CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES COMPLEJAS FILIFORMES DE DIMENSION 9

Trabajo que presenta **José Ramón Gómez Martín** para
optar al grado de Doctor en Matemáticas
realizado bajo la dirección del
profesor Dr. **Francisco Javier Echarte Reula.**

El Catedrático Director | El Doctorando

Sevilla, Noviembre de 1989

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Departamento de ~~de la~~ Algebra, Computación, Geometría y Topología. ~~En~~ esta Universidad desde el día 1-XII-89 hasta el día 20-XII-89 ha estado depositada

Sevilla 21 de Diciembre de 1989

~~EL DIRECTOR DE~~

El Secretario del Departamento

A CONCHA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral al folio 84 número 88 del libro correspondiente.

Sevilla, 21 DIC. 1989

El Jefe del Negociado de Tesis,

AGRADECIMIENTOS.-

Es especialmente grato para mí expresar mi sincero reconocimiento a todas aquellas personas que, de una forma u otra, han contribuido a la realización de este trabajo.

En primer lugar quiero agradecer al director de la tesis, el profesor F. Javier Echarte, sus valiosos consejos y su constante apoyo.

Es para mí un orgullo tener por amigos a los profesores Alberto Márquez y Luis Manuel Fernández. Sin el apoyo, aliento y estímulo que recibí de ellos quizás no se habría redactado la presente memoria.

Mención especial merece mi buen amigo, el profesor Jiménez Alcón, con quién compartí tantas horas de trabajo.

Mi gratitud también a los profesores M. Carlos Botebol, Ana M. Feliu y Elena Martín, por la ayuda prestada.

Mi agradecimiento alcanza a otras muchas personas que me apoyaron cuando lo necesité. Pero entre todas destaca mi mujer, Concha, cuya ayuda y comprensión han posibilitado que hoy presente este trabajo. Para ella y para nuestros hijos, porque fueron capaces de prescindir de mi presencia en tantas ocasiones,y para todos los demás, ... gracias.

INTRODUCCION

INTRODUCCION

A partir de la conocida descomposición de Lévi de un álgebra de Lie cualquiera en la suma directa de su radical, que es resoluble, y de una subálgebra (de Lévi) semisimple, el problema de la clasificación de un álgebra de Lie se reduce a los de las clasificaciones de las álgebras resolubles y las semisimples. Dado que toda álgebra semisimple se puede descomponer en suma directa de álgebras simples y que la clasificación de éstas es bien conocida, sólo queda por resolver el problema de la clasificación de las álgebras resolubles complejas.

El problema de la clasificación de las álgebras de Lie resolubles complejas es un problema que permanece abierto en la actualidad, ya que sólo se conocen las álgebras resolubles de dimensiones menores o iguales a 5. El importante papel que desempeñan los ideales maximales nilpotentes en el estudio de las álgebras resolubles pone de relieve la importancia de la clasificación de las álgebras nilpotentes para clasificar las resolubles.

Los primeros resultados de interés relacionados con la clasificación de las álgebras nilpotentes datan de hace un siglo y fueron publicados en 1891 por Umlauf (véase [17]). En este trabajo se hace un intento de clasificación, aunque incompleta, para dimensiones menores o iguales a 6.

La primera clasificación de las álgebras nilpotentes hasta dimensión 6 fué dada por Morosov en 1958 (véase [13]), y se basa en la máxima dimensión m de un ideal abeliano maximal. La clasificación hasta dimensión 5 había sido dada anteriormente por Dixmier usando otros procedimientos (véanse [7] y [8]). De manera independiente a Morosov, Vranceanu ha clasificado también las nilpotentes de dimensión 6. Tanto esta clasificación como la de Morosov son completas para el caso complejo pero tienen un olvido en el caso real.

En 1966 Vergne ha dado, por primera vez, una lista completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales o complejas de dimensión 6, concluyendo así los trabajos de Morosov y Vranceanu. Asímismo, Vergne pone de relieve en su trabajo una importante diferencia entre los casos de dimensiones menores o iguales a 6 y mayores o iguales a 7, demostrando la existencia en éstas de una infinidad de clases de isomorfía de álgebras de Lie nilpotentes filiformes, lo que dificulta más aún la clasificación a partir de dimensión 7.

En 1964 Safiullina publica la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión 7, siguiendo el método de Morosov (véase [13]). Sin embargo, su clasificación es incompleta, como demuestra Magnin en 1986 (véase [12]). Este autor utiliza el método de las derivaciones nilpotentes para clasificar las álgebras nilpotentes hasta dimensión 6. En dimensión 7 determina todas las álgebras nilpotentes que contienen a un álgebra dada de dimensión 6 aunque no consigue encontrar todas las clases de isomorfía en 7 dimensiones. Otra aproximación a la clasificación de estas álgebras se debe a Romdhani en 1985 (véase [14]). La clasificación intentada en este trabajo se basa en el tipo del álgebra de Lie (dimensiones de las sucesiones derivada, central descendente y central ascendente), determinándose en el mismo otros invariantes (soporte del centro del álgebra envolvente, generadores del álgebra de Kac-Moody asociada).

Skjelbred y Sund en 1977 (véase [16]) habían desarrollado un método que permite clasificar las álgebras nilpotentes de dimensión n+1 si se conocen las de dimensiones menores o iguales a n. Este método solo ha sido aplicado al caso de dimensión 6, obteniéndose de nuevo la clasificación dada por Morosov. El procedimiento anterior presenta grandes dificultades prácticas y, que sepamos, no se ha usado hasta la fecha para dimensiones mayores a 6.

El problema de la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión 7, pues, ha permanecido abierto durante bastante tiempo, a pesar de las aproximaciones a la solución del mismo que significaron los trabajos ya citados de Magnin y Safiullina o los de los profesores Goze y Ancochea de 1985 y 1986 (véanse [1] y [2]). Finalmente ha sido resuelto por ellos en un artículo publicado en 1989 (véase [4]). Ya en 1988 habían publicado la clasificación de las álgebras filiformes complejas de dimensión 8. Estas clasificaciones están basadas en el uso de un nuevo invariante, que denominan sucesión característica y que corresponde a las dimensiones maximales de los bloques de Jordan de una matriz nilpotente.

La importancia de los trabajos de Ancochea y Goze es grande, pues no sólo han conseguido las clasificaciones antes citadas, sino que han desarrollado unas técnicas susceptibles de ser aplicadas a otros casos. Estas son, precisamente, las que se utilizan en las presentes notas para obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de dimensión 9.

El primer capítulo del trabajo está dedicado al estudio de la estructura de las álgebras filiformes complejas de dimensión n. Es decir, a partir del teorema de Engel, de la identidad de Jacobi y de la propia definición de álgebra de Lie nilpotente filiforme compleja, se prueba la existencia en cualquiera de ellas de una base, que se designa siempre mediante $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, en la que X_1 es un vector característico, esto es, tal que

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le n$$

y X_2 es base del centro del álgebra, es decir

$$[X_2, X_i] = 0 \qquad 1 \le i \le n$$

verificándose, además, que

$$[X_3, X_i] = 0 \qquad 3 \le i \le n$$

$$[X_4, X_i] = 0 \qquad 4 \le i \le n-2$$

$$[X_4, X_{n-1}] = d_1 X_2$$

$$[X_4, X_n] = d_1 X_3 + d_2 X_2$$

$$[X_5,X_i] = 0 \qquad 5 \le i \le n-3$$

$$[X_5,X_{n-2}] = d_3X_2$$

$$[X_5,X_{n-1}] = (d_1+d_3)X_3 + d_4X_2$$

$$[X_5,X_n] = (2d_1+d_3)X_4 + (d_2+d_4)X_3 + d_5X_2$$

$$\text{con } d_i \in \mathbb{C} \qquad 1 \le i \le 5$$

Desde luego, se podría continuar estudiando la forma de los restantes corchetes, pero terminaría resultando inacabable y poco práctico. Además, no hay ninguna garantía de que algunas de las constantes de estructura que se indican (pues no son otra cosa los coeficientes d_i , $1 \le i \le 5$), no sean nulas.

El objetivo de este teorema y del capítulo en sí es doble : por un lado muestra el camino a seguir para dimensiones concretas y, por otro, y como corolario suyo, es posible volver a obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes para dimensiones sencillas.

Termina el capítulo incluyendo el listado de las álgebras filiformes, ya conocidas, de dimensiones 2 a 8.

En el capítulo segundo se procede a la resolución del problema objeto del presente trabajo : la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de dimensión 9.

En la primera parte del capítulo se estudia la estructura de las álgebras filiformes de dimensión 9, para lo cual se enuncia un teorema, que se ha denominado de estructura de las álgebras filiformes complejas de dimensión 9, en el que, siguiendo las ideas expuestas en el capítulo anterior, se prueba la existencia, para cada álgebra de éstas, de una base en la que los productos corchete tienen una estructura relativamente sencilla. Lo que dice el citado teorema es que para cualquier álgebra de Lie nilpotente filiforme compleja de 9 dimensiones se puede hallar una base para la cual la ley del álgebra se exprese mediante :

$$[X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = \alpha_1 X_2$$

$$[X_5,X_8] = \alpha_2 X_2$$

$$[X_5,X_9] = (\alpha_1+\alpha_2)X_3 + \alpha_3 X_2$$

$$[X_6,X_7] = \alpha_4 X_2$$

$$[X_6,X_8] = (\alpha_2+\alpha_4)X_3 + \alpha_5 X_2$$

$$[X_6, X_9] = (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4)X_4 + (\alpha_3+\alpha_5)X_3 + \alpha_6 X_2$$

$$[X_7, X_8] = (\alpha_2+\alpha_4)X_4 + \alpha_5 X_3 + \alpha_7 X_2$$

$$[X_7, X_9] = (\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)X_5 + (\alpha_3+2\alpha_5)X_4 + \\ + (\alpha_6+\alpha_7)X_3 + \alpha_8 X_2$$

$$[X_8, X_9] = (\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)X_6 + (\alpha_3+2\alpha_5)X_5 + \\ + (\alpha_6+\alpha_7)X_4 + \alpha_8 X_3 + \alpha_9 X_2$$

con $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq 9$, y para algún punto de la cónica de ecuación en $\mathbb{C}^9$:

$$2\alpha_1\alpha_4 - 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_4^2 = 0$$

El resto del trabajo consiste en la clasificación de estas álgebras. Lo que se hace es determinar que álgebras de las anteriores son isomorfas y, una vez determinadas las clases de isomorfía, seleccionar un representante de cada clase. Para la determinación de todos los posibles isomorfismos entre álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 9 debe tenerse en cuenta que estos isomorfismos han de corresponder, bien a cambios de base de Jordan de adX_1 que mantengan inveriante al vector característico X_1, bien a transformaciones que cambien el vector característico, bien a composiciones de ambas.

Se obtienen así nuevas bases de las álgebras filiformes y, respecto a ellas, se hallan las expresiones de los parámetros de la ley (las constantes de estructura que pueden ser no nulas, aparte de las $C_{1,i}^{i-1}$, para $3 \le i \le 9$, que valen 1), que se denominan ahora β_i y γ_i con $1 \le i \le 9$ y que vienen dadas en función de las α_i y de los coeficientes de los cambios de bases.

A partir de las dimensiones de las álgebras de Lie que se van obteniendo en la sucesión de derivadas del álgebra dada se subdivide la familia de álgebras filiformes complejas de dimensión 9 en 6 subfamilias tales que ningún álgebra de una de ellas sea isomorfa a ninguna otra de las álgebras de cualquier otra subfamilia.

Finalmente, se estudian en cada subfamilia las álgebras que no pueden ser isomorfas entre sí y aquellas otras para las que es posible encontrar un isomorfismo que transforme una en otra. En cada clase de isomorfía se elige como representante el álgebra que tenga un mayor número de constantes de estructura nulas y, de entre las que tengan el mismo número, la que tenga el mayor número posible de estas constantes que valgan 1.

En la clasificación obtenida aparecen, como era de esperar, una infinidad de clases de isomorfía de álgebras de Lie nilpotentes filiformes. Pero, si bien aparecen series continuas de álgebras no isomorfas, ahora no solamente aparecen familias uniparamétricas sino que también aparecen familias biparamétricas. Otra novedad es el hecho de que en varias de estas familias paramétricas de álgebras no isomorfas los parámetros no recorren $\mathbb{C}$ sino que alguno de ellos recorre un $\mathbb{C}_n$, siendo $\mathbb{C}_n$ el conjunto cociente de $\mathbb{C}$ por la relación de equivalencia definida por

$$uR_n v \Leftrightarrow u = \omega\cdot v \quad \text{con} \quad \omega^n = 1 \qquad \text{para } u,v \in \mathbb{C}.$$

La lista de álgebras de Lie complejas filiformes de dimensión 9 es la siguiente :

$$\mu_9^{1,\lambda_1,\lambda_2} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_5,X_8] = X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = 2X_3$$

$$[X_6,X_9] = 3X_4 + \lambda_1 X_3 + \lambda_2 X_2$$

$$[X_7,X_8] = 2X_4$$

$$[X_7,X_9] = 5X_5 + \lambda_1 X_4 + \lambda_2 X_3$$

$$[X_8,X_9] = 5X_6 + \lambda_1 X_5 + \lambda_2 X_4$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\mu_9^{2,\lambda}$: $[X_1,X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 9$

$$[X_4,X_9] = \frac{-3}{8} X_2$$

$$[X_5,X_8] = \frac{-1}{2} X_2$$

$$[X_5,X_9] = \frac{-7}{8} X_3$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = \frac{1}{2} X_3 + X_2$$

$$[X_6,X_9] = \frac{-3}{8} X_4 + X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7,X_8] = \frac{1}{2} X_4 + X_3$$

$$[X_7,X_9] = \frac{1}{8} X_5 + 2 X_4 + \lambda X_3$$

$$[X_8,X_9] = \frac{1}{8} X_6 + 2 X_5 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\mu_9^{3,\lambda}$: $[X_1,X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 9$

$$[X_4,X_9] = \frac{-3}{8} X_2$$

$$[X_5,X_8] = \frac{-1}{2} X_2$$

$$[X_5,X_9] = \frac{-7}{8} X_3$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = \frac{1}{2} X_3$$

$$[X_6,X_9] = \frac{-3}{8} X_4 + \lambda X_2$$

$$[X_7,X_8] = \frac{1}{2} X_4$$

$$[X_7,X_9] = \frac{1}{8} X_5 + \lambda X_3$$

$$[X_8,X_9] = \frac{1}{8} X_6 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mu_9^{4,\lambda} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = -X_3$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_3 + X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_4 + X_3$$

$$[X_7,X_9] = X_5 + 2 X_4 + \lambda X_3$$

$$[X_8,X_9] = X_6 + 2 X_5 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mu_9^5 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_4$$

$$\mu_9^6 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3$$

$$[X_7, X_8] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5$$

$$[X_8,X_9] = X_6$$

$$\mu_9^{7,\lambda_1,\lambda_2} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = \lambda_1 X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = \lambda_2 X_2$$

$$[X_6,X_9] = (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3$$

$$[X_7,X_8] = \lambda_2 X_3$$

$$[X_7,X_9] = (\lambda_1+2\lambda_2)\ X_4 + X_2$$

$$[X_8,X_9] = (\lambda_1+2\lambda_2)\ X_5 + X_3$$

con $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\lambda_2\ne 0$, $\lambda_1\ne -3\lambda_2$

$$\mu_9^{8,\lambda} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = \lambda\ X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = (1+\lambda)\ X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = (2+\lambda)\ X_4$$

$$[X_8,X_9] = (2+\lambda)\ X_5$$

con $\lambda\in\mathbb{C}-\{-3\}$

$$\mu_9^{9,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = -3\lambda\ X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = \lambda\ X_2$$

$$[X_6,X_9] = -2\lambda\ X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_8] = \lambda\ X_3$$

$$[X_7,X_9] = -\lambda\ X_4 + X_3$$

$$[X_8, X_9] = -\lambda\ X_5 + X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}_2 - \{[0]\}$

$$\mu_9^{8,-3} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -3X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = -2X_3$$

$$[X_7, X_8] = X_3$$

$$[X_7, X_9] = -X_4$$

$$[X_8, X_9] = -X_5$$

$$\mu_9^{10,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = \lambda\ X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = \lambda X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_9] = \lambda X_4 + X_3$$

$$[X_8,X_9] = \lambda X_5 + X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}_2 - \{[0]\}$.

$$\mu_9^{11} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = X_4$$

$$[X_8,X_9] = X_5$$

$$\mu_9^{12,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_4 + \lambda X_3$$

con $\lambda \in \mathbb{C}_2$.

$$\mu_9^{13} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3$$

$$\mu_9^{14} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$\mu_9^{15,\lambda_1,\lambda_2}$: $[X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 1 \le i \le 9$

$[X_5,X_9] = X_3$

$[X_6,X_8] = X_2$

$[X_6,X_9] = X_4 + X_3 + \lambda_1 X_2$

$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda_2 X_2$

$[X_7,X_9] = X_5 + 2X_4 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3$

$[X_8,X_9] = X_6 + 2X_5 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_4$

con $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$\mu_9^{16,\lambda_1,\lambda_2}$: $[X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3 \le i \le 9$

$[X_5,X_9] = X_2$

$[X_6,X_8] = X_2$

$[X_6,X_9] = 2X_3 + \lambda_1 X_2$

$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda_2 X_2$

$[X_7,X_9] = 3X_4 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3$

$[X_8,X_9] = 3X_5 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_4$

con $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$$\mu_9^{17,\lambda} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7,X_9] = 2X_4 + (1+\lambda) X_3$$

$$[X_8,X_9] = 2X_5 + (1+\lambda) X_4$$

con $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\mu_9^{18} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i<9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_9] = 2X_4 + X_3$$

$$[X_8,X_9] = 2X_5 + X_4$$

$$\mu_9^{19} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i<9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3$$

$$[X_7, X_8] = X_3$$

$$[X_7, X_9] = 2X_4$$

$$[X_8, X_9] = 2X_5$$

$$\mu_9^{20,\lambda_1,\lambda_2} : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \quad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + (\lambda_1+1) X_3 + \lambda_2 X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + (\lambda_1+1) X_4 + \lambda_2 X_3$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{C}_2$.

$$\mu_9^{21,\lambda} : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \quad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5, X_9] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_2$$

$X_7, X_9] = X_4 + (\lambda+1)X_3$

$[X_8, X_9] = X_5 + (\lambda+1)X_4$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\mu_9^{22,\lambda}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$

$[X_6, X_9] = X_2$

$[X_7, X_8] = X_2$

$[X_7, X_9] = 2X_3 + \lambda X_2$

$[X_8, X_9] = 2X_4 + \lambda X_3$

μ_9^{23} : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$

$[X_7, X_8] = X_2$

$[X_7, X_9] = X_3 + X_2$

$[X_8, X_9] = X_4 + X_3$

μ_9^{24} : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$

$[X_7, X_8] = X_2$

$$[X_7, X_9] = X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_4$$

$\mu_9^{25,\lambda_1,\lambda_2}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 9$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4 + X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_4 + \lambda_1 X_3 + \lambda_2 X_2$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$\mu_9^{26,\lambda}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 9$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_3 + \lambda X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{27} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_3$$

$$[X_6,X_9] = X_4$$

$$X_7,X_9] = X_5$$

$$[X_8,X_9] = X_6 + X_2$$

$$\mu_9^{28} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_3$$

$$[X_6,X_9] = X_4$$

$$[X_7,X_9] = X_5$$

$$[X_8,X_9] = X_6$$

$$\mu_9^{29,\lambda} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5,X_9] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_4 + X_3$$

$$[X_8,X_9] = X_5 + X_4 + \lambda\, X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{30} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_5,X_9] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = X_4$$

$$X_8,X_9] = X_5 + X_2$$

$$\mu_9^{31} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_5,X_9] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = X_4$$

$$[X_8,X_9] = X_5$$

$$\mu_9^{32,\lambda} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_6,X_9] = X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_3 + X_2$$

$$[X_8,X_9] = X_4 + X_3 + \lambda X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{33} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_6,X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_4 + X_2$$

μ_9^{34} : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \leq i \leq 9$

$$[X_6, X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_4$$

μ_9^{35} : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \leq i \leq 9$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3 + X_2$$

μ_9^{36} : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \leq i \leq 9$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3$$

μ_9^{37} : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \leq i \leq 9$

$$[X_8, X_9] = X_2$$

μ_9^{38} : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \leq i \leq 9$

CAPITULO 0

PRELIMINARES

CAPITULO 0

PRELIMINARES

1.- Grupos de Lie.-

Se denomina grupo de Lie a toda variedad diferenciable G, C^{∞}, que cumple las siguientes condiciones:

1) Está definida una operación interna entre sus puntos respecto a la cual tienen estos la estructura de grupo.

2) La aplicación

$$\phi : GxG \longrightarrow G$$

$$(p,q) \longmapsto f(p,q) = pq^{-1}$$

es C^{∞}-diferenciable.

Se representará el punto unidad del grupo por e. De la definición se deduce que la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G \\ p &\longmapsto f(p) = p^{-1} \end{aligned}$$

es C^{∞}-diferenciable, así como las aplicaciones

$$\begin{aligned} l_p : x &\longmapsto px \qquad (p,x \in G) \\ r_p : x &\longmapsto xp \end{aligned}$$

son también C^{∞}-diferenciables. A l_p y r_p se les denomina <u>traslaciones a izquierda y derecha</u>, respectivamente. Por ser C^{∞} y biyectivas son difeomorfismos de G en G. Las traslaciones a izquierda forman grupo, así como las traslaciones a derecha y como consecuencia de esto, también los automorfismos internos.

Cuando G no es una variedad conexa, la componente conexa de e, G_e, es un grupo de Lie, siendo las demás componentes difeomorfas a G_e, por poderse obtener unas de otras por traslaciones.

Los grupos de Lie pueden ser conmutativos o no, según lo sea o no la operación interna establecida entre sus puntos. Ejemplos del primer caso lo tenemos en $\mathbb{R}^n$ mediante la operación

$$(X_1,..,X_n)*(Y_1,..,Y_n) = (X_1+Y_1,..,X_n+Y_n)$$

resultando un grupo isomorfo al de traslaciones en $\mathbb{R}^n$, y del segundo caso el grupo general lineal $GL(n,\mathbb{R})$, donde cada matriz $(\alpha_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$ se identifica con el punto

$$(\alpha_{11},..,\alpha_{1n},..,\alpha_{n1},..,\alpha_{nn}) \quad \in \quad R^{n^2}$$

$GL(n,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n^2}$ que tiene la estructura de grupo definida en $GL(n,\mathbb{R})$.

Si G y G′ son dos grupos de Lie, sobre la variedad producto GxG′ queda definida la estructura de grupo de Lie mediante la operación

$$(p,q)*(p',q') = (pp',qq').$$

2.- Algebra de un grupo de Lie.-

Entre los campos de vectores de un grupo de Lie, campos debidos al hecho de ser todo grupo de Lie variedad diferenciable, hay unos muy importantes, los llamados campos invariantes a izquierda (o derecha), que son campos invariantes por la transformación dl_p (o dr_p) ,subordinadas por la traslación l_p (o r_p); $dl_p:X \longrightarrow X'$.

Todo vector tangente define un campo invariante a izquierda, y sólo uno, con lo que la totalidad de campos invariantes a izquierda definen unívocamente la totalidad de los vectores tangentes (lo mismo puede decirse de los campos invariantes a derecha). Por tanto es suficiente utilizar los campos invariantes a izquierda en el estudio de los grupos de Lie. Dichos campos definen un álgebra $\mathcal{L}(G)$ que se denomina álgebra de Lie del grupo G, ya que, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo base, se verifica que

1) $\forall X,Y \in \mathcal{L}(G) \implies X+Y \in \mathcal{L}(G)$

2) $\forall X \in \mathcal{L}(G) \implies aX \in \mathcal{L}(G) \quad \forall a\in\mathbb{K}$

3) $\forall X,Y \in \mathcal{L}(G) \implies [X,Y] \in \mathcal{L}(G)$

cumpliéndose además que

4) $[X,Y] = -[Y,X]$

5) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

$\forall X,Y,Z \in \mathcal{L}(G)$.

Si $X_1,\ldots,X_n$ constituyen una base de campos invariantes a izquierda, todos los demás campos X invariantes a izquierda se expresan :

$$X = \sum a_i X_i$$

siendo las a_i coeficientes del cuerpo base, existiendo un isomorfismo entre los campos del álgebra $\mathcal{L}(G)$, y el espacio tangente a G en e, $T_e(G)$.

Dada la base anterior $X_1,,\ldots,X_n$ de $\mathcal{L}(G)$ se ha de verificar que

$$[X_i,X_j] = \sum_{i=1}^{n} C^h_{ij}\, X_h; \qquad (C^h_{ij} \in \mathbb{K})$$

siendo las

$$C^h_{ij} \qquad 1 \le i,j,h \le n$$

las llamadas <u>constantes de estructura o de Maurer-Cartan</u>. Entre estas constantes se verifican las relaciones:

$$1)\quad C^{h}_{ij} + C^{h}_{ij} = 0$$

$$2)\quad \sum \left(C^{r}_{ij}\, C^{s}_{rh} + C^{r}_{jk}\, C^{s}_{ri} + C^{r}_{hi}\, C^{s}_{rj} \right) = 0$$

con $C^{h}_{ij} \in \mathbb{K} \qquad 1 \leq i,j,k,h,r,s \leq n$

Se dice que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie <u>suma directa</u> de dos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0\}$, y si el producto corchete $[X_1, X_2]$ de un elemento cualquiera del álgebra $\mathcal{L}_1$ por otro cualquiera perteneciente a $\mathcal{L}_2$ es 0. La suma directa de dos álgebras de Lie se expresa en la forma :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$$

Si G es un grupo conmutativo, su álgebra, $\mathcal{L}(G)$, se dice conmutativa, y en este caso se tiene que $\forall X, Y \in L(G)$ es $[X,Y] = 0$

Si un grupo de Lie G es producto de otros dos, sea $G = G_1 \times G_2$, se verifica que entre sus álgebras respectivas se tiene la relación :

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \oplus \mathcal{L}(G_2).$$

3.- Homomorfismos de grupos y álgebras de Lie. Subgrupos y subálgebras de Lie.

Sean H y G dos grupos de Lie con el mismo cuerpo base, $\mathbb{K}$, para ambos ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una aplicación

$$\phi : H \longrightarrow G$$

se dice homorfismo de grupos de Lie, si se verifica que :

1) ϕ es una aplicación diferenciable entre las variedades H y G.

2) ϕ es homorfismo entre los grupos H y G.

Paralelamente, dadas dos álgebras de Lie $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ se dice que Γ es un homomorfismo de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}'$, si

1) Γ es lineal

2) $\forall X,Y \in L \Longrightarrow \Gamma([X,Y]) = [\Gamma(X),\Gamma(Y)] \in \mathcal{L}'$

En ambos casos, si la aplicación es biyectiva, se denomina isomorfismo, y si además coinciden H≡G ó $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}'$ se dice automorfismo de grupos o de álgebras de Lie.

Se prueba que si $\phi : H \longrightarrow G$ es un homorfismo entre dos grupos de Lie, entonces $d\phi : \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ es un homorfismo entre sus álgebras.

Si el homorfismo $\phi : H \longrightarrow G$ es tal que el par (H,ϕ) es una subvariedad de la variedad G, se dice entonces que H es un subgrupo de Lie de G. Se dice, por tanto, que H es <u>subgrupo de Lie</u> de G, si se verifica:

1)H es grupo de Lie.

2)$\phi(H)$ es subvariedad de G.

3)$\phi : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Dada un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, se dice <u>subálgebra de Lie</u> de $\mathcal{L}$ a todo subespacio vectorial J de $\mathcal{L}$, tal que

$$\forall X,Y\in J \Longrightarrow [X,Y]\in J.$$

El teorema de Ado asegura que "*dado un grupo de*

Lie G, existe una correspondencia biyectiva, salvo isomorfismos, entre los subgrupos conexos de G y las subálgebras de $\mathcal{L}(G)$".

Se denomina <u>ideal</u> I de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ a todo subespacio vectorial de $\mathcal{L}$, tal que

$$\forall X \in I \text{ y } \forall Y \in \mathcal{L} \Longrightarrow [X,Y] \in I$$

El concepto de ideal es más restrictivo que el de subálgebra. Si en el teorema anterior, las subálgebras de $\mathcal{L}$ fueran ideales, entonces los subgrupos conexos de G serían divisores normales, pudiéndose enunciar que "*existe una correspondencia biyectiva, salvo isomorfismos, entre los subgrupos conexos divisores normales de un grupo de Lie y los ideales de su álgebra*".

Un ideal I de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, se dice <u>ideal conmutativo</u>, si se verifica que

$$\forall X,Y \in I \Longrightarrow [X,Y] = 0$$

En consecuencia el subgrupo conexo correspondiente es conmutativo además de normal.

Si el homormofismo $\phi : H \longrightarrow G$ entre grupos de Lie es suprayectivo y tiene su núcleo finito, entonces se tiene que

$$H/\mathrm{Ker}\phi \approx G$$

luego

$$\dim H = \dim G$$

y, por tanto,

$$\dim \mathcal{L}(H) = \dim \mathcal{L}(G)$$

luego dichas álgebras son isomorfas. Recíprocamente, "*entre todos los grupos de Lie conexos que tienen la misma álgebra, salvo isomorfismos, existe un grupo que es simplemente conexo, y todos los demás se obtienen de este mediante homomorfismos de núcleo finito* (tales que su núcleo tenga un número finito de puntos)".

4.- Subgrupos uniparamétricos y aplicación exponencial.-

Sean G un grupo de Lie, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ el cuerpo base, y R el grupo de Lie de la recta real y sea $\phi : R \longrightarrow G$ un homorfismo inyectivo de grupos de Lie.

Al par (R,ϕ) se denomina subgrupo uniparamétrico de G. Por ser ϕ diferenciable y R conexo, todo subgrupo uniparamétrico es subvariedad diferenciable 1-dimensional y conexa que se representará por $\phi(t)$ con $t\in R$.

La aplicación inducida

$$d\phi \ : \ \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_0 \longrightarrow d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_e$$

permite definir el campo invariante a izquierda $X\in\mathcal{L}(G)$, de tal suerte que

$$X_e = d\phi\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_0\right]$$

Las trayectorias de X son, por tanto, el subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$ y las curvas $g\phi(t)$ $(\forall g\in G)$. Se suele representar al subgrupo $\phi(t)$ por $\phi_X(t)$.

Los campos aX, con $a\in\mathbb{K}$, son también invariantes a izquierda, y con las mismas trayectorias que X, por definir en cada punto vectores de la misma dirección, sólo se deferencian las trayectorias en el parámetro que es at. Es decir

$$\phi_{aX}(t) = \phi_X(at).$$

Dada la aplicación $\phi_X : R \longrightarrow G$ ya definida anteriormente, se denomina aplicación exponencial, a la aplicación

$$\exp : \mathcal{L}(G) \longrightarrow G$$

definida así :

$$\exp(tX) = \phi_X(t)$$

Se verifican las igualdades:

1) $\exp\ (t_1 + t_2)\ X = \exp\ (t_1X) \times \exp\ (t_2X)$

2) $\exp\ (-tX) = \exp^{-1}(tX)$

Por ser ϕ un homomorfismo se tiene que

$$\phi(s+t) = \phi(s) \cdot \phi\ (t)$$

y derivando respecto a s y haciendo a continuación $s = 0$, se obtiene :

$$\phi(t) = \exp\ (t\phi'(0))$$

lo que justifica el nombre de "exponencial" dado a dicha aplicación.

$\phi'(t)$ es el vector tangente a $\phi(t)$ para cada vector $t \in R$, luego $\phi'(0)$ es el vector tangente al subgrupo uniparamétrico en el punto $\underline{e}$ (unidad de G). La igualdad anterior permite obtener el subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$ a partir del vector tangente definido por el campo correspondiente en el punto unidad.

Recíprocamente, cuando está dado el subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$, las curvas $g\phi(t)$, $\forall g \in G$, son las trayectorias del campo correspondiente, a partir de las cuales podemos determinarlo.

Si $\phi : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entre los grupos de Lie H y G, se verifica que es conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] & G \\ \mathcal{L}(H) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"] & \mathcal{L}(G) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

o dicho de otro modo:

$$\phi(\exp tX) = \exp (d\phi\ (tX))$$

o también,

$$\phi\ (\phi_X(t)) = \phi(t)_{d\phi(X)}$$

5.- Representación adjunta.-

Una representación de un grupo de Lie G, es un homorfismo de G en el grupo GL(n,$\mathbb{R}$), donde n = dim G. Si el homomorfismo es inyectivo, se denomina fiel, y permite representar biyectivamente los elementos de G por los de un subgrupo de matrices de GL(n,$\mathbb{R}$).

Una representación muy importante de un grupo de Lie es su representación adjunta, que se define a partir de los automorfismos internos de G de la siguiente manera:

Sean $\alpha\in G$ y ρ_α el automorfismo interno

$$\rho_\alpha : x \longmapsto \alpha\ x\ \alpha^{-1} \qquad x\in G$$

ρ_α es a la vez un difeomorfismo de G en G, por ser producto de los dos difeomorfismos l_α , $r_{\alpha^{-1}}$. La aplicación subordinada entre los vectores tangentes aG transforma cada vector tangente en <u>e</u> en otro vector tangente en <u>e</u>, ya que $\rho_\alpha(e) = e$. Por tanto

$$d\rho_\alpha : X_e \longmapsto Y_e = M_\alpha X_e \qquad \text{con } M_\alpha \in GL(n,\mathbb{R}))$$

La aplicación

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL\,(n,\mathbb{R}) \\ \alpha &\longmapsto M_\alpha \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos de Lie, que se denomina <u>representación adjunta de G</u>. El homomorfismo inducido sobre sus álgebras respectivas:

$$d(Ad) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(GL(n,\mathbb{R})) = End\ (G)$$

se denota por <u>ad</u>. A cada campo $X \in \mathcal{L}(G)$ le corresponde el endomorfismo adX tal que $\forall Y \in \mathcal{L}(G)$ se verifica :

$$adX : Y \longrightarrow [X,Y]$$

En función de la representación adjunta se define la <u>forma de Killing</u>, forma bilineal y simétrica sobre un álgebra de Lie L, definida así :

$$\kappa(X,Y) = \text{Traza}\,(\text{ad}X,\text{ad}Y).$$

Esta forma es asociativa, en el sentido de que

$$\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z]).$$

6.- Clases de álgebras de Lie.-

Sea G un grupo de Lie, y L su álgebra. Se puede construir, a partir de L, la siguiente sucesión :

$$L^1 = [L,L] \;,\; L^2 = [L^1,L^1] \;,\; \cdots\cdots \;,\; L^i = [L^{i-1},L^{i-1}] \;,\; \cdots\cdots$$

Se dice que L es resoluble si existe algún $n \in \mathbb{N}$, $n<\infty$, tal que $L^n \equiv \{0\}$.

De la definición se deduce que $L^m \equiv \{0\}$, $\forall m>n$.

Como ejemplos sencillos se pueden citar :

1) Si G es conmutativo, su álgebra L se dice conmutativa y tiene la propiedad de que $L^1 = [L,L] = \{0\}$. Es el caso más sencillo de álgebras.

2) Si L es bidimensional y no conmutativa, existe siempre una base $\{X,Y\}$ tal que $[X,Y] = X$.

En consecuencia, se verifica que

$$L^1 = \{X\} \quad y \quad L^2 = \{0\}$$

Es inmediato probar que todas las subálgebras de un álgebra de Lie resoluble son resolubles. Por tanto, sus ideales también lo son. Se verifica que L^1 es ideal de L; y, análogamente, L^i es ideal de L^{i-1} en toda álgebra L resoluble. Si $B \subset L$ de un álgebra resoluble, L/B también es resoluble.

Se tiene, además, que "*la suma y la intersección de dos ideales resolubles de una misma álgebra son ideales resolubles*".

La suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie es, por tanto, un ideal. Es el máximo ideal resoluble, que se denomina <u>radical de L</u> y se designa por radL.

Si se tiene que $\operatorname{rad} L = \{0\}$, es que no existen ideales resolubles, salvo el trivial $\{0\}$. Un álgebra con esta propiedad se dice simple.

Un álgebra se dice semi-simple si no contiene ideales conmutativos no triviales.

Todo álgebra simple es semi-simple, pero el recíproco no es cierto.

En todo álgebra semi-simple se verifica que

$$L = [L,L]$$

y, por tanto, la sucesión $L^1, L^2, \ldots, L^n, \ldots$ tiene todos sus términos iguales a L. No es, por tanto, resoluble. El recíproco no es cierto, pues se han descubierto álgebras no semi-simples para las cuales se verifica que $L = [L,L]$. El profesor Angelopoulos ha publicado recientemente un trabajo (véase [5]), en el que proporciona un método genérico para obtener lo que denomina álgebras de Lie simpáticas, para las que se tiene que

$$[L,L] = L \quad y \quad \operatorname{Der} L = \operatorname{ad} L$$

siendo 35 la dimensión mínima para la que es posible obtener álgebras simpáticas por el procedimiento descrito por Angelopoulos.

Para toda álgebra de Lie L se cumple que L/radL es semi-simple. Si L es resoluble es L = rad L.

A partir de L se puede formar la siguiente sucesión

$$L_1 = [L,L] \ , \ L_2 = [L_1,L] \ ,\ldots\ldots, \ L_i = [L_{i-1},L],\ldots.$$

Se dice que L es <u>nilpotente</u>, si existe algún $n \in \mathbb{N}$, $n<\infty$, tal que $L_n = \{0\}$. Como se verifica que es $L^i \subset L_i$, sigue que toda álgebra milpotente es resoluble, pero el recíproco no es cierto.

Un álgebra de Lie nilpotente se denomina <u>filiforme</u>, si las dimensiones de $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots.$ son respectivamente

$$n-2, \ n-3, \ n-4, \ \ldots., \ 2, \ 1$$

siendo $n = \dim L$.

Un álgebra de Lie L es resoluble, si y sólo si, su álgebra derivada [L,L] es nilpotente.

En la sucesión $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots,$ se verifica que L_i es ideal de L_{i-1} y que L_i es ideal de L.

Todas las subálgebras de un álgebra de Lie nilpotentes son nilpotentes. Si H es ideal de L y L es nilpotente, se sigue que L/H es nilpotente. La suma de dos ideales nilpotentes de la misma álgebra es también nilpotente.

La suma de todos los ideales nilpotentes de un álgebra de Lie es otro ideal nilpotente que se denomina <u>nihil-radical</u> de L y que se representa por <u>nil-radL</u>. Se verifica la propiedad :

$$[L,\mathrm{rad}L] \subset \text{nil-rad}L.$$

Se denomina <u>centro de un álgebra de Lie</u> L, al conjunto de elementos $X \in L$, tales que $[X,Y] = 0$, $\forall Y \in L$. El centro de L es un ideal de L que se representará por <u>cenL</u>. Cuando L es nilpotente no nula, tiene un centro no nulo.

Si $S \subset L$, se denomina <u>centralizador de S respecto de L</u> al conjunto de elementos $X \in L$ tales que $\forall Y \in S$ valga $[X,Y] = 0$. Se representa por $\underline{\mathrm{cen}_L S}$. Cuando B es ideal de L se verifica que $\mathrm{cen}_L B$ es ideal de L.

Un <u>grupo de Lie</u> se denomina <u>simple</u>, <u>semi-simple</u>, resoluble, nilpotente,..., según lo sea su álgebra correspondiente.

Ejemplo de grupo resoluble, el formado por las matrices reales triangulares respecto de la operación producto.

El subgrupo de matrices triangulares, cuyos elementos de la diagonal principal son todos "1", forman un grupo nilpotente.

Los ejemplos más sencillos de grupos semi-simples son : S^3 (esfera tridimensional), isomorfo al grupo de los cuaternios unimodulares, y el grupo especial lineal tridimensional, $SGL(2,\mathbb{R})$, (conjunto de matrices reales 2x2 de determinante 1).

En general, un álgebra de Lie no tiene por qué ser necesariamente semi-simple, simple, resoluble o nilpotente, sino que puede ser suma directa de varias álgebras de diferentes clases. Por ejemplo, si a $\mathbb{R}^4-\{0\}$, se le dota de la estructura de grupo de Lie por biyección entre sus puntos y las del grupo de cuaternios no nulos, se tiene que

$$\mathbb{R}^4-\{0\} = \text{centro} \times S^3$$

siendo el centro de $\mathbb{R}^4-\{0\}$ la recta $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. y, por tanto, su álgebra es

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^4-\{0\}) = \text{cen } L \oplus \mathcal{L}(S^3)$$

siendo esta última semi-simple y, en general, si L es un álgebra de un grupo de Lie compacto y real se verifica que

$$L = \text{cen}L \oplus [L,L]$$

siendo $[L,L]$ semi-simple. De una manera general, en toda álgebra de Lie L no resoluble se verifica que

$$L = \text{rad}L \oplus M$$

siendo M semi-simple.

Si L es resoluble, entonces se tiene que $L \equiv \text{rad}L$, y si L es nilpotente, $L \equiv \text{nil-rad}L$.

Existen criterios que permiten reconocer la clase de un álgebra de Lie, en función de la forma de Killing.

Los criterios de Cartan afirman que:

1)Un álgebra L es resoluble si y sólo si la forma de Killing se anula idénticamente sobre LxL^1.

2) Un álgebra de Lie L es semi-simple si y sólo si la forma de Killing sobre LxL es no-degenerada.

7.- Clasificación de las álgebras de Lie simples.-

La clasificación de las álgebras de Lie simples sobre un cuerpo base $\mathbb{K}$, algebraicamente cerrado y de característica cero, se establece en función de los diagramas de Dynkin, demostrándose que existen cuatro series de álgebras simples, y cinco álgebras simples excepcionales o exóticas. Las cuatro series son las siguientes:

1) Las álgebras especiales lineales, conjunto de matrices $(l+1)x(l+1)$ de traza 0, que se designan mediante $A_l = sl(l+1,\mathbb{K})$

2) Las álgebras de Lie ortogonales de rango l, que se designan mediante $O(2l+1, \mathbb{K})$ con $l>1$. El álgebra $O(m,\mathbb{K})$ que se define como el conjunto de todos los endomorfismos sobre un espacio vectorial V con $\dim V = m$ y

tales que si $\vec{u},\vec{v}\in V$ y $\alpha\in O(m,\mathbb{K})$ se tiene que

$$<\alpha\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\alpha\vec{v}> = 0$$

donde <,> es una forma bilineal simétrica y no degenerada sobre VxV.

3) Las <u>álgebras de Lie simplécticas</u> de rango l que se denotan mediante sp $(l,\mathbb{K})$, con $l>2$, y se definen como el conjunto de endomorfismos sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2l, tales que si $\vec{u},\vec{v}\in V$, y $\alpha \in sp(l,\mathbb{K})$, se tiene que

$$<\alpha\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\alpha\vec{v}> = 0$$

donde <,> es un forma bilineal hemi-simétrica no-degenerada sobre VxV.

4) Las álgebras de Lie ortogonales en las que V es de dimensión par y que se denotan por $O(2l,\mathbb{K})$ con $l>3$

Dado que toda álgebra semi-simple es suma directa de álgebras simples, se sigue la clasificación de aquellas a partir de la clasificación de las álgebras simples..

La clasificación de las álgebras resolubles y nilpotentes está por hacer. Existen clasificaciones de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensiones 4,5,6. Para estas últimas, véanse Morosov [13], Vergne [18] y Magnin [12]. La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de 7 dimensiones ha sido realizada por Ancochea y Goze (véase [4]), así como la de las álgebras nilpotentes complejas filiformes de dimensión 8 (véase [3]). En este trabajo se obtiene la clasificación de todas las álgebras nilpotentes complejas filiformes de dimensión 9.

CAPITULO 1

ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES FILIFORMES COMPLEJAS DE DIMENSION N.-

CAPITULO 1

ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES FILIFORMES COMPLEJAS DE DIMENSION N.-

El objetivo central del presente trabajo es lograr la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de dimensión 9. Clasificar un conjunto no es otra cosa que encontrar una cierta propiedad de sus elementos que permita definir una relación de equivalencia entre ellos y elegir un representante de cada clase de equivalencia. En el caso que nos ocupa, la relación de equivalencia entre las álgebras complejas filiformes de 9 dimensiones va a venir definida por isomorfismos : dos álgebras de Lie van a ser consideradas equivalentes si y solo si son isomorfas.

Sin embargo, a veces hay un trabajo previo al de la clasificación de un conjunto : el de la determinación de los elementos del propio conjunto que hay que clasificar. Lo que se va a hacer es dar un teorema de estructura que diga cómo han de ser las leyes correspondientes a las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas 9-dimensionales.

En este primer capítulo se va a estudiar cómo han de ser estos teoremas de estructura para cada dimensión. Pilar fundamental para ello es la existencia para las álgebras de Lie nilpotentes complejas n-dimensionales, tal y como prueba el teorema de Engel, de al menos un elemento distinguido, llamado vector característico, que se va a designar en todo el trabajo mediante X_1. Alguno de estos vectores característicos se va a hacer formar parte siempre de la base que se elija en el álgebra que se considere.

Posteriormente se dará otro teorema que garantice la existencia, en cualquiera de estas álgebras, de bases suficientemente convenientes, en el sentido de asegurar que la correspondiente ley tiene un elevado número de corchetes nulos. Este teorema indica cómo es la estructura de las leyes correspondientes a las álgebras de Lie filiformes de dimensiones pequeñas, y, como aplicación, se vuelve a encontrar la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensiones 2, 3, 4 y 5, conocidas ya desde

1958 por Morosov (véase [13]).

Dada la forma en que se enuncia, puede parecer conveniente dar un teorema distinto para cada dimensión y, puesto que el objetivo central del presente trabajo consiste en lograr la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de dimensión 9, se podría considerar exclusivamente dicho caso. Se ha optado, sin embargo, por enunciar previamente un teorema que indique cómo es la estructura de dichas álgebras de Lie para dimensiones pequeñas e, incluso, permita volver a obtener la clasificación, ya conocida, de las álgebras filiformes complejas para algunos valores sencillos de n, dejando el estudio del caso de dimensión 9 para el siguiente capítulo.

TEOREMA 1.1.-

En toda álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión n, M, es posible encontrar una base $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ que verifique :

a) $X_1 \in M - M^1$

b) $[X_1, X_2] = 0$

$[X_1, X_i] = \varepsilon_i \, X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq n$

$$\text{con } \varepsilon_i = 0 \text{ ó } 1$$

Demostración :

Por el teorema de Engel, existe en toda álgebra nilpotente M un elemento, al menos, perteneciente a $M - M^1$ y de adjunta nilpotente. Sea X_1 dicho elemento. Existirá, por tanto, $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\mathrm{ad}\, X_1)^m = 0$$

Fijado el elemento X_1 citado anteriormente, es posible elegir una base de M, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, tal que $\mathrm{ad}X_1$ sea una matriz canónica de Jordan y, como ha de ser $(\mathrm{ad}\, X_1)^m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$, se sigue que su diagonal principal debe ser nula. Es decir, si V es el subálgebra engendrada por $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ la matriz $\mathrm{ad}X_1|_V$ será de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

con ε_i, $3 \le i \le n$, iguales a 0 1.

Por tanto, resultan ser

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_i] = \varepsilon_i \; X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

#

TEOREMA 1.2.- (de estructura de las álgebras filiformes complejas de dimensión n)

En toda álgebra de Lie M nilpotente filiforme compleja de dimensión n existe una base $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ que verifica

a) $[X_1, X_2] = 0$

$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le n$

b) cen $M = \{X_2\}$

c) $[X_3, X_i] = 0 \qquad 3 \le i \le n$

d) $[X_4, X_i] = 0 \qquad 4 \le i \le n-2$

$[X_4, X_{n-1}] = d_1 \; X_2$

$$[X_4, X_n] = d_1\ X_3 + d_2\ X_2$$

$$d_1, d_2 \in \mathbb{C}$$

e) $[X_5, X_i] = 0 \qquad\qquad 5 \le i \le n-3$

$$[X_5, X_{n-2}] = d_3\ X_2$$

$$[X_5, X_{n-1}] = (d_1+d_3)\ X_3 + d_4\ X_2$$

$$[X_5, X_n] = (2d_1+d_3)\ X_4 + (d_2+d_4)\ X_3 + $$
$$+ d_5\ X_2$$

$$d_3, d_4, d_5 \in \mathbb{C}$$

Demostración :

a) Por el teorema de Engel, se acaba de probar que en toda álgebra de Lie nilpotente existe siempre, al menos, un vector característico $X_1 \in M - M^1$, $X_1 \neq 0$, para el cual el operador $\mathrm{ad}\ X_1$ es nilpotente. Por ser M filiforme, el más pequeño $m \in \mathbb{N}$ para el cual vale $(\mathrm{ad}\ X_1)^m = 0$ es n-1 y, por tanto, es posible elegir una base, $\{X_1, X_2, \ldots., X_n\}$ del álgebra de Lie M tal que, si V es el subálgebra engendrada por los elementos $\{X_2, X_3, \ldots., X_n\}$, se tiene que la matriz correspondiente a $\mathrm{ad}X_1|_V$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

lo que prueba a).

b) Por ser M nilpotente, ha de poseer centro no trivial. Pero, por a), es claro que solamente X_2 puede pertenecer a cen M. En consecuencia, se tiene que

$$\text{cen } M = \{X_2\}$$

c) Para probar c) se va a demostrar, previamente, que la sucesión central descendente de cualquier álgebra de Lie nilpotente filiforme compleja de dimensión n y de base $\{X_1, X_2, \ldots., X_n\}$ resulta ser :

$$M_1 = [M, M] = \{X_2, X_3, \ldots., X_{n-1}\}$$

$$M_2 = [M, M_1] = \{X_2, X_3, \ldots., X_{n-2}\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{n-3} = [M, M_{n-4}] = \{X_2, X_3\}$$

$$M_{n-2} = [M, M_{n-3}] = \{X_2\}$$

$$M_{n-1} = [M, M_{n-2}] = \{0\}$$

$$M_i = [M, M_{i-1}] = \{0\} \qquad \forall i \geq n-1$$

En efecto, por a) se tiene que

$$\{X_2, X_3, \ldots\ldots, X_{n-1}\} \subset M_1$$

y dado que ha de cumplirse que

$$\dim M_1 \leq \dim M - 2 \leq n-2$$

se sigue que

$$M_1 = \{X_2, X_3, \ldots\ldots, X_{n-1}\}$$

También por a) se deduce que

$$M_i - M_{i+1} \subset \{X_{n-i}\}$$

y como, por nilpotencia, si es $M_i \neq 0$ se implica que ha de ser $M_i \neq M_{i-1}$, se llega a que

$$M_i - M_{i+1} = \{X_{n-i}\} \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

$$M_i = \{0\} \qquad \forall i \geq n-1$$

luego la sucesión de las M_i, $i \in \mathbb{N}$, es la indicada.

Por tanto, como $X_3 \in M_{n-3}$, se tiene que

$$[X_3, M] \subset [M_{n-3}, M] = M_{n-2} = \{X_2\}$$

o, lo que es lo mismo, se acaba de probar que

$$[X_3, X_i] = p_i\, X_2 \qquad p_i \in \mathbb{C} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Aplicando la identidad de Jacobi a X_1, X_3 y X_i, para $4 \leq i \leq n$, se tiene que

$$[X_1, [X_3, X_i]] + [X_3, [X_i, X_1]] + [X_i, [X_1, X_3]] = 0$$

$$[X_1, p_i\, X_2] - [X_3, X_{i-1}] + [X_i, X_2] = 0$$

$$[X_3, X_{i-1}] = 0 \qquad 4 \leq i \leq n$$

o, lo que es lo mismo, se acaba de probar que

$$[X_3, X_i] = 0 \qquad 3 \leq i \leq n$$

$$[X_3, X_n] = p_n\, X_2 \qquad p_n \in \mathbb{C}$$

Si se hace ahora el cambio de bases dado mediante

$$Y_i = X_i \qquad\qquad 1 \le i \le n-1$$

$$Y_n = X_n + p_n X_1$$

se sigue que

$$[Y_3,Y_i] = 0 \qquad\qquad 1 \le i \le n-1$$

$$[Y_3,Y_n] = [X_3, X_n + p_n X_1] =$$

$$= [X_3,X_n] + p_n [X_3,X_1] =$$

$$= p_n X_2 - p_n X_2 = 0$$

lo que permite suponer que $p_n = 0$.

d) Por un razonamiento análogo al anterior se tiene que, al ser $X_4 \in M_{n-4}$ y $M_{n-3} = \{X_2, X_3\}$, se puede probar fácilmente que

$$[X_4,X_i] = p_i X_2 + q_i X_3 \qquad p_i,q_i \in \mathbb{C}, \quad 1 \le i \le n$$

Si se aplica la identidad de Jacobi a X_1, X_4 y X_i, $5 \le i \le n$, se obtiene que

$$[X_1,[X_4,X_i]] + [X_4,[X_i,X_1]] + [X_i,[X_1,X_4]] = 0$$

$$[X_1,p_i X_2 + q_i X_3] - [X_4,X_{i-1}] + [X_i,X_3] = 0$$

$$q_i X_2 - p_{i-1} X_2 - q_{i-1} X_3 = 0 \qquad 5\le i\le n$$

de donde sigue que

$$q_i - p_{i-1} = 0 \qquad 5\le i\le n$$

$$q_{i-1} = 0 \qquad 5\le i\le n$$

o, lo que es lo mismo

$$q_i = 0 \qquad 4\le i\le n-1$$

$$p_i = 0 \qquad 4\le i\le n-2$$

$$q_n = p_{n-1}$$

y, si se designan $p_{n-1} = d_1$ y $p_n = d_2$ se sigue d).

e) Por analogía con los casos c) y d), se verificará ahora que

$$[X_5,X_i] = p_i X_2 + q_i X_3 + r_i X_4$$

$$p_i, q_i, r_i \in \mathbb{C}, \qquad 1\le i\le n$$

Desde luego, si $1\le i\le 5$, ya es conocido el valor del corchete $[X_5,X_i]$ por los apartados anteriores, habiéndose obtenido que

$$[X_5,X_1] = -X_4$$

$$[X_5,X_2] = [X_5,X_3] = [X_5,X_5] = 0$$

$$[X_5,X_4] = \begin{cases} -d_2\ X_2 & \text{si } n=5 \\ -d_1\ X_2 & \text{si } n=6 \\ 0 & \text{si } n\geq 7 \end{cases}$$

Aplicando la identidad de Jacobi a los campos X_1, X_5 y X_i, $6\leq i\leq n$, se obtiene que

$$[X_1,[X_5,X_i]] + [X_5,[X_i,X_1]] + [X_i,[X_1,X_5]] = 0$$

$$[X_1,\ p_iX_2 + q_iX_3 + r_iX_4] - [X_5,X_{i-1}] + [X_i,X_4] = 0$$

$$q_i\ X_2 + r_i\ X_3 - [X_4,X_i] -$$

$$- p_{i-1}\ X_2 - q_{i-1}\ X_3 - r_{i-1}\ X_4 = 0$$

y dado que $[X_4,X_i]$, $6\leq i\leq n$, viene dado por

$$[X_4,X_i] = \begin{cases} d_1\ X_3 + d_2\ X_2 & \text{si } i=n \\ d_1\ X_2 & \text{si } i=n-1 \\ 0 & \text{si } i\leq n-2 \end{cases}$$

resultan ser

$$r_i = 0 \qquad 5\leq i\leq n-1$$

$$q_i = 0 \qquad 5\leq i\leq n-2$$

$$p_i = 0 \qquad 5\leq i\leq n-3$$

$$r_n = q_{n-1} + d_1$$

$$q_{n-1} = p_{n-2} + d_1$$

$$q_n = p_{n-1} + d_2$$

de donde, si designan $p_{n-2} = d_3$, $p_{n-1} = d_4$ y $p_n = d_5$, se sigue que valen

$$q_{n-1} = d_1 + d_3$$

$$q_n = d_2 + d_4$$

$$r_n = 2d_1 + d_3$$

#

Como resulta obvio, podría continuarse el teorema enunciando nuevos apartados en los que se estudie el comportamiento de X_6, X_7, etc. En el capítulo siguiente se probará un teorema que indique todos los productos corchete de los elementos de una base para las álgebras filiformes complejas de dimensión 9.

A partir del teorema que se acaba de probar es posible, no obstante, clasificar las álgebras filiformes complejas de dimensiones pequeñas.

COROLARIO 1.3.-

Existe una única álgebra filiforme compleja para cada dimensión 2, 3 ó 4. Si se designan las leyes correspondientes a estas álgebras por μ_2^1, μ_3^1 y μ_4^1, respectivamente, vienen dadas mediante

$$\mu_2^1 : [X_1, X_2] = 0$$

$$\mu_3^1 : [X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

$$\mu_4^1 : [X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_1, X_4] = X_3$$

$$[X_2, X_3] = [X_2, X_4] = [X_3, X_4] = 0$$

Demostración :

A partir del teorema anterior sigue inmediatamente que no puede haber otras.

#

Como es habitual, a partir de ahora y para describir la ley correspondiente a cualquier álgebra de Lie, sólo se explicitarán los productos corchete de elementos de una base que sean no nulos.

COROLARIO 1.4.-

Todo álgebra filiforme compleja de dimensión 5 es isomorfa a alguna de las dos álgebras cuyas leyes se designan por μ_5^1 y μ_5^2, respectivamente, y que vienen dadas por

$$\mu_5^1 : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 5$$

$$[X_4, X_5] = X_2$$

$$\mu_5^2 : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 5$$

Demostración :

Del teorema de estructura resulta que los únicos corchetes que pueden ser no nulos son los

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 5$$

$$[X_4, X_{n-1}] = [X_4, X_4] = d_1 \; X_2 = 0$$

$$[X_4,X_5] = [X_4,X_4] = d_1\ X_3 + d_2\ X_2$$

de donde se sigue que

$$d_1 = 0$$

$$[X_4,X_5] = d_2\ X_2$$

Si $d_2 = 0$ se obtiene, trivialmente, el álgebra cuya ley se ha designado por μ_5^2.

Si $d_2 \neq 0$ es posible hacer el cambio de base que viene dado por

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_i = \frac{1}{d_2}\ X_2 \qquad 2 \leq i \leq 5$$

con lo que, en la nueva base, los corchetes no nulos verifican

$$[Y_1,Y_i] = \left[X_1,\frac{1}{d_2}\ X_i\right] = \frac{1}{d_2}\ [X_1,X_i] =$$

$$= \frac{1}{d_2}\ X_{i-1} = Y_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 5$$

$$[Y_4,Y_5] = \left[\frac{1}{d_2}X_4,\frac{1}{d_2}X_5\right] = \frac{1}{d_2^2}\quad [X_4,X_5] =$$

$$= \frac{1}{d_2^2} d_2 X_2 = \frac{1}{d_2} X_2 = Y_2$$

y el resto de los corchetes son, obviamente, nulos. Esto no es otra cosa que el álgebra de ley μ_5^1.

#

Para obtener la clasificación de las álgebras filiformes complejas de dimensión 5 faltaría probar que las álgebras de leyes μ_5^1 y μ_5^2 son no isomorfas.

Los resultados obtenidos en los corolarios anteriores podrían generalizarse a dimensiones superiores, sistematizando el procedimiento, para obtener la clasificación de las álgebras filiformes complejas de dimensiones 6, 7, etc. De hecho, lo que se va a hacer en el siguiente capítulo no es otra cosa que la generalización y sistematización del proceso anterior para el caso de dimensión 9.

La clasificación para dimensión 6 era un resultado ya conocido por Morozov desde 1958 (véase [13]) y fué reobtenido por Vergne en 1966 (véase [18]). Los profesores Ancochea Bermúdez y Goze han clasificado recientemente las filiformes de dimensiones 7 y 8 en sendos artículos que han sido publicados en 1989 y 1988, respectivamente, (véanse [4] y [3]), en el primero de los cuales no se limitan a las álgebras filiformes, clasificando las álgebras nilpotentes complejas de dimensión 7.

Se añade a continuación un listado de las álgebras filiformes complejas de dimensiones 2 a 8, ambas inclusive.

Algebras de Lie filiformes complejas de dimensiones 2 a 8.-

1.- Dimensión 2.-

μ_2^1 : $[X_1,X_2] = 0$

2.- Dimensión 3.-

μ_3^1 : $[X_1,X_3] = X_2$

3.- Dimensión 4.-

μ_4^1 : $[X_1,X_4] = X_3$

$[X_1,X_3] = X_2$

4.- Dimensión 5.-

μ_5^1 : $[X_1, X_5] = X_4$

$[X_1, X_4] = X_3$

$[X_1, X_3] = X_2$

$[X_4, X_5] = X_2$

μ_5^2 : $[X_1, X_5] = X_4$

$[X_1, X_4] = X_3$

$[X_1, X_3] = X_2$

5.- Dimensión 6.-

μ_6^1 : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 6$

$[X_5, X_6] = X_3$

$[X_4, X_6] = X_2$

μ_6^2 : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 6$

$[X_4, X_6] = X_3$

μ_6^3 : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 6$

6.- Dimensión 7.-

$\mu_7^{1,\lambda}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 7$

$[X_4, X_7] = \lambda X_2$

$[X_5, X_6] = X_2$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

$[X_5, X_7] = (1+\lambda) X_3$

$[X_6, X_7] = (1+\lambda) X_4$

μ_7^2: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 7$

$[X_4, X_7] = X_2$

$[X_5, X_7] = X_3$

$[X_6, X_7] = X_4$

μ_7^3: $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 7$

$[X_5, X_7] = X_3$

$[X_6, X_7] = X_2 + X_4$

μ_7^4 : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 7$

$[X_4, X_7] = X_2$

$[X_5, X_6] = -X_2$

$[X_5, X_7] = X_2$

$[X_6, X_7] = X_3$

μ_7^5: $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 7$

$[X_5, X_7] = X_2$

$[X_6, X_7] = X_2 + X_3$

μ_7^6: $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 7$

$[X_5, X_7] = X_2$

$[X_6, X_7] = X_3$

μ_7^7 : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 7$

$[X_6, X_7] = X_2$

μ_7^8 : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 7$

7.- Dimensión 8.-

μ_8^1 : $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\quad 3 \le i \le 8$

$[X_4, X_7] = X_2$

$[X_4, X_8] = X_2 + X_3$

$[X_5, X_6] = -X_2$

$[X_5, X_7] = -\frac{2}{5} X_2$

$[X_5, X_8] = X_4 + \frac{3}{5} X_3$

$[X_6, X_7] = -\frac{2}{5} X_3$

$[X_6, X_8] = X_5 + \frac{1}{5} X_4$

$[X_7, X_8] = X_6 + \frac{1}{5} X_5$

μ_8^2 : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$

$[X_4, X_7] = X_2$

$[X_4, X_8] = X_3$

$[X_5, X_6] = -X_2$

$[X_5, X_8] = X_4$

$[X_6, X_7] = X_2$

$[X_6, X_8] = X_2 + X_3 + X_5$

$[X_7, X_8] = X_3 + X_4 + X_6$

μ_8^3 : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$

$[X_4, X_7] = X_2$

$[X_4, X_8] = X_3$

$[X_5, X_6] = -X_2$

$[X_5, X_8] = X_4$

$[X_6, X_8] = X_2 + X_5$

$[X_7, X_8] = X_3 + X_6$

$$\mu_8^4 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4, X_7] = X_2$$

$$[X_4, X_8] = X_3$$

$$[X_5, X_6] = -X_2$$

$$[X_5, X_8] = X_4$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3 + X_5$$

$$[X_7, X_8] = X_4 + X_6$$

$$\mu_8^5 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4, X_7] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = -X_2$$

$$[X_i, X_8] = X_{i-1} \qquad 4 \le i \le 7$$

$$\mu_8^{6,\lambda}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4,X_8] = \lambda X_2$$

$$[X_5,X_7] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = (1+\lambda)X_3 + X_2 \qquad \lambda\in\mathbb{C}-\{-1\}$$

$$[X_6,X_7] = X_3$$

$$[X_6,X_8] = (2+\lambda)X_4 + X_3$$

$$[X_7,X_8] = (2+\lambda)X_5 + X_4$$

$$\mu_8^{7,\lambda}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4,X_8] = \lambda X_2$$

$$[X_5,X_7] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = (1+\lambda)X_3 \qquad \lambda\in\mathbb{C}$$

$$[X_6,X_7] = X_3$$

$$[X_6,X_8] = (2+\lambda)X_4$$

$$[X_7,X_8] = (2+\lambda)X_5$$

$$\mu_8^8 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4, X_8] = -X_2$$

$$[X_5, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2 + X_3$$

$$[X_6, X_8] = X_3 + X_4$$

$$[X_7, X_8] = X_4 + X_5$$

$$\mu_8^{9,\lambda} : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4, X_8] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = X_3$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = \lambda X_2 + X_3 + X_4$$

$$[X_7, X_8] = \lambda X_3 + X_4 + X_5$$

$$\mu_8^{10,\lambda} : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_4, X_8] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = X_3 \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$[X_6, X_8] = X_2 + X_4$$

$$[X_7, X_8] = \lambda X_2 + X_3 + X_5$$

$$\mu_8^{11}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_i,X_8] = X_{i-2} \qquad 4 \le i \le 6$$

$$[X_7,X_8] = X_2 + X_5$$

$$\mu_8^{12}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_i,X_8] = X_{i-2} \qquad 4 \le i \le 7$$

$$\mu_8^{13,\lambda}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_5,X_8] = \lambda X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2 \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$[X_6,X_8] = X_2 + (1+\lambda)X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + (1+\lambda)X_4$$

$$\mu_8^{14,\lambda}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_5,X_8] = \lambda X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2 \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$[X_6,X_8] = (1+\lambda)X_3$$

$$[X_7,X_8] = (1+\lambda)X_4$$

$$\mu_8^{15} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_5,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_2 + X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_2 + X_3 + X_4$$

$$\mu_8^{16} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_5,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_2 + X_4$$

$$\mu_8^{17} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_2 + X_3$$

$$\mu_8^{18} : \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_3$$

μ_8^{19} : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$

$[X_7, X_8] = X_2$

μ_8^{20} : $[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 8$

CAPITULO 2

CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE FILIFORMES COMPLEJAS DE DIMENSION 9

CAPITULO 2

CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE FILIFORMES COMPLEJAS DE DIMENSION 9

Se va a proceder a la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de dimensión 9. En lo sucesivo se van a designar las álgebras que se manejen por las letras mayúsculas M, N, P, ..., ó en la forma $(\mathbb{C}^9,\mu)$, donde μ representa la ley asociada al álgebra $(\mathbb{C}^9,\mu)$. A veces, por abuso de notación, se designará mediante μ al propio álgebra de Lie.

Lo primero que se va a hacer es estudiar cómo son todas las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas 9-dimensionales. Para ello, se va a probar la posibilidad que existe en todas ellas de elegir una base $\{X_1,X_2,...,X_9\}$

para la cual la ley asociada al álgebra toma una forma determinada. Se obtiene que el conjunto de todas las leyes asociadas a álgebras filiformes complejas de dimensión 9 constituye una familia dependiente de 9 parámetros, 3 de los cuales están relacionados por una cierta restricción. Estos parámetros, que se designarán en todo el trabajo mediante α_i , $1 \le i \le 9$, no son otra cosa que algunas de las constantes de estructura asociadas a la base en cuestión, siendo todas las restantes constantes de estructura siempre nulas salvo 7 de ellas, las c_{1i}^{i-1} , con $3 \le i \le 9$, que valen todas 1. Este resultado es el que se ha denominado teorema de estructura de las álgebras de Lie complejas filiformes 9-dimensionales.

El resto del capítulo se dedica a la clasificación de estas álgebras filiformes complejas de dimensión 9.

Como ya se indicó antes, la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas es un problema que permanece abierto en la actualidad. En 1958 Morosov ya conocía la clasificación de estas álgebras hasta dimensión 6 (véase [ ]) y en 1966 es Vergne quien vuelve a obtener estos resultados por otro procedimiento (véase [ ]). El problema no recibió un nuevo empuje de importancia hasta que los profesores Ancochea Bermúdez y Goze obtuvieron, recientísimamente, las clasificaciones de las álgebras nilpotentes de dimensión 7 y de las álgebras filiformes de dimensión 8 (véanse [ ] y [ ]). En el presente trabajo se continua por la senda abierta por ellos, aplicando las técnicas desarrolladas por los citados profesores Ancochea y Goze para el caso de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes complejas de 9 dimensiones.

En el teorema de estructura ya se probó la existencia de una base del álgebra, $\{X_1, X_2, \ldots, X_9\}$, tal que X_1 sea vector característico y se verifique que

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

Como quiera que todo isomorfismo entre álgebras filiformes se reduce a cambios de base de Jordan de adX_1 que mantengan invariante al propio X_1, a transformaciones que cambien el vector característico X_1 o a composiciones de ambos tipos de transformaciones, se puede estudiar a partir de lo anterior para qué álgebras es posible hallar un isomorfismo entre ellas y para cuales no lo es. Esto se complementa con algunas consideraciones sobre las sucesiones centrales descendentes correspondientes a cada álgebra filiforme, demostrándose que para ciertos valores de algunos α_i no es posible hallar isomorfismos entre las correspondientes álgebras.

De cada clase de equivalencia se elige como representante aquel para el cual sean nulos el mayor número posible de α_i y, en caso de igualdad en el número de ceros de los α_i, aquel para el cual valgan 1 el mayor número posible de los α_i.

Teorema 2.1.- (de estructura de las álgebras filiformes complejas de dimensión 9).

Para cualquier álgebra de Lie filiforme compleja de dimensión 9 de ley μ, se puede hallar una base para la cual la ley se exprese en la forma :

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_4, X_9] = \alpha_1 X_2$$

$$[X_5, X_8] = \alpha_2 X_2$$

$$[X_5, X_9] = (\alpha_1+\alpha_2) X_3 + \alpha_3 X_2$$

$$[X_6, X_7] = \alpha_4 X_2$$

$$[X_6, X_8] = (\alpha_2+\alpha_4) X_3 + \alpha_5 X_2$$

$$[X_6, X_9] = (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4) X_4 + (\alpha_3+\alpha_5) X_3 + \alpha_6 X_2$$

$$[X_7, X_8] = (\alpha_2+\alpha_4) X_4 + \alpha_5 X_3 + \alpha_7 X_2$$

$$[X_7, X_9] = (\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) X_5 + (\alpha_3+2\alpha_5) X_4 +$$

$$+ (\alpha_6+\alpha_7)\ X_3 + \alpha_8\ X_2$$

$$[X_8,X_9] = (\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\ X_6 + (\alpha_3+2\alpha_5)\ X_5 +$$

$$+ (\alpha_6+\alpha_7)\ X_4 + \alpha_8\ X_3 + \alpha_9\ X_2$$

con $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq 9$, y para algún punto de la cónica de ecuación

$$2\alpha_1\alpha_4 - 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_4^2 = 0$$

en $\mathbb{C}^9$.

Demostración :

Por el teorema 1.2 se sigue la existencia de una base del álgebra, $\{X_1,X_2, \ldots, X_n\}$, para la que se ha de verificar que :

$$[X_1,X_2] = 0, \qquad [X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3\leq i\leq 9$$

$$[X_2,X_i] = 0 \qquad 3\leq i\leq 9$$

$$[X_3,X_i] = 0 \qquad 4\leq i\leq 9$$

$$[X_4,X_i] = 0 \qquad 5\leq i\leq 7$$

$$[X_4,X_8] = d_1\ X_2$$

$$[X_4,X_9] = d_1\ X_3 + d_2\ X_2$$

$$[X_5,X_6] = 0$$

$$[X_5,X_7] = d_3\ X_2$$

$$[X_5,X_8] = (d_1+d_3)\ X_3 + d_4\ X_2$$

$$[X_5,X_9] = (2d_1+d_3)\ X_4 + (d_2+d_4)\ X_3 + d_5\ X_2$$

Exigiendo que se verifique la identidad de Jacobi para los campos X_1, X_k y X_i, con $6 \le k < i \le 9$, resultan los siguientes valores para el resto de los productos corchete :

$$[X_6,X_7] = d_3\ X_3 + d_6\ X_2$$

$$[X_6,X_8] = (d_1+2d_3)\ X_4 + (d_4+d_6)\ X_3 + d_7\ X_2$$

$$[X_6,X_9] = 3(d_1+d_3)\ X_5 + (d_2+2d_4+d_6)\ X_4 + (d_5+d_7)\ X_3 + d_8\ X_2$$

$$[X_7,X_8] = (d_1+2d_3)\ X_5 + (d_4+d_6)\ X_4 + d_7\ X_3 + d_9\ X_2$$

$$[X_7,X_9] = (4d_1+5d_3)\ X_6 + (d_2+3d_4+2d_6)\ X_5 + (d_5+2d_7)\ X_4 + (d_8+d_9)\ X_3 + d_{10}\ X_2$$

$$[X_8,X_9] = (4d_1+5d_3)\ X_7 + (d_2+3d_4+2d_6)\ X_6 + (d_5+2d_7)\ X_5 + (d_8+d_9)\ X_4 + d_{10}\ X_3 + d_{11}\ X_2$$

con $d_j \in \mathbb{C}$, $6 \le j \le 11$.

Si se aplica Jacobi al resto de las posibles ternas de elementos de la base, se obtienen las restricciones :

$$2d_1^2 + 5d_1d_3 + 5d_3^2 = 0$$

$$(d_1+d_3)d_3 = 0$$

$$d_1^2 + 4d_1d_3 + 4d_3^2 = 0$$

$$5(d_1+d_3)(d_4+d_6) - 2(d_2+d_4)d_3 = 0$$

$$(d_1+2d_3)^2 = 0$$

$$6d_1d_7 - 2d_2d_6 - 3d_3d_5 + 3d_3d_7 + 3d_4^2 -$$

$$- d_4d_6 - 2d_6^2 = 0$$

sistema de ecuaciones que es equivalente al

$$d_1 = d_3 = 0$$

$$2\ d_2\ d_6 - 3\ d_4^2 + d_4\ d_6 + 2\ d_6^2 = 0$$

Para concluir la demostración ya solo resta sustituir en las expresiones de los productos corchete d_1 y d_3 por 0 y cambiar la denominación de los restantes parámetros según la regla evidente :

$$\alpha_1 = d_2$$

$$\alpha_i = d_{i+2} \qquad 2 \le i \le 9$$

#

El problema de la clasificación de las álgebras de Lie complejas filiformes de dimensión 9 consiste en la determinación de todas las álgebras de la familia anterior que no sean isomorfas entre sí. Estos isomorfismos deberán corresponder, bien a cambios de bases de Jordan de adX_1 (manteniéndose invariante el propio vector característico X_1), bien a transformaciones que cambien el vector característico o a composiciones de ambas.

De hecho, el cambio de base que se realiza en el apartado c) del teorema 1.2., que se expresaba analíticamente en la forma

$$Y_i = X_i \qquad 1 \le i \le n-1$$

$$Y_n = X_n + d_n X_1$$

y que, de manera implícita, se ha vuelto a hacer en el teorema precedente, no es sino un cambio de base de Jordan como los indicados.

Para cada elección en $\mathbb{C}$ de los α_i, $1 \le i \le 9$, se obtiene la ley correspondiente a un álgebra de Lie compleja filiforme de dimensión 9. A esta ley se la va a designar, en lo sucesivo, como $\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_9)$.

En realidad, los α_i, $1 \le i \le 9$, no son otra cosa que constantes de estructura no nulas del álgebra que se considere, correspondientes a la base $\{X_1, X_2, \ldots, X_9\}$.

Proposición 2.2.-

Las álgebras correspondientes a las leyes :

$$\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$$

$$\mu'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$$

son no isomorfas si $\alpha_4 \neq 0$.

Demostración :

Para las leyes μ y μ' se obtiene que las álgebras M_1 y M_2 coinciden, resultando

$$M_1(\mu) = M_1(\mu') = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$$

$$M_2(\mu) = M_2(\mu') = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

pero las álgebras $[M_2(\mu), M_2(\mu)]$ y $[M_2(\mu'), M_2(\mu')]$ resultan ser de dimensiones 1 y 0, respectivamente, ya que, si es $\alpha_4 \neq 0$, se tiene que

$$[M_2(\mu), M_2(\mu)] = \{X_2\}$$

$$[M_2(\mu'),M_2(\mu')] = \{0\}$$

#

Se van a distinguir, por tanto, los casos $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_4=0$ para la clasificación de las álgebras complejas filiformes de dimensión 9.

1.- Caso $\alpha_4 \neq 0$.-

Por ser $\alpha_4 \neq 0$, es posible despejar α_1 resultando

$$\alpha_1 = \frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_4} - \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_4$$

con lo que la familia de álgebras que resultan tiene, en realidad, solamente 8 parámetros esenciales. No obstante, es cómodo seguir designando en muchas ocasiones mediante α_1 a la expresión anterior, en el bien entendido de que no es en realidad un parámetro, sino que está completamente determinado conocidos α_2 y α_4.

1.1.- Cambios de bases de Jordan.-

Una nueva base de Jordan del operador adX_1 se puede escribir en la forma

$$Y_9 = b_9\, X_9 + b_8\, X_8 + b_7\, X_7 + b_6\, X_6 + b_5\, X_5 + b_4\, X_4 + $$
$$+ b_3\, X_3 + b_2\, X_2 + b_1\, X_1$$

$$Y_8 = b_9\, X_8 + b_8\, X_7 + b_7\, X_6 + b_6\, X_5 + b_5\, X_4 + b_4\, X_3 + b_3\, X_2$$

$$Y_7 = b_9\, X_7 + b_8\, X_6 + b_7\, X_5 + b_6\, X_4 + b_5\, X_3 + b_4\, X_2$$

$$Y_6 = b_9\, X_6 + b_8\, X_5 + b_7\, X_4 + b_6\, X_3 + b_5\, X_2$$

$$Y_5 = b_9\, X_5 + b_8\, X_4 + b_7\, X_3 + b_6\, X_2$$

$$Y_4 = b_9\, X_4 + b_8\, X_3 + b_7\, X_2$$

$$Y_3 = b_9\, X_3 + b_8\, X_2$$

$$Y_2 = b_9\, X_2$$

donde se han elegido los coeficientes de manera que no cambie el vector característico en la nueva base, es decir, se ha de cumplir que :

$$[Y_1, Y_i] = [X_1, Y_i] = Y_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

Además, necesariamente ha de ser $b_9 \neq 0$ para que constituya isomorfismo.

Finalmente, puede suponerse que $b_1=0$ pues, en otro caso, se tendría que

$$[Y_3, Y_9] = - b_1 \, b_9 \, X_2 = - b_1 \, Y_2 \neq 0$$

y bastaría realizar el cambio de base dado por las ecuaciones

$$Y'_i = Y_i \qquad\qquad 1 \leq i \leq 8$$
$$Y'_9 = Y_9 - b_1 \, Y_1$$

idéntico al realizado en el apartado c) del teorema 1.2.

Las constantes de estructura no nulas relativas a la nueva base $\{Y_i : 1 \leq i \leq 9\}$ se designarán, por analogía, como β_i, $1 \leq i \leq 9$, y pueden ser determinadas directamente en función de las α_i, obteniéndose que

$$\beta_1 = b_9 \, \alpha_1 = \frac{3\beta_2^2}{2\beta_4} - \frac{\beta_2}{2} - \beta_4$$

$$\beta_2 = b_9 \, \alpha_2$$

$$\beta_3 = b_9 \, \alpha_3$$

$$\beta_4 = b_9 \ \alpha_4$$

$$\beta_5 = b_9 \ \alpha_5$$

$$\beta_6 = b_9 \ \alpha_6 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 \ b_7 \right) \alpha_2$$

$$\beta_7 = b_9 \ \alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 \ b_7 \right) \alpha_4$$

$$\beta_8 = b_9 \ \alpha_8 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 \ b_7 \right) \alpha_5 +$$

$$+ \left(- 3 \ b_6 + 3 \ \frac{b_7 b_8}{b_9} - \frac{b_8^3}{b_9^2} \right) (\alpha_2 + \alpha_4)$$

$$\beta_9 = b_9 \ \alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 \ b_7 \right) \alpha_7 +$$

$$+ \left(- 3 \ b_6 + 3 \ \frac{b_7 b_8}{b_9} - \frac{b_8^3}{b_9^2} \right) \alpha_5 +$$

$$+ \left(-2b_5 + 2 \ \frac{b_6 b_8}{b_9} + 3 \ \frac{b_7^2}{b_9} - 4 \ \frac{b_7 b_8^2}{b_9^2} + \frac{b_8^4}{b_9^3} \right) \alpha_4 +$$

$$+ \left(-4b_5 + 4 \ \frac{b_6 b_8}{b_9} + 2 \ \frac{b_7^2}{b_9} - 4 \ \frac{b_7 b_8^2}{b_9^2} + \frac{b_8^4}{b_9^3} \right) \alpha_2 +$$

1.2.- Cambios de vectores característicos.-

Cualquier vector de $M - M^1$ es de la forma

$$Z = a_9 X_9 + a_8 X_8 + a_7 X_7 + a_6 X_6 + a_5 X_5 + \\ + a_4 X_4 + a_3 X_3 + a_2 X_2 + a_1 X_1$$

con $a_9 \neq 0$ ó $a_1 \neq 0$ (ó ambos).

Si se desea que sea Z vector característico ha de ser $a_1 \neq 0$ pues, si fuera $a_1 = 0$ se tendría que

$$[Z, X_2] = 0 = [Z, X_3]$$

y el núcleo del operador $adZ|_V$, donde V es suplementario a Z, es de dimensión mayor o igual que 2, luego $c(Z) < 8$, en contra de la hipótesis de ser Z vector característico.

Sean Z_1 y V los siguientes :

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{9} a_i X_i \qquad \text{con } a_1 \neq 0$$

y V el subespacio engendrado por $M^1 + \mathbb{C}^9\{X_9\}$. Una base de Jordan de $adZ_1|_V$ está dada por

$$\left\{ X_9,\ (adZ_1)X_9,\ (adZ_1)^2X_9,\ \ldots\ldots,\ (adZ_1)^7X_9 \right\} =$$

$$= \left\{ X_9,\ [Z_1,X_9],\ [Z_1,[Z_1,X_9]],\qquad,\ [Z_1,[\ldots,[Z_1,X_9]\ldots]] \right\}$$

Si se designan mediante Z_{9-i}, $0 \le i \le 7$, a los vectores

$$Z_{9-i} = (adZ_1)^i\ X_9 \qquad 0 \le i \le 7$$

se obtiene una base de M, $\{Z_i : 1 \le i \le 9\}$, que viene dada, en función de la antigua base $\{X_i : 1 \le i \le 9\}$, mediante

$$Z_9 = X_9$$

$$\begin{aligned} Z_8 = a_1X_8 &+ a_8(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\ X_6 + \\ &+ \left[a_7(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) + a_8(\alpha_3+2\alpha_5) \right] X_5 + \\ &+ \left[a_6(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4) + a_7(\alpha_3+2\alpha_5) + a_8(\alpha_6+\alpha_7) \right] X_4 + \\ &+ \left[a_5(\alpha_1+\alpha_2) + a_6(\alpha_3+\alpha_5) + a_7(\alpha_6+\alpha_7) + a_8\alpha_8 \right] X_3 + \\ &+ \left[a_4\alpha_1 + a_5\alpha_3 + a_6\alpha_6 + a_7\alpha_8 + a_8\alpha_9 \right] X_2 \end{aligned}$$

$$Z_7 = a_1^2X_7 - a_1a_9(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\ X_6 +$$

$$+ \Big[a_1a_8(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) - a_1a_9(\alpha_3+2\alpha_5) \Big] X_5 +$$

$$+ \Big[a_1a_7(\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_4) + a_1a_8(\alpha_3+2\alpha_5) - a_1a_9(\alpha_6+\alpha_7) -$$

$$- a_8a_9(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) \Big] X_4 +$$

$$+ \Big[a_1a_6(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) + a_1a_7(\alpha_3+3\alpha_5) +$$

$$+ a_1a_8(\alpha_6+\alpha_7) - a_1a_9\alpha_8 -$$

$$- a_7a_9(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) -$$

$$- a_8^2(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4) -$$

$$- a_8a_9\Big((2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_3 + (3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_5\Big) \Big] X_3 +$$

$$+\Big[a_1a_5(\alpha_1+2\alpha_2) + a_1a_6(\alpha_3+2\alpha_5) + a_1a_7(\alpha_6+2\alpha_7) +$$

$$+ a_1a_8\alpha_8 - a_1a_9\alpha_9 - a_6a_9\alpha_1(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4) -$$

$$- a_7a_8(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4) -$$

$$- a_7a_9\Big((2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_5\Big) -$$

$$- a_8^2\Big((\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_5\Big) -$$

$$- a_8a_9\Big((2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_6 + \alpha_1\alpha_7 + \alpha_3(\alpha_3+2\alpha_5)\Big) \Big] X_2$$

$$Z_6 = a_1^3\, X_6 - 2a_1^2a_9(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\; X_5 +$$

$$+ \Big[\; a_1^2a_8(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4) - 2a_1^2a_9(\alpha_3+2\alpha_5) +$$

$$+ a_1a_9^2(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\;\Big]\; X_4 +$$

$$+\Big[a_1^2a_7(\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_4) + a_1^2a_8(\alpha_3+\alpha_5) -$$

$$- 2a_1^2a_9(\alpha_6+\alpha_7) - 2a_1a_8a_9(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) +$$

$$+ a_1a_9^2\Big((2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_3 + (3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_5\Big)\;\Big]\; X_3 +$$

$$+\Big[\; a_1^2a_6(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) + a_1^2a_7(\alpha_3+3\alpha_5) + a_1^2a_8\alpha_6 -$$

$$- 2a_1^2a_9\alpha_8 - a_1a_7a_9\Big((2\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_4)\alpha_1 +$$

$$+ (5\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_2 + (2\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_4)\alpha_4\Big) -$$

$$- a_1a_8^2(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)(2\alpha_2+\alpha_4) -$$

$$- 2a_1a_8a_9\Big((2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_5\Big) +$$

$$+ a_1a_9^2\Big((2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_6 + \alpha_1\alpha_7 + \alpha_3(\alpha_3+\alpha_5)\Big) +$$

$$+ a_8a_9^2\; \alpha_1(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)\;\Big]\; X_2$$

$$Z_5 = a_1^4\, X_5 - a_1^3a_9(3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_4)\; X_4 +$$

$$+ \Big[a_1^3 a_8(\alpha_1+\alpha_2) - a_1^3 a_9(3\alpha_3+5\alpha_5) +$$

$$+ a_1^2 a_9^2(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4)(3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_4) \Big] X_3 +$$

$$+\Big[a_1^3 a_7(\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_4) + a_1^3 a_8 \alpha_3 - a_1^3 a_9(3\alpha_6+2\alpha_7) -$$

$$- a_1^2 a_8 a_9 \alpha_1(3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_4) +$$

$$+ a_1^2 a_9^2\Big((6\alpha_1+10\alpha_2+6\alpha_4)\alpha_3 + (7\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_4)\alpha_5\Big) -$$

$$- a_1 a_9^3\ \alpha_1(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) \Big] X_2$$

$$Z_4 = a_1^5\ X_4 - a_1^4 a_9(4\alpha_1+9\alpha_2+5\alpha_4)\ X_3 +$$

$$+ \Big[a_1^4 a_8 \alpha_1 - a_1^4 a_9(4\alpha_3+5\alpha_5) +$$

$$+ a_1^3 a_9^2(\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_4)(6\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4) \Big] X_2$$

$$Z_3 = a_1^6\ X_3 - a_1^5 a_9(5\alpha_1+9\alpha_2+5\alpha_4)\ X_2$$

$$Z_2 = a_1^7\ X_2$$

Desde luego,es necesario y suficiente para que Z_1 sea un vector característico que sea $a_1 \neq 0$, resultado que ya se tenía.

Si a las constantes de estructura no nulas relativas a la nueva base $\{Z_i : 1 \le i \le 9\}$ se las designa por γ_i, $1 \le i \le 9$, vendrán dadas, en función de las α_i, $2 \le i \le 9$, por las expresiones siguientes :

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} = \frac{3\gamma_2^2}{2\gamma_4} - \frac{\gamma_2}{2} - \gamma_4$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{a_1^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4} \frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2 \, (9\alpha_2^2 - 6\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2)}{2\,\alpha_4^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2}$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4} \frac{9\alpha_2 \, (\alpha_2 + \alpha_4)^2}{2\,\alpha_4}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5} \left[\frac{\alpha_2\,(15\alpha_2 + 17\alpha_4)}{2\,\alpha_4} \alpha_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{9\alpha_2^2 + 16\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2}{\alpha_4} \alpha_5 \right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^6} \frac{\alpha_2\,(\alpha_2+\alpha_4)^2 \, (135\alpha_2^3+225\alpha_2^2\alpha_4+246\alpha_2\alpha_4^2+140\alpha_4^3)}{8\,\alpha_4^3}$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5}\left[(3\alpha_2+4\alpha_4)\ \alpha_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{6\alpha_2^2 + 7\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2}{\alpha_4}\ \alpha_5 \right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^6}\ \frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2\ (81\alpha_2^3 + 81\alpha_2^2\alpha_4 + 24\alpha_2\alpha_4^2 + 16\alpha_4^3)}{4\ \alpha_4^2}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} - \frac{a_7}{a_1^6}\ \frac{3\ (\alpha_2+\alpha_4)^2\ (3\alpha_2+2\alpha_4)}{2\ \alpha_4} +$$

$$+ \frac{a_9}{a_1^6}\left[\frac{3(\alpha_2+\alpha_4)(3\alpha_2+\alpha_4)}{\alpha_4}\ (\alpha_6+\alpha_7) + \right.$$

$$\left. + (\alpha_3+2\alpha_5)(3\alpha_3+5\alpha_5) \right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^7}\ \frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2}{4\ \alpha_4^2}\left[(189\alpha_2^2 + 180\alpha_2\alpha_4 + 48\alpha_4^2)\ \alpha_3 + \right.$$

$$\left. + (369\alpha_2^2 + 348\alpha_2\alpha_4 + 92\alpha_4^2)\ \alpha_5 \right] +$$

$$+ \frac{a_9^3}{a_1^8}\ \frac{2\ (\alpha_2+\alpha_4)^4\ (3\alpha_2+2\alpha_4)^2\ (63\alpha_2^2 + 57\alpha_2\alpha_4 + 16\alpha_4^2)}{16\ \alpha_4^2}$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} - \frac{a_6}{a_1^7}\,\frac{(\alpha_2+\alpha_4)\ (2\alpha_2+\alpha_4)\ (3\alpha_2+2\alpha_4)}{\alpha_4} -$$

$$- \frac{a_7}{a_1^7}\left[\,(4\alpha_2+2\alpha_4)\ \alpha_3\ + \right.$$

$$\left. + \frac{9\alpha_2^2 + 31\alpha_2\alpha_4 + 14\alpha_4^2}{2\ \alpha_4}\ \alpha_5\right] +$$

$$+ \frac{a_9}{a_1^7}\left[\frac{21\alpha_2^2+23\alpha_2\alpha_4+4\alpha_4^2}{2\ \alpha_4}\ \alpha_8\ + \right.$$

$$\left. + (7\alpha_3+11\alpha_5)\alpha_6 + (6\alpha_3+9\alpha_5)\alpha_7\right] -$$

$$- \frac{a_7 a_9}{a_1^8}\,\frac{3\ (\alpha_2+\alpha_4)^3\ (3\alpha_2+2\alpha_4)\ (21\alpha_2^2 + 23\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2)}{4\ \alpha_4^2} +$$

$$+ \frac{a_8^2}{a_1^8}\,\frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2\ (2\alpha_2+\alpha_4)\ (3\alpha_2+2\alpha_4)^2}{4\ \alpha_4^2} +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^8}\,\frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2}{4\ \alpha_4^2}\left[2\ (126\ \alpha_2^3 + 195\ \alpha_2^2\alpha_4\ + \right.$$

$$+ 95\ \alpha_2\alpha_4^2 + 20\ \alpha_4^3)\ \alpha_6 + 3\ (81\ \alpha_2^3\ +$$

$$\left. + 123\ \alpha_2^2\alpha_4 + 58\ \alpha_2\alpha_4^2 + 12\ \alpha_4^3)\ \alpha_7\right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^8}\left[\frac{42\alpha_2^2 + 56\alpha_2\alpha_4 + 15\alpha_4^2}{\alpha_4}\ \alpha_3\ + \right.$$

$$+ \frac{129\alpha_2^2 + 177\alpha_2\alpha_4 + 50\alpha_4^2}{2\,\alpha_4}\,\alpha_5 \Big] (\alpha_3+2\alpha_5) +$$

$$+ \frac{a_9^3}{a_1^9}\;\frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2}{4\,\alpha_4^3} \Big[(1134\;\alpha_2^4 + 2529\;\alpha_2^3\alpha_4 +$$

$$+ 2130\;\alpha_2^2\alpha_4^2 + 842\;\alpha_2\alpha_4^3 + 128\;\alpha_4^4)\;\alpha_3 +$$

$$+ (2133\;\alpha_2^4 + 4734\;\alpha_2^3\alpha_4 + 3990\;\alpha_2^2\alpha_4^2 +$$

$$+ 1596\;\alpha_2\alpha_4^3 + 248\;\alpha_4^4)\;\alpha_5 \Big] +$$

$$+ \frac{a_9^4}{a_1^{10}}\;\frac{(\alpha_2+\alpha_4)^4\;(3\alpha_2+2\alpha_4)^2}{16\;\alpha_4^5}\;(\,567\;\alpha_2^4 +$$

$$+ 1197\;\alpha_2^3\alpha_4 + 993\;\alpha_2^2\alpha_4^2 + 412\;\alpha_2\alpha_4^3 + 64\;\alpha_4^4\;)$$

1.3.- Clasificación en el caso $\alpha_4 \neq 0$.-

A partir de ahora, se va a intentar ir descomponiendo la familia de álgebras de lie filiformes complejas correspondientes a $\alpha_4 \neq 0$ en subfamilias con el menor número de parámetros posible (a veces serán álgebras concretas), no isomorfas entre sí. Para ello, la siguiente proposición resulta de interés.

Proposición 2.3.-

Las álgebras de Lie correspondientes a las leyes

$$\mu\left(\frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_4} - \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\right)$$

con $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_2 + \alpha_4 \neq 0$

$$\mu(\alpha_4, -\alpha_4, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$$

con $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_5 \neq 0$

$$\mu(\alpha_4, -\alpha_4, \alpha_3, \alpha_4, 0, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9) \quad \text{con} \quad \alpha_4 \neq 0$$

son no isomorfas entre sí.

Demostración :

Para todas las álgebras en que $\alpha_4 \neq 0$ se tiene que

$$M^1 = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$$

$$M^2 = \{\alpha_2 X_2,\ \alpha_4 X_2,\ (\alpha_2+\alpha_4) X_3 + \alpha_5 X_2,\ (\alpha_2+\alpha_4) X_4 + \alpha_5 X_3 + \alpha_7 X_2\}$$

y, por tanto, se verifica que

$M^2 = \{X_2, X_3, X_4\}$ si $\alpha_2+\alpha_4 \neq 0$

$M^2 = \{X_2, X_3\}$ si $\alpha_2+\alpha_4=0$ y $\alpha_5 \neq 0$

$M^2 = \{X_2\}$ si $\alpha_2+\alpha_4=0$ y $\alpha_5=0$

#

1.3.1.- Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan en la forma

$$\mu\left(\frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_4}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\right) \text{ si } \alpha_4 \neq 0 \text{ y } \alpha_2+\alpha_4 \neq 0$$

Proposición 2.4.-

El álgebra de ley

$$\mu\left(\frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_4}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\right) \quad \text{con } \alpha_4 \neq 0$$

y $\alpha_2+\alpha_4 \neq 0$ es isomorfa a alguna de las álgebras de leyes

a) $\mu(0,1,\alpha_3,1,0,\alpha_6,0,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_2 \neq 0$ y $2\alpha_2+\alpha_4 \neq 0$

b) $\mu(-\frac{3}{8},-\frac{1}{2},0,1,1,\alpha_6,0,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_2 = \frac{-\alpha_4}{2}$ y $\alpha_5 \neq 0$

c) $\mu(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0, \alpha_6, 0, 0, 0)$ si en el

álgebra dada se tenía que $\alpha_2 = \frac{-\alpha_4}{2}$ y $\alpha_5 = 0$

d) $\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0)$ si en el

álgebra dada se tenía que $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_5 \neq 0$

e) $\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ si en el

álgebra dada se tenía que $\alpha_2 = 0$, $\alpha_5 = 0$ y $\alpha_6 \neq 0$

f) $\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ si en el

álgebra dada se tenía que $\alpha_2 = 0$, $\alpha_5 = 0$ y $\alpha_6 = 0$

Demostración :

a) se obtiene si además de ser $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_2 + \alpha_4 \neq 0$ se tiene que $\alpha_2 \neq 0$ y $2\alpha_2 + \alpha_4 \neq 0$. Se pueden elegir, en este caso, $b_2 = b_3 = b_4 = b_8 = 0$ y b_5, b_6, b_7 y b_9 como

$$b_5 = \frac{b_9 \alpha_9}{2(2\alpha_2 + \alpha_4)} - \frac{2\, b_7 \alpha_7}{2(2\alpha_2 + \alpha_4)} - \frac{3\, b_6 \alpha_5}{2(2\alpha_2 + \alpha_4)} +$$

$$+ \frac{b_7^2}{b_9} \frac{(2\alpha_2+3\alpha_4)}{2(2\alpha_2+\alpha_4)}$$

$$b_6 = \frac{b_9\alpha_8}{3(\alpha_2+\alpha_4)} - \frac{2\ b_7\alpha_5}{3(\alpha_2+\alpha_4)}$$

$$b_7 = \frac{b_9\alpha_7}{2\ \alpha_4}$$

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_2}$$

para conseguir que sean, respectivamente $\beta_9=0$, $\beta_8=0$, $\beta_7=0$ y $\beta_2=1$.

Si se elige ahora un nuevo vector característico de tal manera que sean $a_i=0$, $2\le i\le 8$, y

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

$$a_9 = \frac{-2\ a_1\alpha_4\alpha_5}{9\ \alpha_2(\alpha_2+\alpha_4)^2}$$

se tiene que son ahora $\gamma_4= 1$, $\gamma_1= 1$ y $\gamma_5= 0$, resultando la ley a). Que α_3 y α_6 pueden ser cualesquiera sigue del hecho de que ahora ninguno de los β_3, β_6, γ_3 y γ_6 pueden ser ya prederteminados al no quedar ningún coeficiente de los a_i o

b_j por fijar. Puede parecer que es posible asignar un valor distinto a b_8 para fijar β_6 pero, sustituyendo en β_6 el valor que habría que haber dado a b_7 para que fuese $\beta_7=0$, resultaría

$$\beta_6 = b_9 \frac{\alpha_4\alpha_6-\alpha_2\alpha_7}{\alpha_4}$$

cualquiera que sea $b_8 \in \mathbb{C}$.

b) y c) se obtienen cuando se verifica que $\alpha_2 \neq 0$ pero $2\alpha_2+\alpha_4=0$ (además de $\alpha_4\neq 0$ y $\alpha_2+\alpha_4\neq 0$, obviamente). Dado que ahora se tiene $\alpha_4\neq 0$ y $\alpha_2= \frac{-\alpha_4}{2}$, se sigue ya que $\alpha_2\neq 0$ y no es necesario exigirlo explícitamente. Se distinguirá, también, si es $\alpha_5\neq 0$ ó $\alpha_5=0$.

Sea, pues, el caso $\alpha_2= \frac{-\alpha_4}{2}$, $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_2+\alpha_4\neq 0$ y $\alpha_5\neq 0$. Se va a probar que cada una de estas álgebras es isomorfa a alguna cuya ley se exprese en la forma b).

En efecto, se puede elegir un cambio de bases de Jordan de adX_1 tal que sean $b_i= b_8= 0$ para $2\leq i\leq 5$ y

$$b_6 = \frac{b_9\alpha_9}{3\,\alpha_5} - \frac{2\,b_7\alpha_7}{3\,\alpha_5} + \frac{2\,b_7^2\,\alpha_4}{3\,b_9\,\alpha_5}$$

$$b_7 = \frac{b_9 \alpha_7}{2\ \alpha_4}$$

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_5}$$

para obtener que $\beta_9 = \beta_7 = 0$ y $\beta_5 = 1$.

Si se toman ahora $a_j = a_8 = 0$ para $2 \le j \le 6$ y

$$a_9 = \frac{-\ 32\ a_1 \alpha_3}{37\ \alpha_4^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

se obtiene un cambio de vector característico que garantiza que $\gamma_1 = -3/8$, $\gamma_2 = -1/2$, $\gamma_4 = 1$ y $\gamma_3 = 0$. Si en este mismo cambio de vector característico se fija convenientemente a_7 (en función de γ_4, γ_8, a_1 y a_9) se puede lograr que sea $\gamma_8 = 0$.

Desde luego, γ_6 no puede predeterminarse pues a_1 y a_9 son los únicos coeficientes de que depende y ya fueron fijados antes para conseguir que valgan $\gamma_4 = 1$ y $\gamma_3 = 0$, respectivemente; además, con ninguna otra elección de a_9 sería $\gamma_3 = 0$ y se cumple que $\beta_3 = 0$ si y sólo si $\gamma_3 = 0$.

Dado que se tiene que

$$\beta_6 = b_9\alpha_6 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_2$$

puede parecer, como anteriormente, que si no se hubiera fijado b_8 (cosa totalmente prescindible para garantizar que $\beta_9= 0$) se podría fijar ahora de manera que fuese $\beta_6= 0$. En realidad, no es posible esto pues, al fijar b_7 para lograr que $\beta_7= 0$, sigue que

$$\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 = - \frac{b_9\alpha_7}{\alpha_4}$$

con lo que β_6 vale ahora

$$\beta_6 = b_9 \left(\alpha_6 - \frac{\alpha_2\alpha_7}{\alpha_4} \right) = b_9 \left(\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} \right)$$

y, como es $b_9\neq 0$ necesariamente y ya se fijó anteriormente para lograr que fuese $\beta_5= 1$, no es posible predeterminar tampoco β_6.

Se ha obtenido así la familia monoparamétrica de álgebras cuyas leyes se expresan como

$$\mu\left(\frac{-3}{8}\ ,\ \frac{-1}{2}\ ,\ 0,\ 1,\ 1,\ \alpha_6,\ 0,\ 0,\ 0\right) \qquad \text{con } \alpha_6\in\mathbb{C}$$

c) surge cuando en el caso anterior se supone que es $\alpha_5=0$. Ahora no es posible elegir adecuadamente b_6 para garantizar que sea $\beta_9 = 0$, pero, al ser $2\alpha_2+\alpha_4 = 0$, queda β_9 reducido a

$$\beta_9 = b_9\alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\, b_7 \right) \alpha_7 +$$

$$+ \left(2\, \frac{b_7^2}{b_9} - 2\, \frac{b_7 b_8^2}{b_9^2} + \frac{b_8^4}{2\, b_9^3} \right) \alpha_4$$

y, si se fija b_7 como

$$b_7 = \frac{b_9\alpha_7}{2\,\alpha_4} + \frac{b_8^2}{2\, b_9}$$

para lograr que sea $\beta_7= 0$, al sustituir su valor en β_9 queda éste dependiente, exclusivamente, de b_8, b_9, α_4, α_7 y α_9 y es posible escoger b_8 de tal forma que se tenga $\beta_9= 0$.

Se ha obtenido así la familia monoparamétrica de álgebras cuyas leyes se expresan mediante

$$\mu\left(\frac{-3}{8},\ \frac{-1}{2},\ 0,\ 1,\ 0,\ \alpha_6,\ 0,\ 0,\ 0\right) \qquad \alpha_6\in\mathbb{C}$$

Que α_6 no puede ahora determinarse se deduce por razonamientos en todo análogos a los expresados en los apartados anteriores.

d), e) y f) se van a obtener en el caso en que sean $\alpha_2 = 0$ y $2\alpha_2+\alpha_4 \neq 0$ junto a, naturalmente, $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_2+\alpha_4 \neq 0$. Este es el único caso que queda por estudiar, ya que el caso $\alpha_2 = 0$ y $2\alpha_2+\alpha_4 = 0$ nunca puede presentarse, porque implicaría $\alpha_4 = 0$.

A efectos prácticos el caso que se considera queda reducido, evidentemente, a suponer $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_4 \neq 0$.

Si se hace un cambio de base de Jordan de adX_1 donde valgan los coeficientes

$$b_i = b_8 = 0 \qquad \text{para } 2 \leq i \leq 4$$

$$b_5 = \frac{b_9\alpha_9}{2\,\alpha_4} - \frac{b_7\alpha_7}{\alpha_4} - \frac{3\,b_6\alpha_5}{2\,\alpha_4} + \frac{3\,b_7^2}{2\,b_9}$$

$$b_6 = \frac{b_9\alpha_8}{3\,\alpha_4} - \frac{2\,b_7\alpha_5}{3\,\alpha_4}$$

$$b_7 = \frac{b_9\alpha_7}{2\,\alpha_4}$$

se garantiza que $\beta_9 = \beta_8 = \beta_7 = 0$.

d) aparece si, además de ser $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_4 \neq 0$ es $\alpha_5 \neq 0$. Se puede completar en este caso el cambio de base de Jordan eligiendo

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_5}$$

con lo que se logra que sea $\beta_5 = 1$.

Es posible también, ahora, modificar el vector característico, escogiendo

$$a_j = 0 \qquad 2 \leq j \leq 8$$

$$a_9 = \frac{-a_1\alpha_3}{2\,\alpha_4^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

con lo que se consigue hacer $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 1$ y $\gamma_1 = -1$.

Resultan, en este caso, las siguientes expresiones para β_6 y γ_6 :

$$\beta_6 = b_9\alpha_6$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} - \frac{2\,\alpha_3\alpha_5}{a_1^4\alpha_4} = \frac{\alpha_4\alpha_6 - 2\,\alpha_3\alpha_5}{a_1^4\,\alpha_4}$$

de donde sigue la imposibilidad de prefijar el valor de la constante de estructura α_6, cualquiera que sea la elección que se haga de los coeficientes a_i o b_j, que no indetermine a su vez alguna otra constante de estructura previamente fijada).

Se ha obtenido así la familia de álgebras cuyas leyes se expresan mediante

$\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0) \qquad \alpha_6 \in \mathbb{C}$

e) se va a obtener si valen $\alpha_5 = 0$ y $\alpha_6 \neq 0$ (y, naturalmente, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_4 \neq 0$). En tal caso se podría haber tomado como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6}$$

sin modificar el resto de los valores asignados a los coeficientes a_i y b_j, $1 \leq i \leq 9$, $1 \leq j \leq 8$, con lo que se consigue que $\beta_6 = 1$.

Se obtiene así el álgebra de ley

$\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$

f) aparece en el único caso que resta, a saber, que sean $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ (junto a $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_4 \neq 0$). Se obtiene ahora, trivialmente, el álgebra de ley

$\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

Falta solamente probar que ningún álgebra de alguno de los tipos a), b), c), d), e) o f) es isomorfa a ninguna de cualquier otro tipo de ellos.

No hay ningún álgebra de la familia a) que pueda ser isomorfa a ninguna de las de los tipos b) o c) porque ninguna elección de los a_i o b_j puede lograr que valga $2\alpha_2+\alpha_4 = 0$ en el caso a), pues ello está expresamente prohibido, al contrario que en los otros dos casos. Tampoco puede ser isomorfa a ningún álgebra de cualquiera de los tipos d), e) o f) por análogo motivo : ninguna elección posible de los a_i y/o b_j consigue hacer $\alpha_2 = 0$ en el tipo a).

Cualquier álgebra de los tipos b) o c) es no isomorfa a cualquiera de las familias d), e) o f) porque en aquellas no hay ninguna asignación de los coeficientes a_i o b_j que logre anular α_2.

Que ningún álgebra de la familia b) es isomorfa a ninguna de la familia c) es consecuencia de que para anular γ_5 en b) habría que elegir a_9 como

$$a_9 = \frac{-2\, a_1\alpha_5\alpha_4}{\alpha_2(\alpha_2+\alpha_4)^2}$$

lo que no anularía γ_3, y β_5 no es nulo, salvo que lo fuese α_5. La posibilidad restante es que fuese $\alpha_3 = 0$ inicialmente pero ello exigiría, si el álgebra en cuestión es isomorfa a alguna de la familia b), que fuese $a_9 = 0$ lo que, de nuevo, daría $\gamma_5 \neq 0$ (salvo que fuese $\alpha_5 = 0$ inicialmente en b) y eso está expresamente prohibido).

La justificación de que ningún álgebra de la familia d) es isomorfa a ninguna de las e) o f) radica en que, al ser ahora en todos los casos $\alpha_2 = 0$, se tiene que

$$\beta_5 = b_9\alpha_5$$

$$\gamma_5 = \frac{\beta_5}{a_1^2}$$

y ninguna elección de $b_9 \neq 0$ ó $a_1 \neq 0$ conseguiría anular β_5 o γ_5 en d), ya que en este caso se supone que $\alpha_5 \neq 0$.

Un razonamiento análogo muestra que las álgebras e) y f) son no isomorfas por verificarse en ambos casos que

$$\beta_6 = b_9\alpha_6$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^2}$$

y no haber, por tanto, posibilidad de elegir b_9 o a_1 no nulos que anulen β_6 o γ_6 en e).

#

Proposición 2.5.-

Las álgebras de leyes

$\mu(0,\ 1,\ \alpha_3,\ 1,\ 0,\ \alpha_6,\ 0,\ 0,\ 0)$

$\mu(0,\ 1,\ \alpha'_3,\ 1,\ 0,\ \alpha'_6,\ 0,\ 0,\ 0)$

son no isomorfas si $\alpha'_3 \neq \omega\ \alpha_3$ con $\omega^2 = 1$ ó $\alpha'_6 \neq \alpha_6$.

Demostración :

Como cualquier transformación que pase de un álgebra a otra debe ser tal que se tenga que

$$\beta_2 = b_9\alpha_2 = b_9 = 1$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4}\ \frac{9\ \alpha_2(\alpha_2+\alpha_4)^2}{2\ \alpha_4} = a_9\ 18 = 0$$

se deduce que

$$b_9 = 1$$

$$a_1^2 = 1$$

$$a_9 = 0$$

Si ambas álgebras son isomorfas, α'_3 ha de ser bien β_3 o bien γ_3, es decir, se ha de cumplir que α'_3 sea

$$\beta_3 = b_9\alpha_3 = \alpha_3 \qquad\qquad ó$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4} \; \frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2 \; (9\alpha_2^2 - 6\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2)}{2 \; \alpha_4^2} =$$

$$= \frac{\alpha_3}{a_1} = a_1\alpha_3$$

de donde se deduce que ha de ser $\alpha'_3 = \omega \; \alpha_3$ con $\omega^2 = 1$, para que sean ambas álgebras isomorfas. Análogamente, α'_6 ha de proceder de β_6 ó γ_6, es decir, α'_6 ha de tomar una de los dos siguientes valores

$$\beta_6 = b_9\alpha_6 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 \; b_7 \right) \alpha_2 = \alpha_6 + \frac{b_8^2}{b_9} - 2 \; b_7$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5} \left(\frac{\alpha_2 \; (15\alpha_2 + 17\alpha_4)}{2 \; \alpha_4} \alpha_3 + \right.$$

$$+ \frac{9\,\alpha_2^2 + 16\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2}{\alpha_4}\,\alpha_5 \Bigg) +$$

$$+ \frac{a_9}{a_1^6}\;\frac{\alpha_2\,(\alpha_2+\alpha_4)^2\,(135\alpha_2^3+225\alpha_2^2\alpha_4+246\alpha_2\alpha_4^2+140\alpha_4^3)}{8\,\alpha_4^3} = \alpha_6$$

y como se tiene que ha de ser

$$\beta_7 = b_9\alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\,b_7 \right) \alpha_4 = \frac{b_8^2}{b_9} - 2\,b_7 = 0$$

se sigue que ha de ser $\beta_6 = \alpha_6$, de donde se infiere el resultado.

#

En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define, para cada $n\in\mathbb{N}$, una relación de equivalencia de la siguiente manera :

"Sean $u,v\in\mathbb{C}$. Se dice que u y v están relacionados si y solo si $u^n = v^n$."

Es inmediato comprobar que la anterior es una relación de equivalencia y que cada clase de equivalencia contiene, exactamente, n elementos, las n raices n-simas de algún número complejo. Además, es fácil ver que se verifica que

$$uR_n v \Leftrightarrow u = \omega v \qquad \text{con} \quad \omega^n = 1$$

En lo sucesivo se va a designar mediante $\mathbb{C}_n$ al conjunto cociente $\mathbb{C}/R_n$.

Corolario 2.6.-

Cada álgebra de la familia de leyes $\mu(0,1,\alpha_3,1,0,\alpha_6,0,0,0)$ con $\alpha_3 \in \mathbb{C}_2$ y $\alpha_6 \in \mathbb{C}$ es isomorfa a otro álgebra cuya familia de leyes se expresa $\mu(0,1,\lambda_1,1,0,\lambda_2,0,0,0)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$ y $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, y que viene dada por :

$$[X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5,X_8] = X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = 2X_3$$

$$[X_6,X_9] = 3X_4 + \lambda_1 X_3 + \lambda_2 X_2$$

$$[X_7,X_8] = 2X_4$$

$$[X_7,X_9] = 5X_5 + \lambda_1 X_4 + \lambda_2 X_3$$

$$[X_8,X_9] = 5X_6 + \lambda_1 X_5 + \lambda_2 X_4$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

En adelante se designarán las leyes de esta familia de álgebras (y, por abuso de lenguaje, a veces a la propia familia de álgebras) como $\mu_9^{1,\lambda_1,\lambda_2}$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.7.-

Las álgebras de leyes

$$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0\right)$$

$$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 1, \alpha_6', 0, 0, 0\right)$$

son no isomorfas si $\alpha_6' \neq \alpha_6$.

Demostración :

Si fuesen isomorfas se podría pasar de la primera a la segunda mediante transformaciones como las estudiadas anteriormente, verificándose que

$$\beta_4 = b_9 \alpha_4 = b_9 = 1$$

$$\beta_7 = b_9\alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_4 = \frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4} \frac{(\alpha_2+\alpha_4)^2\ (9\alpha_2^2 - 6\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_4^2)}{2\ \alpha_4^2} =$$

$$= \frac{a_9}{a_1^4} \frac{37}{32} = 0$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

de donde sigue que

$$b_9 = 1$$

$$\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 = 0$$

$$a_9 = 0$$

$$a_1^2 = 1$$

obteniéndose que

$$\beta_6 = \alpha_6$$

$$\gamma_6 = \alpha_6$$

y como α'_6 sólo puede proceder de β_6 o de γ_6, se sigue el resultado.

#

Corolario 2.8.-

Cada álgebra de la familia de leyes

$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0\right)$ con $\alpha_6 \in \mathbb{C}$,

es isomorfa a otro álgebra cuya familia de leyes se expresa mediante

$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0. 1, 1, \lambda, 0, 0, 0\right)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y

que viene dada por :

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = \frac{-3}{8} X_2$$

$$[X_5, X_8] = \frac{-1}{2} X_2$$

$$[X_5, X_9] = \frac{-7}{8} X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = \frac{1}{2} X_3 + X_2$$

$$[X_6, X_9] = \frac{-3}{8} X_4 + X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7, X_8] = \frac{1}{2} X_4 + X_3$$

$$[X_7, X_9] = \frac{1}{8} X_5 + 2 X_4 + \lambda X_3$$

$$[X_8, X_9] = \frac{1}{8} X_6 + 2 X_5 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

En lo sucesivo, se designará esta familia de álgebras como $\mu_9^{2,\lambda}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.9.-

Las álgebras de leyes

$$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 0, \alpha_6, 0, 0, 0\right)$$

$$\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 0, \alpha'_6, 0, 0, 0\right)$$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \alpha_6$.

Demostración :

Si se pasa de un álgebra a otra mediante un cambio de base de Jordan de adX_1 será $\alpha'_6 = \beta_6$ y como se verificará en tal caso que

$$\beta_4 = b_9 \alpha_4 = b_9 = 1$$

$$\beta_7 = b_9 \alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2 b_7 \right) \alpha_4 = \frac{b_8^2}{b_9} - 2 b_7 = 0$$

sigue que se cumple que

$$b_9 = 1$$

$$\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 = 0$$

y, por tanto, que

$$\beta_6 = b_9\alpha_6 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_2 = \alpha_6$$

Si, por el contrario, la transformación consistiera en un cambio de vector característico, se verificaría que

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3} + \frac{a_9}{a_1^4}\ \frac{9\ \alpha_2\ (\alpha_2+\alpha_4)^2}{2\ \alpha_4} = \frac{-9\ a_9}{16\ a_1^4} = 0$$

de donde se sigue que

$$a_1^2 = 1$$
$$a_9 = 0$$

y, por tanto, $\gamma_6 = \alpha_6$.

Cualquier otra posibilidad solo consiste en componer ambas transformaciones.

#

Corolario 2.10.-

Cada álgebra de la familia de leyes $\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 0, \alpha_6, 0, 0, 0\right)$ con $\alpha_6 \in \mathbb{C}$, es isomorfa a otro álgebra de la familia de leyes siguiente, que se expresa mediante $\mu\left(\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, 0, 1, 0, \lambda, 0, 0, 0\right)$ siendo $\lambda \in \mathbb{C}$, que se designará en lo sucesivo $\mu_9^{3,\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y que viene dada por :

$$
\begin{aligned}
\mu_9^{3,\lambda} : [X_1, X_i] &= X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9 \\
[X_4, X_9] &= \frac{-3}{8} X_2 \\
[X_5, X_8] &= \frac{-1}{2} X_2 \\
[X_5, X_9] &= \frac{-7}{8} X_3 \\
[X_6, X_7] &= X_2 \\
[X_6, X_8] &= \frac{1}{2} X_3 \\
[X_6, X_9] &= \frac{-3}{8} X_4 + \lambda X_2 \\
[X_7, X_8] &= \frac{1}{2} X_4
\end{aligned}
$$

$$[X_7, X_9] = \frac{1}{8} X_5 + \lambda X_3$$

$$[X_8, X_9] = \frac{1}{8} X_6 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.11.-

Las álgebras de leyes

$\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0)$

$\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \alpha'_6, 0, 0, 0)$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \alpha_6$.

Demostración :

Es en todo análoga a las anteriores.

#

Corolario 2.12.-

Cada álgebra de la familia de leyes $\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \alpha_6, 0, 0, 0)$ siendo $\alpha_6 \in \mathbb{C}$, es isomorfa a otro álgebra cuya familia de leyes se denominará en adelante $\mu_9^{4,\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se expresa $\mu(-1, 0, 0, 1, 1, \lambda, 0, 0, 0)$ y viene dada por

$$\mu_9^{4,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3 + X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_4 + X_3$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + 2 X_4 + \lambda X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + 2 X_5 + \lambda X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corolario 2.13.-

Se han obtenido, además, las álgebras cuyas leyes se expresan mediante

$$\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \quad \text{y}$$

$$\mu(-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

que no son isomorfas entre sí ni a ninguna de las anteriores, que se designarán en lo sucesivo como μ_9^5 y μ_9^6, respectivamente, y que vienen dadas por

$$\mu_9^5: \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_4$$

$$\mu_9^6: \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = -X_3$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_8] = X_3$$

$$[X_7, X_8] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5$$

$$[X_8, X_9] = X_6$$

1.3.2.- Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan

$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_5 \neq 0$.

Al ser ahora $\alpha_2+\alpha_4 = 0$, las constantes de estructura β_i, $1 \le i \le 9$, correspondientes al cambio de bases de Jordan de adX_1, se reducen a

$$\beta_1 = b_9\ \alpha_1 = b_9\ \alpha_4 = \beta_4$$

$$\beta_2 = b_9\ \alpha_2 = -b_9\ \alpha_4 = -\beta_4$$

$$\beta_3 = b_9\ \alpha_3$$

$$\beta_4 = b_9\ \alpha_4$$

$$\beta_5 = b_9\ \alpha_5$$

$$\beta_6 = b_9\ \alpha_6 - \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_4$$

$$\beta_7 = b_9\ \alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_4$$

$$\beta_8 = b_9\ \alpha_8 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_5$$

$$\beta_9 = b_9\ \alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_7 +$$

$$+ \left(-3\ b_6 + 3\ \frac{b_7 b_8}{b_9} - \frac{b_8^3}{b_9^2} \right) \alpha_5 +$$

$$+ \left(2\ b_5 - 2\ \frac{b_6 b_8}{b_9} + \frac{b_7^2}{b_9} \right) \alpha_4$$

Análogamente, las constantes de estructura γ_i, $1 \le i \le 9$, para la nueva base que se obtiene tras cambiar de vector característico adoptan las formas

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \gamma_4$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{a_1^2} = \frac{-\alpha_4}{a_1^2} = -\gamma_4$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2}$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} - \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_4\,(\alpha_3+3\alpha_5)$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_4\,(\alpha_3+3\alpha_5)$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\,(\alpha_3+2\alpha_5)\,(3\alpha_3+5\alpha_5)$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_7}{a_1^7}\,\alpha_4\,(2\alpha_3 + 4\alpha_5) +$$

$$+ \frac{a_9}{a_1^7}\left[\alpha_4\alpha_8 + (7\alpha_3+11\alpha_5)\,\alpha_6 + (6\alpha_3+9\alpha_5)\,\alpha_7\right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^8}\,\alpha_4\,(\alpha_3+\alpha_5)\,(\alpha_3+2\alpha_5)$$

Proposición 2.14.-

El álgebra cuya ley se expresa como

$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$

con $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_5 \neq 0$, es isomorfa a alguna de las álgebras de leyes

a) $\mu(1,-1,\alpha_3,1,\alpha_5,0,0,1,0)$ con $\alpha_3 \neq -3\alpha_5$, $\alpha_3 \in \mathbb{C}$, y $\alpha_5 \in \mathbb{C}-\{0\}$, si en el álgebra dada se verificaba que $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$ y $\alpha_4\alpha_8-\alpha_5\alpha_7 \neq 0$

b) $\mu(1,-1,\alpha_3,1,1,0,0,0,0)$ con $\alpha_3 \in \mathbb{C}-\{-3\}$ si en el álgebra dada se verificaba que $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$ y $\alpha_4\alpha_8-\alpha_5\alpha_7 = 0$

c) $\mu(1,-1,-3\alpha_5,1,\alpha_5,1,0,0,0)$ con $\alpha_5 \in \mathbb{C}-\{0\}$ si en el álgebra dada se verificaba que $\alpha_3+3\alpha_5 = 0$ y $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$.

d) $\mu(1,-1,-3,1,1,0,0,0,0)$ si son $\alpha_3+3\alpha_5=0$ y $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ en el álgebra dada.

Nota : En realidad, el álgebra cuya ley es d) no es sino el caso excluido en la familia b), aquel para el que se tiene que $\alpha_3 = -3$ .Se tendrá en cuenta este hecho al numerar las álgebras que resulten de la clasificación pero, de momento, parece preferible estudiarlas por separado pues así es como surgen.

Demostración :

Se van a distinguir en la demostración dos casos, según sea $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$ ó $\alpha_3+3\alpha_5 = 0$.

a) y b) se obtienen si es $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$. Sea, pues, el caso en que $\alpha_4 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$ y $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$.

Como en la expresión de β_9 el coeficiente b_5 aparece multiplicado exclusivamente por $2\alpha_4$ y es $\alpha_4 \neq 0$, se puede elegir una base de Jordan para adX_1 tal que sea $\beta_9=0$. Análogamente, pueden elegirse b_8 y b_7 como

$$b_8 = 0$$

$$b_7 = \frac{b_9\alpha_7}{2\,\alpha_4}$$

para lograr que sea $\beta_7 = 0$.

(Naturalmente, no habría ningún inconveniente en haber anulado, alternativamente a β_7, bien a β_6, bien a β_8.

Por otra parte, si se elige también $b_6=0$, b_5 ha de valer

$$b_5 = \frac{-b_9\alpha_9}{2\,\alpha_4} + \frac{3\,b_9\alpha_7^2}{8\,\alpha_4^2}$$

para conseguir que sea $\beta_9= 0$).

Con estas asignaciones β_8 resulta valer

$$\beta_8 = b_9\alpha_8 - b_9\,\frac{\alpha_7}{\alpha_4}\,\alpha_5 = \frac{b_9\,(\alpha_4\alpha_8 - \alpha_5\alpha_7)}{\alpha_4}$$

con lo que, si fuese $\alpha_4\alpha_8-\alpha_5\alpha_7 \neq 0$, podría elegirse como valor de b_9

$$b_9 = \frac{\alpha_4}{\alpha_4\alpha_8 - \alpha_5\alpha_7}$$

para conseguir que valga $\beta_8= 1$. Por el contrario, si se tiene que $\alpha_4\alpha_8-\alpha_5\alpha_7 = 0$, eso significa que $\beta_8= 0$ y se puede elegir como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_5}$$

para tener $\beta_5= 1$.

También es posible realizar un cambio de vector característico en el que todos los coeficientes sean nulos salvo a_9 y a_1, a los que se asigna los valores

$$a_9 = \frac{a_1\alpha_6}{\alpha_4(\alpha_3+3\alpha_5)}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

obteniéndose $\gamma_6= 0$, $\gamma_4= 1$, $\gamma_1= 1$ y $\gamma_2= -1$.

(Igual que antes, se habría podido hacer una asignación alternativa de a_9 que anulase γ_7).

Han resultado las familias de álgebras de leyes

$\mu(1,-1,\alpha_3,1,\alpha_5,0,0,1,0)$ con $\alpha_5\neq 0$ y $\alpha_3\neq -3\alpha_5$

$\mu(1,-1,\alpha_3,1,1,0,0,0,0)$ con $\alpha_3\neq -3$

Que dos álgebras, una de cada familia, son no isomorfas entre sí sigue del siguiente razonamiento :

Si hubiese alguna transformación de bases de Jordan de adX_1 que pasara de una a otra (por ejemplo, de una de tipo a) a otra de tipo b)), debería ocurrir que

$$\beta_4 = b_9\alpha_4 = b_9 = 1$$

$$\beta_7 = b_9\alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_4 = \frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 = 0$$

de donde sigue que

$$\beta_8 = b_9\alpha_8 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7 \right) \alpha_5 = \alpha_8 = 1$$

lo que es imposible, pues β_8 ha de ser nulo.

Análogamente, si existiera algún posible cambio de vector característico que pasara de un álgebra de tipo a) a otra de tipo b), se tendría que

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5} \alpha_4 (\alpha_3+3\alpha_5) = \frac{a_9}{a_1^5} \alpha_4(\alpha_3+3\alpha_5) = 0$$

luego, como $\alpha_4 \neq 0$ y $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$, sigue que han de ser

$$a_1^2 = 1$$

$$a_9 = 0$$

con lo que resulta valer γ_8

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6} (\alpha_3+2\alpha_5) (3\alpha_3+5\alpha_5) = \frac{\alpha_8}{a_1} = a_1$$

con $a_1 \neq 0$, luego γ_8 debería valer cero para que existiera el citado isomorfismo. Por tanto, no son isomorfas entre sí.

c) y d) se obtienen en el caso que queda por estudiar, aquel para el cual son $\alpha_4 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$ y $\alpha_3 = -3\alpha_5$. Las constantes de estructura γ_i, $1 \leq i \leq 9$, se reducen ahora a

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \gamma_4$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{a_1^2} = \frac{-\alpha_4}{a_1^2} = -\gamma_4$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} = \frac{-3\alpha_5}{a_1^3} = -3\gamma_5$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2}$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\, 4\, \alpha_5^2$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} - \frac{a_7}{a_1^7}\, 2\, \alpha_4\, \alpha_5 +$$

$$+ \frac{a_9}{a_1^7}\left[\alpha_4\alpha_8 - \alpha_5\,(10\alpha_6 + 9\alpha_7)\right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^8} 2 \alpha_4 \alpha_5^2$$

Si se realiza un cambio de vector característico asignando a a_7, a_9 y a_1 los valores

$$a_7 = \frac{a_1 \alpha_9}{2\alpha_4 \alpha_5} + a_9 \frac{\alpha_4 \alpha_8 - \alpha_5 (10\alpha_6 + 9\alpha_7)}{2 \alpha_4 \alpha_5} + \frac{a_9^2 \alpha_5}{a_1 \alpha_4}$$

$$a_9 = \frac{-a_1 \alpha_8}{4 \alpha_5^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

que son posibles los tres por ser $\alpha_4 \neq 0 \neq \alpha_5$, se obtiene que $\gamma_9 = 0$, $\gamma_8 = 0$, $\gamma_4 = 1$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = -1$.

Un cambio de base de Jordan tal que sean $b_8 = 0$ y

$$b_7 = \frac{b_9 \alpha_7}{2 \alpha_4}$$

consigue anular β_7 mientras que β_6 toma el valor

$$\beta_6 = b_9 \ (\alpha_6 + \alpha_7)$$

con lo que se puede distinguir según sean $\alpha_6 + \alpha_7 \neq 0$ ó

$\alpha_6+\alpha_7 = 0$.

En el primer caso se asigna a b_9 el valor

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6+\alpha_7}$$

de donde se tiene que $\beta_6=1$ con lo que resulta la familia de álgebras cuyas leyes se designan por

$$\mu(1,-1,-3\alpha_5,1,\alpha_5,1,0,0,0) \qquad \text{con } \alpha_5 \neq 0$$

La otra posibilidad hace que valga $\beta_6= 0$, lo que permite tomar como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_5}$$

lo que hace que valgan $\beta_5= 1$ y $\beta_3= -3$, obteniéndose el álgebra de ley

$$\mu(1,-1,-3,1,1,0,0,0,0)$$

Que este último álgebra no es isomorfa a ninguna de la familia de álgebras c) es consecuencia del hecho de que, tanto para estas como para aquella, al ser $\alpha_3+3\alpha_5 = 0$ se ha de cumplir que

$$\beta_6 + \beta_7 = b_9\ (\alpha_6+\alpha_7)$$

$$\gamma_6 + \gamma_7 = \frac{\alpha_6+\alpha_7}{a_1^4}$$

de donde sigue que, si $\alpha_6 = -\alpha_7$ para algunas de estas álgebras ha de seguir siéndolo para cualquiera isomorfa a ella y mientras esto es cierto para el álgebra de ley d) (al ser $\alpha_6 = \alpha_7 = 0$) no lo es para ninguna de las álgebras de la familia c) (al ser $\alpha_6=1$ y $\alpha_7=0$).

Resta probar, por tanto, que ningún álgebra de las familias a) o b) es isomorfa a ninguna otra de la familia c) o al álgebra d). El razonamiento que se hará es similar al expuesto para probar que d) no es isomorfa a ninguna de las de c).

Se tiene que, para toda álgebra cuya ley se puede expresar en la forma

$$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9) \qquad \text{con } \alpha_4 \neq 0 \neq \alpha_5$$

se verifica que

$$\beta_3 + 3\beta_5 = b_9\ (\alpha_3+3\alpha_5)$$

$$\gamma_3 + 3\gamma_5 = \frac{\alpha_3+3\alpha_5}{a_1^3}$$

por lo que, tanto si es $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$ ó $\alpha_3+3\alpha_5 = 0$ en una cierta álgebra, cualquier otro álgebra isomorfa a ella debe seguir manteniendo esa misma relación.

Dado que en las álgebras cuyas leyes se expresan por a) o b) se tiene que $\alpha_3+3\alpha_5 \neq 0$ y en las otras se cumple que $\alpha_3+3\alpha_5 = 0$, se sigue el resultado.

#

Proposición 2.15.-

Las álgebras cuyas leyes vienen dadas mediante

$\mu(1,-1,\alpha_3,1,\alpha_5,0,0,1,0)$ con $\alpha_3\neq-3\alpha_5$ y $\alpha_5\neq0$

$\mu(1,-1,\alpha'_3,1,\alpha'_5,0,0,1,0)$ con $\alpha'_3\neq-3\alpha'_5$ y $\alpha'_5\neq0$

son no isomorfas si $\alpha'_3 \neq \alpha_3$ ó $\alpha'_5 \neq \alpha_5$.

Demostración :

Para que las álgebras fueran isomorfas se debería poder pasar de una a otra mediante cambios de base de Jordan de $\mathrm{ad}X_1$, mediante cambios de vector característico o por composiciones de ambos tipos de transformaciones. Es decir, α'_3 debe ser, bien β_3, bien γ_3, y, análogamente, α'_5 debe ser, bien β_5, bien γ_5.

Si las álgebras cuyas leyes son las del enunciado fueran isomorfas se debería cumplir que

$$\beta_4 = b_9\alpha_4 = b_9 = 1$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} - \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_4\,(\alpha_3+3\alpha_5) = -\frac{a_9}{a_1^5}\,(\alpha_3+3\alpha_5) = 0$$

lo que implica que

$$b_9 = 1$$

$$a_1^2 = 1$$

$$a_9 = 0$$

y de aquí se obtiene que

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\,(\alpha_3+2\alpha_5)\,(3\alpha_3+5\alpha_5) = \frac{1}{a_1} = 1$$

y, por tanto, se tiene que

$$\beta_3 = \alpha_3$$

$$\gamma_3 = \alpha_3$$

$$\beta_5 = \alpha_5$$

$$\gamma_5 = \alpha_5$$

de donde se sigue el resultado.

#

Corolario 2.16.-

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra cuya familia de leyes se expresa por $\mu(1,-1,\lambda_1,1,\lambda_2,0,0,1,0)$ con $\lambda_2\neq 0$ y $\lambda_1\neq -3\lambda_2$, que se va a designar en adelante por $\mu_9^{7,\lambda_1,\lambda_2}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{7,\lambda_1,\lambda_2}: \begin{aligned}[t] &[X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3\le i\le 9 \\ &[X_4,X_9] = X_2 \\ &[X_5,X_8] = -X_2 \\ &[X_5,X_9] = \lambda_1 X_2 \\ &[X_6,X_7] = X_2 \\ &[X_6,X_8] = \lambda_2 X_2 \\ &[X_6,X_9] = (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3 \end{aligned}$$

$$[X_7, X_8] = \lambda_2 X_3$$

$$[X_7, X_9] = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\ X_4 + X_2$$

$$[X_8, X_9] = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\ X_5 + X_3$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq -3\lambda_2$

Proposición 2.17.-

Las álgebras de leyes

$\mu(1,-1,\alpha_3,1,1,0,0,0,0)$ con $\alpha_3 \neq -3$

$\mu(1,-1,\alpha'_3,1,1,0,0,0,0)$ con $\alpha'_3 \neq -3$

son no isomorfas si $\alpha'_3 \neq \alpha_3$.

Demostración :

Es análoga a las anteriores.

#

Corolario 2.18.-

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra cuya familia de leyes se expresa por $\mu(1,-1,\lambda,1,1,0,0,0,0)$ con $\lambda \neq -3$, que se va a designar en adelante por $\mu_9^{8,\lambda}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{8,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3\le i\le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = \lambda\ X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = (1+\lambda)\ X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = (2+\lambda)\ X_4$$

$$[X_8,X_9] = (2+\lambda)\ X_5$$

con $\lambda\in\mathbb{C}-\{-3\}$

Proposición 2.19.-

Las álgebras de leyes

$\mu(1,-1,-3\alpha_5,1,\alpha_5,1,0,0,0)$ con $\alpha_5\neq 0$

$\mu(1,-1,-3\alpha'_5,1,\alpha'_5,1,0,0,0)$ con $\alpha'_5\neq 0$

son no isomorfas si $\alpha'_5 \neq \omega\ \alpha_5$ con $\omega^2= 1$.

Demostración :

Es análoga a las anteriores.

#

Corolario 2.20.-

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra cuya familia de leyes se expresa por $\mu(1,-1,-3\lambda,1,\lambda,1,0,0,0)$ siendo $\lambda \neq 0$, que se va a designar en adelante como $\mu_9^{9,\lambda}$ y que viene dada por

$$
\begin{aligned}
\mu_9^{9,\lambda} : [X_1,X_i] &= X_{i-1} \qquad 3\leq i\leq 9 \\
[X_4,X_9] &= X_2 \\
[X_5,X_8] &= -X_2 \\
[X_5,X_9] &= -3\lambda\ X_2 \\
[X_6,X_7] &= X_2 \\
[X_6,X_8] &= \lambda\ X_2 \\
[X_6,X_9] &= -2\lambda\ X_3 + X_2 \\
[X_7,X_8] &= \lambda\ X_3 \\
[X_7,X_9] &= -\lambda\ X_4 + X_3
\end{aligned}
$$

$$[X_8,X_9] = -\lambda\ X_5 + X_4$$

con $\lambda\in\mathbb{C}_2-\{[0]\}$

Corolario 2.21.-

Se ha obtenido, además, el álgebra cuya ley se expresa como $\mu(1,-1,-3,1,1,0,0,0,0)$, que, por analogía con la familia de álgebras designada como $\mu_9^{8,\lambda}$ con $\lambda\in\mathbb{C}-\{-3\}$, se designará por $\mu_9^{8,-3}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{8,-3} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3\le i\le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_5,X_9] = -3X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = -2X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = -X_4$$

$$[X_8,X_9] = -X_5$$

1.3.3. Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan como $\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_4 \neq 0$.

Las constantes de estructura que resultan tras el cambio de base de Jordan, β_i con $1 \leq i \leq 9$, toman ahora los valores

$$\beta_1 = b_9\alpha_4 = \beta_4$$

$$\beta_2 = -b_9\alpha_4 = -\beta_4$$

$$\beta_3 = b_9\alpha_3$$

$$\beta_4 = b_9\alpha_4$$

$$\beta_5 = 0$$

$$\beta_6 = b_9\alpha_6 - \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2b_7 \right) \alpha_4$$

$$\beta_7 = b_9\alpha_7 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2b_7 \right) \alpha_4$$

$$\beta_8 = b_9\alpha_8$$

$$\beta_9 = b_9\alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2b_7 \right) \alpha_7 +$$

$$+ \left(2b_5 - 2\,\frac{b_6 b_8}{b_9} + \frac{b_7^2}{b_9} \right) \alpha_4$$

Análogamente, las constantes de estructura que resultan para la nueva base que se obtiene tras cambiar de vector característico, γ_i con $1 \le i \le 9$, adoptan la forma

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \gamma_4$$

$$\gamma_2 = \frac{-\alpha_4}{a_1^2} = -\gamma_4$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2}$$

$$\gamma_5 = 0$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} - \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_3\alpha_4$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_3\alpha_4$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\, 3\alpha_3^2$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_7}{a_1^7}\, 2\alpha_3\alpha_4 + \\ + \frac{a_9}{a_1^7}\left[\, \alpha_4\alpha_8 + \alpha_3(7\alpha_6+6\alpha_7)\,\right] + \frac{a_9^2}{a_1^8}\, \alpha_3^2\alpha_4$$

Proposición 2.22.-

El álgebra de ley

$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_4 \neq 0$

es isomorfa a alguna de las álgebras cuyas leyes se expresan mediante

a) $\mu(1,-1,\alpha_3,1,0,1,0,0,0)$ con $\alpha_3 \neq 0$

si en el álgebra dada se verificaba, además, que $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$

b) $\mu(1,-1,1,1,0,0,0,0,0)$

si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_6+\alpha_7 = 0$

c) $\mu(1,-1,0,1,0,1,0,\alpha_8,0)$

si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$

d) $\mu(1,-1,0,1,0,0,0,1,0)$

si en el álgebra dada se verificaba que $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ y $\alpha_8 \neq 0$.

e) $\mu(1,-1,0,1,0,0,0,0,0)$

si en el álgebra dada se verificaba que $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ y $\alpha_8 = 0$.

Demostración :

Se distinguirán los casos en que $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_3 = 0$. Las álgebras cuyas leyes se expresan por a) o b) surgen en el primer caso, esto es, cuando $\alpha_3 \neq 0$ (y $\alpha_4 \neq 0$, obviamente) Se puede hacer entonces un cambio de vector característico en el que se asignen a a_9 y a a_1 los valores

$$a_9 = \frac{-a_1\alpha_8}{3\,\alpha_3^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

y se tomen nulos los restantes coeficientes a_i, $2 \leq i \leq 8$, obteniéndose que valen $\gamma_8 = 0$, $\gamma_4 = 1$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = -1$.

Si se hace un cambio de base de Jordan de adX_1 en el que se asigne el valor cero a los b_i para $i = 2,3,4,6,8$

y se tomen como b_5 y b_7

$$b_5 = \frac{-b_9\alpha_9}{2\ \alpha_4} + \frac{b_7\alpha_7}{\alpha_4} - \frac{b_7^2}{2\ \alpha_4}$$

$$b_7 = \frac{b_9\alpha_7}{2\ \alpha_4}$$

se consigue que sean $\beta_9 = 0$ y $\beta_7 = 0$, respectivamente. Falta por asignar valor a $b_9 \neq 0$. Como, tras la asignación de b_7 resulta valer β_6

$$\beta_6 = b_9(\alpha_6+\alpha_7)$$

se pueden considerar dos casos, según que sea $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$ ó $\alpha_6+\alpha_7 = 0$.

Si es $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$ se puede asignar a b_9 el valor

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6+\alpha_7}$$

con lo que se logra que sea $\beta_6= 1$ y se obtiene la familia de álgebras a) cuyas leyes se expresan como

$$\mu(1,-1,\alpha_3,1,0,1,0,0,0) \qquad \text{con } \alpha_3\neq 0$$

Si $\alpha_6+\alpha_7 = 0$, resulta valer $\beta_6= 0$ y se puede asignar a b_9 el valor

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_3}$$

para hacer $\beta_3 = 1$, obteniéndose el álgebra b) de ley

$$\mu(1,-1,1,1,0,0,0,0,0)$$

Que este álgebra no es isomorfa a ninguna de la familia anterior se sigue del hecho de ser

$$\beta_6+\beta_7 = b_9(\alpha_6+\alpha_7)$$

$$\gamma_6+\gamma_7 = \frac{\alpha_6+\alpha_7}{a_1^4}$$

cualesquier que sean las asignaciones que se hagan a los coeficientes a_i o b_j, $1 \leq i \leq 9$, $2 \leq j \leq 9$. Por tanto, si en un álgebra de los tipos a) o b) se verifica que $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$, sólo será isomorfa a otra que también lo verifique y, análogamente, si se tiene que vale $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ no podrá ser isomorfa más que a otro álgebra para la que también se cumpla esta relación.

Puesto que en las álgebras de la familia a) se tiene que

$$\alpha_6+\alpha_7 = 1 + 0 = 1 \neq 0$$

y el álgebra b) verifica que

$$\alpha_6+\alpha_7 = 0$$

se sigue el resultado.

c), d) y e) se obtienen cuando es $\alpha_3 = 0$. Es decir, se van a estudiar ahora las álgebras cuyas leyes vienen dadas por

$$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,0,\alpha_4,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9) \qquad \text{con} \quad \alpha_4 \neq 0.$$

En este caso las constantes de estructura γ_i, con $1 \leq i \leq 9$, tienen las siguientes expresiones

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_4}{a_1^2} = \gamma_4$$

$$\gamma_2 = \frac{-\alpha_4}{a_1^2} = -\gamma_4$$

$$\gamma_3 = 0$$

$$\gamma_4 = \frac{\alpha_4}{a_1^2}$$

$$\gamma_5 = 0$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5}$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_9}{a_1^7}\,\alpha_4\alpha_8$$

Si se toma como a_1 a

$$a_1 = \sqrt{\alpha_4}$$

se consigue hacer $\gamma_4 = 1$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = -1$.

Si se seleccionan como b_5, b_7 y b_8 los mismos del caso anterior, se logra que sean $\beta_9 = 0$ y $\beta_7 = 0$ y que β_6 valga

$$\beta_6 = b_9(\alpha_6+\alpha_7)$$

Si es $\alpha_6+\alpha_7 \neq 0$ se toma como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6+\alpha_7}$$

con lo que se obliga a que $\beta_6 = 1$ y se obtiene la familia de álgebras

$$\mu(1,-1,0,1,0,1,0,\alpha_8,0)$$

Si, por el contrario, fuese $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ se podrían distinguir aún dos casos, según sea $\alpha_8 \neq 0$ ó $\alpha_8 = 0$.

Cuando se tenga que $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ y $\alpha_8 \neq 0$ se puede asignar a b_9 el valor

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_8}$$

con lo que se tiene que valen $\beta_6 = 0$ y $\beta_8 = 1$ de donde se obtiene el álgebra de ley

$$\mu(1,-1,0,1,0,0,0,1,0)$$

Cuando valgan $\alpha_6+\alpha_7 = 0$ y $\alpha_8 = 0$ se tiene el álgebra de ley

$\mu(1,-1,0,1,0,0,0,0,0)$

El razonamiento que prueba que las álgebras d) o e) no son isomorfas a ninguna de las álgebras de la familia c) es idéntico al que se usó para probar que el álgebra b) no era isomorfa a ninguna de las álgebras de la familia a).

Que las álgebras d) y e) son no isomorfas sigue del hecho de que β_8 y γ_8 valen ahora

$$\beta_8 = b_9\alpha_8$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5}$$

y en d) es $\alpha_8 \neq 0$ mientras que en e) se cumple que $\alpha_8 = 0$

Análogamente puede probarse que ningún álgebra de las a) o b) es isomorfa a ninguna otra de las c), d) o e). En este caso son β_3 y γ_3 las que, al venir dadas por

$$b_3 = b_9\alpha_3$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

imposibilitan ningún isomorfismo entre dos álgebras cualesquiera de la familia

$$\mu(\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9) \qquad \text{con} \quad \alpha_4 \neq 0$$

si en una de ellas se tiene que $\alpha_3 \neq 0$ (como ocurre en los casos a) y b)) y en la otra es $\alpha_3 = 0$ (como en los casos c), d) y e)).

#

Proposición 2.23.-

Las álgebras cuyas leyes son

$$\mu(1,-1,\alpha_3,1,0,1,0,0,0) \qquad \text{con} \quad \alpha_3 \neq 0$$

$$\mu(1,-1,\alpha'_3,1,0,1,0,0,0) \qquad \text{con} \quad \alpha'_3 \neq 0$$

son no isomorfas si $\alpha'_3 \neq \omega\, \alpha_3$ con $\omega^2 = 1$

Corolario 2.24.-

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a alguna de la familia cuyas leyes se expresan mediante $\mu(1,-1,\lambda,1,0,1,0,0,0)$ con $\lambda \neq 0$, que se designará como $\mu_9^{10,\lambda}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{10,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$[X_5, X_8] = -X_2$

$[X_5, X_9] = \lambda\ X_2$

$[X_6, X_7] = X_2$

$[X_6, X_9] = \lambda\ X_3 + X_2$

$[X_7, X_9] = \lambda\ X_4 + X_3$

$[X_8, X_9] = \lambda\ X_5 + X_4$

con $\lambda \in \mathbb{C}_2 - \{[0]\}$.

Corolario 2.25.-

Se ha obtenido también el álgebra de ley $\mu(1,-1,1,1,0,0,0,0,0)$ que se designará mediante μ_9^{11} y que viene dada por

$$\mu_9^{11} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3$$

$$[X_7, X_9] = X_4$$

$$[X_8,X_9] = X_5$$

Proposición 2.26.-

Las álgebras cuyas leyes son

$\mu(1,-1,0,1,0,1,0,\alpha_8,0)$

$\mu(1,-1,0,1,0,1,0,\alpha'_8,0)$

son no isomorfas si $\alpha'_8 \neq \omega\,\alpha_8$ con $\omega^2 = 1$

Corolario 2.27.-

Se obtiene así la familia de álgebras cuyas leyes son $\mu(1,-1,0,1,0,1,0,\lambda,0)$, con $\lambda\in\mathbb{C}_2$, que se designará mediante $\mu_9^{12,\lambda}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{12,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_8] = -X_2$$

$$[X_6,X_7] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_3 + \lambda\, X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_4 + \lambda X_3$$

con $\lambda \in \mathbb{C}_2$.

Corolario 2.28.-

Se han obtenido, además, otras dos álgebras de leyes $\mu(1,-1,0,1,0,0,0,1,0)$ y $\mu(1,-1,0,1,0,0,0,0,0)$, que se designarán, respectivamente, como μ_9^{13} y μ_9^{14} y que vienen dadas por

$$\mu_9^{13} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3$$

$$\mu_9^{14} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_8] = -X_2$$

$$[X_6, X_7] = X_2$$

2.- CASO $\alpha_4 = 0$.-

Como se tiene ahora que $\alpha_4 = 0$ y se verificaba la restricción :

$$2\,\alpha_1\alpha_4 - 3\,\alpha_2^2 + \alpha_2\,\alpha_4 + 2\,\alpha_4^2 = 0$$

se deduce inmediatamente que $\alpha_2 = 0$. Es decir, la familia de álgebras tiene ahora 7 parámetros solamente. No obstante, para facilitar la comprensión de estas notas, se mantendrá la notación anterior, es decir, las leyes de las álgebras con las que se va a trabajar a partir de ahora se expresarán en la forma :

$$\mu\,(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$$

El teorema de estructura se simplifica bastante en este caso al valer $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, siendo los corchetes no nulos los siguientes

$$[X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = \alpha_1 X_2$$

$$[X_5, X_9] = \alpha_1 X_3 + \alpha_3 X_2$$

$$[X_6, X_8] = \alpha_5 X_2$$

$$[X_6, X_9] = \alpha_1 X_4 + (\alpha_3 + \alpha_5) X_3 + \alpha_6 X_2$$

$$[X_7, X_8] = \alpha_5 X_3 + \alpha_7 X_2$$

$$[X_7, X_9] = \alpha_1 X_5 + (\alpha_3 + 2\alpha_5) X_4 + (\alpha_6 + \alpha_7) X_3 + \alpha_8 X_2$$

$$[X_8, X_9] = \alpha_1 X_6 + (\alpha_3 + 2\alpha_5) X_5 + (\alpha_6 + \alpha_7) X_4 + \alpha_8 X_3 + \alpha_9 X_2$$

2.1.- Cambios de bases de Jordan.-

Una nueva base de Jordan del operador adX_1 puede escribirse en la forma

$$Y_9 = b_9 X_9 + b_8 X_8 + b_7 X_7 + b_6 X_6 + b_5 X_5 + b_4 X_4 +$$
$$+ b_3 X_3 + b_2 X_2 + b_1 X_1$$

$$Y_8 = b_9 X_8 + b_8 X_7 + b_7 X_6 + b_6 X_5 + b_5 X_4 + b_4 X_3 +$$
$$+ b_3 X_2$$

$$Y_7 = b_9 X_7 + b_8 X_6 + b_7 X_5 + b_6 X_4 + b_5 X_3 + b_4 X_2$$

$$Y_6 = b_9 X_6 + b_8 X_5 + b_7 X_4 + b_6 X_3 + b_5 X_2$$

$$Y_5 = b_9 X_5 + b_8 X_4 + b_7 X_3 + b_6 X_2$$

$$Y_4 = b_9 X_4 + b_8 X_3 + b_7 X_2$$

$$Y_3 = b_9 X_3 + b_8 X_2$$

$$Y_2 = b_9 X_2$$

con $b_9 \neq 0$ y el resto de los coeficientes así elegidos para garantizar que se verifique que

$$[Y_1, Y_i] = [X_1, Y_i] = Y_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

y se puede suponer, como en el caso $\alpha_4 \neq 0$, que $b_1 = 0$ y por el mismo motivo que allí.

Si se designan mediante β_i, i=1, i=3 ó $5 \leq i \leq 9$, las constantes de estructura, no nulas, relativas a la base $\{ X_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_9 \}$, se pueden determinar éstas directamente, obteniéndose que :

$$\beta_i = b_9 \alpha_i \qquad i = 1,3,5,6,7$$

$$\beta_8 = b_9 \alpha_8 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2b_7 \right) \alpha_5$$

$$\beta_9 = b_9 \alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\, b_7 \right) \alpha_7 +$$

$$+ \left(- 3\, b_6 + 3\, \frac{b_7\, b_8}{b_9} \quad \frac{b_8^3}{b_9^2} \right) \alpha_5$$

2.2 Cambios de vectores característicos.-

Cualquier vector $Z_1 \in M-M^1$ es de la forma

$$Z_1 = a_9X_9 + a_8X_8 + a_7X_7 + a_6X_6 + a_5X_5 + a_4X_4 +$$
$$+ a_3X_3 + + a_2X_2 + a_1X_1$$

con $a_1 \neq 0$ si se pretende que sea un vector característico.

Si V es el espacio engendrado por $M^1 + \mathbb{C}^9\{X_9\}$, una base de Jordan de $adZ_1|_V$ está dada por

$$\left\{ (adZ_1)^i X_9 \ : \ 0 \leq i \leq 7 \right\}$$

Si se designan mediante Z_{9-i}, $0 \leq i \leq 7$, a los vectores

$$Z_{9-i} = (adZ_1)^i X_9 \qquad\qquad 0 \leq i \leq 7$$

se obtiene una base de M, $\{Z_i : 1 \leq i \leq 9\}$, cuyos vectores se expresan, en función de los de la antigua base, $\{X_i : 1 \leq i \leq 9\}$, mediante las expresiones

$$Z_9 = X_9$$

$$Z_8 = a_1 X_8 + a_8 \alpha_1 X_6 + \left[a_7 \alpha_1 + a_8(\alpha_3 + 2\alpha_5) \right] X_5 +$$

$$+ \left[a_6 \alpha_1 + a_7(\alpha_3 + 2\alpha_5) + a_8(\alpha_6 + \alpha_7) \right] X_4 +$$

$$+ \left[a_5 \alpha_1 + a_6(\alpha_3 + \alpha_5) + a_7(\alpha_6 + \alpha_7) + a_8 \alpha_8) \right] X_3 +$$

$$+ \left[a_4 \alpha_1 + a_5 \alpha_3 + a_6 \alpha_6 + a_7 \alpha_8 + a_8 \alpha_9 \right] X_2$$

$$Z_7 = a_1^2 X_7 - a_1 a_9 \alpha_1 X_6 + \left[a_1 a_8 \alpha_1 - a_1 a_9(\alpha_3 + 2\alpha_5) \right] X_5 +$$

$$+ \left[a_1 a_7 \alpha_1 + a_1 a_8(\alpha_3 + 2\alpha_5) - a_1 a_9(\alpha_6 + \alpha_7) - \right.$$

$$\left. - a_8 a_9 \alpha_1^2 \right] X_4 +$$

$$+ \left[a_1 a_6 \alpha_1 + a_1 a_7(\alpha_3 + 3\alpha_5) + a_1 a_8(\alpha_6 + \alpha_7) - \right.$$

$$\left. - a_1 a_9 \alpha_8 - a_7 a_9 \alpha_1^2 - a_8 a_9 \alpha_1 (2\alpha_3 + 3\alpha_5) \right] X_3 +$$

$$+ \left[a_1 a_5 \alpha_1 + a_1 a_6(\alpha_3 + 2\alpha_5) + a_1 a_7(\alpha_6 + \alpha_7) + \right.$$

$$+ a_1 a_8 \alpha_8 - a_1 a_9 \alpha_9 - a_6 a_9 \alpha_1^2 -$$

$$- 2a_7 a_9 \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_5) - a_8^2 \alpha_1 \alpha_5 -$$

$$\left. - a_8 a_9 \left(\alpha_1 (2\alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_3(\alpha_3 + 2\alpha_5) \right) \right] X_2$$

$$Z_6 = a_1^3 X_6 - 2a_1^2 a_9 \alpha_1 X_6 +$$

$$+ \left[a_1^2 a_8 \alpha_1 - 2a_1^2 a_9(\alpha_3+2\alpha_5) + a_1 a_9^2 \alpha_1^2 \right] X_4 +$$

$$+ \left[a_1^2 a_7 \alpha_1 + a_1^2 a_8(\alpha_3+\alpha_5) - 2a_1^2 a_9(\alpha_6+\alpha_7) - \right.$$

$$\left. - 2a_1 a_8 a_9 \alpha_1^2 + a_1 a_9^2 \alpha_1 (2\alpha_3+3\alpha_5) \right] X_3 +$$

$$+ \left[a_1^2 a_6 \alpha_1 + a_1^2 a_7(\alpha_3+3\alpha_5) + a_1^2 a_8 \alpha_6 - \right.$$

$$- 2a_1^2 a_9 \alpha_8 - 2a_1 a_7 a_9 \alpha_1^2 - 4a_1 a_8 a_9 \alpha_1 (\alpha_3+\alpha_5) +$$

$$+ a_1 a_9^2 \left(\alpha_1 (2\alpha_6+\alpha_7) + \alpha_3(\alpha_3+2\alpha_5) \right) +$$

$$\left. + a_8 a_9^2 \alpha_1^3 \right] X_2$$

$$Z_5 = a_1^4 X_5 - 3a_1^3 a_9 \alpha_1 X_4 +$$

$$+ \left[a_1^3 a_8 \alpha_1 - a_1^3 a_9(3\alpha_3+5\alpha_5) + 3a_1^2 a_9^2 \alpha_1^2 \right] X_3 +$$

$$+ \left[a_1^3 a_7 \alpha_1 + a_1^3 a_8 \alpha_3 - a_1^3 a_9(3\alpha_6+2\alpha_7) - \right.$$

$$\left. - 3a_1^2 a_8 a_9 \alpha_1^2 + a_1^2 a_9^2 \alpha_1 (6\alpha_3+7\alpha_5) - a_1 a_9^3 \alpha_1^3 \right] X_2$$

$$Z_4 = a_1^5 X_4 - 4a_1^4 a_9 \alpha_1 X_3 +$$

$$+ \left[a_1^4 a_8 \alpha_1 - a_1^4 a_9(4\alpha_3+5\alpha_5) + 6a_1^3 a_9^2 \alpha_1^2 \right] X_2$$

$$Z_3 = a_1^6 X_3 - 5a_1^5 a_9 \alpha_1 X_2$$

$Z_2 = a_1^7 X_2$

Ha resultado que una condición necesaria y suficiente para que Z_1 sea un vector característico es que sea $a_1 \neq 0$.

Las constantes de estructura γ_i , $i=1,3,5,6,7,8,9$, vienen dadas por

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + 2\,\frac{a_9}{a_1^4}\,\alpha_1^2$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_1\,(5\alpha_3+6\alpha_5) + 5\,\frac{a_9^2}{a_1^6}\,\alpha_1^3$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + 4\,\frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_1\alpha_5$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\left[\alpha_1(6\alpha_6+6\alpha_7) + (\alpha_3+2\alpha_5)(3\alpha_3+5\alpha_5)\right] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^7}\,\alpha_1^2\,(21\alpha_3+41\alpha_5) + 14\,\frac{a_9^3}{a_1^8}\,\alpha_1^4$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_9}{a_1^7}\Big[7\alpha_1\alpha_8 + (\alpha_3+2\alpha_5)(3\alpha_6+2\alpha_7) + $$

$$ + (4\alpha_3+5\alpha_5)(\alpha_6+\alpha_7) \Big] + $$

$$ + \frac{a_9^2}{a_1^8}\Big[\alpha_1^2\,(28\alpha_6+27\alpha_7) + $$

$$ + \alpha_1(\alpha_3+2\alpha_5)\;(28\alpha_3+68\alpha_5) \Big] + $$

$$ + \frac{a_9^3}{a_1^9}\,\alpha_1^3\,(84\alpha_3+158\alpha_5) + 41\,\frac{a_9^4}{a_1^{10}}\,\alpha_1^5$$

2.3.- Clasificación en el caso $\alpha_4 = 0$.-

Como se hizo en el caso $\alpha_4 \neq 0$, se va a intentar ir descomponiendo la familia de álgebras filiformes de dimensión 9 correspondientes al caso $\alpha_4 = 0$ en subfamilias lo más simples posibles e incluso en álgebras concretas, que sean no isomorfas entre sí.

PROPOSICION 2.29

Las álgebras correspondientes a las leyes

$\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_5 \neq 0$

$\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_7 \neq 0$

$\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,\alpha_6,0,\alpha_8,\alpha_9)$

son no isomorfas entre sí.

Demostración :

En efecto , se tiene que en todos los casos es

$$M^1 = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$$

por ser álgebras filiformes , pero M^2 vale

$$M^2 = \{\alpha_5 X_2, \alpha_5 X_3 + \alpha_7 X_2\}$$

luego

$$M^2 = \{X_2, X_3\} \qquad \text{si } \alpha_5 \neq 0$$

$$M^2 = \{X_2\} \qquad \text{si } \alpha_5 = 0 \text{ y } \alpha_7 \neq 0$$

$$M^2 = \{0\} \qquad \text{si } \alpha_5 = 0 \text{ y } \alpha_7 = 0$$

#

2.3.1.- Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan $\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_5 \neq 0$

PROPOSICION 2.30

El álgebra cuya ley se expresa mediante

$$\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9) \quad \text{con } \alpha_5 \neq 0$$

es isomorfa a alguna de las álgebras cuyas leyes se expresan

a) $\mu(1,0,0,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 \neq 0$.

b) $\mu(0,0,1,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 \neq 0$

c) $\mu(0,0,0,0,1,1,\alpha_7,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_6 \neq 0$.

d) $\mu(0,0,0,0,1,0,1,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_7 \neq 0$.

e) $\mu(0,0,0,0,1,0,0,0,0)$ si en el

álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_7 = 0$.

que son no isomorfas entre sí

Demostración:

Se va a distinguir, en primer lugar, según valga $\alpha_1 \neq 0$ ó $\alpha_1 = 0$.

a) se obtiene si $\alpha_1 \neq 0$. En efecto, cuando $\alpha_1 \neq 0$ se puede buscar un cambio de vector característico en el cual sean nulos todos los coeficientes salvo a_9 y a_1, a los que se asignen los valores

$$a_9 = \frac{-\, a_1 \alpha_3}{2\, \alpha_1^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha_5}$$

con lo que se tiene que $\gamma_3 = 0$ y $\gamma_5 = 1$, respectivamente.

Si se hace un cambio de base de Jordan de $\mathrm{ad}X_1$ en el que se asignen a b_6, b_7 y b_8 los valores

$$b_6 = \frac{b_9 \alpha_9}{3\alpha_5} - \frac{2\, b_7 \alpha_7}{3\alpha_5}$$

$$b_7 = \frac{b_8 \alpha_8}{2\alpha_5}$$

$$b_8 = 0$$

se logra que sean $\beta_9 = \beta_8 = 0$. El resto de los coeficientes b_i se hacen nulos, salvo b_9. Como ahora se tenía que $\alpha_1 \neq 0$ se puede seleccionar como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_1}$$

para lograr que sea $\gamma_1 = 1$, con lo que se llega al álgebra de ley

$$\mu(1,0,0,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0) \quad \alpha_6,\alpha_7 \in \mathbb{C}$$

b) y c) se obtienen cuando $\alpha_1 = 0$ según sea $\alpha_3 \neq 0$ ó $\alpha_3 = 0$. Por valer $\alpha_1 = 0$, las expresiones que toman los γ_i quedan en la forma siguiente

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\,(\alpha_3+2\alpha_5)\,(3\alpha_3+5\alpha_5)$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_9}{a_1^7}\Big[(\alpha_3+2\alpha_5)\,(3\alpha_6+2\alpha_7) + $$

$$+ (4\alpha_3+5\alpha_5)\,(\alpha_6+\alpha_7)\Big]$$

sin que los β_i sufran modificación alguna.

Se obtiene, por tanto, que sólo se podrán anular, cuando no son nulos originalmente, γ_8 y γ_9 , lo que no tiene interés, puesto que se pueden anular siempre β_8 y β_9 por ser $\alpha_5 \neq 0$.

Se va a distinguir, entonces, según sea $\alpha_3 \neq 0$ ó

$\alpha_3 = 0$.

Si $\alpha_3 \neq 0$ (y, naturalmente, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_5 \neq 0$) se está en el caso b), en el que pueden elegirse b_5, b_7, b_8 y a_1 como antes y b_9 como

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_3}$$

para obtener $\beta_9 = 0$, $\beta_8 = 0$, $\gamma_5 = 1$, $\beta_3 = 1$, llegándose al álgebra de ley

$$\mu(0,0,1,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0) \qquad \alpha_6,\alpha_7 \in \mathbb{C}$$

Si, además de ser $\alpha_1 = 0$ fuese $\alpha_3 = 0$ pero $\alpha_6 \neq 0$, se puede elegir b_9 como

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6}$$

para obtener $\beta_6 = 1$ y el resto de coeficientes como en el caso b). Se llega así al caso c), el álgebra de ley

$$\mu(0,0,0,0,1,1,\alpha_7,0,0) \qquad \alpha_7 \in \mathbb{C}$$

d) y e) se obtienen caso de ser $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = 0$. Ahora se puede distinguir según sea $\alpha_7 \neq 0$ ó $\alpha_7 = 0$. En el primer caso se toma

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_7}$$

y se llega a d). El segundo caso es e).

Que ningún álgebra de la familia a) es isomorfa a ninguna de las otras sigue del hecho de que ninguna asignación de los a_i o b_j consigue anular β_1 o γ_1 si $\alpha_1 \neq 0$, como ocurre en a) y no en los demás casos.

Supuesto $\alpha_1 = 0$ ocurre otro tanto con β_3 y γ_3, que serán nulos o no según sea α_3 nulo o no. Luego, para ningún valor que se de a α_6 o α_7 se va a obtener en b) un álgebra isomorfa a alguna de c) ni a las álgebras d) o e).

Razonamientos análogos sobre β_6 y γ_6 ó β_7 y γ_7, respectivamente, justifican que para ningún valor de α_7 se obtendrá un álgebra de c) isomorfa a las d) o e) en el primer caso, y que d) y e) son no isomorfas en el segundo.

#

PROPOSICION 2.31

Las álgebras cuyas leyes son

$\mu(1,0,0,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0)$

$$\mu(1,0,0,0,1,\alpha'_6,\alpha'_7,0,0)$$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \alpha_6$ ó $\alpha'_7 \neq \alpha_7$

Demostración :

Si fuesen isomorfas habría de verificarse que

$$\beta_1 = b_9\alpha_1 = b_9 = 1$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_5 = \frac{\alpha_5}{a_1^3} = \frac{1}{a_1^3} = 1$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + 2\frac{a_9}{a_1^4}\alpha_1^2 = 2\frac{a_9}{a_1^4} = 0$$

de donde se deduce que son $b_9 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_9 = 0$ y, por tanto, se tiene que

$$\beta_6 = b_9\alpha_6 = \alpha_6$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + \frac{a_9}{a_1^5}\alpha_1(5\alpha_3+6\alpha_5) + 5\frac{a_9^2}{a_1^6}\alpha_1^3 = \alpha_6$$

$$\beta_7 = b_9\alpha_7 = \alpha_7$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4} + 4\,\frac{a_9}{a_1^5}\,\alpha_1\alpha_5 = \alpha_7$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado.

#

COROLARIO 2.32

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra de la familia cuyas leyes se expresan $\mu(1,0,0,0,1,\lambda_1,\lambda_2,0,0)$ con $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$ que se designará $\mu_9^{15,\lambda_1,\lambda_2}$ y viene dada por

$$\mu_9^{15,\lambda_1,\lambda_2} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 1 \le i \le 9$$

$$[X_5,X_9] = X_3$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_4 + X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda_2 X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_5 + 2X_4 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3$$

$$[X_8,X_9] = X_6 + 2X_5 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_4$$

con $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$.

PROPOSICION 2.33

a) Las álgebras cuyas leyes vienen dadas por

$$\mu(0,0,1,0,1,\alpha_6,\alpha_7,0,0)$$

$$\mu(0,0,1,0,1,\alpha'_6,\alpha'_7,0,0)$$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \omega\,\alpha_6$ ó $\alpha'_7 \neq \omega\,\alpha_7$ con $\omega^3 = 1$

Demostración :

Es análoga a otras anteriores.

#

COROLARIO 2.34

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra de la familia cuyas leyes se expresan $\mu(0,0,1,0,1,\lambda_1,\lambda_2,0,0)$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, que se designará $\mu_9^{16,\lambda_1,\lambda_2}$ y viene dada por

$$\mu_9^{16,\lambda_1,\lambda_2} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_5,X_9] = X_2$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = 2X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda_2 X_2$$

$$[X_7,X_9] = 3X_4 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_3$$

$$[X_8,X_9] = 3X_5 + (\lambda_1+\lambda_2)\ X_4$$

con $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

PROPOSICION 2.35

Las álgebras de leyes

$$\mu(0,0,0,0,1,1,\alpha_7,0,0)$$

$$\mu(0,0,0,0,1,1,\alpha'_7,0,0)$$

son no isomorfas si $\alpha'_7 \neq \alpha_7$

Demostración :

Es análoga a otras anteriores.

#

COROLARIO 2.36

Cada álgebra de la familia anterior es isomorfa a otra de la familia cuyas leyes se expresan $\mu(0,0,0,0,1,1,\lambda,0,0)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, que se designará en lo sucesivo mediante $\mu_9^{17,\lambda}$ y viene dada por

$$\mu_9^{17,\lambda} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + \lambda\, X_2$$

$$[X_7,X_9] = 2X_4 + (1+\lambda)\, X_3$$

$$[X_8,X_9] = 2X_5 + (1+\lambda)\, X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

COROLARIO 2.37

Se han obtenido, además, las álgebras cuyas leyes se expresan $\mu(0,0,0,0,1,0,1,0,0)$ y $\mu(0,0,0,0,1,0,0,0,0)$, que se designarán mediante μ_9^{18} y μ_9^{19}, respectivamente, y que vienen dadas por :

$$\mu_9^{18} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i<9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3 + X_2$$

$$[X_7,X_9] = 2X_4 + X_3$$

$$[X_8,X_9] = 2X_5 + X_4$$

$$\mu_9^{19} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i<9$$

$$[X_6,X_8] = X_2$$

$$[X_6,X_9] = X_3$$

$$[X_7,X_8] = X_3$$

$$[X_7,X_9] = 2X_4$$

$$[X_8,X_9] = 2X_5$$

2.3.2 Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan mediante $\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$ con $\alpha_7 \neq 0$

Las constantes de estructura β_i y γ_j que pueden ser no nulas ahora vienen dadas por

$$\beta_1 = b_9\alpha_1$$

$$\beta_3 = b_9\alpha_3$$

$$\beta_6 = b_9\alpha_6$$

$$\beta_7 = b_9\alpha_7$$

$$\beta_8 = b_9\alpha_8$$

$$\beta_9 = b_9\alpha_9 + \left(\frac{b_8^2}{b_9} - 2\ b_7\right)\ \alpha_7$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + 2\ \frac{a_9}{a_1^4}\ \alpha_1^2$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + 5\ \frac{a_9}{a_1^5}\ \alpha_1\alpha_3 + 5\ \frac{a_9^2}{a_1^6}\ \alpha_1^3$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + \frac{a_9}{a_1^6}\ [\alpha_1 (6\ \alpha_6 + 6\ \alpha_7) + 3\ \alpha_3^2] +$$

$$+ 21 \frac{a_9^2}{a_1^7} \alpha_1^2 \alpha_3 + 14 \frac{a_9^3}{a_1^8} \alpha_1^4$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_9}{a_1^7} [7 \alpha_1\alpha_8 + \alpha_3(7\alpha_6 + 6\alpha_7)] +$$

$$+ \frac{a_9^2}{a_1^8} [\alpha_1^2(28\alpha_6 + 27\alpha_7) + 28\alpha_1\alpha_3^2] +$$

$$+ \frac{a_9^3}{a_1^9} 84\alpha_1^3\alpha_3 + 41 \frac{a_9^4}{a_1^{10}} \alpha_1^5$$

PROPOSICION 2.38

El álgebra cuya ley se expresa mediante

$\mu(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, 0, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$ con $\alpha_7 \neq 0$

es isomorfa a alguna de las álgebras cuyas leyes se expresan como sigue

a) $\mu(1,0,0,0,0,\alpha_6,1,\alpha_8,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 \neq 0$.

b) $\mu(0,0,1,0,0,\alpha_6,1,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 \neq 0$.

c) $\mu(0,0,0,0,0,1,1,\alpha_8,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_6 \neq 0$.

d) $\mu(0,0,0,0,0,0,1,1,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_8 \neq 0$.

e) $\mu(0,0,0,0,0,0,1,0,0)$ si en el álgebra dada se tenía que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_8 = 0$.

que son no isomorfas entre sí.

Demostración :

Es siempre posible hacer un cambio de base de Jordan de adX_1 en el que seleccionen como b_7 , b_8 y b_9 los

$$b_8 = 0$$

$$b_7 = \frac{b_9 \ \alpha_9}{2 \ \alpha_7}$$

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_7}$$

con lo que se logra hacer $\beta_7 = 1$ y $\beta_9 = 0$.

Para elegir un cambio de vector característico adecuado se van a distinguir los casos en que sea $\alpha_1 \neq 0$ ó $\alpha_1 = 0$.

a) se obtiene si $\alpha_1 \neq 0$. En este caso se pueden asignar a a_1 y a_9 los valores

$$a_1 = \sqrt{\alpha_1}$$

$$a_9 = \frac{-a_1 \alpha_3}{2\,\alpha_1^2}$$

que hacen que sean $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_3 = 0$ con lo que se obtiene el álgebra de ley

$$\mu(1,0,0,0,0,\alpha_6,1,\alpha_8,0) \qquad \alpha_6, \alpha_8 \in \mathbb{C}$$

b), c), d) y e) se obtienen caso de ser $\alpha_1 = 0$. Ahora los γ_i $i = 1,3,6,7,8,9$ se transforman en

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_7 = \frac{\alpha_7}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + 3\,\frac{a_9}{a_1^6}\,\alpha_3^2$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + \frac{a_9}{a_1^7}\,\alpha_3(7\alpha_6 + 6\alpha_7)$$

lo que hace que se distingan los casos $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_3 = 0$

b) se obtiene si $\alpha_3 \neq 0$. Ahora es posible elegir como a_1 y a_9 los

$$a_1 = \sqrt[3]{\alpha_3}$$

$$a_9 = \frac{-\,a_1\alpha_8}{3\,\alpha_3^2}$$

para hacer que valgan $\gamma_3 = 1$ y $\gamma_8 = 0$, obteniéndose el álgebra de ley

$$\mu(0,0,1,0,0,\alpha_6,1,0,0) \qquad \alpha_6 \in \mathbb{C}$$

c),d) y e) se obtienen si $\alpha_3 = 0$. Ya no es posible anular ningún γ_i que no sea previamente nulo. Como γ_6 y γ_8 son los que quedadn por fijar se distinguirán los casos c)$\alpha_6 \neq 0$, d)$\alpha_6 = 0$ y $\alpha_8 \neq 0$ y e)$\alpha_6 = \alpha_8 = 0$.

En el primero de ellos, si se asigna a a_1 el valor

$$a_1 = \sqrt[4]{\alpha_6}$$

se obliga a ser $\gamma_6 = 1$, encontrándose el álgebra de ley

$$\mu(0,0,0,0,0,1,1,\alpha_8,0) \qquad \alpha_8 \in \mathbb{C}$$

En el segundo caso se toma como valor de a_1

$$a_1 = \sqrt[5]{\alpha_8}$$

para hacer que $\gamma_8 = 1$ y hallar el álgebra

$$\mu(0,0,0,0,0,0,1,1,0)$$

En el caso $\alpha_6 = \alpha_8 = 0$ se obtiene, evidentemente, el álgebra de ley

$$\mu(0,0,0,0,0,0,1,0,0)$$

Que ningún valor de $\alpha_6, \alpha_8 \in \mathbb{C}$ en a) ocasiona álgebras isomorfas a ninguna de las que se pueden obtener en los demás casos se deduce del hecho de ser

$$\beta_1 = b_9 \alpha_1$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

lo que impide que sean isomorfas álgebras para las que sea $\alpha_1 \neq 0$ con aquellas en las que es $\alpha_1 = 0$.

En el caso en que se tiene $\alpha_1 = 0$ resulta valer

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^2}$$

y como se tiene que

$$\beta_3 = b_9 \alpha_3$$

sigue, por un razonamiento análogo al anterior, que ningún álgebra obtenida en b) es isomorfa a ninguna de las c), ni a d), ni a e).

Razonamientos similares justifican que las álgebras d) y e) no son isomorfas ni entre sí ni a ninguna de las que se obtienen en c).

#

PROPOSICION 2.39

Las álgebras cuyas leyes son

$\mu(1,0,0,0,0,\alpha_6,1,\alpha_8,0)$

$\mu(1,0,0,0,0,\alpha'_6,1,\alpha'_8,0)$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \alpha_6$ ó $\alpha'_8 \neq \omega\, \alpha_8$ con $\omega^2 = 1$.

COROLARIO 2.40

Las leyes de las álgebras de la familia anterior se pueden expresar en la forma $\mu(1,0,0,0,0,\lambda_1,1,\lambda_2,0)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{C}_2$, que se designará por $\mu_9^{20,\lambda_1,\lambda_2}$ y viene dada por

$$
\begin{aligned}
\mu_9^{20,\lambda_1,\lambda_2} : \; & [X_1,X_i] = X_{i-1} \quad 3 \leq i \leq 9 \\
& [X_4,X_9] = X_2 \\
& [X_5,X_9] = X_3 \\
& [X_6,X_9] = X_4 + \lambda_1 X_2 \\
& [X_7,X_8] = X_2 \\
& [X_7,X_9] = X_5 + (\lambda_1+1)X_3 + \lambda_2 X_2 \\
& [X_8,X_9] = X_6 + (\lambda_1+1)X_4 + \lambda_2 X_3
\end{aligned}
$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{C}_2$.

PROPOSICION 2.41

Las álgebras cuyas leyes se expresan

$\mu(0,0,1,0,0,\alpha_6,1,0,0)$

$\mu(0,0,1,0,0,\alpha'_6,1,0,0)$

son no isomorfas si $\alpha'_6 \neq \alpha_6$.

COROLARIO 2.42

Las leyes de las álgebras de la familia anterior se pueden expresar en la forma $\mu(0,0,1,0,0,\lambda,1,0,0)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, que se designará por $\mu_9^{21,\lambda}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{21,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5, X_9] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_4 + (\lambda+1) X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_5 + (\lambda+1) X_4$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

PROPOSICION 2.43

Las álgebras cuyas leyes son

$\mu(0,0,0,0,0,1,1,\alpha_8,0)$

$\mu(0,0,0,0,0,1,1,\alpha'_8,0)$

son no isomorfas si $\alpha'_8 \neq \omega\, \alpha_8$ con $\omega^4 = 1$.

COROLARIO 2.44

Las leyes de las álgebras de la familia anterior pueden expresarse en la forma $\mu(0,0,0,0,0,1,1,\lambda,0)$ con $\lambda \in \mathbb{C}_4$, que se designará por $\mu_9^{29,\lambda}$ y que viene dada por

$$\mu_9^{22,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_6, X_9] = X_2$$

$$[X_7, X_8] = X_2$$

$$[X_7, X_9] = 2X_3 + \lambda X_2$$

$$[X_8, X_9] = 2X_4 + \lambda X_3$$

COROLARIO 2.45

Se han obtenido, además, las álgebras cuyas leyes vienen expresadas en la forma $\mu(0,0,0,0,0,0,1,1,0)$, y $\mu(0,0,0,0,0,0,1,0,0)$ que se designarán, respectivamente, mediante μ_9^{23} y μ_9^{24}, y que vienen dadas por

$$\mu_9^{23} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_7,X_8] = X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_3+ X_2$$

$$[X_8,X_9] = X_4+ X_3$$

$$\mu_9^{24} : [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3\le i\le 9$$

$$[X_7,X_8] = X_2$$

$$[X_7,X_9] = X_3$$

$$[X_8,X_9] = X_4$$

2.3.3.- Clasificación de la familia de álgebras cuyas leyes se expresan $\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,\alpha_6,0,\alpha_8,\alpha_9)$.

Las constantes de estructura β_i y γ_j , $1 \le i,j \le 9$ que pueden ser ahora, eventualmente , no nulas son las correspondientes a $i,j = 1,3,6,8,9$ que vienen dadas por las expresiones siguientes

$$\beta_1 = b_9\ \alpha_1$$

$$\beta_3 = b_9\ \alpha_3$$

$$\beta_6 = b_9\ \alpha_6$$

$$\beta_8 = b_9\ \alpha_8$$

$$\beta_9 = b_9\ \alpha_9$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + 2\ \frac{a_9}{a_1^4}\ \alpha_1^2$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4} + 5\ \frac{a_9}{a_1^5}\ \alpha_1\alpha_3 + 5\ \frac{a_9^2}{a_1^6}\ \alpha_1^3$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + 3\,\frac{a_9}{a_1^6}\,(2\alpha_1\alpha_6 + \alpha_3^2) + 21\,\frac{a_9^2}{a_1^7}\,\alpha_1^2\alpha_3 + $$

$$+ 14\,\frac{a_9^3}{a_1^8}\,\alpha_1^4$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + 7\,\frac{a_9}{a_1^7}\,(\alpha_1\alpha_8 + \alpha_3\alpha_6) + $$

$$+ 28\,\frac{a_9^2}{a_1^8}\,\alpha_1(\alpha_1\alpha_6 + \alpha_3^2) + 84\,\frac{a_9^3}{a_1^9}\,\alpha_1^3\alpha_3 + $$

$$+ 41\,\frac{a_9^4}{a_1^{10}}\,\alpha_1^5$$

PROPOSICION 2.46.-

El álgebra cuya ley se expresa mediante

$\mu(\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,\alpha_6,0,\alpha_8,\alpha_9)$

es isomorfa a alguna de las álgebras cuyas leyes se expresan

a) $\mu(1,0,0,0,0,1,0,\alpha_8,\alpha_9)$ si se tenía en el álgebra dada que $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_6 \neq 0$.

b) $\mu(1,0,0,0,0,0,0,1,\alpha_9)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_6 = 0$

y $\alpha_8 \neq 0$

c) $\mu(1,0,0,0,0,0,0,0,1)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$.

d) $\mu(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 = 0$.

e) $\mu(0,0,1,0,0,1,0,0,\alpha_9)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_6 \neq 0$.

f) $\mu(0,0,1,0,0,0,0,0,1)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$

g) $\mu(0,0,1,0,0,0,0,0,0)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_9 = 0$.

h) $\mu(0,0,0,0,0,1,0,1,\alpha_9)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$ y $\alpha_8 \neq 0$.

i) $\mu(0,0,0,0,0,1,0,0,1)$ si se tenía

que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$.

j) $\mu(0,0,0,0,0,1,0,0,0)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 = 0$.

k) $\mu(0,0,0,0,0,0,0,1,1)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 \neq 0$ y $\alpha_9 \neq 0$.

l) $\mu(0,0,0,0,0,0,0,1,0)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 \neq 0$ y $\alpha_9 = 0$.

m) $\mu(0,0,0,0,0,0,0,0,1)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$.

n) $\mu(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ si se tenía que en el álgebra dada eran $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\alpha_8 = 0$, y $\alpha_9 = 0$

que son no isomorfas entre sí.

Demostración :

Se va a distinguir según sea $\alpha_1 \neq 0$ ó $\alpha_1 = 0$.

a),b),c) y d) se obtienen si es $\alpha_1 \neq 0$. Es posible en este caso elegir siempre como a_1 y a_9 los

$$a_1 = \sqrt{\alpha_1}$$

$$a_9 = \frac{-a_1\alpha_3}{2\,\alpha_1^2}$$

para lograr que sean $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_3 = 0$.

Si fuese $\alpha_6 \neq 0$, eligiendo

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6}$$

se consigue que valga $\beta_6 = 1$, obteniéndose el caso a).

Si fuese $\alpha_6 = 0$ pero $\alpha_8 \neq 0$ se puede tomar como valor de b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_8}$$

para tener $\beta_8 = 1$ y encontrar las álgebras b).

Cuando valen $\alpha_6 = \alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$, se obtiene el álgebra c) sin más que asignar a b_9 el valor

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_9}$$

que hace que sea $\beta_9 = 1$.

Finalmente, si son $\alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$ se obtiene el álgebra d).

Cualquier isomorfismo entre álgebras de las a),b),c) o d) exige que sean, bien

$$\beta_1 = b_9\alpha_1 = b_9 = 1$$

bien

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3} + 2\,\frac{a_9}{a_1^4}\,\alpha_1^2 = 2\,\frac{a_9}{a_1^4} = 0$$

luego, han de valer $b_9 = 1$, $a_1^2 = 1$, de donde

$$\beta_6 = \alpha_6$$

$$\beta_8 = \alpha_8$$

$$\beta_9 = \alpha_9$$

$$\gamma_6 = \alpha_6$$

$$\gamma_8 = a_1\alpha_8 \qquad \text{con } a_1^2 = 1$$

$$\gamma_9 = \alpha_9$$

Luego, ningún álgebra de las de la familia a) es isomorfa a ninguna de las otras pues en a) es $\alpha_6 \neq 0$ y en las demás $\alpha_6 = 0$. Análogamente, ningún älgebra de las de la familia b) es isomorfa a c) o d) porque en b) se cumple que $\alpha_8 \neq 0$, y en las otras $\alpha_8 = 0$. Finalmente, c) y d) son álgebras no isomorfas porque en c) es $\alpha_9 = 1$ y en d) vale $\alpha_9 = 0$.

En el caso en que sea $\alpha_1 = 0$, las constantes de estructura que pueden ser no nulas son las γ_3, γ_6, γ_8 y γ_9 que vienen dadas por

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + 3\,\frac{a_9}{a_1^6}\,\alpha_3^2$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6} + 7 \frac{a_9}{a_1^7} \alpha_3\alpha_6$$

lo que justifica que se distingan los casos $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_3 = 0$

e), f) y g) se obtienen en el caso en que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 \neq 0$. Es posible ahora asignar a a_1 y a_9 los valores

$$a_1 = \sqrt[3]{\alpha_3}$$

$$a_9 = \frac{-a_1\alpha_8}{3\,\alpha_3^2}$$

para lograr que sean $\gamma_3 = 1$ y $\gamma_8 = 0$.

Si se tiene que $\alpha_6 \neq 0$ se puede elegir como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_6}$$

para lograr que sea $\beta_6 = 1$ y obtener el álgebra e).

Si se tiene que $\alpha_6 = 0$ pero $\alpha_9 \neq 0$ se puede elegir como b_9

$$b_9 = \frac{1}{\alpha_9}$$

para lograr que sea $\beta_9 = 1$ y obtener el álgebra f).

En el caso $\alpha_6 = 0 = \alpha_9$ se obtiene el álgebra g).

Que ninguna de las álgebras que se obtienen de e) puede ser isomorfa a las f) y g) sigue del hecho de que por ser

$$\beta_6 = b_9\alpha_6$$

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

no se pueden dar isomorfismos entre álgebras para las que $\alpha_6 \neq 0$ (como todas las de e)) y aquellas otras para las que $\alpha_6 = 0$ (como ocurre en f) y g)).

Que las álgebras f) y g) son no isomorfas sigue del hecho de que, si lo fueran, se tendría que

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5} + 3\,\frac{a_9}{a_1^6}\,\alpha_3^2 = 3\,\frac{a_9}{a_1^6} = 0$$

con lo que queda

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6}$$

y como es

$$\beta_9 = b_9\alpha_9$$

no pueden ser isomorfas pues en el álgebra f) se tiene que $\alpha_9 \neq 0$ mientras que en el álgebra g) es $\alpha_9 = 0$.

h), i), j), k), l), m) y n) se obtienen cuando valen $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. En este caso se tiene que

$$\gamma_6 = \frac{\alpha_6}{a_1^4}$$

$$\gamma_8 = \frac{\alpha_8}{a_1^5}$$

$$\gamma_9 = \frac{\alpha_9}{a_1^6}$$

Cuando se verifica que $\alpha_6 \neq 0$, se puede elegir una asignación conveniente de b_9 para lograr que valga $\beta_6 = 1$. En tal caso, si $\alpha_8 \neq 0$ se puede seleccionar a_1 para que sea $\gamma_8 = 1$ y obtener la familia de álgebra h). Cuando se tenga que $\alpha_8 = 0$ pero $\alpha_9 \neq 0$ se puede conseguir $\gamma_9 = 1$ eligiendo adecuadamente a_1, de donde se obtiene el álgebra i). El álgebra j) se halla en el caso en que sean $\alpha_8 = \alpha_9 = 0$.

Si es $\alpha_6 = 0$ se obtienen las álgebras k), l), m) o n) con asignaciones convenientes de b_9 y a_1. Estas álgebras corresponden, respectivamente, a los casos $\alpha_8 \neq 0$ y $\alpha_9 \neq 0$, $\alpha_8 \neq 0$ y $\alpha_9 = 0$, $\alpha_8 = 0$ y $\alpha_9 \neq 0$, y $\alpha_8 = 0 = \alpha_9$.

Que dos cualesquiera de las álgebras h), i), j), k), l), m) o n) son no isomorfas entre sí se deduce de que ahora se tiene que son :

$$\beta_i = b_9 \alpha_i \qquad i = 6,\ 8,\ 9$$

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j}{a_1^k} \qquad j = 6,\ 8,\ 9$$

con $k = 4$ para $j = 6$, $k = 5$ para $j = 8$ y $k = 6$ para $j = 9$.

Por tanto, no es posible encontrar isomorfismos entre álgebras para las que alguno de los α_6 , α_8 o α_9 sea no nulo en una de ellas y nulo en la otra y esa situación se da entre dos cualesquiera de las álgebras de los tipos h), i), j), k), l), m) y n).

Como se tiene que, para todas las álgebras de la familia

$$\mu\ (\alpha_1,\ 0,\ \alpha_3,\ 0,\ 0,\ \alpha_6,\ 0,\ \alpha_8,\ \alpha_9)$$

β_1 y γ_1 valen

$$\beta_1 = b_9\alpha_1$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}$$

ningún álgebra de los tipos a), b), c) o d), en los que es $\alpha_1 \neq 0$ puede ser isomorfa a ninguna otra de las demás, pues en las otras álgebras es $\alpha_1 = 0$.

Análogamente, como en todas las álgebras de los tipos e), f), g), h), i), j), k), l), m) y n) es $\alpha_1 = 0$, se tiene que

$$\beta_3 = b_9\alpha_3$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{a_1^3}$$

ningún álgebra de los tipos e), f) o g) puede ser isomorfa a ninguna de los demás tipos, pues en aquellas es $\alpha_3 \neq 0$ y en éstas se tiene que $\alpha_3 = 0$.

#

PROPOSICION 2.47.-

Las álgebras cuyas leyes se expresan

$\mu\ (1,0,0,0,0,1,0,\alpha_8,\alpha_9)$

$\mu\ (1,0,0,0,0,1,0,\alpha_8',\alpha_9')$

son no isomorfas si es $\alpha_8' \neq \omega\ \alpha_8$ con $\omega^2 = 1$ ó $\alpha_9' \neq \alpha_9$

PROPOSICION 2.48.-

Las álgebras de leyes

$\mu\ (1,0,0,0,0,0,0,1,\alpha_9)$

$\mu\ (1,0,0,0,0,0,0,1,\alpha_9')$

son no isomorfas si $\alpha_9' \neq \alpha_9$

PROPOSICION 2.49.-

Las álgebras de leyes

$\mu\ (0,0,1,0,0,1,0,0,\alpha_9)$

$\mu\ (0,0,1,0,0,1,0,0,\alpha_9')$

son no isomorfas si $\alpha_9' \neq \alpha_9$

PROPOSICION 2.50.-

Las álgebras de leyes

$\mu\ (0,0,0,0,0,1,0,1,\alpha_9)$

$\mu\ (0,0,0,0,0,1,0,1,\alpha'_9)$

son no isomorfas si $\alpha'_9 \neq \alpha_9$

COROLARIO 2.51.-

Se han obtenido así las álgebras o familias de álgebras cuyas leyes se expresan como

a) $\mu\ (1,0,0,0,0,1,0,\lambda_1,\lambda_2)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$ y $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

b) $\mu\ (1,0,0,0,0,0,0,1,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$

c) $\mu\ (1,0,0,0,0,0,0,0,1)$

d) $\mu\ (1,0,0,0,0,0,0,0,0)$

e) $\mu\ (0,0,1,0,0,1,0,0,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$

f) $\mu\ (0,0,1,0,0,0,0,0,1)$

g) $\mu\ (0,0,1,0,0,0,0,0,0)$

h) $\mu\ (0,0,0,0,0,1,0,1,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$

i) $\mu\ (0,0,0,0,0,1,0,0,1)$

j) $\mu\ (0,0,0,0,0,1,0,0,0)$

k) $\mu\ (0,0,0,0,0,0,0,1,1)$

l) $\mu\ (0,0,0,0,0,0,0,1,0)$

m) $\mu\ (0,0,0,0,0,0,0,0,1)$

n) $\mu\ (0,0,0,0,0,0,0,0,0)$

que se designarán, respectivamente, por $\mu_9^{25,\lambda_1,\lambda_2}$, $\mu_9^{26,\lambda}$, μ_9^{27}, μ_9^{28}, $\mu_9^{29,\lambda}$, μ_9^{30}, μ_9^{31}, $\mu_9^{32,\lambda}$, μ_9^{33}, μ_9^{34}, μ_9^{35}, μ_9^{36}, μ_9^{37}, μ_9^{38} y que vienen dadas por

$$\mu_9^{25,\lambda_1,\lambda_2}: \quad [X_1,X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4,X_9] = X_2$$

$$[X_5,X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4 + X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_3 + \lambda_1 X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_4 + \lambda_1 X_3 + \lambda_2 X_2$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{C}_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$$\mu_9^{26,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5 + X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_3 + \lambda X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{27} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5$$

$$[X_8, X_9] = X_6 + X_2$$

$$\mu_9^{28} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_4, X_9] = X_2$$

$$[X_5, X_9] = X_3$$

$$[X_6, X_9] = X_4$$

$$[X_7, X_9] = X_5$$

$$[X_8, X_9] = X_6$$

$$\mu_9^{29,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5, X_9] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3 + X_2$$

$$[X_7, X_9] = X_4 + X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_5 + X_4 + \lambda X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{30} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_5, X_9] = X_2$$

$$[X_6, X_9] = X_3$$

$$[X_7, X_9] = X_4$$

$$[X_8, X_9] = X_5 + X_2$$

$$\mu_9^{31} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$
$$[X_5, X_9] = X_2$$
$$[X_6, X_9] = X_3$$
$$[X_7, X_9] = X_4$$
$$[X_8, X_9] = X_5$$

$$\mu_9^{32,\lambda} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$
$$[X_6, X_9] = X_2$$
$$[X_7, X_9] = X_3 + X_2$$
$$[X_8, X_9] = X_4 + X_3 + \lambda X_2$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mu_9^{33} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$
$$[X_6, X_9] = X_2$$
$$[X_7, X_9] = X_3$$
$$[X_8, X_9] = X_4 + X_2$$

$$\mu_9^{34} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$
$$[X_6, X_9] = X_2$$
$$[X_7, X_9] = X_3$$

$$[X_8, X_9] = X_4$$

$$\mu_9^{35} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3 + X_2$$

$$\mu_9^{36} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_7, X_9] = X_2$$

$$[X_8, X_9] = X_3$$

$$\mu_9^{37} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

$$[X_8, X_9] = X_2$$

$$\mu_9^{38} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \le i \le 9$$

INDICE

INDICE

REFERENCIAS

REFERENCIAS

[1] **J. M. Ancochea** "Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7"
M. Goze
C. R. Soc. París I (17)-302 p.611-613 (1986)

[2] " "Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dim 7"
I.R.M.A. Strasbourg (1986)

[3] " "Classification des algèbres de Lie filiformes de dim 8"
Arch. Math. vol.50 p.511-525 (1988)

[4] " "Classificetion des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7"
Arch. Math. vol.52 p.175-185 (1989)

[5] E. Angelopoulos "Algèbres de Lie satisfaisant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, Der $\mathfrak{g}$ = ad $\mathfrak{g}$ " C. R. Acad. Sci. París t.106 série I p.523-525 (1988)

[6] A. Cerezo "Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6" Publi. Univ. Nice 27 (1983)

[7] J. Dixmier "Sur les représentations unitaries des groupes de Lie nilpotentes" Bull. Soc. Math. France 85 p.325-388 (1957)

[8] " Idem III Can. J. Math. 10 p.321-348 (1985)

[9] F. J. Echarte "Etude des algèbres de Lie rés. réelles qui admettent des ideaux unidimensionnels n'appartenant pas au centre" L.N.M. n°1209 p.152-156 (1987). Springer Verlag.

[10] M. Goze
K. Bouyakoub
"Sur les alg. de Lie munies d'une forme symplectique"
À paraître

[11] J. López Garzón
"Ideales conmut. en las alg. de Lie resol. y nilpot."
Tesis. Univ. Sevilla (1987)

[12] L. Magnin
"Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7"
J. Geom. and Phys. vol 3 n.1
p.119-144 (1986)

[13] V. V. Morosov
"Classificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dim.6" (original en ruso)
Isvestia Vyschih Uchebnyh Zavedenii
Matematika n.4 p.161-171 (1958)

[14] M. Romdhani
Thèse Univer. Nice (1985)

[15] E. N. Safiullina
"Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dim. 7"
(en ruso en el original)
Candidate's Works (1964)
Math. Mach. Phys. p.66-69
Izdan Kazan, Univ Kazan (1964)

[16] T. Skjelbred
T. Sund
"On the classification of nilpotent Lie algebras"
Univ. Oslo Math. n.8 (1977)

[17] K. A. Umlauf
"Über die Zusammentsung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null"
Leipzig (1891)

[18] M. Vergne
"Sur la varietè des lois nilpotentes"
Thèse 3è cycle. Paris (1966)

[19] G. Vranceanu
"Lecciones de Geom. Dif. 4"
Ed. Ac. Rom. Bucarest (1975)

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. José Ramon Gomez Martin titulada "Clasificación de las algebras de lie Nilpotentes complejas y filiformes de dimension 9" acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 27 de enero 1.990

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,