UNIVERSIDAD DE SEVILLA

" ALGUNOS TEOREMAS CLASICOS DE LA TEORIA DE LA MEDIDA USANDO LOS ESPACIOS DE STONE DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE "

Memoria que presenta
D.Antonio Aizpuru Tomás
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

A. Aizpuru T.

Antonio Aizpuru Tomás

V°B°Catedrático Director

Juan Romero

D.Juan Luis Romero Romero.
Catedrático de la
Universidad de Cádiz

V°B°Profesor Ponente

C. Piñeiro

D.Candido Piñeiro Gomez.
Profesor Titular de la
Universidad de Sevilla

Cádiz,Octubre de 1.986

A Mara

Quiero expresar mi mas profundo agradecimiento al profesor Juan Luis Romero Romero director de esta memoria por sus enseñanzas, su estímulo y su cariñosa e infinita paciencia.
Tambien quiero agradecer la ayuda del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, en especial la de los profesores Francisco Benítez Trujillo y José Ramirez Labrador.
Agradezco a la Srta. Ana Gomez Parra la la cuidadosa mecanografía del manuscrito original.

INDICE

INTRODUCCION

En esta memoria estudiamos algunos resultados clásicos de la teoría de la medida, tales como los teoremas de Vitali-Hahn-Saks, Nikodym, Grothendieck y Rosenthal, cuya evolución describimos en las líneas que siguen.

El primero de ellos fue el resultado de los trabajos de Vitali (1.907), Hahn (1.922) y Saks (1.933), cuya primera formulación para medidas reales numerablemente aditivas sobre un σ-álgebra, fue la siguiente:

> "Sea Σ un σ-álgebra de Boole y sean μ_n con $n\in\omega$ y μ medidas numerablemente aditivas en Σ tales que cada μ_n es μ-contínua, entonces se tiene que
> $$\lim_{\mu(E)\to 0} \mu_n(E) = 0, \text{ uniformemente en } n."$$

Como se sabe, es un proceso permanente en la evolución de las matemáticas el estudiar la extensión de un resultado a otras condiciones, diferentes de las se utilizaron para obtener el resultado en cuestión. En este sentido, las extensiones del teorema de Vitali-Hahn-Saks (VHS), fueron las siguientes:

Se enunció en primer lugar para medidas numerablemente aditivas con valores en un espacio de Banach y, más tarde, Andó en el año 1.961 demuestra el teorema (VHS) para medidas acotadas y finitamente aditivas sobre un σ-álgebra. Nueve años más tarde, J.K. Brooks y R.S. Jewett, lo demuestran para medidas vectoriales fuertemente aditivas. También Darst en 1.973 da una demostración del teorema para funciones de conjunto fuertemente aditivas.

Posteriormente, se observa que ciertas álgebras de Boole no σ-completas, verifican el teorema de (VHS), denominándose estas álgebras, (VHS).

Con el teorema de Brooks-Dinculeanu y diversos trabajos como los de J. Diestel, B. Faires y W. Schachermayer, es posible obtener versiones equivalentes al teorema de (VHS) en términos del espacio de las funciones reales y contínuas sobre el Stone S del álgebra, que aquí denotamos por C(S), en el cual es denso el espacio $C_o(S)$, de las funciones simples. Cabe destacar la siguiente versión de (VHS):

> "F es álgebra (VHS) si y sólo si toda sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega} \subset C(S)^*$, que converge en la topología $\sigma(C(S)^*, C_o(S))$, lo hace también en la topología débil $\sigma(C(S)^*, C(S)^{**})$."

Respecto al segundo de los teoremas citados, el teorema de Nikodym, este autor demuestra que para una sucesión de medidas escalares numerablemente aditivas sobre σ-álgebras, la acotación puntual sobre los elementos del σ-álgebra implica la acotación uniforme de la sucesión de medidas. Este resultado fue posteriormente extendido por Grothendieck en 1.957, para medidas vectoriales acotadas y, a partir de éste, resultados similares se han obtenido por diversos caminos, entre los que cabe destacar los de Brooks-Jewett (1.970) y Darst (1.973) por el uso de la clásica técnica de las "jorobas deslizantes" (Slinding hump).

A partir del decubrimiento de álgebras no σ-completas, en las que se verifica el teorema de Nicodym, se definen las álgebras con el mismo nombre y, más tarde, se da una caracterización a destacar,por Schachermayer en 1.978, de las álgebras Nikodym (N), en términos del espacio normado $C_o(S)$, a saber,

" Un álgebra F es (N) si y sólo si el espacio $C_o(S)$ es tonelado."

El origen del tercer teorema citado, el teorema de Grothendieck, está en el descubrimiento por parte de este autor de que en el dual de $L^\infty(\mu)$, la convergencia débil y la *-débil coinciden; demostrando que en $C(S)^*$, para S compacto, T_2 y en el que todo abierto tiene clausura abierta (Stoniano), sucede lo mismo. Este resultado será ademas , válido también para cuando S es el espacio de Stone de un álgebra σ-completa. En general, a todo espacio en el que en su dual la convergencia débil y *-débil coinciden, es denominado espacio de Grothendieck. Igual nombre reciben las álgebras tales que C(S) es Grothendieck (G); lo que es equivalente a que toda sucesión puntualmente convergente en el álgebra y acotada, es uniformemente fuertemente aditiva. (En el trabajo de W. Schachermayer 1978 pueden verse diversas carac-

terizaciones de espacio Grothendieck y de álgebra Grothendieck
En esta memoria tambien nos ocupamos de la propiedad Rosenthal, originada por el resultado dado por H.P.Rosenthal en 1.970:
Si S es un espacio Stoniano entonces todo operador lineal,continuo y no débil compacto de C(S) en un espacio de Banach arbitrario X fija copia de l^{∞}. Posteriormente se descubre que álgebras que no son ni siquiera σ-completas poseen un espacio de Stone con esta propiedad,definiendose a estas álgebras como álgebras Rosenthal(R)
Las relaciones entre las diversas propiedades aqui mencionadas estan expuestas en los preliminares de esta memoria.
A partir de la situacion que hemos descrito,se abre un gran interrogante que ha ocupado a diversos autores y que es la principal motivación de esta memoria:dada un álgebra de Boole F ¿cual es la condición necesaria y suficiente,expresada en términos de propiedad algebraica interna o topológica de su espacio de Stone,para que F sea (VHS) (resp. (N),(G),(R))?.
Las primeras propiedades que aperecieron,en la dirección de dar respuesta a la anterior pregunta,podrían clasificarse en propiedades de supremo y propiedades de separación.Entre las propiedades de supremo cabe destacar la propiedad (E) de Schachermayer(1.978) y la propiedad subsecuencialmente completa de Haydon(1.981),tambien tiene gran interes la propiedad up-down-semi-complete (udsc) que Dashiell (1.981) estudia combinandola con una propiedad adicional.Entre las propiedades de separación cabe destacar la propiedad de Seever(1.968),

la propiedad (f) de Molto(1.981) y la propiedad de interpolación subsecuencial (IS) de Freniche(1.983),todas estas propiedades(cuyas relaciones entre si estan descritas en los preliminares) ofrecen condiciones suficientes para que un álgebra de Boole sea (VHS), el problema es obtener condiciones necesarias,expresada en términos de propiedad algebraica interna,de (VHS) (resp.(N),(G),(R)).
En principio se penso que las condiciones que podian caracterizar las propiedades (VHS),(N),(G) y (R) eran las de separación,pero en este sentido el trabajo de Dashiell(1.981) primero y las observaciones de Freniche(1.985) despues supusieron la definitiva perdida de esta esperanza,ya que se consiguio un álgebra de Boole (R) y (VHS) donde había sucesiones de disjuntos carentes de cualquier propiedad de separación.
En el primer capítulo de esta memoria,se hace uso de lo que a nuestro entender es la condición necesaria mas elemental para que un álgebra de Boole sea (VHS) (resp.(N),(G),(R))y que es que el espacio de Stone del álgebra carezca de sucesiones convergentes distintas de las triviales,aislamos independientemente esta propiedad,introduciendo el concepto de k-álgebra de Boole,que caracterizamos y estudiamos.
En el segundo capítulo estudiamos las álgebras de Boole que poseen una leve propiedad de separación en sus sucesiones de disjuntos,propiedad que aqui denominamos subJ,y demostramos que resultados preliminares (como la construcción de las jorobas deslizantes)que se han utilizado para demostrar que un álgebra es (VHS) se dan en las álgebras subJ,el capítulo continua con el estudio de propiedades de separación en las sucesiones de clopenes finitos que garantizan que éstas

puedan ser encajadas término a término en una sucesión de clopenes infinitos y disjuntos,usando estos resultados se demuestra que en el álgebra de los subconjuntos de $[0,1]$ que son simultaneamente F_{σ} y G_{δ} existen sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos sin la propiedad subJ (la sucesión que se conocía sin la propiedad subJ era de clopenes finitos).A continuación las propiedades: uniformemente fuertemente aditiva y uniformemente acotada de una sucesión de medidas son caracterizadas por sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos.Como consecuencia,obtenemos que basta imponer las oportunas condiciones a este tipo de sucesiones para el estudio de las propiedades (G),(N),(VHS),como corolario se deduce que estas propiedades pueden ser caracterizadas por los abiertos F_{σ} y los cerrados G_{δ} que cortan al núcleo perfecto del espacio de Stone del álgebra.
En el tercer capítulo se dan caracterizaciones de las propiedades uniformemente fuertemente aditiva y uniformemente acotada de una sucesión de medidas en términos locales en primer lugar para los puntos de núcleo perfecto (filtros máximales no principales) y en segundo lugar para los puntos del nucleo perfecto que no son P-puntos. Esta última caracterización será de gran utilidad para la obtención en el próximo capítulo de una condición en álgebras de Boole que es suficiente para (N) pero no lo es para (G).El capítulo se completa con un ejemplo,tomado de Schachermayer(1.978),de álgebra de Boole sin ninguna de las propiedades (N),(G),(VHS),(R) pero tal que el álgebra de los clopenes del núcleo perfecto (es el cociente por el ideal de los finitos) es un álgebra de Boole con todas esas propiedades.Damos tambien un ejemplo,tomado de Freniche (1.983),de álgebra

de Boole tal que todo filtro máximal no principal (y por tanto punto de P),excepto uno,posee un elemento tal que la traza del álgebra en él es un álgebra de Boole con todas las propiedades citadas anteriormente,la consecuencia de la existencia del excepcional filtro máximal no principal es que el álgebra de Boole carezca de la propiedad (G).Se concluye el capítulo con un resultado que muesta que si en la situación anterior se hubiese tenido la propiedad subJ para las sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos entonces el álgebra en cuestión hubiese tenido las propiedades (N),(G),(VHS)y (R).

Schachermayer(1.978) demuestra que el álgebra J de los medibles Jordan en $[0,1]$ es udsc y (N) pero no es (G),se obtiene asi el primer ejemplo de álgebra (N) que no es (G)y cuya importancia resaltan Diestel y Uhl(1983) en la comunicacion "Progress in vector measures 1.977-1.983".Posteriormente se paso a abordar el problema de que si toda álgebra (G) era o no era (N) es decir:¿las propiedades (G) Y (VHS) son equivalentes?,este problema es tratado en el trabajo de Talagrand(1.984) que haciendo uso de la hipotesis del continuo obtiene un álgebra que es (G) y no es (N).Es evidente que despues de estos resultados es obligado abordar las siguientes cuestiones: 1)Obtener una condición que sea suficiente para (N) pero no lo sea para (G) 2)obtener un ejemplo de álgebra que sea (G) y no sea (N),sin hacer uso de la hipotesis del continuo ,si fuese posible 3) obtener una condición que sea suficiente para (G) pero no lo sea para (N).

Los dos últimos problemas parecen de alejada solución y el primer problema es el que abordamos y solucionamos en el cuarto capítulo que esta motivado por la condición adicional (que para abreviar aquí será denotada por aD) que Dashiell |1981| añade a la condición up-down-semi-complete (u.d.s.c.) para obtener una condición que implique las propiedades (R) y (N).En primer lugar se va a estudiar una leve condición adicional (que aquí es denotada por (JL)) de expresión algebraica o topológica y que añadida a la condición (u.d.s.c.) nos da una condición suficiente para la propiedad (N). Con el posterior estudio del álgebra J de los medibles según Jordan del intervalo [0,1] viene a demostrarse que la condición (u.d.s.c.) junto con la JL no son suficientes para garantizar la propiedad (G). Se obtiene así la primera condición que conocemos que es suficiente para (N) y que no lo es para (G). La condición (aD),que es de tipo funcional es descompuesta en otras dos condiciones funcionales : la (aD') y la (aD") de forma que las dos propiedades juntas equivalen a la propiedad (aD) y la primera de ellas es equivalente a la propiedad (JL). De esta forma se detecta la diferencia fundamental que existe entre el álgebra de los subconjuntos de [0,1] que son simultaneamente F_σ y G_δ (que Dashiell prueba que tiene las propiedades (u.d.s.c) y (aD)) y el álgebra de los subconjuntos medibles-Jordan de [0,1] . Esta diferencia estriba en que la primera posee la propiedad (aD") mientras que la segunda no la tiene. Sin embargo, ambas poseen la propiedad (aD'). Es,pues, esta diferencia la responsable de que la primera tenga las propiedades (R) y (N) y de que la segunda tenga la propiedad (N) pero no la (G). El Capítulo finaliza con el estudio de algunas propiedades alternativas a la (aD) y que añadidas a la propiedad (u.d.s.c.) producen los mismos resultados que (u.d.s.c.) + (aD). Una de estas propiedades es una versión subsecuencial de la (aD) y que es denotada por (aDs). Nos queda abierto el problema de separar, a través de ejemplos concretos, estas últimas propiedades.

El quinto capítulo comienza con algunos resultados válidos para álgebras de Boole con la condición (c.c.c.). Esto nos va a permitir establecer algunas relaciones entre las propiedades (E) y (f) y las propiedades (SC) y (IS), similares a las que se conocen entre las propiedades (σ-completa) y (S). Como ejemplo de la utilidad de este tipo de relaciones, obtenemos ejemplos de álgebras de Boole que teniendo la segunda propiedad no tengan la primera correspondiente.

Se observa que las propiedades (VHS),(G) y (N) pueden ser caracterizadas a través de las álgebras de clopenes de los soportes de las medidas sobre F y,en definitiva , por subconjuntos cerrados del espacio de Stone que sean simultaneamente (c.c.c.) y (KL).Esta caracterización, unida a los resultados anteriores nos proporciona una nueva via de demostración de la implicación (IS)$\Longrightarrow$(VHS).Además, como consecuencia de los primeros resultados se prueba que las álgebras de Boole con "buenas" propiedades de interpolación tienen álgebras soportes con buenas propiedades de supremo.

El Capítulo se completa aislando un tipo particular de subálgebra (las subálgebras sucesionales) y se discute la posibilidad de que las prpiedades de interpolación (S),(f) y (IS) sean caracterizadoras de propiedades similares a las (R), (VHS),(G) y (N) pero más fuertes; éstas son aquí definidas a través de las subálgebras sucesionales.

PRELIMINARES Y NOTACIONES

Tratamos de incluir aquí definiciones y resultados que pue dan ser útiles para la lectura de los restantes capítulos. Aunque alguno de los resultados que aqui aparecen no son usados explícitamente, los hemos incluido por razones de claridad. Otros resultados que podrian haber sido incluidos en este apartado se han situado en el capítulo donde se utilizan.

En esta memoria, $\mathcal{F}$ denotará un álgebra de Boole, y $S_{\mathcal{F}}$, ó simplemente S, si no ha lugar a confusión, denotará su correspondiente espacio de Stone (Cf., 5). Es bien conocido que S es un espacio topológico compacto, T_2, o-dimensional y que la familia de todos los "clopenes" (conjuntos simultaneamente abiertos y cerrados) de S constituyen un álgebra de Boole de subconjuntos de S que es isomorfa a $\mathcal{F}$. Por tanto, el estudio de las álgebras de Boole se reduce, en cierta medida, al correspondiente estudio de las álgebras de "clopenes" de un espacio topológico compacto T_2 o-dimensional. Cuando no haya lugar a confusión, un elemento de F será considerado como un "clopen" del espacio de Stone S de F. Recordemos también que, como conjunto, S es el conjunto de los filtros maximales de F. Además, si $A \in F$, el correspondiente "clopen" de S es el conjunto de los filtros maximales en F que tienen a A como elemento.

En lo que sigue supondremos que F es un álgebra de Boole no finita.

Sea ahora X un espacio topológico. Diremos que $M \subset X$ es <u>denso en si mismo</u> si $M \subset M^d$, es decir, si todo punto de M es un punto de acumulación de M. En este caso M^a, el conjunto de los puntos aislados de M, es vacio y se tiene que $\bar{M} = M^d$ (pues $\bar{M} = M^d \cup M^a$). Un conjunto cerrado y denso en si mismo será llamado <u>conjunto perfecto</u>. Asi pues, $M \subset X$ cerrado es perfecto si y solo si $M = M^d$.

Por razones de completitud incluimos aqui diversos resultados que pueden encontrarse en cualquier buen libro sobre topología. (Cf., por ejemplo, Kuratowski, 1.966)

a.- La unión de conjuntos densos en si mismo es un conjunto denso en si mismo.

b.- Sea $M \subset X$ un conjunto denso en si mismo. Para todo abierto $A \subset X$ se verifica que $A \cap M$ es denso en si mismo. Si $N \subset M$ es denso en M entonces N es denso en si mismo.

c.- Si M es denso en X y fronterizo (i.e. $\overset{\circ}{M} = \phi$) entonces es denso en si mismo.

d.- Para cualquier $M \subset X$, se verifica que $\mathrm{int}(\mathrm{Fr}(M))$ y $M \cap \mathrm{int}(\mathrm{Fr}(M))$ son densos en si mismo.

Diremos que $M \subset X$ es <u>diseminado</u> (ó raro) si $\overset{\circ}{\bar{M}} = \phi$. Diremos que $M \subset X$ es <u>disperso</u> si no contiene subconjuntos que sean densos en si mismo, es decir: si para cualquier $N \subset M$ existe un $x \in N$ y un V_x entorno de x tal que $V_x \cap N = \{x\}$.

Los siguientes resultados son también bien conocidos (Cf., Kuratowski,1.966).

A.- Todo subconjunto de un conjunto disperso es disperso.

B.- Si M es denso en si mismo y $N \subset M$ es disperso entonces N es diseminado y $M \setminus N$ es denso en si mismo.

C.- La unión finita de conjuntos dispersos es un conjunto disperso.

D.- La frontera de un conjunto disperso es diseminada.

E.- Cada conjunto disperso es la unión de un abierto y de un diseminado (o la diferencia entre un cerrado y un diseminado).

F.- Si $M \subset X$ es disperso y fronterizo entonces M es diseminado.

G.- $M \subset X$ es disperso si y solo si para cada conjunto perfecto $P \subset X$ se verifica que $M \cap P$ es diseminado en P (para la topología inducida en P).

El siguiente resultado será usado frecuentemente en lo que sigue.

PROPOSICION 1.1

Cada espacio topológico es la unión de dos subconjuntos disjuntos, uno cerrado perfecto y otro abierto disperso.

DEMOSTRACION

Sea Q la unión de los subconjuntos de X que sean densos en si mismo. Sea $P = \bar{Q}$. Es claro que P es cerrado y perfecto. Sea $D = X\setminus P$. D es abierto y como cualquier $M \subset D$ cumple que $M \cap Q = \phi$ se tiene que M no puede ser denso en si mismo.

///

El conjunto P (resp. D) de la demostración anterior será denominado en lo sucesivo "núcleo perfecto de X" (resp. "núcleo disperso de X").

PROPOSICION 1.2

Sea X un espacio topológico compacto, T_2, disperso e infinito. Se verifica que X es secuencialmente compacto.

DEMOSTRACION

Sea $H = \{X_n, n\varepsilon\omega\} \subset X$ una sucesión de puntos de X distintos dos a dos. Por ser X compacto $H^d \neq \phi$. Por ser X disperso H^d no es denso en si mismo. Por tanto existe un $x \varepsilon H^d$ y un entorno ce rrado V_x de x tales que $V_x \cap H^d = \{x\}$. Pero podemos escribir $V_x \cap H = \{X_{nj}, j\varepsilon\omega\}$. La sucesión $\{X_{nj}, j\varepsilon\omega\} \subset H$ tiene a x como único punto de acumulación pues $\{X_{nj}, j\varepsilon\omega\}^d \subset H^d$ y $\{X_{nj}, j\varepsilon\omega\}^d \subset V_x$. Por tanto $\{X_{nj}, j\varepsilon\omega\}^d \subset V_x \cap H^d = \{x\}$. Esto prueba que $\lim_{j\to\infty} X_{nj} = x$.

///

Exponemos a continuación definiciones y resultados sobre la Teoría de la Medida y más concretamente sobre los Teoremas de Vitali-Hahn-Saks (VHS),de Grothendieck (G) y de Nikodym (N).Estos teoremas se estudiaron en principio para álgebras σ-completas y medidas numerablemente aditivas.Posteriormente estos teoremas se generalizaron a otros tipos de situaciones. Nos centraremos en medidas escalares reales.Entendemos por medida en un Algebra de Boole F a una aplicación $\mu: F \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que : i).-$\mu(\phi)=0$, ii).- $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$ si A y B son elementos disjuntos de F .Mientras no se diga lo contrario, se supone que μ es una medida acotada, es decir: $\sup\{|\mu(A)| : A\varepsilon F\} < \infty$,aunque a veces lo explicitemos.

El espacio de las funciones medibles de F se entenderá que es el espacio de Banach de las funciones continuas y reales sobre el espacio de Stone S de F , es decir $C(S)$ con la norma habitual. En $C(S)$ es denso el espacio normado de las funciones simples. Toda medida en F es un elemento del dual $C(S)^*$ y puede ser interpretada como una medida de Radon en S (medida de Borel regular). La norma de un elemento $\mu\varepsilon C(S)^*$ es la variación de μ en S.

El soporte $car(\mu)$ de una medida μ en F es, por definición:

$$car(\mu) = \{x\varepsilon S: \exists\, A\varepsilon F \text{ con } x\varepsilon A \text{ y } |\mu|(A)>0\}$$

Este conjunto es cerrado y $S\setminus car(\mu)$ es el abierto $\cup\{A\varepsilon F : |\mu|(A)=0\}$.

Dado un ideal I en F, el cerrado $Q=(\bigcup_{A\varepsilon I} A)^c$ en S es el espacio de Stone del álgebra cociente F/I y recíprocamente, todo cerrado Q en S es el espacio de Stone de un álgebra cociente F/I donde I es el ideal $I=\{A\varepsilon F : A\cap Q=\phi$. En algunas ocasiones, el álgebra de los clopenes de un cerrado Q de S será denotado por F_Q (es la traza de F en Q). Si Q es un clopen de S entonces se verifica que $F_Q=\{A\varepsilon F, A\subset Q\}$.

Las siguientes definiciones y resultados pueden encontrarse en Bhaskara Rao-Bhaskara Rao 1983.

DEFINICION

Sea $\mu: F \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida. Se dice que $A\varepsilon F$ es un μ-átomo si para cada B en F con $B\subset A$ se cumple $\mu(B)=\mu(A)$ o $\mu(B)=0$. Es decir μ restringida a F_A es bi-valorada. Si μ no tiene μ-átomos, diremos que μ es no atómica.

Se dice que μ es fuertemente continua si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ de S y formada por elementos de F tal que $|\mu(A_i)|<\varepsilon$ para $i=1,2,\ldots,n$.

PROPOSICION

Todo álgebra de Boole no atómica y numerable es isomorfa al álgebra de los clopenes de $\{0,1\}^\omega$ (cubo de Cantor).

Este último resultado puede verse en Outerelo-et-al 1975 , Vol 5, pág 53), donde se demuestra que todos los compactos T_2 0-dimensionales, perfectos y metrizables son homeomorfos entre sí.

DEFINICION

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole. Una colección numerable $\mathcal{G}$ de elementos de $\mathcal{F}$ se dice que es un árbol si se puede escribir en la forma

$$\mathcal{G} = \{F_{i_1 \ldots i_k} : (i_1, \ldots i_k) \in \{0,1\}^k, \quad k \in \omega\}$$

y además se verifica

1.- $F_0 \vee F_1 = S, \quad F_0 \wedge F_1 = \phi$

2.- $F_{i_1 \ldots i_{k-1}0} \vee F_{i_1 \ldots k_{k-1}1} = F_{i_1 \ldots i_{k-1}}$

$F_{i_1 \ldots i_{k-1}0} \wedge F_{i_1 \ldots i_{k-1}1} = \phi$

TEOREMA

A.- Son equivalentes las siguientes propiedades sobre $\mathcal{F}$.

1.- $\mathcal{F}$ es superatómica

2.- S es disperso

3.- $\mathcal{F}$ no tiene árbol

4.- No existe una medida acotada y no atómica en $\mathcal{F}$.

A'.- Son equivalentes las siguientes propiedades sobre $\mathcal{F}$.

1.- $\mathcal{F}$ no es superatómica

2.- S contiene un conjunto perfecto

3.- $\mathcal{F}$ contiene un árbol

4.- $\mathcal{F}$ tiene un subálgebra $\mathcal{F}_o$ numerable no atómica.

5.- $\mathcal{F}$ tiene un ideal I tal que $\mathcal{F}/I$ no es atómica

6.- Existe sobre $\mathcal{F}$ una medida positiva acotada y no atómica

B.- Las cuatros condiciones siguientes sobre F son equivalentes

1.- F es no atómica

2.- S es perfecto.

Si $M = \{\mu\varepsilon C(s)^*$: si $A\varepsilon F$ $0\leq\mu(A)\leq 1$, $\mu(s) = 1\}$ y $M_1 = \{\mu\varepsilon M$; μ es no atómica$\}$ y $M_2 = \{\mu\varepsilon M$; μ es fuertemente continua$\}$ entonces esas dos condiciones son mutuamente equivalentes a

3.- M_2 es denso en M (dotado con la top *-débil)

4.- M_1 es denso en M

Observese que para obtener un álgebra cociente no atómica basta tomar el álgebra de los clopenes del núcleo perfecto P. En esta situación el álgebra que genera un árbol de F es un subálgebra F_0 de F que es numerable e isomorfa al álgebra de los clopenes de $\{0,1\}^\omega$, puesto que este álgebra es el algebra generada por el árbol

$$F_{i_1 \ldots i_k} = \{i_1\}x \ldots x\{i_k\} x \{0,1\}x \ldots x\{0,1\}x \ldots$$

A un álgebra de Boole que no sea ni atómica ni no atómica la llamaremos mixta. Escribiendo los resultados anteriores en el contexto de la descomposición perfecta-dispersa del espacio de Stone de un álgebra de Boole se tiene:

PROPOSICION

1.- F es superatómica si y solo si $P = \phi$

2.- F es no atómica si y solo si $D = \phi$

3.- F es atómica no superatómica si y solo si $P \neq \phi$ y D es denso en S (o, equivalentemente, P es fronterizo)

4.- F es mixta si y solo si $P \neq \phi$, $D \neq \phi$, $\bar{D} \neq S$.

DEFINICION

Sea $(\mu_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{F}$. Diremos que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva (u.f.a.) en $\mathcal{F}$ si y solo si para toda sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ de disjuntos en $\mathcal{F}$ se verifica que $\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_i) = 0$ uniformemente en $n\in\omega$.

Las siguientes definiciones aparecen en Shachermayer 1978 . En Diestel-Uhl 1977 aparece una breve nota histórica sobre la evolución de los Teoremas de (VHS),(G) y (N) antes mencionados.

DEFINICION

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Vitali-Hahn-Saks (VHS) si para toda sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\omega}$ que sea puntualmente convergente en $\mathcal{F}$ se verifica que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es u.f.a.

DEFINICION

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Grothendieck (G) si toda sucesión acotada de medidas que sea puntualmente convergente en $\mathcal{F}$ es u.f.a.

Nota: se obtienen definiciones equivalentes si se sustituye la frase "puntualmente convergente" por "puntualmente convergente a cero en $\mathcal{F}$ " en las dos definiciones anteriores

DEFINICION

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Nikodym (N) si toda sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\omega}$ que sea puntualmente acotada en $\mathcal{F}$ es necesariamente uniformemente acotada en $\mathcal{F}$ (es decir, la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ está acotada en $C(S)^*$).

DEFINICION

Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Orlicz-Pettis (OP) si toda medida $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow X$,que toma valores en un espacio de Banach arbitrario X, que sea σ-aditiva respecto a la topología débil de X es también σ-aditiva respecto a la topología de la norma en X.

DEFINICION

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Rosenthal (R) si para todo espacio de Banach X y todo operador lineal y continuo $T:C(S)\longrightarrow X$ que no sea débilmente compacto se verifica que T fija una copia de l^∞ (es decir: existe una aplicación $j:l^\infty\longrightarrow C(S)$ tal que $T\circ j$ es un isomorfismo).

En Schachermayer 1978 se exponen otras caracterizaciones de estas propiedades, así como de sus relacio nes entre si.Cabe destacar el resultado pionero de Diestel que afirma que (VHS) equivale a las propiedades de Grothendieck y de Nikodym juntas.También es destacable un ejemplo de Schachermayer que muestra que (N) no implica (G).También,éste ultimo prueba que (R)$\Rightarrow$(G).La última gran aportación al tema es la dada por Talagrand 1984 que construye, haciendo uso de la hipótesis del continuo, un álgebra que siendo (G) no es (N) (y por tanto no es (VHS)).Una extensa exposición de la relacón entre las propiedades aquí definidas se encuentra en Benitez (1985) . Todavia permanece abierto el problema de saber si la propiedad de Rosenthal implica o no la de Nikodym.

Exponemos a continuación las principales propiedades de interpolación y de supremo , así como algunas de las relaciones existentes entre ellas.

DEFINICION

Se dice que F tiene la propiedad (E) (de Schachermayer) si para cada sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de elementos disjuntos de F existe una subsucesión $(A_i)_{i\varepsilon M}$ ($M\subset\omega$ infinito) tal que ella y cada una de sus subsucesiones tienen supremo en F .

DEFINICION

Se dice que F es subsecuencialmente completa (o que tiene la propiedad (SC)) (dada por Haydon) si toda sucesión de disjuntos de F posee una subsucesión con supremo en F .

DEFINICION

Se dice que F tiene la propiedad de Seever (S) si para cada sucesión de disjuntos $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y para todo $M\subset\omega$ infinito y de complementario infinito existe un $A^M\varepsilon F$ tal que $A_i\subset A^M$ para $i\varepsilon M$ y $A_i\cap A^M=\phi$ si $i\varepsilon\omega\setminus M$.

Está claro que si F tiene la propiedad (S) entonces S es un F-espacio (es decir: Abiertos F_σ y disjuntos tienen clausuras disjuntas).

DEFINICION

Se dice que F tiene la propiedad (f) (de A.Molto) si para todo par de sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F disjuntas y formada por disjuntos existe un $N\subset\omega$ infinito y un $A\varepsilon F$ tales que $B_n\subset A$ si $n\varepsilon N$ y $A_n\cap A=\phi$ si $n\varepsilon\omega$ y además existe , para cada $M\subset N$ un elemento $A_M\ \varepsilon F$ tal que $A_M\cap B_n=\phi$ si $n\varepsilon\ N\setminus M$ y $B_n\subset A_M$ si $n\ \varepsilon\ M$.

DEFINICION

Se dice que $\mathcal{F}$ es de Interpolación subsecuencial :(IS) (de Freniche 1983) si para cada sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ de disjuntos de $\mathcal{F}$ y para todo $M \subset \omega$ infinito existe un $N\subset M$ infinito y un $A \in \mathcal{F}$ tal que $A_n \subset A$ si $n \in N$ y $A_n \cap A=\phi$ si $n \in \omega \setminus N$.

Esta última propiedad equivale a la siguiente: $\mathcal{F}$ es de Interpolacion subsecuencial si y solo si para cada par de sucesiones disjuntas de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega}$ y $(B_i)_{i\in\omega}$ existe un $N \subset \omega$ infinito y un $A \in \mathcal{F}$ tales que para $i \in N$ es $A_i \subset A$, para $i\in\omega \setminus N$ es $A \cap A_i =\phi$ y $A \cap B_i=\phi$ para cada $i\in\omega$.

DEFINICION

Se dice que $\mathcal{F}$ es débilmente de interpolacion subsecuencial o simplemente (Q) (de Freniche 1985) si para cada sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ de disjuntos de $\mathcal{F}$ y para cada $N \subset \omega$ infinito existe un $M \subset N$ infinito y un $A\in \mathcal{F}$ tal que para $i \in M$ es $A_i \subset A$ y para $i \in \omega \setminus N$ es $A_i \cap A =\phi$.

Observese, en la definición anterior, que si $i\in N\setminus M$ al elemento A_i no se le impone condición alguna. La propiedad anterior es equivalente a la siguiente: $\mathcal{F}$ es débilmente de interpolación subsecuencial si y solo si para cada par de sucesiones disjuntas de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega}$ y $(B_i)_{i\in\omega}$ existe un $N \subset\omega$ infinito y existe un $A\in \mathcal{F}$ tales que si $i \in N$ es $A_i\subset A$ y si $i\in\omega$ $A \cap B_i=\phi$.

DEFINICION

Se dice que F tiene la propiedad (T) si para cada sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de disjuntos de F y para cada par M_1, M_2 de subconjuntos infinitos y disjuntos de F existen $N_1 \subset M_1$ y $N_2 \subset M_2$ infinitos y existe un $A \varepsilon F$ tal que si $i \varepsilon N_1$ es $A_i \subset A$ y si $i \varepsilon N_2$ es $A_i \cap A = \phi$.

La relación existente entre esas propiedades puede verse en Freniche (1983) y en Molto (1981), y es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
(E) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (SC) \arrow[r, Rightarrow] & (IS) \arrow[r, Rightarrow] & (WIS) \arrow[r, Rightarrow] & (T) \\
& (f) \arrow[ur, Rightarrow] & & & \\
\sigma\text{-completa} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (S) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (T) & &
\end{tikzcd}$$

Algunos de los resultados obtenidos con las propiedades anteriores son los siguientes:

- (E) $\Longrightarrow$ (R) y (N) (y por tanto (VHS)) (Schachermayer)
- (SC) $\Longrightarrow$ (VHS) (Haydon)
- (f) $\Longrightarrow$ (VHS) (Molto)
- (IS) $\Longrightarrow$ (VHS) (Freniche)
- (WIS) $\Rightarrow$ (G) (Freniche).

Freniche observa que un debilitamiento de la propiedad (IS), tal como el que se dá con la propiedad (T) pede conducir a algebras sin la propiedad (VHS).También, él dá un ejemplo de álgebra de Boole con la propiedad (T) que no es (N).Molto construye un ejemplo con la propiedad (f) que no tiene la propiedad (S) ni la (E).Haydon da un ejemplo de álgebra con la propiedad (SC),cuyo espacio $C(S)$ no tiene copia de l^{∞},y que,por tanto, no es ni (E) ni (S), y además se demuestra que no es (f).Freniche también da un ejemplo de álgebra que no es ni (SC) ni (f), pero sí (IS).

CAPITULO I

. CONCEPTO Y CARACTERIZACION DE LAS K-ALGEBRAS DE BOOLE.

En Wilanský (|1978|,pg.245) se demuestra que el espacio de Stone de un álgebra de Boole con la propiedad de Grothendiek no contiene sucesiones convergentes distintas de las triviales. En este apartado aislamos independientemente esa propiedad, introduciendo el concepto de k-álgebra de Boole.

DEFINICION 1.1

Sea F un álgebra de Boole infinita. Diremos que F es un k-álgebra de Boole si en S no existen sucesiones convergentes distintas de las triviales.

Ejemplos inmediatos de k-álgebras de Boole nos los dan $P(\omega)$ con $\beta\omega$.

Damos a continuación diversos ejemplos y resultados que permiten asegurar que un álgebra de Boole No es un k-álgebra de Boole.

PROPOSICION 1.2

Si existe un filtro maximal x en $\mathcal{F}$ que sea numerable entonces $\mathcal{F}$ no puede ser un k-álgebra de Boole.

En efecto: Sea $x \varepsilon S$, x posee una base $\{V_i\}_{i \varepsilon \omega}$ numerable de entornos. Sea $W_1 = V_1$ y sea $W_i = V_1 \cap \ldots \cap V_i$, para $i \geqslant 1$. Está claro que $\{W_i\}_{i \varepsilon \omega}$ es también una base numerable de entornos de x. Para cada $i \geq 1$ sea $x_i \; \varepsilon \; W_i \setminus W_{i+1}$. Veamos que $(X_i)_{i \varepsilon \omega}$ converge a x. En efecto. Si A es entorno de x, existe un $i_0 \varepsilon W$ tal que $x \; \varepsilon \; W_{i_0} \subset A$. Como la sucesión es encajada, $\forall i \geq i_0$, es $x_i \varepsilon A$.

Como consecuencia evidente se tiene que si F es numerable o si S satisface el primer axioma de numerabilidad entonces F no es un k-álgebra de Boole.

PROPOSICION 1.3

Si F es un k-álgebra de Boole entonces $P \neq \phi$ y existe un subálgebra de F isomorfo al álgebra de los clopenes de $\{0,1\}^{\omega}$.

DEMOSTRACION

Si P fuese vacio, $S = D$ seria disperso y entonces S seria secuencialmente compacto. Por tanto, $P \neq \phi$ .La segunda afirmación es consecuencia de la primera y de los resultados de la página XVI .

Observemos que $\{0,1\}^{\omega}$ no es un k-álgebra de Boole y que, por tanto, carece de las cuatro propiedades siguientes: (VHS), (G), (N) y (R). Por tanto, todo álgebra de Boole posee un subálgebra que carece de las cuatro propiedades citadas.

El siguiente ejemplo es, quizá, el más elemental de un álgebra de Boole con espacio de Stone Disperso.

EJEMPLO 1.4

Sea T un conjunto infinito. La compactificación de Alexandroff (por un punto) de T con su topología discreta es un espacio topológico, denotado por γT, compacto, T_2, 0-dimensional y disperso. γT es el espacio de Stone del álgebra $\phi(T)$ de las partes finitas de T o de complementario finito.

Notemos también que la descomposición perfecta-dispersa $S = P \cup D$ del espacio de Stone de un álgebra de Boole F, cada átomo de F se corresponde con un punto de D (le corresponde en S un clopen unitario que forzosamente ha de estar en D). Sin embargo, en general no todo punto de D es un clopen, pues, por ejemplo, para $F = \phi(\omega)$ es $S = D$ y hay un punto que no es clopen (más concretamente: el que se añade para obtener la compactificación de Alexandroff). Probaremos más adelante que esta situación no puede presentarse en las k-álgebras de Boole pues, para éstas, todo $x \in D$ es tal que $\{x\}$ es un clopen de S.

Una caracterizacion algebraica de los k-álgebras de Boole viene dada a través de la siguiente proposición.

PROPOSICION 1.5

Sea F un álgebra de Boole. F es un k-álgebra de Boole si y solo si F no posee un álgebra cociente isomorfo al álgebra $\phi(\omega)$.

DEMOSTRACION

Si F no es un k-álgebra de Boole entonces existe una sucesión $(X_n)_{n\in\omega}$ en S de elementos distintos entre si que converge hacía un $x\varepsilon S$. Por tanto, existe una sucesión disjunta $\{A_n\}_{n\varepsilon\omega}$ de elementos de F tal que, para $n\varepsilon\omega$, $x_n\varepsilon A_n$ y $x\not\varepsilon A_n$. El conjunto $H = \{X_n, n\varepsilon\omega\}\cup\{x\}$ es cerrado en S. Y, por consiguiente, F_H es un álgebra cociente de F cuyo espacio de Stone es homeomorfo a H. Para cada $A\varepsilon F$ denotamos $N_A = \{i\varepsilon\omega: x_i\varepsilon A\}$. La aplicación $\rho: F_H \to \phi(\omega)$ definida por $\rho(A\cap H) = N_A$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. En efecto, si $x\varepsilon A$ entonces $N_A\subset\omega$ es infinito de complementario finito, y si $x\not\varepsilon A$ entonces N_A es, a lo sumo, finito; esto prueba que ρ es una aplicación bien definida. ρ es inyectiva pues si, $A\cap H \neq B\cap H$ es evidente que $N_A \neq N_B$. Para probar que ρ es sobreyectiva consideremos dos casos. Si $N\varepsilon\phi(\omega)$ es finito sea $A = \bigcup_{i\varepsilon N} A_i$. Es claro que $N_A = N$ y que $\rho(A\cap H) = N$. Si $N\varepsilon\phi(\omega)$ es tal que N^c es finito. Sea $A = \bigcup_{i\varepsilon N^c} A_i$. Se tiene que $N_{A^c} = N$ y, por tanto, $\rho(A^c\cap H) = N$. Por tanto F_H es isomorfo a $\phi(\omega)$.

Reciprocamente si G es un álgebra cociente de F que sea isomorfa a $\phi(\omega)$, su correspondiente espacio de Stone H será homeomorfo a un subespacio cerrado de S. Al existir un homeomorfismo entre $S\phi(\omega)$ y H, podemos encontrar en $H\subset S$ sucesiones convergentes distintas de las triviales. Por tanto F no es un k-álgebra de Boole.

///

Observemos que todo cociente de una k-álgebra de Boole es tambien k-álgebra de Boole.

Observemos que si en S existe una sucesión (X_n) de elementos distintos entre si y convergente a $x \varepsilon S$ entonces $H = \{X_n, n\varepsilon\omega\} \cup \{x\}$, con la topología heredada es un compacto T_2 y o-dimensional y según, la proposición anterior, es disperso y homeomorfo a $\gamma\omega$, la compactificación de Alexandroff de ω.

Recordemos también que si S es un compacto T_2, los homomorfismos reticulares $\psi: C(S) \to \mathbb{R}$ tales que $\psi(1_S) = 1_{\mathbb{R}}$ son precisamente las aplicaciones evaluación (es decir $\exists\, x \varepsilon S$ tal que $\psi(f) = f(x)$, $\forall\ f \varepsilon C(S)$). (Cf.,27)

TEOREMA 1.6 (Caracterización topológica de las k-álgebras de Boole).

Un álgebra de Boole F es un k-álgebra de Boole si y solo si para todo $T \subset S_F$ cerrado e infinito se tiene que $C(T)$ no tiene la propiedad SK.(la bola unidad del dual no es *-débil sec. comp.)

DEMOSTRACION

$\Longleftarrow$) Por reducción al absurdo si existe $(x_n)_{n\varepsilon\omega} \subset S$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $H = \{x_n / n\varepsilon\omega\} \cup \{x\}$ es cerrado tal que $F_H \approx \phi(\omega)$ y $H \approx \gamma\omega$ y $C(H) \approx C$ que será por tanto SK. contradicción.

$\Longrightarrow$) Para probar el reciproco, basta demostrar que el propio $C(S)$ no tiene la propiedad SK ya que si $T \subset S$ es cerrado e infinito, T es el espacio de Stone de un k-álgebra de Boole (un álgebra cociente de F). Supongamos, por tanto, que $C(S)$ es SK. Sea $(x_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión de puntos de ω distintos entre si.

Sea para $n\varepsilon\omega$, ψ : $C(S) \to \mathbb{R}$ las correspondientes aplicaciones evaluación ($\psi_n(f) = f(x_n)$). Como la sucesión $(\psi_n)_{n\varepsilon\omega}$ está contenida en la bola unidad de $C(S)^*$, existe una ψ en esa bola unidad y una subsucesión $(\psi_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ de $(\psi_n)_{n\varepsilon\omega}$ tal que $(\psi_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ converge, en la topología *-débil, a ψ. Es inmediato comprobar que ψ define un homomorfismo reticular y, por tanto, $\psi(1_S) = \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(1_S) = 1_{\mathbb{R}}$. Por tanto, existe un $x\varepsilon S$ tal que $\psi = \psi_x$. La convergencia, en la topología *-débil de $(\psi_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ a ψ_x implica la convergencia, en la topología de S, de $(x_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ a X.

Prácticamente la misma demostración puede ser usada para probar el siguiente resultado.

TEOREMA 1.7

Sea F un álgebra de Boole. F es un k-álgebra de Boole si y solo si para cada $T \subset S$ cerrado y no finito se verifica que $C(T)$ no es separable.

En efecto, basta tener en cuenta que si un espacio de Banach es separable entonces tiene la propiedad SK.

El interés de las k-álgebras de Boole radica fundamentalmente en el siguiente resultado, el cual es bien conocido pero de él conseguimos una rápida demostración.

TEOREMA 1.8

Si F es un álgebra de Boole infinita que tiene alguna de las propiedades siguientes: (N), (G), (VHS) ó (R) entonces F es un k-álgebra de Boole.

DEMOSTRACION

Si no fuese un k-álgebra de Boole, habría un álgebra cociente isomorfa a $\phi(\omega)$. Como $\phi(\omega)$ no cumple ninguna de las cuatro propiedades (N), (G), (VHS) ó (R), llegamos a una contradicción.

///

Recordemos que las propiedades (N), (G), (VHS) y (R) son hereditarias a álgebras cocientes, mientras que la (OP) no lo es. Ninguna de estas propiedades se hereda a subálgebras (P. ej. $P(\omega)$ tiene todas las propiedades citadas mientras que $\phi(\omega)$ no tiene ninguna de esas cinco).

Notemos también que el álgebra de los "clopenes" del cubo de Cantor $\{0,1\}^{\omega}$ verifica la propiedad de (O.P) y sin embargo no es un k-álgebra de Boole.

DEFINICION 1.9

Sea F un álgebra de Boole. Diremos que una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos de F disjuntos entre si tiene la propiedad J, si existe un $N\subset\omega$ infinito y de complementario infinito y existe un $A\in F$ tales que

- Si $i\in N$, $A_i\subset A$
- Si $i\in\omega\setminus N$, $A_i\cap A=\phi$

Si toda sucesión disjunta en F tiene la propiedad J, diremos que F tiene la propiedad J.

Sea F una álgebra de Boole, diremos que una sucesión $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ de conjuntos de F disjuntos entre si tiene la propiedad sub J si toda subsucesión de (A_n) posee, a su vez, una subsucesión con la propiedad J. Es decir, para todo $N \subset \omega$ infinito existen dos conjuntos infinitos y disjuntos N_1, $N_2 \subset \omega$ y un $A \varepsilon F$ tales que

- Si $i \varepsilon N_1$ es $A_i \subset A$
- Si $i \varepsilon N_2$ es $A_i \cap A = \phi$

Si toda sucesión disjunta en F tiene la propiedad sub J, diremos que F tiene la propiedad sub J.

DEFINICION 1.10

Sea $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de puntos de S. Diremos que esa sucesión tiene la propiedad J si existe un N ω infinito y de complementario infinito y existe un $A \varepsilon F$ tales que si $i \varepsilon N$ es $x_i \varepsilon A$ y si $i \varepsilon \omega \setminus N$ es $x_i \notin A$

El siguiente teorema nos dá una caracterización de las k-álgebras de Boole en términos de las propiedades de interpolación antes definidas.

TEOREMA 1.11

Sea F un álgebra de Boole. F es una k-álgebra de Boole si y solo si toda sucesión de puntos de S distintos entre si tiene la propiedad J.

DEMOSTRACION

Si $(X_n)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión en S que no tiene la propiedad sub J, se verifica que para todo $A \varepsilon F$ ocurre una, y solo una, de las dos siguientes condiciones:

a) existe un $i_0 \varepsilon \omega$ tal que para todo $i \geq i_0$ es $x_i \varepsilon A$

b) existe un $i_0 \varepsilon \omega$ tal que para todo $i \geq i_0$ es $x_i \not\varepsilon A$

Si definimos $\mu_i = \delta_{x_i}$ entonces para $A \varepsilon F$ se tiene o bien $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i(A) = 1$ (caso a) o bien $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i(A) = 0$ (caso b).

Por tanto, $(\mu_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión en $C(S)^*$ que es *-débil convergente a cierta $\mu \varepsilon C(S)^*$. La medida μ es un homomorfismo reticular.

En efecto: se tiene, por ejemplo, que

$$\mu(f\cdot g) = \lim_{i\to\infty}\mu_i(f\cdot g) = \lim_{i\to\infty} f(x_i)g(x_i) = (\lim_{i\to\infty} f(x_i))(\lim_{i\to\infty} g(x_i)) =$$

$$= (\lim_{i\to\infty} \mu_i(f))(\lim_{i\to\infty} \mu_i(g)) = \mu(f)\cdot\mu(g)$$

Como además $\mu(1_s) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_i(1_s) = 1$, μ es una aplicación evaluación.

Por tanto, existe un $x \varepsilon S$ tal que $\mu = \delta_x$. De la convergencia de $(\mu_i)_{i\varepsilon\omega}$ a δ_x se deduce que, en S, $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ converge a x.

Reciprocamente, si $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión de elementos distintos entre si en S que converge a x, sabemos que existe una sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F tal que, para $i\varepsilon\omega$, $x_i \varepsilon A_i$ y $x \not\varepsilon A_i$.

Si existíese un $A\varepsilon\mathcal{F}$ tal que $x_i \varepsilon A$ para todo $i \varepsilon N_1 \subset \omega$ y $x_i \varepsilon A^c$ para todo $i \varepsilon N_2 \subset \omega$, siendo N_1 y N_2 disjuntos e infinitos, se llegaría a la conclusión de $x\varepsilon A$ y $x\varepsilon A^c$. Esto prueba que en $\mathcal{F}$ no puede haber sucesiones convergentes distintas de las triviales.

Este último resultado prueba que si F es una k-álgebra de Boole y $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión en F formada por átomos distintos entonces $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad J.

NOTA: A las sucesiones de disjuntos que carecen de la propiedad sub J Freniche (Cf. 1983) las denomina "muy inseparables" y demuestra que si F es sub J entonces F es una k-álgebra de Boole.Posteriormente, él demuestra,con el ejemplo que a continuación damos, que existen k-álgebras de Boole que poseen sucesiones sin la propiedad sub J.

EJEMPLO 1.12

Sea $\Omega = \{(n,m)\varepsilon\omega x\omega: n\geq m\}$. Para cada $i\varepsilon\omega$ sea $A_i = \{(i,n)\varepsilon\omega x\omega: n\leq i\}$. Para cada $A\subset\Omega$ sea $d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |A\cap A_n|$, si este límite existe.

En caso contrario escribimos $d(A) = +\infty$. El real ampliado $d(A)$ se suele denominar "densidad de A". Sea $\mathcal{F} = \{A\subset\Omega: d(A)=0$ ó $d(A)=1\}$. Es fácil probar que $\mathcal{F}$ es un álgebra de Boole. Freniche (1983) prueba que en el espacio $S_{\mathcal{F}}$ no existen sucesiones convergentes distintas de las triviales. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un k-álgebra de Boole. Sin embargo, existen en $\mathcal{F}$ sucesiones de disjuntos que no son sub J. Se demuestra además que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad (G) y se desconoce si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (N).

En Freniche 1985 se demuestra ,a través de un álgebra estudiada por Dashiell que existen álgebras de Boole que teniendo las propiedades (R) y (N) tienen sucesiones que no son sub J y al mismo tiempo hace notar que las propiedades de interpolación o de separación no son las adecuadas para la caracterización de las álgebras (VHS). Exponemos a continuación el referido ejemplo. Posteriormente volverá a ser usado.

EJEMPLO 1.13

Sea F el álgebra de los subconjuntos de $[0,1]$ que son F_σ y G_δ. Dashiel (1981) prueba que F tiene la propiedad de Rosenthal y de Vitali-Hahn-Saks.

Sin embargo, Freniche (1985) observa que la sucesión $\{A_i\}_{i\varepsilon\omega}$ de los conjuntos $A_n = \{\frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}\}$ es tal que no existe un $A\varepsilon F$ que contenga a infinitos A_n y no corte a infinitos A_m. Esto prueba que la sucesión $\{A_i\}_{i\varepsilon\omega}$ no es sub J.

Notemos ahora que los ejemplos anteriores estan formados por clopenes finitos no unitarios. Queda pendiente, pues, el saber si existen k-álgebras de Boole con una sucesión de clopenes infinitos y disjuntos sin la propiedad sub J.

En el próximo capítulo se probará que en el ejemplo anterior existe sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos sin la propiedad sub J.

PROPOSICION 1.14

Sea F un álgebra de Boole no superatómica. Sea $S=P\cup D$ su descomposición perfecta-dispersa. Existe un $F\subset P$ cerrado, perfecto y separable y una aplicación continua y sobreyectiva $l:F\to\{0,1\}^{\omega}$ tal que si $M\subset F$ es cerrado y $M\neq F$ entonces $l(M)\neq\{0,1\}^{\omega}$

DEMOSTRACION

Por la observación p.VII $P\neq\phi$ y existe un árbol G en F que genera un subálgebra F_0 isomorfa a la de los clopenes de $\{0,1\}^{\omega}$. Sea $i:F_0\to F$ la inyección canónica. Por dualidad, se tiene una aplicación $l:S\to\{0,1\}^{\omega}$ continua y sobreyectiva que está definida para cada x, filtro maximal en F, por $l(x) = \{A\in F_0; i(A)\in x\}$, que define un filtro maximal en F_0. Sea $H = \{M\subset S,$ M cerrado y $l(M) = \{0,1\}^{\omega}\}$. Es claro que $H\neq\phi$ pues $S\in H$. Veamos que H es inductivo, con la inclusión. Sea $\{M_\alpha, \alpha\in I\}$ una cadena en H. Sea $M=\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha$, M es cerrado. Veamos que todo $y\in\{0,1\}^{\omega}$ es imagen, por l, de un punto de M. Sabemos que para cada $\alpha\in I$ existe un $x_\alpha\in M_\alpha$ tal que $l(x_\alpha) = y$. Como S es compacto la red (x_α) tiene una subred que converge aun cierto $x\in S$. Pero como cualquier $x_\beta\in M_\alpha$ para $\beta\geq\alpha$, resulta que cada M_α tiene a toda la red a partir de un indice dado y por tanto $x\in M_\alpha$. Por consiguiente $x\in M$. La continuidad de l prueba que $l(x) = y$. Por tanto $M\in H$, el cual es una cota inferior de la cadena. El lema de Zorn prueba la existencia de un elemento minimal $F\in H$. Se tiene por tanto que $l:F\to\{0,1\}^{\omega}$ es continua y sobreyectiva. Veamos que F es perfecto. Supongamos que $x\in F$ es un punto aislado. $F\setminus\{x\}$ sigue siendo compacto. La aplicación $l: F\setminus\{x\}\to\{0,1\}^{\omega}$ no puede ser sobreyectiva, pues contradice la minimalidad de F, por consiguiente $l(F-\{x\}) = \{0,1\}^{\omega} \setminus l(x)$ es compacto y $l(x)$ es aislado en $\{0,1\}^{\omega}$ lo que no es posible.

Es claro que $F \subset P$, núcleo perfecto de S. Veamos que F es separable. Para ello utilizaremos el siguiente lema.

LEMA 1.15

Sea $H \subset S$ cerrado. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) Para cada $A \varepsilon \mathcal{F}_0$ se tiene $H \cap A \neq \phi$

b) $l: H \to \{0,1\}^{\omega}$ es continua y sobreyectiva

Supongamos demostrado el lema por un momento. Se cumple que $F \cap A \neq \phi$ para cada $A \varepsilon \mathcal{F}_0$. Para cada $A \varepsilon \mathcal{F}_0$ elegimos un elemento $x_A \varepsilon A \cap F$. El conjunto $\{x_A\}_{A \varepsilon \mathcal{F}_0}$ es numerable. Sea H su clausura, H es cerrado, $H \subset \mathcal{F}$ y la aplicación $l: H \to \{0,1\}^{\omega}$ es continua y sobreyectiva. Por la minimalidad de $\mathcal{F}$ es F=H. Esto prueba que F es separable.

DEMOSTRACION DEL LEMA

a $\Longrightarrow$ b.- Sea y un filtro maximal en $\mathcal{F}_0$. Veamos que existe un $x \varepsilon H$ tal que $\{A \varepsilon x\colon A \varepsilon \mathcal{F}_0\} = y$. En caso contrario para cada $x \varepsilon H$ existiría un $A_x \varepsilon x$ con $A_x \varepsilon \mathcal{F}_0$ y tal que $A_x \notin y$. Por la compacidad de H se tiene $H \subset A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_n}$ para algunos $x_1, \ldots, x_n \varepsilon H$. Necesariamente

$A = A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_n} \notin y$ pues si la unión finita estuviese, algún elemento lo estaría. Por tanto, $A^c \varepsilon y$ y asi $A^c \varepsilon F_0$ y $A^c \cap H = \phi$ contra la hipótesis.

b $\Longrightarrow$ a.- Si $A \varepsilon F_0$ fuese tal que $A \cap H = \phi$ entonces $\forall x \varepsilon H$ es $A \notin x$. Si y es un filtro maximal en F_0 tal que $A \varepsilon y$ entonces para cada $x \varepsilon H, \{B \varepsilon x: B \varepsilon F_0\} \neq y$, luego 1 no sería sobreyectiva.

Esta contradicción prueba el lema y el teorema.

Notemos que en el caso que F fuese atómica F sería diseminado y como $\{x_A\}_{A \varepsilon F_0}$ es denso en un perfecto, es denso en sí mismo.

En lo que resta de capítulo, entenderemos que F es un k-álgebra de Boole. Trataremos de destacar algunas propiedades elementales y sencillas de estas álgebras de Boole.

PROPOSICION 1.16

a.- Si $D \neq \phi$ entonces no existe un $M \subset D$ que sea cerrado e infinito.

b.- Si $D \neq \phi$, cualquier $x \varepsilon D$ es tal que $\{x\}$ es un clopen.

c.- Si $x \varepsilon S$ entonces x es un filtro maximal con una cantidad no numerable de elementos del álgebra

d.- Si $M \subset S$ es cerrado entonces o M es finito o M es infinito no numerable.

DEMOSTRACION

Las propiedades a) es consecuencia inmediata de la proposición p.IV . Para probar b) basta observar que como D es abierto, existe un clopen

$A_x \varepsilon \mathcal{F}$ tal que $x \varepsilon A_x \subset D$. Como A_x es compacto y disperso debe ser finito pues de lo contrario habrían sucesiones convergentes distintas de la triviales. Asi pues $\{x\} = A_x \setminus (A_x \setminus \{x\})$. Por ser $A_x \setminus \{x\}$ finito, es cerrado. Por tanto $\{x\}$ es abierto y es, así, un clopen. Dado que todo compacto T_2 y numerable satisface el primer axioma de numerabilidad, si un cerrado $M \subset S$ fuese numerable existirían sucesiones convergentes distintas de las triviales. Esto prueba d).

La propiedad c) es consecuencia de la proposición 1.2

///

PROPOSICION 1.17

Si $M \subset S$ es infinito, $M^{\underline{d}}$ es un cerrado, infinito no numerable, y tal que $M^d \subset P$.

En efecto, si M^d fuese finito, tomamos una sucesión $H = (x_i)_{i \varepsilon \omega} \subset M$. Se cumple $H^d \subset M^d$.

Si $x \varepsilon H^d$ podemos elegir, por ser H^d finito, un clopen A_x que no corte a $H^d \setminus \{x\}$. $A_x \cap \{x_i, i \varepsilon \omega\}$ es una subsucesión $\{x_{nj}\}$ que tiene a x como único punto de acumulación y que por tanto converge a x.

Esta contradicción prueba el resultado.

///

COROLARIO 1.18

Se tiene, para $M \subset D$ que

a.- Si M es finito entonces M es un clopen b.- Si M es infinito, $\bar{M}=M^a \cup M^d$ es infinito no numerable y así $\bar{M} = M \cup M^d = M^a \cup M^d$ es unión disjunta de un abierto disperso y de un cerrado perfecto. Se tiene además $M^d = \bar{M} \cap P$ y $M = \bar{M} \cap D$.

El siguiente resultado permite asegurar la existencia de k-álgebras cocientes atómicas y no atómicas.

PROPOSICION 1.19

a.- El álgebra F_D, que es el álgebra cociente de F por el ideal de los clopenes finitos, es no atómica.

b.- Si D es infinito y $T = \bar{D}$ entonces el álgebra F_T es un k-álgebra de Boole atómica.

En relación con este resultado notemos que si F fuese atómica, D sería denso en S y entonces S sería un compactificación de Hausdorff de D (dotado con la topología discreta), compactificación que es mayor que la de Alexandroff y menor que la de Stone--Cech. En el caso en que $S = \beta(D)$, F sería completa y S sería stoniano. Sin embargo, S no puede ser nunca la compactificación de Alexandroff de D .

Si F fuese atómica, F es isomorfa a una subálgebra densa del álgebra de las partes del conjunto de átomos. En el caso de las k-álgebras de Boole el conjunto de los átomos es D, y por tanto F es isomorfa a una subálgebra densa de $\mathcal{P}(D)$. De esto se deduce que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \beta(D) \arrow[dl, "h"] \\ & \bar{D}=S & \end{tikzcd}$$

donde $(e,\beta(D))$ es la compactificación de Stone-Cech de D, α es la identidad y h es continua y sobreyectiva. Por tanto existe una aplicación $l:\mathcal{F}\to\mathcal{P}(D)$ inyectiva que da lugar a la aplicación $h:\beta(D)\to S$ sobreyectiva y continua la cual, a su vez da lugar, a una aplicación $\tau:\mathcal{C}(S)\to l_\infty(D)$ lineal continua e inyectiva.

OBSERVACION 1.20

1.- Si $M\subset S$ es tal que $M\cap D\neq\phi$ se tiene que M ni es fronterizo ni diseminado. Por consiguiente si H es fronterizo ó diseminado, es $H\subset P$.

Si $K\subset P$ y $\bar{K}=P$ se tiene que K es denso en si mismo.

Si $M\subset P$ es abierto M es infinito no numerable

2.- Todo $A\in\mathcal{F}$ es la unión de un abierto disperso y de un cerrado perfecto.

3.- $A,B\in\mathcal{F}$ es $A\cap P = B\cap P \Leftrightarrow A\Delta B\subset D$ y es finito pues,

$A\cap P = B\cap P = [A] = [B]$ en $\mathcal{F}_P \Leftrightarrow (A\Delta B)\cap P = \phi \Leftrightarrow A\Delta B\subset D \Leftrightarrow A\Delta B$ es finito.

4.- $(A\cap P)\cap(B\cap B) = \phi \Leftrightarrow A\cap B$ es finito y contenido en D.

5.- $(A\cap P) \supset (B\cap P) \Leftrightarrow A \supset B$ excepto a lo más una cantidad finita de puntos de D.

6.- Para todo abierto G de S se tiene:

a) Si $G\subset D$ es finito, G es clopen

b) Si $G\subset D$ es infinito, G no es clopen y $\bar{G} = G \cup G^d$ donde G y G^d son disjuntos, $G^d \subset P$.

c) Si $G\cap D \neq \phi$ y $F\cap P \neq \phi$ entones $G\cap P$ es infinito no numerable.

PROPOSICION 1.21

Sea F un k-álgebra de Boole atómica tal que si $A\subset B$ son abiertos infinitos con $A^d = B^d$ se verifica que $B\backslash A$ es numerable.

Si $([Ai])_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta en F_P tal que $\bigvee_{i=1}^{\infty} [A_i] = [N]$ en F_P entonces existen representaciones B_i de $[A_i]$ tales que en F se verifica $\bigvee_{i=1}^{\infty} B_i = N$.

DEMOSTRACION

Sea $C_1 = A_1$ y sea $C_2 = A_2\backslash(A_1 \cap A_2)$. Como $[A_1]\cap[A_2] = 0$ se tiene que $A_1 \cap A_2$ es finito y, por tanto, C_2 difiere de A_2 en un clopen finito. Por tanto $[C_2] = [A_2]$. Sea $C_3 = A_3\backslash((A_1\cup A_2)\cap A_3)$, como $([A_1] \vee [A_2]) \wedge [A_3] = 0$ se tiene que $(A_1\cup A_2)\cap A_3$ es finito. Por tanto $[C_3] = [A_3]$. Procediendo por inducción se obtiene una sucesión disjunta $C_i \varepsilon F$ tal que $[C_i] = [A_i]$ y $C_i \subset N$ para $i = 1,2,..$ Se tiene además que $\bigvee_{i\varepsilon\omega} [C_i] = [N]$. Trabajemos ahora en el Stone P de F_p. Se tiene que

$$\overline{\bigcup_{i\in\omega} C_i \cap P}^{P} = \text{(Por ser P cerrado)} = \overline{(\bigcup_{i\in\omega} C_i)} \cap P = N\cap P.$$

Sea $G = \bigcup_{i\in\omega} C_i$, G es abierto y $\overline{G\cap P} = N\cap P$. Veamos que $\overline{G\cap P} = \overline{G}\cap P$. Como $G\subset N$ es $\overline{G}\subset N$, por tanto $\overline{G}\cap P\subset N\cap P = \overline{G\cap P}$. Por otro lado, como $\overline{G}\cap P = (G\cap D)^d$ y $N\cap P = (N\cap D)^d$, $(G\cap D)\subset(N\cap D)$ y $(G\cap D)^d = (N\cap D)^d$. Por tanto $(N\cap D)\setminus(G\cap D) = H$ es un abierto contenido en D que es a lo sumo numerable. Supongamos pues que $H = (X_i)_{i\in\omega}$ para cada $i\in\omega$ sea $B_i = C_i\cup\{X_i\}$. Se tiene que $[B_i] = [C_i]$, para cada $i\in\omega$, $(UB_i)\cap D = N\cap D$, $UB_i\subset N$ y $UB_i\cap P = N\cap P = (UB_i\cap D)^d$. Por tanto,

$$\overline{UB_i} = ((UB_i)\cap D)\cup((UB_i)\cap D)^d = (N\cap D)\cup(N\cap D)^d = N.$$

CAPITULO II

En este Capítulo tratamos de obtener resultados análogos a otros de Freniche |1983| que son usados en la demostración de que la propiedad (IS) implica la propiedad (VHS).Aquí, sin embargo, usamos la prpiedad sub J,que es la propiedad de interpolación más débil que se usa aquí. Más adelante estudiaremos propiedades de separación en las sucesiones de clopenes finitos que garanticen que éstas pueden ser encajadas término a término en una sucesión de clopenes infinitos y disjuntos. Posteriormente observaremos que en el álgebra de los subconjuntos de $[0,1]$ que son simultaneamente F_σ y G_δ existen no solo sucesiones de clopenes finitos sin la propiedad Sub J ,análogas a las de Freniche |1985| , sino que existen sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos sin esa propiedad. A continuación las propiedades:uniformemente fuertemente aditiva y uniformemente acotada de una sucesión de medidas son caracterizadas por sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos. Como consecuencia, obtenemos que basta imponer las oportunas condiciones a este tipo de sucesiones para el estudio de las propiedades (G),(N) o (VHS).Como corolario se deduce que estas tres últimas propiedades pueden ser caracterizadas por los abiertos F_σ y los cerrados G_δ que cortan a P.

LEMA 2.1

Sea F un álgebra de Boole y sea $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión con la propiedad sub-J. Sea $\mu: F \to \mathbb{R}$ una medida acotada se verifica que $\forall\, \varepsilon>0$ existen $N_1, N_2 \subset \omega$ infinitos y disjuntos y un $A \varepsilon F$ tales que

$$A_i \subset A \quad \text{si} \quad i \varepsilon N_1, \quad A_i \cap A = \phi \quad \text{si } i \varepsilon N_2, \quad |\mu|(A) < \varepsilon$$

DEMOSTRACION

Por tener M la propiedad sub-J existen $M_1^1, M_2^1 \subset \omega$ infinitos y disjuntos y un $B_1 \varepsilon F$ tales que si

$$i \varepsilon M_1^1 \quad \text{es} \quad A_i \subset B_1 \quad \text{y si} \quad i \varepsilon M_2^1 \quad \text{es} \quad A_i \cap B_1 = \phi$$

Sea $C_1 = B_1$. Consideremos la sucesión $(A_i)_{i \varepsilon M_2^1}$, existen M_1^2 y $M_2^2 \subset M_2^1$ infinitos y disjuntos y un $B_2 \varepsilon F$ tal que

$$A_i \subset B_2 \quad \text{si} \quad i \varepsilon M_1^2 \quad \text{y} \quad A_i \cap B_2 = \phi \quad \text{si} \quad i \varepsilon M_2^2. \text{ Sea } C_2 = B_2 \setminus C_1.$$

Se sigue verificando que $A_i \subset C_2$, si $i \varepsilon M_1^2$, y $A_i \cap C_2 = \phi$, si $i \varepsilon M_2^2$. Se tiene además que $C_1 \cap C_2 = \phi$. Por inducción es posible construir una sucesión $(C_k)_{k\varepsilon\omega}$ en F de conjuntos disjuntos y una sucesión de pares de subconjuntos de ω infinitos y disjuntos $\{(M_1^k, M_2^k)\}_{k\varepsilon\omega}$ tales que

- Para cada $k \varepsilon \omega$, $M_2^k \supset M_1^{k+1} \cup M_2^{k+1}$
- $A_i \subset C_k$ si $i \varepsilon M_1^k$, $A_i \cap C_k = \phi$ si $i \varepsilon M_2^k$.

Como μ es acotada, $|\mu|$ es fuertemente aditiva, luego $\lim_{k\to\infty} |\mu|(C_k) = 0$. Por tanto, dado $\varepsilon>0$ existe un $k_0\varepsilon\omega$ tal que si $k\geq k_0$, es $|\mu|(C_{k_0})<\varepsilon$. Tomando $M_1 = M_1^{k_0}$, $M_2 = M_2^{k_0}$, $A = C_{k_0}$ el teorema quedaría probado.

///

Observese que el conjunto A del lema anterior ha de ser necesariamente un clopen infinito.

LEMA 2.2

Sea F un álgebra de Boole. Para cada sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ de medidas reales acotadas sobre F que sea puntualmente convergente a cero y toda sucesión de disjuntos $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ con la propiedad sub-J existen

a.- una subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$

b.- una subsucesión $(A_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ de $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$

c.- una sucesión $(B_n)_{n\varepsilon\omega}$ decreciente en F, tales que para todo $k\varepsilon\omega$ se verifica:

1.- $A_{n_k}\subset B_k$

2.- $A_{n_k}\cap B_{k+1} = \phi$

3.- $|\mu_{n_k}(A_{n_1})| + \ldots + |\mu_{n_k}(A_{n_{k-1}})| < \frac{1}{2^k}$

4.- $|\mu_{n_k}|(B_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$

5.- B_k es un clopen infinito, y

6.- $B_k \setminus (A_{n_k} \cup B_{k+1})$ es clopen infinito

DEMOSTRACION

Procederemos por inducción. Sea $B_1 = S$. Aplicando el lema a μ_1, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y la sucesión $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$. Existen $N_1^1, N_2^1 \subset \omega$ infinitos y disjuntos y $C_1 \varepsilon F$ tales que si $i\varepsilon N_1^1$ es $A_i \subset C_1$ y si $i\varepsilon N_2^1$ es $A_i \cap C_1 =$ y $|\mu_1|(C_1) < \frac{1}{2}$. Sea $n_1=1$ y $B_2 = C_1 \setminus A_{n_1}$. Observemos que B_2 es un clopen infinito pues en él está contenido A_i para $i\varepsilon N_2^1$. Se tiene que $A_{n_1} \subset B_1$, $A_{n_1} \cap B_2 = \phi$ y $|\mu_{n_1}|(B_2) < \frac{1}{2}$. Sea ahora n_2 el primer natural de $M_1 = N_1^1 \setminus \{n_1\}$ mayor que n_1 y tal que $|\mu_{n_2}(A_{n_1})| < \frac{1}{2}$. Este número existe pues $\lim\limits_{\substack{i\varepsilon M_1 \\ i\to\infty}} |\mu_i(A_{n_1})| = 0$. Se tiene que $A_{n_2} \subset B_2$.

Aplicamos de nuevo el lema 2.1 a μ_{n_2}, $(A_i)_{i\varepsilon M_1}$ y $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$. Existen $N_1^2, N_2^2 \subset M_1$ infinitos y disjuntos y un $D_2 \varepsilon F$ tales que si $i\varepsilon N_1^2$ es $A_i \subset D_2$ y si $i\varepsilon N_2^2$ es $A_i \cap D_2 = \phi$ y $|\mu_{n_2}|(D_2) < \frac{1}{2^2}$. Sea $C_2 = D_2 \cap B_2$ sigue verificandose que $A_i \subset C_2$ para $i\varepsilon N_1^2$ y $A_i \cap C_2 = \phi$ para $i\varepsilon N_2^2$, $|\mu_{n_2}|(C_2) < \frac{1}{2^2}$ y $B_2 \supset C_2$.

Sea $B_3 = C_2 \setminus A_{n_2}$. Se sigue verificando que si $i\varepsilon N_1^2 \setminus \{n_2\}$ es $A_i \subset B_3$, si $i\varepsilon N_2^2$ es $A_i \cap B_3 = \phi$ y $A_{n_2} \subset B_2$ pero $A_{n_2} \cap B_3 = \phi$ y $|\mu_{n_2}|(B_3) < \frac{1}{2^2}$.

Observemos que B_3 es un clopen infinito y como en el clopen

$B_2 \setminus (A_{n_2} \cup B_3)$ está contenido todo clopen A_i para $i \varepsilon N_2^2$, también ese es un clopen infinito. Procediendo inductivamente se prueba sin dificultad el lema.

OBSERVACION

Si en el lema 2.2 se suprime la hipótesis de ser $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ puntualmente convergente a cero se obtienen los mismos resultados salvo el 3).

Si en el mismo lema se prefija un $\varepsilon>0$, las cotas que aparecen en 3 y 4 pueden ser cambiadas por ε

LEMA 2.3

Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $C(s)^*$. Si el conjunto H = $\{|\mu_n(A)|;\ A\varepsilon F,$ con $|A| = \infty,\ |A^c| = \infty,\ n\varepsilon\omega\}$ está acotado entonces $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente acotada en F.

DEMOSTRACION

Sea K la cota del conjunto.

Si A es un clopen finito existe un B clopen infinito y de complementario infinito tal que $A \subset B$. Se verifica que

$$\mu_n(B) = \mu_n(A) + \mu_n(B\setminus A) \Longrightarrow \mu_n(A) = \mu_n(B) - \mu_n(B\setminus A)$$

$$|\mu_n(A)| \leq |\mu_n(B)| + |\mu_n(B\setminus A)| \leq 2K.$$

Si A es un clopen infinito y de complementario finito existe un $B \subset A$, $B \in F$ que es infinito y de complementario infinito, con ello $A \setminus B$ es infinito y de complementario infinito. Para cada $n \in \omega$ $\mu_n(A) = \mu_n(B) + \mu_n(A \setminus B)$ y será $|\mu_n(A)| < 2K$. Así para cada $A \in F$ y cada $n \in \omega$ es $|\mu_n(A)| < 2K$.

Esto prueba que $(\mu_n)_{n \in \omega}$ está uniformemente acotada.

///

TEOREMA 2.4

Sea F un k-álgebra de Boole. Sea $(\mu_n)_{n \in \omega}$ una sucesión en $C(s)^*$, puntualmente acotada en F. Si $(\mu_n)_{n \in \omega}$ no es uniformemente acotada se verifica que para toda sucesión $(\alpha_n)_{n \in \omega} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = +\infty$ existe una subsucesión $(\mu_{n_k})_{k \in \omega}$ de $(\mu_n)_{n \in \omega}$ y una sucesión $(A_k)_{k \in \omega}$ en F de clopenes infinitos y disjuntos tales que, para cada $k \in \omega$,

$$|\mu_{n_k}(A_k)| > \alpha_k + \sum_{j=1}^{k-1} |\mu_{n_k}(A_j)|$$

DEMOSTRACION

Como $(\mu_n)_{n \in \omega}$ no es uniformemente acotada en F, el conjunto H del enunciado del lema 2.3 no es acotado veamos que para cada $p>0$ existe un $n_p \in \omega$ y una participación (E,F) de S de clopenes infinitos tales que $|\mu_{n_p}(E)| > p$ y $|\mu_{n_p}(F)| > p$. En efecto, consideremos el número $p + \sup_k |\mu_k(S)|$. Como H es un conjunto no acotado, existen un $n_p \in \omega$ y un $E \in F$ infinito y de complementario F in finito tales que

$$|\mu_{n_p}(E)| > p + \sup_k |\mu_k(S)|$$

Entonces

$$|\mu_{n_p}(F)| > |\mu_{n_p}(E)| - |\mu_{n_p}(S)| > p$$

Procedemos ahora por inducción.

Para $p=\alpha_1$ existen un n_1 y una partición (E_1,F_1) de S formada por clopenes infinitos tales que

$$|\mu_{n_1}(E_1)| > \alpha_1 \quad \text{y} \quad |\mu_{n_1}(F_1)| > \alpha_1$$

Consideremos la sucesión $(\mu_n)_{n>n_1}$ y las álgebras $\mathcal{F}_{E_1}$ y $\mathcal{F}_{F_1}$. Esta sucesión está puntualmente acotada en $\mathcal{F}_{E_1}$ y $\mathcal{F}_{F_1}$. Si fuese uniformemente acotada en ambas, con las cotas respectivas K y L, se tendría para cada $A\in\mathcal{F}$ y cada $n>n_1$ que

$$|\mu_n(A)| \leq |\mu_n(A\cap E_1)| + |\mu_n(A\cap F_1)| \leq K+L$$

con lo cual la sucesión (μ_n) tendría la cota uniforme

$$T > \max\{||\mu_1||, \ldots, ||\mu_{n_1}||, K+L\}.$$

Supongamos pues que en $\mathcal{F}_{F_1}$ la sucesión $(\mu_n)_{n>n_1}$, no está uniformemente acotada. Sea $A_1=E_1$ se tiene que el conjunto $H = \{|\mu_n(A)|,\ A\subset F_1$ clopen infinito con $F_1\setminus A$ infinito, $n\geq n_1\}$ es no acotado. Por tanto, para $\alpha_2 + \sup_n |\mu_n(A_1)|$ existe un $n_2 > n_1$ y una partición E_2, F_2 del conjunto F_1, formada por clopenes infinitos tales que $|\mu_{n_2}(E_2)| > \alpha_2 + |\mu_{n_2}(A_1)|$ y $|\mu_{n_2}(F_2)| > \alpha_2 + |\mu_{n_2}(A_1)|$.

Procediendo por inducción se obtiene el resultado deseado

///

COROLARIO 2.5

Sea $\mathcal{F}$ una k-álgebra de Boole. $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (N) si y solo si para cada sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{C}(S)^*$ puntualmente acotada en $\mathcal{F}$ y toda sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{F}$ de clopenes infinitos y disjuntos existe un k>0 tal que $|\mu_n(A_n)| < k$.

DEFINICION 2.6

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole. Se dice que una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos tienen la propiedad SF si para toda subsucesión $(A_i)_{i\in M}$ ($M\subset\omega$ infinito) existen $M_1, M_2 \subset M$ infinitos y disjuntos tales que

$$Fr(\bigcup_{i\in M_1} A_i) \neq Fr(\bigcup_{i\in M_2} A_i)$$

Es evidente que toda sucesión de disjuntos con la propiedad sub-J tiene también la propiedad SF. Por tanto, las sucesiones de clopenes unitarios en las k-álgebras de Boole tienen la propiedad (SF).

PROPOSICION 2.7

Sea $\mathcal{F}$ una k-álgebra de Boole y sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta de clopenes finitos con la propiedad SF. Existe una sucesión

$(B_k)_{k\in\omega}$ de clopenes infinitos y una subsucesión $(A_{n_k})_{k\in\omega}$ de la sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ tal que, para cada $k\in\omega$, $A_{n_k}\subset B_k$.

DEMOSTRACION

Por hipótesis existen dos conjuntos M_1^1 y $M_2^1\subset\omega$ infinitos y disjuntos tales que $Fr(\bigcup_{i\in M_1^1} A_i) \neq Fr(\bigcup_{i\in M_2^1} A_i)$. Sea $x_1 \in F_r(\bigcup_{i\in M_1^1} A_i)$, por tanto $x_1\in P$, tal que $x_1 \notin Fr(\bigcup_{i\in M_2^1} A_i)$. Existen clopenes B_1, entorno de x_1 e infinito, tal que $B_1\cap(\bigcup_{i\in M_2^1} A_i) = \phi$. Sea $n_1 \in M_1^1$ y $C_1 = B_1\cup A_{n_1}$. Se verifica que $C_1\cap(\bigcup_{i\in M_2^1} A_i) = \phi$. Por tanto, para cada $N\subset M_2^1$ infinito como $C_1\cap(\bigcup_{i\in N} A_i) = \phi$, se tiene que $C_1\cap Fr(\bigcup_{i\in N} A_i)= \phi$.

Consideremos ahora la sucesión $(A_i)_{i\in M_2^1}$. Existen M_1^2 y M_2^2 contenidos en M_2^1 infinitos y disjuntos tales que $Fr(\bigcup_{i\in M_1^2} A_i) \neq$ $\neq Fr(\bigcup_{i\in M_2^2} A_i)$. Procediendo como antes podemos construir un conjunto C_2 de la forma $C_2 = B_2\cup A_{n_2}$ con $n_2 \in M_1^2$, B_2 clopen entorno de un punto $x_2 \in Fr(\bigcup_{i\in M_1^2} A_i) \setminus Fr(\bigcup_{i\in M_2^2} A_i)$ y C_2 disjunto con C_1.

Procediendo de esta forma, por inducción, se prueba lo que se desea.

LEMA 2.8

Sea F una k-álgebra de Boole. Sea $x\in P$ y sea $x\in A$ para $A\in F$. Existe una sucesión $(B_k)_{k\in\omega}$ en F decreciente de clopenes infinitos tal que $B_1 = A$ y, para cada $k\in\omega$, es $x\in B_k$ y $B_k\setminus B_{k+1}$ infinito.

DEMOSTRACION

Sea $B_1 = A$. Sea $y \varepsilon A \cap P$ con $y \neq x$. Por ser P perfecto $A \cap P$ es infinito. Existen $B'_x, B'_y \varepsilon F$ tales que $x \varepsilon B'_x$, $y \varepsilon B'_y$, $B'_x \cap B'_y = \phi$. Sean $C_1 = B_1 \cap B'_x$ y $C_2 = B_1 \cap B'_y$. Se tiene que $C_1 \cap P \neq \phi$ y $C_2 \cap P \neq \phi$. Por tanto, C_1 y C_2 son infinitos, $C_1 \subset B_1$ y $C_2 \subset B_1$. Sea $B_2 = C_1$. Es claro que $B_1 \supset B_2$, $x \varepsilon B_2$ y $B_1 \setminus B_2 \supset C_2$. Por tanto $B_1 \setminus B_2$ es infinito. Hacemos con B_2 lo que hemos hecho con B_1 y procediendo por inducción se obtiene el resultado.

///

DEFINICION 2.9

Una sucesión disjunta $(A_n)_{n \varepsilon \omega}$ en F se dice que tiene la propiedad B si $Fr(\bigcup_{n \varepsilon \omega} A_n) \neq P$.

Si una sucesión tiene la propiedad sub-J ó la propiedad SF entonces alguna subsucesión tiene B.

PROPOSICION 2.10

Sea F una k-álgebra de Boole y $(A_n)_{n \varepsilon \omega}$ una sucesión de clopenes finitos y disjuntos. Si tiene la propiedad B, entonces existe una sucesión $(B_k)_{k \varepsilon \omega}$ de clopenes infinitos y disjuntos tales que $A_k \subset B_k$ para cada K

DEMOSTRACION

Existe un $x\in P$ tal que $x \notin Fr(\bigcup_{n\in\omega} A_n)$. Existe un $A\in \mathcal{F}$, tal que $x\in A$ y $A\cap(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \phi$. Por el lema anterior, sea $(B_k)_{k\in\omega}$ una sucesión decreciente de clopenes infinitos con $B_1=A$ y tales que para cada $k\in\omega$ es $x\in B_k$ y $C_k = B_k\setminus B_{k+1}$ es un clopen infinito. Se tiene que para cada $k\in\omega$ es $C_k\cap(\bigcup_{n\in\omega} A_n) =\phi$ y la sucesión $(C_k)_{k\in\omega}$ está formada por clopenes infinitos y disjuntos. La sucesión buscada es pues la $(D_k)_{k\in\omega}$, donde, para $k\in\omega$, es $D_k=C_k \cup A_k$.

PROPOSICION 2.11

Si $\mathcal{F}$ es una k-álgebra de Boole y $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta de clopenes finitos tal que ninguna subsucesión tiene la propiedad B (es decir, para cada $M\subset\omega$ infinito es $Fr(\bigcup_{i\in M} A_i) = P$) entonces existe un $N\subset\omega$ infinito y, para cada $i\in N$, una descomposición $A_i = B_i\cup C_i$, donde B_i y C_i son finitos, no vacios y disjuntos tales que $(B_i)_{i\in\omega}$ y $(C_i)_{i\in\omega}$ tienen la propiedad B.

DEMOSTRACION

Sean E y F clopenes infinitos disjuntos tales que $S = E\cup F$. Sea $M = \{i\in\omega: E\cap A_i\neq\phi\}$. Veamos que $M\subset\omega$ es infinito. Si fuese finito se tendría que $E\cap A_i = \phi$ para cada $i \in \omega\setminus M$, el cual sería infito, y por tanto $\bigcup_{i\in\omega\setminus M} A_i\subset F$ y $Fr(\bigcup_{i\in\omega\setminus M} A_i)\subset F \neq P$, en contra de lo supuesto. Por consiguiente, M es infinito. Sea $N = \{i\in M: F\cap A_i\neq\phi\}$. Si N fuese finito sería para cada $i \in M\setminus N$ (conjunto que separa un infinito), $F\cap A_i = \phi$ y, por tanto, $A_i\subset E$ y $Fr(\bigcup_{i\in M\setminus N} A_i)\subset E$, en contra de lo supuesto.

Por tanto, si para cada $i\varepsilon N$ definimos $B_i = A_i \cap E$ y $C_i = A_i \cap F$, resulta que $A_i \neq \phi \neq B_i$, $\bigcup_{i\varepsilon N} B_i \subset E$, $Fr(\bigcup_{i\varepsilon M} B_i) \subset E \neq P$; $Fr(\bigcup C_i \subset F \neq P$ y $Fr(\bigcup_{i\varepsilon M} B_i) \cap Fr(\bigcup_{i\varepsilon M} C_i) = \phi$. Esto prueba el resultado.

EJEMPLOS 2.12

1.- Sea F el álgebra de los conjuntos F_σ y G_δ de $[0,1]$ (Cf. pg. 10) La sucesión $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ definida por $A_n = \{1/2^n, \ldots, (2^n-1)/2^n\}$, que no tiene la propiedad sub J si tiene, sin embargo, la propiedad B pues existe un clopen infinito que no corta a ningún A_i. En efecto: sea $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de irracionales que converje a 1/5. El conjunto $\{x_i, i\varepsilon\omega\} \cup \{1/5\}$ es un F_σ y G_δ que es infinito y verifica esa propiedad.

Si por otro lado, en $S = S_t(F)$ consideramos el álgebra F' de los clopenes del cerrado $S' = \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$, el cual será un álgebra cociente de F, la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de clopenes de F' no tiene la propiedad B aunque si existe una subsucesión con la propiedad B. En efecto, sea $(A_{2i})_{i\varepsilon\omega}$ y sea M el clopen infinito de S' asociado a $\{\frac{1}{2^{2n-1}}, n\varepsilon\omega\}$. Es claro que M no corta a ningún elemento de $(A_{2i})_{i\varepsilon\omega}$

Observemos que en F la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ al tener la propiedad B verifica que existe una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ de clopenes infinitos y disjuntos tal que, para $i\varepsilon\omega$, es $A_i \subset B_i$. La sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ no tiene la propiedad sub J, pues en caso contrario la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ también la tendría.

2.- Si consideramos en el álgebra de Boole F de la pág.10 la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ definida para cada $i\varepsilon\omega$ por $A_i = \{(i,m);\ m\leq i\}$, se observa que dicha sucesión no tiene la propiedad sub J ni tampoco la propiedad B, aunque existe una subsucesión con dicha propiedad.

TEOREMA 2.13

Sea F un k-álgebra de Boole. Sea $\{\mu_n\}_{n\varepsilon\omega}\subset C(S)^*$. Si para toda sucesión $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ de clopenes infinitos y disjuntos se verifica que $\lim_{j\to\infty}|\mu_n(A_j)| = 0$ uniformemente en $n\varepsilon\omega$, entonces la sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en F.

DEMOSTRACION

Si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva, existirá una sucesión $(A_j)_{j\varepsilon\omega}$ en F de conjuntos disjuntos tal que $\lim_{j\to\infty}|\mu_n(A_j)| = 0$ pero no uniformemente en $n\varepsilon\omega$. Por tanto, existe un $\varepsilon>0$ y unas subsucesiones $(\mu_{n_k})_{k\varepsilon\omega}$ y $(A_{j_k})_{k\varepsilon\omega}$, de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ y $(A_j)_{j\varepsilon\omega}$ respectivamente, tales que $|\mu_{n_k}(A_{j_k})| > \varepsilon$ para todo $k\varepsilon\omega$. Denotemos esas subsucesiones como sus respectivas sucesiones de partida. Sea $M = \{i\varepsilon\omega:\ A_i$ es infinito$\}$. Si M fuese infinito, como $|\mu_i(A_i)| > \varepsilon$ para cada $i\varepsilon M$, tomando la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de clopenes infinitos y disjuntos, estamos en contradicción con nuestras hipótesis.Por tanto,todos,menos a lo sumo un número finito de clopenes de la sucesión son finitos,supongamos que todos lo son.

La sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es de clopenes finitos y disjuntos y verifica $|\mu_i(A_i)| > \varepsilon$ para cada $i\varepsilon\omega$. Distinguimos ahora dos casos mutuamente excluyentes.

a) Existe una subsucesión $(A_i)_{i\varepsilon N}$ con $N\varepsilon\omega$ infinito, con la propiedad B.

b) Toda subsucesión de $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ no tiene la propiedad B

Veremos que en ambos casos se llega a una contradicción.

a) En este caso, existe una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon N}$ de clopenes infinitos y disjuntos tal que, para $i\varepsilon\omega$, es $A_i \subset B_i$. Se verifica que para cada $i\varepsilon N$ es

$$|\mu_i(A_i)| < |\mu_i(B_i)|+|\mu_i(B_i \setminus A_i)| \tag{1}$$

como $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i \setminus A_i)_{i\varepsilon\omega}$ forman dos sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos se tiene que

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\varepsilon N}} |\mu_n(B_i)| = 0 \quad \text{uniformemente en } n\varepsilon\omega, \text{ y}$$

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\varepsilon N}} |\mu_n(B_i - A_i)| = 0 \quad \text{uniformemente en } n\varepsilon\omega.$$

Por tanto, para $\varepsilon>0$ dado, existen dos números $i_1, i_2 \varepsilon N$ tales que si $i \geq i_1$, $i\varepsilon N$, es $|\mu_n(B_i)| < \varepsilon/4$ y si $i \geq i_2$, $i\varepsilon N$, es

$|\mu_n(B_i-A_i)| < \varepsilon/4$, en ambos casos para cada $n\varepsilon\omega$. Por tanto para $i>\max(i_1,i_2)$ se tiene que $|\mu_n(A_i)| < \varepsilon/2$. Se obtiene, por tanto una contradicción.

b) Si ninguna subsucesión de $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad B, se verifica que existe un $N\subset\omega$ infinito tal que, para cada $i\varepsilon N$, se puede descomponer $A_i = B_i \cup C_i$, donde B_i y C_i son clopenes finitos, no vacios y distintos, de forma que $(B_i)_{i\varepsilon N}$ y $(C_i)_{i\varepsilon M}$ tiene la propiedad B.

Para cada $i\varepsilon N$ se tiene que

$$\varepsilon < |\mu_i(A_i)| \leq |\mu_i(B_i)| + |\mu_i(C_i)|$$

Sean $N^1 = \{i\varepsilon N: |\mu_i(B_i)|>\varepsilon/3\}$, $N^2 = \{i\varepsilon N: |\mu_i(C_i)|>\varepsilon/3\}$. Si los conjuntos N^1 y N^2 son finitos para cada $i\varepsilon N\setminus(N^1\cup N^2)$ se tiene que $|\mu_i(A_i)| \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$, lo cual no es posible, podemos suponer, por tanto que, por ejemplo, N^1 es infinito y que se tiene que $(B_i)_{i\varepsilon N^1}$ es una sucesión con la propiedad B.

Procediendo de forma análoga a como se hizo en el apartado a), se llega a una contradicción. Esto prueba que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en F.

///

COROLARIO 2.14

Sea F una k-álgebra de Boole. F tiene la propiedad de Grothendieck (resp. de VHS) si y solo si para cada sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$

en $\mathcal{C}(S)^*$ acotada y puntualmente convergente a cero en F (resp. puntualmente convergente a cero en F) y para cada sucesión $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ en F de clopenes infinitos y disjuntos se verifica $\lim_{j\to\infty} |\mu_n(A_j)| = 0$ uniformemente en $n\varepsilon\omega$.

Con los resultados hasta aquí obtenidos y reproduciendo las demostraciones de Freniche (|1983| y |1985|) se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 2.15

Sea F una k-álgebra de Boole. Si toda sucesión de clopenes infinitos y disjuntos en F tiene la propiedad Q (resp. IS) entonces F tiene la propiedad G (resp. VHS).

Nota: Observemos que si en un álgebra de Boole las sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos poseen alguna propiedad de interpolación entonces también la van a poseer las sucesiones de clopenes finitos con la propiedad B, ya que éstas pueden ser encajadas término a término en una sucesión de clopenes infinitos. Así pues, la única posibilidad de que una sucesión de clopenes finitos no tuviese la correspondiente propiedad de interpolación es que carezca de la propiedad B, lo que realmente no es "frecuente".

COROLARIO 2.16

Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $\mathcal{C}(S)^*$, si para todo G abierto y F_σ de S con $G\cap P \neq \phi$ se cumple que existe $\lim_{n\to\infty}|\mu_n(G)|$ entonces $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es débilmente relativamente compacto en $\mathcal{C}(S)^*$, es decir, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en F.

DEMOSTRACION

Si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no fuese uniformemente fuertemente aditiva en F, existiría en F en virtud del Teorema 2.13 una sucesión de clopenes infinitos y disjuntos, tal que $A_i \cap P \neq \phi$ para cada $i\varepsilon\omega$, y tal que $\lim_{j\to\infty} |\mu_n(A_j)| = 0$ pero no uniformemente en $n\varepsilon\omega$ por lo que existe un $\varepsilon>0$ tal que para ciertas subsucesiones de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ que denotamos igual, se verifica que $|\mu_n(A_n)| > \varepsilon$, para cada $n\varepsilon\omega$.

Definamos, para cada $n\varepsilon\omega$, $\lambda_n : P(\omega) \to \mathbb{R}$ por medio de la igualdad $\lambda_n(M) = \mu_n(\bigcup_{i\varepsilon M} A_i)$. Se verifica que $||\lambda_n|| \leq ||\mu_n||$. Por tanto, λ_n es una medida acotada en $P(\omega)$. Se cumple, además que existe $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n(M)|$ para cada $M\varepsilon P(\omega)$, ya que $\bigcup_{i\varepsilon M} A_i$ es un abierto F_σ que corta a P. Por consiguiente, la sucesión $(\lambda_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $P(\omega)$. Sin embargo, para cada $n\varepsilon\omega$ es $|\lambda_n(\{n\})| = |\mu_n(A_n)| > \varepsilon$ por lo que $\lim_{i\to\infty} |\lambda_n(\{i\})| = 0$ pero no uniformemente en $n\varepsilon\omega$. Esta contradicción prueba el resultado.

///

TEOREMA 2.17

Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $C(S)^*$ puntualmente convergente a cero en F. Se verifica que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en F si y solo si para cada abierto F_σ de S con $G\cap P \neq \phi$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} |\mu_n(G)| = 0$.

DEMOSTRACION

La condición suficiente es una consecuencia inmediata del corolario anterior. Para probar la condición necesaria supongamos que existe un abierto F_σ G tal que $G\cap P \neq \phi$ y tal que $\lim_{n\to\infty} |\mu_n(G)| \neq 0$. Existe pues un $\varepsilon>0$ tal que para cierta subsucesión de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$, que denotaremos igual, es $|\mu_n(G)| > \varepsilon$ para cada $n\varepsilon\omega$. Podemos escribir $G = \bigcup_{n\varepsilon\omega_\infty} A_n$ donde $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta.como $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$es ufa: $\lim_{i\to\infty} |\sum_{m=i} \mu_n(A_m)| = 0$ uniformemente en $n\varepsilon\omega$.

Por tanto, para $\varepsilon/2$ existe un $i_0\varepsilon\omega$ tal que para $i\geq i_0$ es $\forall n\varepsilon\omega$ $|\sum_{m=i}^{\infty} \mu_n(A_m)| < \varepsilon/2$. Como las medidas de Radon son numerablemente aditivas $|\mu_n(\bigcup_{m=i_0+1}^{\infty} A_m)| < \varepsilon/2$ para todo $n\varepsilon\omega$. El conjunto $B = A_1\cup\ldots\cup A_{i_0}$ es un clopen de F y se tiene, para cada $n\varepsilon\omega$, que

$$\varepsilon < |\mu_n(G)| < |\mu_n(B)| + |\mu_n(\bigcup_{m=i_0+1}^{\infty} A_m)| < |\mu_n(B)| + \varepsilon/2$$

Por tanto, $|\mu_n(B)| > \varepsilon/2$ para cada $n\varepsilon\omega$. Esta contradicción prueba nuestro resultado.

///

TEOREMA 2.18

Una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ es acotada en $C(S)^*$ si y solo si para cada G abierto y F_σ con $G\cap P \neq \phi$ se verifica que $(|\mu_n(G)|)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión acotada.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es evidente. Para probar la condición suficiente supongamos que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ no es uniformemente acotada en F, aplicando el Teorema 2.4 obtenemos que existe una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ de clopenes infinitos y una subsucesión de $(\mu_n)_{n\in\omega}$, que denotaremos igual, tal que $|\mu_n(A_n)| > n$. Procediendo como en el teorema anterior encontramos una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ de medidas en $P(\omega)$ que es uniformemente acotada pero que cumple

$$|\lambda_n(\{n\})| = |\mu_n(A_n)| > n$$

Esta contradicción prueba nuestro resultado.

///

COROLARIO 2.19

Sea F un k-álgebra de Boole. F posee la propiedad VHS (resp. G, resp. N) si y solo si se verifica que para cada sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ en $C(S)^*$ que sea puntualmente convergente a cero (resp. acotada y puntualmente convergente a cero, resp. puntualmente acotada) se verifica que para cada G abierto y F_σ en S con $G\cap P \neq \phi$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} |\mu_n(G)| = 0$ (resp. $\lim_{n\to\infty} |\mu_n(G)| = 0$, resp. $(|\mu_n(G)|)$) es una sucesión acotada.

OBSERVACION 2.20

Teniendo en cuenta que si G es un abierto F_σ con $G \cap P \neq \phi$ y $P \not\subset G$ (se puede conseguir así) será $F = G^C$ un cerrado G_δ tal que $F \cap P \neq \phi$. Si la sucesión $(|\mu_n(S)|)_{n\epsilon\omega}$ es acotada (resp. convergente a cero) y la sucesión $(|\mu_n(G)|)_{n\epsilon\omega}$ no es acotada (resp. no convergente a cero), entonces la sucesión $(|\mu_n(G^C)|)_{n\epsilon\omega}$ es no acotada (resp. no convergente a cero). Teniendo en cuenta esto, se deduce que los últimos resultados serían también válidos sustituyendo en los enunciados "G abierto F_σ" por " F cerrado G_δ".

CAPITULO III

En este Capítulo se dan caracterizaciones de las propiedades uniformemente fuertemente aditiva y uniformemente acotada de una sucesión de medidas en términos locales en primer lugar para los puntos del nucleo perfecto y en segundo lugar para los puntos del nucleo perfecto que no sean P-puntos. Esta última caracterización será de grán utilidad para la obtención en el próximo capítulo de una condición en álgebras de Boole que es suficiente para (N) pero no para (G).

El Capítulo se completa con un ejemplo de álgebra de Boole sin ninguna de las propiedades (N),(G),(VHS) o (R) tal que el álgebra de los clopenes del núcleo perfecto es un álgebra de Boole con todas esas propiedades. Damos también un ejemplo de álgebra de Boole tal que todo filtro maximal no principal (y por tanto punto de P),exepto uno,posee un elemento tal que la traza del álgebra en él es un álgebra de Boole con todas las propiedades citadas anteriormente . Esto produce que el álgebra de Boole carezca de la propiedad (G). Se concluye el capítulo con un resultado que muestra que si en la situación del álgebra anterior se hubiese tenido la más leve de las propiedades de interpolación (la propiedad sub J) entonces el álgebra en cuestión hubiese tenido todas esas propiedades.

PROPOSICION 3.1

Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en C(S)*.Entonces $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$ si y solo si para cada $x\varepsilon P$ existe un A_x en $\mathcal{F}$,tal que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}_{A_x}$

DEMOSTRACION

Dado que,para $A\varepsilon\mathcal{F}$,$\mathcal{F}_A=\{ B\varepsilon\mathcal{F} : B\subset A\}$, si μ es una medida en $\mathcal{F}$ tambien será una medida en $\mathcal{F}_A$ y si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es u.f.a. en $\mathcal{F}_A$ tambien lo será en $\mathcal{F}_B$ con $B\subset A$.La condición necesaria es evidente,veamos la suficiente: Para cada $x\varepsilon P$ sea A_x ,con $x\varepsilon A_x$,tal que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$es ufa en $\mathcal{F}_{A_x}$. Como $S = (\bigcup_{x\varepsilon P} A_x) \cup (\bigcup_{x\varepsilon D} \{x\})$, por la compacidad de S, $S = B_i \cup \dots \cup B_n$ donde cada B_i es del tipo A_x ó es un clopen unitario. En cualquier caso (μ_n) es u.f.a. en cada $\mathcal{F}_{B_i}$, $i=1,..,n$.

Sea $C_1=B_1$, $C_2=B_2\setminus B_1$, $C_3 = B_3\setminus(B_1\cup B_2)$ y asi sucesivamente se tiene que $S = C_i\cup \dots \cup C_n$ y $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es u.f.a. en cada $\mathcal{F}_{C_i}$, y que los C_i son disjuntos entre si.

Sea ahora $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta de clopenes en $\mathcal{F}$. Para cada $j=1,2,\dots,n$ sea $A_i^j = A_i\cap C_j$, $i\varepsilon\omega$. Se tiene que $A_i = A_i^1\cup \dots \cup A_i^n$. Para cada $m\varepsilon\omega$ es

$$|\mu_m(A_i)| \leq |\mu_m(A_i^1)| + \dots + |\mu_m(A_i^n)|$$

Dado $\varepsilon>0$ como para $j=1,2,\ldots,n$ es $(A_i^j)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F_{C_j}, existe un i_j tal que si $i\geq i_j$ y $m\varepsilon\omega$ es $|\mu_m(A_i^j)|<\frac{\varepsilon}{n}$. Por tanto, si $i>i_0=\max(i_1,\ldots,i_n)$ es $|\mu_m(A_i)|<\varepsilon$ $\forall\ m\varepsilon\omega$ c.q.d.

PROPOSICION 3.2

Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $C(S)^*$ puntualmente acotada en F Entonces $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es acotada en $C(S)^*$ si y solo si para cada $x\varepsilon P$ existe un A_x en F tal que $(|\mu_n|(A_x))_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión acotada.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es evidente. veamos la suficiente:

Como en la demostración de la proposición anterior podemos escribir $S=B_1\cup\ldots\cup B_n$ con cada B_i del tipo A_x del enunciado o bien B_i un clopen unitario. En cualquier caso, $(|\mu_m|(B_i))_{m\varepsilon\omega}$ es una sucesión acotada para $i=1,2,\ldots,n$. Como

$$||\mu_m||=|\mu_m|(S)\leq|\mu_m|(B_1)+\ldots+|\mu_m|(B_n),$$

se verifica que $(||\mu_n||)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión acotada.

///

Como consecuencia, se tienen las siguientes

COROLARIO 3.3

a.- F no tiene la propiedad (G) si y solo si existe una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ acotada y puntualmente convergente a cero en F y existe un $x\varepsilon P$ tal que para cada $A\varepsilon F$ con $x\varepsilon A$, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva en F_A.

b.- $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad (V.H.S) si y solo si existe una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ puntualmente convergente a cero en $\mathcal{F}$ y existe un $x\varepsilon P$ tal que para cada $A\varepsilon\mathcal{F}$ con $x\varepsilon A$ $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}_A$.

c.- $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad (N). Si y solo si existe una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ puntualmente acotada y existe un $x\varepsilon P$ tal que para cada $A\varepsilon\mathcal{F}$ con $x\varepsilon A$ es $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ no acotada.

DEFINICION 3.4

Sea X un espacio topológico. Se dice que $x\varepsilon X$ es un P-punto si la intersección de una familia numerable de entornos de x es un entorno de x.

De forma análoga se define el concepto de P-conjunto.

Estudiaremos estos conceptos en el caso en que el espacio topológico es el espacio de Stone de una k-álgebra de Boole. Está claro que si $x\varepsilon D$ entonces x es un P-punto. Como consecuencia del siguiente resultado será probada la existencia de puntos que no son P-puntos.

PROPOSICION 3.5

Si $x\varepsilon S$, x es un P-punto si y solo si x no pertenece a la frontera de ningún co-cero.

DEMOSTRACION

Se cumple que $x\varepsilon Fr(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i)$ si y solo si $x\varepsilon\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}\setminus(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i)$. Esto equivale a que $x\varepsilon\bigcap_{i\varepsilon\omega} A_i^c$ y $x\not\varepsilon\overline{(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i)^c} = \widehat{\bigcap_{i\varepsilon\omega} A_i^c}$. Denotando, para $i\varepsilon\omega$ $B_i = A_i^c$, obtenemos que la sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión de entornos de x tal que $\bigcap_{i\varepsilon\omega} B_i$ no es un entorno de x. Por tanto, esta última condición equivale a que x no sea un P-punto.

///

Dado que en el espacio de Stone de una k-álgebra de Boole, las fronteras de los conjuntos co-cero son no vacias y están contenidas en el núcleo perfecto, la proposición anterior garantiza la existencia de puntos que <u>no</u> son P-puntos.

Notemos que existen k-álgebras de Boole que no tienen P-puntos en el núcleo perfecto. En efecto, en $P(\omega)$ el núcleo perfecto es la frontera de un co-cero: $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega}\{i\}}\setminus\bigcup_{i\varepsilon\omega}\{i\}$. Esto también sucede cuando D es numerable y denso en S.

El siguiente resultado nos dá una caracterización algebráica de los P-puntos, cuya demostración es trivial.

PROPOSICION 3.6

Sea x un filtro maximal en el k-álgebra de Boole F. Se verifica que $x\varepsilon S$ es un no P-punto si y solo si existe una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ en x tal que para cada $A\varepsilon x$ existe un $i_0\varepsilon\omega$ tal que $A\not\leq B_{i_0}$.

///

A un filtro maximal con la propiedad indicada en la proposición anterior podría llamarsele "filtro maximal numerablemente recorrido". Está claro que un filtro maximal principal no tiene esa propiedad.

La existencia o no existencia de P-puntos en el núcleo perfecto de una k-álgebra de Boole no es una cuestión trivial. Sirva como ejemplo el caso de $P(\omega)/FIN$, cuyo espacio de Stone es ω^*, y cuyo núcleo perfecto es ω^*. En la demostración de la existencia de P-puntos se hace necesario la utilización de la Hipótesis del Continuo (Cf., 30).

En el caso general, la no existencia o la existencia de P-puntos depende de si la clase Σ, de los subconjuntos de P que son frontera de abiertos F_σ, recubre o no recubre a todo P. Recordemos, a proposito de la proposición que sigue, que en una k-álgebra de Boole si $M\subset S$ es infinito entonces M^d es un cerrado infinito y no numerable (Cf., p.16)

PROPOSICION 3.7

Sea F una k-álgebra de Boole, existe una infinidad no numerable de puntos en P que no son P-puntos.

DEMOSTRACION

Si para toda sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F fuese

$\overline{\bigcup A_i} \setminus \bigcup A_i = \phi$, sería $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ compacto, por lo que $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es finito y entonces F sería finita. Estamos en una contradicción pues en todo este trabajo suponemos que F es infinita. Por consiguiente existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F de disjuntos tal que $\overline{\bigcup A_i} \setminus \bigcup A_i \neq \phi$.

Para cada $i\varepsilon\omega$ sea $y_i \varepsilon A_i$ arbitrario, se cumple que $\{y_i\}^d \subset \overline{\bigcup A_i}$ y que $\{y_i\}^d \cap (\bigcup A_i) = \phi$. Por tanto, $\{y_i\}^d_{i\varepsilon\omega} \subset \overline{\bigcup A_i} \setminus \bigcup A_i$ y este compacto está formado por una infinidad no numerable de puntos donde todos son no P-puntos.

///

PROPOSICION 3.8

Sea $T \subset S$ un cerrado infinito. Si $x \varepsilon T$ es no P-punto para la topología relativa de T entonces x es no P-punto para la topología de S.

DEMOSTRACION

Si $x \in T$ es no P-punto para la topología relativa existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F tal que $A_i \cap T \neq \phi$ para cada $i\varepsilon\omega$, $x \varepsilon \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} (A_i \cap T)} \setminus \bigcup_{i\varepsilon\omega} (A_i \cap T)$,por tanto $x \in \overline{\bigcup A_i}$ y como $x \in T$ y $x \notin \bigcup A_i \cap T$ será $x \notin \bigcup A_i$ por tanto $x \in \overline{\bigcup A_i} \setminus \bigcup A_i$.

///

El recíproco del resultado anterior no es, en general, cierto. En efecto, todo punto $x \in \beta\omega\backslash\omega = \omega^*$ es no P-punto en la topología de $\beta\omega$. Sin embargo, en la topología relativa a ω^* existen puntos que son P-puntos (bajo HC, según se ha comentado anteriormente).

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

PROPOSICION 3.9

Si $T \subset S$ es un cerrado infinito y $x \in T$ es P-punto en S, lo es también para la topología relativa a T.

El caso de $\beta\omega$ y de ω^* nos muestra que el reciproco del resultado anterior no es cierto.

PROPOSICION 3.10

Sea F una k-álgebra de Boole. No existe un $T \subset S$ cerrado e infinito tal que todo $x \in T$ sea P-punto en S.

DEMOSTRACION

Como T es infinito, el álgebra de los clopenes del compacto o-dimensional T es un k-álgebra de Boole cuyo espacio de Stone es homeomorfo a T. Por tanto habría en T puntos que no son P-puntos para la topología relativa a T. Estos puntos serían no P-puntos en la topología de S. Esto prueba el resultado.

///

TEOREMA 3.11

Sea F un k-álgebra de Boole. Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $C(S)^*$ puntualmente acotada en F. La sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente acotada en F si y solo si para cada $x\varepsilon P$ que sea no P-punto existe un $A\varepsilon F$ con $x\varepsilon A$ tal que $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ sea una sucesión acotada.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es evidente. Veamos la condición suficiente. Si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente acotada en F entonces sabemos que existe un $x\varepsilon P$ tal que para todo $A\varepsilon F$ con $x\varepsilon A$ es $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión no acotada, y por tanto x es P-punto.

Sea G la familia de los $A\varepsilon F$ tales que la sucesión $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ es acotada. El conjunto $G = \bigcup_{A\varepsilon G} A$ es abierto y contiene a todos los átomos y a todos los no P-puntos del núcleo perfecto. Por tanto, el conjunto $F = G^c$ es un cerrado contenido en P y formado por P-puntos. Esto prueba que F ha de ser finito. Escribamos $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $A\varepsilon F$ tal que $x_1\varepsilon A$ y $\{x_2, \ldots, X_n\} \cap A = \phi$. Como $x_1\varepsilon A$, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es puntualmente acotada en $\mathcal{F}_A$ pero no es uniformemente acotada en este ál gebra, ya que para todo $B\varepsilon\mathcal{F}$ tal que $x_1\varepsilon B$ se verifica que $(|\mu_n|(B))_{n\varepsilon\omega}$ es no acotada. Veamos que para todo $p>0$ existe un $n_p\varepsilon\omega$ y una partición (E,F) de A, formada por conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$, tal que $|\mu_{n_p}(E)| > p$ y $|\mu_{n_p}(F)| > p$. En efecto, como $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ no es acotada, existe un $E\subset A$ en $\mathcal{F}$ y un $n_p\varepsilon\omega$ tales que

$$|\mu_{n_p}(E)| > p + \sup_n |\mu_n(A)|$$

entonces

$$|\mu_{n_p}(A\setminus E)| = |\mu_{n_p}(F)| = |\mu_{n_p}(A)-\mu_{n_p}(E)| \geq |\mu_{n_p}(E)|-|\mu_{n_p}(A)| > p$$

Por tanto, para $p=2$ existe un $n_1\varepsilon\omega$ y una partición (E_1,F_1) de A en conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$ tales que $|\mu_{n_1}(E_1)|>2$ y $|\mu_{n_1}(F_1)|>2$. Se tiene que $x_1\varepsilon F_1$ ó $x_1\varepsilon E_1$. Supongamos que $x_1\varepsilon F_1$. Escribimos $A_1=E_1$. Se tiene que $x_1\notin A_1$ que $|\mu_{n_1}(A_1)|>2$ y que $(|\mu_n|(F_1))_{n>n_1}$ no es una sucesión acotada pues $x_1\varepsilon F_1$. Efectuamos sobre A_1 lo mismo que hemos efectuado con A y obtenemos una partición (E_2,F_2) de F_1 y un $n_2>n_1$ tales que

$$|\mu_{n_2}(E_2)| > 3 + |\mu_{n_2}(A_1)|$$

$$|\mu_{n_2}(F_2)| > 3 + |\mu_{n_2}(A_1)|$$

Supongamos que $x_1 \varepsilon F_2$. Llamamos $A_2=E_2$ y se tiene que $x_1 \notin A_2$ y $|\mu_{n_2}(A_2)| > 3+|\mu_{n_2}(A_1)|$ y que $(|\mu_n|(F_2))_{n>n_2}$ no es una sucesión acotada, pues $x_1 \varepsilon F_2$.

Procediendo por inducción obtenemos una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en $\mathcal{F}$, formada por conjuntos disjuntos, y una sucesión $(\mu_{n_i})_{i\varepsilon\omega}$, subsucesión de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ y que denotaremos igual, tales que para cada $i\varepsilon\omega$ es $A_i \subset A$, $x_1 \notin A_i$, (con lo que $\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i \subset G$) y

$$|\mu_i(A_i)| > i+1+|\mu_i(A_{i-1})|. \qquad (*)$$

Como $x_1 \notin \bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i \subset A$, se tiene que $x_1 \notin \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \subset A$, pues x_1 es P-punto. Por tanto, $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \subset G$. Para cada $x \varepsilon \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ existe un $A_x \varepsilon \mathcal{G}$ tal que $x \varepsilon A_x \subset G$. Por la compacidad de $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ existen puntos $y_1, \ldots, y_m$ tales que $\overline{\bigcup_i A_i} \subset A_{y_i} \cup \ldots \cup A_{y_m} \subset G$. Sea $B = A_{y_1} \cup \ldots \cup A_{y_m} \subset G$. Como las sucesiones $(|\mu_n|(A_{y_1}))_{n\varepsilon\omega}, \ldots, (|\mu_n|(A_{y_m}))_{n\varepsilon\omega}$ son acotadas también es acotada la sucesión $(|\mu_n|(B))_{n\varepsilon\omega}$.

Por tanto, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente acotada en $\mathcal{F}_B$ pero se tiene que $(A_i)_{i\varepsilon\omega} \subset \mathcal{F}_B$. Esto está en contradicción con (*).

///

TEOREMA 3.12

Sea $\mathcal{F}$ una k-álgebra de Boole. Sea $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión en $\mathcal{C}(S)$ es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$ si y solo si para cada $x\varepsilon P$ que sea no P-punto existe un $A\varepsilon\mathcal{F}$, con $x\varepsilon A$, tal que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}_A$.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es evidente. Antes de probar la condición suficiente, notemos que si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en las álgebras $\mathcal{F}_{B_1}, \dots, \mathcal{F}_{B_m}$, donde $B_1, \dots, B_m$ forman una partición finita y disjunta en S, entonces $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$. Pasemos a la demostración de la condición suficiente. Si $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$, existe un $x\varepsilon P$ tal que para cada $A\varepsilon\mathcal{F}$ con $x\varepsilon A$, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}_A$. Por tanto, $x\varepsilon P$ es un P-punto. Sean ahora $\mathcal{G}$ y G, y $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ con el mismo significado que en la demostración de la proposición anterior. solo que por $\mathcal{G}$ se toma la familia de los $A\varepsilon F$ tales que $(\mu_n)_n$ es u.f.a. en F_A.

Sea, como antes, $A\varepsilon\mathcal{F}$ tal que $x_1\varepsilon A$ y $\{x_2, \dots, x_n\} \cap A = \phi$. Para cada B de $\mathcal{F}$ tal que $x_1\varepsilon B$ es $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no uniformemente fuertemente aditiva en $\mathcal{F}_B$, y, por tanto, en $\mathcal{F}_A$. Existe pues: un $\varepsilon>0$ y una subsucesión $(\mu_{n_i})_{i\varepsilon\omega}$ de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$, que será denotada como la sucesión de partida, tales que $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$ para cada $i\varepsilon\omega$. Si x_1 pertenece a algún A_i, eliminamos el término i de la sucesión. Por tanto, para cada $i\varepsilon\omega$ es $A_i\subset A$, $x_1\notin A_i$, $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$, $\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i\subset G$, $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}\subset A$, $x_1\notin\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i$. Por tanto, como x_1 es P-punto, $x_1\notin\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$. Como $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}\subset A$ y $x_1\notin\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$, se tiene que $\overline{\bigcup A_i}\subset G$. Por otro lado, dado que para cada $x\varepsilon\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ existe un $A_x\varepsilon F$ tal que $x\varepsilon A_x$. Por la compacidad de $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ existen puntos $y_1, \ldots, y_m$ tales que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}\subset A_{y_1}\cup\ldots\cup A_{y_m} = B$. Como $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva en $F_{A_{y_1}}$, $F_{A_{y_2}}$, ..., $F_{A_{y_m}}$, también lo es en F_B. Dado que $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión de disjuntos en F_B tales que $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$ para cada $i\varepsilon\omega$. Hemos obtenido una contradicción.

///

El siguiente resultado permite caracterizar (N), (G) ó (VHS) en términos de los no P-puntos del núcleo perfecto.

COROLARIO 3.13

Sea F una k-álgebra de Boole. F no tiene la propiedad de Vitali-Hahu-Saks (resp. Grothendieck, resp. Mikodym) si y solo si existe una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ puntualmente convergente a cero (resp. acotada y puntualmente convergente a cero, resp. puntualmente acotada en F) y existe un $x\varepsilon P$ no P-punto tal que para cada $A\varepsilon F$ con $x\varepsilon A$ se tiene que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva en F_A (resp. idem, resp. $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ es no acotada).

EJEMPLO 3.14

Exponemos a continuación un ejemplo,dado por Schachermayer (1978) de k-álgebra de Boole atómica que carece de las propiedades ((VHS),(N),(G) y (R)) y que sin embargo, su nucleo perfecto posee como álgebra de clopenes una que tiene todas esas propiedades.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.Sea F el álgebra formada por los conjuntos $A \subset \mathbb{N}$ tales que para todo,salvo un número finito, k el conjunto $\{2k-1,2k\}$ está contenido en A o en $\mathbb{N} \setminus A$. Schachermayer demuestra que esta álgebra de Boole carece de las propiedades citadas y que Ω ,su espacio de Stone,carece de sucesiones convergentes distintas de las triviales.Demuestra además que el espacio $\Omega \setminus \mathbb{N}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Es suficiente observar que $\Omega \setminus \mathbb{N}$ es el nucleo Perfecto de F y que $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ es el espacio de Stone de $P(\mathbb{N})/FIN$.

EJEMPLO 3.15

Consideramos aquí el álgebra de Boole descrita en el Ejemplo p.10 . Continuamos con la notación del ejemplo citado.Sea $Z=\{A\in\Omega \; d(A)=1\}$. Es inmediato comprobar que Z es un filtro maximal en F y que la aplicación d es la medida δ_Z.Sea X un filtro maximal en F tal que $X \neq Z$. Existe un $A \in Z$ tal que $A \notin X$. Como $d(A) = 1$, se tiene que $d(A^c)=0$ y $A^c \in X$. Por tanto, en $S= St(F)$ se verifica que para todo $X \neq Z$ existe un A de X con $d(A) = 0$. La traza del álgebra sobre un conjunto A de densidad cero es $P(A)$. Se tiene, por tanto, que para todo $X \in P$ y $X \neq Z$ existe un $A \in F$ con $X \in A$ y tal que F_A es un álgebra completa. Si para Z se tuviese la misma propiedad, según los resultados anteriores se podría afirmar que F tiene las propiedades (VHS),(N) y (G). Sin embargo, Freniche |1983| prueba que

F no tiene la propiedad (G). Por tanto, para todo $A \in Z$ se tiene que F_A no tiene la propiedad (G).

En el próximo teorema se prueba que todo álgebra de Boole que esté en la situación anterior y que además posea la propiedad Sub J para las sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos posee también la propiedad (VHS).

PROPOSICION 3.16

Sea F un k-álgebra de Boole. Si para cada $x \in P$ existe un $A_x \in F$ tal que $x \in A_x$ y tal que F_{A_x} tiene la propiedad (VHS) (resp. (N), (G)) exepto a lo sumo en un conjunto $M \subset P$, M discreto, y si además las sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos poseen la propiedad sub J entonces F tiene la propiedad (VHS) (resp. (N), (G)).

DEMOSTRACION

a).- Supongamos que $M = \{z\}$. Sea $(\mu_n)_{n\in\omega}$ una sucesión puntualmente convergente a cero en F. Si esta sucesión no fuese uniformemente fuertemente aditiva en F, existiría un $\varepsilon > 0$, una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ de clopenes infinitos y disjuntos y una subsucesión de $(\mu_n)_{n\in\omega}$ que será denotada igual tales que para todo $i\in\omega$, es $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$. Por la propiedad sub J existen un $A\in F$, y un par N_1, N_2 de subconjuntos infinitos de ω y disjuntos tales que para todo $i \in N_1$ es $A_i \subset A$ y para cada $i \in N_2$ es $A_i \subset A^C$. Se tiene que o bién $z \in A$ o bien $z \in A^C$. Si $z \in A^C$ entonces para cada $x \in A \cap P$ existe un clopen A_x tal que F_{A_x} tiene la propiedad (VHS). Por consiguiente, F_A tiene la propiedad (VHS). Dado que la sucesión $(\mu_i)_{i\in N_1}$ es una sucesión puntualmente convergente a cero en F_A y la sucesión $(A_i)_{i\in N_1}$ es una sucesión disjunta en F_A tal que $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$ para cada $i \in N_1$, llegamos a una contradicción.

b).- Si M es un conjunto discreto de cardinal arbitrario, se tiene que para todo $x \in P$ existe un $A_x \in F$ tal que $A_x \cap M$ es o vacio o unitario. En cualquiera de estos dos casos se deduce que F tiene la propiedad (VHS). Por tanto F tiene la propiedad (VHS).

El resto de la demostración es similar a lo demostrado antes.

///

CAPITULO IV

Este Capítulo está motivado por la condición adicional (que aquí será denotada por aD) que Dashiell |1981| añade a la condición up-down-semi-complete (u.d.s.c.) para obtener una condición que implique las propiedades (R) y (N). En primer lugar se va a estudiar una leve condición adicional (que aquí es denotada por (JL)) de expresión algebraica o topológica y que añadida a la condición (u.d.s.c.) nos da una condición suficiente para la propiedad (N). Con el posterior estudio del álgebra J de los medibles según Jordan del intervalo [0,1] viene a demostrarse que la condición (u.d.s.c.) junto con la JL no son suficientes para garantizar la propiedad (G). Se obtiene así la primera condición que conocemos que es suficiente para (N) y que no lo es para (G). La condición (aD), que es de tipo funcional es descompuesta en otras dos condiciones funcionales : la (aD') y la (aD") de forma que las dos propiedades juntas equivalen a la propiedad (aD) y la primera de ellas es equivalente a la propiedad (JL). De esta forma se detecta la diferencia fundamental que existe entre el álgebra de los subconjuntos de [0,1] que son simultaneamente F_σ y G_δ (que Dashiell prueba que tiene las propiedades (u.d.s.c) y (aD)) y el álgebra de los subconjuntos medibles-Jordan de $[0,1]$. Esta diferencia estriba en que la primera posee la propiedad (aD") mientras que la segunda no la tiene. Sin embargo, ambas poseen la propiedad (aD'). Es,pues, esta diferencia la responsable de que la primera tenga las propiedades (R) y (N) y de que la segunda tenga la propiedad (N) pero no la (G). El Capítulo finaliza con el estudio de algunas propiedades alternativas a la (aD) y que añadidas a la propiedad (u.d.s.c.) producen los mismos resultados que (u.d.s.c.) + (aD). Una de estas propiedades es una versión subsecuencial de la (aD) y que es denotada por (aDs). Nos queda abierto el problema de separar, a través de ejemplos concretos, estas últimas propiedades.

DEFINICION

Un álgebra de Boole F se dice que es up-down-semi-complete (u.d.s.c.) si para cada sucesión disjunta en F que tenga supremo se verifica que toda subsucesión también tiene supremo.

En este capítulo será usado el siguiente resultado de Dashiell 1981 : "Si F es un álgebra con la propiedad (u.d.s.c.) entonces para cada sucesión disjunta $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ en F y toda sucesión decreciente (B_n) con infimo el vacio y tal que $A_n < B_n$ para cada $n\varepsilon\omega$ se verifica que la sucesón $(A_n)_{n\varepsilon\omega}$ tiene supremo en F .

DEFINICION 4.1

Sea F un álgebra de Boole. Se dice que F verifica la propiedad "adicional de Dashiell" (abreviadamente aD) si para toda medida acotada $\mu>0$ numerablemente aditiva y toda sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ en de disjuntos tal que $\mu(A_n)=0$ para cada $n\in\omega$ existe un $A\in F$ tal que $A\cap(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \phi$ y $\mu(A) > 0$.

PROPOSICION 4.2

Sea F un álgebra de Boole. F cumple aD si y solo si cada medida estrictamente positiva y con soporte contenido en la frontera de un co-cero no es numerablemente aditiva

DEMOSTRACION

Supongamos que F cumple la propiedad aD. Sea $\mu\in C(S)^*$, $\mu>0$ tal que $\operatorname{car}\mu \subset \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \setminus \bigcup_{i\in\omega} A_i$ como $\operatorname{car}\mu \cap A_i = \phi$ para cada $i\in\omega$ es $\mu(A_i) = 0$ para cada $i\in\omega$. Sin embargo, si $A\in F$ y $\mu(A)>0$ entonces $A\cap\operatorname{car}\mu \neq \phi$, y $A\cap(\bigcup_{i\in\omega} A_i) \neq \phi$. Por tanto, no existe un $A\in F$ con $A\cap(\bigcup A_i) = \phi$ y tal que $\mu(A)>0$. Por consiguiente μ no es numerablemente aditiva.

Reciprocamente, si $\mu\in C(S)^*$, $\mu>0$ y μ es numerablemente aditiva, sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F tal que $\mu(A_i) = 0$ para cada $i\varepsilon\omega$. Si no existe un $A\varepsilon F$ con $A\cap(\bigcup A_i)_{i\varepsilon\omega} = \phi$ tal que $\mu(A)>0$ es que $car(\mu)\subset \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \setminus \bigcup_i A_i$ lo cual no es posible si μ es numerablemente aditiva.

///

PROPOSICION 4.3

Si F es un k-álgebra de Boole con la propiedad aD entonces F no es n-σ.

DEMOSTRACION

Sea $x\varepsilon P$ tal que x es de la frontera de un co-cero. La medida δ_x no es numerablemente aditiva por lo que debe de existir una sucesión con supremo en F.

En lo que sigue, intentamos sustituir la propiedad aD en una k-álgebra de Boole por una propiedad de carácter algebráico o topológico.

DEFINICION 4.4

Se dice que una k-álgebra de Boole F tiene la propiedad (JL) si para todo $x\varepsilon P$ que no sea P-punto existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ disjunta tal que $\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i \;\varepsilon F$ y tal que $x\varepsilon \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \setminus \bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i$.

PROPOSICION 4.5

$\mathcal{F}$ cumple la propiedad J1 si y solo si para cada $x \in S$ que no sea P-punto existe en $\mathcal{F}$ una sucesión $(B_i)_{i\in\omega}$ decreciente con $x \in B_i$ para cada i y $\widehat{\bigcap} B_i = \phi$.

DEMOSTRACION

Si x es no P-punto, existe una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ con $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \in \mathcal{F}$ y $x \in \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \setminus \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Añadamos el conjunto $(\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i})^c$ a la sucesión de partida. Reordenemos la sucesión tomando a ese conjunto como primer elemento. Se verfica que $x \in \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \setminus \bigcup A_i$ y que $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = S$. Sea $B_1 = A_1^c$, $B_2 = (A_1 \cup A_2)^c$, ... $B_n = (A_i \cup \ldots \cup A_n)^c$. La sucesión $(B_i)_{i\in\omega}$ es decreciente, $x \in B_i$ para cada $i \in \omega$ y $\widehat{\bigcap_{i\in\omega}} B_i = \phi$.

Para la demostración de la condición suficiente basta tomar complementarios.

///

PROPOSICION 4.6

Si $\mathcal{F}$ cumple la propiedad aD entonces cumple la propiedad (JL).

DEMOSTRACION

Sea $x \in S$ que no es P-punto. Existe un conjunto co-cero en cuya frontera esta x. Por tanto, la medida δ_x no es numerablemente aditiva. Por tanto, existe en F una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $\bigwedge B_i = \dot{\bigcap} B_i = \phi$ y tal que $\lim_{i\to\infty} \delta_x(B_i) \neq 0$. Por tanto, $x\varepsilon B_i$ para i mayor que un cierto i_0. Sin embargo, $x \notin \dot{\bigcap}_{i\varepsilon\omega} B_i$. ///

Notemos ahora que existen álgebras con las propiedades (N), (G), (VHS) y que no son (JL) ni (aD).

PROPOSICION 4.7

Sea F una k-álgebra de Boole. Si F cumple (JL) y (udsc) entonces F cumple la propiedad de Nikodym

DEMOSTRACION

Si F no cumple (N) entonces existe una sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ en $C(S)^*$ puntualmente acotada en F pero que no es uniformemente acotada en F. Según se vió en el teorema 3.11 , existe un $x\varepsilon P$ tal que para todo $A\varepsilon F$ con $x\varepsilon A$ es $(|\mu_n|(A))_{n\varepsilon\omega}$ una sucesión no acotada, siendo x no P-punto. Como x no es un P-punto, existe una sucesión decreciente $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $x\varepsilon B_i$ para cada $i\varepsilon\omega$ y sin embargo $\dot{\bigcap}_{i\varepsilon\omega} B_i = \phi$.

Sabemos que cuando una sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es puntualmente acotada en un álgebra de Boole pero no es uniformemente acotada; para cada p>0 es posible obtener E_p y F_p partición de la unidad S del álgebra en elementos disjuntos y $n_p \varepsilon\omega$ tales que:

$$|\mu_{n_p}(E_p)|>p \quad y \quad |\mu_{n_p}(F_p)|>p$$

Consideremos la sucesión $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ que no es uniformemente acotada en el álgebra F_{B_1} y p=1 existe E_1 y F_1 partición de B_1 y $n_1\varepsilon\omega$ tales que $|\mu_{n_1}(E_1)|>1$ y $|\mu_{n_1}(F_1)|>1$

Supongamos que $x\varepsilon E_1$ entonces ponemos $A_1=F_1$ y se tiene que $x\varepsilon E_1 \cap B_2$ por lo que $(\mu_n)_{\substack{n\varepsilon\omega \\ n>n_1}}$ no es uniformemente acotada en $F_{E_1 \cap B_2}$ existe por tanto E_2 y F_2 partición de $E_1 \cap B_2$ y $n_2>n_1$ tales que: $|\mu_{n_2}(E_2)|>2$ y $|\mu_{n_2}(F_2)|>2$

Supongamos que $x\varepsilon E_2$ entonces ponemos $A_2=F_2$ y se tiene que $x\varepsilon E_2 \cap B_3$ por lo que $(\mu_n)_{\substack{n\varepsilon\omega \\ n>n_2}}$ no es uniformemente acotada en $F_{E_2 \cap B_3}$ procediendo de esta forma, por inducción se obtiene: $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ sucesión de disjuntos, $(\mu_{n_i})_{i\varepsilon\omega}$ subsucesión de $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ que denotamos, igual tales que:

Para cada $i\varepsilon\omega$ es $A_i \subset B_i$ y $|\mu_i(A_i)|>i$ (1)

Como $\dot{\widehat{\bigcap_{i\varepsilon\omega}}} B_i = \phi$ y F es u.d.s.c., existe $\bigvee_{i\varepsilon\omega} A_i$, es decir $\overline{\bigsqcup_{i\varepsilon\omega}} A_i \varepsilon F$. Por tanto, $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ está contenida en la σ-álgebra Σ que genera. Esta está a su vez contenida en F y $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es puntualmente acotada en este σ-álgebra. Pero de (1) se deduce que $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ no es uniformemente acotada en Σ, siendo puntualmente acotada en Σ. Esta contradicción prueba el resultado.

Con objeto de motivar la próxima definición, recordamos algunos conceptos y resultados que son bien conocidos. Diremos que una medida de Radon μ en S es puntualmente no-atómica si $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x\varepsilon S$. Si existe un $x\varepsilon S$ tal que $\mu(\{x\}) \neq 0$ diremos que μ es no puntualmente no atómica. Diremos que $\mu:F\to\mathbb{R}$ es no-atómica si no existe un $A\varepsilon F$ que sea μ-átomo, es decir no existe un $A\varepsilon F$ tal que para todo $B\varepsilon F$ con $B\subset A$ es $\mu(B)=\mu(A)$ ó $\mu(B)=0$, es decir μ restringida a F_A es bi-valorada.

Diremos que μ es puramente atomica (o puntualmente atómica) si existe una sucesión $(a_i)_{i\varepsilon\omega}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{i\varepsilon\omega}|a_i|$ es convergente y una sucesión de medidas bi-valuadas ($\mu_i = \delta_{x_i}$ para algún $x_i \varepsilon S$) tal que $\mu= \sum a_i\delta_i$. Esto es equivalente a decir que μ como medida de Radon es atómica (en la terminología de Semadeni (1971 , pág.337), esta terminología puntualmente no atómica equivale a medida "atomless")

La caracterización topológica de estos coneptos viene dada por las dos siguientes proposiciones.

PROPOSICION 4.8

μ es no-atómica en F si y solo si car(μ) es perfecto.

DEMOSTRACION

Si car(μ) tuviese un punto aislado x, tomaríamos un $A\varepsilon F$ tal que $A \cap \text{car}(\mu) = \{x\}$ y entonces A sería un μ-átomo.

Reciprocamente si $A\varepsilon F$ es un μ-átomo, existe una descomposición: $\mu = \mu_1+\mu_2$, donde para cada $E\varepsilon F$ es $\mu_1(E) = \mu(E\cap A)$, $\mu_2(E) = \mu(E\cap A^c)$, $\text{car}(\mu) = \text{car}(\mu_1)\cup\text{car}(\mu_2)$. Como μ_1 es bi-valorada, existe un $a\varepsilon\mathbb{R}$ y un $x\varepsilon\text{sop}(\mu_1)$ tal que $\mu_1 = a\delta_x$. Por tanto, $\text{car}(\mu_1) = \{x\}$, $A\cap\text{car}(\mu) = \{x\}$ y car(μ) no es perfecto.

///

PROPOSICION 4.9

μ es fuertemente continua en F si y solo si μ es puntualmente-no-atómica

DEMOSTRACION

No se pierde generalidad en suponer que μ es positiva

Si existe un $x\varepsilon S$ tal que $\varepsilon = \mu(\{x\})>0$, tomando el número $\varepsilon/2$, existe una partición $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de S, formada por elementos de F, tal que $\mu(A_i)<\varepsilon$. Esta contradicción prueba la condición necesaria.

Si suponemos que μ no es fuertemente continua en la descomposición de Sobzyz y Hammer aparecería una medida bi-valorada y, por tanto, existiría un $x\varepsilon S$ tal que $\mu(\{x\})>0$. Por tanto μ no sería puntualmente-no-atómica.

///

Es evidente que si μ es puntualmente-no-atómica entonces es no-atómica.

En toda k-álgebra de Boole existe una medida no-atómica que, como medida de Radón, es puntualmente-atómica. En efecto, la proposición 1.14 , prueba que en el núcleo perfecto de una k-álgebra de Boole siempre existe un conjunto cerrado perfecto y separable $K = \overline{\{x_i\}_{i\epsilon\omega}}$. Es evidente que entonces $(x_i)_{i\epsilon\omega}$ es denso en si mismo (si existiese un x_j aislado, existiría un clopen A, con $x_j \epsilon A$ tal que $A \cap \{x_i\}_{i\epsilon\omega} = \{x_j\}$. Entonces, como $\overline{\{x_i\}_{i\epsilon\omega}} = \{x_j\} \cup \overline{\{x_i\}_{\substack{i\epsilon\omega \\ i\neq j}}}$ y como $\overline{\{x_i\}_{\substack{i\epsilon\omega \\ i\neq j}}} \subset A^c$, será $A \cap \overline{(x_i)_{i\epsilon\omega}} = \{x_j\}$, en contradicción con que $\{x_i\}_{i\epsilon\omega}$ es perfecto).

Tomemos $\mu = \sum a_i \delta_{x_i}$ donde $(a_i)_{i\epsilon\omega}$ es una sucesión positiva tal que $\sum a_i$ es convergente. Se tiene que μ es una medida de Radon puntualmente-atómica. Como $car(\mu) = \overline{\{x_i\}_{i\epsilon\omega}}$ es perfecto, μ es una medida no-atómica en $\mathcal{F}$.

La propiedad aD puede ser ahora descompuesta en otras dos.

DEFINICION 4.10

Sea $\mathcal{F}$ una k-álgebra de Boole. Se dice que $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (aD)' (resp. (aD)") si para toda medida $\mu>0$ y no puntualmente-no-atómica (resp. y puntualmente-no-atómica) cuyo soporte está contenido en la frontera de un co-cero no es numerablemente aditiva.

Es evidente que $\mathcal{F}$ cumple (aD) si y solo si cumple (aD)' y (aD)".

PROPOSICION 4.11

Si $\mathcal{F}$ es una k-álgebra de Boole, las propiedades (JL) y (aD)' son equivalentes.

DEMOSTRACION

Supongamos que $car(\mu) \subset \overline{\bigcup_{i\in\omega} B_i} \setminus \bigcup_{i\in\omega} B_i$ y que μ es no puntualmente-no-atómica. Sea $x\in car(\mu)$ tal que $\mu(\{x\})>0$. Como x no es P-punto existe en $\mathcal{F}$ una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ tal que $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = A\in\mathcal{F}$ y $x\in A\setminus\bigcup_{i\in\omega} A_i$. Se cumple entonces que $\mu(A\setminus\bigcup_{i\in\omega} A_i) \geq \mu(\{x\})>0$ y, por tanto, $\mu(A) > \sum_{i\in\omega} \mu(A_i)$. Esto prueba que μ no es numerablemente aditiva.

Reciprocamente, sea $x\in\overline{\bigcup_{i\in\omega} B_i} \setminus \bigcup_{i\in\omega} B_i$ y $\mu=\delta x$. Esta medida no es numerablemente aditiva. Existe pues una sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}$ tal que $A = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}\in\mathcal{F}$ y $\mu(A\setminus\bigcup_i A_i)>0$. Por tanto, $x\in A\setminus\bigcup_{i\in\omega} A_i$

///

Como consecuencia de este resultado, se tiene que $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (aD) si y solo si cumple la propiedad (JL) y la propiedad (aD)". Por tanto, si $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (udsc) y la propiedad (JL) entonces cumple la propiedad (N). Si además cumple (aD)" entonces cumple las propiedades (R) y (VHS).

DEFINICION 4.12

Sea $\mathcal{F}$ una k-álgebra de Boole. Se dice que $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (ccc)' si toda familia de clopenes infinitos y disjuntos es, a lo más, numerable.

PROPOSICION 4.13

Si $\mathcal{F}$ es una k-álgebra de Boole con la propiedad (ccc)' entonces en P no hay P-puntos.

DEMOSTRACION

Supongamos que $x \varepsilon P$ es un P-punto. Sea $\mathcal{G}$ la familia de los abiertos F_σ que contienen clopenes infinitos y que están contenidos en $S\backslash\{x\}$. Si $G \varepsilon \mathcal{G}$ es $\overline{G} \subset S\backslash\{x\}$ pues en caso contrario x sería no P-punto.

Se define ahora $G_1 \leq G_2$ si y solo si $G_1 = G_2$ ó $(G_2\backslash\overline{G_1}) \cap P \neq \phi$. Una cadena $(G_\alpha)_{\alpha \varepsilon I}$ formada por elementos distintos entre si, es numerable (ya que en caso contrario habría una familia no numerable de clopenes disjuntos). La cadena puede escribirse, por tanto como $(G_i)_{i \varepsilon \omega}$. Por tratarse de una colección numerable de abiertos F_σ se cumple que $\bigcup_{i \varepsilon \omega} G_i$ es también un abierto F_σ contenido en $S\backslash\{x\}$.

Este último conjunto es una cota superior de la cadena. Existe pues un elemento maximal en $\mathcal{G}$. Sea éste $G = \bigcup_{i \varepsilon \omega} A_i$. Veamos que si $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \subset S\setminus\{x\}$ estrictamente, contradecimos la maximalidad de G. En efecto, como $x\notin\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}$ es $x\in S\setminus\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}$. Este último conjunto es un abierto infinito que por ser entorno de $x\in P$ existe un $y\neq x$, $y\in P$ para el cual existe un $A_y\in\mathcal{F}$ entorno de y, con $x\in A_y\subset S\setminus\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}$. Por tanto, $A_y\subset S\setminus\{x\}$ y $A_y\cap\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = \phi$. Por tanto, $(\bigcup_{i\in\omega} A_i)\cup A_y$ mayora a $\bigcup_{i\in\omega} A_i$.

Por consiguiente se cumple que ó bien $\overline{\bigcup A_i} = S\setminus\{x\}$ ó bien $\overline{\bigcup A_i} = S$. En el primer caso se deduciría que $\{x\}$ es un clopen, lo cual es imposible pues $x\notin P$. En el segundo caso, se deduciría que $x\in\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}\setminus\bigcup_{i\in\omega} A_i$. En ambos casos se llega a contradicción y asi nuestro resultado queda probado.

///

Tratamos ahora de establecer una propiedad análoga a la (JL) sobre P-puntos pero con P-conjuntos que implica la propiedad (aD). Veamos que si $\mathcal{F}$ es un k-álgebra de Boole tal que para todo $H\subset S$ cerrado que no sea P-conjunto (en cuyo caso sería diseminado) se verifica que existe una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}$ tal que $A = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}\in\mathcal{F}$ y tal que $H\subset A\setminus(\bigcup_{i\in\omega} A_i)$ entonces $\mathcal{F}$ verifica la propiedad (aD). En efecto, si $car(\mu)\subset\overline{\bigcup B_i}\setminus\bigcup B_i$ y $\mu>0$ se tiene que $car(\mu)$ es un cerrado no P-conjunto. Por consiguiente existe una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ tal que $A = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i}$ y que $car(\mu)\subset A\setminus\bigcup_{i\in\omega} A_i$. Por tanto $\sum_{i\in\omega}\mu(A_i) = 0<\mu(A)$ y μ no es numerablemente aditiva.

Veamos también que enunciando una propiedad mucho más débil sobre los no P-conjuntos cerrados se tiene la propiedad (aD).

DEFINICION 4.14

Sea F una k-álgebra de Boole, diremos que F tiene la propiedad (JL1) si y solo si verifica la propiedad (JL) y para todo H cerrado perfecto y no P-conjunto existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ con $A = \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \varepsilon F$ tal que $H \cap (\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) = \phi$ y $H \cap A \neq \phi$.

Es evidente que si F cumple (JL1) entonces cumple (JL).

PROPOSICION 4.15

Todo k-álgebra de Boole con la propiedad (JL1) cumple la propiedad (aD).

DEMOSTRACION

Sea $\mu>0$ tal que $car(\mu) \subset \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} \setminus \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$. Si $car(\mu)$ no es denso en si mismo, según se vió en la pág.66 , no es numerablemente aditiva. Si $car(\mu)$ es perfecto existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $A = \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \varepsilon F$, $(car(\mu)) \cap (\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) = \phi$ y $(car(\mu)) \cap A \neq \phi$. Por tanto, $0 = \sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i) < \mu(A)$. Por tanto, μ no es numerablemente aditiva.

///

ESTUDIO TOPOLOGICO DEL ALGEBRA J

Consideremos la medida m de Lebesgue sobre el intervalo $[0,1]$. Sea J la clase de los conjuntos medibles-Jordan, es decir la clase de los $A \subset [0,1]$ tales que $m(\bar{A} \setminus \mathring{A}) = 0$. Es claro que $J = \{A \subset [0,1] / \chi_A$ es R-integrable$\}$. Schachermayer(1978) prueba que J es u.d.s.c. y que J tiene la propiedad (N) y que no verifica (G). Por tanto, J no cumple ni (VHS) ni (R). También está claro que J no cumple la propiedad (aD), ya que (udsc) + (aD) $\Longrightarrow$ (R).

PROPOSICION 4.16

J no tiene la propiedad (ccc)'.

DEMOSTRACION

Sobre el conjunto I de los irracionales de $[0,1]$ consideremos la relación de equivalencia $x R y$ si y solo si $x-y \in \mathbb{Q}$. Consideremos el conjunto cociente I/R. Cada clase de equivalencia está formada por una cantidad numerable de números reales. Dado que las clases de equivalencia forman una partición de I y que I es no numerable, el número de clases de equivalencia no es numerable. Para cada clase de equivalencia $\bar{x}$ tomamos el subconjunto $A_{\bar{x}} = \{x + 1/n, n>1\}$. Es evidente que cada conjunto $A_{\bar{x}}$ es medible-Jordan, infinito y que $(A_{\bar{x}})_{\bar{x} \in I/R}$ es una familia no numerable de conjuntos medibles-Jordan infinitos y disjuntos. ///

Aunque J no tiene la propiedad (ccc)' vamos a demostrar que en el núcleo perfecto, de S_J, el espacio de Stone de J, todos los puntos son no P-puntos. Simultáneamente, se probará que J tiene la propiedad (JL). Esto probará que la propiedad (JL) es estrictamente más débil que la (aD). Quedará además probado que las propiedades (udsc) y (JL) juntas no implican ni (G), ni (VHS) ni (R). Sin embargo, según se vió en la proposición (udsc) + (JL) $\Longrightarrow$ (N) 4.7

TEOREMA 4.17

En el núcleo perfecto de S_J se verifica que no hay P-puntos. J tiene la propiedad (JL).

DEMOSTRACION

Sea x un filtro maximal no principal de J. Como $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$, se verifica que $[0,1/2]$ ó $[1/2,1] \varepsilon x$. Sea I_1 el medible Jordan que esté en x. I_1 lo partimos por su punto medio en dos intervalos cerrados I_1^1 e I_1^2 tales que $I_1^1 \cup I_1^2 = I_1 \varepsilon x$. Uno de esos dos subintervalos estará en x. Lo denotamos por I_2. Así, por inducción se consigue una sucesión de intervalos encajados $(I_n)_{n\varepsilon\omega}$, cada uno de ellos, en x, tal que $d(I_n) = \frac{1}{2^n}$ tiende a cero para $n\to\infty$. Existe un $t_0 \varepsilon [0,1]$ tal que $\{t_0\} = \bigcap_{n\varepsilon\omega} I_n$. Como $\{t_0\}$ es me dible Jordan pero $\{t_0\} \not\in x$, ya que x es no principal, resulta que, interpretándolo en el espacio de Stone, la sucesión $(I_n)_{n\in\omega}$ es decreciente, está formada por clopenes entornos de x, tiene ínfimo y $x \not\in \bigwedge_{n\in\omega} I_n$.

OBSERVACION 4.18

En Kelley (1959) aparece una condición necesaria y suficiente para que sobre un álgebra de Boole F exista una medida estrictamente positiva (es decir $\mu: F \to \mathbb{R}$ y $\mu(A)>0$ para cada $A\in F$, $A\neq 0$), y acotada. Dicha condición será denominada condición (KL). Diremos que F cumple la propiedad (KL) si existe una colección numerable de subconjuntos de F, $(M_i)_{i\in\omega}$ tal que $F\setminus\phi = \bigcup_{i\in\omega} M_i$ y $I(M_i)>0$, para cada $i\in\omega$. Aquí, I denota el "número de intersección" de la familia correspondiente. Si B es una familia de elementos de F, para cada $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ sucesión finita de B definimos $i(\Delta) = \sup\{ \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)$ $x\in S\}$, si denotamos al número de elementos de Δ por $n(\Delta)$, se define

$$I(B) = \inf\{ \frac{i(\Delta)}{n(\Delta)},\ \Delta\in P_f(B)\}$$

Kelley, dá también una condición necesaria y suficiente para que un álgebra completa y (ccc) admita una medida numerablemente aditiva y estrictamente positiva. Esta condición es la que él llama débilmente numerablemente distributiva (w.c.d.). Por último aparece la condición dada por Ryll-Nardzewski (1959) que será denotada por (RN) . Se dice que F cumple la condición (RN) si existe una familia numerable de subconjuntos de F $(M_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon\omega} M_i = F\setminus\{\phi\}$ y tal que

1.- Para cada $i\varepsilon\omega$ es $I(M_i)>0$.

2.- Para cada sucesión creciente $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de F con supremo $\bigvee_{i\varepsilon\omega} A_i = A\varepsilon F$ se verifica que si $A\varepsilon M_j$ para algún $j\varepsilon\omega$ entonces existe un $m\varepsilon\omega$ tal que $A_m\varepsilon M_j$.

Se verifica que : un álgebra de Boole F admite una medida numerablemente aditiva y estrictamente positiva si y solo si F es (RN).Se tiene que si F tiene la propiedad (RN) entonces tiene la propiedad (KL) y por consiguiente F tiene la propiedad (ccc).

En relación con estos conceptos conviene resaltar algunos resultados interesantes.

Si F es un álgebra de Boole separable (existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F tal que para cada $A\varepsilon F$ existe un $i\varepsilon\omega$ con $A_i\subset A$), entonces satisface (Kl), incluso existe una medida estrictamente positiva que no es numerablemente aditiva.

Si F es un álgebra de Boole separable y sin átomos, F no admite una medida numerablemente aditiva y estrictamente positiva. Esto prueba que la condición (Kl) no implica (RN) . Un ejemplo concreto estaría dado por el álgebra de los clopenes de $\{0,1\}^{\omega}$. Schachermayer (Cf., 36 , pg. 26) prueba que en ese álgebra no existe medi da numerablemente aditiva de ningún tipo.

Es evidente que si F tiene algún átomo, entonces existe en F una medida numerablemente aditiva: basta tomar δ_x si x es un clopen de S. Por tanto, para que en F no exista una medida numerablemente aditiva es necesario que F sea sin átomos. Por otro lado, si F fuese n-σ entonces es evidente que toda medida en F es numerablemente aditiva. Por tanto, para que en F no existan medidas numerablemente aditivas es necesario que F sea no n-σ.

Si en S existiese un x tal que x no está en la frontera de ningún co-cero con supremo entoces δ_x sería numerablemente aditiva. Por tanto, para que F no tenga medida numerablemente aditiva es necesario que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1.- S es perfecto.

2.- Existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de disjuntos en F tal que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = S$.

3.- Para cada $x\varepsilon S$ existe algún co-cero $\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$ tal que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} \varepsilon F$ y $x\varepsilon \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} \setminus \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$.

La busqueda de una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Boole F no posea una medida numerablemente aditiva queda parcialmente resuelta con el siguiente teorema.

TEOREMA 4.19

Sea F un álgebra de Boole. No existe una medida no puntualmente-no-atómica y numerablemente aditiva si y solo si S es perfecto (es decir F no tiene átomos) F es no n-σ y todo $x \varepsilon S$ es de la frontera de algún co-cero con supremo (es decir co-cero con clausura abierta).

DEMOSTRACION

La condición necesaria es, ahora, evidente. La condición suficiente la probaremos por reducción al absurdo. Sea μ una medida numerablemente aditiva y no puntualmente-no-atómica. Esto mismo ocurre con $\lambda=|\mu|$. Existe pues un $x \varepsilon S$ tal que $\mu(\{x\})>0$. Si existiese una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F tal que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} = B \varepsilon F$ y fuese $x \varepsilon B \setminus \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$ entonces $\lambda(\bigcup B_i)<\lambda(\bigcup B_i \cup \{x\}) \leq \lambda(B)$, en contra de que λ sea numerablemente aditiva. Por tanto x no es de la frontera de ningún co-cero con supremo.

///

PROPOSICION 4.20

Si $S=P \cup D$ es la descomposición perfecta-dispersa de una k-álgebra de Boole F entonces toda medida de la forma $\mu = \sum a_i \delta_{x_i}$ con $\sum |a_i|$ convergente y $\{x_i\}_{i\varepsilon\omega} \subset D$ es numerablemente aditiva.

DEMOSTRACION

Se puede suponer que μ es positiva, si μ no es numerablemente aditiva existe una sucesión $(A_i)_{i\epsilon\omega}$ de disjuntos tal que $\bigcup_{i\epsilon\omega} A_i = S$ y que $\sum\mu(A_i) = \mu(\bigcup A_i)<\mu(s)$. Por tanto existe un $j\epsilon\omega$ tal que $x_j \epsilon S\setminus\bigcup_{i\epsilon\omega} A_i$. Esto no es posible pues $S\setminus\bigcup_{i\epsilon\omega} A_i$ es de interior vacío.

///

Según la terminología de Bashkara-Rao-Bashkara-Rao (Cf., diremos que una medida $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ es <u>pura</u> si no existe una medida numerablemente aditiva en $\mathcal{F}$ tal que $0\leq\lambda(A)\leq|\mu|(A)$ para cada $A\epsilon\mathcal{F}$. La descomposición de Yosida-Hewitt de una medida acotada $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ nos permite poder escribir, de forma única $\mu=\mu_c+\mu_p$ donde μ_c es numerablemente aditiva y μ_p es una carga pura.

PROPOSICION 4.21

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole con la propiedad (KL). $\mathcal{F}$ no admite una medida numerablemente aditiva si y solo si toda medida estrictamente positiva es pura.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es consecuencia inmediata de la descomposición de Yosida-Hewitt. Recíprocamente, si v es una medida numerablemente aditiva veamos que $v=0$ (suponemos que $v\geq 0$, pues, en caso contario tomariamos $|v|$). Por verificar F la propiedad (KL), existe una medida μ estrictamente positiva, que, por hipótesis, es pura. Como $\lambda = \mu+v$ es estrictamente positiva será λ pura. Pero como $v\leq \lambda$ necesariamente $v=0$.

///

PROPOSICION 4.22

Sea F un álgebra de Boole y sea $H\subset S$. Existe una medida acotada $\mu:F\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $car(\mu) = H$ si y solo si H es cerrado y $F_H=F/I$, donde $I = \{A\varepsilon F\colon A\cap H = \phi\}$, cumple (KL).

DEMOSTRACION

Para probar la condición necesaria basta observar que μ es estrictamente positiva en F_H, pues $\mu(A\cap H) \neq 0$ si $A\cap H \neq \emptyset$ y $\mu(A\cap H) = \mu(B\cap H) = \mu(A) = \mu(B)$ si $A\cap H = B\cap H$.

Reciprocamente, la aplicación inclusión $i:H\rightarrow S$ es continua e inyectiva. Por tanto, existe una aplicación $t:C(H)^*\rightarrow C(S)^*$ lineal e inyectiva. Si $\mu\varepsilon C(H)^*$ es estrictamente positiva, la cual existe por cumplir F_H la propiedad (KL) y ser H el espacio de Stone de F_H, es evidente que la medida $t(\mu)\varepsilon C(S)^*$ define una medida en F tal que $car(t(\mu)) = H$.

///

Vamos a tratar ahora de establecer una condición más débil que (JL1) y que siga implicando (aD). Diremos que un cerrado H tiene la propiedad (KL) cuando el álgebra F_H tenga la propiedad (KL).

DEFINICION 4.23

Diremos que F verifica (JL2) si para todo cerrado con la propiedad (KL) $H\subset S$ que no sea P-conjunto, existe una sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ en F con supremo $A\in F$ tal que $(\bigcup_{i\in\omega} A_i)\cap H = \phi$ pero $A\cap H \neq \phi$.

Si, en particular un cerrado (KL) verifica la propiedad aquí descrita , se dirá que H cumple (JL2).

Es evidente que si F cumple (JL2) entonces cumple (aD).

Veamos a continuación que las propiedades (JL) y (JL2) pueden ser caracterizadas a través de la regularidad de los abiertos F_σ de S.

PROPOSICION 4.24

Sea F un álgebra de Boole. Sea x un no P-punto de S. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.- Existe en F una sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ con supresmo $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = A\in F$ tal que $x\notin\bigcup A_i$ y $x\in A$ (es decir x tine la propiedad JL).

2.- Existe un co-cero $\bigcup_{i\in\omega} C_i$ tal que $x\in\overline{\bigcup C_i}\setminus\bigcup C_i$ y existe un $A\in F$ tal que $x\in A\subset\overline{\bigcup_{i\in\omega} C_i}$.

3.- Existe un co-cero $\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} C_i$ tal que $x\varepsilon \overset{\bullet}{\overline{\bigcup C_i}} \setminus \bigcup C_i$.

DEMOSTRACION

Es evidente que 1 $\Longrightarrow$ 2 pues basta tomar el co-cero $\bigcup A_i$ ya que $x\varepsilon \overline{\bigcup A_i} \setminus \bigcup A_i$ y el conjunto $A = \overline{\bigcup A_i}$ verifica que $x\varepsilon A$ y $A\varepsilon F$.

También es claro que 2 $\Longrightarrow$ 3 pues si $x\varepsilon A \subset \overline{\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} C_i}$, con $A\varepsilon F$ y $x\varepsilon \overline{\bigcup C_i} \setminus \bigcup C_i$, se tiene que $x\varepsilon A \subset \overset{\bullet}{\overline{\bigcup C_i}}$ y, por tanto, $x\varepsilon \overset{\bullet}{\overline{\bigcup C_i}} \setminus \bigcup C_i$.

Finalmente, sea $A\varepsilon F$ tal que $x\varepsilon A \subset \overline{\bigcup C_i}$. Como $\bigcup C_i$ es denso en $\overline{\bigcup C_i}$ será $(\bigcup C_i) \cap A$ denso en A. Por tanto $\overline{\bigcup C_i \cap A} = A$ y $x \notin \bigcup C_i \cap A$. Esto prueba que 3 $\Longrightarrow$ 1.

///

PROPOSICION 4.25

Sea F un álgebra de Boole. Sea H un cerrado no P-conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.- Existe en F una sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ con supremo $A = \overline{\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} A_i} \varepsilon F$ tal que $\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} A_i \cap H = \phi$ y $A \cap H \neq \phi$.

2.- Existe un co-cero $\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} C_i$ tal que $H \subset \overline{\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} C_i} \setminus \bigcup C_i$ y existe un $A\varepsilon F$ tal que $A \subset \overline{\bigcup C_i}$ y $A \cap H \neq \phi$.

3.- Existe un co-cero $\bigcup\limits_{i\varepsilon\omega} C_i$ tal que $H \subset \overline{\bigcup C_i} \setminus \bigcup C_i$ y $H \cap \overset{\bullet}{\overline{\bigcup C_i}} \neq \phi$.

DEMOSTRACION

Probemos que $1 \Longrightarrow 2$. Por ser H no P-conjunto se tiene que $H \subset \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} \setminus \bigcup B_i$ para alguna sucesión disjunta $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F. Por hipótesis existe una sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F tal que $\overline{\bigcup A_i} = A\varepsilon F$, $A \cap H \neq \phi$ y $\bigcup A_i \cap H = \phi$. Sea, para cada $i\varepsilon\omega$, $C_i = A_i \cup B_i$. Se tiene que $H \subset \overline{\bigcup C_i} \setminus \bigcup C_i$, $A \subset \overline{\bigcup C_i}$ y $A \cap H \neq \phi$.

La implicación $2 \Longrightarrow 3$ es evidente. Veamos que $3 \Longrightarrow 1$. Sea $x\varepsilon H$ tal que $x\varepsilon \dot{\overline{\bigcup C_i}}$. Sea $A\varepsilon F$ tal que $x\varepsilon A \subset \overline{\bigcup C_i}$. Como $\bigcup C_i$ es denso en $\overline{\bigcup C_i}$, se verifica que $\bigcup C_i \cap A$ es denso en A. Por tanto $\overline{\bigcup C_i \cap A} = A$, $H \cap A \neq \phi$ y $H \cap (\bigcup C_i \cap A) = \phi$.

///

Hemos visto que si F cumple la propiedad (JL2) entonces cumple la propiedad (aD). Los siguientes resultados intentan obtener un reciproco parcial del resultado anterior.

LEMA 4.26

Si F cumple la propiedad (aD) entonces toda medida acotada cuyo soporte esté en la frontera de algún co-cero es pura.

DEMOSTRACION

Sea $\mu: F \to \mathbb{R}$ una medida tal que $\mathrm{car}(\mu) \subset \overline{\bigcup B_i} \setminus \bigcup B_i$.

Sea $\mu = \mu_c + \mu_p$ la descomposición de Yosida-Hewit de μ. Supondremos que $\mu \geq 0$ (en caso contrario se tomaría $|\mu|$ y su correspondiente descomposición). Como $\mu_c \geq 0$ y $\mu_p \geq 0$, se cumple que $\mathrm{car}(\mu) = \mathrm{car}(\mu_c) \cup \mathrm{car}(\mu_p)$. Por tanto, $\mathrm{car}(\mu_c) \subset \overline{\bigcup B_i} \setminus \bigcup B_i$, $\mu_c = 0$ y $\mu = \mu_p$ es pura.

///

TEOREMA 4.27

Sea F un álgebra de Boole con las propiedades (udsc) y (aD). Para todo cerrado H no P-conjunto y con la propiedad (KL) se verifica que o bien H verifica (JL2) ó bien F_H es tal que no admite una medida acotada y numerablemente aditiva.

DEMOSTRACION

Sea H cerrado y no P-conjunto y con la propiedad (KL). Existe una medida estrictamente positiva en F_H que da lugar a una medida $\mu \geq 0$ en F con $car(\mu) = H$. Como H es no P-conjunto, existe una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ de disjuntos tal que $H \subset \overline{\bigcup B_i} \setminus \bigcup B_i$. Por la propiedad (aD) se tiene que μ no es numerablemente aditiva y además μ es pura.

Supongamos que H no verifica (JL2). Para toda sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F, disjunta y con supremos $A = \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$, si se cumple que $(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) \cap H = \phi$, es también $A \cap H = \phi$. Existe una sucesión con supremo que corta a H pues como μ no es numerablemente aditiva existe en F una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega} \subset F$ de disjuntos con $\overline{\bigcup A_i} = A\varepsilon F$ y $\mu(A) > \sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i) = \mu(\bigcup A_i)$. Por tanto, $A \cap H \neq \phi$. Veamos que para cada sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F que cumple la condición,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = A\varepsilon F, \quad A \cap H \neq \phi \\ \sum \mu(A_i) < \mu(A) \end{array}\right. \qquad (1)$$

Se cumple que existe un $N \subset \omega$ infinito tal que $A = A^N \cup A^M$ con

$A^N = \overline{\bigcup_{i\in N} A_i}$ y $A^M = \overline{\bigcup_{i\in M} A_i}$, $M = \omega\setminus N$, $A_i\cap H \neq \phi$ para $i\in N$, $A^M\cap H\neq\emptyset$ y $A\cap H = A^N\cap H$. Además se verifica que $A\cap H = A^N\cap H = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i\cap H} = \overline{\bigcup_{i\in N} A_i}\cap H$. En efecto, sea $N = \{i\in\omega: \mu(A_i)\neq 0\}$. Si N es finito, supongamos que $n = \{1,2, \dots, k\}$. Se tiene que

$$\mu(A)>\mu(A_1) + \dots + \mu(A_k)+ \sum_{k+1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Como $\sum_{k+1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$ se tiene que $\mu(A\setminus(A_1\cup\dots\cup A_k))>0$ y el conjunto $A\setminus(A_1\cup\dots\cup A_k)$ es un clopen que corta a H y es el supremo de la sucesión $(A_i)_{i\geq k+1}$ que está fuera de H. El conjunto H tendría, por consiguiente, la propiedad (JL2) en contra de nuestras suposicionnes. Por consiguiente N es infinito. En virtud de la propiedad (udsc), se puede poner $A = A^N\cup A^M$, donde $M = \omega\setminus N$, $A^N = \overline{\bigcup_{i\in N} A_i}$, $A^M = \overline{\bigcup_{i\in M} A_i}$. Si $\mu(A^M)>0$ sería $A^M\cap H \neq \phi$, lo que no es posible pues suponemos que H no es (JL2). Por consiguiente $\mu(A^M) = 0$ y además, $\sum_{i\in M}\mu(A_i) = 0$. Por tanto, $\mu(A) = \mu(A^N) > \sum_{i\in\omega}\mu(A_i) = \sum_{i\in N}\mu(A_i)$. Veamos que $A\cap H = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i\cap H}$ probando que $A^N\cap H = \overline{\bigcup_{i\in N} A_i\cap H}$. En efecto, si $\overline{\bigcup_{i\in N} A_i\cap H}\subset A^N\cap H$ existe un $x\in A^N\cap H$ tal que $x\notin\overline{\bigcup A_i\cap H}$. Entonces existe un $B_x\in\mathcal{F}$ entorno clopen de x en H tal que $B_x\cap H\subset A^N\cap H$ (se puede tomar $B_x\subset A^N$) y $B_x\cap H\cap(\overline{\bigcup_{i\in M} A_i\cap H}) = \phi$. Como $x\in H$ y $x\notin\overline{\bigcup_{i\in N} A_i\cap H}$ será $x\in A^N\setminus\bigcup_{i\in N} A_i$. Veamos que B_x corta a infinitos términos de la sucesión $(A_i)_{i\in N}$. En efecto, si cortase solamente a un número finito $L = \{n_1, \dots, n_k\}$, denotando $N_1 = N\setminus\{n_1, \dots, n_k\}$, se tendría $(A_{n_1}\cup \dots\cup A_{n_k})\cup(\overline{\bigcup_{i\in N_1} A_i}) = A^N$ y será $B_x\cap(\overline{\bigcup_{i\in N_1} A_i}) = \phi$, (ya que si existe un elemento $y \notin B_x \cap (\overline{\bigcup_{i\in M_1} A_i})$ sería B_x entorno de $y \in \overline{\bigcup_{i\in N_1} A_i}$. Por tanto sería $B_x \cap (\bigcup_{i\in N_1} A_i) \neq \phi$. Por consiguiente, como $x \in A^N \setminus \overline{\bigcup_{i\in N_1} A_i}$, tendrá que ser $x \in (\overline{A_{n_1} \cup \dots \cup A_{n_k}}) = A_{n_1} \cup \dots \cup A_{n_k}$, en contra de que $x \in A^N \setminus \bigcup_{i\in N} A_i$. Se tiene finalmente que $B_x = \overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i \cap B_x}$, donde $B_x \cap H \neq \phi$ y la sucesión $(A_i \cap B_x)_{i\in\omega}$ está formada por disjuntos tales que $\bigcup_{i\in\omega} (A_i \cap B_x) \cap H = B_x \cap (\bigcup_{i\in\omega} A_i \cap H) = \phi$.

Veamos ahora que para todo $A \in F$ tal que $A \cap H \neq \phi$ se puede hallar una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ en F tal que $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = A$ y que esté en la situación (1).

En efecto, dado que $0 = \mu_c(A) = \inf\{ \sum_{i\in\omega} \mu(A_i) : (A_i)_{i\in\omega}$ sucesión disjunta en F con $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = A \in F\}$, se tiene que tomando $\varepsilon < \mu(A)$, existe una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ con $\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} = A \in F$ y $\sum \mu(A_i) < \varepsilon < \mu(A)$. Por tanto $(A_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión con supremo que está en la situación de (1).

Consideremos ahora el álgebra F_H y su correspondiente espacio de Stone H, μ es una medida estrictamente positiva en F_H que será denotada por $\bar{\mu}$ y es tal que $\mathrm{car}\,\bar{\mu} = H$. Sea $\bar{\mu} = \bar{\mu}_p + \bar{\mu}_c$ la descomposición de Yosida-Hewitt en F_H, con $\bar{\mu}_p$ pura en F_H y $\bar{\mu}_c$ numerablemente aditiva en F_H (no necesariamente lo es en F).

Veamos que $\bar{\mu}_c = 0$ por lo que μ no es sólo medida pura en F sino también lo es como medida en F_H. En efecto, supongamos que

$A\cap H \neq \phi$ con $A\cap H\varepsilon F_H$, se tiene que $\bar{\mu}_c(A\cap H) = \inf\{\sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i\cap H):(A_i\cap H)_{i\varepsilon}$ sucesión de disjuntos con $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i\cap H} = A\cap H\}$. Como para cada $A\varepsilon F$ y $\varepsilon>0$ tales que $\varepsilon<\mu(A)$ se cumple que

$$0 = \mu_c(A) = \inf\{\sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i):(A_i)_{i\varepsilon\omega} \text{ sucesión disjunta en } F \text{ con } \overline{\bigcup A_i}=A\},$$

encontramos en F una sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = A$ y $\sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i)<\varepsilon<\mu(A)$. Esa sucesión está en la situación (1). Por ello, existe un $N\subset\omega$ infinito tal que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i\cap H} = A\cap H$ y $\sum_{i\varepsilon N} \mu(A_i\cap H) = \sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i)<\varepsilon$. Por tanto $\mu_c(A\cap H)<\varepsilon$ y esto ocurre para cualquier $\varepsilon>0$. Por consiguiente $\mu_c(A\cap H) = 0$ para cada $A\cap H\varepsilon F_H$. Por tanto $\bar{\mu}_c=0$, μ es una media pura y estrictamente positiva en F_H, toda medida μ estrictamente positiva en F_H es pura en F_H y, según se vió en el teorema 4.21 , F_H es un álgebra que no admite una medida numerablemente aditiva.

///

La traducción algebráica de la propiedad (aD) no está aún completada. Para conseguir dicha traducción sería de gran utilidad el poder responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Cual es la condición necesaria y suficiente para que una k-álgebra de Boole con la propiedad (KL) no posea una medida numerablemente aditiva y puntualmente no atómica?.

- ¿Puede ser una medida μ numerablemente aditiva en F, con car μ = $= H \subset S$, y ser μ pura en F_H?.
- ¿Cual es una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Boole no admita una media numerablemente aditiva?.

No obstante, para un tipo particular de álgebras, las que cumplen (u.d.s.c.), es posible obtener una caracterización algebráica de la propiedad (aD). En ella usamos un resultado de A.I. Veksler (41) que, traducido a nuestra nomenclatura, nos indica que F cumple la propiedad (aD) si y solo si cada medida numerablemente aditiva en F es hereditariamente numerablemente aditiva (a álgebras cocientes).

DEFINICION 4.28

Sea F un álgebra de Boole. Sea S el espacio de Stone de F. Llamaremos núcleo σ-normal de F al conjunto $K = \bigcup\{\text{car}\mu : \mu$ numerablemente aditiva en $F\}$.

Si $S = P \cup D$ es la descomposición perfecta-dispersa de S entonces se cumple $D \subset \bigcup\{\bar{M}:$ M numerable $M \subset D\} \subset K$ ya que para cada $M \subset D$ numerable $M = \{x_i, i \in \omega\}$ si $\sum a_i$ es una serie absolutamente convergente entonces $\lambda = \sum a_i \delta x_i$ es una medida numerablemente aditiva con soporte $\text{sop}(\lambda) = \bar{M}$. Por otra parte, si F es no-atómica y separable, $K = \emptyset$ (26)

DEFINICION 4.29

Sea F una k-álgebra de Boole. Sea $K \subset S$ su núcleo σ-normal. Diremos que F cumple la propiedad (JL3) si todo cerrado H no P-conjunto, con la propiedad (KL) y tal que $H \cap K \neq \phi$ posee la propiedad (JL2), es decir existe una sucesión en F $(A_i)_{i \varepsilon \omega}$ de disjuntos y con supremo $A \varepsilon F$ tal que $(\bigcup_{i \varepsilon \omega} A_i) \cap H = \phi$ y $A \cap H \neq \phi$.

Nótese que si F cumple (JL2) entonces cumple (JL3).

La traducción algebraica antes aludida puede ahora ser escrita como:

PROPOSICION 4.30

Sea F un álgebra de Boole con la propiedad (u.d.s.c.). Entonces F cumple la propiedad (aD) si y solo si F cumple la (JL3).

DEMOSTRACION

Supongamos que H es un no P-conjunto y con la propiedad (KL) tal que $H \cap K \neq \phi$. Existe una medida λ numerablemente aditiva en F tal que $car(\lambda) \cap H \neq \phi$. Por tanto, λ_H es en F_H una medida numerablemente aditiva (no necesariamente estrictamente positiva). Si H no es (JL2), se vió en el teorema 4.27 que F_H no admite una medida numerablemente aditiva. Esta contradicción prueba la condición necesaria. Para probar la condición suficiente tomemos una medida $\mu>0$ tal que $H = car(\mu) \subset \bigcup_{i\in\omega} B_i \setminus \bigcup_{i\in\omega} B_i$, siendo $(B_i)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$. Si $H \cap K = \phi$ entonces μ no es numerablemente aditiva y si $H \cap K \neq \phi$ entonces H cumple (JL2) y por tanto μ no es numerablemente aditiva.

///

Para finalizar este Capítulo, vamos a ensayar condiciones diferentes a la (aD) tales que añadidas a la condición (u.d.s.c.) se consigan los mismos resultados que con (u.d.s.c.) + (aD), y con las mismas técnicas que empleó Dashiell. Posteriormente se observa que en el fondo todas las técnicas que hasta ahora se han utilizado para demostrar que un álgebra de Boole tiene la propiedad (R) se apoyan en el mismo hecho. También se observa que la propiedad (aD) puede ser redactada en lenguaje secuencial para sucesiones de disjuntos de $\mathcal{F}$ obteniendo así la propiedad (aDs). Así, cabe la posibilidad de ensayar la propiedad (u.d.s.c.) junto con la (aDs).

Nos queda abierto el problema de obtener ejemplos concretos de álgebras de Boole que separen entre sí las distintas propiedades que aquí se tratan

DEFINICION 4.31

Un álgebra de Boole se dice que tiene la propiedad (Ro) si para toda sucesión $(\mu_i)_{i\in\omega}$ de medidas positivas de $C(S)^*$ acotada y de soportes disjuntos existe una medida μ con soporte no perfecto y que sea punto de aglomeración *-débil de la sucesión.

TEOREMA 4.32

Si un álgebra cumple las propiedades (udsc), (JL) y (Ro) entonces cumple las propiedades (R) y (VHS).

DEMOSTRACION

En virtud del teorema 4.7 , $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (N). Basta, pues, probar que $\mathcal{F}$ cumple la propiedad de Rosenthal. Sea X un espacio de Banach y sea $T:\mathcal{C}(S)\to X$ un operador lineal, continuo y no débilmente compacto. El operador adjunto $T^*:x^*\to\mathcal{C}(S)^*$ es lineal y no débilmente compacto. Por tanto si B_{X^*} es la bola unidad cerrada de X^*, se tiene que $T^*(B_{X^*})\subset\mathcal{C}(S)^*$ no es relativamente débilmente compacto. Por ello, existe en $T^*(B_{X^*})$ una sucesión acotada de medidas, existe en $\mathcal{F}$ una sucesión disjunta y existe un número real $\delta>0$ tales que $|\mu_i(A_i)|>\delta$ para cada $i\varepsilon\omega$. Sea, para cada $i\varepsilon\omega$, $\lambda_i:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ la medida definida, para $A\varepsilon\mathcal{F}$, por $\lambda_i(A) = |\mu_i|(A\cap A_i)$. Se cumple $\lambda_i\geq 0$, $\mathrm{car}(\lambda_i)\subset A_i$ y, por verificarse la propiedad (Ro), la sucesión $(\lambda_i)_{i\varepsilon\omega}$ admite un punto de aglomeración *-débil $\mu\varepsilon\mathcal{C}(S)^*$ con soporte no perfecto.

Sea $U = \{\alpha\varepsilon\mathcal{C}(S)^*: |\alpha(X_S)| = |\alpha(S)| < \delta/2\}$ un entorno *-débil de 0. Para infinitos $i\varepsilon\omega$ es $\mu-\lambda_i\ \varepsilon\ U$. Por tanto, $|(\mu-\lambda_i)(S)|<\delta/2$. Y $||\mu|| = |\mu|(S) \geq |\mu(S)| = |\lambda_i(S)-(\mu-\lambda_i)(S)| \geq |\lambda_i(S)|-|(\mu-\lambda_i)(S)|>$ $> \delta-\delta/2 = \delta/2$. Por tanto, $\mu\neq 0$. Por otra parte, si $B\varepsilon\mathcal{F}$ y $B\cap A_i = \phi$, para cada $i\varepsilon\omega$, se tiene que $\lambda_i(B)=0$. Dado $\varepsilon>0$ si se toma $V = \{\alpha\varepsilon\mathcal{C}(S)^*: |\alpha(B)|<\varepsilon\}$, se verifica que para infinitos $i\varepsilon\omega$ es

$(\mu-\lambda_i)\varepsilon V$ y, por tanto, $|(\mu-\lambda_i)(B)| = |\mu(B)| < \varepsilon$ y esto para cualquier $\varepsilon>0$. Por tanto, $\mu(B)=0$. Como lo mismo se verifica para cada $C\varepsilon F$ con $C\subset B$, tenemos que $|\mu|(B)=0$. A esta misma conclusión se hubiese llegado si $B\varepsilon F$ fuese disjunto con todo A_i, excepto un número finito. Por tanto, $|\mu|(A_i)=0$, para cada $i\varepsilon\omega$. Esto prueba que $|\mu|$ es positiva y que $|\mu|(B)=0$, para cada $B\varepsilon F$ tal que $B\cap(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i)=\phi$, y que $\mathrm{car}(\mu) = \mathrm{car}(|\mu|)\subset \overline{\bigcup B_i} \setminus \bigcup B_i$. Como F cumple (JL) y $\mathrm{car}(|\mu|)$ es no perfecto se tiene que $|\mu|$ no es numerablemente aditiva.

Por consiguiente, μ no es numerablemente aditiva y existe en una sucesión $(C_i)_{i\varepsilon\omega}$ decreciente con $\widehat{\bigcap C_i} = \phi$ y un $\varepsilon>0$ tal que $|\mu(C_i)|>\varepsilon$ para cada $i\varepsilon\omega$. Procedemos ahora por inducción a construir la siguiente sucesión. Sea $U_1 = \{\alpha\varepsilon C(S)^*: |\alpha(C_1)|<\varepsilon/2\}$. Existe un $m_1>1$ tal que $\mu-\lambda_{m_1}\varepsilon U_1$. Por tanto, $|\mu(C_1)-\lambda_{m_1}(C_1)| < \varepsilon/2$ y $\lambda_{m_1}(C_1) = |\lambda_{m_1}(C_1)| > |\mu(C_1)|-|\mu(C_1)-\lambda_{m_1}(C_1)| > \varepsilon-\varepsilon/2 = \varepsilon/2$. Sea $U_2 = \{\alpha\varepsilon C(S)^*: |\alpha(C_2)|<\varepsilon/2\}$. Como U_2 es un entorno de cero en la topología *-débil, existe un $m_2\varepsilon\omega$, $m_2>m_1$ tal que $\mu-\lambda_{m_2}\varepsilon U_2$, y $\lambda_{m_2}(C_2)>\varepsilon/2$. De esta manera, se obtiene una subsucesión $(\lambda_{m_j})_{j\varepsilon\omega}$ de la sucesión $(\lambda_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $\lambda_{m_j}(C_j)>\varepsilon/2$, para cada $j\varepsilon\omega$, y además $\lambda_{m_j}(C_j) = |\mu_{m_j}|(C_j\cap A_{m_j}) > \varepsilon/2$. Por tanto, existe un $D_j\varepsilon F$ tal que $D_j\subset C_j\cap A_{m_j}$ y $|\mu_{m_j}(D_j)| > \varepsilon/4$, para $j\varepsilon\omega$. Como la sucesión $(D_j)_{j\varepsilon\omega}$ es disjunta, $D_j\subset C_j$ $(j\varepsilon\omega)$ y $\widehat{\bigcap_{j\varepsilon\omega} C_j} = \phi$, se verifica, en virtud de la propiedad (udsc), que la sucesión $(D_j)_{j\varepsilon\omega}$ tiene supremo y que toda subsucesión tiene supremo. Indicamos la subsucesión $(\mu_{m_j})_{j\varepsilon\omega}$ como $(\mu_j)_{j\varepsilon\omega}$. Se tiene que $\{\mu_j,\ j\varepsilon\omega\}\subset T^*(B_{X^*})$ y que la sucesión $(D_j)_{j\varepsilon\omega}$ tiene supremo, verificandose que $|\mu_j(D_j)|>\varepsilon/4$.

A partir de aquí, bastaría reproducir los pasos de la demostración que Dashiell (1981) da para demostrar que (u.d.s.c.)+ (aD)$\Longrightarrow$(R) y (N). También bastaría observar que $(D_i)_{i\in\omega}$ está contenida en cierta subálgebra σ-completa de F .

OBSERVACION 4.34

Es posible enunciar una propiedad similar a la (Ro) que no necesita de la propiedad (JL) que es la siguiente: Diremos que F cumple la propiedad (RoM) si y solo si toda sucesión de medidas positivas y con soportes disjuntos admite un punto de aglomeración *-débil μ que no es una medida numerablemente aditiva. Es evidente que la propiedad (aD) exige que todos los puntos de aglomeración *-débiles de una sucesión de medidas positivas y con soportes disjuntos sean medidas no numerablemente aditivas. En muchas ocasiones sólo es necesario que exista uno. Es evidente que (aD)$\Longrightarrow$(RoM). Usando las técnicas del teorema 4.32 se prueba que si un álgebra F cumple las propiedades (udsc) y (RoM) entonces F cumple (R) y (VHS).

Las técnicas hasta ahora usadas para demostrar que un álgebra de Boole tiene la propiedad (R) son análogas a las utilizadas para probar que un álgebra de Boole σ-completa tiene (R). Estas técnicas precisan de la existencia de una sucesión con supremo tal que toda subsucesión tenga también supremo (ver en Schachermayer

(1978) las álgebras con la propiedad (E) y en Dashiell las álgebras con la propiedad (udsc)+(aD)).

El siguiente resultado está en la línea de lo mencionado.

PROPOSICION 4.35

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole, sea x un espacio de Banach y sea $T:\mathcal{C}(S)\to X$ un operador lineal, acotado y no débilmente compacto. Supongamos que existe una sucesión en $T^*(B_{X^*})$, $(\mu_i)_{i\in\omega}$, un número real $\delta>0$ y una sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ con supremo tal que toda subsucesión tiene también supremo de forma que $|\mu_i(A_i)|>\delta$ para cada $i\in\omega$. Se verifica que T fija una copia de l_∞.

DEMOSTRACION

Basta considerar la sucesión $(\mu_i)_{i\in\omega}$ como definida en el σ-álgebra Σ generada por la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$. Esta σ-álgebra será tal que $\Sigma\subset\mathcal{F}$ y, por la observación anterior, $\mathcal{C}(S_\Sigma)$ puede considerarse como subespacio cerrado de $\mathcal{C}(S)$. El operador T restringido a $\mathcal{C}(S_\Sigma)$ no puede ser débilemente compacto y, por tanto, fija una copia de l_∞ en $\mathcal{C}(S_\Sigma)$, (ya que Σ es un σ-álgebra). Esta copia queda también fijada en $\mathcal{C}(S)$ por medio de la inclusión natural de $\mathcal{C}(S_\Sigma)$ en $\mathcal{C}(S)$.

///

El resultado anterior sigue siendo válido si en lugar de suponer que la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ tiene, junto a sus subsucesiones, supremo, suponemos que la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ pertenece a algún subálgebra $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ con la propiedad (R).

Notemos que la propiedad (aD) puede ser enunciada de la siguiente forma: F cumple la propiedad (aD) si para toda sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ en F y para toda medida $\mu\geq 0$ tal que car$(\mu)\subset$ $\subset \overline{\bigcup A_i}\setminus\bigcup A_i$ se verifica que μ no es numerablemente aditiva. Si se observa, esta propiedad es secuencial. La definiciones que siguen tratan de extender el concepto anterior como propiedades subsecuenciales.

DEFINICION 4.36

Sea F un álgebra de Boole y

a.- se dice que una sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ en F tiene la propiedad (aD) si toda medida $\mu\geq 0$ tal que car$(\mu)\subset \overline{\bigcup A_i}\setminus\bigcup A_i$ no es numerablemente aditiva.

b.- Se dice que una sucesión disjunta $(A_i)_{i\in\omega}$ en F tiene la propiedad "adicional de Dashiell subsecuencial" (en abreviatura (aDs)) si existe una subsucesión con la propiedad (aD). Si toda sucesión disjunta en F tiene la propiedad (aDs) entonces diremos, que F cumple la propiedad (aDs).

OBSERVACIONES 4.37

1.- Si $(B_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión disjunta en F entonces para cada $N\subset\omega$ infinito se tiene que $Fr(\bigcup_{i\in\omega} B_i)\supset Fr(\bigcup_{i\in N} B_i)$, y en general el contenido es estricto, por ello puede ocurrir que aunque $Fr(\bigcup_{i\in\omega} B_i)$ albergue soportes de medidas numerablemente aditivas, puede ocurrir que $Fr(\bigcup_{i\in N} B_i)$ no tenga esa propiedad.

2.- Si $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta en F que tiene supremo, $A=\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$, entonces $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad (aD) pues si μ es una medida positiva y car$(\mu)\subset \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}\setminus\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i$ se tiene que $0 = \sum_{i\varepsilon\omega} \mu(A_i)<\mu(A)$. Es evidente que si $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene alguna subsucesión con supremo entonces $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad (aDs).

El siguiente resultado se demuestra de manera similar a como se demuestra el resultado de Dashiell (u.d.s.c.) mas (aD) implica (R),pero pasando a subsucesión en el momento oportuno

TEOREMA 4.38

Si F es una álgebra de Boole con las propiedades (udsc) y (aDs) entonces F cumple (R) y (N)

Análogamente a como se ha hecho anteriormente con la propiedad (aD),es posible dar tambien un"tratamiento subsecuencial" a las propiedades (JL2) y (JL3)

CAPITULO V

Este Capítulo comienza con algunos resultados válidos para álgebras de Boole con la condición (c.c.c.). Esto nos va a permitir establecer algunas relaciones entre las propiedades (E) y (f) y las propiedades (SC) y (IS), similares a las que se conocen entre las propiedades (σ-completa) y (S). Como ejemplo de la utilidad de este tipo de relaciones, obtenemos ejemplos de álgebras de Boole que teniendo la segunda propiedad no tengan la primera correspondiente.

Se observa que las propiedades (VHS),(G) y (N) pueden ser caracterizadas a través de las álgebras de clopenes de los soportes de las medidas sobre F y,en definitiva , por subconjuntos cerrados del espacio de Stone que sean simultaneamente (c.c.c.) y (KL).Esta caracterización, unida a los resultados anteriores nos proporciona una nueva via de demostración de la implicación (IS)$\Longrightarrow$(VHS).Además, como consecuencia de los primeros resultados se prueba que las álgebras de Boole con "buenas" propiedades de interpolación tienen álgebras soportes con buenas propiedades de supremo.

El Capítulo se completa aislando un tipo particular de subálgebra (las subálgebras sucesionales) y se discute la posibilidad de que las prpiedades de interpolación (S),(f) y (IS) sean caracterizadoras de propiedades similares a las (R), (VHS),(G) y (N) pero más fuertes; éstas son aquí definidas a través de las subálgebras sucesionales.

El siguiente resultado nos muestra que en un álgebra de Boole con la propiedad (ccc) toda sucesión de disjuntos puede ponerse como subsucesión de una sucesión con supremo.

TEOREMA 5.1

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole con la propiedad (ccc). Para cada sucesión de disjuntos podemos encontrar otra suecesión de disjuntos, disjunta con la anterior y tal que la sucesión formada tomando alternativamente un término de cada una de las dos sucesiones tenga como supremo el elemento unidad del álgebra.

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$. Si dicha sucesión tiene supremo, tomamos como segunda sucesión la $\{S \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}, \phi, \phi, , \ldots\}$. Si la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ no tiene supremo, en el abierto $S \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ existen co-ceros no triviales, es decir, existen abiertos F_σ de la forma $G = \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$ donde $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión no trivial de disjuntos.

Sea $\mathcal{G} = \{G = \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$: $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ sucesión disjunta en F tal que $G \cap \bigcup_i A_i = \phi\}$. En esta familia consideramos el orden: $G_1 \leq G_2$ si y solo si $G_1 = G_2$ ó $G_1 \subset G_2$ con $\overset{\bullet}{\widehat{G_2\setminus G_1}} \neq \phi$. Si $(G_i)_{i\varepsilon I}$ es una cadena en $\mathcal{G}$, formada por elementos distintos entre si, por la propiedad (ccc) dicha cadena es numerable $(G_i)_{i\varepsilon\omega}$ y por tanto $G = \bigcup_{i\varepsilon\omega} G_i$ es abierto F_σ y $G\varepsilon\mathcal{G}$. Es evidente que $G_i < G$ para cada $i\varepsilon\omega$ pues G contiene a G_{i+1} y en G_{i+1} hay un abierto disjunto con G_i (pues $\overset{\bullet}{\widehat{G_{i+1}\setminus G_i}} \neq \phi$). Por tanto, G es una cota superior de la cadena. Por el axioma de Zorn existe un elemento maximal. Sea éste $G = \bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i$, donde $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta. Consideremos la sucesión $(C_i)_{i\varepsilon\omega}$ donde $A_i = C_{2i-1}$ y $B_i = C_{2i}$ para cada $i\varepsilon\omega$. Por tanto, si $S \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} C_i} = S \setminus (\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i})$ fuese distinto del vácio, como es abierto, existe un $B\varepsilon F$ tal que $B \subset S \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} C_i}$, así pues $G' = (B_i)_{i\varepsilon\omega} \cup$ $\cup B$ es un abierto F_σ tal que $G' \cap \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = \phi$. Por lo tanto, $G'\varepsilon\mathcal{G}$ y es mayor que G. Esta contradicción prueba que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} C_i} = S$.

///

COROLARIO 5.2

Si F cumple las propiedades (ccc) y (udsc) entonces es F σ-completa y, por tanto, completa.

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta. Si no tiene supremo, puede ponerse como subsucesión de una sucesión con supremo y, por la propiedad (udsc), la propia sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tendrá supremo.

///

Además se obtiene el siguiente resultado, que aparece en Rosenthal 1978 .

COROLARIO 5.3

Si F cumple la propiedad (ccc) y la propiedad de Seever entonces F es completa.

DEMOSTRACION

Basta con ver que F es σ-completa. Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F y sea $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de disjuntos, disjunta con la anterior y tal que $(\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}) \cup (\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i}) = \overline{(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) \cup (\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i)} =$ $= S$. Como F cumple la propiedad de Seever $(\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}) \cap (\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i}) = \phi$. Por tanto, $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = S \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i}$ y, es abierto y tiene supremo.

///

Veamos que la propiedad (f) puede ser redactada en términos secuenciales.

PROPOSICION

Un álgebra de Boole F tiene la propiedad (f) si y solo si para cada sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F y cada $K\subset\omega$ existe un $N\subset K$ y un $A\varepsilon F$ de forma que si $i\varepsilon N$ es $A_i\subset A$, si $i\varepsilon\omega\setminus N$ es $A_i\cap A=\phi$ y para cada $M\subset N$ existe un A^M tal que si $i\varepsilon M$ es $A_i\subset A^M$ y si $i\varepsilon\omega\setminus M$ es $A_i\cap A^M=\phi$.

DEMOSTRACION

Veamos que la condición es suficiente: Sean $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ dos sucesiones de F disjuntas de disjuntos, sea $(C_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que para cada $i\varepsilon\omega$ es $A_i=C_{2i}$ y $B_i=C_{2i-1}$, basta usar $K=\text{pares}\subset\omega$ y el resto es trivial.

Veamos que la condición es necesaria: Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ sucesión de disjuntos en F y sea $K\subset\omega$ infinito y de complementario infinito.

Consideremos las sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon K}$ y $(A_i)_{i\varepsilon\omega\setminus K}$. Por hipótesis existe un $N_1\subset K$ infinito y un $B_1\varepsilon F$ tales que para $i\varepsilon N_1$ es $A_i\subset B_1$ y para $i\varepsilon\omega\setminus K$ es $A_i\cap B_1=\phi$ y para cada $M\subset N_1$ existe un A^M tal que si $i\varepsilon M$ es $A_i\subset A^M$ y si $i\varepsilon N_1\setminus M$ es $A_i\cap A^M=\phi$ y si $i\varepsilon\omega\setminus K$ es $A_i\cap A^M=\phi$.

Consideremos ahora las sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon N_1}$ y $(A_i)_{i\varepsilon K\setminus N_1}$

Por hipótesis, existe un $N\subset N_1$ infinito y un $B_2\varepsilon F$ tales que $A_i\subset B_2$ si $i\varepsilon N$ y $A_i\cap B_2=\phi$ si $i\varepsilon K\setminus N_1$. Ahora bien, como $N\subset N_1$ existe un $A^N\varepsilon F$ con las propiedades descritas en el párrafo anterior. Consideremos el conjunto $A=B_1\cap B_2\cap A^N$. Para cada $i\varepsilon N$ es $A_i\subset A$ y para todo $i\varepsilon\omega\setminus N$ es $A_i\cap A=\phi$. Además, si $M\subset N$ es infinito, es evidente que $A^M\cap A$ es tal que contiene a cada A_i con $i\varepsilon M$ y es disjunto con cada A_i para $i\varepsilon\omega\setminus M$.

///

Despues de este último resultado es evidente que la propiedad (f), que ha sido redactada para sucesiones, puede ser redactada de la siguiente forma, que aparentemente es más útil:

Un álgebra de Boole F tiene la propiedad (f) si y solo si para cada par de sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ disjuntas y de disjuntos en F existe un $N\subset\omega$ infinito y un $A\varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon N} A_i \subset A$ y $\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} A_i \subset A^c$ y $\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i \subset A^c$ y para cada $M\subset N$ existe un A^M tal que $\bigcup_{i\varepsilon M} A_i \subset A^M$, $\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus M} A_i \subset (A^M)^c$ y $(\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i) \subset (A^M)^c$.

PROPOSICION 5.5

La propiedad (f) es hereditaria para cocientes.

DEMOSTRACION

Sea F un álgebra de Boole con la propiedad (f) y sea I un ideal en F. El espacio de Stone del álgebra F/I es un cerrado H del espacio de Stone S de F. F/I puede identificarse con la traza de F en H. Sea $(|A_i|)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de disjuntos en F/I. Para cada $i\varepsilon\omega$ puede elegirse un representante A_i de $|A_i|$ de forma que la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ sea disjunta. Sea K un subconjunto infinito de ω. Por tener F la propiedad (f), existe un $N\subset K$ y un $A\varepsilon F$ tales que si $i\varepsilon N$ es $A_i \subset A$ y si $i\varepsilon\omega\setminus N$ es $A_i \cap A=\phi$. Así, $A\cap H \supset A_i\cap H$ para cada $i\varepsilon N$ y $(A\cap H)\cap(A_i\cap H)=\phi$ para cada $i\varepsilon\omega\setminus N$. Análogamente, para cualquier $M\subset N$ existe un $A^M\varepsilon F$ tal que $A_i\subset A^M$ si $i\varepsilon M$, y $A_i\cap A^M=\phi$ si $i\varepsilon\omega\setminus M$. De aqui se obtiene que $|A_i| < |A^M|$ si $i\varepsilon M$ y que $|A_i| \wedge |A^M| = \phi$ si $i\varepsilon\omega\setminus M$.

///

PROPOSICION 5.6

Sea F un álgebra de Boole atómica y con la propiedad (E). Se verifica que el álgebra F_p no tiene la propiedad (E), es $(n-\sigma)$ y tiene la propiedad (f).

DEMOSTRACION

Si F es (E) entonces F es (f) y como la propiedad (f) es hereditaria para cocientes, F_p tiene la propiedad (f). Sea ahora $(|A_i|)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F_p con supremo A. Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una correspondiente sucesión de representantes que sea disjunta en F. Para cada $i\varepsilon\omega$ sea $x_i \in A_i \cap D$. Sea $B \varepsilon F$ el supremo de alguna subsucesión de $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$. Se tiene que $|A| - |M| \neq |A|$ y que $|A| - |M| > |A_i|$ para cada $i\varepsilon\omega$. Esto contradice el que $|A|$ sea el supremo de la sucesión $(|A_i|)_{i\varepsilon\omega}$

///

EJEMPLO 5.7

Freniche (1983) construye la siguiente álgebra de Boole

Sea x filtro máximal no principal de $P(\omega)$.Sea $\Omega = |0,1| \cup \omega$ y sea m la medida de Lebesgue.Sea la familia F de los subconjuntos A de Ω tales que verifican: a) $m(A\cap|0,1|)=0$ y $A\cap\omega \not\in x$ o b) $m(A\cap|0,1|)=1$ y $A\cap\omega\varepsilon x$ F es álgebra de Boole átomica y en la citada referencia se ve que F no es σ-completa pues la sucesión $(i)_{i\varepsilon\omega}$ no tiene supremo y se demuestra que F es 2-subsecuencialmente completa,Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de disjuntos de F a lo sumo habrá un elemento en la situación b),supuesto que hemos quitado este elemento de la sucesión,partimos ω en N y M disjuntos e infinitos ,entonces:

o $\bigcup_{i\in N} A_i \cap \omega \notin x$ o bien $\bigcup_{i\in \omega\setminus N} A_i \cap \omega \notin x$, supuesto lo primero es evidente que la sucesión $(A_i)_{i\in N}$ tiene supremo y toda subsucesión suya tambien tiene supremo, asi pues F tiene la propiedad (E) y no es σ-completa, el álgebra de los clopenes del nucleo perfecto $F/_{fin}$ tiene la propiedad (f) y no tiene la propiedad (E).

TEOREMA 5.8

Sea F un álgebra de Boole con la propiedad (c.c.c.). Se verifica que F tiene la propiedad (f) si y solo si F tiene la propiedad (E).

DEMOSTRACION

La condición suficiente es evidente. Para probar la condición necesaria consideramos una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ disjunta en F. Por tener F la propiedad (c.c.c.) existe una sucesión disjunta $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F que es disjunta con la $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y tal que se verifica que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} = \overline{(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) \cup (\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i)} = S$. Consideremos las dos sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$. En virtud de la propiedad (f) existe un $N\subset\omega$ infinito y un $A\varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon N} A_i \subset A$, $\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} A_i \subset A^c$ y $\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i \subset A^c$. Además, para cada $M\subset N$ existe un $A^M\varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon M} A^M$, $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus M} A_i) \subset (A^M)^c$ y $(\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i) \subset (A^M)^c$. Se tiene que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i} \subset A$. Si el abierto $A\setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i}$ fuese distinto del vacio, existiría un $B\varepsilon F$ tal que $B\subset A\setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i}$. De aquí es fácil deducir que

$$B \subset S \setminus \left[\overline{(\bigcup_{i\in\omega} A_i) \cup (\bigcup_{i\in\omega} B_i)} \right]$$

lo cual es imposible . Por tanto, $A = \overline{\bigcup_{i\in N} A_i}$ y la sucesión $(A_i)_{i\in N}$ tiene supremo y además toda subsucesión de $(A_i)_{i\in N}$ también tiene supremo, pues de manera análoga se demostraría que $\overline{\bigcup_{i\in M} A_i} = A^M$ para cada $M \subset N$. (la notación es la anterior).

///

Pasamos ahora a efectuar un estudio similar al realizado con las álgebras del tipo (f) y (E) pero con las propiedades (IS) y (SC). Freniche |1983| demuestra que la propiedad (IS) es hereditaria para cocientes.

PROPOSICION 5.9

Sea F un álgebra de Boole atómica y con la propiedad (SC). Se verifica que F_p tiene las propiedades (IS) y (n-σ) y no tiene la propiedad (SC).

DEMOSTRACION

Sea $(|A_i|)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en F_p con supremo $|A|$. Se puede tomar, para cada $i\in\omega$, un representante A_i de $|A_i|$ de forma que la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ sea disjunta en F y $A_i \subset A$ para cada $i\in\omega$. Elijamos, para $i\in\omega$, un $x_i \in A_i \cap D$ y sea $B_i = A_i \setminus \{x_i\}$. Se tiene que $|B_i| = |A_i|$ y por tanto en F_p es $\bigvee_{i\in\omega} |B_i| = |A|$

La sucesión $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene una subsucesión con supremo $(x_i)_{i\varepsilon M}$ ($M \subset \omega$ infinito). Sea $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} x_i} = C \varepsilon F$. Como $B_i \cap C = \phi$, es $|B_i| \wedge |C| = \phi$ para cada $i\varepsilon\omega$ y $|C| < |A|$. Por Tanto, para cada $i\varepsilon\omega$ es $|B_i| < |A| \setminus |C|$, en contradicción con que $\bigvee_{i\varepsilon\omega} |B_i| = |A|$

///

TEOREMA 5.10

Sea F un álgebra con la propiedad (c.c.c.). Se verifica que F tiene la propiedad (IS) si y solo si F tiene la propiedad (SC).

DEMOSTRACION

La condición suficiente es evidente. Para probar la condición necesaria consideremos una sucesión disjunta $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ en F. Por tener F la propiedad (c.c.c.), sabemos que existe una sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ disjunta en F y disjunta con $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que el supremo de la sucesión disjunta formada con las dos sucesiones $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ es la unidad del álgebra. Por ser F de interpolación subsecuencial, existe un $N \subset \omega$ infinito y un $A \varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon N} A_i \subset A$ $\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} A_i \subset A^c$ y $\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i \subset A^c$. Si el abierto $A \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i}$ fuese distinto del vacio, existitía un $B \varepsilon F$ tal que $B \subset A \setminus \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i}$ y, por tanto, $B \cap A^c = \phi$. Como

$$\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i} \cup \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i} = \overline{(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) \cup (\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i)} = S$$

se tiene que $B \subset S \setminus \left[(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) \cup (\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i) \right]$ lo cual no es posible.. Por tanto, $A = \overline{\bigcup_{i\varepsilon N} A_i}$ y la subsucesión $(A_i)_{i\varepsilon N}$ tiene supremo

///

OBSERVACION 5.11

Como consecuencia inmedita de los últimos resultados se tiene que al poseer la propiedad (c.c.c.) las álgebras de Boole atómicas con $|D| = \omega$, en este tipo de álgebras equivalen, por un lado, las propiedades (f) y (E) y, por otro lado, las propiedades (IS) y (SC).

PROPOSICION 5.12

Sea F un álgebra de Boole atómica y con la propiedad (SC) y tal que $|D| = \omega$. Se verifica que $C(S)$ no tiene copia de l^{∞} si y solo si no existe una sucesión de átomos que tenga supremo y tal que toda subsucesión también lo tenga.

DEMOSTRACION

La condición necesaria es inmediata. Para ver la condicion suficiente supongamos que $C(S)$ tuviese una copia de l^{∞}. Según la Proposicion 1B de Haydon (Cf. |1981|), existe un $M \subset D$ infinito tal que para todo par L, N de subconjuntos disjuntos de M se verifica $\bar{L} \cap \bar{N} = \phi$. El conjunto M puede ser escrito en forma de una sucesión de clopenes unitarios $(x_i)_{i \in M}$ y sabemos que existe un $M' \subset M$ infinito con $B = \overline{\bigcup_{i \in M'} x_i}$ abierto de S (por la propiedad (SC)). Para todo $N \subset M'$ se tiene que

$$\left(\overline{\bigcup_{i \in N} x_i}\right) \cap \left(\overline{\bigcup_{i \in M' \setminus N} x_i}\right) = \emptyset \text{ y } \left(\overline{\bigcup_{i \in N} x_i}\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{i \in M' \setminus N} x_i}\right) = \overline{\bigcup_{i \in M'} x_i} = B.$$

Por tanto, $\overline{\bigcup_{i \in N} x_i}$ es abierto y la sucesión $(x_i)_{i \in M'}$, así como toda subsucesión suya, posee supremo. Esta contradicción prueba el resultado

///

Vamos a ver a continuación que el estudio de las propiedades (VHS),(G) y (N) puede reducirse a hacerlo únicamente en las álgebras con las propiedades (c.c.c.) y (KL).En Seever|1968| se demuestra que $C(S)$ es un espacio de Grothendieck si y solo si $C(\text{car}(\mu))$ es un espacio de Grothendieck para cada medida μ en S. Entenderemos por álgebra soporte de medida en un álgebra de Boole F al álgebra cociente cuyo Stone es un cerrado $H \subset S$ que es el soporte de alguna medida μ en F. Dicha álgebra será el cociente de F por el ideal $\{A \in F : \mu(A)=0\}$. La condición necesaria y suficiente para que un cerrado H sea el soporte de una medida es que el álgebra F_H tenga las propiedades (c.c.c.) y (KL).

PROPOSICION 5.13

Un álgebra de Boole F tiene la propiedad (N) si y solo si las álgebras soporte de medidas positivas sobre F tienen la propiedad (N).

DEMOSTRACION

La condición Necesaria es evidente pues la propiedad (N) es hereditaria al cociente. Para probar la condición suficiente, consideramos una sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ de medidas puntualmente acotadas en F. Sea λ la medida definida en F por

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|(A)}{1+|\mu_n|(S)} \frac{1}{2^n}$$

Se verifica que la medida λ es positiva y está acotada en F.

Además, Para cada $n\varepsilon\omega$ μ_n es absolutamente continua respecto de λ . Sea $H = car(\lambda) \subset S$ y consideremos el álgebra cociente $F_H = F/I$, donde $I=\{A\varepsilon F:\lambda(A)=0\}$. Es evidente que para cada $A\varepsilon F$ y cada $n\varepsilon\omega$ se verifica que $\mu_n(A)=\mu_n(A \cap H)$. La medida μ_n es una medida Radón en el compacto H que da lugar a la medida en F_H que denotaremos por $\bar{\mu}_n$. Es evidente que $\|\mu_n\| = \|\bar{\mu}_n\|$. Por tanto, la sucesión $(\bar{\mu}_n)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión puntualmente acotada en F_H. Por hipótesis, esta última sucesión es uniformemente acotada. Así, $(\mu_n)_{n\varepsilon\omega}$ es una sucesión uniformemente acotada en F.

///

COROLARIO 5.14

Si F tiene la propiedad (VHS)entonces los soportes de las medidas positivas en F también tienen la propiedad (VHS),y recíprocamente

OBSERVACION 5.15

Se comprueba inmediatamente que si F cumple (S) entonces tiene la propiedad (udsc). El recíproco en general no es cierto. Si F cumple (S) y (ccc) entonces F es completa. Si F cumple (S), toda álgebra cociente de F también cumple (S), pues todo subespacio cerrado de un F-espacio es también un F-espacio. Por tanto, el soporte de una medida en un álgebra con la propiedad (S) es un espacio estoniano.

Existen F álgebras que cumplen (udsc) y que tienen cocientes que no son (udsc), ya que en caso contrario, los soportes de las medias serían estonianos. En efecto, Dashiell (1981) construye en el álgebra de los subconjuntos de $[0,1]$ que son simultánea mente F_σ y G_δ, la cual es (udsc), una medida sin soporte estoniano. Notemos que aunque Schachermayer (1978) demuestra que la propiedad (udsc) no es hereditaria a los cocientes utilizando un cociente del álgebra J, de los medibles Jordan en $[0,1]$, el ejemplo anterior muestra que las álgebras con las propiedades (udsc) y (aD) no necesariamente tienen cocientes con la propiedad (udsc).

OBSERVACION 5.16

Los anteriores teoremas permiten aclarar la relación entre las principales propiedades de supremo y de interpolación. Estas se exponen en el cuadro siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\sigma\text{-completa} \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d] & f \arrow[d] \\
SC \arrow[r] & IS
\end{tikzcd}$$

Además, siempre que se tenga un álgebra de Boole atómica con alguna de las propiedades de la izquierda, basta tomar el álgebra de los clopenes del núcleo perfectopara obtener un álgebra con la correspondiente propiedad de la derecha, pero que ya no posee la propiedad de la izquierda. Observese que las propiedades de la izquierda no son en general hereditarias a los cocientes. Sin embargo, las de la derecha si lo son. Las álgebras de la izquierda poseen álgebras soportes del mismo tipo que su correspondiente de la derecha. Es decir, las álgebras soportes de una (SC) son (SC) y las álgebras soportes de una (IS) son también (SC).

OBSERVACION 5.17

En Freniche |1983| se dá un ejemplo de álgebra de Boole con la propiedad (IS) que no tiene la propiedad (SC). Este ejemplo puede obtenerse de manera inmediata apoyandonos en el trabajo de Haydon |1981| y los resultados anteriores. En efecto, Haydon construye un álgebra de Boole atómica con $|D| = \omega$ y con la propiedad (SC). Denotamos ese álgebra por H. Se verifica que $C(S_H)$ no tiene copia de l^∞ y por tanto H no tiene la propiedad (f), pues en caso contrario tendría la (E), el álgebra tendría la propiedad (R) y $C(H)$ tendría una copia de l^∞. Sabemos que el álgebra de clopenes del nucleo perfecto de S_H es H/FIN y que es un álgebra con la propiedad (IS) que no tiene la (SC).

Comentarios análogos podrían efectuarse en lo relativo a las propiedades (E) y (f).

OBSERVACION 5.18

Todo cociente de un σ-álgebra es un álgebra con la propiedad (S) (equivalentemente, todo cerrado de un espacio σ-estoniano es F-espacio, lo que es evidente pues los σ-estonianos son F-espacios). Cabría preguntarse si toda álgebra con la propiedad (S) es cociente de un σ-álgebra. Esta cuestión se discute en Van Mill (30). La solución a esta cuestión está, aparentemente, relacionada con la conjetura de que todo F-espacio cumple la propiedad de Rosenthal.

En la referencia citada se demuestra que bajo la hipótesis del continuo, la respuesta a la pregunta es afirmativa. Sin embargo en Douwen-Mill 1980 se demuestra que bajo el supuesto del axioma de Martin y de que $c=\omega_2$ existe un álgebra de Seever que no es cociente de ninguna σ-álgebra. Freniche |1983| demuestra bajo los mismos supuestos que existe un álgebra de Seever que no es cociente de ninguna álgebra "finitamente subsecuencialmente completa".

OBSERVACION 5.19

Despues de la observación anterior, las preguntas que podrían abrirse son: ¿toda álgebra de Boole átomica con $|D|=\omega$ y (SC) y cuyo C(S) no tiene copia de l^{∞} es isomorfa a H ? ¿toda álgebra de Boole no átomica, n-σ y (IS) y de peso c es isomorfa a H/FIN ?¿existen álgebras de Boole no átomicas, n-σ y (IS) y de peso c que no sean cocientes del álgebra de Haydon?, es decir se trataría de reproducir el trabajo citado que Van Mill hace con $\beta\omega$ y su nucleo perfecto pero haciendolo con el espacio de Stone del álgebra de Haydon y su nucleo perfecto (analogos comentarios podrían hacerse para la relación (E) y (f))

OBSERVACION 5.20

Continuando con lo visto en la página 91 y teniendo en cuenta que está abierta la implicación (S)$\Longrightarrow$(R), cabe plantearse la siguiente cuestión. Sea F un álgebra S y sea $(A_i)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en F ¿Existe algún $N\subset\omega$ infinito y una subálge bra G de F ,isomorfa a $P(\omega)/_{FIN}$ y tal que la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ esté contenida en G ?.Si la respuesta es afirmativa entonces la respuesta a la implicación es afirmativa.

Hay que tener en cuenta que tampoco se conoce un álgebra de Boole que tenga la propiedad (f) y que no tenga la (R). Sin embargo, las álgebras (f) tienen álgebras soportes que son (E) y por tanto son (R). Desconocemos si del hecho de que todo álgebra soporte de F sea (R) se deduce que la propia F tenga la propiedad (R).

OBSERVACION 5.21

Schachermayer 1978 demuestra que si F tiene la propiedad (E) entonces F tiene la propiedad (VHS). Basándonos en esto y en los resultados anteriores, se obtiene una inmediata demostración de que si F tiene la propiedad (f) entonces tiene la propiedad (VHS) ya que si F tiene la propiedad (f), las álgebras soportes de F tienen necesariamente la propiedad (E) y, por tanto,tienen la propiedad (VHS); así,la propia F tiene la propiedad (VHS). Haydon (Cf.25) y Antosik-Swartz (Cf.2,3) demuestran que si F tiene la propiedad (SC) entonces también tiene la propiedad (VHS). Basándonos en esto y en los resultados anteriores se tiene una demostración inmediata del resultado de Freniche que afirma que si F tiene la propiedad (IS) entonces tiene la (VHS). En efecto, si F tiene (IS), sus álgebras soportes tienen la (SC), éstas son (VHS) y , finalmente, F es (VHS).

DEFINICION 5.22

Sea F un álgebra de Boole y sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F. Se llamará subálgebra sucesional definida por σ al conjunto

$$F_\sigma = \{A\varepsilon F\colon N\varepsilon P(\omega),\ \bigcup_{i\varepsilon N} A_i \subset A \text{ y } (\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} A_i)\cap A = \phi\}.$$

Es evidente que para cada σ, ϕ, $S\varepsilon F_\sigma$. Tomando $N=\{i\}$ comprobamos que $A_i\varepsilon F_\sigma$ para cada $i\varepsilon\omega$. Es inmediato comprobar que F_σ es un subálgebra de F y que en general F_σ no coincide con el álgebra engendrada por la sucesión. En efecto, tamando como F a $P(\omega)$ y como σ la sucesión $\sigma = (\{i\})_{i\varepsilon\omega}$, el subálgebra sucesión generada por σ es $P(\omega)$. Sin embargo, el álgebra engendrada es $\phi(\omega)$. El siguiente resultado tiene una demostración trivial.

PROPOSICION 5.23

Sea σ una sucesión disjunta en F.

1.- Si σ es una sucesión de átomos $F_\sigma = F$.

2.- Todo elemento de la sucesión σ es en F_σ un átomo.

3.- Si σ' es una subsucesión de σ, $F_{\sigma'} \subset F_\sigma$.

PROPOSICION 5.24

Sea σ una sucesión disjunta en F tal que F_σ es un k-álgebra de Boole. Se verifica que σ tiene la propiedad (J).

DEMOSTRACION

Sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión de átomos en F_σ, que define una sucesión de puntos en su espacio de Stone. Si F_σ es un k-álgebra de Boole, esta sucesión tendrá la propiedad (J). Existe un $N \subset \omega$ infinito con $\omega\setminus N$ infinito y existe un $A\varepsilon F_\sigma$ tal que $A_i \subset A$ para cada $i\varepsilon N$ y $A_i \cap A = \phi$ para $i\varepsilon\omega\setminus N$. Es evidente que en F subsiste esa relación. Por tanto, $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene en F la propiedad (J).

///

COROLARIO 5.25

Sea F un álgebra de Boole y sea σ una sucesión disjunta en F que posee una subsucesión σ' tal que $F_{\sigma'}$ es un k-álgebra de Boo le. En este caso σ tiene la propiedad sub-J.

COROLARIO 5.26

Sea F un álgebra de Boole. Se verifica que:

1.- Si para toda sucesión disjunta σ se verifica que F_σ es una k-álgebra de Boole entonces F cumple (J).

2.- Si para toda sucesión σ de disjuntos existe una subsucesión σ' tal que $F_{\sigma'}$ es un k-álgebra de Boole entonces F es sub-J.

OBSERVACION 5.27

En Sikorski 1964 pág. 56, se deja claro que si G es un subálgebra de F y $(B_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión en G que tiene un supremo $B\in F$ tal que $B\in G$ entonces B es el supremo de $(B_i)_{i\in\omega}$ en G. En general, el recíproco no es cierto. Sin embargo, para las subálgebras sucesionales se verifica lo siguiente.

PROPOSICION 5.28

Sea F un álgebra de Boole y sea $\sigma = (A_i)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en F. Si $(B_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión disjunta en F_σ con supremo $B\in F_\sigma$ entonces el supremo de $(B_i)_{i\in\omega}$ en F es también B.

DEMOSTRACION

Sean $N = \{i\in\omega: A_i \cap (\bigcup_{i\in\omega} B_i) = \phi\}$ y $N' = \{i\in\omega: A_i \cap B = \phi\}$. Veamos que $\omega\setminus N = \omega\setminus N'$ y que, por tanto, $N = N'$. Es evidente que $\omega\setminus N \subset \omega\setminus N'$ y que si existiése un $j\in\omega\setminus N'$ tal que $j\notin\omega\setminus N$ se tendrá que $A_j\subset B$ y $A_j \cap (\bigcup_{i\in\omega} B_i) = \phi$. Por tanto, $\bigcup_{i\in\omega} B_i \subset B\setminus A_j$ en contra de que B sea el supremo de $(B_i)_{i\in\omega}$ en F_σ, ya que $B\setminus A_j$ está en F_σ.

Esto prueba que $N = N'$. Trabajando en $\mathcal{F}$ también se verifica que $\bigcup_{i\in\omega} B_i \subset B$. Si existiése un $C \in \mathcal{F}$ $C \neq \phi$ y $C \subset B$ tal que $C \cap (\bigcup_{i\in\omega} B_i) = \phi$, se tendría, al ser $C \cap (\bigcup_{i\in\omega} A_i) = \phi$ (pues si $i \in N$ es $A_i \subset B^c$ y si $i \in \omega \setminus N$ es $A_i \subset \bigcup_{i\in\omega} B_i$), que $C \in \mathcal{F}_\sigma$ y en $\mathcal{F}_\sigma$ es $\bigcup_{i\in\omega} B_i \subset B\setminus C$, en contradicción con que B sea el supremo de $(B_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}_\sigma$.

///

PROPOSICION 5.29

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole y sea σ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$. Si una sucesión disjunta $(B_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}_\sigma$ tiene supremo $B \in \mathcal{F}$ se verifica que $B \in \mathcal{F}_\sigma$ y que, por tanto, el supremo de $(B_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}_\sigma$ es B.

DEMOSTRACION

Supongamos que $\sigma = (A_i)_{i\in\omega}$ y sea, como en la proposición anterior, $N = \{i\in\omega : A_i \cap (\bigcup_{i\in\omega} B_i) = \phi\}$. Para cada $i \in \omega\setminus N$ existe un $j \in \omega$ tal que $A_i \subset B_j$ y, por tanto, $A_i \subset B$. Si $i \in N$ veamos que $A_i \cap B = \phi$. En efecto si $A_i \cap B \neq \phi$ sea $C = A_i \cap B$ siendo $C \in \mathcal{F}$ y $C \subset B$. Como $C \cap (\bigcup_{i\in\omega} B_i) = \phi$, se tiene que $\bigcup_{i\in\omega} B_i \subset B\setminus C$, en contradicción con que B sea el supremo en $\mathcal{F}$ de $(B_i)_{i\in\omega}$. Asi pues, si $i \in N$ es $A_i \cap B = \phi$. Por tanto, $\bigcup_{i\in\omega\setminus N} A_i \subset B$, $\bigcup_{i\in N} A_i \cap B = \phi$ y $B \in \mathcal{F}_\sigma$.

///

Como consecuencia inmediata de las dos últimas proposiciones se tiene la siguiente proposición.

PROPOSICION 5.30

Sea F un álgebra de Boole.

a.- F es σ-completa si y solo si para cada sucesión disjunta σ en F se verifica que F_σ es σ-completa.

b.- F tiene la propiedad (E) si y solo si para cada sucesión disjunta σ en F se tiene que F_σ tiene la propiedad (E).

c.- F cumple la propiedad (sc) si y solo si para cada sucesión disjunta σ en F se verifica que F_σ tiene la propiedad (sc).

El siguiente resultado,de inmediata demostración,viene a decirnos que dada una sucesión de disjuntos la correspondiente subálgebra sucesional es la mayor de todas las subálgebras de Fque contiene a todos los elementos de la sucesión como átomos.

PROPOSICION 5.31

Sea $\sigma=(A_i)_{i\in\omega}$ sucesión de disjuntos en un álgebra de Boole F y sea G subálgebra de F ,entonces:$G=F_\sigma$si y solo si G verifica las propiedades:1) $(A_i)_{i\in\omega}\subset G$ y cada A_i es átomo en G

2) para toda subálgebra H de F tal que $(A_i)_{i\in\omega}\subset H$ y siendo cada A_i átomo en H se verifica que $H\subset G$

PROPOSICION 5.32

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole. Se verifica que $\mathcal{F}$ cumple la propiedad de Seever (resp. (f), resp. (IS)) si y solo si para cada sucesión disjunta σ en $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{F}_\sigma$ tiene la propiedad de Seever (resp. (f), resp. (IS)).

DEMOSTRACION

La condición suficiente es, en los tres casos, evidente. Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Seever. Sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$. Sea $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}_\sigma$. Sea $M\subset\omega$ infinito tal que $\omega\backslash M$ es infinito. Sea $N = \{i\varepsilon\omega:\ A_i\cap(\bigcup B_i) = \phi\}$. Consideremos los co-ceros disjuntos $\bigcup_{i\varepsilon M} B_i$, $\bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash N} B_i$ y $\bigcup_{i\varepsilon N} A_i$. Por tener $\mathcal{F}$ la propiedad de Seever existen tres parejas (C,D), (E,F) y (H,K) de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ de forma que:

$$\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i\subset C,\quad \bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash N} B_i,\quad \bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash M} B_i\subset E,\quad \bigcup_{i\varepsilon N} A_i\subset F,\quad \bigcup_{i\varepsilon M} B_i\subset H,\quad \bigcup_{i\varepsilon N} A_i\subset K.$$

Se tiene que

$$\bigcup_{i\varepsilon N} A_i\subset F\cap K,\quad \bigcup_{i\varepsilon N} B_i\subset H\cap C \quad y \quad \bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash M} B_i\subset E\cap D.$$

Los conjuntos $F\cap K$, $H\cap C$ y $E\cap D$ son disjuntos en $\mathcal{F}$. De aquí es evidente deducir que son elementos de F_σ Esto demuestra que F_σ tiene la propiedad de Seever.

Supongamos que F tiene la propiedad (f).

Sea $\sigma=(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F y sea $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F_σ. Sea $N = \{i\varepsilon\omega\colon A_i\cap(\bigcup_{i\varepsilon\omega}B_i) = \phi\}$. Sea $K\subset\omega$ infinito y con $\omega\backslash K$ infinito. Trabajemos con F y apliquemos la propiedad (f) a las dos siguientes sucesiones disjuntas de disjuntos: $(B_i)_{i\varepsilon K}$, $(B_i)_{i\varepsilon\omega\backslash K}\cup(A_i)_{i\varepsilon N}$. Existe un $L\subset K$ infinito y un $B\varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon L}B_i\subset B$, $\bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash L}B_i\subset B^c$, $\bigcup_{i\varepsilon N}A_i\subset B^c$ y $\forall M\subset L$ existe un B^M tal que

$$\bigcup_{i\varepsilon M}B_i\subset B^M,\qquad \bigcup_{i\varepsilon\omega\backslash M}B_i\subset(B^M)^c\quad\text{y}\quad(\bigcup_{i\varepsilon N}A_i)\subset(B^M)^c.$$

Veamos que $B\varepsilon F_\sigma$. En efecto: $B\cap\bigcup_{i\varepsilon N}A_i = \phi$ y si $i\varepsilon\omega\backslash N$ existe un $j\varepsilon\omega$ tal que $A_i\subset B_j$. Si $j\varepsilon L$ es $A_i\subset B_j\subset B$ y si $j\varepsilon\omega\backslash L$ es $A_i\subset B_j\subset B^c$ y por tanto $A_i\cap B = \phi$. Así pues, es evidente que $B\varepsilon F_\sigma$. De manera análoga se vería que $B^M\varepsilon F_\sigma$ para cada $M\subset L$ y por tanto la sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad (f) en F_σ.

Supongamos ahora que F cumple la propiedad (IS).

Sea $\sigma=(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F y sea $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F_σ. Sea $N = \{i\varepsilon\omega\colon A_i\cap(\bigcup_{i\varepsilon\omega}B_i) = \phi\}$. Sea $K\subset\omega$ infinito tal que $\omega\backslash K$ es infinito. Trabajamos en F y aplicamos la propiedad (IS) a las dos siguientes sucesiones disjuntas de disjun tos: $(B_i)_{i\varepsilon K}$ y $(B_i)_{i\varepsilon\omega\setminus K} \cup (A_i)_{i\varepsilon N}$. Existe un $L\subset K$ infinito y un $B\varepsilon F$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon L} B_i \subset B$ y $\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus L} B_i \subset B^c$ y $\bigcup_{i\varepsilon N} A_i \subset B^c$. Veamos que $B\varepsilon F_\sigma$. En efecto $B \cap \bigcup_{i\varepsilon N} A_i = \phi$. Si $i\varepsilon\omega\setminus N$ existe un $j\varepsilon\omega$ tal que $A_i \subset B_j$; si $j\varepsilon L$ es $A_i\subset B_j \subset B$ y si $j\varepsilon\omega\setminus L$ es $A_i \subset B_j \subset B^c$ y, por tanto, $A_i \cap B = \phi$. Por tanto $B\varepsilon F_\sigma$ y la sucesión $(B_i)_{i\varepsilon\omega}$ tiene la propiedad IS en F_σ.

///

PROPOSICION 5.33

Sea F un álgebra de Boole. F tiene la propiedad (n-σ) (resp. (u.d.s.c.)) si y solo si para cada sucesión disjunta σ en F el subálgebra sucesional F_σ tiene la propiedad (n-σ) (resp. (u.d.s.c.))

La demostración es trivial usando las proposiciones 5.28 y 5.29 que relacionan los supremos en el álgebra con los supremos en el subálgebra sucesional.

PROPOSICION 5.34

Sea F un k-álgebra de Boole. F es atómica si y solo si para cada sucesión disjunta σ en F se tiene que el subálgebra sucesional F_σ es atómica.

DEMOSTRACION

Sea D el conjunto de los átomos de F. Sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F. Sea $D' = D\setminus(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i)$. Cada elemento de D' está en F_σ, es un átomo en F_σ y la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es de átomos en F_σ. Sea $A\varepsilon F_\sigma$ y sea $N = \{i\varepsilon\omega: A_i \subset A\}$. Si $N\neq\phi$, A contiene algún átomo de F_σ. Si $N=\phi$, $A\cap(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) = \phi$; como $A\cap D \neq \phi$ (por ser F atómica), $A\cap D = A\cap D' \neq \phi$. Por consiguiente A contiene elementos de D', que son átomos de F_σ. Por tanto, todo elemento de F_σ contiene algún átomo de F_σ. Esto prueba la condición necesaria.

Para probar la condición suficiente consideramos la descomposición Perfecta-dispersa $S = P\cup D$ de S. Si F no es atómica, existe un clopen A tal que $A\subset P$. El conjunto A es denso en si mismo, por serlo P, y por tanto es perfecto. Como A es el espacio de Stone de F_A, F_A es no-atómica. En F_A podemos tomar una sucesión disjunta $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ y un $B\subset A$ tal que $B\cap\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} = \phi$. El álgebra F_σ es atómica, $B\varepsilon F_\sigma$ y como $(F_\sigma)_B$ es isomorfo a F_B, resulta que $(F_\sigma)_B$ es no-atómica. Esto es imposible pues la traza de un álgebra de Boole atómica sobre cualquier elemento del álgebra sigue siendo atómica.

///

PROPOSICION 5.35

Si una sucesión de átomos en un álgebra de Boole tiene la propiedad Ω entonces tiene la propiedad (IS).

DEMOSTRACION

Sea $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión de átomos en F. Sea $M\subset\omega$ infinito. Existe un $L\subset M$ infinito y un $A\varepsilon F$ tales que $\bigcup_{i\varepsilon L} x_i \subset A$ y $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus M} x_i)\cap A = \phi$.

Sea $M\setminus L = L'\cup L''$, donde $L' = \{i\varepsilon M\setminus L\colon x_i\varepsilon A\}$ y $L'' = \{i\varepsilon M\setminus L\colon x_i\not\varepsilon A\}$. Sea ahora $K = L\cup L'$. Se tiene que $K\subset M$, que $\bigcup_{i\varepsilon K} x_i\subset A$ y que $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus K} x_i)\cap A = \phi$.

///

PROPOSICION 5.36

Sea F un álgebra de Boole. Supongamos que para cada sucesión σ en F de disjuntos se verifica que F_σ tiene la propiedad Ω. Entonces, F tiene la propiedad (IS) y para cada σ en F, F_σ tiene la propiedad (IS).

DEMOSTRACION

Es inmediata pues $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta en F se tiene que σ es una sucesión de átomos en F_σ y, por tanto, tiene la propiedad Ω en F_σ. Por consiguiente tiene la propiedad (IS) en F_σ. De aquí se deduce fácilmente que σ tiene la propiedad (IS) en F.

///

De forma análoga se podría demostrar que si F es tal que para toda sucesión σ disjunta en F se verifica que F_σ tiene la propiedad sub J entonces F tiene la propiedad J.

Del hecho de que F tenga la propiedad J no es posible deducir que las subálgebras sucesionales también la tengan, sin embargo, se verifica el siguiente resultado:

PROPOSICION 5.37

Un subálgebra sucesional de un álgebra sucesional de F es también un subálgebra sucesional de F.

DEMOSTRACION

Sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F sea $\tau = (B_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F_σ. Sea $F_{\sigma\tau}$ el correspondiente subálgebra sucesional de F_σ. Sea $T = \{i\varepsilon\omega: A_i \cap (\bigcup_{i\varepsilon\omega} B_i) = \phi\}$. Sea $1 = \{B_i\}_{i\varepsilon\omega} \cup \{A_i\}_{i\varepsilon T}$. Se tiene que 1 define una sucesión disjunta en F. Consideremos el álgebra sucesional F_1. Sea $A\varepsilon F_1$, entonces $A\varepsilon F_\sigma$ y es evidente que existe un $N \subset \omega$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon N} B_i \subset A$ y que $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N} B_i) \cap A = \phi$. Por tanto, $A\varepsilon F_{\sigma\tau}$. Si $A\varepsilon F_{\sigma\tau}$ entonces $A\varepsilon F_\sigma$ y por tanto, existe un $N_1 \subset \omega$ tal que $\bigcup_{i\varepsilon N_1} A_i \subset A$ y $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N_1} A_i) \cap A = \phi$ y existe un $N_2 \subset \omega$ tal que $(\bigcup_{i\varepsilon\omega\setminus N_2} B_i) \cap A = \phi$. Por tanto, $A\varepsilon F_1$.

///

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, si para cada sucesión disjunta σ en F se tiene que F_σ tiene la propiedad sub J entonces F_σ tambien tiene la propiedad J.

Estudiaremos a continuación la relación existente entre el espacio de Stone de un álgebra y el espacio de Stone de una subálgebra sucesional.

Sea σ una sucesión disjunta en F. Sea $S = st(F)$ y sea $S_\sigma = st(F_\sigma)$. Se tiene que para cada $i\varepsilon\omega$ A_i es un átomo de F_σ y así, en S'_σ, A_i es un filtro maximal principal (clopen unitario) que denotamos por y_i.

Del homomorfismo booleano inyectivo de inclusión: $i:F_\sigma \to F$ se obtiene la aplicación continua y sobreyectiva $l:S\to S_\sigma$ definida, para $x\varepsilon S$, por $l(x) = \{A\varepsilon F_\sigma :\ A\in x\}$. Se verifica el siguiente resultado, cuya demostración es bastante directa, y donde usamos la notación anterior.

PROPOSICION 5.38

1.- Sea $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F. Para cada $i\varepsilon\omega$ y cada $x\varepsilon A_i$ se tiene que $l(x) = y_i$. Si $x\notin \bigcup A_i$ entonces $l(x) \notin \{y_i : i\varepsilon\omega\}$. Por tanto, $l(x) = y_i$ si y solo si $x\varepsilon A_i$ y $l(\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i) = \{y_i :\ i\varepsilon\omega\}$ y $l^{-1}(\{y_i : i\varepsilon\omega\}) = \bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i$.

2.- Si $A\varepsilon\mathcal{F}$ y $A\cap(\bigcup A_i) = \phi$ entonces $l\colon A\to l(A)$ es un homeomorfismo, $l(A)$ es un clopen en S_σ, $l(A)\varepsilon\mathcal{F}_\sigma$ es disjunto en S_σ con $\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} y_i}$, las álgebras $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_{\sigma l(A)}$ son booleanamente isomorfas y finalmente, $l(A)$ es un clopen en S_σ que es canónicamente isomorfo al elemento $A\varepsilon\mathcal{F}_\sigma$.

3.- Si $x\varepsilon S$ y $x \notin \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ entonces existe un $A_x\varepsilon\mathcal{F}$ tal que $A_x\varepsilon\mathcal{F}_\sigma$ y tal que $l\colon A_x\to l(A_x)$ es un homeomorfismo, siendo $l(A_x) = \hat{A}_x$. Además se verifica que $l\colon S\setminus\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \to S_\sigma\setminus\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} y_i}$ es un homeomorfismo.

4.- Se verifica que $l(\overline{\bigcup A_i}\setminus\bigcup A_i) = \{y_i\colon i\varepsilon\omega\}^d$ y que $l^{-1}(\{y_i\colon i\varepsilon\omega\}^d) = \overline{\bigcup A_i}\setminus\bigcup A_i$.

Una de las razones del interés de las subálgebras sucesionales radica en el siguiente resultado.

PROPOSICION 5.39

Sea F un álgebra de Boole tal que para toda sucesión disjunta σ en F se verifica que existe una subsucesión σ' de σ tal que $F_{\sigma'}$ tiene la propiedad (VHS) (resp. (N), (G), (R)) entonces F tiene la propiedad (VHS) (resp. (N), (G), (R)).

DEMOSTRACION

Supongamos que F no tiene la propiedad (VHS) entonces existe una sucesión $(\mu_i)_{i\varepsilon\omega}$ de medidas en F que es puntualmente convergente a cero y existe una sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de disjuntos en F y existe un $\varepsilon>0$ tales que $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$ para cada $i\varepsilon\omega$. Sea $\sigma' = (A_i)_{i\varepsilon M}$ una subsucesión de $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ tal que $F_{\sigma'}$ tiene la propiedad (VHS) Se tiene que $(\mu_i)_{i\varepsilon M}$ es una sucesión de medidas en $F_{\sigma'}$ que es puntualmente convergente a cero en $F_{\sigma'}$. Y $(A_i)_{i\varepsilon M}$ es una sucesión de disjuntos en $F_{\sigma'}$ tal que $|\mu_i(A_i)|>\varepsilon$ para cada $i\varepsilon M$. Esta contradicción prueba que F tiene la propiedad (VHS).

La demostración para el correspondiente caso de las propiedades (N), (G) y (R) es análoga. Para el caso (R), en la pág.91 se presentó una situación análoga.

///

El caso del teorema anterior nos motiva la siguiente defini ción.

DEFINICION 5.40

a.- Sea F un álgebra de Boole. Sea P una propiedad relativa a las álgebras de Boole. Diremos que F tiene la propiedad (HsP) si para toda sucesión disjunta σ en F se tiene que F_{σ} tiene la propie dad P.

b.- Diremos que F tiene la propiedad CHsp si todo cociente de F tiene la propiedad Hsp.

c.- Diremos que F tiene la propiedad Hssp si toda sucesión disjunta σ en F posee una subsucesión σ' tal que el subálgebra sucesional $F_{\sigma'}$ tiene la propiedad P.

d.- Diremos que F tiene la propiedad CHssp si F y todo cociente tiene la propiedad Hssp.

NOTA: Cuando cualquiera de las propiedades de la definición anterior sólo se afirme para sucesiones de clopenes infinitos y disjuntos, añadiremos al final la letra i. Así por ejemplo, diremos que F es Hspi si para toda sucesión σ de clopenes infinitos y disjuntos se verifica que F_{σ} tiene la propiedad P.

Por P=k entendemos que la correspondiente álgebra de Boole es una k-álgebra de Boole. Por $P=l^{\infty}$ entendemos que el espacio de las funciones medibles de la correspondiente álgebra de Boole tiene copia de $l\infty$. Por p=(VHS) que el correspondiente álgebra tiene la propiedad (VHS), etc.

Los resultados que siguen son evidentes. Algunos son consecuencia de lo visto en las paginas anteriores

PROPOSICION 5.41

a.- Si F tiene la propiedad HSK entonces F es una k-álgebra de Boole con la propiedad J.

b.- Son equivalentes

1) F tiene la propiedad (S)

2) F tiene la propiedad H s(S)

3) F tiene la propiedad CHs(S)

c.- F es σ-completa si y solo si F es H$s\sigma$-completa. Estas propiedades implican que F sea CHs(S). Pueden existir cocientes de F que no sean σ-completas, aunque si tendran (s).

d.- Son equivalentes

1) F es (IS)

2) F es Hs(IS).

3) F es CHs(IS).

e.- Son equivalentes las siguientes propiedades sobre F :

1) F es (SC)

2) F es Hs(SC).

Estas propiedades implican que F sea CHs(IS), pues pueden existir cocientes de un álgebra (SC) que no sean (SC) pero estos cocientes si seran (IS).

f.- Son equivalentes las siguientes propiedades sobre F:

1) F es (f)

2) F es Hs(f)

3) F es CHs(f)

g - F tiene la propiedad (E) si y solo si F tiene la propiedad Hs(E).Estas propiedades implican que F tenga la propiedad CHs(f).

h.- F es (n-σ) si y solo si F es Hs(n-σ)

i.- F es (u.d.s.c.) si y solo si F es Hs(u.d.s.c.)

j.- Si P es culquiera de las propiedades (VHS),(G),(N) o (R) y F es Hsspi entonces F es P.

k.- Si F tiene la propiedad (IS) entonces F es CHs(VHS).

OBSERVACION 5.42

Se observa del resultado anterior que las condiciones suficientes ensayadas para que F tenga la propiedad (VHS) consiguen en realidad un objetivo más fuerte como es el que F tenga la propiedad CHs(VHS).Esta última propiedad podría ser denominada como propiedad (VHS)-fuerte o en abreviaturas (VHS)-F. En el siguiente ejemplo se muestran algunas álgebras de Boole que no están en esta situación.

EJEMPLO

a).- El álgebra F de los subconjuntos de $[0,1]$ que son simultaneamente F_σ y G_δ no es sub-J. Sea, para cada $n\varepsilon\omega$ $A_n=\{1/2^n,\dots,(2^n-1)/2^n\}$. Sea $\sigma=(A_i)_{i\varepsilon\omega}$. Se verifica que F_σ no es un k-álgebra de Boole. En la pág. 31 se prueba que cierta subsucesión de $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ puede ser incluida término a término en una sucesión de clopenes infinitos y disjuntos, que carecerá también de la propiedad sub-J, que da lugar a una subálgebra sucesional que no es k-álgebra de Boole. (y por tanto no tiene ni las propiedades (VHS), (G), (N) o (R))

b).-El álgebra de los subconjuntos medibles-Jordan de $[0,1]$ tiene la propiedad (N) pero no es Hs(N). Para comprobarlo, basta elegir la misma sucesión del apartado anterior y usar unos razonamientos análogos.

c).-Consideremos el ejemplo de álgebra de Boole de la pág.10 y consideremos la sucesión de disjuntos definida, para cada $i\varepsilon\omega$, por $A_i=\{(i,m): m\leq i\}$. Si σ es la correspondiente sucesión se tiene que $F_\sigma=\phi(\omega)$.

TEOREMA 5.44

Si F es un CHSk-álgebra de Boole que no es (IS). Existe un subálgebra sucesional G de un cociente de F tal que

i) G es un k-álgebra de Boole atómico.

ii Si $S_G=P\cup D$ es la descomposición perfecta-dispersa de S_G se verifica que D puede dividirse en dos subconjuntos infinitos y disjuntos D_1 y D_2 tales que $(D_2)^d=P$.

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F que no tenga la propiedad (IS). Existe un $M \subset \omega$ infinito tal que para cada $N \subset M$ infinito con $M \setminus N$ infinito **no existe** un clopen $A \varepsilon F$ tal que $A_i \subset A$ para $i \varepsilon N$ y $A_i \cap A = \phi$ para $i \varepsilon \omega \setminus N$. Sea $K = \overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i}$ y consideremos el álgebra F_K de los clopenes de K. La sucesión $\sigma = (A_i)_{i\varepsilon\omega}$ es una sucesión disjunta en F_K que no tiene la propiedad (IS). Sea $G = (F_K)_\sigma$ la correspondiente subálgebra sucesional. Sea $S_G = P \cup D$ la correspondiente descomposición perfecta-dispersa de S_G. Cada A_i es, para $i\varepsilon\omega$, un átomo en G que denotamos por x_i. Es exidente que $D = (x_i)_{i\varepsilon\omega}$ y que G es un k-álgebra de Boole atómico tal que la sucesión $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ no tiene la propiedad (IS).Se puede demostrar fácilmente que existe una subsucesión de $(x_i)_{i\varepsilon\omega}$, que denotamos como $(x_i)_{i\varepsilon M}$ donde M es tal que $\omega \setminus M$ es infinito (al igual que M), tal que $(x_i)_{i\varepsilon M}$ no tiene supremo ni posee subsucesión con supremo. (ver pág.105). Descompongamos D en dos conjuntos infinitos $D_1 = \{x_i : i\varepsilon M\}$ y $D_2 = \{x_i : i\varepsilon\omega\setminus M\}$. Sea $x \varepsilon P$ y sea A un clopen de F tal que $x\varepsilon A$. Si fuese $A \cap D_2 = \phi$ sería $A \cap D = A \cap D_1$. Sea $N = \{i\varepsilon\omega : x_i \varepsilon A \cap D_1\}$. Se tendría que $N \subset M$ y como $A = \overline{A \cap D} = \overline{A \cap D_1}$ será $\overline{\bigcup_{i\in N} x_i} = A$, en contra de la suposición de que no existía una subsucesión de $(x_i)_{i\varepsilon M}$ con supremo. Por tanto, para cada $x \varepsilon P$ y para todo clopen A con $x \varepsilon A$ es $A \cap D_2 \neq \phi$. Por tanto, $(D_2)^d = P$.

///

OBSERVACION 5.45

Cabe plantearse la siguiente pregunta : Sea F un κ-álgebra de Boole atómica con $|D| = \omega$ y tal que D admite una descomposición $D = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 son infinitos y $(D_2)^d = P$.

¿puede ser F (VHS) o CHs(VHS) ?. Desconocemos si existe algún álgebra de Boole con estas caracteristicas que sea (VHS). Caso de ser la respuesta negativa, se tendría que (IS)$\Leftrightarrow$CHs(VHS). En efecto, es evidente que (IS) $\Rightarrow$ CHs(VHS). Recíprocamente, si F es CHs(VHS) y no es (IS), obtendriamos según el teorema anterior un álgebra con las caracteristicas descritas al principio de esta observación, que al no ser (VHS) nos daría lugar a una contradicción que resuelve el problema.

Desconocemos si existe un k-álgebra de Boole atómica con $|D|=\omega$ que sin ser (SC) sea (VHS).

TEOREMA 5.46

Sea F un álgebra de Boole con las propiedades (IS) y CHs(1^{∞}). Se verifica que F tiene la propiedad (f).

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ una sucesión disjunta en F.Sea $K=\overline{\bigcup_{i\varepsilon\omega} A_i} \subset S$. Consideremos el álgebra cociente F_K y , en F_K la sucesión $\sigma=(A_i)_{i\varepsilon\omega}$. Sea G el álgebra $(F_K)_\sigma$. Es evidente que G es un k-álgebra de Boole atómica. Sea $T=S_G$ y sea $T=P \cup D$ la correspondiente descomposición perfecta-dispersa, donde $|D|=\omega$ y puede escribirse $D=(x_i)_{i\varepsilon\omega}$ donde,para cada $i\varepsilon\omega$, x_i es el átomo en que se ha convertido A_i

El álgebra G tiene la propiedad (SC) , pues G tiene las propiedades (IS) y (c.c.c.), ya que (IS) es hereditaria al cociente y a las subálgebras sucesionales . Según se vió en la pág.105 existe un $N\subset\omega$ infinito tal que $(x_i)_{i\varepsilon N}$ tiene supremo y toda subsucesión de $(x_i)_{i\varepsilon N}$ tiene también supremo en G .

Sea B el supremo en $\mathcal{G}$ de la sucesión $(x_i)_{i\varepsilon N}$. Se tiene que para cada $i\varepsilon N$ es $x_i \varepsilon B$ y para $i\varepsilon\omega\smallsetminus N$ es $x_i \varepsilon B^C$. Los elementos B y B^C son de $(\mathcal{F}_K)_\sigma$. Por tanto, lo son de $\mathcal{F}_K$. En $\mathcal{F}_K$ se tiene que $A_i \subset B$ para $i \varepsilon N$ y $A_i \subset B^C$ para $i\varepsilon\omega\smallsetminus N$. Sea $A\varepsilon \mathcal{F}$ tal que $A \cap K = B$. Es evidente que $A \supset A_i$ para cada $i \varepsilon N$ y que $A^C \supset A_i$ para cada $i\varepsilon\omega\smallsetminus N$.

Con razonamientos similares se puede demostrar que para cada $M \subset N$ es posible hallar un $A^M \varepsilon\mathcal{F}$ tal que $A_i \subset A^M$ para $i \varepsilon M$ y $A_i \cap A^M = \phi$ para $i\varepsilon\omega\smallsetminus M$. Esto prueba que la sucesión $(A_i)_{i\varepsilon\omega}$ de $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (f).

///

COROLARIO 5.47

Sea $\mathcal{F}$ un k-álgebra de Boole con las propiedades (SC) y (c.c.c.) (o equivalentemente la propiedad (IS). Se verifica que: $\mathcal{F}$ es CHs$(1^\infty) \Longrightarrow \mathcal{F}$ es (E) $\Longrightarrow \mathcal{F}$ es (R).

REFERENCIAS

1 T. ANDO (1.961). Convergent sequences of finitely additive measures. Pacific J. Math. 11. 395-404.

2 P. ANTOSIK y C. SWARTZ (1.985). The Vitali-Hahn-Saks theorem for algebras. Journal Math. Anal. and Apli. 106. 116-119.

3 P. ANTOSIK y C. SWARTZ (1.985). Matrix Methods in Analysis. Lecture Notes in Math. Springer.

4 F. BENITEZ (1.985). Sobre algunos teoremas clásicos de la teoría de la medida. U.N.E.D.

5 K. P. S. y M. BHASKARA RAO (1.983). Theory of charges. Academic Press.

6 J. K. BROOKS y R. S. JEWETT (1.970). On finitely additive vector measures. Proc. Nat. Acad. Sci. Usa. 67. 1294-98.

7 R. B. DARST (1.970). The vitali-Hahn-Saks and Nikodym theorems for additive set functions. Bull. Amer. Math. Soc. 76. 1297-98.

8 R. S. DARST (1.973). The Vitali-Hahn-Saks theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 79. 758-760.

9 F. K. DASHIEL (1.981). Non weakly compact operators from order-Cauchy Complete C(S) lattices with application to Baire classes. Trans. Amer. Math. Soc. 266. 397-413.

10 J. DIESTEL (1.973). Grothendieck Spaces and Vector measures. Vector and Operator Valued Measures and Applicatios. Academic Press. 97-108.

11 J. DIESTEL y B. FAIRES (1.974). On Vector Measures. Trans. Amer. Math. Soc. 198. 253-271.

12 J. DIESTEL, B. FAIRES y R. HUFF (1.976). Convergence and Boundedness of measures on non-sigma-complete algebras.

13 J. DIESTEL y J. J. UHL (1.977). Vector measures. Amer. Math. Soc. Providence.

14 J. DIESTEL y J. J. UHL (1.983). Progress in vector measures 1977-83. Measure Theory and its Applications. Springer. 144-193.

15 J. DIESTEL (1.984). Sequences and Series in Banach Spaces. Springer.

16 E. K. Van DOUWEN y J. van MILL (1.980). Subespaces of basically disconnected spaces or quotiens countably complete Boolean Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 259. 121-127.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Antonio Aizpuru Tomás

titulada "Algunos teoremas clásicos de la teoría de la medida usando los espacios de Stone de las Algebras de Boole"

acordó otorgarle la calificación de Apto "cum laude"

Sevilla, 1 de Diciembre 1.986

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

Juan Arias de Reyna M.

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,

A. de Castro

A. Aizpuru T.