

12.4252

043
4V

LBS 320212
500

TRABAJO REALIZADO EN EL
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Algunos aspectos de las Variedades de Homología

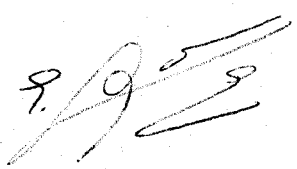
por

Antonio Quintero Toscano

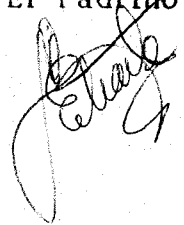
Tesis revisada y conforme

Sevilla, 30 de Enero de 1982

El Director



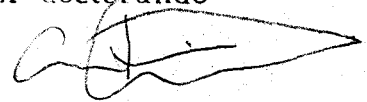
El Padrino



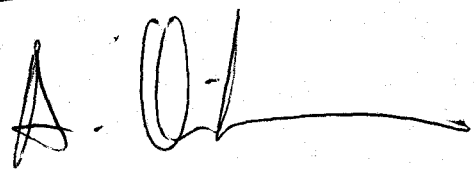
Trabajo realizado

bajo la dirección del profesor
Eladio Domínguez Murillo, para
optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas por la
Universidad de Sevilla.

El doctorando



Autógrafa le comulca de este
Memoria



ALGUNOS ASPECTOS DE LAS VARIETADES DE HOMOLOGIA

por

Antonio Quintero Toscano

INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales de la Topología Geométrica que aún permaneca abierto es el de la triangulación de las variedades topológicas (ver [12]). Es fácil observar que en una variedad topológica el "link" de todo punto tiene la homología de la bola o esfera de una dimensión menor; esto induce la noción más general de variedad de homología, resultando una clase de espacios estrictamente más amplia que la primera. Es por ello que una caracterización de la subclase de las variedades de homología que son topológicas da una aproximación al problema enunciado. Matumoto, Edwards y Cannon (ver [4] y [28]) han encontrado una caracterización para las variedades cerradas de dimensión ≥ 5 . En el capítulo I damos caracterizaciones para variedades con borde en dimensiones ≥ 6 y ≥ 7 . En el capítulo II demostramos que ambas clases aunque distintas, producen los mismos bordismo en dimensiones ≥ 6 . El estudio geométrico que realizamos sobre las variedades de homología finaliza en el tercer capítulo, donde se observa el comportamiento de estas variedades respecto a algunos conceptos de transversalidad. En el capítulo I de [34] se desarrolla una teoría de bordismo singular a partir de modelos que admiten buenas propiedades de transversalidad. En el último capítulo, comprobamos que las variedades de homología no tienen propiedades generales de transversalidad; sin embargo, en el segundo capítulo hemos construido una teoría de bordismo singular y probado que el espectro de Martin (ver [24]) es su espectro clasificante.

A continuación vamos a detallar el contenido de cada capítulo.

El capítulo 0 está dedicado a señalar algunas propiedades simples de las variedades de homología de las que, aunque son conocidas, hemos considerado oportuno dar una demostración por desconocer una referencia exacta. También se indican algunos ejemplos muy conocidos que servirán para la construcción de contraejemplos en los capítulos siguientes.

Los resultados fundamentales del capítulo I son:

- 1) Un teorema para la doble suspensión de bolas de homología con collar topológico (teorema 1.2.1.)
- 2) Un teorema sobre la doble suspensión de bolas de homología de dimensión 4 (teorema 1.2.5.)
- 3) Un teorema sobre la doble suspensión de bolas de homología fuerte (teorema 1.2.9.)
- 4) Una caracterización de las variedades de homología con borde que son topológicas, para dimensión ≥ 7 , que generaliza un teorema de Matumoto-Edwards-Cannon (ver [28] y [4]) (teorema 1.3.7.)
- 5) Una caracterización de las variedades de homología con borde que son topológicas para dimensión ≥ 6 (teorema 1.3.8.). Este teorema ha sido probado también en [12] .

El capítulo finaliza con algunos ejemplos de no existencia de pl -collares o collares topológicos en las variedades de homología.

En los dos primeros apartados del capítulo II se construye el bordismo singular de las variedades de homología, relacionándolo con el bordismo singular diferenciable mediante los números característicos singulares de Stiefel-Whitney y de Pontrjagin. El grupo de coeficientes ha sido estudiado por Martin (ver [24] y [26]). Para la construcción del bordismo singular ha sido necesario generalizar un teorema de Cohen a las variedades de homología (teorema 2.1.3.).

Obsérvese además que las variedades de homología no son modelos con singularidades en el sentido de Rourke-Sanderson.

En el tercer apartado se demuestra (teorema 2.3.2.)

"Toda n -esfera de homología, $n \geq 5$, es H -bordante a una n -esfera de homología simplemente conexa por un H -bordismo cuyo interior es una variedad topológica."

Como consecuencia se obtiene que el "olvido" define un isomorfismo entre los grupos de bordismo de las variedades topológicas trianguladas y de las variedades de homología, en dimensión ≥ 6 , tanto en el caso orientado como en el no orientado. El apartado 4 está dedicado a la construcción de una equivalencia natural entre el bordismo singular de las variedades de homología y la teoría de homología generalizada asociada al espectro de Martin sobre la categoría TOP (teorema 2.4.1.). En el párrafo 5 se contruye el bordismo singular de las variedades casi PL, aunque dichos modelos no admiten cilindros. Se demuestra además que coincide con el correspondiente bordismo PL y se observa finalmente que el bordismo construido con las variedades de homología fuerte coincide con el anterior en dimensión $\neq 4$, y que en ésta sólo se tiene estructura de semigrupo.

En el primer apartado del capítulo III se puede encontrar una caracterización de las variedades de homología en función de los complejos de conos que la recubren (teorema 3.1.15.) teorema que se utiliza para probar que las distintas nociones clásicas de transversalidad son equivalentes en las variedades de homología bajo ciertas condiciones. El último apartado se dedica a dar contraejemplos a posibles generalizaciones de ciertos resultados sobre transversalidad a las variedades de homología.

En el desarrollo de este trabajo se utilizan los resultados y notaciones habituales de la Topología Geométrica que se pueden encontrar en 19, 39 ó 44 .

Por último, quiero agradecer al profesor E. Domínguez su ayuda constante, al profesor F.J. Echarte las facilidades que me ha dado para la realización de este trabajo, a mi amigo y compañero R. Ayala su desinteresada colaboración y a los profesores L.J. Hernández y J. Sancho su amable hospitalidad; así como dar las gracias a los Departamentos de Geometría y Topología de las Universidades de Sevilla y Zaragoza, donde ha sido realizado este trabajo.

Sevilla, Enero de 1982

Antonio Quintero Toscano
Departamento de Geometría y Topología

INDICE

Capítulo 0. Generalidades sobre las variedades de homología

1. Variedades de homología	1
2. Ejemplos notables	9
3. Las variedades de homología y otros modelos geométricos	12
4. Operaciones con variedades de homología: Productos, "joins" y sumas conexas	14

Capítulo I. Relaciones entre las variedades de homología y las variedades topológicas

1. Introducción	18
2. Suspensiones de bolas de homología	21
3. Caracterización de las variedades de homología con borde que son variedades topológicas	27
4. Collares en variedades de homología	34

Capítulo II. Bordismo de las variedades de homología

1. Bordismo singular de las variedades de homología	38
2. Números característicos	42
3. El grupo de coeficientes	46
4. El espectro del bordismo singular homológico	52
5. Bordismo de las variedades casi PL	61

Capítulo III. La transversalidad en variedades de homología

1. Complejos de conos en variedades de homología	72
2. Transversalidad en variedades de homología	77
3. Contraejemplos	89
<u>Referencias</u>	94

CAPITULO 0

GENERALIDADES

§1. Variedades de homología.

0.1.1. Definición. Una n -variedad de homología es un poliedro euclídeo M que admite una triangulación K tal que el "link", $lk(\sigma;K)$, de todo r -símplice $\sigma \in K$ tiene la homología (con coeficientes en Z) de la esfera S^{n-r-1} o de un punto.

Una n -variedad de homología se dirá cerrada (totalmente abierta) si es compacta (no compacta respectivamente) y admite una triangulación K tal que el "link" de todo r -símplice $\sigma \in K$ tiene la homología de la esfera S^{n-r-1} .

0.1.2. Nota. Una definición equivalente a la 0.1.1. es que para todo r -símplice $\sigma \in K$, la homología del par $(st(\sigma;K), lk(\sigma;K))$ sea la del par (B^{n-r}, S^{n-r-1}) o la de un punto.

0.1.3. Proposición. $M = |K|$ es una n -variedad de homología si y solo si para todo $x \in M$, $lk(x;K)$ tiene la homología de la esfera S^{n-1} o la de un punto. En particular, usando escisión, se cumple que M es una n -variedad de homología si y solo si la homología del par $(M, M - \{x\})$ es la homología de (B^n, S^{n-1}) o la de un punto.

Demostración. Si $x \in \sigma$, entonces $lk(x;K) = \sigma * lk(\sigma;K)$, luego, por el teorema de suspensión, se tiene que $\tilde{H}_q(lk(x;K))$ es isomorfo a $\tilde{H}_{q-r}(lk(\sigma;K))$ si $\dim \sigma = r$.

0.1.4. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología y L es un complejo simplicial tal que $|K|$ y $|L|$ son homeomorfos entonces $|L|$ es una n -variedad de homología.

Demostración. Sigue de la segunda parte de la proposición anterior.

0.1.5. Corolario. M es una n -variedad de homología si y solo si se verifican las condiciones de la definición 0.1.1. para cada triangulación de M .

0.1.6. Definición. Una n -esfera (n -bola) de homología es una n -variedad de homología compacta que tiene la homología de la esfera S^n (de la bola B^n respectivamente).

0.1.7. Proposición. En toda triangulación de una variedad de homología M , los "links" de los símlices son esferas o bolas de homología.

Demostración. Si K es una triangulación de M , por ser localmente finita $lk(\sigma;K)$ es finito para todo $\sigma \in K$; además, si $\tau \in lk(\sigma;K)$ se verifica que $lk(\tau;lk(\sigma;K)) = lk(\tau * \sigma;K)$ luego $lk(\sigma;K)$ es una variedad de homología compacta que tiene la homología de la esfera S^{n-r-1} o de la bola B^{n-r-1} donde $\dim \sigma = r$.

0.1.8. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología conexa cerrada o totalmente abierta se verifica:

a) $\dim K = n$.

b) cada punto de M está en algún n -símplice de K

c) cada $(n-1)$ -símplice de K es cara de, exactamente, dos n -símplices

d) dados dos n -símplices $\sigma, \tau \in K$ existe una cadena de n -símplices de K , $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ con $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_m = \tau$ tal que $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ es una $(n-1)$ -cara común.

Demostración. Ver 5.3.3. de [29] .

0.1.9. Definición. Por la proposición anterior, toda n -variedad de homología M cerrada o totalmente abierta es una n -seudovariedad cerrada o totalmente abierta. Entonces se dice que M es orientable si lo es como pseudovariedad; es decir, dada una triangulación K de M existe una orientación sobre cada n -símplice de K de modo que en cada cara común a dos n -símplices las orientaciones inducidas son opuestas.

0.1.10. Nota. Para variedades cerradas y orientables se verifica el siguiente teorema:

Dualidad de Alexander-Poincaré. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología conexa, cerrada y orientable y $J \subset L \subset K$ son subcomplejos se tiene un isomorfismo de dualidad

$$D: H^r(|L|, |J|) \longrightarrow H_{n-r}(M - |J|, M - |L|).$$

Y en el caso particular en el que $J = \emptyset$ y $K = L$ se tiene

Dualidad de Poincaré. Si M es una n -variedad de homología cerrada, conexa y orientable existe un isomorfismo de dualidad

$$D: H^r(M) \longrightarrow H_{n-r}(M)$$

Para una demostración de estos teoremas ver [29] .

0.1.11. Nota. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología y

$$\partial K = \{ \sigma \in K \text{ tales que } \tilde{H}_q(\text{lk}(\sigma; K)) = 0 \}$$

se prueba, ayudándose de la dualidad de Alexander-Poincaré que ∂K es un subcomplejo de K y que $|\partial K|$ es una $(n-1)$ -variedad cerrada o totalmente abierta (ver [29] y [40]).

0.1.12. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología se verifican las siguientes igualdades:

$$|\partial K| = \{ x \in M \text{ con } \tilde{H}_q(\text{lk}(x; K)) = 0 \} = \{ x \in M \text{ con } \tilde{H}_q(M, M - \{x\}) = 0 \}$$

Demostración. Si $x \in |\partial K|$, por ser ∂K subcomplejo existe $\sigma \in \partial K$ con $x \in \hat{\sigma}$; por tanto $\text{lk}(x; K) = \hat{\sigma} * \text{lk}(\sigma; K)$ y por el isomorfismo de suspensión $\tilde{H}_q(\text{lk}(x; K)) = 0$.

Si ahora $x \in M$ es tal que $\tilde{H}_q(\text{lk}(x; K)) = 0$, dado $\tau \in K$ con $x \in \hat{\tau}$ se verifica que $\text{lk}(x; K) = \hat{\tau} * \text{lk}(\tau; K)$ luego $H_{q-r}(\text{lk}(\tau; K)) = 0$ donde $\dim \tau = r$, y por ello $\tau \in \partial K$. Entonces $x \in |\partial K|$.

La segunda igualdad sigue por escisión.

0.1.13. Proposición. Si $M = |K|$ y $N = |L|$ son dos variedades de homología y $f: M \rightarrow N$ un homeomorfismo entonces $f(|\partial K|) = |\partial L|$.

Demostración. Sigue de la proposición anterior.

0.1.14. Corolario. Si M es una variedad de homología, y K y K' son triangulaciones de M , entonces $|\partial K| = |\partial K'|$.

0.1.15. Definición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología, al conjunto $\partial M = |\partial K|$ se le llama el borde de M . Si $\partial M \neq \emptyset$ se dice que M es una variedad de homología con borde, y si M es una variedad cerrada o totalmente abierta se dice que M es una variedad sin borde.

0.1.16. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología conexa

con borde se verifica:

- a) $\dim K = n$
- b) todo punto de M está en algún n -símplice de K
- c) todo $(n-1)$ -símplice de K es cara de a lo más dos n -símplices
- d) El complejo formado por los $(n-1)$ -símplices (y sus caras) que son caras de exactamente un n -símplice de K coincide con ∂K
- e) Dados dos n -símplices σ y τ de K existe una cadena de n -símplices $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ con $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_m = \tau$ y tal que $\sigma_{i+1} \cap \sigma_i$ es un $(n-1)$ -símplice.

Demostración. Las partes a) y b) se hacen como en 0.1.8.

c) Dado un $(n-1)$ -símplice $\sigma \in K$, $lk(\sigma; K)$ es una 0-esfera o 0-bola de homología; luego $lk(\sigma; K) = S^0$ ó $lk(\sigma; K) = \{\text{pto}\}$; en el primer caso σ es cara de dos n -símplices y en el segundo de sólo uno.

d) Si τ es un $(n-1)$ -símplice que es cara de un único n -símplice, entonces $lk(\tau; K) = \{\text{pto}\}$ y de ello se deduce que $\tau \in \partial K$, que, por ser subcomplejo, contiene a todas las caras de τ .

Si $\tau \in \partial K$, por ser $|\partial K|$ $(n-1)$ -variedad de homología cerrada, τ es cara de algún $(n-1)$ -símplice $\sigma \in \partial K$ por 0.1.8. Por tanto $lk(\sigma; K) = \{\text{pto}\}$ lo que implica que σ es cara de un único n -símplice de K .

e) Sea σ un n -símplice cualquiera de K y $L \subset K$ el subcomplejo formado por los n -símplices de K que se pueden unir con σ por una cadena de n -símplices con las condiciones del enunciado. Sea $J \subset K$ el subcomplejo formado por los n -símplices que no se pueden unir con σ mediante una cadena del tipo anterior. Se verifica que $\dim(J \cap L) \leq n-2$. En efecto, si $\tau \in L \cap J$ tuviese dimensión $n-1$ sería cara de un n -símplice η_1 de L y de otro η_2 de J , entonces η_2 se podría unir a σ con una cadena de n -símplices cortándose en $(n-1)$ -caras y esto estaría en contradicción con el hecho de que $\eta_2 \in J$.

Por otra parte, como $K = J \cup L$, si $\dim M = 1$ se sigue por conexión que $J = \emptyset$; por ello podemos suponer que $\dim M \geq 2$. Sea v un vértice de $L \cap J$ ($L \cap J \neq \emptyset$ por ser M conexa); entonces

$$lk(v;K) = lk(v;K) \cap L \cup lk(v;K) \cap J$$

y $\dim lk(v;K) \cap J \cap L \leq n-3$. Puesto que $lk(v;K)$ es una $(n-1)$ -esfera o bola de homología, se sigue de c) que todo $(n-2)$ -símplice de $lk(v;K)$ es cara de uno o dos $(n-1)$ -símplices de $lk(v;K)$. Además, por d) $\partial lk(v;K)$ está formado por los $(n-2)$ -símplices que sólo son cara de un $(n-1)$ -símplice. Entonces si $c_L = \sum \tau$, donde τ recorre los $(n-1)$ -símplices de $lk(v;K) \cap L$ y $c_J = \sum \mu$, donde μ recorre los $(n-1)$ -símplices de $lk(v;K) \cap J$ son ciclos relativos del par $(lk(v;K), lk(v;K))$, y puesto que la dimensión de $lk(v;K) \cap L \cap J$ es menor que $n-2$ se sigue que $[c_L] \neq [c_J]$ en el grupo $H_{n-1}(lk(v;K), \partial lk(v;K); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Por tanto $J = \emptyset$ y $K = L$ lo que prueba e).

0.1.16. Nota. La proposición anterior nos asegura que toda n -variedad de homología con borde es una n -seudovariedad con borde y que el borde como variedad de homología coincide con el borde como pseudovariedad. Esto nos permite definir un concepto de orientación en las variedades de homología con borde del mismo modo que en la definición 0.1.9. De las propiedades de la orientación de pseudovariedades se deduce que si M es una variedad de homología orientable M también lo es.

Las variedades de homología con borde compactas y conexas verifican el siguiente teorema (ver 5.4.13. de [29]) :

Dualidad de Lefschetz. Si M es una n -variedad de homología en las condiciones anteriores existen isomorfismos de dualidad

$$D: H^r(M, M) \longrightarrow H_{n-r}(M)$$

$$D: H_r(M, M) \longrightarrow H^{n-r}(M)$$

0.1.17. Nota. Tanto la dualidad de Lefschetz como la de Alexander-Poincaré son válidas en el caso no orientable si se utilizan coeficientes en Z_2 .

0.1.18. Proposición. El borde de una bola de homología es una esfera de homología.

Demostración. Sea B una n -bola de homología, ∂B es una $(n-1)$ -variedad de homología (nótese que $\partial B \neq \emptyset$ pues de lo contrario $H_n(B; Z_2) \cong Z_2$ por ser B pseudovariiedad).

Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow H_{n-q}(\partial B; Z_2) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-q}(B; Z_2) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-q}(B, \partial B; Z_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-q-1}(\partial B; Z_2) \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 & & \mathcal{D} & & \mathcal{D} & & \mathcal{D} \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H^{q-1}(\partial B; Z_2) & \xrightarrow{\delta_*} & H^q(B, \partial B; Z_2) & \xrightarrow{j^*} & H^q(B; Z_2) & \xrightarrow{i^*} & H^q(\partial B; Z_2)
 \end{array}$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(\partial B; Z_2) & \xrightarrow{\alpha} & H_{n-q}(B; Z_2) & \xrightarrow{\beta} & H^q(B; Z_2) & \xrightarrow{i^*} & H^q(\partial B; Z_2) \xrightarrow{\alpha} \dots \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 & & \mathcal{D} & & \mathcal{D} & & \mathcal{D} \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H_{n-q}(\partial B; Z_2) & & & & H^q(B, \partial B; Z_2) & &
 \end{array}$$

Como B es una n -bola de homología $H_r(B) = 0$ si $r \neq 0$ y $H_0(B) \cong Z$; luego por el teorema de coeficientes universales $H^r(B; Z_2) = 0$ y $H^0(B; Z_2) \cong Z_2$. De la sucesión exacta anterior se desprende que $H^q(\partial B; Z_2) = 0$ si $q \neq 0, n-1$ y $H^0(\partial B; Z_2) \cong Z_2$. Ahora por dualidad de Poincaré se sigue que $H_q(\partial B; Z_2) = 0$ si $q \neq 0, n-1$ y que $H_q(\partial B; Z_2) \cong Z_2$ si $q = 0, n-1$. Entonces ∂B es orientable, pues en caso contrario el grupo $H_{n-1}(\partial B)$ sería nulo y un fácil cálculo con la fórmula de coeficientes

universales daría una contradicción. Al ser ∂B orientable y B una bola de homología, B es orientable. Entonces se puede construir la sucesión anterior con coeficientes en Z . Utilizando ésta y el teorema de coeficientes universales como se hizo antes, se concluye que ∂B es una esfera de homología.

0.1.19. Corolario.

a) Si H es una n -esfera de homología y $D \subset H$ es un subpoliedro que es una n -bola de homología, entonces $\overline{H - D}$ es una n -bola de homología.

b) Si D_1 y D_2 son n -bolas de homología y $h: D_1 \longrightarrow D_2$ un pl-isomorfismo, $D_1 \underset{h}{\cup} D_2$ es una n -esfera de homología.

Demostración.

a) Sigue de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(H, D, \overline{H - D})$.

b) Sigue de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(D_1 \underset{h}{\cup} D_2, D_1, D_2)$.

0.1.20. Proposición. Si M es una n -variedad de homología cerrada y simplemente conexa con $\tilde{H}_r(M) = 0$ si $r \leq [n/2]$, entonces M tiene el mismo tipo de homotopía que S^n .

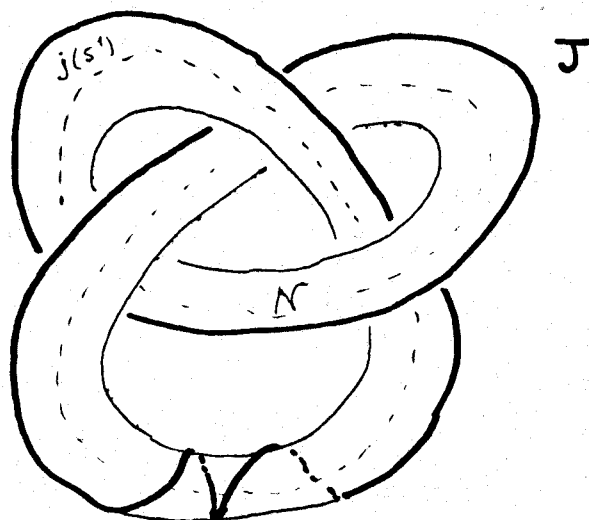
Demostración. El teorema de coeficientes universales implica en este caso que $H^r(M) = 0$ si $r \leq [n/2]$ y $r \neq 0$. Puesto que M es simplemente conexa, es orientable (ver 5.3.18. de [29]) y por dualidad de Poincaré se sigue que $H_r(M) = 0$ si $r \geq [n/2]$ y $r \neq n$ y $H_n(M) = Z$; es decir, M es una n -esfera de homología. Además por ser simplemente conexa, del teorema de Hurewicz se sigue que $\pi_n(M) \cong H_n(M) \cong Z$. Sea $f: S^n \longrightarrow M$ un generador de $\pi_n(M)$ entonces $f_*: H_*(S^n) \longrightarrow H_*(M)$ es un isomorfismo y por 8.3.10. de [29] f es una equivalencia de homotopía.

§ 2. Ejemplos notables.

0.2.1. La 3-esfera de Poincaré. Poincaré construyó una 3-variedad que tiene la homología de la esfera S^3 pero que no es simplemente conexa; con ello probó que la homología no caracteriza las 3-variedades. Obtuvo dicho espacio identificando en un dodecaedro sólido los pentágonos opuestos de la superficie mediante la aplicación que proyecta uno sobre el otro y gira la proyección un ángulo de $\pi/5$ radianes en el sentido de las agujas del reloj. El espacio resultante M es una 3-variedad orientable cuyo grupo fundamental tiene la presentación $\langle a, b \mid a^5 = (ab)^2 = b^3 \rangle$ (ver §62 de [42]). Puesto que este grupo es perfecto (el conmutador coincide con todo el grupo) se sigue, por el teorema de Hurewicz, que $H_1(M) = 0$; entonces por coeficientes universales $H^1(M) = 0$. Como M es orientable $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ y aplicando la dualidad de Poincaré $H_2(M) = 0$. Con esto queda probado que M tiene la homología de S^3 .

El grupo $I^* = \langle a, b \mid a^5 = (ab)^2 = b^3 \rangle$ es conocido como el grupo binario icosaédrico. En [20] se prueba que I^* es el único grupo finito no trivial que puede ser el grupo fundamental de una 3-esfera de homología. Además se puede probar que la única 3-variedad cuyo grupo fundamental es I^* y que admite una acción efectiva de S^1 es la 3-esfera de Poincaré (ver [37]). Este hecho puede ser usado para dar una segunda descripción de la 3-esfera de Poincaré:

Sea $j: S^1 \longrightarrow S^3$ una inmersión de S^1 como el nudo en trébol y quitemos a S^3 el interior de un entorno tubular N de $j(S^1)$. El espacio resultante se pega a una copia del toro macizo $S^1 \times B^2$ por un homeomorfismo entre los bordes, escogido de manera que $\{*\} \times \partial B^2 \subset S^1 \times B^2$ esté pegado a la línea J que se indica con trazo grueso en el dibujo:



En [41] se prueba que la variedad así construida admite una acción efectiva de S^1 , y que posee el mismo grupo fundamental que la 3-esfera de Poincaré por lo que es homeomorfa a ella.

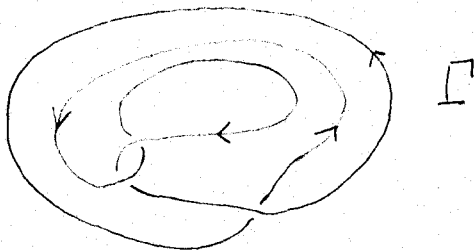
La 3-esfera de Poincaré admite otras descripciones; en [22] puede verse ocho de ellas así como sus equivalencias.

0.2.2. Las variedades de Glaser-Mazur. En [30], Mazur construye una 4-variedad pl compacta M^4 que es contráctil y cuyo borde no es simplemente conexo que verifica que $M^4 \times I$ es pl-isomorfo a B^5 ; por tanto $M^4 \cup_{\partial M^4} M^4 \cong_{pl} B^5 = S^4$. Zeeman probó en [47] que M^4 es un entorno regular de una pl-inmersión del "sombrero bobo" en S^4 . Posteriormente Glaser dió ejemplos de n -variedades ($n \geq 4$) con las mismas propiedades que M^4 (ver [14] y [15]) demostrando los siguientes teoremas:

1) Existe una familia numerable de poliedros contráctiles K_i de dimensión dos con entornos regulares M_i^4 en S^4 tales que, para cada i $M_i^4 \times I$ es pl-isomorfo a B^5 , $\pi_1(\partial M_i^4) \neq 1$ y $\pi_1(S^4 - K_i) \neq 1$. (El caso $i = 1$ corresponde a la variedad de Mazur).

2) Para cada $n \geq 4$ existe una familia numerable de poliedros contráctiles K_i^{n-2} de dimensión $n-2$ con entornos regulares M_i^n en S^n tales que para cada i $M_i^n \times I$ es pl-isomorfo a B^{n+1} , $\pi_1(\partial M_i^n) \neq 1$ y $\pi_1(S^n - K_i^{n-2}) \neq 1$.

Para la construcción de la 4-variedad de Mazur se considera la variedad $S^1 \times B^3$ cuyo borde es $S^1 \times B_1^2 \cup S^1 \times B_2^2$ (B_1^2 y B_2^2 son los dos casquetes de S^2). Sea Γ la curva

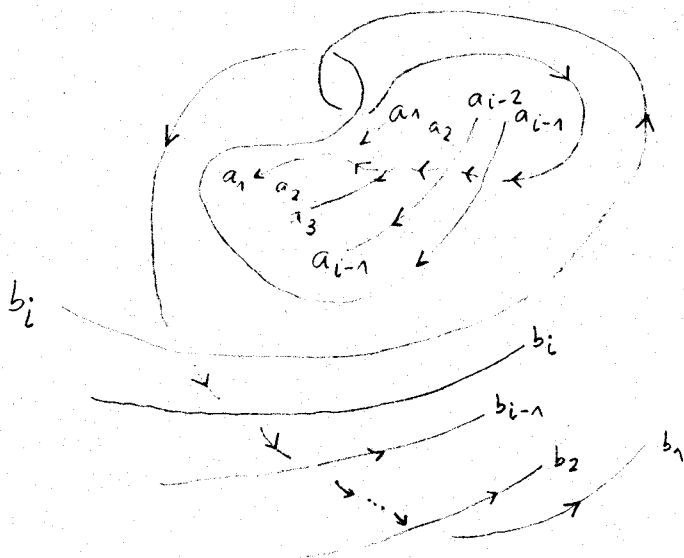


pl-inmersa en $\text{int}(S^1 \times B_1^2)$. Sea T un entorno tubular de Γ y ϕ el pl-isomorfismo entre $\Gamma \times B^2 = T$ y $S^1 \times B^2$ dado por $\phi(S^1 \times \{x_0\}) = \Gamma$ para $x_0 \in \text{int}B_1^2$ y $\phi(\{x\} \times B^2) = \{\phi(x, x_0)\} \times B^2$. Entonces la 4-variedad

$$M^4 = S^1 \times B^3 \cup_{\phi} B^2 \times B^2$$

es tal que colapsa a un complejo K pl-isomorfo al "sombrero bobo". Además $M^4 \times I$ es la pl-bola B^5 pues $M^4 \times I \searrow K \times I \searrow 0$.

Dado un número natural i , para construir la 4-variedad de Glaser M_i^4 se procede como antes pero tomando ahora la curva siguiente en lugar de Γ :



Para construir M_i^5 se toma un entorno regular de $K_i^3 = \sum^1 K_i^2$ en S^5 . La construcción de M_i^n se realiza a partir de M_i^{n-1} de la misma forma que M_i^5 a partir de M_i^4 .

§ 3. Las variedades de homología y otros modelos geométricos.

0.3.1. Relación con las variedades PL y topológicas. Es conocido el resultado de que si $M = |K|$ es una variedad topológica entonces para todo punto $x \in M$, $lk(x; K)$ tiene el mismo tipo de homotopía que una esfera o un punto. Por tanto, todo poliedro euclídeo que es una variedad topológica es una variedad de homología y su borde topológico coincide con su borde como variedad de homología. (Ver 5.4.3 de [29]).

De los teoremas de clasificación de variedades de dimensión menor o igual que dos se deduce que toda n -variedad de homología ($n \leq 3$) es una variedad PL. Como consecuencia, los puntos de una n -variedad de homología donde no es variedad PL están situados en el $(n-4)$ -esqueleto.

El resultado anterior es el mejor posible pues para todo $n \geq 4$ existen n -variedades de homología que no son variedades PL (ni siquiera variedades topológicas). Ejemplos de éstas son $\sum^1 H^3$, donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré, en dimensión 4 y $\sum^1 \partial G_n$, donde G_n son variedades de Glaser, para dimensiones mayores que 4. Ninguna de ellas es variedad topológica pues si $x \in \sum^1$ entonces $lk(x; \sum^1 H^3) = H^3$ y $lk(x; \sum^1 \partial G_n) = \partial G_n$ que en ningún caso tiene el mismo tipo de homotopía de la correspondiente esfera.

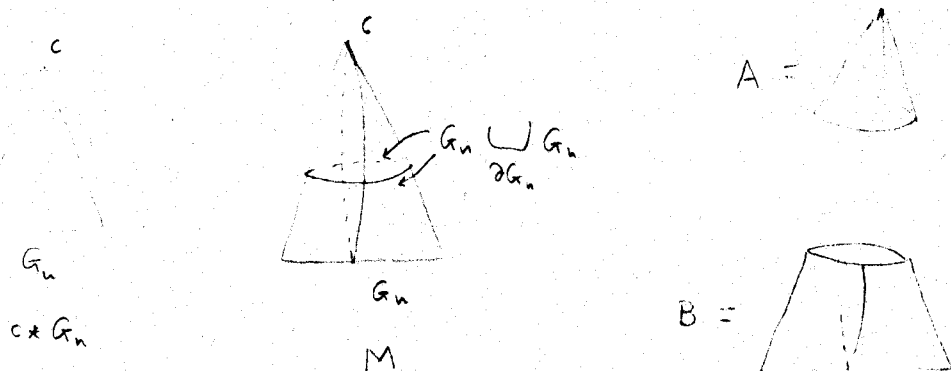
Los conos $c * G_n$ son ejemplos de variedades de homología con borde que no son topológicas, ya que sus bordes no lo son.

Nótese que las variedades $\sum^1 H^3$ y $\sum^1 \partial G_n$ tienen el mismo

tipo de homotopía que S^4 y S^n ($n \geq 5$) respectivamente pero no son homeomorfas a ellas. Esto indica que la conjetura de Poincaré es falsa para las variedades de homología para dimensiones mayores que tres.

0.3.2. Nota. Una observación interesante es que se puede obtener S^{n+1} ($n \geq 4$) como el doble de una bola de homología que no es topológica:

Si G_n es una n -variedad de Glaser ($n \geq 4$), el cono $c * G_n$ es una $(n+1)$ -bola de homología no topológica. Sea M el doble de $c * G_n$. Entonces M es PL -isomorfa a la esfera S^{n+1} ; por la conjetura de Poincaré bastará probar que M es una variedad PL del mismo tipo de homotopía que S^{n+1} . Para ver que M es una variedad PL basta observar que $lk(c; M) = G_n \cup_{\partial G_n} G_n \stackrel{PL}{\cong} S^n$. Por otra parte, como $c * G_n$ es una bola de homología, por 0.1.19. b) se tiene que M es una esfera de homología. Y según 0.1.20., bastará probar que M es simplemente conexa para asegurar que tiene el mismo tipo de homotopía que S^{n+1} . Para calcular el grupo fundamental de M aplicamos el teorema de Van Kampen a la siguiente descomposición de M :



De donde se deduce inmediatamente que $\pi_1(M) = 1$ debido a que A es contráctil y B se puede retraer a G_n que es contráctil.

0.3.3. Relaciones con lasseudovariedades.

a) Ya se vió en la nota 0.1.16. que toda n -variedad de homolo-

gía es una n -seudovariiedad. Damos a continuación un ejemplo de una pseudovariiedad que tiene la homología de S^3 pero que no es variedad de homología.

Sea $P = S^1 \times B^2 /_{\text{pt} \times B^2}$. Como una fácil aplicación del teorema de Mayer-Vietoris se llega a que $Q = P \bigcup_{\partial P} c * P$ tiene la homología de S^3 ; pero Q no es una variedad de homología pues $\text{lk}(c; Q)$ no es una 2-esfera. Este ejemplo puede ser generalizado a dimensiones superiores.

b) Si tomamos el cono sobre Q obtenemos una pseudovariiedad tal que los vértices tienen "links" cuya homología es la de S^3 o de un punto pero que no es variedad de homología. (Es decir, que no basta que los vértices verifiquen la definición 0.1.1. para tener una variedad de homología).

4. Operaciones con variedades de homología: Productos, "joins" y suma conexa.

0.4.1. Proposición. El "join" de dos variedades de homología es una variedad de homología si y solo si son esferas o bolas de homología. Además, el "join" de dos esferas de homología es una esfera de homología y el "join" de una bola de homología con una esfera o bola de homología es una bola de homología.

Demostración. Sean $M = |K|$ y $N = |L|$ variedades de homología. Supongamos que $|K * L|$ es variedad de homología; si σ es un símlice de máxima dimensión en K se tiene que $\text{lk}(\sigma; K * L) = L$, por lo que $|L|$ debe ser una bola o esfera de homología por 0.1.7. Análogamente $|K|$ debe ser esfera o bola de homología.

Recíprocamente, si $M = |K|$ y $N = |L|$ son esferas o bolas de homología dado $z \in |K * L|$ se tiene que

$$\begin{aligned} lk(z; K * L) = & lk(x; K) * lk(y; L) & \text{si } z = (1-t)x + ty \quad 0 < t < 1 \\ & lk(z; K) * L & \text{si } z \in |K| \\ & K * lk(z; L) & \text{si } z \in |L| \end{aligned}$$

Por tanto bastará ver que si A y B son poliedros con la homología de esferas, $A * B$ tiene la homología de una esfera, y si A ó B tienen la homología de una bola $A * B$ también. Todo ello sigue de un estudio de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(A * B, A * B - A, A * B - B)$, teniendo en cuenta que A y B son retracts de $A * B - B$ y $A * B - A$ respectivamente y que $A * B - (A \cup B)$ es homeomorfo a $A \times B \times (0,1)$ mediante $f((1-t)a + tb) = (a, b, t)$.

0.4.2. Proposición. El producto de variedades de homología es una variedad de homología. Además si M y N son variedades de homología con borde $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$.

Demostración. Si $M = |K|$ y $N = |L|$ son variedades de homología, el producto $M \times N$ puede ser triangulado subdividiendo cada célula $\sigma \times \tau$ sin añadir nuevos vértices. Sea J dicho complejo simplicial; entonces, si $(x, y) \in |J|$ se verifica

$$lk((x, y); J) \stackrel{p_L}{\cong} lk(x; K) * lk(y; L)$$

y por la proposición anterior se sigue que $lk((x, y); J)$ es una esfera o bola de homología en los casos adecuados. Por ello $M \times N$ es una variedad de homología y además $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$.

0.4.3. Nota. Una fácil aplicación de la fórmula de Künneth junto con

la proposición anterior nos dice que el producto de bolas de homología es una bola de homología.

0.4.4. Lema. Dada una n -variedad de homología $M = |K|$ existen a lo más dos clases de isotopía de pl -inmersiones $h: B^n \longrightarrow M - |K^{n-4}|$. Hay dos clases si y solo si M es orientable.

Demostración. Ya se ha observado que en toda variedad de homología $M = |K|$ la diferencia $M - |K^{n-4}|$ es una variedad PL . Además M es orientable si y solo si lo es $M - |K^{n-4}|$ pues los interiores de los n -símplices están en $M - |K^{n-4}|$. Entonces el lema sigue de ser cierto en el caso PL (ver [39]).

0.4.5. Definición. Del lema anterior se deduce que una orientación de una n -variedad de homología viene dada por una clase de isotopía de pl -inmersiones $h: B^n \longrightarrow M - |K^{n-4}|$.

Dadas dos n -variedades de homología orientadas M_1 y M_2 sin borde, y h_1 y h_2 representantes de sus clases de orientación se define la suma conexa, $M_1 \# M_2$, de dichas variedades como el espacio cociente que resulta de identificar en $M_1 - h_1(\overset{\circ}{B}^n)$ y $M_2 - h_2(\overset{\circ}{B}^n)$ los bordes por el pl -isomorfismo $h_2 r h_1^{-1}$, siendo r la reflexión de S^{n-1} . Es obvio que $M_1 \# M_2$ es entonces una variedad de homología orientada y sin borde. Obsérvese también que si M_1 y M_2 son esferas de homología $M_1 \# M_2$ también lo es.

Si M_1 está orientada y M_2 no es orientable entonces se define la suma conexa $M_1 \# M_2$ como el cociente de identificar en $M_1 - h_1(\overset{\circ}{B}^n)$ y $M_2 - h_2(\overset{\circ}{B}^n)$ los bordes por el pl -isomorfismo $h_2 h_1^{-1}$, donde h_1 es un representante de la clase de orientación de M_1 y $h_2: B^n \longrightarrow M_2 - |K^{n-4}|$ una pl -inmersión cualquiera.

Si M_1 y M_2 no son orientables, para definir la suma conexa

usamos pl-inmersiones $h_1: B^n \longrightarrow M_1 - |K^{n-4}|$ y $h_2: B^n \longrightarrow M_2 - |K^{n-4}|$ cualesquiera y pegamos los bordes de $M_1 - h_1(\overset{\circ}{B}^n)$ y $M_2 - h_2(\overset{\circ}{B}^n)$ por el pl-isomorfismo $h_2 h_1^{-1}$.

0.4.6. Nota. Obsérvese que la definición de suma conexa no depende más que de la clase de isotopía de las pl-inmersiones utilizadas.

0.4.7. Nota. Se podía haber definido la suma conexa de $M_1 = |K|$ y $M_2 = |L|$ como sigue: Se toman dos n-símplices σ_1 y σ_2 de K y L respectivamente y se pegan $M_1 - \overset{\circ}{\sigma}_1$ y $M_2 - \overset{\circ}{\sigma}_2$ por un isomorfismo simplicial $f: \overset{\circ}{\sigma}_1 \longrightarrow \overset{\circ}{\sigma}_2$ que invierta la orientaciones dadas sobre $\overset{\circ}{\sigma}_1$ y $\overset{\circ}{\sigma}_2$.

Pero este método introduce ambigüedades en el caso de las variedades de homología. Así, depende de los símplices escogidos: Si $M_1 = M_2 = \Sigma^1 H^3$, donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré, consideramos una triangulación en la que aparezcan n-símplices que no contengan los vértices de Σ^1 . Entonces si σ y σ' son dos n-símplices tales que σ no contiene ningún vértice de Σ^1 y σ' contiene algún vértice v_0 y se construye $M_1 \# M_2$ usando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y una $f: \sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$ que invierta la orientación aparecen cuatro puntos singulares y si se usa $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma'$ y una f que invierta la orientación dejando fijo v_0 sólo aparecen tres puntos singulares.

También puede depender del isomorfismo simplicial f , así, si en el segundo caso anterior a f se le permite que varíe el vértice v_0 entonces aparecen cuatro puntos singulares en la construcción de $M_1 \# M_2$.

CAPITULO I

LAS VARIEDADES DE HOMOLOGIA Y LAS VARIEDADES TOPOLOGICAS

1. Introducción.

Todas las variedades topológicas que aparezcan en este capítulo serán triangulables. Por una TOP-esfera de homología se indicará una esfera de homología que es variedad topológica. Análogamente una TOP-bola de homología será una bola de homología que es variedad topológica.

En [28] Matumoto obtiene el siguiente resultado:

Teorema I (Matumoto). Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología sin borde ($n \geq 5$), entonces M es una variedad topológica si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\sum^{n-3} lk(\sigma^{n-4}; K)$ es homeomorfo a S^n para todo $(n-4)$ -símplice $\sigma^{n-4} \in K$.

ii) $\pi_1(lk(v; K)) = 1$ para todo vértice $v \in K$.

Posteriormente Edwards y Cannon (ver [5] y [11]) demostraron el siguiente teorema sobre suspensiones de esferas de homología:

Teorema II (Edwards-Cannon). Si H^n es una TOP-esfera de homología $\sum^m H^n$ es homeomorfa a S^{n+m} para $m \geq 2$.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, la condición i) del teorema I puede suprimirse. En efecto, $lk(\sigma^{n-4}; K)$ es una 3-esfera de homología y por lo tanto es una variedad PL; como $n-3 \geq 2$ se sigue la condición i). El teorema de Matumoto queda entonces de la siguiente forma:

Teorema III (Edwards-Cannon-Matumoto). Una n -variedad de homología sin borde $M = |K|$ ($n \geq 5$) es una variedad topológica si y solo si $\pi_1(lk(v; K)) = 1$ para todo vértice $v \in K$.

1.1.1. Corolarios.

a) (Generalización del teorema II). Si H^n es una n -esfera de homología, no necesariamente variedad topológica, entonces $\sum^m H^n$ es homeomorfo a S^{n+m} ($m \geq 2$).

b) Si M es una n -variedad de homología sin borde ($n \geq 5$), M es localmente euclídea salvo quizás en los vértices de una triangulación.

c) Si M y N son variedades de homología sin borde y de dimensiones estrictamente positivas entonces $M \times N$ es variedad topológica.

Demostración.

a) Por el teorema III y 0.1.20, $\sum^m H^n$ es una $(n+m)$ -variedad topológica que tiene el mismo tipo de homotopía que S^{n+m} . Por la conjetura de Poincaré si $n \geq 3$ se sigue que $\sum^m H^n$ es homeomorfa a S^{n+m} . Si $n \leq 2$ entonces H^n es la pl -esfera S^n y $\sum^m H^n$ es homeomorfa a S^{n+m} .

b) Si K es una triangulación de M y $x \in M = |K|$ no es un vértice entonces $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ con $\sigma \in K$ y $\dim \sigma > 0$ por lo que $lk(x; K) = \overset{\circ}{\sigma} * lk(\sigma; K)$. Por tanto $\sum^1 lk(x; K) = \sum^k lk(\sigma; K)$ con $k \geq 2$;

del apartado anterior se sigue que $\sum^1 lk(x;K)$ es una esfera topológica. La parte b) se deduce ahora de que la estrella abierta $\overset{\circ}{st}(x;K)$ es un abierto de $\sum^1 lk(x;K)$.

c) Si $M = |K|$ y $N = |L|$ entonces, dado $(x,y) \in M \times N$, se verifica que $lk((x,y);K \times L)$ es pl-isomorfo a $lk(x;K) * lk(y;L)$. Si $\dim M = \dim N = 1$, M y N son variedades PL y no hay nada que probar. Si $\dim M > 1$ ó $\dim N > 1$ entonces $lk(x;K) * lk(y;L)$ es simplemente conexo y, puesto que $M \times N$ es variedad de homología por 0.4.2., se sigue por el teorema III siempre que $\dim M + \dim N \geq 5$. En los otros casos M y N son variedades PL y se verifica el resultado trivialmente.

1.1.2. Nota. El teorema II permite dar contraejemplos al "Hauptvermutung", Así, si H^3 es la 3-esfera de Poincaré, $\sum^2 H^3$ es un poliedro homeomorfo pero no pl-isomorfo a S^5 .

Basándonos en el teorema de Matumoto damos aquí otro ejemplo. Si G_n es una n -variedad de Glaser, $W = c * G_n \cup \partial(c * G_n) \times I \cup c * G_n$ es una n -variedad topológica pues los "links" de todos los puntos son simplemente conexos. Sin embargo, W no es variedad PL ya que admite un vértice cuyo "link" no es pl-isomorfo a la pl-esfera. Por la sucesión de Mayer-Vietoris y el teorema de Van Kampen se sigue que W es una TOP-esfera de homología simplemente conexa; luego por 0.1.20. tiene el mismo tipo de homotopía que S^{n+1} ; de donde, por la conjetura de Poincaré W es homeomorfa a S^{n+1} . Entonces W es un poliedro homeomorfo a S^{n+1} pero no pl-isomorfo.

§ 2. Suspensiones de bolas de homología.

Teorema IV (3.C.4 de [8]). Sea \tilde{S}^{n-1} la imagen por una inmersión topológica de S^{n-1} en E^n ($n \geq 5$). Entonces \tilde{S}^{n-1} es plana si para cada componente U de $E^n - \tilde{S}^{n-1}$ existe una aplicación continua $H: S^{n-1} \times I \longrightarrow E^n$ tal que $H(x,0) = 0$ y $H(x,t) \in U$ para todo $x \in S^{n-1}$ y $t \in (0,1]$.

1.2.1. Teorema. Sea D^n una n -bola de homología con collar topológico. Entonces $\Sigma^2 D^n$ es homeomorfo a la bola B^{n+2} .

Demostración. Sea

$$W = c * \Sigma^2 \partial D^n \cup_{\Sigma^2 \partial D^n} \Sigma^2 D^n$$

Teniendo en cuenta el teorema de Van Kampen y 0.1.19. b) resulta que W es una $(n+2)$ -esfera de homología simplemente conexa. Además, como los "links" de los vértices son simplemente conexos, por el teorema III se sigue que W es una variedad topológica si $n \geq 3$; entonces por la conjetura de Poincaré W es homeomorfa a la $(n+2)$ -esfera S^{n+2} . Por otra parte de 1.1.1. a) $\Sigma^2 \partial D^n$ es homeomorfa a S^{n+1} . De este modo hemos encontrado una inmersión topológica de S^{n+1} en S^{n+2} .

Si $f: \partial D^n \times I \longrightarrow D^n$ es un collar topológico consideremos las aplicaciones

$$H_1: \Sigma^2 \partial D^n \times I \longrightarrow \Sigma^2 D^n$$

y

$$H_2: \Sigma^2 \partial D^n \times I \longrightarrow c * \Sigma^2 \partial D^n$$

definidas por

$$H_1([x,t],s,r) = [f(x,r),t],s \quad \text{donde} \quad [x,t],s \in \Sigma^2 \partial D^n$$

y

$$H_2(z,r) = [z,r] \quad \text{donde} \quad z \in \Sigma^2 \partial D^n.$$

Entonces se cumplen las condiciones del teorema IV y la inmersión de $\Sigma^2 \partial D^n$ en W es plana por lo que $\Sigma^2 \partial D^n$ es homeomorfo a B^{n+2} si $n \geq 3$. El caso $n \leq 2$ sigue trivialmente pues en esas dimensiones D^n coincide con B^n .

1.2.2. Nota. Obsérvese que si D^n ($n \geq 3$) es una TOP-bola de homología no se tiene en general que $\Sigma^1 D^n$ sea una variedad topológica. Por ejemplo, si G_n es una n -variedad de Glaser ($n \geq 4$) $\partial \Sigma^1 G_n$ no es topológica ya que ∂G_n no es simplemente conexa. Para $n = 3$ basta tomar $D^3 = H^3 - \overset{\circ}{B}^3$, donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré y B^3 un símplice de dimensión máxima.

1.2.3. Proposición. Sea D^n una bola de homología ($n \geq 5$) simplemente conexa tal que ∂D^n también es simplemente conexa y admite collar topológico. Entonces $\Sigma^1 D^n$ es homeomorfo a B^{n+1} .

Demostración. En estas hipótesis $\Sigma^1 \partial D^n$ es homeomorfa a S^{n+1} por el teorema III y la conjetura de Poincaré. Sea

$$W = \Sigma^1 D^n \underbrace{\quad}_{\Sigma^1 \partial D^n} c * \Sigma^1 \partial D^n$$

entonces W es una variedad topológica ya que los "links" de todos los puntos son simplemente conexos. Además es del mismo tipo de homotopía que S^{n+1} , entonces por la conjetura de Poincaré W debe ser homeomorfo a S^{n+1} y ahora se sigue como en 1.2.1.

1.2.4. Lema. Si D^4 es una 4-bola de homología tal que los puntos donde no es variedad PL están en el interior se verifica que $\Sigma^2 D^4$ es homeomorfo a la bola B^6 .

Demostración. Si D^4 no admite puntos singulares en el borde éste admite collar y entonces se concluye por 1.2.1.

1.2.5. Teorema. Si D^4 es una 4-bola de homología entonces $\Sigma^2 D^4$ es homeomorfo a la bola B^6 .

Demostración. Por el lema anterior podemos suponer que hay puntos en el borde donde D^4 no es variedad PL. Sean $p_1, p_2, \dots, p_n \in \partial D^4$ estos puntos. Por D_j^3 denotamos el "link" de p_j en D^4 . Probaremos que $\Sigma^2 D^4$ es homeomorfo a B^6 por inducción sobre n . Si $n=1$ tenemos

$$\Sigma^2 D^4 = \Sigma^2 [D^4 - (p * D^3) \cup p * D^3] = \Sigma^2 [D^4 - p * D^3] \cup \Sigma^2 p * D^3$$

Pero $D^4 - p * D^3$ es una 4-bola de homología que no es variedad PL sólo en puntos del interior. Entonces por el lema anterior su segunda suspensión es homeomorfa a la bola B^6 . Además, como D^3 es una variedad PL $\Sigma^2 D^3$ es homeomorfa a B^5 por 1.2.1. Sea $f: \Sigma^2 D^3 \rightarrow B^5$ un homeomorfismo. Entonces $\Sigma^2 p * D^3 = p * \Sigma^2 D^3$ es homeomorfo a B^6 mediante la extensión cono de f .

Por otra parte, como $\partial D^4 - \mathring{st}(p; \partial D^4)$ es una pl-bola de homología se sigue también por 1.2.1. que $\Sigma^2(\partial D^4 - \mathring{st}(p; \partial D^4))$ es homeomorfo a B^5 ; entonces

$$f: \partial \Sigma^2 D^3 = \Sigma^2 \text{lk}(p; \partial D^4) \rightarrow S^4$$

se extiende a un homeomorfismo de $\Sigma^2(\partial D^4 - \mathring{st}(p; \partial D^4))$ en B^5 .

Obtenemos de esta manera un homeomorfismo $\partial \Sigma^2(D^4 - p * D^3) \cong S^5$ que a su vez se puede extender a un homeomorfismo entre

$\Sigma^2(D^4 - p * D^3)$ y B^6 . Entonces $\Sigma^2 D^4$ es homeomorfo a B^6 .

Si suponemos ahora que el resultado es cierto para $n \leq k-1$ la demostración del caso $n = k$ se realiza de modo similar al caso anterior aplicando la hipótesis de inducción a $\Sigma^2(D^4 - p_k * D_k^3)$.

1.2.6. Corolario. Si D^5 es una 5-bola de homología, $D^5 \times R^2$ es una variedad topológica.

Demostración. Si $(x,t) \in D^5 \times R^2$ entonces $lk((x,t); D^5 \times R^2)$ es pl-isomorfo a $\Sigma^2 lk(x; D^5)$ que por el teorema anterior o por 1.1.1 a), según que x sea un punto del borde o del interior respectivamente, es homeomorfo a B^6 o S^6 . En cualquier caso

$$\overset{\circ}{st}((x,t); D^5 \times R^2) = \overset{\circ}{c} * lk((x,t); D^5 \times R^2) \stackrel{pl}{\cong} \overset{\circ}{c} * \Sigma^2 lk(x; D^5)$$

es un abierto de $\Sigma^3 lk(x; D^5)$ que es homeomorfo a B^7 o S^7 y, por tanto $D^5 \times R^2$ es variedad topológica.

1.2.7. Definición. Sea M una variedad de homología, diremos que M es variedad de homología fuerte si el "link" de cada punto es una variedad PL. Un punto de M se dirá singular si en él M no es variedad PL.

1.2.8. Proposición. Todo punto singular de una variedad de homología fuerte M es un vértice para cualquier triangulación.

Demostración. Supongamos que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ con $\dim \sigma > 0$. Entonces $lk(x; M) \stackrel{pl}{\cong} \Sigma^{\dim \sigma} lk(\sigma; M)$. Pero si $lk(x; M)$ es una variedad PL que es suspensión de un poliedro, debe ser una pl-bola o una pl-esfera. Así pues x no puede ser un punto singular.

1.2.9. Teorema. Si D^n es una n -bola de homología que es variedad

de homología fuerte entonces $\sum^2 D^n$ es homeomorfo a B^{n+2} .

Demostración. Es análoga a la del teorema 1.2.5.

1.2.10. Corolario. Si D^n está en las condiciones del teorema anterior $D^n \times \mathbb{R}^2$ es una variedad topológica.

Demostración. Es análoga a la de 1.2.6.

1.2.11. Proposición. Si M es una n -variedad de homología orientada y sin borde y H^n es una n -esfera de homología orientada entonces el espacio $\sum^2(M \# H^n)$ es homeomorfo a $\sum^2 M$. Se tiene el mismo resultado si M no es orientable.

Demostración. Si $M = |K|$ y $H^n = |L|$, sean $h_1: B^n \rightarrow M - |K^{n-4}|$ y $h_2: B^n \rightarrow H^n - |L^{n-4}|$ pl-inmersiones representando las orientaciones de M y H^n respectivamente. Entonces

$$M \# H^n = M - h_1(\overset{\circ}{B}^n) \underbrace{\quad}_{h_2 r h_1^{-1}} H^n - h_2(\overset{\circ}{B}^n)$$

donde $r: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es la reflexión (ver 0.4.4. y 0.4.5.).

Por lo tanto $\sum^2(M \# H^n)$ es homeomorfo a

$$\sum^2(M - h_1(B^n)) \underbrace{\quad}_{\sum^2_{h_2} \sum^2_r \sum^2_{h_1^{-1}}} \sum^2(H^n - h_2(B^n)) \quad (I)$$

Pero $\sum^2(H^n - h_2(\overset{\circ}{B}^n))$ admite collar en $H^n - h_2(\overset{\circ}{B}^n)$ por lo que aplicando 1.2.1. $\sum^2(H^n - h_2(B^n))$ es homeomorfo a B^{n+2} ; sea f un homeomorfismo. El espacio (I) es entonces homeomorfo a

$$\sum^2(M - h_1(B^n)) \underbrace{\quad}_{f \sum^2_{h_2} \sum^2_r \sum^2_{h_1^{-1}}} B^{n+2} \quad (II)$$

Por [23] $f \cdot \sum^2_{h_2}: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ es isotópico a un pl-isomorfismo

y por tanto isotópico a la identidad o a la reflexión. En cualquier caso $f \cdot \Sigma^2 h_2$ es isotópico a un pl-isomorfismo de la forma $\Sigma^2 g$, donde $g: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es pl-isomorfismo, entonces el espacio (II) es homeomorfo a

$$\Sigma^2(M - h_1(\dot{B}^n)) \underbrace{\quad}_{\Sigma^2 g \circ \Sigma^2 r \circ \Sigma^2 h_1^{-1}} B^{n+2}$$

y por tanto homeomorfo a

$$\Sigma^2 \left[M - h_1(\dot{B}^n) \underbrace{\quad}_{grh_1^{-1}} B^n \right]$$

El espacio sobre el que se hace la suspensión es homeomorfo a M y entonces $\Sigma^2(M \# H^n)$ es homeomorfo a $\Sigma^2 M$.

Si M no fuese orientable, se tomaría como h_1 cualquier pl-inmersión $h_1: B^n \rightarrow M - |K^{n-4}|$ y se sigue igual que en caso anterior.

1.2.12. Proposición. Sea D^n una bola de homología. Entonces $\Sigma^m D^n$ es homeomorfo a B^{n+m} ($n+m \geq 6$, $m \geq 1$) si y solo si $c \star D^n \star M^{m-1}$ es una variedad topológica siendo M^{m-1} una variedad PL sin borde.

Demostración. Obsérvese que

$$lk((x,y); c \star D^n \star M^{m-1}) = D^n \star S^{m-2} \quad \text{si } x = c$$

$$\Sigma^1 lk(z; D^n) \star S^{m-2} \quad \text{si } x = (1-t)c + tz$$

y, si escribimos $\Sigma^m D^n = S^{m-1} \star D^n$,

$$lk(p; S^{m-1} \star D^n) = S^{m-2} \star D^n \quad \text{si } p \in S^{m-1}$$

$$S^{m-2} \star \Sigma^1 lk(z; D^n) \quad \text{si } p = (1-t)z + ty \neq z$$

Por tanto ambos poliedros tienen los mismos sistemas de "links", de donde se deduce fácilmente que $\sum^m D^n$ es una variedad topológica si y solo si lo es $\hat{c} * D^n \times M^{m-1}$.

Para terminar, solo queda probar que si $\sum^m D^n$ es variedad topológica entonces es homeomorfa a la bola B^{n+m} . En efecto, puesto que $\partial \sum^m D^n = \sum^m \partial D^n$ es homeomorfa a S^{n+m-1} por la conjetura de Poincaré, se sigue de 3.1. de [38] que $\sum^m D^n$ es homeomorfa a la bola B^{n+m} .

ϕ 3. Caracterización de las variedades de homología con borde que son variedades topológicas.

1.3.1. Proposición. Sea $M = |K|$ una m -variedad de homología con borde. Entonces $M \times R^{n-m}$ ($n \geq 6$) es variedad topológica si y solo si $\sum^{n-k+1} lk(\sigma^{m-k}; K)$ es una bola o esfera topológica para todo simple $\sigma^{m-k} \in K$.

Demostración. Si $M \times R^{n-m}$ es una variedad topológica, entonces también lo es $\hat{st}(x; K) \times R^{n-m} = \hat{c}lk(x; K) \times R^{n-m}$ para todo punto $x \in M$. Supongamos que $lk(x; K)$ es una bola de homología, entonces por 1.2.12. se deduce que $\sum^{n-m+1} lk(x; K)$ es homeomorfo a B^n . Si σ^{m-k} es el simple de K tal que $x \in \sigma^{m-k}$ se tiene que $\sum^{n-k+1} lk(\sigma^{m-k}; K)$ es homeomorfo a B^n . Si $lk(x; K)$ es una esfera de homología, se sigue igual que en caso anterior apoyándose en una proposición análoga a la 1.2.12. probada en [28] para el caso de esferas de homología.

El recíproco se demuestra fácilmente.

Matumoto en [28] asocia a toda variedad de homología M con $\dim \partial M \neq 3, 4$ una variedad topológica M_{TOP} , única salvo homeomorfismo que verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

- 1) M y M_{TOP} tienen el mismo tipo de homotopía simple.
- 2) $(M_1 \times M_2)_{TOP}$ es naturalmente homeomorfa a $M_{1TOP} \times M_{2TOP}$
- 3) Si M es ya variedad topológica entonces M y M_{TOP} son homeomorfas.

Lema V. (5.6. de [28]). Sean H_1 y H_2 espacios compactos y metrizablees y $T^m = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (m veces); si $h: H_1 \times T^m \rightarrow H_2 \times T^m$ es un homeomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(H_1 \times T^m) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(H_2 \times T^m) \\
 \searrow p_{2*} & & \swarrow p_{2*} \\
 & \pi_1(T^m) &
 \end{array}$$

es conmutativo, existe un homeomorfismo $f: \sum^m H_1 \rightarrow \sum^m H_2$ que es la identidad en la esfera de suspensión.

1.3.2. Teorema. Sea D^n una bola de homología con $n \geq 6$. Si $m \geq 2$ y $D^n \times R^m$ es variedad topológica entonces $\sum^m D^n$ es homeomorfo a la bola B^{n+m} . Recíprocamente, si $m \geq 1$ y $\sum^m D^n$ es homeomorfo a B^{n+m} entonces $D^n \times R^m$ es una variedad topológica.

Demostración. Si $D^n \times R^m$ es variedad topológica, $D^n \times T^m$ también lo es, si D_{TOP}^n es la variedad topológica asociada a D^n en el sentido de Matumoto se tienen los homeomorfismos naturales $D^n \times T^m \cong (D^n \times T^m)_{TOP} \cong D_{TOP}^n \times T^m$ entonces por el lema V se sigue que $\sum^m D^n$ es homeomorfo a $\sum^m D_{TOP}^n$, pero este último espacio es homeomorfo a B^{n+m} por el teorema 1.2.1.

La demostración de la otra parte se realiza como la de 1.2.5.

1.3.3. Teorema. Si D^n es una bola de homología que es variedad de homología fuerte ($n \geq 6$) entonces $\Sigma^2 D^n$ es homeomorfo a B^{n+2} .

Demostración. Este teorema ya está probado para todas las dimensiones en 1.2.9.; aquí damos otra demostración para $n \geq 6$.

Si $x \in D^n$, $lk(x; D^n)$ es una pl -esfera o pl -bola de homología. Entonces por el teorema II o por 1.2.1. se tiene que

$\Sigma^2 lk(x; D^n)$ es homeomorfo a S^{n+1} o a B^{n+1} respectivamente. Por tanto, si $(x, t) \in D^n \times R^2$ se sigue que

$$\hat{\sigma}t((x, t); D^n \times R^2) = \hat{c} * lk((x, t); D^n \times R^2) \stackrel{PL}{\cong} \hat{c} * \Sigma^2 lk(x; D^n)$$

es un abierto de $\Sigma^3 lk(x; D^n)$ que es homeomorfo a B^{n+2} o a S^{n+2} . Luego $D^n \times R^2$ es variedad topológica. Sigue entonces del teorema anterior que $\Sigma^2 D^n$ es homeomorfo a B^{n+2} .

1.3.4. Proposición. Si D^n es una n -bola de homología ($n \geq 3$) y $\Sigma^1 D^n$ es homeomorfo a B^{n+1} entonces D^n y ∂D^n son simplemente conexos.

Demostración. Sean v y w los vértices de la suspensión y p y q sus imágenes por un homeomorfismo. Entonces $\Sigma^1 D^n - \{v, w\}$ es homeomorfo a $B^{n+1} - \{p, q\}$ de donde se deduce que D^n es simplemente conexo. El mismo argumento sirve para probar que ∂D^n es simplemente conexo.

1.3.5. Teorema. Sea D^n una n -bola de homología ($n \geq 6$). (Entonces D^n y ∂D^n son simplemente conexos y $D^n \times R$ es variedad topológica si y solo si $\Sigma^1 D^n$ es homeomorfo a B^{n+1}).

Demostración. Si $D^n \times R$ es variedad topológica, también lo es $D^n \times S^1$ y tenemos los homeomorfismos naturales $D^n \times S^1 \cong (D^n \times S^1)_{TOP} \cong D^n_{TOP} \times S^1$.

Entonces por el lema V $\Sigma^1 D^n$ es homeomorfo a $\Sigma^1 D_{TOP}^n$. Además, $\partial D^n \times S^1$ es homeomorfo a $\partial D_{TOP}^n \times S^1$ y entonces $\pi_1(\partial D^n) \oplus \pi_1(S^1)$ es isomorfo a $\pi_1(\partial D_{TOP}^n) \oplus \pi_1(S^1)$ y por tanto $\pi_1(\partial D_{TOP}^n) = 1$. Como D^n y D_{TOP}^n tienen el mismo tipo de homotopía, D_{TOP}^n es una variedad topológica contráctil que tiene como borde a ∂D_{TOP}^n cuyo tipo de homotopía es el de S^{n-1} , luego por la conjetura de Poincaré ∂D_{TOP}^n es homeomorfa a S^{n-1} y por 3.1. de [38] D_{TOP}^n debe ser una bola topológica. Entonces $\Sigma^1 D^n$ es homeomorfo a B^{n+1} .

1.3.6. Nota.

a) Un ejemplo de n-bola de homología D^n simplemente conexa con ∂D^n no simplemente conexo, $D^n \times \mathbb{R}$ variedad topológica y tal que $\Sigma^1 D^n$ no sea homeomorfo a B^{n+1} es una n-variedad de Glaser G_n . Obsérvese que $\Sigma^1 G_n$ no es homeomorfo a B^{n+1} porque $\Sigma^1 \partial G_n$ no lo es a S^n .

b) Un ejemplo de bola de homología D^n con ∂D^n simplemente conexo, $D^n \times \mathbb{R}$ variedad topológica pero tal que $\Sigma^1 D^n$ no es homeomorfa a B^{n+1} es $\partial G_n - B^{n-1}$; donde G_n es una n-variedad de Glaser. Para ver que $\Sigma^1 D^n$ no es una bola topológica basta ver que $2 \Sigma^1 D^n$ no es homeomorfa a S^{n+1} .

c) Obsérvese que si H^n ($n \geq 4$) es una n-esfera de homología simplemente conexa, por el teorema III y la conjetura de Poincaré $\Sigma^1 H^n$ debe ser homeomorfa a S^{n+1} .

1.3.7. Teorema. Sea $M = |K|$ una n-variedad de homología con borde ($n \geq 7$). M es variedad topológica si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\sum^{n-5} lk(\sigma^{n-6}; K)$ es homeomorfo a la bola B^n para todo $(n-6)$ -símplice del borde de M .

b) $lk(v; K)$ y $lk(v; \partial K)$ son simplemente conexos para todo vértice v de K .

Demostración. Si M es una variedad topológica, por la proposición 1.3.1. con $n = m$ y $k = 6$ se tiene que $\sum^{n-5} lk(\sigma^{n-6}; K)$ es homeomorfo a B^n o S^n según que $\sigma^{n-6} \in \partial K$ o no. Por la misma proposición, haciendo ahora $n = m = k$ resulta que $\sum^1 lk(v; K)$ es homeomorfo a B^n o S^n , entonces de 1.3.4. se sigue que $lk(v; K)$ y $\partial lk(x; K) = lk(v; \partial K)$ son simplemente conexos si $v \in \partial K$. Si $v \notin \partial K$ se tiene igualmente que $lk(v; K)$ es simplemente conexo.

Recíprocamente, si se verifican a) y b), para probar que M es variedad topológica bastará ver que la estrella abierta de cada vértice es localmente euclídea. Pero si v es un vértice que no está en ∂K , $lk(v; K)$ es una esfera de homología simplemente conexa por b) y por 1.3.6. c) $\sum^1 lk(v; K)$ es homeomorfa a S^n ; y entonces $st(v; K) = \overset{\circ}{c} * lk(v; K)$ es un abierto localmente euclídeo. Queda entonces por probar el caso en el que v esté en ∂K . Se probará un resultado más general, probaremos que

$$\overset{\circ}{st}(\sigma^{n-r}; K) \times R^{n-r} = \overset{\circ}{c} * lk(\sigma^{n-r}; K) \times R^{n-r}$$

es localmente euclídeo para todo símplice σ^{n-r} de ∂K .

Para $r \leq 3$ no hay nada que probar pues $lk(\sigma^{n-r}; K)$ es la correspondiente pl-bola. Sea $r \geq 4$.

$r = 4$. La dimensión de $lk(\sigma^{n-r}; K)$ es en este caso 3 y entonces por el teorema 1.2.1. se sigue que $\sum^{n-r+1} lk(\sigma^{n-r}; K)$ es homeomorfo a B^n y por 1.2.12. se concluye que $\overset{\circ}{c} * lk(\sigma^{n-r}; K) \times R^{n-r}$ es localmente euclídea.

r = 5. Ahora la dimensión de $\text{lk}(\sigma^{n-r}; K)$ es 4 y por el teorema 1.2.5. $\sum^{n-r+1} \text{lk}(\sigma^{n-r}; K)$ es homeomorfo a B^n . De nuevo por 1.2.12. se sigue que $\overset{\circ}{c} * \text{lk}(\sigma^{n-r}; K) \times \mathbb{R}^{n-r}$ es variedad topológica.

r = 6. Por hipótesis $\sum^{n-r+1} \text{lk}(\sigma^{n-r}; K)$ es una bola topológica. Y usando otra vez 1.2.12. $\overset{\circ}{c} * \text{lk}(\sigma^{n-r}; K) \times \mathbb{R}^{n-r}$ es variedad topológica.

r = 7 y n = 7. Si σ^{n-7} es un vértice de ∂K , para todo $(n-k)$ -símplice $\mu \in \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ se verifica que

$$\sum^{n-k+2} \text{lk}(\mu; \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)) = \sum^{n-k+2} \text{lk}(\mu \sigma^{n-7}; K)$$

es homeomorfo a B^n o S^n por los casos anteriores pues $\mu \sigma^{n-7} = \sigma^{n-r}$ con $r = k - 1 \leq 6$ ó por la nota 1.3.6. c) y 1.1.1. a). Entonces por 1.3.1. con $M = \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ se sigue que $\text{lk}(\sigma^{n-7}; K) \times \mathbb{R}^{n-6}$ es variedad topológica. Por la condición b) $\text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ y $\text{lk}(\sigma^{n-7}; \partial K)$ son simplemente conexos, luego podemos aplicar 1.2.5. y se sigue entonces que $\sum^1 \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ es homeomorfa a B^n . De aquí se deduce que $\overset{\circ}{c} * \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ es localmente euclídeo.

r = 7 y n > 7. Igual que en caso anterior se tiene que $\text{lk}(\sigma^{n-7}; K) \times \mathbb{R}^{n-6}$ es variedad topológica. Pero ahora por 1.3.2. se sigue que $\sum^{n-6} \text{lk}(\sigma^{n-7}; K)$ es homeomorfo a B^n y de nuevo por 1.2.12. $\overset{\circ}{c} * \text{lk}(\sigma^{n-7}; K) \times \mathbb{R}^{n-7}$ es variedad topológica.

r > 7. Supongamos ahora que $\text{lk}(\sigma^{n-p}; K) \times \mathbb{R}^{n-p+1}$ es localmente euclídea para $7 \leq p < r$ (el caso $p = 7$ es el anterior). Sea σ^{n-r} un $(n-r)$ -símplice de K y μ un $(r-q-1)$ -símplice de $\text{lk}(\sigma^{n-r}; K)$. Entonces

$$\text{lk}(\mu; \text{lk}(\sigma^{n-r}; K)) \times \mathbb{R}^{n-q+1} = \text{lk}(\mu \sigma^{n-r}; K) \times \mathbb{R}^{n-q+1}$$

es una variedad topológica por la hipótesis de inducción pues la dimensión de $\mu \sigma^{n-r}$ es $n-q$ ($q \leq r-1$). Entonces si $\dim \text{lk}(\mu \sigma^{n-r}; K) = q-1$ es mayor o igual que 6 se sigue por el teorema 1.3.2. o por 1.1.1. a)

que $\sum^{n-q+1} \text{lk}(\mu; \text{lk}(\sigma^{n-r}; K))$ es homeomorfo a B^n o a S^n respectivamente. Si $q - 1 = 5$ entonces $n - q + 1 = n - 5$ y por la condición a) o por 1.1.1. a) se sigue el mismo resultado. Si $q - 1 = 4$ entonces de nuevo $\sum^{n-q+1} \text{lk}(\mu; \text{lk}(\sigma^{n-r}; K))$ es homeomorfo a B^n o S^n , ahora por 1.2.5. o por 1.1.1. a) respectivamente. Si $q - 1 \leq 3$ entonces se sigue lo mismo del teorema 1.2.1. y de 1.1.1, a). En cualquier caso $\sum^{n-q+1} \text{lk}(\mu; \text{lk}(\sigma^{n-r}; K))$ es siempre homeomorfo a B^n o a S^n ; y por la proposición 1.3.1. con $M = \text{lk}(\sigma^{n-r}; K)$ se sigue que $\text{lk}(\sigma^{n-r}; K) \times \mathbb{R}^{n-r+1}$ es variedad topológica. Con ello concluimos la inducción y queda probado el teorema.

1.3.8. Teorema. Sea $M = |K|$ una n -variedad de homología con borde. Entonces M es variedad topológica si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $\text{lk}(v; K)$ es simplemente conexo para todo vértice $v \in K - \partial K$.
- b) $\text{lk}(v; \partial K)$ es simplemente conexo para todo vértice $v \in \partial K$.
- c) M admite collar topológico en M .

Demostración. Si M es variedad topológica entonces $\text{int}M$ es topológica y, por el teorema III, $\text{lk}(v; K)$ es simplemente conexo si v es un vértice de $K - \partial K$. También $M = |\partial K|$ es variedad topológica y por el mismo teorema $\text{lk}(v; \partial K)$ es simplemente conexo para todo vértice $v \in \partial K$. Por la existencia de collar topológico para las variedades topológicas se sigue que ∂M admite collar en M .

Recíprocamente, las condiciones a) y b) y el teorema III implican que $\text{int}M$ y M son variedades topológicas. Además, de ser M variedad y la existencia de collar topológico se sigue que los puntos del borde admiten entornos euclídeos en M y por lo tanto M es variedad topológica.

1.3.9. Teorema. Sea $M = |K|$ una n -variedad de homología con borde ($n \geq 6$). Entonces M es variedad topológica si y solo si

- a) $\sum^1 lk(v; K)$ es homeomorfo a B^n para todo vértice $v \in \partial K$.
- b) $lk(v; K)$ es simplemente conexo para todo vértice $v \in K - \partial K$.

Demostración. Es una consecuencia directa de 1.2.12. y del teorema III.

§4. Collares en variedades de homología.

1.4.1. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad de homología fuerte cuyo borde admite pl-collar entonces ∂M es una variedad PL.

Demostración. Por la existencia de pl-collar resulta que si $x \in \partial M$, $lk(x; K)$ es pl-isomorfo a $c * lk(x; \partial K)$. Pero para que este último poliedro sea una variedad PL es necesario que $lk(x; \partial K)$ sea una pl-bola o una pl-esfera, de donde se deduce el resultado.

1.4.2. Proposición. Para cada $n \geq 4$ existen variedades de homología fuerte cuyos bordes son variedades PL pero que no admiten pl-collar.

Demostración. Sea $M^n = c * (\partial G_n - B^{n-1})$ donde G_n es una n -variedad de Glaser si $n \geq 5$ y $M^4 = c * (H^3 - B^3)$ donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré. Entonces $\partial M^n = \partial G_n - B^{n-1} \cup c * \partial B^{n-1} \stackrel{PL}{\cong} \partial G_n$ (H^3 si $n = 4$) es una variedad PL. Pero M^n no admite pl-collar pues en caso contrario $lk(c; M^n)$ sería una pl-bola; sin embargo $lk(c; M^n)$ es pl-isomorfo a $\partial G_n - B^{n-1}$ ($H^3 - B^3$ si $n = 4$) que no es simplemente conexa.

1.4.3. Proposición. Para cada $n \geq 5$ existen variedades de homología fuerte cuyos bordes no son variedades PL que tampoco admiten pl-collar.

Demostración. Por la proposición 1.4.1. bastará probar que $c * G_n$, donde G_n es una n -variedad de Glaser, es una variedad de homología fuerte cuyo borde no es variedad PL. Lo primero es fácil ya que el "link" de c , único punto singular, es G_n . Por otra parte se tiene que

$\partial(c * G_n) = c * \partial G_n \cup G_n$ no es variedad PL pues el "link" de c es pl-isomorfo a ∂G_n que no es simplemente conexo.

1.4.4. Nota. Obsérvese que el doble de $c * G_n$ es pl-isomorfo a la esfera S^{n+1} mientras que el doble de $c * G_n \cup \partial(c * G_n) \times I$ es homeomorfo pero no pl-isomorfo a S^{n+1} (ver 0.3.2. y 1.1.2.).

1.4.5. Proposición. Una variedad de homología fuerte admite pl-collar si y solo si los puntos singulares son interiores.

Demostración. Si los puntos singulares están en el interior de M , se toma un entorno regular de ∂M que no contenga ningún punto singular; dicho entorno será una variedad PL con borde ∂M (se considera un entorno abierto) y entonces puede construirse un collar dentro de él. La implicación recíproca se deduce de 1.4.1.

1.4.6. Proposición. Para cada $n \geq 5$ existen n -variedades de homología cuyos bordes admiten collar topológico pero no pl-collar.

Demostración. Sea $M = \Sigma^2 G_n$ ($n \geq 4$), donde G_n es una n -variedad de Glaser. Por el teorema 1.2.1. M es una bola topológica, entonces bastará observar que ∂M no admite pl-collar. Tenemos que $\partial M = \Sigma^2 \partial G_n$ y si $x \in \Sigma^2$ entonces su "link" en ∂M es pl-isomorfo a $\Sigma^1 \partial G_n$ mien-

tras que en M es pl-isomorfo a $\sum^1 G_n$. Si existiese pl-collar se tendría que $c * \sum^1 \partial G_n$ sería pl-isomorfo a $\sum^1 G_n$; pero $lk(c, c * \sum^1 \partial G_n) = \sum^1 \partial G_n$ y si z es un punto de $\sum^1 G_n$, $lk(z; \sum^1 G_n)$ es pl-isomorfo a G_n , B^n ó S^n no siendo ninguno de estos espacios pl-isomorfo a $\sum^1 \partial G_n$.

Para el caso $n = 5$ sea $M = \sum^2 (H^3 - B^3)$, donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré. Entonces por el mismo razonamiento anterior se tiene el resultado.

1.4.7. Definición. Sea M una variedad de homología con borde. Se dirá que $x \in M$ es un punto singular topológico de M si no existe ningún entorno de x homeomorfo a un abierto de R_+^n .

1.4.8. Proposición. Sea M una variedad de homología. Si M admite collar topológico y no hay puntos singulares topológicos en el interior de M , entonces el doble $2M$ es una variedad topológica.

Demostración. Por 1.1.1. c) $\partial M \times R$ es una variedad topológica. Pero $\partial M \times R$ es homeomorfo a $\partial M \times (-1, 1)$ que corresponde al pegamiento de dos collares abiertos y por tanto es un entorno abierto de ∂M en $2M$, de aquí se sigue fácilmente el resultado.

1.4.9. Teorema. Si G_n es una n -variedad de Glaser ($n \geq 4$) y H^3 es la 3-esfera de Poincaré, $c * (\partial G_n - B^{n-1})$ y $c * (H^3 - B^3)$ son variedades de homología fuerte cuyos bordes son variedades PL que no admiten collares topológicos.

Demostración. Por la proposición anterior bastará comprobar que los dobles de dichas variedades no son variedades topológicas pues los úni-

cos puntos singulares son los vértices c . Se hará la demostración para $M = c * (\partial G_n - B^{n-1})$. Si M fuese una variedad topológica lo sería también

$$\mathring{st}(c; 2M) = \mathring{c} * (\partial G_n \# -\partial G_n)$$

y por tanto lo sería $\sum^1(\partial G_n \# -\partial G_n)$. Pero esto es imposible pues los "links" de los vértices de la suspensión no tienen el mismo tipo de homotopía que S^{n-1} .

1.4.10. Nota. Obsérvese que a pesar de no tener collar topológico las variedades $c * (\partial G_n - B^{n-1})$ y $c * (H^3 - B^3)$, sí se verifica, por el teorema 1.2.9., que $\sum^2 c * (\partial G_n - B^{n-1})$ y $\sum^2 c * (H^3 - B^3)$ son homeomorfos a B^{n+2} y B^6 respectivamente.

1.4.11. Proposición. Si todo punto de M no es singular topológico en M , entonces M admite collar topológico.

Demostración. Al estar todas las singularidades en el interior, y como por 1.1.1. b), solo son los vértices de una triangulación podemos separar ∂M de los puntos singulares mediante un abierto V de M que será variedad topológica con borde ∂M . Entonces ∂M admite collar en V y por tanto en M .

CAPITULO II

EL BORDISMO DE LAS VARIEDADES DE HOMOLOGIA

1. El bordismo homológico singular.

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, se puede considerar los modelos (M, f) donde M es una n -variedad de homología orientada y $f: (M, \partial M) \longrightarrow (X, A)$ una aplicación continua. A tales modelos se les denomina variedades singulares sobre (X, A) . Dos de tales variedades, (M, f) y (M', f') , son bordantes si existe un par (W, F) donde W es una $(n+1)$ -variedad de homología orientada tal que $W = (M \sqcup -M') \cup W_0$ donde $\partial W_0 = \partial M \sqcup -\partial M'$ y $F: (W, W_0) \longrightarrow (X, A)$ es una aplicación que extiende a f y f' .

Los axiomas que prueban que se trata de una teoría de bordismo en el sentido de [9] son consecuencias inmediatas de los resultados generales del capítulo 0 excepto el del entorno regular que demostramos a continuación como consecuencia de un resultado más general.

2.1.1. Definición. Sea $f: K \longrightarrow L$ una aplicación simplicial, se considera una subdivisión baricéntrica de L , L' , y se toma una subdivisión baricéntrica K' de K de forma que $f: K' \longrightarrow L'$ siga siendo simplicial. Entonces la célula dual de $\alpha \in K$ asociada a f , $D(\alpha, f)$, está definida

por

$$D(\alpha, f) = \{ (b(\sigma_0) \dots b(\sigma_k)) \in K' \mid \alpha \leq f(\sigma_0) \text{ y } \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k \in K \}$$

Por $\dot{D}(\alpha, f)$ se denota a

$$\dot{D}(\alpha, f) = \{ (b(\sigma_0) \dots b(\sigma_k)) \in K' \mid \alpha \not\leq f(\sigma_0) \text{ y } \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k \in K \}$$

2.1. Nota. Si $f = \text{Id} : K \rightarrow K$ entonces $D(\alpha, \text{Id})$ coincide con la célula dual de α en K , $D(\alpha, K)$.

En [6] se demuestra que si $D(\alpha, f)$ es finito entonces $D(\alpha, f) \searrow f^{-1}(b(\alpha))$.

2.1.3. Teorema. Si $f: K \rightarrow L$ es simplicial y $|K|$ es una variedad de homología con borde y α es un r -símplice de $f(K)$ se verifica que $D(\alpha, f)$ es una $(n-r)$ -variedad de homología cuyo borde es $\dot{D}(\alpha, f) \cup D(\alpha, f|_{\partial K})$.

Demostración. Si $A = (b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_q))$ es un q -símplice de $D(\alpha, f)$ puede ocurrir que $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) \neq \emptyset$ ó que $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) = \emptyset$.

En el primer caso se deduce que $\alpha = f(\sigma_0)$, pues si $\alpha \not\leq f(\sigma_0)$ y $x \in A \cap f^{-1}(b(\alpha))$ existiría un σ_i tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}_i$. Entonces $f(x)$ sería un punto de $\overset{\circ}{f(\sigma_i)}$ y de $\overset{\circ}{f(\sigma_1)}$ lo que es imposible. Por tanto se tiene

$$\text{lk}(A; D(\alpha, f)) = \{ (b(\sigma), \dots, b(\tau)) \mid \alpha = f(\sigma) = \dots = f(\tau) \text{ con } \tau \not\leq \sigma_0 \}^*$$

$$* \{ (b(\mu), \dots, b(\gamma)) \mid \sigma_0 \not\leq \mu < \dots < \gamma \}^*$$

$$* \dots \dots \dots *$$

$$* \{ (b(\mu), \dots, b(\gamma)) \mid \sigma_{q-1} \not\leq \mu < \dots < \gamma < \sigma_q \}^*$$

$$* \{ (b(\mu), \dots, b(\gamma)) \mid \sigma_q < \mu < \dots < \gamma \in K \}^*$$

Es decir,

$$lk(A; D(\alpha, f)) = (f|_{\dot{\sigma}_0})^{-1}(b(\alpha)) * \dot{D}(\sigma_0, \dot{\sigma}_1) * \dots * \dot{D}(\sigma_{q-1}, \dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q, K)$$

Pero $\dot{D}(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ y $D(\sigma_q, K)$ son pl-isomorfias a $lk(\sigma_i; \dot{\sigma}_{i+1})$ y $lk(\sigma_q; K)$, respectivamente, por 2.27(6) de [39]. Entonces $\dot{D}(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ es una pl-esfera y $lk(\sigma_q; K)$ es una esfera o bola de homología según que $\sigma_q \in \partial K$ ó no.

Por otra parte $(f|_{\dot{\sigma}_0})^{-1}(b(\alpha))$ es una pl-esfera de dimensión $(\dim \sigma_0 - \dim \alpha - 1)$; en efecto, $f|_{\dot{\sigma}_0} : \sigma_0 \rightarrow \alpha$ se puede extender linealmente a

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^{\dim \sigma_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim \alpha}$$

entonces $\tilde{f}^{-1}(b(\alpha))$ es un hiperplano de dimensión $(\dim \sigma_0 - \dim \alpha)$ y por ello

$$f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) = \sigma_0 \cap \tilde{f}^{-1}(b(\alpha))$$

es una $(\dim \sigma_0 - \dim \alpha)$ -célula cuyo borde es

$$\dot{\sigma}_0 \cap f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) = f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha))$$

Por tanto $lk(A; D(\alpha; f))$ es una esfera o bola de homología de acuerdo con que $\sigma_q \in \partial K$ ó no. En particular, $D(\alpha, f|_{\partial K}) \subset \partial D(\alpha, f)$.

Si ahora $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) = \emptyset$ se sigue que $\alpha \neq f(\sigma_0)$ pues si $\alpha = f(\sigma_0)$ entonces $b(\alpha) = f(b(\sigma_0))$. Por tanto $A \in \dot{D}(\alpha, f)$.

En esta situación se tiene, análogamente al caso anterior

$$lk(A; D(\alpha, f)) = D(\alpha, f|_{\dot{\sigma}_0}) * \dot{D}(\sigma_0, \sigma_1) * \dots * \dot{D}(\sigma_{q-1}, \dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q; K)$$

Como antes, $D(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ es una pl-esfera y $\dot{D}(\sigma_q, K)$ es una bola o esfera de homología; pero de ser $\dot{\sigma}_0$ una variedad PL se sigue, por 5.6. de [6] que $D(\alpha, f|_{\dot{\sigma}_0})$ es una variedad PL. Pero según la nota 2.1.2.

$D(\alpha, f|_{\dot{\sigma}_0}) \simeq f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha))$; y como $\alpha \neq f(\sigma_0)$ se tiene que

$$f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) = \dot{\sigma}_0 \cap f^{-1}(b(\alpha)) = \sigma_0 \cap f^{-1}(b(\alpha)) = f|_{\sigma_0}^{-1}(b(\alpha))$$

que según se vió en el caso anterior era una pl-bola; por tanto $D(\alpha, f|_{\dot{\sigma}_0})$ es una variedad PL colapsible y por ello una pl-bola. Entonces $lk(A; D(\alpha, f))$ es una bola de homología. Como consecuencia se sigue que $\dot{D}(\alpha, f) \subset \partial D(\alpha, f)$. Entonces $\dot{D}(\alpha, f) \cup D(\alpha, f|_{\partial K}) \subset \partial D(\alpha, f)$. Pero si $A \in \partial D(\alpha, f)$ está en el primer caso $A \in D(\alpha, f|_{\partial K})$ y si está en el segundo $A \in \dot{D}(\alpha, f)$. Por tanto se tiene la igualdad.

Obsérvese que si $|K|$ está orientada se puede dotar de una orientación a cada célula de dimensión máxima.

2.1.4. Nota. Sean $L \subset K$ complejos simpliciales, si se define

$$f_L : K \longrightarrow [0, 1] \text{ por}$$

$$f_L(v) = 0 \quad \text{si } v \in L$$

$$f_L(v) = 1 \quad \text{si } v \notin L$$

y L es un subcomplejo lleno de K se tiene que un entorno regular de L en K es precisamente la célula dual $D(0, f_L)$. Tenemos entonces el siguiente corolario al teorema 2.1.3.

2.1.5. Corolario. Si $L \subset K$ y $|K|$ es una n -variedad de homología entonces un entorno regular de L en K es una n -variedad de homología con borde.

Tenemos así una teoría de bordismo singular orientado (y olvidando la orientación, no orientado) que se denota por $\Omega_n^H(-)$

($\mathcal{N}_n^H(\text{---})$ respectivamente). A $\Omega_n^H = \Omega_n^H(\text{pto})$ ($\mathcal{N}_n^H = \mathcal{N}_n^H(\text{pto})$) se le llama el n -ésimo grupo de bordismo homológico orientado (no orientado respectivamente).

§ 2. Números característicos.

Puesto que toda variedad de homología M es un espacio de Euler (ver [1]) se puede definir las clases de Stiefel-Whitney homológicas $s_i(M) \in H_i(M; Z_2)$ si $\partial M = \emptyset$ ó $s_i(M) \in H_i(M, \partial M; Z_2)$ en caso contrario, como la suma de los i -símplices de una subdivisión baricéntrica de M (para más detalles ver [10]). Nótese que $s_0(M) = \chi(M) \pmod{2}$ y que $s_n(M)$ es la clase de la Z_2 -orientación de M . Las clases duales $w_{n-i}(M) \in H^{n-i}(M; Z_2)$ son las clases cohomológicas de Stiefel-Whitney.

Si $f : M \longrightarrow X$ es una aplicación continua de M , n -variedad de homología cerrada, en el espacio topológico X se puede asociar a cada $h \in H^m(X; Z_2)$ ($m \leq n$) y números r_1, r_2, \dots, r_{n-m} tales que $r_1 + 2r_2 + \dots + (n-m)r_{n-m} = n-m$ el producto de Kronecker

$$\langle w_1^{r_1} \dots w_{n-m}^{r_{n-m}} \cdot f^*(h), \mu_M \rangle \in Z_2$$

donde $w_1^{r_1} \dots w_{n-m}^{r_{n-m}} \cdot f^*(h)$ designa el correspondiente cup-producto y μ_M es la Z_2 -orientación de M . A este producto de Kronecker se le llama el $(r_1, r_2, \dots, r_{n-m})$ número de Stiefel-Whitney singular de (M, f) asociado a h . Obsérvese que si se toma $h = 1 \in H^0(X; Z_2)$ entonces los números de Stiefel-Whitney singulares asociados a h son precisamente los números de Stiefel-Whitney obtenidos según la definición clásica.

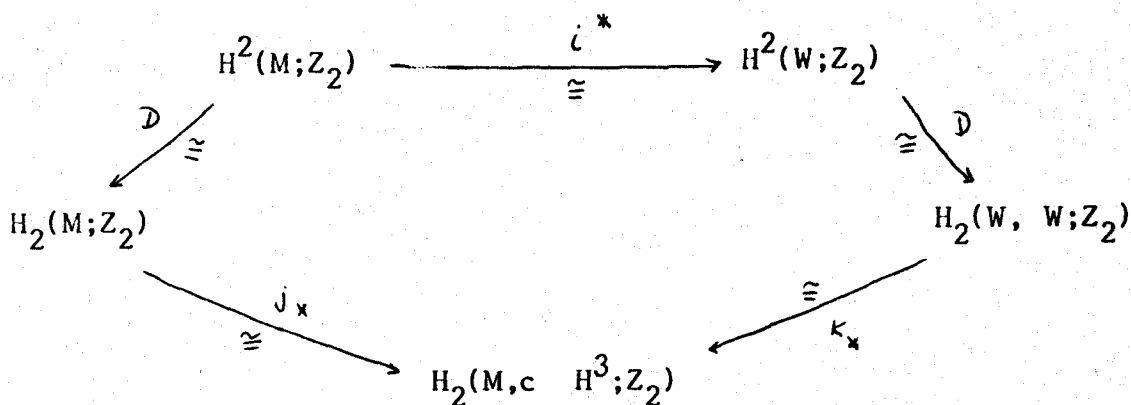
2.2.1. Teorema. Si (M, f) representa el elemento nulo del grupo $\mathcal{U}_n^H(X)$ entonces todos los números de Stiefel-Whitney singulares de (M, f) son nulos.

Demostración. Es análoga a la del caso diferenciable (ver [7]).

2.2.2. Corolario. Si X es un CW-complejo finito, el morfismo olvido $\text{olv}: \mathcal{U}_n^{\text{DIF}}(X) \longrightarrow \mathcal{U}_n^H(X)$ es inyectivo para todo n .

Demostración. Si M es una variedad diferenciable las clases cohomológicas coinciden con las clásicas (ver [17]). Entonces si (M, f) representa el elemento nulo de $\mathcal{U}_n^H(X)$, los números de Stiefel-Whitney singulares son todos nulos, y como los números de Stiefel-Whitney singulares caracterizan el bordismo diferenciable cuando X es un CW-complejo finito (17.3 de [7]) se sigue que (M, f) representa el elemento nulo de $\mathcal{U}_n^{\text{DIF}}(X)$.

2.2.3. Nota. Sin embargo, los números de Stiefel-Whitney singulares no caracterizan el bordismo homológico: Se puede construir una 4-variedad PL W simplemente conexa cuyo borde sea la 3-esfera de Poincaré H^3 y tal que $H_2(W)$ es libre con 8 generadores y $w_2(W) = 0$ (ver [20]). Entonces a partir de W construimos la 4-variedad de homología cerrada $M = c * H^3 \cup W$, M es simplemente conexa y es fácil comprobar que $H^1(M; Z_2) = H^3(M; Z_2) = 0$ y que $\chi(M) = 0 \pmod{2}$. Por tanto las clases de Stiefel-Whitney $w_1(M)$, $w_3(M)$ y $w_4(M)$ son nulas. Veamos que también $w_2(M)$ es nula. La inclusión canónica $i: W \longrightarrow M$ induce un isomorfismo $i^*: H^2(M; Z_2) \longrightarrow H^2(W; Z_2)$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo



Entonces $i^*(w_2(M)) = w_2(W) = 0$, luego $w_2(M) = 0$. Por tanto, todos los números característicos son nulos al igual que los de la esfera S^4 ; pero la obstrucción de Martin para que M sea bordante a una variedad PL $\sigma(M) \in H^4(M; \mathbb{H}_3) \cong \mathbb{H}_3$ es distinto de cero (ver [26]), por ello M y S^4 no pueden ser bordantes.

2.2.4. Nota. Milnor en [35] define las clases racionales de Pontrjagin para variedades de homología racional; es decir, poliedros cuyos "links" tienen la homología, con coeficientes en \mathbb{Q} , de la correspondiente esfera. Por el teorema de coeficientes universales, toda variedad de homología es una variedad de homología racional, por ello podemos hablar de las clases racionales de Pontrjagin $p_i(M) \in H^{4i}(M; \mathbb{Q})$ de una variedad de homología cerrada y orientada M .

Si $f: M \rightarrow X$ es una aplicación continua, dados un elemento $h \in H^m(X; \mathbb{Q})$ y una colección de enteros no negativos i_1, i_2, \dots, i_k con $n = m + 4(i_1 + i_2 + \dots + i_k)$ se puede definir el producto de Kronecker

$$\langle p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k} \cdot f^*(h), \mu_M \rangle \in \mathbb{Q}$$

donde $p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k} \cdot f^*(h)$ representa el correspondiente cup-producto y $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$ es la clase de orientación de M (que podemos considerar en $H_n(M; \mathbb{Q})$). A este número se le llama el (i_1, i_2, \dots, i_k) número de

Pontrjagin singular de (M, f) asociado a h . Nótese que si $n = 4r$ y $h \in H^0(X; \mathbb{Q})$, entonces los números singulares de (M, f) asociados a h son los números de Pontrjagin de la variedad M .

2.2.5. Teorema. Si (M, f) representa el elemento nulo de $\Omega_n^H(X)$ entonces todos los números singulares de Pontrjagin y de Stiefel-Whitney de (M, f) son nulos.

Demostración. Es análoga a la demostración en el caso diferenciable (ver [7]).

2.2.6. Corolario. Si X es un CW-complejo finito, el morfismo olvido envía la parte libre de $\Omega_n^{DIF}(X)$ en la parte libre de $\Omega_n^H(X)$.

Demostración. Si $[M, f] \in \Omega_n^{DIF}(X)$ es libre y $\lambda[M, f] = 0 \in \Omega_n^H(X)$ se sigue que todos los números singulares de $(\lambda M, \lambda f)$ son nulos. Entonces, por 17.5 de [7], $(\lambda M, \lambda f)$ representa el elemento nulo de $\Omega_n^{DIF}(X)$, lo que contradice el hecho de ser $[M, f]$ libre.

2.2.7. Corolario. Si X e Y son espacios topológicos, $\varphi: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y $[M, f] \in \varphi_* \mathcal{N}_n^H(X)$, todos los números de Stiefel-Whitney singulares de (M, f) asociados a elementos de $\text{Ker } \varphi^*$, siendo $\varphi^*: H^*(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, son nulos. Análogamente para los números de Pontrjagin en el caso orientado.

Demostración. Sea $[M, f] = \varphi_* [N, g] = [N, \varphi \cdot g] \in \mathcal{N}_n^H(Y)$, entonces si $r_1 + 2r_2 + \dots + (n-m)r_{n-m} = n-m$ y $h \in \text{Ker } \varphi^*$, se tiene, como consecuencia de 2.3.1., que

$$\langle w_1^{r_1} \dots w_{n-m}^{r_{n-m}} \cdot f^*(h), \mu_M \rangle = \langle w_1^{r_1} \dots w_{n-m}^{r_{n-m}} \cdot (\varphi \cdot g)^*(h), \mu_N \rangle = 0$$

2.2.8. Corolario. Sea X un CW-complejo finito tal que en el subgrupo de torsión de $H_*(X;Z)$ todos los elementos tienen orden 2. Entonces el morfismo olvido $\text{olv}: \Omega_n^{\text{DIF}}(X) \longrightarrow \Omega_n^{\text{H}}(X)$ es inyectivo.

Demostración. Si $[M, f] \in \Omega_n^{\text{DIF}}(X)$ es nulo en $\Omega_n^{\text{H}}(X)$ entonces todos los números singulares de Stiefel-Whitney y de Pontrjagin son nulos, y por 17.6 de [7], $[M, f] = 0 \in \Omega_n^{\text{DIF}}(X)$.

2.2.9. Corolario. Los morfismos olvido $\text{olv}: \Omega_*^{\text{DIF}} \longrightarrow \Omega_*^{\text{H}}$ y $\text{olv}: \mathcal{K}_*^{\text{DIF}} \longrightarrow \mathcal{K}_*^{\text{H}}$ son inyectivos.

Demostración. Basta tomar $X = \text{pto}$ en 2.2.2. y 2.2.8.

3 El grupo de coeficientes.

Sea Ω_n^{PL} el n -ésimo grupo de PL-bordismo orientado; en [26] se prueba que Ω_n^{H} es isomorfo a Ω_n^{PL} si $n = 3$ ó $n = 5$ y que Ω_4^{H} es isomorfo a $\Omega_4^{\text{PL}} \oplus \mathcal{O}_3^{\text{H}}$, donde \mathcal{O}_3^{H} es el grupo de las clases de las 3-esferas de homología orientadas, bajo la relación de H-bordismo PL, con la operación definida por la suma conexas.

Si $\Omega_n^{\text{H.T.}}$ ($\mathcal{K}_n^{\text{H.T.}}$) denota el n -grupo de bordismo orientado (no orientado respectivamente) de las variedades de homología que son topológicas, tenemos los morfismos olvido $\text{olv}: \Omega_n^{\text{H.T.}} \longrightarrow \Omega_n^{\text{H}}$ ($\text{olv}: \mathcal{K}_n^{\text{H.T.}} \longrightarrow \mathcal{K}_n^{\text{H}}$, respectivamente). Probaremos el siguiente teorema:

2.3.1. Teorema. Los morfismos olvido descritos anteriormente son monomorfismos si $n \geq 5$ y epimorfismos si $n \geq 6$.

Para la demostración de 2.3.1. usaremos este otro teorema:

2.3.2. Teorema. Toda n -esfera de homología H^n ($n \geq 5$) es H -bordante a una n -esfera de homología simplemente conexa \bar{H}^n de forma que los puntos donde el H -bordismo no es variedad topológica están situados en el borde.

Demostración. Se considera una segunda subdivisión barcéntrica de H^n , tomamos de la descomposición en células duales el 3-esqueleto dual K^3 . Un entorno regular abierto M_1 de K^3 es una variedad PL según se comentó en el capítulo 0.

Se verifica que $H_1(M_1) = H_2(M_1) = 0$. En efecto, puesto que las células duales forman una descomposición celular de H^n , se verifica que $H_1(K^3) \cong H_1(H^n) = 0 = H_2(H^n) \cong H_2(K^3)$. Y como K^3 es un retracto por deformación de M_1 se sigue lo enunciado.

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ los generadores de $\pi_1(H^n)$. Supuesto que los representantes son simpliciales, podemos considerar que son elementos de $\pi_1(K^3)$. En efecto, si f_1 , representante de α_1 , pasase por el vértice de alguna célula dual de dimensión mayor que 3, se puede cambiar homotópicamente de forma que haga todo el recorrido por el interior de la célula sobre un símplice de máxima dimensión en ella. Entonces se puede hacer homotópico, relativamente a cada entrada y salida, a un camino que vaya por la cara opuesta del vértice de la célula. El nuevo camino así construido evita el interior de la célula. Se procede de esta manera para cada generador. En particular, $i_*: \pi_1(K^3) \longrightarrow \pi_1(H^n)$

es epiyectivo y por tanto $i_*: \pi_1(M_1) \longrightarrow \pi_1(H^n)$ también.

Tomemos ahora un entorno regular abierto M_2 del 2-esqueleto L^2 de una triangulación L de M_1 ; por [18] M_2 admite una estructura de variedad diferenciable. Mas aún, esta estructura es paralelizable; en efecto, por ser H^n una esfera de homología $w_1(H^n) = w_2(H^n) = 0$ luego $w_1(M_2) = w_2(M_2) = 0$. Por ser $w_1(M_2)$ nula el fibrado tangente τM_2 es orientable. Se escoge una orientación en dicho fibrado. Por otra parte, de $w_2(M_2) = 0$ se deduce que existen $n-1$ campos independientes $\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}$ sobre el 2-esqueleto de M_2 . Por tener M_2 orientaciones compatibles en las fibras, si $V_k^n(\tau M_2)$ indica el fibrado de fibra la (n,k) -variedad de Stiefel asociado a τM_2 , podemos definir

$$s: V_{n-1}^n(\tau M_2) \longrightarrow V_n^n(\tau M_2)$$

por $s(\langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle_x) = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle_x$ donde e_n es el vector ortogonal al conjunto $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ que determina la orientación de la fibra sobre x . Entonces $s(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$ es una sección de $V_n^n(\tau M_2)$ sobre el 2-esqueleto de M_2 , por ello el fibrado τM_2 es trivial sobre los puntos del 2-esqueleto de M_2 y en particular sobre L^2 . Pero L^2 es un retracto por deformación de M_2 , luego τM_2 es trivial.

De otro lado, $\pi_1(M_2) \cong \pi_1(L^2) \cong \pi_1(M_1)$, por lo que podemos suponer que los generadores de $\pi_1(M_1)$ están en M_2 ; entonces por posición general los podemos considerar disjuntos (obsérvese que $\pi_1(M_1)$ tiene un número finito de generadores), y mediante el pegamiento de 2-asas $D^2 \times D^{n-1}$ (ver teorema 2 de [35]) obtenemos una variedad diferenciable \tilde{M}_2 , que es simplemente conexa y establemente paralelizable, y una variedad de homología \tilde{H}^n simplemente conexa tal que $H_q(\tilde{H}^n) = 0$ si $3 \leq q \leq n-3$ (para $n = 5$ sólo simplemente conexa) y

$$H_{n-2}(H^n) \cong H_2(H^n) \xrightarrow[\cong]{\Delta} H_1\left(\bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times S_i^{n-2}\right)$$

donde Δ es el operador borde de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(H^n, H^n - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times D_i^{n-1}, \bigsqcup_{i \leq k} D_i^2 \times S_i^{n-2})$ y k es el número de generadores de $\pi_1(M_1)$.

Puesto que M_2 es entorno regular del 2-esqueleto de M_1 se sigue que $H_1(M_2) = 0$. Entonces de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(M_2, M_2 - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times D_i^{n-1}, \bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times D_i^{n-1})$ se deduce que $H_1(M_2 - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times D_i^{n-1})$ es nulo. Llevando este resultado a la sucesión de Mayer-Vietoris de $(\tilde{M}_2, M_2 - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times D_i^{n-1}, \bigsqcup_{i \leq k} D_i^2 \times S_i^{n-2})$ se sigue que

$$\Delta : H_2(\tilde{M}_2) \longrightarrow H_1\left(\bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times S_i^{n-2}\right)$$

es epiyectivo. Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_2(\tilde{M}_2) & \xrightarrow{i_*} & H_2(\tilde{H}^n) \\ \Delta \downarrow & & \swarrow \cong \Delta \\ H_1\left(\bigsqcup_{i \leq k} S_i^1 \times S_i^{n-2}\right) & & \end{array}$$

se implica que i_* es epimorfismo. Puesto que $\pi_1(\tilde{M}_2) = \pi_1(\tilde{H}^n) = 0$, por el teorema de Hurewicz todo generador de $H_2(\tilde{H}^n)$ se puede representar por una aplicación $f: S^2 \longrightarrow \tilde{M}_2 \hookrightarrow \tilde{H}^n$. Como \tilde{M}_2 es establemente paralelizable se puede hacer una segunda cirugía, pegando 3-asas $D^3 \times D^{n-2}$, para matar los generadores de $H_2(H^n)$; se obtiene así una variedad de homología \bar{H}^n que es simplemente conexa. Estudiando la sucesión de Mayer-Vietoris de $(\bar{H}^n, \bar{H}^n - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^2 \times D_i^{n-2}, \bigsqcup_{i \leq k} S_i^2 \times D_i^{n-2})$ y de $(\bar{H}^n, \bar{H}^n - \bigsqcup_{i \leq k} S_i^2 \times D_i^{n-2}, \bigsqcup_{i \leq k} D_i^3 \times S_i^{n-3})$ se deduce que \bar{H}^n es una n -esfera de homología.

Por último, veamos que H^n es \mathbb{H} -bordante a \bar{H}^n . Después de

la primera cirugía tenemos una $(n+1)$ -variedad de homología

$$V_0 = H^n \times I \cup \left(\bigsqcup_{i \leq k} D_i^2 \times D_i^{n-1} \right)$$

cuyo borde es $\partial V_0 = H^n \times \{0\} \sqcup \tilde{H}^n$. Estudiando la sucesión de Mayer-Vietoris de $(V_0, H^n \times I, \bigsqcup_{i \leq k} D_i^2 \times D_i^{n-1})$ se deduce que

$$\begin{aligned} H_q(V_0) &= 0 & \text{si } q \neq 2, n \\ &Z & \text{si } q = n \\ &\bigoplus_{i \leq k} Z & \text{si } q = 2 \end{aligned}$$

Después de la segunda cirugía tenemos una $(n+1)$ -variedad de homología

$$V_1 = \tilde{H}^n \times I \cup \left(\bigsqcup_{i \leq k} D_i^3 \times D_i^{n-2} \right)$$

cuyo borde es $\partial V_1 = \tilde{H}^n \times \{0\} \sqcup \overline{H}^n$. Entonces de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(V_1, \tilde{H}^n \times I, \bigsqcup_{i \leq k} D_i^3 \times D_i^{n-2})$ se sigue que

$$\begin{aligned} H_q(V_1) &= 0 & \text{si } q \neq n \\ &Z & \text{si } q = n \end{aligned}$$

Sea $W = V_0 \cup V_1$, de la sucesión de Mayer-Vietoris de (W, V_0, V_1) se deduce que

$$\begin{aligned} H_q(W) &= 0 & \text{si } q \neq n \\ &Z & \text{si } q = n \end{aligned}$$

Por tanto W es un H -bordismo entre H^n y \overline{H}^n . Además, los posibles puntos singulares interiores estarían situados en la parte donde el H -bordismo es el cilindro canónico, entonces, por 1.1.1. c) W es variedad topológica en todos los puntos interiores.

Demostración de 2.3.1. Sean $n \geq 5$ y $[M] \in \mathcal{H}_n^{H.T}$ tal que M represen-

ta el cero de \mathcal{N}_n^H . Entonces existe una $(n+1)$ -variedad de homología W con $\partial W = M$. Añadimos un collar exterior $\partial W \times I$ a W y entonces los puntos donde $W' = W \cup \partial W \times I$ no es variedad topológica están situados fuera de un entorno de $\partial W = \partial W'$. Se sigue por 1.3.8. que los puntos singulares tienen "links" no simplemente conexos. Como las singularidades están aisladas, podemos suponer que sólo hay un punto singular $p \in \text{int } W'$. Como $\text{lk}(p; W')$ es una esfera de homología, por el teorema 2.3.2. existe una esfera de homología simplemente conexa L que es H -bordante a $\text{lk}(p; W')$. Sea V el H -bordismo, entonces la variedad de homología

$$W = W' - \overset{\circ}{\text{st}}(p; W') \underbrace{\quad}_{\text{lk}(p; W')} \cup V \cup c * L$$

es una variedad topológica por 1.3.8. y tiene como borde a M ; entonces $[\bar{M}]$ es nulo en $\mathcal{N}_n^{H.T.}$. Obsérvese que se usa el hecho de que V no tiene puntos singulares en el interior.

Sea ahora $n \geq 6$ y M una n -variedad de homología. Como en el caso anterior, podemos suponer que sólo hay un punto singular $p \in M$. Entonces, con la notación del caso anterior

$$M = M - \overset{\circ}{\text{st}}(p; M) \underbrace{\quad}_{\text{lk}(p; M)} \cup V \cup c * L$$

es una variedad topológica, por el teorema III del capítulo 1, que es bordante a M por la variedad

$$Z = (M - \overset{\circ}{\text{st}}(p; M)) \times I \cup_p * (\text{lk}(p; M) \times I \cup V \cup c * L)$$

Esto prueba que olv es epivectivo. El caso orientado es análogo pues todas las construcciones son orientables.

2.3.3. Corolario. Si $n \geq 6$ olv: $\mathcal{M}_n^{H.T} \longrightarrow \mathcal{M}_n^H$ y olv: $\Omega_n^{H.T} \longrightarrow \Omega_n^H$ son isomorfismos.

ϕ 4. El espectro del bordismo homológico.

Martin en [24] define un espectro para el bordismo de las variedades de homología. En este apartado se prueba que este espectro también clasifica el bordismo singular en el sentido del teorema 12.35. de [45].

Dado un fibrado-disco de homología E sobre un complejo celular K se llama espacio de Thom de E al espacio cociente $T(E) = E/\bar{E}$, donde \bar{E} es el fibrado-esfera asociado a E . Tomando un r -fibrado disco universal γ_r existe una aplicación natural $\phi_r: sT(\gamma_r) \longrightarrow T(\gamma_{r+1})$ que permite definir un espectro $\{T(\gamma_r), \phi_r\}$. A $T(\gamma_r)$ se le denota por $MH(r)$ y al espectro anterior por MH . Para más detalles ver [24] y [27].

Martin construye un isomorfismo $\theta: \mathcal{M}_n^H \longrightarrow \pi_n(MH)$ del siguiente modo:

Sea M una n -variedad de homología y k un entero lo suficientemente grande para que M esté inmersa en S^{n+k} . Se triangula S^{n+k} de forma que M sea un subcomplejo lleno y se toma el fibrado normal de homología \mathcal{V} de M respecto a esta triangulación (ver ϕ 5 de [27]). Asociada a \mathcal{V} existe una aplicación clasificante (única salvo homotopía)

$$h: (\mathcal{V} \times I, \overline{\mathcal{V} \times I}) \longrightarrow (\gamma_{k+1}, \overline{\gamma_{k+1}})$$

(ver §6 de [24]). Entonces h induce una aplicación

$$\tilde{h}: T(\mathcal{V} \times I) \longrightarrow T(\gamma_{k+1}) = MH(k+1)$$

Y si ahora se sumerge S^{n+k} en S^{n+k+1} como el ecuador, el fibrado normal \mathcal{V}_1 de M en S^{n+k+1} tiene un espacio total $|\mathcal{V}_1|$ homeomorfo al espacio total de $\mathcal{V} \times I$, $|\mathcal{V} \times I|$. De esta manera h determina una aplicación

$$h_M: S^{n+k+1} \longrightarrow MH(k+1)$$

definida como \tilde{h} en los puntos de $|\mathcal{V}_1|$ y enviando $\overline{S^{n+k+1} - |\mathcal{V}_1|}$ en el punto base de $MH(k+1)$. Entonces $\Theta[M] = [h_M]$.

Aquí se prueba el siguiente teorema:

2.4.1. Teorema. Si X es un espacio topológico, $\mathcal{H}_n^H(X)$ y $\pi_n(MH \wedge X^+)$ son canónicamente isomorfos. (por X^+ se denota el espacio X punteado por un punto exterior)

Para probar 2.4.1. se hará uso del siguiente teorema de unicidad:

2.4.2. Teorema (7.55 de [45]). Sea $T_*: k_* \longrightarrow k'_*$ una transformación natural entre teorías de homología reducidas. Si

$$T_q(S^0) : k_q(S^0) \longrightarrow k'_q(S^0)$$

es un isomorfismo para $q < N$ y un epimorfismo para $q = N$ entonces, para todo CW-complejo finito y punteado $(n-1)$ -conexo X, $T_q(X)$ es un isomorfismo para $q < n+N$ y epimorfismo para $q = n+N$. Si k_* y k'_* ve-

rifican el axioma del "wedge" para los CW-complejos, X puede ser infinito. Si k_* y k'_* verifican el axioma de la equivalencia débil de homotopía, X puede ser cualquier espacio topológico $(n-1)$ -conexo.

MH , como todo espectro, tiene asociada una teoría de homología reducida sobre los CW-complejos por la fórmula

$$MH_n(X) = \pi_n(MH \wedge X, *)$$

que se extiende de modo ordinario sobre los espacios topológicos mediante la técnica de los CW-sustitutos. Es conocido que este tipo de teorías siempre cumple el axioma del "wedge" (ver 8.36. de [45]), y por su misma definición cumple el axioma de la equivalencia débil de homotopía

2.4.3. Proposición. La teoría de homología reducida $\tilde{\mathcal{H}}_*^H(-)$ asociada al bordismo homológico no orientado cumple el axioma del "wedge" sobre los CW-complejos y el de la equivalencia débil de homotopía.

Demostración. Veamos primero que verifica el axioma de la equivalencia débil. Sea $f: (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ una equivalencia débil de homotopía, entonces por 6.31. de [45]

$$f_*: \tilde{\mathcal{H}}_n^H(X) = \mathcal{H}_n^H(X, *) \longrightarrow \mathcal{H}_n^H(Y, *) = \tilde{\mathcal{H}}_n^H(Y)$$

es un isomorfismo.

Probemos ahora el axioma del "wedge" para los CW-complejos. Si $\{(X_\alpha, *_\alpha)\}$ es una familia de CW-complejos punteados, hay que probar que

$$\oplus i_{\alpha*} : \oplus \tilde{\mathcal{H}}_n^H(X_\alpha) = \oplus \mathcal{H}_n^H(X_\alpha, *_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_n^H(\vee X_\alpha, *) = \tilde{\mathcal{H}}_n^H(\vee X_\alpha)$$

es un isomorfismo, donde $i_\alpha : (X_\alpha, *_\alpha) \hookrightarrow (VX_\alpha, *)$ son las inclusiones canónicas. Como cada X_α es un CW-complejo, la inclusión $*_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ es una cofibración y por tanto lo es también $\sqcup \{*_\alpha\} \hookrightarrow \sqcup X_\alpha$. Entonces, por 7.14. de [45] la proyección $p : (\sqcup X_\alpha, \sqcup \{*_\alpha\}) \rightarrow (VX_\alpha, *)$ induce isomorfismo entre los grupos de bordismo, y del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus \tilde{\mathcal{N}}_n^H(X_\alpha) & \xrightarrow{\bigoplus i_\alpha} & \tilde{\mathcal{N}}_n^H(VX_\alpha) = \mathcal{N}_n^H(VX_\alpha, *) \\
 \parallel & & \uparrow \cong p_* \\
 \bigoplus \mathcal{N}_n^H(X_\alpha, *_\alpha) & \xrightarrow[\cong]{\bigoplus i_\alpha} & \mathcal{N}_n^H(\sqcup X_\alpha, \sqcup \{*_\alpha\})
 \end{array}$$

se deduce que la línea superior es un isomorfismo.

Demostración de 2.4.1. En primer lugar, por definición,

$$\mathcal{N}_n^H(X) = \mathcal{N}_n^H(X^+, +) = \tilde{\mathcal{N}}_n^H(X^+)$$

por lo que, de acuerdo con la proposición anterior y el teorema 2.4.2., bastará construir una transformación natural

$$T_*(-) : \tilde{\mathcal{N}}_*^H(-) \longrightarrow MH_*(-)$$

de forma que $T_q(S^0) : \tilde{\mathcal{N}}_q^H(S^0) \longrightarrow MH_q(S^0)$ sea un isomorfismo para cada entero q . A partir de ahora todos los espacios que consideremos se supondrá punteados. Sea $[M, f] \in \mathcal{N}_n^H(X, *) = \tilde{\mathcal{N}}_n^H(X)$. Para k lo suficientemente grande, se puede sumergir M en B^{n+k} de manera que ∂M quede sumergido en S^{n+k-1} . Tomamos el fibrado normal de homología ν de M en B^{n+k} ; su restricción a S^{n+k-1} será el fibrado normal de ∂M en S^{n+k-1} , ν' . Entonces, según hemos comentado, existe una aplica-

ción clasificante

$$h_{\nu} : (\nu \times I, \overline{\nu \times I}) \longrightarrow (\gamma_{k+1}, \overline{\gamma_{k+1}})$$

cuya restricción a $(\nu' \times I, \overline{\nu' \times I})$ da una aplicación clasificante para ν' . Por tanto h_{ν} induce una aplicación

$$\tilde{h}_{\nu} : (T(\nu \times I), T(\nu' \times I)) \longrightarrow (MH(k+1), MH(k+1))$$

Si ahora identificamos B^{n+k} con el ecuador de B^{n+k+1} , el fibrado normal, ν_1 , de M en B^{n+k+1} tiene su espacio total homeomorfo al de $\nu \times I$. La restricción ν'_1 de ν_1 a S^{n+k} es el fibrado normal de ∂M en S^{n+k} y su espacio total es homeomorfo al de $\nu' \times I$. Entonces se puede definir una aplicación continua

$$r : (B^{n+k+1}, S^{n+k}) \longrightarrow (T(\nu \times I), T(\nu' \times I))$$

por $r(x) = x$ si $x \in | \nu_1 | - | \nu'_1 |$ y $r(x) = *$ si $x \in \overline{B^{n+k+1} - | \nu_1 |}$. Nótese que $r(S^{n+k}) \subset T(\nu' \times I)$. En esta situación podemos considerar la siguiente composición:

$$\begin{aligned} (B^{n+k+1}, S^{n+k}) &\xrightarrow{\gamma} (T(\nu \times I), T(\nu' \times I)) \xrightarrow{\tilde{p}} \\ &\xrightarrow{\tilde{p}} (M \wedge T(\nu \times I), \partial M \wedge T(\nu' \times I)) \xrightarrow{f \wedge \tilde{h}_{\nu}} (X \wedge MH(k+1), *) \end{aligned} \quad (I)$$

donde M se toma punteada por un punto exterior y \tilde{p} está inducida por la composición

$$\begin{aligned} (\nu \times I, \nu' \times I) &\xrightarrow{p \times Id} (M \times (\nu \times I), \partial M \times (\nu' \times I)) \xrightarrow{\pi_1} \\ &\xrightarrow{\pi_1} (M \wedge (\nu \times I), \partial M \wedge (\nu' \times I)) \xrightarrow{\pi_2} (M \wedge T(\nu \times I), \partial M \wedge T(\nu' \times I)) \end{aligned}$$

donde $p : (\nu \times I, \nu' \times I) \longrightarrow (M, \partial M)$ es una proyección asociada al fibrado de homología $(\nu \times I, \nu' \times I)$ (ver [2]) y π_1 y π_2 son las

proyecciones naturales.

La composición (I), que denotamos por $h_{(M,f)}$, determina un elemento de $\pi_n(MH \wedge X, *) = MH_n(X)$. Definimos entonces

$$T_n(X) : \tilde{\mathcal{H}}_n^H(X) \longrightarrow MH_n(X)$$

por $T_n[M, f] = [h_{(M,f)}]$.

Observemos que si $(X, *) = (S^0, +1)$ se tiene que

$$T_n(S^0) : \mathcal{H}_n^H(\text{pto}) = \mathcal{H}_n^H(S^0, +1) = \tilde{\mathcal{H}}_n^H(S^0) \longrightarrow MH_n(S^0) = \pi_n(MH)$$

es el isomorfismo θ de Martin. Por tanto, tendremos probado que $T_*(-)$ es una equivalencia natural si vemos que es una transformación natural. En primer lugar, $T_*(-)$ está bien definida; para ello hay que probar que la definición no depende de la inmersión escogida ni de la clase de bordismo de (M, f) . Nótese que $T_*(-)$ no depende de la proyección p del fibrado $\nu \times I$ porque todas ellas son homotópicas (ver [2]).

Si tomamos una inmersión de $(M, \partial M)$ en otra pareja $(B^{n+k'}, S^{n+k'-1})$, existe $k'' \geq k, k'$ tal que si colocamos (B^{n+k}, S^{n+k-1}) y $(B^{n+k'}, S^{n+k'-1})$ de forma canónica en $(B^{n+k''}, S^{n+k''-1})$, las dos inmersiones de $(M, \partial M)$ son concordantes y por el teorema de unicidad de los fibrados normales homología (ver 5.4. de [27]) los fibrados normales asociados a esas inmersiones son isomorfos. Entonces, podemos suponer, si $k' \geq k$, que la inmersión de M en $B^{n+k'}$ es la inmersión de M en B^{n+k} colocada en el ecuador. El fibrado normal μ originado por esta inmersión es $\nu \times I^{k'-k}$, donde ν es el fibrado normal de la inmersión en B^{n+k} . La composición

$$(\nu \times I^{k'-k} \times I, \nu \times I^{k'-k} \times I) \xrightarrow{h_{\nu \times I^{k'-k}}} (\gamma_{k+1} \times I^{k'-k}, \gamma_{k+1} \times I^{k'-k}) \xrightarrow{h_{k+1} \times I^{k'-k}}$$

$$\longrightarrow (\gamma_{k+2} \times I^{k'-k-1}, \overline{\gamma_{k+2} \times I^{k'-k-1}}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{h_{k'}} (\gamma_{k'+1}, \overline{\gamma_{k'+1}})$$

donde h_{k+j} indica la aplicación clasificante de $\gamma_{k+j} \times I$ y h_j la de $\gamma_j \times I$, es una aplicación clasificante para $\mu \times I$. Pero al identificar los espacios totales de los fibrados-esfera se tiene que $T(\gamma_{k+j-1} \times I^{k'-k-j})$ es homeomorfo a $s^{k'-k-j} T(\gamma_{k+j-1})$ y las aplicaciones $h_{k+j} \times I^{k'-k-j}$ inducen las aplicaciones ϕ_{k+j} que definen el espectro MH (ver [24]), por tanto ambas construcciones están en la misma clase de homotopía estable.

Si ahora (M, f) y (M', f') son bordantes, existe una $(n+1)$ -variedad de homología W y una aplicación continua $F: W \longrightarrow M$ tales que $\partial W = M \sqcup M' \sqcup W_0$, $\partial W_0 = \partial M \sqcup \partial M'$, $F(W_0) = \{*\}$ y $F|_{M \sqcup M'} = f \sqcup f'$. Se puede encontrar k lo suficientemente grande para que W quede sumergida en $B^{n+k+1} = B^{n+k} \times I$ de manera que M y M' estén en $B^{n+k} \times \{0, 1\}$, M y M' en $S^{n+k-1} \times \{0, 1\}$ y W_0 en $S^{n+k-1} \times I$. Repitiendo la construcción que define a $T_*(-)$, ahora para (W, F) se obtiene una homotopía entre $h_{(M, f)}$ y $h_{(M', f')}$.

Sólo queda por comprobar la naturalidad de $T_*(-)$. Para ello, si "s" designa tanto las suspensiones reducidas como el isomorfismo de suspensión en ambas teorías, hay que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}}_n^H(X) & \xrightarrow{T(X)} & MH_n(X) \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^H(sX) & \xrightarrow{T(sX)} & MH_{n+1}(sX) \end{array}$$

El isomorfismo de suspensión de $\tilde{\mathcal{H}}_n^H(-)$ está dado por la

expresión $s [M, f] = [MxI, sf]$, donde sf es la composición

$$(MxI, \partial MxI \cup Mx\{0,1\}) \xrightarrow{f \times Id} (XxI, *xI \cup Xx\{0,1\}) \xrightarrow{\pi} (sX, *)$$

y el de $MH_n(-)$ está definido como sigue. Sea

$$f: (B^{n+k}, S^{n+k-1}) \longrightarrow (X \wedge MH(k), *)$$

entonces $s [f] = [sf]$, donde sf es la composición

$$(B^{n+k}xI, S^{n+k-1}xI \cup B^{n+k}x\{0,1\}) \xrightarrow{f \times Id} (X \wedge MH(k+1)xI, (*xI \cup Xx\{0,1\}) \wedge MH(k))$$

$$\downarrow \pi$$

$$(sX \wedge MH(k), *)$$

Si μ es el fibrado normal de MxI en $B^{n+k}xI = B^{n+k+1}$, μ puede ser identificado a νxI , donde ν es el fibrado normal de M en B^{n+k} , y μ' a $\nu x\{0,1\} \cup \nu'xI$; entonces $\mu xI = \nu xIxI$ y $\mu'xI = \nu xIx\{0,1\} \cup \nu'xIxI$. Por ello la proyección $p': \mu xI \longrightarrow MxI$ puede ser considerada como $p'(x,t) = (p(x),t)$, donde $p: \nu xI \longrightarrow M$ es la proyección asociada a νxI , y la aplicación clasificante $h_\mu: \mu xI \longrightarrow \mathcal{Y}_{k+1}$ como $h_\mu(x,t) = h_\nu(x)$, donde h_ν es la aplicación clasificante de ν . Tenemos el siguiente diagrama (pag 59 bis)

$$\begin{array}{ccc}
 (B^{n+k+1} \times I, B^{n+k+1} \times \{0,1\} \cup S^{n+k} \times I) & \xlongequal{\quad} & (B^{n+k+2}, S^{n+k+1}) \\
 \downarrow r \times Id & & \downarrow r' \\
 (T(\nu \times I) \times I, T(\nu' \times I) \times I \cup T(\nu \times I) \times \{0,1\}) & \xrightarrow{\psi_2} & (T(\mu \times I), T(\mu' \times I)) \\
 \downarrow \check{p} \times Id & & \downarrow \check{p}' \\
 (M \wedge T(\nu \times I) \times I, \partial M \wedge T(\nu' \times I) \times I \cup M \wedge T(\nu \times I) \times \{0,1\}) & \xrightarrow{\psi_2} & (M \times I \wedge T(\mu \times I), \partial(M \times I) \wedge T(\mu' \times I)) \\
 \downarrow (f \wedge Id) \times Id & & \downarrow (f \wedge Id) \wedge Id \\
 (X \wedge T(\nu \times I) \times I, * \wedge T(\nu' \times I) \times I \cup X \wedge T(\nu \times I) \times \{0,1\}) & \xrightarrow{\psi_3} & (X \times I \wedge T(\mu \times I), (* \times I \cup X \times \{0,1\}) \wedge T(\mu' \times I)) \\
 \downarrow (Id \wedge \check{h}_\nu) \times Id & & \downarrow \pi \wedge Id \\
 (X \wedge MH(k+1) \times I, * \wedge MH(k+1) \times I \cup X \wedge MH(k+1) \times \{0,1\}) & & (sX \wedge T(\mu \times I), *) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow Id \wedge \check{h}_\mu \\
 (sX \wedge MH(k+1), *) & \xlongequal{\quad} & (sX \wedge MH(k+1), *)
 \end{array}$$

donde $\tilde{\varphi}_1$ está inducida por

$$\varphi_1: \nu \times I \times I \longrightarrow \mu \times I = \nu \times I \times I$$

$$\varphi_1(z, t, s) = (z, s, t)$$

$\tilde{\varphi}_2$ lo está por

$$\varphi_2: M \times \nu \times I \times I \longrightarrow M \times I \times \mu \times I = M \times I \times \nu \times I \times I$$

$$\varphi_2(y, z, t, s) = (y, s, z, t, s)$$

y $\tilde{\varphi}_3$ por

$$\varphi_3: X \times \nu \times I \times I \longrightarrow X \times I \times \mu \times I = X \times I \times \nu \times I \times I$$

$$\varphi_3(x, z, t, s) = (x, s, z, t, s)$$

A partir de las definiciones es fácil verificar la conmutatividad del diagrama anterior. Pero las columnas izquierda y derecha representan $sT(X) [M, f]$ y $T(sX) \circ s [M, f]$ respectivamente; entonces se tiene la igualdad de ambas expresiones y con ello queda probado el teorema.

2.4.4. Nota. Obsérvese que, por definición,

$$\mathcal{N}_n^{\text{II}}(X, \Lambda) = \tilde{\mathcal{N}}_n^{\text{II}}(X^+ \cup cA^+) \cong \pi_n(MH \wedge X^+ \cup cA^+)$$

2.4.5. Nota. Para el bordismo orientado, Martin también define un espectro clasificante MSH , y se puede probar para este caso un teorema similar al 2.4.1.

5. Bordismo de las variedades casi PL

En el capítulo I se definió las variedades de homología fuerte como aquellas variedades de homología cuyos "links" son variedades PL. Además se probó que el conjunto de puntos donde una variedad de homología fuerte no es PL está localizado en los vértices de una triangulación.

Obsévese que si M es una variedad de homología fuerte, el cilindro $M \times I$ no es, en general, una variedad de homología fuerte; así, por ejemplo, si G_n es una n -variedad de Glaser, entonces $\Sigma^1 \partial G_n$ es una variedad de homología fuerte pero $\Sigma^1 \partial G_n \times I$ no lo es, pues si $p \in \Sigma^1$, el "link" de $(p, 0)$ es p_1 -isomorfo a $c * \partial G_n$ que no es una variedad PL.

2.5.1. Definición. Un punto singular de una variedad de homología fuerte se dice acíclico si su "link" bordea una p_1 -bola de homología.

2.5.2. Proposición. Si M es una n -variedad de homología fuerte sin borde cuyos puntos singulares son todos acíclicos, M es bordante a una variedad PL M por una variedad de homología fuerte cuyos puntos singulares coinciden con los de M .

Demostración. Puesto que los puntos singulares forman un conjunto aislado, podemos suponer que M sólo tiene un punto singular p . Sea W una p_1 -bola de homología cuyo borde es $lk(p; M)$, entonces

$\tilde{M} = M - \overset{\circ}{st}(p; M) \cup W$ es una variedad PL y

$$V = (M - \overset{\circ}{st}(p; M)) \times I \cup_p * (W \times \{1\}) \cup \partial W \times I$$

es una $(n+1)$ -variedad de homología fuerte que hace bordantes a M con \tilde{M} y que tiene a p como único punto singular.

2.3.5. Corolario. Dada una variedad de homología fuerte sin borde M cuyos puntos singulares sean acíclicos existe una variedad de homología fuerte Q cuyos únicos puntos singulares están en el borde y tal que $\partial Q = M \sqcup M$.

Demostración. Por la proposición anterior existe una variedad de homología fuerte V con $\partial V = M \sqcup M$ con \tilde{M} variedad PL. Entonces

$$Q = V \cup \tilde{M} \times I \cup V$$

sólo tiene puntos singulares en el borde y $\partial Q = M \sqcup M$.

2.5.4. Teorema (3 de [20]). Toda pl -esfera de homología de dimensión mayor que 3 es el borde de una variedad PL contráctil.

2.5.5. Corolario. Si $n \geq 5$, toda n -variedad de homología fuerte tiene sus puntos singulares interiores acíclicos.

2.5.6. Definición. Se dice que una n -variedad de homología fuerte es casi PL si sus puntos singulares interiores son acíclicos ($n \neq 4$). Si $n = 4$ se exige además que sólo tenga puntos singulares en el interior,

Dos variedades casi PL cerradas M y M' son bordantes si

existe una $(n+1)$ -variedad casi PL W tal que $\partial W = M \cup M'$. En el caso orientado se puede dar una definición análoga.

2.5.7. Proposición. La relación de bordismo definida en 2.5.6. es de equivalencia.

Demostración. Obviamente es simétrica. Reflexiva lo es por 2.5.3. Por último, si M es bordante a M' y M' lo es a M'' existen variedades casi PL W_1 y W_2 tales que $\partial W_1 = M \cup M'$ y $\partial W_2 = M' \cup M''$. Entonces el pegamiento de W_1 y W_2 por M' es una variedad casi PL, por 2.5.5. si la dimensión es distinta de 4, y directamente de la definición si la dimensión es 4.

De acuerdo con la proposición anterior, podemos definir los grupos, $\mathcal{N}_n^{\text{CPL}}$, de bordismo no orientado de las n -variedades casi PL. Igualmente se puede definir los grupos Ω_n^{CPL} de bordismo orientado.

2.5.8. Teorema. El morfismo olvido entre $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}$ y $\mathcal{N}_*^{\text{CPL}}$ es una equivalencia natural. Análogamente para Ω_*^{PL} y Ω_*^{CPL} .

Demostración. Por la proposición 2.5.2. se tiene que el morfismo olvido es un epimorfismo.

Para $n \leq 3$, $\mathcal{N}_n^{\text{DIF}} = \mathcal{N}_n^{\text{PL}}$ y entonces $\text{olv}: \mathcal{N}_n^{\text{PL}} \longrightarrow \mathcal{N}_n^{\text{CPL}}$

es inyectivo por 2.3.9. Sea M una variedad PL de dimensión mayor que 3 tal que $[M] \in \mathcal{N}_n^{\text{CPL}}$ es el elemento nulo. Entonces existe una $(n+1)$ -variedad casi PL Q cuyo borde es M . Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q - \partial Q$ los puntos singulares en el interior de Q , y W_j 1 -bolas de homología tales que $\partial W_j = \text{lk}(x_j; Q)$. La variedad

$$Q' = (Q - \bigsqcup_{j=1}^k \mathring{st}(x_j; Q)) \cup \bigsqcup_{j=1}^k W_j$$

sólo tiene puntos singulares en el borde y $\partial Q' = \partial Q = M$. Sea $\{y_1, \dots, y_k\}$ el conjunto de estos puntos singulares; entonces

$$L_j = st(y_j; M) \cup lk(y_j; Q') = \partial st(y_j; Q')$$

es una pl-esfera de homología por ser el pegamiento de dos pl-bolas de homología. Por 2.5.4. existen variedades PL contráctiles V_j con $\partial V_j = L_j$. Sea

$$\tilde{Q} = (Q' - \bigsqcup_{j=1}^k \mathring{st}(y_j; Q')) \cup \bigsqcup_{j=1}^k V_j$$

\tilde{Q} es una variedad PL cuyo borde es M . Hemos probado así que M representa el cero de \mathcal{N}_n^{PL} y por tanto que el olvido es inyectivo.

(Nótese que la segunda desingularización no hay que efectuarla en el caso $n = 4$)

2.5.9. Proposición. Si M es una n -variedad casi PL con borde, existe una variedad PL \tilde{M} que es bordante a M como variedades con borde.

Demostración. Si $p \in M - \partial M$ es un punto singular, se desingulariza como en 2.5.2. Sea $p \in \partial M$ singular; existe una pl-bola de homología W con $\partial W = lk(p; M)$, entonces $L = lk(p; M) \cup W$ es una pl-esfera de homología, que por 2.5.4. acota una variedad PL contráctil V . Sean

$$\tilde{M} = M - \mathring{st}(p; M) \cup V$$

y

$$Z = M - \mathring{st}(p; M) \times I \cup_p * (V \times \{1\} \cup lk(p; M) \times I)$$

(Si hay más puntos singulares se repite la operación). Se obtiene así una variedad PL \tilde{M} que es bordante, como variedad con borde, a M por Z .

2.5.10. Corolario. Si M es una variedad casi PL con borde, existe una variedad casi PL Q con $\partial Q = M \sqcup M \cup Q_0$ y $\partial Q_0 = \partial M \sqcup \partial M$.

Demostración. Basta considerar $Q = Z \cup \tilde{M} \times I \cup Z$ donde \tilde{M} y Z son las variedades de la demostración anterior.

2.5.11. Definición. Si (X, A) es un par de espacios topológicos, se llama n -variedad singular casi PL sobre (X, A) a un par (M, f) donde M es una n -variedad casi PL y $f: (M, \partial M) \longrightarrow (X, A)$ es continua.

Se dice que dos n -variedades singulares son bordantes si existe un par (W, F) , donde W es una $(n+1)$ -variedad casi PL con $\partial W = M \sqcup M' \cup W_0$ y $\partial W_0 = \partial M \sqcup \partial M'$, y $F: (W, W_0) \longrightarrow (X, A)$ es continua.

2.5.12. Proposición. La relación de bordismo de 2.5.11. es de equivalencia.

Demostración. Sigue de las definiciones y de 2.5.10.

2.5.13. Nota. Obsérvese que en la demostración de la propiedad transitiva en el caso $n = 3$ se hace uso expresamente del hecho de que toda variedad casi PL carece de puntos singulares en el borde.

Para el caso de los grupos de bordismo, esta situación se podría evitar. En efecto, si M es bordante a M' por W_1 y M' lo es a M'' por W_2 , en vez de considerar el pegamiento $W_1 \cup_{M'} W_2$, se sustituye en ellas estrellas de los puntos x_j M' no acíclicos en $W_1 \cup_{M'} W_2$ por una variedad PL cuyo borde sea $lk(x_j; W_1) \cup lk(x_j; W_2)$. Para hacer lo anterior nos apoyamos en que $\mathcal{H}_3^{PL} = \mathcal{Q}_3^{PL} = 0$.

Este método no se puede seguir en el caso singular ante la imposibilidad, en general, de extender aplicaciones continuas.

Tenemos así definidos los grupos $\mathcal{M}_n^{\text{CPL}}(X,A)$ ($\Omega_n^{\text{CPL}}(X,A)$ en el caso orientado) de bordismo singular casi PL, y por tanto funtores de la categoría de los pares topológicos en la de los grupos abelianos. La demostración de que son funtores homotópicos es más elaborada que en los ejemplos clásicos al no existir el cilindro canónico entre los modelos.

2.5.14. Teorema. Los funtores $\mathcal{M}_n^{\text{CPL}}(-)$ y $\Omega_n^{\text{CPL}}(-)$ son homotópicos. Es decir, si $f, g: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son aplicaciones homotópicas entonces $f_* = g_*: \mathcal{M}_n^{\text{CPL}}(X,A) \longrightarrow \mathcal{M}_n^{\text{CPL}}(Y,B)$ (analogamente para el caso orientado).

Demostración. Bastará probar que si (M,f) y (M,g) son variedades singulares sobre (X,A) tales que f y g son homotópicas, entonces representan la misma clase de $\mathcal{M}_n^{\text{CPL}}(X,A)$.

Sea Q la variedad de la demostración de 2.5.10., vamos a probar que existe una aplicación $K: (Q, Q_0) \longrightarrow (X,A)$ tal que su restricción a $M \sqcup M$ sea $f \sqcup g$.

Si x es un punto singular de M situado en $M - \partial M$ y W es una pl-bola de homología con $\partial W = \text{lk}(x;M)$, definimos

$$F: \{x\} * (W \times \{1\} \cup \text{lk}(x;M) \times I) \longrightarrow X$$

como la composición

$$\begin{array}{c}
\{x\} * (W \times \{1\} \cup lk(x; M) \times I) \longrightarrow \{x\} * (W/W - c(\partial W \times I) \times \{1\} \cup lk(x; M) \times I) \\
\downarrow \cong^{PL} \\
\{x\} * (st(x; M) \times \{1\} \cup lk(x; M) \times I) \\
\downarrow \cong^{PL} \\
st(x; M) \times I \\
\downarrow \pi \\
st(x; M) \times \{0\} \xrightarrow{f} X
\end{array}$$

donde $c: \partial W \times I \longrightarrow W$ es un pl-collar.

Si $x \in \partial M$ es singular, y W es una pl-bola de homología con $W = lk(x; \partial M)$ y V es otra pl-bola de homología con $\partial V = lk(x; M) \cup W$, definimos

$$\tilde{F}: \{x\} * (lk(x; M) \times I \cup V \times \{1\}) \longrightarrow X$$

como la composición

$$\begin{array}{c}
\{x\} * (lk(x; M) \times I \cup V \times \{1\}) \longrightarrow \{x\} * (lk(x; M) \times I \cup V/V - c(lk(x; M) \times I) \times \{1\}) \\
\downarrow \cong^{PL} \\
\{x\} * (lk(x; M) \times I \cup x * lk(x; M) \times \{1\}) \\
\downarrow \cong^{PL} \\
st(x; M) \times I \\
\downarrow \pi_0 \\
st(x; M) \times \{0\} \xrightarrow{f} X
\end{array}$$

donde $c: lk(x; M) \times I \longrightarrow V$ es un pl-collar.

Definimos ahora $F: (Z, Z_0) \longrightarrow (X, A)$ como \tilde{F} en las estrellas de los puntos singulares y $f \circ id$ en el resto.

Sea $H: (M, \partial M) \times I \longrightarrow (X, A)$ una homotopía entre f y g ;
 por la propiedad de extensión de homotopías, existe $\tilde{H}: (Z, Z_0) \times I \longrightarrow (X, A)$
 que extiende a

$$\tilde{F} \cup H|_{\text{st}(x; M) \times I}: \{x\} * (Wx \{1\} \cup \text{lk}(x; M) \times I) \cup \text{st}(x; M) \times I \longrightarrow X$$

si x es un punto singular de $M - \partial M$, y a

$$\tilde{F} \cup H|_{\text{st}(x; M) \times I}: \{x\} * (\text{lk}(x; M) \times I \cup Vx \{1\}) \cup \text{st}(x; M) \times I \longrightarrow X$$

si x es un punto singular situado en ∂M .

Entonces, se define $G = \tilde{H}_1$ y

$$K: (Q, Q_0) = (Z \cup \tilde{M} \times I \cup Z, Z_0 \cup \partial M \times I \cup Z_0) \longrightarrow (X, A)$$

por

$$K(x) = F(x) \quad \text{si } x \in Z \text{ (primera copia)}$$

$$H(y, t) \quad \text{si } x = (y, t) \in \tilde{M} \times I$$

$$G(x) \quad \text{si } x \in Z \text{ (segunda copia)}$$

Por construcción $K|M \sqcup M = f \sqcup g$.

La demostración de que $\mathcal{H}_*^{\text{CPL}}(-)$ y $\mathcal{Q}_*^{\text{CPL}}(-)$ determinan teorías de homología generalizada sigue, ahora, igual que para las variedades de homología. La existencia de entornos regulares es consecuencia de la siguiente proposición sobre células duales (ver 2.1.3. y 2.1.4.).

2.5.15. Proposición. Si $M = |K|$ es una n -variedad casi PL, entonces las células duales $D(\alpha; f)$ asociadas a la aplicación simplicial

$f: K \longrightarrow L$ son variedades casi PL. Además se tiene la igualdad $\partial D(\alpha; f) = D(\alpha; f|_{\partial K}) \cup \dot{D}(\alpha; f)$.

Demostración. Si $A = (b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_q))$ es un q -símplice de $D(\alpha; f)$ con $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) \neq \emptyset$ se tiene que

$$lk(A; D(\alpha; f)) = f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) * \dot{D}(\sigma_0; \dot{\sigma}_1) * \dots * \dot{D}(\sigma_{q-1}; \dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q; K)$$

donde $f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha))$ es la pl-esfera (ver 2.1.3.). Entonces, si $\dim A = 0$ $A = b(\sigma_q)$ y se tiene que

$$lk(b(\sigma_q); D(\alpha; f)) = f|_{\dot{\sigma}_q}^{-1}(b(\alpha)) * \dot{D}(\sigma_q; K) \quad \text{si } q > 0$$

$$\dot{D}(\sigma_q; K) \quad \text{si } q = 0$$

Como $\dot{D}(\sigma_q; K)$ es pl-isomorfo a $lk(\sigma_q; K)$, en el primer caso estamos ante la pl-bola o la pl-esfera y en el segundo ante una pl-bola o pl-esfera de homología pl-isomorfa a $lk(\sigma_q; K)$.

Si $\dim A > 0$, se sigue que $lk(A; D(\alpha; f))$ es la pl-esfera o la pl-bola.

Si ahora $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) = \emptyset$ se tiene

$$lk(A; D(\alpha; f)) = D(\alpha; f|_{\dot{\sigma}_0}) * \dot{D}(\sigma_0; \dot{\sigma}_1) * \dots * \dot{D}(\sigma_{q-1}; \dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q; K)$$

y por un razonamiento análogo al de la segunda parte de 2.1.3. se sigue que $lk(A; D(\alpha; f))$ es la pl-bola.

La descripción del borde de $D(\alpha; f)$ se hace igual que en 2.1.3.

Tenemos así nuevas teorías de bordismo singular, $\mathcal{N}_*^{CPL}(-)$ y Ω_*^{CPL} ; pasamos ahora a compararlas con $\Omega_*^{PL}(-)$ y $\mathcal{N}_*^{PL}(-)$. Nótese que el morfismo olvido $olv: \mathcal{N}_*^{PL}(X, A) \longrightarrow \mathcal{N}_*^{CPL}(X, A)$ es una

transformación natural tal que $\text{olv}: \mathcal{N}_*^{\text{PL}}(\text{pto}) \longrightarrow \mathcal{N}_*^{\text{CPL}}(\text{pto})$ es el isomorfismo de 2.5.8., entonces, por 2.4.2. el olvido es una equivalencia natural. Análogamente para $\Omega_*^{\text{PL}}(-)$ y $\Omega_*^{\text{CPL}}(-)$. (Obsérvese que por la demostración de 2.4.3. toda teoría de bordismo singular verifica el axioma del "wedge" sobre los CW-complejos y el axioma de equivalencia débil de homotopía).

Sin embargo se puede dar una demostración directa del resultado anterior.

2.5.16. Teorema. El morfismo olvido entre $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}(-)$ y $\mathcal{N}_*^{\text{CPL}}(-)$ es una equivalencia natural. Análogamente para $\Omega_*^{\text{PL}}(-)$ y $\Omega_*^{\text{CPL}}(-)$.

Demostración. Bastará probarlo en el caso absoluto, pues el caso relativo sigue de la sucesión exacta del par (X, A) y del lema de los cinco.

Dada una variedad casi PL M , se puede hacer bordante a una variedad PL \tilde{M} mediante una variedad casi PL V (ver 2.5.2.); y si $f: M \longrightarrow X$ es continua, por un método análogo al de la demostración de 2.5.14. se puede extender f a $F: V \longrightarrow X$; entonces $\text{olv} [\tilde{M}, F|_{\tilde{M}}] = [M, f]$, por lo que olv es epiyectivo.

Si $[M, f] \in \mathcal{N}_n^{\text{PL}}(X)$ es tal que $\text{olv} [M, f] = 0 \in \mathcal{N}_n^{\text{CPL}}(X)$, existe una variedad casi PL V con $V = M$ y una aplicación $F: V \longrightarrow X$ con $F|_M = f$. Desingularizando como en 2.5.8. obtenemos una variedad PL \tilde{V} con $\partial\tilde{V} = M$; además, al igual que en 2.5.14, existe una aplicación $\tilde{F}: \tilde{V} \longrightarrow X$ con $\tilde{F}|_{\tilde{M}} = f$. Así $[M, f] = 0 \in \mathcal{N}_n^{\text{PL}}(X)$ y olv es isomorfismo.

2.5.17. Nota. Por 2.5.5. toda variedad de homología fuerte de dimensión distinta de 4 tiene sus puntos singulares interiores acíclicos. Pero esto no ocurre en dimensión 4, así, si H^3 es la 3-esfera de Poincaré $\Sigma^1 H^3$ tiene sus puntos singulares no acíclicos. Incluso $\Sigma^1 H^3$ no puede ser el borde de ninguna variedad de homología fuerte porque H^3 representa un elemento no nulo de θ^H_3 . Sin embargo, dada una n-variedad de homología fuerte M , se puede descomponer como la unión $M_s \sqcup M_a$ donde M_a es la reunión de las componentes de M que tienen todos sus puntos singulares interiores acíclicos y M_s la reunión de las componentes que contienen algún punto singular interior no acíclico. Para $n \neq 4$ $M = M_a$, pero no así para $n = 4$. A partir de esta descomposición se puede definir la siguiente relación de "bordismo" entre variedades de homología fuerte: dos variedades M y M' se dicen bordantes si $M_s = M'_s$ y M_a es bordante por una variedad de homología fuerte a M'_a . Esta relación es reflexiva (por 2.5.3.), simétrica y transitiva (por 2.5.13); y los conjuntos cociente $\mathcal{H}_n^{H.F.}$ pueden ser dotados de estructura de grupo, con la operación definida por la unión disjunta de los representantes, si $n \neq 4$. Para $n = 4$ $\mathcal{H}_n^{H.F.}$ sólo es semigrupo ($\Sigma^1 H^3$ no tiene inverso). Añadiendo orientaciones tenemos los grupos $\Omega_n^{H.F.}$ si $n \neq 4$ y el semigrupo $\Omega_4^{H.F.}$. Naturalmente, si $n \neq 4$

$$\mathcal{H}_n^{H.F.} = \mathcal{H}_n^{CPL} \cong \mathcal{H}_n^{PL} \quad \text{y} \quad \Omega_n^{H.F.} = \Omega_n^{CPL} \cong \Omega_n^{PL}$$

CAPITULO III

TRANSVERSALIDAD EN VARIETADES DE HOMOLOGIA

1. Complejos de conos en variedades de homología.

3.1.1. Definición. Un complejo de conos \mathcal{C} sobre un poliedro euclídeo P es un recubrimiento localmente finito por subpoliedros compactos α , llamados conos, tal que cada $\alpha \in \mathcal{C}$ tiene asociado un subpoliedro $\delta\alpha$, llamado borde de α , verificando :

a) Para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, $\delta\alpha$ es unión de elementos de \mathcal{C} . Si $\beta \subset \delta\alpha$ se dice que β es cara de α y se denota por $\beta < \alpha$.

b) Si α y β son elementos distintos de \mathcal{C} , $\overset{\circ}{\alpha} \cap \overset{\circ}{\beta} = \emptyset$, donde $\overset{\circ}{\alpha} = \alpha - \delta\alpha$.

c) Para cada $\alpha \in \mathcal{C}$ existe un pl-isomorfismo entre $c * \delta\alpha$ y α relativamente a $\delta\alpha$.

Si en c) se escoge un pl-isomorfismo f_α para cada α , se dice que \mathcal{C} está estructurado. A $f_\alpha(c)$ se le llama el vértice de α y se le denota por $\underline{\alpha}$.

3.1.2. Proposición. (1.6. de [32]). Sea X un poliedro euclídeo com-

pacto. Dos pl-isomorfismos $f, g: c * X \longrightarrow c * X$ tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ son isotópicos por una isotopía que es constante en X .

3.1.3. Nota.

a) Por el resultado anterior dos estructuras cualesquiera para $\alpha \in \mathcal{C}$ son isotópicas, manteniendo $\delta\alpha$ fijo. Además esta isotopía se puede extender a una isotopía de todo P . Así pues una estructura para \mathcal{C} es única salvo isotopía.

b) Obsérvese que la condición c) de 3.1.1. implica que $\alpha - \delta\alpha = \overset{\circ}{\alpha} \neq \emptyset$.

c) La condición a) de 3.1.1. implica que para todo $\alpha \in \mathcal{C}$ $\alpha = \bigcup \{ \overset{\circ}{\beta} ; \beta \leq \alpha \}$.

d) Nótese que para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\alpha \cap \beta$ es unión de elementos de \mathcal{C} .

3.1.4. Notación. Si $Q \subset P$ es un subpoliedro unión de elementos de \mathcal{C} se denota por $Q \sqrt{\mathcal{C}}$.

3.1.5. Definición. Dado un complejo de conos \mathcal{C} , un subcomplejo $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ es un subconjunto tal que si $\alpha < \beta$ y $\beta \in \mathcal{D}$ entonces $\alpha \in \mathcal{D}$.

Una subdivisión \mathcal{B} de un complejo de conos \mathcal{C} sobre P es un complejo de conos con $P = |\mathcal{B}|$ y tal que para todo $\alpha \in \mathcal{C}, \alpha \sqrt{\mathcal{B}}$.

3.1.6. Proposición. (2.1. de [31]). Un complejo de conos estructurado \mathcal{C} sobre P tiene una subdivisión canónica \mathcal{C}' que es una triangulación de P con vértices los vértices de los conos de \mathcal{C} . Un símplice $\sigma \in \mathcal{C}'$ es de la forma

$$\sigma = \langle \underline{\alpha}_0, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_k \rangle \text{ donde } \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k \in \mathcal{C}$$

Si \mathcal{C} es un complejo de conos estructurado sobre P , por la

proposición anterior, dado $\alpha \in \mathcal{C}$, $\alpha = \cup \{ \sigma, \sigma \in \mathcal{C}' \}$ con $\sigma = \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ donde $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq \alpha$. Entonces se define α^* como la unión de los símlices de \mathcal{C}' , $\langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$ con $\alpha \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_s$. Claramente α^* es el cono desde α sobre $\cup \{ \beta^*, \alpha < \beta \}$ y se puede probar que la familia \mathcal{C}^* de los α^* es un complejo de conos estructurado sobre P.

3.1.7. Definición. Al complejo \mathcal{C}^* se le denomina complejo dual de \mathcal{C} .

3.1.8. Proposición. (2.2. de [31]). Sea \mathcal{C} un complejo de conos estructurado sobre P; entonces $(\mathcal{C}^*)' = \mathcal{C}'$ y además existe una biyección entre \mathcal{C} y \mathcal{C}^* dada por $\alpha \leftrightarrow \alpha^*$ tal que $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha^* > \beta^*$.

Se verifica que $st(\alpha; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfa a $\alpha \times \alpha^*$. Más aún, si $x \in \alpha$ entonces $lk(x; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfo a $\delta\alpha \times \delta\alpha^*$

3.1.9. Definición. Sea \mathcal{C} un complejo de conos sobre un poliedro P y $Q \subset P$ un subpoliedro. Se dice que \mathcal{C} induce un complejo de conos sobre Q si para cada $\alpha \in \mathcal{C}$ con $\alpha \cap Q \neq \emptyset$ se tiene que $\alpha \cap Q$ es pl-isomorfo a $c_*(\delta\alpha \cap Q)$ relativamente a $\delta\alpha \cap Q$.

El complejo restricción de \mathcal{C} a Q se define como

$$\mathcal{C}|_Q = \{ \alpha \cap Q \text{ con } \alpha \in \mathcal{C} \text{ y } \alpha \cap Q \neq \emptyset \}$$

Si además \mathcal{C} está estructurado y la estructura de α se restringe a una estructura sobre $\alpha \cap Q$ se dice que \mathcal{C} induce un complejo de conos estructurado sobre Q. Nótese que en este caso el vértice de $\alpha \cap Q$ es α .

3.1.10. Proposición (3.4. de [32]). Un complejo estructurado \mathcal{C} sobre

P induce un complejo de conos estructurado sobre $Q \subset P$ si y solo si Q está cubierto por un subcomplejo lleno de \mathcal{C}' .

3.1.1. Proposición. (2.5. de [31]). Sea \mathcal{C} un complejo de conos estructurado sobre P . Si \mathcal{C} induce un complejo de conos estructurado sobre $Q \subset P$ entonces \mathcal{C}^* también lo hace y se verifica que $(\mathcal{C}|Q)^* = \mathcal{C}^*|Q$.

3.1.12. Definición. Un complejo de células de homología \mathcal{C} sobre un poliedro P es un complejo de conos tal que para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, $\delta\alpha$ es una esfera de homología.

3.1.13. Proposición. Si M es una variedad de homología, todo complejo de conos estructurado sobre M verifica que para todo $\alpha \in \mathcal{C}$, $\delta\alpha$ es una esfera o bola de homología. Además, si $\partial M \sqrt{\mathcal{C}}$ entonces \mathcal{C} es un complejo celular de homología. En cualquier caso \mathcal{C} induce un complejo celular de homología sobre ∂M .

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{C}$ de máxima dimensión; entonces $\alpha^* = \underline{\alpha}$ y por 3.1.8. $lk(\underline{\alpha}; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfo a $\delta\alpha$ por lo que $\delta\alpha$ será una bola o esfera de homología. Supongamos que $\delta\beta$ es esfera o bola de homología si $\dim \beta \geq k+1$ y sea $\gamma \in \mathcal{C}$ con $\dim \gamma = k$; entonces existe $\beta \in \mathcal{C}$ con $\gamma < \beta$ y $\dim \beta = k+1$. Ahora bien, por inducción $\delta\beta$ es esfera o bola de homología y γ es de máxima dimensión en $\delta\beta$, luego $lk(\underline{\gamma}; \delta\beta)$ es pl-isomorfo a $\delta\alpha$ y por tanto $\delta\gamma$ es una bola o esfera de homología.

Si $\partial M \sqrt{\mathcal{C}}$, sea $\alpha \in \mathcal{C}$ de máxima dimensión en ∂M , entonces $\delta\alpha$ es una esfera de homología pues ∂M no tiene borde. Si α es de máxima dimensión en M entonces $\alpha \cap M = \emptyset$ pues $\partial M \sqrt{\mathcal{C}}$, luego $\alpha \notin M$ y por tanto $lk(\underline{\alpha}, \mathcal{C}') \stackrel{PL}{\cong} \delta\alpha$ es esfera de homología. Una inducción a-

náloga a la anterior nos asegura que $\delta\alpha$ es una esfera de homología para todo $\alpha \in \mathcal{C}$.

Para ver que \mathcal{C} induce un complejo de células de homología sobre ∂M bastará, por 3.1.10., comprobar que ∂M está cubierto por un subcomplejo lleno de \mathcal{C}' . Pero de ser M una variedad de homología ∂M está cubierto por un subcomplejo $\tilde{\mathcal{C}}'$ de \mathcal{C}' según 0.1.11.; queda solo por ver que $\tilde{\mathcal{C}}'$ es lleno. Sea entonces $\sigma = \langle \underline{\gamma}_0, \underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle$ con $\underline{\gamma}_j \in \tilde{\mathcal{C}}'$. Como $\text{lk}(\underline{\gamma}_j; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfo a $\delta\underline{\gamma}_j * \delta\underline{\gamma}_j^*$ por 3.1.8., se sigue por 0.4.1. que $\delta\underline{\gamma}_j$ ó $\delta\underline{\gamma}_j^*$ debe ser una bola de homología. Entonces, dado $x \in \sigma \subset \overset{\circ}{\gamma}_k$ se tiene por 3.1.8. que $\text{lk}(x; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfo a $\delta\underline{\gamma}_k * \delta\underline{\gamma}_k^*$ por ello es una bola de homología. Luego $\sigma \subset \partial M$ y entonces $\sigma \in \tilde{\mathcal{C}}'$. Esto prueba que $\tilde{\mathcal{C}}'$ es lleno.

3.1.14. Nota. Obsérvese que $\delta\alpha$ es bola de homología si y solo si α pertenece a ∂M .

3.1.15. Teorema. Son equivalentes:

- M es variedad de homología.
- Todo complejo de conos estructurado \mathcal{C} sobre M verifica que $\delta\alpha$ es esfera o bola de homología para todo $\alpha \in \mathcal{C}$.
- Existe un complejo de conos estructurado \mathcal{C} sobre M con $\delta\alpha$ esfera o bola de homología para todo $\alpha \in \mathcal{C}$ y tal que \mathcal{C}^* verifica la misma propiedad.

Demostración.

- \Rightarrow b) es la proposición 3.1.13.
- \Rightarrow c) es trivial
- \Rightarrow a). Por la proposición 3.1.8., si $x \in \overset{\circ}{\alpha}$ y $\alpha \in \mathcal{C}$, $\text{lk}(x; \mathcal{C}')$ es pl-isomorfo a $\delta\alpha * \delta\alpha^*$, luego $\text{lk}(x; \mathcal{C}')$ es esfera o bola de homología por 0.4.1.

2. Tranversalidad en variedades de homología.

En lo que sigue, dada una variedad de homología M , se entenderá por subvariedad de homología de M un subpoliedro que es variedad de homología.

3.2.1. Definición. Sean P y Q subpoliedros de una variedad de homología M . Se dice que P y Q son transversos, y se denota por $P \pitchfork Q$, si existe un complejo de conos \mathcal{C} sobre M tal que $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y $Q \sqrt{\mathcal{C}^*}$

3.2.2. Nota. Obsérvese que $P \pitchfork Q \Leftrightarrow Q \pitchfork P$ pues $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$.

3.3.3. Teorema. Sean M y N subvariedades de homología de una variedad de homología Q tales que $\partial M = \partial Q \cap M$ y $\partial N = \partial Q \cap N$. Entonces, si $M \pitchfork N$, $M \cap N$ es una $(n+m-q)$ -variedad de homología con borde $\partial M \cap \partial N$.

Demostración. Si M es transversa a N existe un complejo de conos estructurado \mathcal{C} sobre Q tal que $M \sqrt{\mathcal{C}}$ y $N \sqrt{\mathcal{C}}$. Sea \mathcal{D} el subcomplejo de \mathcal{C} formado por los conos cuyos interiores cortan a M ; se tiene que $M = |\mathcal{D}|$. Análogamente, sea \mathcal{F} el subcomplejo de \mathcal{C}^* formado por los conos cuyos interiores cortan a N ; se tiene que $N = |\mathcal{F}|$. Definimos el conjunto

$$E = \{ \beta \in \mathcal{D}^* \mid \beta = \alpha^*, \alpha \in \mathcal{D} \text{ y el dual de } \alpha \text{ en } \mathcal{C}^* \text{ está en } \mathcal{F} \}$$

(Nota. Dado $\alpha \in \mathcal{D}$ vamos a denotar por α^* es dual de α en \mathcal{D}^* y por $\alpha^{\bar{}}$ el dual de α en \mathcal{C}^* . Análogamente, si $\beta \in \mathcal{F}$, β^* será el dual en \mathcal{F}^* y $\beta^{\bar{}}$ el dual en $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$).

Se va a probar que E es un complejo de conos sobre $M \cap N$ cuyo dual E^* será

$$\bar{E} = \{ \eta \in \mathcal{F}^* \mid \eta \text{ es el dual de } \varepsilon \in \mathcal{F} \text{ y } \varepsilon^* \in \mathcal{D} \}$$

La verificación de que E es un complejo de conos estructurado es fácil; sólo hay que ver que si $\beta \in E$, $\delta\beta$ es unión de elementos de E . Sea $\beta = \alpha^*$ con $\alpha \in \mathcal{D}$ entonces $\delta\beta = \delta\alpha^* = \{ \gamma^*; \alpha < \gamma \in \mathcal{D} \}$. Pero si $\gamma \in \mathcal{D}$ y contiene a α como cara $\gamma^* < \alpha^*$. De $\alpha^* \in \mathcal{F}$ se sigue que $\gamma^* \in \mathcal{F}$ y por ello $\gamma^* \in E$.

Probaremos ahora que $|E| = M \cap N$. Si $x \in M \cap N = |\mathcal{D}^*| \cap |\mathcal{F}|$ existen $\alpha^* \in \mathcal{D}^*$ y $\beta \in \mathcal{F}$ con $x \in \alpha^* \cap \beta$. Pero de $\beta \in \mathcal{F} \subset \mathcal{C}^*$ se deduce que existe $\eta \in \mathcal{C}$ con $\beta = \eta^*$. Es fácil comprobar que $\alpha^* < \eta^*$ por lo que $x \in \alpha^* \cap \eta^*$. Luego $\alpha = \eta$ y $\alpha^* = \beta \in \mathcal{F}$ lo que implica que $\alpha^* \in E$ y por tanto que $M \cap N \subset |E|$. Recíprocamente, sea ahora $x \in |E|$ entonces $x \in \beta = \alpha^*$ con $\alpha \in \mathcal{D}$ y $\alpha^* \in \mathcal{F}$. Como $\beta = \alpha^* < \alpha^*$ se sigue que $x \in |\mathcal{F}| = N$ y como $x \in \alpha^* \subset |\mathcal{D}^*| = M$, $x \in M \cap N$.

Tenemos así que E es un complejo de conos sobre $M \cap N$. Veamos que $E^* = \bar{E}$. Dado $\beta \in E$ con $\beta = \alpha^*$ y $\alpha \in \mathcal{D}$, el dual de β en E^* es $\beta^* = \alpha^{**} \in \bar{E}$. En efecto; por definición

$$\beta^* = \bigcup \{ \langle \underline{\gamma}_0, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle ; \beta \leq \gamma_0 < \dots < \gamma_k \in E \}$$

luego existe $\eta_i \in \mathcal{D}$ con $\gamma_i = \eta_i^*$ y $\eta_i^* \in \mathcal{F}$. De $\beta \leq \gamma_0 < \dots < \gamma_k$ se sigue que $\alpha^* \leq \eta_0^* < \eta_1^* < \dots < \eta_k^* \in \mathcal{F}$; como $\underline{\gamma}_i = \underline{\eta}_i = \eta_i^*$ se implica que $\langle \underline{\gamma}_0, \underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle$ es un simplexe contenido en α^{**} ; luego $\beta^* \subset \alpha^{**}$. Un razonamiento análogo prueba la otra inclusión. Esto prueba que $E^* \subseteq \bar{E}$.

Recíprocamente, si $\eta \in \bar{E}$ existe $\varepsilon \in \mathcal{F}$ tal que $\eta = \varepsilon^*$ y $\varepsilon^* \in \mathcal{D}$. Entonces ε^{**} está en E y por la igualdad demostrada antes con $\beta = \varepsilon^{**}$ y $\alpha = \varepsilon^*$ se tiene que $\eta = \varepsilon^* = \varepsilon^{***} = \varepsilon^{**} \in E^*$;

luego $\eta \in E^*$ y por ello $E^* = \bar{E}$.

Estamos ya en condiciones de probar que $M \cap N$ es variedad de homología. Sea $x \in M \cap N$, entonces $x \in \beta$ para cierto $\beta \in E$, y por 3.1.8 $lk(x; E')$ es pl-isomorfo a $\delta\beta * \delta\beta^*$. Pero $\beta \in E$ y $\beta^* \in E^* = \bar{E}$ luego $\beta \in \mathcal{D}$ y $\beta^* \in \mathcal{F}^*$. En ambos casos $\delta\beta$ y $\delta\beta^*$ son esferas o bolas de homología pues $M = |\mathcal{D}|$ y $N = |\mathcal{F}^*|$ son variedades de homología; entonces por 0.4.1. $lk(x; E')$ es esfera o bola de homología. Además, $\delta\beta$ será bola si $x \in \partial M = \partial Q \cap M$ y $\delta\beta^*$ será bola si $x \in \partial N = \partial Q \cap N$; luego $\partial M \cap \partial N = \partial(M \cap N)$.

Por último, para ver que $\dim(M \cap N) = n+m-q$, supongamos que $M \cap N \neq \emptyset$, entonces existe conos en \mathcal{D} y \mathcal{F} , α y β^* respectivamente, tales que $\dim \alpha = \dim M = m$ y $\dim \beta^* = \dim N = n$ con intersección no vacía. Pero

$$\alpha = \bigcup \{ \langle \underline{\delta}_0, \underline{\delta}_1, \dots, \underline{\delta}_m \rangle ; \quad \delta_0 \leq \delta_1 < \dots < \delta_m = \alpha \}$$

y

$$\beta^* = \bigcup \{ \langle \underline{\rho}_{q-n}, \underline{\rho}_{q-n+1}, \dots, \underline{\rho}_q \rangle ; \quad \rho = \rho_{q-n} < \rho_{q-n+1} < \dots < \rho_q \}$$

por lo que hay una intersección

$$\langle \underline{\delta}_0, \dots, \underline{\delta}_m \rangle \cap \langle \underline{\rho}_{q-n}, \dots, \underline{\rho}_q \rangle$$

no vacía. En particular, $\beta < \alpha$ y entonces el simplex

$\langle \underline{\theta}_{q-n}, \underline{\theta}_{q-n+1}, \dots, \underline{\theta}_m \rangle$, donde $\beta = \theta_{q-n} < \theta_{q-n+1} < \dots < \theta_m = \alpha$, está en $\alpha \cap \beta^*$ luego la dimensión de $M \cap N$ debe ser mayor o igual que $m+n-q$.

si ahora $\beta \in E$ entonces $\beta = \alpha^*$ con $\alpha \in \mathcal{D}$ y $\alpha^* \in \mathcal{F}$.

Por tanto, $\dim \beta = m - \dim \alpha$ y $\dim \alpha = q - \dim \alpha^*$; luego

$\dim \beta = m + \dim \alpha^* - q \leq m+n-q$. Entonces la dimensión de $M \cap N$ es menor o igual que $m+n-q$ y ello prueba la igualdad.

3.2.4. Definición. Sean P y Q subpoliedros de una variedad de homología M . Se dice que P es fuertemente transverso a Q si existe un complejo de células de homología estructurado sobre M , \mathcal{C} , tal que $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y $Q \sqrt{\mathcal{C}^*}$.

3.2.5. Nota. Obsérvese que fuertemente transverso implica transverso. Si M es una variedad de homología sin borde ambos conceptos son equivalentes según 3.1.13.. Pero en el caso de que $\partial M \neq \emptyset$ la equivalencia no es cierta en general. Por ejemplo, si G_n es una n -variedad de Glaser y K una triangulación de G_n , sea $M = c * G_n$, $P = \{v\}$ y $Q = \{c\}$, donde v es un vértice de K . Entonces P y Q son transversos pero P no es fuertemente transverso a Q pues de serlo c tendría que ser el vértice de una célula de homología de máxima dimensión y por tanto su "link" sería una esfera de homología, pero éste es G_n que es una bola de homología.

3.2.6. Definición. Sea M variedad de homología cuyo borde admite pl-collar y sea P un subpoliedro de M . Se dice que P es un subpoliedro propio de M si $(\partial M, \partial M \cap P)$ admite pl-collar en $(M, M \cap P)$.

3.2.7. Lema. Sea \mathcal{C} un complejo de conos estructurado y $P \sqrt{\mathcal{C}^*}$, entonces si $\beta \in \mathcal{C}$ es tal que $\beta \cap P \neq \emptyset$, para cada $\alpha \in \mathcal{C}$ con $\beta \leq \alpha$ se tiene que $\alpha \in P$. Además, $\alpha \cap P$ es un subcono de α .

Demostración. Puesto que $P \sqrt{\mathcal{C}^*}$ existe algún $\gamma \in \mathcal{C}$ con $\gamma^* \subset P$

verificando que $\gamma \cap \beta \neq \emptyset$. Entonces si

$$\beta = \bigcup \{ \langle \underline{\nu}_0, \underline{\nu}_1, \dots, \underline{\nu}_s \rangle ; \quad \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_s \leq \beta \}$$

y

$$\gamma^* = \bigcup \{ \langle \underline{\varepsilon}_0, \underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_k \rangle ; \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 < \dots < \varepsilon_k \}$$

la intersección $\gamma^* \cap \beta$ es

$$\bigcup \{ \langle \underline{\gamma}_0, \dots, \underline{\gamma}_r \rangle ; \quad \gamma \leq \gamma_0 < \dots < \gamma_r \leq \beta \}$$

En estas condiciones si $\alpha \in \mathcal{C}$ tiene como cara a β , de la expresión de $\gamma^* \cap \beta$ se sigue que $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ por lo que $\alpha \in \gamma^* \subset P$. Para la segunda parte bastará tener en cuenta la igualdad

$$\begin{aligned} \beta \cap P &= \bigcup \{ \langle \underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_k \rangle ; \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \dots \leq \varepsilon_k \leq \beta \quad \text{y} \quad \gamma^* \subset P \} = \\ &= \beta * \bigcup \{ \langle \underline{\delta}_0, \dots, \underline{\delta}_r \rangle ; \quad \gamma \leq \delta_0 < \dots < \delta_r < \beta \quad \text{y} \quad \gamma^* \subset P \} = \\ &= \beta * P \cap \beta \end{aligned}$$

que es consecuencia inmediata de la expresión de $\gamma^* \cap \beta$.

3.2.8. Proposición. Sean M una variedad de homología admitiendo pl-collar y $P \subset M$ un subpoliedro propio. Si \mathcal{C} es un complejo de conos estructurado sobre M tal que $P \sqrt{\mathcal{C}^*}$, existe un complejo celular de homología estructurado \mathcal{B} que es subdivisión de \mathcal{C} y tal que $P \sqrt{\mathcal{B}^*}$.

Demostración. Como M es una variedad de homología, por 3.1.13. dado $\alpha \in \mathcal{C}$, $\delta\alpha$ es esfera o bola de homología. Los conos tales que $\delta\alpha$ es esfera de homología quedan con la misma estructura; a los conos cuyos bordes sean bolas de homología se les cambiará la estructura por inducción sobre la dimensión.

Sea $\alpha \in \mathcal{C}$ de máxima dimensión y tal que $\delta\alpha$ es bola de homología; en particular $\alpha \in \partial M$ (nótese que si todos los conos de máxima dimensión de \mathcal{C} tienen como bordes esferas de homología, por la demostración de 3.1.13., \mathcal{C} ya sería un complejo celular de homología). Supongamos además que $\alpha \cap P \neq \emptyset$, entonces por el lema anterior $\alpha \in P \cap \partial M$. De la existencia de pl-collar relativo se deduce que existe un pl-isomorfismo

$$(st(\alpha; \mathcal{C}'|\partial M), st(\alpha; \mathcal{C}'|\partial M \cap P)) \times I \cong (st(\alpha; \mathcal{C}'), st(\alpha; \mathcal{C}'|P))$$

que en el nivel cero se comporta como la identidad. Pero de ser α de máxima dimensión se sigue por 3.1.8. que

$$(st(\alpha; \mathcal{C}'), st(\alpha; \mathcal{C}'|P)) = (\alpha; \alpha \cap P)$$

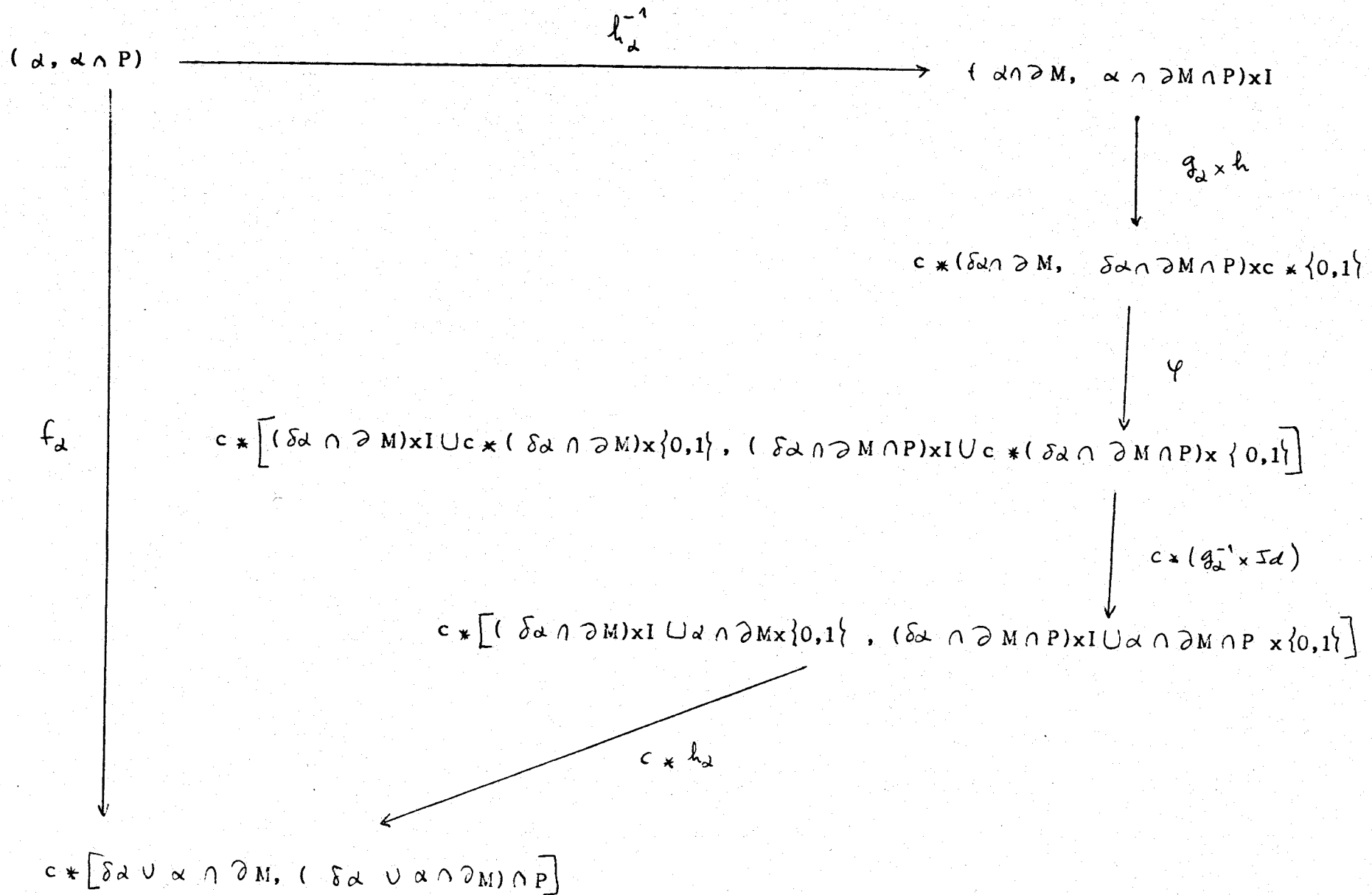
y

$$(st(\alpha; \mathcal{C}'|\partial M), st(\alpha; \mathcal{C}'|P \cap \partial M)) = (\alpha \cap \partial M, \alpha \cap \partial M \cap P)$$

Tenemos así un pi-isomorfismo

$$h_\alpha: (\alpha \cap \partial M, \alpha \cap \partial M \cap P) \times I \longrightarrow (\alpha, \alpha \cap P)$$

que envía $(\delta\alpha \cap \partial M) \times I \cup \alpha \cap \partial M \times \{0,1\}$ en $\delta\alpha \cup \alpha \cap \partial M$, debido a que estos poliedros son los bordes de $(\alpha \cap \partial M) \times I$ y de α como variedades de homología. Si $g_\alpha: \alpha \longrightarrow c_* \delta\alpha$ es la estructura de α , por el lema 3.2.7. g_α es relativo a P y por 3.1.13 a ∂M , por tanto g_α es relativo a $\partial M \cap P$. Entonces, si $h_\alpha: I \longrightarrow c_* \{0,1\}$ es la estructura natural de $[0,1]$ con vértice en $\frac{1}{2}$, consideramos el pl-isomorfismo f_α que hace conmutativo el siguiente diagrama



(donde φ es un pl-isomorfismo natural, ver 4.3.19. de [44]). El pl-isomorfismo f_α permite dar al cono α una nueva estructura de forma que el borde de α es ahora $\delta\alpha \cup \alpha \cap \partial M$, que es esfera de homología y el nuevo vértice es $h_\alpha^{-1}(\alpha, \frac{1}{2}) \in P$.

En el caso en el que $\alpha \cap P = \emptyset$ se hace la construcción anterior sin tener en cuenta las intersecciones con P . Se ha cambiado así la estructura de los conos de máxima dimensión. Supongamos que para los conos $\alpha \in \mathcal{C}$ tales que $\delta\alpha$ es bola de homología y $\dim\alpha > k$ hemos probado que existe un pl-isomorfismo

$$h_\alpha: (\alpha \cap \partial M, \alpha \cap \partial M \cap P) \times I \longrightarrow (\alpha, \alpha \cap P)$$

que en el nivel cero se comporta como la identidad y que gracias a él tenemos una nueva estructura f_α en α dada como en el caso de máxima dimensión.

Sea $\beta \in \mathcal{C}$ un cono de dimensión k cuyo borde, $\delta\beta$, es una bola de homología. Entonces existe $\alpha \in \mathcal{C}$ tal que su dimensión es $k+1$ y $\beta \subset \alpha$. Por ser β de máxima dimensión en $\delta\alpha$ se tiene que

$$(st(\beta; \delta\alpha), st(\beta; \delta\alpha \cap P)) = (\beta, \beta \cap P)$$

y por ello $lk(\beta; \delta\alpha) = \delta\beta$, lo que implica que $\delta\alpha$ es una bola de homología y por tanto satisface la hipótesis de inducción, lo que garantiza la existencia de un pl-isomorfismo h_α . En particular

$$h_\alpha^{-1}(\delta\alpha) = \delta\alpha \cap \partial M \times I \cup (\alpha \cap \partial M) \times \{1\}$$

de donde

$$st(\beta; \delta\alpha) \xrightarrow{h_\alpha^{-1}} st((\beta, 0); h_\alpha^{-1}(\delta\alpha)) = st((\beta, 0); \delta\alpha \cap \partial M \times I)$$

Pero el último término es pl-isomorfo a $st(\beta; \delta\alpha \cap \partial M) \times I = \beta \cap \partial M \times I$

por lo que tenemos un pl-isomorfismo $h_\beta: \beta \cap \partial M \times I \rightarrow \beta$. Si β corta a P , entonces $\alpha \cap P \neq \emptyset$ por lo que h_α se relativiza a P y h_β induce un pl-isomorfismo

$$h_\beta: (\beta \cap \partial M, \beta \cap \partial M \cap P) \times I \rightarrow (\beta, \beta \cap P)$$

que al igual que en caso de máxima dimensión nos permite dar a β una nueva estructura de cono, cuyo borde es una esfera de homología y su vértice está en P si $P \cap \beta \neq \emptyset$. Hemos construido por inducción un complejo de células de homología \mathcal{B} sobre M que claramente es subdivisión de \mathcal{C} . Queda por probar que $P \sqrt{\mathcal{B}^*}$. Por construcción $\beta \cap P$ es un subcono de β para cada $\beta \in \mathcal{B}$; entonces, por 3.1.10., P está cubierto por un subcomplejo lleno de \mathcal{B}' . Si $\beta^* \in \mathcal{B}^*$ es tal que $\beta^* \cap P \neq \emptyset$ existe un símplex $\sigma = \langle \underline{\gamma}_0, \underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle \in \mathcal{B}'$ cuyo interior corta a P , entonces $\sigma \subset P$ pues P está cubierto por un subcomplejo de \mathcal{B}' ; en particular $\beta \in P$. Como $\beta \in P \cap \beta$, por el lema 3.2.7. se sigue que $\alpha \in P$, para cada $\beta \in \mathcal{C}$. Entonces $P \cap \alpha \neq \emptyset$ y por la construcción de la nueva estructura, el nuevo vértice de β está en P . Si

$$\beta^* = \bigcup \{ \langle \underline{\gamma}_0, \underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle ; \beta \leq \underline{\gamma}_0 < \underline{\gamma}_1 < \dots < \underline{\gamma}_k \in \mathcal{B}' \}$$

se sigue de lo anterior que cada vértice $\underline{\gamma}_j$ está en P , y por estar P cubierto por un subcomplejo lleno de \mathcal{B}' cada símplex $\langle \underline{\gamma}_0, \dots, \underline{\gamma}_k \rangle$ está contenido en P y por ello $\beta^* \subset P$. Se sigue de aquí que

$$P = \bigcup \{ \beta^* ; \beta^* \in \mathcal{B}^*, \beta^* \cap P \neq \emptyset \}$$

lo que prueba que $P \sqrt{\mathcal{B}^*}$.

3.2.9. Corolario. Si M es una variedad de homología con borde admitiendo pl-collar y P y Q son subpoliedros propios de M entonces P es

transverso a Q si y solo si P es fuertemente transverso a Q .

Demostración. Si P es transverso a Q existe un complejo de conos \mathcal{C} con $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y $Q \sqrt{\mathcal{C}^*}$. Por la proposición anterior, existe un complejo celular de homología \mathcal{B} que es subdivisión de \mathcal{C} y tal que $Q \sqrt{\mathcal{B}^*}$; entonces $P \sqrt{\mathcal{B}}$ y $Q \sqrt{\mathcal{B}^*}$ lo que indica que P es fuertemente transverso a Q .

3.2.10. Nota. En 3.2.8 la condición de que (M, P) admita pl-collar no se puede reducir a que $P \cap \partial M$ admita pl-collar en P ; pues si G_n es una n -variedad de Glaser y K una triangulación de G_n , sean $M = c * G_n$ y P un segmento de extremos c y v , donde v es un vértice de K . Entonces si \mathcal{C} es el complejo de conos determinado por las células duales de K y el cono $c * G_n$, se tiene que $P \sqrt{\mathcal{C}^*}$. Pero no hay ningún complejo celular de homología \mathcal{B} con $P \sqrt{\mathcal{B}^*}$, pues si existiese tal complejo c tendría que ser el vértice de algún $\beta \in \mathcal{B}$ de dimensión n ó $n+1$ por tener P dimensión 1; entonces $lk(c; \mathcal{B}')$ sería pl-isomorfo a $\delta\beta$ si $\dim \beta = n+1$ y esto es imposible. Si $\dim \beta = n$, entonces $lk(c; \mathcal{B}')$ sería pl-isomorfo a $\delta\beta * \delta\beta^*$ y a G_n ; pero de ser G_n variedad PL se deduce que $\delta\beta$ y $\delta\beta^*$ deben ser pl-esferas ó pl-bolas. Como $\delta\beta$ es esfera de homología, $\delta\beta$ es pl-esfera y $\delta\beta^*$ debe ser la pl-bola de dimensión cero; entonces $\delta\beta * \delta\beta^*$ sería la pl-bola B^{n+1} , lo que también es imposible.

Tampoco si M admite collar pero P no es propio se tiene el resultado de 3.2.8. Así, por ejemplo, si tenemos $B^{n+1} = c * B^n$, donde B^n y B^{n+1} indican las pl-bolas respectivas, y consideramos el complejo de conos \mathcal{C} determinado por una triangulación de B^n y el cono $c * B^n$ se tiene que $\{c\} \sqrt{\mathcal{C}^*}$; pero no existe ningún complejo de células de homología \mathcal{B} con $\{c\} \sqrt{\mathcal{B}^*}$, pues de ser así, c sería el vértice de alguna célula $\beta \in \mathcal{B}$ de máxima dimensión y $lk(c; \mathcal{B}')$

sería una esfera de homología, lo que no es posible.

3.2.11. Definición. Sea P un subpoliedro de una variedad de homología M y \mathcal{C} un complejo celular de homología estructurado sobre M . Se dice que P es transverso a \mathcal{C} si $(\delta\alpha, P \cap \delta\alpha)$ admite pl-collar en $(\alpha, P \cap \alpha)$ para cada $\alpha \in \mathcal{C}$.

3.2.12. Definición. Sean P y Q subpoliedros de una variedad de homología M . Se dice que P es "mock-transverso" a Q si existe un complejo celular de homología \mathcal{C} tal que $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y Q es transverso a \mathcal{C} .

3.2.13. Teorema. Sean P y Q subpoliedros propios de una variedad de homología M con borde admitiendo pl-collar. Entonces P es "mock-transverso" a Q si y solo si P es transverso a Q .

Demostración. Si P es transverso a Q , por 3.2.9, P es fuertemente transverso a Q . Por tanto existe un complejo celular de homología \mathcal{C} con $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y $Q \sqrt{\mathcal{C}^*}$. Por el lema 3.2.7 si $\alpha \in \mathcal{C}$ es tal que $\alpha \cap Q \neq \emptyset$ entonces $\alpha \cap Q$ es un subcono de α , de donde se deduce que la estructura cónica de α determina un collar relativo de $(\delta\alpha, \delta\alpha \cap Q)$ en $(\alpha, \alpha \cap Q)$; es decir, P es "mock-transverso" a Q .

Recíprocamente, si P es "mock-transverso" a Q , existe un complejo celular de homología \mathcal{C} tal que $P \sqrt{\mathcal{C}}$ y Q es transverso a \mathcal{C} . Se va a construir un complejo de conos \mathcal{D} que será una subdivisión de \mathcal{C} verificando que $Q \sqrt{\mathcal{D}^*}$, lo que probará que P es transverso a Q .

Se construirá \mathcal{D} esqueleto a esqueleto. Para la dimensión

cero, \mathcal{D} será el 0-esqueleto, b_0 , de b . Supongamos que está construida una subdivisión \mathcal{D}_{q-1} para el $(q-1)$ -esqueleto b_{q-1} de b que además verifica que para todo $\alpha \in b_{q-1}$, $Q \cap \alpha \sqrt{(\mathcal{D}_{q-1} | \alpha)^*}$.

(Nótese que para $q = 1$ esta condición se satisface trivialmente).

Sea $\beta \in b$ una q -célula, por la hipótesis de inducción $Q \cap \delta\beta \sqrt{(\mathcal{D}_{q-1} | \delta\beta)^*}$; por otra parte $(\delta\beta, \delta\beta \cap Q)$ admite pl-collar en $(\beta, Q \cap \beta)$ por lo que existe una pl-inmersión $h: (\delta\beta, \delta\beta \cap Q) \times I \rightarrow (\beta, \beta \cap Q)$. Con todo ello podemos construir $\mathcal{D}_q | \beta$ como sigue: extendemos el complejo $(\mathcal{D}_{q-1} | \delta\beta)^* = \mathcal{D}_{q-1}^* | \delta\beta$ a todo el collar, llevando por h el complejo producto $(\mathcal{D}_{q-1} | \delta\beta)^* \times I$. Después se triangula $\overline{\beta - h(\delta\beta \times I)}$ para que todos los conos de $(\mathcal{D}_{q-1} | \delta\beta)^* \times I$ así como $\overline{Q \cap \beta - h(Q \cap \delta\beta \times I)}$ sean subcomplejos. Tenemos un complejo de conos \mathcal{P}_β sobre β que restringido a $\delta\beta$ es $(\mathcal{D}_{q-1} | \delta\beta)^*$ y verificando que $Q \cap \beta \sqrt{\mathcal{P}_\beta}$. Definamos $\mathcal{D}_q | \beta = \mathcal{P}_\beta^*$, si $\alpha \subset \beta$ se tiene

$$\mathcal{D}_q | \beta | \alpha = \mathcal{P}_\beta^* | \alpha = (\mathcal{P}_\beta | \alpha)^* = (\mathcal{D}_{q-1}^* | \alpha)^* = \mathcal{D}_{q-1} | \alpha$$

Entonces, si se define

$$\mathcal{D}_q = \bigcup \{ \mathcal{D}_q | \beta ; \beta \in b \text{ dim } \beta = q \}$$

tenemos un complejo de conos que subdivide a b_q y tal que, para todo $\alpha \in b_q$, $Q \cap \alpha \sqrt{(\mathcal{D}_q | \alpha)^*}$. Sea entonces $\mathcal{D} = \bigcup \{ \mathcal{D}_q ; q \leq \dim M \}$. \mathcal{D} es una subdivisión de b verificando, para todo $\alpha \in b$, que $Q \cap \alpha$ es unión de conos de $(\mathcal{D} | \alpha)^*$; entonces $Q \sqrt{\mathcal{D}^*}$ y ello prueba que P es transverso a Q .

3.2.14. Corolario. Sean P y Q subpoliedros propios de una variedad de homología M con borde admitiendo pl-collar. Entonces P es "mock-

transverso" a Q si y solo si P es transverso a Q .

3.2.15. Nota. Obsérvese que el complejo \mathcal{L} que aparece en la demostración del teorema 3.2.13. es de hecho un complejo celular de homología pues para cada $\beta \in \mathcal{L}$ $\delta\beta$ es el borde de β como variedad de homología y $\delta\beta \in \mathcal{L}$. Por tanto $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}|_{\beta}$ es un complejo celular de homología.

3.2.16. Teorema. Sean P y Q subpoliedros de una variedad de homología M . Entonces P es fuertemente transverso a Q si y solo si P es "mock-transverso" a Q .

Demostración. Es la demostración de 3.2.14., teniendo en cuenta la nota anterior para el recíproco.

3. Contraejemplos.

La falta de homogeneidad de las variedades de homología hace imposible, en general, que en estos modelos se puedan colocar dos subvariedades en posición transversal. Debido a ello, los resultados positivos en esta dirección han sido obtenidos por Galewski-Stern, [13], suponiendo que la variedad ambiente es PL; y por Martin, [24] y [25], haciendo cambiar la variedad ambiente por un bordismo. En esta sección se dan algunos contraejemplos a posibles generalizaciones de ciertos resultados sobre transversalidad a las variedades de homología.

Galewski-Stern en [13] dan la definición y los teoremas siguientes:

3.3.1. Teorema (3.6. de [13]). Sea N^n una variedad de homología propia de una variedad PL Q^{n+q} y M^m una subvariedad de homología inmersa en Q como subpoliedro propio. Entonces existe una isotopía ambiente en Q , h_t , de forma que $h_1(N)$ es transversal a M . Además si N es ya transversal a M , la isotopía puede ser escogida de forma que sea la identidad sobre N .

3.3.2. Definición. Una aplicación continua $f: M \rightarrow Q$ se dice admisible si $f^{-1}(\partial Q) \subset \partial M$ y $f^{-1}(\partial Q)$ admite collar en M . Una aplicación admisible $f: M^m \rightarrow Q^q$ entre variedades de homología se dice t -regular a una subvariedad propia N^n de Q si $f^{-1}(N)$ es una $(m+n-q)$ -variedad de homología y f induce un morfismo de fibrado entre un fibrado normal de homología de $f^{-1}(N)$ en M y un fibrado normal de homología de N en Q .

3.3.3. Teorema (3.7. de [13]).

a) Sea $f_0 : M^m \rightarrow Q^{n+q}$ una aplicación admisible, donde M^m es una variedad de homología y Q^{m+q} una variedad PL. Si $N^n \subset Q$ es una subvariedad propia de Q , existe una homotopía arbitrariamente pequeña f_t de f_0 tal que f_1 es t -regular a N .

b) Si $f_0|_{\partial M}$ fuese ya t -regular a N entonces la homotopía puede hacerse relativa a ∂M .

Si en los teoremas 3.3.1. y 3.3.3. se hace que Q sea una variedad de homología entonces ambos resultados son, en general, falsos.

3.3.4. Contraejemplo a la generalización de 3.3.1. Sea $Q = \sum^1 H^3$, donde H^3 es la 3-esfera de Poincaré. Sea M los puntos de la suspensión y N un camino simplicial cerrado y simple que contenga a M . Si existiese una isotopía en Q , h_t , con $h_1(M) \pitchfork N$ entonces por 3.2.3., $h_1(M) \cap N = \emptyset$. Pero cualquier isotopía en Q verifica que $h_t(M) = M$ pues M son los puntos singulares, y entonces $M \cap N = \emptyset$ que contradice la construcción de N .

3.3.5. Nota. Obsérvese que ni siquiera existe un homeomorfismo $h: Q \rightarrow Q$ con $h(M) \cap N = \emptyset$.

3.3.6. Contraejemplo a la generalización de 3.3.3. Veamos primero un contraejemplo a 3.3.3.b). Sea H^3 la 3-esfera de Poincaré, sea $g: S^1 \rightarrow H^3$ un representante de un generador de $\pi_1(H^3)$. Sea $f: S^1 \rightarrow \sum^1 H^3$ la aplicación g considerada en el ecuador de la suspensión; puesto que $\pi_1(\sum^1 H^3) = 0$ existe $f: B^2 \rightarrow \sum^1 H^3$ que extiende a f . Entonces si el teorema 3.3.3.b) generalizado fuese cierto para $Q = \sum^1 H^3$, $M = B^2$ y $N = \sum^1$ existiría $f_1: B^2 \rightarrow \sum^1 H^3$ con $f_1|_{S^1} = f_0|_{S^1} = f$ y $f_1^{-1}(N) = \emptyset$;

por lo que f_1 sería una extensión de $f: S^1 \longrightarrow \Sigma^1 H^3 - N$ a B^2 y esto contradice la elección de g .

Para 3.3.3.a) tenemos el siguiente contraejemplo. Sea H^n el borde de una $(n+1)$ -variedad de Glaser. Sea $g: S^1 \longrightarrow H^n$ un representante de un generador de $\pi_1(H^n)$. Consideramos

$$f_0 = \Sigma^1 g: M = \Sigma^1 S^1 = S^2 \longrightarrow \Sigma^1 H^n = Q$$

Entonces, de ser cierto 3.3.3.a), existiría una homotopía arbitrariamente pequeña f_t tal que f_1 sería t -regular a $N = \Sigma^1$. En estas condiciones, para n suficientemente grande, se tendría que $f_1^{-1}(N) = \emptyset$, y si la homotopía fuese lo suficientemente pequeña $h_t(S^1) \subset Q - N$. Gracias a ello, si c es un vértice de la suspensión de S^1 ,

$$h_1|_c * S^1 \cup h_t|_S^1 : B^2 \longrightarrow Q$$

sería una extensión de $g: S^1 \longrightarrow H^n$ a la bola B^2 cuya imagen caería en $Q - N$, pero esto implicaría que $[g] = 1 \in \pi_1(H^n)$, que está en contradicción con la elección de g .

3.3.7. Definición. Una aplicación $f: M \longrightarrow N$ entre variedades se dice propia si $f^{-1}(\partial N) = \partial M$.

3.3.8. Definición. Una variedad de homología M es una variedad de homotopía si los "links" de los símlices de una triangulación son simplemente conexos.

Martin en [25] demuestra el siguiente teorema:

3.3.9. Teorema (A de [25]). Sean M^m una variedad de homotopía, N^n

una variedad de homología y P^p una subvariedad propia de N^n . Si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación propia y $n-p \geq 3$ existe una aplicación t -regular a P $g: M \rightarrow N$ homotópica a f .

La generalización de este teorema al caso relativo (es decir, si $f|_{\partial M}$ es t -regular a N entonces la homotopía entre f y g se puede hacer relativa a ∂M) es falsa como lo prueba el siguiente contraejemplo:

3.3.10. Contraejemplo a 3.3.9. (caso relativo). Sea H^n como en la segunda parte de 3.3.6.. Sea $[h] \in \pi_1(H^n)$ un elemento no nulo. Consideramos la aplicación cono $c * h: c * S^1 \rightarrow c * H^n$. Entonces, si la versión relativa de 3.3.9. fuese cierta, existiría una aplicación homotópica a $c * h$, relativamente a S^1 , $g: c * S^1 \rightarrow c * H^n$ tal que $g^{-1}(c)$ es vacío. Por tanto g sería una extensión de h a B^2 cuya imagen cae en $c * H^n - \{c\}$ y ello implica que $[h] = 1 \in \pi_1(H^n)$, lo que contradice la lección de h .

En [2] se define el concepto de "mock-bundle" para variedades de homología. Esta definición permite dar el siguiente concepto de transversalidad:

3.3.11. Definición. Sea $f: W \rightarrow M$ una aplicación entre variedades de homología. Decimos que f es "mock-tranversa" a X , subpoliedro de M si f es la proyección de un "mock-bundle" de homología en el que X es un subcomplejo de la base. Se denota por $f \perp_m X$.

En [3] se prueba el siguiente teorema de "mock-transversalidad":

3.3.12. Teorema (4.1. de [3]). Sea M una variedad PL compacta con borde y $X \subset M$ un subpoliedro propio de M . Sea $f: W \rightarrow M$ una aplica-

ción propia (en el sentido de 3.3.7.), donde W es una variedad PL, y supongamos que $f|_{\partial W} \perp_m X_0 = X \cap \partial M$; entonces existe una aplicación $g: W \longrightarrow M$ que es ε -homotópica a f relativamente a ∂W y tal que $g \perp_m X$.

3.1.13. Contraejemplo a 3.3.12. (el el caso de variedades de homología)

Sea H^3 la 3-esfera de Poincaré y $[\bar{h}] \in \pi_1(H^3)$ un generador de tal modo que $h: S^1 \longrightarrow H^3$ defina un "mock-bundle", que será de dimensión -2. Consideremos la aplicación cono $c * h: B^2 = c * S^1 \longrightarrow c * H^3$ y $X = H^3 \times [0, \frac{1}{2}] \cup \{c\}$. Entonces $c * h|_{S^1}$ es "mock-transversa" a $X_0 = H^3$ y si 3.3.12. fuese cierto en el caso de variedades de homología, existiría $g: B^2 \longrightarrow c * H^3$ tal que g es homotópica a $c * h$, relativamente a S^1 , y $g \perp_m X$. Pero si g es la proyección de un "mock-bundle" de homología, se debe cumplir que $g^{-1}(c) = \emptyset$. Por tanto g sería una extensión de h a B^2 cuya imagen cae en $c * H^3 - \{c\}$ y esto contradice la elección de h .

REFERENCIAS

- [1] E. AKIN. "Stiefel-Whitney homology classes and bordism"
Trans. A.M.S. 205 (1975) 341-359
- [2] R. AYALA. Tesis
- [3] S. BUONCRISTIANO, C.P. ROURKE and B.J. SANDERSON
A geometric approach to Homology Theory. Lecture Notes
Series 18. Cambridge Univ. Press
- [4] S.W. CANNON. "The recognition problem: What is a topological
manifold?". Bull. A.M.S. 84 (1978) 832-866
- [5] _____ . "Shrinking cell-like decompositions of manifolds
Codimension three". Ann. of Math. 110 (1979) 83-112
- [6] M.M. COHEN. "Simplicial structures and transverse cellularity"
Ann. of Math. 85 (1967) 218-245
- [7] P.E. CONNER. Differentiable Periodic Maps. Lecture Notes
738. Springer-Verlag 1979
- [8] R.J. DAVERMAN. "Embeddings of $(n-1)$ -spheres in euclidean
 n -spaces". Bull. A.M.S. 84 (1978) 377-405
- [9] E. DOMINGUEZ. "An axiomatic approach to bordism theory"
Pendiente de publicación.
- [10] _____ . Notas sobre el concepto de clases de Stiefel-
Whitney . Sevilla 1980.
- [11] R.D. EDWARDS. "The topology of manifolds and cell-like maps".
Proc. of the I.C.M. Helsinki 1978.

- [12] D.E. GALEWSKI, R.J. STERN. "Clasification of simplicial triangulations of topological manifolds". Ann. of Math. 111 (1980) 1-34
- [13] _____, _____. "The relationship between homology and topological manifolds". Inv. Math. 39 (1977) 277-292.
- [14] L. GLASER. "Uncountably many contractible open manifolds" Topology 6 (1967) 37-42
- [15] _____. Geometric Combinatorial Topology . Van Nostrand Reinhold 1970.
- [16] M.A. GUTIERREZ, R.C. LACHER. "Semifree group actions and homology spheres". Lecture Notes 438 pp. 240-244. Springer-Verlag 1974
- [17] S. HALPERIN, D. TOLEDO. "Stiefel-Whitney homology classes". Ann. of Math. 96 (1972) 511-525.
- [18] M. HIRSCH. "Obstruction theories for smoothing manifolds and maps". Bull. A.M.S. 69 (1963) 352-356
- [19] J.F.P. HUDSON. Piecewise linear Topology. Benjamin 1969.
- [20] M.A. KERVAIRE. "Smooth homology spheres and their fundamental groups". Trans. A.M.S. 144 (1969) 67-72
- [21] M.A. KERVAIRE and J.W. MILNOR. "Groups of homotopy spheres: I". Ann. of Math. 77(3) (1963) 504-537.

- [22] R.C. KIRBY, M.G. SCHARLEMANN. "Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere". Proc. of the Georgia Topology Conference 1977. Academic Press 1979.
- [23] R.C. KIRBY, L.C. SIEBENMANN. "On the triangulations of manifolds and the Hauptvermutung". Bull. A.M.S. 75 (1969) 742-749
- [24] N.MARTIN. "Cobordism of homology manifolds". Proc. Camb. Philos. Soc. 71 (1972) 247-270.
- [25] _____. "Transverse regularity for maps of homology manifolds". Proc. Camb. Philos. Soc. 74 (1973) 29-38.
- [26] _____. "On the difference between homology and piecewise linear bundles". J. London Math. Soc. (2) 6 (1973) 197-204
- [27] N. MARTIN, C.R.F. MAUNDER. "Homology cobordism bundles". . . . Topology 10 (1971) 93-110
- [28] T. MATUMOTO. "Variétés simpliciales d'homologie et variétés topologiques métrisables". Tesis Orsay 1976
- [29] C.R.F. MAUNDER Algebraic Topology. Van Nostrand Reinhold 1970
- [30] B. MAZUR. "A note on some contractible 4-manifolds". Ann. of Math. 73 (1961) 221-228
- [31] C. McCrory. "Cone complexes and pl-transversality". Ann. of Math. 207 (1975) 269-291

- [32] _____ . "Cone complexes and pl-transversality".
Warwick 1974
- [33] _____ . "A characterization of homology manifolds".
J. London Math. Soc. (2) 16 (1977) 149-159
- [34] I. MADSEN, R.J. MILGRAN. The classifying spaces for surgery
and cobordism of manifolds. Ann. of Math. Studies 92.
Princeton Univ. Press 1979
- [35] J.W. MILNOR. "A procedure for killing homotopy groups of
differentiable manifolds". Proc.Symp. Pure Math. Vol 3 (1961)
39-55
- [36] J.W. MILNOR, J. STASHEFF. Characteristic classes. Ann. of
Math. Studies 76. Princeton Univ. Press 1976
- [37] P. ORLIK. Seifert Manifolds. Lecture Notes 291. Springer-
Verlag 1972
- [38] T.M. PRICE "Compact contractible n -manifolds and their
boundaries". Michigan Math. J. 18 (1971) 331-341
- [39] C.P. ROURKE, B.J. SANDERSON. Introduction to piecewise
linear Topology. Springer-Verlag 1972
- [40] H. SATO. "Constructing manifolds by homotopy equivalence I.
An obstruction to constructing PL manifolds from homology
manifolds". Ann. Inst. Fourier 22(1972) 271-286
- [41] M. G. SCHARLEMANN. "Constructing strange manifolds with the
dodecahedral space". Duke Math. J. 43 (1) (1976) 33-40

- [42] H. SEIFERT, W. THREFFALL. Lecciones de Topología. Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemática Moderna 1951
- [43] L.C. SIEBENMANN. "Are nontriangulable manifolds triangulable?" Topology of Manifolds pp. 77-84. Markham 1970
- [44] J. STALLINGS. Notes on Polyhedral Topology. Tata Institute 1969
- [45] R.M. SWITZER. Algebraic Topology. Homotopy and Homology. Springer-Verlag 1975
- [46] R. THOM. "Quelques propriétés globales de variétés différentiables" Comment. Math. Helv. 28 (1954) 17-86
- [47] E.C. ZEEMAN. "On the dunce hat". Topology 2 (1963) 341-358

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral
D. Antonio Quintana Toscano
titulada: "Algunos aspectos de las variedades
de Homología"

acordó otorgarle la calificación de sobresaliente
"cum laude"

Sevilla, 6 de Noviembre

1982

El Vocal;

El Vocal;

El Vocal;

El Presidente;

El Secretario;

El Doctor;






El Secretario