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p\}$ . Un conjunto de caminos se dice *disjunto* si cada vértice común a dos caminos arbitrarios de él es un vértice final.

Cuando los vértices finales de un camino son coincidentes decimos que el camino es un *ciclo*. Su longitud coincide con la longitud del camino que lo define,



que es equivalente a su número de vértices y a su número de aristas. Un ciclo de longitud  $n$  se denota por  $C_n$  y los ciclos de longitud 3, 4, 5, ... se denominan triángulos, cuadriláteros, pentágonos, ... respectivamente. La longitud del ciclo más corto de un grafo  $G$  se denomina *cintura*, *cuello* o *girth* y se denota  $g(G)$  o simplemente  $g$ . Cuando un grafo no contiene ciclo alguno se dice que tiene cintura infinita. A lo largo de esta memoria va a jugar un papel fundamental este concepto.

Recordamos también que un grafo  $G$  es *conexo* cuando para cualquier par de vértices existe un camino en  $G$  que los une. Se define la *distancia* entre dos vértices  $u$  y  $v$  de un grafo conexo  $G$  como la longitud del camino más corto en  $G$  que une ambos vértices. Se denota por  $d_G(u, v)$  o por  $d(u, v)$  cuando no hay ambigüedad. El *diámetro* de un grafo  $G$  es la máxima distancia existente entre dos vértices cualesquiera de él y se denota por  $D(G)$ .

Es suficiente considerar las definiciones de cintura y de diámetro de un grafo para notar que existe una relación entre ambos conceptos y que viene dada por la desigualdad (véase [31])

$$D(G) \geq \left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor.$$

Al igual que hemos definido el entorno de un vértice  $u$  como el conjunto de vértices adyacentes a  $u$ , una vez introducida la distancia en un grafo se puede ampliar el concepto de entorno. En este sentido, recordamos que dados un entero  $i$ ,  $0 \leq i \leq D(G)$ , un grafo  $G$  y un vértice  $u$  de él, se denota por  $N_i(u)$  el conjunto de vértices de  $G$  situados a distancia  $i$  de  $u$ , es decir,

$$N_i(u) = \{v \in V(G) : d_G(u, v) = i\}.$$

Nótese que  $N_0(u) = \{u\}$  y que  $N_1(u) = N_G(u)$ .

Dentro del conjunto de grafos finitos y conexos queremos seleccionar algunos que por sus propiedades reciben un tratamiento especial.

Llamamos *árbol* a todo grafo conexo que no contiene ciclos. En todo grafo conexo  $G$  se verifica la relación

$$e(G) \geq \nu(G) - 1,$$

y esta desigualdad se convierte en igualdad si y sólo si  $G$  es un árbol.

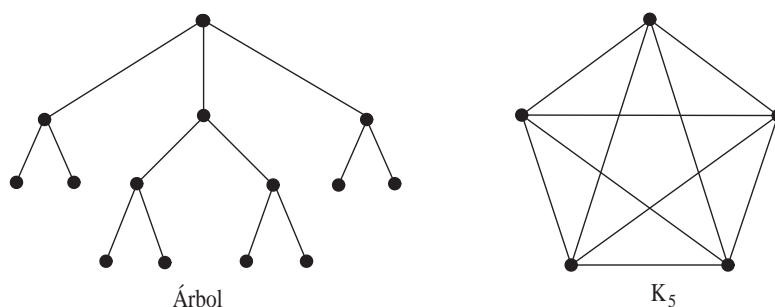


Figura 1.2: Ejemplos de un árbol y un grafo completo.

Un grafo se dice que es *completo* si es simple y contiene todas las aristas posibles uniendo sus vértices. El grafo completo de orden  $p$  se denota por  $K_p$ . Es evidente que su tamaño es  $e(K_p) = \binom{p}{2}$  y que su cintura es 3.

Dado un entero  $r \geq 2$ , un grafo  $G$  se dice que es  *$r$ -partito* si su conjunto de vértices puede descomponerse en  $r$  *clases disjuntas* tales que cada arista del grafo una dos vértices de diferentes clases. Los grafos 2-partitos se denominan habitualmente *bipartitos*. Aquellos grafos  $r$ -partitos que contienen todas las aristas posibles uniendo vértices de distinta clase se llaman *completos*, y se denotan por  $K_{n_1, \dots, n_r}$ , siendo  $n_i$  el número de vértices de cada clase (véase la Figura 1.2). Nótese que la cintura de los grafos bipartitos completos es 4, mientras que los grafos  $r$ -partitos completos, cuando  $r \geq 3$ , contienen ciclos de longitud 3.

Dentro del conjunto de grafos  $r$ -partitos existen unos muy particulares que se denominan *Grafos de Turán*. El grafo de Turán, denotado  $T_r(\nu)$ , es el

único grafo  $r$ -partito, con  $\nu$  vértices repartidos en sus  $r$  clases de la forma más homogénea posible. Por ejemplo, el grafo  $K_{2,2,2}$  de la Figura 1.3 es el grafo de Turán  $T_3(6)$ .

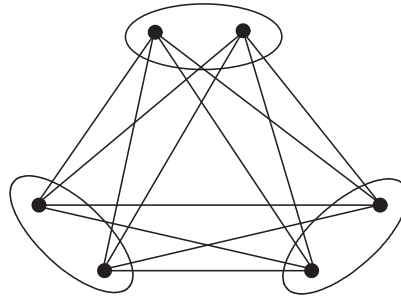


Figura 1.3: Ejemplo de un grafo 3-partito.

Dados dos grafos  $G$  y  $H$  se dice que  $H$  es un *subgrafo* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y si  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dado un subconjunto  $U$  de  $V(G)$ , se denomina *subgrafo inducido por un conjunto de vértices  $U$*  en  $G$ , y lo denotamos por  $G[U]$ , al subgrafo que tiene por conjunto de vértices  $U$  y cuyas aristas son todas las aristas de  $G$  que tienen ambos vértices en  $U$  (ver Figura 1.4).

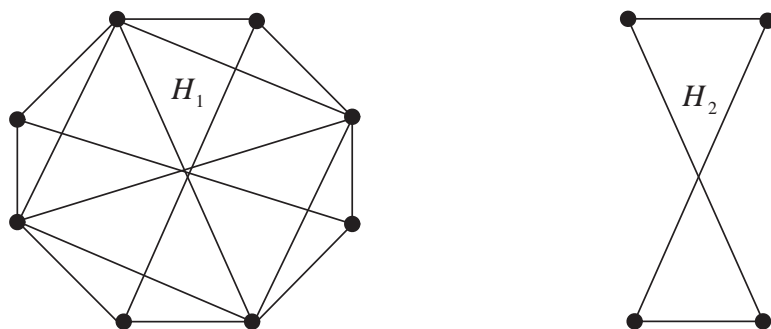


Figura 1.4:  $H_1$  es subgrafo del  $K_8$  y  $H_2$  es subgrafo inducido de  $H_1$ .

De manera similar, podemos definir el *subgrafo inducido por un conjunto de aristas*  $F$ , y se denota por  $G[F]$ , al subgrafo cuyos vértices son todos los incidentes con alguna de las aristas del conjunto  $F$ , y cuyas aristas son las del propio conjunto  $F$ .

Los subgrafos más sencillos de un grafo  $G$  son los obtenidos al eliminar un vértice o una arista de  $G$  de la manera siguiente. Si  $v \in V(G)$  y  $\nu(G) \geq 2$ , entonces  $G - v$  denota al subgrafo cuyo conjunto de vértices es  $V(G) - \{v\}$  y cuyas aristas son todas las de  $G$  no incidentes con el vértice  $v$ . Nótese que  $G - v$  es el subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto de vértices  $V(G) - \{v\}$ . Si  $e \in E(G)$ , entonces  $G - e$  es el subgrafo cuyos vértices coinciden con los de  $G$  pero cuyo conjunto de aristas es  $E(G) - \{e\}$ . La supresión de un conjunto de vértices o de un conjunto de aristas se define de manera análoga.

Nos gustaría recordar dos operaciones definidas sobre grafos. Se dice que se realiza una *subdivisión elemental* en un grafo  $G$  cuando se reemplaza una arista  $uv \in E(G)$  por otras dos  $uw$  y  $wv$ , siendo  $w$  un nuevo vértice que se añade al grafo  $G$ . Si un grafo  $H$  puede obtenerse de otro grafo  $G$  realizando una sucesión finita de subdivisiones elementales, entonces decimos que  $H$  es una *subdivisión* del grafo  $G$ . En general, si dos grafos  $H_1$  y  $H_2$  son subdivisiones de un mismo grafo se dice que son *homeomorfos* (ver Figura 1.5).

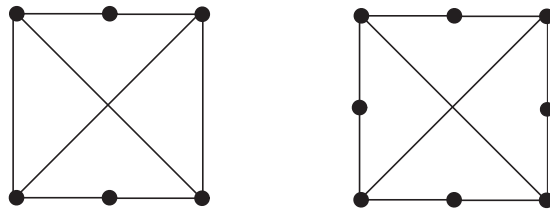


Figura 1.5: Grafos homeomorfos al grafo completo  $K_4$ .

Conviene resaltar que si el grafo  $H$  es una subdivisión de un grafo  $G$ , entonces es posible sustituir las aristas del grafo  $G$  por un conjunto de caminos

disjuntos en  $H$ . En este sentido,  $V(G) \subseteq V(H)$ , y a los vértices de  $G$  identificados en  $H$  se les denomina *vértices branch*. Por ejemplo, los vértices del grafo completo  $K_4$  son los vértices branch de los dos grafos mostrados en la Figura 1.5.

Una *contracción elemental* en un grafo simple  $G$  se realiza al identificar dos de sus vértices adyacentes  $u$  y  $v$ , es decir, al eliminar ambos vértices y al añadir uno nuevo  $w$  adyacente a todos los vértices a los cuales  $u$  y  $v$  eran adyacentes. Diremos que un grafo  $G$  es *contractible* a un grafo  $H$  cuando es posible obtener  $H$  mediante una sucesión finita de contracciones elementales en  $G$ . Nótese que cuando  $G$  no contiene al ciclo  $C_3$ , al realizar una contracción elemental en  $G$  el grafo resultante es un grafo simple y tiene un vértice y una arista menos que  $G$ .

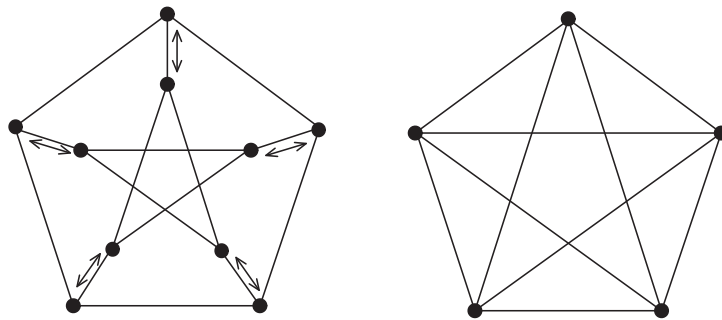


Figura 1.6: La jaula de Petersen es contractible al grafo completo  $K_5$ .

Estas dos operaciones serán de utilidad en esta memoria debido a que mediante subdivisiones elementales se puede aumentar la cintura de un grafo mientras que las contracciones elementales pueden reducirla.

Recordamos que un grafo  $G$  se dice que es conexo cuando existe algún camino en  $G$  uniendo dos vértices cualesquiera de  $V(G)$ . En caso contrario, se denomina *no conexo*. La *conectividad por vértices*  $\kappa(G)$  de un grafo conexo  $G$  es el mínimo número de vértices que hay que eliminar de  $V(G)$  para que el grafo resultante sea no conexo o el grafo trivial  $K_1$ .

De manera similar, dado un grafo conexo  $G$  con al menos dos vértices, la *conectividad por aristas*, denotada por  $\lambda(G)$ , es la mínima cantidad de aristas que hay que eliminar en  $E(G)$  para que el grafo resultante sea no conexo.

Un resultado bien conocido de la teoría de grafos (véase [85]) relaciona estas conectividades de un grafo  $G$  con su valencia mínima de modo que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Esta cota superior de las conectividades se puede alcanzar. En el caso de que  $\kappa(G) = \delta(G)$  decimos que  $G$  es *maximalmente conexo por vértices* y cuando  $\lambda(G) = \delta(G)$  *maximalmente conexo por aristas*.

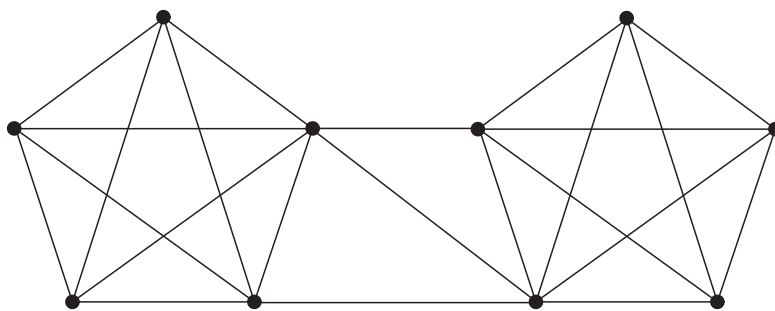


Figura 1.7: Grafo  $G$  con  $\kappa(G) = 2$  y  $\lambda(G) = 3$ .

## 1.2 Resultados previos del problema extremal en ciclos.

En esta sección mencionamos brevemente algunas definiciones y resultados relacionados con el tema objeto de esta memoria.

Nos planteamos el estudio de un problema que se enmarca en la denominada Teoría Extremal de Grafos. En general, en todo planteamiento de este tipo,

se trata de determinar el valor extremo de algún parámetro  $\mu$  (orden, tamaño, cintura,...) de una determinada familia de grafos  $\mathcal{H}$  que además cumple cierta propiedad  $\mathcal{P}$ .

Uno de los primeros problemas que se plantean, dentro del contexto que acabamos de describir, es el denominado *Problema de Turán*, en el que para cada orden  $\nu$  se determina el tamaño máximo de un grafo que no contiene al subgrafo completo  $K_p$ . Esta cuestión, planteada en 1941, fue completamente resuelta en [78] por el autor al que debe su nombre. La solución viene dada por el número de aristas del único grafo  $(p-1)$ -partito completo cuyos vértices están repartidos entre sus clases del modo más homogéneo posible. De hecho cada familia extremal se reduce únicamente al grafo de Turán  $T_{p-1}(\nu)$  que ya hemos definido en la sección anterior.

Este problema ha dado lugar a una lista de problemas extremales con la misma estructura, en los que se estudia el tamaño máximo de un grafo que no contiene un subgrafo o a una familia de subgrafos dados  $\mathcal{F}$ . Para cada orden  $\nu$ , la función extremal se denota por  $ex(\nu; \mathcal{F})$  y cada familia de grafos extremales por  $EX(\nu; \mathcal{F})$ .

Como caso particular del citado Problema de Turán se obtiene que el grafo de orden  $\nu$  con tamaño máximo y que no contiene triángulos es el grafo bipartito completo con ambas clases lo más iguales posibles, lo cual se expresa como

$$\begin{cases} ex(\nu; \{C_3\}) &= \lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor \lceil \frac{\nu}{2} \rceil = \lfloor \frac{\nu^2}{4} \rfloor; \\ EX(\nu; \{C_3\}) &= K_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor, \lceil \frac{\nu}{2} \rceil}. \end{cases} \quad (1.5)$$

En 1975 P. Erdős plantea en [36], una extensión del caso particular anterior al cuestionarse el valor de  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$ , máxima cantidad de aristas de un grafo

sin triángulos ni cuadriláteros y orden  $\nu$ , y conjetura que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4\}) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}.$$

En esta memoria nos planteamos una extensión de los dos casos anteriores. Concretamente, tratamos de determinar para enteros  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n+1$  el tamaño máximo que puede tener un grafo de orden  $\nu$  sin que se formen ciclos de longitud menor o igual que  $n$ , tamaño que denotamos por  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . De igual manera, forma parte de nuestro interés identificar los grafos extremales que forman el conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y estudiar algunas propiedades generales de ellos.

Uno de los primeros problemas estudiados en la Teoría Extremal de Grafos es la determinación del máximo orden de cualquier grafo  $G$  de máxima valencia  $\Delta$  y diámetro  $D$ . Contando la cantidad de vértices existente a distancias  $1, 2, \dots, D$  de cualquier vértice de  $G$  se obtiene que

$$\nu(G) \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}. \quad (1.6)$$

Todo grafo cuyo orden alcanza la parte derecha de la desigualdad (1.6) se conoce como *grafo de Moore*, ya que según se menciona en [56], E. F. Moore propuso dicho problema. Es inmediato verificar que los ciclos de longitud impar  $C_{2D+1}$  y los grafos completos  $K_{\Delta+1}$  proporcionan ejemplos de tal tipo de grafos para  $(\Delta = 2, D \geq 1)$  y  $(D = 1, \Delta \geq 1)$ , respectivamente.

A. J. Hoffman y R. R. Singleton inician en [56] el estudio de los grafos de Moore, y en este primer trabajo se centran en los grafos de diámetros 2 y 3, estudiando los autovalores y autovectores de su matriz de adyacencia. En el caso  $D = 2$  prueban que solamente existen grafos de Moore para  $\Delta = 2, 3, 7$  y posiblemente para  $\Delta = 57$ , y que tales grafos son únicos para los tres primeros valores mencionados de  $\Delta$ . Para  $D = 3$  confirman que el único grafo de Moore es el ciclo  $C_7$ .



En 1970 J. Bosák [22] prueba que no existen grafos de Moore con valencia máxima 3 y diámetro  $D$  para  $3 \leq D \leq 8$ . En 1971 H. Friedman [48] confirma que no existen grafos de Moore para los parámetros  $(\Delta, D)$  cuando  $\Delta \in \{3, 4, 5, 6, 8\}$  y  $3 < D \leq 300$ , excepto quizás para el par  $(\Delta = 5, D = 7)$ . También demuestra que no existen grafos de Moore para los parámetros  $(3, D)$  cuando  $\Delta \geq 3$  y  $2D + 1$  es primo. Finalmente E. Bannai y T. Ito [11] y R. M. Damerell [30] confirman que no existen grafos de Moore para  $\Delta \geq 3$  y  $D \geq 3$ .

De manera simultánea al problema planteado por E. F. Moore, para  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$  enteros F. Kártési [59] cuestiona determinar la existencia de grafos  $r$ -regulares con cintura  $g$ , y en tal caso obtener su mínimo orden. Previamente W. T. Tutte [79] había estudiado este problema para los grafos cúbicos.

La respuesta a tal existencia se proporciona en 1963 cuando P. Erdős y H. Sachs [39] prueban que para cada entero  $r \geq 3$  y  $g \geq 3$  existe algún grafo simple  $r$ -regular con cintura  $g$ . Tales grafos son denominados  $(r; g)$ -grafos.

Una familia particular de ellos son los que tienen mínima cantidad de vértices, y son denominados  $(r; g)$ -jaulas o  $(r; g)$ -cages. Este conjunto de grafos se ha estudiado de manera intensa. Su orden es denotado por  $\nu(r, g)$  y su determinación es todavía un problema abierto para la mayoría de los valores  $r \geq 3$  y  $g \geq 3$ .

H. Fu, K. Huang y C. Rodger en [49] prueban que si  $3 \leq r \leq g_1 < g_2$ , entonces  $\nu(r, g_1) < \nu(r, g_2)$ , es decir, aseguran el crecimiento estricto de la función  $\nu(r, \cdot)$  para  $r \geq 3$ .

Dado un  $(r; g)$ -grafo, contando el número de vértices a distancias  $1, 2, \dots$  de un vértice o de una arista de él, una primera acotación de su orden puede

expresarse mediante la desigualdad (ver [14], página 180)

$$\nu(r, g) \geq \begin{cases} 1 + r \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Cuando la cintura  $g$  es impar, A.J. Hoffman y R.R. Singleton en [56], E. Bannai e T. Ito en [11] y R.M. Damerell en [30] prueban que la cota anterior solamente se alcanza para los grafos completos  $K_{r+1}$  cuando  $(r \geq 2, g = 3)$ , los ciclos  $C_g$  para  $(r = 2, g \geq 3)$  y para las jaulas de Petersen y de Hoffman-Singleton correspondientes a  $g = 5$  y  $r = 3, 7$  y posiblemente para  $r = 57$ . Estos grafos coinciden con los grafos de Moore, y ésta es la razón por la cual a la parte derecha de la desigualdad (1.7) es usual denominarla *cota de Moore* y denotarla por  $\nu_0(r, g)$  (véase [14], pág 180). Originalmente este nombre denotaba la cota (1.6).

Los grafos regulares que alcanzan la cota (1.7) y tienen cintura  $g$  par se denominan *polígonos generalizados*. Cuando  $g = 4$  los grafos bipartitos completos con  $2r$  vértices constituyen una familia de ellos. En [42] W. Feit y G. Higman prueban que para  $r \geq 3$  y  $g \geq 6$  solamente existen polígonos generalizados cuando su cintura  $g \in \{6, 8, 12\}$ , (ver también [14]). En tal caso, se sabe de su existencia cuando  $r - 1$  es potencia de un número primo (véase [64] y [86] cuando  $g = 6$ , y [12], [54], [82] para  $g = 8, 12$ ). Para cualquier otro valor de  $r$  la construcción de polígonos generalizados es todavía un problema abierto.

Con el fin de utilizar un nombre común independientemente de la paridad de la cintura, las  $(r; g)$ -jaulas cuyo orden es

$$\nu_0(r, g) = \begin{cases} 1 + r \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (1.8)$$

se suelen denominar *jaulas minimales*. Ellas desempeñan un papel importante en este trabajo por su relación con los grafos extremales y en particular recurriremos con cierta frecuencia a tres de ellas, las jaulas de Petersen, Heawood y Tutte-Coxeter, que incluimos en la Figura 1.8.

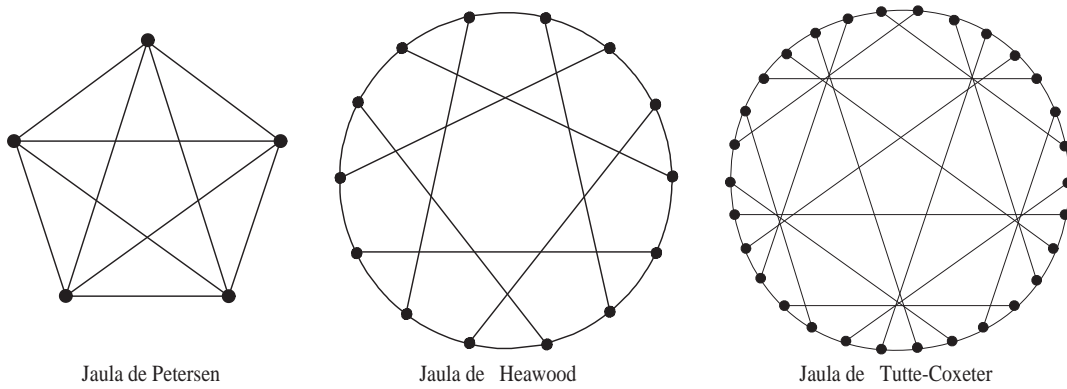


Figura 1.8: Jaulas de Petersen, Heawood y Tutte-Coxeter.

Debido a la no existencia de jaulas minimales, así como a la dificultad de la determinación del orden de las  $(r; g)$ -jaulas, diversos autores se han interesado en acotar su orden. Por ejemplo, R.D. Dutton y R.C. Brigham prueban en [34] que

$$\nu(r, g) \geq 4 \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor^{\frac{g-2}{2}}.$$

Análogamente, F. Lazebnik, V.A. Ustimenko y A.J. Woldar demuestran en [61] que

$$\nu(r, g) \leq 2kq^{\frac{3g}{4}-a},$$

siendo  $a \in \{4, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}\}$  para  $g \in \{0, 1, 2, 3\}$  mód 4 respectivamente y  $q$  la menor potencia de primo impar verificando que  $r \leq q$ .

Particularmente para las  $(r; 5)$ -jaulas, T. Parsons afirma en [74] que para todo  $r \geq 5$  impar y tal que  $2r - 1$  es potencia de primo, existe un grafo  $r$  regular con cintura 5 y orden  $\nu = 2r^2 - 3r + 1$ . Además, M. O'Keefe y P.K. Wong [73]

prueban que para  $r, q$  enteros tales que  $q \geq 7$ ,  $3 \leq r \leq q$  y  $q - 2$  potencia de primo, se verifica que  $\nu(r, g) \leq 2(r - 2)(q - 2)$ .

Unos de los últimos trabajos conocidos en este sentido es el artículo [53], publicado en el año 2008, y en el cual A. Gács y T. Héger proporcionan cotas superiores de  $\nu(r, g)$  cuando  $g \in \{6, 8, 12\}$ .

En numerosos trabajos se han construido  $(r; g)$ -jaulas o bien se ha tratado de construir grafos tales que la diferencia  $\nu(r, g) - \nu_0(r, g)$  sea pequeña, entre ellos citamos [2, 4, 5, 11, 13, 23, 41, 70, 71, 72, 86, 87]. Además, N. Biggs elabora en [15] un informe muy completo sobre los distintos métodos para construir grafos cúbicos, y G. Royle [75] mantiene una página web en la que se encuentra el estado actual del orden de distintos  $(r; g)$ -grafos.

Una extensión de las  $(r; g)$ -jaulas son las denominadas  $(D; g)$ -jaulas o grafos con mínimo orden, cintura  $g$  y conjunto de valencias dado  $D$ . Su existencia se garantiza en [27] y su orden se denota por  $\nu(D, g)$ . La determinación de esta cantidad es en general un problema complicado, aunque no obstante en [33] se obtiene una acotación inferior del orden de cualquier  $(D; g)$ -jaula en función de sus valencias máxima y mínima mediante la desigualdad

$$\nu(D, g) \geq \nu_0(D, g) = \begin{cases} 1 + \Delta \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (\delta - 1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 1 + \Delta \sum_{i=1}^{\frac{g-4}{2}} (\delta - 1)^i + (\delta - 1)^{\frac{g-2}{2}} & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Por analogía a las  $(r; g)$ -jaulas, a las  $(D; g)$ -jaulas cuyo orden es  $\nu_0(D, g)$  se les denomina  $(D; g)$ -jaulas minimales. Cuando el conjunto  $D$  consta de dos elementos, es decir,  $D = \{r, m\}$ , siendo  $2 \leq r < m$ , a estos grafos se les denomina de manera más específica jaulas bi-regulares. En 1981 se prueba que alguna de ellas son minimales, como por ejemplo, en los casos  $r = 2$  o  $g = 4$  [27], o cuando  $r = 3$  y  $g \in \{5, 7, 9\}$  [33].

Siguiendo con el estudio de las jaulas bi-regulares, en el año 2003 se aborda en [88] el caso  $g = 6$  y sus autores conjeturan que

$$\nu(\{r, m\}, 6) = 2(rm - m + 1),$$

pues comprueban que tal igualdad se alcanza cuando  $2 \leq r \leq 5$  o cuando  $m - 1$  es potencia de un número primo. Recientemente en los artículos [6, 7] se ha profundizado en los casos correspondientes a cintura  $g \in \{5, 6, 7, 8, 11\}$ , avalando la conjetura anterior los resultados obtenidos cuando  $g = 6$ .

Independientemente del estudio de las jaulas, en el año 1978, B. Bollobás plantea en [17] (p.163, problema 10), la extensión de la desigualdad (1.7) a grafos no regulares. La respuesta no llega hasta el año 2002, cuando N. Alon, S. Hoory y L. Linial demuestran que

**Teorema 1.2.1** [3] *Sea  $G$  un grafo con valencia media  $\bar{d} > 2$  y cintura  $g \geq 3$ . Entonces*

$$\nu(G) \geq \nu_0(\bar{d}, g) = \begin{cases} 1 + \bar{d} \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

Como en [63] se prueba que en cualquier familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es posible encontrar al menos un grafo con cintura  $n+1$ , tanto la desigualdad (1.9) como el Teorema 1.2.1 pueden adaptarse al contexto de los grafos extremales. Por lo tanto, podemos asegurar que todo grafo  $G$  con cintura al menos  $n+1$ , valencia máxima  $\Delta$  y mínima  $\delta$  verifica que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 1 + \Delta \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} (\delta - 1)^i & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \Delta \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} (\delta - 1)^i + (\delta - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.10)$$

y que para todo  $n \geq 4$ ,  $\nu \geq n + 1$  y  $\bar{d} = \frac{2 \, ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu}$  se cumple que

$$\nu \geq \nu_0(\bar{d}, n + 1) = \begin{cases} 1 + \bar{d} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.11)$$

De este resultado se obtiene una cota superior del tamaño de los grafos extremales en función de su orden dada por

$$\nu \geq \nu_0\left(\frac{2 \, ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu}, n + 1\right). \quad (1.12)$$

En particular, señalamos que cuando  $n = 3$  la cota (1.12) es óptima pues de ella se deduce que  $ex(\nu; \{C_3\}) \leq \left\lfloor \frac{\nu^2}{4} \right\rfloor$  que, según observamos en (1.5), se trata en realidad de una igualdad. La correspondiente a  $n = 4$  fue previamente obtenida en el año 1993, en [51], y viene dada por

$$ex(\nu; \{C_3, C_4\}) \leq \frac{\nu\sqrt{\nu-1}}{2},$$

y la asociada a  $n = 5$ , según aparece en [1], se expresa como

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\}) \leq \frac{\nu}{4} \left(1 + \sqrt{2\nu - 3}\right).$$

Debido al comportamiento exponencial en  $n$  de la función  $\nu_0(d, n + 1)$ , no es posible obtener de manera explícita la cota superior de  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  asociada a la desigualdad (1.12) para  $n \geq 6$ . No obstante, ella representa la mejor acotación superior conocida hasta este momento de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  (véase [1]).

Previamente, y considerando (véase [21] y la página 158 del libro de B. Bollobás [17]) que todo grafo con tamaño  $e > 90k\nu^{1+\frac{1}{k}}$  contiene un ciclo de longitud par  $2k$ , se obtiene la siguiente cota superior de la función extremal

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2k}\}) \leq 90k\nu^{1+\frac{1}{k}}.$$

Cuando  $n$  es impar en el año 1982, P. Erdős y M. Simonovits en [40] probaron que para todo  $k \geq 1$  entero se verifica que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2k}, C_{2k+1}\}) \leq \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1+\frac{1}{k}} + 2^k \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Pero, un resultado análogo se deduce directamente de la cota (1.11) pues considerando exclusivamente el término de mayor exponente en cada uno de los sumatorios se obtiene que todo grafo  $G$  perteneciente a la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con tamaño  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y valencia media

$$\bar{d} = \frac{2ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu}$$

verifica que

$$\nu \geq \begin{cases} (\bar{d} - 1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2(\bar{d} - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

lo cual equivale a

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(\nu^{1+\frac{2}{n}} + \nu) & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1+\frac{2}{n-1}} + \frac{\nu}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La importancia de estas cotas radica en que proporcionan un resultado de la función extremal desde el punto de vista asintótico, dado por

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{1+\frac{1}{\lfloor n/2 \rfloor}}} \leq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ \frac{1}{2^{1+\frac{2}{n-1}}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Para encontrar cotas inferiores, debemos remitirnos en primer lugar a un resultado probado implícitamente por P. Erdős [76] que expresa que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq c_n \nu^{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Posteriormente en 1995 F. Lazebnik, V.A. Ustimenko y A.J. Woldar [62] mejoran esta cota inferior construyendo una familia de grafos que muestra que para una sucesión infinita de órdenes  $\nu$  se cumple

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{2s+1}\}) \geq d_s \nu^{1 + \frac{2}{3s-3+\epsilon}},$$

siendo  $\epsilon = 0$  cuando  $s \geq 3$  es impar y  $\epsilon = 1$  cuando  $s \geq 2$  es par. Creemos que hasta este momento ésta es la mejor cota asintótica inferior de la máxima cantidad de aristas que poseen los grafos de orden  $\nu$  y cintura  $g \geq 5$ ,  $g \notin \{11, 12\}$ .

En particular, cuando  $n = 4$  mediante la desigualdad (1.13) y la construcción de una familia de grafos libres de triángulos y cuadriláteros, es bien conocido (véase [51]) que

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4\})}{\nu^{3/2}} \leq \frac{1}{2}.$$



# Capítulo 2

## Grafos con exceso constante.

Dentro de los problemas extremales de grafos nos centramos en este trabajo concretamente en la determinación de la mayor cantidad de aristas que puede contener un grafo libre de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  para cada orden  $\nu \geq n + 1$  prefijado. También es nuestro interés obtener características generales de los grafos extremales y la determinación de éstos.

Para iniciar el estudio consideramos una familia particular de grafos: los que contienen una cantidad prefijada de aristas más que de vértices. Para este conjunto de grafos y dependiendo de su orden B. Bollobás ha planteado el estudio de la máxima cintura. Comprobamos que esta cuestión está relacionada con el estudio del problema extremal que nos interesa.

### 2.1 Introducción

En este capítulo nos centramos en los grafos tales que la diferencia entre su tamaño y orden se mantiene constante. Estudiamos propiedades generales de ellos, y en particular probamos que infinitos grafos extremales libres de ciclos

$\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  de dicha familia se obtienen subdividiendo las aristas de un grafo o multigrafo hasta que se evitan los ciclos prohibidos y la cintura se hace tan grande como se desea.

Igual que en [19], para cualquier grafo, multigrafo o pseudografo  $G$  consideramos el *exceso* o diferencia entre su tamaño y su orden, es decir,  $e(G) - \nu(G)$ . Para cada  $n \geq 4$ , el exceso restringido a los grafos extremales da pie a considerar la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  que tiene una ventaja frente a la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , ya que mientras que ésta es estrictamente creciente en  $\nu$ , la otra crece pero no necesariamente de forma estricta, lo que nos lleva a definir la cantidad  $\nu_k(n)$  como el orden mínimo que debe tener cualquier grafo con exceso  $k$  para poder alcanzar cintura al menos  $n + 1$ .

La importancia de estos números radica en el hecho de que para órdenes  $\nu$ , comprendidos entre dos valores consecutivos  $\nu_k(n)$  y  $\nu_{k+1}(n)$ , el exceso de grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  se mantiene constante, lo que determina la función extremal mediante la igualdad  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k$ .

Esta cantidad  $\nu_k(n)$  probamos que está relacionada con otra propuesta por B. Bollobás en [18], y que estudia el valor de la máxima cintura de los grafos de orden  $\nu$  y exceso  $k$ , y que su autor denota por  $g(\nu, k)$ . En el citado trabajo su autor determina dicha cintura para  $k \in \{0, 1, 2\}$  y la acota superiormente cuando  $k \in \{3, 4, 5\}$ .

Debido a la dificultad de la determinación exacta de la cintura  $g(\nu, k)$ , posteriormente B. Bollobás y E. Szemerédi en [19] proporcionan una cota superior de ella, cota que mejoramos ampliamente. Asimismo, determinamos el valor de  $g(\nu, k)$  cuando  $k \in \{3, 4, 5\}$ , comprobando que la cota proporcionada por B. Bollobás en [18] era óptima para algunos valores de  $\nu$ .

## 2.2 Grafos extremales como subdivisiones.

En esta sección probamos que existen infinitos grafos extremales parecidos entre sí, pues todos ellos se obtienen subdividiendo las aristas de uno de ellos hasta que la cintura se hace tan grande como se requiera.

Como hemos comentado, nuestro objetivo es determinar la máxima cantidad de aristas que puede contener cualquier grafo simple de orden prefijado y cintura inferiormente acotada. Para lograrlo empezamos asociando a cada grafo simple otro grafo, multigrafo o pseudografo de la manera siguiente.

**Definición 2.2.1** Sea  $G$  un grafo conexo que contiene más de un ciclo. Denotamos por  $\tilde{G}$  el grafo, multigrafo o pseudografo obtenido a partir de  $G$  al realizar las siguientes operaciones.

- 1) Se considera el grafo  $G'$  resultante al eliminar de  $V(G)$  todos sus vértices de valencias 1 y 2.
- 2) Se reemplazan todos los caminos  $P$  de  $G'$  de máxima longitud y cuyos vértices internos tienen valencia 2 en  $G'$  por aristas que unen los vértices finales de  $P$ .

Decimos que  $\tilde{G}$  es el *esqueleto* del grafo  $G$ .

Nótese que cuando el camino  $P$  a reemplazar es un ciclo, la nueva arista de  $\tilde{G}$  es un lazo. (Véase la Figura 2.1). Además, obsérvese que la definición de esqueleto  $\tilde{G}$  de un grafo conexo  $G$  carece de sentido cuando  $G$  es un árbol o  $G$  contiene un único ciclo, y que cualquier otro caso el esqueleto  $\tilde{G}$  de un grafo conexo  $G$  es único.

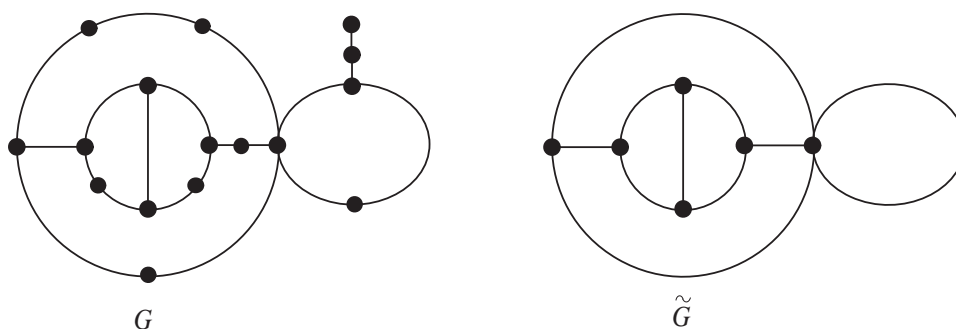


Figura 2.1: Ejemplo de un grafo  $G$  y de su esqueleto  $\tilde{G}$ .

Lógicamente cuando la valencia mínima de  $G$  es al menos 3 coinciden  $G$  y su esqueleto  $\tilde{G}$ . Cuando  $G$  no tiene hojas ambos grafos tienen la misma valencia máxima e incluso para cada  $i \in \{3, \dots, \Delta(G)\}$  se verifica que  $n_i(G) = n_i(\tilde{G})$ , es decir, en tal caso los grafos  $G$  y  $\tilde{G}$  tienen la misma cantidad de vértices de valencia  $i \geq 3$ . Ambos comparten otra característica común cuya definición recordamos.

Siguiendo [19], decimos que un pseudografo, multigrafo o grafo  $G$  tiene *exceso*  $k$  cuando posee  $k$  aristas o lazos más que vértices, es decir, cuando

$$e(G) - \nu(G) = k.$$

Veamos que un grafo y su esqueleto tienen el mismo exceso.

**Lema 2.2.2** Sean  $k \geq 1$  y  $G$  un grafo conexo con exceso  $k$ . Entonces  $\tilde{G}$  tiene exceso  $k$ .

*Demostración:* Como al subdividir una arista o al añadir un vértice de valencia 1 a un grafo dado queda invariable la diferencia entre su tamaño y su orden, los excesos de  $G$  y de  $\tilde{G}$  son iguales.

En este capítulo nos centramos exclusivamente en los grafos con exceso constante. Entre ellos, seleccionamos los conjuntos siguientes:

**Definición 2.2.3** Sea  $k \geq 1$  entero. Consideramos  $\mathcal{E}_k$  como el conjunto de grafos, multigrafos o pseudografos  $G$  tales que  $e(G) - \nu(G) = k$  y  $\delta(G) \geq 3$ .

Nótese que  $\mathcal{E}_k$  está formado por los esqueletos de todos los grafos con exceso  $k$ . Para cualquier  $k \geq 1$  este conjunto  $\mathcal{E}_k$  es no vacío, pues el multigrafo formado por 2 vértices unidos por  $k + 2$  aristas pertenece a él. (Véase la Figura 2.2).

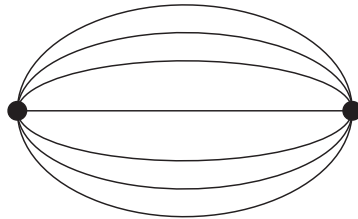


Figura 2.2: Multigrafo del conjunto  $\mathcal{E}_5$ .

**Definición 2.2.4** Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros. Por  $G_k(n)$  denotamos el conjunto de grafos simples  $G$  con exceso  $k$  tales que  $g(G) > n$ .

Lógicamente para todo  $k \geq 1$  los conjuntos  $\mathcal{E}_k$  y  $G_k(n)$  están relacionados entre sí. Por un lado, el esqueleto de cualquier grafo de exceso  $k$  pertenece al conjunto  $\mathcal{E}_k$ , y por otro, subdividiendo las aristas de cualquier grafo del conjunto  $\mathcal{E}_k$  la cintura puede hacerse tan grande como se desee sin variar el exceso, obteniendo de esta manera grafos del conjunto  $G_k(n)$  para cualquier valor de  $n \geq 4$ .

Mediante este proceso construimos grafos del conjunto  $G_k(n)$ , que nos permiten afirmar que es no vacío y lo ilustramos en la Figura 2.3 adjunta, donde cada arista según su color está subdividida la cantidad de veces indicada.

**Lema 2.2.5** El conjunto  $G_k(n) \neq \emptyset$  para todo  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros.

*Demostración:* Para  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros, consideramos el grafo siguiente:

Si  $n$  es par, sea  $G$  el grafo formado por dos vértices de valencia  $k+2$  unidos por un camino con  $\frac{n}{2} - 1$  vértices de valencia 2 y  $k+1$  caminos subdivididos  $\frac{n}{2}$  veces. Es inmediato verificar que

$$\nu(G) = 1 + (k+2) \frac{n}{2}.$$

Si  $n$  es impar, consideramos el grafo  $G$  formado por dos vértices de valencia  $k+2$  unidos por  $k+2$  caminos, cada uno con  $\frac{n-1}{2}$  vértices de valencia 2. Análogamente,

$$\nu(G) = 2 + (k+2) \frac{n-1}{2}.$$

El grafo definido  $G$  pertenece a  $G_k(n)$  ya que su cintura es  $n+1$  y verifica

$$e(G) = \frac{2(\nu(G) - 2) + (k+2)2}{2} = \nu(G) + k.$$

⊗

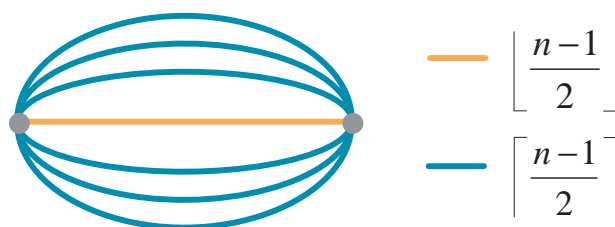


Figura 2.3: Grafo del conjunto  $G_5(n)$ .

Tiene entonces sentido considerar el mínimo orden que debe tener todo grafo con exceso fijo y cintura inferiormente acotada, cantidad que cobrará suma importancia en esta memoria, debido a que su conocimiento determina el valor de la función extremal.

**Definición 2.2.6** Sea  $k \geq 0$  un entero. Para cada  $n \geq 2$  definimos

$$\nu_k(n) = \min\{\nu(G) : G \in G_k(n)\}.$$

Lógicamente, para cada orden  $\nu$  los grafos completos son los grafos simples con mayor cantidad de aristas y según se prueba en [78] los grafos bipartitos completos  $K_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor, \lceil \frac{\nu}{2} \rceil}$  son los grafos libres de triángulos con tamaño máximo. De ello se deduce que para todo  $k \geq 0$ , las dos primeras cantidades  $\nu_k(2)$  y  $\nu_k(3)$  sean fáciles de determinar.

**Lema 2.2.7** Sea  $k \geq 0$  entero.

$$i) \nu_k(2) = \left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2} \right\rceil$$

$$ii) \nu_k(3) = \left\lceil 2 + \sqrt{4 + 4k} \right\rceil$$

*Demostración:* Consideramos  $k \geq 0$  entero.

i) Para obtener el valor de  $\nu_k(2)$  debemos considerar los grafos completos, ya que éstos son los grafos simples que alcanzan el máximo exceso con la mínima cantidad de vértices. Sabemos que cualquier grafo completo de orden  $\nu \geq 3$  tiene cintura 3 y exceso  $\binom{\nu}{2} - \nu$ , y por lo tanto, para que un grafo tenga exceso  $k$  es necesario que su orden  $\nu$  verifique la desigualdad

$$\binom{\nu}{2} - \nu \geq k,$$

la cual equivale a que

$$\nu \geq \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2}.$$

En consecuencia, se tiene que

$$\nu_k(2) = \min\{\nu(G) : g(G) \geq 3, e(G) - \nu(G) = k\} = \left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2} \right\rceil.$$

Hacemos notar que dos grafos completos con órdenes consecutivos tienen excesos no consecutivos, por lo cual para muchos valores de  $k$  el grafo completo con orden  $\left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2} \right\rceil$  tiene exceso estrictamente mayor que  $k$ . No obstante, eliminando aristas de éste se obtiene un grafo con exceso exactamente  $k$ .

- ii) Para la determinación de la cantidad  $\nu_k(3)$  debemos considerar los grafos bipartitos completos con ambas clases lo más iguales posibles, ya que éstos son los grafos con cintura 4 que alcanzan el máximo exceso con la mínima cantidad de vértices, como se deduce de la igualdad obtenida por P. Turán en [78] y dada por

$$EX(\nu; \{C_3\}) = K_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor, \lceil \frac{\nu}{2} \rceil}.$$

Por lo tanto, para que un grafo tenga exceso  $k$  y cintura 4 es necesario que su orden  $\nu$  verifique la desigualdad

$$\left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil - \nu \geq k$$

la cual equivale a

$$\nu \geq \left\lceil 2 + \sqrt{4 + 4k} \right\rceil.$$

En consecuencia se cumple que

$$\nu_k(3) = \min \left\{ \nu(G) : g(G) \geq 4, e(G) - \nu(G) = k \right\} = \left\lceil 2 + \sqrt{4 + 4k} \right\rceil.$$

Al igual que en el apartado anterior, hacemos notar que para muchos valores de  $k$  el grafo bipartito completo de orden  $\left\lceil 2 + \sqrt{4 + 4k} \right\rceil$  con ambas clases lo más iguales posible tiene exceso estrictamente mayor que  $k$ . Eliminando aristas de éste se obtienen grafos con exceso exactamente  $k$  y cintura al menos 4.

⊗



Como la determinación de la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo sin triángulos en función de su orden es un problema incluido en el estudio sobre grafos extremales realizado por P. Turán en [78] y que nos ha permitido el cálculo de  $\nu_k(3)$ , podemos suponer en la mayor parte de esta memoria que  $n \geq 4$ .

Veremos que el conocimiento del valor exacto de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  así como las propiedades de los grafos extremales están ligadas al conocimiento de las cantidades  $\nu_k(n)$ . Para  $n \geq 4$  su determinación es un problema complicado, pero los grafos descritos en la demostración del Lema 2.2.5 proporcionan una cota superior de ellas. Somos conscientes de que dicha cota no es muy precisa, aunque se alcanza para  $k = 0$  y  $k = 1$  como veremos más adelante.

**Lema 2.2.8** *Dados  $n \geq 4$  y  $k \geq 0$  enteros se cumple que*

$$\nu_k(n) \leq a + (k + 2) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 1 & \text{si } n \text{ es par;} \\ a = 2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Los grafos del conjunto  $G_k(n)$  con orden mínimo satisfacen ciertas propiedades que estudiamos a continuación.

**Proposición 2.2.9** *Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros. Todo grafo  $G$  del conjunto  $G_k(n)$  con orden  $\nu(G) = \nu_k(n)$  verifica:*

- i)  $\delta(G) \geq 2$ ;
- ii)  $g(G) = n + 1$ ;
- iii) *Toda arista  $e \in E(G)$  pertenece a algún ciclo de  $G$  con longitud  $n + 1$ .*

*Demostración:* Sea  $G$  cualquier grafo del conjunto  $G_k(n)$  con  $\nu_k(n)$  vértices.

- i)* Si suponemos que  $G$  contiene un vértice de valencia uno, entonces el grafo  $G'$  obtenido al eliminar de  $G$  cualquiera de sus hojas, pertenece también a  $G_k(n)$  y tiene estrictamente menos de  $\nu_k(n)$  vértices, lo cual representa una contradicción. Podemos asegurar entonces que todos los vértices de  $G$  están contenidos en alguno de los ciclos de dicho grafo .
- ii)* Asumimos que  $g(G) \geq n + 2$ . Como  $n \geq 4$ , al contraer una arista de  $G$  obtenemos un grafo  $G'$  con un vértice y una arista menos que  $G$ . Como además  $g(G') \geq g(G) - 1 \geq n + 1$  el grafo  $G'$  pertenece también al conjunto  $G_k(n)$ , lo cual implica que  $\nu(G') \geq \nu_k(n)$ , contradiciendo que el orden de  $G'$  es  $\nu_k(n) - 1$ .
- iii)* De manera similar al apartado anterior, si suponemos que existe una arista en  $E(G)$  contenida solamente en ciclos con longitud al menos  $n + 2$ , al contraerla obtenemos un nuevo grafo del conjunto  $G_k(n)$  con menos de  $\nu_k(n)$  vértices, lo cual es una contradicción.

⊗

Estos valores  $\nu_k(n)$  son crecientes en  $k$  y estrictamente crecientes en  $n$ . Además para cada  $n$  la diferencia entre dos valores consecutivos  $\nu_{k+1}(n)$  y  $\nu_k(n)$  está acotada, lo que posteriormente se traduce en la existencia de a lo sumo  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  órdenes  $\nu$  para los cuales los grafos extremales tienen el mismo exceso.

**Lema 2.2.10** Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros. Se cumple que:

- i)*  $\nu_k(n) < \nu_k(n + 1)$ ;
- ii)*  $\nu_k(n) \leq \nu_{k+1}(n)$ ;
- iii)*  $\nu_{k+1}(n) \leq \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

*Demostración:* Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros dados.

- i) Como  $G_k(n+1) \subset G_k(n)$ , se cumple que  $\nu_k(n) \leq \nu_k(n+1)$ . Pero esta desigualdad es estricta, ya que la igualdad  $\nu_k(n) = \nu_k(n+1)$ , para algún valor de  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$ , implica la existencia en la familia  $G_k(n)$  de al menos un grafo de orden  $\nu_k(n)$  con cintura al menos  $n+2$ , lo cual contradice el segundo apartado de la Proposición 2.2.9.
- ii) Los conjuntos  $G_k(n)$  y  $G_{k+1}(n)$  son disjuntos, pero al eliminar una arista arbitraria de cualquier grafo de  $G_{k+1}(n)$  se obtiene un nuevo grafo de  $G_k(n)$  con el mismo orden, lo que se puede expresar mediante la desigualdad  $\nu_k(n) \leq \nu_{k+1}(n)$ .
- iii) Sea  $G$  cualquier grafo de  $G_k(n)$  con orden  $\nu_k(n)$ . Como  $g(G) > n$ , existen vértices  $u, v$  en  $V(G)$  tales que  $d_G(u, v) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . El grafo  $G'$ , obtenido al añadir a  $G$  un camino de longitud  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  uniendo los vértices  $u$  y  $v$ , pertenece a  $G_{k+1}(n)$ , y consecuentemente se verifica que

$$\nu_{k+1}(n) \leq \nu(G') = \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

⊗

Respecto al segundo apartado del Lema 2.2.10 observamos que la igualdad puede alcanzarse en múltiples ocasiones.

**Observación 2.2.11** *Existen valores enteros  $n \geq 4$  y  $k \geq 0$  para los cuales se verifica que  $\nu_k(n) = \nu_{k+1}(n)$ . Citamos un ejemplo.*

*En [51] se prueba que  $ex(9; \{C_3, C_4\}) = 12$  y que  $ex(10; \{C_3, C_4\}) = 15$ . Estas dos igualdades determinan que  $\nu_5(4) = 10$ . Además, la primera de ellas expresa que cualquier grafo de orden 9 y cintura 5 tiene a lo sumo tres aristas*

más que vértices. Por lo tanto, hacen falta más de 9 vértices para poder construir un grafo con cintura 5 y exceso 4, lo que se expresa como  $\nu_4(4) > 9$ . Por otro lado, como realmente es posible construir con 10 vértices algún grafo con exceso 4 y cintura 5, por ejemplo el grafo obtenido al eliminar una arista de la jaula de Petersen, se cumple que

$$\nu_4(4) = \nu_5(4) = 10.$$

Acabamos de poner de manifiesto que para  $n$  prefijada, la función  $\nu_k(n)$  puede permanecer constante para valores diferentes de  $k$ , lo cual tiene una consecuencia sobre la valencia mínima como se expone a continuación.

**Proposición 2.2.12** *Sea  $n \geq 4$  entero. Si existen  $k$  y  $\alpha$  enteros positivos tales que  $\nu_k(n) = \nu_{k+1}(n) = \dots = \nu_{k+\alpha}(n)$ , entonces todo grafo de  $G_{k+\alpha}(n)$  con orden  $\nu_{k+\alpha}(n)$  tiene valencia mínima al menos  $\alpha + 2$ .*

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo de  $G_{k+\alpha}(n)$  con  $\nu_{k+\alpha}(n) = \nu_k(n)$  vértices y sea  $u$  cualquier vértice de  $V(G)$  tal que  $\delta(u) = \delta(G)$ . Consideramos el grafo  $G' = G - u$ . Claramente,

$$g(G') \geq g(G) > n \quad \text{y} \quad \nu(G') < \nu_k(n)$$

y como  $G$  pertenece a  $G_{k+\alpha}(n)$  se verifica que

$$\begin{aligned} k &> e(G') - \nu(G') \\ &= e(G) - \delta(G) - (\nu(G) - 1) \\ &= e(G) - \nu(G) - \delta(G) + 1 \\ &= k + \alpha - \delta(G) + 1. \end{aligned}$$

Despejando la valencia mínima obtenemos que  $\delta(G) \geq \alpha + 2$ .

⊗

El siguiente resultado proporciona una propiedad importante de los grafos con exceso  $k$  y libres de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ , ya que permite afirmar que,

dado  $k \geq 0$  entero, la mayoría de los grafos de dicho conjunto son homeomorfos entre sí, pues se obtienen subdividiendo las aristas de un grafo, multigrafo o pseudografo del conjunto de esqueletos  $\mathcal{E}_k$  hasta que la cintura se haga tan grande como se desee. Este proceso proporciona grafos con valencia mínima 2. Si se quiere que el grafo de  $G_k(n)$  tenga además vértices de valencia 1 basta con añadir caminos o aristas fuera de ciclos.

**Teorema 2.2.13** *Sea  $k \geq 0$ . Para cada  $n \geq 2 \log_2(k + 2)$  se cumple que:*

- i) Todo grafo de  $G_k(n)$  tiene valencia mínima a lo sumo 2,*
- ii)  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ .*

*Demostración:* Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 2 \log_2(k + 2)$  enteros.

- i) El caso particular  $k = 0$  es trivial, ya que todo grafo  $G$  de  $G_0(n)$  verifica que  $e(G) = \nu(G)$ , y por tanto su valencia media es*

$$\bar{d}(G) = \frac{2e(G)}{\nu(G)} = 2,$$

lo que obliga a la existencia en  $G$  de vértices de valencias 1 ó 2.

Para algún  $k \geq 1$  dado, asumimos la existencia de un grafo  $G \in G_k(n)$  con valencia mínima al menos 3. Como  $G$  tiene exceso  $k$ , denotando por  $n_i$  al número de vértices de valencia  $i$  de  $G$  y considerando la igualdad (1.4), se cumple que

$$\nu(G) = n_3 + n_4 + \dots + n_\Delta \leq n_3 + 2n_4 + \dots + (\Delta - 2)n_\Delta = 2k.$$

Por otro lado, como la valencia media de  $G$  es al menos 3 y su cintura al menos  $n + 1$ , la desigualdad (1.11) asegura que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 2 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \cdot (2^{\frac{n+1}{2}} - 1) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las dos desigualdades obtenidas acerca de  $\nu(G)$  implican que

$$n \leq \begin{cases} 2 \log_2 \left( \frac{2k+2}{3} \right) & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \log_2(k+1) - 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como para todo  $k \geq 1$  se cumple que  $2 \log_2 \left( \frac{2k+2}{3} \right) < 2 \log_2(k+1) - 1$ , la desigualdad anterior puede unificarse como

$$n < 2 \log_2(k+1),$$

la cual es incompatible con el entero  $n \geq 2 \log_2(k+2)$  elegido. Nótese que para este apartado bastaría con elegir  $n \geq 2 \log_2(k+1)$ .

ii) Para enteros  $k \geq 0$  y  $n \geq 2 \log_2(k+2)$  es imposible la igualdad

$$\nu_k(n) = \nu_{k+1}(n),$$

porque si se verificara, sabemos por la Proposición 2.2.12, que todo grafo de  $G_{k+1}(n)$  con  $\nu_k(n)$  vértices tendría valencia mínima al menos 3, lo cual implica como acabamos de probar que  $n < 2 \log_2(k+1+1)$ .

⊗

Los resultados que acabamos de obtener se relacionan con la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y los grafos extremales. En primer lugar y teniendo en cuenta que al añadir un nuevo vértice a un grafo, es posible añadir también una arista sin disminuir su cintura, deducimos que para cada  $n \geq 4$  prefijado, la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es estrictamente creciente en  $\nu$ , es decir,

$$ex(\nu+1; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) + 1. \quad (2.1)$$

Esto nos permite establecer una primera conexión entre los valores  $\nu_k(n)$  y la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

**Lema 2.2.14** Sean  $n \geq 4$ ,  $k \geq 0$  enteros. Para todo  $\nu \geq \nu_k(n)$  se verifica que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq \nu + k$ .

*Demostración:* Sean  $n \geq 4$ ,  $k \geq 0$  y  $\nu \geq \nu_k(n)$  enteros dados. Aplicando iterativamente el crecimiento estricto en  $\nu$  de la función extremal obtenemos

$$\begin{aligned} ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) &\geq ex(\nu - 1; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) + 1 \geq \dots \\ &\geq ex(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) + \nu - \nu_k(n) \\ &\geq \nu_k(n) + k + \nu - \nu_k(n) \\ &= k + \nu. \end{aligned}$$

⊗

La desigualdad (2.1) expresa que para cada  $n \geq 4$  la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es estrictamente creciente en  $\nu$ , pero de ella se deduce también que el exceso de los grafos extremales,  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , es asimismo creciente en  $\nu$  pero no necesariamente de forma estricta.

Esto sugiere que, dados  $n \geq 4$  y  $k \geq 0$ , sea especialmente interesante confirmar la existencia de valores  $\nu$  para los cuales  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu = k$  e incluso determinar, cuando existan, los órdenes  $\nu$  para los cuales se cumple la igualdad anterior. Para ello, consideramos el conjunto siguiente.

**Definición 2.2.15** Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros. Se denomina *intervalo extremal de exceso  $k$*  al conjunto de valores  $\nu$  para los cuales la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  coincide con  $\nu + k$ . Lo denotamos por  $I_k(n)$ .

$$\text{Es decir, } I_k(n) = \left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k \right\}.$$

El nombre asignado al conjunto que acabamos de definir queda justificado por el hecho de que para cada  $n \geq 4$  el carácter monótono creciente de

$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  permite asegurar que  $I_k(n)$  o es vacío, o contiene un único elemento o se trata de un intervalo.

**Observación 2.2.16** *Puede ocurrir que el conjunto  $I_k(n)$  sea vacío para algún  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros. Por ejemplo, de las igualdades  $ex(9; \{C_3, C_4\}) = 12$  y  $ex(10; \{C_3, C_4\}) = 15$  [51] se deduce que  $I_4(4) = \emptyset$ .*

Evidentemente, cuando  $I_k(n)$  es vacío ningún grafo de  $G_k(n)$  es extremal. Es trivial entonces que  $I_k(n) \neq \emptyset$  si y solo si existe algún grafo extremal con cintura al menos  $n + 1$  y con exceso  $k$ , lo cual es equivalente a la existencia de algún grafo  $G \in G_k(n)$  tal que  $\nu_k(n) \leq \nu(G) < \nu_{k+1}(n)$ . Por lo tanto,

**Proposición 2.2.17** *Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  enteros.*

*Si  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ , entonces  $I_k(n) = [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$ .*

Nótese que esta Proposición 2.2.17 determina la función extremal pues proporciona la igualdad

$$\left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k \right\} = [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)) \quad (2.2)$$

cuando  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ .

De esta manera se pone de manifiesto la importancia de los números  $\nu_k(n)$ , ya que permiten determinar los intervalos en los cuales el exceso de los grafos extremales se mantiene constante, y conocer así el correspondiente valor de la función extremal.

**Observación 2.2.18** *Como en el tercer apartado del Lema 2.2.10 se prueba que*

$$\nu_{k+1}(n) \leq \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$



la Proposición 2.2.17 permite afirmar que para excesos  $k \geq 0$  existen a lo sumo  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  órdenes  $\nu$  para los cuales  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k$ . En el Capítulo 3 comprobaremos que esta cota se alcanza para excesos pequeños.

Dentro del conjunto de grafos con exceso  $k$  y cintura al menos  $n + 1$ , que hemos denotado por  $G_k(n)$ , queremos seleccionar los que son extremales.

**Definición 2.2.19** Por  $EX_k(n)$  denotamos los grafos con exceso  $k$ , libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y tales que su orden pertenece al intervalo  $I_k(n)$ , es decir,

$$EX_k(n) = \{G \in G_k(n) : \nu(G) \in I_k(n)\}.$$

De la igualdad  $I_k(n) = \{\nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k\}$ , se deduce que el conjunto  $EX_k(n)$  coincide con el conjunto de grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  cuyo exceso es  $k$ .

Por lo tanto, para todo  $k \geq 0$  y  $n \geq 4$  se tiene que

$$EX_k(n) = \{G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) : e(G) = \nu(G) + k\}$$

Nótese que para los valores  $(k, n)$  para los cuales  $\nu_k(n) = \nu_{k+1}(n)$  no existen grafos extremales con exceso  $k$ , verificándose entonces que  $EX_k(n) = \emptyset$ .

Una vez definido el conjunto de grafos extremales con exceso prefijado  $k \geq 0$ , el resultado siguiente permite afirmar que infinitos grafos de dicho conjunto  $EX_k(n)$  tienen valencia mínima a lo sumo 2, siendo por tanto grafos obtenidos mediante subdivisiones elementales hasta superar la cota inferior dada de la cintura. Además proporcionamos una condición suficiente para poder asegurar la existencia de grafos extremales de exceso prefijado sin necesidad del conocimiento previo de los valores  $\nu_k(n)$ , como exige la Proposición 2.2.17 anterior.

**Teorema 2.2.20** *Sea  $k \geq 0$  entero. Para todo  $n \geq 2 \log_2(k+2)$  existe  $\nu$  verificando que:*

$$i) \text{ ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k;$$

ii) *cualquier grafo del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene valencia mínima a lo sumo 2.*

*Demostración:* Sean  $k \geq 0$  y  $n \geq 2 \log_2(k+2)$  enteros.

A partir del Teorema 2.2.13 concluimos que para tales valores de  $k$  y  $n$  se verifica que  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ , y en consecuencia, según la Proposición 2.2.17, para todos los órdenes  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  se cumple que

$$\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k.$$

Además, como para todo  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$ , cualquier grafo  $G$  del conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  pertenece también a  $G_k(n)$ , se deduce nuevamente del Teorema 2.2.13 que  $G$  necesariamente contiene bien hojas o bien vértices de valencia 2.

⊗

Una vez que conocemos que una gran parte de los grafos extremales se obtienen mediante subdivisiones elementales de aristas de algún elemento del conjunto de esqueletos, nos preguntamos sobre la existencia de alguna propiedad común a todos los esqueletos de los grafos extremales.

Una primera de ellas es que ningún grafo extremal tiene como esqueleto a un pseudografo. La prueba se basa en que la diferencia  $\nu_{k+1}(n) - \nu_k(n)$  es a lo sumo  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , desigualdad que hemos probado en el Lema 2.2.10.

**Proposición 2.2.21** *Todo grafo extremal con más de un ciclo no puede obtenerse mediante subdivisiones de un pseudografo.*

*Demostración:* Suponemos la existencia de un grafo extremal  $G$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  que es subdivisión de un pseudografo. Denotamos por  $k$  su exceso, es decir,  $k = e(G) - \nu(G)$ .

Evidentemente,  $G$  contiene un ciclo con  $m$ , ( $m \geq n$ ), vértices adyacentes  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de valencia 2. Consideramos el nuevo grafo  $G' = G - \{x_1, \dots, x_m\}$ . Como  $G'$  tiene exceso  $k - 1$  y cintura al menos  $n + 1$  pertenece al conjunto  $G_{k-1}(n)$ , y por tanto, verifica que  $\nu(G') \geq \nu_{k-1}(n)$ . Sabemos además, por la Proposición 2.2.17, que

$$\nu_{k+1}(n) > \nu(G) = \nu(G') + m \geq \nu(G') + n \geq \nu_{k-1}(n) + n,$$

pero esta desigualdad contradice el apartado iii) del Lema 2.2.10.

⊗

Para determinar el valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  hemos visto que es útil la consideración de las cantidades  $\nu_k(n)$ , pero éstas en realidad están relacionadas con otra propuesta por B. Bollobás y que tratamos en la siguiente sección.

## 2.3 Máxima cintura de los grafos de orden y exceso dados.

Vamos a relacionar la cantidad  $\nu_k(n)$ , mínimo orden de los grafos libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k$ , con la máxima cintura de los grafos de orden  $\nu$  y

tamaño  $\nu + k$ . Además mejoramos la cota superior de esta última proporcionada por B. Bollobás y E. Szemerédi en [19].

Para  $\nu \geq 3$  y  $0 \leq k \leq \binom{\nu}{2} - \nu$ , B. Bollobás en [18] propone el estudio de la máxima cintura de los grafos con orden  $\nu$  y tamaño  $\nu + k$ , cintura que denota por  $g(\nu, k)$ .

Posteriormente B. Bollobás y E. Szemerédi en [19] tratan nuevamente la misma cuestión, pero en lugar de estudiar directamente la cintura  $g(\nu, k)$ , los autores reducen el problema a la determinación de unas cantidades  $g(k)$  cuya relación con  $g(\nu, k)$  puede expresarse mediante las desigualdades [19]

$$g(k)(\nu + k) - 2k \leq g(\nu, k) \leq g(k)(\nu + k). \quad (2.3)$$

Para ello, consideran el conjunto formado por todos los grafos, multigrafos o pseudografos ponderados  $(G, w)$  de exceso  $k$  y peso  $w(G) = 1$ . Para cualquier grafo  $(G, w)$ , que contenga al menos un ciclo, definen la cintura pesada o ponderada  $g_w(G)$  como la mínima suma de los pesos de las aristas de cada ciclo del grafo considerado  $(G, w)$ . Para  $k \geq 0$  definen  $g(k)$  como la máxima cintura ponderada dentro del conjunto de grafos, multigrafos o pseudografos ponderados considerado.

En esta sección ampliamos algunos resultados acerca de los valores  $g(k)$  y  $g(\nu, k)$ , pero consideramos oportuno establecer previamente su conexión con los grafos extremales, ya que son el objeto de este trabajo. Para ello, recordamos que en la sección anterior, en el contexto de los grafos de exceso dado y libres de ciclos de orden preestablecido, hemos definido las cantidades  $\nu_k(n)$ .

A continuación relacionamos ambos números  $\nu_k(n)$  y  $g(\nu, k)$ , obteniendo un puente de modo que el conocimiento de los valores  $g(\nu, k)$  conduce al de las cantidades  $\nu_k(n)$  y recíprocamente.

**Proposición 2.3.1** *Sea  $k \geq 0$  entero. Se cumple que*

$$i) \ g(\nu, k) = \max \{n : \nu \geq \nu_k(n)\} + 1 \text{ para cada } \nu \text{ tal que } 0 \leq k \leq \binom{\nu}{2} - \nu.$$

$$ii) \ \nu_k(n) = \min \{\nu : g(\nu, k) = n + 1\} \text{ para cada } n \geq 4.$$

*Demostración:* Sea  $k \geq 0$  entero.

*i)* Sea  $G$  cualquier grafo de orden  $\nu$ , exceso  $k$  y cintura  $g(G) = g(\nu, k)$ . Por un lado  $\nu = \nu(G) \geq \nu_k(g(\nu, k) - 1)$  ya que  $G$  pertenece a  $G_k(g(\nu, k) - 1)$ , y por lo tanto  $\max\{n : \nu \geq \nu_k(n)\} \geq g(\nu, k) - 1$ . Por otro lado, para todo  $n$  tal que  $\nu \geq \nu_k(n)$  existe al menos un grafo  $G$  con orden  $\nu$ , tamaño  $\nu + k$  y  $g(G) \geq n + 1$ . Entonces,  $g(\nu, k) \geq g(G) \geq n + 1$ .

*ii)* La igualdad  $\nu_k(n) = \min \{\nu : g(\nu, k) = n + 1\}$  es consecuencia del hecho de que todo grafo del conjunto  $G_k(n)$  con  $\nu_k(n)$  vértices tiene cintura  $n + 1$ , como se demuestra en el segundo apartado de la Proposición 2.2.9.

⊗

Gracias a la relación que acabamos de probar entre las dos cantidades  $g(\nu, k)$  y  $\nu_k(n)$ , las desigualdades (2.3) pueden reescribirse en función de los valores  $\nu_k(n)$ , obteniéndose así las siguientes cotas inferior y superior de estos:

$$\left\lfloor \frac{n + 1 + 2k}{g(k)} - k \right\rfloor \geq \nu_k(n) \geq \left\lceil \frac{n + 1}{g(k)} - k \right\rceil. \quad (2.4)$$

Queremos destacar que para cada  $k \geq 0$ , la cota inferior de  $\nu_k(n)$  contenida en (2.4) se trata en realidad de una igualdad para infinitos valores de  $n$ , porque la cota superior de  $g(\nu, k)$  en (2.3) es también una igualdad para infinitos valores de  $\nu$ , como se afirma en [19].

Debido a la dificultad de obtener el valor exacto de la cintura  $g(\nu, k)$ , diversos autores han tratado de obtener una cota superior de ella. En concreto B. Bollobás y A. Thomason prueban en [20] que

$$g(\nu, k) \leq \left( \left\lfloor \frac{\nu}{k} \right\rfloor + 1 \right) \log_2(2k),$$

y posteriormente B. Bollobás y E. Szemerédi en [19] demuestran la desigualdad

$$g(\nu, k) \leq 2(\nu + k) \frac{\log_2 k + \log_2 \log_2 k + 4}{3k}.$$

Esta acotación puede ser mejorada considerando el Teorema 1.2.1 probado en [3] por N. Alon, S. Hoory y L. Linial .

**Teorema 2.3.2** *Para  $\nu \geq 3$  y  $1 \leq k \leq \binom{\nu}{2} - \nu$  enteros, cualquier grafo de orden  $\nu$  y tamaño  $\nu + k$  tiene a lo sumo cintura  $g(\nu, k) \leq 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}}(k+1)$ .*

*Demostración:* Para cualquier grafo  $G$  de orden  $\nu$  y exceso  $k$ , denotamos por  $g$  su cintura y por  $\bar{d}$  su valencia media.

El Teorema 1.2.1 asegura que

$$\nu \geq \nu_0(\bar{d}, g) = \begin{cases} 2 \frac{(\bar{d}-1)^{\frac{g}{2}} - 1}{\bar{d}-2} & \text{si } g \text{ es par;} \\ 1 + \bar{d} \frac{(\bar{d}-1)^{\frac{g-1}{2}} - 1}{\bar{d}-2} & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases}$$

Despejando la cintura, la desigualdad anterior puede reescribirse como

$$g \leq \begin{cases} 2 \log_{\bar{d}-1} \left( \frac{(\bar{d}-2)\nu}{2} + 1 \right) & \text{si } g \text{ es par;} \\ 1 + 2 \log_{\bar{d}-1} \left( \frac{(\bar{d}-2)(\nu-1)}{\bar{d}} + 1 \right) & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la valencia media puede expresarse en función del orden y del exceso mediante la ecuación  $\bar{d} = \frac{2(\nu + k)}{\nu}$ , se tiene que

$$g \leq \begin{cases} 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} (k+1) & \text{si } g \text{ es par;} \\ 1 + 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} \left( \frac{(k+1)\nu}{k+\nu} \right) & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases}$$

Unificando ambas desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned} g &\leq \max \left\{ 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} (k+1), 1 + 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} \left( \frac{(k+1)\nu}{k+\nu} \right) \right\} \\ &= 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} (k+1). \end{aligned}$$

⊗

Acerca de la cota proporcionada en [19], sus autores B. Bollobás y E. Szemerédi, conjeturan que es probablemente la mejor posible cuando  $k$  es suficientemente grande y  $\nu$  tiende a infinito. El resultado que acabamos de probar en el Teorema 2.3.2 rechaza esa idea, porque aunque su cota y nuestra cota tienen el mismo orden de convergencia, su diferencia tiende a infinito, ya que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{2(\nu + k)}{3k} (\log_2 k + \log_2 \log_2 k + 4) - 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} (k+1) \right) = \infty.$$

El Teorema 2.3.2 tiene una aplicación inmediata para los grafos extremales.

**Corolario 2.3.3** *Sea  $G$  cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . Si denotamos por  $k = e(G) - \nu(G)$  se cumple que*

$$g(G) \leq 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}} (k+1).$$

*Demostración:* Cualquier grafo de la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con exceso  $k$  tiene, por definición, a lo sumo cintura  $g(\nu, k)$ . La cota obtenida en el Teorema 2.3.2 proporciona entonces la desigualdad deseada.

⊗

Además, el Teorema 2.3.2 permite también acotar la cintura del esqueleto de cualquier grafo conexo de exceso prefijado.

**Corolario 2.3.4** *Si  $G$  un grafo conexo con exceso  $k \geq 2$ , entonces*

$$g(\tilde{G}) \leq \lfloor 2 \log_2(k+1) \rfloor.$$

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo conexo con exceso  $k \geq 2$ . Como los vértices de valencia 1 no alteran el valor de la cintura de un grafo, sin pérdida de generalidad podemos asumir que la valencia mínima de  $G$  es al menos 2. En tal caso, a partir de la igualdad (1.4) dada por

$$n_3 + 2n_4 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta = 2k,$$

y del hecho de que  $G$  y su esqueleto  $\tilde{G}$  tienen la misma cantidad de vértices de valencia  $i \geq 3$ , deducimos que el orden de  $\tilde{G}$  es a lo sumo  $2k$ . Como consecuencia del Teorema 2.3.2, obtenemos que

$$g(\nu(\tilde{G}), k) \leq g(2k, k) \leq \lfloor 2 \log_2(k+1) \rfloor.$$

⊗

Sobre la cintura y otras propiedades de los grafos extremales profundizamos posteriormente en el Capítulo 5.

Gracias a las desigualdades (2.3) y (2.4) deducimos que es suficiente el conocimiento de  $g(k)$  para conseguir acotar superior e inferiormente tanto  $\nu_k(n)$  como  $g(\nu, k)$ . Por esta razón se convierte de especial interés la determinación de las cantidades  $g(k)$ . B. Bollobás y E. Szemerédi en [19] proporcionan los primeros valores dados por

$$g(0) = 1, \quad g(1) = \frac{2}{3}, \quad g(2) = \frac{1}{2}, \quad g(3) = \frac{4}{9}, \quad g(4) = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad g(5) = \frac{1}{3}$$



y prueban que

$$g(k+1) \geq \frac{g(k)}{1 + \frac{g(k)}{2}}. \quad (2.5)$$

La acotación de  $g(\nu, k)$ , que acabamos de probar en el Teorema 2.3.2, permite obtener una cota superior de  $g(k)$ .

**Corolario 2.3.5** *Para todo  $k \geq 1$  se cumple que*

$$g(k) \leq \frac{\ln(k+1)}{k}.$$

*Demostración:* Sea  $k \geq 1$  entero.

Por la desigualdad (2.3) y el Teorema 2.3.2 sabemos que para todo  $\nu$  entero tal que  $k \leq \binom{\nu}{2} - \nu$  se verifica que

$$g(k)(\nu + k) - 2k \leq g(\nu, k) \leq 2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}}(k+1),$$

lo cual implica que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}}(k+1)}{g(k)(\nu + k) - 2k} \geq 1,$$

y en consecuencia,

$$\frac{\ln(k+1)}{k g(k)} \geq 1,$$

quedando probado que

$$g(k) \leq \frac{\ln(k+1)}{k}.$$

⊗

Dada la dificultad de la determinación exacta de los valores  $g(k)$ , estudiamos también características generales de los grafos ponderados cuya cintura es máxima. Una primera propiedad es que ningún pseudografo alcanza tal cintura.

**Proposición 2.3.6** *Sea  $k \geq 1$ . No existe un pseudografo ponderado  $(G, w)$  con peso  $w(G) = 1$  y exceso  $k$  tal que  $g_w(G) = g(k)$ .*

*Demostración:* Suponemos la existencia de un pseudografo ponderado  $(G, w)$  con peso  $w(G) = 1$ , exceso  $k$  y tal que  $g_w(G) = g(k)$ . Existe por lo tanto un lazo  $e$  en  $E(G)$  tal que  $w(e) \geq g_w(G) = g(k)$ .

El grafo  $(G', w)$ , obtenido al eliminar de  $E(G)$  la arista  $e$ , tiene exceso  $k - 1$  pero su peso no es unitario ya que  $w(G') = 1 - w(e) \leq 1 - g(k)$ . Entonces el grafo  $(G', w')$ , obtenido al dividir los pesos de las aristas de  $(G', w)$  entre  $w(G')$ , prueba que

$$g(k - 1) \geq g_{w'}(G') = \frac{g_w(G')}{w(G')} \geq \frac{g_w(G')}{1 - g(k)} \geq \frac{g_w(G)}{1 - g(k)} = \frac{g(k)}{1 - g(k)}.$$

Este resultado podemos reescribirlo como

$$g(k) \geq \frac{g(k + 1)}{1 - g(k + 1)}$$

y junto a la desigualdad (2.5) obtenemos que

$$g(k) \geq \frac{g(k + 1)}{1 - g(k + 1)} \geq \frac{\frac{g(k)}{1 + \frac{g(k)}{2}}}{1 - \frac{g(k)}{1 + \frac{g(k)}{2}}} = \frac{g(k)}{1 - \frac{g(k)}{2}}$$

lo cual implica que  $g(k) = 0$ , lo cual es una contradicción.

⊗

Incluso en el estudio de la cintura máxima  $g(k)$  podemos exclusivamente considerar grafos sin lazos ni aristas múltiples, es decir, grafos simples.

**Lema 2.3.7** *Para cualquier  $k \geq 2$  entero, existe un grafo simple  $(G, w)$  con peso unitario, exceso  $k$ , valencia mínima al menos 3 y tal que  $g_w(G) = g(k)$ .*

*Demostración:* Sea  $k \geq 2$  un entero.

Dado que la Proposición 2.3.6 asegura que ningún pseudografo ponderado  $(G, w)$  con peso unitario y exceso  $k$  tiene cintura  $g(k)$ , es suficiente probar que si existe un multigrafo con peso unitario, exceso  $k$  y cintura  $g(k)$ , también existe un grafo simple con estas mismas propiedades y valencia mínima al menos 3 .

Para  $k \geq 2$  suponemos la existencia de un multigrafo  $(G, w)$  con peso  $w(G) = 1$ , exceso  $k$  y cintura máxima  $g(k)$ . Existen por tanto dos aristas en  $E(G)$  tal que ambas conjuntamente pesan al menos  $g(k)$ , y una de ellas, que denotamos  $e$ , tiene peso al menos  $\frac{g(k)}{2}$ .

Consideramos el grafo o multigrafo obtenido al eliminar la arista  $e$  de  $(G, w)$  y sea  $(C, w)$  cualquier ciclo de  $(G - e, w)$ . Nótese que la existencia de este ciclo está garantizada cuando  $k \geq 2$ . En primer lugar, añadimos dos vértices al ciclo  $(C, w)$ , de modo que dicho ciclo se subdivida en dos caminos cada uno con longitud al menos  $\frac{g(k)}{2}$ . Hacemos notar que al subdividir una arista el peso de ella lo repartimos entre las dos nuevas aristas incidentes en el vértice que origina la subdivisión. En segundo lugar, insertamos una arista con peso  $w(e)$  uniendo los dos nuevos vértices. El nuevo grafo o multigrafo así construido tiene exceso  $k$ , peso 1 y cintura  $g(k)$ .

Repitiendo este mismo proceso a cada ciclo del grafo  $(G, w)$  formado exactamente por dos aristas, obtenemos un grafo simple con las propiedades deseadas.

⊗

Asimismo B. Bollobás y E. Szemerédi [19] demuestran que para determinar la cintura  $g(k)$  es suficiente considerar grafos cúbicos no necesariamente simples.

Para ello detallan un proceso mediante el cual a partir de un grafo, multigrafo o pseudografo ponderado  $(G, w)$  con valencias  $\delta(G) \leq 2$  y/o  $\Delta(G) \geq 4$  se

construye un grafo, multigrafo o pseudografo cúbico  $(G', w')$  con la misma cintura ponderada, es decir, tal que  $g_{w'}(G') = g_w(G)$ . Para lograr dicho objetivo se realizan las siguientes operaciones:

- 1) Se borran todas las hojas de  $(G, w)$ .
- 2) Se elimina cada vértice  $x \in V(G)$  de valencia 2 y las dos aristas incidentes en él  $ux, xv$  se reemplazan por una nueva arista  $uv$  de modo que  $w'_{G'}(uv) = w_G(ux) + w_G(xv)$ .
- 3) Cada vértice  $z \in V(G)$  con valencia  $\delta_G(z) \geq 4$  se sustituye por un camino  $P_z$  de longitud  $\delta_G(z) - 3$  con aristas de peso nulo, y cada una de las  $\delta_G(z)$  aristas  $yz$  en  $G$  se reemplaza en  $G'$  por una nueva arista  $yz'$  con el mismo peso y de modo que cada vértice  $z'$  del camino  $P_z$  tenga valencia 3.

Obsérvese que mediante este proceso los grafos ponderados cuya valencia máxima es al menos 4 se convierten en grafos cúbicos con aristas de peso nulo. Lo ilustramos en el siguiente ejemplo de la Figura 2.4.

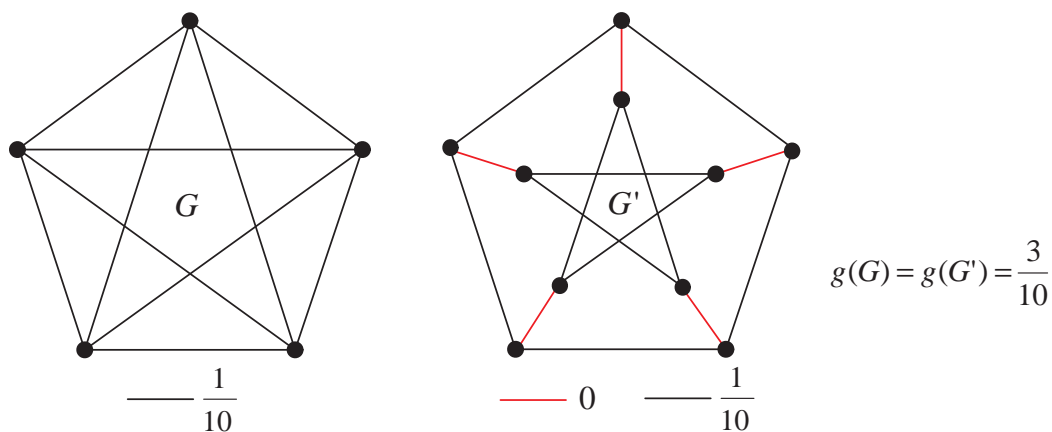


Figura 2.4: Grafos ponderados con igual cintura.

Este proceso de obtención de grafos, multigrafos o pseudografos cúbicos junto con la Proposición 2.3.6 y el Lema 2.3.7 justifican que para el estudio de

la máxima cintura ponderada es suficiente considerar grafos cúbicos sin lazos ni aristas múltiples.

Además los grafos cúbicos tienen la ventaja de que su orden y tamaño puede expresarse fácilmente en función de su exceso. En concreto, todo grafo cúbico de exceso  $k$  tiene  $2k$  vértices y  $3k$  aristas, como se deduce de forma evidente a partir de la ecuación (1.1) y de la igualdad (1.4).

Basándose en esta propiedad y en el hecho de que al eliminar una arista a un grafo de exceso  $k$  se obtiene un grafo de exceso  $k-1$ , B. Bollobás y E. Szemerédi obtienen en [19] la desigualdad

$$g(k) \leq \frac{3k-1}{3k} g(k-1). \quad (2.6)$$

Como en [19] se determinan las cinturas  $g(k)$  para  $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$  comprobamos que la cota (2.6) solamente se alcanza para  $k = 1$  y  $k = 3$ .

De manera análoga, quitando a un grafo de exceso  $k$  un vértice o dos vértices adyacentes, obtenemos otras acotaciones superiores de  $g(k)$  que mejoran el resultado anterior.

**Proposición 2.3.8** *Para  $k \geq 3$  se cumple que*

$$g(k) \leq \min \left\{ \frac{k-1}{k} g(k-2), \frac{3k-5}{3k} g(k-3) \right\}$$

*Demostración:* Sea  $(G, w)$  un grafo con exceso  $k \geq 3$ , peso  $w(G) = 1$  y cintura  $g(k)$ .

Como hemos comentado, siguiendo la estrategia de [19], la Proposición 2.3.6 y el Lema 2.3.7, podemos considerar que  $(G, w)$  es un grafo cúbico sin lazos ni aristas múltiples. Por tanto, según hemos comentado previamente,  $(G, w)$  tiene  $2k$  vértices unidos por  $3k$  aristas.

- i)* Por un lado el peso medio de cada arista de  $(G, w)$  es  $\frac{1}{3k}$ , y por tanto el peso medio de las tres aristas incidentes en cada uno de sus vértices es  $\frac{1}{k}$ . Consideramos el grafo  $(G', w)$  obtenido al eliminar de  $G$  un vértice tal que sus tres aristas incidentes tienen peso máximo. Tal grafo tiene exceso  $k - 2$  pero su peso no es unitario pues  $w(G') \leq 1 - \frac{1}{k}$ .

Entonces el grafo  $(G', w')$ , obtenido al dividir los pesos de las aristas de  $(G', w)$  entre  $w(G')$ , prueba que

$$g(k - 2) \geq g_{w'}(G') = \frac{g_w(G')}{w(G')} \geq \frac{g_w(G')}{1 - \frac{1}{k}} \geq \frac{k g_w(G)}{k - 1} = \frac{k g(k)}{k - 1}.$$

- ii)* De manera análoga, como el grafo  $(G, w)$  no tiene lazos ni aristas múltiples, existen 5 aristas incidentes en dos vértices arbitrarios consecutivos de él. Por tanto, al eliminar de  $(G, w)$  dos vértices consecutivos tales que la suma de los pesos de las cinco aristas incidentes en ambos es máxima, se obtiene un grafo con exceso  $k - 3$  y prueba que

$$g(k - 3) \geq \frac{g(k)}{1 - \frac{5}{3k}}.$$

⊗

La bondad de la cota proporcionada en la Proposición 2.3.8 se confirma por el hecho de que se trata en realidad de una igualdad para  $k \in \{3, 4, 5\}$ . De esta forma la Proposición 2.3.8 aporta una demostración alternativa más sencilla que las proporcionadas por B. Bollobás en [18] y por B. Bollobás y E. Szémeredi en [19] para la obtención de los valores  $g(k)$  para  $k \in \{4, 5\}$ .

Procedemos de igual manera para encontrar cotas de la cintura máxima  $g(k)$  correspondientes a los valores siguientes de  $k$ .

**Lema 2.3.9** *La función  $g(k)$  toma los valores:*

$\frac{3}{10} \leq g(6) \leq \frac{5}{16}$	$g(7) = \frac{2}{7}$	$\frac{1}{4} \leq g(8) \leq \frac{19}{72}$
$\frac{4}{17} \leq g(9) \leq \frac{16}{63}$	$\frac{2}{9} \leq g(10) \leq \frac{19}{80}$	$\frac{4}{19} \leq g(11) \leq \frac{133}{594}$
$\frac{1}{5} \leq g(12) \leq \frac{\ln 13}{12}$	$\frac{4}{21} \leq g(13) \leq \frac{\ln 14}{13}$	$\frac{2}{11} \leq g(14) \leq \frac{\ln 15}{14}$
$\frac{8}{45} \leq g(15) \leq \frac{\ln 16}{15}$	$\frac{4}{63} \leq g(63) \leq \frac{\ln 64}{63}$	

*Demostración:* Para cada  $k \in \{6, 7, \dots, 15\}$  y  $k = 63$ , entre las desigualdades aportadas por el Corolario 2.3.5 y la Proposición 2.3.8 elegimos la que proporciona la menor cota superior.

Por otro lado, como la  $(3; 6)$ -jaula de Heawood tiene exceso 7, asignando el mismo peso  $\frac{1}{21}$  a cada una de sus aristas, obtenemos que

$$g(7) = \max \left\{ g_w(G) : w(G) = 1, e(G) - \nu(G) = 7 \right\} \geq \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Ambas desigualdades acerca de  $g(7)$  permiten confirmar que

$$g(7) = \frac{2}{7}.$$

De los grafos ponderados mostrados en las Figuras 2.5 y 2.6 se deducen las cotas inferiores de  $g(k)$  contenidas en el enunciado para  $k = 6$  y  $8 \leq k \leq 14$ .

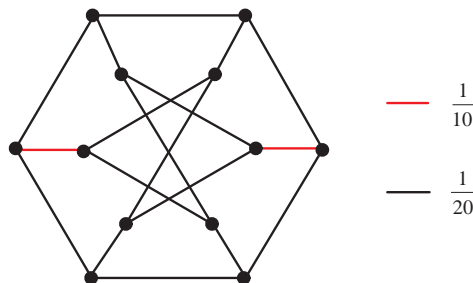


Figura 2.5: Grafo ponderado con exceso 6.

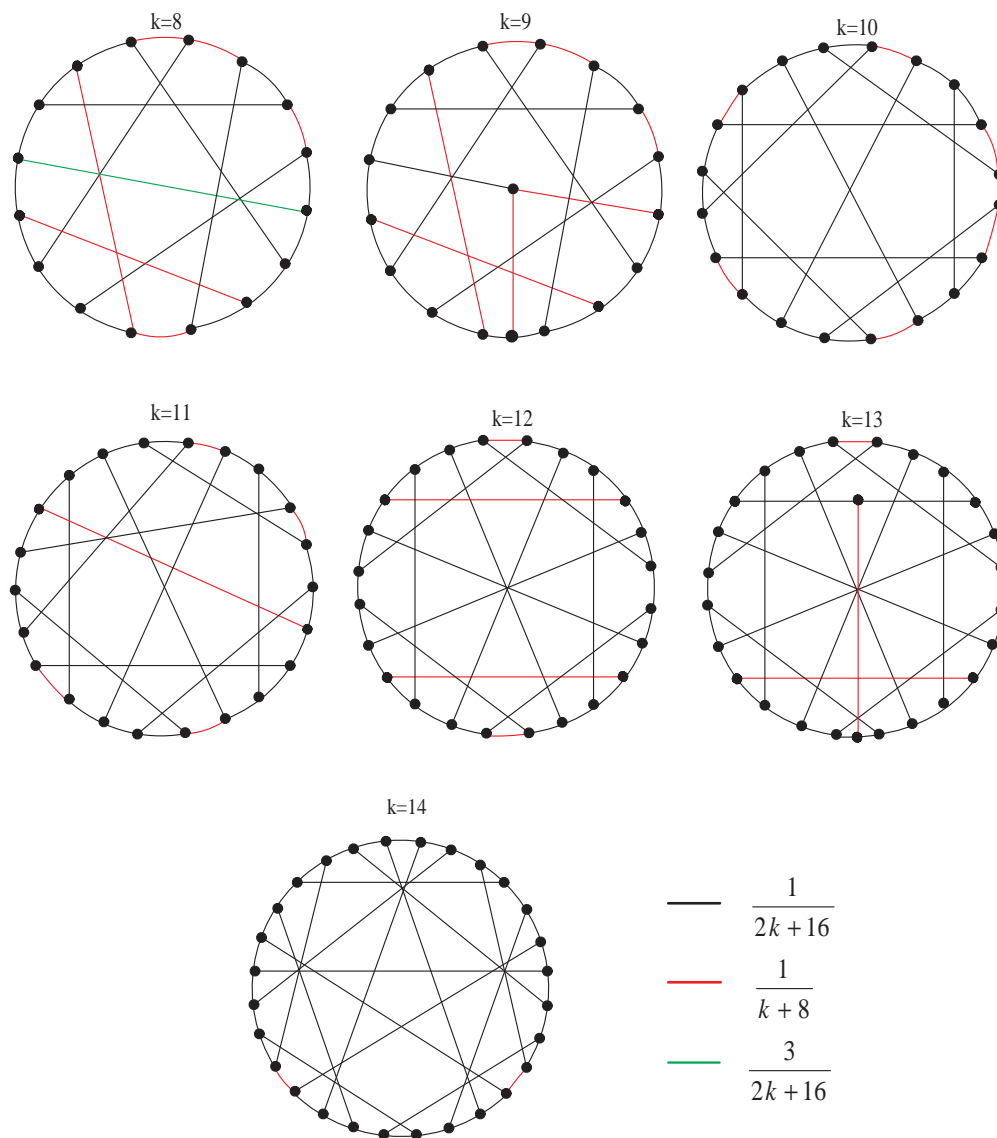


Figura 2.6: Grafos ponderados con excesos  $k \in \{8, 9, \dots, 14\}$

Asignando peso  $\frac{1}{45}$  a cada una de las aristas de la (3; 8)-jaula de Tutte-Coxeter se prueba que  $g(15) \geq \frac{8}{45}$ . De manera análoga, considerando el grafo ponderado obtenido al asignar el mismo peso a cada una de las aristas de la (3; 12)-jaula de Tutte se obtiene que  $g(63) \geq \frac{4}{63}$ .



Nos hemos preguntado también acerca de la unicidad de los grafos ponderados  $(G, w)$  cuya cintura alcanza la cota  $g(k)$ .

Cuando  $k = 2$  y  $k = 5$  las Figuras 2.7 y 2.8 prueban su no-unicidad.

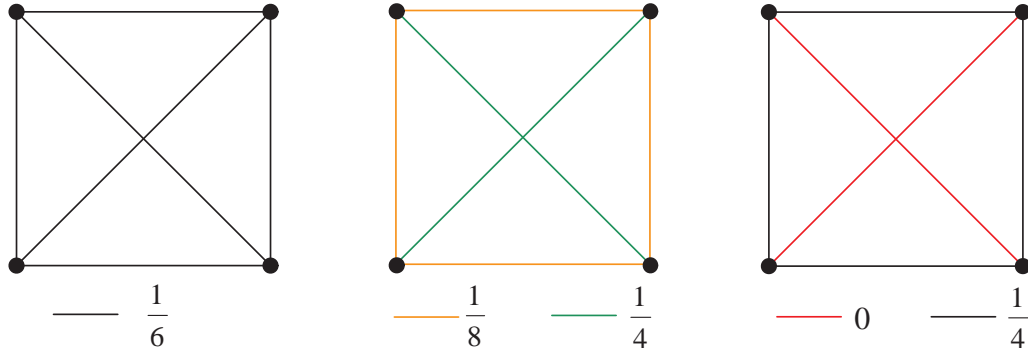


Figura 2.7: Grafos con peso  $w(G) = 1$ , exceso 2 y cintura  $g(2) = \frac{1}{2}$ .

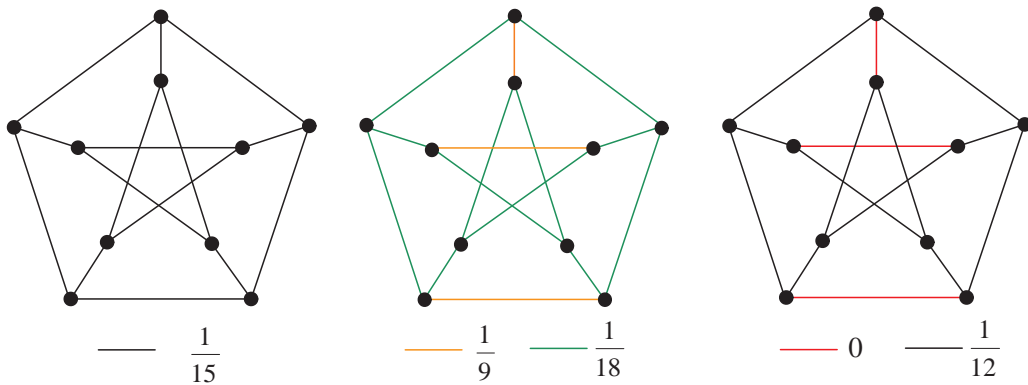


Figura 2.8: Grafos con peso  $w(G) = 1$ , exceso 5 y cintura  $g(5) = \frac{1}{3}$ .

Observamos que en ambos casos  $k = 2$  y  $k = 5$  el tercer grafo de cada una de las Figuras 2.7 y 2.8 tiene peso unitario, cintura  $g(k)$  y aristas de peso nulo, lo que según ya hemos comentado, se traduce en la existencia de otros grafos con la misma cintura máxima  $g(k)$  pero con valencia máxima al menos 4, como se muestra en los grafos construidos en las Figuras 2.9 y 2.10.

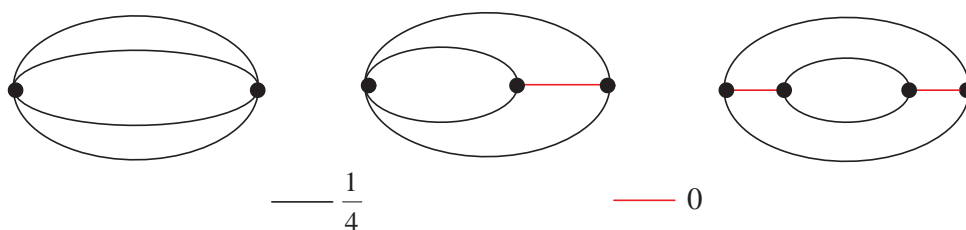


Figura 2.9: Otros grafos con peso  $w(G) = 1$ , exceso 2 y cintura  $g(2) = \frac{1}{2}$ .

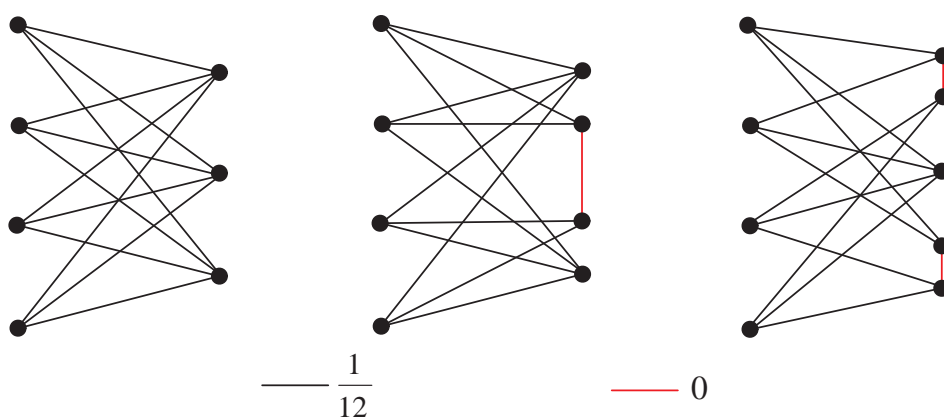


Figura 2.10: Otros grafos con peso 1, exceso 5 y cintura  $g(5) = \frac{1}{3}$ .

Los casos  $k = 1$  y  $k = 3$  merecen una especial atención puesto que los grafos ponderados cuya cintura alcanza el valor máximo son únicos. Previamente observamos que a partir de la demostración de la Proposición 2.3.8 se deduce que la primera desigualdad de su enunciado se alcanza, es decir,

$$g(k) = \frac{k-1}{k} g(k-2),$$

cuando la suma de los pesos de las 3 aristas incidentes en todos los vértices de cualquier grafo cúbico  $(G, w)$  de exceso  $k$ , peso 1 y tal que  $g_w(G) = g(k)$  es la misma. De igual manera

$$g(k) = \frac{3k-5}{3k} g(k-3),$$

cuando la suma de los pesos de las cinco aristas incidentes en cualesquiera dos vértices consecutivos de  $(G, w)$  es la misma.

Análogamente de la prueba de la desigualdad (2.6) se deduce que ésta se convierte en una igualdad, es decir,

$$g(k) = \frac{3k-1}{3k} g(k-1)$$

cuando todas las aristas de cualquier grafo cúbico  $(G, w)$  de exceso  $k$  tal que  $g_w(G) = g(k)$  tienen el mismo peso  $\frac{1}{3k}$ . En este caso, de la ausencia de aristas de peso nulo, se deduce la no existencia de grafos con valencia al menos 4 que alcanzan la igualdad  $g_w(G) = g(k)$ . Teniendo en cuenta esta propiedad probamos la unicidad para los casos  $k = 1$  y  $3$ .

**Proposición 2.3.10** *Sea  $k = 1$  ó  $3$ . Los grafos ponderados con exceso  $k$  y cintura  $g(k)$  son únicos salvo subdivisiones.*

*Demostración:* Para  $k = 1$  y  $k = 3$  la desigualdad (2.6) es en realidad una igualdad, lo que se traduce, según acabamos de comentar, en que la cintura  $g(k)$  únicamente se alcanza para grafos cúbicos en los cuales sus  $3k$  aristas tienen todas el mismo peso  $\frac{1}{3k}$ .

Suponemos que  $k = 1$ , y sea  $(G, w)$  cualquier grafo de exceso 1, peso unitario y cintura máxima  $g_w(G) = g(1)$ . Sabemos que  $(G, w)$  tiene 2 vértices de valencia 3 unidos por 3 aristas cada una con peso  $\frac{1}{3}$ . Como  $g(1) = \frac{2}{3}$ , salvo subdivisiones  $(G, w)$  es el grafo de la Figura 2.11.

De manera análoga, consideramos  $(G, w)$  cualquier grafo de exceso 3, peso 1 y cintura máxima  $g_w(G) = g(3)$ . Sabemos que  $(G, w)$  tiene 6 vértices de valencia 3 unidos por 9 aristas cada una con peso  $\frac{1}{9}$ . A partir de la igualdad  $g(3) = \frac{4}{9}$  es evidente que cada ciclo del grafo contiene al menos cuatro aristas,

y como  $EX(6; \{C_3\}) = K_{3,3}$  se cumple que salvo subdivisiones  $(G, w)$  es el grafo de la Figura 2.12.

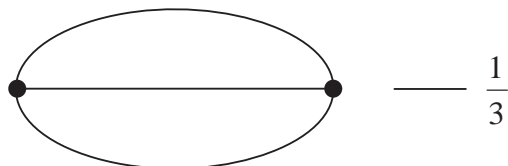


Figura 2.11: Único grafo con peso unitario, exceso 1 y cintura máxima  $g(1) = \frac{2}{3}$ .

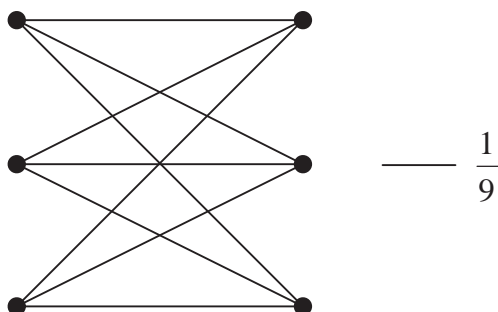


Figura 2.12: Único grafo con peso unitario, exceso 3 y cintura máxima  $g(3) = \frac{4}{9}$ .

⊗

## 2.4 Conclusiones y problemas abiertos.

El resultado más interesante que se presenta en este capítulo es la afirmación de que la mayor parte de los grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  son homeomorfos entre sí, pues se obtienen subdividiendo aristas y/o añadiendo vértices de valencia 1 hasta superar la cota inferior prefijada de la cintura con el orden deseado.

Asimismo hemos definido unas cantidades  $\nu_k(n)$  tales que el conocimiento

de dos consecutivas de ellas permite la determinación del valor exacto de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todos los órdenes  $\nu$  de un intervalo y para infinitos valores de  $n$ .

Esta cantidad  $\nu_k(n)$  hemos probado que está estrechamente ligada con otra considerada por B. Bollobás, denotada por  $g(\nu, k)$  y definida como la máxima cintura de los grafos de orden  $\nu$  y exceso  $k$ . Hemos optimizado la mejor cota conocida de ésta hasta este momento y en el Capítulo 5 probaremos que esta cintura  $g(\nu, k)$  está también relacionada con la máxima cintura de los grafos de los conjuntos extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

El conocimiento de los valores  $\nu_k(n)$  y  $g(\nu, k)$  está ligado a la determinación de otra cantidad estudiada por B. Bollobás y denotada por  $g(k)$ . Como problema abierto nos ha quedado la determinación exacta de ésta para  $k = 6$  y  $k \geq 8$ .



## Capítulo 3

# Tamaño de los grafos extremales.

Una vez que hemos comprobado que el exceso de los grafos extremales,  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , es una función monótona creciente en  $\nu$ , se convierte en el objeto de nuestro estudio obtener los intervalos para los cuales se mantiene constante, ya que en ellos la función extremal que nos interesa  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  queda totalmente determinada.

Para ello, es suficiente obtener el mínimo orden que debe tener un grafo para poder contener una cantidad prefijada  $k \geq 0$  de aristas más que de vértices, cantidad que hemos denotado por  $\nu_k(n)$ . En este capítulo se determinan las primeras de dichas cantidades, concretamente las asociadas a  $2 \leq k \leq 5$ , y se acotan las correspondientes a  $k = 6$  y  $k = 7$ , permitiéndonos obtener el valor exacto de la función extremal para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil$  y para todo  $n \geq 4$ .

En este proceso, observamos que las jaulas de Petersen, Heawood y Tutte-Coxeter son extremales. Este resultado es más general y probamos que en realidad todas las jaulas minimales son grafos extremales, lo que nos permite además deducir resultados de tipo asintótico.

### 3.1 Introducción

Como se ha demostrado en el capítulo anterior existen infinitos grafos extremales que son homeomorfos entre sí, es decir, que se obtienen mediante subdivisiones de un grafo o multigrafo de exceso  $k$  hasta que se alcanza la cintura deseada.

Surge entonces de forma lógica el interés por determinar la mínima cantidad de vértices que debe contener un grafo con  $k$  aristas más que vértices para alcanzar cintura al menos  $n+1$ , cantidad que hemos denotado por  $\nu_k(n)$ . Sabemos que el conocimiento de dos  $\nu_k(n)$ , para valores consecutivos de  $k$ , es especialmente interesante ya que permite determinar el intervalo de valores  $\nu$  para los cuales  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  permanece constante, y en tal caso la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  queda determinada para todo  $\nu$  en dicho intervalo.

Concretamente, en este capítulo determinamos con exactitud las cantidades  $\nu_k(n)$  para  $2 \leq k \leq 5$ , salvo a lo sumo dos vértices para  $k = 7$  y la acotamos tanto superior como inferiormente para  $k = 6$ . Esto nos permite conocer el valor de la función extremal para casi todo

$$\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil \quad \text{y para todo } n \geq 4.$$

También proporcionamos siete familias de órdenes  $\nu$  para los cuales la función extremal queda determinada salvo a lo sumo en una unidad. Aunque no son muchos los valores de  $k$  estudiados, queremos señalar que son infinitos los valores de la función extremal encontrados.

Hasta ahora el único resultado general de la función extremal era el proporcionado en [63], en el que se afirma que  $ex(2n+2; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = 2n+4$  para todo  $n \geq 12$ . Su demostración se basa en la prueba previa de que los grafos extremales de orden  $2n+2$  y cintura al menos  $n+1$  son necesariamente planos. Asimismo sus autores comentan que creen que han encontrado una demostración, mucho más complicada y larga, para una afirmación similar a la anterior para



$\nu = 3n + 3$ . Ambos resultados están ampliamente incluidos en los contenidos de este capítulo.

Buscando los grafos extremales con exceso dado que alcanzan la máxima cintura con el mínimo orden, comprobamos que subdivisiones de grafos bien conocidos, como son el grafo completo  $K_4$ , el grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  y la jaulas de Petersen y Heawood, poseen dicha propiedad. Creemos que también la cumplen los grafos obtenidos mediante subdivisiones de la jaula de Tutte-Coxeter, pero en este caso sólo hemos logrado probar que infinitos grafos así construidos son extremales.

Esta primera conexión entre los grafos extremales y las jaulas no es la única relación existente entre ambos conjuntos. De hecho, en [51] sus autores prueban que la  $(3; 5)$ -jaula de Petersen y la  $(7; 5)$ -jaula de Hoffman-Singleton son grafos extremales para  $n = 4$ . Este resultado es general y confirmamos que en realidad todas las jaulas minimales con cintura  $g$  son extremales para  $n = g - 1$ , verificándose incluso que las  $(r; g)$ -jaulas minimales son los únicos elementos del conjunto  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ .

Como consecuencia de ello deducimos resultados asintóticos de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para los casos  $n \in \{5, 6, 7, 10, 11\}$ .

## **3.2 Valores $\nu_k(n)$ para $k \in \{0, 1, 2\}$ .**

Recordamos que estamos interesados en determinar la máxima cantidad de aristas que puede contener un grafo con orden dado y cintura inferiormente acotada.

Según hemos obtenido en el capítulo anterior el conocimiento de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  está unido al de la determinación de unas cantidades  $\nu_k(n)$  que proporcionan la mínima cantidad de vértices que debe poseer

todo grafo  $G$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  para poder contener  $k \geq 0$  aristas más que vértices. De hecho, según la igualdad (2.2), para todo  $\nu$  perteneciente al intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  se verifica que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k$ .

Para todo  $n \geq 4$  las primeras de estas cantidades  $\nu_k(n)$  son fáciles de determinar. Queremos señalar que el valor de  $\nu_1(n)$  ha sido previamente obtenido en [9] y en este caso presentamos una demostración alternativa.

**Proposición 3.2.1** *Para todo  $n \geq 4$  se cumple que*

- i)  $\nu_0(n) = n + 1$ ,
- ii)  $\nu_1(n) = \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil$ ,
- iii)  $\nu_2(n) = 2n$ .

*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero. Recordamos que  $\nu_k(n)$  representa el mínimo orden de un grafo con exceso  $k$  y cintura al menos  $n + 1$ .

- i) Como es lógico, para todo  $\nu$  tal que  $1 \leq \nu \leq n$  cualquier grafo  $G$  de orden  $\nu$  y libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  no contiene ciclo alguno, y por tanto su tamaño es a lo sumo  $\nu - 1$ . Además la consideración del ciclo  $C_{n+1}$  permite afirmar que

$$\nu_0(n) = \min \left\{ \nu(G) : g(G) > n, e(G) = \nu(G) \right\} = n + 1.$$

- ii) Por un lado, a partir de la desigualdad (2.4)  $\nu_1(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(1)} - 1 \right\rceil$ , y del valor  $g(1) = \frac{2}{3}$  [19], se deduce que  $\nu_1(n) \geq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ .

Por otro lado, para cada  $n \geq 4$  consideramos el grafo de la Figura 3.1. Se trata de un grafo con cintura  $n + 1$ , exceso 1 y orden  $\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ . Por tanto  $\nu_1(n) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ . Ambas desigualdades de  $\nu_1(n)$  conducen a su determinación.

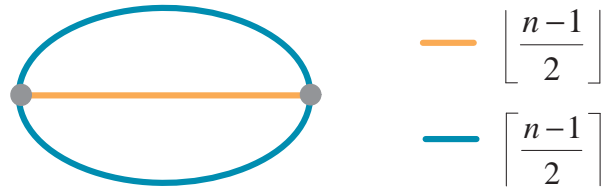


Figura 3.1: Grafo del conjunto  $G_1(n)$  con orden mínimo  $\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ .

iii) De manera análoga, la acotación  $\nu_2(n) \geq 2n$  se obtiene de la desigualdad (2.4) dada por  $\nu_2(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(2)} - 2 \right\rceil$  y del valor  $g(2) = \frac{1}{2}$  [19].

Además, el grafo de la Figura 3.2 tiene orden  $2n$  y pertenece al conjunto  $G_2(n)$  pues tiene exceso 2 y cintura  $n+1$ , lo que permite asegurar que  $\nu_2(n) = \min\{\nu(G) : G \in G_2(n)\} \leq 2n$ .

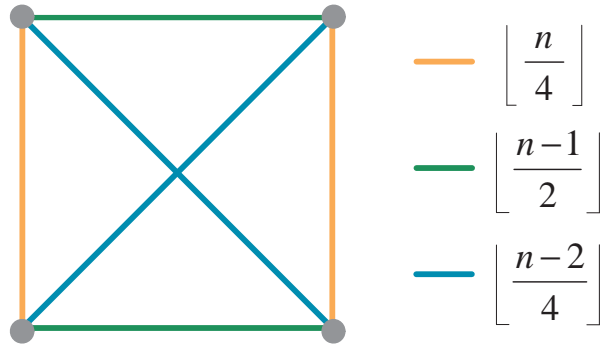


Figura 3.2: Grafo del conjunto  $G_2(n)$  con mínimo orden  $2n$ .

Ambas desigualdades conducen a la igualdad deseada.

⊗

Señalamos que como para cada orden  $\nu$  del intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  se verifica que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k$ , hasta este momento hemos determinado de manera exacta el valor de la función extremal para todo  $n \geq 4$  y  $\nu \leq 2n$ .

**Observación 3.2.2** Una vez encontradas las primeras cantidades  $\nu_0(n)$ ,  $\nu_1(n)$  y  $\nu_2(n)$  es inmediato comprobar que la cota del tercer apartado del Lema 2.2.10, dada por  $\nu_{k+1}(n) \leq \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , es una igualdad para los excesos  $k = 0$  y  $k = 1$ , aunque en este último caso solamente cuando  $n$  es impar.

Según hemos comentado en la Observación 2.2.18, esto se interpreta como la existencia de la máxima cantidad posible de órdenes  $\nu$  tales que los grafos del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen excesos 0 ó 1.

### 3.3 Valores $\nu_k(n)$ para $k \geq 3$ .

Seguimos con nuestro interés por determinar las cantidades  $\nu_k(n)$ , ya que ellas proporcionan la mínima cantidad de vértices que debe contener cualquier grafo libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  para poder poseer  $k$  aristas más que vértices.

A diferencia de los casos anteriores  $k \in \{0, 1, 2\}$ , la cota de la desigualdad (2.4)  $\nu_k(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(k)} - k \right\rceil$ , no se alcanza para los excesos  $k \in \{3, 4, 5\}$  y todo  $n \geq 4$ . Por esta razón, vamos a detallar a continuación unos resultados previos que nos permitirán en esta sección determinar las cantidades  $\nu_k(n)$  para  $k \in \{3, 4, 5\}$ , y posteriormente en el Capítulo 4 la caracterización de los grafos extremales con excesos 3 y 4.

Recordamos que dados un grafo  $G$ , un vértice  $x$  de  $V(G)$  y entero positivo  $i \leq D(G)$  se denota por  $N_i(x)$  el conjunto de vértices de  $G$  situados a distancia  $i$  de  $x$ , es decir,

$$N_i(x) = \{y \in V(G) : d_G(x, y) = i\}.$$

Como los grafos que nos interesan tienen la cintura inferiormente acotada, es fácil obtener una acotación general de su orden en función de los conjuntos  $N_i(x)$ .

**Lema 3.3.1** *Sea  $G$  un grafo con  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) > n$ . Para cualquier v3rtice  $x$  de  $G$  se cumple que*

$$\nu(G) \geq 1 + |N_1(x)| + \cdots + |N_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x)|,$$

verific3ndose que para  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$|N_1(x)| = \delta(x) \quad \text{y} \quad |N_i(x)| = \sum_{y \in N_{i-1}(x)} (\delta(y) - 1).$$

Adem3s cuando  $n$  es impar,  $\sum_{y \in N_{\frac{n+1}{2}}(x)} \delta(y) \geq \sum_{y \in N_{\frac{n-1}{2}}(x)} (\delta(y) - 1)$ .

*Demostraci3n:* Sea  $G$  cualquier grafo sin ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y con valencia m3nima al menos 2.

Como  $g(G) \geq n + 1$  y  $\delta(G) \geq 2$ , para cualquier v3rtice  $x$  de  $V(G)$  se cumple que los conjuntos  $N_1(x), N_2(x), \dots, N_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x)$  son no vac3os y por tal raz3n

$$\nu(G) \geq 1 + |N_1(x)| + \cdots + |N_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x)|.$$

Incluso para todo  $i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  cada  $N_i(x)$  es un conjunto independiente de v3rtices, e incluso cuando  $i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$  dos v3rtices de  $N_i(x)$  no pueden tener un vecino com3n en  $N_{i+1}(x)$ . Esto puede expresarse, para  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , mediante la igualdad

$$|N_i(x)| = \sum_{y \in N_{i-1}(x)} (\delta(y) - 1).$$

En el caso particular de que  $n$  sea *impar*, pueden existir v3rtices diferentes en  $N_{\frac{n-1}{2}}(x)$  adyacentes a un mismo v3rtice de  $N_{\frac{n+1}{2}}(x)$ . Incluso los v3rtices de este 3ltimo conjunto pueden ser adyacentes entre s3 o ser adyacentes a v3rtices situados a mayor distancia de  $x$ , lo que se expresa mediante la desigualdad

$$\sum_{y \in N_{\frac{n+1}{2}}(x)} \delta(y) \geq \sum_{y \in N_{\frac{n-1}{2}}(x)} (\delta(y) - 1).$$

En función de las valencias máxima y mínima, una primera acotación del mínimo orden de cualquier grafo libre de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  viene expresada mediante la desigualdad (1.10). Por otra parte, sabemos por el Teorema 2.2.20, que la mayor parte de los grafos extremales que estamos considerando se obtienen subdividiendo aristas, y en consecuencia su valencia mínima es a lo sumo 2. Una mejora de la desigualdad (1.10) para el caso particular  $\delta = 2$  proporciona óptimos resultados cuando los excesos son pequeños, como veremos más adelante.

**Proposición 3.3.2** *Para  $k \geq 2$  entero, sea  $G$  cualquier grafo del conjunto  $G_k(n)$  y  $x$  un vértice de  $V(G)$  de valencia máxima  $\Delta$ . Se verifica que*

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{2 + \Delta(n-1) + \nu_{k-\Delta+1}(n)}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{2 + \Delta(n-2) + \nu_{k-\Delta+1}(n) + |N_{\frac{n+1}{2}}(x)|}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el caso de que  $\Delta = 3$  se cumple incluso que

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{k(\nu_{k-2}(n) - 1)}{k-1} \right\rceil.$$

*Demostración:* Para  $k \geq 2$ , sea  $G$  cualquier grafo de la familia  $G_k(n)$ . Como vamos a determinar el mínimo orden de  $G$  podemos asumir que éste no contiene vértices de valencia 1.

Sea  $x$  un vértice de  $V(G)$  tal que  $\delta(x) = \Delta$ . Consideramos todos los  $\Delta$  caminos disjuntos de longitud máxima incidentes en  $x$  y formados por vértices consecutivos de valencia 2. Para  $i = 1, \dots, \Delta$  denotamos por  $\eta_i(x)$  la cantidad de vértices consecutivos de valencia 2 contenidos en cada uno de tales caminos y por  $\eta(x) = \sum_{i=1}^{\Delta} \eta_i(x)$ . Nótese que alguna de las cantidades  $\eta_i(x)$  puede ser nula.

El subgrafo  $G'$ , obtenido al eliminar de  $G$  el vértice  $x$  y los  $\eta(x)$  vértices de valencia 2 contenidos en los  $\Delta$  caminos incidentes en  $x$ , pertenece a  $G_{k-\Delta+1}(n)$ ,

y por lo tanto, verifica que

$$\nu_{k-\Delta+1}(n) \leq \nu(G') = \nu(G) - (1 + \eta(x)).$$

En consecuencia,

$$\nu(G) \geq \nu_{k-\Delta+1}(n) + 1 + \eta(x). \quad (3.1)$$

Mediante esta desigualdad vemos que es suficiente acotar  $\eta(x)$  para conseguir una cota de  $\nu(G)$ . Para ello, denotamos por  $l$ ,  $0 \leq l \leq \Delta$ , la cantidad de caminos tales que  $0 \leq \eta_i(x) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  para  $1 \leq i \leq l$ , y de modo que  $\eta_i(x) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  para  $l+1 \leq i \leq \Delta$ .

Como  $G$  no contiene los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  se verifica que

$$\begin{aligned} \nu(G) &\geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |N_i(x)| \\ &\geq \begin{cases} 1 + \Delta \frac{n}{2} + l \left( \frac{n}{2} - 1 \right) - \sum_{i=1}^l \eta_i(x) & \text{si } n \text{ par;} \\ 1 + \Delta \left( \frac{n-1}{2} \right) + l \left( \frac{n-1}{2} - 1 \right) - \sum_{i=1}^l \eta_i(x) + |N_{\frac{n+1}{2}}(x)| & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por ello, cuando  $n$  es par se cumple que

$$\begin{aligned} \eta(x) &\geq \sum_{i=1}^l \eta_i(x) + (\Delta - l) \frac{n}{2} \\ &\geq 1 + \Delta \frac{n}{2} + l \left( \frac{n}{2} - 1 \right) - \nu(G) + (\Delta - l) \frac{n}{2} \\ &\geq 1 + \Delta n - \Delta - \nu(G), \end{aligned}$$

y cuando  $n$  es impar que

$$\begin{aligned} \eta(x) &\geq \sum_{i=1}^l \eta_i(x) + (\Delta - l) \frac{n-1}{2} \\ &\geq 1 + \Delta \left( \frac{n-1}{2} \right) + l \left( \frac{n-3}{2} \right) - \nu(G) + |N_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(x)| + (\Delta - l) \frac{n-1}{2} \\ &\geq 1 + \Delta n - 2\Delta - \nu(G) + |N_{\frac{n+1}{2}}(x)|. \end{aligned}$$

Esta cota de  $\eta(x)$  junto con la desigualdad (3.1) completan la prueba.

En el caso particular de que la valencia máxima sea 3 la cota inferior que acabamos de obtener puede mejorarse.

Según hemos comentado en el Capítulo 2 a partir de la ecuación (1.1) y de la igualdad (1.4) se deduce trivialmente que todo grafo cúbico  $G$  con exceso  $k$  consta de  $2k$  vértices unidos por  $3k$  aristas. De forma análoga todo grafo simple de exceso  $k$  con valencia mínima 2 y máxima 3 puede considerarse obtenido mediante subdivisiones de un grafo cúbico y tiene, por tanto,  $2k$  vértices de valencia 3 unidos por  $3k$  caminos disjuntos formados por vértices de valencia 2. En consecuencia, la cantidad media de vértices de valencia 2 de cada uno de dichos caminos es

$$\frac{\nu(G) - 2k}{3k},$$

y por tanto, existe al menos un vértice  $x$  en  $V(G)$  tal que

$$\eta(x) \geq \frac{\nu(G) - 2k}{k}.$$

Esta cota junto con la desigualdad (3.1) nos permite concluir que

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{k(\nu_{k-2}(n) - 1)}{k-1} \right\rceil \text{ cuando } \Delta = 3.$$

⊗

Subdividiendo las aristas de un grafo con exceso prefijado se alcanza cintura tan grande como se desea, pero no existen caminos arbitrariamente largos formados exclusivamente por vértices de valencia 2.

**Lema 3.3.3** *Sea  $n \geq 4$ . Todo grafo  $G$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y con exceso  $k \geq 1$  contiene a lo sumo  $\nu(G) - \nu_{k-1}(n)$  vértices de valencia 2 consecutivos.*



*Demostración:* Sea  $G$  cualquier grafo libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k \geq 1$ , lo que garantiza presencia de algún ciclo en  $G$  y por tanto cintura finita.

Si suponemos que  $G$  posee  $\nu(G) - \nu_{k-1}(n) + 1$  vértices de valencia 2 consecutivos, el grafo  $G'$  resultante de eliminar dichos vértices de  $G$ , tiene cintura  $g(G') \geq g(G) > n$ , orden

$$\nu(G') = \nu(G) - (\nu(G) - \nu_{k-1}(n) + 1) = \nu_{k-1}(n) - 1$$

y tamaño

$$e(G') = \nu(G) + k - (\nu(G) - \nu_{k-1}(n) + 2) = \nu_{k-1}(n) + k - 2 = \nu(G') + k - 1,$$

contradiciéndose la definición de que  $\nu_{k-1}(n)$  es el orden mínimo que debe tener cualquier grafo con exceso  $k - 1$  para alcanzar cintura al menos  $n + 1$ .

⊗

La valencia máxima de los grafos extremales puede también acotarse en función de su exceso.

**Lema 3.3.4** Sean  $n \geq 4$  y  $k \geq 0$  enteros. Todo grafo  $G$  del conjunto  $EX_k(n)$  con valencia mínima al menos 2 cumple que

$$\Delta(G) \leq k + 2.$$

*Demostración:* Suponemos que para algún  $n \geq 4$  y  $k \geq 0$  existe un grafo extremal  $G$  en el conjunto  $EX_k(n)$  con  $\delta(G) \geq 2$  y  $\Delta(G) \geq k + 3$ .

Según la desigualdad (1.10) se cumple que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 1 + (k + 3) \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 + (k + 3) \frac{n - 1}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

pero esta cantidad, por el Lema 2.2.8, es mayor o igual que  $\nu_{k+1}(n)$ , y por tanto,

$$\nu(G) \geq \nu_{k+1}(n),$$

lo cual contradice la Proposición 2.2.17 pues al ser  $G$  un grafo de la familia extremal  $EX_k(n)$  su orden pertenece al intervalo  $I_k(n) = [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)]$ .

⊗

Antes de determinar de manera exacta las cantidades  $\nu_3(n)$  y  $\nu_4(n)$  vamos a encontrar, en función de la valencia máxima, el mínimo orden que debe tener cualquier grafo libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  para poder poseer tres o cuatro aristas más que vértices. Con especial detalle estudiamos los grafos  $G$  cuya valencia máxima  $\Delta \leq e(G) - \nu(G) + 2$  ya que ésta es una condición necesaria de todo grafo extremal, según acabamos de probar en el Lema 3.3.4. Esta forma de proceder nos facilitará en el Capítulo 4 la caracterización de los grafos extremales con excesos 3 y 4.

**Teorema 3.3.5** Sean  $n \geq 4$  y  $G$  un grafo de  $G_3(n)$ .

$$i) \text{ Si } \Delta(G) = 3, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$ii) \text{ Si } \Delta(G) = 4, \text{ entonces } \nu(G) \geq \left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil.$$

$$iii) \text{ Si } \Delta(G) = 5, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} \frac{5n+2}{2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ \frac{5n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$iv) \text{ Si } \Delta(G) \geq 6, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 3n-1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo del conjunto  $G_3(n)$ , es decir, tal que  $g(G) \geq n + 1$  y  $e(G) - \nu(G) = 3$ .

Como buscamos el mínimo orden de  $G$  podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $G$  no contiene vértices de valencia 1. Por otra parte, cuando  $\delta(G) \geq 3$  la desigualdad (1.10) establece que el orden del grafo  $G$  verifica

$$\begin{aligned} \nu(G) &\geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} + (\delta - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 2 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \cdot (2^{\frac{n+1}{2}} - 1) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos observar que cuando  $\delta(G) \geq 3$  la cota inferior obtenida del orden de  $G$  supera ampliamente a las que deseamos probar. Por tanto, centramos el estudio en el caso  $\delta(G) = 2$  y deducimos el mínimo orden de  $G$  dependiendo de su valencia máxima.

i) Si  $\Delta(G) = 3$ , mediante el segundo apartado de la Proposición 3.3.2, obtenemos que

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{3}{2} (\nu_1(n) - 1) \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \left\lceil \frac{3n-1}{2} \right\rceil \right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

ii) Si  $\Delta(G) = 4$ , consideramos  $x$  un vértice de  $V(G)$  tal que  $\delta(x) = 4$ . En tal caso, la Proposición 3.3.2 y el valor  $\nu_0(n) = n + 1$  proporcionan una cota inferior del orden de  $G$  dada por

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{5n-5 + |N_{\frac{n+1}{2}}(x)|}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, para  $n$  par y  $\Delta = 4$  hemos obtenido la acotación deseada. Cuando  $n$  es impar suponemos que se puede construir un grafo  $G$  en el conjunto  $G_3(n)$  con  $\Delta(G) = 4$ ,  $\delta(G) = 2$  y de modo que  $\nu(G) < \frac{5n-1}{2}$ . Por el Lema 3.3.3 y la Proposición 3.2.1, sabemos que tal grafo  $G$  contiene a lo sumo

$$\nu(G) - \nu_2(n) \leq \frac{5n-1}{2} - 1 - 2n = \frac{n-3}{2}$$

vértices de valencia 2 consecutivos, lo que garantiza la existencia de al menos cuatro vértices, cada uno con valencia al menos 3, en el conjunto  $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} N_i(x)$ . Así se prueba la existencia en  $G$  de al menos 5 vértices de valencia mayor que 2, lo que junto a la igualdad (1.4) permite establecer que

$$\begin{cases} n_3 + n_4 & \geq 5 \\ n_3 + 2n_4 & = 6 \\ n_4 & \geq 1. \end{cases}$$

Como su única solución es  $n_3 = 4$  y  $n_4 = 1$  deducimos que el grafo  $G$  tiene necesariamente cuatro vértices de valencia 3, un vértice de valencia 4 y en  $N_{\frac{n+1}{2}}(x)$  solamente existen vértices de valencia 2 cuya suma de valencias, sabemos por el Lema 3.3.1, verifica

$$\sum_{y \in N_{\frac{n+1}{2}}(x)} \delta(y) \geq \sum_{y \in N_{\frac{n-1}{2}}(x)} (\delta(y) - 1) = 8.$$

Consecuentemente,  $|N_{\frac{n+1}{2}}(x)| \geq 4$  y aplicando la Proposición 3.3.2 obtenemos que  $\nu(G) \geq \frac{5n-1}{2}$ , lo cual contradice el orden del grafo  $G$ .

Por tanto, para todo  $n \geq 4$  hemos deducido que cualquier grafo con exceso 3,  $\Delta = 4$ ,  $\delta = 2$  y cintura al menos  $n+1$  tiene orden al menos  $\left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil$ .

iii) Si  $\Delta(G) \geq 5$ , la cotas enunciadas se obtienen como consecuencia directa de la desigualdad (1.10) aplicada al caso  $\delta(G) = 2$ .

⊗

El resultado que acabamos de probar, que nos proporciona información acerca del orden mínimo de cualquier grafo libre de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso 3 en función de su valencia máxima, nos permitirá en el Capítulo 4 obtener la caracterización completa de los grafos extremales con exceso 3.

Según acabamos de probar, los grafos exceso 3, cintura al menos  $n + 1$  y mínimo orden tienen valencia máxima 3.

**Proposición 3.3.6** *Para todo  $n \geq 4$  se verifica que*

$$\nu_3(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero.

Por un lado, el Teorema 3.3.5 prueba que

$$\nu_3(n) = \min \{ \nu(G) : G \in G_3(n) \} \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por otro lado, para cada  $n \geq 4$  consideramos el grafo obtenido al subdividir cada arista del grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  la cantidad de veces indicada según su color en la Figura 3.3 adjunta.

Este grafo pertenece al conjunto  $G_3(n)$  pues tiene exceso 3 y cintura  $n + 1$ .

Como su orden es

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

simplemente teniendo en cuenta la definición de  $\nu_3(n)$ , podemos establecer la igualdad deseada.

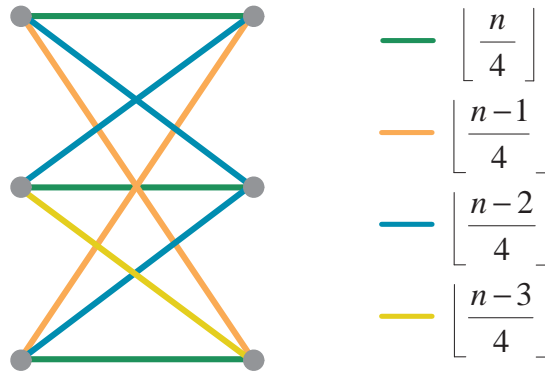


Figura 3.3: Grafo con exceso 3, cintura  $n + 1$  y orden  $\nu_3(n)$ .

⊗

Hacemos notar que la desigualdad (2.4)  $\nu_3(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(3)} - 3 \right\rceil = \left\lceil \frac{9n-3}{4} \right\rceil$  se alcanza salvo para los valores  $n = 2 \pmod{4}$ .

Una vez determinadas las cantidades  $\nu_2(n)$  y  $\nu_3(n)$  podemos concluir que el resultado proporcionado en [63] y dado por

$$ex(2n+2; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = 2n+4$$

para todo  $n \geq 12$ , es simplemente una consecuencia inmediata del conocimiento del intervalo extremal de exceso 2, dado por

$$I_2(n) = \left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 2 \right\} = \left[ \nu_2(n), \nu_3(n) \right),$$

debido a que para todo  $n \geq 12$  el orden  $\nu = 2n + 2$  pertenece a tal intervalo.

Como ya hemos comentado, procedemos a determinar también la cantidad

$$\nu_4(n) = \min \left\{ \nu(G) : e(G) - \nu(G) = 4, g(G) \geq n + 1 \right\}.$$

Con este objetivo calculamos el mínimo orden de cualquier grafo con exceso 4 y cintura al menos  $n + 1$  dependiendo de las características de su esqueleto y de

su valencia máxima. Esta forma de proceder nos ayudará en el Capítulo 4 a la identificación de los grafos extremales cuyo exceso es 4.

**Teorema 3.3.7** Sean  $n \geq 4$  entero y  $G$  un grafo del conjunto  $G_4(n)$ .

i) Si  $\tilde{G}$  no es un grafo simple, entonces  $\nu(G) \geq 3n - 1$ .

ii) Si  $\tilde{G}$  es un grafo simple y

$$ii_1) \Delta(G) = 3, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{8n-2}{3} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

$$ii_2) \Delta(G) = 4, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{11n-2}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\lfloor \frac{11n-5}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

$$ii_3) \Delta(G) = 5, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} 3n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n-2 & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

$$ii_4) \Delta(G) \geq 6, \text{ entonces } \nu(G) \geq \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n-1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $G$  cualquier grafo con exceso 4 y cintura al menos  $n + 1$ . Para obtener el orden mínimo que debe tener un grafo con estas características, podemos suponer que  $G$  no contiene vértices de valencia 1. Por otra parte, cuando  $\delta(G) \geq 3$  la desigualdad (1.10) establece la siguiente acotación

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 2 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \cdot (2^{\frac{n+1}{2}} - 1) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

Podemos observar que cuando  $\delta(G) \geq 3$  la cota inferior obtenida del orden de  $G$  supera ampliamente a las que deseamos probar. Por tanto, centramos el estudio en el caso  $\delta(G) = 2$  y deducimos el mínimo orden que debe tener  $G$  dependiendo de las características de su esqueleto  $\tilde{G}$  y su valencia máxima.

*i)* Si  $\tilde{G}$  es un pseudografo o un multigrafo, entonces existe un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente uno ó dos vértices de valencia al menos 3 respectivamente. Consideramos el subgrafo  $G'$  obtenido al eliminar de  $G$  todo el ciclo  $C$  salvo sus vértices de valencia al menos 3.

Cuando  $\tilde{G}$  es un pseudografo, este subgrafo  $G'$  pertenece a  $G_3(n)$ , y en consecuencia,

$$\nu(G) = \nu(C) - 1 + \nu(G') \geq n + \nu_3(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{13n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{13n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Cuando  $\tilde{G}$  es un multigrafo, el grafo  $G'$  pertenece a  $G_2(n)$  y

$$\nu(G) = \nu(C) - 2 + \nu(G') \geq n - 1 + \nu_2(n) \geq 3n - 1.$$

*ii)* Por tanto, estudiamos el caso en el que el esqueleto de  $G$  es un grafo simple, y determinamos el mínimo orden de  $G$  dependiendo de su valencia máxima.

*ii<sub>1</sub>)* Cuando  $\Delta(G) = 3$ , el grafo  $G$  tiene ocho vértices de valencia máxima y distinguimos dos casos dependiendo de la cintura de su esqueleto ya que, según el Corolario 2.3.4, se verifica que

$$g(\tilde{G}) \leq 4.$$

*ii<sub>11</sub>)* En primer lugar, suponemos que  $g(\tilde{G}) = 3$ , lo que garantiza la existencia de un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente tres vértices de valencia 3. Los tres caminos de  $C$  que los unen contienen al menos  $n - 2$  vértices de valencia 2, y por tanto, dos de dichos caminos contienen conjuntamente al menos

$$\left\lceil 2 \frac{n-2}{3} \right\rceil$$

vértices de valencia 2.



El subgrafo obtenido al eliminar de  $G$  los dos caminos más largos de  $C$  y el vértice de valencia 3 común a ambos, pertenece a  $G_2(n)$ , y por tanto,

$$\nu(G) \geq \nu_2(n) + \left\lceil 2 \frac{n-2}{3} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil.$$

Esta cota es mejorable, como veremos posteriormente en la caracterización de los grafos extremales de exceso 4, sin embargo es suficiente para nuestro objetivo inmediato de obtener el valor  $\nu_4(n)$ .

$i_{12}$ ) En segundo lugar, suponemos que  $g(\tilde{G}) = 4$ . Obviamente, en tal caso existe un ciclo  $C$  en  $G$  con cuatro vértices de valencia 3 que denotamos  $x_1, \dots, x_4$ . El subgrafo  $G^* = G - \{u : u \in C\}$  pertenece a  $G_0(n)$  y por lo tanto contiene un único ciclo  $C^*$ , también con cuatro vértices de valencia 3, que denotamos por  $z_1, \dots, z_4$ .

En  $G$  existen además cuatro caminos, que denotamos por  $P_i$ , que unen cada vértice  $x_i$  en  $C$  con  $z_i$  en  $C^*$  para  $1 \leq i \leq 4$ . Por  $\eta_i$  denotamos la cantidad de vértices de valencia 2 en cada uno de los caminos  $P_i$  y por  $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_4$ .

Consideramos  $\binom{4}{2} = 6$  ciclos en el grafo  $G$ . Como  $g(G) > n$  se cumple, para  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$  con  $i \neq j$ , que

$$d_{P_i}(x_i, z_i) + d_{C^*}(z_i, z_j) + d_{P_j}(z_j, x_j) + d_C(x_j, x_i) \geq n + 1,$$

lo que equivale a

$$\eta_i + 1 + d_{C^*}(z_i, z_j) + \eta_j + 1 + d_C(x_j, x_i) \geq n + 1.$$

Sumando estas seis desigualdades obtenemos que

$$3\eta + \sum_{i,j=1}^4 d_{C^*}(z_i, z_j) + \sum_{i,j=1}^4 d_C(x_i, x_j) \geq 6(n-1).$$

Teniendo en cuenta que dos vértices en un ciclo distan a lo sumo

su diámetro se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^4 d_{C^*}(z_i, z_j) + \sum_{i,j=1}^4 d_C(x_i, x_j) &\leq \nu(C^*) + 2D(C^*) + \nu(C) + 2D(C) \\ &= \nu(C^*) + 2 \left\lfloor \frac{\nu(C^*)}{2} \right\rfloor + \nu(C) + 2 \left\lfloor \frac{\nu(C)}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 3\nu(G) &= 3(\nu(C) + \nu(C^*) + \eta) \\ &\geq 2\nu(C) + 2\nu(C^*) + 6(n-1) - 2 \left\lfloor \frac{\nu(C)}{2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{\nu(C^*)}{2} \right\rfloor \\ &= 2 \left\lceil \frac{\nu(C)}{2} \right\rceil + 2 \left\lceil \frac{\nu(C^*)}{2} \right\rceil + 6(n-1) \\ &\geq 4 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 6(n-1) \\ &= \begin{cases} 8n-2 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 8n-4 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Despejando  $\nu(G)$  y observando que

$$\left\lceil \frac{8n-4}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor$$

se obtiene que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{8n-2}{3} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*ii*<sub>2</sub>) Si  $\Delta(G) = 4$ , consideramos  $x$  un vértice de  $V(G)$  tal que  $\delta(x) = 4$ . En tal caso, la Proposición 3.3.2 y el valor  $\nu_1(n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$  proporcionan una cota inferior del orden de  $G$  dada por

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{11n-2}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{11n-11+2|N_{\frac{n+1}{2}}(x)|}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, para  $n$  par y  $\Delta(G) = 4$  hemos obtenido la acotación deseada. Cuando  $n$  es impar suponemos que se puede construir un

grafo  $G$  en el conjunto  $G_4(n)$  con  $\delta(G) = 2$ ,  $\Delta(G) = 4$  y de modo que  $\nu(G) < \left\lceil \frac{11n-5}{4} \right\rceil$ .

Por el Lema 3.3.3 y la Proposición 3.2.1, dicho grafo contiene a lo sumo

$$\nu(G) - \nu_3(n) \leq \left\lceil \frac{11n-5}{4} \right\rceil - 1 - \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor = \frac{n-3}{2}$$

vértices de valencia 2 consecutivos, lo que garantiza la existencia de al menos cuatro vértices con valencia al menos 3 en el conjunto  $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} N_i(x)$ . De esta manera se prueba la existencia en  $G$  de al menos 5 vértices de valencia mayor que 2, lo que junto a la igualdad (1.4) permite establecer que

$$\begin{cases} n_3 + n_4 & \geq 5 \\ n_3 + 2n_4 & = 8 \\ n_4 & \geq 1. \end{cases}$$

Como además, por el Lema 3.3.1, se tiene que

$$\sum_{y \in N_{\frac{n+1}{2}}(x)} \delta(y) \geq \sum_{y \in N_{\frac{n-1}{2}}(x)} (\delta(y) - 1) \geq 8,$$

las únicas soluciones del sistema anterior

$$(n_3 = 6, n_4 = 1), (n_3 = 4, n_4 = 2) \text{ y } (n_3 = 2, n_4 = 3)$$

implican la existencia de al menos tres vértices en el conjunto  $N_{\frac{n+1}{2}}(x)$  y aplicando la Proposición 3.3.2 obtenemos que

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{11n-5}{4} \right\rceil.$$

*ii<sub>3</sub>*) Si  $\Delta(G) = 5$ , consideramos  $x$  un vértice de  $V(G)$  tal que  $\delta(x) = 5$ . En tal caso, la Proposición 3.3.2 y el valor  $\nu_0(n) = n + 1$  proporcionan una cota inferior del orden de  $G$  dada por

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 3n - 1 & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{6n - 7 + |N_{\frac{n+1}{2}}(x)|}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Cuando  $n$  es impar vamos a probar que  $|N_{\frac{n+1}{2}}(x)| \geq 2$ . Si suponemos la existencia de un único vértice  $s$  en el conjunto  $N_{\frac{n+1}{2}}(x)$ , entonces como  $\delta(G) = 2$  y  $\Delta(G) = 5$  se cumple que  $5 = \delta(x) \leq \delta(s) \leq 5$ . Por lo tanto,  $\delta(s) = 5$  y  $G$  contiene dos vértices de valencia 5 unidos por 5 caminos disjuntos, lo que implica que el esqueleto de  $G$  es un multigrafo, lo cual contradice que  $\tilde{G}$  es un grafo simple.

Una vez probado que  $|N_{\frac{n+1}{2}}(x)| \geq 2$ , la Proposición 3.3.2 asegura que  $\nu(G) \geq 3n - 2$  cuando  $n$  es impar.

*ii<sub>4</sub>*) Cuando  $\Delta(G) \geq 6$  la cota inferior del orden de  $G$  enunciada es una consecuencia inmediata de la desigualdad (1.10) para  $\delta(G) = 2$ .

⊗

Observemos que, según acabamos de probar, los grafos del conjunto  $G_4(n)$  con mínimo orden son los que tienen valencia máxima 3 y de modo que su esqueleto tiene cintura máxima 4.

El estudio que acabamos de realizar nos permite determinar a continuación la cantidad  $\nu_4(n)$ , y posteriormente en el Capítulo 4 caracterizar los grafos extremales con exceso 4.

**Proposición 3.3.8** *Para todo  $n \geq 4$  entero se cumple que*

$$\nu_4(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{8n-2}{3} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Consideramos el grafo  $G$  detallado en la Figura 3.4 adjunta.

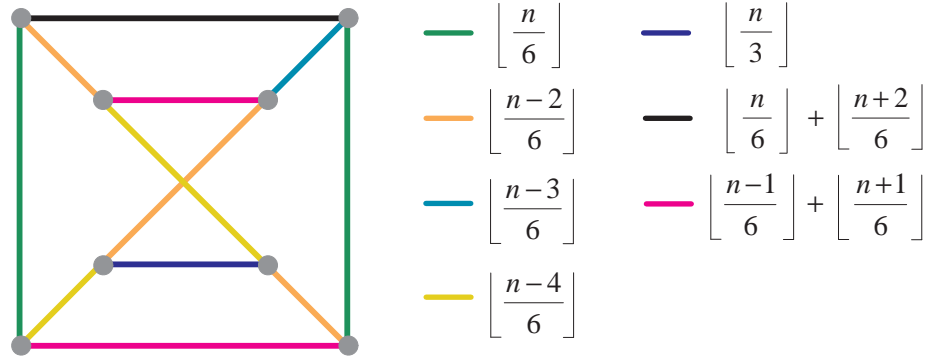


Figura 3.4: Grafo extremal con exceso 4, cintura  $n + 1$  y mínimo orden  $\nu_4(n)$ .

Este grafo tiene exceso 4, cintura  $n + 1$  y por definición se cumple que

$$\nu_4(n) \leq \nu(G) = \begin{cases} \left\lceil \frac{8n-2}{3} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La otra desigualdad es consecuencia del Teorema 3.3.7.

⊗

Hacemos notar que la desigualdad (2.4)  $\nu_4(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(4)} - 4 \right\rceil = \left\lceil \frac{8n-4}{3} \right\rceil$  se alcanza salvo para los valores  $n = 0, 2 \pmod 6$ .

De una manera más sencilla a los dos casos anteriores se puede determinar la cantidad  $\nu_5(n)$ .

**Proposición 3.3.9** *Para todo  $n \geq 4$  se cumple que*

$$\nu_5(n) = \begin{cases} 3n - 2 & \text{si } n \neq 6; \\ 17 & \text{si } n = 6. \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $n \geq 4$ . Por un lado, del conocido valor  $g(5) = \frac{1}{3}$  [19] y de la desigualdad (2.4)  $\nu_5(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(5)} - 5 \right\rceil$ , se deduce que  $\nu_5(n) \geq 3n - 2$ .

Por otro lado, para cada  $n \geq 4$  y  $n \neq 6$  consideramos el grafo  $G$  obtenido subdividiendo cada arista de la jaula de Petersen la cantidad de veces indicada según su color en la Figura 3.5 adjunta.

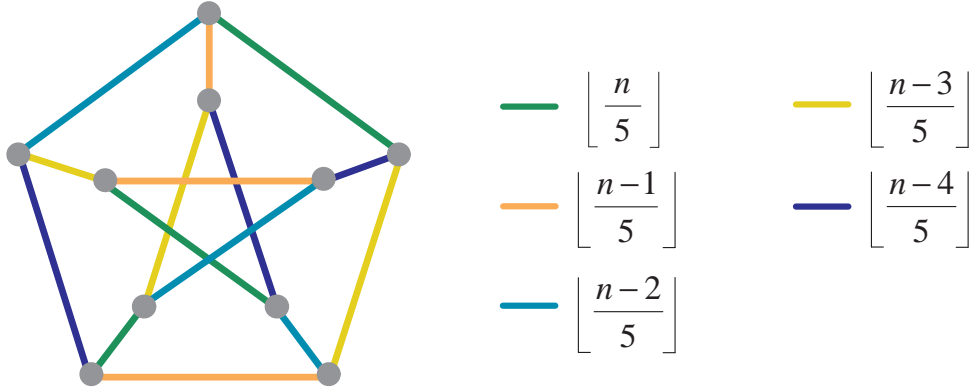


Figura 3.5: Grafo extremal con exceso 5, cintura  $n + 1$  y orden  $3n - 2$ , para  $n \neq 6$ .

Así se tiene que para todo  $n \neq 6$  la cantidad  $\nu_5(n) \leq \nu(G) = 3n - 2$ . Ambas desigualdades conducen a la igualdad deseada para todo  $n \neq 6$ .

Cuando  $n = 6$  el grafo de la Figura 3.5 tiene orden  $3n - 2 = 16$  pero tiene cintura 6. En realidad no es posible construir grafos con exceso 5, cintura 7 y orden  $3n - 2 = 16$ , pues la existencia de un grafo  $G$  con dichas características conduce a la igualdad  $\nu_4(6) = \nu_5(6) = 16$ , y según la Proposición 2.2.12, tal grafo  $G$  tendría valencia mínima al menos 3, contradiciendo la desigualdad (1.10) de la manera siguiente

$$16 = \nu(G) \geq 1 + \Delta + \Delta(\delta - 1) + \Delta(\delta - 1)^2 \geq 22.$$

Por tanto, deducimos en primer lugar que  $\nu_5(6) \geq 17$ .

Como con 17 vértices sí es posible construir algún grafo con exceso 5 y cintura 7, como por ejemplo el de la Figura 3.6, se prueba que

$$\nu_5(6) = \min \left\{ \nu(G) : g(G) \geq 7, e(G) - \nu(G) = 5 \right\} \leq 17.$$

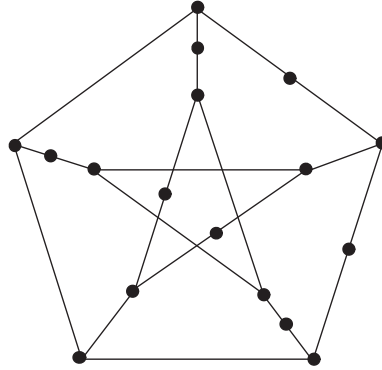


Figura 3.6: Grafo extremal con exceso 5, cintura 7 y mínimo orden 17.

⊗

Debemos reconocer que el mínimo orden de los grafos con 6 aristas más que vértices y libres de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  no hemos podido determinarlo exactamente. No obstante dicho valor lo hemos acotado.

**Proposición 3.3.10** *Para todo  $n \geq 4$  se verifica que*

$$\left\lceil \frac{16n - 14}{5} \right\rceil \leq \nu_6(n) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{10n - 3}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{10n - 6}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero. La acotación inferior de  $\nu_6(n)$  se obtiene combinando la cota  $g(6) \leq \frac{5}{16}$  proporcionada por el Lema 2.3.9 y la desigualdad (2.4)  $\nu_6(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(6)} - 6 \right\rceil$ .

Como es usual la construcción de un grafo con las características deseadas proporciona la cota superior enunciada. En este caso, el grafo  $G$  de la Figura 3.7,

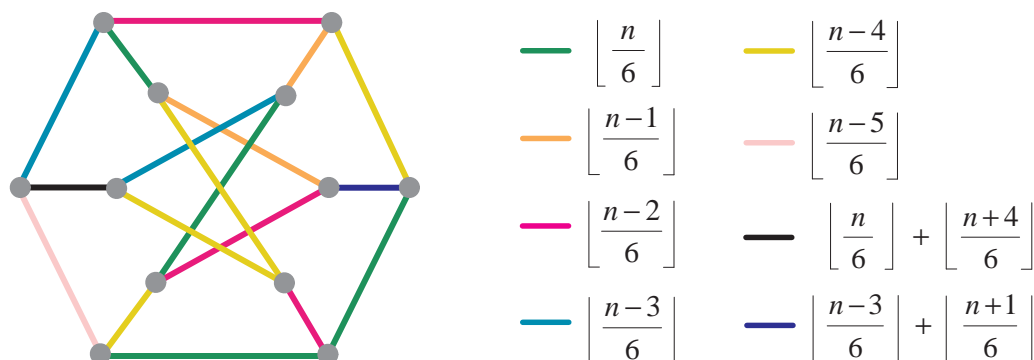


Figura 3.7: Grafo con exceso 6 y cintura  $n + 1$ .

cuya cintura es  $n + 1$  y cuyo exceso es 6, permite afirmar que  $\nu_6(n)$  es a lo sumo el orden de dicho grafo dado por

$$\nu(G) = \begin{cases} \lfloor \frac{10n-3}{3} \rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \lfloor \frac{10n-6}{3} \rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

⊗

Creemos que la cota superior de  $\nu_6(n)$  es óptima. Por un lado, es evidente que al eliminar un vértice de valencia 3 de un grafo con exceso 6 se obtiene un subgrafo con exceso 4. En este sentido, al eliminar cualquiera de los doce vértices del esqueleto del grafo de la Figura 3.7 se obtiene el esqueleto del grafo de la Figura 3.4, que es el que necesita la mínima cantidad de vértices para alcanzar cintura  $n + 1$  con exceso 4. Por otro lado, para los valores de  $n \in \{4, 5, 6, 7\}$  el valor exacto de  $\nu_6(n)$  coincide con la cota superior proporcionada, como se prueba para  $n = 4$  en [51] y para los otros tres casos en el Capítulo 6.

En [63] sus autores comentan que creen tener determinado el valor de  $ex(3n + 3; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . Queremos hacer notar que simplemente del conocimiento de  $\nu_5(n)$  y de la cota inferior de  $\nu_6(n)$  que acabamos de obtener, podemos concluir que  $ex(3n + 3; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = 3n + 8$  para todo  $n \geq 30$ , ya que el



orden  $\nu = 3n + 3$  es un elemento particular del intervalo extremal de exceso 5 dado por  $I_5(n) = \left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 5 \right\} = \left[ \nu_5(n), \nu_6(n) \right)$ .

Gracias a la existencia de la (3;6)-jaula de Heawood nos ha sido más fácil abordar la determinación de  $\nu_7(n)$ . De hecho encontramos su valor exacto cuando  $n = 5 \pmod 6$  y lo acotamos entre dos o tres posibles valores en los restantes casos.

**Proposición 3.3.11** Para  $n \geq 5$  se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_7(n) = \frac{7n-7}{2} \quad \text{si } n = 5 \pmod 6; \\ \left\lceil \frac{7n-7}{2} \right\rceil \leq \nu_7(n) \leq \begin{cases} \frac{7n-2}{2} & \text{si } n = 0, 4 \pmod 6; \\ \left\lfloor \frac{7n-4}{2} \right\rfloor & \text{si } n = 1, 2, 3 \pmod 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

*Demostración:* Tanto el valor exacto de  $\nu_7(n)$  para los infinitos valores  $n$  tales que  $n = 5 \pmod 6$ , como las acotaciones enunciadas en caso contrario, se obtienen considerando el grafo de la Figura 3.8 y combinando la igualdad del Lema 2.3.9  $g(7) = \frac{2}{7}$  y la desigualdad (2.4)  $\nu_7(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(7)} - 7 \right\rceil$ .

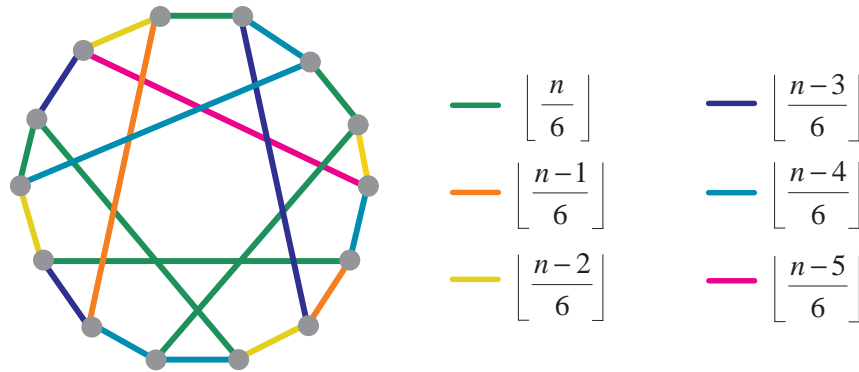


Figura 3.8: Grafo con exceso 7 y cintura  $n + 1$ .

Una vez acotada la cantidad  $\nu_7(n)$  podemos encontrar un intervalo de valores  $\nu$  para los cuales la función extremal tiene exceso 7.

**Proposición 3.3.12** Para  $n \geq 5$  y  $\nu$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{7n-7}{2} & \text{si } n = 5 \pmod{6} \\ \frac{7n-2}{2} & \text{si } n = 0, 4 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{7n-4}{2} \right\rfloor & \text{si } n = 1, 2, 3 \pmod{6} \end{array} \right\} \leq \nu < \left\lceil \frac{72n-80}{19} \right\rceil$$

se cumple que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 7$ .

*Demostración:* Teniendo en cuenta la acotación superior de  $\nu_7(n)$  probada en la Proposición 3.3.11, cualquier  $\nu$  que verifique las condiciones enunciadas cumple que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 7$ , pues, según el Lema 2.3.9 sabemos que  $g(8) \leq \frac{19}{72}$ , y mediante la desigualdad (2.4) obtenemos que el mínimo orden que debe tener cualquier grafo con exceso 8 para alcanzar cintura al menos  $n + 1$  es

$$\nu_8(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(8)} - 8 \right\rceil \geq \left\lceil \frac{72(n+1)}{19} - 8 \right\rceil = \left\lceil \frac{72n-80}{19} \right\rceil.$$

⊗

Como de acuerdo a la Proposición 2.2.17 el intervalo extremal de exceso  $k$  puede expresarse en función de las cantidades  $\nu_k(n)$  mediante la igualdad

$$I_k(n) = \left\{ \nu : ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k \right\} = \left[ \nu_k(n), \nu_{k+1}(n) \right),$$

el conocimiento de los valores  $\nu_k(n)$  para  $k \leq 5$ , las cotas obtenidas para  $\nu_6(n)$  y  $\nu_7(n)$ , así como la Proposición 3.3.12 nos permiten determinar la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n-80}{19} \right\rceil$ .

Detallamos mediante el gráfico de la Figura 3.9 los valores de  $(\nu, n)$  para los cuales la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  ha quedado exactamente determinada.

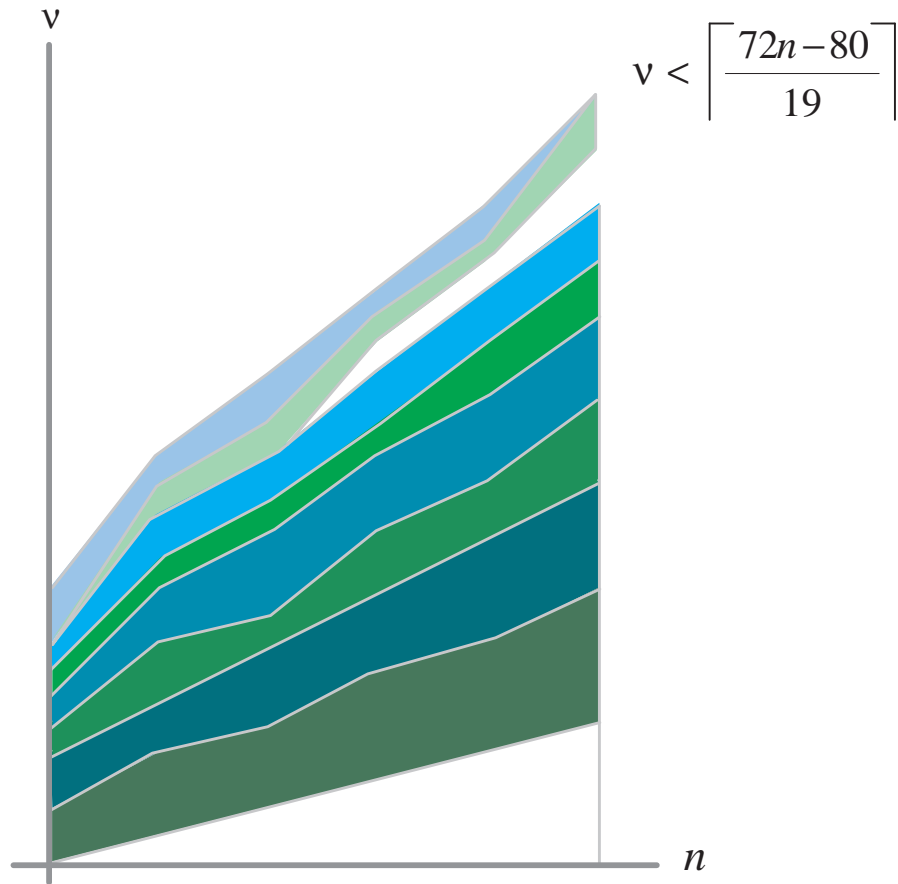


Figura 3.9: Valores exactos de  $ex(v; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

Mediante subdivisiones de la (3; 5)-jaula de Petersen y de la (3; 6)-jaula de Heawood (véanse las Figuras 3.5 y 3.8) hemos obtenido no solamente grafos extremales, sino grafos extremales con mínimo orden y excesos 5 y 7 respectivamente. Procediendo de manera análoga y subdividiendo la (3; 8)-jaula de Tutte-Coxeter construimos una familia de grafos extremales con exceso 15. Creemos incluso que su orden coincide con el valor de  $\nu_{15}(n)$ , mínima cantidad de vértices que debe poseer cualquier grafo libre de ciclos de longitud menor o igual que  $n$  para poder tener 15 aristas más que vértices.

**Teorema 3.3.13** Para  $n \geq 7$  entero positivo, consideramos las cantidades

$$a(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{45n - 34}{8} \right\rfloor & \text{si } n = 0, 1, 2, 4, 6 \pmod 8 \text{ y } n \geq 274 \\ \left\lfloor \frac{45n - 55}{8} \right\rfloor & \text{si } n = 3, 5 \pmod 8 \text{ y } n \geq 155 \\ \frac{45n - 75}{8} & \text{si } n = 7 \pmod 8 \end{cases}$$

Para todo  $\nu$  tal que  $a(n) \leq \nu < \left\lceil \frac{16(n+1)}{\ln 17} - 16 \right\rceil$  se verifica que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 15.$$

*Demostración:* Por un lado consideramos el grafo de la Figura 3.10, obtenido subdividiendo la  $(3; 8)$ -jaula de Tutte-Coxeter. Su orden coincide con la cantidad que hemos denotado por  $a(n)$ , su cintura es  $n+1$  y su exceso es 15, lo que permite afirmar que  $ex(a(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq a(n) + 15$ .

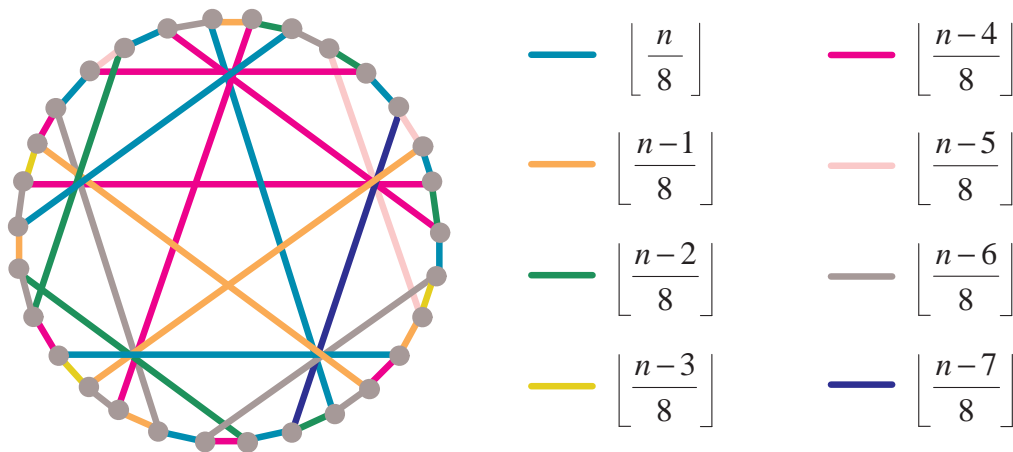


Figura 3.10: Grafo con exceso 15 y cintura  $n + 1$ .

Por otro lado, en los Preliminares de esta memoria hemos comentado que el Teorema 1.2.1, obtenido por N. Alon, S. Hoory y L. Linial en [3], proporciona una

cota superior de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  dada mediante la desigualdad (1.11), lo cual implica que para los valores de  $n$  considerados, cualquier grafo de orden  $a(n)$  tiene tamaño a lo sumo  $a(n) + 15$ , pues en caso contrario su valencia media es tal que se contradice la mencionada desigualdad (1.11).

Ambas consideraciones permiten afirmar que

$$ex(a(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = a(n) + 15.$$

Además, para cualquier  $\nu$  tal que  $a(n) \leq \nu < \left\lceil \frac{16(n+1)}{\ln 17} - 16 \right\rceil$  se verifica también que

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + 15,$$

pues se obtiene del Corolario 2.3.5 que  $g(16) \leq \frac{\ln 17}{16}$ , y en consecuencia, según las desigualdad (2.4), el mínimo orden que debe tener cualquier grafo de exceso 16 para alcanzar cintura al menos  $n + 1$  es

$$\nu_{16}(n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{g(16)} - 16 \right\rceil \geq \left\lceil \frac{16(n+1)}{\ln 17} - 16 \right\rceil.$$

⊗

Además vamos a incluir otras familias de órdenes  $\nu$  para los cuales el valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  queda determinado salvo una unidad.

**Teorema 3.3.14** *Se verifica que*

*i) si  $n \geq 32$ , entonces*

$$4n + 8 \leq ex(4n; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \leq 4n + 9;$$

ii) si  $n \geq 34$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{17n-2}{4} \right\rfloor + 9 \leq ex\left(\left\lfloor \frac{17n-2}{4} \right\rfloor; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}\right) \leq \left\lfloor \frac{17n-2}{4} \right\rfloor + 10;$$

iii) si  $n \geq 30$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{9n-2}{2} \right\rfloor + 10 \leq ex\left(\left\lfloor \frac{9n-2}{2} \right\rfloor; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}\right) \leq \left\lfloor \frac{9n-2}{2} \right\rfloor + 11;$$

iv) si  $n \geq 34$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{19n-10}{4} \right\rfloor + 11 \leq ex\left(\left\lfloor \frac{19n-10}{4} \right\rfloor; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}\right) \leq \left\lfloor \frac{19n-10}{4} \right\rfloor + 12;$$

v) si  $n \geq 38$ , entonces

$$5n + 9 \leq ex(5n - 3; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \leq 5n + 10;$$

vi) si  $n \geq 38$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{21n-13}{4} \right\rfloor + 13 \leq ex\left(\left\lfloor \frac{21n-13}{4} \right\rfloor; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}\right) \leq \left\lfloor \frac{21n-13}{4} \right\rfloor + 14;$$

vii) si  $n \geq 39$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{11n-8}{2} \right\rfloor + 14 \leq ex\left(\left\lfloor \frac{11n-8}{2} \right\rfloor; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}\right) \leq \left\lfloor \frac{11n-8}{2} \right\rfloor + 15.$$

*Demostración:* La prueba es análoga a las anteriores. Por un lado, para cada constante  $k \in \{8, 9, \dots, 14\}$  consideramos el grafo con exceso  $k$  representado bien en la Figura 3.11 o en la 3.12.

Dependiendo de  $k$ , su orden es respectivamente a lo sumo  $4n$ ,  $\left\lfloor \frac{17n-2}{4} \right\rfloor$ ,  $\left\lfloor \frac{9n-2}{2} \right\rfloor$ ,  $\left\lfloor \frac{19n-10}{4} \right\rfloor$ ,  $5n-3$ ,  $\left\lfloor \frac{21n-13}{4} \right\rfloor$  y  $\left\lfloor \frac{11n-8}{2} \right\rfloor$ , y su cintura  $n+1$ . Además, como se deduce de la desigualdad (2.2.14), que el exceso de los grafos extremales  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  es creciente en  $\nu$ , se verifican las cotas inferiores proporcionadas.

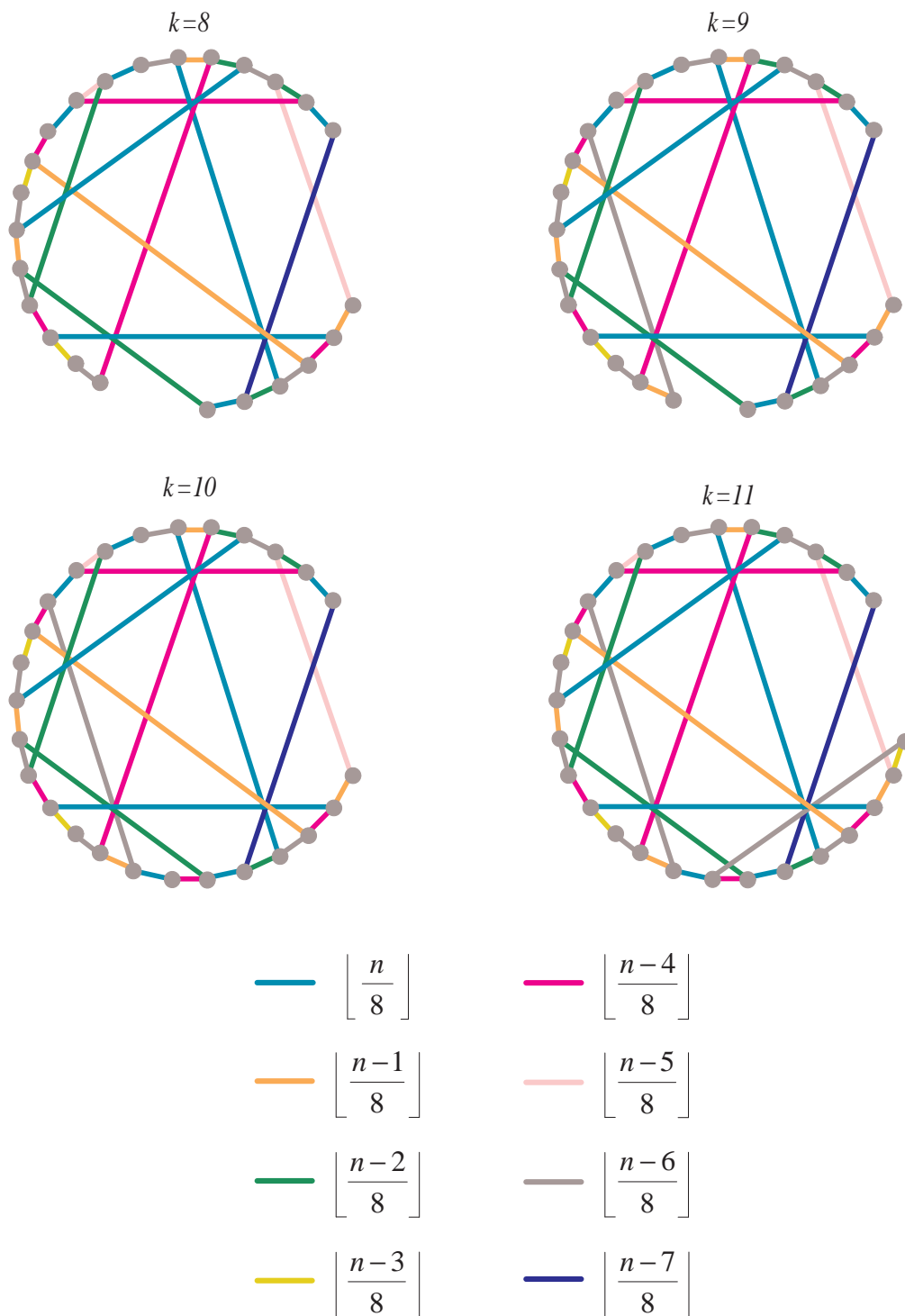


Figura 3.11: Grafos con excesos  $k \in \{8, 9, 10, 11\}$ .

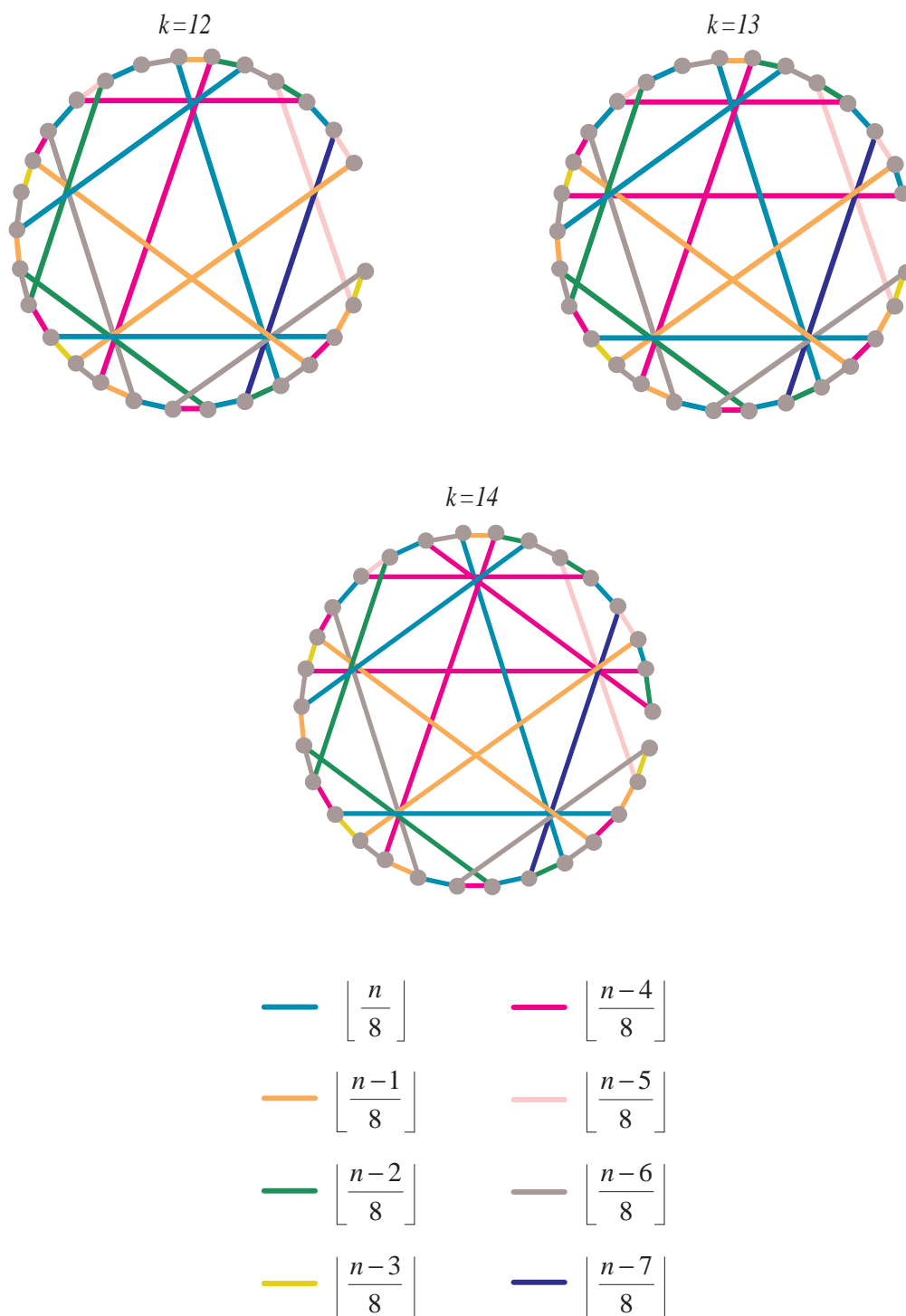


Figura 3.12: Grafos con excesos  $k \in \{12, 13, 14\}$ .



Por otro lado, la desigualdad (1.11), obtenida en los Preliminares de esta memoria como consecuencia inmediata del Teorema 1.2.1, justifica las cotas superiores.

⊗

### 3.4 Jaulas minimales como grafos extremales.

En esta sección probamos que todas las jaulas minimales, es decir, las que son  $r$ -regulares, con orden  $\nu_0(r; g)$  y cintura  $g$ , son extremales para  $n = g - 1$ , siendo además los únicos elementos del conjunto  $EX(\nu_0(r; g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ .

Una primera conexión entre las jaulas y los grafos extremales se encuentra en el caso concreto  $g = 4$ , pues los grafos bipartitos completos  $K_{r,r}$  son tanto  $(r; 4)$ -jaulas como los únicos elementos de  $EX(2r; \{C_3\})$  [78]. Otra relación entre ambos conjuntos aparece en el artículo [51] al probar sus autores que la  $(3; 5)$ -jaula de Petersen y la  $(7; 5)$ -jaula de Hoffman-Singleton son los únicos elementos de las familias  $EX(10; \{C_3, C_4\})$  y  $EX(50; \{C_3, C_4\})$ , respectivamente. En este capítulo acabamos de probar algo análogo al establecer, en la Proposición 3.3.11, que la  $(3; 6)$ -jaula de Heawood pertenece al conjunto  $EX(14; \{C_3, C_4, C_5\})$  y, en el Teorema 3.3.13, que la  $(3; 8)$ -jaula de Tutte-Coxeter es un grafo de la familia  $EX(30; \{C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\})$ .

Estos resultados pueden generalizarse, y en realidad todas las  $(r; g)$ -jaulas minimales cuyo orden es exactamente

$$\nu_0(r, g) = \begin{cases} 1 + r \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (r-1)^i & \text{si } g \text{ es par,} \end{cases}$$

son los únicos elementos de la familia extremal  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ .

Para probarlo tenemos en cuenta que el Teorema 1.2.1 [3] no solamente garantiza que cualquier grafo  $G$  con cintura  $g$  verifica que

$$\nu(G) \geq \nu_0(\bar{d}(G), g),$$

sino que de su demostración se deduce que incluso se cumple que

$$\nu(G) \geq \nu_0(\Lambda(G) + 1, g) \geq \nu_0(\bar{d}(G), g) \quad (3.2)$$

siendo

$$\Lambda(G) = \prod_{u \in V(G)} (\delta(u) - 1)^{\frac{\delta(u)}{2e(G)}}.$$

En general se verifica que  $\Lambda(G) + 1 \geq \bar{d}(G)$ . Para probar la unicidad de las jaulas minimales como grafos extremales nos apoyamos en que  $\Lambda(G) + 1 = \bar{d}(G)$  si y solo si  $G$  es regular.

La prueba de esta igualdad radica en considerar para  $x \geq 2$  la función convexa  $F(x) = x \log(x - 1)$ , que por tanto siempre es mayor o igual que su polinomio de Taylor de orden uno centrado en cualquier punto  $x_0 \geq 2$ . Es decir,

$$F(x) \geq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0). \quad (3.3)$$

La desigualdad anterior puede expresarse como

$$\log \left( \frac{x - 1}{x_0 - 1} \right)^x \geq \frac{x_0 x}{x_0 - 1} - \frac{x_0^2}{x_0 - 1} \quad \text{para todo } x \geq 2.$$

Aplicando esta desigualdad a cada una de las valencias de un grafo  $G$  y considerando  $x_0 = \bar{d}(G)$  y la igualdad (1.1) se tiene que

$$\sum_{u \in V(G)} \log \left( \frac{\delta(u) - 1}{\bar{d}(G) - 1} \right)^{\delta(u)} \geq \frac{\bar{d}(G)}{\bar{d}(G) - 1} \sum_{u \in V(G)} \delta(u) - \frac{\nu(G) \bar{d}^2(G)}{\bar{d}(G) - 1} = 0$$

De donde se deduce que

$$\prod_{u \in V(G)} \left( \frac{\delta(u) - 1}{\bar{d}(G) - 1} \right)^{\delta(u)} \geq 1,$$

y en consecuencia

$$\Lambda(G) \geq \bar{d}(G) - 1.$$

Como evidentemente en la desigualdad (3.3) solamente se alcanza la igualdad cuando  $x = x_0$  se tiene que  $\Lambda(G) = \bar{d}(G) - 1$  si y solo si  $\delta(u) = \bar{d}(G)$  para todo  $u \in V(G)$ , lo cual equivale a la regularidad del grafo  $G$ .

**Teorema 3.4.1** Sean  $r \geq 3$  y  $g \geq 5$ . Si existe alguna  $(r; g)$ -jaula de orden  $\nu_0(r, g)$ , entonces

$$EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\}) = \{(r; g)\text{-jaulas minimales}\}.$$

*Demostración:* Sean  $r \geq 3$  y  $g \geq 5$  enteros dados.

En primer lugar y debido a la regularidad de las jaulas, notemos que probar que cualquier  $(r; g)$ -jaula minimal es extremal para  $n = g - 1$  equivale a demostrar la igualdad

$$ex(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\}) = \frac{r \nu_0(r, g)}{2}.$$

Para ello, suponemos la existencia de un grafo  $G'$  en el conjunto extremal  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$  tal que  $e(G') > \frac{r \nu_0(r, g)}{2}$ .

Como  $\bar{d}(G') = \frac{2e(G')}{\nu(G')} > r$  y como para cada  $g$  prefijado la función  $\nu_0(d, g)$  es estrictamente creciente en  $d$ , según el Teorema 1.2.1 se cumple que

$$\nu(G') \geq \nu_0(\bar{d}(G'), g) > \nu_0(r, g),$$

lo cual contradice el orden de  $G'$ .

En segundo lugar, para probar que las  $(r; g)$ -jaulas minimales son los únicos elementos de cada familia  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ , señalamos

que la existencia de un grafo  $G'$  no regular en dicho conjunto lleva a la contradicción

$$\nu_0(r, g) = \nu(G') \geq \nu_0(\Lambda(G') + 1, g) > \nu_0(\bar{d}(G'), g) = \nu_0(r, g),$$

ya que según hemos comentado previamente, la desigualdad (3.2) obtenida del Teorema 1.2.1 permite afirmar que  $\nu(G') \geq \nu_0(\Lambda(G') + 1, g)$  pero para el grafo  $G'$  se verifica que  $\Lambda(G') + 1 > \bar{d}(G')$  por no ser regular.

⊗

**Observación 3.4.2** Cuando el orden de una  $(r; g)$ -jaula supera estrictamente la cota  $\nu_0(r, g)$  no puede asegurarse nada acerca de su carácter extremal. Por ejemplo, en [51] se prueba que la  $(4; 5)$ -jaula de Robertson pertenece a la familia extremal  $EX(19; \{C_3, C_4\})$  aunque tiene orden  $19 > \nu_0(4, 5) = 17$ .

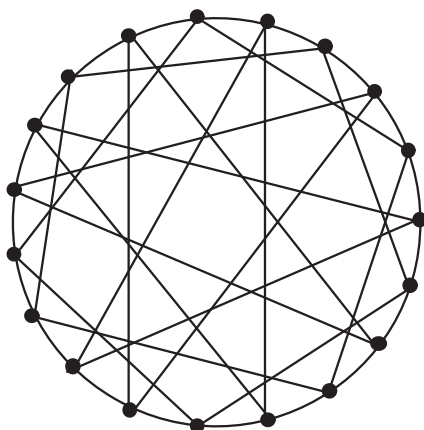


Figura 3.13: La  $(4; 5)$ -jaula de Robertson pertenece a  $EX(19; \{C_3, C_4\})$ .

De manera análoga G. Wegner prueba en 1973 [84] que son necesarios  $30 > \nu_0(5, 5) = 27$  vértices para construir cualquiera de las cuatro  $(5; 5)$ -jaulas existentes, pero sin embargo ninguna de ellas pertenece al conjunto extremal  $EX(30; \{C_3, C_4\})$ , pues tienen 75 aristas mientras que  $ex(30; \{C_3, C_4\}) = 76$  [52].

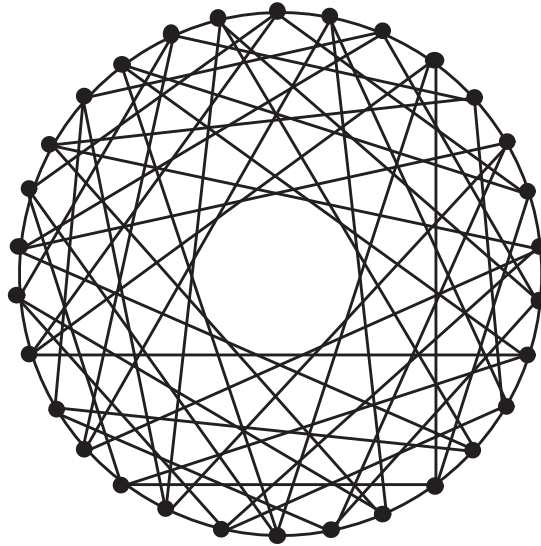


Figura 3.14: Ninguna  $(5; 5)$ -jaula pertenece a  $EX(30; \{C_3, C_4\})$ .

Como hemos comentado en los Preliminares de esta memoria es bien conocido (véanse los artículos [11], [30], [42] y [56]), que para  $r \geq 3$  las  $r$ -jaulas minimales solamente existen cuando  $g \in \{4, 5, 6, 8, 12\}$ . Por tanto, solamente para dichos valores de la cintura tiene sentido la afirmación del Teorema 3.4.1.

En los casos  $g = 4$  y  $g = 5$  las jaulas minimales están ya identificadas, tratándose exclusivamente de los grafos  $K_{r,r}$ , la jaula de Petersen, la de Hoffman-Singleton y quizás también la  $(57; 5)$ -jaula, aunque la existencia de esta última es todavía incierta (ver [56]).

Cuando  $g \in \{6, 8, 12\}$  la determinación del orden de las jaulas es todavía un problema abierto, aunque es conocida (véanse [12], [54], [64], [82] y [86]) la existencia de jaulas minimales  $r$ -regulares siempre que  $r - 1$  sea potencia de un número primo, lo cual conduce a la obtención del siguiente resultado.

**Corolario 3.4.3** *Para cualquier  $r$  entero tal que  $r - 1$  es potencia de un número primo se verifica que*

- i)  $ex(2(r^2 - r + 1); \{C_3, C_4, C_5\}) = r(r^2 - r + 1);$*
- ii)  $ex(2(r^3 - 2r^2 + 2r); \{C_3, C_4, \dots, C_7\}) = r^2(r^2 - 2r + 2);$*
- iii)  $ex(2(r^5 - 4r^4 + 7r^3 - 6r^2 + 3r); \{C_3, C_4, \dots, C_{11}\}) = r^2(r^4 - 4r^3 + 7r^2 - 6r + 3).$*

*Demostración:* Sea  $n \in \{5, 7, 11\}$  y  $r$  cualquier entero de modo que  $r - 1$  sea potencia de un número primo.

De la existencia de  $(r; n + 1)$ -jaulas minimales (véanse [12], [54], [64], [82] y [86]) y del Teorema 3.4.1 se deduce la igualdad

$$ex(\nu_0(r, n + 1); \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \frac{r \nu_0(r, n + 1)}{2},$$

que junto con la definición de  $\nu_0(r, n + 1) = 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (r - 1)^i$  permiten la obtención de las tres igualdades deseadas.

⊗

### 3.5 Comportamiento asintótico.

Encontrar el valor exacto de la función extremal es un problema complicado. Parece entonces lógico preguntarnos, para cada  $n$  prefijado, acerca de la rapidez de convergencia de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  a medida que el orden  $\nu$  se hace infinitamente grande.

En particular cuando  $n = 4$  es bien conocido (véase [51]) que

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4\})}{\nu^{3/2}} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

En los casos particulares  $n \in \{5, 7, 11\}$  podemos incluso asegurar más.

**Teorema 3.5.1** *Se cumple que:*

$$\begin{aligned} i) \quad \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})}{\nu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}; \\ ii) \quad \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_7\})}{\nu^{\frac{4}{3}}} &= \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}; \\ iii) \quad \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{11}\})}{\nu^{\frac{6}{5}}} &= \frac{1}{2^{\frac{6}{5}}}. \end{aligned}$$

*Demostración:* Sean  $n \in \{5, 7, 11\}$  y  $r$  cualquier entero tal que  $r - 1$  es potencia de un número primo. A partir de la existencia de las  $(r, n + 1)$ -jaulas minimales hemos obtenido en el Corolario 3.4.3 el valor de la función extremal

$$ex(\nu_0(r, n + 1); \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \frac{r \nu_0(r, n + 1)}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu_0(r, n + 1); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{(\nu_0(r, n + 1))^{\frac{n+1}{n-1}}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2(\nu_0(r, n + 1))^{\frac{2}{n-1}}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2(2(r-1)^{\frac{n-1}{2}})^{\frac{2}{n-1}}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n-1}}}, \end{aligned}$$

lo cual prueba que

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{\frac{n+1}{n-1}}} \geq \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Esta acotación junto con la desigualdad (1.13) dada por

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{\frac{n+1}{n-1}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n-1}}}$$

permiten encontrar las igualdades enunciadas.

Para los casos  $n \in \{6, 10\}$  encontramos una acotación del límite superior similar a la conocida para  $n = 4$  y dada por (3.4), a la vez que es posible reencontrar ésta.

**Teorema 3.5.2** *Se cumple que*

$$i) \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})}{\nu^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{1}{2};$$

$$ii) \frac{1}{2^{\frac{6}{5}}} \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{10}\})}{\nu^{\frac{6}{5}}} \leq \frac{1}{2}.$$

*Demostración:* Sean  $n \in \{6, 10\}$  y  $r$  cualquier entero tal que  $r - 1$  es potencia de un número primo. Basándonos en el carácter decreciente en  $n$  de la función extremal y en la demostración del Teorema 3.5.1 anterior, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu_0(r, n+2); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu_0(r, n+2)^{\frac{n+2}{n}}} \geq$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu_0(r, n+2); \{C_3, C_4, \dots, C_{n+1}\})}{\nu_0(r, n+2)^{\frac{n+2}{n}}} = \frac{1}{2^{\frac{n+2}{n}}}$$

La existencia de una subsucesión con límite acotado indica que

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{\frac{n+2}{n}}} \geq \frac{1}{2^{\frac{n+2}{n}}},$$

que junto con la desigualdad (1.13) dada por

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})}{\nu^{\frac{n+2}{n}}} \leq \frac{1}{2}$$

permiten encontrar las dos desigualdades enunciadas.

⊗



### 3.6 Problemas abiertos y conjeturas.

Mediante subdivisiones de grafos bien conocidos, en este capítulo hemos completado la determinación del valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo

$$\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil,$$

salvo para los órdenes del sector

$$\left\lceil \frac{16n - 14}{5} \right\rceil \leq \nu \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{10n - 3}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{10n - 6}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y los valores

$$\left\lceil \frac{7n - 7}{2} \right\rceil \leq \nu \leq \begin{cases} \frac{7n - 2}{2} & \text{si } n = 0, 4 \text{ mod } 6; \\ \left\lfloor \frac{7n - 4}{2} \right\rfloor & \text{si } n = 1, 2, 3 \text{ mod } 6. \end{cases}$$

En este sentido, como un primer problema sin resolver, nos ha quedado determinar con exactitud la cantidad  $\nu_6(n)$  y la  $\nu_7(n)$  para  $n \not\equiv 5 \pmod{6}$ . Su conocimiento nos permitiría hallar el valor de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  en el sector anterior.

También, mediante subdivisiones elementales de aristas de la  $(3; 12)$ -jaula de Tutte-Coxeter, hemos construido en el Teorema 3.3.13 una familia de grafos extremales con exceso 15. Creemos incluso que esta forma de proceder determina la cantidad  $\nu_{15}(n)$  para todo  $n \geq 7$ .

La determinación de más valores exactos de la función extremal conlleva la de las cantidades  $\nu_k(n)$  para  $k \geq 8$ , para lo cual es necesario el conocimiento de esqueletos de modo que mediante subdivisiones de ellos se obtenga la mínima cantidad de veces que un grafo con exceso  $k$  debe subdividirse para alcanzar cintura al menos  $n + 1$ .

Por esta razón, aprovechamos esta sección para presentar esqueletos con excesos  $k \in \{8, 9, \dots, 14\}$  que creemos que mediante subdivisiones adecuadas de ellos se pueden obtener grafos extremales de los conjuntos  $EX_k(n)$  para todo  $n \geq 7$ .

Previamente, y con objeto de avalar nuestra creencia, queremos hacer una reflexión acerca de la relación existente entre los esqueletos de los grafos extremales con excesos  $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$  que hemos estudiado en este capítulo y que ilustramos en la Figura 3.15.

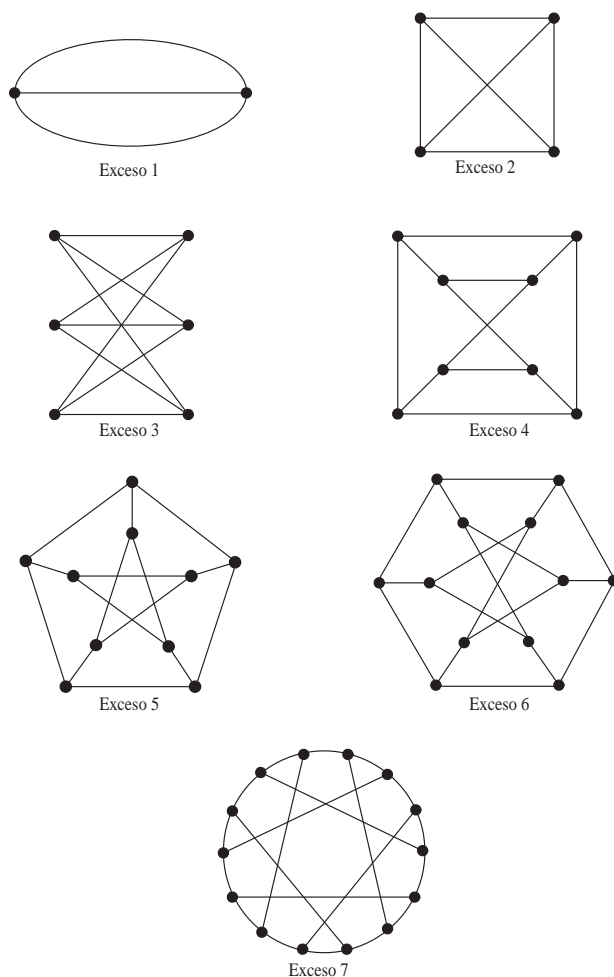


Figura 3.15: Esqueletos con excesos  $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$ .

Por un lado, observamos que cada esqueleto con exceso  $k + 1$  mostrado en la Figura 3.15 puede obtenerse a partir del de exceso  $k$ . Para ello, subdividimos dos aristas del esqueleto de exceso  $k$  y unimos estos dos nuevos vértices por una arista. Ilustramos este proceso en la Figura 3.16.

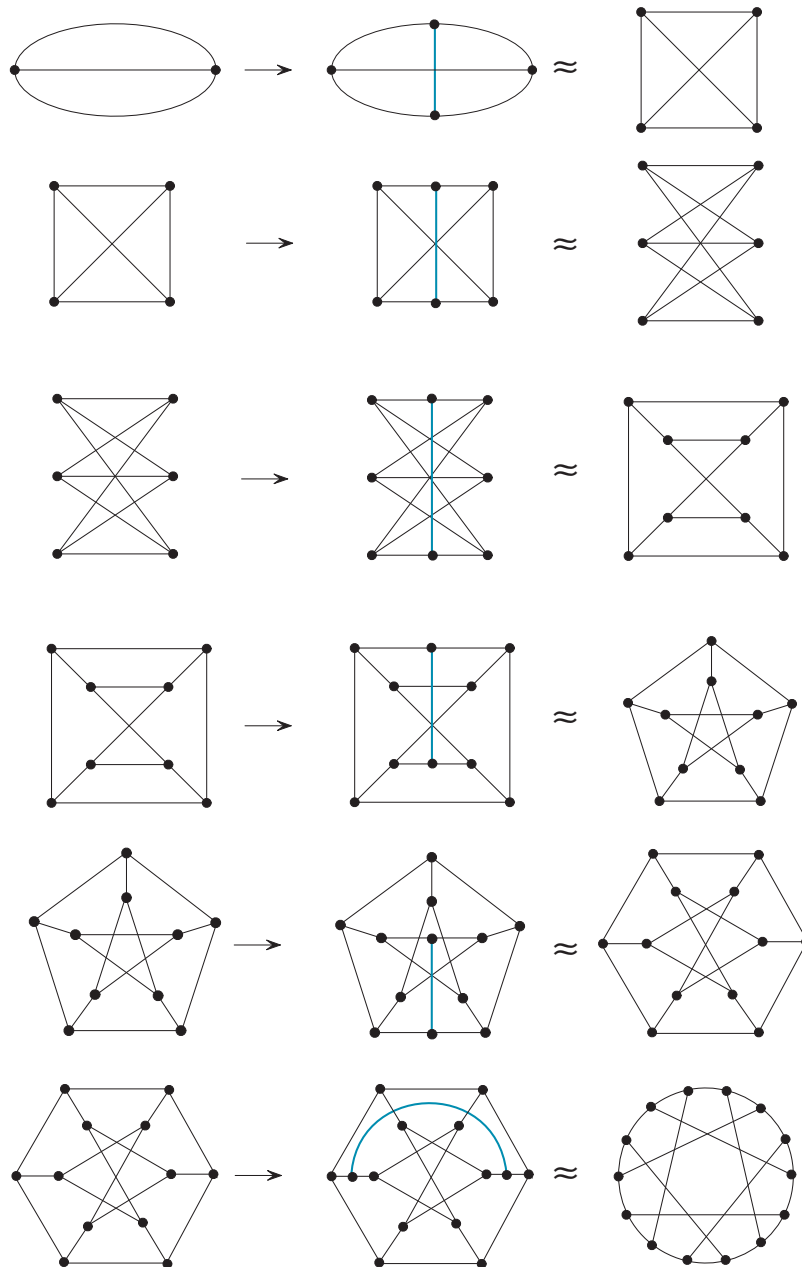


Figura 3.16: Relación entre esqueletos con excesos  $k$  y  $k + 1$ .

Por otra parte, considerando que al eliminar un vértice de valencia 3 de un grafo dado  $G$ , el grafo resultante tiene exceso dos unidades menos que el de  $G$ , obtenemos otra forma gráfica de relacionar los esqueletos anteriores, como se recoge en la Figura 3.17. En particular queremos destacar la relación existente entre el grafo  $K_{3,3}$  y la jaula de Petersen, y la de ésta con la de Heawood.

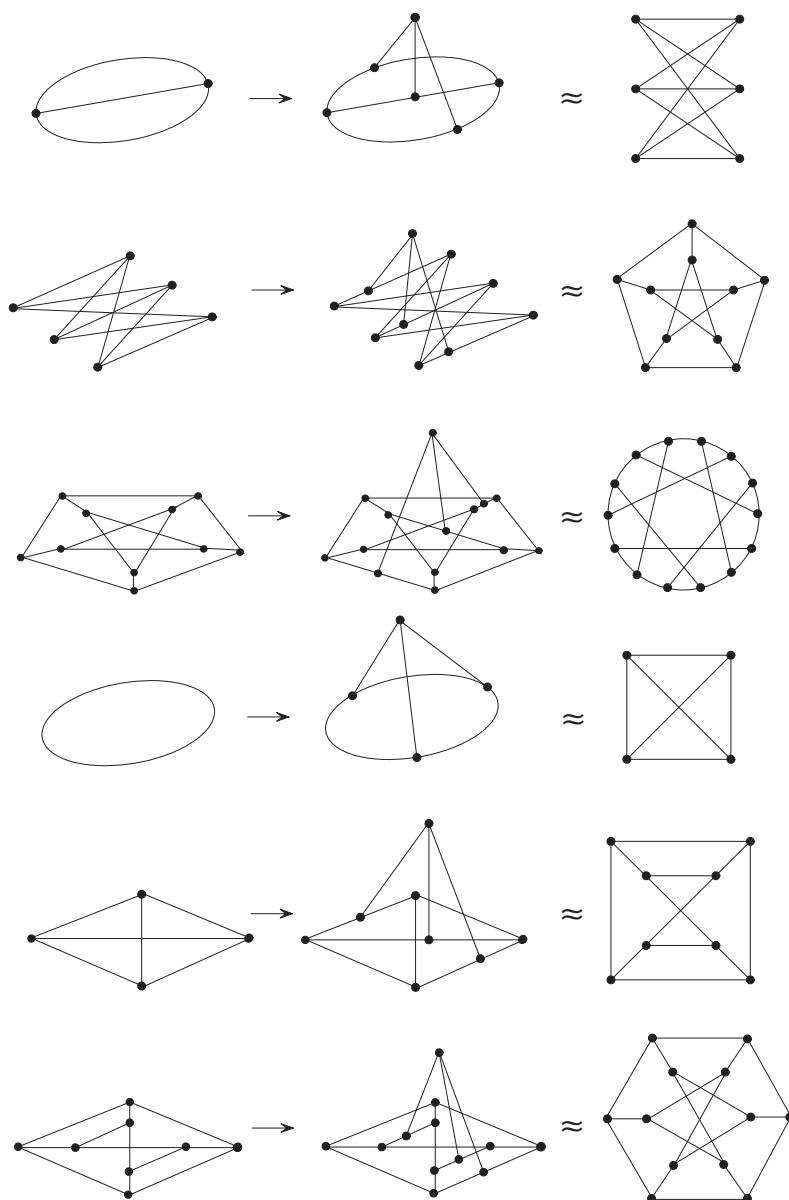


Figura 3.17: Relación entre esqueletos de grafos con excesos  $k$  y  $k + 2$ .

Estas reflexiones nos hacen pensar que a partir de un esqueleto de un grafo extremal de exceso  $k$  se pueden construir esqueletos de grafos extremales con mayor exceso.

De forma inversa, partiendo de un esqueleto de un grafo extremal con determinado exceso, eliminando vértices consecutivos dentro de un ciclo de longitud mínima, creemos que pueden obtenerse esqueletos de grafos extremales de menor exceso.

Esta idea queda reflejada en la Figura 3.18 en la que se puede comprobar como al eliminar de uno en uno vértices adyacentes de un ciclo de longitud 6 a la  $(3;6)$ -jaula de Heawood se obtienen sucesivamente grafos cuyos esqueletos coinciden exactamente con los de los grafos que nos han proporcionado los valores  $\nu_k(n)$  para  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . (Véase la Figura 3.18)

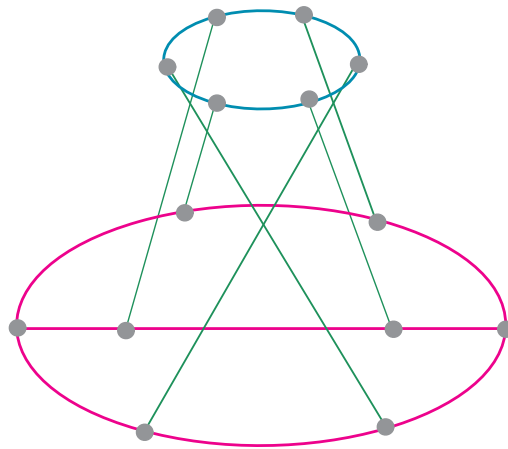


Figura 3.18:  $(3;6)$ -jaula de Heawood

De manera análoga, comprobamos que al eliminar todos los vértices de un ciclo de longitud 8 de la  $(3;8)$ -jaula de Tutte-Coxeter, que sabemos por el Teorema 3.4.1 que es extremal para  $n = 7$ , el grafo obtenido tiene como esqueleto a la jaula de Heawood. (Véase la Figura 3.19).

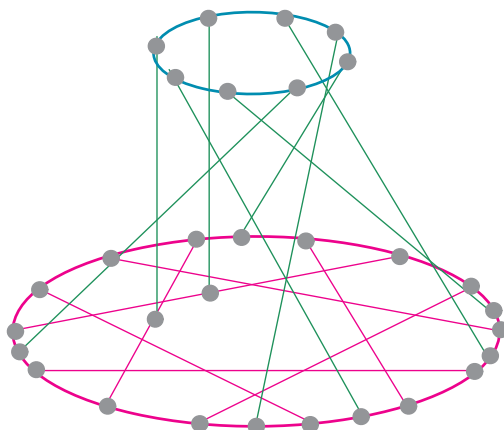
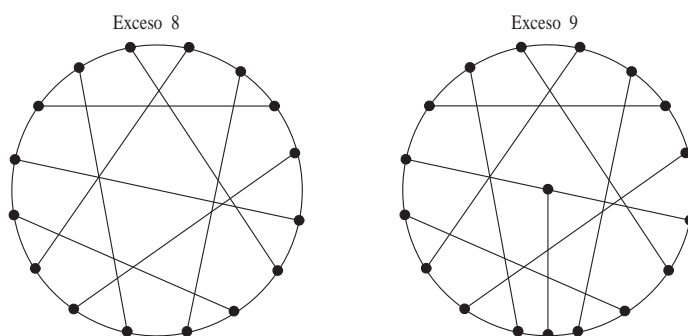


Figura 3.19: (3;8)-jaula de Tutte-Coxeter

Basándonos en este hecho, partiendo de un ciclo  $C$  de longitud 8 de la (3;8)-jaula de Tutte-Coxeter y eliminando en primer lugar una arista y a continuación vértices consecutivos del ciclo  $C$ , proponemos en las Figuras 3.20 y 3.21 esqueletos con excesos  $k$  para  $8 \leq k \leq 14$ .

Creemos por tanto que, al igual que ocurre con la jaula de Heawood, subdivisiones adecuadas de los esqueletos de las Figuras 3.20 y 3.21 proporcionan grafos extremales con mínimo orden  $\nu_k(n)$  para  $k \in \{8, 9, \dots, 14\}$ . Esta creencia está además avalada por el hecho de que realmente así ocurre en los casos particulares  $n = 6$  y  $n = 7$ , como se probará más adelante en el Capítulo 6.

Figura 3.20: Esqueletos de excesos  $k \in \{8, 9\}$ .

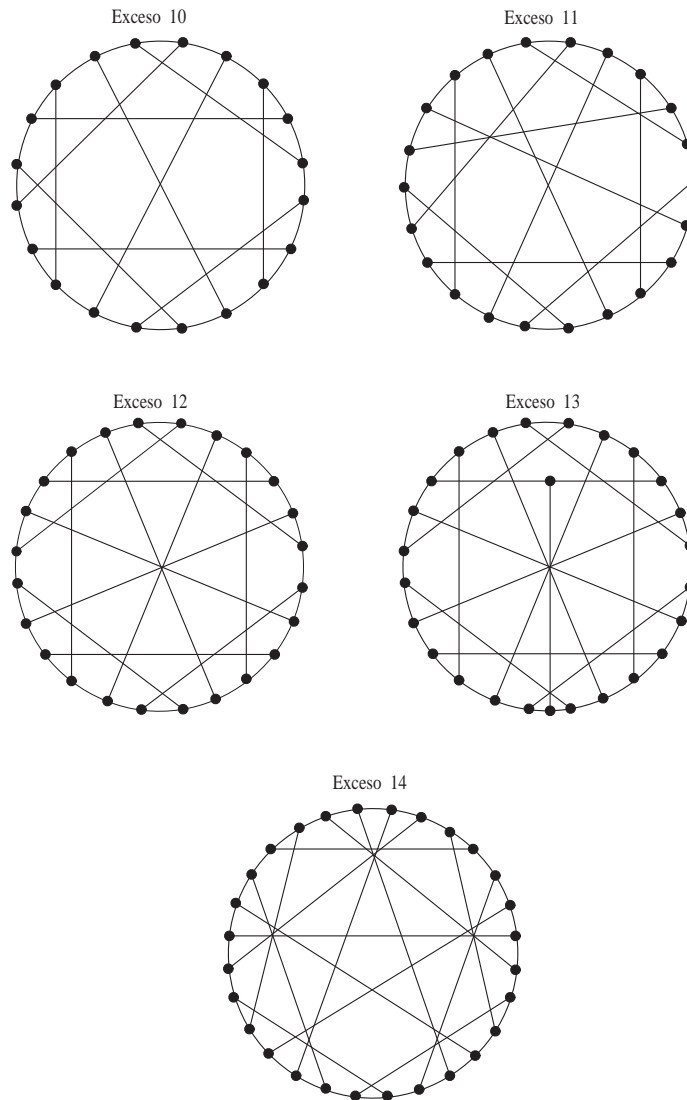


Figura 3.21: Esqueletos de excesos  $k \in \{10, 11, \dots, 14\}$ .





# Capítulo 4

## Caracterización de familias de grafos extremales.

Hemos demostrado previamente que dado un exceso  $k \geq 0$ , a partir de un valor de  $n$ , todos los grafos extremales se obtienen subdividiendo aristas hasta que el grafo obtenido no contenga los ciclos prohibidos. La cuestión a resolver radica entonces en determinar la mínima cantidad de vértices que necesita cada esqueleto de exceso  $k$  para alcanzar cintura al menos  $n + 1$ .

Procediendo de esta manera en este capítulo caracterizamos las familias de grafos extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $\nu \leq 3n - 3$  y cualquier  $n \geq 4$ .

### 4.1 Introducción

Sabemos que todo problema extremal tiene dos vertientes de interés, por un lado la determinación del valor de la función extremal y por otro, la caracterización de los grafos extremales.

Una vez que hemos obtenido el valor de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $n \geq 4$  y para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil$ , es el objetivo de este capítulo abordar la caracterización de los grafos extremales.

Recordamos (véase la igualdad (1.5)) que en el caso particular  $n = 3$ , para cada orden  $\nu \geq 4$  existe un único grafo extremal, siendo éste el grafo bipartito completo con ambas clases lo más iguales posibles, es decir,

$$EX(\nu; \{C_3\}) = K_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor, \lceil \frac{\nu}{2} \rceil}.$$

En lo referente a  $n = 4$ , en el artículo [51] sus autores identifican los grafos extremales para  $\nu \leq 10$ , y de forma análoga dicha caracterización se amplía en [52] para  $\nu \leq 21$ . La cantidad de grafos perteneciente a cada conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4\})$  se detalla en la tabla siguiente.

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	1	1	1	2	1	1	1
10	1	3	7	1	4	1	22	14	15	1
20	1	3								

*Cantidad de grafos del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4\})$*

Es evidente que cuando el orden  $\nu < n + 1$ , cualquier grafo de la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  no contiene ciclo alguno, y entonces dicho conjunto está formado por todos los árboles de orden  $\nu$ . Por tanto, en este capítulo nos centramos exclusivamente en valores  $\nu \geq n + 1$ .

Sabemos, por el Teorema 2.2.20 que dado un exceso  $k \geq 0$ , a partir de un valor de  $n$ , todos los grafos extremales se obtienen subdividiendo aristas hasta que el grafo obtenido no contenga los ciclos prohibidos. La cuestión a resolver radica entonces en seleccionar los esqueletos con exceso dado  $k$  que subdivididos adecuadamente proporcionen grafos extremales.

## 4.2. Caracterización de los grafos extremales con orden $\nu \leq 3n - 3$ . 111

Dependiendo de las características de los esqueletos, obtenemos la mínima cantidad de vértices que necesita cada uno de ellos para alcanzar la cintura  $n + 1$ . De acuerdo a la Proposición 2.2.17 solamente son esqueletos de grafos extremales aquellos para los cuales esta cantidad no supera el valor  $\nu_{k+1}(n)$ . Esta forma de proceder nos ha permitido identificar los grafos extremales para todo  $n \geq 4$  y para todo  $\nu \leq 3n - 3$ .

El estudio realizado aporta además una idea de casi la unicidad de grafos existente en el conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para los órdenes  $\nu$  pertenecientes al inicio del intervalo extremal de exceso constante  $I_k(n) = [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$ , y de la posible y amplia variedad de grafos extremales existente para valores  $\nu$  del final de dicho intervalo. De manera similar observamos que, como la amplitud de este intervalo crece con  $n$ , para valores de  $n$  pequeños hay en general menos variedad de grafos extremales con exceso dado  $k$  que para  $n$  suficientemente grandes.

## 4.2 Caracterización de los grafos extremales con orden $\nu \leq 3n - 3$ .

En esta sección procedemos a caracterizar los grafos extremales de cada familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , observando que estos dependen del orden  $\nu$  y de  $n$  a través del exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ .

Aunque el resultado siguiente ha sido obtenido previamente en [9] ofrecemos una demostración alternativa.

**Teorema 4.2.1** [9] *Sea  $n \geq 4$  y  $\nu$  entero tal que  $\nu_0(n) \leq \nu < \nu_1(n)$ . Cualquier grafo  $G$  de la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  contiene un único ciclo. Si  $\nu = \nu_0(n)$ , entonces  $G$  es único.*

*Demostración:* Para  $n \geq 4$  y  $\nu_0(n) \leq \nu < \nu_1(n)$  enteros, sea  $G$  cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

Como se refleja en la Proposición 2.2.17, se cumple que

$$e(G) = \nu(G),$$

y por tanto, la valencia media de  $G$  es 2 ya que

$$\bar{d}(G) = \frac{2e(G)}{\nu(G)}.$$

Cuando  $\delta(G) = 2$  todos los vértices de  $G$  tienen valencia exactamente 2, y en consecuencia,  $G$  es un ciclo.

Cuando  $\delta(G) = 1$ , como el orden y el tamaño de  $G$  coinciden,  $G$  consta de un ciclo y algún camino o caminos fuera del ciclo.

Como caso particular, cuando  $\nu = \nu_0(n) = n + 1$  el grafo extremal es necesariamente el ciclo  $C_{n+1}$ , y por tanto, es único.

⊗

Aunque el objetivo de este Capítulo es caracterizar los grafos extremales de cada conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para  $n \geq 4$  y órdenes  $\nu \geq n + 1$  dados, posteriormente surge la necesidad de caracterizar no solamente los grafos extremales con exceso 1 sino incluso todos los grafos que no contienen ciclos de longitud menor o igual que  $n$  y que poseen una arista más que vértices, cuestión que pasamos a resolver.

**Proposición 4.2.2** *Sea  $n \geq 4$  entero. El esqueleto  $\tilde{G}$  de cualquier grafo  $G$  del conjunto  $G_1(n)$  es un pseudografo o un multigrafo. Además,*

*i) Si  $\tilde{G}$  es un pseudografo, entonces*

$$\nu(G) \geq 2n + 1.$$

ii) Si  $\tilde{G}$  es un multigrafo, entonces

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil.$$

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo con exceso 1 y cintura al menos  $n + 1$ .

Es evidente que su valencia máxima es al menos 3, pues

$$\Delta(G) \geq \frac{2e(G)}{\nu(G)} = \frac{2\nu(G) + 2}{\nu(G)} > 2.$$

Sin pérdida de generalidad, para determinar el mínimo orden de  $G$  podemos suponer que  $G$  no contiene vértices de valencia 1, y en consecuencia, se cumple la igualdad (1.4) dada por

$$n_3 + 2n_4 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta = 2,$$

cuyas soluciones son

$$\{n_3 = 0 \text{ y } n_4 = 1\} \quad \text{o} \quad \{n_3 = 2 \text{ y } n_4 = 0\}.$$

Como  $\nu(\tilde{G}) = n_3 + n_4 \leq 2$ , deducimos que  $\tilde{G}$  es bien un pseudografo o bien un multigrafo. (Véase la Figura 4.1.)

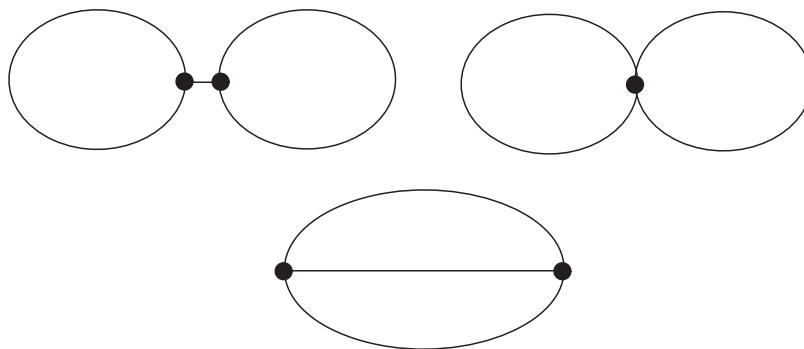


Figura 4.1: Únicos esqueletos con exceso 1.

*i)* Si  $\tilde{G}$  es un pseudografo, dependiendo de la valencia máxima del grafo  $G$ , se tiene que:

*i<sub>1</sub>)* Si  $\Delta(G) = 3$ , entonces  $\tilde{G}$  está formado por dos lazos disjuntos unidos por una arista puente. En este caso,

$$\nu(G) \geq 2(n + 1).$$

*i<sub>2</sub>)* Si  $\Delta(G) = 4$ , entonces  $G$  contiene dos ciclos que comparten el vértice de valencia máxima, y por tanto

$$\nu(G) \geq 2(n + 1) - 1.$$

*ii)* Si  $G$  es un multigrafo, entonces  $\nu(\tilde{G}) = 2$  y por tanto  $\Delta = 3$ . En este caso,  $G$  es el grafo formado por tres caminos disjuntos que unen sus dos vértices de valencia 3. Evidentemente como  $G$  pertenece a  $G_1(n)$  se verifica que

$$\nu(G) \geq \nu_1(n) = \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil.$$

⊗

En este momento es inmediato caracterizar los grafos extremales que tienen exceso 1, ya que según la Proposición 2.2.21, ningún grafo extremal se obtiene mediante subdivisiones de un pseudografo.

**Teorema 4.2.3** *Sea  $n \geq 4$  y  $\nu$  entero tal que  $\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n)$ . Cualquier grafo  $G$  de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con  $\delta(G) = 2$  consta de dos vértices de valencia 3 unidos por tres caminos disjuntos. Además, si  $\nu = \nu_1(n)$ , entonces  $G$  es único.*

*Demostración:* Para  $n \geq 4$  y  $\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n)$ , sea  $G$  cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con valencia mínima 2.

Como  $\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n) = 2n$ , sabemos por la Proposición 2.2.17, que el grafo  $G$  tiene exceso 1 y se deduce de la Proposición 4.2.2 que  $G$  es el grafo formado por dos vértices de valencia 3 unidos por tres caminos disjuntos.

Además, comprobamos que cuando  $\nu(G) = \nu_1(n)$  el grafo extremal  $G$  es único. En este caso, por un lado los tres caminos que unen los dos vértices de valencia 3 de  $V(G)$  contienen conjuntamente

$$\nu_1(n) - 2 = \left\lceil \frac{3n - 3}{2} \right\rceil$$

vértices de valencia 2. Por otro lado, cada uno de tales caminos tiene, según el Lema 3.3.3, a lo sumo

$$\nu_1(n) - \nu_0(n) = \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil - (n + 1) = \left\lceil \frac{n - 1}{2} \right\rceil$$

vértices consecutivos de valencia 2.

Ambas consideraciones conducen a la existencia en  $G$  de dos caminos con  $\left\lceil \frac{n - 1}{2} \right\rceil$  vértices de valencia mínima y otro con  $\left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$ , lo que prueba su unicidad. ⊗

Por tanto todos los grafos extremales con exceso 1 tienen el mismo esqueleto, el multigrafo formado por dos vértices de valencia 3 unidos por tres aristas diferentes.

**Observación 4.2.4** *Posteriormente recurriremos a grafos del conjunto  $G_1(n)$ , y por comodidad, denotamos por  $M_1$  al único de los tres esqueletos de  $\mathcal{E}_1$ , mostrados en la Figura 4.1, que es un multigrafo. Su interés especial radica en que, según acabamos de probar, todos los grafos extremales con exceso 1 y valencia mínima al menos 2 se obtienen mediante subdivisiones de  $M_1$ , multigrafo mostrado en la Figura 4.2.*

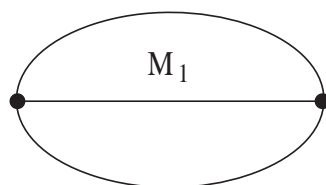


Figura 4.2: Único esqueleto de los grafos extremales con exceso 1.

Antes de caracterizar los grafos extremales con exceso  $k \geq 2$  consideramos el siguiente subgrafo de un grafo dado:

**Definición 4.2.5** Para  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r \leq k$  enteros y  $G$  un grafo con exceso  $k$  y  $\delta \geq 2$ , sea  $C$  un ciclo contenido en  $G$  con  $r$  vértices de valencia al menos 3. Consideramos  $G \overset{\circ}{-} C$  como el subgrafo de  $G$  obtenido al eliminar de  $G$  el ciclo  $C$  salvo sus  $r$  vértices de valencia al menos 3. (Véase la Figura 4.3)

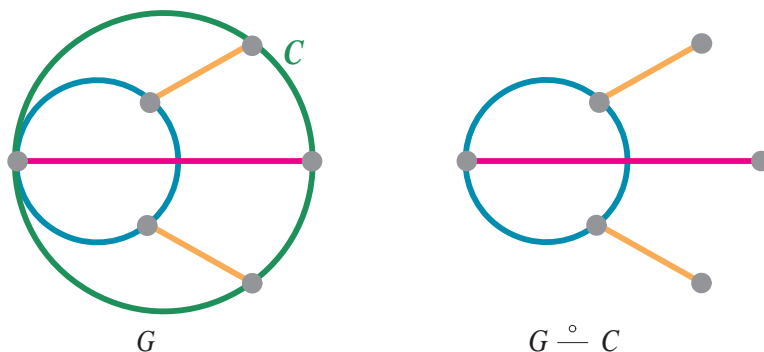


Figura 4.3: Ejemplo de grafo  $G$  y subgrafo  $G \overset{\circ}{-} C$

Es evidente que:

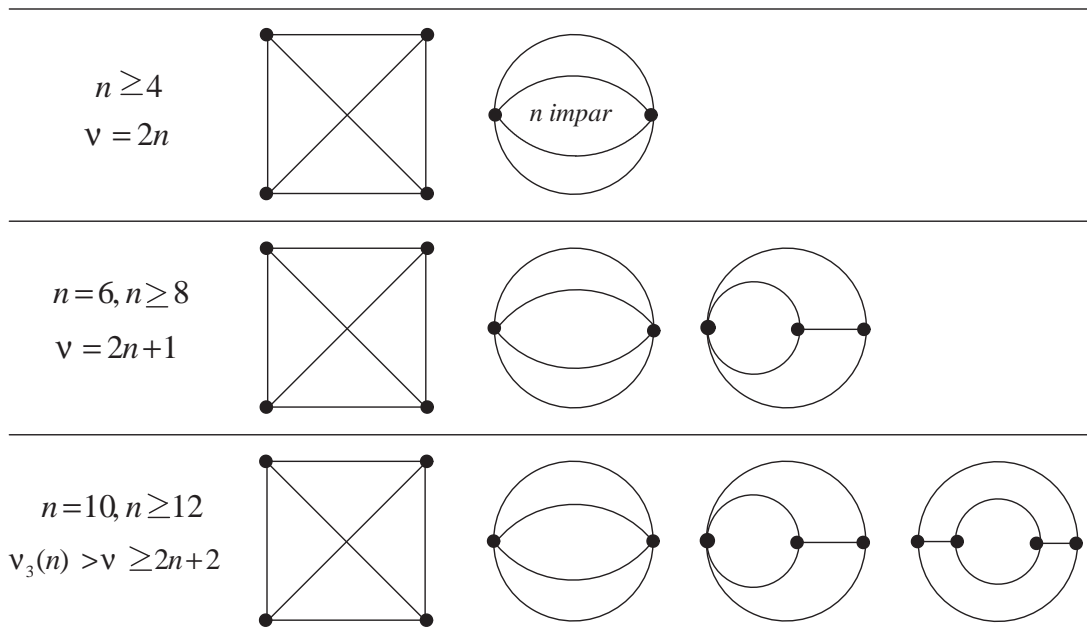
**Lema 4.2.6** Si  $G$  es un grafo con exceso  $k \geq 1$  y  $C$  es un ciclo contenido en  $G$  con  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , vértices de valencia al menos 3, entonces el subgrafo  $G \overset{\circ}{-} C$  tiene exceso  $k - r$ .



4.2. Caracterización de los grafos extremales con orden  $\nu \leq 3n - 3$ . 117

Dependiendo del orden dado, caracterizamos a continuación todos los grafos extremales cuyo exceso es 2. La demostración es constructiva, de modo que para cada una de las configuraciones posible se construye al menos un grafo con la mínima cantidad de vértices necesaria para alcanzar cintura  $n + 1$ .

**Teorema 4.2.7** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu$  enteros tal que  $\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$ . Cualquier grafo  $G$  de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con  $\delta(G) = 2$  se obtiene mediante subdivisiones de las aristas de uno de los grafos siguientes:



*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero y  $G$  cualquier grafo de la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con  $\nu$  verificando que  $\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$ .

Como se refleja en la Proposición 2.2.17, se cumple que

$$e(G) = \nu(G) + 2,$$

y en consecuencia vamos a caracterizar a continuación los grafos extremales con exceso 2, teniendo en cuenta que tanto  $G$  como  $\tilde{G}$  verifican la igualdad (1.4), obtenida en los Preliminares de esta memoria, y dada por

$$n_3 + 2n_4 = 4,$$

ya que según el Lema 3.3.4, la valencia máxima de  $G$  es a lo sumo 4. Esto da lugar a una de las siguientes posibilidades

$$\{n_3 = 4, n_4 = 0\}, \quad \{n_3 = 2, n_4 = 1\}, \quad \{n_3 = 0, n_4 = 2\},$$

de modo que se cumple que  $2 \leq \nu(\tilde{G}) \leq 4$ .

Por la Proposición 2.2.21, conocemos que  $G$  no procede de subdivisiones de pseudografos, y que por tanto, su esqueleto  $\tilde{G}$  es bien un multigrafo o bien un grafo simple. En este último caso sabemos, por el Corolario 2.3.4, que

$$g(\tilde{G}) \leq \lfloor 2 \log_2 3 \rfloor = 3.$$

Atendiendo a esta última consideración estudiamos los distintos esqueletos conexos de los cuales puede proceder el grafo dado  $G$  mediante subdivisiones de sus aristas.

- i)* Si  $g(\tilde{G}) = 3$ , entonces la única posible configuración para  $\tilde{G}$  de modo que su cintura sea 3 es la que verifica que  $n_3 = 4$  y  $n_4 = 0$ , de lo que podemos concluir que

$$\tilde{G} = K_4.$$

Además el grafo mostrado en la Figura 3.2 prueba que, mediante subdivisiones del grafo completo  $K_4$ , es posible obtener para todo  $n \geq 4$  grafos con exceso 2 y mínimo orden  $\nu_2(n) = 2n$ .

- ii)* Si  $\tilde{G}$  es un multigrafo, entonces existe un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente dos vértices  $z_1, z_2$  de valencia al menos 3. Según el Lema 4.2.6 el subgrafo

4.2. Caracterización de los grafos extremales con orden  $\nu \leq 3n - 3$ . 119

$G \ominus C$  tiene exceso nulo, y por tanto contiene un ciclo que denotamos por  $C'$ . Teniendo en cuenta que los ciclos  $C$  y  $C'$  pueden ser disjuntos o compartir alguno de los dos vértices  $z_1, z_2$ , existen las siguientes posibilidades:

$ii_1$ ) Si  $C$  y  $C'$  son disjuntos, entonces  $n_4 = 0$  y  $n_3 = 4$ . Como la cintura de  $G$  es al menos  $n + 1$ , se cumple que

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(C') \geq 2(n + 1).$$

La única posible configuración con la propiedad requerida alcanza dicha cota como muestra el grafo de la Figura 4.4, en la cual las cantidades numéricas detallan la cantidad de veces que cada arista según su color debe ser subdividida.

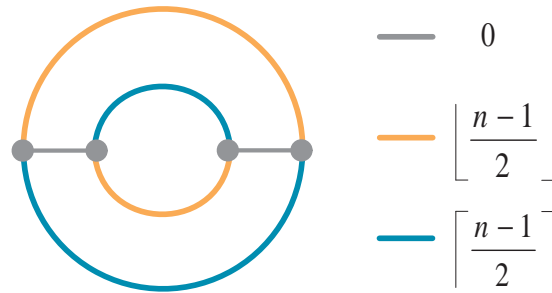


Figura 4.4: Grafo extremal de orden  $2n + 2$  para  $n = 10$  y  $n \geq 12$ .

Según la Proposición 2.2.17, como el grafo de la Figura 4.4 tiene exceso 2, solamente es extremal cuando su orden  $2n + 2$  es menor que la cantidad  $\nu_3(n)$ , lo cual ocurre si y solo si  $n = 10$  y  $n \geq 12$ .

$ii_2$ ) Si  $C$  y  $C'$  tienen exactamente un vértice en común, entonces  $n_4 = 1$  y  $n_3 = 2$ . Además,

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(C') - 1 \geq 2n + 1.$$

La única posible configuración que cumple las condiciones prefijadas alcanza dicha cota, como muestra el grafo de la Figura 4.5.

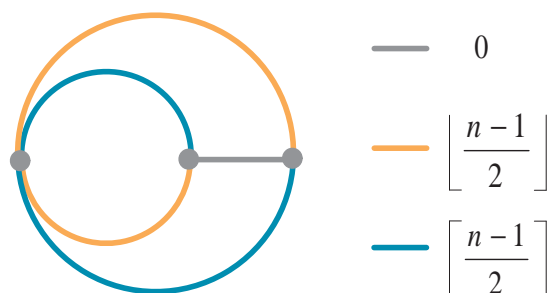


Figura 4.5: Grafo extremal de orden  $2n + 1$  para  $n = 6$  y  $n \geq 8$ .

Pero este grafo no es extremal cuando  $n \in \{4, 5, 7\}$ , pues para estos tres casos el orden del grafo  $2n + 1$  es igual a la cantidad  $\nu_3(n)$ .

*ii*<sub>3</sub>) Si  $C$  y  $C'$  tienen dos vértices en común, entonces  $n_4 = 2, n_3 = 0$ , y la desigualdad (1.10) aporta la siguiente cota sobre el orden de  $G$ ,

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La única posible configuración que cumple las condiciones preestablecidas alcanza dicha cota, como muestra el grafo de la Figura 4.6.

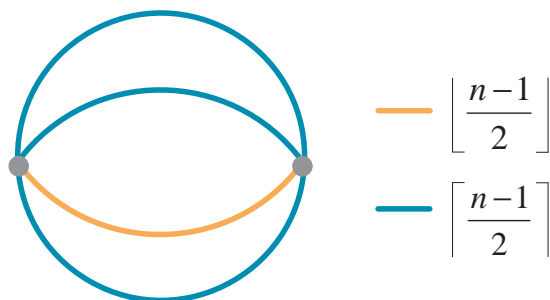


Figura 4.6: Para  $n \geq 5$ , grafo extremal de orden  $2n + 1$  si  $n$  es par y  $2n$  si  $n$  es impar.

Pero este grafo no es extremal cuando  $n = 4$ , pues en tal caso, su orden coincide con la cantidad  $\nu_3(4) = 9$ .

**Observación 4.2.8** *De un mismo esqueleto pueden obtenerse distintas subdivisiones con el mismo orden y cintura.*

Por ejemplo, en el Capítulo 2 hemos incluido en la Figura 2.7 tres grafos ponderados  $(G, w)$  con exceso 2, peso unitario y cintura pesada máxima, es decir, tales que  $g_w(G) = g(2)$ . Atendiendo a la proporción del peso de las aristas de cada uno de dichos grafos, mostramos en las Figuras 3.2 y 4.7 tres grafos extremales con cintura  $n + 1$ , exceso 2 y mínimo orden  $\nu_2(n) = 2n$ .

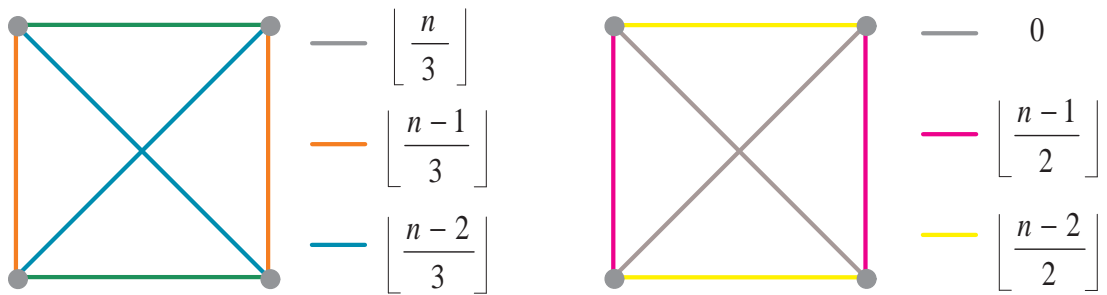
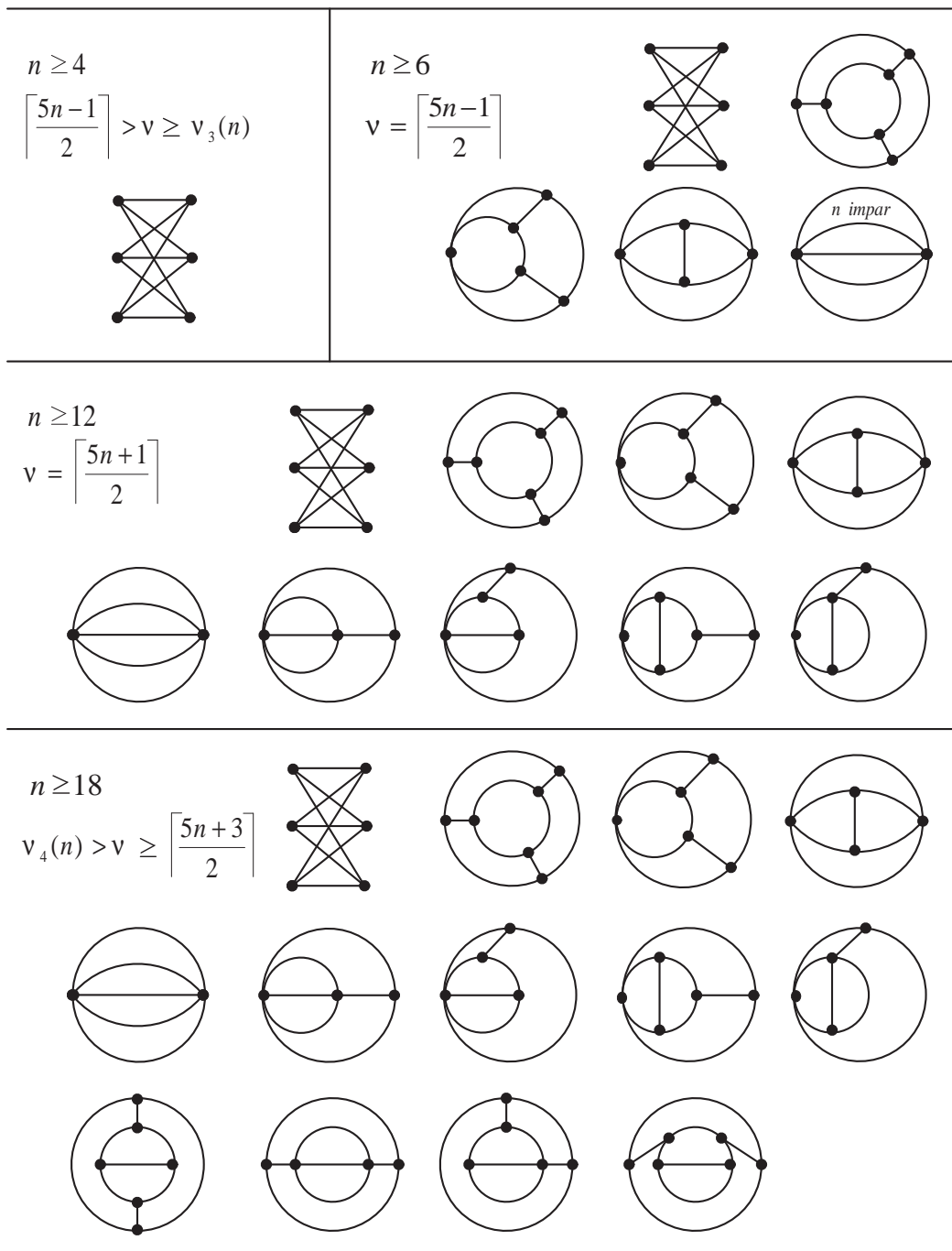


Figura 4.7: Grafos extremales con cintura  $n + 1$  y orden mínimo  $2n$ .

De manera similar a como hemos caracterizado los grafos extremales con excesos  $k \in \{0, 1, 2\}$  podemos también hacer lo mismo con los grafos de los conjuntos  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tales que su exceso sea 3. Obsérvese que identificamos no solamente los esqueletos tal que subdivididos apropiadamente proporcionan grafos extremales, sino que además incluimos una manera óptima de subdividirlos, en el sentido de que alcanzan la cintura  $n + 1$  con la mínima cantidad de vértices que cada uno de ellos necesita.

**Teorema 4.2.9** Sea  $n \geq 4$  y  $\nu$  entero tal que  $\nu_3(n) \leq \nu < \nu_4(n)$ . Cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con  $\delta \geq 2$  se obtiene mediante subdivisiones de las aristas de uno de los grafos siguientes:



**4.2. Caracterización de los grafos extremales con orden  $\nu \leq 3n - 3$ . 123**

*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero y  $G$  cualquier grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ , con valencia mínima al menos 2, y tal que  $\nu_3(n) \leq \nu(G) < \nu_4(n)$ .

Como se refleja en la Proposición 2.2.17, se cumple que

$$e(G) = \nu(G) + 3,$$

y es nuestro objetivo en este momento caracterizar los grafos extremales con exceso 3. Para ello, tenemos en cuenta que tanto  $G$  como  $\tilde{G}$  verifican la igualdad (1.4)

$$n_3 + 2n_4 + 3n_5 = 6,$$

ya que según el Lema 3.3.4 la valencia máxima de  $G$  es a lo sumo 5. Esto nos permite concluir que las valencias de los vértices de  $G$  y de  $\tilde{G}$  cumplen una de las siguientes posibilidades

$$\begin{aligned} &\{n_3 = 6, n_4 = 0, n_5 = 0\}, \quad \{n_3 = 4, n_4 = 1, n_5 = 0\}, \quad \{n_3 = 2, n_4 = 2, n_5 = 0\} \\ &\{n_3 = 0, n_4 = 3, n_5 = 0\}, \quad \{n_3 = 3, n_4 = 0, n_5 = 1\}, \quad \{n_3 = 1, n_4 = 1, n_5 = 1\} \\ &\{n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 2\}, \end{aligned}$$

y por tanto  $2 \leq \nu(\tilde{G}) \leq 6$ .

Veamos que existen grafos extremales para las distintas configuraciones anteriores, salvo cuando  $\{n_3 = 0, n_4 = 3, n_5 = 0\}$ .

Por la Proposición 2.2.21, sabemos que  $G$  no procede de subdivisiones de pseudografos y que por tanto, su esqueleto  $\tilde{G}$  es bien un multigrafo o bien un grafo simple. Además, por el Corolario 2.3.4, se cumple que

$$g(\tilde{G}) \leq \lfloor 2 \log_2 4 \rfloor = 4.$$

Atendiendo a esta última consideración, estudiamos los distintos esqueletos conexos de los cuales, mediante subdivisiones de sus aristas, puede proceder el grafo  $G$ .

*i)* Si  $g(\tilde{G}) = 4$ , entonces  $\nu(\tilde{G}) = 6$  y como  $EX(6; \{C_3\}) = K_{3,3}$  se deduce que

$$\tilde{G} = K_{3,3}.$$

En este caso, ya hemos probado en la Proposición 3.3.6, que mediante subdivisiones adecuadas del grafo bipartito  $K_{3,3}$  se pueden obtener grafos extremales de exceso 3 con mínimo orden  $\nu_3(n)$  para todo  $n \geq 4$ .

*ii)* Si  $g(\tilde{G}) = 3$ , entonces como el grafo completo de orden 4 tiene sólomente exceso 2, debe verificarse que  $\nu(\tilde{G}) \geq 5$ . Esta desigualdad únicamente es compatible con la igualdad (1.4)  $n_3 + 2n_4 + 3n_5 = 6$  cuando

$$\{\Delta = 3 \text{ y } n_3 = 6\} \quad \text{o} \quad \{\Delta = 4, n_4 = 1 \text{ y } n_3 = 4\}.$$

Como  $g(\tilde{G}) = 3$ , existe un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente tres vértices de valencia al menos 3 y entonces, según el Lema 4.2.6, el subgrafo  $G \overset{\circ}{-} C$  pertenece a  $G_0(n)$ . Esto significa que al quitar a  $G \overset{\circ}{-} C$  los vértices no contenidos en ciclos se obtiene otro ciclo  $C'$  de  $G$ .

Dependiendo de que ambos ciclos  $C$  y  $C'$  tengan o no un vértice en común existen dos únicas posibles configuraciones tales que sus esqueletos tienen cintura tres, como se observa en la Figura 4.8, en la que cuando ambos ciclos son disjuntos se ha incluido la mínima cantidad de veces que cada arista debe subdividirse para que el grafo resultante tenga cintura al menos  $n + 1$ .

*ii<sub>1</sub>)* Cuando los ciclos  $C$  y  $C'$  tienen un vértice en común, la valencia máxima de  $G$  es 4 y por tanto, deducimos del Teorema 3.3.5, que

$$\nu(G) \geq \left\lceil \frac{5n - 1}{2} \right\rceil.$$



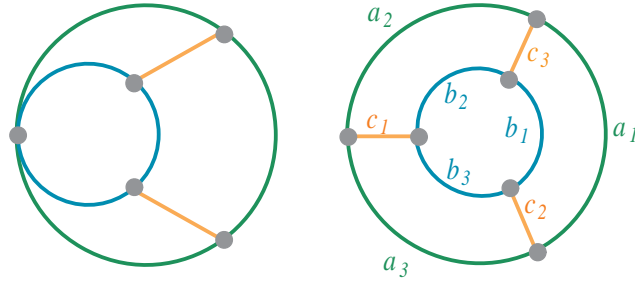


Figura 4.8: Únicos grafos  $G$  tales que  $g(\tilde{G}) = 3$ .

*ii*<sub>2</sub>) Cuando los ciclos  $C$  y  $C'$  son disjuntos, como la cintura del grafo  $G$  es al menos  $n + 1$ , se cumple que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + 3 & \geq n + 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 + 3 & \geq n + 1 \\ a_1 + b_1 + c_2 + c_3 + 4 & \geq n + 1 \\ a_2 + b_2 + c_1 + c_3 + 4 & \geq n + 1 \\ a_3 + b_3 + c_1 + c_2 + 4 & \geq n + 1 \end{cases}$$

Sumando estas cinco inecuaciones obtenemos que

$$\sum_{i=1}^3 a_i + \sum_{i=1}^3 b_i + \sum_{i=1}^3 c_i \geq \frac{5n - 13}{2}.$$

Por tanto

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^3 a_i + \sum_{i=1}^3 b_i + \sum_{i=1}^3 c_i + 6 \geq \left\lceil \frac{5n - 1}{2} \right\rceil.$$

En el caso que estamos tratando  $g(\tilde{G}) = 3$ , tanto si los ciclos  $C$  y  $C'$  tienen un vértice en común como si son disjuntos, la cota obtenida del orden de  $G$   $\nu(G) \geq \left\lceil \frac{5n - 1}{2} \right\rceil$  se alcanza, como muestran los grafos de la Figura 4.9, en la que se aprecia según el color la cantidad de veces que cada arista debe ser subdividida.

Nótese que los grafos de la Figura 4.9 solamente son extremales cuando su orden  $\left\lceil \frac{5n - 1}{2} \right\rceil$  es menor que la cantidad  $\nu_4(n)$ , lo cual se verifica para todo  $n \geq 6$ .

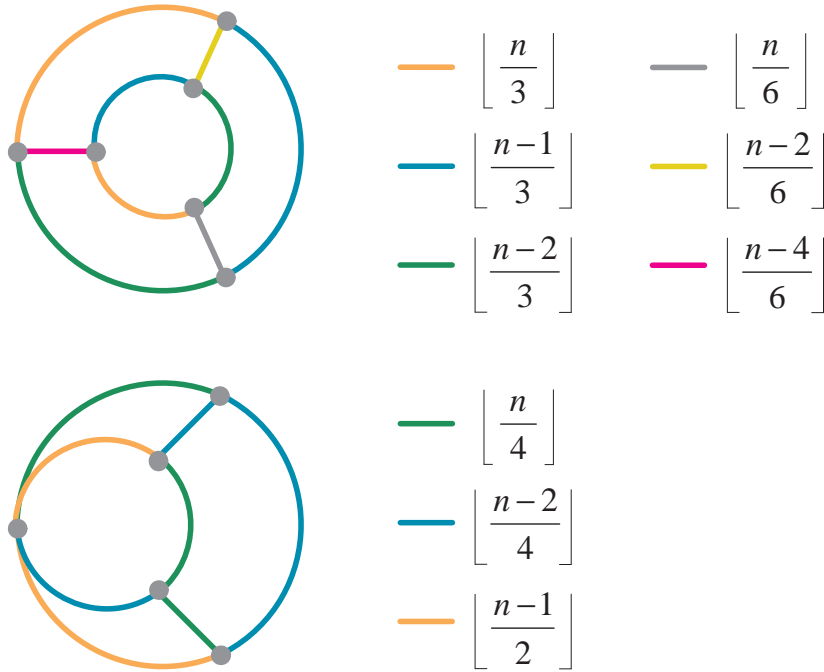


Figura 4.9: Grafos extremales con orden  $\lfloor \frac{5n-1}{2} \rfloor$  para  $n \geq 6$ .

iii) Si  $\tilde{G}$  es un multigrafo, entonces existe un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente dos vértices de valencia al menos 3, que denotamos por  $z_1, z_2$ . Por tanto, según el Lema 4.2.6, el subgrafo  $G \overset{\circ}{-} C$  pertenece a  $G_1(n)$ .

Como en la Proposición 4.2.2 hemos estudiado todos los grafos con exceso 1, así como el mínimo orden que debe tener cada uno de ellos para no contener los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ , deducimos que el esqueleto de  $G \overset{\circ}{-} C$  es el grafo  $M_1$  mostrado en la Figura 4.1, ya que en caso contrario se verificaría que

$$\nu(G) = \nu(C) - 2 + \nu(G \overset{\circ}{-} C) \geq n - 1 + 2n + 1 > \nu_4(n),$$

contradiéndose la hipótesis acerca del orden de  $G$ .

Consideramos  $H_1$  el subgrafo de  $G \overset{\circ}{-} C$  obtenido al eliminar de éste todos los vértices no contenidos en ciclos. Es evidente que  $\delta(H_1) \geq 2$  y que  $H_1$  pertenece también a  $G_1(n)$ .

Asimismo, cualquier camino en  $G \overset{\circ}{-} C$  que une  $z_1$  con  $z_2$  comparte con  $H_1$  más de un vértice, porque si suponemos que existe un camino  $P$  en  $G \overset{\circ}{-} C$  que comparte con  $H_1$  un único vértice, entonces el subgrafo  $C \cup P$  también tendría exceso 1, y en consecuencia, se cumpliría que

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \nu(H_1) + \nu(C \cup P) - \nu(C \cap H_1) - \nu(P \cap H_1) \\ &\geq 2\nu_1(n) - 3 \\ &\geq 3n - 2. \end{aligned}$$

Considerando que el ciclo  $C$  y el grafo  $H_1$  pueden ser disjuntos o compartir algunos de los dos vértices  $z_1, z_2$ , estudiamos las siguientes posibilidades:

*iii<sub>1</sub>*) Si  $C$  y  $H_1$  son disjuntos, entonces

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(H_1) \geq \nu(C) + \nu_1(n) \geq n + 1 + \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5n + 3}{2} \right\rceil.$$

Además esta cota se alcanza para las cuatro únicas posibles configuraciones que contienen a  $C$  y a  $H_1$  con las propiedades requeridas, como muestran los grafos de la Figura 4.10 adjunta, en la cual las cantidades numéricas detallan la cantidad de veces que cada arista según su color debe ser subdividida. Nótese que los grafos de la Figura 4.10 solamente son extremales cuando su orden  $\left\lceil \frac{5n + 3}{2} \right\rceil < \nu_4(n)$ , lo cual ocurre si y solo si  $n \geq 18$ .

*iii<sub>2</sub>*) Si  $C$  y  $H_1$  tienen exactamente un vértice en común, entonces

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(H_1) - 1 \geq \nu(C) + \nu_1(n) - 1 \geq \left\lceil \frac{5n + 1}{2} \right\rceil.$$

Los grafos de la Figura 4.11 prueban que esta cota es óptima para las cuatro posibles configuraciones que contienen a  $C$  y a  $H_1$  con las propiedades detalladas.

Hacemos notar que los grafos de la Figura 4.11 solamente son extremales cuando su orden  $\left\lceil \frac{5n + 1}{2} \right\rceil < \nu_4(n)$ , lo cual ocurre si y solo si  $n \geq 12$ .

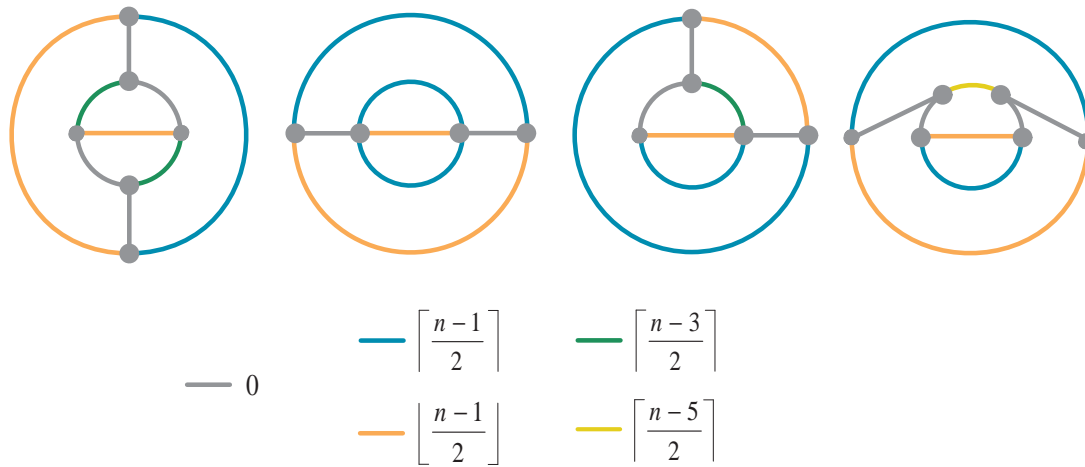


Figura 4.10: Grafos extremales con orden  $\lfloor \frac{5n+3}{2} \rfloor$  para  $n \geq 18$ .

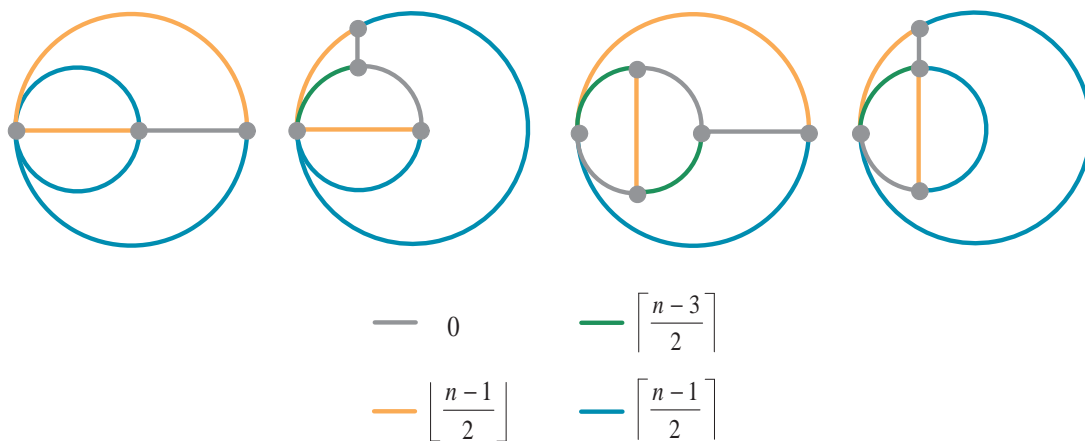


Figura 4.11: Grafos extremales con orden  $\lfloor \frac{5n+1}{2} \rfloor$  para  $n \geq 12$ .

iii<sub>3</sub>) Si  $C$  y  $H_1$  tienen dos vértices en común, entonces en principio

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(H_1) - 2 \geq \left\lfloor \frac{5n-1}{2} \right\rfloor.$$

Pero, en el caso particular de que  $n$  sea par y  $\Delta(G) = 5$ , sabemos, por el Teorema 3.3.5, que el orden de  $G$  debe ser al menos  $\frac{5n+2}{2}$ .

Uniendo ambas desigualdades obtenemos que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \frac{5n+2}{2} & \text{si } \Delta(G) = 5 \text{ y } n \text{ par;} \\ \left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Análogamente, esta cota se alcanza para las dos únicas posibles configuraciones, no isomorfas a ninguna de las consideradas previamente, que contienen a  $C$  y a  $H_1$  con las propiedades detalladas, como prueban los grafos de las Figuras 4.12 y 4.13.

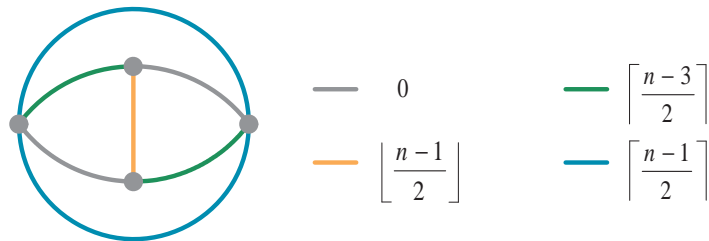


Figura 4.12: Grafo extremal con orden  $\left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil$  para  $n \geq 6$ .

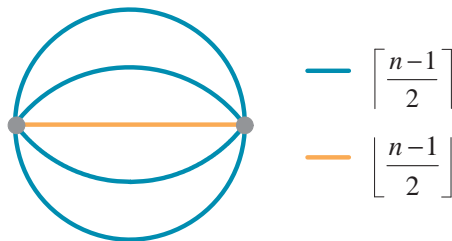


Figura 4.13: Grafo extremal con orden  $\frac{5n+2}{2}$  si  $n$  es par y  $\frac{5n-1}{2}$  si  $n$  es impar para  $n \geq 7$ ,  $n \notin \{8, 10\}$ .

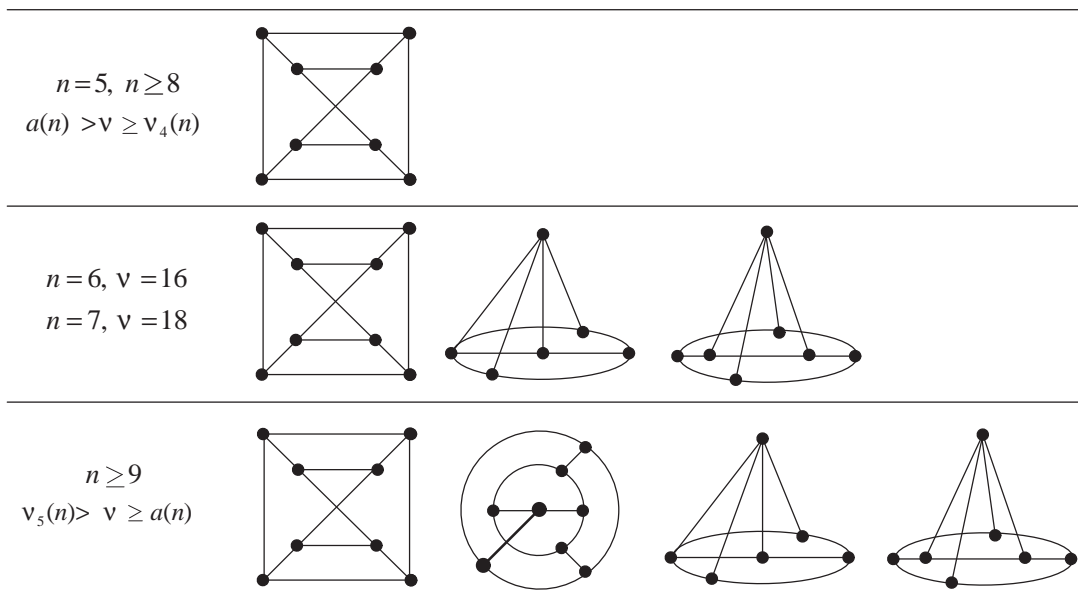
Hacemos notar que ambos grafos son solamente extremales cuando su orden se mantiene inferior a la cantidad  $\nu_4(n)$ .

El conocimiento del intervalo extremal de exceso 4 nos facilita la posibilidad de caracterizar los grafos del conjunto  $EX_4(n)$ , formado por todos los grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con 4 aristas más que vértices. Hacemos notar que en particular cuando  $n = 4$  este conjunto es vacío como se deduce de la igualdad  $\nu_4(4) = \nu_5(4) = 10$ , (véase la Observación 2.2.11). Por lo tanto el resultado siguiente solamente tiene sentido para valores  $n \geq 5$ .

**Teorema 4.2.10** *Sea  $n \geq 5$  y sea  $\nu$  entero tal que  $\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$ . Denotamos por*

$$a(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{11n - 2}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{11n - 5}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con  $\delta \geq 2$  se obtiene mediante subdivisiones de las aristas de uno de los grafos siguientes:*



*Demostración:* Para  $n \geq 5$  y  $\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$  enteros, sea  $G$  cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

Como se refleja en la Proposición 2.2.17, se cumple que

$$e(G) = \nu(G) + 4,$$

y por tanto  $G$  representa cualquier grafo extremal con exceso 4.

Como  $\nu < \nu_5(n) \leq 3n - 1$ , una primera propiedad es que  $G$  no se obtiene mediante subdivisiones de pseudografos ni de multigrafos, como se deduce de la Proposición 2.2.21 y del Teorema 3.3.7, respectivamente.

De igual manera y según este mismo Teorema 3.3.7, se cumple también que

$$\Delta(G) \leq 4,$$

y consecuentemente tanto el grafo  $G$  como su esqueleto  $\tilde{G}$  verifican la igualdad (1.4)

$$n_3 + 2n_4 = 8.$$

De manera similar a como se ha procedido en el Teorema 3.3.7 estudiamos, atendiendo a su valencia máxima, los distintos esqueletos de los cuales puede proceder el grafo dado  $G$  mediante subdivisiones de sus aristas.

*i)* Cuando  $\Delta(G) = 3$ , el grafo  $G$  tiene ocho vértices de valencia 3. Además el Corolario 2.3.4 asegura que  $g(\tilde{G}) \leq 4$  y estudiamos las distintas configuraciones de  $G$  según sea la cintura de su esqueleto.

*i<sub>1</sub>)* Si  $g(\tilde{G}) = 4$ , entonces mediante el Lema 4.2.6 deducimos que  $G$  contiene dos ciclos  $C$  y  $C'$  disjuntos, cada uno con cuatro vértices de valencia 3. Denotamos éstos por  $x_1, \dots, x_4$  y  $z_1, \dots, z_4$  respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las aristas  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_1z_1, x_2z_2, x_3z_3, x_4z_4$  pertenecen a  $E(\tilde{G})$ . Como  $z_1, \dots, z_4$  pertenecen al ciclo  $C'$ , salvo isomorfismos, solamente existen

dos maneras de unir dichos vértices. Esto prueba que los únicos posibles esqueletos de  $G$  son los dos reflejados en la Figura 4.14.

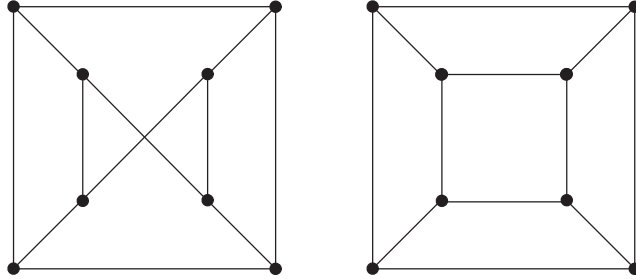


Figura 4.14: Únicos esqueletos con cintura 4, exceso 4 y valencia máxima 3

Observemos que el primero de los esqueletos de la Figura 4.14 ha sido estudiado en el Capítulo 3 y de hecho, en la Proposición 3.3.8, se proporciona una subdivisión óptima de él, de modo que el grafo obtenido alcanza la cintura  $n + 1$  con exactamente  $\nu_4(n)$  vértices.

Sin embargo probamos a continuación que el segundo de los esqueletos de la Figura 4.14 necesita al menos  $3n - 1$  vértices para no contener los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ .

Para ello consideramos el grafo  $G$  de la Figura 4.15 en el cual, como se indica en ella, sus aristas están subdivididas  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  veces, para  $1 \leq i \leq 4$ , con el objeto de que su cintura sea al menos  $n + 1$ . Evidentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 4 \geq n + 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + 4 \geq n + 1 \\ a_1 + c_1 + b_1 + c_2 + 4 \geq n + 1 \\ a_2 + c_4 + b_2 + c_1 + 4 \geq n + 1 \\ a_3 + c_3 + b_3 + c_4 + 4 \geq n + 1 \\ a_4 + c_2 + b_4 + c_3 + 4 \geq n + 1 \end{array} \right.$$



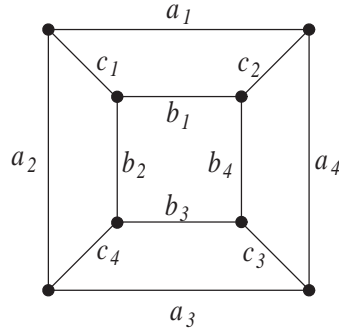


Figura 4.15: Subdivisiones necesarias para alcanzar cintura  $n + 1$

Sumando las seis desigualdades anteriores se obtiene que

$$\sum_{i=1}^4 a_i + \sum_{i=1}^4 b_i + \sum_{i=1}^4 c_i \geq 3n - 9$$

y como el orden de dicho grafo es

$$\sum_{i=1}^4 a_i + \sum_{i=1}^4 b_i + \sum_{i=1}^4 c_i + 8$$

se cumple que

$$\nu(G) \geq 3n - 1 \geq \nu_5(n)$$

lo que nos permite deducir que ningún grafo del conjunto extremal  $EX_4(n)$  tiene como esqueleto el segundo grafo de la Figura 4.14.

- $i_2)$  Suponemos que  $g(\tilde{G}) = 3$ , lo que asegura la existencia de un ciclo  $C$  en  $G$  con exactamente tres vértices de valencia 3, y por ello, según el Lema 4.2.6, el subgrafo  $G \overset{\circ}{-} C$  pertenece a  $G_1(n)$ .

Como en la Proposición 4.2.2 hemos determinado el orden mínimo de todos los grafos con exceso 1 y cuya cintura es al menos  $n + 1$ , deducimos que el esqueleto de  $G$  es el multigrafo que hemos denominado  $M_1$ , (véase la Figura 4.2), porque en caso contrario, según la Proposición 4.2.2, se verifica que  $\nu(G \overset{\circ}{-} C) \geq 2n + 1$ , lo que conduce a la siguiente contradicción sobre el orden de  $G$

$$\nu_5(n) > \nu(G) \geq \nu(C) - 3 + \nu(G \overset{\circ}{-} C) \geq n - 2 + 2n + 1 = 3n - 1 \geq \nu_5(n).$$

Por tanto, como acabamos de probar que el esqueleto de  $G \overset{\circ}{-} C$  es  $M_1$ , deducimos que al eliminar de  $G \overset{\circ}{-} C$  todos sus caminos no contenidos en ciclos, obtenemos un grafo  $H_1 \in G_1(n)$  formado por tres caminos disjuntos que unen dos vértices de valencia 3. Además, como  $\Delta(G) = 3$ , el ciclo  $C$  y el subgrafo  $H_1$  son disjuntos.

Denotamos por  $x_1, x_2, x_3$  los vértices de valencia 3 de  $C$ , por  $y_1, y_2$  los de  $H_1$  y por  $z_1, z_2, z_3$  los otros tres vértices de valencia máxima del grafo  $G$ .

Como  $\tilde{G}$  es un grafo simple, hacemos notar que al menos dos vértices del conjunto  $\{z_1, z_2, z_3\}$  pertenecen a caminos diferentes de  $H_1$ .

Cuando exactamente dos vértices del conjunto  $\{z_1, z_2, z_3\}$  pertenecen a  $H_1$ , entonces el esqueleto de  $G$  es el mostrado en la Figura 4.16.

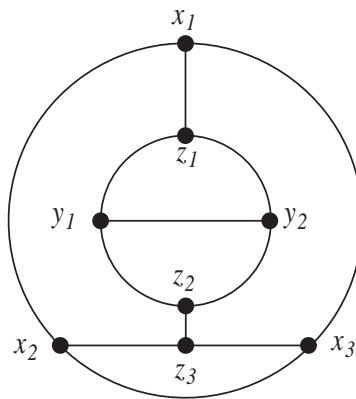


Figura 4.16: Un esqueleto con exceso 4 y cintura 3 pero que no da lugar a grafos extremales.

En tal caso, el subgrafo  $H_2 = G - H_1$  pertenece también a  $G_1(n)$  y consecuentemente se cumple que

$$\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) \geq 2 \nu_1(n) \geq 3n + 1 > \nu_5(n) > \nu(G),$$

lo que implica que ningún grafo extremal tiene como esqueleto al grafo de la Figura 4.16.

Por tanto, los tres vértices  $z_1, z_2, z_3$  pertenecen al subgrafo  $H_1$ . Estos vértices pueden estar en un único ciclo de  $H_1$  o no, dando lugar respectivamente a las dos posibles configuraciones que se observan en las Figuras 4.17 y 4.18. Determinamos la mínima cantidad de vértices que debe tener cada una de ellas para no contener los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ .

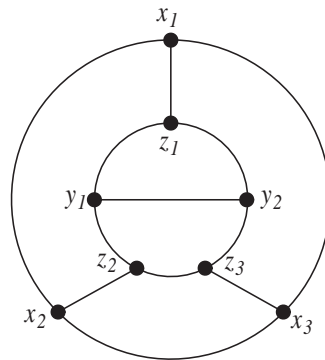


Figura 4.17: Otro esqueleto con exceso 4 y cintura 3 que no da lugar a grafos extremales.

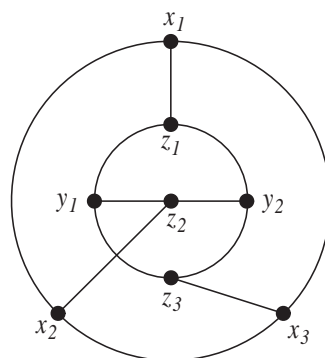


Figura 4.18: Esqueleto de grafos extremales con exceso 4, cintura 3 y  $\Delta = 3$ .

Es evidente que además del ciclo  $C$  y del grafo  $H_1$  existen en  $G$  tres

caminos, que denotamos  $P_i$ , cuyos vértices internos tienen valencia 2 y que unen cada vértice  $x_i$  con  $z_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Por  $\eta_i \geq 0$  denotamos la cantidad de vértices de valencia 2 en el camino  $P_i$  y por  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ .

Como  $g(G) > n$ , para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  con  $i \neq j$ , se cumple que

$$d_{P_i}(x_i, z_i) + d_{H_1}(z_i, z_j) + d_{P_j}(z_j, x_j) + d_C(x_j, x_i) \geq n + 1,$$

o de manera equivalente

$$\eta_i + 1 + d_{H_1}(z_i, z_j) + \eta_j + 1 + d_C(x_j, x_i) \geq n + 1.$$

Sumando estas tres desigualdades obtenemos que

$$2\eta + \sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) + \sum_{i,j=1}^3 d_C(x_i, x_j) \geq 3(n - 1).$$

Como la suma de las distancias de tres vértices en un ciclo es menor o igual que la longitud de dicho ciclo se cumple que

$$\sum_{i,j=1}^3 d_C(x_i, x_j) \leq \nu(C),$$

y por tanto,

$$2\eta + \sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) + \nu(C) \geq 3(n - 1).$$

Esta desigualdad permite obtener una cota inferior sobre el orden del grafo considerado  $G$

$$\begin{aligned} 2\nu(G) &= 2\nu(C) + 2\nu(H_1) + 2\eta \\ &\geq \nu(C) + 2\nu(H_1) + 3(n - 1) - \sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) \\ &\geq 4n - 2 + 2\nu(H_1) - \sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como estamos interesados en encontrar el mínimo orden de  $G$  debemos acotar de la forma más precisa posible el sumatorio de la desigualdad (4.1), dependiendo de que los vértices  $z_1, z_2, z_3$  estén en un único

ciclo de  $H_1$  o no, como ocurre respectivamente en las dos posibles configuraciones que nos interesan, y que se muestran en las Figuras 4.17 y 4.18.

Para ello, denotamos por  $Q_1, Q_2, Q_3$  los tres caminos disjuntos de  $H_1$  que unen sus dos vértices  $y_1, y_2$ , y por  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  la cantidad de vértices de valencia 2 contenida en cada uno de dichos caminos respectivamente de modo que  $\nu(Q_i) = \alpha_i + 1$ .

Cuando los tres vértices  $z_1, z_2, z_3$  se encuentran en un ciclo de  $H_1$ , (véase la Figura 4.17), que suponemos sin pérdida de generalidad es el formado por  $Q_1 \cup Q_3$ , se verifica que

$$\sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) \leq \alpha_1 + \alpha_3 + 2.$$

Esta acotación junto con la desigualdad (4.1) proporcionan la siguiente cota sobre el orden de  $G$ .

$$\begin{aligned} 2\nu(G) &\geq 4n - 2 + 2\nu(H_1) - \alpha_1 - \alpha_3 - 2 \\ &= 4n - 2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2) - \alpha_1 - \alpha_3 - 2 \\ &= 4n - 4 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2) + (\alpha_2 + \alpha_3 + 2) \\ &\geq 4n - 4 + 2(n + 1) \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

Por tanto, según la igualdad 2.2, el grafo de la Figura 4.17 tampoco es esqueleto de ningún grafo extremal pues necesita al menos  $3n - 1 \geq \nu_5(n)$  vértices para alcanzar la cintura  $n + 1$ .

Deducimos entonces que cada uno de los vértices del conjunto  $\{z_1, z_2, z_3\}$  se encuentra en un camino diferente de  $H_1$ . Entonces, teniendo en cuenta que la distancia de dos vértices en un ciclo es al menos su diámetro, obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^3 d_{H_1}(z_i, z_j) \leq \left\lfloor \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + 2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + 2}{2} \right\rfloor.$$

De esta manera, mediante la desigualdad (4.1), obtenemos la siguiente cota acerca del orden de  $G$ .

$$\begin{aligned}
2\nu(G) &\geq 4n - 2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2) - \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \left\lfloor \frac{\alpha_i + \alpha_j + 2}{2} \right\rfloor \\
&= 4n - 2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \left( \alpha_i + \alpha_j + 2 - \left\lfloor \frac{\alpha_i + \alpha_j + 2}{2} \right\rfloor \right) - 2 \\
&= 4n - 4 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \left\lceil \frac{\alpha_i + \alpha_j + 2}{2} \right\rceil \\
&\geq 4n - 4 + 3 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \\
&= \begin{cases} \frac{11n-2}{2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ \frac{11n-5}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Queda así probado que cualquier grafo extremal  $G$  con exceso 4, valencia máxima 3 y tal que  $g(\tilde{G}) = 3$  tiene como esqueleto al grafo de la Figura 4.18 y su orden es al menos

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{11n-2}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{11n-5}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Pero además se puede construir el grafo que alcanza dicha cota, como confirma el grafo de la Figura 4.19.

Hacemos notar que el grafo  $G$  de la Figura 4.19 no es extremal para los valores  $n \in \{5, 6, 7, 8\}$ , ya que en tales casos, como  $G$  contiene a un ciclo  $C$  y a un grafo  $H_1 \in G_1(n)$ , debe verificarse que

$$\nu(G) \geq \nu(C) + \nu(H_1) \geq n + 1 + \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil \geq \nu_5(n),$$

lo cual contradice que  $\nu(G) < \nu_5(n)$  por ser  $G$  un grafo extremal con exceso 4.

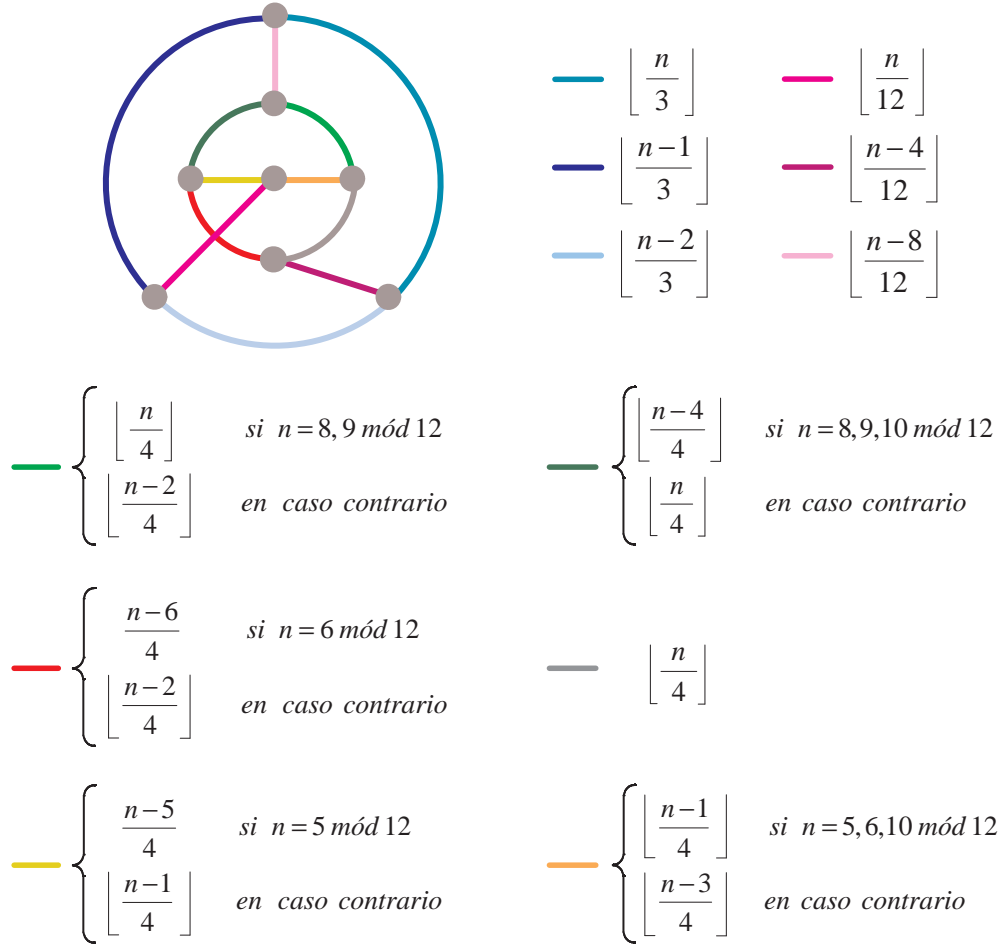


Figura 4.19: Para  $n \geq 9$ , grafo extremal con orden  $\left\lfloor \frac{11n-2}{4} \right\rfloor$  si  $n$  es par y  $\left\lfloor \frac{11n-5}{4} \right\rfloor$  si  $n$  es impar.

ii) Suponemos que  $\Delta(G) = 4$ . Identificamos a continuación todos los esqueletos tanto con valencia máxima como con exceso 4 que óptimamente subdivididos necesitan menos de  $\nu_5(n)$  vértices para alcanzar cintura al menos  $n + 1$ .

Para ello, denotamos por  $x$  cualquier vértice de  $G$  de máxima valencia y por  $z_i$ , para  $1 \leq i \leq 4$ , los vértices de su esqueleto  $\tilde{G}$  tales que existe un camino en  $G$ , que denotamos por  $P_i$ , que une cada  $z_i$  con  $x$  y cuyos vértices internos tienen todos valencia 2.

Para nuestro objetivo necesitamos de nuevo la caracterización de los grafos con exceso 1 dada en la Proposición 4.2.2. Concretamente como el subgrafo  $G - x$  pertenece al conjunto  $G_1(n)$  contiene a un subgrafo de dicho conjunto con valencia mínima al menos 2 que denotamos por  $H_1$ .

Probamos a continuación que el esqueleto de  $H_1$  es el multigrafo que hemos denominado  $M_1$  (véase la Figura 4.2). En caso contrario, es decir si

$$\widetilde{H}_1 \neq M_1,$$

como se ilustra en ambos grafos de la Figura 4.20, al ser  $\widetilde{G}$  un grafo simple, cada uno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  de  $H_1$  contiene tres vértices de valencia al menos 3. Podemos entonces suponer que  $z_1, z_2$  pertenecen a  $V(C_1)$  y  $z_3, z_4$  a  $V(C_2)$ . Los subgrafos  $C_1 \cup P_1 \cup P_2$  y  $C_2 \cup P_3 \cup P_4$  pertenecen a  $G_1(n)$  y tienen a lo sumo dos vértices en común, y en consecuencia se cumple que

$$\nu(G) \geq 2\nu_1(n) - 2 \geq 3n - 1 \geq \nu_5(n),$$

desigualdad que contradice el orden del grafo  $G$ .

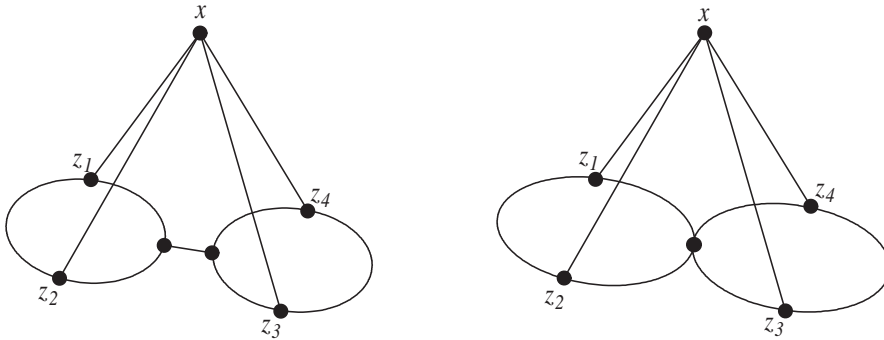


Figura 4.20: Al quitar un vértice de valencia 4 a un grafo de  $G_4(n)$  se obtiene un grafo de  $G_1(n)$ .

Por tanto se verifica que  $\widetilde{H}_1 = M_1$ . Denotamos por  $y_1, y_2$  los otros vértices de  $H_1$  con valencias al menos 3. Nótese que alguno de los vértices del



conjunto  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  puede coincidir con  $y_1$  y/o  $y_2$  como se observa en la Figura 4.21.

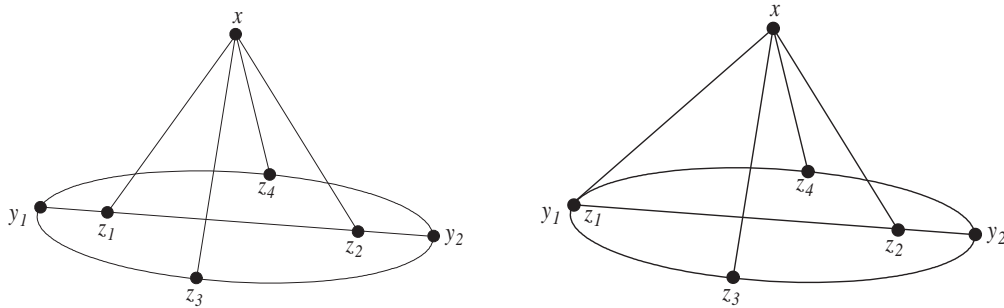


Figura 4.21: Al quitar un vértice de valencia 4 a un grafo de  $G_4(n)$  se obtiene un grafo de  $G_1(n)$ .

Para determinar los grafos con exceso y valencia máxima 4 que son extremales distinguimos dos casos, dependiendo de que todos los vértices estén contenidos en un ciclo de  $H_1$  o no.

En primer lugar, suponemos que los vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$  pertenecen todos a un ciclo  $C$  de  $H_1$ , como se ilustra en la Figura 4.22. Denotamos por  $a_1, a_2, a_3$  respectivamente la cantidad de vértices de valencia 2 contenida en cada uno de los tres caminos  $Q_1, Q_2, Q_3$  que unen  $y_1$  con  $y_2$  en  $H_1$ , y análogamente por  $b_1, b_2, b_3, b_4$  las de los caminos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  que unen el vértice  $x$  con los vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , respectivamente. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que estos cuatro vértices pertenecen al conjunto  $Q_1 \cup Q_2$ .

Como el grafo  $G$  tiene cintura al menos  $n + 1$  se cumple que

$$\begin{cases} 1 + b_1 + d_C(z_1, z_2) + 1 + b_2 \geq n + 1 \\ 1 + b_2 + d_C(z_2, z_3) + 1 + b_3 \geq n + 1 \\ 1 + b_3 + d_C(z_3, z_4) + 1 + b_4 \geq n + 1 \\ 1 + b_4 + d_C(z_4, z_1) + 1 + b_1 \geq n + 1 \end{cases}$$

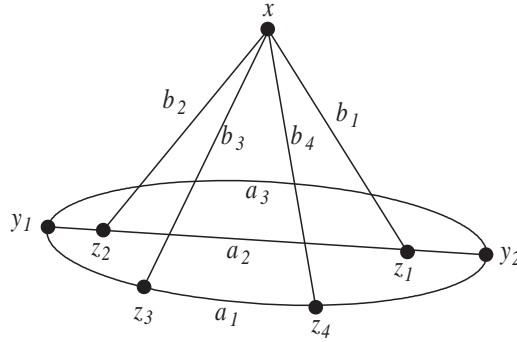


Figura 4.22: Subdivisiones necesarias para alcanzar cintura  $n + 1$ .

Sumando las cuatro desigualdades anteriores obtenemos que

$$2 \sum_{i=1}^4 b_i + \sum_{i,j=1}^4 d_C(z_i, z_j) \geq 4n - 4,$$

y teniendo en cuenta que los vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$  están en el ciclo  $C$  se verifica

$$2 \sum_{i=1}^4 b_i + \nu(C) \geq 4n - 4,$$

o de modo equivalente,

$$2 \sum_{i=1}^4 b_i + a_1 + a_2 + 2 \geq 4n - 4.$$

La desigualdad anterior permite acotar el orden del grafo  $G$

$$\begin{aligned} 2\nu(G) &= 2\left(3 + a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{i=1}^4 b_i\right) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_3 + 4n \\ &= (a_1 + a_3 + 2) + (a_2 + a_3 + 2) + 4n - 4 \\ &\geq 2(n + 1) + 4n - 4 \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

Como esta desigualdad lleva a la contradicción

$$\nu_5(n) > \nu(G) \geq 3n - 1 \geq \nu_5(n),$$

deducimos que no existe ciclo alguno en  $H_1$  que contenga a  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ . Esto implica que a lo sumo uno de los vértices del conjunto anterior puede coincidir con  $y_1$  o  $y_2$  y los tres restantes están cada uno en un camino  $Q_i$  diferente.

Una vez identificadas las características de los grafos extremales  $G$  con exceso y valencia máxima 4, los dos únicos esqueletos posibles son los de la Figura 4.23, dependiendo de que uno de los vértices del conjunto  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  coincida con uno de  $\{y_1, y_2\}$  o no.

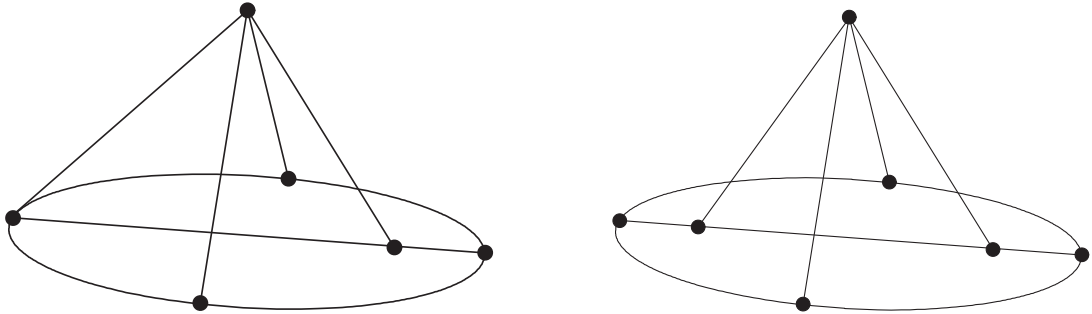


Figura 4.23: Únicos esqueletos de los grafos extremales con exceso y valencia máxima 4.

Además por ser  $\Delta(G) = 4$ , sabemos por el Teorema 3.3.7, que

$$\nu(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{11n - 2}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{11n - 5}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

Esta cota es óptima y se alcanza para ambos esqueletos de la Figura 4.23, como confirman los grafos construidos en las Figuras 4.24 y 4.25. Hacemos notar que según la igualdad (2.2) estos dos grafos no son extremales cuando  $n \in \{5, 8\}$ , pues se trata de grafos con exceso 4, y en ambos casos su orden coincide con la cantidad  $\nu_5(n)$ .

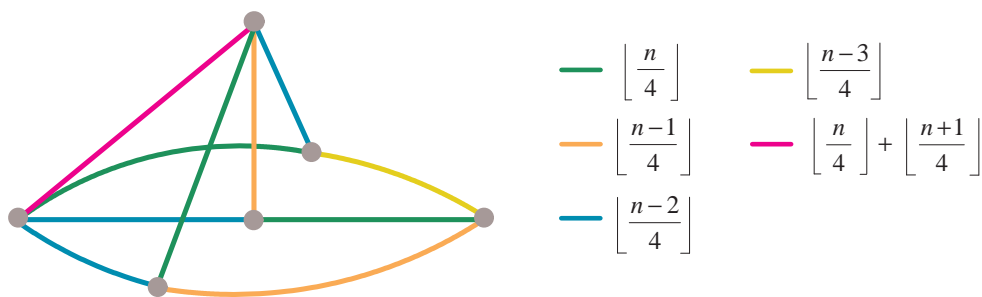


Figura 4.24: Grafo extremal con exceso y valencia máxima 4 para  $n \in \{6, 7\}$  y  $n \geq 9$ .

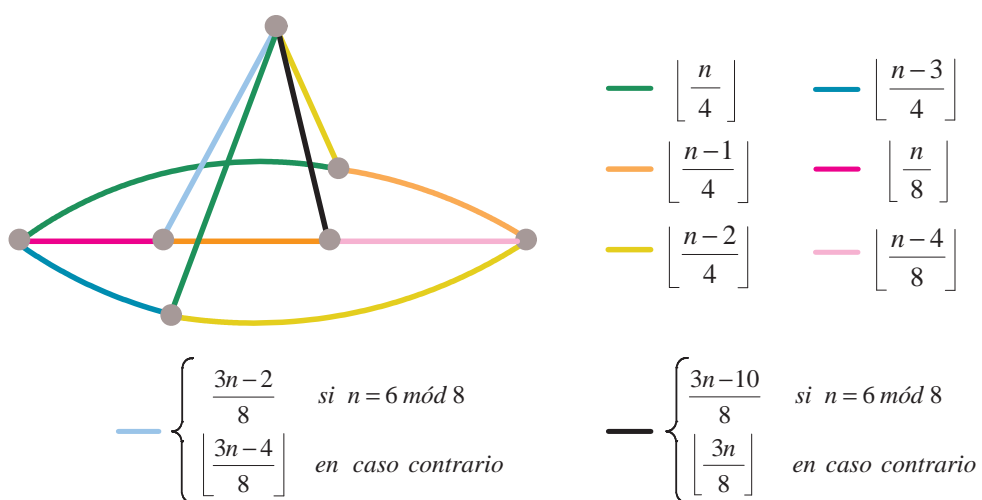


Figura 4.25: Grafo extremal con exceso y valencia máxima 4 para  $n \in \{6, 7\}$  y  $n \geq 9$ .

Podemos concluir que en los resultados anteriores hemos caracterizado los grafos de cada conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo

$$n \geq 4 \quad \text{y} \quad \nu < \nu_5(n) = \begin{cases} 3n - 2 & \text{si } n \neq 6; \\ 17 & \text{si } n = 6. \end{cases}$$

Respecto a los grafos extremales con exceso 5, aunque no efectuamos su caracterización completa, sí queremos presentar una selección de ellos.

Hemos probado en la Proposición 3.3.9 que mediante subdivisiones de la jaula de Petersen se obtienen grafos libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  de exceso 5 y

4.2. Caracterización de los grafos extremales con orden  $\nu \leq 3n - 3$ . 145

con mínimo orden  $\nu_5(n)$ , para todo  $n \geq 4$ . Esta manera de subdividir, mediante la cual se ha obtenido el grafo de la Figura 3.5 no es única. De hecho, en la Figura 2.8 del Capítulo 2 se incluyen tres grafos pesados  $(G, w)$  con cintura pesada máxima  $g_w(G) = g(5)$ . Respetando la proporción del peso de las aristas de cada uno de dichos grafos hemos construido otros dos grafos extremales con mínimo orden salvo a lo sumo un vértice. Ambos están detallados en las Figuras 4.26 y 4.27.

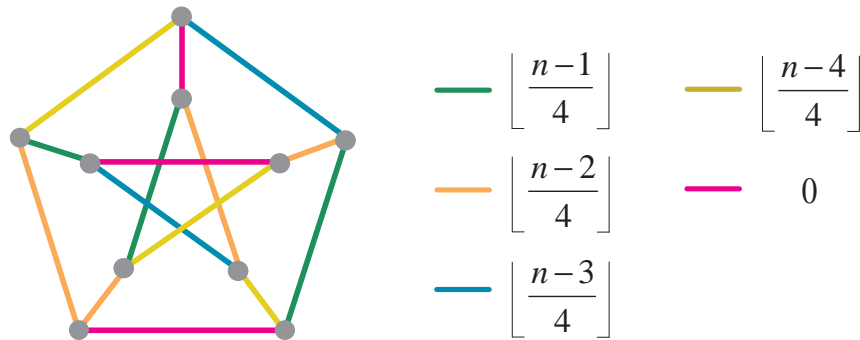


Figura 4.26: Grafo extremal de orden  $3n - 2$  si  $n \not\equiv 2 \pmod{4}$  y  $3n - 1$  en caso contrario

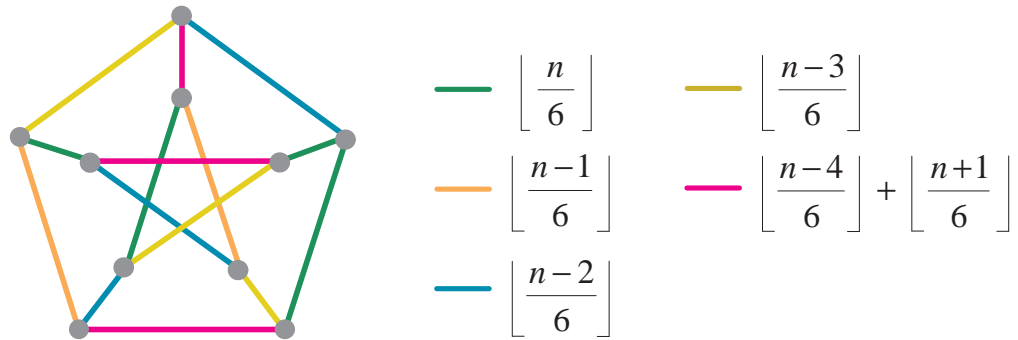


Figura 4.27: Grafo extremal de orden  $3n - 2$  si  $n \not\equiv 0 \pmod{6}$  y  $3n - 1$  en caso contrario

Otras familias de grafos extremales con exceso 5 y cintura  $n + 1$  son los grafos denotados por  $G_1, G_2, G_3$  y  $G_4$  incluidos en la Figura 4.28. Obsérvese que  $G_1$  es una subdivisión del grafo bipartito completo  $K_{4,3}$ .

Sus órdenes son

$$\nu(G_1) = \begin{cases} 3n - 2 & \text{si } n = 3 \text{ mód } 4 \\ 3n - 1 & \text{si } n = 1 \text{ mód } 4 \\ 3n & \text{si } n = 0, 2 \text{ mód } 4 \end{cases}$$

$$\nu(G_2) = \begin{cases} 3n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\nu(G_3) = \begin{cases} 3n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\nu(G_4) = \begin{cases} 3n - 1 & \text{si } n = 0, 1 \text{ mód } 4 \\ 3n & \text{si } n = 2, 3 \text{ mód } 4 \end{cases}$$

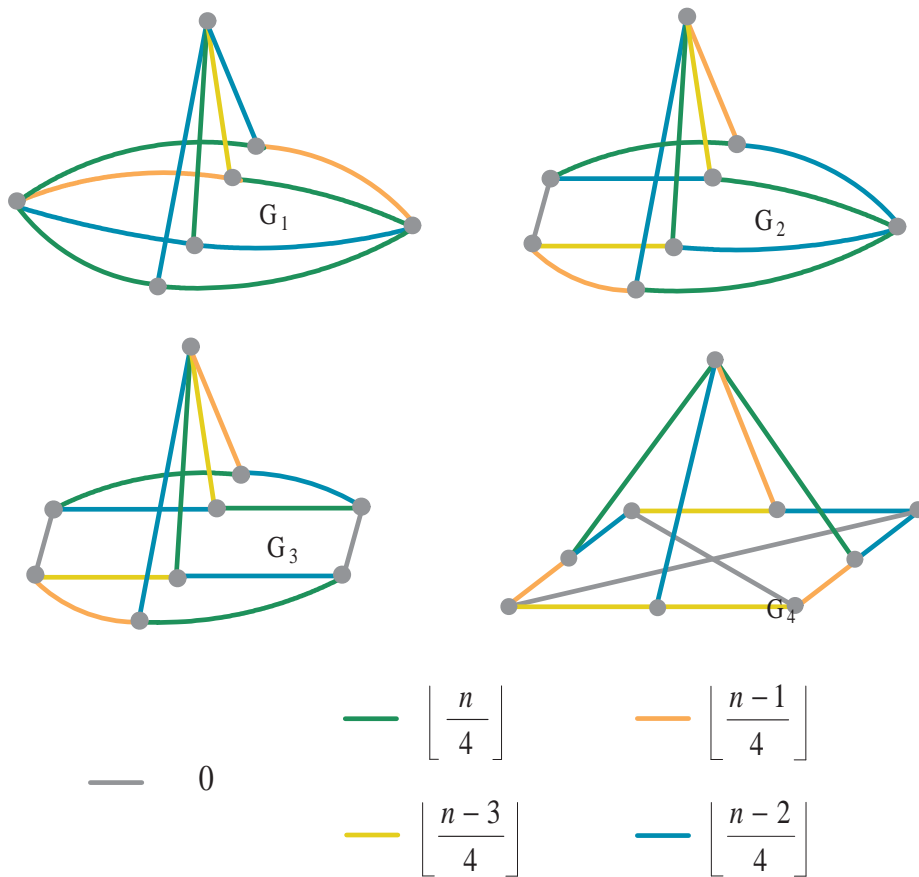


Figura 4.28: Grafos extremales con exceso 5 y orden a lo sumo  $3n + 1$ , para  $n \geq 20$ .

Como además sabemos por la Proposición 3.3.10, que hacen falta al menos  $\nu_6(n) \geq \left\lceil \frac{16n-14}{5} \right\rceil$  vértices para poder construir un grafo con cintura  $n+1$  y con 6 aristas más que vértices, la extremalidad de los cuatro grafos de la Figura 4.28 está asegurada siempre que  $n \geq 20$ .

La caracterización de los grafos extremales con exceso 5 no ha podido realizarse en esta memoria, ya que ello requiere el conocimiento del intervalo de órdenes  $\nu$ , dado por  $\nu \in [\nu_5(n), \nu_6(n))$ , en el cual los grafos extremales tienen exceso 5. Por tanto, como la cantidad  $\nu_6(n)$  no la hemos determinado de manera exacta, no ha sido posible caracterizar los grafos del conjunto extremal  $EX_5(n)$ .

### 4.3 Conclusiones y problemas abiertos

Recordamos que la solución completa de un problema extremal conlleva tanto la determinación del valor de la función extremal, como la identificación de los grafos extremales.

Como complemento al capítulo anterior en el que hemos calculado el valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n-80}{19} \right\rceil$  y  $n \geq 4$ , en éste hemos identificado las distintas familias de grafos extremales existente en cada conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $\nu \leq 3n-3$ .

Basándonos en el resultado probado en el Teorema 2.2.20, en el que se asegura que dada una cantidad prefijada  $k \geq 0$ , infinitos grafos extremales con  $k$  aristas más que vértices son isomorfos entre sí, pues se obtienen mediante subdivisiones de aristas hasta superar la cota inferior dada de la cintura, probamos que en realidad los grafos de cada conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  dependen de  $n$  y de  $\nu$  a través del exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ .

Por lo tanto, hemos considerado el conjunto de grafos con exceso  $k$ . Para

cada uno de los grafos de este conjunto hemos calculado la mínima cantidad de veces que hay que subdividir sus aristas para lograr que su cintura sea al menos  $n + 1$ . Una vez realizado este estudio, solamente son extremales aquellos grafos del conjunto considerado cuyo orden no supere la cantidad  $\nu_{k+1}(n)$ .

Debido a que para todos los órdenes  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  el exceso de los grafos extremales se mantiene constante, queremos añadir que el trabajo realizado aporta además la idea de la casi unicidad de grafos en cada conjunto  $EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y de la posible amplia variedad existente en  $EX(\nu_{k+1}(n) - 1; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}), \dots$

Por ejemplo, una vez concluida la caracterización de los grafos extremales con excesos 3 y 4, queremos destacar que para para todo  $\nu$  entero tal que

$$\left\lceil \frac{5n-1}{2} \right\rceil > \nu \geq \nu_3(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

todos los grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  de orden  $\nu$  y valencia mínima 2 proceden de subdivisiones del grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ . De manera similar, para cualquier  $\nu$  entero tal que

$$\left\lceil \frac{11n-5}{4} \right\rceil > \nu \geq \nu_4(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

todos los grafos del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen un esqueleto común.

Respecto a los grafos extremales con exceso 5, creemos que en el conjunto  $EX_5(n)$  existe una amplia variedad de grafos, ya que casi al inicio del intervalo extremal con exceso 5 hemos encontrado cinco esqueletos diferentes tales que mediante subdivisiones adecuadas de ellos es posible obtener grafos extremales pertenecientes a tal conjunto, como se observa en las Figuras 4.27 y 4.28.



Según hemos comentado en el capítulo anterior, como problema abierto nos ha quedado la determinación exacta de las cantidades  $\nu_6(n)$  y  $\nu_7(n)$ . Su conocimiento haría posible, para todo  $\nu \in [\nu_5(n), \nu_7(n))$ , identificar los grafos de los conjuntos extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , es decir, los grafos con cintura al menos  $n + 1$  y con 5 y 6 aristas más que vértices.



# Capítulo 5

## Propiedades de los grafos extremales.

Hemos demostrado ya que con orden  $\nu_k(n)$ , mínima cantidad de vértices con la que se alcanza exceso  $k$  sin formarse ciclos de longitud menor o igual que  $n$ , cualquier grafo extremal  $G \in EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene cintura  $n + 1$  y además no contiene vértices de valencia 1.

Mientras el orden  $\nu$  es tal que  $\nu_k(n) < \nu < \nu_{k+1}(n)$ , se puede aumentar el diámetro, la valencia máxima o quizás la cintura de los grafos extremales, obteniendo diferentes grafos en el conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  a partir de un mismo grafo  $G \in EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .

### 5.1 Introducción

Estudiada previamente la función extremal e identificadas ciertas familias de grafos extremales, nos preguntamos acerca de la existencia de características comunes a este tipo de grafos.

Poco se conoce de las propiedades de los grafos extremales y casi todo se centra exclusivamente en la cintura, diámetro y conectividad.

En lo referente a la cintura de los grafos extremales, ya hemos comentado que cuando  $n = 3$  y como un caso particular del Problema de Turán [78], se obtiene que para cualquier  $\nu \geq 4$  cada conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3\})$  consta en exclusiva del grafo bipartito completo con ambas clases lo más iguales posibles, lo cual prueba que cuando  $n = 3$  cualquier grafo extremal tiene cintura 4.

Los grafos que estamos tratando contienen la mayor cantidad de aristas posible sin formar los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ . Parece entonces lógico preguntarse sobre la existencia obligada de algún ciclo de longitud  $n + 1$ .

La primera respuesta a esta cuestión se facilita en el año 1992 en [52] al probar sus autores que cuando  $\nu \geq 7$  cualquier grafo extremal del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4\})$  tiene necesariamente cintura 5.

Siguiendo con esta misma línea de trabajo en el año 1997 en el artículo [63] se prueba que cuando  $\nu \geq 8$  cualquier grafo del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  tiene necesariamente cintura 6, y de manera más general, sus autores confirman que en cualquier familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  existe algún grafo con cintura  $n + 1$  siempre que  $\nu \geq n + 3$ , e incluso que cuando  $\Delta \geq n$  cualquier grafo extremal contiene al menos un ciclo de longitud  $n + 1$ .

Recientemente, en los años 2007 y 2008, se ha profundizado en la existencia necesaria de algún ciclo de longitud  $n + 1$  en cualquier grafo extremal  $G$  perteneciente a  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , obteniéndose respuesta afirmativa cuando  $n = 6$  y  $\nu \geq 12$  con  $\nu \neq 15$  [1, 9, 77],  $n \geq 7$  y  $\nu > \frac{2(n-2)^{n-2} + n - 5}{n - 3}$  [10] y  $\nu \geq n + 5$ ,  $\Delta(G) = n - 1$  y  $\delta(G) \geq 3$  [9]. Con este mismo propósito, hemos probado en la Proposición 2.2.9 que para todo  $k \geq 0$  cualquier grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con orden  $\nu_k(n)$  tiene cintura  $n + 1$ .

Un resultado menos concreto que los anteriores se obtiene en [10] y expresa que la cintura de cualquier grafo extremal es a lo sumo  $n + 2$  cuando  $\delta(G) \geq 2$ ,  $\Delta(G) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  y cuando  $n \geq 7$ ,  $\nu > \frac{2(t-2)^{n-2} + t - 5}{t-3}$ , siendo  $t = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ .

En [52] sus autores D.K. Garnick y N.A. Nieuwejaar proponen estudiar la existencia de una constante  $c$  de modo que para todo  $\nu \geq cn$  la cintura de cualquier grafo extremal del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  sea  $n + 1$ . En [51] se prueba que dicha constante  $c$ , en caso de existir, debe ser mayor que 2. En este capítulo demostramos que en realidad no existe tal cantidad  $c$ .

En [51] se propone asimismo determinar el mayor valor de la cintura de cualquier grafo extremal libre de ciclos de longitud menor o igual que  $n$  para cualquier orden  $\nu \geq n + 1$ . A continuación probamos que ésta es  $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ .

En el mismo sentido del último trabajo citado, nos planteamos el estudio de la máxima cintura de cualquier grafo perteneciente a la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para valores de  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  dados, cantidad que denotamos por  $g_{max}(\nu, n)$ .

Comprobamos que esta cintura máxima  $g_{max}(\nu, n)$  depende de los valores  $(\nu, n)$  a través del exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , y que incluso en cada uno de los intervalos en los cuales la función extremal tiene exceso  $k$  constante esta cintura coincide con la planteada por B. Bollobás, denotada por  $g(\nu, k)$ , y que estudia la máxima cintura de cualquier grafo de orden  $\nu$  y exceso  $k$ . Esta igualdad

$$g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k)$$

nos va a permitir determinar ambas cinturas  $g_{max}(\nu, n)$  y  $g(\nu, k)$  para cualquier  $n \geq 4$  y todo orden  $\nu \leq \nu_6(n)$ .

Además, al igual que hemos hecho previamente, nos vamos a centrar en los grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso prefijado  $k \geq 0$ . Recordamos que a este conjunto de grafos lo hemos denotado por  $EX_k(n)$  y para

ellos formulamos también la determinación de su máxima cintura, que denotamos por  $g_{max_k}(n)$ . Probamos que para cada exceso prefijado  $k \geq 0$  existen grafos extremales, con exceso  $k$  y libres de ciclos de longitud menor o igual que  $n$ , tales que su cintura se aleja de  $n + 1$  infinitamente, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( g_{max_k}(n) - (n + 1) \right) = \infty$$

Poco más se conoce de la estructura de los grafos extremales. En relación al diámetro se sabe, (véase [9]), que los grafos extremales sin ciclos de longitud menor o igual que  $n$  tienen diámetro a lo sumo  $n - 1$ . Con respecto a la valencia máxima y mínima, es bien conocido el resultado proporcionado por la desigualdad (1.10), dada por

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} + (\delta - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Otras propiedades estudiadas de los grafos extremales hacen referencia a su conectividad. En este sentido, en los artículos [43, 44, 57] se garantiza la conectividad máxima, tanto por vértices como por aristas, en función del diámetro y la cintura de cualquier grafo  $G$ , mediante una condición suficiente dada por

$$\begin{aligned} \lambda(G) &= \delta(G) \quad \text{cuando } D(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{g(G) - 1}{2} \right\rfloor; \\ \kappa(G) &= \delta(G) \quad \text{cuando } D(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{g(G) - 1}{2} \right\rfloor - 1. \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de ello se deduce en [9] que todo grafo extremal  $G$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  verifica que  $\lambda(G) = \delta(G)$  y que cuando su diámetro es a lo sumo  $n - 2$  entonces además se cumple que  $\kappa(G) = \delta(G)$ .

Antes de abordar el estudio de algunas características generales de los grafos extremales, recordamos que dado  $k \geq 0$  entero, para cada  $n \geq 2$  la cantidad

$\nu_k(n)$  denota el mínimo orden que necesita tener cualquier grafo con cintura al menos  $n + 1$  para poder poseer  $k$  aristas más que vértices. En el Capítulo 2 hemos determinado las cantidades  $\nu_k(n)$  correspondientes a  $n \in \{2, 3\}$  y en el Capítulo 3 las asociadas a  $n \geq 4$  para  $0 \leq k \leq 5$ . Éstas están dadas por las igualdades siguientes:

$\nu_k(2)$	$\left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2} \right\rceil$
$\nu_k(3)$	$\left\lceil 2 + \sqrt{4 + 4k} \right\rceil$

$\nu_0(n)$	$n+1$
$\nu_1(n)$	$\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$
$\nu_2(n)$	$2n$
$\nu_3(n)$	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{9n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left\lceil \frac{9n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
$\nu_4(n)$	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{8n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left\lceil \frac{8n-2}{3} \right\rceil & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
$\nu_5(n)$	$\begin{cases} 3n-2 & \text{si } n \neq 6 \\ 17 & \text{si } n = 6 \end{cases}$

Estos valores  $\nu_k(n)$ , según hemos probado en la Proposición 2.2.17, proporcionan el intervalo en el cual el exceso de la función extremal se mantiene constante, y como consecuencia determinan su valor para todos los órdenes  $\nu$  pertenecientes a cada uno de tales intervalos, de modo que:

$$ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = \nu + k \quad \text{si y solo si} \quad \nu_k(n) \leq \nu < \nu_{k+1}(n).$$

## 5.2 Acerca de la cintura de los grafos extremales

La dificultad para determinar el valor exacto de la función extremal ha motivado el estudio de las posibles cinturas de los grafos extremales, y en particular la determinación de la máxima de dichas cantidades.

Cuando para algunos enteros dados  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$ , la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es conocida y, por tanto, también el exceso  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , hemos deducido en el Corolario 2.3.3, que cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene cintura a lo sumo  $2 \log_{\frac{2k+\nu}{\nu}}(k+1)$ .

También en la Proposición 2.2.9 hemos obtenido que para las infinitas parejas  $(n, k)$  para las que existe algún grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k$ , cualquier grafo de  $EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene exactamente cintura  $n + 1$ . Es decir, al inicio del intervalo extremal de exceso constante

$$\left[ \nu_k(n), \nu_{k+1}(n) \right)$$

los grafos extremales tienen cintura  $n + 1$ . Por lo tanto, para órdenes  $\nu$  del interior de tal intervalo es para los que tiene sentido estudiar la máxima cintura de los grafos extremales, función que se convierte en el objeto de nuestro estudio.

**Definición 5.2.1** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  enteros. Por  $g_{max}(\nu, n)$  denotamos el valor de la máxima cintura de todos los grafos extremales de orden  $\nu$  y libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ . Es decir,

$$g_{max}(\nu, n) = \max \left\{ g(G) : G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \right\}.$$

Como al subdividir aristas de un grafo se puede aumentar su cintura sin variar su exceso, se tiene que



**Lema 5.2.2** Para todo  $n \geq 4$  la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  es creciente en  $\nu$ .

Como la cintura de cualquier grafo  $G \in EX(\nu_k(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es  $n + 1$  y el exceso se mantiene constante para órdenes  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  una primera acotación de la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  viene dada por

$$g_{max}(\nu, n) \leq n + 1 + \nu - \nu_k(n).$$

Las cantidades  $\nu_k(n)$  nos van a permitir determinar la máxima cintura de los grafos extremales.

**Lema 5.2.3** Sean  $\alpha \geq 1$ ,  $n \geq 4$ ,  $\nu \geq n + 1$  enteros. Si denotamos por  $k$  a  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , entonces se verifica que

$$g_{max}(\nu, n) > n + \alpha \text{ si y solo si } \nu_k(n + \alpha) \leq \nu < \nu_{k+1}(n).$$

*Demostración:* Para  $\alpha \geq 1$ ,  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$ , denotamos por  $k$  al exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ .

En primer lugar, si suponemos que  $g_{max}(\nu, n) > n + \alpha$ , aseguramos la existencia de un grafo  $H$  en el conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con cintura  $g(H) > n + \alpha$ . Como  $H$  tiene exceso  $k$ , según la Proposición 2.2.17, se cumple que

$$\nu_k(n + \alpha) = \min\{\nu(G) : e(G) - \nu(G) = k, g(G) > n + \alpha\} \leq \nu(H) < \nu_{k+1}(n).$$

En segundo lugar, si se verifica que  $\nu_k(n + \alpha) \leq \nu < \nu_{k+1}(n)$ , entonces sabemos por la Proposición 2.2.9 que cualquier grafo de la familia extremal  $EX(\nu_k(n + \alpha); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene cintura  $n + \alpha + 1$ , lo cual prueba que

$$g_{max}(\nu, n) \geq g_{max}(\nu_k(n + \alpha), n) = n + \alpha + 1 > n + \alpha,$$

pues según el Lema 5.2.2 la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  es creciente en  $\nu$ .  $\otimes$

Como todos los grafos de cualquier conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen el mismo exceso  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , nos planteamos la existencia de alguna relación entre la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  y la  $g(\nu, k)$ , introducida por B. Bollobás y que representa la máxima cintura de los grafos de orden  $\nu$  y exceso  $k$ .

**Teorema 5.2.4** *Sea  $n \geq 4$  entero.*

- i) Para cualquier  $\nu \geq n + 1$  denotamos por  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . Se cumple que  $g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k)$ .*
- ii) Sea  $k \geq 0$  tal que  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ . Para todos los valores  $\nu$  pertenecientes al intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  se verifica que  $g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k)$ .*

*Demostración:* Suponemos que  $n \geq 4$ .

- i) Para  $\nu \geq n + 1$ , sea  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . Cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene orden  $\nu$  y exceso  $k$ , y por lo tanto su cintura es a lo sumo  $g(\nu, k)$ , lo que prueba que  $g_{max}(\nu, n) \leq g(\nu, k)$ .*

Además, necesariamente  $g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k)$ , pues la existencia de enteros  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  para los cuales se verifique que  $g_{max}(\nu, n) < g(\nu, k)$ , implica la existencia de al menos un grafo  $G$  con orden  $\nu$ , exceso  $k$  y cintura  $g(G) = g(\nu, k) > g_{max}(\nu, n)$ . Pero lógicamente este grafo  $G$  pertenece a la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  pues su orden es  $\nu$  y su cintura  $g(\nu, k) > g_{max}(\nu, n) \geq n + 1$ , lo que implica que  $g(G) \leq g_{max}(\nu, n)$ .

- ii) Suponemos que para algún  $k \geq 0$  se verifica que  $\nu_k(n) < \nu_{k+1}(n)$ . Por la Proposición 2.2.17 sabemos que para todo  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  se cumple que  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu = k$  y por el apartado *i)* anterior deducimos que en tal caso se verifica que  $g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k)$ .*

⊗

El resultado que acabamos de probar expresa que ambas cinturas  $g_{max}(\nu, n)$  y  $g(\nu, k)$  coinciden en cada uno de los intervalos en los cuales la función extremal tiene exceso constante, es decir,

$$g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k) \quad \text{para todo } \nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)].$$

Por tanto, podemos reconducir nuestro objetivo del estudio de la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  al de la determinación de la cintura  $g(\nu, k)$ .

Queremos también señalar que las cantidades  $\nu_k(n)$  contribuyen al conocimiento de la cintura  $g(\nu, k)$ .

**Proposición 5.2.5** Sean  $k \geq 0$  y  $\nu$  tal que  $\binom{\nu}{2} - \nu \geq k$  enteros. Se verifica que

$$g(\nu, k) = \gamma \quad \text{si y solo si } \nu \in [\nu_k(\gamma - 1), \nu_k(\gamma)].$$

*Demostración:* Dados  $k \geq 0$  y  $\nu$  enteros, se cumple que  $g(\nu, k) = \gamma$  si y solo si cualquier grafo con orden  $\nu$  y exceso  $k$  tiene cintura a lo sumo  $\gamma$  alcanzándose esta cota, lo cual es equivalente, según la definición de las cantidades  $\nu_k(\cdot)$ , a la pertenencia del orden  $\nu$  al intervalo  $[\nu_k(\gamma - 1), \nu_k(\gamma)]$ .

⊗

Los primeros valores de  $g(\nu, k)$  correspondientes a  $k \in \{0, 1, 2\}$  se proporcionan en [19] y están dados por las igualdades

$$g(\nu, 0) = \nu, \quad g(\nu, 1) = \left\lfloor \frac{2\nu + 2}{3} \right\rfloor, \quad g(\nu, 2) = \left\lfloor \frac{\nu + 2}{2} \right\rfloor.$$

**Observación 5.2.6** Queremos incluir grafos en los cuales se alcanzan los valores óptimos anteriores.

Lógicamente, el grafo con exceso nulo y orden  $\nu$  que tiene mayor cintura es el ciclo  $C_\nu$ . Por otro lado, es sencillo comprobar que el grafo formado por tres

camino cuyos vértices finales son coincidentes y de modo que cada uno de ellos contiene  $\lfloor \frac{\nu}{3} \rfloor$ ,  $\lfloor \frac{\nu-1}{3} \rfloor$  y  $\lfloor \frac{\nu-2}{3} \rfloor$  vértices de valencia 2 es un grafo con exceso 1 y cintura  $g(\nu, 1) = \lfloor \frac{2\nu+2}{3} \rfloor$ .

Además, incluimos en la Figura 5.1 un grafo con orden  $\nu \geq 4$ , exceso 2 y cintura  $g(\nu, 2)$ .

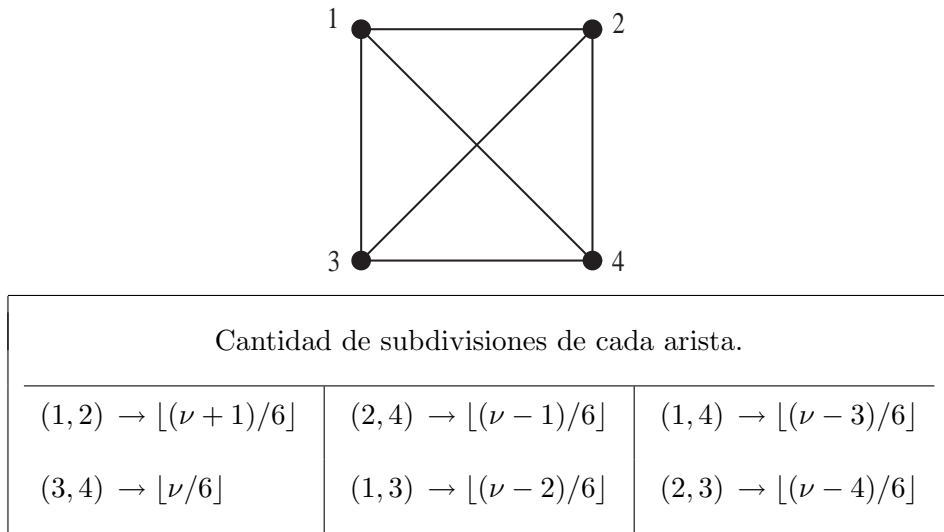


Figura 5.1: Grafo con orden  $\nu \geq 4$ , exceso 2 y cintura máxima  $g(\nu, 2) = \lfloor \frac{\nu+2}{2} \rfloor$ .

Para  $k \geq 3$  en [19] se acotan superiormente las primeras cantidades  $g(\nu, k)$ .

Concretamente,

$$\begin{cases} g(\nu, 3) \leq \lfloor \frac{4(\nu+3)}{9} \rfloor \\ g(\nu, 4) \leq \lfloor \frac{3(\nu+4)}{8} \rfloor \\ g(\nu, 5) \leq \lfloor \frac{\nu+5}{3} \rfloor \end{cases} \quad (5.1)$$

A continuación, determinamos el valor exacto de las cinturas  $g(\nu, k)$  correspondientes a  $k \in \{3, 4, 5\}$  de forma constructiva y haciendo uso de la conocida relación existente entre las cantidades  $g(\nu, k)$  y  $\nu_k(n)$ . Nótese que para que existan

grafos con exceso  $k$  debe verificarse que  $\binom{\nu}{2} - \nu \geq k$ , como se deduce del orden y tamaño de los grafos completos.

**Teorema 5.2.7** *Para todo  $\nu \geq 5$  se cumple que*

$$g(\nu, 3) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{4(\nu + 3)}{9} \right\rfloor & \text{si } \nu \not\equiv 4 \pmod{9}; \\ \frac{4\nu + 2}{9} & \text{si } \nu \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

*Demostración:* En primer lugar suponemos que  $\nu = 5$ . El grafo obtenido al eliminar dos aristas del grafo completo  $K_5$  tiene exceso 3 y alcanza la cota superior (5.1), probándose de esta manera que cualquier grafo simple de orden 5 y exceso 3 tiene exactamente cintura 3.

Suponemos que  $\nu \geq 6$ . Por un lado consideramos el grafo  $G$  de la Figura 5.2, el cual tiene exceso 3, orden  $\nu$  y cintura

$$g(G) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{4(\nu + 3)}{9} \right\rfloor & \text{si } \nu \not\equiv 4 \pmod{9}; \\ \frac{4\nu + 2}{9} & \text{si } \nu \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

Como para todo  $\nu \not\equiv 4 \pmod{9}$  la cintura de este grafo alcanza la cota superior (5.1) queda determinada el valor de la cintura máxima  $g(\nu, 3)$  para tales valores de  $\nu$ .

Para los órdenes  $\nu \equiv 4 \pmod{9}$ , es decir, cuando  $\nu = 9h + 4$  para algún  $h \geq 0$ , el valor de  $g(\nu, 3)$  es una unidad menor que la cota superior (5.1), pues en tal caso si suponemos que  $g(\nu, 3) = \left\lfloor \frac{4(\nu + 3)}{9} \right\rfloor = \frac{4\nu + 11}{9}$ , entonces según la Proposición 2.3.1, debe verificarse la desigualdad

$$\nu \geq \nu_3 \left( \frac{4\nu + 2}{9} \right),$$

la cual es equivalente a la siguiente contradicción

$$9h + 4 \geq \nu_3(4h + 2) = \left\lceil \frac{9(4h + 2)}{4} \right\rceil = 9h + 5.$$

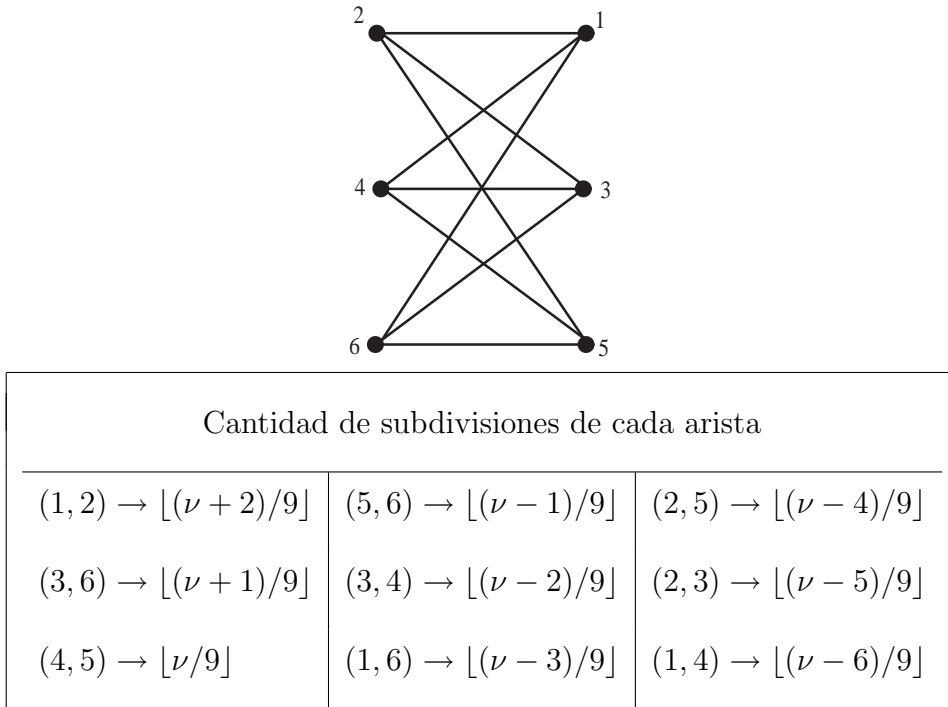


Figura 5.2: Grafo con orden  $\nu \geq 6$ , exceso 3 y cintura máxima  $g(\nu, 3)$ .

⊗

De manera similar, determinamos exactamente la cintura  $g(\nu, 4)$ .

**Teorema 5.2.8** *Para todo  $\nu \geq 5$  se cumple que*

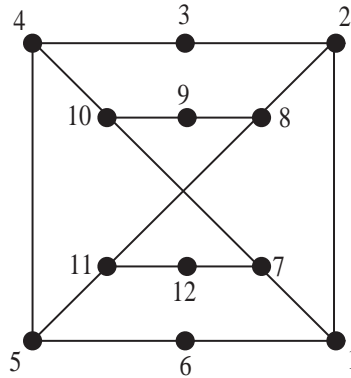
$$g(\nu, 4) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{3(\nu + 4)}{8} \right\rfloor & \text{si } \nu \not\equiv 4, 15 \pmod{16}; \\ \left\lfloor \frac{3\nu + 4}{8} \right\rfloor & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

*Demostración:* La Proposición 5.2.5 junto con el conocimiento de las cantidades  $\nu_4(2) = 5, \nu_4(3) = 7, \nu_4(4) = 10, \nu_4(5) = 12$  permiten establecer que

$$\begin{cases} \text{si } \nu \in \{5, 6\}, & \text{entonces } g(\nu, 4) = 3; \\ \text{si } \nu \in \{7, 8, 9\}, & \text{entonces } g(\nu, 4) = 4; \\ \text{si } \nu \in \{10, 11\}, & \text{entonces } g(\nu, 4) = 5. \end{cases}$$

Para  $\nu \geq 12$  procedemos de manera constructiva. Por un lado consideramos el grafo  $G$  de la Figura 5.3, el cual tiene exceso 4, orden  $\nu$  y cintura

$$g(G) = \begin{cases} \lfloor \frac{3(\nu + 4)}{8} \rfloor & \text{si } \nu \neq 4, 15 \text{ mod } 16; \\ \lfloor \frac{3\nu + 4}{8} \rfloor & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Cantidad de subdivisiones de cada arista.					
(1, 6) →	$\lfloor (\nu + 3)/16 \rfloor$	(2, 8) →	$\lfloor (\nu - 3)/16 \rfloor$	(1, 2) →	$\lfloor (\nu - 8)/16 \rfloor$
(2, 3) →	$\lfloor (\nu + 2)/16 \rfloor$	(1, 7) →	$\lfloor (\nu - 4)/16 \rfloor$	(8, 9) →	$\lfloor (\nu - 9)/16 \rfloor$
(9, 10) →	$\lfloor (\nu + 1)/16 \rfloor$	(4, 5) →	$\lfloor (\nu - 5)/16 \rfloor$	(5, 11) →	$\lfloor (\nu - 10)/16 \rfloor$
(11, 12) →	$\lfloor \nu/16 \rfloor$	(4, 10) →	$\lfloor (\nu - 6)/16 \rfloor$	(3, 4) →	$\lfloor (\nu - 11)/16 \rfloor$
(7, 10) →	$\lfloor (\nu - 1)/16 \rfloor$	(5, 6) →	$\lfloor (\nu - 7)/16 \rfloor$	(7, 12) →	$\lfloor (\nu - 12)/16 \rfloor$
(8, 11) →	$\lfloor (\nu - 2)/16 \rfloor$				

Figura 5.3: Grafo con orden  $\nu \geq 12$ , exceso 4 y cintura máxima  $g(\nu, 4)$ .

Como este grafo alcanza la cota (5.1) para todo  $\nu \neq 4, 15 \text{ mód } 16$ , queda determinada la cintura máxima  $g(\nu, 4)$  para tales valores de  $\nu$ .

En el caso de que  $\nu = 4, 15 \text{ mód } 16$ , es decir, cuando  $\nu = 16h + 4$  o  $\nu = 16h + 15$  para algún  $h \geq 0$ , el valor de  $g(\nu, 4)$  es una unidad menor que la

cota superior (5.1), pues si suponemos que  $g(\nu, 4) = \left\lfloor \frac{3(\nu + 4)}{8} \right\rfloor$ , entonces, según la Proposición 2.3.1, debe verificarse la desigualdad

$$\nu \geq \nu_4 \left( \left\lfloor \frac{3(\nu + 4)}{8} \right\rfloor - 1 \right),$$

la cual respectivamente conduce a las contradicciones siguientes

$$16h + 4 \geq \nu_4(6h + 2) = \left\lceil \frac{8(6h + 2) - 2}{3} \right\rceil = 16h + 5;$$

$$16h + 15 \geq \nu_4(6h + 6) = \left\lceil \frac{8(6h + 6) - 2}{3} \right\rceil = 16h + 16.$$

⊗

Determinamos también la cintura  $g(\nu, 5)$ .

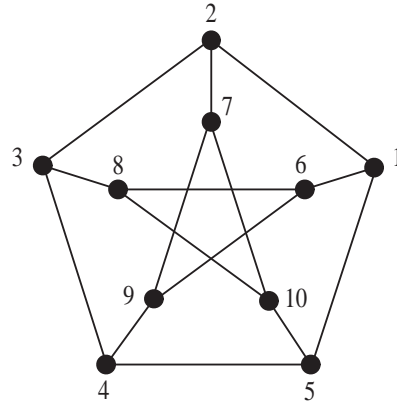
**Teorema 5.2.9** *Para todo  $\nu \geq 5$  se cumple que*

$$g(\nu, 5) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\nu + 5}{3} \right\rfloor & \text{si } \nu \neq 16; \\ 6 & \text{si } \nu = 16. \end{cases}$$

*Demostración:* Consideramos los cinco grafos siguientes: el grafo completo  $K_5$  y el grafo obtenido al subdividir una de sus aristas, el grafo bipartito completo  $K_{4,3}$  y los obtenidos al subdividir una o dos de sus aristas. Todos ellos tienen órdenes  $\nu \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ , exceso 5 y en todos los casos su cintura alcanza la cota (5.1), lo cual prueba que cuando  $\nu \in \{5, 6\}$  la cintura  $g(\nu, 5) = 3$ , y que si  $\nu \in \{7, 8, 9\}$  entonces  $g(\nu, 5) = 4$ .

Para  $\nu \geq 10$ , consideramos el grafo  $G$  de la Figura 5.4, el cual tiene exceso 5 y orden  $\nu$ . Su cintura es 6 cuando  $\nu = 16$  y alcanza la cota superior (5.1) para cualquier otro orden  $\nu$ . Por lo tanto, se puede confirmar que  $g(\nu, 5) = \left\lfloor \frac{\nu + 5}{3} \right\rfloor$  cuando  $\nu \neq 16$ .





Cantidad de subdivisiones de cada arista.		
$(1, 2) \rightarrow \lfloor (\nu + 4)/15 \rfloor$	$(2, 7) \rightarrow \lfloor (\nu - 1)/15 \rfloor$	$(7, 9) \rightarrow \lfloor (\nu - 6)/15 \rfloor$
$(8, 10) \rightarrow \lfloor (\nu + 3)/15 \rfloor$	$(6, 9) \rightarrow \lfloor (\nu - 2)/15 \rfloor$	$(3, 8) \rightarrow \lfloor (\nu - 7)/15 \rfloor$
$(4, 9) \rightarrow \lfloor (\nu + 2)/15 \rfloor$	$(2, 3) \rightarrow \lfloor (\nu - 3)/15 \rfloor$	$(3, 4) \rightarrow \lfloor (\nu - 8)/15 \rfloor$
$(4, 5) \rightarrow \lfloor (\nu + 1)/15 \rfloor$	$(5, 10) \rightarrow \lfloor (\nu - 4)/15 \rfloor$	$(7, 10) \rightarrow \lfloor (\nu - 9)/15 \rfloor$
$(6, 8) \rightarrow \lfloor \nu/15 \rfloor$	$(1, 5) \rightarrow \lfloor (\nu - 5)/15 \rfloor$	$(1, 6) \rightarrow \lfloor (\nu - 10)/15 \rfloor$

Figura 5.4: Grafo con orden  $\nu \geq 10$ , exceso 5 y cintura máxima  $g(\nu, 5)$ .

Pero además  $g(16, 5) = 6$ , porque la igualdad  $g(16, 5) = 7$  conduce a la desigualdad  $\nu_5(6) \leq 16$ , la cual contradice que  $\nu_5(6) = 17$ .

⊗

Una vez determinadas las cinturas  $g(\nu, k)$  para  $k \leq 5$ , estamos ya en condiciones de establecer el valor de la cintura máxima de los grafos extremales para todo  $n \geq 4$  y para todo  $\nu \leq \nu_6(n)$ , ya que ambas cinturas coinciden para todos los órdenes  $\nu$  pertenecientes a cada intervalo extremal de exceso constante, según hemos probado en el Teorema 5.2.4, es decir, ya que

$$g_{max}(\nu, n) = g(\nu, k) \quad \text{para todo} \quad \nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)].$$

**Teorema 5.2.10** Para todo  $n \geq 4$  y  $n + 1 \leq \nu < \nu_6(n)$  enteros se cumple que

$\nu$	$g_{max}(\nu, n) = \max\{g(G); G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})\}$
$\nu_0(n) \leq \nu < \nu_1(n)$	$\nu$
$\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n)$	$\left\lfloor \frac{2\nu + 2}{3} \right\rfloor$
$\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$	$\left\lfloor \frac{\nu + 2}{2} \right\rfloor$
$\nu_3(n) \leq \nu < \nu_4(n)$	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{4(\nu + 3)}{9} \right\rfloor & \text{si } \nu \not\equiv 4 \pmod{9} \\ \frac{4\nu + 2}{9} & \text{si } \nu \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$
$\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{3(\nu + 4)}{8} \right\rfloor & \text{si } \nu \not\equiv 4, 15 \pmod{16} \\ \left\lfloor \frac{3\nu + 4}{8} \right\rfloor & \text{en caso contrario} \end{cases}$
$\nu_5(n) \leq \nu < \nu_6(n)$	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{\nu + 5}{3} \right\rfloor & \text{si } \nu \neq 16 \\ 6 & \text{si } \nu = 16. \end{cases}$

**Observación 5.2.11** Hacemos notar que no solamente hemos determinado el valor de la cintura  $g_{max}(\nu, n)$ , sino que además incluimos en las Figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 grafos en los cuales se alcanza el valor de la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  dependiendo del intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  al que pertenezca el orden  $\nu$ .

En [63] sus autores prueban que para  $n \geq 12$  existe al menos un grafo extremal con  $\nu = 2n + 2$  vértices y cintura  $n + 2$ . Observemos que este resultado es simplemente un caso particular de la igualdad proporcionada en el Teorema 5.2.10, porque como para  $n \geq 12$  se cumple que  $\nu_2(n) < 2n + 2 < \nu_3(n)$ , entonces se verifica que  $g_{max}(\nu, n) = \left\lfloor \frac{\nu + 2}{2} \right\rfloor = n + 2$ .

Recordamos que en el Capítulo 2 al conjunto de los grafos extremales con exceso  $k$  lo hemos denotado por  $EX_k(n)$ , (véase la Definición 2.2.19), y hemos probado en la Proposición 2.2.17 que

$$EX_k(n) = \{G : g(G) > n, \nu_k(n) \leq \nu(G) < \nu_{k+1}(n)\}.$$

Del hecho de que la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  dependa del par  $(\nu, n)$  a través del exceso  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , unido a que éste se mantiene constante para los órdenes  $\nu$  de un intervalo, dan pie a considerar una familia particular de grafos, la formada por los grafos extremales con exceso prefijado y máximo orden. Esta familia puede por tanto escribirse como

$$\{G : G \in EX_k(n), \nu(G) = \nu_{k+1}(n) - 1\}.$$

Evidentemente para los valores  $(k, n)$  para los cuales  $\nu_k(n) = \nu_{k+1}(n)$  se verifica que  $EX_k(n) = \emptyset$ .

Nos preguntamos acerca de las propiedades de los grafos de la nueva familia considerada. Para ello consideramos su máxima cintura.

**Definición 5.2.12** Por  $g_{max_k}(n)$  denotamos la máxima cintura de los grafos libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k$ , es decir,

$$g_{max_k}(n) = \max \{g(G) : G \in EX_k(n)\}.$$

Determinamos las primeras cantidades de la cintura que acabamos de definir.

**Teorema 5.2.13** *La cintura  $g_{max_k}(n)$  toma los valores:*

$k$	$g_{max_k}(n) = \max \{g(G); G \in EX_k(n)\}$
0	$\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$
1	$\left\lfloor \frac{4n}{3} \right\rfloor$
2	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{9n+6}{8} \right\rfloor & \text{si } n \not\equiv 3 \pmod{8} \\ \left\lfloor \frac{9n-3}{8} \right\rfloor & \text{si } n \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$
3	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{32n-3}{27} \right\rfloor & \text{si } n = 1, 2, 7, 9, 12, 17, 19, 23, 28, 29, 33, 34, \\ & 35, 39, 41, 44, 45, 46, 51, 53 \pmod{54} \\ \left\lfloor \frac{32n+24}{27} \right\rfloor & \text{en caso contrario} \end{cases}$
4	$\begin{cases} \left\lfloor \frac{9n-5}{8} \right\rfloor & \text{si } n = 6, 13 \pmod{16} \\ \left\lfloor \frac{9n+3}{8} \right\rfloor & \text{si } n \not\equiv 6, 13 \pmod{16}. \end{cases}$

*Demostración:* El carácter monótono creciente de la función  $g(\cdot, k)$  permite establecer que

$$g_{max_k}(n) = g(\nu_{k+1}(n) - 1, k).$$

Como además los valores  $g(\nu, k)$  y  $\nu_k(n)$  son conocidos para los primeros excesos  $k \in \{0, \dots, 5\}$ , podemos determinar también los primeros valores de la cintura máxima de los grafos extremales con exceso prefijado  $g_{max_k}(n)$ .

⊗

Para cada exceso  $k \geq 0$  fijo, la cintura de los grafos del conjunto  $EX_k(n)$ , por definición, varía en el intervalo  $[n + 1, g_{max_k}(n)]$ , existiendo grafos extremales con exceso  $k$  para cada una de tales cinturas. En particular, como consecuencia del Teorema 5.2.13, podemos obtener los valores de  $n \geq 4$  y  $\nu \leq 3n - 2$  para los cuales la cintura de los grafos extremales es  $n + 1$ .

**Corolario 5.2.14** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu \leq \nu_5(n) = \begin{cases} 3n - 2 & \text{si } n \neq 6 \\ 3n - 1 & \text{si } n = 6. \end{cases}$

*Dependiendo del intervalo extremal de exceso constante al que pertenezca  $\nu$ , exclusivamente para los valores de  $n$  siguientes*

$\nu$	$n$
$\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n)$	4, 5
$\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$	4, 5, 6, 7, 8, 9
$\nu_3(n) \leq \nu < \nu_4(n)$	4, 5, 7, 9
$\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

*todos los grafos del conjunto extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen cintura exactamente  $n + 1$ .*

*Demostración:* Cuando el orden  $\nu$  pertenece a un intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  el exceso de cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es  $k$ , y por tanto la máxima cintura de cualquier grafo de dicho conjunto  $g_{max}(\nu, n)$  coincide con  $g_{max_k}(n)$ .

Los valores de  $n$  para los cuales cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene cintura  $n+1$ , coinciden entonces con aquellos  $n$  para los cuales se verifica que  $g_{max_k}(n) = n + 1$ , y por tanto, para cada  $\nu \leq \nu_5(n)$ , los valores de  $n$  enunciados se obtienen a partir del Teorema 5.2.13.

⊗

Este resultado extiende el obtenido en [9] en el que, mediante subdivisiones del grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ , se construye un grafo del conjunto  $EX(15; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  con cintura 8. En general, de acuerdo a la Observación 5.2.11 y el Corolario 5.2.14, también para  $n = 8$  y  $n \geq 10$  el grafo de la Figura 5.2 con orden  $\nu = \nu_4(n) - 1$  es un grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  con cintura mayor de  $n + 1$ .

Además, teniendo en cuenta los valores de la cintura  $g_{max_k}(n)$  obtenidos en el Teorema 5.2.13, observamos que el intervalo de valores de la cintura de los grafos extremales con exceso  $k$ , dado por  $[n + 1, g_{max_k}(n)]$ , se hace infinitamente grande. Este resultado es general, de modo que para cada exceso  $k$  es posible encontrar  $n$  tal que en  $EX_k(n)$  existen grafos extremales con cintura mayor que cualquier cantidad  $M > n + 1$  preestablecida.

**Proposición 5.2.15** *Sea  $n \geq 4$ . Para todo  $\alpha \geq 1$  entero, existe algún grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k$  y cintura  $n + 1 + \alpha$  si se verifica una de las siguientes condiciones:*

- i)  $k = 5$  y  $n \geq 15\alpha + 5$ ;
- ii)  $k = 6$  y  $n \geq 20\alpha + 16$ ;
- iii)  $k = 7$  y  $n \geq \frac{133(1 + \alpha)}{11}$ ;
- iv)  $k \geq 8$  y  $n \geq (3k + 2)(g(k) + 2k + \alpha)$ .

*Demostración:* En primer lugar, queremos señalar que para probar la existencia de un grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso  $k$  y cintura  $n+1+\alpha$  para algún  $\alpha \geq 1$ , es suficiente demostrar que  $\nu_k(n+\alpha) < \nu_{k+1}(n)$ , pues en tal caso, los grafos extremales del conjunto  $EX(\nu_k(n+\alpha); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen exceso  $k$  y cintura  $n+\alpha+1$ .

Para estudiar los valores  $k \in \{5, 6, 7\}$ , recordamos que en el Capítulo 3 hemos obtenido que para todo  $n \geq 7$  se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_5(n) = 3n - 2; \\ \frac{16n - 14}{5} \leq \nu_6(n) \leq \frac{10n - 3}{3}; \\ \frac{7n - 7}{2} \leq \nu_7(n) \leq \frac{7n - 2}{2}; \\ \frac{72n - 80}{19} \leq \nu_8(n). \end{array} \right.$$

Por lo tanto, para  $k = 5$  y  $n \geq 15\alpha + 5$ , se cumple que

$$\nu_5(n+\alpha) = 3(n+\alpha-2) < \frac{16n-14}{5} \leq \nu_6(n),$$

para  $k = 6$  y  $n \geq 20\alpha + 16$ , se tiene que

$$\nu_6(n+\alpha) \leq \frac{10(n+\alpha)-3}{3} < \frac{7n-7}{2} \leq \nu_7(n),$$

para  $k = 7$  y  $n \geq \frac{133(1+\alpha)}{11}$ , se verifica que

$$\nu_7(n+\alpha) \leq \frac{7(n+\alpha)-2}{2} < \frac{72n-80}{19} \leq \nu_8(n).$$

En general, y teniendo en cuenta las desigualdades (2.4) y (2.6), dadas por

$$\left\lfloor \frac{n+1}{g(k)} - k \right\rfloor \leq \nu_k(n) \leq \left\lfloor \frac{n+1+2k}{g(k)} - k \right\rfloor \quad \text{y} \quad g(k) \leq \frac{3k-1}{3k} g(k-1)$$

respectivamente, para  $k \geq 8$  y  $n \geq (3k+2)(g(k)+2k+\alpha)$  probamos también

que

$$\begin{aligned}
 \nu_k(n + \alpha) &\leq \frac{n + 1 + \alpha + 2k}{g(k)} - k \\
 &< \frac{(n + 1)(3k + 3)}{g(k)(3k + 2)} - (k + 1) \\
 &\leq \frac{(n + 1)}{g(k + 1)} - (k + 1) \\
 &\leq \nu_{k+1}(n).
 \end{aligned}$$

⊗

El resultado anterior garantiza que para todo exceso  $k \geq 0$ , cuando  $n$  es suficientemente grande, siempre existe algún grafo extremal con exceso  $k$ , libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y de modo que su cintura se aleja de  $n + 1$  tanto como se quiera, lo cual puede expresarse de la siguiente manera.

**Corolario 5.2.16** *Para cualquier  $k \geq 0$  se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{max_k}(n) - (n + 1) = \infty.$$

Una cuestión menos ambiciosa que el estudio de la cintura  $g_{max}(\nu, n)$  fue planteada al inicio del estudio de la cintura de los grafos extremales. En concreto, F. Lazebnik y P. Wang formulan en [63] la siguiente cuestión: "Sea  $g_{max}(n)$  el mayor valor de la cintura de cualquier grafo del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $\nu \geq n + 1$  entero. ¿Cuál es el valor máximo de  $g_{max}(n) - (n + 1)$ ?" Resolvemos esta cuestión.

**Teorema 5.2.17** *Sea  $n \geq 4$ . Entonces*

$$\max \left\{ g(G) : G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}), \nu \geq n + 1 \right\} = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$$



*Demostración:* Sea  $n \geq 4$  entero.

De la igualdad  $\nu_1(n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ , deducimos que en particular el ciclo  $C_{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor}$  pertenece al conjunto de los grafos extremales que no contienen ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ , lo cual nos permite afirmar que  $g_{max}(n) \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ .

Suponemos que  $g_{max}(n) \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 1$ . Existe entonces un grafo extremal  $G$  no solamente libre de los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  sino que además  $g(G) \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 1$ . Si denotamos por  $k$  su exceso, se cumple entonces que

$$\nu_k\left(\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor\right) \leq \nu(G) < \nu_{k+1}(n).$$

Por el primer apartado del Lema 2.2.10 sabemos que la función  $\nu_k$  es estrictamente creciente y que por tanto

$$\nu_k(n+1), \nu_k(n+2), \dots, \nu_k\left(\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor\right)$$

son  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  valores enteros distintos comprendidos estrictamente en el intervalo  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n)]$ , lo cual contradice que

$$\nu_{k+1}(n) \leq \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

desigualdad probada en el tercer apartado del Lema 2.2.10.

⊗

Consecuentemente,  $g_{max}(n) - (n+1) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - (n+1) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  es la máxima variación posible de la cintura de los grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para cualquier valor de  $\nu \geq n+1$ , dando así respuesta a la pregunta formulada en [63].

En [9] y en [10] se prueba respectivamente que la cintura de los grafos extremales es a lo sumo  $2n - 5$  cuando  $n \geq 7$ ,  $\nu \geq 2n - 3$  y que es a lo sumo  $2n - 4$  cuando  $n \geq 5$ ,  $\nu \geq 2n - 2$ . El resultado que acabamos de probar garantiza

que cuando  $n \geq 10$  ambas cotas de la cintura no se alcanzan, pues el valor máximo de la cintura de cualquier grafo extremal es  $g_{max}(n) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ .

Queremos también tratar una cuestión planteada en [52], en la que sus autores D.K. Garnick y N.A. Nieuwejaar se preguntan sobre la existencia de una constante  $c$  de modo que para todo  $n \geq 5$  y todo  $\nu \geq cn$  se verifique que cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tiene cintura  $n + 1$ .

En [63] se prueba que en caso de existir tal cantidad  $c$ , ésta debe ser mayor que 2. Veamos que en realidad no existe tal constante.

**Proposición 5.2.18** *Dada cualquier constante  $c > 1$ , existen  $n \geq 4$ ,  $\nu \geq cn$  enteros y algún grafo  $G$  en la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tal que*

$$g(G) > n + 1.$$

*Demostración:* Sea  $c > 1$  una constante dada.

La desigualdad (2.6) expresa que  $g(k) \leq \frac{3k-1}{3k} g(k-1)$ , y de ella se deduce que los valores  $g(k)$  son estrictamente decrecientes, lo que permite garantizar la existencia de un entero  $k$  tal que

$$\frac{1}{g(k)} \leq c < \frac{1}{g(k+1)}.$$

Consideramos  $n$  entero de modo que

$$\max \left\{ cn, \left\lfloor \frac{n+2+2k}{g(k)} - k \right\rfloor \right\} \leq \left\lfloor \frac{n+1}{g(k+1)} - (k+1) \right\rfloor - 1.$$

Sea  $G$  cualquier grafo extremal de orden  $\nu = \left\lfloor \frac{n+1}{g(k+1)} - (k+1) \right\rfloor - 1$  y libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ .

Se verifica entonces que  $\nu \geq cn$ , y como la desigualdad (2.4) expresa que

$$\left\lfloor \frac{n+1}{g(k)} - k \right\rfloor \leq \nu_k(n) \leq \left\lfloor \frac{n+1+2k}{g(k)} - k \right\rfloor,$$

deducimos que

$$\nu_k(n+1) \leq \left\lfloor \frac{n+2+2k}{g(k)} - k \right\rfloor \leq \nu < \left\lfloor \frac{n+1}{g(k+1)} - (k+1) \right\rfloor \leq \nu_{k+1}(n),$$

lo cual prueba que  $G$  tiene exceso  $k$  y cintura al menos  $n+2$ .

⊗

### 5.3 Acerca del diámetro de los grafos extremales

Aunque el estudio del diámetro de una familia de grafos es un problema complicado, en esta sección confirmamos que, al igual que ocurre con la cintura, el diámetro de los grafos extremales libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y de orden  $\nu$  depende de  $(\nu, n)$  a través del exceso. Asimismo construimos familias de grafos extremales con diámetro máximo.

Por un lado, es evidente que cualquier grafo con cintura al menos  $n+1$  tiene diámetro al menos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Por otro lado, recordamos que en [9] se prueba que todo grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  tiene diámetro a lo sumo  $n-1$ . Veremos en esta sección que ambas cotas se alcanzan.

Pero como el intervalo de variación del diámetro de los grafos extremales

$$\left[ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n-1 \right]$$

se amplía a medida que  $n$  crece, en primer lugar proporcionamos una cota superior más precisa dependiente del orden y del exceso del grafo extremal considerado.

**Lema 5.3.1** *Si  $G$  es un grafo extremal libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con exceso dado  $k \geq 0$ , entonces*

$$D(G) \leq \nu(G) + n - \nu_{k+1}(n)$$

*Demostración:* Sea  $G$  cualquier grafo extremal con exceso  $k$  y cintura al menos  $n + 1$ .

Consideramos el grafo  $G'$  obtenido al unir dos vértices de  $G$  diametralmente opuestos mediante un camino de longitud  $n - D(G) + 1$ . Este grafo  $G'$  descrito tiene exceso  $k + 1$  y cintura  $n + 1$ , y por tanto, su orden es al menos  $\nu_{k+1}(n)$ , lo que se expresa como

$$\nu(G) + n - D(G) \geq \nu_{k+1}(n).$$

Despejando  $D(G)$  se obtiene la desigualdad deseada.

⊗

Al igual que en el estudio de la cintura de los grafos extremales, definimos la función diámetro máximo.

**Definición 5.3.2** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  enteros. Por  $D_{max}(\nu, n)$  denotamos el valor del máximo diámetro de todos los grafos extremales de orden  $\nu$  y libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ . Es decir,

$$D_{max}(\nu, n) = \max \left\{ D(G) : G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \right\}.$$

Dados  $n \geq 4$ ,  $\nu \geq n + 1$  y  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ , el resultado del Lema 5.3.1 permite expresar que

$$D_{max}(\nu, n) \leq \nu + n - \nu_{k+1}(n).$$

Las cantidades  $\nu_k(n)$  y los grafos extremales con orden mínimo que hemos construido en el Capítulo 3 nos permiten identificar algunas familias de grafos extremales con diámetro máximo.

**Proposición 5.3.3** Para cualquier  $n \geq 4$  y  $n + 1 \leq \nu < \nu_3(n)$  enteros, sea  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . Se verifica que

$$D_{\max}(\nu, n) = \nu + n - \nu_{k+1}(n).$$

*Demostración:* Para  $n + 1 \leq \nu < \nu_3(n)$  vamos a construir un grafo de la familia extremal  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  cuyo diámetro alcanza la cota superior proporcionada en el Lema 5.3.1, lo cual prueba la igualdad enunciada.

Distinguimos tres casos dependiendo del intervalo extremal con exceso constante  $I_k(n) = [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$  al que pertenezca el orden  $\nu$ .

- i) Cuando  $\nu_0(n) \leq \nu < \nu_1(n)$  cualquier grafo extremal tiene exceso 0. Consideramos el grafo  $G$  formado por la unión del ciclo  $C_{n+1}$  y un camino de longitud  $\nu - \nu_0(n) = \nu - (n + 1)$  incidente en cualquier vértice del ciclo  $C_{n+1}$ . (Véase la Figura 5.5).

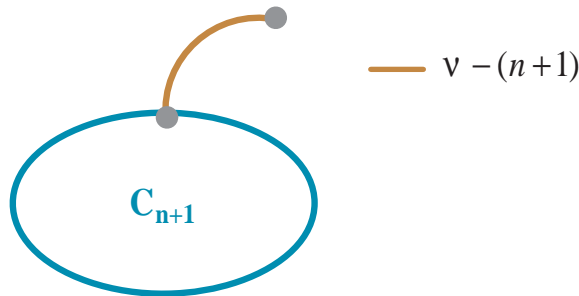


Figura 5.5: Grafo extremal con exceso 0, orden  $\nu$  y diámetro máximo.

Es inmediato comprobar que  $\nu(G) = \nu$  y que el diámetro de este grafo es

$$D(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \nu - \nu_0(n) = \nu + n - \nu_1(n) = \nu(G) + n - \nu_1(n).$$

- ii) Cuando  $\nu_1(n) \leq \nu < \nu_2(n)$ , consideramos en primer lugar el grafo  $H$  de la Figura 3.1, cuyo orden es  $\nu_1(n)$  y cuya cintura es  $n + 1$ . Sea  $G$  el grafo

formado por la unión de  $H$  y un camino de longitud  $\nu - \nu_1(n)$  incidente en cualquier vértice interno de uno de los dos caminos de longitud  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  de  $H$ , como puede observarse en la Figura 5.6.

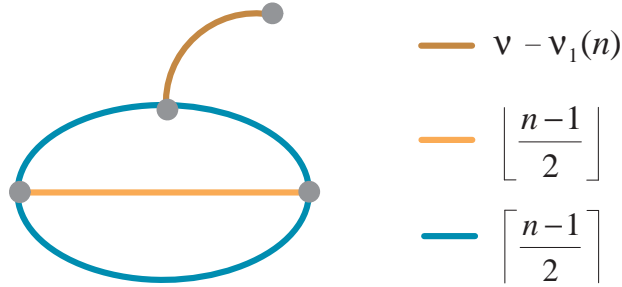


Figura 5.6: Grafo extremal con exceso 1, orden  $\nu$  y diámetro máximo.

Es inmediato verificar que  $\nu(G) = \nu$  y que el diámetro de este grafo es

$$D(G) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \nu - \nu_1(n) = \nu + n - \nu_2(n) = \nu(G) + n - \nu_2(n).$$

iii) Sea  $\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$ . Consideramos en primer lugar el grafo  $H$  de la Figura 3.2 que tiene orden  $\nu_2(n) = 2n$ , cintura  $n+1$  y diámetro

$$D(H) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Denotamos por  $x$  cualquier vértice de  $H$  que admite otro diametralmente opuesto.

Sea  $G$  el grafo formado por la unión de  $H$  y de un camino de longitud  $\nu - \nu_2(n)$  incidente en el vértice  $x$ , como se observa en la Figura 5.7.

Es inmediato comprobar que  $\nu(G) = \nu$  y que el diámetro de este grafo es

$$D(G) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor + \nu - \nu_2(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + \nu - \nu_2(n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

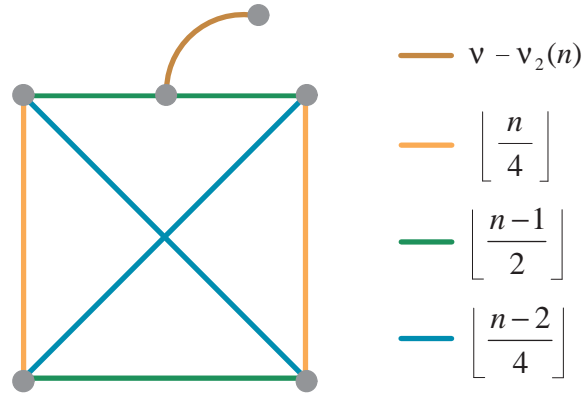


Figura 5.7: Grafo extremal con exceso 2, orden  $\nu$  y diámetro máximo.

lo que prueba que

$$D(G) = \nu + n - \nu_3(n).$$

⊗

**Observación 5.3.4** *Dados  $n \geq 4$  y  $\nu < \nu_3(n)$ , queremos señalar que no solamente hemos calculado el valor del diámetro máximo que puede tener cualquier grafo del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , sino que además hemos construido en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 grafos extremales con diámetro máximo.*

En el intervalo extremal de exceso 3 no determinamos el valor exacto del diámetro máximo de los grafos extremales sino que ofrecemos una acotación.

**Proposición 5.3.5** *Para todo  $n \geq 4$  y  $\nu_3(n) \leq \nu < \nu_4(n)$  enteros, se verifica que*

$$\begin{cases} \nu - \left\lfloor \frac{7n-2}{4} \right\rfloor \\ \nu - \left\lfloor \frac{7n-5}{4} \right\rfloor \end{cases} \leq D_{max}(\nu, n) \leq \begin{cases} \nu - \left\lfloor \frac{5n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es par;} \\ \nu - \left\lfloor \frac{5n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Denotamos por  $H$  al grafo de la Figura 3.3, que tiene cintura  $n + 1$ , orden  $\nu_3(n)$  y diámetro

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil & \text{si } n = 0, 1, 2 \text{ mód } 4 \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n = 3 \text{ mód } 4. \end{cases}$$

Sea  $x$  cualquier vértice de  $H$  que admite otro vértice diametralmente opuesto.

Cuando  $\nu_3(n) \leq \nu < \nu_4(n)$ , consideramos el grafo  $G$  formado por la unión del grafo  $H$  y un camino de longitud  $\nu - \nu_3(n)$  incidente en el vértice  $x$ , tal y como puede observarse en la Figura 5.8.

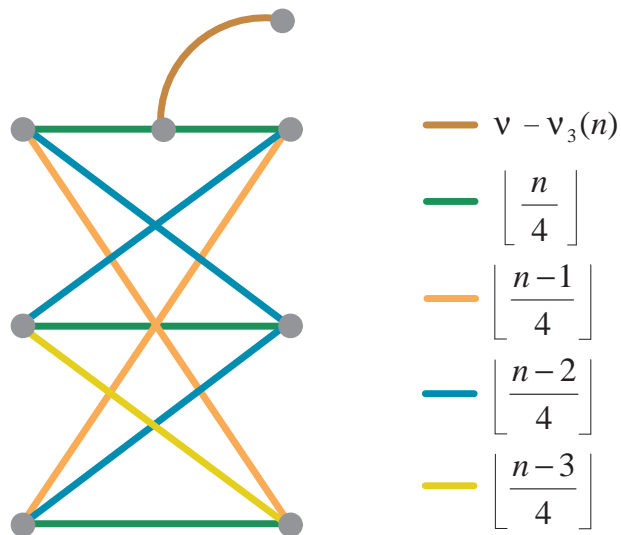


Figura 5.8: Grafo extremal con exceso 3, orden  $\nu$  y diámetro igual a la cota inferior de la Proposición 5.3.5.

Es inmediato verificar que  $\nu(G) = \nu$  y que el diámetro de este grafo es

$$D(G) = \nu - \nu_3(n) + \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil & \text{si } n = 0, 1, 2 \text{ mód } 4 \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n = 3 \text{ mód } 4. \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de  $\nu_3(n)$  se obtiene la desigualdad inferior enunciada.



Por otro lado, la cota superior de  $D_{max}(\nu, n)$  procede del Lema 5.3.1.

⊗

Podemos fácilmente comprobar que las cotas superior e inferior del diámetro máximo que acabamos de proporcionar coinciden cuando  $4 \leq n \leq 9$ , y por tanto, podemos determinar el valor del diámetro máximo  $D_{max}(\nu, n)$  para cualquier  $n \in \{4, 5, \dots, 9\}$  y  $\nu \in [\nu_3(n), \nu_4(n))$  enteros.

**Corolario 5.3.6** *Se verifica que:*

$n$	$\nu$	$D_{max}(\nu, n)$
4	9	3
5	11	4
6	14	4
	15	5
7	15	4
	16	5
	17	6
8	18	5
	19	6
	20	7
9	20	6
	21	7
	22	8

Por otra parte, para cualquier valor de  $n \geq 4$  y para todo  $\nu$  perteneciente al intervalo  $\nu \in [\nu_4(n), \nu_5(n))$  el máximo diámetro queda determinado, aunque salvo una unidad cuando  $n = 0 \pmod{6}$ .

**Proposición 5.3.7** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$  enteros.

$$\begin{cases} D_{max}(\nu, n) = \nu - 2n + 2 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{6}; \\ D_{max}(\nu, n) - (\nu - 2n) \in \{1, 2\} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases}$$

*Demostración:* Denotamos por  $H$  al grafo de la Figura 5.9. Su cintura es  $n + 1$ , su orden

$$\nu(H) = \begin{cases} \nu_4(n) & \text{si } n \not\equiv 3 \pmod{6} \\ \nu_4(n) + 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{6}, \end{cases}$$

y su diámetro

$$D(H) = \begin{cases} \lfloor \frac{2n+6}{3} \rfloor & \text{si } n \not\equiv 0, 5 \pmod{6} \\ \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor & \text{si } n \equiv 0, 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

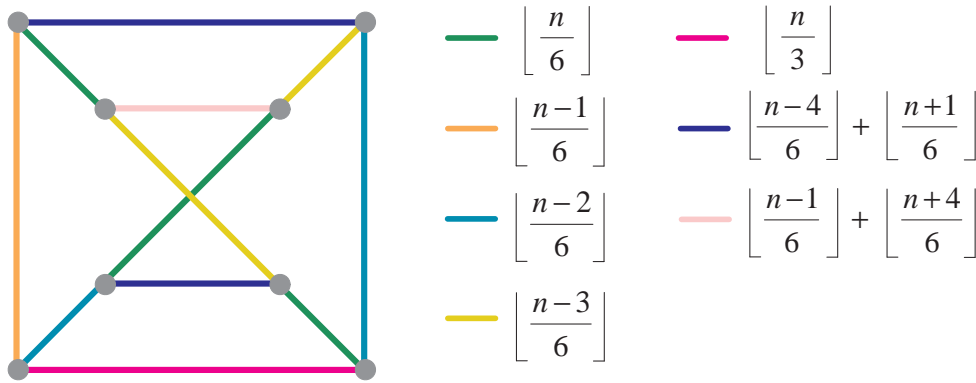


Figura 5.9: Grafo extremal con exceso 4 y orden  $\nu_4(n)$  salvo a lo sumo una unidad.

Denotamos por  $x$  cualquier vértice de  $H$  que admita otro vértice diametralmente opuesto a él.

Cuando  $\nu_4(n) \leq \nu < \nu_5(n)$ , consideramos el grafo  $G$  formado por la unión del grafo  $H$  de la Figura 5.9 y un camino de longitud  $\nu - \nu(H)$  incidente en el vértice  $x$ , tal y como puede observarse en la Figura 5.10.

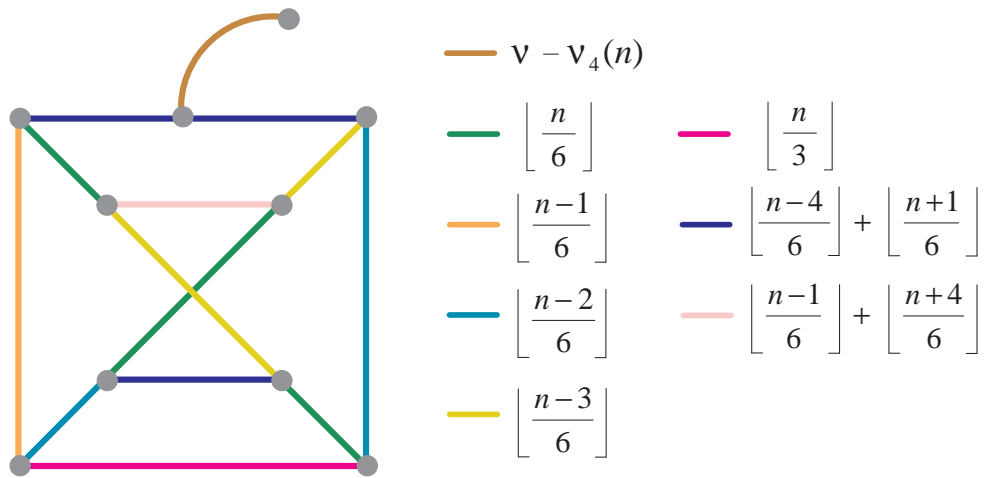


Figura 5.10: Grafo extremal con exceso 4, orden  $\nu$  y diámetro máximo (salvo a lo sumo una unidad).

Es inmediato comprobar que  $\nu(G) = \nu$  y que el diámetro de este grafo es

$$D(G) = \nu - \nu(H) + D(H) = \begin{cases} \nu - 2n + 1 & \text{si } n = 0 \text{ mód } 6; \\ \nu - 2n + 2 & \text{si } n \neq 0 \text{ mód } 6, \end{cases}$$

lo que junto con el Lema 5.3.1 conduce al resultado enunciado.

⊗

Al igual que hemos hecho previamente con la cintura, nos preguntamos acerca del diámetro máximo de los grafos extremales con exceso prefijado. Esta cuestión conduce a determinar

$$\max \{D(G) : G \in EX_k(n)\}.$$

Cuando el orden  $\nu$  pertenece a un intervalo de exceso constante, dado por  $[\nu_k(n), \nu_{k+1}(n) - 1]$  según la Proposición 2.2.17, añadiendo un camino fuera de todo ciclo, el diámetro máximo de los grafos extremales crece a medida que  $\nu$

crece, lo que se expresa como

$$\begin{aligned} \max \{D(G) : G \in EX_k(n)\} &= \max \{D(G) : G \in EX_k(n), \nu(G) = \nu_{k+1}(n) - 1\} \\ &= D_{max}(\nu_{k+1}(n) - 1, n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Las Proposiciones 5.3.3, 5.3.5, 5.3.7 junto con la igualdad (5.2) nos permiten abordar la última cuestión planteada para todo  $n \geq 4$  y  $\nu \leq 3n - 3$ .

**Corolario 5.3.8** Sean  $0 \leq k \leq 4$  y  $n \geq 4$  enteros.

i) Si  $k \in \{0, 1, 2\}$ , entonces  $\max \{D(G) : G \in EX_k(n)\} = n - 1$ .

ii) Si  $k = 3$ , entonces

$$\left\lfloor \frac{11n + 1}{12} \right\rfloor \leq \max \{D(G) : G \in EX_3(n)\} \leq n - 1 \quad \text{si } n \not\equiv 10, 11 \pmod{12}$$

$$\left\lfloor \frac{11n - 11}{12} \right\rfloor \leq \max \{D(G) : G \in EX_3(n)\} \leq n - 1 \quad \text{si } n \equiv 10, 11 \pmod{12}$$

iii) Si  $k = 4$ , entonces

$$\max \{D(G) : G \in EX_4(n)\} = n - 1 \quad \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{6}$$

$$n - 2 \leq \max \{D(G) : G \in EX_4(n)\} \leq n - 1 \quad \text{si } n \equiv 0 \pmod{6}.$$

En particular, el estudio que acabamos de realizar confirma que existen en los conjuntos  $EX(\nu_1(n) - 1, \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ ,  $EX(\nu_2(n) - 1, \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ ,  $EX(\nu_3(n) - 1, \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y  $EX(\nu_5(n) - 1, \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  grafos  $G$  que alcanzan la conocida cota  $D(G) \leq n - 1$  [9]. Estos grafos son los representados en las Figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.10 para los órdenes  $\nu_1(n) - 1$ ,  $\nu_2(n) - 1$ ,  $\nu_3(n) - 1$  y  $\nu_5(n) - 1$ , respectivamente.

Aunque mediante subdivisiones de ciertas jaulas minimales, concretamente las de Petersen, Heawood y Tutte-Coxeter, hemos construido en el Capítulo 3

grafos extremales para infinitos valores de  $n$ , este resultado no es generalizable a cualquier otra  $(r; g)$ -jaula minimal cuando  $r \geq 4$ .

Incluso aunque el diámetro de un grafo libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  sea lo más pequeño posible, es decir  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , lo cual significa que dos vértices arbitrarios de él están siempre contenidos en ciclos de longitud  $n + 1$ , tal grafo no es necesariamente extremal. El siguiente ejemplo avala ambas afirmaciones.

**Observación 5.3.9** *Un grafo con cintura  $n + 1$  y diámetro  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  no es necesariamente extremal.*

*Por ejemplo, denotamos por  $G$  a la  $(3; 12)$ -jaula minimal y por  $H$  al grafo obtenido subdividiendo una vez cada una de las aristas de la  $(5; 6)$ -jaula. Ambos grafos tienen cintura 12, mínimo diámetro 6 y exceso 63. Sus órdenes son diferentes pues  $\nu(G) = 126$  y  $\nu(H) = 42 + 105 = 147$ . Pero  $H$  no es extremal pues, aplicando iteradamente la desigualdad proporcionada en el tercer apartado del Lema 2.2.10, dada por  $\nu_{k+1}(n) \leq \nu_k(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , se verifica que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{67}(11) \leq \nu_{66}(11) + 5 \\ \leq \nu_{65}(11) + 10 \\ \leq \nu_{64}(11) + 15 \\ \leq \nu_{63}(11) + 20 \\ \leq \nu(G) + 20 \\ = 146 \end{array} \right.$$

*lo que implica que con 147 vértices pueden construirse grafos con cintura 12 y con exceso al menos 67.*

Al igual que hemos estudiado la cintura y el diámetro máximo de los grafos extremales, queremos también hacer un pequeño estudio de su valencia máxima.

## 5.4 Acerca de la valencia máxima de los grafos extremales.

No queremos terminar este capítulo sin una pequeña aportación a la valencia máxima de los grafos extremales.

Dados  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  enteros, denotamos por  $G$  a cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , y por  $\delta$ ,  $\Delta$  y  $\bar{d}$  sus valencias mínima, máxima y media respectivamente.

Si existe algún  $k \geq 0$  para el cual se verifique que  $\nu = \nu_k(n)$ , entonces sabemos por la Proposición 2.2.9 que  $G$  no contiene hojas o vértices de valencia 1, y en tal caso la desigualdad (1.10)

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} + (\delta - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

y el Teorema 1.11

$$\nu \geq \nu_0(\bar{d}, n + 1) = \begin{cases} 1 + \bar{d} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (\bar{d} - 1)^i & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

junto con la desigualdad (1.2)

$$\Delta(G) \geq \lceil \bar{d}(G) \rceil = \left\lceil \frac{2e(G)}{\nu(G)} \right\rceil$$

aportan información acerca de la valencia máxima.

Por otro lado, cuando  $\nu_k(n) < \nu < \nu_{k+1}(n)$  el grafo  $G$  puede contener  $\nu - \nu_k(n)$  hojas que pueden ser adyacentes a uno o a varios vértices diferentes

de  $V(G)$ , obteniéndose de esta manera grafos con diferente valencia máxima. La mayor posible de ellas se obtiene cuando todos los vértices de valencia 1 de  $G$  son adyacentes a un único vértice.

Esto explica, que al igual que ocurre con la cintura y el diámetro, el valor de la valencia máxima de los grafos extremales depende de  $(\nu, n)$  a través de su exceso  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$ . En particular, una cota inferior de la valencia máxima es fácil de obtener.

**Observación 5.4.1** *Queremos resaltar que en los casos conocidos, es decir, los correspondientes a  $n \geq 4$ ,  $\nu \leq 3n - 3$  y cuyos excesos  $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$ , la desigualdad*

$$\Delta(G) \geq \bar{d}(G) = \frac{2e(G)}{\nu(G)} = \frac{2(\nu + k)}{\nu},$$

*proporciona una cota inferior óptima de la valencia máxima de los grafos del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ , pues se alcanza para el ciclo  $C_\nu$  y para los grafos de las Figuras 5.1, 5.2, 5.3. De esta manera observamos que estos grafos extremales no solamente tienen la máxima cintura, sino que también poseen la mínima valencia máxima.*

Similarmente a como hemos hecho con la cintura y el diámetro, definimos la mayor valencia máxima de los grafos extremales.

**Definición 5.4.2** Sean  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  enteros. Por  $\Delta_{max}(\nu, n)$  denotamos la mayor valencia máxima de los grafos extremales de orden  $\nu$  y libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ . Es decir,

$$\Delta_{max}(\nu, n) = \max \left\{ \Delta(G) : G \in EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \right\}$$

El estudio realizado en el Capítulo 4 nos permite obtener el valor de la máxima valencia máxima de los grafos del conjunto  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $n \geq 4$  y todo  $\nu \leq 3n - 3$ .

**Proposición 5.4.3** Para  $n \geq 4$  y  $n + 1 \leq \nu < \nu_5(n)$  enteros se verifica que

i) Si  $\nu_0(n) \leq \nu < \nu_1(n)$ , entonces  $\Delta_{max}(\nu, n) = 2 + \nu - \nu_0(n) = \nu - n + 1$ .

ii) Suponemos que  $k \in \{1, 3, 4\}$ .

Si  $\nu_k(n) \leq \nu < \nu_{k+1}(n)$ , entonces  $\Delta_{max}(\nu, n) = 3 + \nu - \nu_k(n)$ .

iii) Si  $\nu_2(n) \leq \nu < \nu_3(n)$ , entonces

$$\Delta_{max}(\nu, n) = \begin{cases} 3 + \nu - \nu_2(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ 4 + \nu - \nu_2(n) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Sean  $n \geq 4$ ,  $n + 1 \leq \nu < \nu_5(n)$  enteros y  $G$  cualquier grafo de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . Denotamos por  $k = ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) - \nu$  el exceso de  $G$ .

Para determinar la mayor valencia máxima, denotamos por  $H_0$  al ciclo  $C_{n+1}$ , por  $H_2$  al grafo de la Figura 3.2 cuando  $n$  es par y al de la Figura 4.6 cuando  $n$  es impar, y por  $H_1, H_3, H_4$  a cada uno de los grafos de las Figuras 3.1, 3.3, 3.4 respectivamente.

Gracias a la caracterización de los grafos extremales que hemos realizado en el Capítulo 4 sabemos que, para  $0 \leq k \leq 4$ , éstos son precisamente los grafos del conjunto  $EX_k(n)$  con orden  $\nu_k(n)$  y mayor valencia máxima. A partir de ellos, dependiendo de la cantidad de vértices de valencia 1 que añadamos adyacentes a un único vértice de  $H_k$ , podemos obtener grafos con diferentes valencias máximas.

Con el objeto de encontrar uno con la mayor valencia máxima posible, para cada  $k \in [0, 4]$  denotamos por  $x_k$  cualquier vértice de  $H_k$  tal que  $\delta(x_k) = \Delta(H_k)$ . Consideramos  $\nu \in [\nu_k(n), \nu_{k+1}(n))$ . Según confirma la Proposición 2.2.17, el grafo  $G_\nu$  de exceso  $k$  obtenido mediante la unión de  $H_k$  y  $\nu - \nu_k(n)$  vértices de valencia 1 adyacentes a  $x_k$ , pertenece a la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y tiene



lógicamente la mayor valencia máxima posible. Por tanto, a partir de la igualdad

$$\Delta(G_\nu) = \Delta(H_k) + \nu - \nu_k(n),$$

se deduce el valor de  $\Delta_{max}(\nu, n)$ .

⊗

El proceso que hemos seguido en la demostración de la Proposición anterior para obtener grafos extremales con la mayor valencia máxima posible lo ilustramos en la Figura 5.11 para el caso particular  $\nu = 17, n = 9$ .

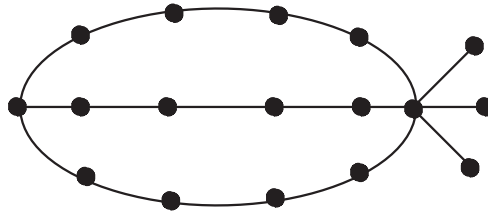


Figura 5.11: Grafo de  $EX(17; \{C_3, C_4, \dots, C_9\})$  con máxima valencia máxima.

## 5.5 Problemas abiertos y conjeturas.

Debido a la dificultad que conlleva la determinación del valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  y la caracterización de los grafos extremales, surge el interés por estudiar propiedades comunes a este tipo de grafos.

A este respecto, el estudio de la cintura de los grafos extremales es el que parece haber despertado mayor interés. Del hecho de que un grafo no contenga ciclos de orden menor o igual a  $n$  y que tenga el mayor tamaño posible, no se deduce la obligada existencia en el grafo del ciclo  $C_{n+1}$ .

Aunque en este capítulo hemos determinado de manera exacta el valor de la máxima cintura que puede alcanzar cualquier grafo de los conjuntos extremales

$EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $\nu \leq 3n - 3$ , el conocimiento exacto de las cantidades  $\nu_6(n)$  y  $\nu_7(n)$  que hemos acotado en el Capítulo 3, nos permitiría de una manera sencilla ampliar la cantidad de órdenes para los que este problema quedaría estudiado.

Por otra parte, recordemos que en el trabajo [10] sus autores prueban que para  $n \geq 7$  y  $\nu > \frac{2(n-2)^{n-2} + n - 5}{n - 3}$  todos los grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  tienen cintura  $n + 1$ . Creemos que la cota del orden puede rebajarse hasta orden  $n^2$ .

Referente al diámetro y a la valencia máxima de los grafos extremales, los resultados obtenidos se basan en los valores  $\nu_k(n)$  determinados, en definitiva, del exceso de los grafos extremales. A medida, que con un determinado exceso  $k$ , el orden se separa de  $\nu_k(n)$ , el diámetro y la valencia máxima aumentan.

# Capítulo 6

## Valores de la función extremal para $n \in \{5, 6, 7, 11\}$ .

En este último capítulo abordamos la tarea de obtener valores exactos de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  cuando  $n \in \{5, 6, 7, 11\}$ . Para ello, inicialmente construimos al menos un grafo que no contiene los ciclos prohibidos con el número de vértices y aristas deseado, estableciendo de esta manera una cota inferior válida para ciertos pares de valores de  $n$  y  $\nu$ . A continuación, probamos que esta cota inferior es óptima, y por tanto coincide con el valor exacto de la correspondiente función extremal. Además se proporciona un algoritmo que construye grafos de gran tamaño con orden y cintura dados.

### 6.1 Introducción

Es bien conocido [78] que  $ex(\nu; \{C_3\}) = \left\lfloor \frac{\nu^2}{4} \right\rfloor$ , pero poco se ha publicado hasta ahora en lo referente a la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para  $n \geq 4$ .

Concretamente, el valor exacto de  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  se proporciona para  $\nu \leq 24$  en [51] y para  $25 \leq \nu \leq 30$  en [52]. La demostración es constructiva de modo que para cada orden  $\nu$  es necesaria la construcción de algún grafo extremal. Con este objetivo, los autores del primero de los citados artículos implementan un algoritmo para construir grafos libres de los ciclos  $\{C_3, C_4\}$ , lo que permite aportar cotas inferiores de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  para valores de  $\nu \leq 200$ . De nuevo en [83] se desarrolla otro algoritmo para construir grafos con cintura al menos 5. La bondad de ambos procesos iterativos parece confirmarse por el hecho de que proporcionan grafos extremales para todos los órdenes  $\nu \leq 30$  para los cuales la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  es conocida. Pero recientemente en [1], y utilizando una técnica inspirada en el método de excisión que usa N. Biggs en [18] para construir grafos cúbicos, se ha logrado mejorar para  $\nu \geq 104$  algunas de las cotas de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4\})$  proporcionadas en [51] y [83].

En [77] se desarrolla un algoritmo más general que genera grafos libres de ciclos hasta una longitud  $n$  preestablecida. Haciendo uso de este proceso iterativo, sus autores proporcionan cotas inferiores de la función  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  cuando  $n \in \{5, 6, 7\}$ . Recientemente, para el caso  $n = 6$ , en [1] se proporcionan mejoras de algunas de estas cotas y se proporcionan nuevas cotas para todo  $\nu \leq 300$ .

Con el objetivo de abordar el conocimiento de la función extremal determinamos más valores exactos de ella para los casos  $n \in \{5, 6, 7\}$  y ofrecemos cotas superiores e inferiores para  $n \in \{5, 6, 7, 11\}$ , confirmando que muchas de las cotas inferiores incluidas en [77] son óptimas. En este proceso encontramos nuevamente otra relación entre las jaulas y los grafos extremales, pues no solamente las jaulas minimales son extremales (véase el Teorema 3.4.1) sino que además probamos que eliminando vértices de ciertas jaulas minimales obtenemos de nuevo grafos extremales. En ese proceso reencontramos una vez más los grafos que nos han proporcionado en el Capítulo 3 las cantidades  $\nu_k(n)$  para  $0 \leq k \leq 5$ .

## 6.2 Cotas de $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$

En esta sección describimos la técnica que vamos a utilizar para acotar inferior y superiormente la función  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  cuando  $n \in \{5, 6, 7, 11\}$ . Posteriormente probaremos que esta forma de trabajar proporciona cotas inferiores óptimas para algunos valores de  $\nu$  cuando  $n \in \{5, 6, 7\}$ .

La demostración de la igualdad  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) = m$  involucra la construcción de algún grafo de orden  $\nu$ , cintura al menos  $n + 1$  y tamaño  $m$ . Con este propósito, desarrollamos a continuación un proceso que construye grafos con gran tamaño para órdenes y cintura preestablecidos.

### Algoritmo 6.2.1

*Entrada:* Un entero  $n \geq 4$ , un grafo  $G_0$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con diámetro  $D(G_0) = D_0 < n$  y un entero positivo  $\nu^* > \nu(G_0)$ .

*Salida:* Un grafo  $G^*$  tal que  $\nu(G^*) = \nu^*$ ,  $g(G^*) > n$ ,  $D(G^*) < n$  y  $e(G^*) \geq e(G_0) + \nu^* - \nu(G_0)$ .

Paso 0: Hacer  $G = G_0$  y  $D = D_0$ .

Paso 1: Si  $\nu^* - \nu(G) < n - D$ , entonces  $G^*$  es el grafo obtenido al subdividir  $\nu^* - \nu(G)$  veces cualquier arista de  $G$ . En caso contrario, se construyen todos los grafos obtenidos al añadir a  $G$  un camino de longitud  $n - D + 1$  entre dos vértices de  $V(G)$  a distancia  $D$  y se selecciona  $G'$  como uno de los de mayor diámetro.

Paso 2: Mientras  $D(G') \geq n$ , se insertan en  $G'$  aristas uniendo vértices diametralmente opuestos. De nuevo, estos dos vértices deben ser elegidos tal que el grafo resultante tenga el mayor diámetro posible. Hacer  $G = G'$ ,  $D = D(G')$  e ir al paso 1.

Nótese que tanto la entrada como la salida del Algoritmo 6.2.1 es un grafo con diámetro a lo sumo  $n - 1$ , propiedad que cumplen todos los grafos de la familia  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  como se prueba en [9]. La mayoría de los grafos extremales y de los grafos que proporcionan las cotas inferiores de los Teoremas 6.3.3, 6.3.5, 6.3.8, 6.3.10 se pueden obtener mediante este algoritmo, que en ocasiones proporciona mejores resultados que el desarrollado en [77].

Existe también una forma no algorítmica de obtener cotas inferiores de la función extremal teniendo en cuenta que al eliminar vértices de un grafo dado la cintura no disminuye.

**Observación 6.2.2** *Si  $G$  es cualquier grafo libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ , entonces el grafo  $G'$  obtenido al eliminar cualquier vértice de  $G$  tampoco contiene los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$ .*

Este resultado, aunque evidente, nos ha permitido construir muchos grafos extremales de una forma fácil. Como en el Capítulo 3 hemos probado que las  $(r; g)$ -jaulas minimales son extremales para  $n = g - 1$ , hemos aplicado el resultado de la Observación 6.2.2 a las  $(3; 6)$ ,  $(3; 7)$ ,  $(3; 8)$ ,  $(3; 12)$ ,  $(4; 6)$ ,  $(4; 8)$ ,  $(5; 6)$ ,  $(6; 6)$ -jaulas para encontrar la mayoría de los grafos extremales y los que proporcionan las cotas inferiores de los Teoremas 6.3.3, 6.3.5, 6.3.8 y 6.3.10. Parece que al eliminar vértices de grafos extremales se encuentran generalmente nuevos grafos extremales.

En este contexto, al eliminar todos los vértices de un ciclo de longitud 5 de la  $(7; 5)$ -jaula de Hoffman-Singleton se encuentra un grafo con 45 vértices, 145 aristas y cintura 5, lo cual implica que la cota inferior contenida en [51] dada por  $ex(45; \{C_3, C_4\}) \geq 144$  puede ser mejorada a  $ex(45; \{C_3, C_4\}) \geq 145$ . Creemos que esta desigualdad se trata realmente de una igualdad.

Las cotas superiores contenidas en los Teoremas 6.3.3, 6.3.5, 6.3.8, 6.3.10 son consecuencia inmediata de la desigualdad (1.11), contenida en los Preliminares de esta memoria como una consecuencia inmediata del Teorema 1.2.1 obtenido por N. Alon, S. Hoory y L. Linial en [3]. En los casos concretos en los que hemos determinado el valor exacto de la función extremal, hemos observado que en general esta desigualdad (1.11) no proporciona la cota óptima, y consecuentemente, pensamos que los valores exactos están más cerca de las cotas inferiores que proporcionamos que de las superiores.

### 6.3 Valores exactos de $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$

En esta sección determinamos el valor exacto de la función  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para algunos pares de valores  $n, \nu$ . Para otros, proporcionamos cotas superiores e inferiores de dicha función, que son obtenidas mediante las técnicas explicadas en la sección previa.

Antes de exponer los próximos resultados nos gustaría recordar que en el Capítulo 3 hemos determinado el valor de la función  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para casi todo  $\nu < \left\lceil \frac{72n - 80}{19} \right\rceil$ , lo que conlleva que para cada  $n \in \{5, 6, 7, 11\}$  solo estudiamos la correspondiente función extremal cuando ésta es desconocida.

Para ello, recordamos que en el estudio de grafos  $G$  con cintura par  $g$ , para cada  $i$  tal que  $0 \leq i \leq \frac{g-2}{2}$  y para cada arista  $xy \in E(G)$  es usual considerar los conjuntos

$$X_i = \{u \in V(G) : d_G(u, x) = i, d_G(u, y) = i + 1\}$$

$$Y_i = \{u \in V(G) : d_G(u, y) = i, d_G(u, x) = i + 1\}.$$

El interés de estos conjuntos radica en que permiten acotar inferiormente el orden de cualquier grafo  $G$  con cintura par  $g$ , pues son conjuntos independientes y dos a

dos disjuntos. Incluso cuando  $1 \leq i \leq \frac{g-4}{2}$  dos vértices de  $X_i$  (o  $Y_i$ ) no pueden ser adyacentes a un mismo vértice de  $X_{i+1}$  (o respectivamente de  $Y_{i+1}$ ).

Asimismo introducimos a continuación una lema que será básico para las demostraciones posteriores.

**Lema 6.3.1** *La valencia mínima de un grafo  $G$  libre de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  es al menos  $e(G) - ex(\nu(G) - 1; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ .*

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo con cintura al menos  $n + 1$  y sea  $x \in V(G)$  un vértice con valencia mínima. Consideramos el subgrafo  $G' = G - \{x\}$ , que no contiene los ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  y prueba que

$$ex(\nu(G) - 1; \{C_3, C_4, \dots, C_n\}) \geq e(G') = e(G) - \delta(x) = e(G) - \delta(G).$$

Despejando  $\delta(G)$  se obtiene la desigualdad deseada.

⊗

Con el mismo objetivo introducimos la siguiente definición de arista distinguida, que nos permite controlar el número de vértices de un grafo.

**Definición 6.3.2** Dado un grafo  $G$ , sea  $x$  cualquier vértice de  $G$  tal que  $\delta(x) = \Delta$  y  $\sum_{u \in N_1(x)} \delta(u)$  es máxima. Sea  $y \in V(G)$  uno de los vértices de valencia máxima en  $N_1(x)$  con  $\sum_{u \in N_1(y)} \delta(u)$  máxima. Cualquier arista  $xy \in E(G)$  con la propiedad anterior recibe el nombre de *arista distinguida* de  $G$ . (Véase la Figura 6.1).

Lógicamente, en cualquier grafo  $G$  pueden existir una o varias aristas distinguidas, y de hecho cualquier arista de un grafo regular es una arista distinguida de él.



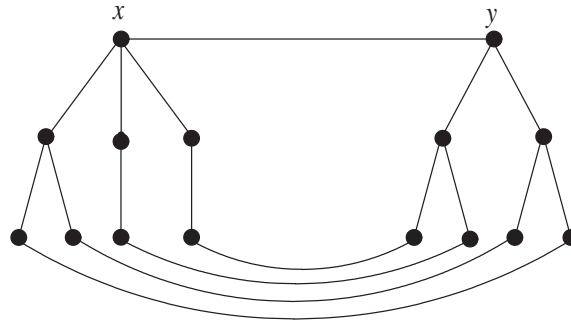


Figura 6.1: Ejemplo de un grafo y de la única arista distinguida  $xy$  de él.

Análogamente al artículo [51], con el objeto de hacer las demostraciones más claras, denotamos la función  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  por  $f_n(\nu)$  y a la familia de grafos libres de ciclos  $\{C_3, C_4, \dots, C_n\}$  con orden  $\nu$  por  $\mathcal{F}_\nu^n$ .

Dados enteros  $n$  y  $\nu \geq n + 1$ , para mostrar que  $f_n(\nu) = m$  usamos el método clásico. Primero, para probar que  $f_n(\nu) \geq m$ , generamos con ayuda del Algoritmo 6.2.1 y de la Observación 6.2.2, un grafo  $G \in \mathcal{F}_\nu^n$  con  $m$  aristas. A continuación, asumimos la existencia de algún grafo  $G \in \mathcal{F}_\nu^n$  con tamaño  $m + 1$ . Haciendo uso del Lema 6.3.1 y de las desigualdades (1.2) y (1.10) dadas respectivamente por

$$\Delta(G) \geq \left\lceil \bar{d}(G) \right\rceil = \left\lceil \frac{2e(G)}{\nu(G)} \right\rceil,$$

y

$$\nu(G) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta(\delta - 1)^{i-1} + (\delta - 1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

obtenemos los posibles valores de la valencia mínima  $\delta$  y máxima  $\Delta$  del grafo  $G$ . Asimismo, mediante el sistema de ecuaciones (1.3) dado por

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_\Delta & = \nu(G) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + \Delta n_\Delta & = 2e(G), \end{cases}$$

para  $\delta \leq i \leq \Delta$ , calculamos las posibles cantidades  $n_i$  de vértices de valencia  $i$  existentes en el grafo  $G$ . Estas posibles distribuciones de las valencias del grafo  $G$  junto con los valores previamente determinados de la función extremal  $f_n(\nu)$  permiten encontrar una contradicción que confirma la ausencia de grafos en el conjunto extremal  $\mathcal{F}_\nu^n$  con tamaño  $m + 1$ .

Queremos también hacer notar que eliminando aristas, la existencia de un grafo  $G$  con estrictamente más de  $m + 1$  aristas implica la existencia de un grafo  $G'$  con el mismo orden, al menos igual cintura y tamaño exactamente  $m + 1$ .

En primer lugar obtenemos los valores exactos de la función extremal  $f_5(\nu) = ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  para  $\nu \leq 42$  y la acotamos superior e inferiormente para los órdenes  $43 \leq \nu \leq 61$ .

**Teorema 6.3.3** *La función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  toma los valores:*

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	3	4	6	7	9	10
10	12	14	16	18	21	22	24	26	29	31
20	34	36	39	42	45	48	52	53	56	58
30	61	64	67	70	74	77	81	84	88	92
40	96	100	105	106-108	108-112	110-116	114-119	118-123	122-127	126-131
50	130-135	134-139	138-143	142-147	147-151	151-155	156-160	160-164	165-168	170-172
60	175-177	180-181	186							

*Demostración:* En primer lugar, incluimos el método que hemos seguido para construir tanto los grafos extremales como los que proporcionan las cotas inferiores enunciadas.

Haciendo uso del carácter extremal de las jaulas minimales probado en el Teorema 3.4.1 y aplicándoselo a las  $(3; 6)$ ,  $(4; 6)$ ,  $(5; 6)$  y  $(6; 6)$ -jaulas obtenemos las igualdades  $f_5(14) = 21$ ,  $f_5(26) = 52$ ,  $f_5(42) = 105$  y  $f_5(62) = 186$ .

Para  $\nu \leq 13$  los valores proporcionados de  $f_5(\nu)$  son un caso particular de los resultados exactos obtenidos en el Capítulo 3. Hacemos notar que al eliminar

de uno en uno y ordenadamente de la (3;6)-jaula (ver Figura 6.2) los vértices del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 13, 14, 5, 6\}$  se obtienen ejemplos de grafos extremales para  $6 \leq \nu \leq 13$ .

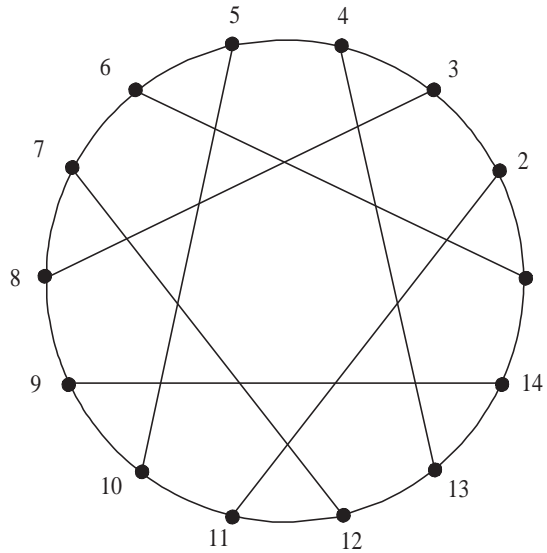


Figura 6.2: Al eliminar vértices de la (3;6)-jaula se obtienen grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  para  $6 \leq \nu \leq 13$ .

Procedemos de modo similar y eliminamos de la (4;6)-jaula de uno en uno y ordenadamente los vértices del conjunto  $\{7, 8, 19, 22, 20, 21, 15, 14, 26, 1, 25\}$  (véase la Figura 6.3) y de la (5;6)-jaula los de  $\{29, 30, 31, 32, 39, 40, 2, 33, 37, 6, 5, 4, 3, 38\}$  (véase la Figura 6.4). De este manera se obtienen en principio ejemplos de grafos que proporcionan una cota inferior de la función  $f_5(\nu)$  para  $15 \leq \nu \leq 25$  y  $28 \leq \nu \leq 41$ . Para  $\nu \leq 27$  y  $\nu = 30, 32$  son las mismas que las obtenidas en el artículo [77].

De manera análoga, al eliminar consecutivamente los vértices del conjunto  $\{61, 51, 1, 26, 56, 62, 27, 2, 60, 47, 46, 6, 22, 44, 55, 21, 59\}$  de la (6;6)-jaula (véase la Tabla 6.1) se encuentran grafos que proporcionan cotas inferiores de  $f_5(\nu)$  para  $45 \leq \nu \leq 61$ .

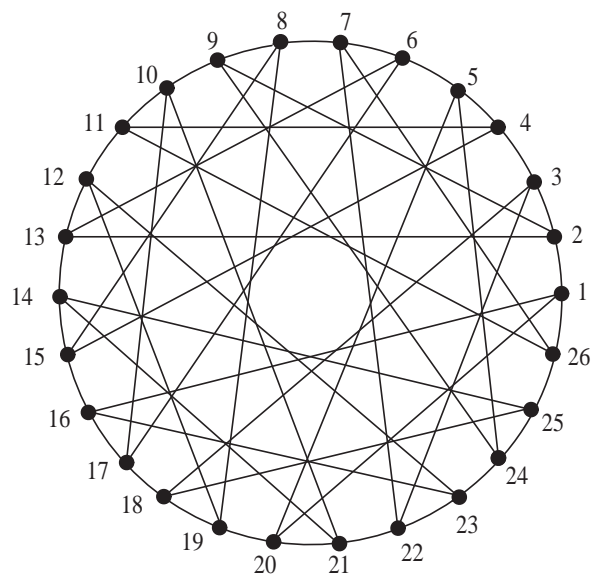


Figura 6.3: Al eliminar vértices de la (4;6)-jaula se obtienen grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  para  $15 \leq \nu \leq 25$ .

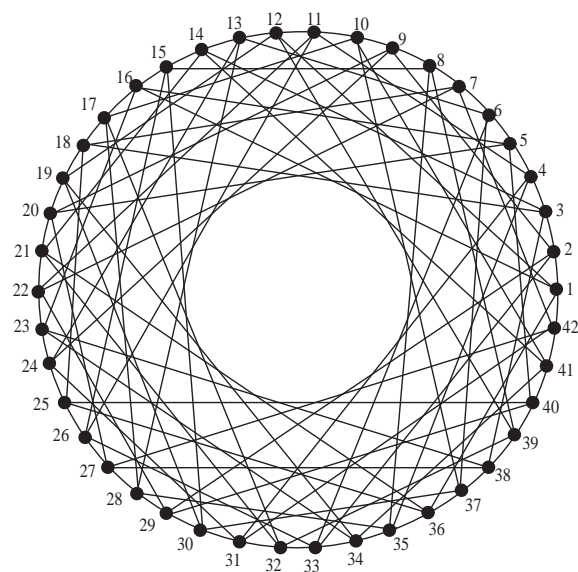


Figura 6.4: Al eliminar vértices de la (5;6)-jaula se obtienen grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$  para  $28 \leq \nu \leq 41$ .

Tabla 6.1: Lista de adyacencia de la (6;6)-jaula

1 $\rightarrow$ {26, 31, 36, 41, 46, 51}	2 $\rightarrow$ {27, 35, 37, 42, 47, 51}	3 $\rightarrow$ {28, 34, 38, 43, 48, 51}
4 $\rightarrow$ {29, 33, 39, 44, 49, 51}	5 $\rightarrow$ {30, 32, 40, 45, 50, 51}	6 $\rightarrow$ {26, 32, 38, 44, 47, 52}
7 $\rightarrow$ {27, 31, 39, 45, 48, 52}	8 $\rightarrow$ {28, 35, 40, 41, 49, 52}	9 $\rightarrow$ {29, 34, 36, 42, 50, 52}
10 $\rightarrow$ {30, 33, 37, 43, 46, 52}	11 $\rightarrow$ {26, 33, 40, 42, 48, 53}	12 $\rightarrow$ {27, 32, 36, 43, 49, 53}
13 $\rightarrow$ {28, 31, 37, 44, 50, 53}	14 $\rightarrow$ {29, 35, 38, 45, 46, 53}	15 $\rightarrow$ {30, 34, 39, 41, 47, 53}
16 $\rightarrow$ {26, 34, 37, 45, 49, 54}	17 $\rightarrow$ {27, 33, 38, 41, 50, 54}	18 $\rightarrow$ {28, 32, 39, 42, 46, 54}
19 $\rightarrow$ {29, 31, 40, 43, 47, 54}	20 $\rightarrow$ {30, 35, 36, 44, 48, 54}	21 $\rightarrow$ {26, 35, 39, 43, 50, 55}
22 $\rightarrow$ {27, 34, 40, 44, 46, 55}	23 $\rightarrow$ {28, 33, 36, 45, 47, 55}	24 $\rightarrow$ {29, 32, 37, 41, 48, 55}
25 $\rightarrow$ {30, 31, 38, 42, 49, 55}	26 $\rightarrow$ {1, 6, 11, 16, 21, 56}	27 $\rightarrow$ {2, 7, 12, 17, 22, 56}
28 $\rightarrow$ {3, 8, 13, 18, 23, 56}	29 $\rightarrow$ {4, 9, 14, 19, 24, 56}	30 $\rightarrow$ {5, 10, 15, 20, 25, 56}
31 $\rightarrow$ {1, 7, 13, 19, 25, 57}	32 $\rightarrow$ {5, 6, 12, 18, 24, 57}	33 $\rightarrow$ {4, 10, 11, 17, 23, 57}
34 $\rightarrow$ {3, 9, 15, 16, 22, 57}	35 $\rightarrow$ {2, 8, 14, 20, 21, 57}	36 $\rightarrow$ {1, 9, 12, 20, 23, 58}
37 $\rightarrow$ {2, 10, 13, 16, 24, 58}	38 $\rightarrow$ {3, 6, 14, 17, 25, 58}	39 $\rightarrow$ {4, 7, 15, 18, 21, 58}
40 $\rightarrow$ {5, 8, 11, 19, 22, 58}	41 $\rightarrow$ {1, 8, 15, 17, 24, 59}	42 $\rightarrow$ {2, 9, 11, 18, 25, 59}
43 $\rightarrow$ {3, 10, 12, 19, 21, 59}	44 $\rightarrow$ {4, 6, 13, 20, 22, 59}	45 $\rightarrow$ {5, 7, 14, 16, 23, 59}
46 $\rightarrow$ {1, 10, 14, 18, 22, 60}	47 $\rightarrow$ {2, 6, 15, 19, 23, 60}	48 $\rightarrow$ {3, 7, 11, 20, 24, 60}
49 $\rightarrow$ {4, 8, 12, 16, 25, 60}	50 $\rightarrow$ {5, 9, 13, 17, 21, 60}	51 $\rightarrow$ {1, 2, 3, 4, 5, 61}
52 $\rightarrow$ {6, 7, 8, 9, 10, 61}	53 $\rightarrow$ {11, 12, 13, 14, 15, 61}	54 $\rightarrow$ {16, 17, 18, 19, 20, 61}
55 $\rightarrow$ {21, 22, 23, 24, 25, 61}	56 $\rightarrow$ {26, 27, 28, 29, 30, 62}	57 $\rightarrow$ {31, 32, 33, 34, 35, 62}
58 $\rightarrow$ {36, 37, 38, 39, 40, 62}	59 $\rightarrow$ {41, 42, 43, 44, 45, 62}	60 $\rightarrow$ {46, 47, 48, 49, 50, 62}
61 $\rightarrow$ {51, 52, 53, 54, 55, 62}	62 $\rightarrow$ {56, 57, 58, 59, 60, 61}	

Para  $\nu = 27, 43, 44$ , los grafos que proporcionan la cota inferior de  $f_5(\nu)$  se obtienen mediante el Algoritmo 6.2.1 aplicado a la (4;6) y a la (5;6)-jaulas, respectivamente.

A continuación probamos que para  $15 \leq \nu \leq 41$  los grafos que acabamos de describir son extremales y por tanto su tamaño proporciona el valor exacto de la función extremal  $f_5(\nu) = ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$ .

**$f_5(15) = 22$ .** Suponemos la existencia de un grafo  $G$  en el conjunto  $\mathcal{F}_{15}^5$  con 23 aristas. Como su valencia media es mayor de 3,  $G$  contiene algún vértice de valencia al menos 4. Como  $f_5(13) = 18$ , al eliminar dos vértices de  $G$  se han de eliminar al menos cinco aristas. Consecuentemente  $G$  contiene a lo sumo un vértice de valencia 2 que no puede ser adyacente a un vértice de valencia 3.

La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  junto con las propiedades de  $G$  que acabamos de señalar (véase la Figura 6.5) permiten obtener la desigualdad  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |Y_1| + |Y_2| \geq 16$ , contradiciéndose el orden de  $G$ .

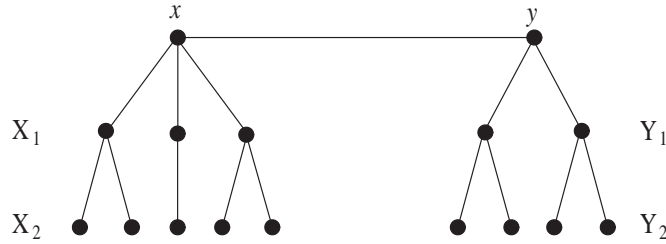


Figura 6.5: Ilustración de la ausencia de grafos en  $\mathcal{F}_{15}^5$  con 23 aristas.

$\mathbf{f}_5(16) = 24$ . La existencia de un grafo con 16 vértices, 25 aristas y cintura al menos 6 contradice la desigualdad (1.10) para los valores de  $\delta$  y  $\Delta$  proporcionados por el Lema 6.3.1 y la desigualdad (1.2).

La demostración es similar cuando  $\nu \in \{18, 20, 22, 23, 24, 25, 28, 34, 36, 38, 39, 40, 41\}$ .

$\mathbf{f}_5(17) = 26$ . Asumimos que existe un grafo  $G \in \mathcal{F}_{17}^5$  con 27 aristas. En este caso,  $\delta = 3$  y  $\Delta = 4$ . Como  $\nu(G) = 17$ , para cualquier arista distinguida  $xy$  se cumple que tanto el vértice  $y$  como cualquier vértice de  $X_1 \cup Y_1$  tienen valencia 3. Como a partir del sistema de ecuaciones (1.3) se deduce que  $n_4 = 3$ , el grafo considerado  $G$  tiene tamaño  $e(G) = 16 + \sum_{u \in Y_2} (\delta(u) - 1) \leq 26$ .

La prueba es similar para  $\nu = 30$ .

$\mathbf{f}_5(19) = 31$ . Suponemos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{19}^5$  con 32 aristas. En este caso  $\delta = 3$ ,  $\Delta = 4$  y  $n_3 = 12$ . Dos vértices de valencia 3 de  $G$  no pueden ser adyacentes, porque su existencia contradice la igualdad  $f_5(17) = 26$ . Por tanto, las tres aristas incidentes en cada uno de los doce vértices de valencia 3 de

$G$  son diferentes, implicando que el tamaño de  $G$  debe ser al menos 36.

$\mathbf{f_5(21) = 36}$ . Asumimos que existe un grafo  $G \in \mathcal{F}_{21}^5$  con tamaño 37. Entonces  $\delta = 3$  y  $4 \leq \Delta \leq 5$ . Como  $f_5(19) = 31$ , dos vértices de valencia 3 no pueden ser adyacentes.

Si  $\Delta = 5$ , la consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  permite obtener que  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |Y_1| + |Y_2| \geq 22$ , contradiciéndose el orden de  $G$ . Consecuentemente,  $\Delta = 4$  y  $G$  tiene once vértices de valencia 4. Como  $f_5(17) = 26$  un vértice de valencia máxima no puede ser adyacente a tres vértices de valencia 3. La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  de  $G$  implica que  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |Y_1| + |Y_2| \geq 22$ .

$\mathbf{f_5(27) = 53}$ . Suponemos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{27}^5$  con 54 aristas. En la demostración distinguimos varios casos dependiendo del valor de la valencia mínima, siendo  $2 \leq \delta \leq 4$ .

Si  $\delta = 4$  entonces  $G$  es regular y dada cualquier arista  $xy$  existe un vértice, que denotamos  $s$ , a distancia tres de ella, tal y como se observa en la Figura 6.6.

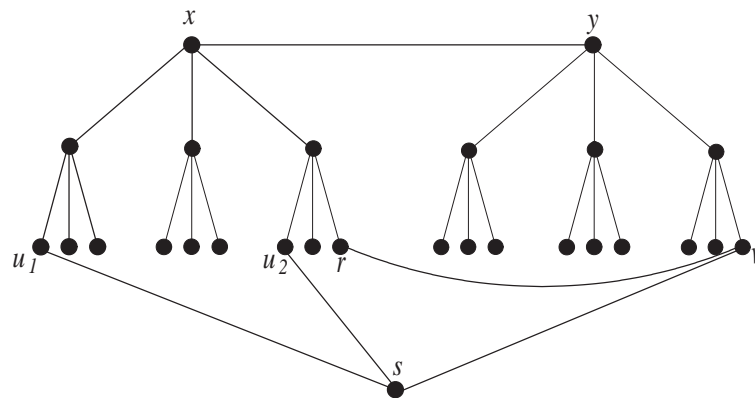


Figura 6.6: Ilustración de la no existencia de grafos 4-regulares en  $\mathcal{F}_{27}^5$ .

Como  $G$  no contiene al ciclo  $C_4$ , el vértice  $s$  debe ser adyacente a  $X_2$  e  $Y_2$

pudiendo así asumir que el grafo  $G$  contiene aristas  $su_1, su_2, sv$  tales que  $u_1, u_2$  pertenece a  $X_2$  y  $v$  a  $Y_2$ . Como  $\delta(v) = 4$ , necesariamente  $G$  contiene una arista  $rv$  siendo  $r$  un vértice de  $X_2$  tal que  $d_G(r, u_1) = 2$  o  $d_G(r, u_2) = 2$ . Pero esto implica la existencia de un ciclo de longitud 5 en  $G$ .

Si  $\delta = 3$ , entonces  $5 \leq \Delta \leq 7$ . A partir de los valores  $f_5(25) = 48$ ,  $f_5(24) = 45$ ,  $f_5(23) = 42$ ,  $f_5(22) = 39$  y  $f_5(21) = 36$ , se deduce que cada vértice  $x$  en  $V(G)$  es adyacente a lo sumo a  $\delta(x) - 3$  vértices de valencia 3. Consideramos una arista distinguida  $xy$ .

Con 27 vértices la única configuración posible con cintura al menos 6 verificando la propiedad anterior es la que  $\delta(x) = 5$  siendo  $x$  adyacente a dos vértices de valencia 3 y a tres vértices de valencia 4 ( $y$  uno de ellos), y siendo el vértice  $y$  adyacente a dos vértices de valencia 4, un vértice de valencia 3 y uno de valencia 5 (el vértice  $x$ ). Consecuentemente, se deduce que  $\Delta = 5$  y que cada vértice de  $G$  con valencia 5 es adyacente a dos vértices de valencia 3 y a tres vértices de valencia 4. Como  $\sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) = 28$  y  $X_2$  no contiene vértices de valencia 5, existen exactamente dos vértices  $u_1$  y  $u_2$  de valencia 3 en  $X_2$ . (Véase la Figura 6.7). De la igualdad  $n_5 = n_3$  se deduce la existencia de al menos cuatro vértices de valencia 5 en  $Y_2$ . Dos de ellos deben ser adyacentes a los dos vértices  $u_1$  y  $u_2$  y en consecuencia  $G$  contiene un ciclo de longitud 4.

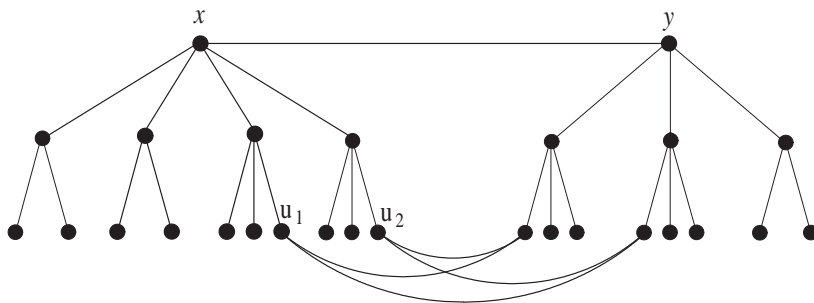


Figura 6.7: Ilustración de la ausencia de grafos en  $\mathcal{F}_{27}^5$  con 54 aristas y  $\delta = 3$ .



Finalmente estudiamos el caso  $\delta = 2$ . Teniendo en cuenta que  $f_5(25) = 48$ , al eliminar dos vértices de  $G$  se deben eliminar al menos seis aristas. Por lo tanto, existe en  $V(G)$  un único vértice de valencia 2 y no existen vértices de valencia 3. La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  conduce a la contradicción  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |Y_1| + |Y_2| \geq 28$ .

$\mathbf{f}_5(29) = 58$ . Consideramos que existe un grafo  $G \in \mathcal{F}_{29}^5$  con 59 aristas. En este caso,  $\delta = 3$  y  $5 \leq \Delta \leq 8$ . Denotamos por  $xy$  a cualquier arista distinguida de  $E(G)$  y distinguimos varios casos dependiendo del valor de la valencia máxima  $\Delta$  de  $G$ .

Si  $\Delta \geq 6$ , entonces  $\delta(x) \geq 6$  y todos los vértices adyacentes a  $x$  no pueden tener valencia 3, pues en tal caso, al eliminar  $x$  y los vértices del conjunto  $N_1(x)$  se contradice una de las tres igualdades siguientes  $f_5(22) = 39$ ,  $f_5(21) = 36$  o  $f_5(20) = 34$ . Por lo tanto,  $\delta(y) = 5$  o  $\delta(y) = 4$ . Como  $\nu(G) = 29$ , cuando  $\delta(y) = 5$  todos los vértices de  $X_1 \cup Y_1$  tienen valencia 3, y cuando  $\delta(y) = 4$  existen al menos cinco vértices de valencia 3 en  $X_1 \cup Y_1$ . En ambos casos, la eliminación de los vértices  $x, y$  y los del conjunto  $X_1 \cup Y_1$  contradice las igualdades  $f_5(18) = 29$  o  $f_5(22) = 39$  respectivamente.

Por lo tanto,  $\Delta = 5$  y se cumple que  $n_5 = n_3 + 2$ . Como  $\nu(G) = 29$ , los vértices  $x, y$  no pueden tener valencia 5, porque obliga a la existencia de cinco vértices de valencia 3 en el conjunto  $X_1 \cup Y_1$ , lo cual contradice que  $f_5(22) = 39$ . Análogamente, si se asume que  $\delta(x) = 5$  y que  $x$  es adyacente solamente a vértices de valencia 4, cada uno de ellos debe ser adyacente al menos a un vértice de valencia 3 y, teniendo en cuenta que  $f_5(21) = 36$ , este vértice de valencia 3 es único. Pero esta configuración implica que  $e(G) = 28 + \sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) \geq 60$ .

Consecuentemente, cada vértice de valencia 5 debe ser adyacente al menos a  $\alpha \geq 1$  vértices de valencia 3. Distinguimos varios casos dependiendo del valor de la cantidad  $\alpha$ .

Cuando  $\alpha \geq 3$ , son incompatibles la igualdad  $n_5 = n_3 + 2$ , obtenida del sistema de ecuaciones (1.3) y la desigualdad

$$3n_5 \leq \left| \{uv \in E(G) : \delta(u) = 3, \delta(v) = 5\} \right| \leq \left| \{uv \in E(G) : \delta(u) = 3\} \right| \leq 3n_3.$$

Estudiamos  $\alpha = 2$ . En primer lugar asumimos que existe un vértice de valencia 5 en  $Y_1$ , lo que implica la existencia de dos vértices de valencia 3 en  $Y_2$ . Como  $f_5(21) = 36$ , el conjunto  $Y_1$  no contiene vértices de valencia 3. Entonces,  $29 = 2 + |X_1| + |Y_1| + |X_2| + |Y_2|$  y  $e(G) = 28 + \sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) \leq 58$  porque  $X_2$  no contiene vértices de valencia 5.

En consecuencia, si  $\alpha = 2$  no pueden existir vértices de valencia 5 en  $Y_1$ . Como  $f_5(23) = 42$ ,  $f_5(22) = 39$  y  $N_1(x)$  tiene dos vértices de valencia 3, el conjunto  $N_2(x)$  tiene a lo sumo un vértice de valencia 3, concluyendo que todos los vértices de  $Y_1$  tienen valencia 4. Considerando los valores previos de  $f_5(\nu)$  se deduce que existe a lo sumo un vértice de valencia 3 en el conjunto  $X_2 \cup Y_2$ , y por tanto existen a lo sumo dos vértices de valencia 3 a distancia al menos dos de la arista  $xy$ .

A partir de la desigualdad  $n_3 \geq \alpha = 2$ , se obtiene que  $n_5 = n_3 + 2 \geq 4$  y la existencia de al menos tres vértices de valencia 5 a distancia al menos dos de la arista  $xy$ . Estos vértices no pueden ser adyacentes al menos a  $\alpha = 2$  vértices de valencia 3 sin formar ciclos de longitud 4.

Finalmente, suponemos que  $\alpha = 1$ . Como  $f_5(21) = 36$  y  $f_5(22) = 39$ , existen a lo sumo dos vértices de valencia 3 en el conjunto  $N_2(x)$ , y en consecuencia, por la definición de arista distinguida, el conjunto  $Y_1$  no contiene vértices de valencia 3. Teniendo en cuenta que  $\nu(G) = 29$ , deducimos que el conjunto  $Y_1$  no contiene vértices de valencia 5 y además que  $29 = 2 + |X_1| + |Y_1| + |X_2| + |Y_2|$ .

Entonces, no existen vértices de valencia 5 en  $X_2$  y como también se tiene que  $\sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) = 31$ , exactamente dos vértices de valencia 3 pertenecen

al conjunto  $X_2$ . Esto prueba que cada vértice de valencia 5 con exactamente un único vértice de valencia 3 en su entorno, no tiene vértices de valencia 5 a distancia 2. Como  $n_3 \geq 3$ , se tiene que  $n_5 = n_3 + 2 \geq 5$  y el conjunto  $Y_2$  contiene dos vértices de valencia 5 a distancia 2. Ambos deben ser adyacentes a los dos vértices de valencia 3 de  $X_2$  y por tanto se forma en  $G$  un ciclo de longitud 4.

**$\mathbf{f}_5(31) = 64$ .** Suponemos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{31}^5$  con 65 aristas. Se cumple que  $\delta = 4$ ,  $\Delta = 5$  y  $n_5 = 6$ . Sea  $xy$  cualquier arista distinguida de  $G$ . Como dicho grafo tiene 31 vértices, se cumple que  $\delta(x) = 5$  y que  $\delta(y) = 4$  y que el conjunto  $Y_1$  contiene a lo sumo un vértice de valencia 5. Pero su existencia implica que  $e(G) = 30 + \sum_{u \in Y_2} (\delta(u) - 1) \leq 64$ , debido a que en  $X_2$  no existen vértices de valencia 5.

Por lo tanto, dos vértices de valencia 5 deben estar situados al menos a distancia tres, lo cual implica por un lado que no existen vértices de valencia 5 en  $X_2 \cup Y_1$ , y por otro la existencia de dos vértices de valencia 5 a distancia dos en  $Y_2$ .

**$\mathbf{f}_5(32) = 67$ .** Suponemos la existencia de un grafo  $G$  en el conjunto  $\mathcal{F}_{32}^5$  con tamaño 68. Se cumple que  $\delta = 4$ ,  $\Delta = 5$  y  $n_5 = 8$ . En dicho grafo no pueden existir dos vértices consecutivos de valencia 5, pues su existencia obliga a que el orden de  $G$  sea al menos 34. Denotamos por  $\alpha$  el máximo número posible de vértices de valencia 5 adyacentes a cualquier vértice de valencia 4.

El caso  $\alpha = 4$  implica que  $\nu(G) \geq 33$ . La consideración de  $\alpha = 3$  y de cualquier arista distinguida  $xy$  conduce a  $e(G) = 31 + \sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) = 67$  ya que no existen vértices de valencia máxima en  $X_2$ .

Por otro lado, suponer que  $\alpha = 1$  implica que todos los vértices de valencia 4 adyacentes a vértices de valencia 5 son diferentes, y que por tanto deben existir 40 vértices de valencia 4 en  $G$ .

Necesariamente  $\alpha = 2$ . La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  confirma que  $X_1$  contiene exclusivamente vértices de valencia 4, que hay un único vértice de valencia 5 en el conjunto  $Y_1$  y que existe un vértice  $s$  a distancia 3 de dicha arista. Como en  $Y_2$  existen a lo sumo cuatro vértices de valencia 5 y todo vértice de valencia máxima en  $X_2$  es adyacente a  $s$ , se deduce al ser  $\alpha = 2$ , que  $\delta(s) = 4$  y que en  $X_2$  hay dos vértices de valencia 5. Estos vértices son ambos adyacentes a  $s$  y a un vértice  $v$  de  $Y_2$  de valencia 4 situado a distancia 2 de dos vértices de valencia 5 de  $Y_2$ , formándose de esta manera un cuadrado en  $G$ .

$\mathbf{f}_5(33) = 70$ . La prueba es análoga a la anterior. Suponemos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{33}^5$  con 71 aristas. Evidentemente,  $\delta = 4$ ,  $\Delta = 5$  y  $n_5 = 10$ . En dicho grafo no pueden existir dos vértices consecutivos de valencia 5, pues su existencia obliga a que el orden de  $G$  sea al menos 34.

Denotamos por  $\alpha$  el máximo número posible de vértices de valencia 5 adyacentes a cualquier vértice de valencia 4.

La consideración de  $\alpha = 4$  y de cualquier arista distinguida  $xy$  conduce a la igualdad  $e(G) = 32 + \sum_{u \in X_2} (\delta(u) - 1) = 68$ .

Por otro lado, suponer que  $\alpha = 1$  implica que todos los vértices de valencia 4 adyacentes a vértices de valencia 5 son diferentes, y que por tanto deben existir 50 vértices de valencia 4 en  $G$ .

Estudiamos el caso  $\alpha = 3$ . La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  confirma que  $X_1$  contiene exclusivamente vértices de valencia 4, que hay dos vértices de valencia 5 en el conjunto  $Y_1$  y que existe un vértice  $s$  a distancia 3 de dicha arista. Como en  $Y_2$  existen a lo sumo tres vértices de valencia 5 y todo vértice de valencia máxima en  $X_2$  es adyacente a  $s$ , se deduce que  $\delta(s) = 4$  y que en  $X_2$  hay a lo sumo  $\alpha = 3$  vértices de valencia 5, contradiciéndose de esta manera que  $n_5 = 10$ .

Necesariamente  $\alpha = 2$ . La consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  confirma que  $X_1$  contiene exclusivamente vértices de valencia 4, que hay un único vértice de valencia 5 en el conjunto  $Y_1$  y que existen dos vértices  $s, t$  a distancia 3 de dicha arista. Como en  $Y_2$  existen a lo sumo cuatro vértices de valencia 5 y todo vértice de valencia máxima en  $X_2$  es adyacente a  $s$  o a  $t$ , se deduce, al ser  $\alpha = 2$ , que  $\delta(s) = \delta(t) = 4$  y que en  $X_2$  hay cuatro vértices de valencia 5, dos adyacentes a  $s$  y los otros dos adyacentes a  $t$ . Estos vértices son asimismo adyacentes a un vértice  $v$  de  $Y_2$  de valencia 4 situado a distancia 2 de dos vértices de  $Y_2$  de valencia 5, formándose de esta manera un cuadrado en  $G$ .

**$f_5(35) = 77$ .** Cualquier grafo  $G \in \mathcal{F}_{35}^5$  con 78 aristas cumple que  $\delta = 4$  y  $5 \leq \Delta \leq 6$ . De  $f_5(33) = 70$  se deduce que  $G$  no contiene vértices consecutivos de valencia 4, lo cual conduce, mediante la consideración de cualquier arista distinguida, a que  $\Delta = 5$ , pues en caso contrario el orden de  $G$  debe ser al menos 37.

En consecuencia, el grafo  $G$  contiene 19 vértices de valencia 4, cada uno adyacente solamente a vértices de valencia 5 y por tanto se verifica que

$$|\{uv \in E(G) : \delta(u) = 4, \delta(v) = 5\}| = 4n_4 = 76.$$

Existen en  $E(G)$  solamente dos aristas uniendo vértices de valencia 5. Consideramos  $xy$  una de ellas. El conjunto  $X_1 \cup Y_1$  contiene al menos siete vértices de valencia 4 y por tanto en  $X_2 \cup Y_2$  existen al menos 21 vértices de valencia 5, contradiciendo que  $n_5 = 16$ .

**$f_5(37) = 84$ .** Suponemos la existencia de un grafo  $G$  en el conjunto  $\mathcal{F}_{37}^5$  con 85 aristas. Evidentemente,  $\delta = 4$  y  $5 \leq \Delta \leq 6$ . A partir de las igualdades  $f_5(35) = 77$  y  $f_5(33) = 70$  se deduce que  $G$  no contiene vértices consecutivos de valencia 4 y que todo vértice de valencia 5 tiene en su entorno a lo sumo dos vértices de valencia 4.

Suponemos en primer lugar que  $\Delta = 6$ . En tal caso, consideramos cualquier arista distinguida  $xy$ . Como  $\nu(G) = 37$ , se verifica que todos los vértices de  $\{y\} \cup X_1$  tienen valencia 4 y que los del conjunto  $Y_1 \cup X_2$  tienen valencia 5. Esta única configuración posible de  $G$  contiene a lo sumo nueve vértices de valencia 4 contradiciendo que  $n_4 = n_6 + 15$ , como se deduce del sistema de ecuaciones (1.3). Por tanto  $\Delta = 5$ , pero la consideración de cualquier arista distinguida conduce a que el orden de  $G$  debe ser al menos 38.

⊗

Hemos comprobado que al eliminar vértices de las (3;6), (4;6) y (5;6)-jaulas se obtienen grafos extremales. La forma de eliminar los vértices no es arbitraria sino que observamos que existe un método óptimo que hace uso de los grafos que hemos construido en el Capítulo 3 para determinar las cantidades  $\nu_k(n)$ .

**Observación 6.3.4** *En la demostración del Teorema 6.3.3 hemos comprobado que en cada una de las (3;6), (4;6) y (5;6)-jaulas existe un conjunto de vértices de modo que al eliminarlos uno a uno y ordenadamente se obtienen grafos extremales. Cada uno de los tres conjuntos elegido cumple la siguiente propiedad: Los subgrafos inducidos por los primeros 6, 8, 10, 11, 12 y 13 vértices de cada uno de dichos conjuntos, cuando es posible, son exactamente los grafos que proporcionan los valores  $\nu_k(5)$  para  $0 \leq k \leq 5$ . El primero de estos grafos es el ciclo  $C_6$  y los demás están representados respectivamente en las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 para el caso particular  $n = 5$ . (Véase la Figura 6.8).*

Hemos comprobado que la (6;6)-jaula también contiene como subgrafos inducidos a estos seis grafos, lo que al considerar en el Teorema 6.3.3 el conjunto de vértices que ellos definen, nos lleva a pensar que las cotas inferiores de  $f_5(\nu)$  que proporcionamos son óptimas para  $49 \leq \nu \leq 61$ .

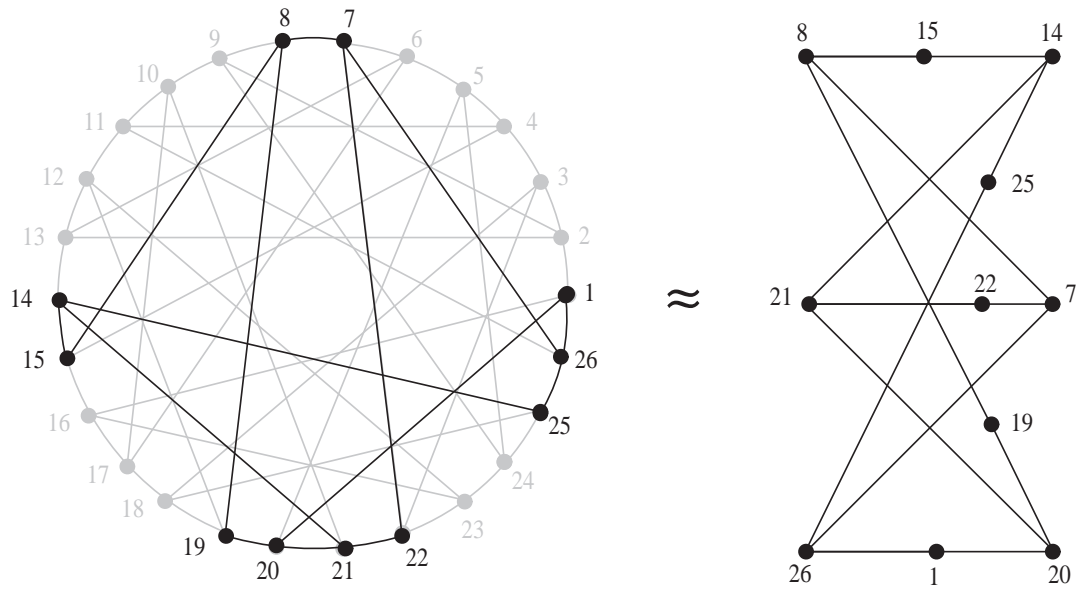


Figura 6.8: El subgrafo inducido por los vértices  $\{7, 8, 19, 22, 20, 21, 15, 14, 26, 1, 25\}$  de la  $(4;6)$ -jaula es el grafo homeomorfo a  $K_{3,3}$  con cintura 6 y mínimo orden.

Procedemos de manera similar para obtener valores de la función extremal cuando  $n = 6$ . Como no existen jaulas minimales de cintura 7 la cantidad de órdenes estudiados es más reducida.

**Teorema 6.3.5** *La función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  toma los valores:*

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	3	4	5	7	8	9
10	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25
20	27	29	31	33	36	37	39	41	43	44-47
30	47-49	48-52	50-54	52-56	55-58	57-61	59-63	61-65	62-68	64-70
40	67-73	69-75	71-77	73-80	75-82	77-85	80-87	82-90	84-92	87-95

*Demostración:* Todos los grafos que proporcionan los valores exactos y las cotas inferiores de  $f_6(\nu)$  salvo para  $\nu = 30$  se construyen mediante el Algoritmo 6.2.1 empezando con el ciclo  $C_7$ . Cuando  $\nu = 30$  este algoritmo produce un grafo con tamaño 46, mientras que en [77] se obtiene otro con una arista más.

Para  $\nu \leq 17$  los valores de la función extremal  $f_6(\nu)$  son un caso particular de los resultados exactos obtenidos en el Capítulo 3 y consecuentemente, es suficiente estudiar  $f_6(\nu)$  para  $\nu \geq 18$ . Veamos que cuando  $18 \leq \nu \leq 28$ , no es posible la existencia de grafos libres de ciclos  $\{C_3, C_4, C_5, C_6\}$  con más aristas que los construidos anteriormente.

$\mathbf{f_6(18) = 23}$ . Asumimos que existe un grafo  $G \in \mathcal{F}_{18}^6$  con tamaño 24. En tal caso,  $\delta = 2$  y  $3 \leq \Delta \leq 5$ . Como  $f_6(16) = 20$ ,  $f_6(15) = 18$  y  $f_6(13) = 15$ , el grafo  $G$  no contiene vértices consecutivos de valencia 2, cualquier vértice de valencia 3 es adyacente a lo sumo solamente a un vértice de valencia 2 y además cualquier vértice de valencia 4 es adyacente a lo sumo a tres vértices de valencia 2.

En primer lugar, notamos que la valencia máxima debe ser 3, porque en caso contrario la consideración de cualquier vértice  $x$  tal que  $\delta(x) = \Delta$  conduce a la desigualdad  $\nu(G) \geq 1 + |N_1(x)| + |N_2(x)| + |N_3(x)| \geq 19$ , como se observa en la Figura 6.9.

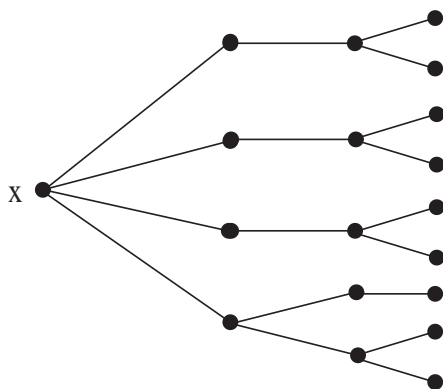


Figura 6.9: Ilustración de la ausencia de grafos en  $\mathcal{F}_{18}^6$  con tamaño 24 y  $\Delta \geq 4$ .

Por lo tanto, se verifica que  $\Delta = 3$ , siendo  $n_2 = 6$  y  $n_3 = 12$ , lo cual implica que todo vértice de valencia 3 es adyacente a exactamente un vértice de valencia 2. En consecuencia, para cada vértice  $x$  de valencia 3 de  $G$  se cumple



que  $\bigcup_{i=0}^3 |N_i(x)| = 17$  y por tanto existe un vértice  $s \in V(G)$  tal que  $d_G(x, s) = 4$ . Es decir,  $G$  contiene al subgrafo  $H$  (véase la Figura 6.10) donde denotamos por  $u_1, \dots, u_8$  los vértices de  $N_3(x)$  y siendo  $u_2$  y  $u_7$  los vértices de este conjunto con valencia 2. Evidentemente,  $\delta(s) = 2$ . El vértice  $u_6$  tiene valencia 3 y sin pérdida de generalidad se puede asumir que la arista  $u_6u_5 \in E(G)$ . Si  $u_6$  es adyacente a  $u_3$ , entonces  $\delta(u_3) = 3$  y  $g(G) \geq 7$  son incompatibles. En consecuencia la arista  $u_6u_1$  pertenece a  $E(G)$ , lo que a su vez implica la pertenencia de la arista  $u_1s$ . Pero, en tal caso, el vértice  $u_5$  no puede ser adyacente a un vértice de valencia 2.

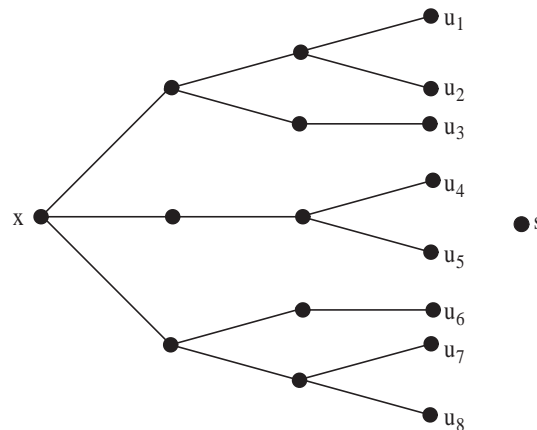


Figura 6.10: El subgrafo  $H$  mencionado en la prueba de  $f_6(18) = 23$ .

$\mathbf{f}_6(19) = 25$ . La existencia de un grafo con 19 vértices, 26 aristas y cintura al menos 7 contradice la desigualdad (1.10) para los valores de  $\delta$  y  $\Delta$  proporcionados por el Lema 6.3.1 y la desigualdad (1.2).

La prueba es similar cuando  $\nu \in \{20, 21, 24, 26, 27, 28\}$ .

$\mathbf{f}_6(22) = 31$ . No es posible construir un grafo  $G \in \mathcal{F}_{22}^6$  con 32 aristas, ya que en tal caso  $\delta(G) \geq 3$  y se contradice que  $\delta(G) \leq \bar{d}(G) = \frac{64}{22} < 3$ .

La demostración es análoga para  $\nu = 23$ .

$\mathbf{f}_6(25) = 37$ . La existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{25}^6$  con 38 aristas implica que  $\delta \geq 2$  y que  $\Delta \geq 4$ . Pero de la igualdad  $f_6(23) = 33$  se deduce que  $n_2 \leq 1$ . Considerando los entornos de cualquier vértice  $x$  de máxima valencia se tiene que  $\nu(G) \geq 1 + |N_1(x)| + |N_2(x)| + |N_3(x)| \geq 26$ .

De esta manera se confirma que las cotas inferiores de  $f_6(\nu)$  proporcionadas en [77] para  $\nu \leq 28$  con  $\nu \neq 26$  eran óptimas.

⊗

Sabemos por el Teorema 3.4.1 que las  $(r; g)$ -jaulas minimales son los únicos grafos del conjunto extremal  $EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$ . Como consecuencia del Teorema 6.3.5 se prueba que la  $(3; 7)$ -jaula de McGee también es extremal aunque no es minimal.

### Corolario 6.3.6

$$EX(24; \{C_3, C_4, C_5, C_6\}) = \{(3; 7)\text{-jaula de McGee}\}$$

*Demostración:* Cualquier grafo  $G$  del conjunto  $EX(24; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  es 3-regular, pues según el Teorema 6.3.5, se cumple que  $ex(24; \{C_3, C_4, C_5, C_6\}) = 36$ , y por tanto el grafo  $G$  tiene valencia media 3, y además, de acuerdo al Lema 6.3.1, se cumple que  $\delta(G) \geq e(G) - ex(23; \{C_3, C_4, C_5, C_6\}) = 36 - 33 = 3$ .

De esta forma se prueba que  $G$  es necesariamente una  $(3; 7)$ -jaula. Una construcción de ella aparece por primera vez en el año 1960 en el artículo [69] de W.F. McGee. Su unicidad es probada por W.T. Tutte [80] en 1966.

⊗

**Observación 6.3.7** *No solamente la  $(3;7)$ -jaula (véase la Figura 6.11) es el único grafo de  $EX(24; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  sino que incluso, según el Teorema 6.3.5, los grafos que se obtienen al eliminar de ella de uno en uno y ordenadamente los vértices del conjunto*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 6, 23, 24, 16, 17, 11, 18, 7, 19, 20\}$$

*pertenecen a cada una de las familias extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  para  $7 \leq \nu \leq 23$ .*

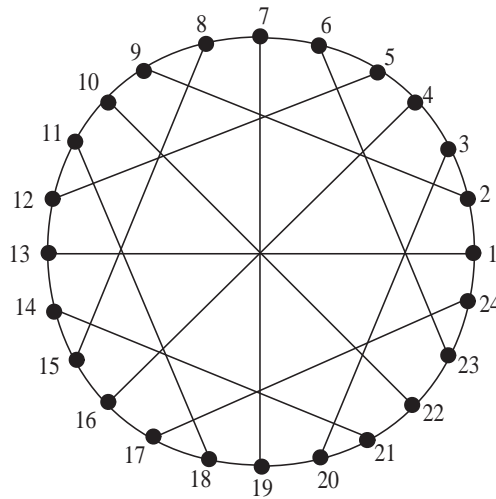


Figura 6.11: Al eliminar vértices de la  $(3;7)$ -jaula se obtienen grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, C_5, C_6\})$  para  $7 \leq \nu \leq 23$ .

*Hacemos notar que al igual que ocurre con las  $(r;6)$ -jaulas (véase la Observación 6.3.4), los subgrafos inducidos por los primeros 7, 10, 12, 14, 16 y 17 vértices del conjunto  $S$  son exactamente los grafos que proporcionan las cantidades  $\nu_k(6)$  para  $0 \leq k \leq 5$ , y que corresponden respectivamente al ciclo  $C_7$  y a los grafos de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.6 para el caso particular  $n = 6$ .*

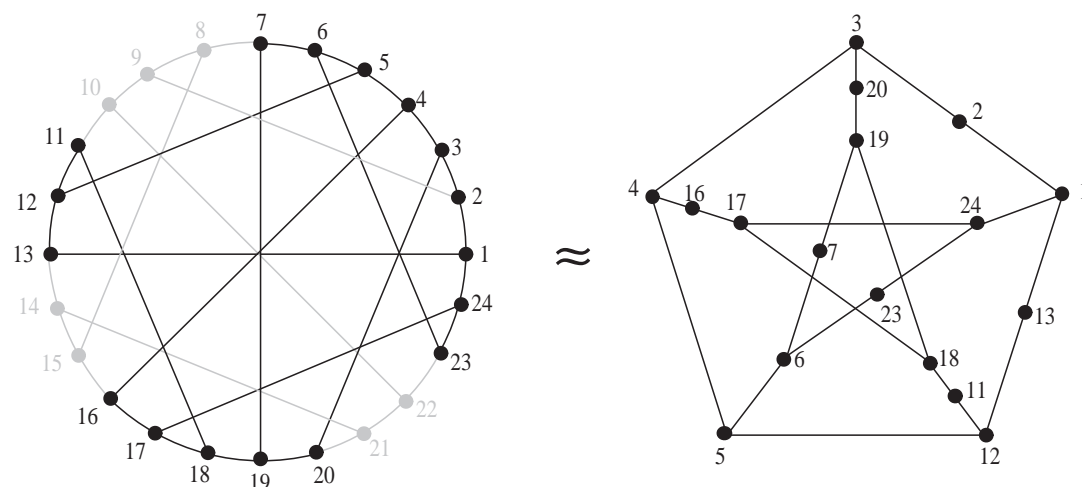


Figura 6.12: La  $(3; 7)$ -jaula contiene como subgrafo inducido al grafo de la Figura 3.6.

Aprovechando la existencia de jaulas minimales con cintura 8, procedemos de manera análoga para la determinación de valores exactos y de cotas de la función extremal cuando  $n = 7$ .

**Teorema 6.3.8** *La función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_7\})$  toma los valores:*

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	3	4	5	6	8	9
10	10	12	13	14	16	18	19	20	22	24
20	25	27	29	30	32	34	36	38	40	42
30	45	46	47	49	51	53	55	56-58	58-61	60-63
40	62-65	64-67	65-69	67-71	69-73	71-76	74-78	76-80	78-82	80-84
50	82-87	84-89	87-91	89-93	92-96	94-98	96-100	98-103	100-105	103-107
60	105-110	108-112	110-115	112-117	115-119	118-122	120-124	122-127	125-129	128-132
70	130-134	133-137	136-139	138-142	141-144	144-147	147-149	150-152	153-154	156-157
80	160									

*Demostración:* En primer lugar, detallamos el método que hemos seguido para construir tanto los grafos extremales como los que proporcionan las cotas inferiores enunciadas.

El Teorema 3.4.1 confirma que la (3; 8) y la (4; 8)-jaulas son grafos extremales, lo que permite afirmar que  $f_7(30) = 45$  y que  $f_7(80) = 160$ .

Eliminando de la (3; 8)-jaula (véase la Figura 6.13) uno a uno los vértices del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 10, 11, 12, 13, 14, 20\}$  obtenemos grafos que proporcionan, como veremos a continuación, el valor exacto de  $f_7(\nu)$  para  $8 \leq \nu \leq 29$ .

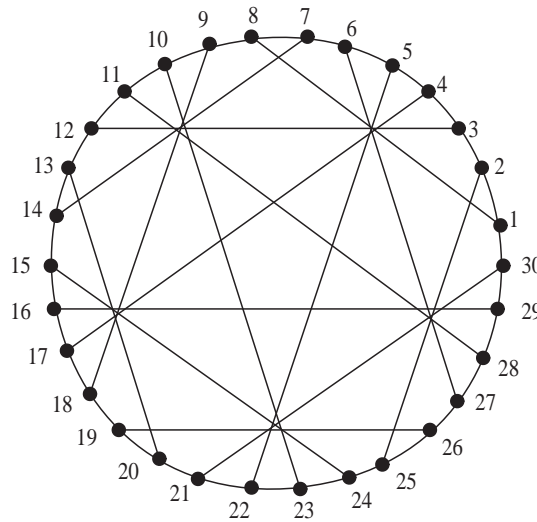


Figura 6.13: Al eliminar vértices de la (3;8)-jaula se encuentran grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_7\})$  para  $8 \leq \nu \leq 29$ .

De manera análoga, eliminando consecutivamente los vértices  $\{1, 28, 37, 40, 41, 44, 51, 72, 39, 34, 19, 3, 78, 53, 21, 30, 7, 74, 57, 42, 46, 8, 60, 47, 61, 16, 2, 58, 9, 80, 18, 33, 38, 63, 10, 31, 12, 70\}$  de la (4; 8)-jaula (véase la Tabla 6.2) hemos construido grafos que proporcionan cotas inferiores de  $f_7(\nu)$  para órdenes  $42 \leq \nu \leq 79$ .

Cuando  $31 \leq \nu \leq 41$  los valores exactos y las cotas inferiores enunciadas de  $f_7(\nu)$  se obtienen mediante el Algoritmo 6.2.1 empezando con el ciclo  $C_8$ . Para  $\nu \leq 34$  y  $\nu = 37, 38$  estas cotas inferiores son las mismas que las del artículo [77].

Tabla 6.2: Lista de adyacencia de la  $(4; 8)$ -jaula.

1 → {28, 55, 71, 72}	2 → {28, 58, 68, 75}	3 → {28, 61, 65, 78}	4 → {29, 62, 66, 73}
5 → {29, 56, 63, 76}	6 → {29, 59, 69, 79}	7 → {30, 57, 64, 74}	8 → {30, 60, 70, 77}
9 → {30, 54, 67, 80}	10 → {31, 59, 67, 72}	11 → {31, 62, 64, 75}	12 → {31, 56, 70, 78}
13 → {32, 54, 65, 73}	14 → {32, 57, 71, 76}	15 → {32, 60, 68, 79}	16 → {33, 61, 69, 74}
17 → {33, 55, 66, 77}	18 → {33, 58, 63, 80}	19 → {34, 60, 63, 72}	20 → {34, 54, 69, 75}
21 → {34, 57, 66, 78}	22 → {35, 58, 70, 73}	23 → {35, 61, 67, 76}	24 → {35, 55, 64, 79}
25 → {36, 56, 68, 74}	26 → {36, 59, 65, 77}	27 → {36, 62, 71, 80}	28 → {1, 2, 3, 37}
29 → {4, 5, 6, 37}	30 → {7, 8, 9, 37}	31 → {10, 11, 12, 38}	32 → {13, 14, 15, 38}
33 → {16, 17, 18, 38}	34 → {19, 20, 21, 39}	35 → {22, 23, 24, 39}	36 → {25, 26, 27, 39}
37 → {28, 29, 30, 40}	38 → {31, 32, 33, 40}	39 → {34, 35, 36, 40}	40 → {37, 38, 39, 41}
41 → {40, 42, 43, 44}	42 → {41, 45, 46, 47}	43 → {41, 48, 49, 50}	44 → {41, 51, 52, 53}
45 → {42, 54, 55, 56}	46 → {42, 57, 58, 59}	47 → {42, 60, 61, 62}	48 → {43, 63, 64, 65}
49 → {43, 66, 67, 68}	50 → {43, 69, 70, 71}	51 → {44, 72, 73, 74}	52 → {44, 75, 76, 77}
53 → {44, 78, 79, 80}	54 → {9, 13, 20, 45}	55 → {1, 17, 24, 45}	56 → {5, 12, 25, 45}
57 → {7, 14, 21, 46}	58 → {2, 18, 22, 46}	59 → {6, 10, 26, 46}	60 → {8, 15, 19, 47}
61 → {3, 16, 23, 47}	62 → {4, 11, 27, 47}	63 → {5, 18, 19, 48}	64 → {7, 11, 24, 48}
65 → {3, 13, 26, 48}	66 → {4, 17, 21, 49}	67 → {9, 10, 23, 49}	68 → {2, 15, 25, 49}
69 → {6, 16, 20, 50}	70 → {8, 12, 22, 50}	71 → {1, 14, 27, 50}	72 → {1, 10, 19, 51}
73 → {4, 13, 22, 51}	74 → {7, 16, 25, 51}	75 → {2, 11, 20, 52}	76 → {5, 14, 23, 52}
77 → {8, 17, 26, 52}	78 → {3, 12, 21, 53}	79 → {6, 15, 24, 53}	80 → {9, 18, 27, 53}

Cuando  $\nu \leq 19$  los valores proporcionados de la función extremal  $f_7(\nu)$  son un caso particular de los resultados exactos obtenidos en el Capítulo 3 y consecuentemente, es suficiente estudiar  $f_7(\nu)$  para  $\nu \geq 20$ .

Veamos que cuando  $20 \leq \nu \leq 36$  los tamaños de los grafos cuya construcción acabamos de describir, coinciden realmente con el valor exacto de la función extremal  $f_7(\nu)$ .

$\mathbf{f}_7(20) = 25$ . Asumimos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{20}^7$  con 26 aristas. En este caso,  $\delta = 2$  y  $\Delta \geq 3$ . A partir de los valores conocidos  $f_7(18) = 22$  y  $f_7(17) = 20$ , se deduce que dos vértices de  $G$  con valencia 2 no pueden ser adyacentes y que cada vértice de valencia 3 tiene en su entorno a lo sumo un único vértice de valencia 2.

Si suponemos  $\Delta \geq 4$ , la consideración de cualquier arista distinguida  $xy$  permite obtener que  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |X_3| + |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| \geq 21$  según se aprecia en la Figura 6.14.

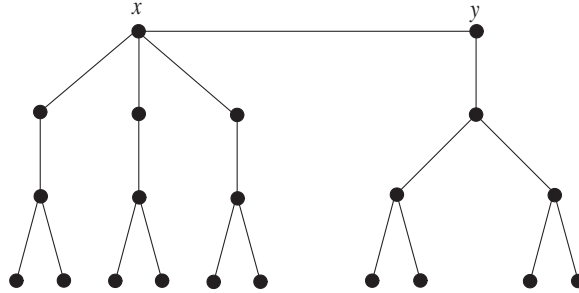


Figura 6.14: Ilustración de la ausencia en  $\mathcal{F}_{20}^7$  de un grafo con 26 aristas y  $\Delta \geq 4$ .

En consecuencia,  $\Delta = 3$  y  $n_2 = 8$ . Pero entonces el grafo  $G$  debe contener al menos dieciseis vértices de valencia 3, pues cada uno de los ocho vértices de valencia 2 de  $V(G)$  es adyacente a dos vértices diferentes de valencia 3.

**$f_7(21) = 27$ .** Inmediata consecuencia del Lema 6.3.1 y de las desigualdades (1.2) y (1.10).

La demostración es análoga cuando  $\nu \in \{22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36\}$ .

**$f_7(23) = 30$ .** Suponemos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{23}^7$  con 31 aristas. En tal caso,  $\delta = 2$  y  $\Delta \geq 3$ . Como son conocidos los valores  $f_7(21) = 27$ ,  $f_7(20) = 25$  y  $f_7(18) = 22$ , deducimos que en  $G$  no existen vértices consecutivos de valencia 2, que cada vértice de valencia 3 es adyacente a lo sumo a un único vértice de valencia 2 y que cada vértice de valencia 4 es adyacente a lo sumo a tres vértices de valencia 2.

Si consideramos que  $\Delta \geq 4$ , entonces para cualquier arista distinguida  $xy$  se cumple que  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |X_3| + |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| \geq 24$ , según puede

apreciarse en la Figura 6.15.

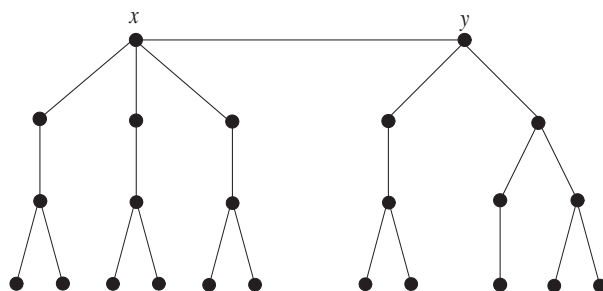


Figura 6.15: Ilustración de la ausencia en  $\mathcal{F}_{23}^7$  de un grafo con 31 aristas y  $\Delta \geq 4$ .

Análogamente, para no contradecir el orden de  $G$ , ningún vértice de valencia 3 puede solamente ser adyacente a vértices de valencia 3.

Concluimos entonces que  $\Delta = 3$  y que cada vértice de valencia 3 es adyacente a exactamente un único vértice de valencia 2. Pero la igualdad  $n_2 = 7$  implica que  $G$  puede tener solamente catorce vértices de valencia 3, contradiciendo así que  $n_3 = 16$ .

**$f_7(31) = 46$ .** La prueba es inmediata teniendo en cuenta el crecimiento estricto de la función extremal  $f_7(\nu)$  (véase (2.1)) y la desigualdad (1.11).

**$f_7(32) = 47$ .** Asumimos la existencia de un grafo  $G \in \mathcal{F}_{32}^7$  con tamaño 48. En tal caso  $2 \leq \delta \leq 3$ . Pero  $\delta \neq 3$  porque, según demuestran N. Biggs y T. Ito en [16], para  $r \geq 3$  no existen grafos  $r$ -regulares con cintura par  $g \geq 8$  y orden  $\nu_0(r, g) + 2$ .

Por lo tanto  $\delta = 2$ . Como  $f_7(29) = 42$ , la existencia de dos vértices consecutivos de valencia 2 implica la no existencia de más vértices de valencia 2. Además, como  $f_7(28) = 40$ ,  $f_7(27) = 38$ ,  $f_7(26) = 36$ ,  $f_7(25) = 34$ ,  $f_7(24) = 32$  y  $f_7(23) = 30$ , al eliminar  $p$  vértices de  $G$ , con  $3 \leq p \leq 9$ , se deben eliminar al menos  $2p$  aristas. Esto implica que  $G$  tiene pocos vértices de valencia 2. Con esta



condición y teniendo en cuenta el orden y la cintura de  $G$ , se obtiene que  $\Delta = 4$  y que cada vértice de valencia 4 debe ser adyacente a exactamente dos vértices de valencia 2 y a dos vértices de valencia 3.

Como además  $n_2 = n_4$ , todo vértice de valencia 2 tiene dos vértices de valencia 4 en su entorno. Teniendo en cuenta las propiedades del grafo  $G$ , según observamos en la Figura 6.16, cualquier arista distinguida  $xy$  permite obtener que  $\nu(G) \geq 2 + |X_1| + |X_2| + |X_3| + |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| \geq 33$ .

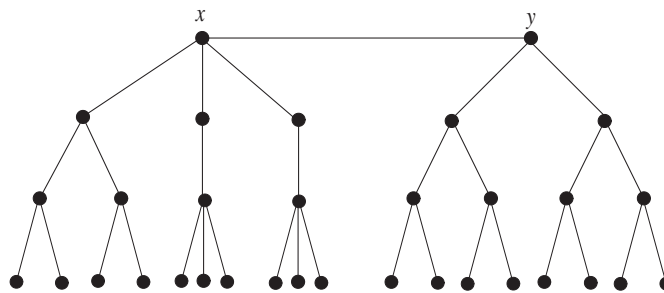


Figura 6.16: Ilustración de la ausencia en  $\mathcal{F}_{32}^7$  de un grafo no regular con 48 aristas y  $\Delta = 4$ .

⊗

Hemos comprobado que al eliminar vértices de las (3; 7), (3; 8) y (4; 8)-jaulas se obtienen grafos extremales. La forma de eliminar los vértices no es arbitraria sino que observamos que hace uso nuevamente de los grafos que hemos construido en el Capítulo 3 para determinar las cantidades  $\nu_k(n)$ .

**Observación 6.3.9** *Al igual que ocurre con las jaulas estudiadas de cintura 6 y 7, hemos comprobado que las (3; 8) y (4; 8)-jaulas contienen como subgrafos inducidos a los grafos de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 correspondientes a  $n = 7$ . (Véase la Figura 6.17).*

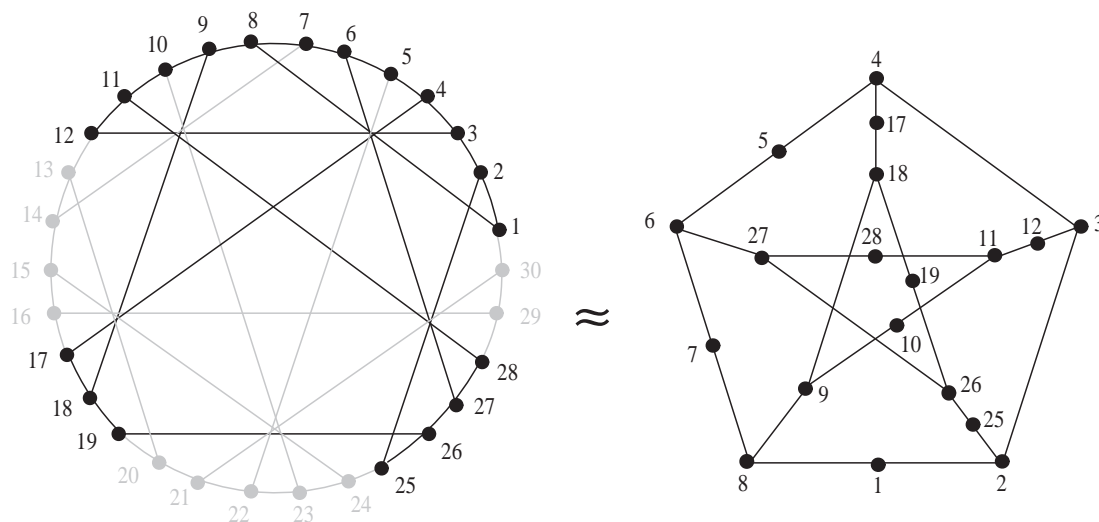


Figura 6.17: La  $(3;8)$ -jaula contiene como subgrafo inducido al grafo de la Figura 3.5 correspondiente a  $n = 7$ .

*En el caso de la  $(3;8)$ -jaula, la eliminación ordenada de los vértices de todos estos subgrafos conduce a grafos extremales. Esto nos hace pensar que las cotas proporcionadas de  $f_7(\nu)$  para  $61 \leq \nu \leq 79$  son óptimas, pues se obtienen aplicando el mismo procedimiento a la  $(4;8)$ -jaula.*

De manera similar, hemos verificado que la  $(3;12)$ -jaula también contiene a los grafos de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 asociados a  $n = 11$  y ello nos permite encontrar unas cotas inferiores de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{11}\})$ . Creemos que estas cotas son óptimas, pues se obtienen por el mismo procedimiento que en los casos  $n \in \{5, 6, 7\}$  para los cuales así ocurre, según hemos detallado en las Observaciones 6.3.4, 6.3.7 y 6.3.9.

**Teorema 6.3.10** *La función  $\text{ex}(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{11}\})$  toma los valores:*

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20
20	21	22	24	25	27	28	29	30	32	33
30	34	36	37	38-39	40	42	43	44	45-46	46-48
40	48-49	49-51	50-52	52-54	53-55	55-57	56-58	58-59	59-61	60-62
50	62-64	63-65	65-67	66-68	68-70	70-72	71-73	72-75	74-76	75-78
60	76-79	78-81	80-82	81-84	83-85	84-87	85-89	87-90	89-92	90-93
70	92-95	94-96	95-98	96-100	98-101	99-103	101-104	102-106	104-108	106-109
80	107-111	109-113	110-114	112-116	114-117	115-119	117-121	118-122	120-124	122-126
90	124-127	126-129	127-131	128-132	130-134	132-136	133-137	135-139	137-141	138-142
100	140-144	142-146	144-147	145-149	147-151	148-152	150-154	152-156	154-157	156-159
110	157-161	159-163	161-164	163-166	165-168	166-169	168-171	170-173	172-175	174-176
120	176-178	178-180	180-182	182-183	184-185	186-187	189	190	191-192	192-194
130	193-195	195-197								

*Demostración:* Para  $\nu \leq 37$ , los valores enunciados de la función  $f_{11}(\nu)$  son un caso particular de los resultados exactos obtenidos en el Capítulo 3.

De forma análoga a los casos anteriores aprovechamos la existencia de la  $(3; 12)$ -jaula de Tutte con orden 126, que sabemos por el Teorema 3.4.1 que es extremal, para construir grafos que proporcionan cotas inferiores de la función  $f_{11}(\nu)$  para  $38 \leq \nu \leq 125$ .

Concretamente, las cotas correspondientes a  $102 \leq \nu \leq 125$  se encuentran al eliminar de dicha jaula consecutivamente los vértices del conjunto  $\{125, 122, 116, 104, 80, 32, 47, 88, 108, 118, 123, 126, 121, 114, 100, 72, 16, 79, 29, 44, 86, 107, 13, 71\}$ , (ver Figura 6.18). Queremos señalar que el subgrafo inducido por estos vértices es el grafo homeomorfo al grafo completo  $K_{3,3}$  representado en la Figura 3.3 para  $n = 11$ . De manera análoga los subgrafos inducidos por los primeros 12, 17 y 22 vértices de dicho conjunto son el ciclo  $C_{12}$  y los grafos de las Figuras 3.1 y 3.2, respectivamente.

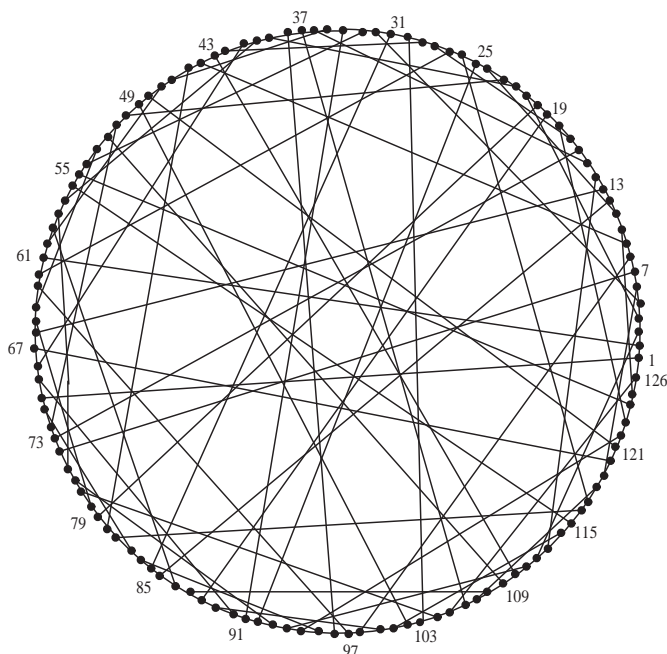


Figura 6.18: Al eliminar vértices de la  $(3;12)$ -jaula de Tutte se obtienen grafos que proporcionan cotas inferiores de  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{11}\})$ .

Para obtener las cotas enunciadas de la función  $f_{11}(\nu)$  para  $38 \leq \nu \leq 101$  hemos considerado los conjuntos  $S_1 = \{125, 122, 116, 104, 80, 32, 47, 88, 108, 118, 123, 126, 121, 114, 100, 72, 16, 31, 37, 83, 106, 117, 99, 69, 9, 10, 46, 87, 15, 39, 84, 27, 28, 78, 103, 71, 13, 38, 49, 23, 50, 89, 48, 76, 24, 102, 115, 124, 109, 119, 51, 90, 60, 11, 70, 52, 12, 40, 19, 59, 94, 74, 101, 111, 120, 20, 45, 57, 93, 58, 14, 75, 55, 21, 61, 22, 33, 4, 34, 81, 105, 42, 7, 41, 85, 107, 3, 66\}$  y  $S_2 = \{30, 35, 82, 36, 8, 68, 7, 42, 21, 55, 92, 56, 75, 22, 33, 81, 105, 61, 95, 62, 29, 79, 98, 67, 5, 113, 97, 66, 4, 65, 2, 1, 110, 91, 53, 6, 26, 34, 63, 25, 77, 85, 41, 96, 112, 18, 64, 44, 86, 107, 3, 43, 54, 17, 73, 117, 118, 123, 120, 119, 124, 126, 125, 121, 102, 115, 101, 122, 116, 103, 104, 12, 11, 70, 114, 99, 9, 69, 10, 14, 13, 71, 100, 15, 72, 16\}$ . Al eliminar consecutivamente a la  $(3;12)$ -jaula (véase la Figura 6.18) los vértices de dichos conjuntos obtenemos grafos, todos ellos con cintura 12, y cuyo tamaño y orden permiten acotar inferiormente la función  $f_{11}(\nu)$ .

En particular, señalamos que los subgrafos inducidos por los primeros 28, 31 y 35 vértices de  $S_1$  son respectivamente los grafos de las Figuras 3.4, 3.5 y 3.8. Asimismo, el subgrafo inducido por los primeros 55 vértices de  $S_2$  es el grafo de la Figura 3.10. Recordamos que estos tres últimos grafos son exactamente subdivisiones de las jaulas de Petersen con  $\nu_5(11)$  vértices, de la de Heawood con  $\nu_7(11)$  y de la de Tutte-Coxeter. Esto nos hace pensar que las cotas proporcionadas pueden ser óptimas ya que este mismo procedimiento conduce a grafos extremales en todos los casos estudiados, como se detalla en las Observaciones 6.3.4, 6.3.7 y 6.3.9.

Para  $\nu = 127$  el carácter estrictamente creciente de la función extremal (véase (2.1)) y la desigualdad (1.11) determinan que  $f_{11}(127) = 190$ .

⊗

## 6.4 Relación entre los grafos extremales y las $(\mathbf{D}; \mathbf{g})$ -jaulas.

Sabemos que para  $n = 3$  los grafos extremales son los grafos bipartitos completos con ambas clases lo más homogéneas posible y consecuentemente se tratan o bien de grafos regulares o bien de grafos con solamente dos valencias distintas y consecutivas. Nos cuestionamos entonces la existencia de alguna posible relación entre las  $(D; g)$ -jaulas y los grafos extremales.

Hemos probado en el Teorema 3.4.1 que existe una estrecha conexión entre los grafos extremales que estamos considerando y las jaulas, y muy en especial con las jaulas minimales, ya que de hecho se cumple que

$$EX(\nu_0(r, g); \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\}) = \{(r; g)\text{-jaulas minimales}\}.$$

Pero para la mayoría de valores  $n \geq 4$  y  $\nu \geq n + 1$  dados, la valencia media de cualquier grafo de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  es una cantidad no entera y por tanto, no existe ningún grafo regular en tal conjunto.

Esto nos induce a preguntarnos sobre la también posible relación entre los grafos de alguna de las familias extremales  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_{g-1}\})$  y los grafos con mínimo orden, cintura  $g$  y conjunto de valencias dado  $D$ . Según hemos comentado en los Preliminares de esta memoria, estos grafos son denominados  $(D; g)$ -jaulas y su orden es denotado por  $\nu(D, g)$ . En particular, y por similitud a las jaulas, a las  $(D; g)$ -jaulas cuyo orden coincide con la cantidad

$$\nu_0(D, g) = \begin{cases} 1 + \Delta \sum_{i=0}^{\frac{g-3}{2}} (\delta - 1)^i & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 1 + \sum_{i=0}^{\frac{g-4}{2}} \Delta (\delta - 1)^i + (\delta - 1)^{\frac{g-2}{2}} & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

se les denominada  $(D; g)$ -jaulas minimales. Cuando el conjunto  $D$  consta de dos elementos, es decir,  $D = \{r, m\}$ , siendo  $2 \leq r < m$ , a las  $(D; g)$ -jaulas se les llama de manera más específica jaulas bi-regulares. En 1981 se prueba en [27] que cuando  $r = 2$  las jaulas bi-regulares son minimales, y que por tanto, para todo  $m \geq 3$  y  $g \geq 3$  se verifica que

$$\nu(\{2, m\}, g) = \begin{cases} \frac{m(g-2) + 4}{2} & \text{si } g \text{ es par;} \\ \frac{m(g-1) + 2}{2} & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases}$$

De esta igualdad se deduce que los grafos con orden  $\nu(\{2, m\}, g)$ , cintura  $g$  y formados por dos vértices de valencia máxima unidos por  $m$  caminos disjuntos son  $(\{2, m\}; g)$ -jaulas minimales. Analizamos su relación con los grafos extremales.

Para cualquier  $n \geq 4$  se verifica que

$$\nu(\{2, 3\}, n + 1) = \nu_1(n) = \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil$$

y por tanto, la  $(\{2, 3\}; n + 1)$ -jaula representada en la Figura 3.1 pertenece a la familia  $EX(\nu_1(n); \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para todo  $n \geq 4$ . Como

$$\nu(\{2, 4\}, n + 1) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 2n + 1 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

para todo  $n \geq 5$  la  $(\{2, 4\}; n + 1)$ -jaula de la Figura 4.6 es un grafo extremal según se prueba en el Teorema 4.2.7. De manera similar la  $(\{2, 5\}; n + 1)$ -jaula de la Figura 4.13 tiene exceso 3 y orden

$$\nu(\{2, 5\}, n + 1) = \begin{cases} \frac{5n - 1}{2} & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \frac{5n + 2}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

y por lo tanto solamente es extremal cuando su orden es estrictamente menor que  $\nu_4(n)$ , es decir, para valores  $n \geq 7$ ,  $n \notin \{8, 10\}$ . Por el contrario, ninguna  $(\{2, 6\}; n + 1)$ -jaula es extremal, pues tienen exceso 4 y su orden

$$\nu(\{2, 6\}, n + 1) = \begin{cases} 3n - 1 & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

supera estrictamente la cantidad  $\nu_5(n)$ , lo que indica que con dicho orden los grafos extremales tienen al menos 5 aristas más que vértices.

Por lo tanto, contrariamente a lo que ocurre con las  $(r; g)$ -jaulas minimales, el comportamiento minimal de una  $(D; g)$ -jaula no garantiza su carácter extremal. Podemos ver que lo mismo ocurre con las  $(D; g)$ -jaulas que no son minimales. Previamente, recordamos que en [88], para  $2 \leq r < m$  siendo  $m - 1$  potencia de un número primo, se prueba que

$$\nu(\{r, m\}, 6) = 2(rm - m + 1). \quad (6.1)$$

y, para tales valores de  $r$  y  $m$ , eliminando vértices de las  $(m; 6)$ -jaulas, se construye en [6] una  $(\{r; m\}, 6)$ -jaula con orden  $2(rm - m + 1)$  y tamaño  $mr^2 - r^2 + 2r - m$  (véase la Figura 6.19).

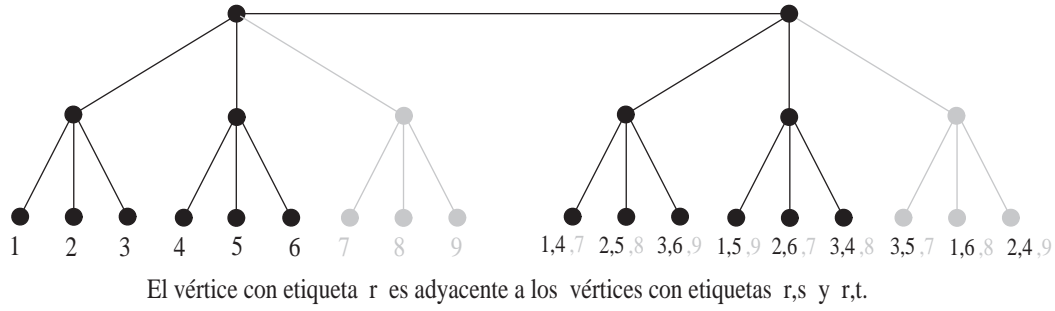


Figura 6.19: Jaula bi-regular obtenida al eliminar vértices de la  $(4; 6)$ -jaula.

Por lo tanto, esta  $(\{3, 4\}; 6)$ -jaula tiene orden 18 y tamaño 29, y por tanto, según el Teorema 6.3.3, es un grafo de la familia  $EX(18; \{C_3, C_4, C_5\})$ . Análogamente, la  $(\{4, 5\}; 6)$ -jaula tiene orden 32 y tamaño 67, lo que también permite confirmar su pertenencia a  $EX(32; \{C_3, C_4, C_5\})$ .

De igual manera, la  $(\{3, 5\}; 6)$ -jaula construida en [6] tiene 22 vértices y 37 aristas, y es fácil probar, con una demostración similar a las de los Teoremas 6.3.3, 6.3.5 y 6.3.8, que no es posible construir un grafo con cintura 6, orden 22, tamaño  $ex(22; \{C_3, C_4, C_5\}) = 39$  y de modo que todos sus vértices tengan valencias 3 ó 5. Por lo tanto, a diferencia de las dos jaulas bi-regulares anteriores, ninguna  $(\{3, 5\}; 6)$ -jaula pertenece al conjunto extremal  $EX(22; \{C_3, C_4, C_5\})$ .

La familia de jaulas bi-regulares construidas en [6] permite deducir que

$$ex(2(rm - m + 1); \{C_3, C_4, C_5\}) \geq mr^2 - r^2 + 2r - m$$

para todo  $2 \leq r < m$  y  $m - 1$  potencia de primo, pero los ejemplos previos parecen señalar que esta cota tiene especial interés cuando  $m = r + 1$ , es decir, cuando las jaulas bi-regulares tienen dos valencias consecutivas. En tal caso, se obtiene la siguiente cota inferior de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, C_5\})$ .

**Proposición 6.4.1** *Para todo  $r$  potencia de un número primo se verifica que*

$$ex(2r^2; \{C_3, C_4, C_5\}) \geq r^3 + r - 1.$$



Nótese que los ejemplos anteriores muestran que esta desigualdad es en realidad una igualdad en los casos  $r \in \{2, 3, 4\}$ .

Finalmente, señalamos que estudiar el comportamiento extremal de una  $(D; g)$ -jaula es un problema complicado, pues mientras que las  $(r; g)$ -jaulas tienen todas el mismo tamaño  $\frac{r \nu(r, g)}{2}$ , no ocurre lo mismo con las  $(D; g)$ -jaulas.

Por ejemplo, cuando  $g$  es impar y  $m$  es par son  $(\{2, m\}; g)$ -jaulas tanto el grafo  $H_1$  formado por  $\frac{m}{2}$  ciclos de longitud  $g$  compartiendo un único vértice, como el grafo  $H_2$  formado por dos vértices de valencia máxima unidos por  $m - 1$  caminos disjuntos de longitud  $\frac{g+1}{2}$  y un camino de longitud  $\frac{g-1}{2}$  (véanse [7] y la Figura 6.20). Mientras que  $H_1$  tiene un único vértice de valencia máxima, el grafo  $H_2$  tiene dos, y por lo tanto la cantidad de aristas de ambas  $(\{2, m\}; g)$ -jaulas es diferente.

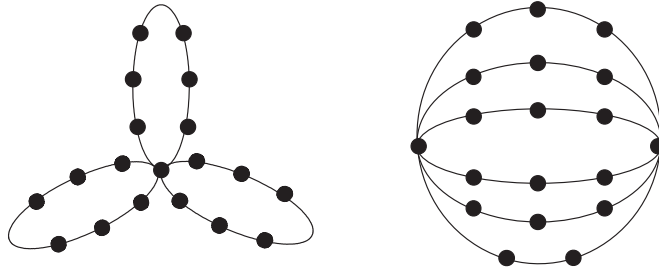


Figura 6.20: Dos  $(\{2, 6\}; 7)$ -jaulas con orden 19 y tamaños 21 y 23 respectivamente.

Por analogía a las  $(r; g)$ -jaulas  $G$  para las cuales su carácter extremal depende de la diferencia  $\nu(G) - \nu_0(r, g)$ , según hemos probado en el Teorema 3.4.1 y comentado en la Observación 3.4.2, creemos que en general el comportamiento extremal de una  $(D; g)$ -jaula  $G$  depende de lo distante o cercano que esté su orden  $\nu(D; g)$  de la cota  $\nu_0(\bar{d}(G), g)$ .

No obstante, queremos señalar que todos los grafos extremales que hemos obtenido en esta memoria tienen a lo sumo tres valencias diferentes, resultado que

confirma la idea de que la distribución de las valencias de los grafos extremales no es dispersa, según se sugiere en [83].

## 6.5 Conclusiones y problemas abiertos

Hasta ahora la construcción de grafos con gran número de aristas se había hecho mediante algoritmos que no relacionan entre sí los grafos obtenidos para órdenes diferentes. Para  $n$  dado, nosotros hemos comprobado, que en bastantes ocasiones, el valor de la función extremal  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para cada  $\nu$  está influenciado por su comportamiento en valores cercanos a  $\nu$ . Nuestro algoritmo contempla esta idea, aunque este proceso iterativo necesita ser mejorado. Nos queda pendiente abordar esta mejora con el fin de agilizar el tiempo de respuesta.

Por otra parte, los grafos extremales obtenidos en las pruebas de los Teoremas de este capítulo proporcionan una fuente importante de esqueletos, de modo que creemos que los grafos de  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para  $n > 7$  pueden ser subdivisiones de los grafos anteriores para algunos valores de  $\nu$ .

Además, basándonos en que así ocurre en todos los casos que hemos estudiado, creemos que las  $(r; g)$ -jaulas minimales contienen como subgrafos inducidos a los grafos de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 y que eliminando los vértices de estos subgrafos se obtienen grafos de los conjuntos  $EX(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$  para  $\nu_0(r, g) - (3n - 2) \leq \nu < \nu_0(r, g)$ .

# Índice

- $C_n$ , 5
- $D(G)$ , 5
- $E(G)$ , 2
- $EX_k(n)$ , 37
- $G^\circ - C$ , 116
- $G - e$ , 8
- $G - v$ , 8
- $G[F]$ , 8
- $G[U]$ , 7
- $G_k(n)$ , 25
- $I_k(n)$ , 35
- $K_p$ , 6
- $K_{n_1, \dots, n_r}$ , 6
- $N_G(u)$ , 3
- $N_i(u)$ , 5
- $V(G)$ , 2
- $\Delta(G)$ ,  $\Delta$ , 3
- $\bar{d}(G)$ ,  $\bar{d}$ , 3
- $\delta(G)$ ,  $\delta$ , 3
- $\delta_G(u)$ ,  $\delta(u)$ , 3
- $\kappa(G)$ , 9
- $\lambda(G)$ , 10
- $\mathcal{E}_k$ , 25
- $\nu(D, g)$ , 16
- $\nu(G)$ , 3
- $\nu_k(n)$ , 27
- $|\cdot|$ , 3
- $\tilde{G}$ , 23
- $d_G(u, v)$ ,  $d(u, v)$ , 5
- $e(G)$ , 3
- $g(G)$ ,  $g$ , 5
- $g(\nu, k)$ , 40
- $g(k)$ , 40
- $g_{max_k}(n)$ , 167
- $g_{max}(\nu, n)$ , 156
- $n_h(G)$ ,  $n_h$ , 4
- árbol, 6
  - arista, 2
    - adyacentes, 2
    - distinguida, 196
    - incidente, 2
  - aristas
    - múltiples, 2
- camino, 4
  - longitud de un, 4
  - vértice final de un, 4
  - vértice interno de un, 4

- caminos disjuntos, 4
- ciclo, 4
- cintura, 5
- clases de vértices, 6
- conjunto
  - cardinal, 3
- contracción
  - elemental, 9
- diámetro, 5
- distancia, 5
- exceso
  - de un grafo, 22
- grafo, 2
  - $r$ -partito, 6
  - bipartito, 6
  - completo, 6
  - conexo, 5
  - contractible, 9
  - de Turán, 6
  - esqueleto de un, 23
  - finito, 3
  - no conexo, 9
  - orden de un, 3
  - regular, 3
  - simple, 3
  - tamaño de un, 3
- grafos homeomorfos, 8
- hoja, 3
- jaula
  - $(D; g)$ -, 16
  - $(r; g)$ -, 13
  - bi-regular, 16
  - de Heawood, 15
  - de McGee, 214
  - de Petersen, 15
  - de Robertson, 96
  - de Tutte, 223
  - de Tutte-Coxeter, 15
  - minimal, 15
- lazo, 2
- multigrafo, 2
- Problema de Turán, 11
- problema extremal, 11
- pseudografo, 2
- subdivisión, 8
  - elemental, 8
- subgrafo, 7
  - inducido por aristas, 8
  - inducido por vértices, 7
- vértice, 2
  - aislado, 2
  - branch, 9
  - entorno de un, 3

- grado de un, 3
- valencia de un, 3
- vértices
  - independientes, 2
- vértices adyacentes, 2
- vértices disjuntos, 2
- valencia
  - mínima, 3
  - máxima, 3
  - media, 3



# Bibliografía

- [1] E. Abajo, C. Balbuena y A. Diánez. New families of graphs without short cycles and large size. *Enviado a Discrete Appl. Math.*, 2008.
- [2] M. Abreu, M. Funk, D. Labbate y V. Napolitano. On (minimal) regular graphs of girth 6. *Australas. J. Combin.*, 35:119–132, 2006.
- [3] N. Alon, S. Hoory y N. Linial. The Moore bound for irregular graphs. *Graphs and Combinatorics*, 18:53–57, 2002.
- [4] G. Araujo, D. González Moreno, J. J. Montellano y O. Serra. On upper bounds and connectivity of cages. *Australasian Journal of Combinatorics*, 38:221–228, 2007.
- [5] G. Araujo-Pardo y C. Balbuena. Finding small regular graphs of girth 6,8 and 12 as subgraphs of cages. *Enviado a Elec. J. Comb.*, 2007.
- [6] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, P. García-Vázquez, X. Marcote y J.C. Valenzuela. On the order of  $(\{r, m\}; g)$ -cages of even girth. *Discrete Mathematics*, 308:2484–2491, 2008.
- [7] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena y J. C. Valenzuela. Constructions of biregular cages. *Enviado a Disc. Math.*, 2007.

- [8] C. Balbuena, M. Cera, A. Diáñez y P. García-Vázquez. New exact values of the maximum size of graphs free of topological complete subgraphs. *Discrete Math.*, 307:1038–1046, 2007.
- [9] C. Balbuena, M. Cera, A. Diáñez y P. García-Vázquez. On the girth of extremal graphs without shortest cycles. *Discrete Mathematics*, 2007.
- [10] C. Balbuena y P. García-Vázquez. On the minimum order of extremal graphs to have a prescribed girth. *SIAM J. Discrete Math.*, 21:251–257, 2007.
- [11] E. Bannai y T. Ito. On finite Moore graphs. *J. Fac. Sci. Uni. Tokyo, Ser. A*, 20:191–208, 1973.
- [12] L. M. Batten. *Combinatorics of finite geometries*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [13] C.T. Benson. Minimal regular graphs of girth eight and twelve. *Canad. J. Math.*, 18:1091–1094, 1966.
- [14] N. Biggs. *Algebraic Graph Theory, 2 ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [15] N. Biggs. Construction for cubic graphs with large girth. *The electronic Journal of combinatorics*, 5:A1, 1998.
- [16] N. Biggs y T. Ito. Graphs with even girth and small excess. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 88:1–10, 1980.
- [17] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1978.
- [18] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Graduate Text in Mathematics 184, Springer, New York, 1998.



- [19] B. Bollobás y E. Szemerédi. Girth of sparse graphs. *J. Graph Theory*, 39:194–200, 2002.
- [20] B. Bollobás y A. Thomason. On the girth of hamiltonian weakly pancyclic graphs. *J. Graph Theory*, 26:165–173, 1997.
- [21] J.A. Bondy y M. Simonovits. Cycles of even length in graphs. *J. Combinatorial Theory (B)*, 16:97–105, 1974.
- [22] J. Bosák. Cubic Moore graphs. *Mat. Casopis Slovenskej. Akadémie Vied*, 20:72–80, 1970.
- [23] G. Brinkmann, B.D. McKay y C. Saager. The smallest cubic graphs of girth nine. *Combinatorics Probability and Computing*, 5:1–13, 1995.
- [24] W.G. Brown. On graphs that do not contain a Thomsen graph. *Canad. Math. Bull*, 9:281–285, 1966.
- [25] M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez. The size of a graph without topological complete subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 13:295–301, 2000.
- [26] M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez. Extremal graphs without topological complete subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 18:388–396, 2004.
- [27] G. Chartrand, R.J. Gould y S.F. Kapoor. Graphs with prescribed degree set and girth. *Period. Math. Hungar.*, 6:261–266, 1981.
- [28] G. Chartrand y L. Lesniak. *Graphs and Digraphs, Third Ed.* Chapman and Hall, London, UK., 1996.
- [29] C.R.J. Clapham, A. Flockhart y J. Sheehan. Graphs without four cycles. *J. Graph Theory*, 13:29–47, 1989.
- [30] R.M. Damerell. On Moore graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 74:227–236, 1973.

- [31] R. Diestel. Graph theory. En *Graduate Texts in Mathematics*, volumen 173. Springer-Verlag, 1997,2000.
- [32] G. A. Dirac. Homomorphism theorems of graphs. *Math. Ann.*, 153:69–80, 1964.
- [33] M. Downs, R.J. Gould, J. Mitchem y F. Saba.  $(D;n)$  cages. *Congr. Numer.*, 32:179–193, 1981.
- [34] R.D. Dutton y R.C. Brigham. Edges in graphs with large size. *Graphs and Combinatorics*, 7:315–321, 1991.
- [35] P. Erdős. On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. *Mitt. Forschungsinst. Math. Mech.*, 2:74–82, 1938.
- [36] P. Erdős. Some recent progress on extremal graphs in graph theory. *Congres. Numer.*, 14:3–4, 1975.
- [37] P. Erdős y A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, 7:143–149, 1964.
- [38] P. Erdős, A. Renyi y V.T.Sós. On a problem of graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1:215–235, 1966.
- [39] P. Erdős y H. Sachs. Reguläre Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl. *Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.)*, 12:251–257, 1963.
- [40] P. Erdős y M. Simonovits. Compactness results in extremal graph theory. *Combinatorica 2*, 3:275–288, 1982.
- [41] G. Exoo. A simple method for constructing small cubic graphs of girths 14, 15 and 16. *Electronic Journal of Combinatorics*, 1996.

- [42] W. Feit y G. Higman. The nonexistence of certain generalized polygons. *J. Algebra*, 1:114–131, 1964.
- [43] M.A. Fiol, J. Fàbrega y M. Escudero. Short paths and connectivity in graphs and digraphs. *Ars. Combin.*, 29B:17–31, 1990.
- [44] J. Fàbrega y M.A. Fiol. Maximally connected digraphs. *J. Graph Theory*, 13(3):657–668, 1989.
- [45] Z. Füredi. Graphs without quadrilaterals. *J. Combin. Theory Ser B*, 34:187–190, 1983.
- [46] Z. Füredi. On the number of edges of quadrilateral free graphs. *J. Combin. Theory Ser B*, 68:1–6, 1996.
- [47] Z. Füredi, A. Naor y J. Verstraëte. On the Turan number for the hexagon. *Advances in Mathematics*, 203(2):476–496, 2006.
- [48] H. Friedman. On the impossibility of certain Moore graphs. *J. Combinatorial Theory Ser B*, 10:245–252, 1971.
- [49] H. Fu, K. Huang y C. Rodger. Connectivity of cages. *J. Graph Theory*, 24:187–191, 1997.
- [50] P. Garcia-Vázquez. *Problemas extremales en teoría de grafos*. Tesis Doctoral, 2003.
- [51] D.K. Garnick, Y.H.H. Kwong y F. Lazebnik. Extremal graphs without three cycles or four cycles. *J. Graph Theory*, 17:633–645, 1993.
- [52] D.K. Garnick y N.A. Nieuwejaar. Non-isomorphic extremal graphs without three cycles or four cycles. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 12:33–56, 1992.

- [53] A. Gács y T. Héger. On geometric constructions of  $(k; g)$ -graphs. *Contributions to Discrete Mathematics*, 3:63–80, 2008.
- [54] C. Godsil y G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer, NY, 2000.
- [55] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [56] A.J. Hoffman y R.R. Singleton. On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM. J. Res. Dev.*, 4:497–504, 1960.
- [57] M. Imase, T. Soneoka y K. Okada. Connectivity of regular directed graphs with small diameter. *IEEE Trans. Comput.*, C-34:267–273, 1985.
- [58] L. K. Jorgensen. Contractions to  $K_8$ . *Journal of Graph Theory*, 18:431–448, 1994.
- [59] F. Kárteszi. Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di mínimo. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 3:no.15,522–528, 1960.
- [60] T. Lam y J. Verstraëte. A note on graphs without short even cycles. *Electronic J. Combin.*, 12:Note 5, 2005.
- [61] F. Lazebnik, V.A. Ustimenko y A. J. Woldar. New upper bounds on the order of cages. *The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996)*, *Electron. J. Combin.*, 4:Research Paper 13, 1997.
- [62] F. Lazebnik, V.A. Ustimenko y A.J. Woldar. A new series of dense graphs of high girth. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 32(1):73–79, 1995.
- [63] F. Lazebnik y P. Wang. On the structure of extremal graphs of high girth. *J. Graph Theory*, 26:147–153, 1997.
- [64] J.Q. Longyear. Regular  $d$ -valent graphs of girth 6 and  $2(d^2 - d + 1)$  vértices. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 9:420–422, 1970.

- [65] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. *Math. Annalen*, 174:265–268, 1967.
- [66] W. Mader. Homomorphiesätze für Graphen. *Math. Annalen*, 178:154–168, 1968.
- [67] W. Mader.  $3n - 5$  edges do force a subdivision of  $K_5$ . *Combinatorica*, 18, 4:569–595, 1997.
- [68] W. Mader. Graphs with  $3n - 6$  edges not containing a subdivision of  $K_5$ . *Combinatorica*, 25, 4:425–438, 2005.
- [69] W. F. McGee. A minimal cubic graph of girth seven. *Canad. Math. Bull.*, 3:149–152, 1960.
- [70] M. Meringer. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *J. Graph Theory*, 30:137–146, 1999.
- [71] M. O’Keefe y P.K. Wong. A smallest graph of girth 10 and valency 3. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 29:91–105, 1980.
- [72] M. O’Keefe y P.K. Wong. The smallest graph of girth 6 and valency 7. *J. Graph Theory*, 5:79–85, 1981.
- [73] M. O’Keefe y P.K. Wong. On certain graphs of girth 5. *Internat. J. Math. Sci.*, 7(4):785–791, 1984.
- [74] T. Parsons. Graphs from projective planes. *Aequationes Math.*, 14:167–189, 1976.
- [75] G. Royle. Cages of higher valency .  
<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/cages/allcages.html>.
- [76] M. Simonovits. *Extremal graph theory*. L. W. Beineke y R.J. Wilson, Academic Press, London, 1983.

- [77] J. Tang, Y. Ling, C. Balbuena y M. Miller. Calculating the extremal number  $ex(\nu; \{C_3, C_4, \dots, C_n\})$ . *Discrete Appl. Math.*, 2007.
- [78] P. Turán. On an extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.
- [79] W. T. Tutte. A family of cubical graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, :459–474, 1947.
- [80] W. T. Tutte. Connectivity in graphs. *University of Toronto Press*, 1966.
- [81] J. C. Valenzuela. *Grafos contractibles a un grafo completo*. Tesis Doctoral, 2006.
- [82] J. H. van Lint y R. M. Wilson. *A course in Combinatorics*. Cambridge University Press, UK, 1994.
- [83] P. Wang, G.W. Dueck y S. MacMillan. Using simulated annealing to construct extremal graphs. *Discrete Mathematics*, 235:125–135, 2001.
- [84] G. Wegner. A smallest graph of girth 5 and valency 5. *J. Combin. Th.*, B 14:203–208, 1973.
- [85] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Am. J. Math.*, 54:150–168, 1932.
- [86] P.K. Wong. Cages-a survey. *J. Graph Theory*, 6:No.1, 1–22, 1982.
- [87] P.K. Wong. A regular graph of girth 6 and valency 11. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 9:561–565, 1986.
- [88] Y. Yuansheng y W. Liang. The minimum number of vertices with girth 6 and degree set  $D = \{r, m\}$ . *Discrete Mathematics*, 269:249–258, 2003.