CONJUNTOS UNIFORMEMENTE SUMANTES DE OPERADORES

Juan Manuel Delgado Sánchez

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

CONJUNTOS UNIFORMEMENTE SUMANTES DE OPERADORES

Memoria presentada por D. Juan Manuel Delgado Sánchez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Juan Manuel Delgado Sánchez.

V°B° Director

D. Cándido Piñeiro Gómez
Catedrático del Departamento de Matemáticas (Matemática Aplicada y Análisis Matemático) de la Universidad de Huelva.

Sevilla, mayo 2002.

Índice General

Introducción

Esta memoria está destinada al estudio de, esencialmente, dos tipos de conjuntos de operadores sumantes entre espacios de Banach: los conjuntos uniformemente sumantes y los conjuntos uniformemente dominados. Dados X e Y espacios de Banach y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, todo operador p-sumante $T\colon X \longrightarrow Y$ induce un operador lineal y acotado $\widehat{T}\colon (x_n) \in \ell_w^p(X) \longrightarrow (Tx_n) \in \ell_a^p(Y)$ con $\|\widehat{T}\| = \pi_1(T)$, donde $\ell_a^p(Y)$ $(\ell_w^p(X))$ denota el espacio de las sucesiones en Y (en X) fuertemente (débilmente) p-sumables. Si $\Pi_p(X,Y)$ designa el espacio de Banach de los operadores p-sumantes entre X e Y con la norma p-sumante $\pi_p(\cdot)$ y $\mathcal{M}$ es un subconjunto de $\Pi_p(X,Y)$, es interesante poner de manifiesto que algunas propiedades de $\mathcal{M}$ se transmiten a $\widehat{\mathcal{M}} = \{\widehat{T}\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ precisamente cuando $\mathcal{M}$ goza de una propiedad de naturaleza uniforme como la que sigue:

$$\left.\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \\ \forall (x_n) \in \ell_w^p(X) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \sum_{n \geq n_0} \|Tx_n\|^p < \varepsilon, \quad \forall T \in \mathcal{M} \qquad (*)$$

(véase Apéndice 3.3). Este argumento justifica el estudio de los subconjuntos de $\Pi_p(X,Y)$ que verifican la condición $(*)$. Así, se dice que un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_p(X,Y)$ es *uniformemente p-sumante* si, cualquiera que sea la sucesión (x_n) en $\ell_w^p(X)$, se verifica que la serie $\sum_n \|Tx_n\|^p$ converge uniformemente en $T \in \mathcal{M}$.

Una clase especialmente importante dentro de la clase de los conjuntos uniformemente p-sumantes es la clase de los conjuntos uniformemente p-dominados. Un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_p(X,Y)$ es *uniformemente p-dominado* si existe una medida de Radon positiva μ sobre B_{X^*} (la bola unidad del espacio dual X^*) con la topología débil* tal que

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*)$$

para todo $x \in X$ y $T \in \mathcal{M}$. El interés por este tipo de conjuntos data de la aparición del teorema de Grothendieck–Pietsch, que establece la equivalencia entre ambos conceptos cuando tratamos con un único operador. Los resultados más recientes sobre los conjuntos uniformemente p-dominados pueden encontrarse en [MPi] y [KH]. Así, en [MPi], se demuestra que $\mathcal{M} \subset \Pi_1(X,Y)$ es uniformemente 1-dominado si y sólo si $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ está contenido en el rango de una medida vectorial de variación acotada y X^*-valorada. Por otra parte, en [KH], se concluye que un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-dominado si puede encontrarse una constante $C > 0$ de modo que, cualquiera que sea el conjunto finito $\{x_1,\ldots,x_m\}$ de X, existe $Q \in \mathcal{M}$ verificando $\pi_p(Q) \leq C$ y

$$\sum_{n=1}^{m} \|Tx_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{m} \|Qx_n\|^p$$

para todo $T \in \mathcal{M}$. Además, se prueba que tal condición es necesaria en el caso particular de que $\mathcal{M} \subset \Pi_p(c_0,c_0)$ y $\mathcal{M}$ sea "maximal" respecto de la medida dominante.

Aparte de éstos, poco se conoce sobre la estructura de tal tipo de conjuntos; de hecho, no hemos encontrado en la literatura nada más sobre los conjuntos uniformemente p-sumantes.

La primera parte de la memoria está constituida por el capítulo 1, en el que el tratamiento de los conjuntos arriba mencionados se lleva a cabo desde un marco general, esto es, con $p \in [1,\infty)$ y X e Y espacios de Banach cualesquiera. En este capítulo, se observa que el concepto de 1-sumabilidad uniforme sólo tiene interés si X contiene una copia de c_0 pues, en otro caso, los conjuntos uniformemente 1-sumantes son exactamente los conjuntos acotados de $\Pi_1(X,Y)$ (teorema 1.1.4). Por ello, en la segunda parte de la memoria (capítulos 2 y 3) se consideran conjuntos de operadores definidos sobre espacios de funciones continuas.

El capítulo 1 deja entrever que la p-sumabilidad uniforme no es un concepto excesivamente rico estudiado desde un punto de vista general. Muchos de las cuestiones que se plantean obtienen una respuesta negativa; en cualquier caso, tal respuesta se acompaña, en todo momento, del correspondiente contraejemplo. Entre otros resultados, en la primera sección se demuestra que todo conjunto relativamente compacto en $\Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-sumante pero que, por contra, no existe relación de implicación con la débil compacidad relativa. Por otro lado, se comprueba que algunas de las propiedades válidas para un operador sumante aislado no se transmiten a conjuntos de operadores; así, se proporciona un contraejemplo de un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_p(X,Y)$ uniformemente 1-sumante tal que $\mathcal{M}^{**} = \{T^{**}\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ no lo es. Los resultados más importantes de este capítulo corresponden a la tercera sección, dedicada a los conjuntos uniformemente p-dominados, en la que se obtienen dos teoremas de caracterización para dichos conjuntos. En el primero de ellos, el teorema 1.3.2, se facilita una condición equivalente en términos "similares" a la que aparece en la definición de conjunto uniformemente p-sumante. En concreto, concluye la equivalencia entre las siguientes condiciones

(a) $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-dominado.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell_w^p(X)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_n x_n\|^p < \varepsilon,$$

cualquiera que sea la sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$.

(c) Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_n x_n\|^p \leq C^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{m} |\langle x^*, x_n\rangle|^p$$

para todo $\{x_1,\ldots,x_m\} \subset X$ y $\{T_1,\ldots,T_m\} \subset \mathcal{M}$.

Este resultado permite concluir de forma inmediata que todo conjunto uniformemente p-dominado es uniformemente p-sumante. Por otra parte , la condición (c) suministra una útil herramienta para decidir sobre la dominación uniforme de un conjunto dado. El segundo teorema de caracterización (teorema 1.3.10 y corolario 1.3.11), de corte parecido a los resultados de [KH], establece lo siguiente: un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-dominado si y sólo si existe una constante $C > 0$ de forma que, para cada subconjunto finito $\{(x_n,T_n)\colon\ n = 1,\ldots,m\} \subset X \times \mathcal{M}$, existe un operador $Q \in \Pi_p(X, \ell^\infty_{B_{Y^*}})$ verificando $\pi_p(Q) \leq C$ y

$$\|T_n x_n\| \leq \|Q x_n\|, \quad n = 1,\ldots,m.$$

En esta sección también se introducen los conjuntos *uniformemente completamente continuos* (aquéllos que transforman sucesiones débilmente nulas en sucesiones fuertemente nulas uniformemente) como herramienta para dar un ejemplo de conjunto uniformemente 1-sumante que no es uniformemente 1-dominado.

En el capítulo 2, se consideran conjuntos de operadores definidos en $\mathcal{C}(\Omega)$, el espacio de las funciones continuas sobre el compacto de Hausdorff Ω. Recordemos que todo operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow Y$ 1-sumante tiene asociada una medida vectorial m_T sobre Σ (la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de Ω) Y-valorada y numerablemente aditiva tal que

$$T\varphi = \int_\Omega \varphi \, dm_T, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(\Omega),$$

siendo $|m_T|$ (la variación de m_T) tal que $|m_T|(\Omega) = \pi_1(T) < \infty$. El resultado fundamental de la primera sección consiste en la caracterización de los conjuntos uniformemente 1-sumantes de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ en términos de sus medidas representantes. Concretamente, se demuestra que un conjunto acotado $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si la familia $\{|m_T|\colon T \in \mathcal{M}\}$ es μ-continua respecto de alguna medida positiva μ (teorema 2.1.1). De forma similar, se obtiene una caracterización de los conjuntos uniformemente completamente continuos en los mismos términos (teorema 2.1.2). De este modo, aunque en el capítulo 1 no se había obtenido ninguna relación de implicación entre ambos tipos de conjuntos en el marco general, los resultados mencionados permiten afirmar que ser uniformemente completamente continuo es condición necesaria para ser uniformemente 1-sumante en subconjuntos de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ (corolario 2.1.3). Es por ello por lo que, en el final de la primera sección, procedemos a estudiar con más detenimiento los conjuntos uniformemente completamente continuos. Como es sabido, para un operador definido sobre un espacio $\mathcal{C}(\Omega)$, ser completamente continuo, incondicionalmente convergente o débilmente compacto son condiciones equivalentes; el teorema 2.1.6 manifiesta que tal hecho se transmite a subconjuntos de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$.

Si $\mathcal{C}(\Omega, X)$ designa el espacio de las funciones continuas sobre Ω X-valoradas, se dice que un operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ es *p-dominado* si existe una medida positiva regular ν sobre Σ tal que, cualquiera que sea $f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$, se tiene

$$\|Tf\|^p \leq \int_\Omega \|f(\omega)\|^p \, d\nu(\omega). \tag{$**$}$$

Dinculeanu estudió la clase de los operadores p-dominados en el caso $X = \mathbb{R}$ ([Di3] y [Di4]), aunque transcurrió algún tiempo hasta que Pietsch concluyese que los operadores p-dominados sobre $\mathcal{C}(\Omega)$ son precisamente los p-sumantes ([P] y [P3]). Así, la segunda sección del capítulo 2 comienza exponiendo que la condición $(**)$ caracteriza a los subconjuntos $\mathcal{M}$ de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ uniformemente p-dominados, siendo la medida ν válida para todo operador del conjunto $\mathcal{M}$ (proposición 2.2.1). A partir de aquí, se concluye la siguiente caracterización: un conjunto $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado si y sólo si existe una medida ν positiva regular sobre Σ tal que

$$\|m_T(E)\| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \Sigma, \forall T \in \mathcal{M}$$

(teorema 2.2.2).

De las observaciones y ejemplos complementarios que aparecen en la última sección del segundo capítulo, destacamos que la condición "Y reflexivo" es necesaria y suficiente para que, en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$, se dé la igualdad entre la clase de los conjuntos uniformemente 1-sumantes y la clase de los conjuntos relativamente débilmente compactos (corolario 2.3.1). Por último, se obtiene una condición suficiente de 1-sumabilidad uniforme para conjuntos uniformemente completamente continuos (teorema 2.3.4).

En el capítulo 3 se estudian conjuntos de operadores definidos sobre espacios de funciones continuas vectoriales. Estos conjuntos pueden relacionarse fácilmente con los considerados en el capítulo anterior utilizando el siguiente hecho: todo operador acotado $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ tiene asociado un único operador $T^\sharp\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$T(\varphi x) = (T^\sharp \varphi)x$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $x \in X$. Esta relación permite asociar, a cada operador T sobre $\mathcal{C}(\Omega, X)$, una medida representante m_T de manera que $m_T(E) \in \mathcal{L}(X, Y^{**})$ para cada conjunto de Borel E [Di3]. A lo largo del capítulo, se utilizan de manera crucial los resultados de Swartz que aparecen en [S2] y, en esencia, el siguiente

Teorema (C. Swartz, 1973). *Sea $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ un operador lineal y continuo con medida representante m_T. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T es 1-sumante.

(b) Para cada $E \in \Sigma$, $m_T(E) \in \Pi_1(X, Y)$ y m_T tiene π_1–variación finita.

(c) El operador $T^\sharp\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \Pi_1(X, Y)$ es 1-sumante.

Además, se tiene $\pi_1(T) = \pi_1 - |m|(\Omega) = \pi_1(T^\sharp)$.

El problema que tratamos en la sección 3.1 es el de relacionar la 1-sumabilidad uniforme de un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ con la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp = \{T^\sharp\colon\ T \in \mathcal{M}\}$, teniendo en cuenta que $\mathcal{M}^\sharp$ puede considerarse bien en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X, Y))$ o en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$. No es difícil ver que

$$\mathcal{M} \text{ uniformemente 1-sumante} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{M}^\sharp \text{ uniformemente 1-sumante} \\ \text{en } \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y)) \end{array} \qquad (***)$$

El teorema 3.1.4 pone de manifiesto que tales condiciones son equivalentes (para todo conjunto $\mathcal{M}$) únicamente si el espacio X no contiene copia de c_0. En la prueba de este resultado se usan técnicas similares a las que utiliza Swartz en [S]; en concreto, las reducciones de X separable y Ω metrizable están muy resumidas pero se incluyen para facilitar la lectura.

En la sección 3.2, se caracterizan los subconjuntos de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ uniformemente 1-dominados. Un procedimiento estándar permite probar que si $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente 1-dominado entonces también lo es $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$ (teorema 3.2.2) aunque, en general, el recíproco no es cierto; de hecho la equivalencia entre ambas condiciones únicamente se cumple cuando X es finito–dimensional (proposición 3.3.6). El teorema 3.2.4 proporciona la siguiente condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\mathcal{M}$ sea uniformemente 1-dominado en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$:

> "Existe una medida $\tilde{\nu}$ positiva regular de Borel sobre Σ tal que, cualesquiera que sean el subconjunto finito $\{(x_1, T_1), \ldots, (x_m, T_m)\}$ en $X \times \mathcal{M}$ y el conjunto $E \in \Sigma$, se verifica
>
> $$\sum_{n=1}^{m} \|m_{T_n}(E)x_n\| \leq \tilde{\nu}(E)\epsilon_1\left((x_n)_{n=1}^m\right)."$$

De la última sección de la memoria, se destaca la proposición 3.3.2, en la que, dado un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$, se concluye que la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X, Y))$ (esto es, cuando en $\Pi_1(X, Y)$ consideramos la norma operador) es equivalente a que $\mathcal{M}$ posea la siguiente propiedad:

> "Dados $\varepsilon > 0$ y $(f_n) \subset \mathcal{C}(\Omega, X)$ tal que
>
> $$\exists C > 0\colon \quad \sup_{\omega \in \Omega} \left(\sum_n \|f_n(\omega)\| \right) \leq C,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_{n \geq n_0} \|Tf_n\| < \varepsilon,$$

para todo $T \in \mathcal{M}$."

Basándonos en este resultado, se efectúa un análisis en el que se relaciona la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}$ y la de $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$ (Y infinito-dimensional), resultando tales condiciones equivalentes (para todo conjunto $\mathcal{M}$) cuando $\Pi_1(X,Y)$ con la norma operador es cerrado en $\mathcal{L}(X,Y)$.

Preliminares y notación

En general, nuestra notación y los resultados fundamentales en la teoría de operadores y la teoría de la medida vectoriales están tomados de [Di3],[DJT] y [DU].

A lo largo de la memoria, p será un número real cumpliendo $1 \leq p < \infty$, mientras que $q \in [1, \infty]$ cumplirá $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sólo consideraremos espacios de Banach sobre el cuerpo de los números reales. Si X es un espacio de Banach, denotaremos su norma por $\|\cdot\|$ pero, cuando se requiera mayor precisión, utilizaremos también $\|\cdot\|_X$. B_X denotará la bola unidad cerrada $\{x \in X\colon\ \|x\| \leq 1\}$ de X mientras que, si $x_0 \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, $B(x_0, r)$ denotará el conjunto $\{x \in X\colon\ \|x - x_0\| < r\}$, es decir, la bola abierta en X centrada en x_0 de radio r.

Un operador entre los espacios de Banach X e Y será una aplicación de X en Y lineal y continua. La colección $\mathcal{L}(X, Y)$ de todos los operadores $T\colon X \longrightarrow Y$ es un espacio de Banach respecto de la norma $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$. Denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y)$ ($\mathcal{W}(X, Y)$) el subespacio de $\mathcal{L}(X, Y)$ constituido por los operadores compactos (débilmente compactos), esto es, aquéllos que llevan los conjuntos acotados de X en conjuntos relativamente (débilmente) compactos en Y.

El operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es p-sumante si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|Tx_n\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p}$$

para cada conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ en X. A la menor de las constantes C verificando la desigualdad anterior se le llama norma p-sumante del operador T y nos referiremos a ella por $\pi_p(T)$. La siguiente es una manera alternativa de computar la norma $\pi_p(\cdot)$:

$$\pi_p(T) = \sup \left(\sum_n \|Tx_n\|^p \right)^{1/p}$$

donde el supremo se extiende a todas las sucesiones (x_n) en X para la que $\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p} \leq 1$. El espacio de los operadores p-sumantes de X en Y con la norma π_p es un espacio de Banach, que denotaremos por $\Pi_p(X, Y)$.

El conocido teorema de dominación de Grothendieck–Pietsch ([G] y [P3]; [DJT, teorema 2.12]) caracteriza los operadores p-sumantes, relacionándolos con la teoría de la medida:

Teorema de dominación (A. Grothendieck, 1953; A. Pietsch, 1967). *Un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es p-sumante si y sólo si existe una medida regular μ sobre el compacto B_{X^*} con la topología débil-$*$ tal que*

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*)$$

para todo $x \in X$. En tal caso, $\pi_p(T) = \mu(B_{X^*})^{1/p}$.

Como es habitual, $\ell^p_w(X)$ designará el espacio vectorial de las sucesiones (x_n) en X *débilmente p-sumables*, esto es, aquéllas que cumplen $\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p < \infty$ para todo $x^* \in X^*$. Dicho espacio tiene estructura de espacio de Banach dotado de la norma

$$\epsilon_p((x_n)) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p \right)^{1/p}$$

para cada $(x_n) \in \ell^p_w(X)$. Las propiedades que utilizaremos esencialmente sobre las sucesiones de $\ell^p_w(X)$ quedan recogidas en la siguiente proposición:

Proposición. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(x_n) \in \ell^p_w(X)$.

(b) Cualquiera que sea $(\alpha_n) \in \ell^q$ se tiene

$$\left\| \sum_n \alpha_n x_n \right\| < \infty.$$

(c) La aplicación que asigna

$$(\alpha_n) \in \ell^q \longmapsto \sum_n \alpha_n x_n \in X$$

es un operador acotado ($(\alpha_n) \in c_0 \longmapsto \sum_n \alpha_n x_n \in X$ si $p = 1$).

La condición (b) del resultado anterior proporciona, de hecho, una manera alternativa de computar la ϵ_p-norma:

$$\epsilon_p((x_n)) = \sup_{(\alpha_n)\in B_{\ell^q}} \left\| \sum_n \alpha_n x_n \right\|.$$

Por otra parte, la condición (c) permite identificar el espacio de las sucesiones débilmente p-sumables $\ell^p_w(X)$ con el espacio $\mathcal{L}(\ell^q, X)$ ($\mathcal{L}(c_0, X)$ si $p = 1$).

Si (x_n) es una sucesión en X, diremos que la serie $\sum_n x_n$ es débil incondicional de Cauchy (w.u.c.) si

$$\sup_{\Delta\in\mathcal{F}} \left\| \sum_{n\in\Delta} x_n \right\|$$

donde $\mathcal{F} = \{\Delta \subset \mathbb{N} \colon \Delta \text{ finito}\}$. Es sencillo concluir que la serie $\sum_n x_n$ es w.u.c. si y sólo si $(x_n) \in \ell^1_w(X)$, verificándose además:

$$\frac{1}{2}\epsilon_1((x_n)) \le \sup_{\Delta\in\mathcal{F}} \left\| \sum_{n\in\Delta} x_n \right\| \le \epsilon_1((x_n)).$$

Denotaremos por $\ell^p_u(X)$ el subespacio de $\ell^p_w(X)$ formado por las sucesiones en X *incondicionalmente p-sumables*; es decir, $\hat{x} = (x_n) \in \ell^p_u(X)$ si las secciones $\hat{x}^m = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ convergen en $\ell^p_w(X)$. La siguiente proposición recoge alguna de las propiedades fundamentales de las sucesiones de $\ell^p_u(X)$:

Proposición. *Cualquiera de las condiciones siguientes implica a las demás:*

(a) $(x_n) \in \ell^p_u(X)$.

(b) La serie $\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p$ *es uniformemente convergente en* $x^* \in B_{X^*}$.

(c) La aplicación que asigna

$$(\alpha_n) \in \ell^q \longmapsto \sum_n \alpha_n x_n \in X$$

es un operador compacto $((\alpha_n) \in c_0 \longmapsto \sum_n \alpha_n x_n \in X$ *si* $p = 1)$.

La condición (c) de la proposición anterior permite identificar el espacio de las sucesiones incondicionalmente p-sumables $\ell^p_u(X)$ con la clase de los operadores compactos $\mathcal{K}(\ell^q, X)$ ($\mathcal{K}(c_0, X)$ si $p = 1$). Por otra parte, para el caso $p = 1$, el conocido teorema de Bessaga–Pelczynski ([BPe]; [D, teorema V.8]) asegura que $\ell^p_u(X) = \ell^p_w(X)$ si y sólo si X no contiene copia de c_0.

Se designará por $\ell^p_a(X)$ el espacio de las sucesiones (x_n) en X *absolutamente p-sumables*, o sea, aquéllas que verifican $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$. La norma $\|(x_n)\|(= \|(x_n)\|_p) = (\sum_n \|x_n\|^p)^{1/p}$ dota a $\ell^p_a(X)$ de estructura de espacio de Banach.

La relación entre los espacios definidos arriba viene dada por la siguiente cadena de inclusiones continuas:

$$\ell^p_a(X) \subset \ell^p_u(X) \subset \ell^p_w(X).$$

El teorema de Dvoretzky–Rogers ([DvRo]; [DJT, teorema 1.2]) afirma que $\ell^p_a(X) = \ell^p_u(X)$ únicamente cuando X es finito–dimensional. Por otra parte, el teorema de Dvoretzky–Rogers en su versión débil ([G2]; [DJT, teorema 2.18]) asegura que el operador identidad en X es p-sumante si y sólo si X es finito–dimensional; en términos de espacios de sucesiones, $\ell^p_a(X) = \ell^p_w(X)$ únicamente cuando X es finito–dimensional.

El espacio vectorial de las sucesiones en X fuertemente nulas se denotará por $c_0(X)$, el cual es espacio de Banach con la norma $\|(x_n)\|_{c_0(X)} = \sup_n \|x_n\|$ para cada (x_n) fuertemente nula.

Si K es un conjunto cualquiera, ℓ^∞_K denotará el espacio de Banach de las funciones sobre K escalares y acotadas, equipado con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{k\in K} |f(k)|$. Designaremos por ℓ^p_n el espacio $\mathbb{R}^n$ equipado con la norma $\|\cdot\|_p$.

Una *medida vectorial* será una función m definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos del conjunto Ω y con valores en un espacio de Banach X tal que $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ siempre que E_1 y E_2 sean conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$. La medida m se dice *numerablemente aditiva* si para toda sucesión (E_n) de conjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, la serie $\sum_n m(E_n)$ converge a $m(\bigcup_n E_n)$ en X. A no ser que se especifique lo contrario, trataremos sólamente medidas vectoriales numerablemente aditivas. Llamaremos medidas *escalares* a las que toman valores en el cuerpo de los números reales.

La *variación* de una medida vectorial m es la función $|m|\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por

$$|m|(E) = \sup\left(\sum_{A\in\pi} \|m(A)\|\right),$$

donde el supremo se extiende a todas las particiones π de E en un número finito de miembros de $\mathcal{A}$. La variación resulta ser una medida finitamente aditiva. Si $|m|(\Omega) < \infty$, se dice que m tiene *variación finita* o *variación acotada*; en tal caso, la variación resulta ser, además, numerablemente aditiva.

La *semivariación* de la medida vectorial m es la función de conjuntos $\|m\|\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por

$$\|m\|(E) = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (|x^* \circ m|(E))$$

donde $|x^* \circ m|$ es la variación de la medida escalar $x^* \circ m$. Si $\|m\|(\Omega) < \infty$, se dice que m tiene *semivariación acotada* o también que m es *acotada*. En el caso de medidas escalares, se cumple $\|m\| = |m|$.

La siguiente lista recoge algunas propiedades elementales de la variación y semivariación de una medida vectorial que se usarán repetidamente:

1. Toda medida numerablemente aditiva es acotada.

2. $\|m\|$ es monótona y subaditiva.

3. $\|m(E)\| \leq \|m\|(E) \leq |m|(E)$ para cada $E \in \mathcal{A}$.

Una familia $\{m_i\colon\ i \in I\}$ de medidas vectoriales se dice *uniformemente numerablemente aditiva* si, cualquiera que sea la sucesión (E_n) de conjuntos en A disjuntos dos a dos, se verifica que $\lim_n \left\|\sum_{k\geq n} m_i(E_k)\right\| = 0$ uniformemente en $i \in I$.

Los tres resultados que siguen, extraídos de [DU], se utilizarán con frecuencia a lo largo de la memoria. El primero de ellos se enuncia en tal texto para una familia de medidas *uniformemente fuertemente aditiva*, concepto equivalente al de "uniformemente numerablemente aditiva" en el caso de que cada medida sea numerablemente aditiva. El segundo es debido a Doubrovsky [Do] mientras que el tercero recoge algunos resultados de Grothendieck y Pelczynski ([G3] y [Pe]).

Proposición ([DU, proposición I.1.17]). *Cualquiera de las condiciones siguientes sobre la familia de medidas vectoriales $\{m_i: \mathcal{A} \longrightarrow X: \ i \in I\}$ implica a las demás:*

(a) La familia $\{m_i: \ i \in I\}$ es uniformemente numerablemente aditiva.

(b) La familia $\{x^* \circ m_i: \ i \in I, x^* \in B_{X^*}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva.

(c) Si (E_n) es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces $\lim_n \|m_i(E_n)\| = 0$ uniformemente en $i \in I$.

(d) Si (E_n) es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces $\lim_n \|m_i\|(E_n) = 0$ uniformemente en $i \in I$.

(e) La familia $\{|x^* \circ m_i|: \ i \in I, x^* \in B_{X^*}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva.

Teorema ([DU, teorema I.2.4]). *Sea $\{m_i: \mathcal{A} \longrightarrow X: \ i \in I\}$ una familia uniformemente acotada (respecto de la semivariación) de medidas vectoriales. La familia $\{m_i: \ i \in I\}$ es uniformemente numerablemente aditiva si y sólo si existe un medida μ positiva y finita sobre $\mathcal{A}$ tal que $\{m_i: \ i \in I\}$ es uniformemente μ-continua, i.e.,*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \|m_i(E)\| = 0$$

uniformente en $i \in I$.

Si Ω es un compacto de Hausdorff, la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de Ω será denotado por Σ. Una medida m definida sobre Σ es *regular* si para cada conjunto de Borel E y cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto K y un conjunto abierto O tal que $K \subset E \subset O$ y $\|m\|(O \backslash K) < \varepsilon$.

Proposición ([DU, lema VI.2.13]). *Sea $\mathcal{K}$ una familia de medidas escalares y regulares definidas sobre Σ. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *Para cada sucesión (O_n) de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos se cumple $\lim_n \mu(O_n) = 0$ uniformemente en $\mu \in \mathcal{K}$.*

(b) *Para cada sucesión (O_n) de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos se cumple $\lim_n |\mu|(O_n) = 0$ uniformemente en $\mu \in \mathcal{K}$.*

(c) *$\mathcal{K}$ es uniformemente numerablemente aditiva.*

(d) *$\mathcal{K}$ es uniformemente regular, i.e., si $E \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un compacto K y un abierto O verificando $K \subset E \subset O$ y $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} |\mu|(O \backslash K) < \varepsilon$.*

Se designará por $\mathcal{C}(\Omega, X)$ el espacio de Banach de las funciones continuas sobre el compacto de Hausdorff Ω con valores en X, dotado de la norma del supremo

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|$$

para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$; si $X = \mathbb{R}$ se escribirá $\mathcal{C}(\Omega)$ en lugar de $\mathcal{C}(\Omega, X)$.

Dado $E \in \Sigma$, la función característica de E se escribirá χ_E. Notaremos por $B(\Sigma, X)$ el espacio de las funciones $f \colon \Omega \longrightarrow X$ totalmente medibles, esto es, aquéllas que son límite uniforme de funciones escalonadas $\sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$ $(x_1, \ldots, x_k \in X)$ respecto de Σ; dicho espacio será equipado con la norma del supremo. Nuevamente, si $X = \mathbb{R}$ se escribirá $B(\Sigma)$ en vez de $B(\Sigma, X)$.

En el desarrollo de la memoria, se integrarán funciones f en $B(\Sigma, X)$ respecto de una medida vectorial (acotada) m con valores en $\mathcal{L}(X, Y)$. Esta integral se define de la manera habitual para funciones escalonadas respecto de Σ y se extiende por densidad a todo $B(\Sigma, X)$ [Di3]. En concreto, si $\psi = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$ con $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $E_1, \ldots, E_k \in \Sigma$ disjuntos dos a dos,

$$\int_\Omega \psi \, dm = \sum_{j=1}^k m(E_j) x_j,$$

siendo tal definición independiente de la forma en que venga expresada ψ como función escalonada. Ahora, si $f \in B(\Sigma, X)$ cualquiera, basta elegir una sucesión de funciones escalonadas (ψ_n) tal que $\psi_n \longrightarrow f$ uniformemente y definir

$$\int_\Omega f\, dm = \lim_n \int_\Omega \psi_n\, dm,$$

$(\int_\Omega f\, dm$ no depende de la sucesión $(\psi_n))$. Si $E \in \Sigma$, se escribirá

$$\int_E f\, dm = \int_\Omega f\chi_E\, dm.$$

La integral definida anteriormente goza de las propiedades habituales. La siguiente relación recoge alguna de las que se utilizarán con mayor frecuencia:

1. Si $f, g \in B(\Sigma, X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces
$$\int_\Omega \alpha f + \beta g\, dm = \int_\Omega \alpha f\, dm + \int_\Omega \beta g\, dm.$$
2. Si $f \in B(\Sigma, X)$ y $E_1, E_2 \in \Sigma$ son disjuntos entonces
$$\int_{E_1 \cup E_2} f\, dm = \int_{E_1} f\, dm + \int_{E_2} f\, dm.$$
3. Si $\varphi \in B(\Sigma)$ y $x \in X$ entonces
$$\int_\Omega \varphi x\, dm = x \int_\Omega \varphi\, dm.$$
4. Se cumple
$$\left\| \int_E f\, dm \right\| \leq \|f\|_{B(\Sigma,X)} \|m\|(E)$$
para todo $E \in \Sigma$ y $f \in B(\Sigma, X)$.
5. Si m tiene variación finita, cualesquiera que sean $E \in \Sigma$ y $f \in B(\Sigma, X)$ se verifica
$$\left\| \int_\Omega f\, dm \right\| \leq \int_\Omega \|f\|\, d|m|.$$
para todo $E \in \Sigma$ y $f \in B(\Sigma, X)$.

Se denotará por $rbvca(\Sigma, X)$ el conjunto de las medidas vectoriales m sobre Σ X-valoradas, regulares y de variación finita, equipado con la norma $|\cdot|(\Omega)$. El dual de $\mathcal{C}(\Omega, X)$ y $rbvca(\Sigma, X^*)$ son isomorfos isométricamente bajo el par $\langle F, f\rangle = \int_\Omega f\,dm$, $f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$, donde $F \in \mathcal{C}(\Omega, X)^*$ y $m \in rbvca(\Sigma, X^*)$ [FSi, página 735].

Dada una función f en $B(\Sigma, X)$, la aplicación $\nu \longmapsto \int_\Omega f\,d\nu$ define un funcional lineal y continuo sobre $rbvca(\Sigma, X^*) \equiv \mathcal{C}(\Omega, X)^*$ con norma $\|f\|_{B(\Sigma,X)}$; dicha aplicación permite ver $B(\Sigma, X)$ como subespacio de $\mathcal{C}(\Omega, X)^{**}$

Es inmediato comprobar que toda serie $\sum_n f_n$ w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X)$ (o, lo que es igual, $(f_n) \in \ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega, X))$) se caracteriza por las siguientes condiciones:

(i) La serie $\sum_n f_n(\omega)$ es w.u.c. en X, para todo $\omega \in \Omega$.

(ii) $\sup_{\omega\in\Omega} \epsilon_1\left((f_n(\omega))_n\right) < \infty$.

Las condiciones (i) y (ii) pueden resumirse manifestando que la función $\Phi\colon \omega \in \Omega \longmapsto (f_n(\omega))_n \in \ell_w^1(X)$ es acotada.

En el caso de una sucesión (φ_n) en $\ell_w^p(\mathcal{C}(\Omega))$, existe una manera muy útil de computar la norma ϵ_p:

$$\epsilon_p\left((\varphi_n)\right) = \left\| \left(\sum_n |\varphi_n|^p \right)^{1/p} \right\|_{\mathcal{C}(\Omega)}$$

[DJT, página 41].

Capítulo 1

Generalidades sobre conjuntos uniformemente sumantes

Este primer capítulo consta de tres secciones. En la primera sección, se estudian propiedades generales sobre los conjuntos uniformemente p-sumantes. La segunda sección está dedicada a los conjuntos uniformemente 1-sumantes en $\Pi_1(c_0, Y)$ pues, a pesar de ser un caso particular de los conjuntos estudiados en el capítulo 2, las técnicas utilizadas servirán como punto de partida o referencia para la búsqueda de caracterizaciones en secciones posteriores, amén de proporcionar una buena cantidad de contraejemplos. La tercera y última sección trata sobre una clase especial de conjuntos uniformemente sumantes: los conjuntos uniformemente dominados.

1.1 Conjuntos uniformemente p-sumantes

Definición 1.1.1 *Un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ se dice* uniformemente p-sumante *si, cualquiera que sea la sucesión (x_n) en $\ell_w^p(X)$, se verifica que la serie $\sum_n \|Tx_n\|^p$ es convergente uniformemente en $T \in \mathcal{M}$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n \geq n_0} \|Tx_n\|^p < \varepsilon$$

cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$.

Proposición 1.1.2 *Todo conjunto uniformemente p-sumante es π_p-acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ uniformemente p-sumante. Fijado $x \in X$, la sucesión $\left(\frac{x}{n^2}\right) \in \ell_w^p(X)$, por lo que existe $N_x \in \mathbb{N}$ verificándose

$$\sum_{n \geq N_x} \left\| T\left(\frac{x}{n^2}\right) \right\|^p < 1,$$

cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$. En particular, $\left\| T\left(\frac{x}{N_x^2}\right) \right\|^p < 1$, cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$; por tanto,

$$\|Tx\| < N_x^2, \quad \forall T \in \mathcal{M},$$

y el principio de acotación uniforme garantiza la existencia de una constante $C' > 0$ tal que

$$\|T\| \leq C', \quad \forall T \in \mathcal{M}.$$

Para cada $T \in \mathcal{M}$, consideremos ahora el operador lineal y continuo $\widehat{T}$: $(x_n) \in \ell_w^p(X) \longmapsto (Tx_n) \in \ell_a^p(Y)$, que verifica $\|\widehat{T}\| = \pi_p(T)$ [DJT, proposición 2.1]. Dado $\hat{x} = (x_n) \in \ell_w^p(X)$, de nuevo existe $N_{\hat{x}} \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq N_{\hat{x}}} \|Tx_n\|^p < 1$, para todo $T \in \mathcal{M}$; entonces

$$\begin{aligned}
\|\widehat{T}\hat{x}\|_p^p &= \sum_n \|Tx_n\|^p \\
&= \sum_{n<N_{\hat{x}}} \|Tx_n\|^p + \sum_{n \geq N_{\hat{x}}} \|Tx_n\|^p \\
&\leq \|T\|^p \sum_{n<N_{\hat{x}}} \|x_n\|^p + 1 \\
&\leq C'^p \sum_{n<N_{\hat{x}}} \|x_n\|^p + 1.
\end{aligned}$$

En definitiva, $\|\widehat{T}\hat{x}\|_p^p$ está acotado por una constante que sólo depende de $\hat{x}$ cualquiera que sea $\widehat{T}$; gracias otra vez al principio de acotación uniforme podemos concluir la existencia de $C > 0$ de forma que

$$\pi_p(T) = \|\widehat{T}\| \leq C$$

para todo $T \in \mathcal{M}$.

$\square$

Proposición 1.1.3 *Todo conjunto relativamente compacto en $\Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-sumante.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell_w^p(X)$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad $\epsilon_p((x_n)) \leq 1$). Si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ es relativamente compacto, existen operadores $T_1, \ldots, T_m$ en $\mathcal{M}$ de forma que

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(T_i, \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}\right);$$

los operadores $T_1, \ldots, T_m$ son p-sumantes, luego existe n_0 tal que

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_i x_n\|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dado $T \in \mathcal{M}$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ con $\pi_p(T - T_{i_0}) < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$, de donde

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n \geq n_0} \|T x_n\|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{n \geq n_0} \|(T - T_{i_0}) x_n\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n \geq n_0} \|T_{i_0} x_n\|^p\right)^{1/p} \\
&< \pi_p(T - T_{i_0}) + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \\
&< \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \\
&= \varepsilon^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante.

□

Según hemos visto en las proposiciones anteriores, el concepto de p-sumabilidad uniforme en $\Pi_p(X,Y)$ es más fuerte que el de acotación pero más débil que el de compacidad relativa. Con los siguientes resultados se muestra que, en general, es un concepto distinto. La demostración de la proposición 1.1.4 es válida para $1 < p < \infty$; para $p = 1$ basta sustituir ℓ^q por c_0.

Proposición 1.1.4 *Cualquiera que se el espacio de Banach Y, se verifica que las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Todo subconjunto de $\Pi_p(X,Y)$ π_p-acotado es uniformemente p-sumante.

(b) $\mathcal{L}(\ell^q, X) = \mathcal{K}(\ell^q, X)$ *(*$\mathcal{L}(c_0, X) = \mathcal{K}(c_0, X)$ *si* $p = 1$*).*

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Sea $U\colon \ell^q \longrightarrow X$ un operador lineal y continuo. Vamos a demostrar que U es límite de la sucesión de operadores de rango finito–dimensional (U_k) en $\mathcal{L}(\ell^q, X)$ donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $U_k\colon \ell^q \longrightarrow X$ está definido por $U_k e_n = U e_n$ si $n \leq k$ y $U_k e_n = 0$ si $n > k$ ((e_n) es la base canónica de ℓ^q).

De la identificación $\mathcal{L}(\ell^q, X) \equiv \ell^p_w(X)$, resulta que la sucesión $(x_n) = (Ue_n)$ está en $\ell^p_w(X)$. Fijado $y_0 \in Y$ con $\|y_0\| = 1$, la isometría $x^* \in X^* \longmapsto x^* \otimes y_0 \in \Pi_p(X,Y)$ permite ver X^* como subespacio de $\Pi_p(X,Y)$. Se tiene entonces, por hipótesis, que el conjunto B_{X^*} es uniformemente p-sumante, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} |\langle x^*, x_n\rangle|^p < \varepsilon^p, \quad \forall x^* \in B_{X^*}.$$

De esta forma, si $k \geq n_0$ y $\alpha = (\alpha_n) \in B_{\ell^q}$:

$$\begin{aligned}
\|U\alpha - U_k\alpha\| &= \left\|\sum_{n>k} \alpha_n x_n\right\| \\
&= \sup_{x^* \in X^*} \left|\langle x^*, \sum_{n>k} \alpha_n x_n\rangle\right| \\
&\leq \sup_{x^* \in X^*} \sum_{n>k} |\alpha_n| |\langle x^*, x_n\rangle| \\
&\leq \sup_{x^* \in X^*} \|\alpha\|_{\ell^q} \left(\sum_{n>k} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{x^* \in X^*} \left(\sum_{n \geq n_0} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ un conjunto π_p-acotado, $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell^p_w(X)$. La condición (b) garantiza que el operador

$$\begin{aligned}
U\colon\ \ell^q &\longrightarrow X \\
e_n &\longmapsto x_n
\end{aligned}$$

es compacto y, por tanto, también lo es su adjunto $U^*\colon X^* \longrightarrow \ell^p$. Si $U^*(B_{X^*})$ es relativamente compacto en ℓ^p, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq n_0} |\langle U^*x^*, e_n\rangle|^p < \frac{\varepsilon}{C^p}, \quad \forall x^* \in B_{X^*},$$

donde $C = \sup_{T\in\mathcal{M}} \pi_p(T)$. Cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$ resulta

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\geq n_0} \|Tx_n\|^p\right)^{1/p} &\leq \pi_p(T) \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{n\geq n_0} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&\leq C \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{n\geq n_0} |\langle x^*, Ue_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&= C \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{n\geq n_0} |\langle U^*x^*, e_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

y $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante.

□

Observemos que la condición (b) es equivalente a $\ell^p_w(X) = \ell^p_u(X)$; en el caso particular de $p = 1$, lo que se afirma es que toda serie w.u.c. en X es incondicionalmente convergente, es decir, X no contiene copia de c_0. Esto nos llevará a soslayar el estudio de los conjuntos $\mathcal{M} \subset \Pi_1(X,Y)$ uniformemente 1-sumantes en el caso de X no contenga copia de c_0.

Proposición 1.1.5 *Si todo conjunto uniformemente p-sumante de $\Pi_p(X,Y)$ es relativamente compacto entonces Y es finito–dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado $x_0^* \in X^*$ verificando $\|x_0^*\| = 1$, la isometría $y \in Y \longmapsto x_0^* \otimes y \in \Pi_p(X,Y)$ permite ver Y como subespacio de $\Pi_p(X,Y)$. Si $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell^p_w(X)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq n_0} |\langle x_0^*, x_n\rangle|^p < \varepsilon;$$

por consiguiente, para cualquier $y \in B_Y$:

$$\sum_{n\geq n_0} \|(x_0^*\otimes y)(x_n)\|^p = \sum_{n\geq n_0} |\langle x_0^*, x_n\rangle|^p \|y\|^p < \varepsilon.$$

Esto demuestra que B_Y es uniformemente p-sumante y, por hipótesis, compacto.

$\square$

El recíproco de la proposición anterior no se tiene, en general. Por reducción al absurdo: consideremos X infinito–dimensional y que no contenga copia de c_0; así, los acotados de $\Pi_1(X, \mathbb{R}) \equiv X^*$ serían uniformemente 1-sumantes (proposición 1.1.4) y, por tanto, relativamente compactos, lo que entra en contradicción con que X es infinito–dimensional. El teorema 1.2.3 muestra que sí se verifica tal recíproco en el caso $p = 1$ y $X = c_0$.

A continuación, vamos a exponer algunas propiedades de los conjuntos uniformemente p-sumantes. La primera proporciona una caracterización alternativa de conjunto uniformemente p-sumante:

Proposición 1.1.6 *Si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ es uniformemente p-sumante entonces, cualesquiera que sean $H \subset \ell_w^p(X)$ relativamente compacto y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n \geq n_0} \|Tx_n\|^p < \varepsilon,$$

para todo $T \in \mathcal{M}$ y $(x_n) \in H$.

DEMOSTRACIÓN: Dado $\varepsilon > 0$ y $H \subset \ell_w^p(X)$ relativamente compacto, existen $x^1, \ldots, x^m \in H$ de forma que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x^i, \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2C}\right),$$

donde $C = \sup_{T \in \mathcal{M}} \pi_p(T)$. Si $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{n \geq n_i} \|Tx_n^i\|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad \forall T \in \mathcal{M}.$$

Pongamos $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$; dada $(x_n) \in H$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ con $\epsilon_p\left((x_n) - x^{i_0}\right) < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2C}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\geq n_0} \|Tx_n\|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{n\geq n_0} \|T(x_n - x^{i_0})\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n\geq n_0} \|Tx_n^{i_0}\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(T)\epsilon_p\left((x_n) - x^{i_0}\right) + \left(\sum_{n\geq n_0} \|Tx_n^{i_0}\|^p\right)^{1/p} \\
&< \pi_p(T)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2C} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$, lo que prueba el resultado.

□

Debemos hacer notar que la proposición anterior no es cierta, en general, si exigimos que la tesis se dé también para conjuntos H relativamente débilmente compactos. En efecto, sea $\mathcal{M} = B_{\ell^2} \subset \Pi_1(\ell^2, \mathbb{R}) \equiv \ell^2$ y $H = \{(\beta_n e_n) \colon \beta = (\beta_n) \in B_{\ell^2}\} \subset \ell^1_w(\ell^2)$, donde (e_n) es la base canónica de ℓ^2. El conjunto $\mathcal{M}$ es acotado y, por tanto, uniformemente 1-sumante (proposición 1.1.4). Por otro lado, el operador

$$\begin{array}{rccc} S: & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^1_w(\ell^2) \\ & (\beta_n) & \longmapsto & (\beta_n e_n) \end{array}$$

es (débil–débil) continuo, por lo que la reflexividad de ℓ^2 permite garantizar que $H = S(B_{\ell^2})$ es relativamente débilmente compacto. Sin embargo, dado $k \in \mathbb{N}$, para $T_k = e_k \in \mathcal{M}$ y $\beta^k = e_k \in B_{\ell^2}$, obtenemos

$$\sum_{n\geq k} |T_k(\beta^k_n e_n)| = \sum_{n\geq k} |\langle e_k, \beta^k_n e_n\rangle| = |\langle e_k, e_k\rangle| = 1.$$

La siguiente proposición muestra que el estudio de los conjuntos uniformemente p-sumantes puede reducirse al comportamiento de sus sucesiones:

Proposición 1.1.7 *Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ un conjunto acotado. Entonces, $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante si y sólo si cualquier sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$ admite una subsucesión uniformemente p-sumante.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-sumante, cualquier subconjunto suyo lo es. En el otro sentido, si $\mathcal{M}$ no fuera uniformemente p-sumante, existiría $(x_n) \in \ell_w^p(X)$ y $\varepsilon > 0$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $T_k \in \mathcal{M}$ de forma que

$$\sum_{n \geq k} \|T_k x_n\|^p > \varepsilon.$$

Si (T_{k_j}) es una subsucesión cualquiera de (T_k), para cada $j \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\sum_{n \geq j} \|T_{k_j} x_n\|^p \geq \sum_{n \geq k_j} \|T_{k_j} x_n\|^p > \varepsilon$$

por lo que (T_k) no tiene subsucesiones uniformemente p-sumantes, lo que entra en contradicción con la hipótesis.

□

A la vista del resultado anterior, parece interesante poner de manifiesto que existen conjuntos relativamente débilmente compactos que no son uniformemente sumantes. Por ejemplo, para cada $\beta = (\beta_n) \in \ell^2$ consideremos el operador $T_\beta \colon c_0 \longrightarrow \ell^2$ definido por $T(\alpha_n) = (\alpha_n \cdot \beta_n)$ y pongamos $\mathcal{M} = \{T_\beta \colon \beta \in B_{\ell^2}\} \subset \Pi_2(c_0, \ell^2)$ ([LPe]; [DJT, teorema 3.5]). Si consideramos ℓ^2 como subespacio de $\Pi_2(c_0, \ell^2)$, el conjunto $\mathcal{M} = B_{\ell^2}$ es relativamente débilmente compacto. Sin embargo, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \geq k} \|T_{e_k} e_n\|_2^2 = 1,$$

luego $\mathcal{M}$ no puede ser unifomemente 2-sumante.

La proposición que sigue prueba que existen conjuntos uniformemente p-sumantes que no son relativamente débilmente compactos. La demostración es análoga a la de la proposición 1.1.5:

Proposición 1.1.8 *Si todo subconjunto uniformemente p-sumante de $\Pi_p(X,Y)$ es relativamente débilmente compacto entonces Y es reflexivo.*

Nuevamente, es fácil ver que, en general, no es cierto el recíproco del resultado anterior (para $p = 1$, considérese, por ejemplo, $X = \ell^1$ e $Y = \mathbb{R}$). En el siguiente capítulo, se demostrará que sí se tiene en el caso $p = 1$ y $X = \mathcal{C}(\Omega)$ (corolario 2.3.1).

Terminamos esta sección estudiando posibles extensiones de propiedades de los operadores p-sumantes a conjuntos uniformemente sumantes. En primer lugar, sabemos que un operador T es p-sumante si y sólo si T^{**} lo es [DJT, proposición 2.19]. Así pues, es natural preguntarse si un conjunto $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante si y sólo si $\mathcal{M}^{**} = \{T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y : \ T \in \mathcal{M}\}$ lo es. Un razonamiento estándar permite demostrar que $\mathcal{M}$ es uniformemente p-sumante si $\mathcal{M}^{**}$ lo es. Desafortunadamente, el recíproco no es cierto, en general: es suficiente tomar como X el $\mathcal{L}^{\infty}$-espacio separable de Bourgain–Delbaen [BoDe]. Este espacio posee la propiedad de Radon–Nikodym, luego no contiene copia de c_0. Sin embargo, X^* es isomorfo a ℓ^1 y, por tanto, X^{**} contiene una copia de c_0. Sea (e_n) la base canónica de ℓ^1 y $J : \ell^1 \longrightarrow X^*$ un isomorfismo. Pongamos $T_n = Je_n \in \Pi_1(X, \mathbb{R})$. El conjunto $\mathcal{M} = \{T_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente 1-sumante por ser acotado (proposición 1.1.4). Obsérvese que los elementos de $\mathcal{M}^{**}$ son las formas lineales

$$T_n^{**} : x^{**} \in X^{**} \longmapsto \langle x^{**}, Je_n \rangle \in \mathbb{R},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si (e_n^*) es la base canónica de c_0, entonces $((J^*)^{-1}(e_n^*)) \in \ell_w^1(X^{**})$. Es fácil ya comprobar que $\mathcal{M}^{**}$ no es uniformemente 1-sumante: cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$ resulta

$$\sum_{n \geq k} \left| T_k^{**}\left((J^*)^{-1}(e_n^*)\right) \right| = \sum_{n \geq k} |\langle (J^*)^{-1}(e_n^*), Je_k \rangle|$$

$$= \sum_{n \geq k} |\langle e_n^*, e_k \rangle| = 1.$$

En la siguiente sección veremos que sí es cierto el recíproco si $X = c_0$.

Es conocido que, cualesquiera que sean los espacios de Banach X e Y, se tiene $\Pi_1(X, Y) \subset \Pi_p(X, Y)$ [DJT, teorema 2.8]. A continuación, se proporciona un ejemplo de que, en cierto sentido, esta propiedad no se extiende a conjuntos uniformemente sumantes:

Ejemplo 1.1.9 *Existe un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\ell^2, \ell^2) \subset \Pi_2(\ell^2, \ell^2)$ de forma que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante pero no uniformemente 2-sumante.*

Para cada $\beta = (\beta_n) \in B_{\ell^2}$, consideremos el operador lineal $T_\beta : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ tal que $T_\beta e_n = \beta_n e_n$. Obsérvese que

$$\sum_n \|T_\beta e_n\|_2^2 = \sum_n \|\beta_n e_n\|_2^2 = \sum_n |\beta_n|^2 \leq 1,$$

luego cada operador T_β es de Hilbert–Schmidt y, por ello, 1-sumante ([P3] y [Pe2]; [DJT, corolario 4.13]). Consideremos el conjunto $\mathcal{M} = \{T_\beta : \beta \in B_{\ell^2}\} \subset \Pi_1(\ell^2, \ell^2)$, que es acotado y, por tanto, uniformemente 1-sumante (proposición 1.1.4). Sin embargo, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{n \geq k} \|T_{e_k} e_n\|_2^2 = 1,$$

luego $\mathcal{M}$ no es uniformemente 2-sumante.

1.2 Conjuntos uniformemente 1-sumantes en $\Pi_1(c_0, Y)$

Como se ha comprobado en el comentario posterior a la proposición 1.1.4, el concepto de 1-sumabilidad uniforme en $\Pi_1(X, Y)$ sólo tiene interés si X no contiene copia de c_0. En esta sección, nos proponemos caracterizar tal concepto en el caso más sencillo, es decir, para subconjuntos de $\Pi_1(c_0, Y)$.

La ventaja del estudio de los conjuntos uniformemente 1-sumantes en $\Pi_1(c_0, Y)$ reside en que este espacio puede identificarse isométricamente con el espacio de las sucesiones en Y absolutamente sumables, que venimos denotando por $\ell_a^1(Y)$. En efecto, si (e_n) es la base canónica de c_0, dado $T \in \Pi_1(c_0, Y)$, la sucesión (Te_n) es absolutamente sumable pues $(e_n) \in \ell_w^1(c_0)$. Además:

$$\sum_n \|Te_n\| \leq \pi_1(T)\epsilon_1((e_n))$$

es decir, $\|(Te_n)\|_1 \leq \pi_1(T)$. Si partimos ahora de una sucesión $(y_n) \in \ell_a^1(Y)$, se determina de manera unívoca un operador lineal y continuo $T : c_0 \longrightarrow Y$ mediante la asignación $Te_n = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Otra forma de definir este operador es poniendo $T = \sum_n e_n^* \otimes y_n$, donde (e_n^*) es la base canónica en ℓ^1 y la convergencia de la serie es en $\mathcal{L}(c_0, Y)$; esto desvela que T es nuclear ([PrP]; [DJT, proposición 5.23]) y, por tanto, 1-sumante. De hecho, si $\nu_1(\cdot)$ denota la norma 1-nuclear, se tiene

$$\pi_1(T) \leq \nu_1(T) \leq \sum_n \|y_n\|,$$

por lo que $\pi_1(T) \leq \|(y_n)\|_1$.

Teniendo en cuenta lo anterior, en lo que sigue nos referiremos a los elementos de $\Pi_1(c_0, Y)$ bien como operadores, bien como sucesiones de $\ell_a^1(Y)$, según se crea más conveniente.

El teorema siguiente aporta una caracterización de conjunto uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(c_0, Y)$:

Teorema 1.2.1 *Un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, Y)$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{M}$ es puntualmente acotado, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k \geq k_0} \|Te_k\| < \varepsilon$, cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, Y)$ es un conjunto uniformemente 1-sumante, la condición (i) es inmediata de la proposición 1.1.2, mientras que la condición (ii) resulta de la definición de tales conjuntos tomando como sucesión $(e_n) \in \ell_w^1(c_0)$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_1(c_0, Y)$ que verifica las condiciones (i) y (ii). Consideremos $\varepsilon > 0$ y $(x^n) \in \ell_w^1(c_0)$ con $\epsilon_1((x^n)) \leq 1$. La condición (ii) garantiza la existencia de $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_{k \geq k_0} \|Te_k\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall T \in \mathcal{M}. \tag{1.1}$$

Gracias a la condición (i), para cada $k < k_0$, existe un número real $M_k > 0$ verificando $\|Te_k\| \leq M_k$, para todo $T \in \mathcal{M}$. Por otra parte, al estar (x^n) en $\ell_w^1(c_0)$ se tiene

$$\sum_n |x_k^n| = \sum_n |\langle e_k^*, x^n \rangle| < \infty,$$

donde (e_k^*) es la base canónica de ℓ^1; así pues, para cada $k < k_0$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_k} |x_k^n| < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k<k_0} M_k}. \tag{1.2}$$

Ahora, haciendo $n_0 = \max\{n_k : k < k_0\}$, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq n_0} \|Tx^n\| &= \sum_{n \geq n_0} \left\| \sum_k x_k^n T e_k \right\| \\
&\leq \sum_{n \geq n_0} \left(\sum_k |x_k^n| \|Te_k\| \right) \\
&= \sum_{k<k_0} \left(\sum_{n \geq n_0} |x_k^n| \right) \|Te_k\| + \sum_{k \geq k_0} \left(\sum_{n \geq n_0} |x_k^n| \right) \|Te_k\| \\
&\leq \sum_{k<k_0} \left(\sum_{n \geq n_0} |x_k^n| \right) \|Te_k\| + \sum_{k \geq k_0} \epsilon_1(x^n) \|Te_k\|,
\end{aligned}$$

expresión esta última que puede hacerse menor que ε gracias a (1.1) y (1.2), cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$.

□

En el siguiente ejemplo, se utiliza el resultado anterior para comprobar que el conjunto en $\Pi_1(c_0, \ell^1)$ que se considera es uniformemente 1-sumante:

Ejemplo 1.2.2 Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión

$$y_k^n = \frac{ne_k}{nk^2 + 1} \in \ell^1$$

y sea $\mathcal{M} = \{y^n = (y_k^n)_k : \ n \in \mathbb{N}\}$. Obsérvese que

$$\sum_k \frac{n}{nk^2 + 1} = \sum_k \frac{1}{k^2 + \frac{1}{n}} \leq \sum_k \frac{1}{k^2} < \infty,$$

luego $y^n \in \ell_a^1(\ell^1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, \ell^1)$.

Para demostrar que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante utilicemos el teorema 1.2.1. Denotemos por T^n el operador en $\Pi_1(c_0, \ell^1)$ correspondiente a y^n; si $(x_k) \in$

c_0, entonces

$$\|T^n(x_k)\| = \left\|\sum_k x_k y_k^n\right\| \leq \sum_k |x_k| \|y_k^n\| \leq \sup_k |x_k| \sum_k \frac{1}{k^2},$$

luego $\mathcal{M}$ es puntualmente acotado. Para comprobar (ii), fijemos $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\sum_{k \geq k_0} \dfrac{1}{k^2} < \varepsilon$. Entonces, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k \geq k_0} \|T^n e_k\| = \sum_{k \geq k_0} \|y_k^n\| \leq \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Es conocido que los conjuntos $\mathcal{M}$ relativamente compactos de $\ell_a^1(Y)$ están caracterizados por las dos condiciones siguientes:

(RC-i) el conjunto $J_m(\mathcal{M})$ es relativamente compacto en Y, para todo $m \in \mathbb{N}$ (J_m denota el operador que a cada $(y_k) \in \ell_a^1(Y)$ le asigna $y_m \in Y$), y

(RC-ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k \geq k_0} \|y_k\| < \varepsilon$, cualquiera que sea $(y_k) \in \mathcal{M}$.

Teniendo presente la identificación anterior entre $\Pi_1(c_0, Y)$ y $\ell_a^1(Y)$, es fácil obtener las condiciones (i) y (ii) del teorema 1.2.1 a partir de las condiciones anteriores. Resulta así una sencilla demostración de que la compacidad relativa implica la 1-sumabilidad uniforme en el caso particular de $\Pi_1(c_0, Y)$. El siguiente resultado muestra cuándo estos conceptos son equivalentes en $\Pi_1(c_0, Y)$:

Teorema 1.2.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Y es finito-dimensional.

(b) Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, Y)$ uniformemente 1-sumante es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Si $\mathcal{M}$ es un subconjunto de $\Pi_1(c_0, Y) \equiv \ell_a^1(Y)$ uniformemente 1-sumante, entonces es acotado. Para cada $m \in \mathbb{N}$, la aplicación $J_m : \ell_a^1(Y) \longrightarrow Y$ es lineal y continuo. Así pues, $J_m(\mathcal{M})$ es acotado en Y y, por hipótesis, relativamente compacto, con lo que se obtiene (RC-i). Basta ya observar que la condición (ii) del teorema 1.2.1 es equivalente a (RC-ii).

(b)$\Rightarrow$(a) Es un caso particular de la proposición 1.1.5. Otra forma, utilizando la caracterización anterior, es la siguiente. Sea $(y_k) \in \ell^1_a(Y)$; el conjunto $\mathcal{M} = \{(y, y_1, y_2, \ldots) : y \in B_Y\} \subset \ell^1_a(Y)$ es uniformemente 1-sumante y, por tanto, relativamente compacto. Así, $B_Y = J_1(\mathcal{M})$ es también relativamente compacto e Y debe ser finito-dimensional.

□

Para acabar la sección justificaremos que, si $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, Y)$ es uniformemente 1-sumante también lo es $\mathcal{M}^{**} = \{T^{**} : T \in \mathcal{M}\} \subset \Pi_1(c_0^{**}, Y)$. En efecto, basta observar que, si $T : c_0 \longrightarrow Y$ es un operador lineal y continuo, entonces $T^{**} : \ell^\infty \longrightarrow Y$ actúa de la siguiente forma:

$$(x_k) \in \ell^\infty \longmapsto \sum_k x_k T e_k \in Y,$$

por lo que, un razonamiento análogo al de la demostración del teorema 1.2.1, nos conduce a nuestro objetivo.

1.3 Conjuntos uniformemente p-dominados

Definición 1.3.1 *Un conjunto* $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ *se dice* uniformemente p-dominado *si existe una medida de Radon positiva* μ *sobre el (débil-*) compacto* B_{X^*} *tal que*

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*) \tag{1.3}$$

para todo $x \in X$ *y* $T \in \mathcal{M}$.

Si μ es una medida como la de la definición anterior, denotaremos por $\mathcal{D}_p(\mu)$ el conjunto de todos los operadores $T \in \Pi_p(X, Y)$ que satisfacen (1.3) para todo $x \in X$. Es fácil comprobar que todo conjunto $\mathcal{D}_p(\mu)$ es un disco de Banach, es decir, es absolutamente convexo, cerrado y acotado (para la norma p-sumante).

El teorema de dominación de Grothendieck–Pietsch asegura que un operador T entre espacios de Banach es p-sumante si y sólo si existe una medida μ como arriba de forma que se tiene la desigualdad (1.3) para dicho operador; en tal caso, $\pi_p(T) = \mu(B_{X^*})^{1/p}$. Desde la aparición de este conocido teorema ([G] y [P3]), hay un gran interés en averiguar la estructura de los conjuntos uniformemente p-dominados. En [MPi], los autores consideran el caso $p = 1$ y prueban que $\mathcal{M} \subset \Pi_1(X, Y)$ es uniformemente 1-dominado si y sólo si $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ está contenido en el rango de una medida vectorial de variación acotada y X^*-valorada. En [KH], se demuestra la siguiente condición suficiente: "Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ y $1 \leq p < \infty$. Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que, cualquiera que sea el conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de X, existe $Q \in \mathcal{M}$ verificando $\pi_p(Q) \leq C$ y

$$\sum_{n=1}^{m} \|Tx_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{m} \|Qx_n\|^p$$

para todo $T \in \mathcal{M}$; entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente p-dominado". Además, se prueba que la condición anterior es necesaria en el caso particular de que $\mathcal{M} \subset \Pi_p(c_0, c_0)$ y $\mathcal{M} = \mathcal{D}_p(\mu)$ para alguna medida de Radon positiva μ sobre B_{ℓ^1}.

El estudio en esta sección de los conjuntos uniformemente p-dominados de operadores entre espacios de Banach está justificado porque este tipo de conjuntos constituyen una subclase dentro de la clase de los conjuntos uniformemente p-sumantes (corolario 1.3.3). Como resultado principal, se obtiene una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ sea uniformemente p-dominado (teorema 1.3.10 y corolario 1.3.11).

Comenzamos exponiendo algunas maneras alternativas de comprobar que un conjunto es uniformemente dominado:

Teorema 1.3.2 *Las condiciones siguientes son equivalentes para un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\Pi_p(X, Y)$:*

(a) *$\mathcal{M}$ es uniformemente p-dominado.*

(b) *Para todo $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell^p_w(X)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n\geq n_0} \|T_n x_n\|^p < \varepsilon,$$

cualquiera que sea la sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$.

(c) Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_n x_n\|^p \leq C^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{m} |\langle x^*, x_n \rangle|^p$$

para todo $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ y $\{T_1, \ldots, T_m\} \subset \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Sea $\mathcal{M}$ un conjunto uniformemente p-dominado y μ una medida de Radon positiva verificando (1.3) para todo $x \in X$ y $T \in \mathcal{M}$. De forma parecida a la demostración del teorema de factorización de Pietsch en [LPe] y [Ma] (véase también [DJT, teorema 2.13]), podemos obtener, para todo $T \in \mathcal{M}$, operadores $U_T \colon L^p(\mu) \longrightarrow \ell^\infty_{B_{Y^*}}$, $\|U_T\| \leq \mu(B_{X^*})^{1/p}$, y un operador $V \colon X \longrightarrow L^\infty(\mu)$ que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "V"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\ & & \ell B_{Y^*}{}^{\infty} \\ L^\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"] & L^p(\mu) \arrow[ur, "U_T"'] & \end{tikzcd}$$

Aquí i_p es la inyección canónica de $L^\infty(\mu)$ en $L^p(\mu)$ e i_Y la isometría de Y en $\ell^\infty_{B_{Y^*}}$ definida por $i_Y(y) = (\langle y^*, y \rangle)_{y^* \in B_{Y^*}}$. Dado $\varepsilon > 0$ y $(x_n) \in \ell^p_w(X)$, podemos garantizar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$\sum_{n \geq n_0} \|(i_p \circ V) x_n\|^p < \frac{\varepsilon}{\mu(B_{X^*})}$$

puesto que $i_p \circ V$ es p-sumante. Entonces, si (T_n) es una sucesión en $\mathcal{M}$, se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} \|T_n x_n\|^p &= \sum_{n \geq n_0} \|(i_Y \circ T_n) x_n\|^p = \sum_{n \geq n_0} \|(U_{T_n} \circ i_p \circ V) x_n\|^p \\ &\leq \mu(B_{X^*}) \sum_{n \geq n_0} \|(i_p \circ V) x_n\|^p \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$(c) Si un conjunto $\mathcal{M}$ satisface (b) entonces es acotado para la norma operador (como en la demostración de la proposición 1.1.2); además, dada $\hat{x} = (x_n) \in \ell^p_w(X)$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_n x_n\|^p < 1$$

cualquiera que sea (T_n) en $\mathcal{M}$. En consecuencia,

$$\sum_{n<n_0} \|T_n x_n\|^p + \sum_{n\geq n_0} \|T_n x_n\|^p < \underbrace{\sup_{T\in\mathcal{M}} \|T\|^p \sum_{n<n_0} \|x_n\|^p + 1}_{K_{\hat{x}}};$$

en definitiva, cualquiera que sea $\hat{x} \in \ell^p_w(X)$ existe una constante $K_{\hat{x}} > 0$ cumpliéndose

$$\sum_n \|T_n x_n\|^p \leq K_{\hat{x}}, \quad \forall (T_n) \subset \mathcal{M}. \tag{1.4}$$

Consideremos ahora los operadores lineales

$$\widehat{T}\colon (x_n) \in \ell^p_w(X) \longmapsto (T_n x_n) \in \ell^p_a(Y)$$

para cada $\widehat{T} = (T_n)$ en $\mathcal{M}$. Tales operadores tienen grafo cerrado. Ahora, la desigualdad (1.4) se traduce en

$$\|\widehat{T}\hat{x}\|_p^p \leq K_{\hat{x}}, \quad \forall \widehat{T} \subset \mathcal{M}.$$

El principio de acotación uniforme asegura la existencia de una constante $K > 0$ tal que $\|\widehat{T}\| \leq K$, para todo $\widehat{T} \subset \mathcal{M}$; es decir,

$$\left(\sum_n \|T_n x_n\|^p\right)^{1/p} \leq K\epsilon_p(x_n),$$

para todo $(x_n) \in \ell^p_w(X)$ y (T_n) en $\mathcal{M}$.

(c)$\Rightarrow$(a) Esta parte de la demostración es similar a la prueba del teorema de dominación de Grothendieck–Pietsch en [LTz] (véase también [DJT, teorema 2.12]). Dados $A = \{T_1, \ldots, T_m\} \subset \mathcal{M}$ y $B = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$, se define la función $\Psi_{A,B}\colon B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Psi_{A,B}(x^*) = C^p \left(\sum_{n=1}^m |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right) - \sum_{n=1}^m \|T_n x_n\|^p$$

para cada $x^* \in X^*$. El conjunto $\mathcal{P}$ cuyos elementos son las funciones $\Psi_{A,B}$ es, obviamente, subconjunto de $\mathcal{C}(B_{X^*})$. Además, $\mathcal{P}$ es convexo: si A, A' y B, B' son subconjuntos finitos de $\mathcal{M}$ y X, respectivamente, y $0 < \alpha < 1$, entonces $\alpha\Psi_{A,B} + (1-\alpha)\Psi_{A',B'} = \Psi_{A'',B''}$, donde $A'' = A \cup A'$ y $B'' = \alpha^{1/p}B \cup (1-\alpha)^{1/p}B'$. Por otra parte, la condición (c) garantiza que $\mathcal{P}$ es disjunto del cono $\mathcal{N} = \{\Phi \in \mathcal{C}(B_{X^*})\colon\ \Phi(x^*) < 0, \forall x^* \in B_{X^*}\}$; al ser $\mathcal{N}$ abierto y convexo, la versión geométrica del teorema de Hahn–Banach proporciona una medida $\mu \in \mathcal{C}(B_{X^*})^*$ y una constante K tal que,

$$\langle \mu, \Phi \rangle < K \leq \langle \mu, \Psi \rangle$$

para todo $\Phi \in \mathcal{N}$ y $\Psi \in \mathcal{P}$. Observemos que $K \leq 0$ pues la función idénticamente nula está en $\mathcal{P}$; por otro lado, $K \geq 0$ pues las funciones constantes negativas están en $\mathcal{N}$. Como μ es una forma lineal continua, $\langle \mu, \Psi \rangle \geq 0$ para toda $\Psi \geq 0$ en $\mathcal{C}(B_{X^*})$; así pues, podemos suponer que μ es una medida positiva de Radon sobre B_{X^*} y escribir

$$\int_{B_{X^*}} \Phi \, d\mu(x^*) < 0 \leq \int_{B_{X^*}} \Psi \, d\mu(x^*)$$

para todo $\Phi \in \mathcal{N}$ y $\Psi \in \mathcal{P}$. Si evaluamos la expresión anterior con funciones de $\mathcal{P}$ de la forma $\Psi_{\{T\},\{x\}}$ con $T \in \mathcal{M}$ y $x \in X$, resulta

$$0 \leq \int_{B_{X^*}} (C^p |\langle x^*, x \rangle|^p - \|Tx\|^p) \, d\mu(x^*)$$

y $\mathcal{M}$ es uniformemente p-dominado.

□

La condición (b) del resultado anterior nos permite concluir el siguiente

Corolario 1.3.3 *Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ uniformemente p-dominado es uniformemente p-sumante.*

Debemos observar que la condición (b) del teorema último es, en cierto sentido, cercana a la que caracteriza a los conjuntos uniformemente p-sumantes (definición (1.1.1)). Vamos a ver, sin embargo, que existen conjuntos uniformemente sumantes que no son uniformemente dominados. Previamente, vamos a hacer referencia a un nuevo tipo de conjuntos.

Denotaremos por $\mathcal{V}(X,Y)$ la clase de los operadores completamente continuos de X en Y, es decir, la clase de los operadores que llevan sucesiones débilmente nulas en X en sucesiones fuertemente nulas en Y.

Definición 1.3.4 *Un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ se dice* uniformemente completamente continuo *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada sucesión (x_n) débilmente nula en X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Tx_n\| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ y $T \in \mathcal{M}$.*

Proposición 1.3.5 *Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ uniformemente p-dominado es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: El hecho de que $\Pi_p(X,Y) \subset \mathcal{V}(X,Y)$ [DJT, teorema 2.17] permite comparar ambos tipos de conjuntos.

Si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ es uniformemente p-dominado, existe una medida μ de Radon positiva sobre B_{X^*} tal que

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*),$$

para todo $x \in X$ y $T \in \mathcal{M}$. Dado $\varepsilon > 0$ y (x_n) débilmente nula en X, definimos las funciones

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & B_{X^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x^* & \longmapsto & |\langle x^*, x_n\rangle|^p \end{array}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$; la sucesión $(f_n) \subset L^1(\mu)$ verifica las hipótesis del teorema de la convergencia dominada, luego $(f_n) \longrightarrow 0$ en $L^1(\mu)$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, se tiene

$$\|Tx_n\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_n\rangle|^p \, d\mu(x^*) = \|f_n\|_{L^1(\mu)} < \varepsilon^p.$$

□

Para espacios X que no contienen copia de c_0 es muy sencillo obtener ejemplos de conjuntos uniformemente sumantes que no son uniformemente dominados:

Ejemplo 1.3.6 *Existen conjuntos uniformemente sumantes que no son uniformemente dominados.*

Si X no contiene copia de c_0, el conjunto $\mathcal{M} = B_{X^*} \subset X^* = \Pi_1(X,\mathbb{R})$ es uniformemente 1-sumante (proposición 1.1.4). Si, además, exigimos a X que no posea la propiedad de Schur, existirá en dicho espacio una sucesión débilmente nula pero no fuertemente nula, por lo que $\mathcal{M} = B_{X^*}$ no puede ser uniformemente completamente continuo y, aún menos, uniformemente 1-dominado.

A continuación, se da otro contraejemplo para el corolario 1.3.3 con $X = c_0$:

Ejemplo 1.3.7 *Existe un conjunto uniformemente* 1*-sumante en* $\Pi_1(c_0, c_0)$ *que no es uniformemente* 1*-dominado.*

Pongamos $T_n = \frac{1}{n}(e_n^* \otimes e_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde (e_n) y (e_n^*) son las bases canónicas de c_0 y ℓ^1, respectivamente. Observemos que

$$\sum_k \|T_n e_k\| = \frac{1}{n}$$

luego $\pi_1(T_n) = \frac{1}{n}$. Utilizando el teorema 1.2.1 se deduce que (T_n) es uniformemente 1-sumante. Como aplicación del teorema 1.3.2 veamos, sin embargo, que la sucesión (T_n) no es uniformemente 1-dominada: dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{n \geq k} \|T_n e_n\| = \sum_{n \geq k} \frac{1}{n},$$

lo que contradice la condición (b) del citado teorema.

En el ejemplo anterior, se ha proporcionado un ejemplo de conjunto que, aun siendo relativamente compacto, no es uniformemente 1-dominado. En relación a esto, se deduce el siguiente teorema:

Proposición 1.3.8 *Cualquiera que sea el espacio de Banach* Y*, se tiene que las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Todo subconjunto relativamente compacto de $\Pi_p(X, Y)$ *es uniformemente* p*-dominado.*

(b) X *es finito-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Por reducción al absurdo, supongamos que X no tiene dimensión finita; el teorema de Dvoretzky–Rogers (débil) garantiza la existencia de una sucesión (x_n) en $\ell^p_w(X)$ de modo que $\sum_n \|x_n\|^p = \infty$. Consideremos una sucesión $(\alpha_n) \in c_0$ tal que

$$\sum_n |\alpha_n|^p \|x_n\|^p = \infty; \tag{1.5}$$

si (x_n^*) es una sucesión en B_{X^*} tal que $\|x_n\| = \langle x_n^*, x_n \rangle$, entonces $(\alpha_n x_n^*)$ es fuertemente nula en X^*. Así pues, el conjunto $(\alpha_n x_n^*)$ es relativamente compacto en $X^*(\hookrightarrow \Pi_p(X,Y))$ y, por hipótesis, uniformemente 1-dominado. El teorema 1.3.2 garantiza que

$$\sum_n |\alpha_n|^p \|x_n\|^p = \sum_n |\langle \alpha_n x_n^*, x_n \rangle|^p < \infty,$$

que entra en contradicción con (1.5).

(b)$\Rightarrow$(a) Es inmediato teniendo en cuenta que $\ell^p_w(X) = \ell^p_a(X)$.

$\square$

Debemos señalar que no existe, en general, ninguna relación entre el concepto de conjunto uniformemente sumante y el de conjunto uniformemente completamente continuo en operadores sumantes. Así, si X no contiene copia de c_0 y no posee la propiedad de Schur, B_{X^*} es uniformemente 1-sumante pero no es uniformemente completamente continuo, tal y como se pone de manifiesto en el ejemplo 1.3.6. Por otra parte tenemos el siguiente

Ejemplo 1.3.9 *Existe un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0, \ell^2)$ uniformemente completamente continuo que no es uniformemente* 1*-sumante.*

Sea $\lambda = (\lambda_k)$ una sucesión de ℓ^2 que no sea absolutamente sumable. Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos considerar el operador $T_m \colon c_0 \longrightarrow \ell^2$ definido por $T_m e_k = \lambda_k e_k$ si $k \le m$ y $T_m e_k = 0$ para $k > m$; tales operadores tienen rango finito–dimensional, luego $\mathcal{M} = (T_m) \subset \Pi_1(c_0, \ell^2)$. Dado $\varepsilon > 0$ y una sucesión (x^n) débilmente nula en c_0, sea $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_{k \ge k_0} |\lambda_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2C^2}, \tag{1.6}$$

donde $C = \sup_n \|x^n\|$. Al ser (x^n) débilmente nula en c_0, se tiene que $|x_k^n| \xrightarrow{n} 0$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$; por tanto, podemos garantizar la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando

$$|x_k^n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\|\lambda\|_2} \quad \forall n \geq n_0, \quad k = 1, \ldots, k_0 - 1. \tag{1.7}$$

Ahora, si $n \geq n_0$, tenemos

$$\|T_m x^n\|^2 = \left\| \sum_k x_k^n T_m e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |x_k^n|^2 |\lambda_k|^2, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Si $m < k_0$, la desigualdad (1.7) nos permite escribir

$$\|T_m x^n\|^2 < \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{2\|\lambda\|_2^2} |\lambda_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2,$$

mientras que si $m \geq k_0$, mediante (1.6) y (1.7) podemos deducir

$$\begin{aligned}
\|T_m x^n\|^2 &= \sum_{k<k_0} |x_k^n|^2 |\lambda_k|^2 + \sum_{k=k_0}^{m} |x_k^n|^2 |\lambda_k|^2 \\
&< \sum_{k<k_0} \frac{\varepsilon^2}{2\|\lambda\|_2^2} |\lambda_k|^2 + C^2 \sum_{k=k_0}^{m} |\lambda_k|^2 \\
&< \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \\
&< \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos encontrado un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que, si $n \geq n_0$, entonces $\|T_m x^n\| < \varepsilon$ cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$, por lo que $\mathcal{M}$ es uniformemente completamente continuo. Sin embargo, tal conjunto no es uniformemente 1-sumante; si lo fuera, existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=n_0}^{m} |\lambda_n| = \sum_{n \geq n_0} \|T_m e_n\| < 1,$$

lo cual es imposible pues λ no es absolutamente sumable.

A modo de comentario y antes de pasar al resultado central de esta sección, mostramos como puede definirse un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(X, Y)$ uniformemente 1-dominado a partir del concepto de conjunto uniformemente 1-sumante. Fijada

$\hat{x} = (x_n) \in \ell_w^1(X)$, para cada sucesión $\widehat{T} = (T_n)$ en $\mathcal{M}$ podemos definir el operador

$$\begin{array}{rccc} A_{\widehat{T}}^{\hat{x}}\colon & c_0 & \longrightarrow & Y \\ & e_n & \longmapsto & T_n x_n \end{array}$$

Denotando por Λ el conjunto de todas las posibles sucesiones de operadores en $\mathcal{M}$, la condición (b) del teorema 1.3.2 es equivalente a la siguiente:

(b') Para toda $\hat{x} = (x_n) \in \ell_w^1(X)$, el conjunto de operadores $\left\{A_{\widehat{T}}^{\hat{x}}\colon \widehat{T} \in \Lambda\right\}$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(c_0, Y)$.

Pasamos ya a exponer una caracterización de los conjuntos uniformemente p-dominados:

Teorema 1.3.10 *Sea Y un espacio de Banach sin cotipo finito. Las condiciones siguientes son equivalentes para un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\Pi_p(X,Y)$:*

(a) *$\mathcal{M}$ es uniformemente p-dominado.*

(b) *Existe una constante $C > 0$ de forma que, para cada subconjunto finito $\{(x_n, T_n)\colon\ n = 1, \ldots, m\} \subset X \times \mathcal{M}$, existe un operador $Q \in \Pi_p(X,Y)$ verificando $\pi_p(Q) \leq C$ y*

$$\|T_n x_n\| \leq \|Q x_n\|, \quad n = 1, \ldots, m.$$

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Por hipótesis, existe una medida de Radon positiva μ sobre B_{X^*} tal que

$$\|Tx\| \leq \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

para todo $x \in X$ y $T \in \mathcal{M}$. Como el espacio Y no tiene cotipo finito, Y contiene a los espacios ℓ_m^∞ uniformemente ([MaPs]; [DJT, teorema 14.1]); es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existe un isomorfismo J_m de ℓ_m^∞ sobre un subespacio de Y verificando $\|J_m^{-1}\| = 1$ y $\|J_m\| \leq 1 + \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Dados $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ y $\{T_1, \ldots, T_m\} \subset \mathcal{M}$ la desigualdad (1.8) nos dice que

$$\|T_n x_n\| \leq \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_n\rangle|^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p}, \quad n = 1, \ldots, m. \tag{1.9}$$

Para cada $n = 1, \ldots, m$, tomemos $g_n \in L^q(\mu)$ tal que $\|g_n\|_{L^q(\mu)} = 1$ y

$$\left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n \rangle g_n(x^*) \, d\mu(x^*). \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10) obtenemos

$$\|T_n x_n\| \leq \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n \rangle g_n(x^*) \, d\mu(x^*), \quad n = 1, \ldots, m. \tag{1.11}$$

Pongamos $y_n = J_m e_n$, siendo $(e_n)_{n=1}^m$ la base canónica en ℓ_m^∞. De esta forma, puede definirse el operador $Q \colon X \longrightarrow Y$ por

$$Qx = \sum_{n=1}^m \left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle g_n(x^*) \, d\mu(x^*) \right) y_n.$$

Dicho operador es p-sumante por tener rango finito–dimensional; puede obtenerse, incluso, una estimación de $\pi_p(Q)$:

$$\begin{aligned}
&\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left| \langle y^*, \sum_{n=1}^m \left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle g_n(x^*) \, d\mu(x^*) \right) y_n \rangle \right| \\
&\leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n=1}^m \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle| |g_n(x^*)| \, d\mu(x^*) \right) |\langle y^*, y_n \rangle| \\
&\leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n=1}^m \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} \|g_n\|_{L^q(\mu)} |\langle y^*, y_n \rangle| \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n=1}^m |\langle y^*, y_n \rangle| \\
&\leq \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} \|J_m^*\| \\
&\leq \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} (1 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

En consecuencia, resulta

$$\|Qx\| \leq \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p} (1 + \varepsilon),$$

de donde se deduce fácilmente que $\pi_p(Q) \leq \mu(B_{X^*})^{1/p}(1 + \varepsilon)$.

Finalmente, necesitamos demostrar $\|T_n x_n\| \leq \|Q x_n\|$ para $n = 1, \ldots, m$. Pongamos $y_n^* = e_n^* \circ J_m^{-1}$, donde $(e_n^*)_{n=1}^m$ es la base canónica de $(\ell_m^\infty)^* \simeq \ell_m^1$;

observemos que $\|y_n^*\| \leq 1$ para $n = 1, \ldots, m$. Si volvemos a denotar por y_n^* la extensión de Hahn–Banach de $e_n^* \circ J_m^{-1}$ a Y, resulta

$$\begin{aligned}
\|Qx_n\| &\geq |\langle y_n^*, Qx_n\rangle| \\
&= \left|\langle y_n^*, \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n\rangle g_i(x^*)\, d\mu(x^*)\right) y_i\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n\rangle g_i(x^*)\, d\mu(x^*)\right) \langle y_n^*, y_i\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n\rangle g_i(x^*)\, d\mu(x^*)\right) \langle e_n^* \circ J_m^{-1}, J_m e_i\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n\rangle g_i(x^*)\, d\mu(x^*)\right) \langle e_n^*, e_i\rangle\right| \\
&= \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x_n\rangle g_n(x^*)\, d\mu(x^*) \\
&\geq \|T_n x_n\|,
\end{aligned}$$

la última desigualdad gracias a (1.11).

(b)$\Rightarrow$(a) Sean $(x_n) \in \ell_w^p(X)$ y $(T_n) \subset \mathcal{M}$. Por hipótesis, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un operador $Q_m \in \Pi_p(X, Y)$ verificando $\pi_p(Q_m) \leq C$ y $\|T_n x_n\| \leq \|Q_m x_n\|$, para $n = 1, \ldots, m$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_n x_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{m} \|Q_m x_n\|^p \leq C^p \epsilon_p^p\left((x_n)\right),$$

de donde se sigue que $\mathcal{M}$ es uniformemente p-dominado (teorema 1.3.2(c)).

$\square$

Es conocido que cualquier espacio de Banach Y puede sumergirse en el espacio $\ell_{B_{Y^*}}^\infty$ mediante la isometría $i_Y\colon y \in Y \longmapsto (\langle y^*, y\rangle)_{y^* \in B_{Y^*}}$; puesto que un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ es uniformemente p-dominado si y sólo si lo es $\{i_Y \circ T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ y teniendo presente que $\ell_{B_{Y^*}}^\infty$ es un espacio sin cotipo finito, podemos concluir el siguiente resultado:

Corolario 1.3.11 *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_p(X, Y)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathcal{M}$ *es uniformemente p-dominado.*

(b) *Existe una constante* $C > 0$ *de forma que, para cada subconjunto finito* $\{(x_n, T_n)\colon\ n = 1, \ldots, m\} \subset X \times \mathcal{M}$, *existe un operador* $Q \in \Pi_p(X, \ell^\infty_{B_{Y^*}})$ *verificando* $\pi_p(Q) \leq C$ *y*

$$\|T_n x_n\| \leq \|Q x_n\|, \quad n = 1, \ldots, m.$$

OBSERVACIONES

1. Es interesante proporcionar un ejemplo de un conjunto $\mathcal{M}$ uniformemente dominado para el que no exista $Q \in \mathcal{M}$ satisfaciendo $\|T_n x_n\| \leq \|Q x_n\|$, $n = 1, \ldots, m$ para algún conjunto finito $\{(x_n, T_n)\colon\ n = 1, \ldots, m\} \subset X \times \mathcal{M}$. Pongamos $X = \ell^1$ e $Y = \ell^\infty$ y consideremos el conjunto $\mathcal{M} = \{T_\beta\colon \beta \in B_{\ell^2}\}$, donde $T_\beta\colon \ell^1 \longrightarrow \ell^\infty$ está definido por $T_\beta \alpha = (\alpha_k \cdot \beta_k)$ para todo $\alpha = (\alpha_k) \in \ell^1$. Cada operador T_β puede verse como $S_\beta \circ i$, donde $S_\beta\colon (\alpha_k) \in \ell^2 \longmapsto (\alpha_k \cdot \beta_k) \in \ell^\infty$ e i es la inclusión natural de ℓ^1 en ℓ^2. El teorema de Grothendieck ([G]; [DJT, teorema 1.13]) afirma que el operador i es 1-sumante luego, por la propiedad de ideal, también lo es T_β; una nueva referencia al teorema de dominación de Grothendieck–Pietsch permite asegurar la existencia de una medida de Radon positiva μ sobre B_{ℓ^∞} de manera que

$$\|T_\beta \alpha\| = \|(S_\beta \circ i)\alpha\| \leq \|i\alpha\| \leq \int_{B_{\ell^\infty}} |\langle \alpha^*, \alpha \rangle| \, d\mu(\alpha^*)$$

para todo $\alpha \in \ell^1$ y $\beta \in B_{\ell^2}$, por lo que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado.

Sean $x_n = e_n$ y $T_n = T_{\beta^n}$, donde (e_n) es la base canónica de ℓ^1 y $\beta^n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \overset{(n)}{\ldots}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots\right) \in B_{\ell^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por reducción al absurdo, supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\gamma^m \in B_{\ell^2}$ tal que

$$\|T_n x_n\| \leq \|T_{\gamma^m} x_n\|, \quad n = 1, \ldots, m;$$

la desigualdad anterior se traduce en

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq |\gamma^m_n|, \quad n = 1, \ldots, m.$$

Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \sum_{n} |\gamma^m_n|^2 \leq 1$$

lo que nos lleva a deducir que la hipótesis supuesta es falsa.

2. Finalmente, se proporciona un ejemplo de un conjunto acotado de operadores 2-sumantes que no verifica la condición (b) del teorema 1.3.10. Consideremos el conjunto $\mathcal{M}$ de los operadores $T_\beta \colon c_0 \longrightarrow \ell^\infty$ definidos por $T_\beta \alpha = (\alpha_k \cdot \beta_k)$ para todo $\alpha = (\alpha_k) \in c_0$, donde $\beta = (\beta_k)$ recorre la bola unidad de ℓ^2. Se tiene $T_\beta = i \circ S_\beta$, siendo i la inclusión natural de ℓ^2 en ℓ^∞ y $S_\beta \colon c_0 \longrightarrow \ell^2$ definido por $S_\beta(\alpha) = (\alpha_k \cdot \beta_k)$; como ℓ^2 tiene cotipo 2, se sigue que S_β (y, por tanto, T_β) es 2-sumante [DJT].

   Consideremos, como antes, $\beta^n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \overset{(n)}{\ldots}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots\right) \in B_{\ell^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existiera una constante $C > 0$ de forma que se verificase (b) del teorema 1.3.10; entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ existiría $Q_m \in \Pi_2(c_0, \ell^\infty)$ tal que $\pi_2(Q_m) \leq C$ y
$$\|T_{\beta^n} e_n\| \leq \|Q_m e_n\|$$
   para $n = 1, \ldots, m$. En consecuencia,
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{m} \|T_{\beta^n} e_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} \|Q_m e_n\|^2 \leq C^2$$
   para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo que llegaríamos a contradicción.

Capítulo 2

Conjuntos de operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega)$

En el capítulo anterior, hemos visto que el concepto de 1-sumabilidad uniforme en $\Pi_1(X, Y)$ sólo tiene interés si el espacio de Banach X no contiene copia de c_0 (proposición 1.1.4). Entre los espacios X con tal propiedad, ocupan un papel crucial los espacios de funciones continuas. El objetivo principal de este capítulo es caracterizar la 1-sumabilidad uniforme en conjuntos de operadores definidos sobre espacios de funciones escalares continuas. El resultado central de la primera sección muestra algunas condiciones equivalentes a dicho concepto en términos de las medidas representantes de los operadores (teorema 2.1.1). La seccion 2.2 está dedicada a caracterizar los conjuntos uniformemente 1-dominados en los mismos términos (teorema 2.2.2). Finalizamos el capítulo con algunos resultados y ejemplos complementarios.

2.1 Conjuntos uniformemente sumantes en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$

Es conocido que, dado un operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow Y$, existe una medida $m_T\colon \Sigma \longrightarrow Y^{**}$ finitamente aditiva de semivariación acotada de forma que T admite la representación

$$T\varphi = \int_\Omega \varphi \, dm_T,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, cumpliéndose además $\|T\| = \|m_T\|(\Omega)$ ([BaDuSc]; [DU, teorema VI.2.1]); nos referiremos a dicha medida como la *medida representante* de T.

Recordemos que una medida vectorial m definida sobre la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de Ω es *regular* si para cada conjunto de Borel E y $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto K y un conjunto abierto O tal que $K \subset E \subset O$ y $\|m\|(O \backslash K) < \varepsilon$. Un resultado de Bartle–Dunford–Schwartz ([BaDuSc]; [DU, teorema VI.2.5 y corolario VI.2.14]) afirma que son equivalentes las condiciones siguientes para un operador T definido sobre $\mathcal{C}(\Omega)$:

1. T es débilmente compacto.
2. La medida m_T es Y-valorada.
3. La medida m_T es numerablemente aditiva.
4. La medida m_T es regular.

En el caso de los operadores 1-sumantes sobre $\mathcal{C}(\Omega)$, éstos están caracterizados porque su medida representante tiene variación acotada ([P]; [DU, proposición VI.3.2]). Puesto que todo operador 1-sumante es, en particular, débilmente compacto [DJT, teorema 2.17], su medida representante gozará además de las propiedades expuestas anteriormente.

Pasamos ya a exponer el resultado que caracteriza los conjuntos uniformemente 1-sumantes en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$:

Teorema 2.1.1 *Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), X)$ un conjunto acotado. Cualquiera de las condiciones siguientes implica a las demás:*

(a) $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

(b) La familia de medidas positivas $\{|m_T| \colon T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva.

(c) Si (E_n) es una sucesión de conjuntos de Borel de Ω disjuntos dos a dos, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} \|m_T(E_n)\| < \varepsilon,$$

para todo $T \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) La medida m_T es regular si y sólo si su variación $|m_T|$ lo es [Di3, III.15.6]. Por ello, para ver que la familia $\{|m_T|: T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva es suficiente probar que

$$\lim_n |m_T|(O_n) = 0$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$, cualquiera que sea la sucesión (O_n) de abiertos en Ω disjuntos dos a dos [DU, lema VI.2.13]. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varepsilon > 0$, una sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$ y una sucesión de números naturales (k_n) estrictamente creciente de forma que

$$|m_{T_n}|(O_{k_n}) > 2\varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los operadores $S_n: \mathcal{C}_{O_{k_n}}(\Omega) \longrightarrow Y$ definidos por

$$S_n\varphi = \int_{O_{k_n}} \varphi \, dm_{T_n}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_{O_{k_n}}(\Omega)$, donde $\mathcal{C}_{O_{k_n}}(\Omega)$ es el subespacio cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$ constituido por todas las funciones continuas φ sobre Ω que se anulan en $\Omega \backslash O_{k_n}$. Puesto que $\pi_1(S_n) = |m_{T_n}|(O_{k_n})$ [Di3, III.19.3], para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir un conjunto finito $\{\varphi_1^n, \dots, \varphi_{p_n}^n\} \subset \mathcal{C}_{O_{k_n}}(\Omega)$ verificando $\epsilon_1\left((\varphi_i^n)_{i=1}^{p_n}\right) \leq 1$ y

$$\sum_{i=1}^{p_n} \|S_n\varphi_i^n\| > \pi_1(S_n) - \varepsilon.$$

La sucesión $\left(\varphi_1^1, \dots, \varphi_{p_1}^1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_{p_2}^2, \dots\right)$ está en $\ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega))$ pues los conjuntos O_{k_n} son disjuntos dos a dos. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{m \geq n} \left(\sum_{i=1}^{p_m} \|T_n\varphi_i^m\| \right) \geq \sum_{i=1}^{p_n} \|T_n\varphi_i^n\| = \sum_{i=1}^{p_n} \|S_n\varphi_i^n\|$$
$$> \pi_1(S_n) - \varepsilon = |m_{T_n}|(O_{k_n}) - \varepsilon > \varepsilon,$$

que contradice (a).

(b)$\Rightarrow$(c) De nuevo, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que (E_n) es una sucesión de conjuntos de Borel de Ω disjuntos dos a dos para los que existe $\varepsilon > 0$, una sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$ y una sucesión de números naturales (k_n) estrictamente creciente cumpliendo

$$\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} \|m_{T_n}(E_i)\| > \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si ponemos

$$B_n = \bigsqcup_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} E_i,$$

la desigualdad anterior nos permite escribir

$$|m_{T_n}|(B_n) > \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que la familia $\{|m_T|\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ no puede ser uniformemente numerablemente aditiva [DU, proposición I.1.17].

(c)$\Rightarrow$(b) Dada una sucesión (E_n) de conjuntos de Borel de Ω disjuntos dos a dos, debemos demostrar

$$\lim_n |m_T|(E_n) = 0$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$. Supongamos que no se tiene (b); entonces existe $\varepsilon > 0$, una sucesión (T_n) en $\mathcal{M}$ y una sucesión de números naturales (k_n) estrictamente creciente que verifican

$$|m_{T_n}|(E_{k_n}) > \varepsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Elijamos una partición finita $\{E_1^n, \ldots, E_{p_n}^n\}$ de E_{k_n} de conjuntos de Borel de forma que

$$\sum_{i=1}^{p_n} \|m_{T_n}(E_i^n)\| > \varepsilon.$$

De nuevo, es inmediato comprobar que la sucesión $(E_1^1, \ldots, E_{p_1}^1, E_1^2, \ldots, E_{p_2}^2, \ldots)$ de conjuntos de Borel disjuntos dos a dos no satisface la condición (c).

(b)$\Rightarrow$(a) Si la familia de medidas $\{|m_T|\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva entonces existe una medida positiva μ numerablemente aditiva sobre los conjuntos de Borel de Ω tal que

$$\lim_{\mu(E)\to 0} |m_T|(E) = 0$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$ [DU, teorema I.2.4]. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de manera que, si $E \in \Sigma$ verifica $\mu(E) < \delta$ entonces $|m_T|(E) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para todo $T \in \mathcal{M}$.

Por otra parte, consideremos $(\varphi_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega))$ con $\epsilon_1\left((\varphi_n)\right) \leq 1$; es decir,

$$\sum_n |\langle \nu, \varphi_n \rangle| \leq 1$$

cualquiera que sea $\nu \in B_{\mathcal{C}(\Omega)^*}$. Si, para cada $\omega \in \Omega$, consideramos la medida delta de Dirac $\delta_\omega \in B_{\mathcal{C}(\Omega)^*}$, de lo anterior resulta que la serie $\sum_n |\varphi_n(\omega)|$ es convergente para todo $\omega \in \Omega$. Pongamos $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n |\varphi_k(\omega)|$ y $S(\omega) = \lim_n S_n(\omega)$. Por el teorema de Egorov, la sucesión (S_n) converge casi uniformemente a S; esto garantiza la existencia de un subconjunto de Borel E de Ω de forma que $\mu(E) < \delta$ y

$$S_{n|_{\Omega\backslash E}} \longrightarrow S_{|_{\Omega\backslash E}}$$

uniformemente. Por tanto, si $C = \sup\{|m_T|(\Omega)\colon\ T \in \mathcal{M}\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} |\varphi_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad \forall \omega \in \Omega\backslash E.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq n_0} \|T\varphi_n\| &= \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega \varphi_n(\omega)\, dm_T \right\| \\
&\leq \sum_{n\geq n_0} \int_\Omega |\varphi_n(\omega)|\, d|m_T| \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{n\geq n_0} |\varphi_n(\omega)| \right) d|m_T| \\
&= \int_E \left(\sum_{n\geq n_0} |\varphi_n(\omega)| \right) d|m_T| + \int_{\Omega\backslash E} \left(\sum_{n\geq n_0} |\varphi_n(t\omega)| \right) d|m_T| \\
&\leq |m_T|(E) + \frac{\varepsilon}{2C} |m_T|(\Omega\backslash E) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIONES

1. Gracias a [DU, teorema I.2.4], la condición (b) del resultado anterior puede sustituirse por

(b') *Existe una medida positiva μ numerablemente aditiva sobre Σ tal que la familia $\{|m_T|\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente μ-continua, es decir,*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} |m_T|(E) = 0$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$.

2. Si $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la compactificación de Alexandroff del espacio discreto $\mathbb{N}$, la aplicación

$$\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{N}^*) \longmapsto (\Phi(\infty), \Phi(1) - \Phi(\infty), \Phi(2) - \Phi(\infty), \ldots) \in c_0$$

es un isomorfismo que permite tratar c_0 como un espacio $\mathcal{C}(\Omega)$. De esta forma, es fácil obtener el teorema 1.2.1 como caso particular del resultado anterior.

En la definición 1.3.4 del capítulo anterior se introdujo el concepto de conjunto uniformemente completamente continuo y se comprobó que, en general, no hay ninguna relación entre este tipo de conjuntos y los conjuntos uniformemente sumantes. Sin embargo, en el caso de operadores definidos en $\mathcal{C}(\Omega)$, todo conjunto uniformemente 1-sumante va a ser uniformemente completamente continuo, como veremos a continuación. Recordemos que, para operadores definidos en $\mathcal{C}(\Omega)$, ser completamente continuo es equivalente a ser débilmente compacto ([G3]; [DU, corolario VI.2.17]), luego las medidas representantes correspondientes siguen siendo numerablemente aditivas y regulares.

Teorema 2.1.2 *Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ un conjunto acotado para la norma operador. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{M}$ es uniformemente completamente continuo.*

(b) *La familia de medidas $\{m_T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva.*

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Para probar que la familia $\{m_T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva es necesario y suficiente demostrar que la familia $\mathcal{N} = \{y^* \circ m_T\colon\ T \in \mathcal{M},\ y^* \in B_{Y^*}\}$ lo es [DU, proposición I.1.17]; a su vez, esto es equivalente a demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} y^* \circ m_T(O_n) = 0$$

uniformemente en $\mathcal{N}$, cualquiera que sea la sucesión (O_n) de subconjuntos abiertos en Ω [DU, lema VI.2.13]. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión (O_n) como la anterior de forma que $\lim_{n\to\infty} y^* \circ m_T(O_n) = 0$ pero no uniformemente en $\mathcal{N}$; entonces, existe un $\varepsilon > 0$, sucesiones (y_n^*) y (T_n) en B_{Y^*} y $\mathcal{M}$, respectivamente, y una sucesión de números naturales (k_n) estrictamente creciente tales que

$$|y_n^* \circ m_{T_n}(O_{k_n})| > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Utilizando la regularidad de cada m_{T_n}, podemos encontrar una sucesión (H_n) de compactos en Ω con $H_n \subset O_{k_n}$ y

$$\|m_{T_n}\|(O_{k_n}\backslash H_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el lema de Urysohn, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar una función continua $\varphi_n\colon \Omega \longrightarrow [0,1]$ tal que $\varphi_n \equiv 1$ en H_n y $\varphi_n \equiv 0$ en $\Omega\backslash O_{k_n}$. Al ser los soportes de las funciones φ_n disjuntos dos a dos, $\varphi_n(\omega) \xrightarrow{n} 0$ para todo $\omega \in \Omega$, luego (φ_n) es débilmente nula en $\mathcal{C}(\Omega)$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T\varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0, \forall T \in \mathcal{M}.$$

Para cada $n \geq n_0$, resulta entonces:

$$\begin{aligned}
\|m_{T_n}(O_{k_n})\| &\leq \|m_{T_n}(O_{k_n}) - T_n\varphi_n\| + \|T_n\varphi_n\| \\
&= \left\|\int_\Omega \chi_{O_{k_n}}\, dm_{T_n} - \int_\Omega \varphi_n\, dm_{T_n}\right\| + \|T_n\varphi_n\| \\
&= \left\|\int_{O_{k_n}} (1-\varphi_n)\, dm_{T_n}\right\| + \|T_n\varphi_n\| \\
&= \left\|\int_{O_{k_n}\backslash H_n} (1-\varphi_n)\, dm_{T_n}\right\| + \|T_n\varphi_n\| \\
&\leq \|m_{T_n}\|(O_{k_n}\backslash H_n) + \|T_n\varphi_n\| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que contradice (2.1).

(b)$\Rightarrow$(a) La condición (b) permite asegurar la existencia de una medida positiva μ numerablemente aditiva sobre los conjuntos de Borel de Ω tal que la familia $\{m_T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente μ-continua [DU, teorema I.2.4]. Por tanto, si (φ_n) es una sucesión débilmente nula en $\mathcal{C}(\Omega)$, es obvio que 0 es el límite puntual de tal sucesión. Nuevamente, utilizando el teorema de Egorov y procediendo análogamente a la demostración (b)$\Rightarrow$(a) del teorema 2.1.1 se concluye el resultado.

$\square$

A la vista de los resultados anteriores podemos concluir el siguiente

Corolario 2.1.3 *Si $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ es uniformemente 1-sumante, entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente completamente continuo.*

El ejemplo 1.3.9 demuestra que no siempre es cierto el recíproco del resultado anterior.

Recordemos que un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es *incondicionalmente p-convergente* si lleva sucesiones débilmente p-sumables en sucesiones incondicionalmente p-sumables; la clase de los operadores de X en Y incondicionalmente p-convergentes se denotará por $\mathcal{U}_p(X,Y)$. Cuando X es un espacio $\mathcal{C}(\Omega)$, es conocido que los operadores incondicionalmente 1-convergentes son precisamente los operadores completamente continuos ([Pe]; [DU, corolario VI.2.17]), esto es, $\mathcal{U}_1(\mathcal{C}(\Omega), Y) = \mathcal{V}(\mathcal{C}(\Omega), Y)$. Nuestro siguiente objetivo consistirá en probar que la equivalencia entre ambos tipos de operadores se transmite a los respectivos conceptos sobre conjuntos de operadores.

Definición 2.1.4 *Se dice que un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}_p(X,Y)$ es* uniformemente incondicionalmente p-convergente *si, cualquiera que sea $(x_n) \in \ell^p_w(X)$, se verifica que la sucesión (Tx_n) es incondicionalmente p-sumable uniformemente en $T \in \mathcal{M}$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n \geq n_0} |\langle y^*, Tx_n\rangle|^p < \varepsilon$$

cualesquiera que sean $y^* \in B_{Y^*}$ y $T \in \mathcal{M}$.

De la definición anterior se deduce inmediatamente que un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}_p(X,Y)$ es uniformemente incondicionalmente p-convergente si y sólo si el conjunto $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ es uniformemente p-sumante en X^*. En consecuencia, todo conjunto uniformemente p-sumante en $\Pi_p(X,Y)$ es uniformemente incondicionalmente p-convergente.

Proposición 2.1.5 *Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}_1(X,Y)$ es tal que $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ es relativamente débilmente compacto entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente incondicionalmente* 1*-convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos $\mathcal{K} = \bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$. Dada $(x_n) \in \ell^1_w(X)$, el operador

$$\begin{array}{rccc} U\colon & X^* & \longrightarrow & \ell^1 \\ & x^* & \longmapsto & (\langle x^*, x_n\rangle) \end{array}$$

está bien definido, es lineal y continuo; por tanto, el teorema de Schur permite afirmar que $U(\mathcal{K})$ es relativamente compacto en ℓ^1. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq n_0} |y_n| < \varepsilon \quad ,\forall (y_n) \in U(\mathcal{K}) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} |\langle x^*, x_n\rangle| < \varepsilon, \quad \forall x^* \in \mathcal{K} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} |\langle T^*y^*, x_n\rangle| < \varepsilon, \quad \forall y^* \in B_{Y^*}, \forall T \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

$\square$

El conjunto $\mathcal{M} = B_{X^*}$, donde X no contiene copia de c_0 ($\Rightarrow \mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante) ni es reflexivo ($\Rightarrow \bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ no es relativamente débilmente compacto) proporciona un ejemplo de que el recíproco de la proposición anterior no siempre es cierto. Por contra, en el caso de $X = \mathcal{C}(\Omega)$, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.6 *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\mathcal{V}(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ acotado para la norma operador. Cualquiera de las siguientes condiciones implica las demás:*

(a) $\mathcal{M}$ es uniformemente completamente continuo.

(b) La familia de medidas $\{m_T\colon T \in \mathcal{M}\}$ *es uniformemente numerablemente aditiva.*

(c) El conjunto $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ *es relativamente débilmente compacto en* $\mathcal{C}(\Omega)^*$.

(d) $\mathcal{M}$ *es uniformemente incondicionalmente* 1*-convergente.*

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Leftrightarrow$(b) Es el teorema 2.1.2.

(b)$\Leftrightarrow$(c) El conjunto

$$\mathcal{K} = \bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*}) = \{y^* \circ m_T\colon \; T \in \mathcal{M},\, y^* \in B_{Y^*}\} \subset \mathcal{C}(\Omega)^*$$

es relativamente débilmente compacto si y sólo si es acotado y uniformemente numerablemente aditivo ([Do]; [D, teorema VII.13]). Puesto que $|y^* \circ m_T|(\Omega) \leq \|m_T\|(\Omega) = \|T\|$ para cada $T \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{K}$ es acotado en $\mathcal{C}(\Omega)^*$. Por otra parte, la condición (b) es equivalente a que $\mathcal{K}$ sea uniformemente numerablemente aditivo [DU, proposición I.1.17].

(c)$\Rightarrow$(d) Tal y como se ha demostrado en la proposición 2.1.5, se tiene independientemente del dominio de los operadores de $\mathcal{M}$.

(d)$\Rightarrow$(b) Según se ha mencionado, $\mathcal{M}$ es uniformemente incondicionalmente 1-convergente si y sólo si el conjunto $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ es uniformemente 1-sumante en $\mathcal{C}(\Omega)^*$; por el teorema 2.1.1, es necesario y suficiente probar que la familia de medidas escalares $\{|y^* \circ m_T|\colon T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva y, nuevamente gracias a [DU, proposición I.1.17], esto es equivalente a la condición (b).

□

2.2 Conjuntos uniformemente dominados en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$

Como se ha comentado anteriormente, el teorema de dominación de Grothendieck–Pietsch asegura que un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es p-sumante si y sólo si existe una medida de Radon positiva μ definida sobre el (débil-$*$) compacto B_{X^*} tal que

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu(x^*) \tag{2.2}$$

para todo $x \in X$. Si $X = \mathcal{C}(\Omega)$, esta condición es equivalente a que el operador sea *p-dominado*, esto es, a que exista una medida positiva regular ν sobre Σ tal que

$$\|T\varphi\|^p \leq \int_\Omega |\varphi(\omega)|^p \, d\nu(\omega) \tag{2.3}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ [P]. Veamos, a continuación, que esta última equivalencia se transmite para conjuntos de operadores:

Proposición 2.2.1 *Un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ es uniformemente p-dominado si y sólo si existe una medida positiva regular ν sobre Σ tal que*

$$\|T\varphi\|^p \leq \int_\Omega |\varphi(\omega)|^p \, d\nu(\omega)$$

cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $T \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ es uniformemente p-dominado, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_n \varphi_n\|^p \leq C^p \epsilon_p^p \left((\varphi_n)_{n=1}^m\right) \tag{2.4}$$

para todo subconjunto finito $\{(\varphi_1, T_1), \ldots, (\varphi_m, T_m)\} \subset \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{M}$ (teorema 1.3.2(c)). Dados $A = \{T_1, \ldots, T_m\} \subset \mathcal{M}$ y $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathcal{C}(\Omega)$, se define la función $\Psi_{A,B} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Psi_{A,B}(\omega) = C^p \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(\omega)|^p \right) - \sum_{n=1}^{m} \|T_n \varphi_n\|^p$$

para todo $\omega \in \Omega$. Teniendo en cuenta que $\epsilon_p^p\left((\varphi_n)_{n=1}^m\right) = \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{n=1}^m |\varphi_n(\omega)|^p$, la desigualdad (2.4) garantiza que el conjunto $\mathcal{P}$ cuyos elementos son las funciones $\Psi_{A,B}$ es disjunto del cono $\mathcal{N} = \{\Phi \in \mathcal{C}(\Omega)\colon \ \Phi(\omega) < 0, \forall \omega \in \Omega\}$. Basta ya proseguir como en la demostración (c)$\Rightarrow$(a) del teorema 1.3.2.

Recíprocamente, para conjuntos finitos cualesquiera $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ y $\{T_1, \ldots, T_m\}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\mathcal{M}$ respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \|T_n\varphi_n\|^p &\leq \sum_{n=1}^{m} \int_{\Omega} |\varphi_n(\omega)|^p \, d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(\omega)|^p \right) d\nu(\omega) \\ &\leq \nu(\Omega) \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(\omega)|^p \\ &= \nu(\Omega) \epsilon_p^p \left((\varphi_n)_{n=1}^m \right),\end{aligned}$$

por lo que, de nuevo gracias al teorema 1.3.2(c), $\mathcal{M}$ resulta ser uniformemente p-dominado.

□

Este resultado va a permitirnos obtener una caracterización de los conjuntos de operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega)$ uniformemente 1-dominados en términos de sus medidas representantes.

Teorema 2.2.2 *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado.

(b) Existe una medida positiva regular ν sobre Σ tal que

$$\|m_T(E)\| \leq \nu(E)$$

para todo $E \in \Sigma$ y $T \in \mathcal{M}$.

(c) Existe una constante positiva C de manera que, cualquiera que sea el conjunto finito $\{(E_1, T_1), \ldots, (E_m, T_m)\} \subset \Sigma \times \mathcal{M}$, existe una medida positiva regular ν sobre Σ con $\nu(\Omega) \leq C$ y de modo que

$$\|m_{T_n}(E_n)\| \leq \nu(E_n), \quad n = 1, \ldots, m.$$

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Consideremos una medida ν positiva regular sobre Σ tal que

$$\|T\varphi\| \leq \int_\Omega |\varphi(\omega)|\, d\nu(\omega),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $T \in \mathcal{M}$. Sea $E \in \Sigma$ y $T \in \mathcal{M}$; dado $\varepsilon > 0$, la regularidad de $|m_T|$ y ν aseguran la existencia en Ω de un conjunto compacto K y un conjunto abierto O tales que $K \subset E \subset O$ y

$$|m_T|(O\backslash K) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\nu(O\backslash K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\varphi\colon \Omega \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $\varphi(\omega) = 1$ si $\omega \in K$ y $\varphi(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega\backslash O$. Se tiene entonces, cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Omega \chi_E - \varphi\, dm_T \right\| &\leq \int_\Omega |\chi_E - \varphi|\, d|m_T| = \int_{O\backslash K} |\chi_E - \varphi|\, d|m_T| \\ &\leq 2|m_T|(O\backslash K) \leq \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Omega \varphi\, dm_T \right\| &= \|T\varphi\| \\ &\leq \int_\Omega |\varphi|\, d\nu \\ &= \int_E |\varphi|\, d\nu + \int_{O\backslash E} |\varphi|\, d\nu \\ &\leq \nu(E) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En conclusión, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ se deduce que

$$\|m_T(E)\| = \left\| \int_\Omega \chi_E\, dm_T \right\| < \nu(E) + \varepsilon.$$

(b)$\Rightarrow$(c) Es trivial.

(c)$\Rightarrow$(a) Para probar que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado, vamos a utilizar nuevamente el teorema 1.3.2(c). En primer lugar, demostraremos que, si $\psi_1, \ldots, \psi_m$ son funciones escalonadas definidas en Ω y $T_1, \ldots, T_m$ son operadores en $\mathcal{M}$, entonces

$$\sum_{n=1}^m \|T_n \psi_n\| \leq C \sup_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{n=1}^m |\psi_n(\omega)| \right). \tag{2.5}$$

Para cada $n \in \{1, \ldots, m\}$, pongamos $\psi_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n \chi_{E_j^n}$ $(\alpha_j^n \neq 0, \forall j, n)$. Sea $\{E_1, \ldots, E_k\}$ una familia finita de conjuntos disjuntos dos a dos en Σ tales que cada E_j^n es la unión de un cierto número de E_j. Para cada $n = 1, \ldots, m$, definimos el conjunto de índices $B_n = \{j \in \{1, \ldots, k\} \colon \psi_{n|_{E_j}} \neq 0\}$; de esta forma, podemos poner $\psi_n = \sum_{j \in B_n} \alpha_j^n \chi_{E_j}$. Ahora, una aplicación adecuada de la condición (c) nos lleva a la existencia de una medida positiva regular ν sobre Σ con $\nu(\Omega) \leq C$ de modo que, para cada $n = 1, \ldots, m$,

$$\|m_{T_n}(E_j)\| \leq \nu(E_j), \quad \forall j \in B_n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \left\| \int_{\Omega} \psi_n \, dm_{T_n} \right\| &= \sum_{n=1}^{m} \left\| \sum_{j \in B_n} \alpha_j^n m_{T_n}(E_j) \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{j \in B_n} |\alpha_j^n| \|m_{T_n}(E_j)\| \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{j \in B_n} |\alpha_j^n| \nu(E_j) \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{m} |\psi_n| \right) d\nu \\
&\leq C \sup_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{n=1}^{m} |\psi_n(\omega)| \right)
\end{aligned}$$

y se obtiene (2.5).

Sea, por fin, un subconjunto finito $\{(\varphi_1, T_1), \ldots, (\varphi_m, T_m)\}$ en $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{M}$. Dado $\varepsilon > 0$, existen funciones escalonadas $\psi_1, \ldots, \psi_m$ verificando

$$\sup_{\omega \in \Omega} |\varphi_n(\omega) - \psi_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2Cm}, \quad n = 1, \ldots, m;$$

esta desigualdad permite incluso comprobar fácilmente que $\sup_{\omega\in\Omega}\sum_{n=1}^{m}|\psi_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2C} + \epsilon_1\left((\varphi_n)_{n=1}^m\right)$. Haciendo uso de (2.5) se concluye

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\left\|\int_\Omega \varphi_n \, dm_{T_n}\right\| &\leq \sum_{n=1}^{m}\left\|\int_\Omega \varphi_n - \psi_n \, dm_{T_n}\right\| + \sum_{n=1}^{m}\left\|\int_\Omega \psi_n \, dm_{T_n}\right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m}\int_\Omega |\varphi_n - \psi_n| \, d|m_{T_n}| + C\sup_{\omega\in\Omega}\sum_{n=1}^{m}|\psi_n(\omega)| \\
&< \sum_{n=1}^{m}|m_{T_n}|(\Omega)\frac{\varepsilon}{2Cm} + C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \epsilon_1\left((\varphi_n)_{n=1}^m\right)\right) \\
&\leq C\epsilon_1\left((\varphi_n)_{n=1}^m\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

y se cumple el teorema 1.3.2(c).

□

2.3 Notas y ejemplos

Recordemos que los conjuntos $\mathcal{M}$ relativamente débilmente compactos en $rbvca(\Sigma, Y)$ (Y e Y^* con la propiedad de Radon-Nikodym) son aquellos que verifican las siguientes condiciones:

(i) $\mathcal{M}$ es acotado,

(ii) la familia de medidas $\{|m|\colon m \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva, y

(iii) para cada $E \in \Sigma$, el conjunto $\{m(E)\colon m \in \mathcal{M}\}$ es relativamente débilmente compacto en Y ([BaDuSc]; [DU, teorema IV.2.5]).

Teniendo en cuenta la identificación entre $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ y $rbvca(\Sigma, Y)$ y gracias a la caracterización obtenida en el teorema 2.1.1 puede concluirse el recíproco de la proposición 1.1.8 en el caso $p = 1$ y $X = \mathcal{C}(\Omega)$:

Corolario 2.3.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Y is reflexivo.

(b) En $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$, los conjuntos uniformemente 1-sumantes son precisamente los conjuntos relativamente débilmente compactos.

⋆ ⋆ ⋆

Hemos señalado en la primera sección de este capítulo que, para el caso de operadores en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$, todo conjunto uniformemente 1-sumante es uniformemente completamente continuo (corolario 2.1.3). El ejemplo 1.3.9 muestra que, en general, no se verifica el recíproco; de hecho, dichos conceptos son equivalentes sólo cuando Y es finito–dimensional:

Teorema 2.3.2 *Supongamos que el compacto de Hausdorff Ω tiene cardinal infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Todo subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ uniformemente completamente continuo es uniformemente 1-sumante.

(b) Y es finito–dimensional.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Si Y tienen dimensión infinita, el teorema de Dvoretzky–Rogers garantiza la existencia de al menos una sucesión (y_k) en Y incondicionalmente sumable de manera que $\sum_k \|y_k\| = \infty$. Sea (ω_k) una sucesión en Ω tal que $\omega_k \neq \omega_l$ si $k \neq l$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ puede considerarse el operador $T_m \colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow Y$ definido por

$$T_m\varphi = \sum_{k=1}^{m} \varphi(\omega_k) y_k.$$

En primer lugar, veamos que $\mathcal{M} = (T_m)$ es uniformemente completamente continuo. Consideremos (φ_n) débilmente nula en $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k \geq k_0} |\langle y^*, y_k \rangle| < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{2.6}$$

donde $C = \sup_n \|\varphi_n\|_{\mathcal{C}(\Omega)}$. Por otra parte, para cada $k < k_0$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$|\varphi_n(\omega_k)| < \frac{\varepsilon}{\epsilon_1\left((y_j)\right)}, \quad \forall n \geq n_k. \tag{2.7}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_{k_0-1}\}$. Si $n \geq n_0$, se verifica que $\|T_m\varphi_n\| < \varepsilon$ cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$. En efecto: si $m < k_0$

$$\begin{aligned} \|T_m\varphi_n\| &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left|\langle y^*, \sum_{k=1}^{m} \varphi_n(\omega_k) y_k\rangle\right| \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_n(\omega_k)||\langle y^*, y_k\rangle| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

gracias a (2.7); si $m \geq k_0$, utilizando (2.6) y (2.7) resulta

$$\begin{aligned} \|T_m\varphi_n\| &\leq \left\|\sum_{k<k_0} \varphi_n(\omega_k) y_k\right\| + \left\|\sum_{k=k_0}^{m} \varphi_n(\omega_k) y_k\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k=k_0}^{m} |\varphi_n(\omega_k)||\langle y^*, y_k\rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k \geq k_0} |\langle y^*, y_k\rangle| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}$ es uniformemente completamente continuo. Sin embargo, veamos que tal conjunto ni siquiera es π_1-acotado. Si $\sum_n \varphi_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \sum_n \|T_m\varphi_n\| &\leq \sum_n \left(\sum_{k=1}^{m} \|\varphi_n(\omega_k) y_k\|\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_n |\varphi_n(\omega_k)|\right) \|y_k\| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{m} \|y_k\|\right) \epsilon_1((\varphi_n)), \end{aligned}$$

es decir, $\pi_1(T_m) \leq \sum_{k=1}^{m} \|y_k\|$. Ahora, consideremos conjuntos abiertos $O_1, \ldots, O_m$ disjuntos dos a dos tales que $\omega_n \in O_n$ para cada $n = 1, \ldots, m$. Gracias al lema de Urysohn, existen funciones continuas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \colon \Omega \longrightarrow [0,1]$ con la propiedad de que $\varphi_n(\omega_n) = 1$ y $\varphi_n \equiv 0$ en $\Omega \backslash O_n$, $n = 1, \ldots, m$; se verifica entonces que

$\epsilon_1\left((\varphi_n)_{n=1}^m\right) \leq 1$ y

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_m \varphi_n\| = \sum_{n=1}^{m} \|y_n\|.$$

De esta manera, puede concluirse que $\pi_1(T_m) = \sum_{k=1}^{m} \|y_k\| \xrightarrow{m} \infty$.

(b)$\Rightarrow$(a) Si Y es finito–dimensional, entonces

$$\lim_n \|m_T\|(E_n) = 0 \text{ uniformemente en } T \in \mathcal{M} \iff \lim_n |m_T|(E_n) = 0 \text{ uniformemente en } T \in \mathcal{M}$$

para cada sucesión (E_n) de conjuntos de Borel disjuntos dos a dos. De forma equivalente, la familia de medidas $\{m_T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva si y sólo si lo es $\{|m_T|\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ [DU, proposición I.1.17]. Las caracterizaciones en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ de conjunto uniformemente completamente continuo (teorema 2.1.2) y de conjunto uniformemente 1-sumante (teorema 2.1.1) permiten deducir la condición (a).

□

⋆ ⋆ ⋆

En el capítulo anterior (página 27), se dio un ejemplo de un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(X, Y)$ uniformemente 1-sumante tal que $\mathcal{M}^{**}$ no lo es. En el caso en que $\mathcal{M}$ sea un conjunto de operadores definidos sobre un $\mathcal{C}(\Omega)$-espacio, no sabemos si $\mathcal{M}^{**}$ hereda o no la propiedad. De todas maneras, puede enunciarse un resultado algo más débil, cuya prueba es similar a la de (b)$\Rightarrow$(a) del teorema 2.1.1. Para ello, vamos a considerar la inclusión isométrica de $B(\Sigma)$ en $\mathcal{C}(\Omega)^{**}$. Dado un operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow Y$, denotaremos por $\widetilde{T}$ el operador T^{**} restringido a $B(\Sigma)$.

Proposición 2.3.3 *Si* $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ *es uniformemente* 1*-sumante, entonces* $\widetilde{\mathcal{M}} = \left\{\widetilde{T}\colon\ B(\Sigma) \longrightarrow Y : T \in \mathcal{M}\right\}$ *es también uniformemente* 1*-sumante.*

⋆ ⋆ ⋆

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para que un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ uniformemente completamente continuo sea uniformemente 1-sumante.

Teorema 2.3.4 *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ que verifica las condiciones siguientes:*

(i) $\bigcup_{T\in\mathcal{M}} T^*(B_{Y^*})$ es relativamente débilmente compacto en $\mathcal{C}(\Omega)^*$, y

(ii) dados $T \in \mathcal{M}$ y $\{(\varphi_1, y_1^*), \ldots, (\varphi_m, y_m^*)\}$ subconjunto finito de $\mathcal{C}(\Omega) \times B_{Y^*}$, existen $S \in \mathcal{M}$ y $z^* \in B_{Y^*}$ tales que

$$|\langle y_n^*, T\varphi_n\rangle| \leq |\langle z^*, S\varphi_n\rangle|, \quad n = 1, \ldots, m; \tag{2.8}$$

entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $\varepsilon > 0$ y $(\varphi_n) \in \ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega))$. La condición (i) permite afirmar que $\mathcal{M}$ es incondicionalmente 1-convergente (proposición 2.1.5); es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq n_0} |\langle y^*, T\varphi_n\rangle| < \varepsilon \tag{2.9}$$

para todo $y^* \in B_{Y^*}$ y $T \in \mathcal{M}$. Fijado $T \in \mathcal{M}$, vamos a demostrar que

$$\sum_{n\geq n_0} \|T\varphi_n\| < \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $y_{n,T}^* \in B_{Y^*}$ tal que $\|T\varphi_n\| = |\langle y_{n,T}^*, T\varphi_n\rangle|$. Si $m \geq n_0$, sean $S_m \in \mathcal{M}$ y $z_m^* \in B_{Y^*}$ de modo que

$$|\langle y_{n,T}^*, T\varphi_n\rangle| \leq |\langle z_m^*, S_m\varphi_n\rangle|, \quad n = n_0, \ldots, m;$$

por tanto, cualquiera que sea $m \geq n_0$ se cumple:

$$\sum_{n=n_0}^{m} \|T\varphi_n\| = \sum_{n_0}^{m} |\langle y_{n,T}^*, T\varphi_n\rangle| \leq \sum_{n=n_0}^{m} |\langle z_m^*, S_m\varphi_n\rangle| < \varepsilon,$$

la última desigualdad gracias a (2.9).

$\square$

OBSERVACIONES

1. El resultado anterior es válido cualquiera que sea el dominio X sobre el que estén definidos los operadores. Sin embargo, nos hemos limitado a enunciarlo en el caso $X = \mathcal{C}(\Omega)$ pues es entonces cuando la condición (i) es necesaria para que $\mathcal{M}$ sea uniformemente 1-sumante (teorema 2.1.6).

2. El teorema anterior sigue siendo cierto si se sustituye la condición (ii) por la siguiente:

   (ii)' dados $T \in \mathcal{M}$ y $\{(\varphi_1, y_1^*), \ldots, (\varphi_m, y_m^*)\}$ subconjunto finito de $\mathcal{C}(\Omega) \times B_{Y^*}$, existen $S \in \mathcal{M}$ y $z^* \in B_{Y^*}$ tales que

   $$|\langle y_n^*, T\varphi_n\rangle| \leq |\langle z^*, S|\varphi_n|\rangle|, \quad n = 1, \ldots, m; \tag{2.10}$$

Terminamos el capítulo mostrando un ejemplo de conjuntos en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ que ilustran los resultados anteriores.

Ejemplo 2.3.5 Sea μ una medida regular y positiva sobre Σ. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $L^1(\mu)$, para cada $\psi \in \mathcal{B}$ puede definirse el operador lineal

$$\begin{array}{rccc} T_\psi\colon & \mathcal{C}(\Omega) & \longrightarrow & L^1(\mu) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \cdot \psi \end{array}$$

Es claro que cada operador T_ψ es 1-sumante: si la serie $\sum_n \varphi_n$ es w.u.c. entonces

$$\sum_n \|T_\psi \varphi_n\| = \sum_n \int_\Omega |\varphi_n||\psi|\, d\mu = \int_\Omega \left(\sum_n |\varphi_n|\right) |\psi|\, d\mu \leq \|\psi\|_{L^1(\mu)} \epsilon_1((\varphi_n)).$$

De hecho, $\pi_1(T_\psi) = \|\psi\|_1$. Denotamos por m_ψ la medida representante del operador T_ψ. Si $E \in \Sigma$ y $(E_k)_{k=1}^p$ es una partición de E constituida por conjuntos de Borel, se tiene:

$$\sum_{k=1}^p \|m_\psi(E_k)\| = \sum_{k=1}^p \|\widetilde{T}_\psi \chi_{E_k}\| = \sum_{k=1}^p \int_\Omega |\chi_{E_k}\psi|\, d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^p E_k} |\psi|\, d\mu$$

($\widetilde{T}_\psi$ es la restricción de T_ψ^{**} a $B(\Sigma)$), que nos lleva a concluir que

$$|m_\psi|(E) = \int_E |\psi|\, d\mu. \tag{2.11}$$

Al ser $|m_\psi|$ la medida con densidad $|\psi|$ respecto de μ, podemos ver dicha medida como un elemento de $L^1(\mu)$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{M} = \{T_\psi\colon\ \psi \in \mathcal{B}\}$; veamos como influyen las propiedades del conjunto $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{M}$:

1. *Si $\mathcal{B}$ es orden acotado en $L^1(\mu)$, entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado.* Recordemos que un conjunto $\mathcal{B}$ es *orden acotado* en $L^1(\mu)$ si existe una función no negativa $\Psi \in L^1(\mu)$ tal que, cualquiera que sea $\psi \in \mathcal{B}$, se cumple $|\psi(\omega)| \leq \Psi(\omega)$ μ-e.c.t. $\omega \in \Omega$. Obsérvese que, si $(\varphi_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega))$ y (ψ_n) es una sucesión en $\mathcal{B}$, se verifica

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \|T_{\psi_n}\varphi_n\| &= \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega |\varphi_n||\psi_n|\, d\mu \\ &\leq \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi_n|\right) \Psi\, d\mu \\ &\leq \|\Psi\|_{L^1(\mu)}\, \epsilon_1\left((\varphi_n)_{n=1}^{m}\right) \end{aligned}$$

   para cada $m \in \mathbb{N}$ y basta utilizar el teorema 1.3.2(c). Un caso particular de éste sería aquél en que $\mathcal{B}$ es un subconjunto acotado de $L^\infty(\mu)$.

2. *Si $\mathcal{B}$ es acotado en $L^1(\mu)$, entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si $\mathcal{B}$ es uniformemente integrable.* Si suponemos que el conjunto $\mathcal{B}$ es uniformemente integrable, esto significa que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $E \in \Sigma$ cumple $\mu(E) < \delta$, entonces

$$\int_E |\psi|\, d\mu, \quad \forall \psi \in \mathcal{B};$$

   un vistazo a la expresión de $|m_\psi|$ (2.11) revela que la familia de medidas $\{|m_\psi|\colon\ \psi \in \mathcal{B}\}$ es uniformemente μ-continua y, por tanto, $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante (teorema 2.1.1(b')).

   Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante, la familia $\{|m_\psi|\colon\ \psi \in \mathcal{B}\}(\hookrightarrow L^1(\mu))$ es uniformemente numerablemente aditiva y, por tanto, relativamente débilmente compacta ([Do]; [D, teorema VII.13]); como subconjunto de $L^1(\mu)$, esto es equivalente a afirmar que $\mathcal{B}$ es uniformemente integrable ([DuPt]; [D, página 93]).

3. $\mathcal{M}$ *verifica la condición (ii)' del teorema 2.3.4, cualquiera que sea $\mathcal{B} \subset L^1(\mu)$.* Consideremos $\psi \in \mathcal{B}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $h_1, \ldots, h_m \in B_{L^\infty(\mu)}$;

dado $n \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |\langle h_n, T_\psi \varphi_n \rangle| &= \left| \int_\Omega h_n \psi \varphi_n \, d\mu \right| \\ &\leq \int_\Omega |\psi| |\varphi_n| \, d\mu \end{aligned}$$

Poniendo $h = \text{signo } \psi$, de lo anterior se deduce

$$|\langle h_n, T_\psi \varphi_n \rangle| \leq |\langle h, T_\psi |\varphi_n| \rangle| \, .$$

Capítulo 3

Conjuntos de operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega, X)$

En el capítulo anterior, hemos utilizado la representación integral de los operadores definidos en espacios de funciones continuas escalares con el fin de caracterizar los conjuntos uniformemente 1-sumantes en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$. Para operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega, X)$, Singer ([Si], [Si2] y [Si3]) para $Y = \mathbb{R}$ y Dinculeanu ([Di] y [Di2]) en general, obtienen una representación de este tipo. En concreto, dado un operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ lineal y continuo, para cada $E \in \Sigma$ considera el operador $m_T(E) \in \mathcal{L}(X, Y^{**})$ definido por

$$m_T(E)x = T^{**}(\chi_E x), \quad \forall x \in X,$$

donde $\chi_E x$ denota el funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{C}(\Omega, X)^* \equiv rbvca(\Sigma, X^*)$ de modo que $\langle \chi_E x, \nu \rangle = \langle \nu(E), x \rangle$. La aplicación $m_T\colon \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y^{**})$ resulta ser una medida finitamente aditiva de semivariación acotada $\|m_T\|(\Omega) = \|T\|$ que permite escribir

$$Tf = \int_\Omega f(\omega)\, dm_T(\omega), \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$$

. De nuevo, tal medida m_T se conoce como *medida representante* de T.

El fin que nos planteamos en este capítulo es caracterizar, en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$, los distintos tipos de conjuntos que venimos estudiando. Para ello, haremos uso de los resultados obtenidos en el capítulo 2 correspondientes al caso escalar junto con el siguiente hecho: dado un operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$, existe un único operador $T^\sharp \colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T(\varphi x) = (T^\sharp\varphi)x$ para cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $x \in X$ [Di3, III.19.2]. Así, la primera sección está dedicada a relacionar la 1-sumabilidad uniforme entre un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$ y $\mathcal{M}^\sharp = \{T^\sharp \colon T \in \mathcal{M}\}$. En la segunda sección, se tratan los conjuntos uniformemente 1-dominados en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$. Terminamos el capítulo con un análisis sobre la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp$ como subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\mathcal{L}(X,Y))$ así como con el estudio de algunas cuestiones y ejemplos complementarios a los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores.

3.1 Conjuntos uniformemente sumantes en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$

En 1973, Swartz realiza un profundo examen sobre los operadores 1-sumantes sobre espacios de funciones continuas vectoriales [S2]. Así, demuestra que si $T \colon \mathcal{C}(\Omega,X) \longrightarrow Y$ es un operador 1-sumante entonces $T^\sharp \colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ también lo es [S2]; evidentemente, en tal caso la variación de la medida representante $m_T \colon \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ es finita. Sin embargo, se observa que el recíproco de tal resultado no es cierto en general. La llave para obtener la caracterización de los operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega,X)$ 1-sumantes es el siguiente resultado: "Si $T \colon \mathcal{C}(\Omega,X) \longrightarrow Y$ es 1-sumante entonces: a) para cada $E \in \Sigma$, el operador $m_T(E) \colon X \longrightarrow Y$ es 1-sumante ; b) para cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, el operador $T^\sharp\varphi \colon X \longrightarrow Y$ es 1-sumante". Observemos que la propiedad anterior permite considerar la *π_1-variación* de m_T, esto es, la variación de m_T respecto de la norma π_1 (denotada por $\pi_1 - |m_T|$), así como la norma 1-sumante de $T^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\Pi_1(X,Y))$. Con estas consideraciones, se tiene el siguiente resultado [S2, teorema 12]:

Teorema (C. Swartz, 1973). *Sea $T \colon \mathcal{C}(\Omega,X) \longrightarrow Y$ un operador lineal y continuo con medida representante m_T. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T es 1-sumante.

(b) Para cada $E \in \Sigma$, $m_T(E) \in \Pi_1(X,Y)$ y m_T tiene π_1-variación finita.

(c) El operador $T^\sharp\colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \Pi_1(X,Y)$ *es* 1*-sumante.*

Además, se tiene $\pi_1(T) = \pi_1 - |m|(\Omega) = \pi_1(T^\sharp)$.

Dado un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$, denotaremos por $\mathcal{M}^\sharp$ al conjunto de operadores $\{T^\sharp\colon\ T \in \mathcal{M}\}$. Pretendemos dilucidar la relación entre la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}$ y la de $\mathcal{M}^\sharp$. Conviene señalar que, según hemos visto, el conjunto $\mathcal{M}^\sharp$ se puede considerar bien en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\mathcal{L}(X,Y))$ o bien en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\Pi_1(X,Y))$. Del hecho de que la norma π_1 domina la norma usual de operadores se deduce que, si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\Pi_1(X,Y))$, también lo es en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\mathcal{L}(X,Y))$.

Comenzamos poniendo de manifiesto que la 1-sumabilidad uniforme de un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$ es, en cualquier caso, condición suficiente para la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\Pi_1(X,Y))$.

Teorema 3.1.1 *Si* $\mathcal{M}$ *es un conjunto en* $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega,X),Y)$ *uniformemente* 1*-sumante entonces* $\mathcal{M}^\sharp$ *es uniformemente* 1*-sumante en* $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega),\Pi_1(X,Y))$.

DEMOSTRACIÓN: Dados $\varepsilon > 0$ y $(\varphi_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega))$, debemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>n_0} \pi_1(T^\sharp\varphi_n) < \varepsilon,$$

cualquiera que sea $T \in \mathcal{M}$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varepsilon > 0$, una sucesión (T_k) en $\mathcal{M}$ y una sucesión de números naturales (n_k) estrictamente creciente que verifican

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \pi_1(T_k^\sharp\varphi_n) > 2\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fijado $k \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \{n_k+1,\ldots,n_{k+1}\}$ podemos elegir un conjunto finito $\{x_1^n,\ldots,x_{p_n}^n\} \subset B_X$ verificando $\epsilon_1\left((x_i^n)_{i=1}^{p_n}\right) \le 1$ y

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left\|(T_k^\sharp\varphi_n)x_i^n\right\| > \pi_1(T_k^\sharp\varphi_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Consideremos la sucesión (f_n) en $\mathcal{C}(\Omega,X)$ dada por

$$(\varphi_1x_1^1,\ldots,\varphi_1x_{p_1}^1,\varphi_2x_1^2,\ldots,\varphi_2x_{p_2}^2,\ldots\ldots)$$

Observemos que, fijado $m \in \mathbb{N}$, si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B_{\ell_m^\infty}$ y $\omega \in \Omega$ se verifica

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n(\omega) \right\| \leq \sum_n |\varphi_n(\omega)|;$$

así pues,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n \right\|_{\mathcal{C}(\Omega,X)} \leq \left\| \sum_n |\varphi_n| \right\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \epsilon_1\left((\varphi_n)\right)$$

de donde se tiene que $(f_n) \in \ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega, X))$. Ahora bien, cualquiera que sea $j \in \mathbb{N}$ existe $k = k(j)$ tal que $n_k \geq j$; entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n>j} \|T_k f_n\| &\geq \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{p_n} \|T_k(\varphi_n x_i^n)\| \right) \\
&= \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{p_n} \left\| (T_k^\sharp \varphi_n) x_i^n \right\| \right) \\
&> \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \left(\pi_1(T_k^\sharp \varphi_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\
&= \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \pi_1(T_k^\sharp \varphi_n) - \varepsilon \\
&> \varepsilon
\end{aligned}$$

que entra en contradicción con que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

□

El recíproco del teorema anterior no es cierto en general, como se justificará en el siguiente ejemplo. Para abordarlo, necesitamos tener presentes los comentarios del comienzo de la sección 1.2, en los cuales se expone que a cada operador en $T^\sharp \in \Pi_1(c_0, \Pi_1(X, Y))$ podemos asociarle de forma biunívoca una sucesión de operadores $(U_k) \in \ell_a^1(\Pi_1(X, Y))$ de modo que $T^\sharp e_k = U_k$ y además

$$\pi_1(T^\sharp) = \sum_k \pi_1(U_k).$$

De esta forma, si $T \in \Pi_1(c_0(X), Y)$ y $(x_k) \in c_0(X)$, resulta

$$T(x_k) = T\left(\sum_k x_k e_k \right) = \sum_k T(x_k e_k)$$

$$= \sum_k \left(T^\sharp e_k\right) x_k = \sum_k U_k x_k$$

y $\pi_1(T) = \sum_k \pi_1(U_k)$.

Ejemplo 3.1.2 *Existe un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(c_0(c_0), \mathbb{R})$ de forma que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante pero $\mathcal{M}$ no lo es.*

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos el operador $T_m \colon c_0(c_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido, para todo $\hat{x} = (x_k) \in c_0(c_0)$, por

$$T_m \hat{x} = \sum_k U_k^m x_k,$$

donde $U_k^m = \dfrac{m}{mk^2+1} e_{k+m-1} \in \ell^1 = \Pi_1(c_0, \mathbb{R})$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$. Así pues, el operador $T_m^\sharp \colon c_0 \longrightarrow \ell^1$ actúa de la siguiente forma:

$$T_m^\sharp e_k = \frac{m}{mk^2+1} e_{k+m-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pongamos $\mathcal{M} = (T_m)$; utilizando el teorema 1.2.1 y razonando de igual manera que en el ejemplo 1.2.2, se comprueba que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(c_0, \ell^1)$. Vamos a demostrar que, sin embargo, $\mathcal{M}$ no es uniformemente 1-sumante. Para ello, consideremos la sucesión $(\hat{x}^n)$ en $c_0(c_0)$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por $\hat{x}^n = (x_k^n)_k = (e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n-1}, 0, 0, \ldots)$; es decir,

$$x_k^n = \begin{cases} e_{k+n-1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

o bien, matricialmente:

$$\left(\ \hat{x}^1 \ \middle|\ \hat{x}^2 \ \middle|\ \hat{x}^3 \ \middle|\ \ldots \ \middle|\ \hat{x}^n \ \middle|\ \ldots \ \right) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_n & \ldots \\ 0 & e_3 & e_4 & \ldots & e_{n+1} & \ldots \\ 0 & 0 & e_5 & \ldots & e_{n+2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & e_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Mirando fila a fila la matriz anterior, se observa que $\sum_n x_k^n$ es una serie w.u.c. en c_0 y $\epsilon_1\left((x_k^n)_n\right) = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$; en consecuencia, la serie $\sum_n \hat{x}^n$ es w.u.c. en

$c_0(c_0)$. Sin embargo, cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq m} |T_m \hat{x}^n| &= \sum_{n\geq m} \left| \sum_k U_k^m x_k^n \right| \\
&= \sum_{n\geq m} \left| \sum_{k=1}^{n} U_k^m e_{k+n-1} \right| \\
&= \sum_{n\geq m} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{m}{mk^2+1} \langle e_{k+m-1}, e_{k+n-1} \rangle \right| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{m}{mk^2+1} \\
&\geq \frac{m}{m+1} \\
&\geq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{M}$ no puede ser uniformemente 1-sumante.

Tras la exposición de este último contraejemplo, parece lógica la pregunta de qué condiciones garantizarán el recíproco del teorema 3.1.1. Antes de enunciar el teorema que proporciona respuesta a dicha pregunta, demostramos el siguiente

Lema 3.1.3 *Sea X un espacio de Banach separable y Ω un compacto de Hausdorff metrizable. Dados $\varepsilon > 0$, (f_n) en $\ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega, X))$ y una medida μ positiva numerablemente aditiva sobre Σ, existe una partición numerable (E_k) de Ω constituida por conjuntos de Borel tales que*

$$\epsilon_1 \left(\left(f_n(\omega) - \sum_k \chi_{E_k}(\omega) f_n(\omega_k) \right)_n \right) < \varepsilon, \quad \mu\text{-e.c.t. } \omega \in \Omega,$$

donde cada ω_k es un punto fijado de E_k.

DEMOSTRACIÓN: Sea τ la topología de la convergencia puntual sobre $\ell_w^1(X)$, es decir, la relativa de la topología producto de $\Pi_{n=1}^{\infty} X$; tal topología es menos fina que la de la ϵ_1-norma. Como X es separable, se cumple además que $\ell_w^1(X)$ es τ-separable. La aplicación

$$\begin{aligned}
\Phi : \quad \Omega &\longrightarrow \ell_w^1(X) \\
\omega &\longmapsto (f_n(\omega))_n
\end{aligned}$$

es τ-continua y, por consiguiente, medible. Gracias a la observación de la página 55 de [Th], se deduce que Φ es fuertemente medible respecto de μ y la topología de la ϵ_1-norma en $\ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega, X))$. Por el teorema de medibilidad de Pettis ([Pt]; [DU, corolario II.1.3]), Φ es límite uniforme μ-e.c.t. $\omega \in \Omega$ de funciones μ-medibles numerablemente valoradas. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe (E_k) partición numerable de borelianos de Ω tales que

$$\epsilon_1\left(\Phi(\omega) - \sum_k \chi_{E_k}(\omega)\Phi(\omega_k)\right) < \varepsilon, \quad \mu\text{-e.c.t. } \omega \in \Omega.$$

□

Recordemos que, si (x_k) es una sucesión acotada en X y (E_k) es una partición numerable de Ω en Σ, la función $g = \sum_k \chi_{E_k} x_k$ puede verse en $\mathcal{C}(\Omega, X)^{**}$ mediante la identificación $g \longmapsto F_g$ donde $F_g \colon \mathcal{C}(\Omega, X)^* \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal y continua definida por $F_g(\nu) = \sum_k \langle \nu(E_k), x_k \rangle$ para cada $\nu \in \mathcal{C}(\Omega, X)^* = rbvca(\Sigma, X^*)$. Es fácil observar que, para un operador lineal y continuo $T \colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$, también se cumple

$$T^{**}g = \int_\Omega g \, dm_T,$$

siendo g una función como la mencionada anteriormente.

Teorema 3.1.4 *Cualquiera que sea el espacio Y, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$.

(b) X no contiene copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Veamos que toda serie $\sum_n x_n$ w.u.c. en X es incondicionalmente convergente. Para ello, fijemos $y_0 \in Y$ con $\|y_0\| = 1$ y $\omega_0 \in \Omega$. Sea $\mathcal{M} = \{T_{x^*} \colon\ x^* \in B_{X^*}\} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$, donde

$$T_{x^*}f = \langle x^*, f(\omega_0) \rangle y_0, \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega, X).$$

Es inmediato comprobar que $T^\sharp_{x^*} \colon \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \Pi_1(X, Y)$ está definido por

$$T^\sharp_{x^*}\varphi = \varphi(\omega_0) x^* \otimes y_0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$$

y $\pi_1(T^\sharp_{x^*}\varphi) = |\varphi(\omega_0)|$. Dada $(\varphi_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega))$, es evidente que $\sum_n |\varphi_n(\omega_0)| < \infty$ por lo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$\sum_{n \geq N} \pi_1(T^\sharp_{x^*}\varphi_n) = \sum_{n \geq N} |\varphi_n(\omega_0)| < \varepsilon.$$

De esta forma, la condición (a) garantiza que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

Consideremos ahora $\varphi_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$ cumpliendo $\varphi_0(\omega_0) = 1$; puesto que $\sum_n \varphi_0 x_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{n \geq n_0} |\langle x^*, x_n\rangle| = \sum_{n \geq n_0} \|T_{x^*}(\varphi_0 x_n)\| < \varepsilon$$

cualquiera que sea $x^* \in B_{X^*}$, es decir, $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente.

(b)$\Rightarrow$(a) Dado $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$, sólo es necesario probar que si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$ entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

En primer lugar, observemos que sólo hace falta probar el resultado para X separable. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y (f_n) en $\ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega, X))$, el espacio $X_0 = \overline{\operatorname{span}}\{f_n(\omega) \colon n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\} \subset X$ es separable y no contiene copia de c_0. La serie $\sum_n f_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X_0)$ y, definiendo $S_T \colon \mathcal{C}(\Omega, X_0) \longrightarrow Y$ por $S_T f = Tf$ para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega, X_0)$, es fácil comprobar que el conjunto $\mathcal{M}^\sharp_0 = \{S^\sharp_T \colon T \in \mathcal{M}\} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X_0, Y))$ es uniformemente 1-sumante si $\mathcal{M}^\sharp$ lo es; así, $\mathcal{M}_0 = \{S_T \colon T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente 1-sumante, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} \|Tf_n\| = \sum_{n \geq n_0} \|S_T f_n\| < \varepsilon$$

para todo $T \in \mathcal{M}$.

En segundo lugar, también podemos reducir la prueba del teorema a Ω metrizable. Para comprobar esto, consideremos $\varepsilon > 0$ y (f_n) en $\ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega, X))$ y definamos en Ω la relación de equivalencia $\sim$, de manera que $\omega \sim \omega'$ si $f_n(\omega) = f_n(\omega')$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea Ω_0 el conjunto de las clases de equivalencia bajo $\sim$ y $\pi \colon \Omega \longrightarrow \Omega_0$ la proyección natural que lleva cada ω en su clase de equivalencia $[\omega] = \pi(\omega)$. Obsérvese que la aplicación d en $\Omega_0 \times \Omega_0$ dada por

$$d([\omega], [\omega']) = \sum_n \frac{1}{2^n}\|f_n(\omega) - f_n(\omega')\|$$

define una métrica en Ω_0; puesto que cada función f_n es continua, es inmediato comprobar que π es continua, por lo que Ω_0 es un compacto de Hausdorff metrizable. A continuación, se definen los operadores $S_T\colon \mathcal{C}(\Omega_0, X) \longrightarrow Y$ por $S_T\phi = T(\phi \circ \pi)$ para cada $\phi \in \mathcal{C}(\Omega_0, X)$; entonces, si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante, también lo es $\mathcal{M}_0^\sharp = \{S_T^\sharp\colon\ T \in \mathcal{M}\} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega_0), \Pi_1(X,Y))$. En consecuencia, $\mathcal{M}_0 = \{S_T\colon\ T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente 1-sumante. Definiendo $\phi_n \in \mathcal{C}(\Omega_0, X)$ por $\phi_n([\omega]) = f_n(\omega)$, la serie $\sum_n \phi_n$ es w.u.c., por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq n_0} \|Tf_n\| = \sum_{n\geq n_0} \|T(\phi_n \circ \pi)\| = \sum_{n\geq n_0} \|S_T(\phi_n)\| < \varepsilon$$

para todo $T \in \mathcal{M}$.

Supongamos, pues, Ω metrizable y X separable. Partiendo de la hipótesis de que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X,Y))$, el teorema 2.1.1(b') garantiza la existencia de una medida positiva μ numerablemente aditiva sobre Σ tal que

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \pi_1 - |m_T|(E) = 0 \tag{3.1}$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$. Sean $\varepsilon > 0$ y (f_n) en la bola unidad de $\ell_w^1(\mathcal{C}(\Omega, X))$. El lema anterior proporciona una partición (E_k) de Ω constituida por borelianos y un conjunto $N \in \Sigma$ de μ-medida nula tales que

$$\epsilon_1\left(\left(f_n(\omega) - \sum_k \chi_{E_k}(\omega) f_n(\omega_k)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall \omega \in \Omega\backslash N, \tag{3.2}$$

con ω_k fijado en E_k y $M = \sup_{T\in\mathcal{M}} \pi_1(T)$.

A continuación, se hace uso nuevamente de que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X,Y))$; por ello, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k\geq k_0} \pi_1(m_T(E_k)) < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.3}$$

para todo $T \in \mathcal{M}$ (teorema 2.1.1(c)). Fijado $k \in \{1, \ldots, k_0-1\}$, la serie $\sum_n f_n(\omega_k)$ es w.u.c. y, como X no contiene copia de c_0, incondicionalmente convergente. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando

$$\left\|\sum_{n\geq n_0} f_n(\omega_k)\right\| < \frac{\varepsilon}{8M} \tag{3.4}$$

para cada $k < k_0$. Resulta, entonces, para cada $T \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq n_0} \|Tf_n\| &= \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega f_n \, dm_T \right\| \\
&\leq \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\| + \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\|
\end{aligned}$$

y sólo hay que hacer pequeños los dos sumandos de la última fila.

Al ser N un conjunto de μ-medida nula, (3.1) nos lleva a

$$\int_N \left\| f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \right\| \, d|m_T| = 0$$

para cada $n \geq n_0$. Además, poniendo

$$g_n(\cdot) = \left(f_n(\cdot) - \sum_k \chi_{E_k}(\cdot) f_n(\omega_k) \right) \chi_{\Omega\setminus N}(\cdot) \in \mathcal{C}(\Omega, X)^{**},$$

se verifica, gracias a (3.2), que la serie $\sum_n g_n$ es w.u.c. y $\epsilon_1((g_n)) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Con estas consideraciones, se deduce

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\| \\
&\leq \sum_{n\geq n_0} \left(\left\| \int_{\Omega\setminus N} f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\| + \left\| \int_N f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\| \right) \\
&= \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_{\Omega\setminus N} f_n - \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k) \, dm_T \right\| \\
&= \sum_{n\geq n_0} \left\| \int_\Omega g_n \, dm_T \right\| \\
&= \sum_{n\geq n_0} \|T^{**} g_n\| \\
&\leq \pi_1(T) \epsilon_1((g_n)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Para el otro sumando, observamos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq n_0} & \left\| \int_\Omega \sum_k \chi_{E_k} f_n(\omega_k)\, dm_T \right\| \\
&= \sum_{n\geq n_0} \left\| \sum_k m_T(E_k) f_n(\omega_k) \right\| \\
&\leq \sum_{n\geq n_0} \left(\sum_k \| m_T(E_k) f_n(\omega_k) \| \right) \\
&= \sum_k \left(\sum_{n\geq n_0} \| m_T(E_k) f_n(\omega_k) \| \right) \\
&\leq \sum_k \pi_1(m_T(E_k)) \epsilon_1 \left((f_n(\omega_k))_{n\geq n_0} \right) \\
&= \sum_{k<k_0} \pi_1(m_T(E_k)) \epsilon_1 \left((f_n(\omega_k))_{n\geq n_0} \right) + \sum_{k\geq k_0} \pi_1(m_T(E_k)) \epsilon_1 \left((f_n(\omega_k))_{n\geq n_0} \right);
\end{aligned}
$$

ahora, (3.4) nos conduce a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k<k_0} \pi_1(m_T(E_k)) \epsilon_1 \left((f_n(\omega_k)_{n\geq n_0}) \right) &\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k<k_0} \pi_1(m_T(E_k)) \\
&< \frac{\varepsilon}{4M} \pi_1 - |m_T| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}
$$

mientras que (3.3) permite concluir

$$
\sum_{k\geq k_0} \pi_1(m_T(E_k)) \epsilon_1 \left((f_n(\omega_k)_{n\geq n_0}) \right) \leq \sum_{k\geq k_0} \pi_1(m_T(E_k)) < \frac{\varepsilon}{4}.
$$

□

3.2 Conjuntos uniformemente dominados en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$

En el caso de $\mathcal{C}(\Omega, X)$ para X espacio de Banach cualquiera, la extensión del concepto de operador p-dominado que aparece en la sección 2.2 es la siguiente:

"$T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ es *p-dominado* si existe una medida positiva regular ν sobre Σ tal que

$$\|Tf\|^p \leq \int_\Omega \|f(\omega)\|^p \, d\nu(\omega), \tag{3.5}$$

para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$" [Di3, III.19.3].

En [S2], se observa que todo operador $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ 1-sumante es 1-dominado; por contra, si X es un espacio de Banach infinito–dimensional cualquiera, existen operadores $T\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow X$ 1-dominados que no son 1-sumantes, tal y como se demuestra en ese mismo artículo. El próximo resultado es el análogo a la proposición 2.2.1 para operadores sobre $\mathcal{C}(\Omega, X)$:

Proposición 3.2.1 *Un conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_p(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente p-dominado si y sólo si existe una medida ν positiva regular sobre los conjuntos de Borel de $B_{X^*} \times \Omega$ tal que*

$$\|Tf\|^p \leq \int_{B_{X^*} \times \Omega} |\langle x^*, f(\omega)\rangle|^p \, d\nu(x^*, \omega)$$

cualquiera que sea $f \in \mathcal{C}(\Omega, X)$ y $T \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{M} \subset \Pi_p(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente p-dominado, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{m} \|T_n f_n\|^p \leq C^p \epsilon_p^p \left((f_n)_{n=1}^m\right) \tag{3.6}$$

para todo subconjunto finito $\{(f_1, T_1), \ldots, (f_m, T_m)\} \subset \mathcal{C}(\Omega, X) \times \mathcal{M}$ (teorema 1.3.2(c)). Dados $A = \{T_1, \ldots, T_m\} \subset \mathcal{M}$ y $B = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{C}(\Omega, X)$, consideremos la función $\Psi_{A,B}\colon B_{X^*} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi_{A,B}(x^*, \omega) = C^p \left(\sum_{n=1}^{m} |\langle x^*, f_n(\omega)\rangle|^p \right) - \sum_{n=1}^{m} \|T_n f_n\|^p$$

para cada $(x^*, \omega) \in B_{X^*} \times \Omega$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de las funciones del tipo $\Psi_{A,B}$; así, $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(B_{X^*} \times \Omega)$ y la desigualdad (3.6) ratifica que $\mathcal{P}$ es disjunto del cono $\mathcal{N} = \{\Phi \in \mathcal{C}(B_{X^*} \times \Omega)\colon\ \Phi(x^*, \omega) < 0, \forall x^* \in B_{X^*}, \forall \omega \in \Omega\}$. Basta ya proseguir como en la demostración (c)$\Rightarrow$(a) del teorema 1.3.2.

El recíproco es completamente análogo a la demostración de la proposición 2.2.1.

$\square$

Tal y como hemos procedido en la sección anterior, vamos a estudiar en primer lugar la relación entre la dominación uniforme de $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ y la de $\mathcal{M}^\sharp \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$.

Teorema 3.2.2 *Sea $\mathcal{M}$ es un conjunto en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ uniformemente 1-dominado; entonces $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-dominado en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$.*

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-dominado, veamos que existe una medida $\nu^\sharp$ positiva y regular sobre Σ tal que

$$\pi_1(T^\sharp \varphi) \leq \int_\Omega |\varphi(\omega)| \, d\nu^\sharp(\omega), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(\Omega), \forall T \in \mathcal{M}$$

(proposición 2.2.1).

Sea ν una medida positiva regular sobre los conjuntos de Borel de $B_{X^*} \times \Omega$ tal que

$$\|Tf\| \leq \int_{B_{X^*} \times \Omega} |\langle x^*, f(\omega) \rangle| \, d\nu(x^*, \omega), \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega, X), \forall T \in \mathcal{M}.$$

Consideremos la aplicación $\pi \colon B_{X^*} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ definida por $\pi(x^*, \omega) = \omega$. Pongamos $\nu^\sharp = \pi\nu$, es decir, $\nu^\sharp$ es la medida imagen de ν por π; tal medida es claramente positiva y, al ser π continua, es también regular. Sean $T \in \mathcal{M}$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$; dado $\varepsilon > 0$, existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ con $\epsilon_1\left((x_n)_{n=1}^m\right) \leq 1$ de manera que

$$\begin{aligned}
\pi_1(T^\sharp \varphi) &\leq \sum_{n=1}^m \|(T^\sharp \varphi) x_n\| + \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^m \|T(\varphi x_n)\| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^m \int_{B_{X^*} \times \Omega} |\langle x^*, \varphi(\omega) x_n \rangle| \, d\nu(x^*, \omega) + \varepsilon \\
&= \int_{B_{X^*} \times \Omega} |\varphi(\omega)| \sum_{n=1}^m |\langle x^*, x_n \rangle| \, d\nu(x^*, \omega) + \varepsilon \\
&\leq \int_{B_{X^*} \times \Omega} |\varphi(\omega)| \, d\nu(x^*, \omega) + \varepsilon \\
&= \int_\Omega |\varphi(\omega)| \, d\nu^\sharp(\omega) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Si se diese el recíproco del resultado anterior, el teorema 2.2.2 proporcionaría de inmediato la caracterización de conjunto uniformemente 1-dominado en términos de las medidas representantes, que no sería otra que "la existencia de una medida positiva regular ν sobre Σ tal que

$$\pi_1(m_T(E)) \leq \nu(E), \quad \forall E \in \Sigma, \forall T \in \mathcal{M}\text{''}. \tag{3.7}$$

Desafortunadamente, tal recíproco no es cierto, como se observa con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.3 *Existe un conjunto* $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}([0,1],\ell^2),\mathbb{R})$ *de manera que* $\mathcal{M}^\sharp$ *es uniformemente* 1*-dominado pero* $\mathcal{M}$ *no lo es.*

Si (e_m) es la base canónica de ℓ^2, consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, el operador $T_m\colon \mathcal{C}([0,1],\ell^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ que actúa como sigue:

$$T_m f = \int_0^1 \langle e_m, f(\omega)\rangle \, d\nu(\omega),$$

donde $d\nu = \dfrac{d\omega}{\sqrt{1-\omega}}$, es decir, ν es la medida con densidad $\omega \in [0,1] \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\omega}}$ respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Pongamos $\mathcal{M} = (T_m)$; en este caso,

$$T_m^\sharp \varphi = \left(\int_0^1 \varphi(\omega)\, d\nu(\omega)\right) e_m$$

si $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Obsérvese que

$$\|T_m^\sharp \varphi\|_2 = \left|\int_0^1 \varphi(\omega)\, d\nu(\omega)\right| \leq \int_0^1 |\varphi(\omega)|\, d\nu(\omega)$$

cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$ y $m \in \mathbb{N}$, luego $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-dominado. Por el contrario, $\mathcal{M}$ no lo es. Efectivamente, la sucesión (f_n), donde $f_n(\omega) = \omega^n(1-\omega)^{1/2}e_n$, es tal que, si $\Delta \subset \mathbb{N}$ es un conjunto finito, entonces

$$\left\|\sum_{n\in\Delta} f_n\right\|_{\mathcal{C}([0,1],\ell^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

luego $(f_n) \in \ell_w^1(\mathcal{C}([0,1],\ell^2))$; sin embargo

$$\sum_n |T_n f_n| = \sum_n \left|\int_0^1 \omega^n \, d\omega\right| = \sum_n \frac{1}{n+1},$$

y $\mathcal{M}$ no cumple el teorema 1.3.2(c).

No es difícil, de hecho, encontrar la condición que garantiza la dominación uniforme simultáneamente para $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^\sharp$, tal y como se comprueba en la última sección (proposición 3.3.6).

Se enuncia a continuación, la caracterización de los conjuntos uniformemente 1-dominados en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ a través de las medidas representantes. Como era de esperar, dicha caracterización es una condición algo más compleja que (3.7).

Teorema 3.2.4 *Las condiciones siguientes son equivalentes para un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$:*

(a) $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado.

(b) Existe una medida $\tilde{\nu}$ positiva regular de Borel sobre Σ tal que, cualesquiera que sean el subconjunto finito $\{(x_1, T_1), \ldots, (x_m, T_m)\}$ en $X \times \mathcal{M}$ y el conjunto $E \in \Sigma$, se verifica

$$\sum_{n=1}^{m} \|m_{T_n}(E)x_n\| \leq \tilde{\nu}(E)\epsilon_1\left((x_n)_{n=1}^m\right).$$

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Sea ν una medida positiva regular sobre los conjuntos de Borel de $B_{X^*} \times \Omega$ tal que

$$\|Tf\| \leq \int_{B_{X^*}\times\Omega} |\langle x^*, f(\omega)\rangle| \, d\nu(x^*, \omega), \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega, X), \forall T \in \mathcal{M}. \tag{3.8}$$

Consideremos la aplicación $\pi\colon B_{X^*} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ definida por $\pi(x^*, \omega) = \omega$ y pongamos $\tilde{\nu} = \pi\nu$. Dado $E \in \Sigma$, supongamos que se tiene

$$\|m_T(E)x\| \leq \int_{B_{X^*}\times\Omega} |\langle x^*, x\rangle| \chi_E(\omega) \, d\nu(x^*, \omega), \quad \forall x \in X, \forall T \in \mathcal{M}; \tag{3.9}$$

entonces, si $x_1, \ldots, x_m \in X$ y $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{M}$, resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \|m_{T_n}(E)x_n\| &\leq \sum_{n=1}^{m} \int_{B_{X^*}\times\Omega} |\langle x^*, x_n\rangle| \chi_E(\omega) \, d\nu(x^*, \omega) \\
&= \int_{B_{X^*}\times\Omega} \left(\sum_{n=1}^{m} |\langle x^*, x_n\rangle|\right) \chi_E(\omega) \, d\nu(x^*, \omega) \\
&\leq \epsilon_1\left((x_n)_{n=1}^m\right) \int_{\Omega} \chi_E(\omega) \, d\tilde{\nu}(\omega) \\
&= \tilde{\nu}(E)\epsilon_1\left((x_n)_{n=1}^m\right).
\end{aligned}$$

Procedamos, pues, a demostrar (3.9). De (3.8) se tiene

$$\|(T^\sharp\varphi)x\| = \|T(\varphi x)\| \leq \int_{B_{X^*}\times\Omega} |\langle x^*, x\rangle||\varphi(\omega)|\,d\nu(x^*,\omega),$$

no importa quienes sean $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega), x \in X$ y $T \in \mathcal{M}$. Si, para cada $x \in X$, definimos la medida $\lambda_x(E) = \int_{B_{X^*}\times\Omega} |\langle x^*, x\rangle|\chi_E(\omega)\,d\nu(x^*,\omega)$ para cada $E \in \Sigma$, la desigualdad anterior puede escribirse como

$$\|(T^\sharp\varphi)x\| \leq \int_\Omega |\varphi(\omega)|\,d\lambda_x(\omega), \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}(\Omega), \forall x \in X, \forall T \in \mathcal{M}. \tag{3.10}$$

Por otro lado, para cada $x \in X$, consideremos el operador $S_x\colon \Pi_1(X,Y) \longrightarrow Y$ dado por $S_x(U) = Ux$ si $U \in \Pi_1(X,Y)$. Teniendo en cuenta que $(T^\sharp\varphi)x = (S_x \circ T^\sharp)\varphi$ si $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, la desigualdad (3.10) junto con la proposición 2.2.1, nos permite deducir que el conjunto $\mathcal{N}_x = \{S_x \circ T^\sharp\colon T \in \mathcal{M}\} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), Y)$ es uniformemente 1-dominado; ahora, según el teorema 2.2.2 (véase demostración de (a)$\Rightarrow$(b)),

$$\|(S_x \circ m_T)(E)\| \leq \lambda_x(E), \quad \forall E \in \Sigma,$$

con lo que se obtiene (3.9).

(b)$\Rightarrow$(a) Sean $\psi_1, \ldots, \psi_m\colon \Omega \longrightarrow X$ funciones escalonadas y $T_1, \ldots, T_m$ operadores en $\mathcal{M}$. Como en la demostración (c)$\Rightarrow$(a) del teorema 2.2.2, consideremos una familia finita $\{E_1, \ldots, E_k\}$ de conjuntos disjuntos en Σ de tal manera que $\psi_n = \sum_{j=1}^k x_j^n \chi_{E_j}$, $n = 1, \ldots, m$. Entonces, utilizando (b) de forma adecuada, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left\| \int_\Omega \psi_n\,dm_{T_n} \right\| &\leq \sum_{n=1}^m \left\| \sum_{j=1}^k m_{T_n}(E_j)x_j^n \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^m \|m_{T_n}(E_j)x_j^n\| \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^k \tilde{\nu}(E_j)\epsilon_1\left((x_j^n)_{n=1}^m\right) \\
&\leq \sup_{\omega\in\Omega} \epsilon_1\left((\psi_n(\omega))_{n=1}^m\right)\tilde{\nu}(\Omega).
\end{aligned}$$

Sean, ahora, $f_1, \ldots, f_m$ y $T_1, \ldots, T_m$ en $\mathcal{C}(\Omega, X)$ y $\mathcal{M}$, respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$, existen funciones escalonadas $\psi_1, \ldots, \psi_m\colon \Omega \longrightarrow X$ tales que

$$\sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - \psi_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2m\tilde{\nu}(\Omega)}, \quad n = 1, \ldots, m;$$

en consecuencia, se tiene que $\sup_{\omega\in\Omega} \epsilon_1 \left((\psi_n(\omega))_{n=1}^m\right) < \dfrac{\varepsilon}{2\tilde{\nu}(\Omega)} + \epsilon_1 \left((f_n)_{n=1}^m\right)$. Razonando de nuevo como en el teorema 2.2.2, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{m} \left\| \int_\Omega f_n \, dm_{T_n} \right\| \leq \tilde{\nu}(\Omega)\epsilon_1 \left((f_n)_{n=1}^m\right) + \varepsilon$$

y $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado invocando el teorema 1.3.2.

□

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos la siguiente condición suficiente para que un conjunto sea uniformemente 1-dominado:

Corolario 3.2.5 *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ que verifica*

(i) $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-dominado, y

(ii) para cada conjunto finito $\{(x_1, T_1), \ldots, (x_m, T_m)\} \subset X \times \mathcal{M}$ y cada conjunto $E \in \Sigma$, existe un operador $Q \in \mathcal{M}$ tal que

$$\|m_{T_n}(E)x_n\| \leq \|m_Q(E)x_n\|, \quad n = 1, \ldots, m;$$

entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-dominado.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-dominado existe una medida positiva regular $\tilde{\nu}$ sobre Σ tal que $\pi_1(m_T(E)) \leq \tilde{\nu}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y $T \in \mathcal{M}$ (teorema 2.2.2(b)).

Dados $\{(x_1, T_1), \ldots, (x_m, T_m)\} \subset X \times \mathcal{M}$ y $E \in \Sigma$, existe $Q \in \mathcal{M}$ de manera que

$$\sum_{n=1}^{m} \|m_{T_n}(E)x_n\| \leq \sum_{n=1}^{m} \|m_Q(E)x_n\|$$
$$\leq \pi_1(m_Q(E))\epsilon_1 \left((x_n)_{n=1}^m\right) \leq \tilde{\nu}(E)\epsilon_1 \left((x_n)_{n=1}^m\right).$$

□

3.3 Notas y ejemplos

En el ejemplo 3.1.2, el conjunto $\mathcal{M}$ con el que se trabaja no permite comparar la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X,Y))$ y en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$; este es el fin que se persigue con el próximo ejemplo:

Ejemplo 3.3.1 *Existe un conjunto $\mathcal{M}$ en $\Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1],\ell^2),\ell^2\right)$ tal que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1]),\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)\right)$ pero $\mathcal{M}^\sharp$ no es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1]),\Pi_1(\ell^2,\ell^2)\right)$.*

Consideremos la sucesión de números reales (x_m) tal que $e^{x_m}x_m = m^2+1$ y pongamos $p_m = E(x_m)$, donde $E(\cdot)$ denota la parte entera. Puesto que la función $y = e^x x$ es creciente en $\mathbb{R}^+$ y $\lim_{x\to+\infty} e^x x = +\infty$, la sucesión (x_m) es monótona creciente estrictamente y no acotada superiormente, luego $\lim_{m\to\infty} p_m = \lim_{m\to\infty} x_m = +\infty$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$\beta^m = (\beta_k^m) = \left(\frac{1}{p_m}, \overset{(m^2)}{\ldots}, \frac{1}{p_m}, 0, \ldots\right) \in \ell^2$$

y ahora

$$\begin{array}{rccc} A_m\colon & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ & (\alpha_k) & \longmapsto & (\alpha_k \cdot \beta_k^m)_k \end{array}$$

Si $\alpha = (\alpha_k) \in \ell^2$, entonces

$$\|A_m\alpha\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m^2} \frac{\alpha_k^2}{p_m^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{p_m}\left(\sum_{k=1}^{m^2} \alpha_k^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{p_m}\|\alpha\|_2,$$

de donde A_m está bien definido y $\|A_m\| = \dfrac{1}{p_m}$. Además, el rango de A_m es un subespacio de ℓ^1, por lo que A_m es 1-sumante; en particular, es 2-sumante ($\Leftrightarrow$ de Hilbert–Schmidt) luego

$$\pi_2(A_m) = \left(\sum_n \|A_m e_n\|_{\ell^2}^2\right)^{1/2}$$

([P3]; [DJT, teorema 4.10]). Por tanto, resulta

$$\pi_1(A_m) \ge \pi_2(A_m) = \left(\sum_{n=1}^{m^2} \frac{1}{p_m^2}\right)^{1/2} = \frac{m}{p_m}. \tag{3.11}$$

Si $d\omega$ designa la medida de Lebesgue en $[0,1]$, sea $d\nu = \dfrac{d\omega}{\sqrt{1-\omega}}$, es decir, ν es la medida con densidad la función definida por $\omega \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\omega}}$ respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Por fin, sea $\mathcal{M} = (T_m)$ donde, para cada $m \in \mathbb{N}$, el operador $T_m\colon \mathcal{C}([0,1],\ell^2) \longrightarrow \ell^2$ actúa de la siguiente manera:

$$T_m f = A_m \left(\int_0^1 \langle e_k, f(\omega)\rangle \, d\nu \right)_k, \quad \forall f \in \mathcal{C}([0,1],\ell^2).$$

Tales operadores están bien definidos y son continuos. Efectivamente, si $f \in \mathcal{C}([0,1],\ell^2)$ y ponemos $f^k(\cdot) = \langle e_k, f(\cdot)\rangle \in \mathcal{C}([0,1])$, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_k \left| \int_0^1 f^k(\omega)\, d\nu \right|^2 &= \sum_k \left|\langle \nu, f^k\rangle\right|^2 \\
&\leq 4 \sum_k \left| \langle \frac{\nu}{2}, f^k\rangle \right|^2 \\
&\leq 4 \sup_{\mu \in B_{\mathcal{C}([0,1])^*}} \sum_k |\langle \mu, f^k\rangle|^2 \\
&= 4\epsilon_2\left((f^k)\right)^2;
\end{aligned}$$

ahora bien:

$$\begin{aligned}
\epsilon_2\left((f^k)\right) &= \sup_{(\alpha_k)\in B_{\ell^2}} \left\| \sum_k \alpha_k f^k \right\|_{\mathcal{C}(\Omega)} \\
&\leq \sup_{(\alpha_k)\in B_{\ell^2}} \sup_{\omega\in[0,1]} \sum_k |\alpha_k f^k(\omega)| \\
&\leq \sup_{(\alpha_k)\in B_{\ell^2}} \sup_{\omega\in[0,1]} \left(\sum_k |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \|f(\omega)\|_2 \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{C}([0,1],\ell^2)}.
\end{aligned}$$

En definitiva, $\left\| \left(\int_0^1 f^k \, d\nu \right)_k \right\|_2 \leq 2\|f\|_{\mathcal{C}([0,1],\ell^2)}$, por lo que T_m está bien definido y además

$$\|T_m\| \leq \frac{2}{p_m}.$$

Una sencilla comprobación nos lleva a que el operador $T_m^\sharp\colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \Pi_1(\ell^2,\ell^2)$ está definido por $T_m^\sharp \varphi = \left(\int_0^1 \varphi \, d\nu \right) A_m$ para cada $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Obsérvese que cada $T_m^\sharp$ es 1-sumante: si (φ_n) está en la bola de $\ell_w^1\left(\mathcal{C}([0,1])\right)$,

$$\sum_n \pi_1(T_m^\sharp \varphi_n) = \sum_n \left| \int_0^1 \varphi_n \, d\nu \right| \pi_1(A_m) = \pi_1(A_m) \sum_n |\langle \nu, \varphi_n\rangle| \leq 2\pi_1(A_m).$$

Así pues, $\mathcal{M} \subset \Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1], \ell^2), \ell^2\right)$ y $\pi_1(T_m) = \pi_1(T_m^\sharp) = 2\pi_1(A_m)$.

Veamos que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)\right)$. Dado $\varepsilon > 0$ y $\sum_n \varphi_n$ w.u.c en $\mathcal{C}([0,1])$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sum_{n \geq n_0} |\langle \nu, \varphi_n \rangle| < \frac{\varepsilon}{\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_m}};$$

de esta forma, cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq n_0} \|T_m^\sharp \varphi_n\| &= \sum_{n \geq n_0} \left| \int_0^1 \varphi_n \, d\nu \right| \|A_m\| \\
&= \frac{1}{p_m} \sum_{n \geq n_0} |\langle \nu, \varphi_n \rangle| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sin embargo, $\mathcal{M}^\sharp$ ni siquiera es acotado, por lo que aún menos podrá ser uniformemente 1-sumante en $\Pi_1\left(\mathcal{C}([0,1]), \Pi_1(\ell^2, \ell^2)\right)$. Para ver esto, recordemos que la sucesión (x_m) se definió de manera que $e^{x_m} x_m = m^2 + 1$ ó, de modo equivalente,

$$\frac{e^{x_m}}{m^2+1} = \frac{1}{x_m}, \quad \forall m \in \mathbb{N};$$

es por ello que la sucesión $\left(\dfrac{e^{x_m}}{m^2+1}\right)$ es convergente a 0. Sea $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que

$$x_m < \log(m^2+1), \quad \forall m \geq N. \tag{3.12}$$

Ahora, utilizando (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned}
\lim_m \pi_1(T_m^\sharp) &= \lim_m 2\pi_1(A_m) \\
&\geq \lim \frac{2m}{p_m} \\
&= \lim_m \frac{2m}{x_m} \\
&\geq \lim_m \frac{2m}{\log(m^2+1)} = \infty.
\end{aligned}$$

En este punto, tiene sentido preguntarnos por el significado de la 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}^\sharp$ en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$. Con los siguientes resultados, se intenta aportar algo de luz a esta cuestión.

Proposición 3.3.2 *Sea $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$.

(b) Dados $\varepsilon > 0$ y $(f_n) \subset \mathcal{C}(\Omega, X)$ tal que

$$\exists C > 0: \quad \sup_{\omega\in\Omega} \left(\sum_n \|f_n(\omega)\| \right) \leq C, \tag{3.13}$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_{n\geq n_0} \|Tf_n\| < \varepsilon,$$

para todo $T \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Gracias al teorema 2.1.1, la familia de medidas $\{|m_T|: T \in \mathcal{M}\}$ es uniformemente numerablemente aditiva. Se sigue como en la demostración (b)$\Rightarrow$(a) del citado resultado, aplicando el teorema de Egorov a la sucesión de funciones $(\|f_n(\cdot)\|)$ en $\mathcal{C}(\Omega)$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $\varepsilon > 0$ y $(\varphi_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega))$. En primer lugar, vamos a probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>n_0} \|T(\varphi_n x)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in B_X, \forall T \in \mathcal{M}. \tag{3.14}$$

Razonando por reducción al absurdo, podemos encontrar sucesiones (x_k) y (T_k) en B_X y $\mathcal{M}$, respectivamente, y una sucesión de números naturales (n_k) estrictamente creciente cumpliendo

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|T_k(\varphi_n x_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Es inmediato comprobar que la sucesión (f_n) en $\mathcal{C}(\Omega, X)$, dada por

$$(\varphi_1 x_1, \ldots, \varphi_{n_2} x_1, \varphi_{n_2+1} x_2, \ldots, \varphi_{n_3} x_2, \ldots, \ldots),$$

verifica

$$\sup_{\omega\in\Omega} \left(\sum_n \|f_n(\omega)\| \right) \leq \left\| \sum_n |\varphi_n| \right\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \epsilon_1((\varphi_n));$$

sin embargo, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n>k} \|T_k(\varphi_n x_k)\| \geq \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|T_k(\varphi_n x_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}$$

lo que contradice la condición (b).

Una vez probado (3.14), consideremos, para cada $T \in \mathcal{M}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, x_n^T en B_X de manera que

$$\|T^\sharp \varphi_n\| \leq \|(T^\sharp \varphi_n)x_n^T\| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}};$$

en tal caso, si $T \in \mathcal{M}$ se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{n>n_0} \|T^\sharp \varphi_n\| &\leq \sum_{n>n_0} \left(\|(T^\sharp \varphi_n)x_n^T\| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \\ &\leq \sum_{n>n_0} \|T^\sharp(\varphi_n x_n^T)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Obsérvese que, si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(\Omega, X)$ que verifica la condición (3.13) entonces $\sum_n f_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X)$; en efecto, cualquiera que sea $m \in \mathcal{C}(\Omega, X)^*$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle m, f_n \rangle| &= \sum_n \left| \int_\Omega f_n(\omega)\, dm \right| \\ &\leq \int_\Omega \left(\sum_n \|f_n(\omega)\| \right) d|m| \\ &\leq C|m|(\Omega). \end{aligned}$$

A partir del teorema 3.3.2 es inmediato deducir nuevamente el siguiente hecho:

$$\mathcal{M} \text{ uniformemente 1-sumante} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{M}^\sharp \text{ uniformemente 1-sumante} \\ \text{en } \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y)). \end{array} \tag{3.15}$$

El ejemplo 3.3.1 muestra que el recíproco no es cierto ni siquiera cuando el espacio X es reflexivo.

Lema 3.3.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Toda sucesión (f_n) en $\ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega, X))$ verifica (3.13), es decir, existe $C > 0$ verificando

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sum_n \|f_n(\omega)\| \leq C.$$

(b) X es finito–dimensional.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Consideremos una serie $\sum_n x_n$ w.u.c. en X. Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ de forma que existe $\omega_0 \in \Omega$ con $\varphi(\omega_0) = 1$. Si definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & \Omega & \longrightarrow & X \\ & \omega & \longmapsto & \varphi(\omega)x_n \end{array}$$

es inmediato comprobar que la serie $\sum_n f_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X)$. Por hipótesis, existe una constante $C > 0$ de manera que

$$\sum_n \|x_n\| = \sum_n \|f_n(\omega_0)\| \leq C,$$

es decir, la serie $\sum_n \|x_n\|$ es absolutamente convergente; por tanto, X debe tener dimensión finita.

(b)$\Rightarrow$(a) Si X es finito–dimensional, el operador identidad en X, id_X, es 1-sumante; de esta manera, si $(f_n) \in \ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega, X))$,

$$\sup_{\omega\in\Omega} \left(\sum_n \|f_n(\omega)\| \right) \leq \pi_1(id_X) \sup_{\omega\in\Omega} \epsilon_1\left((f_n(\omega))\right) < \infty.$$

□

Gracias al lema anterior, se concluye que la condición "X finito–dimensional" es suficiente para que se dé el recíproco de (3.15). Sin embargo, tal condición no es necesaria: cualquiera que sea $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, \ell^1), \ell^2)$, se verifica que si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(\ell^1, \ell^2))$ entonces también lo es en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(\ell^1, \ell^2))$, gracias al teorema de Grothendieck ([G]; [DJT, teorema 1.13]); basta ahora hacer uso del teorema 3.1.4 para deducir que $\mathcal{M}$ es uniformemente 1-sumante.

El ejemplo anterior aporta la idea fundamental para obtener la caracterización que se busca:

Teorema 3.3.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$.

(b) Se verifica:

(b.1) X no contiene copia de c_0.

(b.2) Existe una constante $C > 0$ tal que $\pi_1(S) \leq C\|S\|$ para todo $S \in \Pi_1(X,Y)$.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Puesto que la norma 1-sumante domina la norma operador, la condición (b.1) se deduce de manera inmediata a través del teorema 3.1.4. Para obtener (b.2) vamos a razonar por reducción al absurdo. Sea (S_m) una sucesión en $\Pi_1(X,Y)$ de forma que $\|S_m\| \leq 1$ pero $\pi_1(S_m) > m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fijado $\omega_0 \in \Omega$, consideremos el operador

$$\begin{array}{rccc} T_m: & \mathcal{C}(\Omega, X) & \longrightarrow & Y \\ & f & \longmapsto & S_m(f(\omega_0)) \end{array}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Se comprueba fácilmente que

$$\begin{array}{rccc} T_m^\sharp: & \mathcal{C}(\Omega) & \longrightarrow & \Pi_1(X,Y) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi(\omega_0)S_m \end{array}$$

. Se verifica que $\pi_1(T_m^\sharp) = \pi_1(S_m) < \infty$ para cada $m \in \mathbb{N}$, luego $\mathcal{M} = (T_m)$ es un subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$. El conjunto $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{L}(X,Y))$ pero $\mathcal{M}$ ni siquiera es π_1-acotado.

(b)$\Rightarrow$(a) La equivalencia de las normas operador y π_1 en $\Pi_1(X,Y)$ (condición (b.2)) junto con la condición de que X no contenga copia de c_0, lleva a deducir (a) mediante el teorema 3.1.4.

$\square$

OBSERVACIONES

1. Nótese que la condición (b.2) es equivalente a que la clase de los operadores 1-sumantes con la norma operador sea un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

De esta manera, si $\mathcal{A}(X,Y)$ representa la clase de los operadores de X en Y que son límite uniforme de operadores de rango finito, dicha condición implica que $\mathcal{A}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$.

2. Debemos hacer notar que, fijado un espacio de Banach Y, una de las dos condiciones (b.1) o (b.2) es redundante. En efecto, si Y es finito–dimensional, $\Pi_1(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$, por lo que sobra la condición (b.2) (estaríamos nuevamente ante el teorema 3.1.4). Si Y es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces (b.2)$\Rightarrow$(b.1). Por reducción al absurdo, supongamos que existe un isomorfismo J de c_0 en un subespacio de X; veamos que toda serie incondicionalmente convergente en Y es absolutamente convergente, con lo que llegaríamos a contradecir al teorema de Dvoretzky–Rogers .

   Fijada $(y_n) \in \ell_u^1(Y)$, consideremos las sucesiones $(x_n) \subset X$ y $(x_n^*) \subset X^*$, donde $x_n = Je_n$ y x_n^* es la extensión a X (mediante el teorema de Hahn–Banach) de $(J^*)^{-1}e_n^*$ ((e_n) y (e_n^*) son las bases canónicas de c_0 y ℓ^1, respectivamente). Los operadores $S_m = \sum_{n=1}^m x_n^* \otimes y_n$ son de rango finito ($\Rightarrow$ 1-sumantes) para cada $m \in \mathbb{N}$ y, puesto que $(y_n) \in \ell_u^1(Y)$, convergen uniformemente a $S = \sum_n x_n^* \otimes y_n$. Así, $S \in \mathcal{A}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$ gracias a (b.2). Ahora bien, $(x_n) = (Je_n) \in \ell_w^1(c_0)$, luego resulta

$$\infty > \sum_n \|Sx_n\| = \sum_n \left\| \sum_k \langle x_k^*, x_n \rangle y_k \right\| = \sum_n \|y_n\|.$$

3. Si Y tiene la propiedad de aproximación acotada, entonces la condición (b.2) del resultado anterior es equivalente a la igualdad $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$ cualquiera que sea el espacio de Banach X. En efecto, si Y posee tal propiedad, $\mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{A}(X,Y)$. Teniendo presente que $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$ siempre que $\mathcal{K}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$ e Y posea la propiedad de aproximación acotada ([MoR]), es suficiente demostrar que $\mathcal{A}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$, lo cual es cierto según se ha comentado en la primera observación.

En el ejemplo 3.1.2, se mostró un conjunto $\mathcal{M}$ no uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(c_0(c_0),\mathbb{R})$ pero de manera que $\mathcal{M}^\sharp$ sí lo era. Lógicamente, la sucesión $(f_n) = (\hat{x}^n)$ utilizada para probar la no 1-sumabilidad uniforme de $\mathcal{M}$ no verifica

(3.13). De hecho, dicha sucesión está muy "lejos" de cumplir tal condición:

$$\sum_n \|\hat{x}_k^n\|_{c_0} = \sum_{n \geq 2k-1} \|e_n\|_{c_0} = \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ya se ha mencionado anteriormente que la sucesión (f_n), donde $f_n \colon [0,1] \longrightarrow \ell^2$ está definida por $f_n(\omega) = \omega^n(1-w)^{1/2}e_n$ para cada $\omega \in [0,1]$, está en $\ell_w^1(\mathcal{C}([0,1],\ell^2))$. Es más,

$$\sum_n \|f_n(\omega)\|_2 = \begin{cases} \dfrac{\omega}{(1-\omega)^{1/2}} & \text{si } \omega \in [0,1) \\ 0 & \text{si } \omega = 1 \end{cases},$$

es decir, $\sum_n \|f_n(\omega)\|_2 < \infty$ para cada $\omega \in [0,1]$ pero $\sup_{\omega\in[0,1]} \sum_n \|f_n(\omega)\|_2 = \infty$. Por tanto, aunque esta sucesión de funciones tampoco satisface 3.13, se "acerca" un poco más que la anterior. Veamos que, a pesar de que el conjunto $\mathcal{M} = (T_m)$ del ejemplo 3.3.1 es tal que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{L}(\ell^2,\ell^2))$, la serie $\sum_n \|T_m f_n\|_2$ no es uniformemente convergente en $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\geq n_0} \|T_m f_n\| < \varepsilon$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{m_0} \geq n_0$. Como la sucesión (p_m) es creciente, cualquiera que sea $m \geq m_0$ resulta

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \sum_{n\geq n_0} \|T_m f_n\|_2 \\
&\geq \sum_{n\geq p_m} \|T_m f_n\|_2 \\
&= \sum_{n\geq p_m} \left\| A_m \left(\int_0^1 \langle e_k, \omega^n(1-\omega)^{1/2} e_n\rangle \, d\nu \right)_k \right\|_2 \\
&= \sum_{n\geq p_m} \left(\sum_{k=1}^{m^2} \left| \frac{1}{p_m} \int_0^1 \langle e_k, e_n\rangle \omega^n \, d\omega \right|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sum_{n=p_m}^{m^2} \frac{1}{p_m} \int_0^1 \omega^n \, d\omega \\
&= \frac{1}{p_m} \sum_{n=p_m+1}^{m^2+1} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

(obsérvese que $p_m \leq m^2$ pues $p_m \leq x_m < e^{x_m} x_m = m^2+1$); por tanto, la sucesión $\left(\frac{1}{p_m} \sum_{n=p_m+1}^{m^2+1} \frac{1}{n}\right)_m$ es convergente a 0. Utilizando que existe un número real C

verificando

$$\lim_m \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m \right) = C,$$

se obtiene

$$0 = \lim_m \frac{1}{p_m} \sum_{n=p_m+1}^{m^2+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{p_m} \left(\sum_{n=1}^{m^2+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n} \right) = \lim_m \frac{1}{p_m} \log \frac{m^2+1}{p_m}. \tag{3.16}$$

Por otra parte

$$e^{x_m} x_m = m^2 + 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_m} \log \frac{m^2+1}{x_m}$$

y, en consecuencia,

$$1 = \lim_m \frac{1}{x_m} \log \frac{m^2+1}{x_m} = \lim_m \frac{1}{p_m} \log \frac{m^2+1}{p_m}$$

que contradice (3.16).

$\star \quad \star \quad \star$

Para el caso $Y = \mathbb{R}$, hemos obtenido una demostración diferente para (b)$\Rightarrow$(a) del teorema 3.1.4:

Teorema 3.3.5 *Sea X un espacio de Banach que no contiene copia de c_0; entonces todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), \mathbb{R})$ es uniformemente 1-sumante si y sólo si $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), X^*)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), \mathbb{R})$ de manera que $\mathcal{M}^\sharp$ es uniformemente 1-sumante en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), X^*)$. Si $\mathcal{M}$ no fuera uniformemente 1-sumante, entonces existiría $\varepsilon > 0$, una sucesión (f_n) en $B_{\ell^1_w(\mathcal{C}(\Omega,X))}$, una sucesión (T_k) en $\mathcal{M}$ y una sucesión de números naturales (n_k) estrictamente creciente verificando:

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \left| \int_\Omega f_n \, dm_{T_k} \right| > \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Pongamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $I_k^+ = \left\{ n \in \{n_k+1, \ldots, n_{k+1}\} : \int_\Omega f_n \, dm_{T_k} \geq 0 \right\}$ e $I_k^- = \left\{ n \in \{n_k+1, \ldots, n_{k+1}\} : \int_\Omega f_n \, dm_{T_k} < 0 \right\}$. De (3.17), se sigue

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< \sum_{n \in I_k^+} \int_\Omega f_n \, dm_{T_k} - \sum_{n \in I_k^-} \int_\Omega f_n \, dm_{T_k} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k^+} f_n \right) dm_{T_k} - \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k^-} f_n \right) dm_{T_k} \\
&= \left| \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k^+} f_n \right) dm_{T_k} \right| + \left| \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k^-} f_n \right) dm_{T_k} \right|
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Obviamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, alguno de los dos téminos en la última suma es mayor que $\frac{\varepsilon}{2}$; entonces, definimos I_k como I_k^+ o I_k^- según cuál de los dos sumando sea mayor que $\frac{\varepsilon}{2}$ (si ambos lo son, elegimos por ejemplo I_k^+). De todo esto, se deduce que existe una sucesión (I_k) de conjuntos en $\mathbb{N}$ finitos y disjuntos dos a dos tales que

$$\left| \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k} f_n \right) dm_{T_k} \right| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Por otra parte, al ser $\mathcal{M}^\sharp$ uniformemente 1-sumante, existe una medida positiva μ numerablemente aditiva sobre Σ tal que

$$\lim_{\mu(E) \to 0} |m_T|(E) = 0$$

uniformemente en $T \in \mathcal{M}$ (teorema 2.1.1 (b')); por tanto, podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que, si $E \in \Sigma$ verifica $\mu(E) < \delta$, entonces $|m_T|(E) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $T \in \mathcal{M}$. Sea ρ una reordenación de los números naturales de forma que los elementos de cada I_k aparezcan consecutivamente y en orden creciente. La serie $\sum_n f_n(\omega)$ es w.u.c. en X para cada $\omega \in \Omega$ y, puesto que dicho espacio no contiene copia de c_0, es también incondicionalmente convergente. Si, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $S_m = \sum_{n=1}^m f_{\rho(n)}$ y $S = \sum_n f_{\rho(n)}$, el teorema de Egorov garantiza la existencia de un subconjunto de Borel $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$ y tal que

$$S_{m|_{\Omega \setminus E}} \longrightarrow S_{|_{\Omega \setminus E}}$$

uniformemente. Por consiguiente, si $C = \sup\{|m_T|(\Omega)\colon\ T \in \mathcal{M}\}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $q \geq p \geq m_0$ resulta

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} f_{\rho(n)}(\omega) \right\| < \frac{\varepsilon}{4C}, \quad \forall \omega \in \Omega \backslash E.$$

Consideremos ahora cualquier I_k tal que $\min I_k \geq \rho(m_0)$; tomando p y q en $\mathbb{N}$ tales que $\rho(p) = \min I_k$ y $\rho(q) = \max I_k$ ($\Rightarrow q \geq p \geq m_0$), los argumentos anteriores confirman que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \left(\sum_{n \in I_k} f_n \right) dm_{T_k} \right| &= \left| \int_\Omega \left(\sum_{n=p}^{q} f_{\rho(n)} \right) dm_{T_k} \right| \\
&\leq \int_\Omega \left\| \sum_{n=p}^{q} f_{\rho(n)} \right\| d|m_{T_k}| \\
&= \int_E \left\| \sum_{n=p}^{q} f_{\rho(n)} \right\| d|m_{T_k}| + \int_{\Omega \backslash E} \left\| \sum_{n=p}^{q} f_{\rho(n)} \right\| d|m_{T_k}| \\
&< |m_{T_k}|(E) + |m_{T_k}|(\Omega \backslash E) \frac{\varepsilon}{4C} \\
&< \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

que entra en contradicción con (3.18).

□

⋆ ⋆ ⋆

Para terminar, se muestra la condición necesaria y suficiente para que se dé el recíproco del teorema 3.2.2.

Proposición 3.3.6 *Cualquiera que sea el espacio Y, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Todo conjunto $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$ es uniformemente 1-dominado si y sólo si $\mathcal{M}^\sharp$ lo es en $\Pi_1(\mathcal{C}(\Omega), \Pi_1(X, Y))$.

(b) X es finito–dimensional.

DEMOSTRACIÓN: (a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $\sum_n x_n$ es w.u.c. en X. Sea $(x_n^*) \subset X^*$ de forma que $\langle x_n^*, x_n \rangle = \|x_n\|$ para cada $n \in$ N. Fijados $y_0 \in Y$ con $\|y_0\| = 1$ y $\omega_0 \in \Omega$, para cada $n \in \mathbb{N}$ puede definirse el operador $T_n\colon \mathcal{C}(\Omega, X) \longrightarrow Y$ por $T_n f = \langle x_n^*, f(\omega_0) \rangle y_0$; es inmediato comprobar que $T_n^\sharp \varphi = \varphi(\omega_0) x_n^* \otimes y_0$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$. Además, si $\sum_n \varphi_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega)$, resulta

$$\sum_n \pi_1(T_n^\sharp \varphi_n) = \sum_n |\varphi_n(\omega_0)| \|x_n^*\| \leq \sum_n |\varphi_n(\omega_0)| \leq \epsilon_1\left((\varphi_n)\right);$$

así pues, la sucesión $(T_n^\sharp)$ es uniformemente 1-dominada y, por hipótesis, también lo es la sucesión (T_n). Consideramos $\varphi_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi_0(\omega_0) = 1$; la serie $\sum_n \varphi_0 x_n$ es w.u.c. en $\mathcal{C}(\Omega, X)$ luego, para cada $\varepsilon > 0$, el teorema 1.3.2(b) garantiza la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sum_{n \geq n_0} \|x_n\| = \sum_n |T_n(\varphi_0 x_n)| < \varepsilon,$$

o sea, la serie $\sum_n \|x_n\|$ es absolutamente convergente.

(b)$\Rightarrow$(a) Podemos suponer $X = \mathbb{R}^d$. En efecto, si $i\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow X$ es un isomorfismo, dado $\mathcal{M} \subset \Pi_1(\mathcal{C}(\Omega, X), Y)$, es suficiente trabajar con el conjunto $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\widetilde{T}\colon \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^d) \longrightarrow Y\colon T \in \mathcal{M}\}$ donde $\widetilde{T}\tilde{f} = T(i \circ \tilde{f})$, para cada $\tilde{f}$ en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Para el caso $X = \mathbb{R}^d$, el resultado es inmediato a partir del teorema 1.3.2 y observando que, si $f_1, \ldots, f_m$ son funciones en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ y denotamos por $(f_n^1, \ldots, f_n^d)$ las componentes de f_n para cada $n \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$\epsilon_1((f_n)_{n=1}^m) = \epsilon_1(f_1^1, \ldots, f_1^d, f_2^1, \ldots, f_2^d, \ldots\ldots, f_m^1, \ldots, f_m^d).$$

$\square$

Apéndice

Sea (T_k) una sucesión en $\Pi_p(X,Y)$. Veamos que $(\widehat{T}_k) \to 0$ puntualmente si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

(i) $T_k \to 0$ puntualmente.

(ii) (T_k) es uniformemente p-sumante.

Supongamos que $(\widehat{T}_k) \to 0$ puntualmente. Fijado $x \in X$, para $\hat{x} = (x, 0, 0, \ldots)$ y $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k x\| = \|\widehat{T}_k \hat{x}\|_p < \varepsilon$ si $k \geq k_0$, lo que prueba (i). Para probar (ii), partimos de $\varepsilon > 0$ y $\hat{x} = (x_n) \in \ell_w^p(X)$. Por hipótesis, $\widehat{T}_k \hat{x} \to 0$ en $\ell_a^p(Y)$ si $k \to \infty$; es decir, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_n \|T_k x_n\|^p < \varepsilon, \quad \forall k > k_0. \tag{19}$$

Por otra parte, los operadores $T_1, \ldots, T_{k_0}$ son p-sumantes, luego existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_k x_n\|^p < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, k_0. \tag{20}$$

De (19) y (20) resulta

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_k x_n\|^p < \varepsilon,$$

cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$, que prueba (ii).

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ y $\hat{x} = (x_n) \in \ell_w^p(X)$, (ii) permite concluir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} \|T_k x_n\|^p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, utilizando (i), puede encontrarse k_0 de forma que

$$||T_k x_n||^p < \left(\frac{\varepsilon}{2n_0}\right)^{1/p}, \quad \forall k > k_0,$$

cualquiera que sea $n \in \{1, \ldots, n_0\}$. Ahora, si $k > k_0$

$$||\widehat{T}_k \hat{x}||_p^p = \sum_n ||T_k x_n||^p = \sum_{n<n_0} ||T_k x_n||^p + \sum_{n \geq n_0} ||T_k x_n||^p < \varepsilon.$$

Bibliografía

[BPe] C. BESSAGA, A. PELCZYNSKI, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math., **17** (1958), 151–164.

[BoDe] J. BOURGAIN, F. DELBAEN, *A class of special* $\mathcal{L}^{\infty}$*-spaces*, Acta Math., **145** (1981), 155–176.

[BaDuSc] R.G. BARTLE, N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math., **7** (1955), 289–305.

[D] J. DIESTEL, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer–Verlag, Nueva York (1984).

[Di] N. DINCULEANU, *Integral representation of vector measures and linear operations*, Studia Math., **25** (1964/65), 181–205.

[Di2] N. DINCULEANU, *Integral representation of linear operators I, II*, Stud. Cerc. Mat., **18** (1966), 349–385, 483–536.

[Di3] N. DINCULEANU, *Vector measures*, Internat. Series of Monographs in Pure and Appl. Math., **95**, Pergamon Press, Oxford; VEB Deutscher Verlar der Wissenschaften, Berlin (1967).

[Di4] N. DINCULEANU, *Integral representation of dominated operations on spaces of continuous vector fields*, Math. Ann., **173** (1967), 147–180.

[Do] V.M. DOUBROVSKY, *On the basis of a family of completely additive functions of sets and on the properties of uniform additivity and equicontinuity*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), **58** (1947), 737–740.

[DJT] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambrige studies in advanced mathematics, **43**, Cambridge (1995).

[DU] J. DIESTEL, J.J. UHL, *Vector measures*, A.M.S. Surveys, **15**, Providence, Rhode Island (1977).

[DuPt] N. DUNFORD, B.J. PETTIS, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **47** (1940), 323–392.

[DvRo] A. DVORETZKY, C.A. ROGERS, *Absolute and unconditional convergence in nsrmed spacrs*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **36** (1950), 192–197.

[FSi] C. FOIAS, I. SINGER, *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector–valued continuous functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **5** (1960), 769–752.

[G] A. GROTHENDIECK, *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paolo, **8** (1953), 1–179.

[G2] A. GROTHENDIECK, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretsky–Rogers*, Bol. Soc. Mat. São Paolo, **8** (1953), 81–110.

[G3] A. GROTHENDIECK, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $\mathcal{C}(K)$, Canad. J. Math., **5** (1953), 129–173.

[KH] R. KHALIL, M. HUSSAIN, *Uniformly dominated sets of p-summing operators*, Far East J. Math. Sci., **Special Volume, Part I** (1998), 59–68.

[LPe] J. LINDENSTRAUSS, A. PELCZYNSKI, *Absolutely summing operators in L^p-spaces and their applications*, Studia Math., **29** (1968), 275–326.

[LTz] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **92**, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1977).

[Ma] B. MAUREY, *Théorèmes de factorization pour les operateurs linéaires a valeurs dans les espaces L^p*, Asterisque, **11**, Soc. Math. France, Paris (1974).

[MaPs] B. MAUREY, G. PISIER, *Series de variables aleatories vectorielles independants et proprietes geometriques des espaces de Banach*, Studia Math., **58** (1976), 45–90.

[MPi] B. MARCHENA, C. PIÑEIRO, *Bounded sets in the range of an X^{**}-valued measure with bounded variation*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **Vol. 23, No. 1** (2000), 21–30.

[MoR] J.S. MORRELL, J.R. RETHERFORD, *p-Trivial Banach spaces*, Studia Math., **43(1)** (1972), 1–25.

[P] A. PIETSCH, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Reihe A, Reine Mathematik, Heft1, Akademie–Verlag, Berlin (1965).

[P2] A. PIETSCH, *Abbildungen von abstrakten Massen*, Wiss. Z. Friedrich–Schiller–Univ. Jenal Thüringen, **14** (1965), 281–286.

[P3] A. PIETSCH, *Absolute p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math., **28** (1967), 333–353.

[Pe] A. PELCZYNSKI, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **10** (1962), 641–648.

[Pe2] A. PELCZYNSKY, *A characterization of Hilbert–Schmidt operators*, Studia Math., **28** (1967), 355–360.

[Pt] B.J. PETTIS, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 277–304.

[PrP] A. PERSSON, A. PIETSCH, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math., **33** (1969), 19–62.

[S] C. SWARTZ, *Unconditionally converging operators on the space of continuous functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **17** (1972), 1695–1702.

[S2] C. SWARTZ, *Absolutely summing and dominated operators on spaces of vector–valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 123–131.

[Si] I. SINGER, *Linear functionals on the space of continuous mappings of a compact Hausdorff space into a Banach space*, Rev. Math. Pures Appl., **2** (1957), 301–315.

[Si2] I. SINGER, *Les duals de certaines espaces de Banach de champs de vecteurs I*, Bull. Sci. Math. (2), **82** (1958), 29–40.

[Si3] I. SINGER, *Les duals de certaines espaces de Banach de champs de vecteurs II*, Bull. Sci. Math. (2), **83** (1959), 273–96.

[Th] G.E.F. THOMAS, *The Lebesgue–Nikodym theorem for vector valued Radon measures*, Amer. Math. Soc. Mem., **139** (1974).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Juan Manuel Delgado Sánchez.
titulada Conjuntos Uniformemente Lineales de Operadores.

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude, por unanimidad

Sevilla, 31 de octubre 2001

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Doctorado,

EL PRESIDENTE

El Secretario,

Juan Carlos García.