i2372825 5

Consulta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Tesis
78

A_∞–estructuras y Perturbación Homológica

Memoria presentada por
María José Jiménez Rodríguez
para optar al grado de Doctora
por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº
del Director,

Fdo. Pedro Real Jurado

Sevilla, mayo de 2003.

Doctoral

091 35 del libro

Sevilla 6, Mayo, 2003

El Jefe del Negociado de Tesis

UNIVERSIDAD de SEVILLA

RECTORADO

Sevilla, 3 de Julio de 2003
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/CAR
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- DÁVILA DE TENA, MARÍA TERESA
- FERNÁNDEZ NIETO, ENRIQUE DOMINGO
- JIMÉNEZ RODRÍGUEZ, MARÍA JOSÉ
- LINARES BARRANCO, ALEJANDRO

LA JEFA DE SECCIÓN DE DOCTORADO

Fdo.: Yolanda Díaz Rolando.

A_∞–estructuras y Perturbación Homológica

María José Jiménez Rodríguez

Junio de 2003

a Mamá Otra

Agradecimientos

GRACIAS A TODOS los que me habéis ayudado, de una u otra forma, en la realización de este trabajo. Sin embargo, no puedo dejar de hacer algunas menciones especiales:

- Gracias Jose, sín tí habría sido imposible, como casi todo en mi vida. También gracias a tí, Pablo, por darme fuerzas.
- Pedro, gracias por tu confianza en mí y por tu fortaleza. Gracias también a Rocío y Víctor por su inestimable ayuda.
- Gracias, Tornike y Ron por vuestros consejos.
- Gracias, papá y mamá. Gracias, familia, por estar ahí.

Resumen

La filosofía general de este trabajo ha sido la de intentar acercar el problema de la computabilidad dentro del área del Álgebra Homológica hacia la búsqueda de soluciones algorítmicas viables, siempre tomando como principal herramienta algorítmica la Teoría de Perturbación Homológica.

Para ello, en una primera etapa, desarrollamos una nueva manera de representación de A_∞–(co)álgebras, a partir de contracciones: de esta forma, la estructura infinita queda determinada mediante una terna de morfismos entre una (co)álgebra y el elemento en cuestión. Se trata de una extensión del trabajo que realizara Munkholm en [Mun74], de modo que determinamos una contracción entre $\bar{\Omega}\,\tilde{B}\,M$ (resp. $\bar{B}\,\tilde{\Omega}\,M$) y el propio M. Paralelamente, iniciamos una labor de traducción de los conceptos clásicos de morfismos de A_∞–(co)álgebras, productos tensoriales de A_∞–(co)álgebras y estructuras de A_∞–álgebras de Hopf, según nuestro nuevo enfoque.

En una segunda parte, claramente diferenciada, abordamos más de cerca la computabilidad de estas estructuras, centrándonos en el caso del modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa. Primero, establecemos un marco general para la Teoría de Inversiones (cuyos precedentes se encuentran en [Rea00] y [Cha00]), a la vez que hacemos un refinamiento de la misma que permite mejorar el cómputo de la estructura diferencial del modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa. A modo de aplicación de esta teoría, establecemos que la resolución $A \otimes_t h\bar{B}A$ asociada al modelo 1-homológico de A escinde de la resolución $B(A)$ por medio de una contracción de álgebras casi–completa, de modo que para determinar cómo actúa la diferencial–derivación sobre $A \otimes_t h\bar{B}A$ sólo es necesario conocer los morfismos Δ_i de la A_∞–coálgebra $h\bar{B}A$ sobre los generadores del álgebra $h\bar{B}A$.

Posteriormente, haciendo uso de la Teoría de Inversiones desarrollada, estudiamos los aspectos computacionales de la estructura de A_∞–coálgebra $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots)$ que se genera en el modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa y en concreto, con-

seguimos una ostensible mejora computacional en el cálculo del candidato a coproducto, Δ_2.

Por último, destacamos un caso particular de DGA–álgebras conmutativas para las que esta estructura infinita que se produce en el pequeño modelo, resulta ser de hecho finita, obteniéndose un coproducto coasociativo que hace del modelo una coálgebra.

Introducción

Tal vez, a mitad de siglo, hubiera sido verdaderamente difícil encontrar relaciones de la Topología Algebraica y el Álgebra Homológica con las ciencias de la naturaleza. La respuesta habría sido que no eran más que indirectas, a través de otras teorías matemáticas en las que interviene la Topología. Los teoremas de Topología mostraban su naturaleza puramente cualitativa, es decir, afirmaban la existencia (o la no existencia) de objetos sin dar ningún medio para determinarlos explícitamente. Una muestra de lo que decimos es la aplicación de los teoremas de punto fijo de Schauder al análisis ya en 1930, probando, por ejemplo, la existencia de, al menos, una solución al problema local de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas cuasilineales.

Este panorama ha cambiado bastante en estos últimos 40 años. En 1.963, Atiyah y Singer establecen la fórmula del índice para variedades cerradas. Aplicaciones de esta fórmula las encontramos en la teoría de operadores pseudo-diferenciales sobre variedades, en problemas de valores elípticos en la frontera y en el análisis de espacios simétricos. Ahora bien, este resultado no sólo influye de manera poderosa en el Análisis, sino que también se introduce con fuerza en la teoría cuántica de campos, en la que la teoría de homotopía y de espacios fibrados juegan un papel fundamental. En estos últimos años, ha sido la Física Cohomológica la que ha tenido un auge espectacular. Conceptos como DG-álgebras, A_∞-estructuras, homotopía racional, cohomología de Rham, teoría de perturbación homológica y espacios de lazos libres aparecen fuertemente interrelacionados con nociones de Física Cuántica. Unas pocas referencias pueden servirnos para valorar el enorme impulso que han tenido estas cuestiones [Sta88, FH90, Lam92].

Vemos que esta relación de la cultura matemática con la física, está lejos de ser una mera modelización "exótica" e "intrascendente". A nuestro entender, una de las causas que han repercutido en esta impresionante progresión de la Topología Algebraica en el campo físico, viene dada por la introducción en la primera de eficientes herramientas de cálculo cohomológico. El dotar de un mayor talante "algorítmico" a teorías de perfil tan abstracto y cualitativo como son la Topología Algebraica y el Algebra Homológica, no sólo provoca "una conexión de los distintos niveles en la jerarquía de las Matemáticas"

(Wiener), sino que despierta el foco primario de interés de la Física: **la descripción cuantitativa de los fenómenos.**

Otras aplicaciones recientes de la Topología Algebraica y el Algebra Homológica a campos más prácticos, las encontramos en la Teoría Cocíclica de Matrices [deL92, deL93] (en el ámbito de la Teoría de los Códigos Correctores de Errores) y en la Topología y Geometría Digital. Todos estos desarrollos están fuertemente supeditados a la consecución de algoritmos eficientes de cálculo de invariantes algebraicos.

Dicho esto, es necesario manifestar que el problema de la computabilidad en Topología Algebraica y Algebra Homológica es un problema que, eufemísticamente, podríamos etiquetar de "delicado"(véase, por ejemplo, [Mar58], [Tan85], [LS87],[Sch91], [Ser94], [Lam92], [Rub91],[Rea94], etc.). Aparecen una significativa cantidad de problemas indecidibles, es decir, problemas para los cuales no existe un algoritmo que los resuelva. Ejemplos relevantes de esto último son la indecidibilidad del problema de las palabras [Nov55] o la indecidibilidad del problema del homeomorfismo entre dos n-variedades combinatorias compactas con $n \geq 4$ [Mar58]. Ya dentro de un contexto algorítmico, el problema de la complejidad en Álgebra Homológica no se presenta menos complicado. Veamos esto mediante un ejemplo relevante: una contracción Eilenberg-Zilber. Esta equivalencia de homotopía es una terna de morfismos (f, g, ϕ) que liga un producto álgebro-geométrico $C(X \times Y)$ con uno puramente algebraico $C(X) \otimes C(Y)$, y que nos permite expresar la homología de un producto cartesiano de conjuntos simpliciales en términos de las homologías de los factores. Estamos interesados en medir la "eficiencia" de los morfismos componentes de esta contracción a la hora de evaluarlos sobre un elemento homogéneo de grado n del correspondiente módulo diferencial graduado. Consideremos que el tamaño de la instancia sea n, tomemos como operaciones elementales los operadores de cara y de degeneración de los conjuntos simpliciales X e Y. Con estas premisas, podemos afirmar que el morfismo $f : C(X \times Y) \to C(X) \otimes C(Y)$ actúa en tiempo $O(n^2)$, y que $g : C(X) \otimes C(Y) \to C(X \times Y)$ y $\phi : C(X \times Y) \to C(X \times Y)$ dan una respuesta en tiempo $O(2^n)$. Un resultado prácticamente idéntico a éste lo conseguimos a la hora de analizar la complejidad en espacio de la evaluación de estos morfismos. Estos resultados son previsibles si precisamos que f no es más que una aproximación simplicial al operador diagonal y que g y ϕ permiten reconstituir la Geometría a partir de información puramente algebraica. Además, este comportamiento es el mismo para todas las contracciones que van de $C(X \times Y)$ a $C(X) \otimes C(Y)$. Por tanto, la dificultad que conlleva manejar los morfismos g y ϕ de una contracción Eilenberg-Zilber es esencial. Por otra parte, contracciones de tipo Eilenberg-Zilber aparecen casi por doquier en los procesos de cálculo de invariantes algebraicos, lo que plantea un panorama global bastante desalentador. La única posibilidad a la que parece abocarnos este ejemplo fundamental de cara a obtener algoritmos polinomiales de cálculo de invariantes, es el evitar (en la manera de lo posible) la naturaleza categorialmente exponencial de los morfismos g y ϕ de las distintas contracciones Eilenberg-Zilber involucradas.

Finalmente, la maquinaria que nos proveen las contracciones, en general, sugiere nuevas perspectivas y aproximaciones a problemas clásicos de Topología Algebraica y Algebra Homológica. No obstante, esta idea no es novedosa: Eilenberg y Mac Lane trabajaban ya de esta forma [EM53, EM54]. Una herramienta importante en este contexto es el de perturbación de contracciones. La Teoría de Perturbación Homológica ([GL89], [GLS91]) es una técnica sistemática y algorítmicamente eficaz para la transferencia de estructuras de un objeto a otro salvo homotopía. El elemento más importante de esta teoría de perturbación es el Lema Básico de Perturbación, que puede verse como un verdadero algoritmo que tiene como datos de entrada una contracción (f, g, ϕ) entre dos DG-módulos (N, d_N) y (M, d_M), y una perturbación $\delta : N_* \rightarrow N_{*-1}$ (es decir, cumple que $(d_N + \delta)(d_N + \delta) = 0$), y como dato de salida una nueva contracción $(f_\delta, g_\delta, \phi_\delta)$ de $(N, d_N + \delta)$ a $(M, d_M + d_\delta)$, donde los módulos graduados subyacentes no han sufrido variaciones y sólo se modifican las diferenciales y los morfismos integrantes de la contracción. Por ejemplo, el morfismo $d_\delta : M_* \rightarrow M_{*-1}$ presenta la siguiente fórmula:

$$d_\delta = f\delta g + f\delta\phi\delta g + f\delta\phi\delta\phi\delta g + \dots$$

Obsérvese que la suma del segundo término puede ser, en principio, infinita.

Volviendo al ejemplo de la contracción Eilenberg-Zilber (f, g, ϕ), si usamos como dato de perturbación un morfismo δ que actúe en tiempo polinomial al aplicarlo sobre un elemento, es obvio, a la vista de la fórmula anterior, que el cálculo de d_δ sobre un elemento muestra un enorme gasto computacional, debido a que en cada sumando (salvo el primero) de su fórmula aparece reiteradamente el operador de homotopía ϕ que actuaba en tiempo exponencial. Los efectos nocivos de este escollo computacional, deben ser minimizados para intentar conseguir algoritmos de uso práctico.

La motivación general de esta memoria no ha sido tan sólo el obtener soluciones positivas al problema de la computabilidad en ciertos aspectos de estas áreas, problema ya de por sí delicado, sino que *fundamentalmente* nuestra preocupación es la misma que Tangora [Tan85] mostraba en los años ochenta: "convertir, siempre que sea posible, soluciones algorítmicas intratables desde el punto de vista práctico, debido a la enorme complejidad que presentan, en algoritmos tratables y viables". Esta motivación la hemos enfocado al problema concreto de cálculo de A_∞–estructuras y hemos tomado como principal herramienta algorítmica la Teoría de Perturbación Homológica.

La potencia de este método algebraico de punto fijo a la hora de algoritmizar procesos en Topología Algebraica y Álgebra Homológica se ha demostrado en multitud de ocasiones (véase, por ejemplo, [LS87, Rub91, Ser94, Lam92, Lam93, Lam94, JLS02, Hue86, Hue89, Hue91, EGL97, Rea00, JLS02, GR99]). La aproximación a problemas de homotopía en términos de modelos tiene sus ventajas con respecto a la vía de las sucesiones espectrales, ya que los modelos conllevan o pueden ser dotados de estructuras adicionales interesantes de por sí y que reflejan propiedades geométricas que no pueden ser detectadas por medio sólo de sucesiones espectrales. Esta crítica se aplica por ejemplo a la aplicación diagonal: se necesita una comprensión geométrica de lo que significa para determinar estructuras multiplicativas. Esto requiere, en particular, refinar y extender los principales ingredientes de la Teoría de Perturbación Homológica, tales como el Lema Básico de Perturbación (LBP), resoluciones homológicas dotadas de estructuras multialgebraicas, etc.

El trabajo de Real [Rea00] se situa dentro de este contexto. En él se describen versiones del LBP en términos de contracciones (o SDRs) de álgebras semi-completas (las cuales presentan un grado de compatibilidad intermedio con los distintos productos envueltos) y se esbozan estrategias para reducir el cómputo homológico perturbativo (que serán el germen de la Teoría de Inversiones). En cuanto a la motivación de trabajar con contracciones de álgebras semi-completas, Real la refuerza demostrando que la mayoría de las contracciones de álgebras conocidas en el Algebra Homológica son de este tipo. Un ejemplo relevante es la contracción Eilenberg-Zilber para dos grupos simpliciales. Estas técnicas se emplean en [Cha00] y en [Alv01] con éxito para reducir los costes computacionales en tiempo y en espacio de un algoritmo que calcula, via perturbación, la estructura diferencial Δ_1 de un modelo 1-homológico pequeño para un álgebra diferencial graduada conmutativa y conexa, A. Dicho modelo 1-homológico viene representado por una contracción $\{\bar{B}(A), h\bar{B}A, f, g, \phi\}$ de álgebras semi-completa.

Este trabajo se centra en el estudio de las A_∞–estructuras desde un punto de vista algorítmico. Por A_∞-álgebra entendemos un DG-módulo (M, m_1) (i.e., $m_1 m_1 = 0$), dotado de un producto m_2 compatible con la diferencial (i.e., $m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)$); que, aunque no asociativo en el sentido estricto, sí sea asociativo *salvo homotopía* m_3: de modo que $m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1) + m_1 m_3 = m_2(m_2 \otimes 1) - m_2(1 \otimes m_2)$. Este proceso se puede generalizar, de modo que existan homotopías m_i análogas que midan la falta de asociatividad en las diversas formas de agrupar los productos de i elementos dados (nótese que el conjunto completo de formas distintas viene dado por el conjunto de árboles binarios de i hojas). Stasheff diseñó en [Sta63, Sta70] una sucesión de poliedros K_i, cuyos vértices representan cada forma de multiplicar i elementos, y cuyas aristas representan que los vértices adyacentes son homotópicos; es más, el poliedro en sí es un ciclo en Hom $(M^{\otimes i}, M)$, que es imagen de un borde, que identifica como la propia homotopía m_i. Desde entonces, ha habido muchos trabajos desarrollando apropiadamente las distintas categorías de A_∞-estructuras ([Kad80, Kad82, IM86, Kad87, Kad88, GL89, GLS91, GJ90, Mar92, Lod92, PS95, JL01, PW1, SU1, SU2, SU3, SU4]).

En esta memoria, se discute la posibilidad de algoritmizar el cálculo de la A_∞-estructura de coálgebra $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots)$ del modelo $h\bar{B}A$. La idea clásica es usar el ardid tensorial ([GLS91],[HK91]), es decir, obtener una contracción de $\tilde{\Omega}\bar{B}(A)$ en $\tilde{\Omega}(h\bar{B}A)$, a partir de la contracción (f, g, ϕ). De la estructura diferencial de la DG-álgebra $\tilde{\Omega}(h\bar{B}A)$, extraeremos los distintos morfismos Δ_i. Ahora bien, las fórmulas que nos proporciona el LBP, aparte de ser extremedamente costosas, necesitan ser evaluadas para cada generador (como módulo graduado) del modelo 1-homológico. Dado el carácter infinito de $h\bar{B}A$ como módulo graduado, esto significa que es imposible diseñar un algoritmo de cálculo para ningún Δ_i. No obstante, focalizando nuestro estudio en la computación del "coproducto" $\Delta_2 : h\bar{B}A \otimes h\bar{B}A \to h\bar{B}A$ y usando una Teoría de Inversiones refinada, se perfila un algoritmo de cálculo del mismo que reduce obstensiblemente los gastos computacionales del algoritmo banal que se deriva del LBP.

Asimismo, y de cara a considerar las A_∞-estructuras en forma de contracciones, extendemos los TEX (o contracciones) descritos por Munkholm en [Mun74] y generamos sendas contracciones de $\tilde{\Omega}\tilde{B}(M)$ a la A_∞-álgebra M y de $\bar{B}\tilde{\Omega}(M)$ a la A_∞-coálgebra M. Estas equivalencias permitirán, en particular, abrir nuevas vías de trabajo en el marco de las A_∞-estructuras al tiempo que hacen viable el describir una A_∞-álgebra de Hopf en términos de contracciones.

Por último, las conclusiones que presenta esta memoria desde un punto de vista puramente teórico, permiten aventurar que la creación de un software de cálculo homológico de DGA-álgebras conmutativas se presenta como un proyecto del todo viable.

Contenido

Capítulo 1.

Preliminares

Capítulo 1.

Preliminares

A lo largo de este apartado vamos a recopilar definiciones y resultados propios del Álgebra Homológica. Textos básicos de referencia para los primeros resultados son [CE56], [Mac95] y [Wei94].

Comencemos aclarando determinadas notaciones que usaremos en este trabajo.

Tomaremos como anillo base un anillo conmutativo con elemento unidad no nulo, Λ.

Un Λ-*módulo* (a izquierda) es un grupo abeliano aditivo, junto con una aplicación $p : \Lambda \times M \to M$ con $p(\lambda, m) = \lambda m$, tal que

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda')m = \lambda m + \lambda' m; &\quad (\lambda\lambda')m = \lambda(\lambda' m); \\ \lambda(m + m') = \lambda m + \lambda m'; &\quad 1m = m; \end{aligned}$$

con λ, $\lambda' \in \Lambda$ y m, $m' \in M$. Análogamente se define Λ-*módulo* a derecha. A partir de ahora hablaremos, simplemente, de Λ-módulos, sin especificar si son a izquierda o a derecha.

El morfismo identidad de un módulo M lo denotamos simplemente por 1, siempre que no dé lugar a confusión, en cuyo caso lo denotaremos por 1_M.

Denotaremos la composición de dos morfismos, f y g, simplemente por fg. De la misma forma, la composición de $f \overset{n}{\cdots} f$ se denota por f^n.

Un *álgebra* A es un módulo dotado de un producto asociativo $\mu : A \otimes A \to A$ con unidad bilateral $\eta : \Lambda \to A$, que se conoce como *coaumentación.* Análogamente, una *coálgebra* C es un módulo dotado de un coproducto asociativo $\Delta : C \to C \otimes C$ con counidad bilateral $\xi : C \to \Lambda$, que también se llama *aumentación*.

Un *módulo graduado* es un módulo, M, que admite una representación como suma directa, con índices en los enteros (no negativos, si no se expresa lo contrario), de una familia de submódulos suyos, $\{M_n\}_{n\in\mathbf{z}}$; esto es:

$$\bigoplus_{n\in\mathbf{z}} M_n = M.$$

Un elemento x de M se dice *homogéneo de grado* n cuando $x \in M_n$; en tal caso, escribiremos $|x| = n$.

Un módulo graduado M se dice *conexo* cuando $M_0 = \Lambda$; se dice *simplemente conexo* cuando es conexo y M_1=0. En este caso, el módulo graduado $\bar{M}$, se definirá como $\bar{M}_n = M_n$ para $n > 1$ y $\bar{M}_0 = 0$.

Un *morfismo de módulos graduados* de grado p (lo cual se denota por $|f| = p$) es un morfismo $f : M \to N$ entre módulos graduados de modo que $f(M_n) \subseteq N_{n+p}$, para $n \geq 0$.

Dados M y N módulos graduados, $M \otimes N$ adquiere estructura de módulo graduado con

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Obviamente, se tienen las identificaciones canónicas:

$$M \otimes \Lambda \cong M, \qquad \text{y} \qquad \Lambda \otimes M \cong M.$$

Denotaremos el módulo $M \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes M$ mediante $M^{\otimes n}$, conviniendo que $M^{\otimes 0} = \Lambda$. Análogamente, denotaremos mediante $f^{\otimes n}$, el morfismo

$$f \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes f : M^{\otimes n} \to N^{\otimes n}.$$

Respetaremos la *convención de Koszul* en cuanto a signos. En concreto, si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son dos morfismos de módulos graduados, su producto

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

satisface

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

Y más concretamente,

$$(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|}(fh \otimes gk).$$

Por otro lado, si $f : M^i \to M$ es un morfismo de módulos graduados y n es un entero positivo, notamos por $f^{[n]}$ al morfismo

$$f^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-i} 1^{\otimes j} \otimes f \otimes 1^{\otimes n-i-j}, \tag{1.1}$$

Más generalmente, se define el morfismo $f^{[]} : \bigoplus_{j \geq i} M^{\otimes j} \to \bigoplus_{k \geq 1} M^{\otimes k}$ como aquél que en grado n coincide con $f^{[n]}$:

$$f^{[]}|_{M_n} = f^{[n]}. \tag{1.2}$$

Dado un módulo graduado, M, y un morfismo de módulos graduados $d : M \to M$, se dice que d es una *diferencial* cuando $|d| = -1$ y $dd = 0$. M se denomina entonces, *DG-módulo* y se nota por (M, d). Escribimos d_n para $d|_{M_n}$.

Se dice que un morfismo $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ de módulos graduados de grado p es un *morfismo de DG-módulos* de grado p cuando se verifica que $d_N f = (-1)^p f d_M$.

La nilpotencia de orden 2 en la diferencial equivale al hecho de que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$ para $n \geq 1$, lo que permite definir el concepto de *homología*. La homología de un DG–módulo M se define como el módulo graduado $H_*(M)$, donde $H_n(M) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$.

Si (M, d_M) es un DG-módulo, se define la *suspensión* de M como el módulo diferencial graduado (sM, d_{sM}), donde $(sM)_n = M_{n-1}$ y $d_{sM} = -d_M$. Análogamente se define la *desuspensión* de M dada por $(s^{-1}M)_n = M_{n+1}$ y diferencial también $-d_M$. Denotaremos por $\uparrow$ y $\downarrow$ las aplicaciones suspensión y desuspensión que varían el grado en $+1$ y -1, respectivamente. Dado un morfismo de módulos graduados $f : M \to N$, de grado k, induce otro $sf : sM \to sN$, dado por $sf = (-1)^k \uparrow f \downarrow$. De hecho, $d_{sM} = s(d_M) = -\uparrow d_M \downarrow$. Análogamente ocurre para la desuspensión.

Sea M un DG-módulo. Una *aumentación* (resp., *coaumentación*), es un morfismo de DG-módulos de grado cero:

$$\xi_M : M \longrightarrow \Lambda$$

$$(\text{resp., } \eta_M : \Lambda \longrightarrow M).$$

En el caso de coálgebras y álgebras, coincidirán con la counidad y unidad, respectivamente, de ahí la notación escogida.

Un *DGA-módulo* (M, d, ξ, η) es un DG-módulo (M, d) dotado de una aumentación ξ y de una coaumentación η, de modo que $\xi\eta = 1$. Se dice *conexo* si como módulo graduado es conexo y su aumentación y coaumentación son ambas la identidad del anillo base Λ.

Dados dos DGA-módulos M y N, el *DGA-módulo producto tensorial*, $M \otimes N$, queda establecido por los datos:

$$d_{M\otimes N} = d_M \otimes 1_N + 1_M \otimes d_N,$$

$$\xi_{M\otimes N} = \xi_M \otimes \xi_N,$$

$$\eta_{M\otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N.$$

Sean M y N dos DGA-módulos. Se dice que un morfismo de DG-módulos $f : M \to N$ es un *morfismo de DGA-módulos* cuando se verifican las identidades:

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f\eta_M = \eta_N.$$

Destacamos el morfismo de DGA-módulos que intercambia las componentes de un producto tensorial,

$$T : M \otimes N \to N \otimes M,$$

dado por $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$. En particular, dados dos morfismos $f : M \longrightarrow M$ y $g : N \longrightarrow N$ se tiene que

$$T(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|}(g \otimes f)T. \tag{1.3}$$

Una *DGA-álgebra* (A, μ) (resp., *DGA-coálgebra* (C, Δ)), es un DGA-módulo A (resp., C), al que $\mu : A \otimes A \to A$ (resp., $\Delta : C \to C \otimes C$) dota de estructura de álgebra (resp., coálgebra).

Se dice que es *conmutativa* cuando $\mu T = \mu$ (resp., *coconmutativa* cuando $T\Delta = \Delta$).

En determinadas ocasiones, notaremos el producto μ de un álgebra A como $*_A$, y por tanto, se usará $a *_A b$ para indicar $\mu(a \otimes b)$.

Sean C una DGA-coálgebra y A una DGA-álgebra. Se denomina *cocadena de torsión* (ó, también, *cocadena de Brown*), a un morfismo de módulos graduados $t : C \to A$ de grado -1 de modo que:

$$d_A t + t d_C + t \cup t = 0, \quad \xi_A t = 0, \quad t\eta_C = 0;$$

donde $t \cup t = \pm\mu_A(t \otimes t)\Delta_C$, con el signo a precisar ahora.

Sean M un DGA-módulo a derecha sobre una DGA-álgebra A y N un DGA-comódulo a izquierda sobre una DGA-coálgebra C, y sea $t : C \to A$ una cocadena de torsión. Se define:

$$d_t : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

por

$$d_t(x \otimes y) = d(x \otimes y) + t \cap x \otimes y,$$

donde

$$t \cap x \otimes y = (\mu_M \otimes 1_N)(1_M \otimes t \otimes 1_N)(1_M \otimes \Delta_N)(x \otimes y).$$

Entonces, d_t es una diferencial y $M \otimes N$ dotado de esta diferencial y de la aumentación y coaumentación definidas para el producto tensorial es un DGA-módulo, $M \otimes_t N$, *producto tensorial torcido por la cocadena* t.

También podría haberse tomado M DGA-módulo a izquierda de A y N DGA-comódulo a derecha de C, de modo que aparece la diferencial $d_t = 1 \otimes d + d \otimes 1 + t\cap$ sobre $N \otimes M$, con

$$t\cap = (1_N \otimes \mu_M)(1_N \otimes t \otimes 1_M)(\Delta_N \otimes 1_M).$$

En la demostración de que estas aplicaciones d_t constituyen sendas diferenciales, se utilizan propiedades de compatibilidad entre las aplicaciones

$$\cap : \text{ Hom } (C, A) \otimes \text{ Hom } (C, A) \to \text{ Hom } (C, A)$$

y

$$\cup : \text{ Hom } (C, A) \otimes P \otimes Q \to P \otimes Q,$$

con $(P, Q) \in \{(M, N), (N, M)\}$, dependiendo del caso.

Sean (A, μ) una DGA-álgebra (resp., (C, Δ) una DGA-coálgebra), y $\delta : A \to A$ (resp., $\delta : C \to C$) un morfismo de módulos graduados de grado -1. Se dice que el morfismo δ es una *derivación* (resp., una *coderivación*), cuando verifica las condiciones siguientes:

$$\delta\mu = \mu(1\otimes\delta + \delta\otimes 1), \qquad \xi\delta = 0 \tag{1.4}$$

$$(\text{resp.,} \quad \Delta\delta = (1\otimes\delta+\delta\otimes 1)\Delta, \qquad \xi\delta = 0). \tag{1.5}$$

Describimos a continuación varios tipos de DGA-álgebras conmutativas que utilizaremos con posterioridad a lo largo de esta memoria. Todas ellas serán conexas y con diferencial trivial.

- La *DGA-álgebra polinomial* $P(v, 2n)$, generada por v en grado $2n$, donde n es un entero positivo. La aumentación y la coaumentación coinciden con la identidad en el anillo base; el producto viene dado por el usual en los polinomios, i.e., $v^i v^j = v^{i+j}$.

- La *DGA-álgebra exterior* $E(u, 2n+1)$, $n \geq 0$, que consiste en la DGA-álgebra libre con generadores 1 y u; con u de grado $2n+1$, $u^2 = 0$. La aumentación y la coaumentación vienen dadas por la identidad en el anillo base.

- La *DGA-álgebra de potencias divididas* $\Gamma(w, 2n)$, $n \geq 1$, que es la DGA-álgebra libre con generadores

  $$\gamma_0(w) = 1, \gamma_1(w) = w, \gamma_2(w), \ldots, \gamma_k(w), \ldots, \qquad \text{con} \quad |\gamma_1(w)| = 2n.$$

  El producto viene definido por la expresión:

  $$\gamma_k(w)\gamma_h(w) = \frac{(k+h)!}{k!\,h!}\gamma_{k+h}(w);$$

  el elemento $\gamma_1(w) = w$ se conoce como el generador del álgebra de potencias divididas. La aumentación y la coaumentación son la identidad en el anillo base.

Una *DGA-álgebra de Hopf* es un DGA-módulo que es a su vez, álgebra y coálgebra, siendo ambas estructuras compatibles en el sentido de que

$$\Delta\mu = (\mu\otimes\mu)(1\otimes T\otimes 1)(\Delta\otimes\Delta). \tag{1.6}$$

Así, por ejemplo, en el caso de la DGA-álgebra exterior, el morfismo

$$\Delta_E : E(u, 2n+1) \longrightarrow E(u, 2n+1)\otimes E(u, 2n+1)$$

definido por

$$\Delta_E(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u,$$

convierte a $E(u, 2n+1)$ en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa. Así mismo, para la DGA-álgebra de potencias divididas, el morfismo

$$\Delta_\Gamma : \Gamma(w, 2n) \longrightarrow \Gamma(w, 2n) \otimes \Gamma(w, 2n),$$

definido por

$$\Delta_\Gamma(\gamma_k(w)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(w) \otimes \gamma_j(w),$$

dota a $\Gamma(w, 2n)$ también de estructura de DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

Consideremos ahora dos DGA-álgebras (resp. DGA-coálgebras) dadas. Se dice que $f : (A, \mu_A) \to (A', \mu_{A'})$ constituye un *morfismo de DGA-álgebras* (resp., $f : (C, \Delta_C) \to (C', \Delta_{C'})$ *morfismo de DGA-coálgebras*), cuando se trata de un morfismo de DGA-módulos verificando:

$$\mu_{A'}(f \otimes f) = f\mu_A \qquad (\text{resp.,} \quad (f \otimes f)\Delta_C = \Delta_{C'} f).$$

Sean (A, μ_A) y $(A', \mu_{A'})$ dos DGA-álgebras (resp., (C, Δ_C) y $(C', \Delta_{C'})$ dos DGA-coálgebras). Queda definida la DGA-álgebra producto tensorial $A \otimes A'$ (resp., la DGA-coálgebra producto tensorial $C \otimes C'$), añadiendo a la estructura de DGA-módulo del producto tensorial de ambas, el morfismo de grado cero siguiente:

$$\mu_{A \otimes A'} = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes T \otimes 1_{A'})$$

$$(\text{resp.,} \quad \Delta_{C \otimes C'} = (1_C \otimes T \otimes 1_{C'})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'})).$$

Dado un DG-módulo graduado (M, d), podemos construir el DGA-módulo tensorial de M, que se nota $T(M)$, de la siguiente manera:

$$T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes n}.$$

Un elemento del tipo $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ se dice homogéneo cuando cada a_i es un elemento homogéneo de M. La *graduación tensorial de* $T(M)$, $|\ |_t$, viene dada por la expresión:

$$|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n|_t = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

La estructura diferencial de $T(M)$ viene dada por la *diferencial tensorial*, $d_t : T(M) \to T(M)$, que actúa sobre elementos homogéneos, según el morfismo $d^{[]}$ definido en (1.2) en la página 3, que al aplicarlo a un elemento de longitud n, es

$$(d_t)_n(a_1 \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|_t} a_1 \otimes \cdots \otimes d(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n,$$

siguiendo la convención de Koszul.

La aumentación $\xi_{T(M)}$ y la coaumentación $\eta_{T(M)}$ son, respectivamente, la "proyección a" e "inclusión de" $M^{\otimes 0} = \Lambda$; así, abusando del lenguaje, se puede decir que ambos morfismos coinciden con 1_Λ.

Sobre $T(M)$ se puede definir un producto, μ, y un coproducto, Δ:

- El producto actúa por yuxtaposición sobre elementos homogéneos y se extiende por linealidad:

$$\mu((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+p}.$$

- El coproducto viene dado por la expresión:

$$\Delta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

El producto y el coproducto son ambos morfismos de DGA-módulos asociativos y admiten por unidad a η y por counidad a ξ, respectivamente; por lo que tenemos definidas en $T(M)$ sendas estructuras de DGA-álgebra y DGA-coálgebra, que no son compatibles en el sentido de Hopf. Por tanto, escribiremos $T^a(M)$ cuando consideremos el módulo tensorial como DGA-álgebra; y escribiremos $T^c(M)$ cuando lo consideremos como DGA-coálgebra.

Todo morfismo de DG-módulos $f : M \to N$ induce un morfismo de DGA-módulos $T(f) : T(M) \to T(N)$, que actúa sobre elementos homogéneos de la forma obvia:

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Dada una DGA-álgebra A, se puede construir una DGA-coálgebra concreta asociada a A, denominada *construcción bar normalizada* de A y que notaremos por $\bar{B}(A)$.

La homología natural de una DGA-álgebra considerada como DG-módulo (o 0-*homología* de A), no utiliza la estructura multiplicativa subyacente. En cambio, el producto de A intervendrá de forma explícita en la diferencial propia de $\bar{B}(A)$ y por tanto en la 1-*homología* de A, que se define como la homología propia de la construcción bar asociada.

La construcción bar (normalizada) de A, $\bar{B}(A)$, se define como la DGA-coálgebra que tiene como módulo subyacente el módulo tensorial

$$T(s(Ker\,\xi_A)) = \bigoplus_{n\geq 0}(s(Ker\,\xi_A)\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes s(Ker\,\xi_A)).$$

Un elemento típico de $\bar{B}(A)$ lo escribiremos de la forma $\bar{a} = [a_1|\cdots|a_n]$. Un tal elemento se dice homogéneo cuando a_i es un elemento homogéneo de A, para todo $1 \leq i \leq n$. Notaremos $[\ ] = 1 \in \Lambda$. Nótese que el grado de $\bar{a}$ vendrá dado por $|\bar{a}|_{\bar{B}} = |a_1| + \cdots + |a_n| + n$.

La diferencial total $d_{\bar{B}}$ viene dada por la suma de la diferencial tensorial, d_t y la diferencial simplicial, d_s que, restringidas a $T^n(s(Ker\,\xi_A))$, tienen las siguientes formulaciones:

$$\begin{aligned} d_t &= -\sum_{i=0}^{n-1} 1^{\otimes i}\otimes \uparrow d_A \downarrow \otimes 1^{\otimes n-i-1}; \\ d_s &= \sum_{i=0}^{n-2} 1^{\otimes i}\otimes \uparrow \mu_A \downarrow^{\otimes 2} \otimes 1^{\otimes n-i-2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

El coproducto $\Delta_{\bar{B}} : \bar{B}(A) \to \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$ es el natural del módulo tensorial, dado por

$$\Delta_{\bar{B}}([a_1|\cdots|a_n]) = \sum_{i=0}^{n}[a_1|\cdots|a_i] \otimes [a_{i+1}|\cdots|a_n]. \tag{1.8}$$

En el caso de que A sea conmutativa, $\bar{B}(A)$ adquiere la estructura adicional de DGA-álgebra y como consecuencia, también, de DGA-álgebra de Hopf. Ésto ocurre gracias al *producto shuffle*, $\star : \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \to \bar{B}(A)$, que suma, salvo signo, todas las posibles mezclas de dos listas dadas conservando el orden interno de cada una.

Dados dos enteros $p, q \geq 0$, un (p,q)*-shuffle* se define como una permutación π del conjunto $\{0, 1, \ldots, p+q-1\}$ tal que $\pi(i) < \pi(j)$ siempre que $0 \leq i < j \leq p-1$ o $p \leq i < j \leq p+q-1$.

Observemos que hay $\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$ (p,q)–shuffles distintos.

Así, el *producto shuffle* $\star : \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \longrightarrow \bar{B}(A)$, se define por:

$$[a_1|\cdots|a_p] \star [b_1|\cdots|b_q] = \sum_{\pi \in \{(p,q)-shuffles\}} (-1)^{\varepsilon(\pi,a,b)}[c_{\pi(0)}|\cdots|c_{\pi(p-1)}|c_{\pi(p)}|\cdots|c_{\pi(p+q-1)}];$$

donde $(c_0, \ldots, c_{p-1}, c_p, \ldots, c_{p+q-1}) = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots b_q)$ y el exponente es

$$\varepsilon(\pi, a, b) = \sum_{\pi(i)>\pi(p+j)} |a_i|_{\bar{B}}|b_j|_{\bar{B}}.$$

Sea n un entero no negativo, la *n–homología* de una DGA–álgebra conmutativa, A (véase [Mac95]) consiste en el grupo de homología de la construcción bar iterada $\bar{B}^n(A) = \bar{B}(\bar{B}^{n-1}(A))$, siendo $\bar{B}^0(A) = A$.

Dada una DGA-coálgebra C, se define una construcción dual a la bar, la *construcción cobar*, $\bar{\Omega}(C)$, que es una DGA-álgebra.

La construcción cobar normalizada de C, tiene como módulo subyacente el módulo tensorial

$$T(s^{-1}(Coker\,\eta_C)) = \bigoplus_{n\geq 0}(s^{-1}(Coker\,\eta_C)\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes s^{-1}(Coker\,\eta_C)).$$

Un elemento típico de $\bar{\Omega}(C)$ lo escribiremos de la forma $\bar{c} = \langle c_1|\cdots|c_n\rangle$ y $\langle\ \rangle = 1 \in \Lambda$. El grado total de $\bar{c}$ será $|\bar{c}|_{\bar{\Omega}} = |c_1| + \cdots |c_n| - n$.

La diferencial total $d_{\bar{\Omega}}$ viene dada por la suma de la diferencial tensorial y la *diferencial cosimplicial*:

$$d_{cos} = \sum_{i=0}^{n-2} 1^{\otimes i} \otimes \downarrow^{\otimes 2} \Delta_C \uparrow \otimes 1^{\otimes n-i-1}. \tag{1.9}$$

El producto $\mu_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega}(C) \otimes \bar{\Omega}(C) \to \bar{\Omega}(C)$ es el natural del módulo tensorial,

$$\mu_{\bar{\Omega}}(\langle a_1|\cdots|a_n\rangle \otimes \langle a_{n+1}|\cdots|a_{n+p}\rangle) = \langle a_1|\cdots|a_n|a_{n+1}|\cdots|a_{n+p}\rangle. \tag{1.10}$$

Damos ahora un breve repaso a los conceptos que utilizaremos en el contexto de la Teoría de Perturbación Homológica. El objeto principal dentro de esta teoría lo constituyen las *contracciones* entre DG-módulos. Éstas nos permitirán conectar un DG-módulo "mayor" con otro "menor" (en el sentido de menor número de generadores en cada grado) de manera que la homología de ambos coincide.

Una *contracción* $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ [EM53, HK91], también denotada por $(f, g, \phi) : N \overset{c}{\Rrightarrow} M$, de un DG–módulo (N, d_N) a un DG–módulo (M, d_M) consiste en una particular equivalencia de homotopía determinada por tres morfismos f, g y ϕ; siendo $f : N_* \to M_*$ (proyección) y $g : M_* \to N_*$ (inclusión) dos morfismos de DG–módulos y $\phi : N_* \to N_{*+1}$ un operador de homotopía. Así, además de satisfacer

$$(c1)\ fg = 1_M\,, \quad (c2)\ \phi d_N + d_N\phi + gf = 1_N\,,$$

se han de verificar las igualdades

$$(c3)\ f\phi = 0\,, \quad (c4)\ \phi g = 0\,, \qquad (c5)\ \phi\phi = 0\,.$$

Dado un DGA-módulo (M, d, ξ, η), se llama *contracción sobre* M a todo endomorfismo ϕ de grado 1 del módulo graduado subyacente M tal que (ξ, η, ϕ) sea una contracción entre los DGA-módulos M y Λ.

Así, un DGA-módulo M se dice que es *acíclico* si existe una contracción sobre M.

Exponemos a continuación varios ejemplos simples de contracciones:

- La *contracción trivial* de un DGA-módulo N, a saber:

$$1_N : \{N,\ N,\ 1_N,\ 1_N,\ 0\}.$$

- La *isocontracción*, contracción que proviene de un isomorfismo de DGA-módulos dado, $f : N \to M$:

$$c_f : \{N,\ M,\ f,\ f^{-1},\ 0\}.$$

Veamos algunas "operaciones" que podemos realizar con contracciones y que dan lugar a nuevas contracciones. Dadas dos contracciones de DG-módulos

$$c_i : \{N_i,\ M_i,\ f_i,\ g_i,\ \phi_i\} \quad i = 1, 2,$$

se pueden construir las siguientes contracciones [GL89, GLS91]:

1. La contracción $\bar{c}_1 : \{\mathrm{Ker}\xi_{N_1}, \mathrm{Ker}\xi_{M_1}, f_1, g_1, \phi_1\}$; donde, abusando de la notación, f_1, g_1 y ϕ_1 representan las restricciones de los morfismos correspondientes.

2. La contracción suspensión de c_1, $s(c_1)$, que consiste en tomar los DGA-módulos suspensión de los dados y los morfismos inducidos entre ellos:

$$s(c_1) : \{s(N_1),\ s(M_1),\ s(f_1),\ s(g_1),\ s(\phi_1)\},$$

siendo, respectivamente, $s(f_1)$ y $s(g_1)$ los morfismos $\uparrow f_1 \downarrow$ y $\uparrow g_1 \downarrow$ y $s(\phi_1) = -\uparrow \phi_1 \downarrow$, aunque, por abuso de lenguaje los denotaremos, simplemente, por f_1, g_1 y $-\phi$.

3. La contracción módulo tensorial, $T(c_1)$, obtenida al considerar los módulos tensoriales de M_1 y N_1 y los morfismos inducidos por f_1 y g_1:

$$T(c_1) : \{T(N_1), T(M_1), T(f_1), T(g_1), T(\phi_1)\};$$

viniendo el operador de homotopía definido por la expresión:

$$T(\phi_1)|_{T^n(N_1)} = \phi_1^{[\otimes n]} = \sum_{i=0}^{n-1} 1^{\otimes i} \otimes \phi_1 \otimes (g_1 f_1)^{\otimes n-i-1}.$$

4. La *contracción producto tensorial*:

$$c_1 \otimes c_2 : \{N_1 \otimes N_2,\ M_1 \otimes M_2, f_1 \otimes f_2,\ g_1 \otimes g_2,\ \phi_1 \otimes g_2 f_2 + 1_N \otimes \phi_2\}.$$

Un caso particular de contracción de este tipo resulta ser:

$$c_1^{\otimes n} : \{N_1^{\otimes n}, M_1^{\otimes n}, f_1^{\otimes n}, g_1^{\otimes n}, \phi_1^{[\otimes n]}\}.$$

5. En el caso en que $N_2 = M_1$, la *contracción composición de ambas*, dada por:

$$c_2 \circ c_1 : \{N_1,\ M_2,\ f_2 f_1,\ g_1 g_2,\ \phi_1 + g_1 \phi_2 f_1\}.$$

En el caso de las contracciones entre DGA-álgebras, nos interesarán aquéllas en las que se preserven las estructuras multiplicativas, por lo que habrá unos tipos de contracciones más "convenientes" (en este sentido) que otros. Veamos cuáles son estos tipos según la clasificación que puede hacerse atendiendo al grado de compatibilidad de los morfismos con las estructuras multiplicativas.

Sean A y A' dos DGA-álgebras (resp., dos DGA-coálgebras) y $c : \{A, A', f, g, \phi\}$, una contracción de DGA-módulos. Se dice que el morfismo ϕ es una *homotopía de álgebras* [GL89] (resp., *homotopía de coálgebras*), cuando verifica la identidad siguiente:

$$\phi\mu_A = \mu_A\phi^{[\otimes 2]} \quad (\text{resp., } \Delta_A\phi = \phi^{[\otimes 2]}\Delta_A),$$

donde recordamos que $\phi^{[\otimes 2]} = 1 \otimes \phi + \phi \otimes gf$.

Sean A y A' dos DGA-álgebras y $c : \{A, A', f, g, \phi\}$ una contracción. En [Rea00] encontramos las siguientes definiciones.

La proyección f es una *casi-proyección de álgebras* si se dan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ f\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ f\mu_A(g \otimes \phi) &= 0; \end{aligned}$$

El operador de homotopía ϕ es una *casi-homotopía de álgebras* si se dan las condiciones:

$$\begin{aligned} \phi\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ \phi\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ \phi\mu_A(g \otimes \phi) &= 0. \end{aligned}$$

Se dice que c es

- una contracción de álgebras *semicompleta*, si f es una casi-proyección de álgebras, g es un morfismo de DGA-álgebras y ϕ es una casi-homotopía de álgebras.
- una contracción de álgebras *casicompleta* si f y g son morfismos de DGA-álgebras y ϕ es una casi-homotopía de álgebras.
- una contracción de álgebras *completa* si f y g son morfismos de DGA-álgebras y ϕ es una homotopía de álgebras.

Obviamente, las contracciones de álgebras completas y casicompletas son, en particular, semicompletas. Los conjuntos de contracciones de álgebras semicompletas y casicompletas son cerrados por composición y producto tensorial de contracciones.

El otro concepto clave dentro de la Teoría de Perturbación Homológica, aparte del de contracción es el de perturbación. En concreto, el Lema Básico de Perturbación constituye el centro de esta teoría. Mediante este algoritmo, tomando como entrada una contracción de DG-módulos y una perturbación, se obtiene una nueva contracción. Una mayor información sobre la Teoría de Perturbación Homológica puede ser encontrada en [Shi62, Bro67, GS86, LS87, GL89, GLS91, Hue89a, HK91, Rea00],...

Sean N un DG–módulo y $f : N \to N$ un morfismo de módulos graduados. Se dice que f es un morfismo *puntualmente nilpotente* cuando para todo elemento no nulo $x \in N$ existe un entero positivo n (dependiendo de x, en general), de modo que $f^n(x) = 0$.

Una *perturbación* de un DGA-módulo N consiste en un morfismo de módulos graduados $\delta : N \to N$ de grado -1, de modo que $(d_N + \delta)^2 = 0$ y $\xi_N \delta = 0$.

Dada una contracción entre DGA-módulos, $c : \{N, M, f, g, \phi\}$, una *perturbación de* c o *dato de perturbación* es una perturbación δ del DGA-módulo N que verifica que la composición $\phi\,\delta$ es puntualmente nilpotente. Se denomina *perturbación de álgebras* si, además de ser un dato de perturbación, N y M son DGA-álgebras y δ es una derivación.

Lema Básico de Perturbación [Bro59][Gug72][LS87].

Dados dos DGA-módulos (M, d_M, ξ_M, η_M), (N, d_N, ξ_N, η_N)*; una contracción entre ellos,* $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ *y un dato de perturbación para dicha contracción,* $\delta : N \to N$*, existe una nueva contracción,*

$$c_\delta : \{(N, d_N + \delta, \xi_N, \eta_N),\ (M, d_M + d_\delta, \xi_M, \eta_M),\ \ f_\delta,\ g_\delta,\ \phi_\delta\},$$

definida por:

$$\begin{aligned} d_\delta &= f\,\delta\,\Sigma_c^\delta\, g, && (1.11)\\ f_\delta &= f\,(1 - \delta\,\Sigma_c^\delta\,\phi), && (1.12)\\ g_\delta &= \Sigma_c^\delta\, g, && (1.13)\\ \phi_\delta &= \Sigma_c^\delta\,\phi; && (1.14) \end{aligned}$$

con $\Sigma_c^\delta = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\,(\phi\,\delta)^i = 1 - \phi\,\delta + \phi\,\delta\,\phi\,\delta - \cdots + (-1)^i(\phi\,\delta)^i + \cdots.$

Es evidente que, debido a la nilpotencia puntual de $\phi\delta$, la suma $\Sigma_c^\delta(x)$ es finita, para cada $x \in N$. Además, el morfismo d_δ constituye una perturbación del DGA-módulo (M, d_M, ξ_M, η_M).

En [GLS91] y [HK91] se demuestra que, dadas una contracción de álgebras completa c y una perturbación de álgebras δ de c, la contracción perturbada c_δ es una contracción de álgebras completa. En [Rea00], se prueba asimismo que la semicompletitud en contracciones de álgebras es una "propiedad hereditaria" por perturbación homológica. Ahora bien, toda perturbación de una contracción de álgebras casicompleta o semicompleta es, en el peor caso, una nueva contracción de álgebras semicompleta.

Así pues, las contracciones de álgebras semicompletas se preservan tanto por perturbación como por composición y por producto tensorial. Además, se tiene que en una contracción de DGA-álgebras semicompleta, A, A', f, g, ϕ, el producto en A se transfiere adecuadamente hacia A', de manera que $\mu_{A'} = f\mu_A g$. Más aún, si se perturba una tal contracción según un dato de perturbación de álgebras, en la contracción semicompleta resultante, las nuevas diferenciales tanto en A como en A' constituyen sendas derivaciones.

Es un hecho conocido que toda DGA-álgebra conmutativa, A, con anillo base un cuerpo, admite un casi-isomorfismo (isomorfismo en homología) a un *producto tensorial torcido* (o PTT) de álgebras exteriores y polinomiales $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I} A_i$, es decir, un producto tensorial de tales álgebras, cuya estructura diferencial está enriquecida con una diferencial–derivación, ρ. En [Alv01] encontramos una demostración de dicho resultado válida para cualquier anillo base, no necesariamente cuerpo. Existe, además, un resultado en [EM53, Mac95] que permite calcular la 1-homología de un álgebra A a partir de la 1-homología de cualquier álgebra A' casi-isomorfa a A. Nosotros, en concreto reduciremos el cálculo de la 1-homología de una DGA-álgebra conmutativa a la 1-homología de un PTT de álgebras exteriores y polinomiales.

Así, a lo largo de nuestro trabajo siempre supondremos cualquier DGA-álgebra conmutativa en su forma "factorizada" $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I} A_i$, con $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ y tal que, si x_i es el generador de A_i, $|x_i| \leq |x_{i+1}|$. Nótese que, de esta forma, fijamos un orden en las n álgebras que componen la factorización. En caso de que usemos la notación $A \otimes A'$, identificaremos $A = \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ y $A' = A_n$.

Un *modelo 1-homológico* de una DGA-álgebra conmutativa A consiste en el establecimiento de una cadena de *contracciones de álgebras semi-completas* empezando en la construcción bar de A, $\bar{B}(A)$, y terminando en una DGA-álgebra que es libre y de tipo finito como módulo graduado. Recordamos brevemente los pasos del algoritmo [AARS97, AAGR98, Sil98] de cálculo para obtener dicho modelo. Tomando como dato de entrada un tal producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, mediante tensorizaciones y perturbaciones convenientes de las contracciones que para estos objetos consideramos a continuación, devuelve como salida un modelo homológico, adecuado para el cálculo de la homología del álgebra de partida.

Son tres las contracciones de álgebra casi-completas y, por tanto, semi-completas, que intervienen en el proceso de construcción del modelo 1–homológico:

- La contracción definida en [EM54] de $\bar{B}(A\otimes A')$ en $\bar{B}(A)\otimes\bar{B}(A')$, donde A y A' son dos DGA-álgebras conmutativas;

$$c_{\bar{B}\otimes} : \{\bar{B}(A\otimes A'), \bar{B}(A)\otimes\bar{B}(A'), f_{\bar{B}\otimes}, g_{\bar{B}\otimes}, \phi_{\bar{B}\otimes}\}\,;$$

  - $f_{\bar{B}\otimes}[a_1\otimes a'_1|\cdots|a_n\otimes a'_n]$

$$=\sum_{i=0}^{n}\xi_A(a_{i+1}\cdots a_n)\xi_{A'}(a'_1\cdots a'_i)[a_1|\cdots|a_i]\otimes[a'_{i+1}|\cdots|a'_n]\,,$$

    donde, para $i=0$, $[a_1|\cdots|a_i]=1\in\bar{B}(A)$ y para $i=n$, $[a'_{i+1}|\cdots|a'_n]=1\in\bar{B}(A')$.

  - Teniendo en cuenta la identificación canónica de $\bar{B}(A)$ y de $\bar{B}(A')$ como subálgebras de $\bar{B}(A\otimes A')$, mediante las identidades:

$$[a_1|\cdots|a_n]\in\bar{B}(A)\,,\quad [a_1|\cdots|a_n]=[a_1\otimes 1|\cdots|a_n\otimes 1]\in\bar{B}(A\otimes A')\,;$$

$$[a'_1|\cdots|a'_m]\in\bar{B}(A')\,,\quad [a'_1|\cdots|a'_n]=[1\otimes a'_1|\cdots|1\otimes a'_n]\in\bar{B}(A\otimes A')\,,$$

    $g_{\bar{B}\otimes}$ queda definida por la fórmula:

$$g_{\bar{B}\otimes}([a_1|\cdots|a_n]\otimes[a'_1|\cdots|a'_m]) \;=\; [a_1|\cdots|a_n]\star[a'_1|\cdots|a'_m]\,, \tag{1.15}$$

  - El operador de homotopía viene dado por la composición

$$\phi_{\bar{B}\otimes}=\lambda^{-1}SHI\lambda,$$

    donde el isomorfismo de DG-módulos λ actúa de la siguiente forma:

$$\lambda\,:\,\bar{B}(A\otimes A')\to\bar{B}(A)\times\bar{B}(A'),$$

$$\lambda([a_1\otimes a'_1|\cdots|a_n\otimes a'_n]=(-1)^{\sum_{j>k}(1+|a_j|)(1+|a'_k|)}[a_1|\cdots|a_n]\times[a'_1|\cdots|a'_n],$$

    con a_i y a'_i elementos homogéneos de A y A', respectivamente. El operador SHI viene dado por la fórmula siguiente ([Rub91]):

$$SHI(a_n \times b_n)$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} \sum_{(\alpha,\beta)} (-1)^{\bar{n}+sg(\alpha,\beta)} (s_{\beta_q+\bar{n}} \cdots s_{\beta_1+\bar{n}} s_{\bar{n}-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n \, a_n \times$$
$$\times s_{\alpha_{p+1}+\bar{n}} \cdots s_{\alpha_1+\bar{n}} \partial_{\bar{n}} \cdots \partial_{\bar{n}+p-1} \, b_n);$$

donde $\bar{n} = n - p - q$, $sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - (i-1))$, la última suma se toma con los índices $(\alpha, \beta) \in \{(p+1, q)\text{-shuffles}\}$ y los morfismos s_i y ∂_i son los operadores cara y degeneración de $\bar{B}(A)$ considerado como módulo simplicial:

$$\begin{aligned}
\partial_0[a_1|\cdots|a_k] &= \xi(a_1)[a_2|\cdots|a_k]; \\
\partial_i[a_1|\cdots|a_k] &= (-1)^{|[a_1|\cdots|a_i]|_t}[a_1|\cdots|a_i\, a_{i+1}|\cdots|a_k], \quad 0 < i < k; \\
\partial_k[a_1|\cdots|a_k] &= (-1)^{|[a_1|\cdots|a_k]|_t}[a_1|\cdots|a_{k-1}]\xi(a_k); \\
s_i[a_1|\cdots|a_k] &= (-1)^{|[a_1|\cdots|a_i]|_t}[a_1|\cdots|a_i|1|a_{i+1}|\cdots|a_k], \qquad s_0[\,] = [1],
\end{aligned}$$

donde 1 es el elemento unidad del álgebra.

Además SHI coincide con la aplicación idénticamente nula cuando actúa sobre elementos de grado 0.

Podemos dar, salvo signo, una fórmula explícita para $\phi_{\bar{B}\otimes}$ que no depende de los operadores cara y degeneración:

$$\phi_{\bar{B}\otimes}([a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n])$$
$$= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} \pm[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_{\bar{n}-1} \otimes a'_{\bar{n}-1}|(a'_{\bar{n}} *_{A'} \cdots *_{A'} a'_{n-q})| \qquad (1.16)$$
$$c_{\pi(0)}|\cdots|c_{\pi(p+q)}]\,,$$

donde $\bar{n} = n - p - q$; $(c_0, \ldots, c_{p+q}) = (a_{\bar{n}}, \ldots, a_{n-q}, a'_{n-q+1}, \ldots a'_n)$ y π es un $(p+1, q)$–shuffle.

Podemos observar, a partir de las fórmulas anteriores, que los morfismos $g_{\bar{B}\otimes}$ y $\phi_{\bar{B}\otimes}$ actúan en tiempo exponencial, mientras que $f_{\bar{B}\otimes}$ lo hace en tiempo lineal.

Dado un producto tensorial $\otimes_{i\in I} A_i$ de DGA-álgebras conmutativas, una contracción de $\bar{B}(\otimes_{i\in I} A_i)$ en $\otimes_{i\in I} \bar{B}(A_i)$ queda fácilmente determinada aplicando $c_{\bar{B}\otimes}$ reiteradamente. Esta nueva contracción se denota también por $c_{\bar{B}\otimes}$.

- La iso-contracción descrita en [EM54]

$$c_{\bar{B}E} : \{\bar{B}(E(u, 2n+1)), \Gamma(\underline{u}, 2n+2), f_{\bar{B}E}, g_{\bar{B}E}, 0\}\,,$$

donde

$$f_{\bar{B}E}([u| \overset{m \text{ times}}{\cdots} |u]) = \gamma_m(\underline{u}); \;\; g_{\bar{B}E}(\gamma_m(\underline{u})) = [u| \overset{m \text{ times}}{\cdots} |u]\,.$$

- La contracción establecida en [EM54]

$$c_{\bar{B}P} : \{\bar{B}(P(v,2n)), E(\underline{v}, 2n+1), f_{\bar{B}P}, g_{\bar{B}P}, \phi_{\bar{B}P}\},$$

donde

$$f_{\bar{B}P}([v^r] = \begin{cases} 0 & \text{if } r \neq 1 \\ \underline{v} & \text{if } r = 1 \end{cases} \; ; \; f_{\bar{B}P}([v^{r_1}|\cdots|v^{r_m}]) = 0$$

$$g_{\bar{B}P}(\underline{v}) = [v]; \;\; \phi_{\bar{B}P}([v^{r_1}|\cdots|v^{r_m}]) = [v|v^{r_1-1}|\cdots|v^{r_m}].$$

Dado un producto tensorial torcido de álgebras exteriores y polinomiales, $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i$, la perturbación, ρ, produce una perturbación–derivación, δ, en la diferencial tensorial de $\bar{B}(\otimes_{i\in I}A_i)$,

$$\delta[a_1|\cdots|a_n] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|[a_1|\cdots|a_{i-1}]|}[a_1|\cdots|\rho(a_i)|\cdots|a_n].$$

Gracias a las contracciones anteriores, es posible establecer, por composición y producto tensorial de contracciones, recursivamente, una contracción de álgebras semi–completa. Así, en el caso del producto de dos álgebras, $A_1 \otimes A_2$, se puede establecer la composición de contracciones:

$$(f^2, g^2, \phi^2) : \bar{B}(A_1 \otimes A_2) \Rightarrow \bar{B}(A_1) \otimes \bar{B}(A_2) \Rightarrow hBA_1 \otimes hBA_2 \tag{1.17}$$

donde A_i es un álgebra exterior o polinomial, hBA_i es un álgebra polinomial o de potencias divididas y

$$\begin{aligned} f^2 &= (f_{\bar{B}A_1} \otimes f_{\bar{B}A_2})f_{\bar{B}\otimes} \\ g^2 &= g_{\bar{B}\otimes}(g_{\bar{B}A_1} \otimes g_{\bar{B}A_2}) \\ \phi^2 &= \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A_1} \otimes g_{\bar{B}A_2}f_{\bar{B}A_2} + 1_{\bar{B}A_1} \otimes \phi_{\bar{B}A_2})f_{\bar{B}\otimes} \end{aligned}$$

Así, de forma recursiva, es posible establecer la contracción correspondiente para un producto tensorial de n álgebras exteriores y polinomiales,

$$c^n : \{\bar{B}(\otimes^n_{i=1}A_i), \otimes^n_{i=1}hBA_i, f^n, g^n, \phi^n\},$$

$$\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-1}A_i)\otimes A_n) \Rightarrow (\otimes_{i=1}^{n-1}\bar{B}(A_i))\otimes \bar{B}(A_n) \Rightarrow (\otimes_{i=1}^{n-1}hBA_i)\otimes hBA_n\,, \tag{1.18}$$

donde

$$\begin{aligned} f^n &= (f^{n-1}\otimes f_{\bar{B}A_n})f_{\bar{B}\otimes} \\ g^n &= g_{\bar{B}\otimes}(g^{n-1}\otimes g_{\bar{B}A_n}) \\ \phi^n &= \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1}\otimes g_{\bar{B}A_n}f_{\bar{B}A_n} + 1\otimes \phi_{\bar{B}A_n})f_{\bar{B}\otimes} \end{aligned}$$

y hBA_i son álgebras exteriores o de potencias divididas.

Un modelo 1–homológico de $A = \tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i$ se obtiene, entonces, por perturbación de esta contracción. Si δ es la perturbación inducida por ρ en la diferencial tensorial de $\bar{B}(A)$, la contracción perturbada viene dada por el Lema Básico de Perturbación:

$$c^n_\delta : (f^n_\delta, g^n_\delta, \phi^n_\delta) \ : \ \bar{B}(\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i) \Rightarrow (\otimes_{i=1}^{n}hBA_i, d_\delta)\,. \tag{1.19}$$

Así, $hBA = \otimes_{i\in I}(hBA_i, d_\delta)$ es un modelo 1–homológico de $A = (\otimes_{i\in I}A_i, \rho)$.

Capítulo 2.

A_∞-estructuras y contracciones.

Capítulo 2.

A_∞-estructuras y contracciones.

El origen de las A_∞–(co)álgebras lo encontramos en [Sta63], donde Stasheff establece el concepto de *asociatividad fuertemente homotópica* que cubre el vacío a que da lugar el carácter no homotópico de la asociatividad de un álgebra.

Así, dado un DG-módulo (M, m_1) (i.e., $m_1 m_1 = 0$), dotado de un producto m_2 compatible con la diferencial (i.e., $m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)$); puede ocurrir que, aunque no sea asociativo en el sentido estricto, sí sea asociativo *salvo homotopía* m_3, de modo que $m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1) + m_1 m_3 = m_2(m_2 \otimes 1) - m_2(1 \otimes m_2)$. Este proceso se puede generalizar, de modo que existan homotopías m_i análogas que midan la falta de asociatividad en las diversas formas de agrupar los productos de i elementos dados, dando lugar, de esta forma al concepto de A_∞–álgebra.

En [Pro84] se recoge la equivalencia entre las siguientes dos definiciones de A_∞–álgebra (resp. A_∞–coálgebra):

- Utilizando una formulación meramente analítica, una A_∞-álgebra (respectivamente, A_∞-coálgebra), es un DG-módulo (M, m_1) (resp., (M, Δ_1)) dotado de una familia de morfismos $m_i \in \text{Hom}\ (M^{\otimes i}, M)$ (resp., $\Delta_i \in \text{Hom}\ (M, M^{\otimes i})$) de grado $i-2$ de modo que, para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n-k} (-1)^{k+\lambda+k\lambda} m_{n-k+1}(1^\lambda \otimes m_k \otimes 1^{n-k-\lambda}) = 0,$$

$$(\text{resp.}, \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n-k} (-1)^{k+\lambda+k\lambda} (1^{n-k-\lambda} \otimes \Delta_k \otimes 1^\lambda)\Delta_{n-k+1} = 0).$$

- Una A_∞-álgebra (resp., A_∞-coálgebra) es un módulo graduado M dotado de una aplicación lineal $m : T(sM) \to M$ (resp., $\Delta : M \to T(s^{-1}M)$) tal que el morfismo

$d = -(\uparrow mT(\downarrow))^{[\,]}$ (resp., $d = -(T(\downarrow)\Delta \uparrow)^{[\,]}$) hace de $T(sM)$ (resp., $T(s^{-1}M)$) una DGA-coálgebra (resp., DGA-álgebra).

En los trabajos, primero de Gugenheim [Gug77], a quien se añadió posteriormente Stasheff [GS86] y por último Lambe [GLS91], se describe la técnica denominada *ardid tensorial*, de modo que a partir de una contracción $A \overset{c}{\Rrightarrow} M$ de una DGA-álgebra (resp., DGA-coálgebra) a un DG-módulo, tensorizando adecuadamente para obtener el módulo graduado subyacente de la construcción bar (resp., cobar) y perturbando para obtener su diferencial usual, $\bar{B}(A) \overset{\bar{B}(c)}{\Rrightarrow} \tilde{B}(M)$, se define bajo ciertas condiciones (comunmente, conexión) una A_∞-estructura de álgebra (resp., coálgebra) en el DG-módulo inicial.

En este sentido, en Gugenheim prueba que a partir de una contracción de una coálgebra simplemente conexa C en un módulo M con diferencial nula, se puede construir una derivación d en $T^a(s^{-1}H^+)$ y una cocadena de torsión $\tau : C \to (T^a(s^{-1}H^+), d)$, cuya extensión multiplicativa a $\bar{\Omega}(C)$ constituye un casi-isomorfismo (i.e., induce un isomorfismo en homología).

Este procedimiento se extiende en [GS86] para el caso dual de una contracción de partida entre una DGA-álgebra conexa A y un DG-módulo (M, d) de diferencial no nula, en general, ambos sobre un cuerpo k. En este mismo trabajo se comenta la existencia de un resultado análogo para coálgebras simplemente conexas, en el que aunque el anillo base Λ no tiene por qué ser un cuerpo, sí se exige que ambos C y M sean libres como Λ-módulos.

En [GLS91] se muestra que el ardid tensorial no sólo engloba los resultados anteriores, sino que los completa, en el sentido de que los casi-isomorfismos anteriores representan en realidad proyecciones de verdaderas contracciones.

2.1 Contracciones que dan lugar a A_∞–álgebras y A_∞–coálgebras

Comenzaremos retomando el trabajo [GLS91], donde se describe la estructura de A_∞–álgebra que se induce en un DG–módulo mediante **el ardid tensorial**, a partir de una contracción desde una DGA–álgebra conexa. Para ello, expresaremos, en función de los morfismos integrantes de esta contracción, las fórmulas de los morfismos que dotan de estructura de A_∞–álgebra a M. Más tarde dualizaremos todo el proceso para el caso de las A_∞–coálgebras. Exponemos la demostración del teorema de cara, fundamentalmente, a mostrar las técnicas específicas que se usan en este contexto de perturbación homológica.

Teorema 2.1.1 *[GLS91] Dados una DG-álgebra conexa, (A, d_A, μ_A), un DG–módulo (M, d_M), y una contracción entre ellos, $c : \{A, M, f, g, \phi\}$, el DG–módulo M adquiere una estructura de A_∞-álgebra mediante los morfismos*

$$m_n \;=\; (-1)^{n+1} f\, \mu^{(1)}\, \phi^{[\otimes 2]}\, \mu^{(2)} \cdots \phi^{[\otimes n-1]}\, \mu^{(n-1)}\, g^{\otimes n}\,,$$

donde

$$\mu^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} 1^{\otimes i} \otimes \mu_A \otimes 1^{\otimes k-i-1}\,.$$

Demostración.

En primer lugar, obtenemos una nueva contracción entre los módulos suspendidos $sc : \{sA, sM, f, g, -\phi\}$.

Consideramos $T^c sA$, al mismo tiempo que $T^c sM$, con la diferencia de que el primero constituye el módulo subyacente de la construcción bar de A, $\bar{B}(A)$ y no así el segundo. Así, tenemos una nueva contracción $Tsc : \{T^c sA, T^c sM, Tf, Tg, T(-\phi)\}$.

Ahora introducimos, como dato de perturbación en la contracción anterior, la diferencial simplicial en $T^c sA$ (1.7).

Comprobamos fácilmente que $(T(-\phi)\, d_s)$ es puntualmente nilpotente debido a que $T(-\phi)$ no afecta a la dimensión simplicial (o longitud) del elemento al que se aplica, mientras que d_s siempre hace que disminuya dicha dimensión simplicial, ya que multiplica dos componentes consecutivas; así, aplicando el Lema Básico de Perturbación obtenemos una nueva contracción

$$(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi}) : \bar{B}(A) \Rightarrow (T^c sM, \tilde{d})\,,$$

donde $\tilde{d}$ es la suma de la diferencial tensorial propia de $T^c sM$, d_t, y la diferencial que se obtiene por el método de perturbación:

$$\tilde{d} = d_t + \sum_{i \geq 0} (-1)^i T f\, d_s\, (T(-\phi)\, d_s)^i\, Tg\,. \qquad (2.1)$$

Denotaremos el sumando i–ésimo que compone $\tilde{d}$, por $\tilde{d}_i$, es decir,

- $\tilde{d}_1 = d_t$,
- $\tilde{d}_i = (-1)^i Tf\, d_s\, (T(-\phi)\, d_s)^{i-2}\, Tg$, para $i \geq 2$.

Consideramos, a continuación, una familia de morfismos $m_n : M^{\otimes n} \to M$ que escogemos de la siguiente forma:

$$m_n = (-1)^{[n/2]} \downarrow \tilde{d}_n|_{(sM)^{\otimes n}} \uparrow^{\otimes n},$$

que dotan a M de estructura de A_∞–álgebra. Nos proponemos expresar estos morfismos, m_n, en función de los morfismos que integran la contracción inicial, f, g y ϕ.

Recordamos que $\uparrow^{\otimes i}\downarrow^{\otimes i}=\downarrow^{\otimes i}\uparrow^{\otimes i}= (-1)^{[i/2]}1^{\otimes i}$, dato que usamos para poder expresar m_n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_n &= (-1)^{[n/2]+n} \downarrow (Tf\, d_s\, (T(-\phi)\, d_s)^{n-2}\, Tg)\,|_{(sM)^{\otimes n}} \uparrow^{\otimes n} \\ &= (-1)^{[n/2]+n} (\downarrow T(f) \uparrow)\, (\downarrow d_s \uparrow^{\otimes 2})\, ((-1) \downarrow^{\otimes 2} T(-\phi) \uparrow^{\otimes 2}) \cdots \\ &\quad \cdots ((-1)^{[(n-1)/2]} \downarrow^{\otimes n-1} T(-\phi) \uparrow^{\otimes n-1})\, ((-1)^{[(n-1)/2]} \downarrow^{\otimes n-1} d_s \uparrow^{\otimes n}) \qquad (2.2) \\ &\quad ((-1)^{[n/2]} \downarrow^{\otimes n} T(g) \uparrow^{\otimes n}), \end{aligned}$$

por lo que estudiamos los morfismos asociados entre paréntesis, obteniendo los resultados relacionados a continuación.

- $(-1)^{[k/2]} \downarrow^{\otimes k} Tf \uparrow^{\otimes k}= f^{\otimes k}$.
- $(-1)^{[(k-1)/2]} \downarrow^{\otimes k-1} d_s \uparrow^{\otimes k}= \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{i+1} 1^{\otimes i} \otimes \mu_A \otimes 1^{\otimes k-i-2}$

  Para simplificar la notación, llamaremos $\mu^{(k-1)}$ a $\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{i+1}1^{\otimes i} \otimes \mu_A \otimes 1^{\otimes k-i-2}$ y, así,

  $$(-1)^{[(k-1)/2]} \downarrow^{\otimes k-1} d_s \uparrow^{\otimes k}= \mu^{(k-1)}$$

- $(-1)^{[k/2]} \downarrow^{\otimes k} T(-\phi) \uparrow^{\otimes k}= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^k 1^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (g\, f)^{\otimes k-i-1}$

- $(-1)^{[k/2]} \downarrow^{\otimes k} Tg \uparrow^{\otimes k} = g^{\otimes k}$.

Así, sustituyendo estas expresiones en (2.2), obtenemos la formulación buscada para m_n:

$$m_n = (-1)^{n+1} f\, \mu^{(1)}\, \phi^{[\otimes 2]}\, \mu^{(2)} \cdots \phi^{[\otimes n-1]}\, \mu^{(n-1)}\, g^{\otimes n}.$$

Hemos de comprobar que dichos morfismos verifican las igualdades propias de la estructura de A_∞–álgebra.

Con la finalidad de abreviar dicha expresión y las sucesivas fórmulas en las que aparezca la composición sucesiva de morfismos $\phi^{[\otimes i]}$ y $\mu^{(i)}$, denotaremos por $\Psi^{(i,j)}$, con $i \leq j$, a la composición $\phi^{[\otimes i]}\, \mu^{(i)} \cdots \phi^{[\otimes j]}\, \mu^{(j)}$, al mismo tiempo que $\Psi^{(i)}$ denotará a $\phi^{[\otimes i]}\, \mu^{(i)}$. Así, la fórmula anterior para m_n, para $n \geq 2$, podrá expresarse:

$$m_n = (-1)^{n+1} f\, \mu^{(1)}\, \Psi^{(2,n-1)}\, g^{\otimes n}. \tag{2.3}$$

El hecho de que $\widetilde{d}^{\,2} = 0$ implica que, dado un número natural l,

$$\sum_{k+n=l} \widetilde{d}_k\, \widetilde{d}_n = 0\,,$$

lo que se traduce, al mismo tiempo en relaciones entre los morfismos m_n. Nuestra finalidad ahora es establecer esas relaciones, para lo cual volvemos a hacer uso de los morfismos suspensión y desuspensión.

$$\sum_{k+n=l} \downarrow \widetilde{d}_k \uparrow^{\otimes k} (-1)^{[k/2]} \downarrow^{\otimes k} \widetilde{d}_n \uparrow^{\otimes k+n-1} = 0 \tag{2.4}$$

Por lo que es necesario estudiar los morfismos $\downarrow^{\otimes k} \widetilde{d}_n \uparrow^{\otimes k+n-1}$.

Fijado n, probaremos, por inducción en $k \geq 1$,

$$\downarrow^{\otimes k} \widetilde{d}_n \uparrow^{\otimes k+n-1} = (-1)^{[(k+n)/2]+n} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(n-1)}\, 1^{\otimes j} \otimes m_n \otimes 1^{\otimes k-j-1}.$$

- Para $k = 1$, $\downarrow \widetilde{d}_n \uparrow^{\otimes n} = (-1)^{[n/2]} m_n$.

- Supongámoslo probado hasta $k-1$. Como

$$\downarrow^{\otimes k}\ \tilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-1} \;=\; (-1)^n \downarrow^{\otimes k} Tf\, d_s\,(T(-\phi)\,d_s)^{n-2}\,Tg\ \uparrow^{\otimes k+n-1},$$

aplicando de nuevo el procedimiento usado para la obtención de la fórmula 2.3, llegamos a

$$\downarrow^{\otimes k}\ \tilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-1} \;=\; (-1)^{[(k+n)/2]+1} f^{\otimes k}\mu^{(k)}\ \Psi^{(k+1,k+n-2)}\ g^{\otimes k+n-1}. \qquad (2.5)$$

Para llegar a relacionar el segundo miembro de esta igualdad con los morfismos componentes de m_n, probaremos primero, por inducción en n, la siguiente expresión para $f^{\otimes k}\ \mu^{(k)}\ \Psi^{(k+1,k+n-2)}$,

$$f^{\otimes k}\ \mu^{(k)}\ \Psi^{(k+1,k+n-2)} \;=\; (-1)^{(n-1)(k-1)}\ f^{\otimes k-1}\otimes f\ \mu^{(1)}\ \Psi^{(2,n-1)} \qquad (2.6)$$

$$+\sum_{j=0}^{n-3} \pm\ f^{\otimes k-1}\ \mu^{(k-1)}\ \Psi^{(k,k+j-1)}\otimes f\ \mu^{(1)}\ \Psi^{(2,n-j-2)}\ \phi^{[\otimes n-j-1]} \qquad (2.7)$$

$$+\sum_{j=0}^{n-3} \pm\ f^{\otimes k-1}\ \mu^{(k-1)}\ \Psi^{(k,k+j-1)}\ \phi^{[\otimes k+j]}\otimes f\ \mu^{(1)}\ \Psi^{(2,n-j-2)} \qquad (2.8)$$

$$+f^{\otimes k-1}\ \mu^{(k-1)}\ \Psi^{(k,k+n-3)}\otimes f \qquad (2.9)$$

  - Caso $n=2$. Observemos que el morfismo $\mu^{(k)}$ se puede descomponer de la siguiente forma, para cualquier natural $1\le i\le k-1$,

$$\mu^{(k)} = \mu^{(i)}\otimes 1^{\otimes k-i} + (-1)^i\, 1^{\otimes i}\otimes \mu^{(k-i)}.$$

Así,

$$f^{\otimes k}\mu^{(k)} \;=\; f^{\otimes k-1}\ \mu^{(k-1)}\otimes f + (-1)^{k-1} f^{\otimes k-1}\otimes f\ \mu^{(1)}$$

  - Caso n, suponiendo que se cumple la igualdad hasta $n-1$.

$f^{\otimes k}\ \mu^{(k)}\ \Psi^{(k+1,k+n-3)}\ \phi^{[\otimes k+n-2]}\ \mu^{(k+n-2)}$

$$= ((-1)^{(n-2)(k-1)} f^{\otimes k-1}\otimes f\ \mu^{(1)}\ \Psi^{(2,n-2)})\ \phi^{[\otimes k+n-2]}\ \mu^{(k+n-2)} \qquad (2.10)$$

$$+(\textstyle\sum_{j=0}^{n-4} \pm f^{\otimes k-1}\mu^{(k-1)}\ \Psi^{(k,k+j-1)}$$
$$\otimes f\,\mu^{(1)}\ \Psi^{(2,n-j-3)}\ \phi^{[\otimes n-j-2]})\phi^{[\otimes k+n-2]}\mu^{(k+n-2)} \qquad (2.11)$$

$$+(\textstyle\sum_{j=0}^{n-4} \pm f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+j-1)}\,\phi^{[\otimes k+j]}$$

$$\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-j-3)})\,\phi^{[\otimes k+n-2]}\,\mu^{(k+n-2)} \tag{2.12}$$

$$+(f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+n-2)}\otimes f)\,\phi^{[\otimes k+n-2]}\,\mu^{(k+n-2)} \tag{2.13}$$

En el primer sumando (2.10), haciendo la descomposición

$$\phi^{[\otimes k+n-2]} = \phi^{[\otimes k-1]}\otimes (g\,f)^{\otimes n-1} + 1^{\otimes k-1}\otimes \phi^{[\otimes n-1]}$$

y teniendo en cuenta que $f\,\phi = 0$, se llega a la expresión

$$((-1)^{(n-2)(k-1)} f^{\otimes k-1}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-2)}\,\phi^{[\otimes n-1]})\,\mu^{(k+n-2)}\,.$$

Además,

$$\mu^{(k+n-2)} = \mu^{(k-1)}\otimes 1^{\otimes n-1} + (-1)^{k-1}1^{\otimes k-1}\otimes \mu^{(n-1)}\,,$$

lo que conduce a los dos sumandos siguientes

$$(-1)^{(n-2)(k-1)} f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-2)}\,\phi^{[\otimes n-1]}$$

$$+(-1)^{(n-1)(k-1)} f^{\otimes k-1}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-2)}\,\phi^{[\otimes n-1]}\,\mu^{(n-1)}\,.$$

Seguimos la misma técnica para los sumandos (2.11), (2.12) y (2.13), realizando las descomposiciones apropiadas de $\phi^{[\otimes k+n-2]}$ y de $\mu^{(k+n-2)}$ en cada caso. De esta forma, el sumando (2.11) resulta ser nulo, ya que $\phi\,g = 0$ y $\phi\phi = 0$; el sumando (2.12) da lugar a

$$\sum_{j=0}^{n-4} \pm f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+j+1)}\,\phi^{[\otimes k+j]}\,\mu^{(k+j)}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-j-3)}\,\phi^{[\otimes n-j-2]}$$

$$+\sum_{j=0}^{n-4} \pm f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+j-1)}\,\phi^{[\otimes k+j]}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-j-3)}\,\phi^{[\otimes n-j-2]}\,\mu^{(n-j-2)};$$

y finalmente, el último sumando (2.13), tras el mismo procedimiento, da paso a dos sumandos

$$f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+n-2)}\,\phi^{[\otimes k+n-3]}\,\mu^{(k+n-3)}\otimes f$$

$$+(-1)^{k+n-3} f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,n-2)}\,\phi^{[\otimes k+n-3]}\otimes f\,\mu^{(1)}$$

Reorganizando los sumandos resultantes, llegamos a la expresión deseada.

Así pues, sustituyendo $f^{\otimes k}\mu^{(k)}\,\Psi^{(k+1,k+n-2)}$ en el segundo miembro de (2.5) por los sumandos obtenidos ((2.6),(2.7),(2.8) y (2.9)) y teniendo en cuenta que $\phi\, g = 0$, los únicos supervivientes son el primer y último sumando. Es decir,

$$\begin{aligned}\downarrow^{\otimes k}\ \widetilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-1} &= (-1)^{[(k+n)/2]+1}\left((-1)^{(n-1)(k-1)}\,1^{\otimes k-1}\otimes f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-1)}\,g^{\otimes n}\right.\\ &\left.\quad +f^{\otimes k-1}\,\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+n-3)}\,g^{\otimes k+n-2}\otimes 1\right)\end{aligned}$$

Recordemos que, por hipótesis de inducción , se cumple que

$$\downarrow^{\otimes k-1}\ \widetilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-2}= (-1)^{[(k+n-1)/2]+n}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j(n-1)}\,1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes k-j-2}$$

y además,

$$\downarrow^{\otimes k-1}\ \widetilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-2}= (-1)^{[(k+n-1)/2]+1} f^{\otimes k-1}\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+n-3)}\,g^{\otimes k+n-2}\,.$$

Así,

$$f^{\otimes k-1}\mu^{(k-1)}\,\Psi^{(k,k+n-3)}\,g^{\otimes k+n-2} = (-1)^{n+1}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j(n-1)}\,1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes k-j-2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\downarrow^{\otimes k}\ \widetilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-1} &= (-1)^{[(k+n)/2]+1}\left((-1)^{(k-1)(n+1)+n+1}\,1^{\otimes k-1}\otimes m_n\right)\\ &\quad +(-1)^{n+1}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j(n-1)}\,1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes k-j-2}\\ &= (-1)^{[(k+n)/2]+n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j(n-1)}\,1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes k-j-1}\,.\end{aligned}$$

Volviendo a la igualdad que verifican los distintos sumandos de $\widetilde{d}$ (2.4) y sustituyendo la expresión obtenida para $\downarrow^{\otimes k}\ \widetilde{d}_n\ \uparrow^{\otimes k+n-1}$, llegamos a las relaciones que caracterizan la A_∞–álgebra:

$$0 = \sum_{k+n=l}\ \sum_{0\le j\le k-1}(-1)^{[(k+n)/2]+n+j(n-1)}m_k\left(1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes k-j-1}\right),$$

para todo $l\geq 2$.

Teniendo en cuenta que $k = n - l$ y llamando i a $l - 1$ en la expresión anterior, podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$0 = \sum_{1\leq n\leq i}\sum_{0\leq j\leq i-n}(-1)^{[(i+1)/2]+n+j(n-1)}m_{i-n+1}\left(1^{\otimes j}\otimes m_n\otimes 1^{\otimes i-n-j}\right),$$

para todo $i \geq 1$.

Así, podemos comprobar que la fórmula obtenida coincide, claramente, con la dada por Prouté en [Pro84]. □

Pasamos al caso dual en el que describimos la obtención de la estructura de A_∞–coálgebra en un DG–módulo dado. En este caso, obviaremos muchos pasos y demostraciones que sean análogas al caso de las A_∞–álgebras.

Teorema 2.1.2 *[GLS91] Dados una DG–coálgebra simplemente conexa, (C, d_C, Δ_C), un DG–módulo (M, d_M), y una contracción entre ellos, $c : \{C, M, f, g, \phi\}$, el DG–módulo M adquiere una estructura de A_∞–coálgebra mediante los morfismos*

$$\Delta_n = (-1)^{[n/2]+n+1} f^{\otimes n}\,\Delta^{(n)}\,\phi^{[\otimes n-1]}\,\Delta^{(n-1)}\cdots\phi^{[\otimes 2]}\,\Delta^{(2)}\,g\,,$$

donde

$$\Delta^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i 1^{\otimes i}\otimes\Delta_C\otimes 1^{\otimes k-i-2}.$$

Demostración.

Como antes, expresaremos, en función de los morfismos f, g y ϕ, las fórmulas de los morfismos que dotan de estructura de A_∞–coálgebra a M.

Comenzamos desuspendiendo y, posteriormente, tensorizando, la contracción anterior. En este caso, consideramos el módulo tensorial dotado de estructura de álgebra mediante el producto yuxtaposición (1.10).

Así, tenemos una nueva contracción, $T^a s^{-1}c : (T(f), T(g), T(-\phi))$ para la que, ahora, el dato de perturbación será la diferencial cosimplicial en $T^a s^{-1}C$ (1.9).

Podemos, también en este caso, comprobar la nilpotencia puntual de $(T(-\phi)\, d_{cos})$ debido a que $T(-\phi)$ no afecta a la dimensión cosimplicial (o longitud) del elemento al que se aplica mientras que d_{cos} siempre hace que aumente en uno dicha dimensión cosimplicial, al mismo tiempo que la coálgebra es simplemente conexa, por lo que el proceso es finito; así, aplicando el Lema Básico de Perturbación obtenemos una nueva contracción

$$c_A : (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi}) : \bar{\Omega}(C) \Rightarrow (T^a s^{-1} M, \tilde{d}),$$

donde $\tilde{d}$ es la suma de la diferencial tensorial, propia del módulo tensorial, y la diferencial que resulta de dicho lema,

$$\tilde{d} = d_t + \sum_{i\geq 0}(-1)^i T f\, d_{cos}\, (T(-\phi)\, d_{cos})^i\, Tg\,. \tag{2.14}$$

Llamaremos, de nuevo, $\tilde{d}_1$ a la diferencial tensorial, d_t, y $\tilde{d}_i$, para $i \geq 2$, a $(-1)^i T f\, d_{cos}\, (T(-\phi)\, d_{cos})^{i-2}\, Tg$.

Tenemos, de esta forma, una familia de morfismos $\Delta_n : M \to M^{\otimes n}$ que dotarán a M de estructura de A_∞–coálgebra:

$$\Delta_n = (-1)^{[n/2]} \uparrow^{\otimes n} \tilde{d}_n|_{s^{-1}M} \downarrow .$$

Como en el caso de los morfismos, m_n, expresaremos Δ_n en función de los integrantes de la contracción inicial (f, g, ϕ) usando los morfismos suspensión y desuspensión de la misma forma.

Destacamos aquí el caso de d_{cos}, que es el único novedoso con respecto a la demostración anterior.

$$(-1)^{[k/2]} \uparrow^{\otimes k} d_{cos} \downarrow^{\otimes k-1} = \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes k-i-2}.$$

Y llamando $\Delta^{(k)}$ a $\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes k-i-2}$, tendremos que

$$(-1)^{[k/2]} \uparrow^{\otimes k} d_{cos} \downarrow^{\otimes k-1} = \Delta^{(k)}$$

Así, obtenemos la expresión deseada para Δ_n:

$$\Delta_n = (-1)^{[n/2]+n+1} f^{\otimes n}\, \Delta^{(n)}\, \phi^{[\otimes n-1]}\, \Delta^{(n-1)} \cdots \phi^{[\otimes 2]}\, \Delta^{(2)}\, g\,. \tag{2.15}$$

Para comprobar que, efectivamente, estos morfismos Δ_n satisfacen las condiciones de A_∞–coálgebra, contamos, de nuevo, con el hecho de que $\widetilde{d}^2 = 0$, volviendo a hacer uso de los morfismos suspensión y desuspensión.

$$\sum_{k+n=l} \uparrow^{\otimes k+n-1} \widetilde{d}_n \downarrow^{\otimes k} (-1)^{[k/2]} \uparrow^{\otimes k} \widetilde{d}_k \downarrow = 0 \tag{2.16}$$

Fijado n, se prueba, por inducción en $k \geq 1$, y de la misma forma en que se hizo en el caso dual, que

$$\uparrow^{\otimes k+n-1} \widetilde{d}_n \downarrow^{\otimes k} = (-1)^{[(k+1)/2]+[n/2]+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(n-1)} 1^{\otimes j} \otimes \Delta_n \otimes 1^{\otimes k-j-1}.$$

Sustituyendo esta expresión para $\uparrow^{\otimes k+n-1} \widetilde{d}_n \downarrow^{k}$ en (2.16), llegamos a las relaciones que caracterizan la A_∞–coálgebra:

$$0 \;=\; \sum_{k+n=l} \sum_{0\leq j\leq k-1} (-1)^{[(k+n)/2]+kn+k+1+j(n-1)} \left(1^{\otimes j} \otimes \Delta_n \otimes 1^{\otimes k-j-1}\right) \Delta_k\,,$$

para todo $l \geq 2$.

Teniendo en cuenta que $k = l - n$ y llamando $i+1$ a l en la expresión anterior, podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$0 \;=\; \sum_{1\leq n\leq i} \sum_{0\leq j\leq i-n} (-1)^{[(i+1)/2]+in+i-n+j(n-1)} \left(1^{\otimes j} \otimes \Delta_n \otimes 1^{\otimes i-n-j}\right) \Delta_{i-n+1},$$

para todo $i \geq 1$.

Así, podemos comprobar que la fórmula obtenida coincide, claramente, con la dada por Prouté en [Pro84]. □

2.2 A_∞–estructuras representadas en forma de contracciones

En esta sección describiremos nuestro principal resultado del capítulo, por el que establecemos que una A_∞–estructura admite siempre una representación en forma de contracción de un álgebra a un módulo.

Abordamos, en primer lugar, el caso de la A_∞–álgebra para el que nos basamos en la contracción que establece Munkholm en [Mun74] entre la construcción cobar de la bar una DGA–álgebra, A, y la propia DGA–álgebra. Los morfismos proyección e inclusión de dicha contracción (llamada TEX por Munkholm) vienen expresados en función de ciertas cocadenas de torsión y el operador de homotopía se define inductivamente en determinados submódulos $S_i \subset \bar{\Omega}\,\bar{B}\,A$ con $i \geq 0$ y en función de ciertas aplicaciones auxiliares $\chi_i : S_i \to S_0$.

Sea, pues, A una DGA–álgebra conexa y $c_A : \{\bar{\Omega}\bar{B}A,\ A,\ \alpha_A,\ \rho_A,\ h_A\}$ la contracción establecida en [Mun74]. Analizando detenidamente los morfismos componentes de dicha contracción, llegamos a las expresiones que a continuación detallamos, en términos de los elementos a los que se aplican.

Para hacer más claras estas fórmulas, denotaremos por c_i la componente i–ésima de la cobar de longitud $k(i) \geq 1$, es decir $c_i = [a_{i,1}|\cdots|a_{i,k(i)}]$ y sólo escribiremos la componente completa $[a_{i,1}|\cdots|a_{i,k(i)}]$ cuando queramos destacar, por alguna razón, la composición de la misma. En concreto, cuando $k(i) = 1$, especificaremos dicha condición escribiendo $[a_i]$.

- $\alpha_A : \bar{\Omega}\,\bar{B}\,A \to A$,

$$\alpha_A\langle\, c_1 \mid \cdots \mid c_n \,\rangle = 0 \text{ si } k(i) > 1 \text{ para algún i;}$$

$$\alpha_A\langle\, [a_1] \mid [a_2] \,\rangle = \mu_A(a_1 \otimes a_2);$$

$$\alpha_A\langle\, [a_1] \mid \cdots \mid [a_n] \,\rangle = \mu_A(a_1 \otimes \alpha_A\langle\, [a_2 \mid \cdots \mid a_n] \,\rangle).$$

- $\rho_A : A \to \bar{\Omega}\,\bar{B}\,A$, con $\rho_A(a) = \langle\, [a] \,\rangle$.

- $h_A : \bar{\Omega}\bar{B}A \to \bar{\Omega}\bar{B}A$,

$$h_A\langle c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle = 0 \text{ si } n = 0 \text{ ó } n = 1 \text{ ó } k(1) > 1;$$

$$h_A\langle [a_1] \,|\, c_2 \,|\, \cdots \,|\, c_n] \rangle$$

$$= (-1)^{|a_1|+1}\langle [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle;$$

$$h_A\langle [a_1] \,|\, [a_2] \rangle = (-1)^{|a_1|+1}\langle [a_1 \,|\, a_2] \rangle;$$

$$h_A\langle [a_1] \,|\, [a_2] \,|\, \cdots \,|\, [a_{j-1}] \,|\, c_j \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle$$

$$= (-1)^{|a_1|+1}\langle [a_1 \,|\, a_2] \,|\, [a_3] \cdots \,|\, [a_{j-1}] \,|\, c_j \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-2} (-1)^{|a_1|+\cdots|a_{i+1}|+1}\zeta^i\langle [a_1 \,|\, a_2] \,|\, [a_3] \cdots \,|\, [a_{j-1}] \,|\, c_j \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle$$

donde $\zeta\langle [a_1 \,|\, a_2] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \rangle = \langle [\mu_A(a_1 \otimes a_2) \,|\, a_{3,1} \,|\, \cdots a_{3,k(3)}] \,|\, c_4 \,|\cdots \,|\, c_n \rangle$.

Sin embargo, podemos llegar a estas mismas fórmulas vía la teoría de perturbación homológica. Así, partiendo de la contracción que establecemos entre $\bar{\Omega}T^c s\bar{A}$ y A y perturbando dicha contracción para introducir la diferencial simplicial en $T^c s\bar{A}$, llegaremos a una contracción $\bar{\Omega}\bar{B}A \Rightarrow A$ cuyos morfismos coinciden con los que acabamos de describir.

Proposición 2.2.1 *Dada una DG–álgebra conexa, A, se puede establecer la contracción $c : \{\bar{\Omega}T^c s\bar{A},\, A,\, \alpha,\, \rho,\, h\}$ y, además, la contracción que se obtiene por perturbación de c añadiendo la diferencial simplicial tensorialmente en la diferencial de la construcción cobar coincide con la contracción dada por Munkholm $c_A : \{\bar{\Omega}\bar{B}A,\, A,\, \alpha_A,\, \rho_A,\, h_A\}$.*

Demostración

Establecemos, en primer lugar, la contracción

$$(\alpha, \rho, h) : \bar{\Omega}T^c s\bar{A} \Rightarrow A\,,$$

donde

- $\alpha : \bar{\Omega} T^c s\bar{A} \to A$,

$$\alpha\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = 0 \text{ si } n > 1 \text{ ó } k(1) > 1;$$

$$\alpha\langle\, [a] \,\rangle = a;$$

- $\rho : A \to \bar{\Omega} T^c s\bar{A}$, con $\rho(a) = \langle\, [a] \,\rangle$
- $h : \bar{\Omega} T^c s\bar{A} \to \bar{\Omega} T^c s\bar{A}$

$$h\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = 0 \text{ si } n = 0 \text{ ó } n = 1 \text{ ó } k(1) > 1;$$

$$\begin{aligned} &h\langle\, [a_1] \,|\, c_2 \,|\, \cdots \,|\, c_n] \,\rangle \\ &\quad = (-1)^{|a_1|+1} \langle\, [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle; \end{aligned}$$

Podemos comprobar fácilmente que se verifican las igualdades

$$\alpha\,\rho = 1 \qquad h\,\alpha = 0, \qquad \rho\, h = 0 \qquad h\,h = 0.$$

Para comprobar que $\rho\,\alpha = 1 - d\,h - h\,d$, distinguiremos varios casos según la forma del elemento al que se aplica. En primer lugar, es evidente que se verifica para elementos $\langle\, [a] \,\rangle$.

Haremos la comprobación, en segundo lugar, para elementos $\langle\, c_1 | \cdots | c_n \,\rangle$, con $k(1) > 1$:

$$\rho\,\alpha\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad d\,h\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = 0\,,$$

por lo que sólo habría que probar

$$\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = h\,d\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle\,.$$

Pero $d = d_t + d_{cos}$, y $d_t\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle$ sigue siendo un elemento con $k(1) > 1$, por lo que $h\,d_t\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle = 0$. Es más, al aplicar d_{cos}, el único sumando resultante que no pertenece a $\ker h$ es el que se indica a continuación:

$$\begin{aligned} h\,d\langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle &= h((-1)^{|a_{1,1}|+1} \langle\, [a_{1,1}] \,|\, [a_{1,2} \,|\, \cdots \,|\, a_{1,k(1)}] \,|\, c_2 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle) \\ &= \langle\, c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \end{aligned}$$

Por último, para elementos con $k(1)=1$, es decir, de la forma $\langle\, c_1 \,|\, c_2 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle$, con $c_1 = [a_1]$,

$$\begin{aligned}
h\, d\langle\, c_1 \,|\cdots|\, c_n \,\rangle \;=\;& h(-\langle\, d_t[a_1] \,|\, c_2 \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -(-1)^{|[a_1]|+1}\langle\, [a_1] \,|\, d_t[a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -\sum_{i\geq 3}(-1)^{\gamma_i}\langle\, c_1 \,|\, c_2 \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, d_t c_i \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -\sum_{i\geq 2,j}(-1)^{\beta_{i,j}}\langle\, c_1 \,|\, c_2 \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, [a_{i,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{i,j}] \\
& \qquad |\, [a_{i,j+1} \,|\, \cdots \,|\, a_{i,k(i)}] \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle) \\
=\;& -(-1)^{|a_1|}\langle\, d_t[a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -\sum_{i\geq 3}(-1)^{\gamma_i+|a_1|+1}\langle\, [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, d_t c_i \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -\sum_{j}(-1)^{|[a_{2,1}|\cdots|a_{2,j}]|+1}\langle\, [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,j}] \,|\, [a_{2,j+1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \\
& \qquad |c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle \\
& -\sum_{i\geq 3,j}(-1)^{\beta_{i,j}+|a_1|+1}\langle\, [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, \cdots \,|\, [a_{i,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{i,j}] \\
& \qquad |\, [a_{i,j+1} \,|\, \cdots \,|\, a_{i,k(i)}] \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle
\end{aligned}$$

con $\gamma_i = |[a_1]| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_{i-1}| + i - 1$

y $\beta_{i,j} = |[a_1]| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_{i-1}| + i - 1 + |[a_{i,1}|\cdots|a_{i,j}]| + 1.$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d\, h\langle\, [c_1 \,|\cdots|\, c_n \,\rangle \;=\;& d((-1)^{|a_1|+1}\langle\, [a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle) \\
=\;& (-1)^{|a_1|+1}(-\langle\, d_t[a_1 \,|\, a_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{2,k(2)}] \,|\, c_3 \,|\, \cdots \,|\, c_n \,\rangle
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i\geq 3}(-1)^{\gamma_i'}\langle\, [a_1\,|\, a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\, a_{2,k(2)}]\,|\, c_3\,|\,\cdots\,|\, d_t c_i\,|\,\cdots\,|\, c_n\,\rangle$$

$$-(-1)^{|a_1|}\langle\, [a_1]\,|\,[a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\, a_{2,k(2)}]\,|\, c_3\,|\,\cdots\,|\, c_n\,\rangle$$

$$-\sum_j(-1)^{|[a_1|a_{2,1}|\cdots|a_{2,j}]|+1}\langle\, [a_1\,|\, a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\, a_{2,j}]|[a_{2,j+1}\,|\cdots|\, a_{2,k(2)}]$$
$$|\, c_3\,|\,\cdots\,|\, c_n\,\rangle$$

$$-\sum_{i,j}(-1)^{\beta_{i,j}'}\langle\, [a_1\,|\, a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\, a_{2,k(2)}]\,|\, c_3\,|\,\cdots\,|\,[a_{i,1}\,|\,\cdots\,|\, a_{i,j}]$$
$$|\,[a_{i,j+1}\,|\,\cdots\,|\, a_{i,k(i)}]\,|\,\cdots\,|\, c_n\,\rangle)$$

donde $\gamma_i' = |[a_1\,|\, a_{2,1}\,|\cdots|\, a_{2,k(2)}]| + |c_3| + \cdots + |c_{i-1}| + i - 2$

y $\beta_{i,j}' = |[a_1\,|\, a_{2,1}\,|\cdots|\, a_{2,k(2)}]| + |c_3| + \cdots + |c_{i-1}| + i - 2 + |[a_{i,1}|\cdots|a_{i,j}]| + 1$.

Además, $\rho\,\alpha$ es nulo sobre un elemento con $n > 1$ y, por tanto, se ha de verificar, para estos elementos, que $1 = h\,d + d\,h$, lo cual podemos comprobar fijándonos en las expresiones obtenidas para $d\,h$ y $h\,d$.

Introducimos ahora, como dato de perturbación, dentro de la diferencial tensorial de la construcción cobar, la diferencial simplicial, de manera que la fórmula para la perturbación, δ, al aplicarla a un elemento genérico $\langle c_1\,|\,\cdots\,|\,c_n\rangle$ con $c_j = [a_{j,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{j,k(j)}]$, es

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} 1^{\otimes j-1}\otimes \downarrow(-d_s)\uparrow \otimes 1^{\otimes n-j},$$

donde

$$d_s = \sum_{1\leq i\leq k(j)-1} 1^{\otimes i-1}\otimes \uparrow\, \mu_A \downarrow^{\otimes 2} \otimes 1^{\otimes k(j)-i-1}.$$

Evidentemente, $d+\delta$ es una nueva diferencial, ya que se trata de la diferencial de $\bar{\Omega}\,\bar{B}A$. Aplicando el lema básico de perturbación, tenemos una nueva contracción

$$(\alpha_A, \rho_A, h_A) : \bar{\Omega}\,\bar{B}A \Rightarrow A\,, \tag{2.17}$$

cuyos morfismos describimos a continuación:

- $\alpha_A = \alpha - \alpha\,\delta\,h + \alpha\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$.

  Observamos que cada sumando $\alpha(\delta\,h)^i$ será no nulo sólo cuando $(\delta\,h)^i$ dé como resultado un elemento de la forma $\langle\,[a]\,\rangle$. Teniendo esto en cuenta y el hecho de que h se anula sobre elementos con $k(1) > 1$, el único sumando que habrá que considerar cada vez que apliquemos $\delta\,h$ será el que dé lugar a un elemento con $k(1) = 1$, situación que sólo se dará en el caso en que c_2 sea un elemento con $k(2) = 1$, es decir, $c_2 = [a_2]$.

$$\begin{aligned}
\delta\,h\langle\,[a_1]\,|\,[a_2]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle &= (-1)^{|a_1|+1}\delta\langle\,[a_1\,|\,a_2]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= (-1)^{|a_1|+1}\langle\,-d_s[a_1|a_2]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= (-1)^{|a_1|}\langle\uparrow\,\mu_A\,\downarrow^{\otimes 2}\,[a_1\,|\,a_2]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= (-1)^{|a_1|+|a_1|+1}\langle\,[(a_1 *_A a_2)]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle + \cdots,
\end{aligned}$$

  donde los puntos suspensivos indican los sumandos que desechamos.

  Podemos describir las sucesivas potencias del morfismo $(\delta\,h)$ siempre que el elemento sea con, al menos, $k(1) = \cdots = k(i+1) = 1$:

$$\begin{aligned}
(\delta\,h)^i(\omega) &= (\delta\,h)^i\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_i]\,|\,c_{i+1}\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= (-1)^i\langle\,[a_1 *_A a_2 *_A \cdots *_A a_{i+1}]\,|\,c_{i+2}\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle\,.
\end{aligned}$$

  Obsérvese que cada vez que se aplica $\delta\,h$, disminuye en 1 la dimensión cosimplicial del elemento a la vez que se obtiene un elemento con $k(1) = 1$. Después de $n-1$ iteraciones sobre un elemento que inicialmente tenía dimensión cosimplicial n y siempre que sea de la forma $\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_n]\,\rangle$, llegamos a uno de dimensión cosimplicial 1 al que podremos aplicar el morfismo α. Así, en realidad,

$$\begin{aligned}
\alpha_A(\omega) &= \alpha_A\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_n]\,\rangle \\
&= (-1)^{n-1}\alpha\,(\delta\,h)^{n-1}\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_n]\,\rangle \\
&= a_1 *_A a_2 *_A \cdots *_A a_n
\end{aligned}$$

y α_A es nulo en cualquier otro caso.

- $\rho_A = \rho - h\,\delta\,\rho + h\,\delta\,h\,\delta\,\rho - \cdots$

  Como $\delta\langle\,[a]\,\rangle = 0$, tenemos, simplemente, $\rho_A = \rho$.

- $h_A = h - h\,\delta\,h + h\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$

  Sabemos que $h\langle\,[a_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{1,k(1)}]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle = 0$ siempre que $k(1) > 1$ ó $n = 0$ ó $n = 1$. Así, de forma similar a lo que ocurre con α_A, al ser h el último morfismo a aplicar en cada sumando, podemos descartar los mismos sumandos que antes y obtener la misma expresión para $(\delta\,h)^i$. En realidad, para un elemento, ω en el que j es el menor índice tal que $k(j) > 1$,

$$h_A(\omega) = h_A\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_{j-1}]\,|\,c_j\cdots\,|\,c_n\,\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}h\,(\delta\,h)^{i-1}\langle\,[a_1]\,|\,\cdots\,|\,[a_{j-1}]\,|\,c_j\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle$$

$$= (-1)^{|a_1|+1}\langle\,[a_1\,|\,a_2]\,|\,[a_3]\,|\,\cdots\,|\,[a_{j-1}]\,|\,c_j\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle$$

$$+\sum_{i=2}^{j-1}(-1)^{|a_1|+\cdots+|a_i|+1}\langle\,[a_1 *_A \cdots *_A a_i\,|\,a_{i+1,1}\,|\cdots|\,a_{i+1,k(i+1)}]\,|\,c_{i+2}\,|\cdots|\,c_n\,\rangle.$$

Así, los morfismos obtenidos coinciden con los dados por Munkholm para la contracción entre $\bar{\Omega}\bar{B}A$ y A. □

De forma completamente análoga a la construcción de esta contracción $\bar{\Omega}\bar{B}A \Rightarrow A$, podemos establecer otra contracción $\bar{B}\bar{\Omega}C \Rightarrow C$, para una DGA–coálgebra C, simplemente conexa.

Proposición 2.2.2 *Dada una DG–coálgebra simplemente conexa, C, se puede establecer una contracción $c_C : \{\bar{B}\bar{\Omega}C,\, C,\, \alpha_C,\, \rho_C,\, h_C\}$.*

Demostración.

El primer paso sería la contracción que se establece entre $\bar{B}T^a s^{-1}\bar{C}$ y C. Establecemos, en primer lugar, la contracción

$$(\alpha,\rho,h) : \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C} \Rightarrow C\,,$$

donde

- $\alpha : \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C} \to C$,
$$\alpha[\,a_1\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = 0 \text{ si } n > 1 \text{ ó } k(1) > 1;$$
$$\alpha[\,\langle c\rangle\,] = c;$$
- $\rho : C \to \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C}$, con $\rho(c) = [\,\langle c\rangle\,]$
- $h : \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C} \to \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C}$
$$h[\,a_1\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = 0 \text{ si } n = 0 \text{ ó } k(1) = 1;$$
$$h[\,\langle c_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n]$$
$$= (-1)^{|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n], \quad \text{si } k(1) > 1\,.$$

Es evidente que se cumplen las igualdades

$$\alpha\,\rho = 1 \qquad h\,\alpha = 0, \qquad \rho\,h = 0 \qquad h\,h = 0.$$

Para probar que $\rho\,\alpha = 1 - d\,h - h\,d$, tenemos que distinguir, de nuevo, varios casos, según el elemento que consideremos, siendo trivial el caso de aquellos del tipo $[\,\langle c\rangle\,]$.

Consideraremos, pues, elementos $[\,a_1|\,\cdots\,|\,a_n\,]$, con $k(1) = 1$ y $n > 1$:

$$\rho\,\alpha[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = 0 \qquad \text{y} \qquad d\,h[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = 0\,,$$

por lo que hemos de comprobar

$$[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = h\,d[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]\,.$$

Pero $d = d_t + d_s$, y d_t no altera la dimensión simplicial de un elemento, por lo que $h\,d_t[\,\langle\,c_1\,\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n] = 0$. Es más, sólo un sumando de d_s sobrevive a h,

$$\begin{aligned} h\,d[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] &= h((-1)^{|c_1|}[\,\langle\,c_1\,|\,c_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{2,k(2)}\,\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]) \\ &= [\,\langle c_1\rangle\,|\,\langle\,c_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{2,k(2)}\,\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \end{aligned}$$

Por último, para elementos $[\,\langle c_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]$, con $k(1)>1$, habrá que probar que $1 = h\,d + d\,h$.

$$
\begin{aligned}
h\,d[\,a_1\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] &= h(-\sum_i(-1)^{\gamma_i}[\,a_1\,|\,\cdots\,|\,d_t\,a_i\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\
&\quad +\sum_i(-1)^{\beta_i}[a_1\,|\,\cdots\,|\,\langle c_{i,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{i,k(i)}\,|c_{i+1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{i+1,k(i+1)}\rangle \\
&\qquad |\,a_{i+2}\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]) \\
&= -(-1)^{|c_{1,1}|+1}[\,d_t\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\
&\quad -(-1)^{|c_{1,1}|+1+|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,d_t\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\
&\quad -\sum_{i\geq 2}(-1)^{\gamma_i+|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,d_t a_i\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\
&\quad +(-1)^{|a_1|+1+|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\,|\,c_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{2,k(2)}\rangle \\
&\qquad |\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\
&\quad +\sum_i(-1)^{\beta_i+|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots \\
&\qquad |\,\langle c_{i,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{i,k(i)}\,|\,c_{i+1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{i+1,k(i+1)}\rangle \\
&\qquad |\,a_{i+2}\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]
\end{aligned}
$$

con $\gamma_i = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{i-1}| + i - 1$ y $\beta_i = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_i| + i$.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
d\,h[\,a_1\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] &= d((-1)^{|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]) \\
&= (-1)^{|c_{1,1}|+1}[\,d_t\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]) \\
&\quad +(-1)^{|c_{1,1}|+1+|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,d_t\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_3\,|\,\cdots\,|\,a_n\,])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i\geq 2}(-1)^{|c_{1,1}|+\gamma'_i}[\,\langle c_{1,1}\rangle \,|\, \langle c_{1,2} \,|\, \cdots \,|\, c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \\
&\qquad\qquad |\, d_t a_i \,|\, \cdots \,|\, a_n\,])\\
&+(-1)^{|c_{1,1}|+|c_{1,1}|}[\,a_1 \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,]\\
&+(-1)^{|c_{1,1}|+|a_1|}[\,\langle c_{1,1}\rangle \,|\, \langle c_{1,2} \,|\, \cdots \,|\, c_{1,k(1)} \,|\, c_{2,1} \,|\, \cdots \,|\, c_{2,k(2)}\rangle \\
&\qquad\qquad |\, a_3 \,|\, \cdots\, a_n\,]\\
&+\sum_{i\geq 2}(-1)^{|c_{1,1}|+\beta'_i}[\,\langle c_{1,1}\rangle \,|\, \langle c_{1,2} \,|\, \cdots \,|\, c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_3 \,|\, \cdots \\
&\qquad\qquad |\, \langle c_{i,1} \,|\, \cdots \,|\, c_{i,k(i)} \,|\, c_{i+1,1} \,|\, \cdots \,|\, c_{i+1,k(i+1)}\rangle \\
&\qquad\qquad |\, a_{i+2} \,|\, \cdots \,|\, a_n\,]
\end{aligned}
$$

donde $\gamma'_i = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{i-1}| + i$ y $\beta'_i = |a_1| + \cdots |a_i| + i + 1$.

Con ello queda probada la igualdad $\rho\,\alpha = 1 - d\,h - h\,d$.

Introducimos ahora, como dato de perturbación, dentro de la diferencial tensorial de la construcción bar, la diferencial cosimplicial, de manera que la fórmula para la perturbación, δ, al aplicarla a un elemento genérico $[a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n]$ con $a_j = \langle c_{j,1} \,|\, \cdots \,|\, c_{j,k(j)}\rangle$, es

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} 1^{\otimes j-1} \otimes \uparrow (-d_{cos}) \downarrow \otimes 1^{\otimes n-j}\,,$$

donde

$$d_{cos} \;=\; \sum_{1\leq i\leq k(j)} 1^{\otimes i-1} \otimes \downarrow^{\otimes 2}\, \Delta_C \uparrow \otimes 1^{\otimes k(j)-i}.$$

Evidentemente, $d+\delta$ es una nueva diferencial, ya que se trata de la diferencial de $\bar{B}\,\bar{\Omega}\,C$. Aplicando el lema básico de perturbación, tenemos una nueva contracción

$$(\alpha_C, \rho_C, h_C) : \bar{B}\,\bar{\Omega}\,C \Rightarrow C\,,$$

que pasamos a describir a continuación.

- $\alpha_C = \alpha - \alpha\,\delta\,h + \alpha\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$.

  Recordamos que α es no nulo sólo para elementos $[\,\langle c\rangle\,]$, por lo que $\alpha_C = \alpha$.

- $\rho_C = \rho - h\,\delta\,\rho + h\,\delta\,h\,\delta\,\rho - \cdots$.

  En primer lugar, daremos una expresión para $(h\,\delta)^i$, que aparece, tanto en la expresión de ρ_C, como, posteriormente, en la de h_C. En ambos casos se habrá de aplicar $(h\,\delta)^i$ a un elemento con $k(1) = 1$, ya que, tanto ρ como h dan lugar a elementos con esa condición. Por tanto, comenzamos aplicando $h\,\delta$ a un elemento $[\,\langle c_1\rangle\,]\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]$, para después generalizar a $(h\,\delta)^i$.

  Aclaremos, primero, la notación a seguir en las próximas fórmulas. Recordemos que
$$\Delta_C(c) = \sum_i c_i^1 \otimes c_i^2\,.$$
  Por ser coherentes con una notación posterior, denotaremos por $\Delta^{i,1}$ la primera proyección del sumando i-ésimo y por $\Delta^{i,2}$ la segunda proyección. Es decir,
$$\Delta_C(c) = \sum_i \Delta^{i,1}c \otimes \Delta^{i,2}c\,.$$
  Así,
$$\begin{aligned} h\,\delta[\,\langle c_1\rangle\,]\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] &= h[-d_{cos}\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\ &= \sum_i(-1)^{|\Delta^{i,1}c_1|+1}[\,\langle\Delta^{i,1}c_1|\Delta^{i,2}c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] \\ &= \sum_i(-1)^1[\,\langle\Delta^{i,1}c_1\rangle\,|\,\langle\Delta^{i,2}c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]. \end{aligned}$$
  Téngase en cuenta que sólo hemos considerado los sumandos de δ que no dan como resultado elementos del ker h. Podemos describir, entonces, las sucesivas potencias del morfismo $(h\,\delta)$ para un elemento con $k(1) = 1$,
$$\begin{aligned} &(h\,\delta)^i([\,\langle c_1\rangle\,]\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]) \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_i}(-1)^i[\,\langle\,\Delta^{j_i,1}\cdots\Delta^{j_1,1}c_1\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_i,2}\Delta^{j_{i-1},1}\cdots\Delta^{j_1,1}c_1\rangle\,|\,\cdots \\ &\qquad |\,\langle\,\Delta^{j_2,2}\Delta^{j_1,1}c_1\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_1,2}c_1\rangle\,|\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]\,. \end{aligned}$$
  El hecho de que C sea simplemente conexa permite asegurar que el proceso es finito. Así, pues,

$$
\begin{aligned}
\rho_C(c) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i(h\,\delta)^i\rho(c)\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_i}[\,\langle\,\Delta^{j_i,1}\cdots\Delta^{j_1,1}c\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_i,2}\Delta^{j_{i-1},1}\cdots\Delta^{j_1,1}c\rangle\,|\,\cdots\\
&\qquad\qquad|\,\langle\,\Delta^{j_2,2}\Delta^{j_1,1}c\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_1,2}c\rangle\,]
\end{aligned}
$$

- $h_C = h - h\,\delta\,h + h\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$

Sabemos que $h[\,\langle c_1\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,] = 0$ por lo que sólo aplicaremos h_C a elementos $\omega = [\,\langle c_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]$, con $k(1) > 1$,

$$
\begin{aligned}
h_C(\omega) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i(h\,\delta)^i h[\,\langle c_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]\\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i+|c_{1,1}|}(h\,\delta)^i[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_i}\sum_{i\geq 0}(-1)^{|c_{1,1}|}[\,\langle\,\Delta^{j_i,1}\cdots\Delta^{j_1,1}c_{1,1}\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_i,2}\Delta^{j_{i-1},1}\cdots\Delta^{j_1,1}c_{1,1}\rangle\,|\,\cdots\\
&\qquad\qquad|\,\langle\,\Delta^{j_2,2}\Delta^{j_1,1}c_{1,1}\rangle\,|\,\langle\,\Delta^{j_1,2}c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\,\cdots\,|\,c_{1,k(1)}\rangle\\
&\qquad\qquad|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,].
\end{aligned}
$$

□

A continuación, exponemos el teorema principal de este capítulo por el que establecemos una representación estructural de una A_∞–álgebra en forma de contracción y dualizamos, posteriormente, dicho resultado para el caso de A_∞–coálgebras. La técnica de trabajo aquí es exactamente la misma que la desarrollada en las proposiciones anteriores.

Teorema 2.2.3 *A es una A_∞-álgebra si y sólo existe una contracción, $c : \{A', A, f, g, \phi\}$, de una DGA-álgebra conexa A' al DGA–módulo A, tal que la aplicación del ardid tensorial a la contracción c de como resultado la estructura de A_∞-álgebra original.*

Demostración.

Evidentemente, la implicación de derecha a izquierda es trivial. Para la otra implicación, construiremos una contracción que constituye una generalización de la contracción $c_A : \bar{\Omega}\bar{B}A \Rightarrow A$, descrita en la página 38, al caso en que A sea una A_∞–álgebra.

Así, siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración de la proposición 2.2.1, por el que obtuvimos los morfismos componentes de la contracción, c_A, dada por Munkholm, obtenemos una más general $\tilde{c}_A : \bar{\Omega}\tilde{\bar{B}}A \Rightarrow A$, que para el caso particular en que la A_∞–álgebra sea $(A, m_1, m_2, 0, 0, \ldots)$, es decir, el caso de una DG-álgebra, coincide con c_A.

Sea $(A, m_1, m_2, \ldots)$ una A_∞–álgebra. Consideramos el álgebra con producto trivial $N(A) = (A, m_1, 0, 0, \ldots)$. Entonces $\bar{B}\,N(A)$ coincide con $T^c s\bar{A}$ y, por tanto, su diferencial será $d_{\bar{B}} = d_t$, que, aplicado sobre un elemento de longitud n es

$$d_t = \sum_{j=0}^{n-1} 1^{\otimes j} \otimes \uparrow m_1 \downarrow \otimes 1^{\otimes n-j-1} .$$

Así, m_1 interviene en la diferencial tensorial de $\bar{\Omega}\,\bar{B}\,N(A) = \bar{\Omega}\,T^c s\bar{A}$ y el resto de morfismos que constituyen la estructura infinita, $m_2, m_3, \ldots$, serán introducidos posteriormente a modo de perturbación.

Así, pues, partimos de la ya conocida contracción

$$(\alpha, \rho, h) : \bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A} \Rightarrow A ,$$

descrita en la página 35 y que recordamos brevemente.

- $\alpha : \bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A} \to A$, con $\alpha\langle\,[a]\,\rangle = a$ y $\alpha \equiv 0$ en otro caso.
- $\rho : A \to \bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A}$, con $\rho(a) = \langle\,[a]\,\rangle$.
- $h : \bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A} \to \bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A}$, que es únicamente no nulo, en el caso $n > 1$, $k(1) = 1$,

$$h\langle\,[a_1]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle = (-1)^{|a_1|+1}\langle\,[a_1\,|\,a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{2,k(2)}]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle\,.$$

Introducimos, entonces, los morfismos $(m_2, m_3, \ldots)$ como perturbación en la diferencial tensorial de la cobar. Así, $(\bar{\Omega}\,T^c\, s\bar{A}, d_{\bar{\Omega}} + \delta)$, donde δ es la perturbación, pasa a ser $\bar{\Omega}\,\tilde{B}(A)$. Es decir, el morfismo δ, aplicado a un elemento genérico $\langle c_1 \,|\, \cdots \,|\, c_n\rangle$, con $c_j = [a_{1,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{j,k(j)}]$ será

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} 1^{\otimes j-1} \otimes \downarrow (-d_\delta) \uparrow \otimes 1^{\otimes n-j} \,,$$

donde

$$d_\delta \;=\; \sum_{k=2}^{k(j)} \sum_{i=1}^{k(j)-k+1} 1^{\otimes i-1} \otimes \uparrow m_k \downarrow^{\otimes k} \otimes 1^{\otimes k(j)-k-i+1}.$$

Efectivamente, $(d_{\bar{\Omega}} + \delta)^2 = 0$, ya que $d_{\bar{\Omega}} + \delta$ es la diferencial de $\bar{\Omega}\,\tilde{B}(A)$.

Además, la composición $(h\,\delta)$ es nilpotente. Por un lado, δ actúa disminuyendo el grado simplicial de las componentes en la bar, ya que depende de los morfismos $m_i : A^{\otimes i} \to A$; por otro lado, h reduce el número de componentes en la cobar. Por tanto, debido a la finitud de la longitud del elemento al que se aplica, siempre ha de existir un valor n para el que $(h\,\delta)^n = 0$.

Aplicamos, pues, el Lema Básico de Perturbación por el que obtenemos una nueva contracción,

$$(f, g, \phi) : \bar{\Omega}\tilde{B}(A) \Rightarrow A\,,$$

cuyos morfismos integrantes describimos a continuación.

- $f = \alpha - \alpha\,\delta\,h + \alpha\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$

  Observamos que cada sumando $\alpha(\delta\,h)^i$ será no nulo sólo cuando $(\delta\,h)^i$ dé como resultado un elemento de la forma $\langle\,[a]\,\rangle$. Teniendo esto en cuenta y el hecho de que h se anula sobre elementos con $k(1) > 1$, el único sumando que habrá que considerar al aplicar $\delta\,h$ será el que se indica explícitamente a continuación.

  $\delta\,h\langle\,[a_1]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle$

  $$= (-1)^{|a_1|+1}\delta\langle\,[a_1\,|\,a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{2,k(2)}]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle$$

  $$= (-1)^{|a_1|+1}\langle\,-d_\delta[a_1 \otimes a_{2,1} \otimes \cdots \otimes a_{2,k(2)}]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle$$

$$= (-1)^{|a_1|}\langle \uparrow m_{k(2)+1} \downarrow^{\otimes k(2)+1} [a_1 \mid a_{2,1}| \cdots \mid a_{2,k(2)}] \mid c_3 \mid \cdots \mid c_n \rangle$$

$$= (-1)^{|a_1|+\zeta_{k(2)+1}}\langle [m_{k(2)+1}(a_1 \otimes a_{2,1} \otimes \cdots \otimes a_{2,k(2)})] \mid c_3 \mid \cdots \mid c_n \rangle + \cdots ,$$

donde

$$\zeta_{k(2)+1} = k(2)|a_1| + (k(2)-1)|a_{2,1}| + \cdots + |a_{2,k(2)-1}| + [(k(2)+1)/2]$$

y los puntos suspensivos indican los sumandos que desechamos.

Podemos describir, salvo signo, las sucesivas potencias del morfismo $(\delta\, h)$ de forma recursiva:

$$(\delta\, h)^i(\omega) = (\delta\, h)^i\langle [a_1] \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n \rangle$$

$$= \pm\langle [m_{k(i+1)+1}(\pi_{1,1}((\delta\, h)^{i-1}\omega) \otimes a_{i+1,1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1,k(i+1)})] \mid c_{i+2} \mid \cdots \mid c_n \rangle,$$

donde $\pi_{1,1}\langle [a_{1,1}| \cdots |a_{1,k(1)}] \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n \rangle = a_{1,1}$.

Obsérvese que cada vez que se aplica $\delta\, h$, disminuye en 1 la dimensión cosimplicial del elemento a la vez que se obtiene un elemento con $k(1) = 1$. Después de $n-1$ iteraciones sobre un elemento que inicialmente tenía dimensión cosimplicial n, llegamos a uno de dimensión cosimplicial 1, al que podemos aplicar el morfismo α. Así, en realidad,

$$f(\omega) = f\langle [a_1] \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n \rangle$$

$$= (-1)^{n-1}\alpha\,(\delta\, h)^{n-1}\langle [a_1] \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n \rangle$$

$$= \pm m_{k(n)+1}(\pi_{1,1}((\delta\, h)^{n-2}\omega) \otimes a_{n,1} \otimes \cdots \otimes a_{n,k(n)}) .$$

En el caso concreto de que el elemento sea de la forma $\langle [a_1] \mid c_2 \rangle$,

$$\begin{aligned} f\langle [a_1] \mid c_2 \rangle &= -\alpha\,\delta\, h\langle [a_1] \mid c_2 \rangle \\ &= (-1)^{1+|a_1|+\zeta_{k(2)+1}} m_{k(2)+1}(a_1 \otimes a_{2,1} \otimes \cdots \otimes a_{2,k(2)}) . \end{aligned}$$

- $g = \rho - h\delta\rho + h\delta h\delta\rho - \cdots$.

  Como $\delta\langle [a] \rangle = 0$, tenemos, simplemente, $g = \rho$

- $\phi = h - h\,\delta\, h + h\,\delta\, h\,\delta\, h - \cdots$.

  Sabemos que $h\langle\, [a_{1,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{1,k(1)}]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle = 0$ siempre que $k(1) > 1$ ó $n = 0$ ó $n = 1$. Así, de forma similar a lo que ocurre con f, al ser h el último morfismo a aplicar en cada sumando, podemos descartar los mismos sumandos que antes y obtener la misma expresión para $(\delta\, h)^i$ En realidad,

$$
\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \phi\langle\, [a_1]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1} h\,(\delta\, h)^{i-1}\langle\, [a_1]\,|\,c_2\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&= (-1)^{|a_1|+1}\langle\, [a_1\,|\,a_{2,1}\,|\,\cdots\,|\,a_{2,k(2)}]\,|\,c_3\,|\,\cdots\,|\,c_n\,\rangle \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} \pm\langle\, [m_{k(i)+1}(\pi_{11}((\delta\, h)^{i-2}\omega)\otimes a_{i,1}\otimes\cdots\otimes a_{i,k(i)})|a_{i+1,1}|\cdots|a_{i+1,k(i+1)}] \\
&\qquad |\,c_{i+2}\,|\cdots|\,c_n\,\rangle
\end{aligned}
$$

  En concreto, para un elemento de la forma $\langle\, [a_1]\,|\,c_2\,\rangle$,

$$
\phi\langle\, [a_1]\,|\,c_2\,\rangle \;=\; (-1)^{|a_1|+1}\langle\, [a_1\,|\,a_{2,1}\,|\cdots|\,a_{2,k(2)}]\,\rangle \tag{2.18}
$$

Así pues, tenemos una contracción $c\,(f, g, \phi)\,:\,\bar{\Omega}\tilde{\bar{B}}(A) \Rightarrow A$ en la que, además, la diferencial adicional que se induce en A por el proceso de perturbación es nula, ya que viene dada por

$$
\sum_{i\geq 0}(-1)^i\alpha\delta\,(h\delta)^i\,\rho
$$

y $\delta\rho(a) = 0$.

Hemos de comprobar que la estructura de A_∞–álgebra que se genera en A al aplicar el funtor bar a la contracción anterior coincide con la propia estructura infinita de A.

Para ello consideramos la contracción

$$
Tsc\,(T(f), T(g), T(-\phi)) : Ts(\bar{\Omega}\tilde{\bar{B}}(A)) \Rightarrow TsA)\,,
$$

en la que introducimos como perturbación la diferencial simplicial $d_s\,:\,Ts(\bar{\Omega}\tilde{\bar{B}}(A)) \to Ts(\bar{\Omega}\tilde{\bar{B}}(A))$, que depende del producto en la cobar, es decir, del producto yuxtaposición, $\mu_{\bar{\Omega}}$. Así,

$$
d_s = \sum_{j=0}^{n-1} 1^{\otimes j}\otimes\mu_{\bar{\Omega}}\otimes 1^{\otimes n-j-1}\,.
$$

De nuevo estamos en condiciones de aplicar el Lema Básico de Perturbación, una vez comprobada la nilpotencia de la composición $T(-\phi)\, d_s$. Dicha nilpotencia se da debido a que d_s actúa sin modificar la suma de las longitudes de las distintas componentes del elemento en la cobar, mientras que $T(-\phi)$ siempre disminuye, al menos de uno, esta cantidad. Por la aplicación del mencionado lema obtenemos una nueva contracción

$$(f_s, g_s, \phi_s) : \bar{B}\bar{\Omega}\tilde{B}(A) \Rightarrow (TsA), \tilde{d})\,,$$

donde

$$\tilde{d} = d_t + \sum_{i\geq 0}(-1)^i Tf\, d_s\, (T(-\phi)\, d_s)^i\, Tg\,.$$

Ahora bien, según se desarrolló en la sección 2.1, A adquiere una estructura de A_∞–álgebra que vendría dada por los morfismos

$$\widetilde{m}_n = (-1)^{n+1} f\, \mu^{(1)}\, \Psi^{(2)} \dots \Psi^{(n-1)}\, g^{\otimes n}\,.$$

A continuación probaremos que estos morfismos $\widetilde{m}_n$ coinciden con los m_n que originariamente dotaban a A de estructura de A_∞–álgebra. Para ello los aplicaremos a un elemento $a = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ de $A^{\otimes n}$.

En primer lugar,

$$g^{\otimes n}(a) = g^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \langle\, [a_1]\,\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\, [a_n]\,\rangle\,.$$

Proseguimos aplicando $\Psi^{(n-1)} = \phi^{[\otimes n-1]}\mu^{(n-1)}$ a los n factores de la cobar resultantes, todos ellos con dimensión cosimplicial 1.

$$\begin{aligned}\mu^{(n-1)}\langle\, [a_1]\,\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\, [a_n]\,\rangle \;&=\; \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1}\langle\, [a_1]\,\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\, [a_i]\,\rangle \otimes \langle\, [a_{i+1}]\,|\,[a_{i+2}]\,\rangle \\ &\qquad \otimes\langle\, [a_{i+3}]\,\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\, [a_n]\,\rangle\,,\end{aligned}$$

donde, en cada sumando, hay exactamente un factor que tiene dimensión cosimplicial 2, mientras que los demás factores siguen teniendo dimensión cosimplicial 1.

Recordemos que $\phi^{[\otimes n-1]} = \sum_{i=0}^{n-2} 1^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes n-i-2}$ y que ϕ es nulo sobre elementos de dimensión cosimplicial 1. Así, el único sumando que es posible aplicar a continuación es $1^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes n-i-2}$, donde ϕ actúa sobre el único elemento de dimensión cosimplicial 2 (según la fórmula (2.18)).

$$\phi^{[\otimes n-1]}\mu^{(n-1)}g^{\otimes n}(a) = \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1+\gamma_i}\langle [a_1]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle [a_i]\rangle \otimes \langle [a_{i+1} \,|\, a_{i+2}]\rangle \otimes\langle [a_{i+3}]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle [a_n]\rangle ,$$

donde $\gamma_i = |a_1| + \cdots |a_i| + |a_{i+1}| + 1$.

Nótese que los elementos que se obtienen siguen siendo un producto tensorial de factores con dimensión cosimplicial 1. En general, cada vez que se aplique $\Psi^{()}$ a un producto tensorial de factores de dimensión cosimplicial 1, se obtendrán factores también de dimensión cosimplicial 1, como veremos a continuación.

Consideremos, pues, un elemento general de $(\bar{\Omega}\tilde{B}(A))^{\otimes j}$ en el que todos los factores tienen dimensión cosimplicial 1, $\langle c_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle c_j \rangle$, entonces,

$$\mu^{(j-1)}\langle c_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle c_j\rangle = \sum_{i=0}^{j-2}(-1)^{i+1}\langle c_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle c_i\rangle\otimes\langle c_{i+1} \,|\, c_{i+2}\rangle\otimes\langle c_{i+3}\rangle\otimes\cdots\otimes\langle c_j\rangle ,$$

que posee un único factor con dimensión cosimplicial 2, $\langle c_{i+1} \,|\, c_{i+2} \rangle$. Así, $\phi^{[\otimes j-1]}$ se reduce al sumando $1^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes j-i-2}$ en el que ϕ se aplica a dicho elemento. Pero $\phi(\langle c_{i+1} \,|\, c_{i+2} \rangle)$ resultará no nulo sólo si $k(i+1) = 1$, es decir, si $c_{i+1} = [a_{i+1}]$, en cuyo caso,

$$\Psi^{(j-1)}\langle c_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle c_j\rangle = \sum_{i=0}^{j-2}(-1)^{i+1+\gamma_i}\langle c_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle c_i\rangle \otimes\langle [a_{i+1} \,|\, a_{i+2,1} \,|\cdots|\, a_{i+2,k(i+2)}]\rangle \otimes g\, f\langle c_{i+3}\rangle \otimes \cdots \otimes g\, f\langle c_j\rangle , \qquad (2.19)$$

con $\gamma_i = |c_1| + \cdots + |c_i| + i + |a_{i+1}| + 1$.

Además, recordando la forma de actuar f, $f\langle c_{i+3}\rangle, \ldots f\langle c_j\rangle$ serán no nulos sólo si $k(i+3) = 1 = \cdots = k(j)$, en cuyo caso, el sumando correspondiente al índice i sería

$$\langle c_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle c_i\rangle \otimes \langle [a_{i+1} \,|\, a_{i+2,1} \,|\, \cdots \,|\, a_{i+2,k(i+2)}]\rangle \otimes \langle [a_{i+3}]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle [a_j]\rangle .$$

Es decir, para cada i, sólo se obtiene un sumando no nulo si el elemento al que se aplica $\Psi^{(j-1)}$ era de la forma

$$\langle c_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle c_i\rangle \otimes \langle [a_{i+1}]\rangle \otimes \langle c_{i+2}\rangle \otimes \langle [a_{i+3}]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle [a_j]\rangle . \qquad (2.20)$$

Observemos también que al aplicar el morfismo $\Psi^{()}$, $\mu^{()}$ siempre va a disminuir en uno el número de factores de la cobar, pues yuxtapone dos consecutivos, y $\phi^{[]}$ no va a alterarlo, por lo que, en total, se obtiene un producto tensorial con un factor menos que antes. Así, comenzando con un producto tensorial de n elementos de la cobar y después de aplicar $\Psi^{()}$ $n-2$ veces, llegaremos a dos factores que $\mu^{(1)}$ yuxtapone dando lugar a un único factor, al que finalmente aplicaremos f. Teniendo en cuenta esto, junto con el hecho de que los elementos que sobreviven a la aplicación de $\Psi^{(j-1)}$ son los de la forma (2.20), concluímos que el único sumando de $\Psi^{(j-1)}$ que puede sobrevivir a la aplicación de todos los morfismos restantes, $f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2)}\cdots\Psi^{(j-2)}$, es el que corresponde a $i=j-2$ en el sumatorio anterior (2.19), siempre que $c_{j-1}=[a_{j-1}]$:

$$\Psi^{(j-1)}\langle c_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle c_j\rangle = (-1)^{j-1+\gamma_{j-2}}\langle c_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle c_{j-2}\rangle\otimes\langle\,[a_{j-1}|a_{j,1}|\cdots|a_{j,k(j)}]\,\rangle+\cdots,$$

donde los puntos suspensivos indican el resto de sumandos que, de ahora en adelante, obviaremos.

Así,

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_n(a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &= (-1)^{n+1}f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-1)}\,g^{\otimes n}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\ &= (-1)^{n+1}f\,\mu^{(1)}\Psi^{(2,n-2)}\Psi^{(n-1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_n]\,\rangle\\ &= (-1)^{\gamma_{n-2}}f\,\mu^{(1)}\Psi^{(2,n-2)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_{n-2}]\,\rangle\otimes\langle\,[a_{n-1}|a_n]\,\rangle\,.\end{aligned}$$

Recordamos que $\gamma_{n-2}=n-1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}|a_i|$.

Podemos probar, fácilmente, por inducción en k, que

$$\Psi^{(n-k,n-1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_n]\,\rangle = (-1)^{\varrho(k)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_{n-k-1}]\,\rangle\otimes\langle\,[a_{n-k}|\cdots|a_n]\,\rangle,$$

donde $\varrho(k)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}(n-i)+\sum\limits_{i=1}^{k}i\,|a_{n-i}|+k\sum\limits_{i=k+1}^{n-1}|a_{n-i}|\,.$

Por supuesto, se verifica para el caso $k=1$, ya que $\Psi^{(n-1,n-1)}=\Psi^{(n-1)}$, que acabamos de aplicar arriba.

Para pasar de k a $k+1$,

$$\begin{aligned}\Psi^{(n-k-1,n-1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_n]\,\rangle &= \Psi^{(n-k-1)}\Psi^{(n-k,n-1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_n]\,\rangle\\ &= \Psi^{(n-k-1)}(-1)^{\varrho(k)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_{n-k-1}]\,\rangle\otimes\langle\,[a_{n-k}|\cdots|a_n]\,\rangle\\ &= (-1)^{\varrho(k)+n-k-1+\gamma_{n-k-2}}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_{n-k-2}]\,\rangle\otimes\langle\,[a_{n-k-1}|\cdots|a_n]\,\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\varrho(k)+n-k-1+\gamma_{n-k-2} &= \sum_{i=0}^{k-1}(n-i)+\sum_{i=1}^{k} i\,|a_{n-i}|+k\sum_{i=k+1}^{n-1}|a_{n-i}|\\ &\quad +n-k+\sum_{i=k+1}^{n-1}|a_{n-i}|\\ &= \sum_{i=0}^{k}(n-i)+\sum_{i=1}^{k+1} i\,|a_{n-i}|+(k+1)\sum_{i=k+2}^{n-1}|a_{n-i}|\,.\end{aligned}$$

En concreto, en el caso en que $k=n-2$ que es realmente el que nos interesa,

$$\Psi^{(2,n-1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\cdots\otimes\langle\,[a_n]\,\rangle = (-1)^{\varrho(n-2)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\langle\,[a_2|\cdots|a_n]\,\rangle\,,$$

donde

$$\begin{aligned}\varrho(n-2) &= \sum_{i=0}^{n-3}(n-i)+\sum_{i=1}^{n-2} i\,|a_{n-i}|+(n-2)|a_1|\\ &\equiv [(n-1)/2]+\sum_{i=1}^{n-2} i\,|a_{n-i}|+(n-2)|a_1| \pmod 2\,.\end{aligned}$$

Por tanto, volviendo a $\widetilde{m}_n$,

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_n(a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &= (-1)^{n+1} f\,\mu^{(1)}\,\Psi^{(2,n-1)}\,g^{\otimes n}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\ &= (-1)^{n+1+\varrho(n-2)} f\,\mu^{(1)}\langle\,[a_1]\,\rangle\otimes\langle\,[a_2|\cdots|a_n]\,\rangle\\ &= (-1)^{n+\varrho(n-2)} f\langle\,[a_1]\,|\,[a_2|\cdots|a_n]\,\rangle\\ &= (-1)^{n+\varrho(n-2)+1+|a_1|+\zeta_n} m_n(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\,,\end{aligned}$$

donde $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n-1} i\,|a_{n-i}| + [n/2]$ y, por tanto,

$$n + \varrho(n-2) + 1 + |a_1| + \zeta_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,,$$

es decir, que la estructura de A_∞–álgebra obtenida coincide con la que iniciamente poseía A, lo que prueba finalmente el teorema. □

Dada una A_∞–álgebra A, habrá en principio muchas contracciones de una DGA-álgebra A' en A tal que al aplicarle el ardid tensorial volvamos a recobrar la A_∞–álgebra original de A. Ahora bien, en el teorema anterior hemos establecido una concreta c_A que presenta una fórmulación general para cualquier A_∞-álgebra y que sólo depende de los morfismos m_i de la A_∞-estructura. Aunque no aparece difícil el problema de paralelizar el trabajo de Munkholm sobre TEXs [Mun74] al área de A_∞-estructuras, sólo nos contentaremos por ahora con definir el siguiente concepto:

Definición 2.2.4 *Dada una A_∞–álgebra A, se llama* representación TEX *de A a cualquier contracción de una DGA–álgebra conexa A' en A, tal que al aplicarsele el ardid tensorial, nos devuelva la estructura de A_∞-álgebra original de A. Se llama* representación TEX canónica o inicial *de A a la contracción c_A.*

Es inmediato probar el siguiente siguiente resultado:

Proposición 2.2.5 *Dada una representación TEX $c : \{A', A, f, g, \phi\}$ de la A_∞-álgebra A, se tiene que:*

- *existe un morfismo de DGA-álgebras $k : \bar{\Omega}\tilde{B}(A) \to A'$.*
- *A' es homotópicamente equivalente a $\bar{\Omega}\tilde{B}(A)$, como álgebras.*
- *existe una contracción c' de $\bar{\Omega}\bar{B}(A')$ en A dada por la composición $c' = c_A\,\bar{\Omega}\bar{B}(c)$, donde c_A es la representación TEX canónica y $\bar{B}(c)$ (resp. $\bar{\Omega}(c)$) es la contracción resultante de aplicar el ardid tensorial a c usando la construcción bar (resp. la construcción cobar).*

Demostración.

Teniendo en cuenta las contracciones

$$c_{A'} : \{\bar{\Omega}\bar{B}(A'), A', \alpha_{A'}, \rho_{A'}, h_{A'}\} \quad \text{y} \quad \bar{\Omega}\bar{B}(c) : \{\bar{\Omega}\bar{B}(A'), \bar{\Omega}\tilde{B}(A), \bar{\Omega}\bar{B}(f), \bar{\Omega}\bar{B}(g), \bar{\Omega}\bar{B}(\phi)\},$$

es trivial construir una equivalencia de homotopía explícita ligando las álgebras A' y $\bar{\Omega}\tilde{B}(A)$ y en la cual, la composición $k = \alpha_{A'}\,\bar{\Omega}\bar{B}(g)$ es un morfismo de DGA-álgebras. En el último apartado, simplemente hay que comprobar que se puede establecer esa composición de contracciones. □

Podemos dualizar el teorema 2.2.3 para A_∞–coálgebras. En la demostración, obviaremos los pasos que sean semejantes al caso dual.

Teorema 2.2.6 *C es una A_∞-coálgebra si y sólo existe una contracción, $c : \{C', C, f, g, \phi\}$, de una DGA-coálgebra simplemente conexa C' al DGA-módulo C, tal que la aplicación del ardid tensorial a la contracción c dé como resultado la estructura de A_∞-coálgebra original en C.*

Demostración.

Evidentemente, la implicación de derecha a izquierda es obvia. Para la otra implicación haremos, igualmente una generalización de la contracción (α_C, ρ_C, h_C) dada en la proposición 2.2.2 para A_∞–coálgebras.

Sea $(C, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$ una A_∞–coálgebra. Consideramos la coálgebra con coproducto trivial $N(C) = (C, \Delta_1, 0, 0, \ldots)$. Entonces $\bar{\Omega}\,N(C)$ coincide con $T^a s^{-1}\bar{C}$ y, por tanto, su diferencial será $d_{\bar{\Omega}} = d_t = \sum_{j=0}^{n-1} 1^{\otimes j} \otimes \uparrow \Delta_1 \downarrow \otimes 1^{\otimes n-j-1}$ sobre un elemento de longitud n. Así, partimos de la contraccción

$$(\alpha, \rho, h) : \bar{B}\,T^a\,s^{-1}\bar{C} \Rightarrow C\,,$$

descrita en la página 41, y que coincide con la contracción (α_C, ρ_C, h_C) para el caso en que C es la coálgebra nula, $N(C)$.

- $\alpha : \bar{B}\,T^a s^{-1}\bar{C} \to C$, con $\alpha[\,\langle c\rangle\,] = c$ y $\alpha \equiv 0$ en cualquier otro caso.
- $\rho : C \to \bar{B}\,T^a s^{-1}\bar{C}$, con $\rho(c) = [\,\langle c\rangle\,]$.

- $h : \bar{B}T^a s^{-1}\bar{C} \to \bar{B}T^a s^{-1}\bar{C}$, donde h es no nulo sólo si $k(1) > 1$, en cuyo caso,

$$h[\,\langle c_{1,1}\,|\cdots|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\cdots|\,a_n\,] = (-1)^{|c_{1,1}|}[\,\langle c_{1,1}\rangle\,|\,\langle c_{1,2}\,|\cdots|\,c_{1,k(1)}\rangle\,|\,a_2\,|\cdots|\,a_n\,].$$

Introducimos a modo de perturbación los morfismos $(\Delta_2, \Delta_3, \ldots)$ en la diferencial tensorial de la bar. Así, $(\bar{B}T^a s^{-1}\bar{C}, d_{\bar{B}} + \delta)$, donde δ es la perturbación, pasa a ser $\bar{B}\,\tilde{\Omega}(C)$. Es decir, el morfismo δ, aplicado a un elemento de dimensión simplicial n, $[a_1\,|\,\cdots\,|\,a_n]$, donde $a_j = \langle c_{j,1}\,|\,\cdots\,|\,c_{j,k(j)}\rangle$, será

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} 1^{\otimes j-1} \otimes \downarrow (-d_\delta) \uparrow \otimes 1^{\otimes n-j}\,,$$

donde

$$d_\delta = \sum_{2\leq k}\ \sum_{1\leq i\leq k(j)} 1^{\otimes i-1} \otimes \downarrow^{\otimes k} \Delta_k \uparrow \otimes 1^{\otimes k(j)-i}. \qquad (2.21)$$

Efectivamente, $(d_{\bar{B}} + \delta)^2 = 0$, ya que $d_{\bar{B}} + \delta$ es la diferencial de $\bar{B}\,\tilde{\Omega}(C)$.

Además, la composición $(h\,\delta)$ es puntualmente nilpotente debido a la simple conexión de la coálgebra C.

Aplicamos, pues, el Lema Básico de Perturbación por el que obtenemos una nueva contracción,

$$c(f, g, \phi) : \bar{B}\tilde{\Omega}(C) \Rightarrow C\,,$$

cuyos morfismos integrantes describimos a continuación.

- $f = \alpha - \alpha\,\delta\,h + \alpha\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$

  Teniendo en cuenta que $\alpha[\langle c\rangle] = c$, siendo nulo en cualquier otro caso y que δ no da nunca como resultado un elemento de ese tipo, tenemos que $f = \alpha$.

- $g = \rho - h\delta\rho + h\delta h\delta\rho - \cdots$.

  Tanto en este caso como en el de la fórmula para ϕ, que veremos a continuación, habrá que aplicar la composición $(h\delta)^i$ a elementos con $k(1) = 1$, $\omega = [\,\langle c_1\rangle\,]\,|\,a_2\,|\,\cdots\,|\,a_n\,]$, por lo que comenzaremos estudiando $h\delta$ sobre un elemento de este tipo, para después pasar a cualquier potencia.

Adoptamos, para los morfismos $\Delta_k : C \to C^{\otimes k}$ la misma notación que usamos anteriormente para $\Delta = \Delta_2 : C \to C \otimes C$, es decir

$$\Delta_k(c) = \sum_j \Delta_k^{j,1} c \otimes \cdots \otimes \Delta_k^{j,k} c .$$

Así,

$$\begin{aligned} h\,\delta(\omega) &= h[-d_\delta\langle c_1\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,] \\ &= h\sum_{k\geq 2}\sum_j (-1)^{\varrho_{k,j}+1}[\,\langle \Delta_k^{j,1} c_1 \,|\, \Delta_k^{j,2} c_1 \,|\, \cdots \,|\, \Delta_k^{j,k} c_1\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,] \\ &= \sum_{k\geq 2}\sum_j (-1)^{\varrho_{,kj}+1+|\Delta_k^{j,1}c_1|}[\,\langle \Delta_k^{j,1} c_1\rangle \,|\, \langle \Delta_k^{j,2} c_1 \,|\cdots|\, \Delta_k^{j,k} c_1\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,], \end{aligned}$$

donde $\varrho_{k,j} = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)|\Delta_k^{j,i} c_1|$.

Podemos describir ahora la potencia i–ésima del morfismo $(h\,\delta)$ de forma recursiva:

$$\begin{aligned} (h\,\delta)^i(\omega) = {} & (h\,\delta)^i[\,\langle c_1\rangle\,] \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,] \\ = {} & \sum_{k_1,\ldots k_i\geq 2}\ \sum_{j_1,\ldots j_i} \pm [\,\langle \Delta_{k_i}^{j_i,1}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}\omega)\rangle \\ & \qquad |\,\langle \Delta_{k_i}^{j_i,2}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}\omega) \,|\, \cdots \,|\, \Delta_{k_i}^{j_i,k_i}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}\omega)\rangle \\ & \qquad |\,\langle \Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1},2}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}\omega) \,|\cdots|\, \Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1},k_{i-1}}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}\omega)\rangle \\ & \qquad |\cdots|\,\langle \Delta_{k_1}^{j_1,2} c_1 \,|\, \cdots \,|\, \Delta_{k_1}^{j_1,k_1} c_1\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,] \end{aligned}$$

donde $\pi_{1,1}[\,\langle c_{1,1}| \cdots |c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_n\,] = c_{1,1}$.

Luego, tendremos la siguiente expresión para g, teniendo en cuenta que $\rho(c) = [\,\langle c\rangle\,]$, y salvo signo en cada sumando,

$$\begin{aligned} g(c) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i (h\,\delta)^i \rho(c) \\ &= \sum_{i\geq 0}\ \sum_{k_1,\ldots k_i\geq 2}\ \sum_{j_1,\ldots j_i} \pm [\,\langle \Delta_{k_i}^{j_i,1}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}[\,\langle c\rangle\,])\rangle \end{aligned}$$

$$| \langle \Delta_{k_i}^{j_i,2}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}[\,\langle c\rangle\,]) \,|\cdots|\, \Delta_{k_i}^{j_i,k_i}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}[\,\langle c\rangle\,])\rangle$$

$$| \langle \Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1},2}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}[\,\langle c\rangle\,]) \,|\cdots|\, \Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1},k_{i-1}}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}[\,\langle c\rangle\,])\rangle$$

$$|\cdots|\, \langle \Delta_{k_1}^{j_1,2} c \,|\cdots|\, \Delta_{k_1}^{j_1,k_1} c\rangle\,]$$

- $\phi = h - h\,\delta\,h + h\,\delta\,h\,\delta\,h - \cdots$.

  Sabemos que h es nulo sobre elementos con $k(1) = 1$, por lo que habrá que aplicar ϕ a un elemento con $k(1) > 1$, $\omega = [\,\langle c_{1,1} \,|\cdots|\, c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_2 \,|\cdots|\, a_n\,]$.

$$\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i+|c_{1,1}|}(h\,\delta)^i[\,\langle c_{1,1}\rangle \,|\, \langle c_{1,2} \,|\cdots|\, c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_2 \,|\cdots|\, a_n\,] \\
&= \sum_{i\geq 0}\sum_{k_1,\cdots k_i\geq 2} \pm[\,\langle \Delta_{k_i}^1(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}h\omega)\rangle \\
&\qquad | \langle \Delta_{k_i}^2(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}h\omega) \,|\cdots|\, \Delta_{k_i}^{k_i}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-1}h\omega)\rangle \\
&\qquad | \langle \Delta_{k_{i-1}}^2(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}h\omega) \,|\cdots|\, \Delta_{k_{i-1}}^{k_{i-1}}(\pi_{1,1}(h\,\delta)^{i-2}h\omega)\rangle \,|\cdots \\
&\qquad | \langle \Delta_{k_1}^2 c_{1,1} \,|\cdots|\, \Delta_{k_1}^{k_1} c_{1,1}\rangle \,|\, \langle c_{1,2} \,|\cdots|\, c_{1,k(1)}\rangle \,|\, a_2 \,|\cdots|\, a_n\,]
\end{aligned}$$

Además, la diferencial inducida en C por el proceso de perturbación,

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i\alpha\delta\,(h\delta)^i\,\rho\,,$$

es nula, ya que $\alpha\delta = 0$.

Hemos de comprobar que la estructura de A_∞–coálgebra que se genera en C, al aplicar el funtor cobar a la contracción anterior, coincide con la propia estructura infinita de C.

Para ello consideramos la contracción

$$Ts^{-1}c\,(T(f), T(g), T(-\phi)) : Ts^{-1}(\bar{B}\tilde{\Omega}(C)) \Rightarrow Ts^{-1}(C)\,,$$

en la que introducimos como perturbación la diferencial cosimplicial d_{cos} : $Ts^{-1}(\bar{B}\tilde{\Omega}(C)) \to Ts^{-1}(\bar{B}\tilde{\Omega}(C))$, que depende del coproducto en la bar, es decir, de la diagonal Δ. Así,

$$d_{cos} = \sum_{j=0}^{n-1} 1^{\otimes j} \otimes \Delta \otimes 1^{\otimes n-j-1},$$

donde,

$$\Delta[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = \sum_{i=0}^{n} [a_1 \mid \cdots \mid a_i] \otimes [a_{i+1} \mid \cdots \mid a_n].$$

De nuevo estamos en condiciones de aplicar el Lema Básico de Perturbación, una vez comprobada la nilpotencia de la composición $T(-\phi)\, d_{cos}$. Dicha nilpotencia se da debido a la simple conexión de la coálgebra. Por la aplicación del mencionado lema obtenemos una nueva contracción

$$(f_{cos}, g_{cos}, \phi_{cos}) : \tilde{\Omega}\bar{B}\tilde{\Omega}(C) \Rightarrow (Ts^{-1}(C), \tilde{d}),$$

donde

$$\tilde{d} = d_t + \sum_{i \geq 0} (-1)^i T f\, d_{cos}\, (T(-\phi)\, d_{cos})^i\, Tg.$$

Ahora bien, según se desarrolló en la sección 2.1, C adquiere una estructura de A_∞–coálgebra dada por los morfismos

$$\tilde{\Delta}_n = (-1)^{[n/2]+n+1} f^{\otimes n}\, \Delta^{(n)}\, \Theta^{(n-1,2)}\, g,$$

donde, para simplificar la escritura de las fórmulas, $\Theta^{(i,j)}$, con $i > j$, denota la composición $\phi^{[\otimes i]}\, \Delta^{(i)} \cdots \phi^{[\otimes j]}\, \Delta^{(j)}$.

Comprobaremos que estos morfismos $\tilde{\Delta}_n$ coinciden con los Δ_n que originariamente dotaban a C de estructura de A_∞–coálgebra.

Notemos que el último morfismo a aplicar será $f^{\otimes n}$ que será no nulo sólo sobre un elemento del tipo $[\langle c_1 \rangle] \otimes \cdots \otimes [\langle c_n \rangle]$, lo cual condicionará los sumandos que serán válidos en los morfismos anteriores. Llamamos longitud del elemento $[\,\langle c_{1,1} \mid \cdots \mid c_{1,k(1)} \rangle \mid \cdots \mid \langle c_{n,1} \mid \cdots \mid c_{n,k(n)} \rangle\,]$ al número $k(1) + \cdots + k(n)$, y longitud total de un producto tensorial de elementos de ese tipo será la suma de las longitudes de cada uno de los factores. Así, $\Delta^{(i)}$ no varía dicha longitud total, mientras que el morfismo $\Phi^{[\otimes i]}$, mediante la aplicación de ϕ en uno de los factores, aumenta, al menos en uno, la longitud del elemento, a excepción de un sumando (h), que la deja igual. Así, pues, tanto por el morfismo g, como por los distintos $\phi^{[\otimes i]}$, nunca debemos admitir sumandos que den lugar a elementos con longitud total mayor o igual que n.

Probamos por inducción, los siguientes comportamientos para los morfismos componentes de la composición $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$:

- De los sumandos que conforman el morfismo $\Delta^{(i)}$, sólo han de considerarse aquellos que "cortan" en el último factor.
- De los sumandos que forman el morfismo $\phi^{[\otimes i]}$, sólo se aplica $1^{\otimes i-1} \otimes \phi$.
- Los factores que se obtienen tras aplicar el morfismo $\phi^{[\otimes i]}$ son todos con $k(1) = 1$ y, al menos el ultimo, tiene dimensión simplicial mayor que uno.

Evidentemente, los puntos anteriores se cumplen para la composición $(\phi^{[\otimes 2]}\Delta^{(2)})$, pues $g(c)$ es un único factor con $k(1) = 1$ y dimensión simplicial mayor que uno. También hay que tener en cuenta que ϕ es nulo sobre elementos con $k(1) = 1$.

Supongamos estas afirmaciones ciertas para $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$, y las probaremos para $(\phi^{[\otimes i+1]}\Delta^{(i+1)})$.

Por hipótesis de inducción, el elemento que se obtiene después de la aplicación de $\phi^{[\otimes i]}$ es un producto tensorial de elementos todos con $k(1) = 1$, el último de los cuales tiene dimensión simplicial mayor de uno. Así, si $\Delta^{(i+1)}$ no "cortase" precisamente este último factor, seguiría siendo un elemento con $k(1) = 1$ y $n > 1$, por lo que sería nulo tanto por ϕ como por gf, es decir, al aplicar $\phi^{[\otimes i+1]}$. Así, pues, tras aplicar $\Delta^{(i+1)}$, tenemos un producto de factores, todos con $k(1) = 1$, salvo, a lo sumo, el último, por lo que el único sumando de $\phi^{[\otimes i+1]}$ que se puede aplicar es $1^{\otimes i} \otimes \phi$. Ahora bien, ϕ da lugar a un elemento con $k(1) = 1$ y $n > 1$, con lo que se verifica la tercera afirmación.

Teniendo en cuenta estos comportamientos, podemos deducir que, tras aplicar $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$, para cualquier i, nunca podremos admitir factores, aparte del último, con dimensión simplicial mayor de uno, ya que, al actuar Δ siempre en el último factor, dicha dimensión simplicial se conservaría hasta la aplicación de $f^{\otimes n}$, que sería nula.

Así, podríamos esquematizar la actuación de $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$ de la siguiente forma:

- Antes de la aplicación de $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$, tendremos un elemento de la forma:

$$[\langle c_1\rangle]\otimes\cdots[\langle c_{i-2}\rangle]\otimes[\langle c_{i-1}\rangle\,|\,\langle c_{i-1,1}\,|\cdots c_{i-1,k(i-1)}\rangle];$$

- Después de aplicar $(\phi^{[\otimes i]}\Delta^{(i)})$, sólo admitiremos los elementos con la siguiente apariencia:

$$[\langle c_1\rangle]\otimes\cdots[\langle c_{i-2}\rangle]\otimes[\langle c_{i-1}\rangle]\otimes[\langle c_i\rangle\,|\,\langle c_{i,1}\,|\cdots c_{i,k(i)}\rangle].$$

Es decir, que de $g=\sum_{i\geq 0}(-1)^i(h\,\delta)^i\rho$, sólo consideraré el sumando correspondiente a $i=1$ y de $\phi=\sum_{i\geq 0}(-1)^i(h\,\delta)^ih$, el sumando correspondiente a $i=0$. Además, teniendo en cuenta que sólo voy a considerar estos sumandos, tanto $\Delta^{(i)}$, como $\phi^{[\otimes i]}$, para todo i, conservan la longitud total del elemento, por lo que el morfismo g debe dar lugar a longitud total n. Así, al aplicar dicho morfismo, además de considerar $i=1$, hemos de tomar $k_1=n$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}g(c)&=(-1)^1h\,\delta\,\rho(c)\\&=-h\,\delta\,([\langle c\rangle])\\&=\sum_j(-1)^{\varrho_{n,j}+|\Delta_n^{j,1}c|}([\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,2}c\,|\cdots|\,\Delta_n^{j,n}c\rangle]).\end{aligned}$$

Resumiendo, aplicamos $\widetilde{\Delta}_n$ a un elemento c:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_n(c)&=(-1)^{[n/2]+n+1}f^{\otimes n}\,\Delta^{(n)}\,\Theta^{(n-1,2)}\,g\,(c)\\&=\sum_j(-1)^{[n/2]+n+1+\varrho_{n,j}+|\Delta_n^{j,1}c|}f^{\otimes n}\,\Delta^{(n)}\,\Theta^{(n-1,2)}\,([\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,2}c\,|\cdots|\,\Delta_n^{j,n}c\rangle])\\&=\sum_j(-1)^{[n/2]+n+1+\varrho_{n,j}+2|\Delta_n^{j,1}c|+|\Delta_n^{j,2}c|}f^{\otimes n}\,\Delta^{(n)}\\&\qquad\Theta^{(n-1,3)}\,([\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle]\otimes[\langle\Delta_n^{j,2}c\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,3}c\,|\cdots|\,\Delta_n^{j,n}c\rangle])\end{aligned}$$

En general,

$$(\phi^{[\otimes i]}\,\Delta^{(i)})([\,\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,]\otimes\cdots\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,i-2}c\,\rangle\,]\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,i-1}\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,i}c\,|\,\cdots\,|\,\Delta_n^{j,n}c\rangle])$$

$$=(-1)^{\zeta_i}[\,\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,]\otimes\cdots\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,i-2}c\,\rangle\,]\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,i-1}\rangle\,]$$

$$\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,i}c\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,i+1}c\,|\cdots|\,\Delta_n^{j,n}c\rangle]\,,$$

donde $\zeta_i = i-2+\sum_{k=1}^{i}|\Delta_n^{j,k}|$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_n(c) &= \sum_j(-1)^{[n/2]+n+1+\sum_{i=1}^{n-3}i}f^{\otimes n}\,\Delta^{(n)}\,([\,\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,]\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,2}c\,\rangle\,]\otimes\cdots\\ &\qquad\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,n-1}\rangle\,|\,\langle\Delta_n^{j,n}c\rangle])\\ &= \sum_j(-1)f^{\otimes n}\,([\,\langle\Delta_n^{j,1}c\rangle\,]\otimes\cdots\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,n-1}\rangle\,]\otimes[\,\langle\Delta_n^{j,n}c\rangle])\\ &= \Delta_n(c)\end{aligned}$$

□

De igual forma al caso dual, definimos

Definición 2.2.7 *Dada una A_∞–coálgebra simplemente conexa C, se llama* representación TEX *de C a cualquier contracción de una DGA–coálgebra C' a C, tal que al aplicarsele el ardid tensorial, nos devuelva la estructura de A_∞–coálgebra original de C. Se llama* representación TEX canónica o inicial *de C a la contracción c_C.*

También se tiene el siguiente resultado, que daremos sin demostración:

Proposición 2.2.8 *Dada una representación TEX $c\,:\,\{C',C,f,g,\phi\}$ de la A_∞-coálgebra C, se tiene que:*

- *existe un morfismo de DGA-coálgebras $k:\bar{B}\tilde{\Omega}(C)\to C'$.*
- *C' es homotópicamente equivalente a $\bar{B}\tilde{\Omega}(C)$, como álgebras.*

- *existe una contracción c' de $\bar{B}\bar{\Omega}(C')$ en C dada por la composición $c' = c_C\, \bar{B}\bar{\Omega}(c)$, donde c_C es la representación TEX canónica de C y $\bar{B}(c)$ (resp. $\bar{\Omega}(c)$) es la contracción resultante de aplicar el ardid tensorial a c usando la construcción bar (resp. la construcción cobar).*

2.3 Cuestiones relacionadas

A partir de la equivalencia desarrollada entre A_∞–(co)álgebras y contracciones, es posible iniciar un desarrollo paralelo de toda la teoría de A_∞–estructuras. Aquí esbozamos algunas vías de trabajo que podrían constituir el comienzo de dicho camino en el que se describiesen todas las cuestiones relacionadas a A_∞–estructuras en términos de contracciones.

En primer lugar, tratamos de ver, bajo nuestro particular enfoque, el concepto de morfismo de A_∞–(co)álgebras.

Recopilamos la definición clásica de morfismo de A_∞–álgebras.

Definición 2.3.1 Sean M_1 y M_2 dos A_∞–álgebras. Un morfismo $h = h^1 : M_1 \to M_2$ es un *morfismo de A_∞–álgebras* si existe una familia de morfismos llamados homotopías superiores $\{h^k \in Hom^{k-1}(M_1^{\otimes k}, M_2)\}_{k\geq 2}$ tal que

$$\widetilde{h} = \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{k\geq 1} \uparrow h^k \downarrow^{\otimes k}\Big)^{\otimes n} : \tilde{B}M_1 \to \tilde{B}M_2$$

es un morfismo de DG–coálgebras.

Adaptamos esta definición a nuestro contexto de la siguiente forma:

Definición 2.3.2 Sean $c_i : \{A_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\}$ $(i = 1, 2)$ representaciones TEX de sendas A_∞–álgebras M_1 y M_2. Un *morfismo de A_∞–álgebras* de M_1 a M_2 está caracterizado por un morfismo de DG–coálgebras $h : \bar{B}A_1 \to \bar{B}A_2$.

Hemos de comprobar la equivalencia entre ambas definiciones de morfismo de A_∞–álgebras.

Veamos, en primer lugar, que nuestra definición implica la primera.

A partir de las contracciones anteriores, podemos considerar

$$(Tf_i, Tg_i, T(-\phi_i)) : T^c sA_i \Rightarrow T^c sM_i\,, \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

Y aplicando el Lema Básico de perturbación, tras introducir la diferencial simplicial como perturbación, obtenemos sendas contracciones

$$(\tilde{f}_i, \tilde{g}_i, \tilde{\phi}_i) : \bar{B}A_i \Rightarrow \tilde{B}M_i\,, \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

Consideramos, ahora la suspensión de la primera de las contracciones anteriores,

$$(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1, -\tilde{\phi}_1) : s\bar{B}A_1 \Rightarrow s\tilde{B}M_1\,.$$

El morfismo h induce otro entre $s\bar{B}A_1$ y $\bar{B}A_2$, que no es más que la composición $(h\circ\downarrow)$.

Podemos considerar los DG–módulos $s\bar{B}A_1 \oplus \bar{B}A_2$ y $s\tilde{B}M_1 \oplus \tilde{B}M_2$ y una contracción definida entre ellos

$$(\tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2,\, \tilde{g}_1 \oplus \tilde{g}_2,\, -\tilde{\phi}_1 \oplus \tilde{\phi}_2) : s\bar{B}A_1 \oplus \bar{B}A_2 \Rightarrow s\tilde{B}M_1 \oplus \tilde{B}M_2\,,$$

para la que el morfismo $(h\circ\downarrow)$ es un dato de perturbación.

Así, podemos aplicar el Lema Básico de Perturbación que proporciona una nueva contracción entre $s\bar{B}A_1 \oplus \bar{B}A_2$ y $s\tilde{B}M_1 \oplus \tilde{B}M_2$, obteniéndose, en éste último, la diferencial perturbada

$$d_{s\tilde{B}M_1 \oplus \tilde{B}M_2} + \tilde{f}_2\,(h\circ\downarrow)\,\tilde{g}_1\,,$$

donde,

$$\tilde{f}_2 = \sum_{i\geq 0}(-1)^i T f_2 (d_s T(-\phi_2))^i \qquad \text{y} \qquad \tilde{g}_1 = \sum_{i\geq 0}(-1)^i (T(-\phi_1)\, d_s)^i T g_1\,.$$

Observemos también que $\tilde{f}_2\,(h\circ\downarrow)\,\tilde{g}_1 = \tilde{f}_2\, h\, \tilde{g}_1 \downarrow$. Así, se induce un morfismo

$$\tilde{f}_2\, h\, \tilde{g}_1 : \tilde{B}M_1 \to \tilde{B}M_2\,,$$

que es el morfismo $\tilde{h}$ al que alude la definición 2.3.1. Hemos de comprobar que dicho morfismo es de coálgebras, pero esto es evidente ya que la contracción $\bar{B}A_i \Rightarrow \tilde{B}M_i$ es una contracción de coálgebras completa, es decir, tanto $\tilde{f}_2$ como $\tilde{g}_1$ son morfismos de DG–coálgebras y además h también lo es.

Así, los morfismos $h^k : M_1^{\otimes k} \to M_2$ de la definición 2.3.1 son los siguientes:

$$h^k = (-1)^{[k/2]} \sum_{0\leq i\leq k-1} \downarrow ((-1)^{k-i-1} T f_2 (d_s T(-\phi_2))^{k-i-1})\, h\, ((-1)^i (T(-\phi_1)\, d_s)^i T g_1) \uparrow^{\otimes k}$$

Para la otra implicación, consideramos $\tilde{h}\circ\downarrow$ como dato de perturbación ascendente en la diferencial de $s\tilde{B}M_1 \oplus \tilde{B}M_2$ (es decir, que se produce en el pequeño DG-módulo y no en el mayor). La Teoría de Perturbación Homológica afirma que en este caso, sólo la diferencial del complejo mayor varía después de la perturbación, quedando sin variaciones los morfismos componentes de la contracción. Así, la perturbación que se produce en la diferencial del DG-módulo mayor $s\bar{B}A_1 \oplus \bar{B}A_2$ induce un morfismo

$$h = \tilde{g}_2 \tilde{h} \tilde{f}_1 : \bar{B}A_1 \to \bar{B}A_2\,,$$

que es un morfismo de DG–coálgebras.

Por supuesto, la definición dual para morfismo de A_∞–coálgebras será la siguiente:

Definición 2.3.3 Sean $c_i : \{C_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\}$ $(i = 1, 2)$ representaciones TEX de sendas A_∞–coálgebras M_1 y M_2. Un *morfismo de A_∞-coálgebras* está caracterizado por un morfismo de DG–álgebras $h : \bar{\Omega}C_1 \to \bar{\Omega}C_2$.

Otra cuestión que se nos ocurre abordar es la de la A_∞–estructura que encontramos en el producto tensorial de dos A_∞–(co)álgebras.

Sean $c_i : \{A_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\}$ $(i = 1, 2)$ representaciones TEX de sendas A_∞–álgebras M y M'. A partir de dichas contracciones se puede construir la contracción $c_1 \otimes c_2$. Imponiendo que esta contracción producto tensorial sea una representación TEX de $M \otimes M'$, se soluciona el problema de definir el producto tensorial de estas A_∞-álgebras. La fórmula para los morfismos de dicha estructura, según (2.3), vendrá dada por

$$m_n^{\otimes} = (-1)^{n+1}(f\otimes f')\mu^{(1)}(\phi\otimes g'f'+1\otimes\phi')^{[\otimes 2]}\mu^{(2)}\cdots(\phi\otimes g'f'+1\otimes\phi')^{[\otimes n-1]}\mu^{(n-1)}(g\otimes g')^{\otimes n},$$

donde $\mu = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1 \otimes T \otimes 1)$.

Toda esta argumentación permite definir coherentemente el producto tensorial de dos A_∞-álgebras (resp. coálgebras):

Definición 2.3.4 Sean M y M' dos A_∞–álgebras cuyas representaciones canónicas en términos de contracciones son

$$c_M : \{\bar{\Omega}\tilde{B}(M), M, \alpha_M, \rho_M, h_M\} \qquad \text{y} \qquad c_{M'} : \{\bar{\Omega}\tilde{B}(M'), M', \alpha_{M'}, \rho_{M'}, h_{M'}\},$$

respectivamente.

El producto tensorial $M \otimes M'$ es la A_∞-álgebra que tiene como representación TEX a la contracción $c_M \otimes c_{M'}$.

Análogamente, se define el producto tensorial de A_∞–coálgebras.

El problema de definir el concepto de A_∞–álgebra de Hopf es una cuestión de mucha actualidad. Trabajos recientes como [SU1, SU2, SU3] dan una idea del interés que suscita esta noción para los algebristas homológicos. Aquí, sólo pretendemos dar una descripción de A_∞–álgebra de Hopf en un caso concreto (que sea una A_∞–coálgebra y una verdadera álgebra) y en términos de contracciones. Esta definición es coherente con las representaciones TEX de A_∞–(co)álgebras que hemos definido en este capítulo. Una cuestión a la que no damos respuesta aquí, dada su gran complejidad, es encontrar las relaciones "de Hopf" que ligan a los morfismos componentes de la estructura de A_∞–coálgebra con el producto asociativo. Ejemplos de A_∞–álgebras de Hopf de este tipo son, como veremos en el capítulo siguiente, los modelos 1-homológicos de DGA–álgebras conmutativas que conseguimos por perturbación.

Para una DG–coálgebra C, la construcción cobar $\bar{\Omega}(C)$ es una DG–álgebra. ¿Cómo se reflejaría sobre $\bar{\Omega}(C)$, la estructura adicional sobre C de un producto que lo convirtiera en una DG-álgebra de Hopf? La respuesta la da el siguiente teorema, extraido de un manuscrito no publicado del profesor Kadeishvili:

Teorema 2.3.5 *(Kadeishvili) Si $(C, d, \nabla_c : C \to C \otimes C, \mu_c : C \otimes C \to C, \eta : \Lambda \to C, \epsilon : C \to \Lambda)$ es una DG-álgebra de Hopf, entonces puede definirse el siguiente producto natural sobre $\bar{B}\bar{\Omega}(C)$:*

$$\mu_{B\Omega C} : \bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C) \to \bar{B}\bar{\Omega}(C)$$

que convierte a $\bar{B}\bar{\Omega}(C)$ en una DG-álgebra de Hopf.

Demostración.

Definimos $\mu_{B\Omega C}$ como la composición

$$\mu_{B\Omega C} = \bar{B}\bar{\Omega}(\mu_c) \cdot K_{C,C} : \bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C) \to \bar{B}\bar{\Omega}(C \otimes C) \to \bar{B}\bar{\Omega}(C),$$

donde $K_{C,C}$ es la aplicación de DG-coálgebras, cuya existencia se menciona en [Mun74].

De cara a obtener una fórmula explícita, notemos que la aplicación $K_{C,C} : \bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C) \to \bar{B}\bar{\Omega}(C \otimes C)$ está unívocamente determinada por su cocadena de torsión

$$F = p_1 \circ K_{C,C} : \bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C) \to \bar{\Omega}(C \otimes C)$$

la cual a su vez representa a la cocadena de torsión de la aplicación de DG-álgebras

$$(\overline{f_c \otimes f_c}) : \bar{\Omega}(\bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C)) \to \bar{\Omega}(C \otimes C),$$

la cual es reconstruible usando la argucia tensorial y el Lema Básico de Perturbación.

Otra forma de obtener una fórmula para $K_{C,C}$ es a través de la representación TEX canónica $c_1 = (f_1, g_1, \phi_1)$ de la DGA–coálgebra C y la representación TEX canónica $c_2 = (f_2, g_2, \phi_2)$ de la DGA–coálgebra $\bar{B}\bar{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\bar{\Omega}(C)$. En efecto, el morfismo $K_{C,C}$ que buscamos no es más que la composición $\bar{B}\bar{\Omega}(f_1)\, g_2$.

□

Podemos establecer un resultado análogo para DG-álgebras A y la construcción $\bar{\Omega}\bar{B}(A)$.

Teorema 2.3.6 *(Kadeishvili) Si $(C, d, \nabla_c : C \to C \otimes C, \mu_c : C \otimes C \to C, \eta : \Lambda \to C, \epsilon : C \to \Lambda)$ es una DG-álgebra de Hopf, entonces puede definirse el siguiente coproducto natural sobre $\bar{\Omega}\bar{B}(C)$:*

$$\mu_{\Omega BC} : \bar{\Omega}\bar{B}(C) \to \bar{\Omega}\bar{B} \otimes \bar{\Omega}\bar{B}(C)$$

que convierte a $\bar{\Omega}\bar{B}(C)$ en una DG-álgebra de Hopf.

La siguiente proposición resulta ser un mero ejercicio:

Proposición 2.3.7 *Sea C una DG-álgebra de Hopf. Sean $(\alpha_1, \rho_1, h_1) : \bar{\Omega}\bar{B}(C) \Rightarrow C$ y $(\alpha_2, \rho_2, h_2) : \bar{B}\bar{\Omega}(C) \Rightarrow C$ los representantes TEX canónicos para el álgebra C y la coálgebra C. Entonces α_1 y ρ_2 resultan ser morfismos de DG-álgebras de Hopf.*

A la luz de estos resultados, la descripción de una A_∞–álgebra de Hopf en términos de una contracción de una DG-álgebra de Hopf a un DG-módulo aparece claramente fortalecida.

Definición 2.3.8 Sea C un DGA-módulo. Se dice que C es una A_∞-álgebra de Hopf si existe una contracción c de una DGA–álgebra de Hopf C' a C. Diremos que esta contracción es una representación TEX de la A_∞-álgebra de Hopf C.

A partir de la contracción c, hacemos uso del ardid tensorial para la construccion bar (resp. construcción cobar) y obtenemos la contracción $\bar{B}(c)$ (resp. $\bar{\Omega}(c)$), la cual nos permite obtener los morfismos componentes de la estructura de A_∞–álgebra (resp. A_∞–coálgebra) de C. Con esta información en mano, es inmediato contruir las representaciones TEX canónicas de C como A_∞–álgebra y como A_∞–coálgebra:

$$c_1 : \{\bar{\Omega}\tilde{B}(C), C, f_1, g_1, \phi_1\},$$
$$c_2 : \{\bar{B}\tilde{\Omega}(C), C, f_2, g_2, \phi_2\}.$$

Supongamos que nuestra A_∞–álgebra de Hopf presenta un producto estrictamente asociativo (es una verdadera álgebra) y, en general, una estructura de A_∞-coálgebra. Llamemos a estas estructuras A_∞–álgebras de Hopf asociativas.

Teorema 2.3.9 *Sea C una A_∞-álgebra de Hopf asociativa y $c : \{C', C, f, g, \phi\}$ una representación TEX de la misma. Entonces puede definirse un producto natural sobre $\bar{B}\tilde{\Omega}(C)$:*

$$\mu_{B\Omega C} : \bar{B}\tilde{\Omega}(C) \otimes \bar{B}\tilde{\Omega}(C) \to \bar{B}\tilde{\Omega}(C),$$

que convierte a $\bar{B}\tilde{\Omega}(C)$ en una DGA-álgebra de Hopf y que hace que $g_2 f_1$ sea un morfismo de álgebras de Hopf. Los representantes TEX de C canónicos como A_∞-álgebra y como A_∞-coálgebra (c_1 y c_2 anteriores) serán los representates TEX canónicos de C como A_∞–álgebra de Hopf.

Demostración. Siendo la demostración de la primera parte del teorema un calco de la demostración del Teorema 2.3.5, nos centraremos en probar que c_1 y c_2 son representantes TEX de C como A_∞–álgebra de Hopf. Para ello, sólo basta con probar que las contracción $\bar{\Omega}(c_1)$ (resp. $\bar{B}(c_2)$) resultante de aplicar el ardid tensorial usando la construcción bar (resp. construcción cobar) nos proporciona los morfismos componentes de la A_∞–coálgebra (resp. A_∞–álgebra) que se deriva de c_2 (resp. de c_1). Esto último es evidente teniendo en cuenta que el morfismo $g_2 f_1 : \bar{\Omega}\widetilde{B}(C) \to \bar{B}\widetilde{\Omega}(C$ es un morfismo de DGA–álgebras de Hopf.

□

Capítulo 3.

Teoría de inversiones y estructuras diferenciales

Capítulo 3.

Teoría de inversiones y estructuras diferenciales

Este capítulo está dedicado a un mayor desarrollo de la llamada *teoría de inversiones* que tuvo su origen en [Rea00] y un posterior desarrollo en [Cha00] y [Alv01]. En estos últimos trabajos, se establece el objetivo de la reducción del cálculo de la diferencial perturbada de un modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa A.

Establecemos, en primer lugar, un marco general para la teoría de inversiones, en el que encuadraremos, posteriormente, los trabajos anteriores y el nuestro propio, donde ampliamos el concepto de inversiones, llegando hasta los pequeños modelos y mejorando los resultados ya obtenidos en cuanto a la computabilidad de la diferencial en el modelo.

3.1 Teoría general de inversiones

Definición 3.1.1 Sea $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ una contracción de DG–módulos y $\mathcal{F}$ una filtración sobre los enteros no negativos del DG–módulo de partida, N. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *filtración c–compatible* si se verifica que:

- ϕ aumenta al menos en uno el grado de filtración en $\mathcal{F}$.
- f es nulo sobre elementos de grado de filtración estrictamente positivo.

Definición 3.1.2 Sea $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ una contracción de DG–módulos, $\mathcal{F}$ una filtración c–compatible y δ un dato de perturbación para la contracción c. Diremos que

$\mathcal{F}$ es una *filtración* (c, δ)*-compatible* si δ puede disminuir a lo sumo en uno el grado de filtración.

Proposición 3.1.3 *Sea* $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ *una contracción de DG–módulos,* δ *un dato de perturbación para dicha contracción y* $\mathcal{F}$ *una filtración* (c, δ)*-compatible. Entonces, la composición* $f\,(\delta\,\phi)^i$*, para* $i \geq 0$*, será el morfismo idénticamente nulo para cualquier elemento de grado de filtración* k*, con* $k \geq 1$.

Demostración.

Es obvio, por las definiciones anteriores, que la composición $\delta\,\phi$ conserva el grado de filtracion del elemento o lo aumenta, por lo que $(\delta\,\phi)^i$ también. Así, f será nulo si el elemento inicial era de grado de filtración mayor o igual a 1. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que la nueva diferencial d_δ y el morfismo proyección f_δ de la contracción perturbada resultante, $c_\delta : \{(N, d_N + \delta), (M, d_M + d_\delta), f_\delta, g_\delta, \phi_\delta)\}$ podrán, en general, reducir sus cálculos en tanto en cuanto sólo interesan los sumandos de $(\delta\,\phi)$ que den lugar a elementos con grado de filtración 0, es decir, aquellos sumandos de ϕ que den lugar a exactamente una inversión, y no más, que después δ ha de eliminar.

3.2 Teoría de inversiones y el modelo 1–homológico de DGA–álgebras conmutativas

Consideraremos que una DGA–álgebra conmutativa conexa está siempre dada en su forma "factorizada" como producto tensorial torcido $(\otimes_{i=1}^n A_i, \rho)$, siendo cada A_i un álgebra exterior o polinomial para $i = 1, 2, \ldots, n$ y ρ la diferencial, tal que $\rho(A_k) \subset \otimes_{i=1}^k A_i$. Es decir, las álgebras, A_i están ordenadas según el grado de sus generadores. Siempre que nos refiramos al álgebra como $A \otimes A'$, supondremos que $A = \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ y $A' = A_n$.

Consideremos, en primer lugar, la contracción $c_{\bar{B}\otimes}$,

$$(f_{\bar{B}\otimes}, g_{\bar{B}\otimes}, \phi_{\bar{B}\otimes}) : \bar{B}(A \otimes A') \Rightarrow \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')\,,$$

como paso primero en la obtención del modelo 1–homológico.

Para esta contracción, en [Cha00] y [Alv01] se estableció una filtración sobre $\bar{B}(A \otimes A')$ basada en el *número de inversiones.*

Recopilamos este primer concepto de inversión:

Definición 3.2.1 [Cha00] Sean A y A' dos DGA-álgebras conmutativas, y consideremos un elemento homogéneo $b = [a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n]$ de $\bar{B}(A \otimes A')$. Se dice que b tiene k inversiones si existen $1 \leq i_1 < \cdots < i_k < j \leq n$ con $a_{i_m} = 1$ para $1 \leq m \leq k$ y $a_j \in \ker\xi_A$.

En general, un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$ tiene k inversiones si es combinación lineal de elementos homogéneos con al menos k inversiones.

Dichas inversiones son las que, en adelante, llamaremos $\otimes$*–inversiones* y dan lugar, como vamos a ver, a una filtración $c_{\bar{B}\otimes}$–compatible.

Proposición 3.2.2 *Sea $\mathcal{F}_\otimes = \{F_k\}_{k\geq 0}$, donde F_k está constituido por todos los elementos de $\bar{B}(A \otimes A')$ que tienen k $\otimes$-inversiones. Entonces $\mathcal{F}_\otimes$ es una filtración $c_{\bar{B}\otimes}$–compatible.*

Demostración.

Hemos de comprobar las dos condiciones que ha de cumplir la filtración:

- La evaluación de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ sobre un elemento homogéneo de $\bar{B}(A \otimes A')$ da lugar a una suma de elementos que, si no son degenerados, tienen al menos una $\otimes$–inversión más que el original. Veámoslo.

  En primer lugar, comprobamos que $\phi_{\bar{B}\otimes}$ preserva el número de $\otimes$–inversiones existente. Supongamos que el elemento inicial tiene una $\otimes$–inversión, es decir, que existe $a_i \otimes a'_i$ tal que $a_i = 1$ y $a_j \otimes a'_j$, con $j > i$, $a_j \in$ Ker ξ_A. Fijando un p y un q en la fórmula de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ (1.16), el sumando resultante podríamos esquematizarlo de la siguiente forma:

$$\pm\xi_A(a_{n-q+1} *_A \cdots *_A a_n)[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1}|(a'_{\bar{n}} *_{A'} \cdots *_{A'} a'_{n-q})$$
$$|([a_{n-p-q}|\cdots|a_{n-q}] \star [a'_{n-q+1}|\cdots|a'_n])],$$

- Si $n-q+1 \leq i \leq n-1$, entonces $\xi_A(a_{n-q+1} *_A \cdots a_j *_A \cdots a_n) = 0$
- Si $n-p-q \leq i \leq n-q$, entonces obtenemos un elemento degenerado.
- Si $1 \leq i \leq n-p-q-1$, tenemos que distinguir dos casos: si $n-q+1 \leq j \leq n$, entonces $\xi_A(a_{n-q+1} *_A \cdots a_j *_A \cdots a_n) = 0$; y si $i < j \leq n-q$, la inversión original se preserva.

Nótese, además, que se produce siempre una inversión debido a que la componente $(a'_{\bar{n}} *_{A'} \cdots *_{A'} a'_{n-q})$ queda siempre a la izquierda de estas otras: $a_{\bar{n}}, \ldots, a_{n-q}$.

- La evaluación de $f_{\bar{B}\otimes}$ sobre un elemento con, al menos, una $\otimes$–inversión, es nula.

 Fijémonos en la fórmula

$$f_{\bar{B}\otimes}[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \xi_A(a_{k+1} *_A \cdots a_n)\xi_{A'}(a'_1 *_{A'} \cdots a'_k)[a_1|\cdots|a_k] \otimes [a'_{k+1}|\cdots|a'_n]$$

 Si el elemento inicial tenía una $\otimes$–inversión de la que era responsable la componente a'_i, significa que existe otra componente $a_j \otimes a'_j$ con $a_j \in$ Ker ξ_A e $i < j$. Fijando un k en el sumatorio anterior, si $1 \leq i \leq k$, entonces $\xi_{A'}(a'_1 \cdots a'_i \cdots a'_k) = 0$ y si $k+1 \leq i \leq n-1$, entonces $\xi_A(a_{i+1} *_A \cdots a_j *_A \cdots a_n) = 0$. □

Si además consideramos una perturbación ρ en la diferencial de $A \otimes A'$, ésta produce una perturbación en $\bar{B}(A \otimes A')$, para la que la filtración anterior es $(c_{\bar{B}\otimes}, \delta)$–compatible.

Proposición 3.2.3 *Sea $\mathcal{F}_\otimes = \{F_k\}_{k\geq 0}$, donde F_k está constituido por todos los elementos de $\bar{B}(A \otimes A')$ que tienen k $\otimes$-inversiones y sea δ la perturbación inducida en $\bar{B}(A \otimes A')$ por una perturbación ρ de la diferencial de $A \otimes A'$ con $\rho(A) \subset A$. Entonces $\mathcal{F}_\otimes$ es una filtración $(c_{\bar{B}\otimes}, \delta)$-compatible.*

Demostración.

Hemos de comprobar que al aplicar δ sobre un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$ con k $\otimes$–inversiones, se obtiene un elemento con al menos $k-1$ $\otimes$–inversiones.

Nótese que la acción de δ se reduce a la aplicación de ρ a cada componente $a_i \otimes a'_i$ del elemento $[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n]$, ya que afecta sólo a la diferencial tensorial. Así, tenemos los siguientes casos:

- Si $a_i \otimes a'_i$ no interviene en ninguna $\otimes$–inversión, el elemento resultante tendrá, al menos, el mismo número de inversiones.

- Si $a_i \otimes a'_i$ es tal que $a_i \in$ Ker ξ_A y existe un $k < i$ tal que $a_k = 1$, es decir, a_k produce una $\otimes$–inversión con respecto a $a_i \otimes a'_i$, entonces $\rho(a_i \otimes a'_i)$ sigue siendo de la forma $a \otimes a'$ con $a_\in$ Ker ξ_A, por lo que a_k sigue siendo responsable de la misma inversión.

- Si $a_i \otimes a'_i$ es responsable de una $\otimes$–inversión, es decir, $a_i = 1$ y existe $a_j \otimes a'_j$ con $j > i$ y $a_j \in$ Ker ξ_A; entonces $\rho(a'_i)$ tiene la forma $a \otimes a'$, con $a \in$ Ker ξ_A, por lo que la $\otimes$–inversión desaparece. □

El hecho de tener una filtración de este tipo da lugar a una importante reducción en el cálculo de la diferencial perturbada obtenida en $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')$.

Teorema 3.2.4 *[Cha00] La fórmula para $\phi_{\bar{B}\otimes}$ que interviene en la diferencial perturbada, d_δ que se genera en $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')$ por perturbación mediante δ de $\bar{B}(A \otimes A')$, se puede reducir a la siguiente:*

$$\begin{aligned}
&\bar{\phi}_{\bar{B}\otimes}([a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n]) \\
&= \sum_{0\le p\le n-q-1\le n-1} (-1)^{\varphi(n,p,q)}\xi_A(a_{n-q+1}\cdots a_n)[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_{\bar{n}-1} \otimes a'_{\bar{n}-1} \\
&\qquad\qquad |(a'_{\bar{n}} *_{A'} \cdots *_{A'} a'_{n-q})|a_{\bar{n}}|\cdots|a_{n-q}|a'_{n-q+1}|\cdots|a'_n]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

siendo $\bar{n} = n - p - q$ y

$$\begin{aligned}
\varphi(n,p,q) &= \bar{n} + |[a_1|\cdots|a_{\bar{n}-1}]|_t + \sum_{k=1}^{q} k|a_{n-k+1}| \\
&\quad + |[a'_1|\cdots|a'_{\bar{n}}]|_t + \sum_{k=1}^{p-1} k|a'_{\bar{n}+k+1}| \\
&\quad + \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{k} |a_{n-q-k}|\cdot|a'_{n-q-\ell}| + \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\ell=1}^{n-k-1} |a_{n-k}|\cdot|a'_\ell|\,.
\end{aligned}$$

Más aún, el sumatorio en q se reduce a un único sumando, que corresponde al único índice q con respecto al cual se cumple

$$\begin{cases} a_k \notin ker\xi_A, & para\ n-q+1 \le k \le n, \\ a_k \in ker\xi_A, & para\ 1 \le k \le n-q; \end{cases}$$

Demostración.

La prueba se basa en la proposición 3.1.3, por la que la composición $\delta\,\phi$ ha de producir siempre elementos con 0 $\otimes$–inversiones, y así, la única forma es considerar aquellos sumandos de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ que den lugar a exactamente una $\otimes$–inversión y no más, es decir, se puede eliminar el producto shuffle, que conlleva una cantidad exponencial de sumandos.

Además, el signo φ se determina a partir de los operadores cara y degeneración propios de SHI.

El hecho de que el sumatorio en q se reduzca a un único sumando es consecuencia de que el elemento de salida sólo puede tener una inversión (por tanto, $a_k \in \ker \xi_A$, para $1 \leq k \leq n-q$) y que $\xi_A(a_{n-q+1} *_A \cdots a_n)$ no es nulo exclusivamente en el caso de que $a_k \notin \ker \xi_A$, para $n-q+1 \leq k \leq n$. □

Nótese que, ahora, el número de términos en la fórmula anterior para $\phi_{\bar{B}\otimes}$ es

$$\sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} 1 = \frac{n^2+n}{2},$$

en contraste con la cantidad de sumandos original

$$\sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} \binom{p+q+1}{q} = 2^{n+1} - n - 2.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que el sumatorio en q se reduce, en realidad a un único sumando, se concluye que el número de sumandos resultantes en la evaluación final de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ es lineal en la dimensión simplicial del elemento de entrada.

$$\sum_{p=0}^{n-q-1} 1 = n-q\,, \text{ para un valor determinado de } q \text{ entre } 0 \text{ y } n-1\,.$$

A continuación daremos una definición más amplia de inversiones que permita definir una filtración compatible con la contracción que lleva al modelo 1–homológico de $(\otimes_{i=1}^n A_i, \rho)$.

Definición 3.2.5 Sea $A \otimes A'$ una DGA–álgebra en las condiciones descritas anteriormente y consideremos un elemento homogéneo $[a_1 \otimes a'_1 | a_2 \otimes a'_2 | \cdots | a_n \otimes a'_n]$ de $\bar{B}(A \otimes A')$.

Definiremos distintos tipos de *inversiones* según los siguientes casos:

- Inversiones debidas al producto tensorial. Diremos que la componente $a_i \otimes a'_i$ es responsable de una $\otimes$*–inversión* si $a_i = 1$ y existe un índice $j > i$ con $a_j \in$ Ker ξ_A.
- Inversiones debidas a A', siempre que A' sea un álgebra polinomial. Diremos que $a_i \otimes a'_i$ es responsable de una p*–inversión* si $a_{i-1} = 1 = a_i = \cdots = a_n$.
- Inversiones debidas a A. Distinguiremos dos casos:
  - Si A es un álgebra polinomial, diremos que $a_i \otimes a'_i$ es responsable de una $p1$*–inversión* si $a_i \in$ Ker ξ_A y existe un índice $j > i$ tal que $a_j \in$ Ker ξ_A.
  - Si $A = \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$, las inversiones debidas a A, se entenderán como las inversiones del primer factor de $\lambda(\bar{a})$, una vez eliminadas las componentes que no estén en Ker ξ_A, en $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1})$, siendo (salvo signo)

$$\lambda : \bar{B}(A \otimes A') \to \bar{B}(A) \times \bar{B}(A')$$

$$\lambda[a_1 \otimes a'_1| \cdots |a_n \otimes a'_n] = [a_1| \cdots |a_n] \times [a'_1| \cdots |a'_n] \,.$$

Así, un elemento presenta k inversiones si existen k componentes responsables de una inversión. Diremos que un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$ tiene k inversiones, si es una suma de elementos homogéneos con, al menos, k inversiones cada uno.

Recordamos que la fórmula para la diferencial perturbada obtenida en el modelo 1–homológico es la siguiente:

$$d_\delta = \sum_{i \geq 0} (-1)^i f^n \, \delta \, (\phi^n \, \delta)^i \, g^n$$

donde

$$c^n(f^n, g^n, \phi^n) : \bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \otimes A_n) \Rightarrow \otimes_{i=1}^{n} hBA_i \,,$$

cuyos morfismos se podían expresar, de forma recursiva,

$$\begin{aligned} f^n &= (f^{n-1} \otimes f_{\bar{B}A_n}) f_{\bar{B}\otimes} \\ g^n &= g_{\bar{B}\otimes}(g^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A_n}) \\ \phi^n &= \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A_n} f_{\bar{B}A_n} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A_n}) f_{\bar{B}\otimes} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es definir una filtración a partir del nuevo concepto de inversión para llegar a reducir el cálculo de d_δ.

Proposición 3.2.6 *Sea $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\geq 0}$, donde F_k está constituido por todos los elementos de $\bar{B}(A\otimes A')$ que tienen k inversiones. Entonces $\mathcal{F}$ es una filtración c^n-compatible.*

Veremos primero algunos resultados en forma de lemas que serán necesarios para la demostración de esta proposición. En dichos lemas analizaremos el comportamiento de los morfismos componentes de ϕ^n y f^n. Para este propósito, no tendremos en cuenta los signos en las fórmulas que intervengan.

Lema 3.2.7 *Si A es un álgebra polinomial, el morfismo $\phi_{\bar{B}\otimes}$ no afecta al número de $p1$–inversiones del elemento.*

Demostración.

La razón es que $\phi_{\bar{B}\otimes}$ preserva el número de componentes no degeneradas de la primera álgebra en cada sumando. De hecho, las primeras $n-q$ componentes de la primera álgebra, $a_1,\ldots,a_{n-q}$, se mantienen aunque cambien su posición relativa con respecto al resto de las componentes. Por otra parte, la evaluación de ξ_A sobre las últimas q componentes de A, $a_{n-q+1},\ldots,a_n$ sólo es no nula si dichas componentes son todas la unidad del álgebra. □

Lema 3.2.8 *Al aplicar $\phi_{\bar{B}\otimes}$ a un elemento con k p–inversiones, se obtendrá una suma de elementos con al menos k inversiones en general.*

Demostración.

Supongamos que $[a_1\otimes a'_1|\cdots|a_n\otimes a'_n]$ tiene k p–inversiones. Teniendo en cuenta que entonces $a_{n-k},\ldots,a_n=1$, $a_{n-k-1}\in$ Ker ξ_A, y la fórmula de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ (1.16),

- Si $k>q-1$, entonces $a_{n-q}=1$, resulta un elemento degenerado.
- Si $k<q-1$, entonces $n-q+1\leq n-k-1$, y $\xi(a_{n-k-1})=0$.
- Si $k=q-1$, sólo se obtienen sumandos no nulos en los casos en que $a_{n-p-q}\in$ Ker $\xi_A,\ldots,a_{n-q}\in$ Ker ξ_A. Ahora bien, fijados p y q, las últimas $p+q+1$ componentes vienen determinadas mediante un $(p+1,q)$–shuffle. Así, si las últimas

componentes que resultan son de la forma $[\cdots|a_{n-q}|a'_{n-i}|\cdots|a'_n]$, con $1 \le i \le k$, resulta un elemento con i p–inversiones debidas a las últimas i componentes y exactamente $k-i$ $\otimes$–inversiones debidas a las componentes $a'_{n-k}, \dots a'_{n-i-1}$ que quedan a la izquierda de a_{n-q}. Sólo en el caso en que la componente a_{n-q} ocupa la última posición, se obtiene un elemento con 0 p–inversiones y $k+1$ $\otimes$–inversiones.

□

Los dos lemas anteriores, junto con lo probado en la proposición 3.2.2 con respecto a las $\otimes$–inversiones, dan lugar al siguiente resultado:

Lema 3.2.9 *Al aplicar $\phi_{\bar{B}\otimes}$ a un elemento homogéneo de $\bar{B}(A \otimes A')$ se obtiene un elemento con, al menos, una inversión más que el elemento original.*

Nótese que $\bar{B}(A)$ y $\bar{B}(A')$ están canónicamente incluidos en $\bar{B}(A \otimes A')$, ya que podemos considerar $\bar{a} = [a_1|\cdots|a_n] = [a_1 \otimes 1|\cdots|a_i \otimes 1]$ y $\bar{a}' = [a'_1|\cdots|a'_m] = [1 \otimes a'_1|\cdots|1 \otimes a'_m] \in \bar{B}(A \otimes A')$.

Lema 3.2.10 *Consideremos dos elementos homogéneos $\bar{a} = [a_1|\cdots|a_n]$ y $\bar{a}' = [a'_1|\cdots|a'_m]$ de $\bar{B}(A)$ y $\bar{B}(A')$ respectivamente. Entonces el producto shuffle $\bar{a} \star \bar{a}'$ tendrá al menos el numero de inversiones de $\bar{a} = [a_1 \otimes 1|\cdots|a_n \otimes 1]$ en $\bar{B}(A \otimes A')$ más el de $\bar{a}' = [1 \otimes a'_1|\cdots|1 \otimes a'_m]$ en $\bar{B}(A \otimes A')$.*

Demostración.

Es inmediato comprobar que el producto shuffle no cambia ni el número ni la posición relativa de las componentes de una misma álgebra. Por tanto, las inversiones que pudiera tener $\bar{a}$ en $\bar{B}(A)$, las seguirá teniendo $\bar{a} \star \bar{a}'$ en $\bar{B}(A \otimes A')$.

Ahora bien, si A' es un álgebra polinomial, los diferentes sumandos del producto shuffle $\bar{a} \star \bar{a}'$ tendrán k p–inversiones, con $0 \le k \le m-1$ y al menos $m-k-1$ $\otimes$–inversiones, todo ello aparte de las inversiones de $\bar{a}$ en $\bar{B}(A \otimes A')$:

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \star \bar{a}' &= \pm [a_1|\cdots|a_n|a'_1|a'_2|\cdots|a'_m] && \text{con } m-1 \text{ } p\text{–inversiones y } 0 \text{ } \otimes\text{–inversiones} \\
&\quad \pm [\cdots|a'_1|\cdots|a_n|a'_2|\cdots|a'_m] && \text{con } m-2 \text{ } p\text{–inversiones y } 1 \text{ } \otimes\text{–inversión} \\
&\quad \cdots
\end{aligned}
$$

$\pm\,[\cdots|a'_1|\cdots|a_n|a'_{m-k}|\cdots|a'_m]$ con k p–inversiones y $m-k-1$ $\otimes$–inversiones

$\ldots$

$\pm\,[\cdots|a'_{m-1}|\cdots|a_n|a'_m]$ con 0 p–inversiones y $m-1$ $\otimes$–inversiones

$\pm\,[\cdots|a'_m|\cdots|a_n]$ con 0 p–inversiones y m $\otimes$–inversiones

□

Ya estamos en condiciones de demostrar la proposición 3.2.6:

- Al evaluar el morfismo ϕ^n de la contracción c^n sobre un elemento homogéneo de $\bar{B}(A\otimes A')$, se obtiene un elemento con, al menos, una inversión más que el original.

  Consideremos, en primer lugar la fórmula correspondiente para $n=2$, es decir, tanto A como A' son un álgebra exterior o polinomial cada una de ellas.

  $$\phi = \phi = \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}(A)} \otimes g_{\bar{B}A'}f_{\bar{B}A'} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A'})f_{\bar{B}\otimes}\,.$$

  Distinguiremos los tres sumandos que componen el morfismo ϕ:

  - $\phi_{\bar{B}\otimes}$. Verifica la proposición (lema 3.2.9).
  - $g_{\bar{B}\otimes}(1_{\bar{B}A} \otimes \phi_{\bar{B}A'})f_{\bar{B}\otimes}$.

    Si A' es un álgebra exterior, tal morfismo es nulo, ya que $\phi_{\bar{B}E}=0$. Por tanto, supondremos que A' es un álgebra polinomial $P(v,2m)$. Para obtener un elemento no nulo mediante $f_{\bar{B}\otimes}$, el elemento al que se aplica ha de tener la siguiente estructura:

    $$[a|\cdots|a|v^{r_1}|\cdots|v^{r_k}]\,.$$

    Así, salvo signo, obtenemos:

    $$\begin{aligned} &g_{\bar{B}\otimes}(1\otimes\phi_{\bar{B}P})f_{\bar{B}\otimes}([a|\cdots|a|v^{r_1}|\cdots|v^{r_k}]) \\ &= [a|\cdots|a] \star \phi_{\bar{B}P}[v^{r_1}|\cdots|v^{r_k}] \\ &= [a|\cdots|a] \star [v|v^{r_1-1}|\cdots|v^{r_k}]\,. \end{aligned}$$

    Donde todos los sumandos del producto shuffle siempre tienen al menos una inversión más que el elemento original, ya que $\phi_{\bar{B}P}$ aumenta en uno el número de p–inversiones y después, mediante el producto shuffle, se conserva el número total de inversiones (lema 3.2.10).

– $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$.

Si A es un álgebra exterior E, entonces $\phi_{\bar{B}E} = 0$. Supongamos, pues, que A es un álgebra polinomial $A = P(v, 2m)$. Distinguimos entonces que A' sea un álgebra exterior o un álgebra polinomial.

* Si $A' = E(u, 2k+1)$, entonces $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes} = g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}P} \otimes 1_{\bar{B}E}) f_{\bar{B}\otimes}$

  Supongamos, de nuevo, para no obtener un elemento nulo por $f_{\bar{B}}$, que el elemento original de $\bar{B}(P \otimes E)$ tiene la siguiente estructura:

$$[v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}| \underbrace{u| \cdots |u}_{n-i}] .$$

  Entonces,

$$g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}P} \otimes 1_{\bar{B}E}) f_{\bar{B}\otimes}([v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}|u| \cdots |u])$$

$$= \phi_{\bar{B}P}([v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}]) \star [u| \cdots |u]$$

$$= [v|v^{r_1-1}| \cdots |v^{r_i}] \star [u| \cdots |u]$$

  donde hay una $p1$–inversión más por la acción de $\phi_{\bar{B}P}$, además de las $\otimes$–inversiones que resulten del producto shuffle.

* Si $A' = P(v_1, 2k)$, entonces $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes} = g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P}) f_{\bar{B}\otimes}$. En este caso, sólo obtenemos elementos no nulos por $f_{\bar{B}\otimes}$ cuando el elemento primero es de la forma:

$$[v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}|v_1^{s_1}| \cdots |v_1^{s_{n-i}}] .$$

  Así, el siguiente paso será la evaluación de $f_{\bar{B}P}$ sobre $[v_1^{s_1}| \cdots |v_1^{s_{n-i}}]$, lo cual, sólo será no nulo cuando $n - i = 1$ y $s_1 = 1$. Tenemos, por tanto, dos posibilidades para el elemento inicial:

$$[v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}] \qquad \text{o} \qquad [v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}|v_1^{s_1}] .$$

  · $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P}) f_{\bar{B}\otimes}([v^{r_1}| \cdots |v^{r_i}])$

$$= [v|v^{r_1-1}| \cdots |v^{r_i}] \star [\ ] = [v|v^{r_1-1}| \cdots |v^{r_i}] ,$$

  que tiene un $p1$–inversión más que el elemento inicial.

$$\cdot\ g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P}) f_{\bar{B}\otimes}([v^{r_1}|\cdots|v^{r_i}|v_1])$$
$$= [v|v^{r_1-1}|\cdots|v^{r_i}] \star [v_1]\,,$$

que tiene una $p1$–inversión más en cada sumando y una $\otimes$–inversión en algunos de ellos (de hecho, en todos excepto en uno de ellos).

Así pues, la proposición queda completamente probada para el caso $n=2$, es decir, $A \otimes A' = A_1 \otimes A_2$ con A_i un álgebra exterior o polinomial. Para el caso general, $A \otimes A' = \otimes_{i=1}^{n} A_i$ con $A = \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ y $A' = A_n$, sólo habría que probar que el morfismo $g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$ verifica la proposición y esto puede ser probado por inducción en n.

Supongamos la proposición probada para la contracción

$$c^{n-1} : (f^{n-1}, g^{n-1}, \phi^{n-1}) : \bar{B}(\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \Rightarrow \otimes_{i=1}^{n-1} hBA_i\,,$$

es decir, que ϕ^{n-1} verifica el enunciado de la proposición.

Consideremos la contracción $c^n : (f^n, g^n, \phi^n)$ que se genera por producto tensorial y composición de contracciones a partir de c^{n-1}

$$\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \otimes A_n) \Rightarrow (\otimes_{i=1}^{n-1} \bar{B}(A_i)) \otimes \bar{B}(A_n) \Rightarrow (\otimes_{i=1}^{n-1} hBA_i) \otimes hBA_n\,,$$

La fórmula para ϕ^n es la siguiente:

$$\phi^n = \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A_n} f_{\bar{B}A_n} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A_n}) f_{\bar{B}\otimes}$$

Sólo habrá que considerar el caso de $g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$, el cual, aplicado a un elemento sobre el que no se anule $f_{\bar{B}\otimes}$,

$$g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A_n} f_{\bar{B}A_n}) f_{\bar{B}\otimes}([a_1|\cdots|a_k|a'_{k+1}|\cdots|a'_m])$$

$$= \phi^{n-1}([a_1|\cdots|a_k]) \star g_{\bar{B}A_n} f_{\bar{B}A_n}[a'_{k+1}|\cdots|a'_m]\,,$$

donde, haciendo uso de la hipótesis de inducción y del hecho de que el producto shuffle mantiene el número de inversiones, o lo aumenta, los términos resultantes tendrán al menos una inversión más que el elemento original.

- La evaluación de f sobre un elemento homogéneo de $\bar{B}(A \otimes A')$ es nula, siempre que dicho elemento tenga, al menos, una inversión.

  Sólo hay que tener en cuenta que $f_{\bar{B}\otimes}$ es nula sobre $\otimes$–inversiones y el hecho de que $f_{\bar{B}P}([v^{r_1}|\cdots|v^{r_k}]) = 0$ siempre que $k > 1$. □

Ahora supongamos que hay una perturbación ρ de $A\otimes A'$. Esta perturbación induce, de forma natural, una perturbación δ en $\bar{B}(A\otimes A')$, para la que la filtración definida es (c^n,δ)–compatible.

Proposición 3.2.11 *Sea $\mathcal{F}=\{F_k\}_{k\geq 0}$, donde F_k está constituido por todos los elementos de $\bar{B}(A\otimes A')$ que tienen k inversiones y sea δ la perturbación inducida en $\bar{B}(A\otimes A')$ por una perturbación ρ de la diferencial de $A\otimes A'$ con $\rho(A)\subset A$. Entonces $\mathcal{F}$ es una filtración (c^n,δ)–compatible.*

Demostración.

Comprobemos que al aplicar δ sobre un elemento de $\bar{B}(\otimes_{i=1}^n A_i)$ con k inversiones, se obtiene un elemento con al menos $k-1$ inversiones.

Utilicemos el método de inducción para demostrarlo. Supongamos, en primer lugar, que $n=2$, es decir, que tenemos un producto tensorial torcido $A\tilde{\otimes}^{\rho}A'$ donde tanto A como A' son, o bien un álgebra exterior, o un álgebra polinomial. La clave de la prueba reside en que una componente de un elemento homogéneo de $\bar{B}(A\otimes A')$ es responsable de, a lo más, una única inversión junto con el hecho de que la acción de δ se reduce a la aplicación de ρ a cada componente $a_i\otimes a'_i$ del elemento $[a_1\otimes a'_1|\cdots|a_n\otimes a'_n]$. Así, tenemos los siguientes casos:

- Si $a_i\otimes a'_i$ no es responsable de ninguna inversión, el elemento resultante tendrá, al menos, el mismo número de inversiones.
- Si $a_i\otimes a'_i$ es responsable de una $\otimes$–inversión, es decir, $a_i=1$ y existe $a_j\otimes a'_j$ con $j>i$ y $a_j\in$ Ker ξ_A; entonces $\rho(a'_i)$ tiene la forma $a\otimes a'$, con $a\in$ Ker ξ_A, por lo que la $\otimes$–inversión desaparece. Sólo si A es un álgebra polinomial, $\rho(a'_i)$ produciría una nueva $p1$–inversión.
- Si $a_i\otimes a'_i$ es responsable de una $p1$–inversión, entonces también lo es $\rho(a_i\otimes a'_i)=a_i\otimes\rho(a'_i)$.
- Si $a_i\otimes a'_i$ es responsable de una p–inversión y el elemento inicial tenía j p–inversiones (es decir, $a_{n-j}=1=\cdots=a_i=\cdots=a_n$), entonces el término resultante tendrá $n-i-1$ p–inversiones y $i+j-n$ $\otimes$–inversiones si $i\leq n-1$, o simplemente j $\otimes$–inversiones si $i=n$.

Pasando al producto de n álgebras, consideramos una perturbación ρ del producto tensorial $\otimes_{i=1}^{n} A_i$ de álgebras exteriores y polinomiales y la perturbación δ inducida por ρ en $\bar{B}(\otimes_{i=1}^{n} A_i)$.

Como $\rho(\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \subset \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$, podemos expresar

$$\rho = \rho|_{\otimes_{i=1}^{n-1} A_i} \oplus \rho|_{A_n} = \rho^{n-1} \oplus \rho_n \, ,$$

y bastará que la proposición se verifique para cada sumando, ya que la perturbación δ inducida por ρ en $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \otimes A_n)$ actúa sobre una única componente en cada sumando y $\rho(a \otimes a') = \mu(\rho^{n-1}(a) \otimes a') + \mu(a \otimes \rho_n(a'))$.

Por un lado, es evidente que ρ^{n-1} es una derivación–perturbación de $\otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ y, por hipótesis de inducción, verifica la proposición para inversiones de $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1})$. Pero dichas inversiones son exactamente, las inversiones debidas a $\otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ en $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-1} A_i) \otimes A_n)$, luego cumple la proposición.

Por otra parte, la única forma de que ρ_n elimine una inversión es que a' sea responsable de una p–inversión, en cuyo caso podemos razonar de la misma forma que en el caso $n = 2$, por lo que deja igual o disminuye en uno el número de inversiones.

Así, concluímos que cada término resultante tiene al menos el número de inversiones del elemento inicial menos uno. □

Así, pues, al tener una filtración (c^n, δ)–compatible, sabemos que la diferencial perturbada que se obtiene en el modelo, d_δ es susceptible de mejora, computacionalmente hablando.

Teorema 3.2.12 *La fórmula para ϕ^n, que interviene en la diferencial perturbada, d_δ, del modelo 1–homológico de $(\otimes_{i=1}^{n} A_i, \rho)$ se puede reducir a la siguiente:*

$$\phi^n = \bar{\phi}_{\bar{B}\otimes} + \bar{g}_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes},$$

donde

- $\bar{\phi}_{\bar{B}\otimes}$ *es la fórmula 3.1 establecida en el teorema 3.2.4.*
- $\bar{g}_{\bar{B}\otimes}([a_1|\cdots|a_n] \otimes [a'_1|\cdots|a'_m]) = [a_1|\cdots|a_n|a'_1|\cdots|a'_m]$.
- ϕ^k, *con $k = 1, \ldots, n-1$ reducen sus fórmulas de la misma forma.*

Demostración. De nuevo, según la proposicion 3.1.3, $f^n(\delta\,\phi^n)^i$ será nulo para cualquier elemento con grado de filtración mayor o igual que uno, por lo que nos quedamos con los sumandos de ϕ^n que dan lugar a sólo una inversión (que, acto seguido, δ debe eliminar). □

Nótese que la fórmula para $g_{\bar{B}\otimes}$ se reduce a 1 sumando en vez de $\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}$.

3.3 Aplicación: contracciones casi-completas de comparación de resoluciones

El procedimiento usual de cálculo (co)homológico en Topología Algebraica y Álgebra Homológica se realiza mediante los funtores Ext y Tor, a través de *resoluciones.*

En los capítulos anteriores no hemos tenido en cuenta los conceptos fundamentales de resolución y de cocadenas de torsión, ya que el objetivo primordial de esta memoria es el análisis de algoritmos de cálculo de A_∞–estructuras basados en el proceso perturbativo del ardid tensorial. Para no pecar de miopía en nuestro estudio, trataremos en esta sección la generación de una resolución "pequeña" para una DGA–álgebra conmutativa conexa A, a partir de la contracción de que ya disponemos para la construcción $\bar{B}(A)$. Al amparo de la Teoría de Inversiones, estableceremos que esta resolución escinde de la resolución $B(A)$ por medio de una contracción de álgebras casi–completa y que ella misma presenta como homotopía de contracción una casi–homotopía de álgebras.

Trabajando en la categoría de los módulos sobre un anillo Λ conmutativo de unidad distinta al elemento neutro, el procedimiento para generar resoluciones para el cálculo de los funtores Ext y Tor es el siguiente.

Un módulo P se dice *proyectivo* cuando verifica la propiedad universal de que cualquier homomorfismo $P \to B/A$ admite una extensión del tipo $P \to B$. Es sabido que todo módulo libre es, en particular, un módulo proyectivo. De este modo, como cualquier módulo se puede expresar como cociente de un módulo libre (por ejemplo, aquel asociado a un sistema de generadores del módulo en cuestión), se tiene que todo módulo es cociente de un módulo proyectivo.

Sea A un módulo cualquiera, y tomemos un módulo proyectivo P_0 del cual sea A un cociente; es decir, tal que la sucesión $P_0 \xrightarrow{\xi} A \to 0$ sea exacta. Repitiendo este proceso indefinidamente, tomando como módulo de partida el núcleo de la última aplicación construida, resulta una sucesión exacta del tipo

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\xi} A \equiv \xi : (P, d) \to A,$$

que constituye una *resolución* (proyectiva) de A. Es más, el DG–módulo (P, d), por construcción, presenta por módulos de homología a $H_0(P) = A$ y $H_n(P) = 0$ para $n > 0$. En general, una *resolución* de A es una sucesión exacta del tipo anterior, en la que los módulos P_i no tienen que ser forzosamente proyectivos. En el caso particular de que sean todos ellos libres, se habla de *resolución libre.*

DG–módulos proyectivos y resoluciones se pueden "comparar", en el sentido siguiente.

Teorema 3.3.1 *[Mac95]* **(de comparación de resoluciones)**

Sean $f : A \to A'$ un homomorfismo de módulos, $\xi : (P, d) \to A$ un DG–módulo proyectivo sobre A y $\xi' : (X', d) \to A'$ una resolución de A'. Entonces, existe un homomorfismo de DG–módulos $g : P \to X'$ con $\xi' g = f\xi$, único salvo equivalencia de homotopía.

Así, dos resoluciones proyectivas de A son homotópicas entre sí, de modo que para cualquier C dado, $H_n(P \otimes C)$ está unívocamente definido, independientemente de la resolución proyectiva de A elegida. De hecho, se tiene que $Tor_n(A, C) = H_n(P \otimes C)$.

Análogamente, se tiene que $Ext^n(A, C) = H^n(P, C)$, independientemente de la elección en la resolución proyectiva P de A.

Por otro lado, se considera maximal a la *resolución bar* (funtorial, definida para categorías abelianas), por analogía a las resoluciones de Koszul: dada otra resolución, la resolución bar se proyecta sobre ésta.

Describamos ahora la resolución bar de una DGA–álgebra conmutativa conexa, que se considera *maximal,* en tanto en cuanto se proyecta sobre cualquier otra resolución dada.

La resolución bar de A, $B(A)$, se define como el producto tensorial torcido $A \otimes_\theta \bar{B}(A)$ inducido por la cocadena de torsión *universal* $\theta : \bar{B}(A) \to A$,

$$\theta([a_1|\cdots|a_n]) = \begin{cases} a_1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Así, la diferencial $d_{B(A)}$ queda definida como

$$d_B(a \otimes [a_1|\cdots|a_n]) = da \otimes [a_1|\cdots|a_n] + (-1)^{|a|} a \otimes d_{\bar{B}}([a_1|\cdots|a_n]) + \mu_A(a, a_1)[a_2|\cdots|a_n].$$

Por ser A conmutativa y conexa, $B(A)$ adquiere asimismo una estructura de DGA–álgebra conmutativa y conexa, con el producto canónico

$$\mu_{B(A)} = (\mu_A \otimes \star)(1 \otimes T \otimes 1).$$

La homotopía $s : B(A) \to B(A)$ definida como

$$s(a \otimes [a_1|\cdots|a_n]) = [a|a_1|\cdots|a_n],$$

hace de $\xi : (B(A), d_B) \to \Lambda$ una *resolución contráctil* a Λ, dado que $d_B s + s d_B = 1$. Nótese que el operador s es Λ–lineal, pero en ningún caso A–lineal.

La siguiente proposición es inmediata:

Proposición 3.3.2 *La homotopía s es una quasi-homotopía de álgebras. En otras palabras, la contracción $\{B(A), \Lambda, \xi_{B(A)}, \eta_{B(A)}, s\}$ es una contracción de álgebras casi-completa*

Lamentablemente, esta resolución es demasiado “grosera”, en el sentido de que comprende un DG–módulo de gran tamaño, y en la mayor parte de los casos es posible encontrar resoluciones alternativas más finas.

En particular, nos centraremos en resoluciones *relativamente libres* $\xi : (X, d) \to A$, que tienen por módulos $X_n = A \otimes \bar{X}_n$, con cada $\bar{X}_n$ un Λ–módulo (ver [Mac95]).

El módulo graduado $\bar{X}$ se conoce como *complejo reducido de la resolución*, y siempre se puede obtener en la forma $\bar{X} = \Lambda \otimes_A X$.

Recordemos que el producto tensorial de A–módulos, $B \otimes_A C$, sobre la DGA–álgebra A viene dado por el conúcleo del homomorfismo $p : B \otimes A \otimes C \to B \otimes C$ con

$$p(b \otimes a \otimes c) = \mu(b \otimes a) \otimes c - b \otimes \mu(a \otimes c).$$

Teorema 3.3.3 *[Mac95]*

Sean $\xi : (P, d) \to B$ una resolución relativamente libre y $\xi' : (X, d) \to C$ una resolución contráctil. Todo homomorfismo de A–módulos $\alpha : B \to C$ admite una elevación a un homomorfismo de A–módulos $f : P \to X$, única salvo equivalencia de homotopía. Tal elevación es única si se exige que los morfismos $f_n e_n$ se descompongan a través de las homotopías t_{n-1}, con $e_n : M_n \to A \otimes M_n$.

De hecho, f viene determinado recursivamente por las fórmulas

$$f_0 e_0 = t_{-1} \alpha \xi e_0, \qquad f_{n+1} e_{n+1} = t_n f_n d e_{n+1}.$$

En [Lam92, Lam93], Lambe establece una comparación entre la resolución bar $B(A)$ y una resolución $\xi : (X, d) \to A$ en términos del Teorema 3.3.3 de comparación de resoluciones; de modo que obtiene el homomorfismo A–lineal $g : X \to B(A)$ de comparación canónicamente definido por recursión,

$$g_0|_{\bar{X}_0} = \xi, \qquad g_{n+1}|_{\bar{X}_{n+1}} = s g_n d_{n+1}|_{\bar{X}_{n+1}}.$$

Esta aplicación define en general una equivalencia de homotopía entre $B(A)$ y X.

Más aún, cuando la resolución X de partida es contráctil a Λ, mediante un operador t Λ–lineal (que no A–lineal), en muchos casos g resulta ser la inyección de una contracción.

En cualquier caso, a partir de t es posible aplicar nuevamente el teorema de comparación 3.3.3, esta vez en sentido inverso, de modo que se obtiene por recursión el homomorfismo A–lineal $f : B(A) \to X$, con

$$f_0|_{\bar{B}(A)_0} = 1_\Lambda, \qquad f_{n+1}|_{\bar{B}(A)_{n+1}} = t f_n d_{n+1}|_{\bar{B}(A)_{n+1}}.$$

Las composiciones de estos dos homomorfismos de comparación son ambas homotópicas a la identidad, y f y g pueden por tanto completarse hasta formar un sombrero de contracciones (un par de contracciones con DG–módulo mayor común, y DG–módulos pequeños respectivos $B(A)$ y X).

Es interesante el caso en que f y g conforman una verdadera contracción (esto es, cuando $fg = 1$), que llamaremos *contracción de comparación canónica* [Lam92, Lam93].

Las resoluciones que admiten una contracción desde la resolución bar (que llamaremos *contracción de comparación*, en general distinta de la canónica), las denominaremos *resoluciones que escinden de la resolución bar*, por extensión de las definiciones en [Lam91, Lam92, Lam93]. El sentido de "escisión" proviene del hecho de que dichas resoluciones conforman DG–módulos pequeños en contracciones $c(f', g', \phi')$ que tienen a $B(A)$ como DG–módulo mayor, de modo que se da la descomposición $B(A) = X \oplus \mathrm{Ker}\,(g'f')$.

En [Alv01] se recoge la equivalencia de trabajar a nivel de contracciones de comparación entre resoluciones y a nivel de contracciones entre los complejos reducidos correspondientes.

Para el caso de DGA–álgebras conmutativas conexas, en [Alv01] se estudian propiedades multiplicativas subyacentes en la *contracción de comparación canónica* entre una resolución que escinde de la resolución bar y la propia resolución bar. Más concretamente, sea $\xi : (X, d) \to \Lambda$ una resolución que escinde de la resolución bar de una DGA–álgebra conmutativa conexa A, contráctil a Λ según una homotopía t. Sea (f, g, ϕ) la contracción de comparación canónica entre $B(A)$ y X que genera t. Ahora, supongamos que t es una cuasi–homotopía de álgebras. Entonces se garantiza el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4 *[Alv01] El A-módulo (X, d) tiene estructura de DGA–álgebra conmutativa conexa, mediante el producto $\mu_X = f\mu_{B(A)}(g \otimes g)$. Más aún, con respecto a los productos anteriores, la contracción (f, g, ϕ) es una contracción de álgebras casi–completa.*

A partir de una contracción de álgebras casi–completa $\bar{c} : \{\bar{B}(A), \bar{X}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi}\}$ (entre complejos reducidos) , es inmediato establecer una contracción de comparación entre las resoluciones asociadas, que en general no coincidirá con la contracción de comparación canónica. El resultado análogo al Teorema 3.3.4 que se recoge en [Alv01] en cuanto a las estructuras subyacentes en esta contracción de comparación es el siguiente.

Proposición 3.3.5 *[Alv01] Sea A una DGA–ágebra conmutativa conexa y $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi})$ una contracción de álgebras semi–completa de $(\bar{B}(A), d_{\bar{B}})$ a una DGA–álgebra conmutativa $(\bar{X}, \bar{d})$ dada. Entonces, existe una contracción $(B(A), d_B)$ a $A \otimes \bar{X}$, donde las estructuras diferenciales vienen determinadas por perturbación de la contracción inicial entre los complejos reducidos.*

A la luz de los resultados de [Alv01] anteriores, trabajando directamente con una resolución casi–completa que escinde la resolución bar, el teorema de comparación canónica en términos de contracciones (en caso de haberla) se revela como una contracción casi–completa de álgebras; mientras que las contracciones de comparación no canónicas presentan, en principio, un carácter semi–completo.

Hay, pues, una aparente pérdida en el grado de compatibilidad de las contracciones con respecto a los distintos productos al trabajar con complejos reducidos en vez de directamente con resoluciones. El resultado principal de la sección, Teorema 3.3.7, nos afirma que no hay tal pérdida y que el contexto homológico de las DGA–álgebras conmutativas conexas se mueve en torno a contracciones de álgebras casi–completas (y no sólamente, semi–completas).

Antes de enunciar y demostrar este resultado, necesitamos adentrarnos brevemente en el ámbito de las A_∞-cocadenas de torsión y los A_∞-productos tensoriales torcidos.

Dada una DGA–coálgebra C y una A_∞–álgebra A (respectivamente, una DGA–álgebra A y una A_∞–coálgebra C), una A_∞–cocadena de torsión $t : C \to A$ es una aplicación lineal de grado -1 tal que

$$td + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t^{\otimes i} \Delta^{(i)} = 0$$

$$(\text{resp.,} \quad dt + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^{\otimes i} \Delta_i = 0),$$

donde $\Delta^{(1)} = 1$, $\mu^{(1)} = 1$, $\Delta^{(2)} = \Delta$, $\mu^{(2)} = \mu$ y en general $\Delta^{(k)} = (1 \otimes \Delta^{(k-1)})\Delta$ y $\mu^{(k)} = \mu(1 \otimes \mu^{(k-1)})$.

De otro modo, $t : C \to A$ es una A_∞–cocadena de torsión si y sólo si posee una única elevación $\tilde{t} : C \to \tilde{B}(A)$ (resp., $\tilde{t} : \tilde{\Omega}(C) \to A$) que constituye un morfismo de DGA–coálgebras (resp., DGA–álgebras), con $t = \theta\tilde{t}$ (resp., $t = \tilde{t}\theta$).

Dado que un A_∞–homomorfismo entre las A_∞–álgebras A y A' (resp., entre las A_∞–coálgebras C y C') viene dado por un morfismo de DGA–coálgebras entre $\tilde{B}(A)$ y $\tilde{B}(A')$ (resp., por un morfismo de DGA–álgebras entre $\tilde{\Omega}(C)$ y $\tilde{\Omega}(C')$); la composición de una A_∞–cocadena de torsión con un A_∞–homomorfismo genera una nueva A_∞–cocadena de torsión.

Siguiendo con la analogía con respecto a las cocadenas de torsión en sentido estricto (cocadenas de Brown), toda A_∞–cocadena de torsión da lugar a un A_∞–producto tensorial torcido. La diferencial d_t en el complejo $A \otimes_t C$ viene dada por

$$d_t = 1 \otimes d + \sum_{i=1}^{\infty}(m_i \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(i)})$$

$$(\text{resp.}, d_t = d \otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i)).$$

El siguiente resultado, propio de [Alv01], establece el modo en que un producto tensorial torcido degenera hacia un A_∞-producto tensorial torcido, sin abandonar el contexto de las contracciones.

Teorema 3.3.6 *[Alv01] Sea $A \otimes_t C$ el producto tensorial torcido según una cocadena de torsión $t : C \to A$ y consideremos una contracción $c(f, g, \phi) : C \Rightarrow C'$. Supongamos que c induce sobre C' una estructura de A_∞–coálgebra, que $t\phi = 0$ y que $(1 \otimes \phi)t\cap$ es puntualmente nilpotente. Entonces, existe una contracción*

$$A \otimes_t C \Rightarrow A \otimes_{\bar{t}} C',$$

donde $\bar{t} = tg$ es una A_∞–cocadena de torsión y $A \otimes_{\bar{t}} C'$ un A_∞–producto tensorial torcido.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el resultado principal de la sección.

Teorema 3.3.7 *Sea una DGA–álgebra conmutativa conexa $A = n \otimes^{\rho}_{i \in I} A_i$ dada en forma factorizada de un PTT de álgebras exteriores y polinomiales y la contracción $c = (\bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi})$ de álgebras casi–completa de $\bar{B}(A)$ a una DGA–álgebra conmutativa conexa más pequeña $\bar{X}$ determinada por perturbación. Entonces, podemos construir por perturbación una contracción (f, g, ϕ) de comparación de $B(A)$ al A_∞-PTT $A \otimes_{\theta\bar{g}} \bar{X}$, considerando en $\bar{X}$ la estructura de A_∞–coalgebra derivada de c usando el ardid tensorial. Desde el punto de vista de DGA–álgebras conmutativas conexas, esta contracción resulta casi–completa.*

Demostración.

La primera parte del teorema resulta elemental si tenemos en cuenta que se dan todas las hipótesis del Teorema 3.3.6. Nótese que la condición $\theta\bar{\phi} = 0$ se tiene ya que $\bar{\phi}$ es un morfismo que aumenta siempre la dimensión simplicial de, al menos, 1 y θ es cero sobre elementos con dimensión simplicial mayor o igual a 1.

En cuanto a la casi-completitud de la contracción, es necesario remitirse a la teoría de inversiones desarrollada en esta memoria. Para ello, consideramos únicamente las inversiones de $\bar{B}(A)$ y de cara a determinar que f es un morfismo de DGA-álgebras, simplemente tenemos que determinar que la perturbación

$$\delta(a \otimes [a_1|\cdots|a_n]) = \mu_A(a, a_1)[a_2|\cdots|a_n]$$

hace disminuir a lo sumo en una inversión. Ahora bien, esto es evidente considerando que cada inversión es generada por una componente diferente de un elemento genérico $[a_1|\cdots|a_n]$ de $\bar{B}(A)$ y que θ sólo afecta a la primera componente a_1. Por tanto, si $[a_1|\cdots|a_n]$ presenta r inversiones $[a_2|\cdots|a_n]$ presenta al menos $r-1$. □

Del hecho de que la diferencial del A_∞–PTT $X = A \otimes_{t\bar{g}} \bar{X}$ sea una derivación, se deduce que para determinar ésta **sólo es necesario conocer los morfismos Δ_i de la A_∞–coálgebra $\bar{X}$ sobre los generadores del álgebra $\bar{X}$**. Para demostrar rigurosamente esta afirmación, sólo tenemos que comprobar que $\theta\bar{g}$ es la A_∞–cocadena de torsión definida por $\theta\bar{g}(\bar{x}) = [x]$, si $\bar{x}$ es un generador de un álgebra exterior o de potencias divididas, siendo cero en otro caso y que darse cuenta que $d_{\theta\bar{g}}$ sigue la fórmula:

$$d_{\theta\bar{g}} = d_A \otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu_A^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes (\theta\bar{g})^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i)).$$

Una vez que disponemos de una contracción casi–completa para una resolución X que escide de $B(A)$, veamos que X admite una homotopía de contracción casi–completa. Para ello necesitamos del siguiente lema.

Lema 3.3.8 *[GL89] Sea X una resolución de Λ sobre A que escinde de $B(A)$ según una contracción $(f, g, \phi) : B(A) \Rightarrow X$. Entonces, fsg es una homotopía de contracción para X*

Demostración.

Aunque la demostración del resultado no aparece en el artículo citado, se puede reproducir sin dificultad.

En grado cero, es claro que $fsg = 0$ (dado que $s|_{|\,|=0} = 0$), lo cual tiene sentido por ser ambos X_0 y $B_0(A)$ el propio anillo Λ.

Dado que s es la homotopía de contracción de la resolución bar a Λ, se tiene que en grados positivos es $1 = sd + ds$.

Así, para grados positivos, se tiene que

$$(fsg)d + d(fsg) = fsgd + fdsg = fsgd + f(1 - sd)g = fsgd + fg - fsdg = fg = 1,$$

dado que $dg = gd$ y $fg = 1$.

Por tanto, fsg constituye una homotopía de contracción a Λ. □

Ya podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.3.9 *Sea X la resolución de Λ sobre A que escinde de $B(A)$ según la contracción $(f, g, \phi) : B(A) \Rightarrow X$ del Teorema 3.3.7. Entonces, es posible especificar una contracción que determine la aciclicidad de X y que sea casi–completa.*

Demostración.

Como fsg es una homotopía de contracción para X por el teorema anterior, y s es un morfismo que aplicado a un elemento de $A \otimes_\theta \bar{B}(A)$ con r inversiones nos devuelve un elemento con, al menos r inversiones, es facil demostrar que fsg es una casi–homotopía de álgebras.

Aquí sólo demostraremos que $fsg\mu_X(fsg \otimes fsg) = 0$, siendo $\mu_X : X \otimes X \to X$ el producto en X. Las otras dos identidades son triviales.

$$fsg\mu_X(fsg \otimes fsg) = fsgf\mu_B(sg \otimes sg) = fs(1 - d\phi - \phi d). \tag{3.2}$$

Como $1 = ds + sd$, s es una casi–homotopía de álgebras, ϕ siempre crea una inversión de más, los tres sumandos que aparecen en la última expresión de arriba son respectivamente cero. □

Capítulo 4.

Estructura de A_∞–coálgebra en el modelo 1–homológico de DGA–álgebras conmutativas.

Capítulo 4.

Estructura de A_∞–coálgebra en el modelo 1–homológico de DGA–álgebras conmutativas.

En este capítulo aplicaremos, en la medida de lo posible, la teoría de inversiones desarrollada, al cálculo de las estructuras infinitas que se producen en el modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa, A.

Como sabemos, la contracción que proporciona el modelo 1–homológico

$$c_\delta : (f_\delta, g_\delta, \phi_\delta) : (\bar{B}(A), \delta) \Rightarrow (hBA, d_\delta)$$

induce en el mismo, mediante el ardid tensorial, sendas estructuras de A_∞–álgebra y de A_∞–coálgebra, ya que $\bar{B}(A)$ es un álgebra de Hopf.

En cuanto a la estructura de A_∞–álgebra $(m_1,\, m_2,\, m_3, \ldots)$ que en principio se obtendría en el modelo, inducida por la estructura de álgebra de $\bar{B}(A)$, resulta ser una estructura finita. En concreto, el hecho de ser la contracción semicompleta, implica que $m_i = 0$ para $i \geq 3$ (véase [Rea00]), por lo que m_2 es un producto asociativo.

Así, nos interesamos por la transferencia de la estructura de coálgebra de la construcción bar al modelo 1–homológico. En general, obtendremos una estructura de A_∞–coálgebra $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots)$.

Nuestros esfuerzos se centran en el cálculo del candidato a coproducto, Δ_2, en el modelo, siendo las expectativas bastante más complicadas para Δ_3 y sucesivos.

Veremos un caso particular de DGA–álgebras conmutativas en el que esta estructura infinita que se genera en el modelo se reduce, de hecho, a una estructura finita (de coálgebra).

4.1 Cómputo del "coproducto"

En la sección 2.1 del capítulo 2 especificamos los morfismos componentes de de las A_∞–estructuras en función de los de la contracción que da lugar a las mismas.La expresión para el candidato a coproducto, según la fórmula (2.15), es la siguiente:

$$\Delta_2 \;=\; (f_\delta \otimes f_\delta)\,\Delta_{\bar{B}}\, g_\delta$$

Atacamos el problema de la complejidad del algoritmo asociado a la fórmula explícita de Δ_2. Nos centramos en el morfismo f_δ,

$$f_\delta = f - f\delta\phi + f\delta\phi\delta\phi - f\delta\phi\delta\phi\delta\phi + \cdots .$$

El responsable de la alta complejidad en la evaluación de este morfismo es el operador de homotopía, ϕ, debido, esencialmente, a los shuffles que intervienen en las fórmulas de $\phi_{B\otimes}$ y $g_{B\otimes}$. Sin embargo, reducimos esta complejidad, haciendo uso de la teoría de inversiones. El hecho de tener una filtración (c,δ)–compatible, con $c : \{\bar{B}(A), hBA, f, g, \phi\}$, produce una reducción en el morfismo ϕ que interviene en la fórmula de f_δ como consecuencia de la proposición 3.1.3. Dicha reducción es la misma que experimenta dicho morfismo en la fórmula de d_δ (teorema 3.2.12) y que consiste en considerar sólo los sumandos de ϕ que dan lugar a elementos con 1 inversión.

Establecemos este resultado en forma de teorema:

Teorema 4.1.1 *Al aplicar Δ_2 a un elemento del modelo 1–homológico de una DGA-álgebra $A\otimes A'$, la fórmula para ϕ, que interviene en la definición de f_δ, se puede reducir a la especificada en el teorema 3.2.12.*

El siguiente paso lógico sería analizar minuciosamente, en la fórmula de Δ_2, el comportamiento del morfismo $\Delta_{\bar{B}}$ con respecto a las inversiones, así como el de g_δ, con la idea de eliminar sumandos innecesarios en su fórmula.

Comprobamos, sin embargo que no encontramos un comportamiento claramente definido del morfismo $\Delta_{\bar{B}}$ con respecto a los distintos tipos de inversiones, lo que imposibilita el hacer ninguna reducción de este tipo en g_δ.

Ello nos lleva a definir un nuevo concepto dentro de la teoría de inversiones, el de **padre** de una inversión. En adelante cuando hablemos de inversiones, nos estaremos refiriendo sólo a $\otimes$-inversiones.

Definición 4.1.2 Sea $A \otimes A'$ una DGA–álgebra conmutativa y consideremos un elemento homogéneo $b = [a_1 \otimes a'_1|a_2 \otimes a'_2|\cdots|a_n \otimes a'_n]$ de $\bar{B}(A \otimes A')$ con una $\otimes$–inversión de la que es responsable una componente a'_k, es decir, $a_k = 1$ y existe un $j > k$ con $a_j \in$ Ker ξ_A. Entonces diremos que a_j es *padre* de la inversión, si $j = min\{i/\, i > k,\, a_i \in \text{ Ker } \xi_A\}$

Por supuesto, en el caso en que $A = \otimes_{i=1}^{n} A_i$, esta definición se extiende, de forma natural a las $\otimes$–inversiones de $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1})$, considerando el primer factor de $\lambda(b)$, una vez eliminadas todas las componentes degeneradas. En general, si la DGA–álgebra es $\otimes_{i=1}^{n} A_i$, la $\otimes$–inversión se dará cuando la componente k–ésima sea de la forma $\otimes_{i=m}^{n} a_i$, para algún m, y la j–ésima, $j > k$ (padre), sea $\otimes_{i=1}^{n} a_i$, con algún $a_i \in$ Ker ξ_{A_i} para $1 \leq i \leq m-1$.

Observemos que varias inversiones pueden tener un mismo padre.

Nos interesa ahora estudiar el comportamiento de los morfismos integrantes de Δ_2 con respecto a los padres de inversiones. Está claro que para que la imagen por Δ_2 de un elemento no sea nula, necesariamente, la imagen por $\Delta_{\bar{B}} g_\delta$ del mismo ha de ser un elemento sin inversiones. Además, para obtener un tal elemento, la imagen por g_δ ha de ser un elemento con una única inversión, o con varias inversiones pero todas de un mismo padre, de manera que $\Delta_{\bar{B}}$ las elimine.

Analizando la forma de actuar del morfismo $\Delta_{\bar{B}}$, podemos deducir la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3 *La evaluación de $\Delta_{\bar{B}}$ sobre un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$ produce elementos con el mismo número de padres o con un padre menos que el original.*

Demostración.

Observemos que si la componente j–ésima es padre de la k–ésima, $k < j$, entonces también lo es de todas las componentes intermedias, desde la $k+1$ hasta la $j-1$–ésima.

Por otra parte, recordamos la formulación de $\Delta_{\bar{B}}$:

$$\Delta_{\bar{B}}([a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_n \otimes a'_n]) = \sum_{i=0}^{n}[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_i \otimes a'_i] \otimes [a_{i+1} \otimes a'_{i+1}|\cdots|a_n \otimes a'_n].$$

Así, cada sumando

$$[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_i \otimes a'_i] \otimes [a_{i+1} \otimes a'_{i+1}|\cdots|a_n \otimes a'_n]$$

tendrá, contando las inversiones de los dos factores, un padre menos que el elemento original, si $a_{i+1} \otimes a'_{i+1}$ era padre de una inversión, y el mismo número de padres que el elemento original, si $a_{i+1} \otimes a'_{i+1}$ no era padre de ninguna inversión. □

Abordamos, a continuación el morfismo g_δ. Recordamos que

$$g_\delta = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\,(\phi\delta)^i\,g \;=\; g\,-\phi\delta g + \phi\delta\phi\delta g - \cdots + (-1)^i(\phi\delta)^i g + \cdots$$

Para ello, evidentemente, estudiamos el comportamiento de los morfismos δ y ϕ con respecto a los padres de inversiones.

Proposición 4.1.4 *Al aplicar la perturbación, δ, sobre un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$ con m padres, se obtiene un elemento con $m-1$, m o $m+1$ padres.*

Demostración.

Sabemos que la perturbación, δ, de $\bar{B}(A \otimes A')$ está inducida por la perturbación, ρ, de $A \otimes A'$, que sólo actúa sobre una componente del elemento, $a \otimes a'$, por lo que además, baja el grado de esa componente. Se dan, por tanto, los siguientes casos:

- que la componente sea el padre de una inversión, por lo que al aplicar ρ, seguirá siendo padre de esa inversión (ya que ρ baja el grado);
- que la componente no sea padre de ninguna inversión, en cuyo caso habría que distinguir:

- que esa componente sea responsable de una inversión ("hijo") y además no haya ninguna otra inversión de ese padre, en cuyo caso puede quedar eliminada la inversión y, por tanto, el padre (aunque también puede seguir siendo inversión del mismo padre);
- que esa componente sea responsable de una inversión ("hijo") y además haya más inversiones del mismo padre, por lo que puede ocurrir, dependiendo de la posición relativa de la componente con respecto a las demás inversiones del mismo padre,
  - que se elimine la inversión sin crear un nuevo padre (si ρ se aplica sobre la primera inversión);
  - que se genere un nuevo padre a la vez que se elimina esa inversión;
- que esa componente no sea responsable de ninguna inversión, en cuyo caso puede convertirse en padre de alguna inversión, o no.

En cualquiera de estos casos obtenemos que el número de inversiones aumenta de uno o disminuye de uno o se queda igual. □

Proposición 4.1.5 *Al aplicar el operador de homotopía ϕ sobre un elemento de $\bar{B}(A \otimes A')$, se obtiene un elemento con, al menos, el mismo número de padres que el elemento original.*

Demostración.

Recordamos la formulación del morfismo ϕ en la contracción que proporciona el modelo 1 -homológico de la DGA–álgebra conmutativa $A \otimes A'$:

$$\phi = \phi_{\bar{B}\otimes} + g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'} + 1_{\bar{B}A} \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$$

- $\phi_{\bar{B}\otimes}$:

  Consideramos, salvo signo, un sumando arbitrario de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ fijando un p y un q en su fórmula (1.16),

$$\xi_A(a_{n-q+1} *_A \cdots *_A a_n)[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1} | (a'_{\bar{n}} *_{A'} \cdots *_{A'} a'_{n-q}) \\ | ([a_{n-p-q}| \cdots |a_{n-q}] \star [a'_{n-q+1}| \cdots |a'_n])] ,$$

Si a'_k era responsable de una inversión de la que $a_j \otimes a'_j$ era el padre, entonces, a fin de obtener un sumando no nulo o no degenerado por $\phi_{\bar{B}\otimes}$, ha de ocurrir que $1 \leq k \leq n-p-q-1$ y $k < j \leq n-p-q$. Si $k < j < n-p-q$, entonces $a_j \otimes a'_j$ se conserva como padre, aunque en el caso de que $j = n-p-q$, a_j sería padre la inversión anterior y de, al menos una más, pudiendo surgir más padres de inversiones con el producto shuffle.

- $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'} + 1_{\bar{B}A} \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$:

  Recordemos que mediante estos morfismos, sólo obtenemos resultados no nulos, si el elemento al que se aplica no tiene ninguna $\otimes$–inversión en $\bar{B}(A \otimes A')$ y además es de la forma $[a_1|\cdots|a_m|a'_1|\cdots|a'_n]$. Así pues, debido al producto shuffle final ($g_{\bar{B}\otimes}$), obtendremos distintos sumandos en los que habrá entre 0 y $n+1$ $\otimes$–inversiones, y el número de padres, oscilará entre 0 y $m+1$.

  En el caso en que $n > 2$, es decir $A = \otimes_{i=1}^{n-1} A_i$ y $A' = A_n$, con respecto a las $\otimes$–inversiones debidas al producto tensorial $(\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1}$, se prueba fácilmente por inducción que

  – $g_{\bar{B}\otimes}(1_{\bar{B}A} \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$ no altera las $\otimes$–inversiones, y por tanto los padres, que pudiera tener el primer factor $([a_1|\cdots|a_m])$ en $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1})$;

  – $g_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes}$, y en concreto $\phi_{\bar{B}A}$ produce, al menos, el mismo número de padres de inversiones en $\bar{B}((\otimes_{i=1}^{n-2} A_i) \otimes A_{n-1})$ en el primer factor $[a_1|\cdots|a_m]$. □

A la vista de las dos últimas proposiciones, podemos realizar una simplificación en las fórmulas del operador de homotopía. Observemos que $\Delta_{\bar{B}}$ sólo puede eliminar un padre del elemento al que se aplica y que si hubiese alguno más, existirían inversiones en alguno de los factores a los que se aplica f_δ. Por tanto, en cada sumando de g_δ, la composición $(\phi\,\delta)^i$ debe dar lugar, a lo más, a un padre, que $\Delta_{\bar{B}}$ pueda eliminar. Así, como la composición $\phi\,\delta$ disminuye, a lo sumo, en uno el número de padres, la primera vez que se aplica dicha composición debemos permitir, a lo sumo, i padres, la segunda, $i-1$, y así sucesivamente, hasta que el último $\phi\,\delta$ debe producir, a lo más, un padre. Recogemos esta reducción en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.6 *Al aplicar Δ_2 a un elemento del modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa $A \otimes A'$, la fórmula para g_δ, se puede reducir a la siguiente:*

$$\bar{g}_\delta = g - \bar{\phi}^{(1)}\delta\, g + \bar{\phi}^{(1)}\delta\bar{\phi}^{(2)}\delta\, g - \cdots + (-1)^i \bar{\phi}^{(1)}\delta\bar{\phi}^{(2)}\delta \cdots \bar{\phi}^{(i)}\delta\, g + \cdots$$

donde

$$\bar{\phi}^{(k)} = \bar{\phi}^{(k)}_{\bar{B}\otimes} + \bar{g}^{(k)}_{\bar{B}\otimes}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes},$$

y las fórmulas simplificadas $\bar{\phi}^{(k)}_{\bar{B}\otimes}$ *y* $\bar{g}^{(k)}_{\bar{B}\otimes}$ *son las de* $\phi_{\bar{B}\otimes}$ *y* $g_{\bar{B}\otimes}$ *en las que se consideran sólo los sumandos con un máximo de* k *padres.*

Nótese que los sumandos que se eliminan de las fórmulas de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ y de $g_{\bar{B}\otimes}$ son los correspondientes a los shuffles que dan lugar a más de k padres. Así, dados un p y un q, en lugar de hacer todos los (p,q)–shuffles, tanto para un morfismo como para el otro, consideraremos aquellos shuffles que dan lugar a $1, 2, \ldots k$ padres, para lo cual habrá que tomar todas las posibles particiones de los primeros p elementos en i bloques distintos y hacer los (i,q)–shuffles correspondientes, para $i = 1, 2, \ldots k$.

A pesar de esta simplificación en la que eliminamos gran cantidad de sumandos en los productos shuffle que intervienen en Δ_2, g_δ sigue teniendo una formulación complicada, siéndolo más aún cuanto mayor sea el grado de nilpotencia del elemento.

Por otra parte, en principio sería necesario evaluar Δ_2 sobre todos los generadores de hBA. Sin embargo, la teoría de inversiones permite probar la compatibilidad entre Δ_2 y el producto, lo que hace que sólo haya que evaluarlo sobre los generadores del álgebra. De esta forma, combinaremos la restricción que proporciona el número de padres que se permiten a un determinado ϕ dentro del sumando $(\delta\,\phi)^i g$, con la dada por la dimensión simplicial del elemento al que se aplica y, por tanto, la dimensión simplicial en la que se admiten ese número de padres. Así, por ejemplo, aunque en la fórmula de g_δ, el primer ϕ que se aplica en el sumando $(\delta\,\phi)^i g$ puede dar lugar a i padres, sólo se aplicará a un elemento de grado simplicial 1, por lo que no hay que llegar a hacer ningún producto shuffle y obtenemos un único sumando.

El siguiente teorema mejora el resultado obtenido en [Rea00] por el que se aseguraba que la contracción que da lugar al modelo 1–homológico es una contracción de álgebras semicompleta.

Teorema 4.1.7 *Sea* A *una DGA–álgebra conmutativa, la contracción de álgebras casicompleta* $c : \{\bar{B}(A), hBA, f, g, \phi\}$ *y* $\delta : \bar{B}(A) \to \bar{B}(A)$ *un dato de perturbación de álgebras de* c*. Entonces, la nueva contracción dada por el lema básico de perturbación*

$$c_\delta : \{(\bar{B}(A), d_{\bar{B}} + \delta),\ (hBA, d_\delta),\ f_\delta,\ g_\delta,\ \phi_\delta\}$$

es también una contracción de álgebras casi–completa.

Demostración.

Para probar que f_δ es un morfismo de DG–álgebras, consideremos la contracción

$$c_\delta \otimes c_\delta : \{\, \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A),\ hBA \otimes hBA,\ f_\delta \otimes f_\delta,\ g_\delta \otimes g_\delta,\ \phi_\delta^{[\otimes 2]} = \phi_\delta \otimes g_\delta f_\delta + 1 \otimes \phi_\delta \,\}\,.$$

Teniendo en cuenta la condición $(c2)$ de la definición de contracción,

$$\phi_\delta^{[\otimes 2]}\delta^{[2]} + \delta^{[2]}\phi_\delta^{[\otimes 2]} = 1^{\otimes 2} - g_\delta^{\otimes 2} f_\delta^{\otimes 2}$$

donde $\delta^{[2]} = 1 \otimes \delta + \delta \otimes 1$ es la diferencial–perturbación en $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$.

Componiendo a la izquierda con el producto shuffle $\star$ y después con el morfismo f_δ, obtenemos la expresión:

$$f_\delta \star \phi_\delta^{[\otimes 2]}\delta^{[2]} + f_\delta \star \delta^{[2]}\phi_\delta^{[\otimes 2]} = f_\delta \star - f_\delta \star g_\delta^{\otimes 2} f_\delta^{\otimes 2} \tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta, en el segundo miembro, que g_δ es un morfismo de DG–álgebras, y la condición $(c1)$,

$$f_\delta \star g_\delta^{\otimes 2} f_\delta^{\otimes 2} = f_\delta\, g_\delta \bullet f_\delta^{\otimes 2} = \bullet f_\delta^{\otimes 2}\,,$$

donde $\bullet : hBA \otimes hBA \to hBA$ es el producto en hBA.

Así, si probásemos que el primer miembro de la la igualdad 4.1 es nulo, f_δ sería un morfismo de DG–álgebras. Pero el primer término de la suma se puede escribir

$$f_\delta \star (\phi_\delta \otimes g_\delta f_\delta + 1 \otimes \phi_\delta)\delta^{[2]} = f_\delta \star (\phi_\delta \otimes g_\delta f_\delta)\delta^{[2]} + f_\delta \star (1 \otimes \phi_\delta)\delta^{[2]}$$

donde el primer sumando es nulo debido a que f_δ es una quasi proyección de álgebras, por lo que, en particular, $f_\delta \star (\phi_\delta \otimes g_\delta) = 0$. Por otra parte, la evaluación de $f_\delta \star (1 \otimes \phi_\delta)\delta^{[2]}$ es siempre nula ya que ϕ, y por tanto ϕ_δ, produce elementos con una inversión que se preserva por el producto shuffle (lema 3.2.10). Finalmente, el segundo sumando del primer miembro de 4.1 se puede expresar:

$$f_\delta \star \delta^{[2]}\phi_\delta^{[\otimes 2]} = f_\delta \delta \star \phi_\delta^{[\otimes 2]} = d_\delta f_\delta \star \phi_\delta^{[\otimes 2]}$$

(ya que $\delta^{[2]}$ es una derivación y f_δ es un morfismo de DG–módulos). Ahora, razonando de la misma forma que antes, concluímos que la evaluación de $f_\delta \star \phi_\delta^{[\otimes 2]}$ es nula. □

Teniendo en cuenta este teorema, es fácil comprobar que se satisface una relación de compatibilidad de Δ_2 con el producto del álgebra.

Teorema 4.1.8 *Sea A una DGA-álgebra conmutativa y c_δ : $\{(\bar{B}(A), d_{\bar{B}} + \delta),\ (hBA, d_\delta),\ f_\delta,\ g_\delta,\ \phi_\delta\}$ la contracción que da lugar al modelo 1-homológico de A. Entonces, el morfismo Δ_2 inducido en hBA satisface la siguiente propiedad:*

$$\Delta_2 \bullet = (\bullet \otimes \bullet)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_2 \otimes \Delta_2), \tag{4.2}$$

donde $\bullet : hBA \otimes hBA \to hBA$ es el producto de la DGA-álgebra hBA y $T : hBA \otimes hBA \to hBA \otimes hBA$ es el morfismo que intercambia los factores.

Demostración.

Para probarlo no hay más que tener en cuenta que g_δ y f_δ son morfismos de DG–álgebras y el hecho de que $\bar{B}(A)$ es un álgebra de Hopf. Así, se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \bullet &= (f_\delta \otimes f_\delta)\, \Delta\, g_\delta \bullet \;=\; (f_\delta \otimes f_\delta)\, \Delta\, \star\, g_\delta^{\otimes 2} \\
&= (f_\delta \otimes f_\delta)\, (\star \otimes \star)\, (1 \otimes T \otimes 1)\, (\Delta \otimes \Delta)\, g_\delta^{\otimes 2} \\
&= (\bullet \otimes \bullet)\, (1 \otimes T \otimes 1)\, f_\delta^{\otimes 4}\, \Delta^{\otimes 2}\, g_\delta^{\otimes 2} \\
&= (\bullet \otimes \bullet)\, (1 \otimes T \otimes 1)\, ((f_\delta \otimes f_\delta)\, \Delta\, g_\delta) \otimes ((f_\delta \otimes f_\delta)\, \Delta\, g_\delta) \\
&= (\bullet \otimes \bullet)\, (1 \otimes T \otimes 1)\, (\Delta_2 \otimes \Delta_2)
\end{aligned}$$

□

En particular, esta relación significa que para determinar el morfismo Δ_2, sólo necesitamos evaluarlo sobre los generadores de hBA como álgebra (¡un número finito de elementos!).

El teorema 4.1.7 también nos da la posibilidad de crear un test de coasociatividad para Δ_2.

La coasociatividad de Δ_2 nos garantizaría la estructura de coálgebra de hBA aun sin la necesidad de que el resto de morfismos Δ_3, $\Delta_4, \ldots$ sean nulos. El teorema 4.1.7 nos permite afirmar que si Δ_2 es coasociativo para los generadores del álgebra, entonces lo es para cualquier elemento.

Proposición 4.1.9 *El morfismo Δ_2 que se induce en el modelo 1–homológico hBA de una DGA–álgebra conmutativa A, satisface la siguiente propiedad:*

$$(\Delta_2 \otimes 1)\Delta_2 \bullet = (1 \otimes \Delta_2)\Delta_2 \bullet ,$$

donde $\bullet$ es el producto en hBA.

Demostración

Haciendo uso de la propiedad 4.2, establecemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\Delta_2 \otimes 1)\,\Delta_2 \bullet &= (\Delta_2 \otimes 1)\,(\bullet \otimes \bullet)\,(1 \otimes T \otimes 1)\,(\Delta_2 \otimes \Delta_2) \\
&= ((\bullet \otimes \bullet)\,(1 \otimes T \otimes 1)\,(\Delta_2 \otimes \Delta_2) \otimes \bullet)(1 \otimes T \otimes 1)\,(\Delta_2 \otimes \Delta_2) \\
&= (\bullet_{\otimes} \otimes \bullet)((\Delta_2 \otimes \Delta_2) \otimes 1)(1 \otimes T \otimes 1)\,(\Delta_2 \otimes \Delta_2) \\
&= (\bullet_{\otimes} \otimes \bullet)\,(1^{\otimes 2} \otimes (1 \otimes T)(T \otimes 1) \otimes 1)\,((\Delta_2 \otimes 1)^{\otimes 2})\,\Delta_2^{\otimes 2} \\
&= (\bullet_{\otimes} \otimes \bullet)\,(1^{\otimes 2} \otimes (1 \otimes T)(T \otimes 1) \otimes 1)\,((\Delta_2 \otimes 1)\,\Delta_2)^{\otimes 2} \\
&= (\bullet_{\otimes} \otimes \bullet)\,(1^{\otimes 2} \otimes (1 \otimes T)(T \otimes 1) \otimes 1)\,((1 \otimes \Delta_2)\,\Delta_2)^{\otimes 2}
\end{aligned}$$

donde $\bullet_{\otimes} = (\bullet \otimes \bullet)\,(1 \otimes T \otimes 1)$ y realizando los mismos pasos en orden inverso obtenemos la igualdad deseada. $\square$

Como ya adelantábamos anteriormente, el hecho de que sólo será necesario conocer Δ_2 sobre los generadores del álgebra, implica una mejora ostensible en el cómputo de dicho morfismo. Pero si además tiene en cuenta el teorema 4.1.6, podemos afinar un poco más y establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.1.10 *Al aplicar Δ_2 a un generador del modelo 1–homológico de una DGA–álgebra conmutativa $A \otimes A'$, la fórmula para g_δ, se puede reducir a la siguiente:*

$$\bar{g}_\delta = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\bar{\phi}_i^{(1)}\, \delta\, \bar{\phi}_{i-1}^{(2)}\, \delta \cdots \bar{\phi}_{i-[i/3]+1}^{([i/3])}\, \delta\, \phi_{i-[i/3]}\, \delta \cdots \phi_1 \delta\,)g$$

donde los subíndices en los operadores de homotopía indican la dimensión simplicial en la que se aplica cada uno y, sin tener en cuenta dicho subíndice,

$$\bar{\phi}^{(k)} = \bar{\phi}_{\bar{B}\otimes}^{(k)} + \bar{g}_{\bar{B}\otimes}^{(k)}(\phi_{\bar{B}A} \otimes g_{\bar{B}A'} f_{\bar{B}A'} + 1 \otimes \phi_{\bar{B}A'}) f_{\bar{B}\otimes},$$

en donde las fórmulas simplificadas $\bar{\phi}^{(k)}_{\bar{B}\otimes}$ y $\bar{g}^{(k)}_{\bar{B}\otimes}$ son las dadas en el teorema 4.1.6 en las que se eliminan aquellos shuffles que dan lugar a más de k padres.

Demostración.

Lo probaremos por inducción en i. En primer lugar comprobaremos los casos $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$:

- Para $i = 1$, el sumando $\phi_1\, \delta\, g$ se aplica sobre un generador (dimensión simplicial 1), así que $\delta\, g$ proporciona un elemento de dimensión simplicial 1, para el que ϕ da lugar a un único sumando de dimensión simplicial 2 (y que, a lo más, puede contener un padre) y por tanto no hay reducción posible. Este mismo razonamiento servirá para cada vez que se aplique ϕ_1.

- Para $i = 2$, consideramos $\phi_2\, \delta\, \phi_1\, \delta\, g$, donde ϕ_2 es el operador ϕ aplicado a dimensión simplicial 2. Según el teorema 4.1.6, en ϕ_2 sólo habría que considerar los sumandos que dan lugar a, a lo más 1 padre. Sin embargo, todos los sumandos que se obtienen por ϕ_2 son de dimensión simplicial 3 y, por tanto, no pueden contener a más de 1 padre, ya que para que haya 2 padres es necesario que haya 2 inversiones de distinto padre, y por tanto, dimensión simplicial 4 (al menos). Así, al igual que ϕ_1, no tendrá reducción posible en ningún caso.

- Para $i = 3$, consideramos $\phi_3\, \delta\, \phi_2\, \delta\, \phi_1\, \delta\, g$, donde, en ϕ_3 sólo habrá que considerar aquellos sumandos que dan lugar a 1 único padre. Ahora bien, ϕ_3 da lugar a sumandos de dimensión simplicial 4, por lo que sí es posible que alguno de ellos contenga 2 padres.

  - En el caso de $\phi_{\bar{B}\otimes}$, aplicado a un elemento $[a_1 \otimes a'_1 | a_2 \otimes a'_2 | a_3 \otimes a'_3]$, el único sumando que da lugar a 2 padres es, salvo signo,

  $$\xi_A(a_3)[a'_1 *_{A'} a'_2 | a_1 | a'_3 | a_2]\,,$$

  por lo que sería el único sumando que habría que eliminar.

  - En el caso de $g_{\bar{B}\otimes}$, habrá que eliminar los shuffles que den lugar a 2 padres y este es le caso de exactamente 1 de los $(2,2)$–shuffles.

  Así, ϕ_3 se reduce en el sentido de que se consideran los sumandos de $\phi_{\bar{B}\otimes}$ y de $g_{\bar{B}\otimes}$ que dan lugar a un único padre, denominando al nuevo morfismo, ya simplificado, como $\bar{\phi}_3^{(1)}$, quedando el sumando correspondiente de g_δ

$$\bar{\phi}_3^{(1)}\,\delta\,\phi_2\,\delta\,\phi_1\,\delta\,g$$

Supongamos el teorema probado hasta $i-1$ y veámoslo para i. El sumando $(i-1)$–ésimo de g_δ será

$$\bar{\phi}_{i-1}^{(1)}\,\delta\,\bar{\phi}_{i-2}^{(2)}\,\delta\cdots\bar{\phi}_{i-[(i-1)/3]}^{([(i-1)/3])}\,\delta\,\phi_{i-[(i-1)/3]-1}\,\delta\cdots\phi_1\delta\,g\,,$$

en donde los morfismos ϕ simplificados son los $[(i-1)/3]$ últimos en aplicarse.

El sumando i–ésimo consistirá en aplicar una vez más $\phi\,\delta$,

$$\phi_i\,\delta\,\phi_{i-1}\,\delta\cdots\phi_1\delta\,g\,.$$

Hemos de tener en cuenta tres hechos:

- Por un lado, la hipótesis de inducción por la que en el sumando $(i-1)$–ésimo de g_δ se simplificaron $\phi_{i-1},\phi_{i-2},\ldots,\phi_{i-[(i-1)/3]}$ al no permitir sumandos que dieran lugar a más de $1,2,\ldots,[(i-1)/3]$ padres, respectivamente, mientras que el resto $\phi_{i-[(i-1)/3]-1},\ldots,\phi_1$ no reducían sus fórmulas debido a que la dimensión simplicial de los elementos resultantes no podían dar lugar al número de padres prohibidos.

- Por otro lado, en el sumando i–ésimo y según el teorema 4.1.6, los sumandos permitidos son los que dan lugar a un máximo de 1 padre para ϕ_i, 2 padres para ϕ_{i-1} (nótese que antes se le permitía un único padre), 3 padres para ϕ_{i-2} (antes 2 padres), ..., hasta $[(i-1)/3]+1$ padres (antes $[(i-1)/3]$) para $\phi_{i-[(i-1)/3]}$. Para el resto no hay que restringir el número de sumandos, ya que si no tenían posibilidad de reducción en el caso anterior, no la van a tener ahora.

- El número máximo de padres a que puede dar lugar ϕ_k es $[(k+1)/2]$.

  Así, el número máximo de padres a que da lugar $\phi_{i-[(i-1)/3]}$ es

  $$\left[\frac{i-[(i-1)/3]+1}{2}\right],$$

  pero $i-[(i-1)/3]=[2i/3]+1$, como es fácil comprobar, por lo que

  $$\left[\frac{i-[(i-1)/3]+1}{2}\right]=\left[\frac{[2i/3]+2}{2}\right]=\left[\frac{i}{3}\right]+1\,.$$

Tenemos dos casos:

1. Que el número máximo de padres a que da lugar $\phi_{i-[(i-1)/3]}$ sea mayor que $[(i-1)/3]+1$, es decir, que $[i/3] > [(i-1)/3]$. Entonces habrá que probar que $i-[(i-1)/3] = i-[i/3]+1$, con lo que se satisfacería el teorema.

   Pero $[i/3] > [(i-1)/3]$ si y sólo si $i \equiv 0$ (mod) 3, en cuyo caso, en realidad, $[i/3] = [(i-1)/3]+1$.

2. Que el número máximo de padres a que da lugar $\phi_{i-[(i-1)/3]}$ sea menor o igual que $[(i-1)/3]+1$, es decir, que $[i/3] \leq [(i-1)/3]$. Entonces habrá que demostrar que $i-[(i-1)/3]+1 = i-[i/3]+1$.

   Pero $[i/3] \leq [(i-1)/3]$ si y sólo si $i \equiv 1$ (mod) 3 ó $i \equiv 2$ (mod) 3 , en cuyo caso, ocurre que $[i/3] = [(i-1)/3]$, y por tanto se verifica el teorema. □

A continuación expondremos una tabla comparativa con algunos ejemplos que ilustren las simplificaciones en la fórmula de g_δ que acabamos de describir.

En concreto, para distintos valores de i en el sumatorio de g_δ, describiremos el número de sumandos de los morfismos $\phi_{\bar{B}\otimes}$ que intervienen en las fórmulas de $\bar{\phi}_i^{(1)}, \bar{\phi}_{i-1}^{(2)}, \cdots \bar{\phi}_{i-[i/3]+1}^{([i/3])}$. Se produce una reducción de número de sumandos análoga para $g_{\bar{B}\otimes}$.

Téngase en cuenta que, aunque en un sumando de g_δ se produzca una reducción en la fórmula de ciertos operadores ϕ, éstos mismos se verán reducidos en menor medida en el siguiente sumando. Así, la reducción efectiva de sumandos que no hay que llegar a computar en ningún momento son los que corresponden al último sumando de g_δ, es decir, cuando i es el grado de nilpotencia del elemento.

Sumando de g_δ	Morfismos que se simplifican	Número original de sumandos	Número de sumandos tras la reducción
$i = 3$	ϕ_3	11	10
$i = 9$	ϕ_9	1013	165
	ϕ_8	502	372
	ϕ_7	247	246
$i = 20$	ϕ_{20}	2097130	1540
	ϕ_{19}	1048555	21679
	ϕ_{18}	524268	94164
	ϕ_{17}	262125	155363
	ϕ_{16}	131054	121652
	ϕ_{15}	65519	65382
$i = 40$	ϕ_{40}	2199023255510	11480
	ϕ_{39}	1099511627735	760058
	ϕ_{38}	549755813848	19311448
	ϕ_{37}	274877906905	227880965
	ϕ_{36}	137438953434	1379464562
	ϕ_{35}	68719476699	4552602211
	ϕ_{34}	34359738332	8582372548
	ϕ_{33}	17179869149	9756737667
	ϕ_{32}	8589934558	7317737892
	ϕ_{31}	4294967263	4187373050
	ϕ_{30}	2147483616	2143911392
	ϕ_{29}	1073741793	1073709862
	ϕ_{28}	536870882	536870852

4.2 El caso de las DGA–álgebras conmutativas puramente cuadráticas

Uno de los factores que influyen en la complejidad de Δ_2 es la naturaleza de la perturbación, ρ, del producto tensorial banal $\otimes_{i=1}^{n} A_i$. Estudiamos ahora un caso de DGA–álgebras conmutativas en las que ρ actúa de una forma muy concreta.

En particular, para este tipo de álgebras, $\Delta_1 = 0$ y por tanto el modelo 1–homológico coincide con la 1–homología. Así, si estudiamos la estructura de A_∞–coálgebra del modelo, estaremos estudiando dicha estructura en la 1–homología.

Definición 4.2.1 Sea A una DGA–álgebra conmutativa dada en su forma factorizada $(\otimes_{i=1}^{n} A_i, \rho)$ y sea x_i el generador del álgebra A_i. Diremos que A es *no lineal* si la diferencial-perturbación no tiene ningún sumando lineal, es decir,

$$\rho(x_i) = \sum_{i,k} \lambda_i \, x_{i_1}^{r_{i_1}} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}^{r_{i_k}} \,,$$

con $k \geq 2$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i$ y $\lambda_i \in \Lambda$.

Notamos el conjunto de DGA–álgebras conmutativas no lineales mediante CDGA_0.

Lema 4.2.2 *Sea $A \in CDGA_0$ y c_δ : $\{(\bar{B}(A), d_{\bar{B}} + \delta),\ (hBA, d_\delta),\quad f_\delta,\ g_\delta,\ \phi_\delta\}$ la contracción que da lugar al modelo 1–homológico de A. Entonces, $d_\delta = 0$ y $f_\delta = f$.*

Demostración.

Recordemos que tanto d_δ como f_δ contienen en sus fórmulas la composición de morfismos $f\,\delta$; d_δ en todos sus sumandos y f_δ en todos sus sumandos excepto en el primero, que es, simplemente, f. Dicha composición es idénticamente nula, ya que el primer morfismo componente de f es $f_{\bar{B}\otimes}$ que se anula sobre elementos con componentes no lineales. Así, $d_\delta = 0$ y $f_\delta = f$. □

En cuanto al candidato a coproducto en el modelo 1–homológico, este lema reduce la complejidad de cálculo del mismo, como se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 4.2.3 *Sea $A \in CDGA_0$. La fórmula para Δ_2 en el pequeño modelo hBA, queda simplificada a la siguiente:*

$$\Delta_2 = (f \otimes f)\,\Delta\,\bar{g}_\delta$$

donde $\bar{g}_\delta$ es la que aparece en el teorema 4.1.10.

Dentro de las DGA–álgebras conmutativas no lineales, prestamos especial atención a los tipos que definimos a continuación.

Definición 4.2.4 Diremos que una CDGA$_0$, (A, ρ), es *cuadrática*, si la diferencial actúa de la siguiente forma sobre cada generador, x:

$$\rho(x) = \sum_i \lambda_i\, x_{i_1}^{r_{i_1}} \otimes x_{i_2}^{r_{i_2}}\,,$$

donde x_{i_1} , x_{i_2} son generadores del álgebra, $\lambda_i \in \Lambda$.

Diremos que es *puramente cuadrática*, si

$$\delta(x) = \sum_i \lambda_i\, x_{i_1} \otimes x_{i_2}\,.$$

Con respecto a la estructura de A_∞–coálgebra de la 1–homología de una CDGA$_0$ puramente cuadrática, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.2.5 *Dada una DGA–álgebra conmutativa puramente cuadrática, A, la estructura de A_∞–coálgebra que adquiere su 1–homología, hBA, se reduce a la de coálgebra.*

Demostración.

Basta probar que

$$\phi_\delta^{[\otimes 2]}\,\Delta\,g_\delta = 0\,,$$

lo que implica que $\Delta_3 = 0 = \Delta_4 = \cdots$ y en concreto, al ser $\Delta_3 = 0$, Δ_2 es un verdadero coproducto coasociativo. Así, la estructura de A_∞–coálgebra de hBA se reduce a una estructura de coálgebra, lo que hace de hBA un álgebra de Hopf.

Llamaremos elementos *simples* de $\bar{B}(A)$ a aquellos elementos homogéneos cuyas componentes sean todas lineales y, por extensión, a cualquiera que sea suma de elementos homogéneos simples.

Probaremos que el morfismo g_δ siempre da como resultado elementos simples que pasan a un producto tensorial de elementos simples por Δ y sobre los que ϕ es nulo.

Veamos que g_δ aplicado a generadores, siempre da como resultado elementos simples. Como g_δ es un morfismo de álgebras (véase [Rea00]) y el producto shuffle de elementos simples son elementos simples, concluiremos que, mediante dicho morfismo, obtenemos siempre elementos simples.

Sea $\underline{x}$ un generador del álgebra hBA.

$$g_\delta(\underline{x}) \;=\; \sum_{i\geq 0}(-1)^i\,(\phi\delta)^i\,g\,(\underline{x})$$

Probaremos, por inducción en i, que $(\phi\delta)^i g(\underline{x}) \;=\; (\phi\delta)^i[x]$ es simple.

- $\phi\delta g(\underline{x}) \;=\; \phi\delta[x] \;=\; \sum_i \lambda_i\,\phi[x_{i_1}\otimes x_{i_2}] \;=\; \sum_i \lambda_i\,[x_{i_2}|x_{i_1}]$, que es simple.
- Supongamos que $(\phi\delta)^{i-1}[x]$ es simple. Entonces cada sumando de $\delta(\phi\delta)^{i-1}[x]$ tiene una y sólo una componente cuadrática,

$$[x_1|\cdots|x_{k-1}|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|x_{k+1}|\cdots|x_m]\,. \tag{4.3}$$

Recordamos que A está considerada en su forma "factorizada" $A=\otimes_{i=1}^n A_i$, y por tanto, el operador de homotopía se puede expresar de esta forma:

$$\phi \;=\; \phi^n \;=\; \phi_{\bar{B}\otimes} \;+\; g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1}\otimes g_{\bar{B}A_n}f_{\bar{B}A_n} + 1\otimes\phi_{\bar{B}A_n})f_{\bar{B}\otimes}$$

Vamos a probar, por inducción en n, que ϕ convierte esa componente cuadrática en dos componentes lineales.

- Caso n=2. A_1 y A_2 son un álgebra polinomial o exterior, cada una de ellas. Está claro que $f_{\bar{B}\otimes}$ es nulo cuando se aplica a elementos como (4.3). Por otra parte, la única posibilidad para que $\phi_{\bar{B}\otimes}$ sea no nulo, es que $x_{k_2}, x_{k+1}, \ldots, x_m \in A_2$, obteniéndose entonces, salvo signo,

$$\phi_{\bar{B}\otimes}([x_1|\cdots|x_{k-1}|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|x_{k+1}|\cdots|x_m])$$
$$= [x_1|\cdots|x_{k-1}|x_{k_2}|\,[x_{k_1}]\star[x_{k+1}|\cdots|x_m]\,]\,, \tag{4.4}$$

que es simple.

– Caso $n > 2$.

1. Si x_{k_2} es el generador de A_n, entonces $f_{\bar{B}\otimes}$ es nulo de nuevo y $\phi_{\bar{B}\otimes}$ sólo será no nulo si $x_{k+1},\dots,x_m \in A_n$, y además, $x_1,\dots,x_{k-1}\in\otimes_{i=1}^{n-1}A_i$, en cuyo caso $\phi_{\bar{B}\otimes}$ actúa de la misma forma que antes (4.4).
2. Si x_{k_2} es el generador de A_j con $j < n$, $\phi_{\bar{B}\otimes}$ sería nulo y $f_{\bar{B}\otimes}$ sólo será no nulo si las componentes correspondientes a A_n ocupan posiciones consecutivas al final del elemento, digamos, las últimas i componentes, $x_{m-i+1},\dots,x_m$ con $m-i+1>k$. Así,
$$f_{\bar{B}\otimes}([x_1|\cdots|x_{k-1}|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|\cdots|x_{m-i+1}|\cdots|x_m])$$
$$= [x_1|\cdots|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|\cdots|x_{m-i}]\otimes[x_{m-i+1}|\cdots|x_m] \tag{4.5}$$

   Ahora bien, por un lado,
$$(1\otimes\phi_{\bar{B}A_n})([x_1|\cdots|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|\cdots|x_{m-i}]\otimes[x_{m-i+1}|\cdots|x_m])=0\,,$$
   ya que A es puramente cuadrática, y por tanto, $\phi_{\bar{B}P}$ será nulo en el caso en que A_n sea un álgebra polinomial (recordamos además, que $\phi_{\bar{B}E}=0$). En cuanto a $g_{\bar{B}\otimes}(\phi^{n-1}\otimes g_{\bar{B}A_n}f_{\bar{B}A_n})$, al aplicarlo al elemento (4.5), obtenemos elementos simples, ya que, si $g_{\bar{B}A_n}f_{\bar{B}A_n}$ es no nulo sobre el elmento al que se aplica, es la identidad; por otra parte, $\phi^{n-1}([x_1|\cdots|x_{k_1}\otimes x_{k_2}|\cdots|x_{m-i}]$ es simple por hipótesis de inducción, y finalmente, mediante producto shuffle se obtienen elementos simples.

Así, el siguiente morfismo en aplicar, Δ, "factoriza" estos elementos simples en producto de dos factores también simples.

Por último, debemos probar que ϕ es nulo sobre elementos simples, y por tanto también lo será $\phi_\delta^{[\otimes 2]}$. Pero, considerando de nuevo la fórmula para ϕ, observamos que es fácil probarlo, una vez más, por inducción. La clave está en que tanto $\phi_{\bar{B}\otimes}$ como $\phi_{\bar{B}P}$ son nulos al aplicarlos sobre elementos simples. □

Bibliografía

[Alv01] V. Álvarez. *Complejos reducidos de resoluciones y perturbación homológica*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (2001).

[AAGR98] V. Álvarez, J.A. Armario, R. González–Díaz, P. Real. *Algorithms in Algebraic Topology and Homological Algebra: the problem of the complexity*, Journal of Mathematical Sicence **106** (2000), 1015–1033.

[AARS97] V. Álvarez, A. Armario, P. Real, B. Silva. *HPT and computability of Hochschild and cyclic homologies of CDGAs*, Conference on Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscú. EMIS Electronic Proceedings, http://www.emis.de/proceedings, 1997.

[Bro59] E.H. Brown. *Twisted tensor products I*, Annals of Math. **65** (1959), 223–246.

[Bro67] R. Brown. *The twisted Eilenberg-Zilber theorem*, Celebrazioni Archimedae del Secolo XX, Simposio di Topologia (1967), 34–37.

[CE56] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[Cha00] C.H.A.T.A. group. *Computing "small" 1–homological models for Commutative Differential Graded Algebras*, Proc. of Computer Algebra in Scinetific Computing, Springer-Verlag (2000), 87–100.

[deL92] W. de Launey. *Generalised Hadamard matrices which are developed modulo a group*, Discrete Mathematics **104** (1992), 49–65.

[deL93] W. de Launey, K.J. Horadam. *Cocyclic development of designs*, J. Algebraic Combinatorics **2** (1993), 267–290.

[EGL97] T. Ekedahl, J. Grabmeier, L. Lambe. *Algorithms for algebraic computations with applications to the cohomology of finite p-groups*, Preprint of Department of Math. and Centre for Innovative Computation, University of Wales (1997).

[EM53] S. Eilenberg, S. MacLane. *On the groups $H(\pi, n)$, I*, Annals of Math. **58** (1953), 55–106 .

[EM54] S. Eilenberg, S. MacLane. *On the groups $H(\pi, n)$, II*, Annals of Math. **60** (1954), 49–139.

[FH90] J. Fisch, M. Henneaux. *Homological Perturbation Theory and the algebraic structure of the antifield-antibracket formalism for gauge theories*, Comm. in Mathematical Physics **128**, n. 3 (1990), 627–640.

[Gug72] V.K.A.M. Gugenheim. *On the chain complex of a fibration*, Illinois J. Math. **3** (1972), 398–414.

[Gug77] V.K.A.M. Gugenheim. *On Chen's iterated integrals*, Illinois J. Math. (1977), 703–715.

[GJ90] E. Getzler, J.D.S. Jones. *A_∞-algebras and the cyclic bar complex*, Illinois J. Math. **34** (1990), 256–283.

[GL89] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe. *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I*, Illinois J. Math. **33** (1989), 56–582.

[GLS91] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe, J. Stasheff. *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, II*, Illinois J. Math. **35** n. 3 (1991), 357–373.

[GR99] R. González–Díaz, P. Real. *A combinatorial method for computing Steenrod Squares*, J. of Pure and Applied Algebra **139** n. 1-3 (1999), 89–108.

[GS86] V. K. A. M. Gugenheim and J. Stasheff. *On Perturbations and A_∞-structures*, Bull. Soc. Math. Belg. **38** (1986), 237–246.

[Hue86] J. Huebschmann. *The homotopy type of $F\psi^q$. The complex and symplectic cases*, Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 487–518. Amer. Math. Soc.l, Providence, R.I., 1986.

[Hue89a] J. Huebschmann. *Perturbation theory and free resolutions for nilpotent groups of class 2*, J. Alg. **126** (1989), 348–399.

[Hue89] J. Huebschmann. *Cohomology of nilpotent groups of class 2*, J. Algebra **126** (1989), 400–450.

[Hue91] J. Huebschmann. *Cohomology of metacyclic groups*, Transactions of the American Mathematical Society **328** n. 1 (1991), 1–72.

[HK91] J. Huebschmann, T. Kadeishvili. *Small models for chain algebras*, Math. Zeit. **207** (1991), 245–280 .

[IM86] N. Iwase, M. Mimura. *Higher Homotopy Associativity*, Lecture Notes in Math. **1370** (1986), 193–220.

[JL01] L. Johansson, L.A. Lambe. *Transferring algebra structures up to homology equivalence*, Math. Scan **88** n. 2 (2001).

[JLS02] L. Johansson, L.A. Lambe, E. Skoldberg. *On constructing resolutions over the polynomial algebra.* Homology, Homotopy and Applications **4** n. 2 (2002), 315–336.

[JR00] M.J. Jiménez, P. Real. *A_∞-coalgebra structure and 1-homological models of CDGAs.* Actas del 6 Encuentro de Álgebra Computacional y aplicaciones (2000), 267–276.

[Kad80] T. Kadeishvily. *On the homology theory of fibre spaces*, Uspekhi Mat. Nauk. **35** n. 3, (19080), 183–188.

[Kad82] T. Kadeishvili. *The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra*, (Russian) Soobshch. Akad. nauk Gruzin SSR **108** (1982), 249–252.

[Kad87] T. Kadeishvili. *The functor D for a category of $A(\infty)$-algebras*, (Russian) Soobshch. Akad. nauk Gruzin SSR **125** (1987), 273–276.

[Kad88] T. Kadeishvili. *The structure of $A(\infty)$-algebra and the Hochschild and Harrison cohomologies*, (Russian) Trudy Tbiliss. Math Inst. Razmadze Akad. nauk Gruzin SSR **91** (1988), 19–27.

[Kel01] B. Keller. *Introduction to A_∞ Algebras and Modules*, Homology, Homotopy and Applications **3**, n. 1 (2001), 1–35.

[Lam91] L.A. Lambe. *Resolutions via homological perturbation*, J. Symbolic Comp. **12** (1991), 71–87.

[Lam92] L.A. Lambe. *Homological perturbation theory, Hochschild homology and formal group*, Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics (Amherst, MA, 1990), Contemp. Math. **134**, 183–218. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Lam93] L.A. Lambe. *Resolutions which split off of the bar construction*, J. Pure Appl. Alg. **84** (1993), 311–329.

[Lam94] L.A. Lambe. *Next generation computer algebra systems AXIOM and the scraptchpad concept: applications to research in algebra*, Collection "Analysis, algebra and computers in mathematical research, Lulea (1992), 201–222. Lect. Notes in Pure and Appl. Math., Dekker **156** (1994).

[Lod92] J.L. Loday. *Cyclic homology*, Springer-Verlag, 1992.

[LS87] L.A. Lambe, J. Stasheff. *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math. **58** (1987), 363–376.

[Mac95] S. MacLane. *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.

[Mar58] A.A. Markov. *Insolubility of the problem of homeomorphy*, Proc. Inter. Congr. of Math., Cambridge Univ. Press (1958), 300–306.

[Mar92] M. Mark. *A cohomology theory for $A(m)$-algebras and applications.* J. of Pure and Applied Algebra **83** n. 6 (1992), 141–175.

[McC99] J. McCleary. Higher homotopy structures in Topology and Mathematical Physics, Contemp. Math., **227**, A.M.S. Providence, RI, 1999.

[Mun74] H.J. Munkholm. *The Eilenberg–Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps.* J. Pure Appl. Alg. **5** (1974), 1–50.

[Nov55] P.S. Novikov. *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory.* Trudy Mat. Inst. Steklov, n. 44, 1955.

[Pro84] A. Prouté. *Algèbres différentielles fortement homotopiquement associatives.* PhD thesis, Université Paris VII, (1984)

[PS95] M. Penkava, A. Schwarz. *$A(\infty)$–algebra and the cohomology of moduli spaces.* Dynkin Seminar, AMS **169** AMS (1995), 91-107.

[PW1] M. Penkava, L. Weldon. *Infinity algebras, Massey products and deformations.* Preprint math/9808058.

[Rea94] P. Real. *Sur le calcul des groupes d'homotopie*, C.R. Acad. Sci. Paris, **319**, Série I (1994), 475–478.

[Rea00] P. Real. *Homological Perturbation Theory and associativity*, Homology, Homotopy and Applications **2**, n. 5 (2000), 51–88.

[Rub91] J. Rubio. *Homologie effective des espaces de lacets itérés: un logiciel*, Tesis doctoral de l'Institut Fourier, Grenoble (1991).

[Sch91] R. Schön. *Effective Algebraic Topology*, Memo. Amer. Amer. Math. Soc. **451**, 1991.

[Ser94] Sergeraert F., *The computability problem in algebraic topology.* Adv. Math., **104**, n. 1 (1994), 1–29.

[Shi62] W. Shih. *Homologie des espaces fibrés*, Inst. Hautes Etudes Sci. **13** (1962), 93–176.

[Sil98] B. Silva. *Modelos homológicos pequeños de DGA-álgebras conmutativas*, Tesis doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (1998).

[Sta63] J.D. Stasheff. *Homotopy associativity of a H–space I,II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.

[Sta70] J.D. Stasheff. *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer, N.Y., 1970.

[Sta88] J.D. Stasheff. *Cohomological Physics*, Collection: Algebraic Topology-Rational Homotopy (Louvain-La-Neuve, 1986), 228-237, L.N.Math., **1318**, 1988, Springer.

[SU1] S. Saneblidze, R. Umble. *A Diagonal on the Associahedra*, preprint.

[SU2] S. Saneblidze, R. Umble. *$A(\infty)$–Hopf algebras*, preprint.

[SU3] S. Saneblidze, R. Umble. *The biderivative and A_∞-Hopf algebras*, preprint.

[SU4] S. Saneblidze, R. Umble. *Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and Associahedra*, preprint.

[Tan85] M.C. Tangora. *Computing the homology of the lambda algebra*, Mem. Am. Math. Soc., **337** (1985).

[Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press, 1994.

Dª MARÍA JOSÉ JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

A_∞-ESTRUCTURAS Y PERTURBACIÓN HOMOLÓGICA

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

POR UNANIMIDAD

18 JUNIO DE 2003

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

T. Kadeishvili Thomas Lada

El Presidente El Secretario, El Doctorado,

Ronald N. Umble