UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

ISOVARIEDADES ISODIFERENCIABLES Y GRUPOS DE LIE-SANTILLI

Memoria presentada por Raúl Manuel Falcón Ganfornina,
para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la
Universidad de Sevilla.

V$^{\underline{\text{o}}}$. B$^{\underline{\text{o}}}$. EL DIRECTOR:

Fdo.: Juan Núñez Valdés.
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Fdo.: Raúl Manuel Falcón Ganfornina.

Sevilla, Diciembre de 2004

"Preferí no dedicarme a las matemáticas. Dicen que hay que sentir la llamada como para el sacerdocio. [...] Ahora comprendía por qué los matemáticos se sienten recorridos por una onda trascendental de energía cuando descubren una nueva fórmula o ven un nuevo patrón en algo que han contemplado mil veces. Sólo las matemáticas proporcionaban el sentimiento de atravesar otra dimensión, una que no existía en el tiempo y el espacio ... ese sentimiento de caer dentro y a través de un acertijo, de tenerlo en torno de manera física.".

Katherine Neville [El Ocho]

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho estas líneas para agradecer a todas las personas que me han apoyado en el trabajo diario y constante para la realización de esta Memoria.

A mi Director de Tesis (profesor, compañero y amigo), Juan Núñez Valdés, que tanta confianza ha depositado en mí desde el principio y tanta ayuda me ha ofrecido a lo largo de todos estos años de trabajo junto a él.

Al profesor Ruggero Maria Santilli, cuyas aportaciones e investigaciones han sido fundamentales para llevar a cabo esta Memoria. Agradecerle también la confianza puesta en este proyecto y las oportunidades que nos ha ido ofreciendo a lo largo de estos años para colaborar en el fundamento matemático de la isoteoría.

Al conjunto de profesores que en un momento dado de la etapa de investigación me han aconsejado en el desarrollo teórico de la misma.

A mis padres y hermano, porque sin ellos, sin su apoyo y el ánimo que siempre me han aportado en los momentos difíciles, no habría sido posible este trabajo. Gracias por vuestra comprensión.

A mi familia en general, que siempre me han visto capacitado para alcanzar este objetivo y siempre han mostrado interés en mi trabajo.

A todos ellos van dedicadas todas la horas de trabajo que han sido necesarias para llevar a cabo esta Memoria.

Índice general

INTRODUCCIÓN

La presente Memoria tiene dos objetivos principales. El primero es dar a conocer las herramientas necesarias para introducir la construcción de las isovariedades isodiferenciables y de los isogrupos isotópicos de Lie, haciendo uso del modelo de construcción de *isotopías de Santilli* propuesto en [14]. Previamente será necesario revisar los conceptos básicos acerca de la geometría isoeuclídea y del cálculo isodiferencial.

Un segundo objetivo a tener en cuenta es el perfeccionamiento del modelo citado, en base al conjunto de condiciones necesarias para lograr una construcción coherente con la literatura existente al respecto, con vistas a obtener a su vez nuevos ejemplos de isoestructuras matemáticas, no conocidas hasta la fecha. Con ello se sentarán las bases para futuros estudios tanto en el campo de la teoría de Lie-Santilli, como en aplicaciones en diversos campos de la Física teórica.

En particular, será primordial el análisis de las isotopías atendiendo a la inyectividad y a la compatibilidad respecto a las operaciones de partida, al igual que el estudio de los factores externos de los que depende cada levantamiento isotópico y la relación existente entre ellos.

La diversidad de campos a tratar impide profundizar en gran medida en cada uno de ellos, pues extendería considerablemente la Memoria. Es por ello por lo que se ha hecho una selección de los principales resultados introductorios en cada uno de los aspectos a analizar. No obstante, cabe indicar finalmente la presentación de una gran cantidad de ejemplos, 65 en total. La importancia de éstos es doble, pues por una parte aclararán la influencia de las propiedades anteriormente citadas en la isotopía utilizada, mientras que por otra parte permitirán mostrar de forma inmediata las mejoras logradas en el modelo presentado en [14].

Las isotopías de Santilli constituyen una nueva rama de las matemáticas, caracterizada a partir de una generalización (conservando los axiomas iniciales) de las unidades, operaciones, números, grupos, cuerpos, álgebras, topologías, etc., de las estructuras convencionales, con numerosas aplicaciones en Física, Química y otras ciencias.

Las matemáticas usadas generalmente en estas aplicaciones han estado basadas históricamente en cuerpos matemáticos con característica cero y dotados de una unidad trivial $I = +1$ y de un producto asociativo $a \times b$ entre elementos de un conjunto dado (matrices, campos vectoriales, etc.). De tal forma que estas matemáticas se han centrado en el estudio de sistemas lineales, locales-diferenciales y Hamiltonianos, que únicamente representan un número finito y aislado de partículas puntuales que interactúan entre sí mediante fuerzas derivadas de un potencial.

Lo anterior permite trabajar con representaciones exactas e invariantes tanto de los sistemas planetarios y atómicos, como de los denominados *sistemas dinámicos exteriores*, en los que todos los constituyentes pueden aproximarse mediante partículas puntuales.

Sin embargo, la gran mayoría de sistemas en la realidad física que nos envuelve son no lineales, no locales-diferenciales y no representables enteramente a través de un Hamiltoniano en las coordenadas del observador. Éste es el caso de los denominados *sistemas dinámicos interiores*, que constituyen por ejemplo la estructura de los planetas, las partículas de interacción fuerte (como protones y neutrones), los núcleos, las moléculas o las estrellas. Éstos no pueden ser por tanto reducidos de una manera consistente a conjuntos finitos de partículas puntuales, que, si bien son muy efectivos en sistemas dinámicos exteriores, simplemente constituyen a lo más una mera aproximación de los sistemas dinámicos interiores.

Atendiendo a esta cuestión, en 1978 el físico italo-americano R. M. Santilli [34] propuso la construcción de una nueva matemática, hoy conocida como *isomatemática de Santilli*, construida específicamente para tratar la representación invariante de sistemas no lineales, no locales y no Hamiltonianos, de tal forma que posteriormente se pueda reconstruir la linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.

Esta propuesta se basaba esencialmente en la construcción de isotopías (aplicaciones entre estructuras que conserven los axiomas básicos de éstas) de todas las ramas matemáticas que, basadas en una unidad trivial $I = +1$, son necesarias a la hora de trabajar con sistemas dinámicos interiores.

En particular, la isotopía fundamental de Santilli consistía en la generalización de la unidad trivial $I = +1$ a una matriz u operador $\widehat{I} = \widehat{I}(x, dx, d^2x, t, v, \mu, \tau, ...)$, dependiente de factores externos, que conserva las propiedades topológicas de la unidad inicial (no singular, Hermítica y definida positiva), si bien se le permite estar dotada de un carácter funcional no lineal, no local y no Hamiltoniano, en cada una de las variables locales que constituyen los factores externos mencionados: tiempo t, velocidad v, densidad μ, temperatura τ, etc.

La representación de los sistemas dinámicos interiores a través de la isomatemática de Santilli requiere a su vez el conocimiento de dos cantidades: el Hamiltoniano H para la representación de las fuerzas convencionales lineales, locales y potenciales y la isounidad $\widehat{I}$ para la representación de todos los efectos no lineales, no locales y no Hamiltonianos. Tal generalización de la unidad es de hecho la *única* elección para obtener una representación invariante de estos últimos efectos, puesto que tanto para las matemáticas convencionales como para las posibles generalizaciones, la unidad del sistema físico debe ser el invariante básico.

La generalización a la isomatemática de Santilli necesitaba de un estudio exhaustivo de *todas* las ramas de las matemáticas que intervienen en los sistemas interiores. Es por ello, por lo que tanto Santilli como un número creciente de matemáticos y físicos han ido desarrollando en los últimos 20 años la generalización isotópica de números, grupos, cuerpos, álgebras, espacios vectoriales (métricos), topología, cálculo diferencial, análisis funcional, variedades diferenciables, geometrías, etc.

En particular, la teoría de Lie, que ejerce un papel fundamental en Física, sufre también de claras limitaciones debido a su carácter lineal, local-diferencial y Hamiltoniano. Es por ello por lo que en [34], Santilli propuso también el levantamiento isotópico de todas las ramas de la teoría de Lie, incluyendo el estudio isotópico de las álgebras envolventes universales, álgebras y grupos de Lie, teoría de representación, etc. De esta manera se alcanzaba una teoría generalizada aplicable a sistemas no lineales, no locales y no Hamiltonianos, denominada hoy día *isoteoría de Santilli*, cuyo estudio ha sido continuado en varios monográficos [35] [38] [39] y artículos relacionados.

La mayoría de estos resultados fueron presentados por Santilli como un caso particular de una teoría más general basada en la noción de *admisibilidad de Lie*, propuesta por A. A. Albert [3], hoy denominada *genoteoría de Lie-Santilli.*

Debido a su relevancia matemática y física, la isoteoría de Lie-Santilli ha sido estudiada en numerosos artículos y monográficos por varios autores. Como ejemplo pueden citarse los monográficos realizados por: H. C. Myung [32] de 1982; A. K. Aringazin. A. Jannussis, D. F. Lopez, M. Nishioka y B. Veljanovski [4] de 1991; Gr. Tsagas y D. S. Sourlas [50] de 1993; J. Lôhmus, E. Paal y L. Sorgsepp [30] de 1994; J. V. Kadeisvili [27] de 1997; y R. M. Falcón Ganfornina y J. Núñez Valdés [14] de 2001.

Cabe destacar también el estudio sobre teoría de isonúmeros, iniciada por Santilli en 1978, si bien fue presentada en forma matemática en la memoria [41] de 1993. Los isonúmeros de Santilli han sido estudiados por varios autores, aunque de forma más extensa es de señalar la presentación dada por C.-X. Jiang [11] en 2002.

Otro avance significativo realizado por Santilli en la mitad de los años 80, ha sido el levantamiento isotópico de los espacios Euclídeo y Minkowskiano, junto con sus geometrías asociadas (ver [38] y las referencias citadas en dicho artículo). Estos estudios han sido continuados por varios autores, entre los que cabe citar a J. V. Kadeisvili [23], Gr. Tsagas y D. S. Sourlas [51] [52], y R. M. Falcón Ganfornina y J. Núñez Valdés [15].

Por su parte, J. V. Kadeisvili [23] propuso la primera formulación de la *isocontinuidad* y el *análisis isofuncional*, que ha continuado tratándose por varios autores como A. K. Aringazin, D. A. Kirushin y R. M. Santilli [5].

Gr. Tsagas y D. S. Sourlas [51] [52] propusieron a su vez la primera formulación de la *isotopología* en isoespacios sobre cuerpos convencionales. Esta formulación fue extendida por R. M. Santilli [43] a isoespacios sobre isocuerpos y posteriormente de forma más extensa por R. M. Falcón Ganfornina y J. Núñez Valdés en [15]. A propuesta del propio Santilli, este estudio es conocido con el nombre de *isotopología de Tsagas-Sourlas-Santilli-Falcón-Núñez* (ITSSFN).

La última referencia citada se basaba a su vez en el monográfico [14] de 2001, donde se generalizaba el modelo isotópico propuesto por Santilli, mediante el uso de tantas $*$-*leyes* e isounidades como operaciones existan en la estructura matemática inicial, dando lugar al denominado MCIM (*modelo de construcción isotópica basado en la multiplicación*).

Indicar por último que todos estos avances han permitido una generalización estructural en Mecánica Cuántica y en Química, dando origen a las denominadas *Mecánica y Química Hadrónica* [42] [49], a partir de las cuales se han obtenido numerosas aplicaciones industriales, como resultado de la nueva interpretación de las unidades matemáticas utilizadas.

En la presente Memoria se profundiza en el estudio de la isoteoría de Lie-Santilli, por medio del análisis del levantamiento isotópico de los grupos de Lie. Es necesario por tanto desarrollar previamente aspectos teóricos referentes a la geometría isoeuclídea, al cálculo isodiferencial y a las isovariedades isodiferenciables. Será de hecho en este análisis previo donde centraremos nuestro estudio, con vistas a generalizar resultados previos ya existentes al respecto en la literatura, si bien desde el punto de vista novedoso que origina el MCIM, el cual generaliza lo más posible el tipo de isooperaciones a utilizar en las estructuras matemáticas con las que se trabaje y en particular, permite analizar el relevante estudio de levantamientos isotópicos no inyectivos, que origina la obtención de ejemplos matemáticos característicos. Algunos resultados a este respecto ya se han mostrado en [19].

En este sentido, uno de los principales objetivos será realizar un análisis exhaustivo para lograr establecer las condiciones que deben verificar los elementos de isotopía asociados al MCIM, a la hora de generalizar los diferentes aspectos a tratar de la teoría de Lie convencional. Con vistas a evitar una extensión excesiva de la presente Memoria, se ha realizado una selección entre los citados aspectos. En concreto, salvo excepciones, únicamente serán tratados aquellos resultados imprescindibles para alcanzar los conceptos de isogrupo isotópico de Lie y de grupo de isotransformaciones o de Lie-Santilli.

El origen de ambas estructuras matemáticas tiene lugar en 1978, con la presentación que hace R. M. Santilli de la isoteoría [34]. Sin embargo, no será hasta 1993, cuando los matemáticos D. S. Sourlas y G. T. Tsagas realicen el primer monográfico matemático sobre la teoría de Lie-Santilli [50]. En particular alcanzan la construcción de un isoálgebra de Lie y de su isoálgebra envolvente, analizando posteriomente el concepto de isovariedad diferenciable.

No obstante, en dicho estudio no aparece el concepto de isodiferenciabilidad en aplicaciones entre isovariedades, pues no es hasta Diciembre de 1994 cuando se presenta por primera vez el cálculo isodiferencial, en el *Internacional Workshop on Differential Geometry and Lie algebras*, celebrado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Aristotle en Thesalonika (Grecia). De hecho, no será hasta 1996 cuando Santilli [43] publique por primera vez sus resultados sobre este nuevo cálculo.

En particular, el análisis del levantamiento isotópico de las variedades diferenciables a partir de la isodiferenciabilidad es aún inédito. Es por ello por lo que nos planteamos en la presente Memoria dicho estudio, aplicando además los nuevos avances teóricos en isotopología, con vistas a abordar el posterior desarrollo de los isogrupos isotópicos de Lie.

Por todo ello, estructuramos la presente Memoria en cinco Capítulos, que irán encaminados al estudio de los isogrupos isotópicos de Lie (como conjuntos dotados de una estructura de isogrupo y de una estructura isodiferenciable compatibles) y a una introducción a la construcción de los denominados grupos de Lie-Santilli o grupos de isotransformaciones.

En el primer Capítulo se presentan aquellas definiciones y resultados más importantes sobre isoteoría de Lie-Santilli, que se suponen indispensables para la comprensión de la Memoria. Se muestra por tanto el concepto de isotopía de Santilli y se presentan los resultados más destacados referentes al MCIM de 2001.

En el segundo Capítulo se dan las nociones básicas para construir la geometría isoeuclídea, correspondiente al levantado isotópico de la métrica euclídea usual, estudiando previamente la construcción general de un isoespacio vectorial isométrico.

Dado que lo que nos interesa es abordar el estudio de la isogeometría atendiendo al MCIM, diferiremos en el punto de vista con el que Santilli trata este aspecto en [35]. Con ello se intenta no obstante encontrar resultados coherentes con las distintas $*$-leyes a utilizar, de tal forma que, finalmente, la propuesta de Santilli resulte un caso particular de la presentada en esta Memoria. En este sentido, será fundamental la utilización de una nueva isounidad $\widehat{I}'$, diferente de la relativa al isocuerpo $\overline{\widehat{K}}$ correspondiente, tal y como se muestra en la Proposición 2.1.1.

Como ejemplo nos centramos en el analisis de la identificación de cada recta isotópica con un isovector director. La existencia de este último se restringe de hecho a isotopías que cumplan la condición indicada en la Definición 2.3.15, la cual es verificada en particular para $*$-leyes asociativas en ciertos subespacios vectoriales de V (Proposición 2.3.16). El Corolario 2.3.21 nos dará finalmente condiciones necesarias para que la identificación mencionada pueda realizarse. Gracias a esto podremos estudiar la perpendicularidad entre rectas isotópicas, comprobando la equivalencia con el caso convencional (Corolario 2.3.15).

Se finalizará el capítulo con la presentación de diferentes circunferencias isotópicas, mostrando ejemplos concretos de cada una de éstas.

En el tercer Capítulo, se dan las definiciones y las propiedades básicas del cálculo isodiferencial. Cabe destacar que la variación en el estudio de la isométrica presentado en el capítulo precedente, respecto a la propuesta de Santilli en [35], implica a su vez una variación en la presentación del cálculo isodiferencial.

En particular se impondrán unas condiciones en el nivel general, bajo las cuales se pueda prescindir de diferenciar entre isocoordenadas covariantes y contravariantes.

Por su parte, el resultado principal que certifica la coherencia en la construcción presentada será la Proposición 3.2.3, que asegura a su vez la isodiferenciabilidad de una isofunción cuando se disponga de la diferenciabilidad convencional de la función correspondiente.

La compatibilidad en las operaciones del cuerpo base permitirá además obtener el álgebra de isofunciones isodiferenciables mostrado en la Proposición 3.2.7.

Se termina el capítulo con el estudio de la isodiferenciabilidad en isoaplicaciones, obteniendo por construcción la Proposición 3.4.8 y el Corolario 3.4.9, que serán fundamentales a la hora de abordar el estudio de la isoteoría de Lie-Santilli.

En el Capítulo cuarto se expone la teoría relativa a las isovariedades isodiferenciables. Previamente, con vistas a hacer uso de isotopías no inyectivas se hace necesario generalizar algunos aspectos de la isotopología ITSSFN, mediante un análisis en las condiciones que verifican los factores externos de los que dependen tales levantamientos isotópicos (Proposiciones 4.1.3 y 4.1.7, Corolario 4.1.11). En particular se comprobará que es muy útil restringirnos a isotopías que sean inyectivas para cualesquiera valores fijos en los factores externos de los que dependa la isounidad utilizada.

Se continúa con el estudio de isocartas locales, isoatlas isodiferenciables e isovariedades isodiferenciables. Cabe destacar las condiciones de la Proposición 4.2.3, bajo las cuales los anteriores conceptos estarán relacionados de forma biunívoca con los convencionales correspondientes.

En la última sección del capítulo se desarrollan resultados referentes a las isoaplicaciones isodiferenciables entre dichas estructuras. Se estudia la relación de éstas con sus equivalentes convencionales, analizando para ello la necesidad de imponer la inyectividad en los factores externos utilizados o bien la compatibilidad respecto a las operaciones de partida.

Finalmente, en el Capítulo quinto se plantea la construcción de los isogrupos isotópicos de Lie y de los grupos de isotransformaciones.

En particular, la primera sección se dedica al estudio de los isogrupos isotópicos de Lie, mostrando varios ejemplos al respecto. Vuelve a aparecer la importancia del análisis de los factores externos de la isotopía utilizada, lo cual permite identificar los grupos de Lie convencionales con los isogrupos isotópicos de Lie (Proposición 5.1.7).

Por su parte, en la segunda sección se presenta un estudio inicial en la construcción del espacio isotangente de una isovariedad isodiferenciable, basado en el cálculo isodiferencial del tercer capítulo. En particular se obtiene una base de dicho espacio en el caso de trabajar con un tipo particular de isotopías de clase III (Proposición 5.2.4).

Aparece también el concepto de diferencial de una isoaplicación isodiferenciable, la cual queda determinada en el caso anterior de isotopías de clase III por la matriz isodiferencial de la misma.

Analizando los campos vectoriales isodiferenciables invariantes, se establece una base para éstos en casos concretos de levantamientos isotópicos, gracias a los resultados que se basan a su vez en la Proposición 5.2.12. En particular se construye de esta forma el isoálgebra isotópica asociada a un isogrupo isotópico de Lie.

En la tercera sección del capítulo se presenta la correspondiente aplicación exponencial en el nivel de proyección, que relaciona el isoálgebra isotópica de Lie asociada a un isogrupo isotópico de Lie con este último. Previamente es necesario analizar el concepto de isotrayectoria. A este respecto, las isotopías de clase III permitirán obtener un resultado de existencia y unicidad de isotrayectorias (Teorema 5.3.10).

En particular se tendrá el anterior resultado para el caso de isotrayectorias asociadas a campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda (Proposición 5.3.11), lo que permitirá dar la definición de la isoaplicación isoexponencial en el nivel de proyección.

Finalmente, en la cuarta sección se presenta el concepto de grupo de Lie-Santilli o grupo de isotransformaciones, junto a sus propiedades notables, haciendo ver su analogía con el caso convencional.

Todo el estudio anterior se acompaña de una gran cantidad de ejemplos que permiten facilitar la comprensión de los nuevos conceptos. En concreto, con vistas a mostrar los avances que permite el MCIM, se presentan bastantes casos en los que se utilizan isotopías no inyectivas e isotopías no compatibles respecto a las operaciones de partida. En este sentido destacan los Ejemplos 3.2.8 y 4.2.2, donde se muestran nuevos modelos de construcción, que permiten la obtención de este tipo de isotopías.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Con el fin de facilitar una adecuada comprensión del presente estudio, se muestran en este Capítulo las definiciones y propiedades de la isoteoría de Santilli que serán necesarias con posterioridad. Para una mayor profundización en los conceptos aquí mencionados pueden verse las distintas referencias citadas en la introducción de la Memoria.

En una primera sección daremos las nociones básicas acerca de las herramientas fundamentales que utiliza Santilli en su estudio: las isotopías. Se indican el modelo que propuso Santilli en 1978 [34], las clases de isotopías propuestas por Kadeisvili [23], los niveles de construcción isotópica y el MCIM de 2001 [14].

Finalmente, en la última sección se tratarán los avances que el MCIM ha aportado a la isotopología de Tsagas-Sourlas-Santilli, dando origen a la denominada ITSSFN.

1.1. Definición de Isotopía

En 1978, Ruggero Maria Santilli propuso una generalización de la teoría convencional de Lie haciendo uso de isotopías, dando lugar a la conocida hoy día como *isoteoría de Santilli* (véase [34]). Para ello consideró que la unidad básica I de toda estructura matemática puede sufrir dependencia en varios factores externos del sistema en el que nos encontremos (coordenadas, velocidad, tiempo, densidad, temperatura, etc.), dando lugar a una isounidad $\widehat{I} = \widehat{I}(x, dx, d^2x, ..., \mu, \tau, ...)$.

Utilizando este principio, Santilli realizó una construcción metódica que generaliza las estructuras matemáticas más importantes, dando lugar a las denominadas *isoestructuras* (*isogrupos*, *isoanillos*, *isocuerpos*, *isoespacios vectoriales* e *isoálgebras* (véanse [37], [39], [50])), lo que le permitió a su vez avanzar en el desarrollo de algunas aplicaciones físicas, como Mecánica Cuántica y Dinámica de partículas ([41]).

Al respecto, recordamos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.1. *Se denomina* isotopía *o* levantamiento isotópico *a toda correspondencia entre una estructura matemática fijada y otra del mismo tipo, esto es, tal que verifique sus mismas propiedades. La estructura imagen se denomina* isoestructura*.*

Definición 1.1.2. *Se denominan* isotopías de Santilli *a aquellas isotopías de una estructura lineal, local y canónica, que den como resultado una isoestructura en las formas no lineales, no locales y no canónicas más generales posibles y que sean capaces de reconstruir linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.*

Definición 1.1.3. *Se denomina* isogrupo *al levantado isotópico de un grupo que esté dotado a su vez de esta última estructura. De manera análoga se definen los conceptos de* isoanillo, isocuerpo, isoespacio vectorial e isoálgebra*.*

El modelo de isotopía de Santilli de 1978 se basa en la generalización de la unidad de partida: $I \to \widehat{I} = \widehat{I}(x, dx, d^2x, ..., \mu, \tau, ...)$. En particular, fijada una estructura matemática cualquiera E, dotada de un producto interno $\times$, se considera un conjunto $V \supseteq E$, dotado de una operación asociativa $*$ y tal que existen $I, \widehat{I}, T \in V$, donde $I \in E$ es la unidad de $*$ en V y $T = \widehat{I}^{-I}$. A V, T e $\widehat{I}$ se les conoce respectivamente como *conjunto general, elemento isotópico e isounidad* de la isotopía en cuestión.

De esta forma, se definen los elementos de la isoestructura matemática $\overline{\widehat{E}}$ dotada del isoproducto $\overline{\widehat{\times}}$ de unidad $\widehat{I}$ como :

$$E \to \overline{\widehat{E}} : x \to \overline{\widehat{x}} = x * \widehat{I}\ , \qquad a\overline{\widehat{\times}}b = a * T * b, \text{ para todos } a, b \in \overline{\widehat{E}}.$$

Posteriormente, en 1992, J. V. Kadeisvili [23], clasifica las isotopías atendiendo a la isounidad utilizada:

a) CLASE I. Asociadas a isounidades suficientemente diferenciables, acotadas, no degeneradas en todo punto, hermíticas y definidas positivas. Son las isotopías de Santilli propiamente dichas.

b) CLASE II. Análogas a las de clase I, salvo en que $\widehat{I}$ será definida negativa.

c) CLASE III. La unión de las dos clases anteriores.

d) CLASE IV. Las de clase III junto a las que tienen isounidades singulares.

e) CLASE V. Las de clase IV junto a las que tienen isounidades sin ninguna restricción, pudiendo depender de funciones discontinuas, distribuciones, etc.

Finalmente, en 2001 [14] se generaliza el modelo isotópico propuesto por Santilli, usando para ello tantos *elementos de isotopía* ($*$-*leyes* e isounidades) como operaciones tenga la estructura inicial. Se mantienen de esta forma los cuatro niveles de construcción de una isotopía, si bien se enfatiza el uso del nivel general:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \textbf{Nivel general} \\
\textbf{Nivel convencional} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & (V, *, \star, ...) \\
 & & \cup \\
(E, +, \times, ...) & & (E, \star, *, ...) \\
\downarrow & \sharp & \downarrow \mathbf{I} \\
\textbf{Nivel de Proyección} & \xleftarrow{\qquad\pi\qquad} & \textbf{Nivel isotópico} \\
(\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, ...) & & (\widehat{E}, \widehat{+}, \widehat{\times}, ...)
\end{array}$$

Donde por construcción:

a) La aplicación $\mathbf{I} : (E, \star, *, ...) \to (\widehat{E}, \widehat{+}, \widehat{\times}, ...) : X \to \widehat{X}$ es un isomorfismo.

b) La *proyección isotópica* es sobreyectiva:
$\pi : (\widehat{E}, \widehat{+}, \widehat{\times}, ...) \to (\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, ...) : \widehat{a} \to \pi(\widehat{a}) = \overline{\widehat{a}} = a * \widehat{I}$.

Este modelo, al que nos referiremos a partir de ahora como $MCIM$ (*modelo de construcción del isoproducto basado en la multiplicación*), se ha desarrollado al igual que el de Santilli, de una manera sistemática, analizando cada una de las isoestructuras matemáticas más importantes. De hecho se cumple el siguiente resultado:

Proposición 1.1.4. *Fijada una estructura matemática cualquiera* $(E, +, \times, \circ, \bullet, ...)$, *si realizamos un levantamiento isotópico tal que:*

a) Se usan los elementos de isotopía principales $*$, $\widehat{I}$ *y secundarios* $\star, \widehat{S}$.

b) $(E, \star, *, ...)$ *es una estructura matemática del mismo tipo que la inicial, estando dotada de unidades* $S, I, ...,$ *con respecto a* $\star, *, ...$ *respectivamente.*

c) I *es unidad con respecto a* $*$ *en el conjunto general* V *correspondiente, siendo* $T = \widehat{I}^{-I} \in V$ *el elemento isotópico asociado.*

Entonces, definiendo en el nivel isotópico las operaciones:

$$\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{a \star b}; \quad \widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a * b},$$

y estando definidos en el nivel de proyección:

$$\overline{\widehat{a}} = a * \widehat{I}; \quad \alpha\overline{\widehat{+}}\beta = ((\alpha * T) \star (\beta * T)) * \widehat{I}; \quad \alpha\overline{\widehat{\times}}\beta = ((\alpha * T) * (\beta * T)) * \widehat{I}; ...$$

se obtiene que la isoestructura resultante $(\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, ...)$ *es del mismo tipo que la inicial.*

El $MCIM$ se ha ido mejorando en varios trabajos posteriores ([15], [17], [18] y [19]), comprobándose en todo momento que generaliza convenientemente el modelo de Santilli, si bien permite algunas construcciones matemáticas más complejas. De hecho, se comprueba en [15] el siguiente resultado:

Proposición 1.1.5. *Cualquier isotopía* $\pi \circ \mathbf{I} : (E, +, \times, \circ, \bullet, ...) \to (\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, \overline{\widehat{\circ}}, \overline{\widehat{\bullet}}, ...)$ *se puede estudiar como un levantamiento isotópico que siga el MCIM. Esto es, cualquier isoestructura matemática lo es respecto a la multiplicación.*

1.2. Principales resultados en el MCIM

Veremos en esta sección algunos de los resultados acerca del modelo isotópico MCIM que nos serán útiles a lo largo de la presente Memoria. Así pues, a partir de ahora, cuando nos refiramos a una isotopía, consideraremos que estamos usando dicho modelo:

Definición 1.2.1. *Un levantamiento isotópico se dice* inyectivo *si lo es la proyección isotópica asociada. Se dice* compatible respecto a la ley $\circ$ *si se verifica que* $\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b} = \widehat{a \circ b}$, *para todos los elementos* a, b *de la estructura de partida.*

Una estructura matemática cualquiera se dice isotópicamente equivalente *a otra del mismo tipo, si existe una isotopía tal que la primera es proyección isotópica de esta última.*

Proposición 1.2.2. *Se verifica que:*

a) La proyección isotópica asociada a todo levantamiento isotópico inyectivo es un isomorfismo.

b) Si el levantamiento isotópico utilizado es compatible respecto a todas las operaciones de partida, entonces la isoestructura $\widehat{E}$ *es isomorfa a la inicial* E.

c) La relación de ser isotópicamente equivalentes es de equivalencia.

Con vistas a obtener construcciones más complejas se están estudiando actualmente levantamientos isotópicos no asociativos [18] y no inyectivos [19]. Citaremos a continuación algunos de los resultados más destacados obtenidos hasta ahora en estos campos:

Proposición 1.2.3. *Se verifica que:*

1) En el caso en que $\pi \circ \mathbf{I}$ *es una correspondencia lineal, el levantamiento isotópico correspondiente estará bien definido.*

2) El conjunto general queda definido como: $V = E \cup \overline{\overline{\widehat{E}}} \cup E_T \cup \left\{\widehat{I}, T\right\}$, *donde* $E_T = \left\{\overline{\overline{\widehat{x}}}_T = \overline{\overline{\widehat{x}}} * T : x \in E\right\}$ *es tal que para todo* $\overline{\overline{\widehat{a}}}_T \in E_T$, $\overline{\overline{\widehat{a}}}_T * \widehat{I} = a * \widehat{I}$. *En caso de trabajar con un levantamiento isotópico inyectivo, se cumple además que* $E_T = E$.

3) Cada isooperación $\hat{\hat{\circ}}$ *de* $\hat{\hat{E}}$ *se define como* $\widehat{\widehat{a \circ b}} = \left(\hat{\hat{a}}_T * \hat{\hat{b}}_T\right) * \widehat{I}$*, donde* $a, b \in E$*.*

4) Las isotopías no inyectivas se clasifican atendiendo a si la proyección isotópica asociada es invertible (Tipo I) o no lo es (Tipo II).

5) En caso de ser $\widehat{I} = \widehat{I}(x, x', ..., F)$*, donde* F *denota el conjunto de factores externos de los que depende la isounidad* $\widehat{I}$*, se cumple que:*

5.1) Si $F = \emptyset$*, todo levantamiento isotópico no inyectivo es de tipo II.*

5.2) Si $F \neq \emptyset$*, un levantamiento isotópico no inyectivo es de tipo II si y sólo si existen unos valores* F_0*, para los cuales la restricción de la proyección isotópica* $\pi \circ \mathbf{I}_{|F=F_0} : x \to \hat{\hat{x}} = x * \widehat{I}(x, x', x'', F_0)$ *es no inyectiva.*

6) A la hora de definir las isooperaciones asociadas al nivel de proyección obtenido a partir de un levantamiento isotópico no inyectivo donde F *es no vacío, es necesaria para cada una de tales isooperaciones una aplicación del tipo:*

$$\Phi : F \times F \to F : (F_\alpha, F_\beta) \to \Phi(F_\alpha, F_\beta),$$

de tal forma que dada una estructura matemática de partida $(E, \circ)$*, levantada isotópicamente haciendo uso de los elementos de isotopía principales una operación* $*$ *y una isounidad* $\widehat{I}$*, la isooperación* $\hat{\hat{\circ}}$ *será definida para todos* $a * \widehat{I}(F_a), b * \widehat{I}(F_b) \in \hat{\hat{E}}$ *como:*

$$\left(a * \widehat{I}(F_a)\right) \hat{\hat{\circ}} \left(b * \widehat{I}(F_b)\right) =$$

$$= \left[\left((a * \widehat{I}(F_a)) * T(F_a)\right) * \left((b * \widehat{I}(F_b)) * T(F_b)\right)\right] * \widehat{I}\left(\Phi_\circ(F_a, F_b)\right).$$

Donde $T = T(F) = (\widehat{I}(F))^{-I}$ *es tal que, fijado* $F_0 \in F$*:*

$$\widehat{I}(F_0) * T(F_0) = I = T(F_0) * \widehat{I}(F_0).$$

Además, para que $\widehat{I}(F)$ *sea unidad de la isoestructura resultante, debe verificarse que, para todo* $a \in E$ *y todo* $F_0 \in F$*:*

$$\left[(a * \widehat{I}(F_0)) * T(F_0)\right] * \widehat{I}\left(\Phi_\circ(F_0, F_0)\right) = a * \widehat{I}(F_0).$$

Efectivamente, bajo esta construcción, $\widehat{I} = \widehat{I}(F)$ *es unidad de la estructura* $(\hat{\hat{E}}, \hat{\hat{\circ}})$*, para valores idénticos en* F*, esto es, fijado* $F_0 \in F$*:*

$$\left(a * \widehat{I}(F_0)\right) \hat{\hat{\circ}} \left(\hat{\hat{I}}(\hat{\hat{F_0}})\right) = \left(\hat{\hat{I}}(\hat{\hat{F_0}})\right) \hat{\hat{\circ}} \left(a * \widehat{I}(F_0)\right) = a * \widehat{I}(F_0).$$

Cabe observar que la ley $\overline{\widehat{\circ}}$ *sufrirá entonces también dependencia en los factores externos* F. *No obstante, en caso de que para valores fijos* $F_0 \in F$, *sea* $\Phi_\circ(F_0, F_0) = F_0$, *la isoestructura resultante será del mismo tipo que la inicial.*

Finalmente, una isotopía dependiente de factores externos *se dirá* compatible respecto la ley $\circ$ *si para todos* $a * \widehat{I}(F_a), b * \widehat{I}(F_b) \in \overline{\widehat{E}}$ *se cumple que:*

$$\left(a * \widehat{I}(F_a)\right) \overline{\widehat{\circ}} \left(b * \widehat{I}(F_b)\right) = (a \circ b) * \widehat{I}(\Phi_\circ(F_a, F_b)).$$

1.3. Isotopología

Atendiendo a los resultados que aparecen en [15], las definiciones de los elementos básicos sobre isotopología se pueden englobar en la siguiente:

Definición 1.3.1. *Se denomina* isoespacio topológico *a todo isoespacio dotado de estructura de espacio topológico. Si es además proyección isotópica de un espacio topológico se denomina* isoespacio isotopológico

Análogamente se definen los conceptos de isopunto (iso)adherente, clausura, isopunto (iso)interior, interior, cerrado, abierto, isoespacio de (iso)Hausdorff e isoespacio segundo numerable.

Teniendo en cuenta la similitud con las estructuras convencionales, todas las propiedades de estas últimas son heredadas por los nuevos conceptos de forma adecuada. Aparte, son de destacar los siguientes resultados:

Proposición 1.3.2. *El espacio del que se obtiene cualquier isoespacio topológico en el nivel isotópico puede dotarse de la topología final relativa a la aplicación* $\mathbf{I}$.

La proyección isotópica de un espacio topológico es un isoespacio isotopológico en el nivel de proyección. Si tal proyección es inyectiva, todo isoespacio topológico en dicho nivel será, de hecho, isotopológico.

Resultados análogos se tienen para los conceptos de isopunto (iso)adherente, isopunto (iso)interior e isoespacio de (iso)Hausdorff.

Proposición 1.3.3. *El producto topológico de isoespacios topológicos es a su vez un isoespacio topológico.*

En el nivel de proyección aparecen también una serie de nociones y resultados que complementan a los convencionales:

Definición 1.3.4. *Al conjunto* $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$ *de isopuntos isoadherentes a* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* isoclausura de $\overline{\widehat{C}}$. $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* isocerrado de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su isoclausura.*

Al conjunto $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$ *de isopuntos isointeriores de* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* isointerior de $\overline{\widehat{C}}$. $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* isoabierto de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su isointerior.*

Proposición 1.3.5. *En las condiciones anteriores se tiene que:*

a) $\overline{\widehat{C}} \cup \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$; $\overline{\widehat{C}} \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$; $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \overline{\widehat{C}}$.

b) Si levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{M}}$ es inyectivo, se verifica que:

b.1) Si $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, entonces $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{D}})$ y $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{D}})$.

b.2) $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$, $\overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$ y se cumple que C es un cerrado de M si y sólo si $\overline{\widehat{C}}$ es un cerrado de $\overline{\widehat{M}}$ (de hecho un isocerrado).

b.3) $\mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$, $\overline{\widehat{\mathbf{int}(\mathbf{C})}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$ y se cumple que C es un abierto de M si y sólo si $\overline{\widehat{C}}$ es un abierto de $\overline{\widehat{M}}$ (de hecho un isoabierto).

A continuación damos la definición de isotopología:

Definición 1.3.6. *Si* $\widehat{M}$ *es un isoespacio asociado a un espacio* M *de topología* $\Upsilon = \{\emptyset, M, \cup_{\alpha\in A} U_\alpha\}$, *se dice que* $\widehat{M}$ *es un* isoespacio isotopológico de isotopología $\widehat{\Upsilon} = \{\emptyset, \widehat{M}, \cup_{\alpha\in A}\widehat{U_\alpha}\}$. *Si la isotopía es inyectiva, se dice que* $\overline{\widehat{M}}$ *es un* isoespacio isotopológico de isotopología $\overline{\widehat{\Upsilon}} = \{\emptyset, \overline{\widehat{M}}, \cup_{\alpha\in A}\overline{\widehat{U_\alpha}}\}$.

Proposición 1.3.7. *Las isotopologías* $\widehat{\Upsilon}$ *y* $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ *son topologías sobre* $\widehat{M}$ *y* $\overline{\widehat{M}}$, *respectivamente.*

Seguidamente se estudia la noción de isocontinuidad de isofunciones:

Definición 1.3.8. *Dado un* $\widehat{\mathbb{R}}$*-isoespacio vectorial* $\widehat{U}$, *se llama* función real de $\widehat{U}$ *a toda aplicación* $f : \widehat{U} \to \mathbb{R}$. *Si la imagen es* $\widehat{\mathbb{R}}$, *se llama* función isorreal. *Ésta se denomina* isofunción *si existe* $f : U \to \mathbb{R}$, *tal que* $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{f(X)}$, *para todo* $X \in U$. *Finalmente, toda aplicación* $f : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *se llama* función isorreal de $\overline{\widehat{U}}$.

Proposición 1.3.9. *Si el levantamiento isotópico que construye* $\widehat{U}$ *es inyectivo, entonces, dada* $f : \widehat{U} \to \widehat{\mathbb{R}}$, *se tiene que* $\overline{f} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \widehat{X} \to \overline{f}(\widehat{X}) = \overline{f(\widehat{X})}$ *es una función isorreal de* $\overline{\widehat{U}}$. *En caso de una isofunción isorreal* $\widehat{f}$ *de* $\widehat{U}$, *se define la* isofunción isorreal $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{X}} \to \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}}) = \overline{\widehat{f(X)}}$.

Definición 1.3.10. *Sea $\widehat{f}$ una isofunción isorreal de un $\widehat{\mathbb{R}}$-isoespacio vectorial $\widehat{U}$. Se define el* isomódulo de $\widehat{f}$ *como* $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X})\widehat{|} = \mathbf{I}(|f(X)|) = \widehat{|f(X)|}$. *Si la isotopía es inyectiva, entonces se define el isomódulo de $\overline{\widehat{f}}$ como $\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{|}} = \overline{\widehat{|f(X)|}}$.*

Definición 1.3.11. *Sea $\widehat{K}$ un isocuerpo asociado a un cuerpo K dotado de un orden $\leq$, mediante una isotopía que mantiene el elemento opuesto respecto a la suma. Definimos entonces el* isoorden $\widehat{\leq}$ *como $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$ si y sólo si $a \leq b$. Si la isotopía es inyectiva, se define el isoorden $\overline{\widehat{\leq}}$ en $\overline{\widehat{K}}$ de forma análoga.*

Proposición 1.3.12. *Los isoórdenes $\widehat{\leq}$ y $\overline{\widehat{\leq}}$ son órdenes sobre $\widehat{K}$ y $\overline{\widehat{K}}$, del mismo tipo que $\leq$.*

Proposición 1.3.13. *Sea $\widehat{U}$ un $\widehat{K}$-isoanillo, levantado isotópico de un anillo normado U, de norma $||.||$, mediante una isotopía compatible respecto a cada una de las operaciones iniciales. Resulta entonces que la isonorma $\widehat{||}.\widehat{||} \equiv \widehat{||.||}$ es una norma sobre $\widehat{U}$. Si la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{K}$ y $\widehat{U}$ es inyectiva, entonces la isonorma $\overline{\widehat{||}}.\overline{\widehat{||}} \equiv \overline{\widehat{||.||}}$ es una norma sobre $\overline{\widehat{U}}$.*

Definición 1.3.14. *Sea $\widehat{U}$ un $\widehat{\mathbb{R}}$-isoespacio vectorial con isonorma $\widehat{||}.\widehat{||} \equiv \widehat{||.||}$ e isoorden $\widehat{\leq}$, obtenido a partir de una isotopía compatible respecto a cada una de las operaciones iniciales. Se dirá que una isofunción isorreal $\widehat{f}$ de $\widehat{U}$ es* isocontinua en *$\widehat{X} \in \widehat{U}$, si para todo $\widehat{\epsilon}\widehat{>}\widehat{S}$, existe $\widehat{\delta}\widehat{>}\widehat{S}$ tal que para todo $\widehat{Y} \in \widehat{U}$ con $\widehat{||}\widehat{X} - \widehat{Y}\widehat{||}\widehat{<}\widehat{\delta}$, se verifica que $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})\widehat{|}\widehat{<}\widehat{\epsilon}$. Se dirá que $\widehat{f}$ es* isocontinua en $\widehat{U}$ *si es isocontinua en $\widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Finalmente, para isotopías inyectivas, se define de forma análoga la isocontinuidad en el nivel de proyección.*

Proposición 1.3.15. *La isocontinuidad en $\widehat{U}$ equivale a la continuidad en U. Para isotopías inyectivas, ambas equivalen a la continuidad en $\overline{\widehat{U}}$.*

También se tiene el concepto de isocontinuidad en isoespacios isotopológicos:

Definición 1.3.16. *Se denomina* isoaplicación isocontinua en el nivel isotópico *entre dos isoespacios topológicos $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$ a toda isoaplicación $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$, que conserve las adherencias. De forma análoga se da la definición en el nivel de proyección.*

Proposición 1.3.17. *Se verifica que $\widehat{f}$ es isocontinua si y sólo si la aplicación f de la que proviene es continua. El resultado es análogo en el nivel de proyección para isotopías inyectivas.*

De esta forma, atendiendo a la equivalencia entre los conceptos de isocontinuidad y los vistos más arriba sobre los elementos de un isoespacio topológico, todas las propiedades acerca de aplicaciones continuas en el nivel convencional son heredadas convenientemente en el nivel isotópico y en el de proyección.

Definición 1.3.18. *Una isoaplicación* $\widehat{f}:(\widehat{M},\widehat{\aleph}_{\widehat{M}})\to(\widehat{N},\widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$ *entre dos isoespacios topológicos se dice* isocontinua *en* $\widehat{X}\in\widehat{M}$ *si* $\widehat{f}^{-1}(\widehat{B})\in\widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, *para todo* $\widehat{B}\in\widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$. $\widehat{f}$ *será entonces* isocontinua *si es isocontinua en todos los isopuntos de* $\widehat{M}$. *Una definición análoga se tiene en el nivel de proyección.*

Proposición 1.3.19. *Se tiene que:*

a) Cualquier isoaplicación isoconstante es isocontinua.

b) La composición de isoaplicaciones isocontinuas es isocontinua.

c) El producto topológico de isoaplicaciones isocontinuas es una isoaplicación isocontinua.

Proposición 1.3.20. *Sea* $\widehat{M}$ *un* $\widehat{K}$*-isoespacio vectorial, levantado isotópico de un espacio vectorial* M, *dotado de una (pseudo)métrica* d *y definido sobre un cuerpo ordenado* K, *a partir de una isotopía que mantiene el elemento opuesto y es compatible respecto a la suma en* K. *Se verifica entonces que la isofunción* $\widehat{d}$ *es una iso(pseudo)métrica.*

Definición 1.3.21. *Sea* $(\widehat{M},d')$ *un* $\widehat{K}$*-isoespacio vectorial (iso)(pseudo)métrico, dotado de un isoorden* $\widehat{\leq}$. *A* $B_{d'}(\widehat{X_0},\widehat{\epsilon})=\{\widehat{X}\in\widehat{M}:d'(\widehat{X},\widehat{X_0})\widehat{<}\widehat{\epsilon}\}$ *se denomina* bola métrica *de centro* $\widehat{X_0}\in\widehat{M}$ *y radio* $\widehat{\epsilon}\widehat{>}\widehat{S}$. *En el caso en que el espacio vectorial* M *de partida esté dotado de una (pseudo)métrica* d, *siendo* $\widehat{d}=d'$, *se denomina* isobola métrica *en* $\widehat{M}$ *a toda bola métrica* $B_{d'}=B_{\widehat{d}}=\widehat{B_d}$ *en* $\widehat{M}$ *que sea levantada isotópica de una bola métrica* B_d *en* M.

Proposición 1.3.22. *Bajo las condiciones de la Proposición 1.3.20, si* $B_d(X_0,\epsilon)$ *es una bola métrica en* M, *entonces* $\widehat{B_d(X_0,\epsilon)}=B_{\widehat{d}}(\widehat{X_0},\widehat{\epsilon})$ *es una bola métrica* $\widehat{M}$.

Proposición 1.3.23. *En las condiciones de la Definición 1.3.21, se verifica que:*

a) Dado $\widehat{X}\in B_{d'}(\widehat{X_0},\widehat{\epsilon})$, *existe* $\widehat{\mu}\widehat{>}\widehat{S}$ *tal que* $B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\mu})\subseteq B_{d'}(\widehat{X_0},\widehat{\epsilon})$.

b) Dadas $B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\epsilon})$ *y* $B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\mu})$, *se cumple que o bien* $B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\epsilon})\subseteq B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\mu})$, *o bien se cumple la contención contraria.*

c) Dado $\widehat{Z}\in B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\epsilon})\cap B_{d'}(\widehat{Y},\widehat{\mu})$, *existe* $\widehat{\rho}\widehat{>}\widehat{S}$ *tal que* $B_{d'}(\widehat{Z},\widehat{\rho})\subseteq B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\epsilon})\cap B_{d'}(\widehat{Y},\widehat{\mu})$.

Definición 1.3.24. *Un* entorno métrico de un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$ *es un subconjunto* $\widehat{A} \subseteq \widehat{M}$ *tal que contiene una bola métrica centrada en* $\widehat{X}$. *Al conjunto de entornos métricos de* $\widehat{X}$ *se le denotará por* $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. *Finalmente, si* d' *es la isodistancia isoeuclídea sobre* $\widehat{\mathbb{R}}^n$, *los entornos métricos asociados se denominan* entornos isoeuclídeos.

Proposición 1.3.25. *Sean* d' *y* d'' *dos (iso)distancias (iso)(pseudo)métricas sobre un isoespacio vectorial* $\widehat{M}$, *en las condiciones de la Definición 1.3.21. Se verifica entonces que* $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}} = \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$ *si y sólo si toda bola métrica* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ *contiene una bola* $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ *y toda bola* $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$ *contiene una bola* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$.

Proposición 1.3.26. *Todo isoespacio dotado de una (iso)distancia (iso)(pseudo)-métrica es un isoespacio isotopológico.*

Proposición 1.3.27. *Sea* $\widehat{f} : (\widehat{M}, d') \to (\widehat{N}, d'')$ *una isoaplicación entre* $\widehat{K}$*-isoespacios dotados de (iso)distancias (iso)(pseudo)métricas y sea* $\widehat{X} \in \widehat{M}$. *Se tiene entonces que* $\widehat{f}$ *es isocontinua en* $\widehat{X}$ *si y sólo si, para todo* $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$, *existe* $\widehat{\delta} \in \widehat{K}$ *tal que* $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ *y si tenemos* $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$, *entonces se cumple que* $\widehat{f}(\widehat{Y}) \in B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon})$.

Proposición 1.3.28. *En las condiciones de la Definición 1.3.1, sea* $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$, *una isoaplicación entre dos isoespacios isotopológicos* $\widehat{M}$ *y* $\widehat{N}$. *Se verifica que si estamos en las condiciones de la Definición 1.3.14, entonces* $\widehat{f}$ *es isocontinua si y sólo si se tiene que* $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ *es un isoabierto de* $\widehat{M}$, *para todo isoabierto* $\widehat{U}$ *de* $\widehat{N}$.

Capítulo 2

GEOMETRÍA ISOEUCLÍDEA

Los conceptos de espacio isoeuclídeo y geometría isoeuclídea fueron tratados por primera vez por Santilli en 1983 [35]. Más tarde, en 1991, con vistas a sus aplicaciones prácticas en Física, Santilli profundizó en el levantamiento isotópico de los espacios Euclídeo y Minkowskiano, junto con sus geometrías asociadas [38]. Desde entonces, estas geometrías han suscitado el interés de varios autores, siendo analizadas por ejemplo, por el propio Santilli [42], J. V. Kadeisvili [23], Gr. Tsagas y D. S. Sourlas [51] [52], y R. M. Falcón Ganfornina y J. Núñez Valdés [15].

En el presente Capítulo se profundiza en el estudio de la geometría isoeuclídea, mostrando algunos resultados y ejemplos que se obtienen al aplicar el MCIM a ésta, utilizando para ello $*$-leyes genéricas y comprobando la coherencia del desarrollo teórico cuando éstas coincidan con las operaciones usuales en el cuerpo real.

Para ello, en una primera sección, se generalizará el MCIM visto en Preliminares para la obtención de isoespacios vectoriales, analizando en la segunda sección el caso en que éstos estén dotados de métrica.

En la última sección se aplicará esta generalización en la construcción de la geometría isoeuclídea. En particular, se construirá el plano isoeuclídeo $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ y se presentarán algunos elementos básicos en esta estructura: rectas, isorrectas, isovectores directores, (iso)perpendicularidad e (iso)circunferencia.

2.1. Isoespacios vectoriales

Con vistas a construir isoespacios vectoriales más complejos conviene generalizar la obtención de éstos mediante el uso del MCIM que se hace en [14]. En dicho modelo se usa una isotopía de un $K(a,+,\times)$-espacio vectorial $(U,\circ,\bullet)$ a partir de los elementos $\widehat{I},*,\widehat{S},\star,\Box,\widehat{S'}$ y $\Diamond$, de tal forma que se definen los isovectores de $\overline{\widehat{U}}$ y la ley $\overline{\widehat{\bullet}}$ como:

$$\overline{\widehat{X}} = X\Box\widehat{I}; \qquad \overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}} = (a\Box X)\Box\widehat{I}.$$

Ahora bien, basándonos en los ejemplos prácticos dados en [45], puede generalizarse tal construcción con la introducción de una nueva isounidad $\widehat{I'}$ y una nueva $*$-ley $\Diamond$, en el conjunto general V, que permitan la construcción de $\overline{\widehat{U}}$ a partir del levantamiento isotópico dado por:

$$X \to \overline{\widehat{X}} = X\Diamond\widehat{I'}; \qquad \overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}} = (a\Box X)\Diamond\widehat{I'}.$$

De esta forma, si imponemos la distributividad entre $\Diamond$ y $\Diamond$, se tiene que:

a) $\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}(\overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{\circ}}\,\overline{\widehat{Y}}) = \overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{(\widehat{X\Diamond Y})} = \overline{a\Box\widehat{(X\Diamond Y)}} = \overline{(a\Box X)\widehat{\Diamond}(a\Box Y)} = \overline{\widehat{a\Box X}}\,\overline{\widehat{\circ}}\,\overline{\widehat{a\Diamond Y}} =$
$= (\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{\circ}}(\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{Y}})$.

b) $(\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{+}}\,\overline{\widehat{b}})\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{(a\star b)}\Box X} = \overline{(a\Box X)\widehat{\Diamond}(b\Box X)} = \overline{\widehat{a\Box X}}\,\overline{\widehat{\circ}}\,\overline{\widehat{b\Box X}} = (\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{\circ}}(\overline{\widehat{b}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}})$.

Obtenemos así la siguiente:

Proposición 2.1.1. *En las condiciones usuales del MCIM, si un isoespacio vectorial $\overline{\widehat{U}}$ se construye a partir de la isotopía de elementos $\Diamond$ e $\widehat{I'}$, mediante el levantamiento isotópico $X \to \overline{\widehat{X}} = X\Diamond\widehat{I'}$, definiéndose $\widehat{\bullet}$ como $\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\bullet}}\,\overline{\widehat{X}} = (a\Box X)\Diamond\widehat{I'}$ y existiendo distributividad entre $\Diamond$ y $\Diamond$, entonces el levantamiento isotópico correspondiente a la isotopía de elementos $\widehat{I},*,\widehat{S},\star,\widehat{I'},\Diamond,\widehat{S'}$ y $\Diamond$, tiene estructura de $(\overline{\widehat{K}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}})$-isoespacio vectorial.* $\Box$

Obsérverse que si $\Diamond \equiv \Box$ e $\widehat{I'} = \widehat{I}$, obtenemos el levantamiento isotópico que sigue el MCIM a la hora de obtener isoespacios vectoriales. La condición impuesta en dicho modelo de ser $(U,\Diamond,\Box)$ un $(K,\star,*)$-espacio vectorial ya implica la distributividad entre $\Diamond$ y $\Box$, con lo cual llegamos a que este nuevo modelo generaliza al anterior, permitiendo un mayor grado de libertad en la construcción de $\overline{\widehat{U}}$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.2. *Este nuevo modelo de construcción permite obtener de otra forma isoespacios vectoriales que ya se obtenían mediante el MCIM. Por ejemplo, el* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}})$*-isoespacio vectorial* $(\widehat{M_n(\mathbb{R})}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\bullet}})$ *obtenido a partir de los elementos de isotopía* $\widehat{I} = 2, * \equiv \times, \widehat{S} = 0, \star \equiv +, \square \equiv \bullet, \widehat{S'} = \mathbf{0}$ *(la matriz nula) y* $\diamondsuit \equiv +$ *(la suma de matrices), también puede obtenerse considerando* $\diamondsuit \equiv \cdot$ *(el producto usual de matrices) e* $\widehat{I'} = diag_n(2, ..., 2)$*. Obsérvese que para todo* $X \in M_n(\mathbb{R})$*,* $X \square \widehat{I} = X \bullet 2 = X \cdot diag_n(2, ..., 2) = X \diamondsuit \widehat{I'}$*, dándose además la distributividad entre* $\diamondsuit$ *y* $\diamondsuit$ *al tenerse entre* $\cdot$ *y* $+$*.* $\triangleleft$

Un ejemplo que muestra la mejora del modelo de construcción del isoproducto viene dado sin más que considerar en el ejemplo anterior $\diamondsuit \equiv \cdot$ (el producto usual de matrices) e $\widehat{I'} = diag_n(1, 2, ..., n)$, que es definida positiva, no singular e invertible de inversa $T' = diag_n(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n})$ respecto a $\diamondsuit$ y donde de nuevo las operaciones de tipo estrella verifican las condiciones deseadas.

Aunque en principio vuelva a obtenerse como conjunto isotópico $M_n(\mathbb{R})$, la mejora que se logra en una construcción de este tipo es la posibilidad de trabajar en cada una de las n dimensiones del espacio vectorial de partida $M_n(\mathbb{R})$. Veamos esto con más detenimiento.

Supongamos para empezar que tenemos fijado un $(K, +, \times)$-espacio vectorial 1-dimensional $(M, \circ, \bullet)$ y consideremos un $(K, +, \times)$-espacio vectorial n-dimensional $M^n = M \times ... \times M$, cuyos vectores son de la forma $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n)$, con $m_i \in M$ para todo i, para una cierta base prefijada β. Observemos que cada vector $\overrightarrow{m}$ puede escribirse haciendo uso del producto vector por matriz usual $\cdot$ como $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n) = (m_1 \bullet e, ..., m_n \bullet e) = (m_1, ..., m_n) \cdot diag_n(e, ..., e) = \overrightarrow{m} \cdot diag_n(e, ..., e)$, donde estamos considerando que e es el elemento unidad de K respecto a $\times$. Esta observación en principio trivial adquiere su justa relevancia cuando buscamos aplicar la isoteoría de Santilli.

Para ver dónde radica su importancia consideramos un nuevo caso. Supongamos ahora que tenemos n cuerpos $K_1, ..., K_n$ y sea M_j un K_j-espacio vectorial 1-dimensional para todo $j \in \{1, ..., n\}$, donde para simplificar no señalamos las respectivas operaciones asociadas. Consideremos ahora el cuerpo $K = K_1 \times ... \times K_n$ (donde operamos coordenada a coordenada en sus elementos con las operaciones iniciales) y el K-espacio vectorial n-dimensional $M = M_1 \times ... \times M_n$. En este caso, un vector de M podrá escribirse bajo una cierta base como $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n)$, con $m_i \in M_i$ para todo i. Además, haciendo uso del producto usual vector por matriz $\cdot$, podemos escribir $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n) = (m_1 e_1, ..., m_n e_n) = (m_1, ..., m_n) \cdot diag_n(e_1, ..., e_n) = \overrightarrow{m} \cdot diag_n(e_1, ..., e_n)$, donde e_i es el elemento unidad respectivo de K_i para todo i.

Se observa por tanto que la importancia de la matriz diagonal señalada radica en que en cada uno de sus pivotes se indica cuál es el elemento unidad asociado a la componente de M con la que esté relacionado. En este sentido, una modificación en los pivotes de esta matriz diagonal (siempre manteniendo la no singularidad y el ser definida positiva) conlleva una modificación en los elementos unidades de los cuerpos K_j que actúan en el proceso. Sin embargo, esta posible modificación no puede hacerse de una forma arbitraria a no ser que al mismo tiempo se transformen de una forma adecuada las estructuras matemáticas que intervienen en su construcción.

Ahora bien, las isotopías de Santilli que siguen el modelo del isoproducto no sólo establecen de forma adecuada el cambio de la matriz diagonal, sino que otorgan pleno sentido a tal cambio. Para ver esto último no hay más que recordar que un levantamiento isotópico siguiendo el modelo de construcción del isoproducto se basa fundamentalmente en la generalización de las unidades de las estructuras de partida, dando lugar a las nuevas isounidades.

En particular, el cambio de un pivote e_i de la matriz diagonal conlleva intrínsecamente un levantamiento isotópico del cuerpo K_i correspondiente, dando lugar a unas isoestructuras $\widehat{\widehat{K_i}}$ y $\widehat{\widehat{M_i}}$, que, por construcción, dan pleno significado al levantado isotópico de M, $\widehat{\widehat{M}} = M_1 \times ... \times M_{i-1} \times \widehat{\widehat{M_i}} \times M_{i+1} \times ... \times M_n$, que como tal será un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo $\widehat{\widehat{K}} = K_1 \times ... \times K_{i-1} \times \widehat{\widehat{K_i}} \times K_{i+1} \times ... \times K_n$.

Lo anterior, que puede desarrollarse convenientemente para el resto de los pivotes, da plena justificación a la construcción de Santilli del isoproducto. De hecho, guardando las distancias, si consideramos $I = diag_n(e_1, ..., e_n)$ la "unidad básica" del espacio M, un conveniente levantamiento isotópico directo de M basado en la isotopía $I \to \widehat{I'} = diag_n(\widehat{e_1}, ..., \widehat{e_n})$ va a dar lugar a la construcción de los isoespacios métricos que veremos en la siguiente sección.

La generalización propuesta del MCIM aún permite otras construcciones de isoespacios vectoriales a la hora de usar por ejemplo isotopías no inyectivas. Veamos esto en el caso de un levantamiento isotópico no inyectivo de tipo II, con F vacío:

Ejemplo 2.1.3. *Consideremos el cuerpo* $(\mathbb{R}, +, \times)$, *con la suma y producto usuales y sea* $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) : f$ *es una función diferenciable* $\}$, *conjunto al que dotamos de estructura de espacio vectorial definiendo para todos* $f, g \in U$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x).$$

Así, $(U, +, \times)$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

A continuación construimos el isocuerpo $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}})$ *a partir del levantamiento isotópico inyectivo asociado a los elementos de isotopía principales* $* \equiv \times$ *e* $\widehat{I} = \frac{1}{2}$ *y secundarios* $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$ *y* $\square \equiv \times$.

Seguidamente construimos el $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*-isoespacio vectorial* $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}})$, *a partir del levantamiento isotópico asociado a los elementos de isotopía principales* $\diamondsuit$ *e* $\widehat{I'} = \widehat{I'}(f)$ *y secundarios* $\square \equiv \times$, $\diamondsuit \equiv +$ *y* $\widehat{S'} = \mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbf{0} : x \to 0$, *donde para todo* $f \in U$:

$$f \diamondsuit \widehat{I'}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(2).$$

Se obtiene de esta forma que $\overline{\widehat{U}} = \mathbb{R}$, *pues dado* $a \in \mathbb{R}$ *tenemos para* $f(x) = \frac{a}{4}x^2$, *que por ejemplo,* $f \diamondsuit \widehat{I'}(f) = a$.

Por otra parte, podemos comprobar también que este levantamiento es no inyectivo, pues por ejemplo, dados los dos siguientes elementos en U:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 15x^2; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 5x^3,$$

se tiene entonces que:

$$f_1 \diamondsuit \widehat{I'}(f_1) = f_2 \diamondsuit \widehat{I'}(f_2) = 60.$$

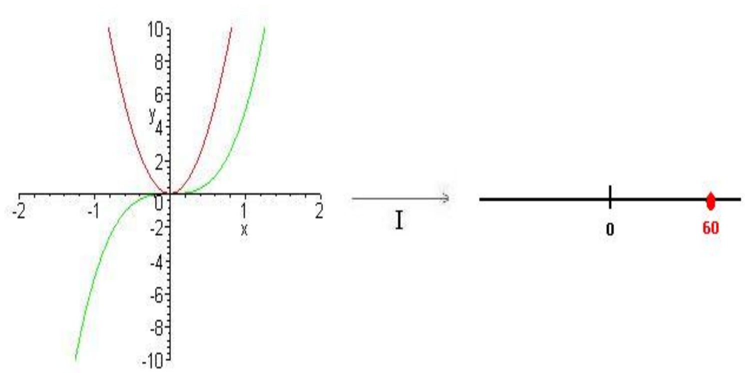

Figura 2.1: Isotopía no inyectiva de tipo II, con $F = \emptyset$.

En particular, observamos que este levantamiento isotópico es de tipo II, pues en caso de que $T' = T'(x)$ sea el elemento isotópico asociado, tendremos por ejemplo que:

$$60\Diamond T'(60) \supseteq \{f_1, f_2\}\,.$$

Para comprobar que $\overline{\widehat{U}}$ tiene estructura de isoespacio vectorial, necesitamos estudiar cómo actúan las isooperaciones asociadas. Para ello, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $\frac{\partial f}{\partial x}(2) = a$ y $\frac{\partial g}{\partial x}(2) = b$ para ciertos $f, g \in U$, observamos que:

$$a\overline{\widehat{+}}b = \frac{\partial f}{\partial x}(2)\overline{\widehat{+}}\frac{\partial g}{\partial x}(2) = \overline{\widehat{f}}\overline{\widehat{+}}\overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{f+g}} = \frac{\partial (f+g)}{\partial x}(2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2) + \frac{\partial g}{\partial x}(2) = a + b.$$

$$a\overline{\widehat{\times}}b = a\overline{\widehat{+}}\frac{\partial g}{\partial x}(2) = \overline{\widehat{2a}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{2a \times g}} = \frac{\partial (2a \times g)}{\partial x}(2) = 2a \times \frac{\partial g}{\partial x}(2) = 2ab.$$

Dado que los resultados que se obtienen no sufren dependencia en las funciones de U que intervienen, deducimos que el levantamiento isotópico está bien definido. Podemos asegurar además que $\overline{\widehat{+}} \equiv +$, la suma usual en $\mathbb{R}$. No es difícil comprobar entonces que $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$. $\triangleleft$

A continuación pasamos a estudiar el caso en que F sea no vacío.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos el cuerpo $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, +, \times)$, con la suma y producto usuales y sea $P = \{$polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2\}$, conjunto al que dotamos con su estructura de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial usual $(P, +, \times)$.*

A continuación consideramos el isocuerpo $(\overline{\widehat{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, +, \times)$, construido a partir de la isotopía identidad.

Finalmente, construimos el $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$-isoespacio vectorial $(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}})$, a partir del levantamiento isotópico asociado a los elementos de isotopía principales $\Diamond$ e $\widehat{I}' = \widehat{I}'(p, t)$, siendo $t \in \mathbb{N}$ el factor tiempo, y secundarios $\Box \equiv \times$, $\Diamond \equiv +$ y $\widehat{S}' = 0 \in P$, donde para todos $p \in P$ y $t \in \mathbb{N}$:

$$p\Diamond \widehat{I}'(p, t) = p + t.$$

De esta forma $\overline{\widehat{P}} = P$ y se comprueba fácilmente que este levantamiento es no inyectivo, pues por ejemplo, dados los dos siguientes elementos en P:

$$p_1 = x^2 + x; \qquad p_2 = x^2 + x + 1,$$

se tiene entonces que:

$$p_1 \diamondsuit \widehat{I}'(p_1, 1) = p_2 \diamondsuit \widehat{I}'(p_2, 2) = p_2.$$

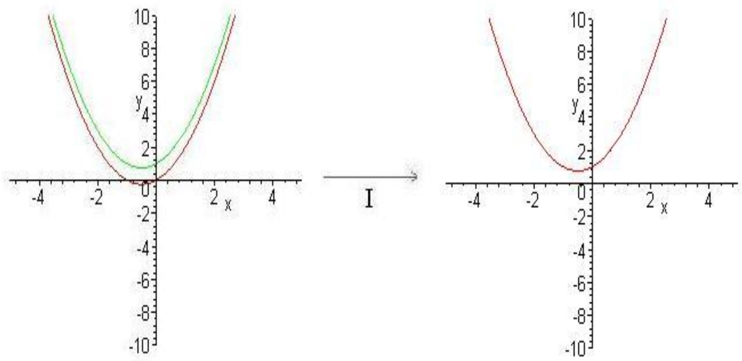

Figura 2.2: Isotopía no inyectiva de tipo I, con $F \neq \emptyset$.

Además, es de tipo I, pues podemos definir un elemento isotópico $T = T(f, t)$, tal que, dado $f \in P$ y unas condiciones iniciales $t = t_0$, resulta el valor único $p * T(p, t_0) = p - t_0$.

Para comprobar que $\overline{\widehat{P}}$ tiene estructura de isoespacio vectorial, necesitamos estudiar cómo actúan las isooperaciones asociadas. Para ello, denotando por F a los factores externos de los que depende la construcción de $\overline{\widehat{P}}$ (esto es, el factor tiempo), consideramos las dos siguientes aplicaciones:

$$\Phi_+ : F \times F \to F$$

$$(t_p, t_q) \to \Phi_+(t_p, t_q) = t_p + t_q.$$

$$\Phi_\times : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2 \times F \to F$$

$$(a, t_p) \to \Phi_\times(a, t_p) = at_p.$$

De tal forma que podremos definir finalmente para todos $p, q \in P$, $a \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ y $t_p, t_q \in \mathbb{N}$:

$$p \overline{\widehat{+}} q = (p - t_p) \diamondsuit \widehat{I}'(p - t_p, t_p) \overline{\widehat{+}} (q - t_q) \diamondsuit \widehat{I}'(q - t_q, t_q) =$$

$$= (p + q - t_p - t_q) \diamondsuit \widehat{I}'(p + q - t_p - t_q, \Phi_+(t_p, t_q)) =$$

$$= (p + q - t_p - t_q) \diamondsuit \widehat{I}'(p + q - t_p - t_q, t_p + t_q) = p + q.$$

$$a\overline{\widehat{\times}}p = a\overline{\widehat{\times}}(p-t_p)\diamondsuit\widehat{I}'(p-t_p,t_p) = (a\times(p-t_p))\diamondsuit\widehat{I}'(a*(p-t_p),\Phi(a,t_p)) =$$

$$= (a\times p - at_p)\diamondsuit\widehat{I}'(a\times p - at_p, at_p) = a\times p.$$

Dado que los resultados que se obtienen no sufren dependencia de los valores del factor tiempo que intervienen, deducimos que el levantamiento isotópico está bien definido. Obtenemos además que $(\overline{\widehat{P}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}}) = (P,+,\times)$*, con lo cual tiene estructura de espacio vectorial sobre* $(\overline{\widehat{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2,+,\times)$ *y por tanto tiene estructura de isoespacio vectorial.* $\triangleleft$

Veamos finalmente un ejemplo en el que usemos un levantamiento isotópico no inyectivo de tipo II, con F no vacío:

Ejemplo 2.1.5. *Consideremos el* $(\mathbb{R},+,\times)$*-espacio vectorial* $(U,+,\times)$ *del Ejemplo 2.1.3 y el isocuerpo* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}})$ *obtenido a partir de la isotopía identidad.*

Consideramos ahora el $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*-isoespacio vectorial* $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}})$*, construido a partir del levantamiento isotópico asociado a los elementos de isotopía principales* $\diamondsuit$ *e* $\widehat{I}' = \widehat{I}'(f,t)$*, siendo* $t\in\mathbb{N}$ *el factor tiempo, y secundarios* $\square\equiv\times$*,* $\diamondsuit\equiv +$ *y* $\widehat{S}' = \mathbf{0}:\mathbb{R}\to\mathbf{0}: x\to 0$*, donde para todos* $f\in U$ *y* $t\in\mathbb{N}$*:*

$$f\diamondsuit\widehat{I}'(f,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(2) + t.$$

Se cumple entonces que $\overline{\widehat{U}} = \mathbb{R}$*, comprobándose fácilmente que este levantamiento es no inyectivo, pues por ejemplo, dados los dos siguientes elementos en* U*:*

$$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to 5x^2; \qquad f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to 2x^3,$$

se tiene entonces que:

$$f_1\diamondsuit\widehat{I}'(f_1,5) = f_2\diamondsuit\widehat{I}'(f_2,1) = 25.$$

Además, es de tipo II, pues si:

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to 24x,$$

resulta que:

$$f_2 \diamondsuit \widehat{I}'(f_2, 1) = f_3 \diamondsuit \widehat{I}'(f_3, 1) = 25$$

Es decir, en caso de existir un elemento isotópico asociado, $T' = T'(f, t)$*, se tendría que:*

$$25 \diamondsuit T'(25, 1) \supseteq \{f_2, f_3\},$$

no pudiéndose dar explícitamente un único valor del cual se obtenga 25 *como proyección isotópica.*

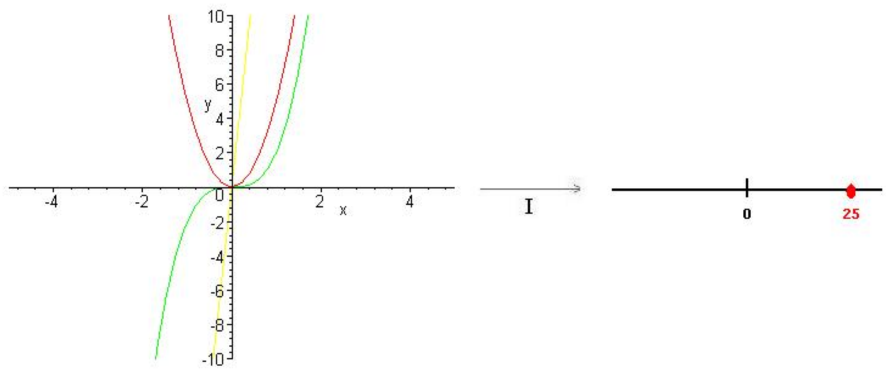

Figura 2.3: Isotopía no inyectiva de tipo II, con $F \neq \emptyset$*.*

Denotando por F *a los factores externos asociados a la construcción de* $\widehat{\widehat{U}}$ *(esto es, el factor tiempo), definimos las siguientes aplicaciones:*

$$\Phi_+ : F \times F \to F$$

$$(t_p, t_q) \to \Phi_+(t_p, t_q) = t_p + t_q,$$

$$\Phi_\times : \mathbb{R} \times F \to F$$

$$(a, t_p) \to \Phi_\times(a, t_p) = at_p,$$

de tal forma que, fijados $a, b \in \mathbb{R}$*, tales que* $\frac{\partial f}{\partial x}(2) + t_f = a$ *y* $\frac{\partial g}{\partial x}(2) + t_g = b$*, para ciertos* $f, g \in U$ *y* $t_f, t_g \in N$*, observamos que:*

$$a \overline{\widehat{+}} b = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2) + t_f\right) \overline{\widehat{+}} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(2) + t_g\right) =$$

$$= f \diamondsuit \widehat{I}'(f, t_f) \overline{\widehat{+}} g \diamondsuit \widehat{I}'(g, t_g) = (f+g) \diamondsuit \widehat{I}'(f+g, \Phi(t_f, t_g)) =$$

$$= (f+g)\Diamond \widehat{I}'(f+g, t_f+t_g)) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(2) + t_f + t_g = a+b,$$

$$a\overline{\widehat{\times}}b = a\overline{\widehat{\times}}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(2)+t_g\right) = \overline{\widehat{a}}\overline{\widehat{\times}}g\Diamond\widehat{I}'(g,t_g) = (a\times g)\Diamond \widehat{I}'(a\times g, \Phi(a,t_g)) =$$

$$= (a\times g)\Diamond\widehat{I}'(a\times g, at_g) = \frac{\partial(a\times g)}{\partial x}(2) + at_g = a\times b.$$

Dado que los resultados que se obtienen no sufren dependencia de los valores del factor tiempo que intervienen, deducimos que el levantamiento isotópico está bien definido. Obtenemos además que $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{R}, +, \times)$*, con lo cual tiene estructura de espacio vectorial sobre* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{R}, +, \times)$ *y por tanto tiene estructura de isoespacio vectorial.* $\triangleleft$

2.2. Isométricas

Una de las aplicaciones más significativas de las isotopías es la construcción de los isoespacios vectoriales métricos, presentados por primera vez en [35] y desarrollados con un mayor tratamiento en [40].

Desde el punto de vista físico, una de las características fundamentales de los isoespacios métricos es que permiten alterar las unidades de espacio y tiempo. Así, mientras que en un espacio métrico convencional las unidades espaciales cartesianas son iguales para todos los ejes, cuando pasamos al isoespacio métrico correspondiente, podemos tomar isounidades distintas para cada uno de dichos ejes, lo que adquiere verdadera importancia cuando construimos una isométrica η' a partir de la métrica original η.

Tal construcción se basa en la dependencia de la métrica η en la unidad e del cuerpo base K, en el sentido de ser $\eta = \eta \cdot Id$ (donde $Id \in M_n(K)$ es la matriz identidad) y quedar definido el producto escalar asociado como $< \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} >= \left(\overrightarrow{X}\cdot\eta\cdot\overrightarrow{Y}\right)e = \sum_{i=1}^n X_i\eta_iY_ie$. Esto es aprovechado en concreto por Santilli al observar la analogía entre el producto $\cdot\eta\cdot$ y la ley $\times\, T\times$, utilizada usualmente en el nivel de proyección. En concreto, define la isométrica $\overline{\widehat{\eta}} = T\times\delta$, de tal forma que finalmente, $\overline{\widehat{\overrightarrow{X}}}\,\overline{\widehat{\eta}}\,\overline{\widehat{\overrightarrow{Y}}} = \overrightarrow{X}\widehat{I}T\eta\overrightarrow{Y}\widehat{I} = \left(\overrightarrow{X}\eta\overrightarrow{Y}\right)\widehat{I}$.

No obstante, dado que lo que nos interesa es abordar el estudio de la isogeometría atendiendo al MCIM, diferiremos en parte de la propuesta de Santilli en [35], con vista a obtener resultados coherentes con las distintas $*$-leyes a utilizar.

En particular, supongamos dado un $K_1 \times ... \times K_n$-espacio vectorial n-dimensional M, de métrica $\eta = diag_n(\eta_1, ..., \eta_n)$ y conocidas las $*$-leyes utilizadas en el levantamiento isotópico de los n cuerpos anteriores, $*_1, ..., *_n$, de unidades respectivas $I'_1, ..., I'_n$. Denotaremos entonces $I' = diag_n(I'_1, ..., I'_n)$.

En caso de que queramos tener asociada una isométrica $\eta' = diag_n(\eta'_1, ..., \eta'_n)$ asociada al isoespacio $\overline{\widehat{M}}$, intentaremos que la isotopía utilizada sea tal que $\overline{\overline{\eta}} = \eta'$. Para conseguirlo, encontraremos en primer lugar la matriz diagonal no singular T' tal que $\eta = \eta' \cdot T'$. De esta forma, $\eta_i = \eta'_i *_i T'_i$, donde estamos suponiendo que $T' = diag_n(T'_1, ..., T'_n)$. Es decir, $T'_i = {\eta'}_i^{-I_i} *_i \eta_i$ para todo i, o bien, $T' = {\eta'}^{-I} \cdot \eta$.

Dicha matriz T' será entonces el elemento isotópico de la isotopía que queremos construir, pues de esta forma, tomando como isounidad a $\widehat{I'} = {T'}^{-I'}$, se consigue que $\eta' = \eta' I' = (\eta' T')\widehat{I'} = \eta \widehat{I'} = \overline{\overline{\eta}}$.

Por construcción, $\widehat{I'}$ será también una matriz diagonal regular, siendo de esta forma la unidad básica en el nivel de proyección y tal que cada uno de sus pivotes corresponde a la isounidad bajo la cual se obtiene la componente espacial correspondiente en M. En concreto, si $\widehat{I'} = diag_n(e_1, ..., e_n)$, el levantamiento isotópico que lleva M a $\overline{\widehat{M}}$ viene dado por la aplicación $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n) \to \overline{\overline{\overrightarrow{m}}} = (m_1, ..., m_n) \cdot diag_n(e_1, ..., e_n) = diag_n(m_1 *_1 e_1, ..., m_n *_n e_n) = ((\overline{\widehat{m_1}})_1, ..., (\overline{\widehat{m_n}})_n)$, donde con $(\overline{\widehat{m_i}})_i = m_i *_i e_i$ denotamos el levantado isotópico del correspondiente elemento $m_i \in K_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Esta relación entre la métrica inicial y la isométrica resultante es el fundamento de la aparentemente contradictoria unificación que propone Santilli de las geometrías Riemanniana y Minkowskiana (véase [45]). Tal contradicción desaparece en el momento en que se interpreta cada una de las geometrías anteriores como isogeometrías en los niveles isotópico y de proyección, respectivamente:

Ejemplo 2.2.1. *Consideremos el espacio Minkowskiano $M(\overrightarrow{x}, \eta, \mathbb{R})$ (3+1)-dimensional sobre el cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \times)$, con coordenadas locales $\overrightarrow{x} = \{\overrightarrow{x}_\mu\} = \{r, c_0 t\}$, para $\mu = 1, 2, 3, 4$, donde c_0 es la velocidad de la luz en el vacío; con métrica $\eta = diag(1, 1, 1, -1)$ y "unidad básica" $I = diag(+1, +1, +1, +1)$. La unidad convencional I representa las unidades de los tres ejes cartesianos (+1 cm, +1 cm, +1 cm) y la unidad de tiempo +1 seg.*

Supongamos que queremos pasar a un nuevo espacio que tenga por isométrica a η'*, dada por la matriz* $\eta' \equiv diag(\frac{1}{n_1^2}, \frac{1}{n_2^2}, \frac{1}{n_3^2}, -\frac{1}{n_4^2})$*, con* $n_i \in \mathbb{R}$ *no nulos para todo* i*, mediante una isotopía de elementos* $\star \equiv +$ *y* $*_i \equiv \times$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$*. Para ello buscamos en primer lugar una matriz diagonal* T' *tal que* $\eta = \eta' \cdot T'$*. En nuestro caso,* $T' = diag(n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_4^2)$*. Bastará tomar entonces como isounidad la matriz* $\widehat{I'} = diag(\frac{1}{n_1^2}, \frac{1}{n_2^2}, \frac{1}{n_3^2}, \frac{1}{n_4^2})$*, que es, por construcción, regular, simétrica y definida positiva. De esta forma, el levantamiento isotópico buscado es aquél que tiene como isounidades espaciales a* $+\frac{1}{n_1^2}\,cm, +\frac{1}{n_2^2}\,cm$ *y* $+\frac{1}{n_3^2}\,cm$ *y como isounidad temporal a* $+\frac{1}{n_4^2}\,seg$*.*

Por tanto, el levantamiento isotópico de M *a* $\overline{\widehat{M}}$ *viene dado a partir de la aplicación* $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \rightarrow \overline{\widehat{\overrightarrow{m}}} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \cdot diag(\frac{1}{n_1^2}, \frac{1}{n_2^2}, \frac{1}{n_3^2}, \frac{1}{n_4^2}) = diag(\frac{m_1}{n_1^2}, \frac{m_2}{n_2^2}, \frac{m_3}{n_3^2}, \frac{m_4}{n_4^2}) = (\overline{\widehat{m_1}}, \overline{\widehat{m_2}}, \overline{\widehat{m_3}}, \overline{\widehat{m_4}})$*.*

En particular, $\overline{\widehat{M}} = M$ *y, dados* $\overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_n)$ *y* $\overrightarrow{q} = (q_1, ..., q_n)$ *en* M*, el producto escalar queda definido en* $\overline{\widehat{M}}$*, como:*

$$\overrightarrow{p} \cdot \eta' \cdot \overrightarrow{q} = p_1 \overline{\widehat{\times}} \eta'_1 \overline{\widehat{\times}} q_1 \overline{\widehat{+}} p_2 \overline{\widehat{\times}} \eta'_2 \overline{\widehat{\times}} q_2 \overline{\widehat{+}} p_3 \overline{\widehat{\times}} \eta'_3 \overline{\widehat{\times}} q_3 \overline{\widehat{+}} p_4 \overline{\widehat{\times}} \eta'_4 \overline{\widehat{\times}} q_4 =$$
$$= p_1 \overline{\widehat{\times}} q_1 + p_2 \overline{\widehat{\times}} q_2 + p_3 \overline{\widehat{\times}} q_3 - p_4 \overline{\widehat{\times}} q_4 = p_1 q_1 n_1^2 + p_2 q_2 n_2^2 + p_3 q_3 n_3^2 - p_4 q_4 n_4^2.$$

Señalemos por último (véase [45]) que desde un punto de vista físico, si existen $i \neq j$ *tales que* $n_i^2 \neq n_j^2$*, entonces el medio físico al que llegamos es un medio no homogéneo y anisótropo. También desde un punto de vista físico se observa la importancia de la anterior construcción. Convencionalmente, cualquier modificación de la métrica de un espacio Minkowskiano requiere necesariamente del uso de transformaciones no canónicas, lo cual da lugar a que las unidades de espacio y tiempo dejen de ser invariantes. Esto último origina problemas inmediatos a la hora de estudiar las diferentes aplicaciones físicas de este cambio de métrica. Por ejemplo, no es posible desarrollar una medida de longitud invariante cuando de por sí la métrica varía a lo largo del tiempo.*

De hecho, este ejemplo que acabamos de ver puede generalizarse dando libertad a la elección de los n_i^2*, pudiendo depender estos elementos de las coordenadas de espacio y tiempo correspondientes; esto es,* $n_i = n_i(x, t)$*.*

Una aplicación física de gran interés por su importancia en el campo de la teoría de la relatividad es la geometrización directa de velocidades arbitrarias de la luz, que el lector interesado puede encontrar en la sección 2.5 de [45]. $\triangleleft$

2.3. Geometría isoeuclídea

Consideremos el $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio isoeuclídeo de dimensión 3, $\overline{\widehat{E}} = \overline{\widehat{E}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\delta}}, \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$. Al levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ lo denotaremos por $\mathbf{I}$, mientras que por $\mathbf{I}'$ denotaremos al correspondiente que construye $\overline{\widehat{E}}$. El levantamiento isotópico del espacio euclídeo correspondiente E, de métrica $\delta \equiv diag(+1,+1,+1)$, que construye $\overline{\widehat{E}}$ vendrá dado por la aplicación:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \overline{\widehat{\overrightarrow{x}}} = ((\overline{\widehat{x_1}})_1, (\overline{\widehat{x_2}})_2, (\overline{\widehat{x_3}})_3).$$

En particular, la isotopía $\mathbf{I}'$ está constituida a su vez por tres levantamientos isotópicos (cada uno correspondiente a uno de los ejes espaciales), $\mathbf{I}'_1$, $\mathbf{I}'_2$ e $\mathbf{I}'_3$.

Definición 2.3.1. *Sea $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}$ un isovector de $\overline{\widehat{E}}$ asociado a $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3,) \in E$. Se llama* isopunto asociado a $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}$*, al afijo de $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}$: $((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{x}})_2, (\overline{\widehat{x}})_3)$. Este afijo o* isocoordenadas *se denota por $(\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{y}}, \overline{\widehat{z}})$ cuando se quiere mostrar el carácter geométrico del isopunto, dentro del isoespacio $\overline{\widehat{E}}$, de isoejes $\widehat{\overline{OX}}$, $\widehat{\overline{OY}}$, $\widehat{\overline{OZ}}$.*

En la presente sección nos centraremos en el estudio mediante el MCIM del plano isoeuclídeo $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, levantado isotópico del plano euclídeo π_{xy}. La proyección de $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ la denotaremos por $\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}$.

Consideremos por tanto conocidas las $*$-leyes $*_1$ y $*_2$ y la unidad básica en el nivel general $I' = diag(I'_1, I'_2)$. Supuesta la isométrica $\overline{\widehat{\delta}} = \delta' \equiv diag(\delta'_1, \delta'_2)$, tendremos el elemento isotópico $T' = diag(T'_1, T'_2) = \delta'^{-I'} \cdot \delta = diag(\delta'^{-I'_1}_1, \delta'^{-I'_2}_2) \cdot diag(+1,+1) = diag(\delta'^{-I'_1}_1 *_1 1, \delta'^{-I'_2}_2 *_2 1)$. En definitiva, $T'_1 = \delta'^{-I'_1}_1 *_1 1$ y $T'_2 = \delta'^{-I'_2}_2 *_2 1$, siendo finalmente la unidad básica en el nivel de proyección, la matriz $\widehat{I'} = diag(\widehat{I'}_1, \widehat{I'}_2) = T'^{-I} = diag(T'^{-I'_1}_1, T'^{-I'_2}_2)$. En el caso particular en que $*_1 \equiv *_2 \equiv \times$, se obtiene que $\widehat{I'} = \delta'$.

Por construcción, $\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}$ es entonces un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_1} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_2}$-isoespacio vectorial. La dimensión isotópica de dicho isoespacio es por tanto 2, si bien se pueden obtener estructuras matemáticas que convencionalmente tienen una dimensión distinta. Esto lo podemos ver en el siguiente:

Ejemplo 2.3.2. *Supongamos que la isométrica $\widehat{\delta'}$ coincida con la métrica euclídea $\delta = diag(1,1)$, si bien las $*$-leyes no coinciden con las operaciones usuales en $\mathbb{R}$.*

En concreto, supongamos que la isounidad $\widehat{I'}_1$ *sufre dependencia en el tiempo como factor externo* ($t \in F^{\widehat{I'}_1} = [0, 2\pi)$), *de tal forma que el eje* OX *en* π_{xy} *se proyecta isotópicamente en el plano* $OXZ \subseteq \mathbb{R}^3$, *mediante la revolución respecto al eje espacial* OY. *Es decir:*

$$(x, 0) *_1 \widehat{I'}_1((x, 0), t) = (x\ cos(t), 0, x\ sen(t))$$

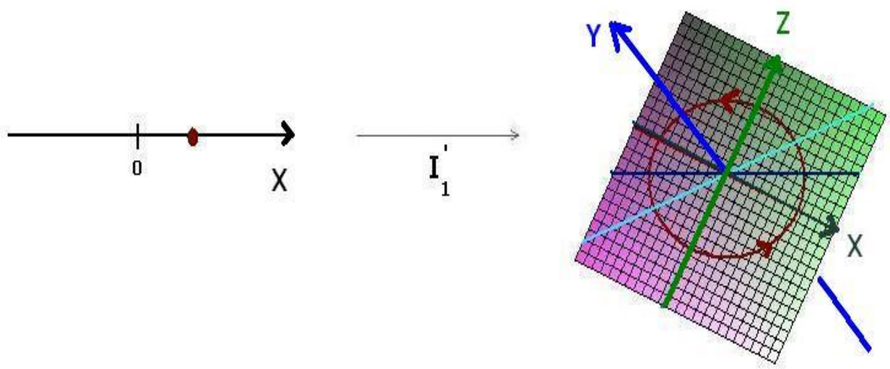

Figura 2.4: $\pi \circ \widehat{\mathbf{I'}}_{\mathbf{1}}(OX) = OXZ$.

Por otro lado, supongamos que la isotopía del eje OY, *correspondiente a la isounidad* $\widehat{I'}_2$ *coincide con la inclusión en* $\mathbb{R}^3$. *Esto es:*

$$(0, y) *_2 \widehat{I'}_2((0, y)) = (0, y, 0)$$

Resulta entonces por extensión al plano π_{xy} *que la proyección isotópica de éste coincide con* $\mathbb{R}^3$, *obteniéndose como revolución de dicho plano respecto al eje espacial* OY:

$$(x, y) * \widehat{I'}((x, y), t) = (x\ cos(t), y, x\ sen(t)).$$

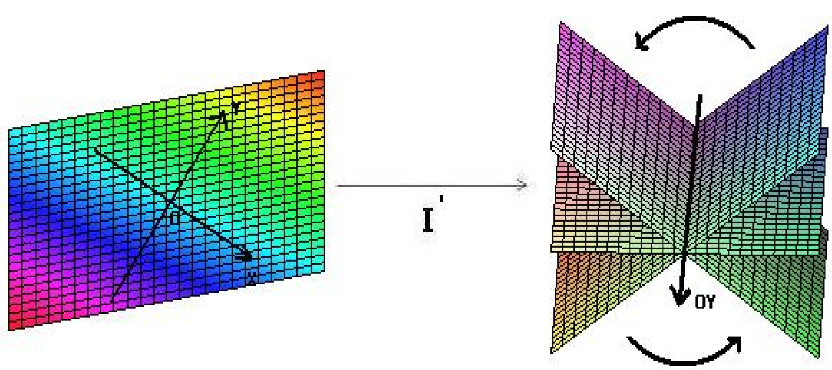

Figura 2.5: $\mathbb{R}^3$ *como proyección isotópica de* π_{xy}.

En particular, cada punto $(x, y) \in \pi_{xy}$ se proyecta isotópicamente a una circunferencia en $\mathbb{R}^3$. Cabe observar además que cada punto de $\mathbb{R}^3$ no perteneciente al eje OY se alcanza como proyección isotópica en dos tiempos distintos (los puntos del eje OY son fijos en todo instante de tiempo). Por tanto la isotopía no es inyectiva en general, aunque sí lo es en cambio en cada instante de tiempo por separado.

Por otra parte, si bien la dimensión convencional de $\mathbb{R}^3$ es 3, mediante la construcción que acabamos de realizar, la dimensión isotópica de dicho espacio es 2.

Desde el punto de vista físico, fijado cualquier observador isotópico en $\mathbb{R}^3$, éste pensará en todo momento que vive en un universo plano de 2 dimensiones. En particular, si suponemos el tiempo medido en segundos y consideramos que dicho observador describe una círcunferencia en 2π segundos, atendiendo a su geometría en dos dimensiones, en realidad habrá descrito una trayectoria elíptica en una esfera de $\mathbb{R}^3$.

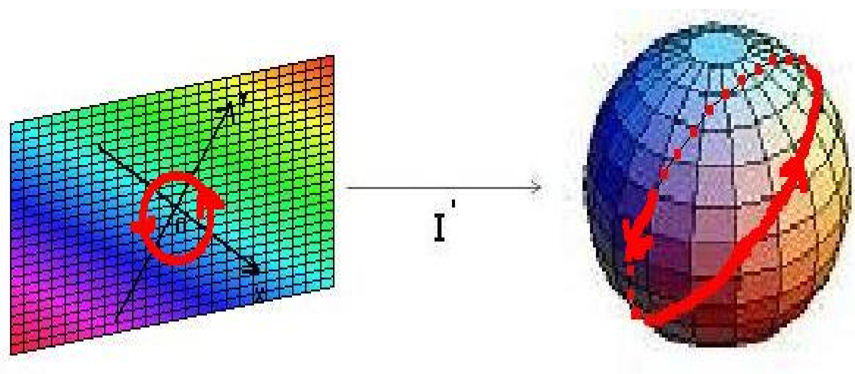

Figura 2.6: Trayectoria recorrida por un observador isotópico.

$\triangleleft$

No obstante, para una construcción coherente de la geometría isoeuclídea en $\pi_{\overline{\widehat{x}}\overline{\widehat{y}}}$ debemos imponer que $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_1} = \widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_2} \equiv \widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}} = \widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I}}$. Así por ejemplo, cuando queramos operar con un isonúmero de $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_1}$ y con uno de $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_2}$, primero pasamos a tratarlos como isonúmeros de $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ y posteriormente realizamos la suma en este último.

En particular, consideraremos $\star_1 \equiv \star_2 \equiv \star$ y en lo que diferirán $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_1}$ y $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_2}$ será en sus isoproductos al ser distintos en general $*_1, \widehat{I'}_1$ y $*_2, \widehat{I'}_2$, respectivamente. Por ello, para evitar confusión, denotaremos por $\widehat{\overline{\times}}_1$ y $\widehat{\overline{\times}}_2$ a los isoproductos de $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_1}$ y $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}_{\widehat{I'}_2}$, respectivamente. Además, la notación $\overline{\widehat{a}} \in \widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ no es suficiente, pues no señala si en el nivel de proyección, $\overline{\widehat{a}}$ coincide con $a *_1 \widehat{I'}_1$ o con $a *_2 \widehat{I'}_2$. De hecho, restringiremos esta notación para la construcción de los elementos de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}}$, esto es, $\overline{\widehat{a}} = a * \widehat{I}$. De tal forma que, para referirnos a los isonúmeros de $\widehat{\mathbb{R}}_{\widehat{I'}_1}$ y $\widehat{\mathbb{R}}_{\widehat{I'}_2}$, denotaremos $(\widehat{a})_1 = \mathbf{I_1}(a)$ al elemento de $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ tal que $(\overline{\widehat{a}})_1 = \overline{\mathbf{I_1}(a)} = a *_1 \widehat{I'}_1$ y $(\widehat{a})_2 = \mathbf{I_2}(a)$ es tal que $(\overline{\widehat{a}})_2 = \overline{\mathbf{I_2}(a)} = a *_2 \widehat{I'}_2$. Con esto, el levantamiento isotópico viene dado como: $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \to \overline{\widehat{\overrightarrow{x}}} = ((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{x}})_2)$.

Seguidamente vamos a probar la coherencia del MCIM en algunos aspectos básicos de la geometría isoeuclídea, como son la construcción de rectas y circunferencias isotópicas. Como aplicación daremos la noción de perpendicularidad entre este tipo de rectas y comprobaremos que el desarrollo teórico resultante es una generalización del correspondiente al modelo isotópico que utiliza como $*$-leyes las operaciones usuales en $\mathbb{R}$.

Previamente, con vistas a dar la noción de perpendicularidad desde un punto de vista analítico, es necesario estudiar el producto entre dos isovectores. Supondremos para ello que, en caso de trabajar con isotopías dependientes de factores externos, ambos isovectores corresponden a unos mismos valores fijos en tales factores.

Además, para simplificar la notación, ya de por sí bastante cargada, dado nuestro propósito de operar con $*$-leyes genéricas, supondremos implícito en cada una de las expresiones que vayan surgiendo en esta sección el uso de las aplicaciones que relacionan los factores externos, Φ_+ y $\Phi_\times$, necesarias en el nivel de proyección a la hora de trabajar con las isooperaciones $\overline{\widehat{+}}$ y $\overline{\widehat{\times}}$, respectivamente.

Con todo lo anterior damos ya la siguiente:

Definición 2.3.3. *Sean* $\widehat{\overrightarrow{u}} = ((\widehat{u_1})_1, (\widehat{u_2})_2), \widehat{\overrightarrow{v}} = ((\widehat{v_1})_1, (\widehat{v_2})_2) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$. *Se define entonces el* producto isoescalar en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *como:*

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >_{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}} = \widehat{\overrightarrow{u}} \cdot \widehat{\delta} \cdot \widehat{\overrightarrow{v}} =$$

$$= \left((\widehat{u_1})_1 \widehat{\times}_1 \left(\widehat{\delta_1}\right)_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{v_1})_1\right) \widehat{+} \left((\widehat{u_2})_2 \widehat{\times}_2 \left(\widehat{\delta_2}\right)_2 \widehat{\times}_2 (\widehat{v_2})_2\right) =$$

$$= \mathbf{I}\left(\left(\left(u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1 *_1 \widehat{I}'_1\right) * T\right) \star \left(\left(u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2 *_2 \widehat{I}'_2\right) * T\right)\right).$$

Siendo $< .,. >_{\pi_{xy}}$ *el producto escalar en* π_{xy}*, asociado a la métrica* δ*, se define el* isoproducto isoescalar en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *como:*

$$\widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>}_{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}} = \mathbf{I}\left(< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >\right) = \mathbf{I}\left((u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1) \star (u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2)\right).$$

Se definen el módulo *y el* isomódulo en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$*, respectivamente, como:*

$$|\widehat{\overrightarrow{u}}| = \left(< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{u}} >_{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}}\right)^{\widehat{1/2}}; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{u}}|} = \left(\widehat{<}\widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{u}}\widehat{>}\right)^{\widehat{1/2}}.$$

En nivel de proyección se definen a su vez:

$$< \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} >_{\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}} = \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} \cdot \overline{\widehat{\delta}} \cdot \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} = \overline{< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >_{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}}} =$$

$$= \left(\left(\left(u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1 *_1 \widehat{I}'_1\right) * T\right) \star \left(\left(u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2 *_2 \widehat{I}'_2\right) * T\right)\right) * I.$$

$$\overline{\widehat{<}}\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}\overline{\widehat{>}}_{\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}} = \overline{\widehat{<}\widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}}\widehat{>}} = \pi \circ \mathbf{I}\left((u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1) \star (u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2)\right).$$

$$\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} \to |\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}| = \overline{|\widehat{\overrightarrow{u}}|} \qquad \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} \to \overline{\widehat{|}}\,\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}\,\overline{\widehat{|}} = \overline{\widehat{|\widehat{\overrightarrow{u}}|}}.$$

Ejemplo 2.3.4. *En las condiciones del Ejemplo 2.3.2, supongamos que* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *se construye a partir de la isotopía identidad y que* $*_{1|_{\mathbb{R}}} \equiv *_{2|_{\mathbb{R}}} \equiv \times$*,* $\star \equiv +$*. Identifiquemos además en la construcción realizada en dicho ejemplo, la proyección isotópica del eje* OX *con la recta real* $\mathbb{R}$*, para que de esta forma podamos tener que* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_1} = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_2} \equiv \overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$*. En este sentido sería* $x * \widehat{I'}(x,t) = x$*.*

En particular, si, fijado un tiempo $t_0 \in [0, 2\pi)$*, consideramos los vectores* $\overrightarrow{u} = (1,0)$*,* $\overrightarrow{v} = (0,1)$*,* $\overrightarrow{a} = (1,1)$ *y* $\overrightarrow{b} = (1,-1)$ *(obteniendo como proyecciones isotópicas a* $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} = (cos(t_0), 0, sen(t_0))$*,* $\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} = (0,1,0)$*,* $\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}} = (cos(t_0), 1, sen(t_0))$ *y* $\overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} = (cos(t_0), -1, sen(t_0))$*), se tendrá que:*

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \widehat{0}; \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} >= \overline{\widehat{0}} = 0; \quad \widehat{<}\widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}}\widehat{>} = \widehat{0}; \quad \overline{\widehat{<}}\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}\overline{\widehat{>}} = \overline{\widehat{0}} = 0.$$

$$< \widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}} >= \widehat{2}; \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} >= 2 \quad \widehat{<}\widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}}\widehat{>} = \widehat{2}; \quad \overline{\widehat{<}}\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}}\overline{\widehat{>}} = \overline{\widehat{2}} = 2.$$

$\triangleleft$

Las nociones de producto e isoproducto isoescalar no coinciden en general. En el caso en que $*_1$ y $*_2$ sean conmutativas en el conjunto general correspondiente, se obtiene que:

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \mathbf{I}\left(\left(\left(u_1 *_1 v_1 *_1 \delta_1 *_1 \widehat{I}'_1\right) * T\right) \star \left(\left(u_2 *_2 v_2 *_2 \delta_2 *_2 \widehat{I}'_2\right) * T\right)\right) =$$

$$= \mathbf{I}\left(\left(\left(u_1 *_1 \delta'_1 *_1 v_1\right) * T\right) \star \left(\left(u_2 *_2 \delta'_2 *_2 v_2\right) * T\right)\right) =$$

$$= \mathbf{I}\left(\left(\left(u_1 *_1 \delta'_1 *_1 v_1\right) \star \left(u_2 *_2 \delta'_2 *_2 v_2\right)\right) * T\right).$$

De tal forma que en el nivel de proyección:

$$\overline{< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >} = \left(u_1 *_1 \delta'_1 *_1 v_1\right) \star \left(u_2 *_2 \delta'_2 *_2 v_2\right).$$

Vemos en el siguiente resultado el caso particular que usualmente se da en las aplicaciones de la isoteoría en Física, cuya demostración es evidente por construcción:

Corolario 2.3.5. *Si $*_{1|_{\mathbb{R}}} \equiv *_{2|_{\mathbb{R}}} \equiv *_{|_{\mathbb{R}}} \equiv \times$, $\star \equiv +$ e $\widehat{I}'_1, \widehat{I}'_2, \widehat{I} \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\begin{array}{ll} < \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \mathbf{I}\left(\left(u_1\delta'_1 v_1 + u_2\delta'_2 v_2\right) T\right); & < \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} >= u_1\delta'_1 v_1 + u_2\delta'_2 v_2 \\ \widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>} = \mathbf{I}\left(u_1\delta_1 v_1 + u_2\delta_2 v_2\right); & \overline{\widehat{<} \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} \widehat{>}} = \left(u_1\delta_1 v_1 + u_2\delta_2 v_2\right) \widehat{I} \end{array} \quad \square$$

Veamos un par de ejemplos al respecto:

Ejemplo 2.3.6. *Con las notaciones usuales consideremos $\delta' = diag(2,3)$. Supuestos $*_1 \equiv *_2 \equiv \times$ y $\star \equiv +$, tendremos por construcción que $T' = diag(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $\widehat{I}' = diag(2,3) = \delta'$. Supondremos además que $\widehat{I} = 5$, $* \equiv \times$, $\widehat{S} = 0$ y $\star \equiv +$, con lo cual, $T = \frac{1}{5}$ y $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$. Estamos pues en las condiciones del Corolario 2.3.5, que podremos utilizar por tanto en nuestro desarrollo.*

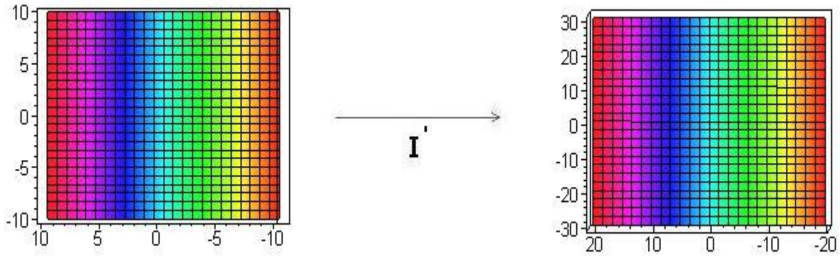

Figura 2.7: $\pi \circ \widehat{\mathbf{I}}'(x,y) = (2x, 3y)$.

Consideremos los vectores $\overrightarrow{u} = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,1)$, $\overrightarrow{a} = (1,1)$ *y* $\overrightarrow{b} = (1,-1)$. *Sus respectivos levantados isotópicos serán* $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} = (2,0)$, $\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} = (0,3)$, $\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}} = (2,3)$ *y* $\overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} = (2,-3)$.

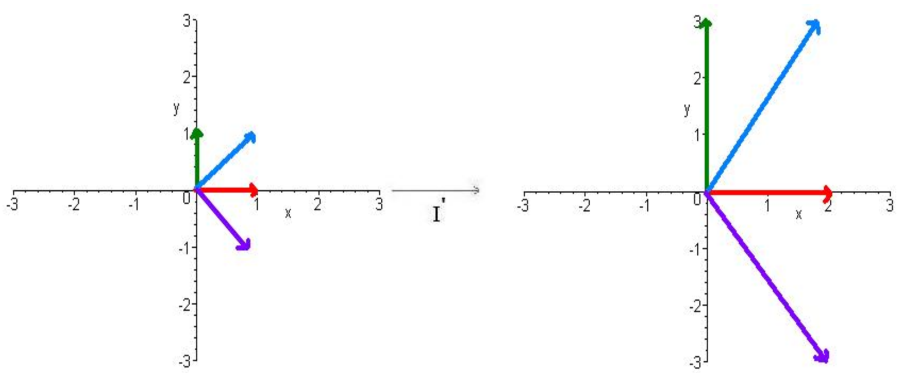

Figura 2.8: Construcción de isovectores.

Se tiene entonces que:

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \widehat{0}; \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} >= 0; \quad \widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>} = \widehat{0}; \quad \overline{\widehat{<} \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} \widehat{>}} = 0.$$

$$< \widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}} >= \widehat{\frac{-1}{5}}; \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} >= -1 \quad \widehat{<} \widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}} \widehat{>} = \widehat{0}; \quad \overline{\widehat{<} \overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} \widehat{>}} = 0.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{u}}| = \widehat{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}| = \sqrt{10}; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{u}}|} = \widehat{1}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}|}} = 5.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{v}}| = \widehat{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}| = \sqrt{15}; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{v}}|} = \widehat{1}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}|}} = 5$$

$$|\widehat{\overrightarrow{a}}| = \widehat{1}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}| = 5 \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{a}}|} = \widehat{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}|}} = \sqrt{10}.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{b}}| = \widehat{1}; \quad |\widehat{\widehat{\overrightarrow{b}}}| = 5; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{b}}|} = \widehat{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}; \quad \widehat{|\widehat{\widehat{\overrightarrow{b}}}|} = \sqrt{10}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 2.3.7. *Sea* $\widehat{I'} = \left\{ \begin{array}{c} diag(1, \frac{2}{x^2}) \ , \ si \ x \neq 0 \\ diag(1, \frac{1}{2}) \ , \ si \ x = 0 \end{array} \right\}$*. Supuestos* $*_{1|_{\mathbb{R}}} \equiv *_{2|_{\mathbb{R}}} \equiv \times$ *y* $\star \equiv +$*, tendremos por construcción, que* $T' = \widehat{I'}$ *y que* $\delta' = diag(1,2)$*. Supondremos además que* $\widehat{I} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x^2} \ , \ si \ x \neq 0 \\ 1 \ , \ si \ x = 0 \end{array} \right\}$*,* $*_{|_{\mathbb{R}}} \equiv \times$*,* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$ *Así,* $T = I$ *y* $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$*.*

Obsérvese que en este caso tenemos que:

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \mathbf{I}\left(\left(\left(u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1 *_1 \widehat{I'_1}\right) * T\right) \star \left(\left(u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2 *_2 \widehat{I'_2}\right) * T\right)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}\left(((u_1 v_1)\, T) + \left(\left(\frac{2}{u_2 v_2}\right) T\right)\right) \ , \ si \ u_2 v_2 \neq 0 \\ \mathbf{I}\left((u_1 v_1)\, T\right) \ , \ si \ u_2 v_2 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}\left(\frac{1}{u_1 v_1} + \frac{u_2 v_2}{2}\right) = \mathbf{I}\left(\frac{2 + u_1 v_1 u_2 v_2}{2 u_1 v_1}\right) \ , \ si \ u_1 v_1 \neq 0 \\ \mathbf{I}\left(u_2 v_2\right) \ , \ si \ u_1 v_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$< \widehat{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \widehat{\widehat{\overrightarrow{v}}} >= \left\{ \begin{array}{c} \frac{2 u_1 v_1}{2 + u_1 v_1 u_2 v_2} \ , \ si \ 2 + u_1 v_1 u_2 v_2 \neq 0 \\ 0, \ si \ 2 + u_1 v_1 u_2 v_2 = 0 \\ u_1 v_1 \ , \ si \ u_2 v_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>} = \mathbf{I}\left((u_1 *_1 \delta_1 *_1 v_1) \star (u_2 *_2 \delta_2 *_2 v_2)\right) = \mathbf{I}\left(u_1 v_1 + u_2 v_2\right).$$

$$\overline{\widehat{<} \widehat{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \widehat{\widehat{\overrightarrow{v}}} \widehat{>}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{u_1 v_1 + u_2 v_2} \ , \ si \ u_1 v_1 + u_2 v_2 \neq 0 \\ 0 \ , \ si \ u_1 v_1 + 2 u_2 v_2 = 0 \end{array} \right\}$$

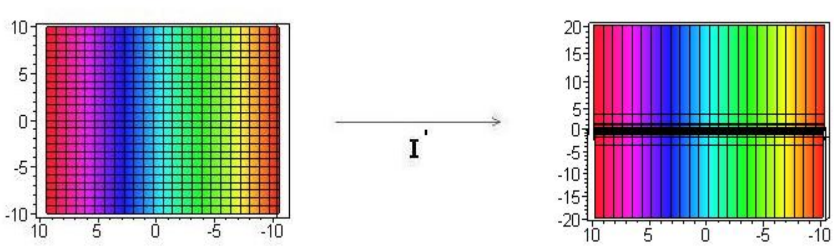

Figura 2.9: $\pi \circ \widehat{\mathbf{I}'}(x,y) = (x, 2/y)$.

Consideremos ahora los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *usados en el ejemplo anterior. En este caso, sus respectivos levantados isotópicos serán* $\widehat{\widehat{\overrightarrow{u}}} = (1,0)$, $\widehat{\widehat{\overrightarrow{v}}} = (0,2)$,

$\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}} = (1,2)$ *y* $\overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} = (1,-2)$. *Se tiene entonces que:*

$$< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \widehat{0}; \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} >= 0; \quad \widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>} = \widehat{0}; \quad \overline{\widehat{<} \overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}} \widehat{>}} = 0.$$

$$< \widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}} >= \mathbf{I}(\frac{1}{2}); \quad < \overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} >= 2; \quad \widehat{<} \widehat{\overrightarrow{a}}, \widehat{\overrightarrow{b}} \widehat{>} = \widehat{0}; \quad \overline{\widehat{<} \overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}} \widehat{>}} = 0.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{u}}| = \widehat{1}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}| = 1; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{u}}|} = \widehat{1}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}|}} = 1.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{v}}| = \widehat{1}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}| = 1; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{v}}|} = \widehat{1}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}|}} = 1.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{a}}| = \widehat{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{a}}|} = \widehat{\sqrt{2}}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$|\widehat{\overrightarrow{b}}| = \widehat{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}; \quad |\overline{\widehat{\overrightarrow{b}}}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \widehat{|\widehat{\overrightarrow{b}}|} = \widehat{\sqrt{2}}; \quad \overline{\widehat{|\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\triangleleft$

Pasamos a continuación a dar la noción de isoperpendicularidad entre isovectores:

Definición 2.3.8. *Dos isovectores* $\widehat{\overrightarrow{u}}$ *y* $\widehat{\overrightarrow{v}}$ *se dirán* perpendiculares *si* $< \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} >= \widehat{S}$. *Se dirán* isoperpendiculares *si* $\widehat{<} \widehat{\overrightarrow{u}}, \widehat{\overrightarrow{v}} \widehat{>} = \widehat{S}$. *Se denotarán respectivamente,* $\widehat{\overrightarrow{u}} \perp \widehat{\overrightarrow{v}}$ *y* $\widehat{\overrightarrow{u}} \widehat{\perp} \widehat{\overrightarrow{v}}$.

Se dirá que $\widehat{\overrightarrow{u}}$ *tiene la* misma dirección que $\widehat{\overrightarrow{v}}$ *si existe* $\widehat{a} \in \widehat{\mathbb{R}}$, *tal que* $\widehat{\overrightarrow{u}} = \widehat{a} \widehat{\bullet} \widehat{\overrightarrow{v}}$.

Análogamente se definen los conceptos anteriores en el nivel de proyección.

Hagamos notar que usando el MCIM se tiene que, fijado $\widehat{\overrightarrow{u}} = ((\widehat{u_1})_1, (\widehat{u_2})_2) \in \pi_{\widehat{xy}}$ y un isonúmero $\widehat{a} \in \mathbb{R}$, se verifica que el isovector $\widehat{a} \widehat{\bullet} \widehat{\overrightarrow{u}} = \mathbf{I_E}(a \Box \overrightarrow{u})$ tiene por afijo $(\widehat{a} \widehat{\times} (\widehat{u_1})_1, \widehat{a} \widehat{\times} (\widehat{u_2})_2) = (\widehat{a} \widehat{\times} \mathbf{I}\left((u_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T\right), \widehat{a} \widehat{\times} \mathbf{I}\left((u_2 *_2 \widehat{I'_2}) * T\right)) = (\mathbf{I}(a * [(u_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T]), \mathbf{I}(a * [(u_2 *_2 \widehat{I'_2}) * T]))$.

Atendiendo a la construcción realizada se llega entonces al siguiente resultado:

Proposición 2.3.9. *Se verifica que:*

a) *Cuando el levantamiento isotópico sea inyectivo, la (iso)perpendicularidad en los niveles isotópico y de proyección son equivalentes. Además,* $\widehat{\overrightarrow{u}}$ *tiene la misma dirección que* $\widehat{\overrightarrow{v}}$ *si y sólo si* $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}$ *tiene la misma dirección que* $\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}$.

b) *La isoperpendicularidad equivale a la perpendicularidad en el nivel general.*

c) *En las condiciones del Corolario 2.3.5, la isoperpendicularidad equivale a la perpendicularidad en el nivel convencional.*

d) *Si, bajo las notaciones usuales, en el levantamiento isotópico utilizado se tiene que $\square \equiv \bullet$, resulta entonces que $\overrightarrow{u}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ si y sólo si $\widehat{\overrightarrow{u}}$ tiene la misma dirección que $\widehat{\overrightarrow{v}}$.* $\square$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.3.10. *En el Ejemplo 2.3.6, se tiene que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ de la forma usual, mientras que $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. Se comprueba además que $\widehat{\overrightarrow{u}} \perp \widehat{\overrightarrow{v}}$, $\widehat{\overrightarrow{u}} \widehat{\perp} \widehat{\overrightarrow{v}}$, $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} \perp \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}$, $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}} \overline{\widehat{\perp}} \overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}$, $\widehat{\overrightarrow{a}} \not\perp \widehat{\overrightarrow{b}}$, $\widehat{\overrightarrow{a}} \widehat{\perp} \widehat{\overrightarrow{b}}$, $\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}} \not\perp \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}}$ y $\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}} \overline{\widehat{\perp}} \overline{\widehat{\overrightarrow{b}}}$.*

En el Ejemplo 2.3.7 siguen verificándose todas las relaciones anteriores. No obstante, tomando los vectores $\overrightarrow{c} = (2,1)$ y $\overrightarrow{d} = (1,-2)$, que son perpendiculares en el nivel convencional, sus levantados isotópicos $\widehat{\overrightarrow{c}}$ y $\widehat{\overrightarrow{d}}$ no son perpendiculares, pues $< \widehat{\overrightarrow{c}}, \widehat{\overrightarrow{d}} >= \mathbf{I}(-\frac{1}{2})$. Análogamente, los isovectores $\overline{\widehat{\overrightarrow{c}}}$ y $\overline{\widehat{\overrightarrow{d}}}$ tampoco son perpendiculares, pues $< \overline{\widehat{\overrightarrow{c}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{d}}} >= -2$.

Por su parte, mientras que los vectores $\overrightarrow{a} = (1,1)$ y $\overrightarrow{e} = (2,-1)$, no son perpendiculares con la métrica euclídea, se comprueba que tanto $\widehat{\overrightarrow{u}}$ y $\widehat{\overrightarrow{e}}$ como $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}$ y $\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}$ sí son perpendiculares. $\triangleleft$

Las anteriores nociones adquieren importancia cuando se estudian las rectas e isorrectas en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ y en $\pi_{\overline{\widehat{x}}\overline{\widehat{y}}}$. En concreto, seguiremos los conceptos propuestos por Santilli en [42] cuando analiza la geometría riemanniana como proyección isotópica de la euclídea, si bien los desarrollaremos desde el punto de vista del MCIM, lo que conllevará un mayor grado de complejidad en las expresiones y condiciones que se obtengan.

Nuevamente supondremos en las expresiones siguientes que tenemos fijados unos valores concretos para los factores externos de los que dependa la isounidad utilizada y que implícitamente se estarán usando las aplicaciones Φ_+ y $\Phi_\times$:

Definición 2.3.11. *Se denomina* recta en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *a cualquier conjunto de isopuntos $((\widehat{x})_1, (\widehat{y})_2)$ en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ que verifiquen una ecuación de la forma:*

$$((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1) \widehat{+} ((\widehat{b})_2 \widehat{\times}_2 (\widehat{y})_2) \widehat{+} \widehat{c} = \widehat{S} \equiv$$

$$\equiv \mathbf{I}\left(\left(a *_1 x *_1 \widehat{I}'_1\right) * T \star \left(b *_2 y *_2 \widehat{I}'_2\right) * T \star c\right) = \mathbf{I}(S),$$

donde $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{\mathbb{R}}$ *y* $\widehat{S}$ *es el elemento unidad de* $\widehat{\mathbb{R}}$ *respecto a* $\widehat{+}$.

Se llama isorrecta en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *al levantado isotópico punto a punto de una recta en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$.

Análogamente se definen los conceptos anteriores en el nivel de proyección.

Por construcción tendremos entonces que toda recta en el nivel isotópico es el levantado isotópico de una recta en el nivel general:

$$\left(a *_1 x *_1 \widehat{I}'_1\right) * T \star \left(b *_2 y *_2 \widehat{I}'_2\right) * T \star c = S,$$

la cual no tiene por qué corresponder a una recta euclídea en el nivel convencional y por tanto, no tiene por qué ser una isorrecta.

Veamos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo 2.3.12. *En las condiciones del Ejemplo 2.3.4, si no atendemos al factor tiempo, la expresión* $((\overline{\widehat{a}})_1 \overline{\widehat{\times}}_1 (\overline{\widehat{x}})_1) \overline{\widehat{+}} ((\overline{\widehat{b}})_2 \overline{\widehat{\times}}_2 (\overline{\widehat{y}})_2) \overline{\widehat{+}} \overline{\widehat{c}} = \overline{\widehat{S}}$ *corresponde a un plano en* $\mathbb{R}^3$*, mientras que fijado un tiempo* $t_0 \in [0, 2\pi)$*, la expresión anterior se refiere a la intersección entre el plano anterior y el obtenido como proyección isotópica de* π_{xy} *en* $t = t_0$.

En caso de que tal intersección sea no vacía, se obtiene de hecho una isorrecta en $\mathbb{R}^3$.

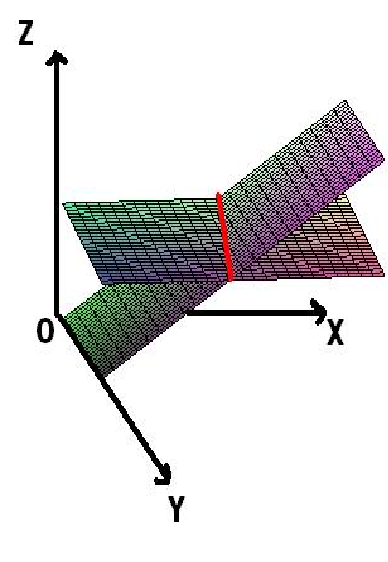

Figura 2.10: Isorrecta en $\mathbb{R}^3$. ◁

Ejemplo 2.3.13. *Utilizando las notaciones usuales, consideremos* $*_1 \equiv *_2 \equiv \times$ *y* $\star \equiv +$ *e* $\widehat{I'} = diag(1,2)$. *Supondremos además que* $\widehat{I} = 5$, $* \equiv \times$, $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$, *con lo cual,* $T = \frac{1}{5}$ *y* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$.

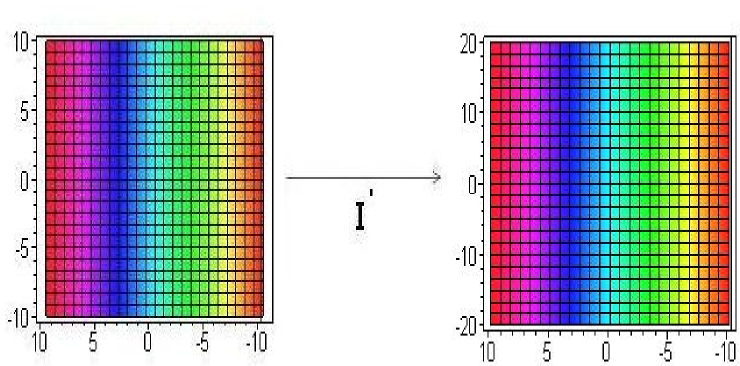

Figura 2.11: $\pi \circ \widehat{\mathbf{I}'}(x,y) = (x,2y)$.

Consideremos a continuación la recta $r \equiv y = x$ *en* π_{xy} *y la recta* $\widehat{s} \equiv (\widehat{y})_2 = (\widehat{x})_1$ *en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$. *Podemos comprobar que la imposición en la definición anterior de levantar isotópicamente una recta en* π_{xy} *punto a punto no es arbitraria. Para ello basta ver que pese a que* r *y* $\widehat{s}$ *representan en el nivel axiomático la misma recta, en el sentido de que ambas están formadas por el conjunto de puntos en sus respectivos espacios tales que sus dos coordenadas coinciden, no se cumple en cambio que* $\widehat{r} \equiv \widehat{s}$, *pues por construcción:*

$$\widehat{r} \equiv \{((\widehat{x})_1, (\widehat{y})_2) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : x = y \in \mathbb{R}\} = \{((\widehat{x})_1, (\widehat{x})_2) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\overline{\widehat{r}} \equiv \{((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{x}})_2) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}} : x \in \mathbb{R}\} \equiv \{(x,2x) \in \pi_{xy} : x \in \mathbb{R}\} \equiv \{(x,y) \in \pi_{xy} : y = 2x\} \equiv$$

$$\equiv \{((\overline{\widehat{x}})_1, \left(\overline{\widehat{\frac{1}{2}}}\right)_2 \overline{\widehat{\times}}_2 (\overline{\widehat{y}})_2) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}} : \left(\overline{\widehat{\frac{1}{2}}}\right)_2 \overline{\widehat{\times}}_2 (\overline{\widehat{y}})_2 = \left(\overline{\widehat{2}}\right)_1 \overline{\widehat{\times}}_1 (\overline{\widehat{x}})_1\} \equiv$$

$$\equiv \{((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{y}})_2) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}} : (\overline{\widehat{y}})_2 = \left(\overline{\widehat{2}}\right)_1 \overline{\widehat{\times}}_1 (\overline{\widehat{x}})_1\}.$$

Es decir, en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, $\widehat{r} \equiv \widehat{y} = \widehat{x} \equiv (\widehat{y})_2 = \left(\widehat{2}\right)_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1 \not\equiv (\widehat{y})_2 = (\widehat{x})_1 \equiv \widehat{s}$, *cuya proyección en* $\overline{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}}$ *viene dada por* $\overline{\widehat{s}} \equiv 2y = x \equiv y = \frac{x}{2}$. *En todo caso,* $\widehat{r}$ *sería una isorrecta en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, *al ser levantado isotópico de una recta en* π_{xy} *y de por sí una recta en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$.

Se puede comprobar que $\widehat{s}$ *es también una isorrecta al ser el levantado isotópico de la recta* $s \equiv y = \frac{x}{4}$. *Esto es,* $\widehat{s} \equiv \widehat{y} = \widehat{\frac{x}{4}} \equiv (\widehat{y})_2 = (\widehat{x})_1$.

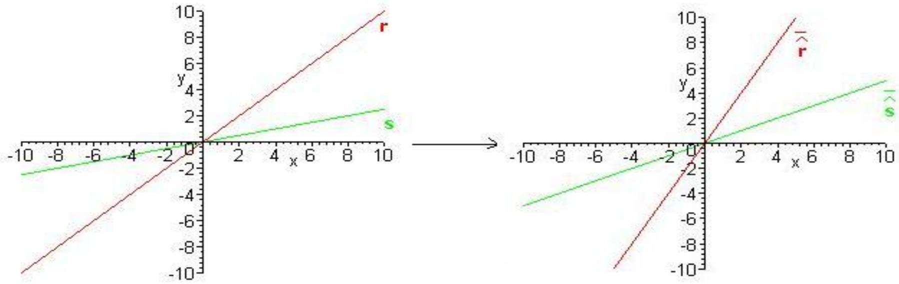

Figura 2.12: Construcción de isorrectas. $\lhd$

Ejemplo 2.3.14. *Consideramos $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, donde se han usado los elementos de isotopía* $* \equiv *_1 \equiv *_2 \equiv \times$, $\widehat{+} \equiv +$, $\widehat{I} = 1$, $\widehat{I}'_1 = \widehat{I}'_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ si \ x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, \ si \ x \neq 0 \end{array} \right\}$ *e* $\widehat{I}'_2 = \widehat{I}'_1(y) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ si \ y = 0 \\ \frac{1}{y^4}, \ si \ y \neq 0 \end{array} \right\}$. *Obtenemos de esta forma los levantamientos isotópicos:*

$$x \rightarrow \overline{\mathbf{I_1}(x)} = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si \ x = 0 \\ \frac{1}{x}, \ si \ x \neq 0 \end{array} \right\}; \qquad y \rightarrow \overline{\mathbf{I_2}(y)} = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si \ y = 0 \\ \frac{1}{y^3}, \ si \ y \neq 0 \end{array} \right\}.$$

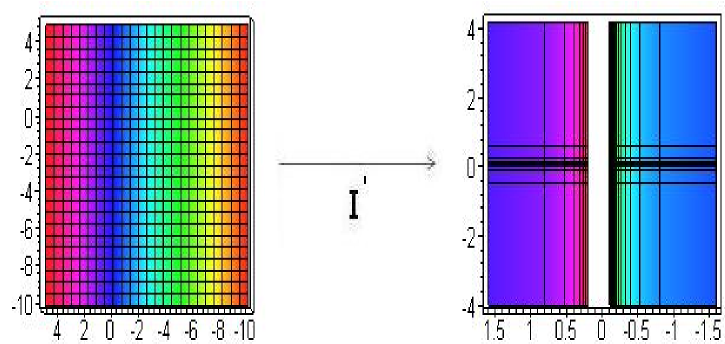

Figura 2.13: $\pi \circ \widehat{\mathbf{I}'}(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y^3}))$.

Sea ahora la recta $r \equiv y = 2 \times x$ *en* π_{xy}. *Resulta entonces que* $\widehat{r} \equiv \{((\widehat{x})_1, \mathbf{I_2}(2 \times x)) : x \in \mathbb{R}\}$ *en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, *con lo cual, en* $\overline{\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}}$, $\overline{\widehat{r}} \equiv \{(\frac{1}{x}, \frac{1}{8 \times x^3}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0)\} \equiv \{y = \frac{x^3}{8}\}$.

Por otro lado cualquier recta en el nivel de proyección deberá relacionar las variables $\overline{(\widehat{x})_1} = \frac{1}{x}$ *e* $\overline{(\widehat{y})_2} = \frac{1}{y^3}$, *lo cual hace imposible la existencia de una recta en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *cuya proyección relacione las variables* y *y* x^3.

En definitiva, $\overline{\widehat{r}}$ no es la expresión de una recta en $\pi_{\widehat{\widehat{x}\widehat{y}}}$, si bien sí es una isorrecta en $\pi_{\widehat{\widehat{x}\widehat{y}}}$, al ser proyección isotópica de la recta r en π_{xy}.

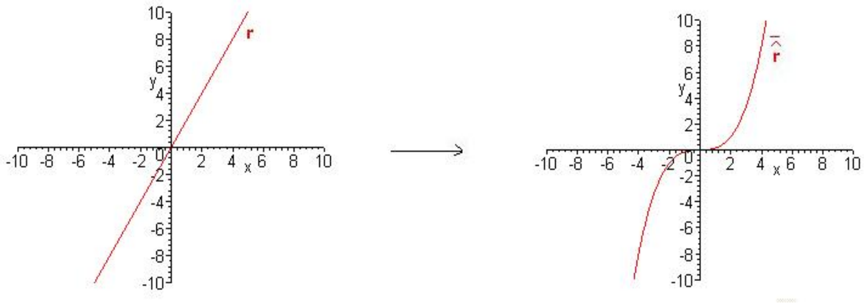

Figura 2.14: Isorrecta que no es recta en $\pi_{\widehat{\widehat{x}\widehat{y}}}$.

$\triangleleft$

Analicemos a continuación el concepto de isovector director de una recta isotópica. Para ello, trabajaremos en el nivel isotópico, siendo equivalente el desarrollo teórico en el nivel de proyección. El objetivo del presente estudio es comprobar que el MCIM generaliza coherentemente los resultados referentes al modelo isotópico propuesto por Santilli en [34], obteniendose éstos como casos particulares.

Fijemos en nuestro estudio por tanto una recta en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$:

$$r \equiv ((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1) \widehat{+} ((\widehat{b})_2 \widehat{\times}_2 (\widehat{y})_2) \widehat{+} \widehat{c} = \widehat{S}.$$

Si $b \neq S$, el isovector director de r será $\widehat{\overrightarrow{u_0}} = (\widehat{I}'_1, (\widehat{\alpha})_2)$, donde α denotará de ahora en adelante el valor:

$$\alpha = -b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I}'_1) *_2 T'_2] \in \mathbb{R}.$$

Observemos que α puede ser cualquier número real, pues fijado $\gamma \in \mathbb{R}$, basta tomar r tal que $b = I_2 \neq S$ y $a = [(-\gamma) *_2 \widehat{I}'_2] *_1 T'_1$.

Comprobemos seguidamente el valor que hemos dado a α. Para ello, fijado un isopunto $((\widehat{x_0})_1, (\widehat{y_0})_2) \in r$, buscamos un isovector de afijo $((\widehat{u_1})_1, (\widehat{u_2})_2)$, tal que $((\widehat{x_0})_1 \widehat{+} (\widehat{u_1})_1, ((\widehat{y_0})_2 \widehat{+} (\widehat{u_1})_1) \in r$:

$$((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 ((\widehat{x_0})_1 \widehat{+} \widehat{I}'_1) \widehat{+} ((\widehat{b})_2 \widehat{\times}_2 ((\widehat{y_0})_2 \widehat{+} (\widehat{\alpha})_2)) \widehat{+} \widehat{c} =$$

$$= \widehat{S} \widehat{+} \left((\widehat{a})_1 \widehat{+} \mathbf{I_2} \left(b *_2 (-b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I}'_1) *_2 T'_2]) \right) \right) =$$

$$= (\widehat{a})_1 \widehat{+} \mathbf{I_2} \left(-[(a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2] \right) = (\widehat{a})_1 - \mathbf{I_2} \left((a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2 \right) =$$

$$= (\widehat{a})_1 - \mathbf{I_1}(a) = (\widehat{a})_1 - (\widehat{a})_1 = \widehat{S}.$$

Debe verificarse entonces que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifique que el isopunto $((\widehat{x_0})_1 \widehat{+} (\widehat{\lambda}) \widehat{\times} \widehat{I'_1}, ((\widehat{y_0})_2 \widehat{+} (\widehat{\lambda}) \widehat{\times} (\widehat{\alpha})_2)$ pertenezca a la recta analizada. Sin embargo, esto no se cumple en general, pues:

$$(\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 ((\widehat{x_0})_1 \widehat{+} (\widehat{\lambda}) \widehat{\times} \widehat{I'_1} \widehat{+} ((\widehat{b})_2 \widehat{\times}_2 ((\widehat{y_0})_2) \widehat{+} (\widehat{\lambda}) \widehat{\times} (\widehat{\alpha})_2)) \widehat{+} \widehat{c} =$$

$$= \mathbf{I_1}(a *_1 \left([(\lambda * [\widehat{I'_1} * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1 \right)) \widehat{+} \mathbf{I_2}(b *_2 \left([(\lambda * [(\alpha *_2 \widehat{I'_2}) * T]) * \widehat{I}] *_2 T'_2 \right)) = \widehat{\beta},$$

para un cierto $\beta \in \mathbb{R}$.

Dado que nos interesa que $\widehat{\beta} = \widehat{S}$ debe cumplirse que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifique:

$$\mathbf{I_1}(a *_1 \left([(\lambda * [\widehat{I'_1} * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1 \right)) = -\mathbf{I_2}(b *_2 \left([(\lambda * [(\alpha *_2 \widehat{I'_2}) * T]) * \widehat{I}] *_2 T'_2 \right)).$$

Por otra parte debemos tratar el caso de una recta de la forma $((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1) \widehat{+} \widehat{c} = \widehat{S}$. En este caso se observa que el isovector de afijo $(\widehat{S}, \widehat{I'_2})$ verifica que, fijado $\lambda \in \mathbb{R}$ y un isopunto $((\widehat{x_0})_1, (\widehat{y_0})_2)$ de la recta en cuestión:

$$((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 ((\widehat{x_0})_1 \widehat{+} (\widehat{\lambda}) \widehat{\times} \widehat{S}) \widehat{+} \widehat{c} = ((\widehat{a})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x_0})_1) \widehat{+} \widehat{c} \widehat{+} \widehat{S} = \widehat{S}.$$

En definitiva, podemos dar la siguiente:

Definición 2.3.15. *Si la isotopía verifica que para todos $m, n \in \mathbb{R}$ y para todo $p \in \mathbb{R} - \{S\}$, se satisface:*

$$(\mathbf{1}) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I_1} \left(m *_1 ([(n * [\widehat{I'_1} * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1) \right) = \\ = -\mathbf{I_2} \left(p *_2 ([(n * [((-p^{-I'_2} *_2 [(m *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]) *_2 \widehat{I'_2}) * T]) * \widehat{I}] *_2 T'_2) \right) \end{array} \right\},$$

entonces, un isovector $\widehat{\overrightarrow{u}} \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ se dice isovector director *de la recta r si tiene la misma dirección que:*

a) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{I'_1}, (\widehat{\alpha})_2)$, si $b \neq S$.

b) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{S}, \widehat{I'_2})$, si $b = S$.

A $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ *lo llamaremos* isovector director principal *de dicha isorrecta.*

Observemos que en caso de que $*$ sea asociativa en el espacio vectorial V_T, incluido en el conjunto general V, generado por $\mathbb{R}$, $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ y T, fijados $m, n \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R} - \{S\}$, la ecuación (1) pasa a a ser de la forma:

$$\mathbf{I_1}\left(m *_1 ([n * \widehat{I'_1}] *_1 T'_1)\right) = -\mathbf{I_2}\left(p *_2 ([(n * (-p^{-I'_2} *_2 [(m *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]) *_2 \widehat{I'_2})] *_2 T'_2)\right).$$

Imponiendo además que la operación $*_2$ sea asociativa no sólo en $\mathbb{R}$ sino en el espacio vectorial $V_{T'_2}$ generado por $\mathbb{R}$, $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ y T'_2, haciendo uso de la operación $*_2$:

$$\mathbf{I_1}\left(m *_1 ([n * \widehat{I'_1}] *_1 T'_1)\right) = -\mathbf{I_2}\left(p *_2 ([n * (-p^{-I'_2} *_2 (m *_1 \widehat{I'_1}))] *_2 T'_2)\right) \equiv$$

$$\equiv (\mathbf{2}) \left\{m *_1 [n * \widehat{I'_1}] = -p *_2 [n * (-p^{-I'_2} *_2 (m *_1 \widehat{I'_1}))]\right\}.$$

Obtenemos de esta forma los siguientes resultados:

Proposición 2.3.16. *Si la isotopía utilizada para construir* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$*, verifica que:*

a) Las operaciones $*$ *y* $*_2$ *son asociativas en* V_T *y* $V_{T'_2}$*, respectivamente.*

b) Para todos $m, n \in \mathbb{R}$ *y para todo* $p \in \mathbb{R} - \{S\}$*, se satisface la ecuación (2),*

entonces, toda recta en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *está asociada a un isovector director principal.* □

Corolario 2.3.17. *Bajo las condiciones del Corolario 2.3.5, toda recta en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *está asociada a un isovector director principal.*

Demostración.

Basta tener en cuenta que $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = V_T = V_{T'_2} = \mathbb{R}$ y de esta forma se obtiene que, para todos $m, n \in \mathbb{R}$ y para todo $p \in \mathbb{R} - \{S\}$:

$$m *_1 [n * \widehat{I'_1}] = -p *_2 [n * (-p^{-I'_2} *_2 (m *_1 \widehat{I'_1}))] \equiv$$

$$\equiv m \times [n \times \widehat{I'_1}] = -p \times [n \times (-p^{-1} \times (m \times \widehat{I'_1}))] = (p \times p^{-1}) \times (m \times [n \times \widehat{I'_1}]) \equiv$$

$$\equiv m \times [n \times \widehat{I'_1}] = m \times [n \times \widehat{I'_1}].$$

□

Veamos algunoa ejemplos de todo lo anterior:

Ejemplo 2.3.18. *El Ejemplo 2.3.13 verifica las condiciones del Corolario 2.3.17 y podemos calcular los isovectores directores principales de las rectas $\widehat{r}$ y $\widehat{s}$. En particular, utilizando la Definición 2.3.15 llegamos a que el isovector director principal de $\widehat{r} \equiv (\widehat{2})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1 - (\widehat{y})_2 = \widehat{S}$ tiene afijo $((\widehat{1})_1, (\widehat{1})_2)$, teniendo en cuenta que en este caso, $\alpha = -(-1)^{-1} \times [(2 \times 1) \times \frac{1}{2}]$.*

Por otro lado, el isovector director principal de $\widehat{s} \equiv (\widehat{x})_1 - (\widehat{y})_2 = \widehat{S} \equiv \widehat{I'_1} \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1 - \widehat{I'_2} \widehat{\times}_2 (\widehat{y})_2 = \widehat{S} \equiv (\widehat{1})_1 \widehat{\times}_1 (\widehat{x})_1 + (\widehat{-1})_2 \widehat{\times}_2 (\widehat{y})_2 = \widehat{S}$ tiene afijo $((\widehat{1})_1, (\widehat{\frac{1}{2}})_2)$, teniendo en cuenta que en este caso, $\alpha = -(-1)^{-1} \times [(1 \times 1) \times \frac{1}{2}]$. $\triangleleft$

Ejemplo 2.3.19. *En caso de que $\pi_{\widehat{\widehat{xy}}}$ hubiese sido construido usando los elementos de isotopía $\equiv *_1 \equiv *_2 \equiv \times$, $\widehat{+} \equiv +$, $\widehat{I} = 1$, $\widehat{I'_1} = \widehat{I'_1}(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right\}$ e $\widehat{I'_2} = 1$ se obtiene el levantamiento $x \to \overline{\widehat{x}} = \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right\}$.*

Este levantamiento isotópico no satisface las hipótesis del Corolario 2.3.17. De hecho, podemos comprobar que tal levantamiento no verifica la condición necesaria para poder definir el isovector director principal de una recta en el nivel isotópico, pues para $m = n = p = 2$:

$$\mathbf{I_1}\left(2 \times ([(2 \times [1 \times 1]) \times 1] \times \frac{1}{4})\right) = \mathbf{I_1}(1) \neq \mathbf{I_2}(16) =$$

$$= -\mathbf{I_2}\left(2 \times ([(2 \times [((-\frac{1}{2} \times [(2 \times \frac{1}{4}) \times 1]) \times 16) \times 1]) \times 1] \times 1)\right),$$

ya que al obtener sus proyecciones respectivas, se tiene que:

$$\overline{\mathbf{I_1}(1)} = 1 \neq 16 = \overline{\mathbf{I_2}(16)}.$$

$\triangleleft$

Por otra parte, el isovector director principal de una recta en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ debería ser único. Es decir, fijado un isovector $\widehat{\overrightarrow{v}} = ((\widehat{v_1})_1, (\widehat{v_2})_2)$, tal que para todos $\widehat{A} \in r$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ se verifique que $\widehat{A} \widehat{+} \widehat{\gamma} \widehat{\bullet} \widehat{\overrightarrow{v}} \in r$, debería cumplirse que $\widehat{\overrightarrow{v}}$ tenga la misma dirección que:

a) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{I'_1}, (\widehat{\alpha})_2)$, si $b \neq S$.

b) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{S},\widehat{I'_2})$, si $b=S$.

En el caso en que $v_1=S$, resulta que para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\widehat{a_1})_1\widehat{+}\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{S}=(\widehat{a_1})_1$, con lo cual la recta r sería $(\widehat{x})_1=(\widehat{a_1})_1$. En particular, $b=S$ y, tomando $\lambda=[(v_2 *_2 \widehat{I'_2}) * T] * (\widehat{I'_2} * T)^{-I}$, se tiene que $\widehat{\overrightarrow{v}}=\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{\overrightarrow{u_0}}$, donde $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ tiene afijo $(\widehat{S},\widehat{I'_2})$. Esto es, $\widehat{\overrightarrow{v}}$ tiene la misma dirección que el isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$.

Por otra parte, en caso de que $v_1\neq S$, debemos buscar $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\widehat{\overrightarrow{v}}=\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{\overrightarrow{u_0}}$, con $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{I'_1},(\widehat{\alpha})_2)$, donde $\alpha=-b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]$. En particular debe ser $v_1 *_1 \widehat{I'_1}=[\lambda * (\widehat{I'_1} * T)] * \widehat{I}$. Luego, debemos tomar $\lambda=[(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T] * (\widehat{I'_1} * T)^{-I}$.

Con lo cual, dado que debe ser $v_2 *_2 \widehat{I'_2}=[\lambda * ([\alpha *_2 \widehat{I'_2}] * T)] * \widehat{I}$, se llega a que:

$$v_2 *_2 \widehat{I'_2}=$$

$$=\left[\left([(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T] * (\widehat{I'_1} * T)^{-I}\right) * \left(\left[\left(-b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]\right) *_2 \widehat{I'_2}\right] * T\right)\right] * \widehat{I} \equiv$$

$$[v_2 *_2 \widehat{I'_2}] * T =$$

$$=\left([(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T] * (\widehat{I'_1} * T)^{-I}\right) * \left(\left[\left(-b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]\right) *_2 \widehat{I'_2}\right] * T\right).$$

Para ver que esta igualdad se cumple, debemos utilizar la expresión que resulta al imponer que para todos $\widehat{A}\in r$ y $\gamma\in\mathbb{R}$ se verifique que $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{\gamma}\widehat{\bullet}\widehat{\overrightarrow{v}}\in r$. En particular, el isovector $\widehat{\overrightarrow{v}}$ debe verificar, de forma análoga a la manera en que se obtuvo la expresión para el isovector director principal $(\widehat{I'_1},(\widehat{\alpha})_2)$, que para todo $\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\mathbf{I_1}(a *_1 \left([(\gamma * [(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1\right)) = -\mathbf{I_2}(b *_2 \left([(\gamma * [(v_2 *_2 \widehat{I'_2}) * T]) * \widehat{I}] *_2 T'_2\right)) \equiv$$

$$\left[-(a *_1 \left([(\gamma * [(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1\right)) *_1 \widehat{I'_1}\right] *_2 T'_2 =$$

$$= b *_2 \left([(\gamma * [(v_2 *_2 \widehat{I'_2}) * T]) * \widehat{I}] *_2 T'_2\right) \equiv$$

(en particular, para todo $\gamma\in\mathbb{R}-\{S\}$)

$$\equiv [v_2 *_2 \widehat{I'_2}] * T = \gamma^{-I} *$$

$$* \left[\left(\left[b^{-I'_2} *_2 \left(\left[-(a *_1 \left([(\gamma * [(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T]) * \widehat{I}] *_1 T'_1\right)) *_1 \widehat{I'_1}\right] *_2 T'_2\right)\right] *_2 \widehat{I'_2}\right) * T\right].$$

Con lo cual, el resultado se tendrá si encontramos $\gamma\in\mathbb{R}-\{S\}$ tal que se verifique la siguiente ecuación, a la que denotaremos por **(3)**:

$$\left([(v_1 *_1 \widehat{I'_1}) * T] * (\widehat{I'_1} * T)^{-I}\right) * \left(\left[\left(-b^{-I'_2} *_2 [(a *_1 \widehat{I'_1}) *_2 T'_2]\right) *_2 \widehat{I'_2}\right] * T\right) = \gamma^{-I} *$$

$$* \left[\left(\left[b^{-I_2'} *_2 \left(\left[-(a *_1 \left([(\gamma * [(v_1 *_1 \widehat{I}_1') * T]) * \widehat{I}] *_1 T_1' \right)) *_1 \widehat{I}_1' \right] *_2 T_2' \right) \right] *_2 \widehat{I}_2' \right) * T \right].$$

Así pues se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3.20. *Si la isotopía utilizada en la construcción de $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ es tal que para todos $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{S\}$, existe $\gamma \in \mathbb{R} - \{S\}$ que verifique la ecuación (3), entonces, en el caso de que existiera un isovector $\widehat{\overrightarrow{v}} = ((\widehat{v_1})_1, (\widehat{v_2})_2)$, tal que para todos $\widehat{A} \in r$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ se verificase que $\widehat{A} \widehat{+} \widehat{\gamma} \widehat{\bullet} \widehat{\overrightarrow{v}} \in r$, debe cumplirse que $\widehat{\overrightarrow{v}}$ tiene la misma dirección que:*

a) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{I}_1', (\widehat{\alpha})_2)$, si $b \neq S$.

b) El isovector $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$ de afijo $(\widehat{S}, \widehat{I}_2')$, si $b = S$.

En definitiva, la recta está asociada a un único isovector director principal $\widehat{\overrightarrow{u_0}}$.

□

En particular, si imponemos que la operación $*$ sea asociativa en V_T, la ecuación (3) es equivalente a la siguiente:

$$\left([(v_1 *_1 \widehat{I}_1') * T] * (\widehat{I}_1' * T)^{-I} \right) * \left(\left[\left(-b^{-I_2'} *_2 [(a *_1 \widehat{I}_1') *_2 T_2'] \right) *_2 \widehat{I}_2' \right] * T \right) =$$

$$= \gamma^{-I} * \left[\left(\left[b^{-I_2'} *_2 \left(\left[-(a *_1 \left([\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I}_1')] *_1 T_1' \right)) *_1 \widehat{I}_1' \right] *_2 T_2' \right) \right] *_2 \widehat{I}_2' \right) * T \right].$$

Imponiendo también que la operación $*_1$ sea asociativa en el espacio vectorial $V_{T_1'}$ generado por $\mathbb{R}$, $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}}$ y T_1', haciendo uso de la operación $*_1$, la anterior expresión es equivalente a la siguiente:

$$\left([(v_1 *_1 \widehat{I}_1') * T] * (\widehat{I}_1' * T)^{-I} \right) * \left(\left[\left(-b^{-I_2'} *_2 [(a *_1 \widehat{I}_1') *_2 T_2'] \right) *_2 \widehat{I}_2' \right] * T \right) =$$

$$= \gamma^{-I} * \left[\left(\left[b^{-I_2'} *_2 \left(\left[-a *_1 [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I}_1')] \right] *_2 T_2' \right) \right] *_2 \widehat{I}_2' \right) * T \right].$$

A continuación imponemos que la operación $*_2$ sea asociativa en $V_{T_2'}$, obteniendo que la expresión anterior es equivalente a:

$$\left([(v_1 *_1 \widehat{I}_1') * T] * (\widehat{I}_1' * T)^{-I} \right) * \left(\left[-b^{-I_2'} *_2 (a *_1 \widehat{I}_1') \right] * T \right) =$$

$$= \gamma^{-I} * \left[\left(b^{-I_2'} *_2 \left[-a *_1 [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I_1'})] \right] \right) * T \right].$$

Usando de nuevo la asociatividad de $*$ en V_T resulta que buscamos la igualdad:

$$\left([(v_1 *_1 \widehat{I_1'}) * T] * (\widehat{I_1'} * T)^{-I} \right) * \left[-b^{-I_2'} *_2 (a *_1 \widehat{I_1'}) \right] =$$

$$= \gamma^{-I} * \left(b^{-I_2'} *_2 \left[-a *_1 [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I_1'})] \right] \right) \equiv$$

$$\equiv [(v_1 *_1 \widehat{I_1'}) * T] * \left[-b^{-I_2'} *_2 (a *_1 \widehat{I_1'}) \right] = (\widehat{I_1'} * T) * \gamma^{-I} * \left(b^{-I_2'} *_2 \left[-a *_1 [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I_1'})] \right] \right).$$

Imponemos ahora además la conmutatividad de $*$ en V_T, lo cual, unido a la asociatividad de $*$ en dicho conjunto, da lugar a que la ecuación anterior sea equivalente a la siguiente:

$$\textbf{(4)} \left\{ [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I_1'})] * \left[-b^{-I_2'} *_2 (a *_1 \widehat{I_1'}) \right] = \left(b^{-I_2'} *_2 \left[-a *_1 [\gamma * (v_1 *_1 \widehat{I_1'})] \right] \right) * \widehat{I_1'} \right\}.$$

En definitiva llegamos a los siguientes resultados:

Corolario 2.3.21. *Si la construcción de $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ se hace uso de un levantamiento isotópico para el cual:*

a) $*, *_1$ y $*_2$ son asociativas en $V_T, V_{T_1'}$ y $V_{T_2'}$, respectivamente.

b) $*$ es conmutativa en V_T.

c) Para todos $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{S\}$, existe $\gamma \in \mathbb{R} - \{S\}$ tal que se verifica la ecuación (4).

entonces se satisface la tesis de la Proposición 2.3.20. □

Corolario 2.3.22. *En las condiciones del Corolario 2.3.5 se satisface la tesis de la Proposición 2.3.20.*

Demostración.

El resultado es evidente haciendo uso del Corolario 2.3.21 y teniendo en cuenta que, bajo las hipótesis impuestas, $* \equiv *_1 \equiv *_2 \equiv \times$ y $V_T = V_{T_1'} = V_{T_2'} = \mathbb{R}$. □

Todo lo anterior nos permite dar a continuación las nociones de isoperpendicularidad e isoparalelismo entre rectas de $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$:

Definición 2.3.23. *En las condiciones de la Definición 2.3.15, dos rectas en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *se dirán* (iso)perpendiculares *si lo son sus isovectores directores principales respectivos. Se dirán* paralelas *si sus isovectores directores principales tienen la misma dirección.*

Ejemplo 2.3.24. *En las condiciones del Ejemplo 2.3.6 y siguiendo las notaciones allí utilizadas, se tiene que las rectas* $\widehat{r_1} \equiv (\widehat{x})_1 = \widehat{S} = \widehat{0}$ *y* $\widehat{r_2} \equiv (\widehat{y})_2 = \widehat{0}$ *son (iso)perpendiculares, pues tienen como isovectores directores principales a* $\widehat{\overrightarrow{u}}$ *y a* $\widehat{\overrightarrow{v}}$*, que son (iso)perpendiculares entre sí. En cambio las rectas* $\widehat{s_1} \equiv (\widehat{3})_1 \times_1 (\widehat{x})_1 - (\widehat{2})_2 \times_2 (\widehat{y})_2 = \widehat{0}$ *y* $\widehat{s_2} \equiv (\widehat{3})_1 \times_1 (\widehat{x})_1 \widehat{+} (\widehat{2})_2 \times_2 (\widehat{y})_2 = \widehat{0}$ *son perpendiculares, pero no son isoperpendiculares, al tener esta misma relación sus respectivos isovectores directores principales,* $\widehat{\overrightarrow{a}}$ *y* $\widehat{\overrightarrow{b}}$*. Por último, indicar por ejemplo que la recta* $\widehat{r_1}$ *es paralela a todas las rectas de la forma* $(\widehat{x})_1 = \widehat{a}$*, con* $a \in \mathbb{R}$*.* $\triangleleft$

Por construcción llegamos entonces de forma inmediata al siguiente resultado:

Corolario 2.3.25. *En el caso de que un par de rectas de* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *sean a su vez isorrectas de* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$*, se verifica que:*

a) En las condiciones del Corolario 2.3.17, las isorrectas anteriores son perpendiculares en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *si y sólo si son perpendiculares en* π_{xy} *las rectas de las que se levantan isotópicamente.*

b) En las condiciones de la Definición 2.3.15, si además se tiene que, con las notaciones usuales, $\square \equiv \bullet$*, entoces, las isorrectas anteriores son isoparalelas en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *si y sólo si son paralelas en* π_{xy} *las rectas de las que se levantan isotópicamente.*

$\square$

Todos los conceptos y resultados sobre rectas e isorrectas en el nivel isotópico, tienen sus equivalentes en el nivel de proyección. Veamos un ejemplo en dicho nivel:

Ejemplo 2.3.26. *En las condiciones del Ejemplo 2.3.24, se tiene que las rectas* $\overline{\widehat{r_1}} \equiv x = 0$ *y* $\overline{\widehat{r_2}} \equiv y = 0$ *son (iso)perpendiculares, pues tienen como isovectores directores principales a* $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}$ *y a* $\overline{\widehat{\overrightarrow{v}}}$*, que son (iso)perpendiculares entre sí. En cambio las rectas* $\overline{\widehat{s_1}} \equiv \frac{3}{2} \times x - \frac{2}{3} \times y = 0$ *y* $\overline{\widehat{s_2}} \equiv \frac{3}{2} \times x + \frac{2}{3} \times y = 0$ *son perpendiculares, pero* *no son isoperpendiculares, al tener esta misma relación sus respectivos isovectores directores principales, $\overline{\widehat{\overrightarrow{a}}}$ y $\overline{\widehat{\overrightarrow{b}}}$. Por último, indicar por ejemplo que la recta $\overline{\widehat{r_1}}$ es paralela a todas las rectas de la forma $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$.*

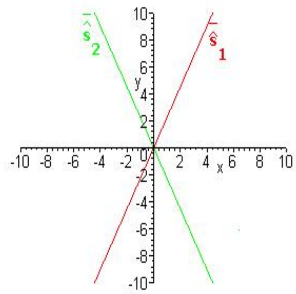

Figura 2.15: Par de rectas perpendiculares en $\pi_{\overline{\widehat{xy}}}$ que no son isoperpendiculares.

Por otra parte, en las condiciones del Ejemplo 2.3.18 y teniendo en cuenta los resultados allí obtenidos, la proyección de la recta $\widehat{r}$ en $\pi_{\overline{\widehat{xy}}}$ (esto es, $\overline{\widehat{r}} \equiv y = 2 \times x$) tiene como isovector director principal a aquél de afijo $(1, 4)$, mientras que el isovector director principal de $\overline{\widehat{s}} \equiv x = 2 \times y$ tiene por afijo a $(1, 1)$. Indiquemos también que tanto $\overline{\widehat{r}}$ como $\overline{\widehat{s}}$ son isorrectas, al ser proyecciones de levantados isotópicos de las rectas r y s dadas en el Ejemplo 2.3.13.

Finalmente, cabe señalar también que, al igual que ocurría en el nivel isotópico, en las condiciones del Ejemplo 2.3.14 no podemos definir el isovector director principal de una recta en el nivel de proyección, al no cumplirse la condición necesaria para ello, tal y como vimos en el Ejemplo 2.3.18. Comentar además que, siguiendo las notaciones del Ejemplo 2.3.14, $\overline{\widehat{r}} \equiv \left\{y = \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}\right\} \cup \{(0, 0)\}$ no es una recta en $\pi_{\overline{\widehat{xy}}}$, si bien podemos afirmar que sí es una isorrecta, al ser levantado isotópico de la recta r en π_{xy}. $\triangleleft$

Un último concepto a tratar en esta sección es el siguiente:

Definición 2.3.27. *Se llamará* isocircunferencia $\widehat{S^1}$ *en $\pi_{\widehat{xy}}$ al levantado isotópico punto a punto de la circunferencia S^1 en el nivel convencional. Esto es,*

$$\widehat{S^1} = \mathbf{I}\left(\{x \in \pi_{xy} : |x| = 1\}\right) = \mathbf{I}\left(\left\{x = (x_1, x_2) \in \pi_{xy} : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}\right).$$

Se llamará isocircunferencia general $\widehat{S^1_*}$ *en $\pi_{\widehat{xy}}$ al levantado isotópico punto a punto de la circunferencia S^1 de radio unidad en el nivel general. Esto es, con las* *notaciones usuales,*

$$\widehat{S^1_*} = \mathbf{I}\left(\left\{x = (x_1, x_2) \in \pi_{xy} : x_1 *_1 \delta'_1 *_1 x_1 \star x_2 *_2 \delta'_2 *_2 x_2 = I\right\}\right) = \left\{\widehat{x} \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : \widehat{|\widehat{x}|} = \widehat{I}\right\}.$$

Por último, se llamará circunferencia *en* $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ *al conjunto de puntos*

$$S^1_{\widehat{\times}} = \left\{\widehat{x} \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : |\widehat{x}| = \widehat{I}\right\}.$$

Análogamente se tienen los correspondientes conceptos en el nivel de proyección.

Ejemplo 2.3.28. *En las condiciones del Ejemplo 2.3.3 se tiene que:*

$$\widehat{S^1} = \mathbf{I}\left(\left\{X = (x_1, x_2) \in \pi_{xy} : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}\right) = \left\{\widehat{x} = ((\widehat{a})_1, \mathbf{I_2}((1 - a^2)^{1/2})) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}}\right\}.$$

$$\overline{\widehat{S^1}} = \left\{\overline{\widehat{A}} = (2a, 3(1 - a^2)^{1/2}) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}\right\}.$$

$$\widehat{S^1_*} = \mathbf{I}\left(\left\{X = (x_1, x_2) \in \pi_{xy} : 2 \times x_1^2 + 3 \times x_2^2 = 1\right\}\right) =$$

$$= \left\{\widehat{A} = ((\widehat{a})_1, \mathbf{I_2}((\frac{1 - 2 \times a^2}{3})^{1/2})) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}}\right\}.$$

$$\overline{\widehat{S^1_*}} = \left\{\overline{\widehat{A}} = (2a, \sqrt{3}(1 - 2 \times a^2)^{1/2}) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}\right\}.$$

$$S^1_{\widehat{\times}} = \left\{\widehat{X} = ((\widehat{x_1})_1, (\widehat{x_2})_2) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : (\widehat{x_1^2})_1 + (\widehat{x_2^2})_2 = \widehat{1}\right\} =$$

$$= \left\{\widehat{X} = (\widehat{x_1})_1, (\widehat{x_2})_2) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}} : 2x_1^2 + 3x_2^2 = 25\right\} = \left\{\widehat{A} = ((\widehat{a})_1, \mathbf{I_2}((\frac{25 - 2a^2}{3})^{1/2})) \in \pi_{\widehat{x}\widehat{y}}\right\}.$$

$$S^1_{\overline{\widehat{\times}}} = \left\{\overline{\widehat{A}} = (2a, \sqrt{3}(25 - 2a^2)^{1/2}) \in \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}\right\}.$$

Cabe observar que los conjuntos de puntos que se han obtenido en el nivel de proyección pueden identificarse con elipses convencionales. Así $\overline{\widehat{S^1}}$ *puede identificarse con una elipse de semiejes 2 y 3,* $\overline{\widehat{S^1_*}}$ *puede identificarse con una elipse de semiejes* $\sqrt{2}$ *y* $\sqrt{3}$ *y finalmente,* $S^1_{\overline{\widehat{\times}}}$ *puede identificarse con una elipse de semiejes* $5\sqrt{2}$ *y* $5\sqrt{3}$.

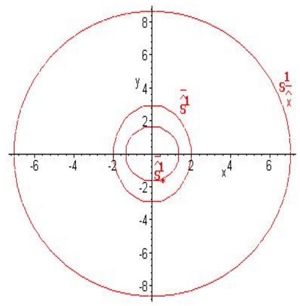

Figura 2.16: Circunferencias isotópicas.

$\triangleleft$

Ejemplo 2.3.29. *Bajo las condiciones del Ejemplo 2.3.14, se obtiene que:*

$$\widehat{S^1} = \left\{\widehat{x} = ((\widehat{a})_1, \mathbf{I_2}((1-a^2)^{1/2})) \in \pi_{\widehat{xy}}\right\}.$$

$$\overline{\widehat{S^1}} = \left\{\overline{\widehat{A}} = (\frac{1}{a}, (1-a^2)^{-3/2}) \in \pi_{\overline{\widehat{xy}}} : a \notin \{-1,0,1\}\right\} \cup \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}.$$

$$\widehat{S^1_*} = \mathbf{I}\left(\left\{X = (x_1,x_2) \in \pi_{xy} : 1 + \frac{1}{x_2^2} = 1\right\}\right) = \emptyset = \overline{\widehat{S^1_*}}.$$

$$S^1_{\widehat{\times}} = \left\{\widehat{X} = (\widehat{x_1})_1, (\widehat{x_2})_2) \in \pi_{\widehat{xy}} : \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2^3} = 1, x_1 \neq 0 \neq x_2\right\} \cup \{((\widehat{0})_1, (\widehat{1})_2), ((\widehat{1})_1, (\widehat{0})_2)\} =$$

$$= \left\{((\widehat{a})_1, \mathbf{I_2}((\frac{a}{a-1})^{1/3})) \in \pi_{\widehat{xy}} : 0 \neq a \neq 1\right\} \cup \{((\widehat{0})_1, (\widehat{1})_2), ((\widehat{1})_1, (\widehat{0})_2)\}.$$

$$S^1_{\overline{\widehat{\times}}} = \left\{(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}) \in \pi_{\overline{\widehat{xy}}} : a \neq 0\right\} \cup \{(0,1),(1,0)\} \equiv y = 1 - x.$$

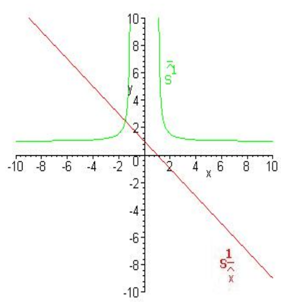

Figura 2.17: Circunferencias isotópicas.

$\triangleleft$

Capítulo 3

CÁLCULO ISODIFERENCIAL

Al utilizar el cálculo diferencial convencional en aplicaciones físicas de la isoteoría que hacen uso de isoespacios isométricos, se fue observando que dicho cálculo depende de la unidad básica I de una manera implícita y que tal dependencia es no trivial en el caso de isounidades, pues en general, $d\widehat{I}(x, dx, d^2x, t, T, ...) \neq 0$.

En 1996, Santilli [43] publica por primera vez su estudio sobre cálculo isodiferencial, donde resuelve la serie de inconsistencias surgidas al tratar analíticamente diferentes isoespacios a partir del cálculo diferencial convencional. De esta forma, la presentación de su trabajo fue posterior al estudio sobre isovariedades isodiferenciables realizado por Tsagas y Sourlas en 1993 [50].

Con vistas por tanto a abordar el estudio del levantamiento isotópico de las variedades diferenciables mediante el cálculo isodiferencial sobre isoespacios isométricos, no realizado hasta la fecha, trataremos pues previamente en este Capítulo de analizar dicho cálculo desde el punto de vista del MCIM, haciendo uso de $*$-leyes genéricas. Se irá comprobando además que este último modelo generaliza coherentemente los resultados ya obtenidos en isoteoría.

Se estudiarán las nociones de isodiferenciales e isoderivadas de isofunciones. Se dará una importante cantidad de ejemplos al respecto y se desarrollarán algunos resultados genéricos sobre cálculo isodiferencial, que serán útiles posteriormente a la hora de abordar el estudio de isovariedades isodiferenciables.

3.1. Isodiferenciales de primer orden

Pasamos pues a analizar la solución que presenta Santilli para evitar las inconsistencias que provoca el uso del cálculo diferencial convencional en la isoteoría. Como habitualmente se presenta dicho cálculo, éste no parece depender de una unidad básica. Sin embargo, esto no es exacto, ya que el cálculo diferencial ha resultado depender esencialmente de dicha unidad básica y, más aún, para una consistencia axiomática, ésta debe coincidir con la unidad básica del espacio en el que estemos trabajando.

El nuevo cálculo propuesto por Santilli fue presentado por primera vez en el *International Workshop on Differential Geometry and Lie algebras*, organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Aristotle en Tesalónica (Grecia), en Diciembre de 1994. En 1996, aparecería por primera vez en la literatura en un suplemento al Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (véase [43]).

Santilli dio en este trabajo la definición de las isodiferenciales y las isoderivadas de una isofunción, situándose dentro de un espacio isoeuclídeo y distinguiendo entre isocoordenadas covariantes y contravariantes. Destacaba que la generalización que proponía del cálculo diferencial convencional se diferenciaba de otras ya existentes (como el cálculo exterior de Cartan) en el hecho de que se fundamentaba en la unidad subyacente al sistema. De hecho, tal unidad se generalizaba al definir el cálculo isodiferencial, lo cual no ocurría en ninguna otra generalización del cálculo convencional.

Pretendemos dar en esta sección unas nociones básicas del cálculo isodiferencial de Santilli, aunque generalizadas al caso del MCIM y haciendo distinción entre los niveles isotópico y de proyección, si bien analizaremos con mayor profundidad este último. Basaremos nuestro estudio en un espacio isoeuclídeo n-dimensional $\overline{\widehat{E}} = \overline{\widehat{E}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \delta', \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, levantado isotópico de clase III del espacio euclídeo convencional n-dimensional $E = E(\overrightarrow{x}, \delta, \mathbb{R})$, donde $\delta = diag_n(+1, ..., +1)$. Supondremos el caso general según el cual δ' podrá ser cualquier matriz simétrica, no necesariamente diagonalizable.

En primer lugar debemos tener establecido el isocuerpo base $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$. Supongamos por tanto que dicho isocuerpo se obtiene a partir de los elementos de isotopía $\star, \widehat{S}, *$ (de unidad I en el conjunto general correspondiente V) e $\widehat{I}$. Para evitar extender la Memoria, supondremos además que en el levantamiento isotópico de $\mathbb{R}^n$, únicamente se hace uso de las leyes $\star$ y $*$ en cada una de sus componentes.

Ya hemos hecho notar en el capítulo precedente la variación realizada en el estudio de una isométrica, respecto a la propuesta de Santilli en [35]. Este hecho va a influir también en el desarrollo teórico del cálculo isodiferencial. En concreto, mientras Santilli hace uso del producto usual entre matrices, nosotros utilizaremos el isoproducto $\overline{\widehat{\times}}$, asociado a la ley $*$.

Lo anterior se va a reflejar en la distinción que realiza Santilli en su estudio entre coordenadas e isocoordenadas covariantes ($\{x_1, ..., x_n\}$, $\{\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n\}$ y $\{\overline{\widehat{x}}_1, ..., \overline{\widehat{x}}_n\}$, respectivamente) y contravariantes ($\{x^1, ..., x^n\}$, $\{\widehat{x}^1, ..., \widehat{x}^n\}$ y $\{\overline{\widehat{x}}^1, ..., \overline{\widehat{x}}^n\}$, respectivamente).

Ambos tipos de isocoordenadas están relacionados a través de la expresión:

$$\overline{\widehat{x}}_k = \delta'_{kj}\ \overline{\widehat{x}}^j.$$

Ahora bien, Santilli considera el producto usual de matrices en el miembro de la derecha de la expresión anterior. Esto es, $\overline{\widehat{x}}_k = \delta'_{kj} \times \overline{\widehat{x}}^j$. Sin embargo, $\overline{\widehat{x}}_k$ y $\overline{\widehat{x}}^j$ son elementos de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ para todo $k, j \in \{1, ..., n\}$, con lo cual, desde el punto de vista más general del MCIM, el producto anterior no es siempre coherente.

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos la proyección isotópica* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = Im(\mathbb{C})$*, asociada a los elementos* $\star \equiv +, \widehat{S} = 0, * \equiv \cdot$ *(el producto entre complejos) e* $\widehat{I} = i$.

Supongamos a continuación que estamos trabajando en el plano euclídeo π_{xy} *y que estamos interesados en la isométrica:*

$$\delta' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Atendiendo a la construcción del capítulo precedente, encontraremos los elementos:

$$T' = -\delta' = -\widehat{I}'.$$

Obtenemos de esta forma el plano isoeuclídeo $Im(\mathbb{C}) \times Im(\mathbb{C})$*, a partir de la proyección isotópica:*

$$(a, b) \to (ai, bi).$$

Por otra parte, cabe indicar que la relación existente en este caso entre las isocoordenadas covariantes y contravariantes sería:

$$\widehat{\overline{\overline{x}}}_1 = i\ \widehat{\overline{\overline{x}}}^1, \qquad \widehat{\overline{\overline{x}}}_2 = i\ \widehat{\overline{\overline{x}}}^2.$$

Obsérvese que, si consideramos el producto $\cdot$ en las expresiones anteriores, obtendríamos que, o bien $\widehat{\overline{\overline{x}}}_k$, o bien $\widehat{\overline{\overline{x}}}^k$, no pertenecerían a $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}} = Im(\mathbb{C})$. $\triangleleft$

Para evitar esto, nuestra propuesta es tener en cuenta la construcción de la isométrica realizada en el capítulo precedente. En particular, si atendemos a la isométrica δ' buscada, se tendrá que la isounidad y el elemento isotópico utilizados serán, respectivamente:

$$\widehat{I'} = \delta' \cdot \delta^{-I} = \left(\widehat{I'}_i^j\right)_{i,j=1}^n; \quad T' = \widehat{I'}^{-I'} = \delta \cdot \delta'^{-I'} = \left(T'^j_i\right)_{i,j=1}^n.$$

La proyección isotópica de $\mathbb{R}^n$ asociada a la isounidad anterior, que generaliza la vista en el capítulo precedente y que sigue la propuesta de Santilli en [43], será entonces:

$$(\widehat{\overline{\overline{x}}}^1, ..., \widehat{\overline{\overline{x}}}^n) = (x^1, ..., x^n) \cdot \widehat{I'} = \left(\sum_{i=1}^n x^i * \widehat{I'}_i^1, ..., \sum_{i=1}^n x^i * \widehat{I'}_i^n\right),$$

donde, en este caso, $\cdot$ indica el producto entre matrices, atendiendo a la ley $*$ común a cada uno de los elementos que intervienen.

En particular, las isotopías de cada componente $\mathbb{R}_k \equiv \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, vendrán dadas como:

$$\pi \circ \mathbf{I'_k}(x^k) = \sum_{i=1}^n x^i * \widehat{I'}_i^k.$$

Podemos considerar entonces la relación entre isocoordenadas covariantes y contravariantes de la siguiente forma:

$$\left(\widehat{\overline{\overline{x}}}_1, ..., \widehat{\overline{\overline{x}}}_n\right) = \delta' \left(\widehat{\overline{\overline{x}}}^1, ..., \widehat{\overline{\overline{x}}}^n\right) = \left(\delta \cdot \widehat{I'}\right) \left((x^1, ..., x^n) \cdot \widehat{I'}\right).$$

Para lograr un elemento en $\widehat{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}^n$, tomemos entonces el isoproducto $\widehat{\bar{\cdot}} \equiv \cdot T' \cdot$, que tendrá a $\widehat{I'} = \delta'$ como unidad. Se obtiene así:

$$\left(\widehat{\overline{\overline{x}}}_1, ..., \widehat{\overline{\overline{x}}}_n\right) = \left(\delta \cdot (x^1, ..., x^n)\right) \cdot \widehat{I'} = \left(\sum_{i=1}^n \delta_1^i * x^i, ..., \sum_{i=1}^n \delta_n^i * x^i\right) \cdot \widehat{I'} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_j^i * x^i \right) * \widehat{I'}_j^1, ..., \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_j^i * x^i \right) * \widehat{I'}_j^n \right).$$

Esta construcción generaliza la que a su vez origina la definición del isoproducto isoescalar, visto en el capítulo precedente.

Obsérvese que en caso de ser $S = 0$ e $I = 1$, las isocoordenadas covariantes equivaldrán a las contravariantes. Esto ocurre en concreto en el Ejemplo 3.1.1.

No obstante, podemos obtener un caso más general en el que ambas isocoordenadas coincidan. Para ello, impondremos una condición más al conjunto general V. En concreto, basta tener en cuenta que, atendiendo al MCIM, en el conjunto general V, la estructura $(\mathbb{R}^n, \star, *)$ debe ser del mismo tipo que $(\mathbb{R}, +, \times)$, pudiendo en particular estar dotada de métrica. Imponiendo entonces que esta métrica sea δ, obtendremos que las coordenadas covariantes y contravariantes en el nivel convencional coinciden con las correspondientes en el nivel general. De hecho, fijado $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_j^i * x^i = x_j.$$

Dado que en el espacio euclídeo de partida, $x_k = x^k$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, se obtendrá entonces de la misma forma que, en el nivel de proyección, $\overline{\widehat{x}}_k = \overline{\widehat{x}}^k$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

Debido a esto, prescindiremos a partir de ahora de la distinción entre isocoordenadas covariantes y contravariantes, restringiendo por tanto nuestro estudio al levantamiento isotópico de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$(\overline{\widehat{x}}_1, ..., \overline{\widehat{x}}_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i * \widehat{I'}_i^1, ..., \sum_{i=1}^{n} x_i * \widehat{I'}_i^n \right).$$

Con todo lo anterior, podemos dar ya la siguiente:

Definición 3.1.2. *Para cada $k \in \{1, ..., n\}$, se definen las* isodiferenciales de primer orden sobre $\widehat{E}$ *y sobre* $\overline{\widehat{E}}$*, respectivamente, como:*

$$\widehat{d}\widehat{x}_k = (\widehat{dx_k})_k; \qquad \overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{x}}_k = \overline{\widehat{d}\widehat{x}_k} = \sum_{i=1}^{n} dx_i * \widehat{I'}_i^k.$$

En las expresiones de la definición anterior, dx_k denota la correspondiente diferencial de primer orden en el nivel convencional. Además, al hacer uso la definición anterior de la ley $*$, generalizamos la propuesta por Santilli en [43], en la que $* \equiv \times$. En este caso concreto, se cumple que $\widehat{I'} = \delta' = T^{-1}$.

Por otra parte, en el caso en que $* \equiv \times$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y $\delta' = \delta = diag_n(+1, ..., +1)$, se tendrá que, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $\widetilde{\widehat{d}\widehat{x_k}} = dx_k$, lo cual prueba que la construcción propuesta por Santilli y la que hemos indicado en la Definición 3.1.2 generalizan coherentemente el caso convencional.

Veamos a continuación algunos ejemplos de isodiferenciales de primer orden. En ellos aparecerán, respectivamente, una isométrica no diagonal, una diagonal y una dependiente del factor coordenada. Las construcciones realizadas serán utilizadas a su vez en ejemplos posteriores:

Ejemplo 3.1.3. *Sea $E_3(x, \delta, \mathbb{R})$ el espacio euclídeo tridimensional convencional, de métrica $\delta = diag(1, 1, 1)$. Supongamos que en la construcción del isocuerpo base $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ hemos utilizado, con las notaciones usuales, los elementos $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $* \equiv \times$ e $\widehat{I} = 5$.*

Consideremos a continuación el espacio isoeuclídeo $\overline{\widehat{E_3}}(\overline{\widehat{x}}, \delta', \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, donde:

$$\delta' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tendremos entonces, en particular, que $\widehat{I'} = \delta'$, siendo:

$$T' = \widehat{I'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

La proyección isotópica viene entonces dada como:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x^1 - 3x^2 + 2x^3, -3x^1 + 3x^2 - x^3, 2x^1 - x^2),$$

cuyo efecto en $\mathbb{R}^3$ podemos ver, por ejemplo, en la figura siguiente:

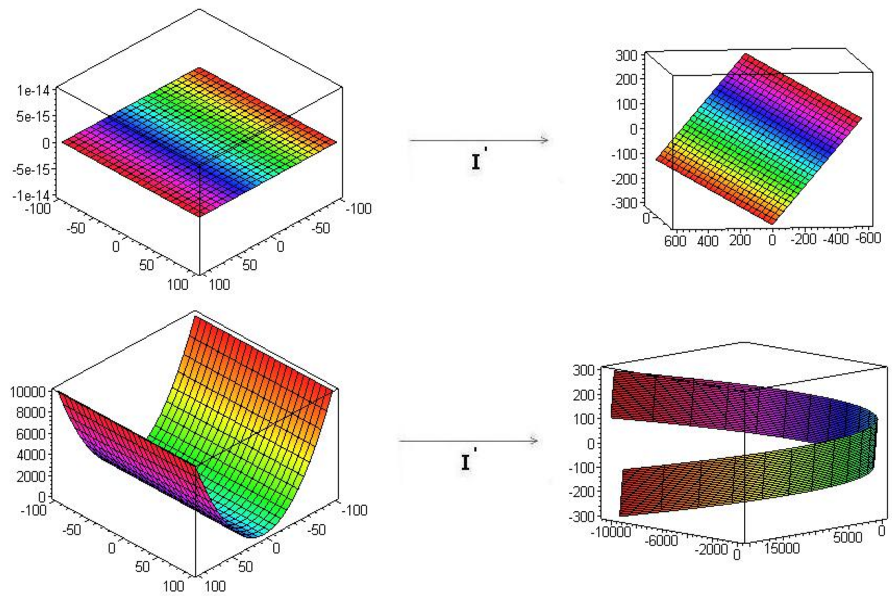

Figura 3.1: Proyecciones de las superficies $z = 0$ y $z = x^2$.

Las isodiferenciales de primer orden en el nivel de proyección serán en este caso:

$$\overline{\widehat{d}}\widehat{x}_1 = dx_1 - 3dx_2 + 2dx_3; \quad \overline{\widehat{d}}\widehat{x}_2 = -3dx_1 + 3dx_2 - dx_3; \quad \overline{\widehat{d}}\widehat{x}_3 = 2dx_1 - dx_2. \qquad \lhd$$

Ejemplo 3.1.4. *Utilizando los mismos elementos de isotopía que en el ejemplo anterior, consideremos en este caso el isoespacio $\overline{\widehat{E_3}}(\overline{\widehat{x}}, \delta', \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, donde:*

$$\delta' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tendremos entonces, en particular, que $\widehat{I'} = \delta'$, siendo:

$$T' = {\delta'}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las isodiferenciales de primer orden en el nivel de proyección serán en este caso:

$$\overline{\widehat{d}}\widehat{x}_1 = \frac{1}{2}dx_1; \quad \overline{\widehat{d}}\widehat{x}_2 = 2dx_2; \quad \overline{\widehat{d}}\widehat{x}_3 = dx_3 \qquad \lhd$$

Ejemplo 3.1.5. *Sea $\overline{\widehat{E_3}}(\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{\delta}}', \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, construido a partir de un levantamiento isotópico en el que, con las notaciones usuales, $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $* \equiv *_1 \equiv *_2 \equiv *_3 \equiv \times$, $\widehat{I}'_2 = 1$, $\widehat{I}'_3 = 2$ e $\widehat{I} = \widehat{I}'_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ , si } x = 0, \\ \frac{1}{x^2} \text{ , si } x \neq 0. \end{array} \right\}$.*

Será en este caso:

$$T' = T'(x) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ , si } x = 0, \\ \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ , si } x \neq 0. \end{array} \right\}.$$

La proyección isotópica viene entonces dada como:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (0, x_2, 2x_3) \text{ , si } x_1 = 0, \\ (1/x_1, x_2, 2x_3) \text{ , si } x_1 \neq 0. \end{array} \right\}.$$

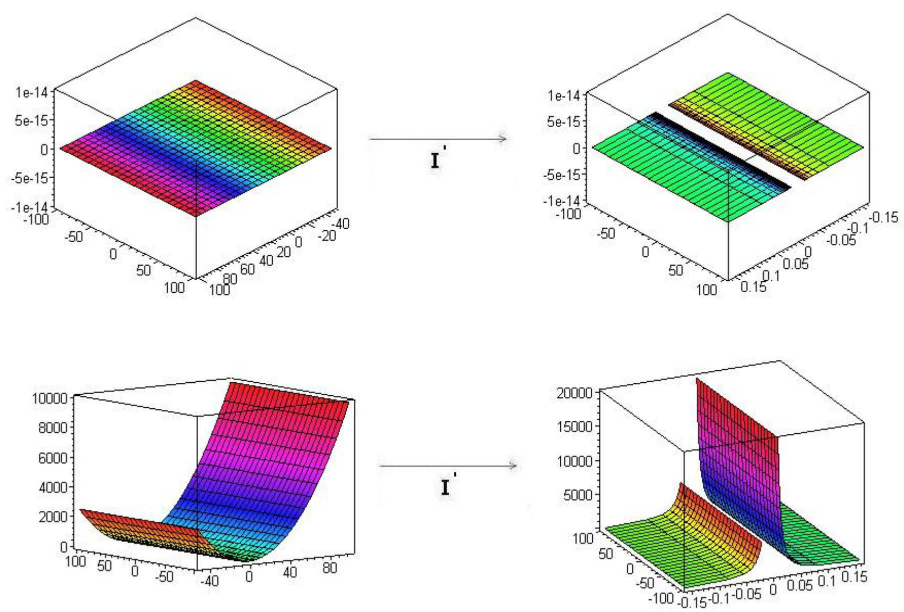

Figura 3.2: Proyecciones de las superficies $z = 0$ y $z = x^2$.

Las isodiferenciales de primer orden en el nivel de proyección serán en este caso:

$$\overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{x}}_1 = dx_1; \quad \overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{x}}_2 = dx_2; \quad \overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{x}}_3 = 2dx_3. \qquad \triangleleft$$

3.2. Isoderivadas de primer orden

Pasamos a dar a continuación la noción de isoderivada de una isofución respecto a cada isocoordenada:

Definición 3.2.1. *Sea $\widehat{f}:\widehat{D}\subseteq\widehat{\mathbb{R}}^n\rightarrow\widehat{\mathbb{R}}$ una isofunción en $\widehat{E}$, siendo $\widehat{D}$ cerrado en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Se define entonces la* isoderivada de $\widehat{f}$ respecto a la isocoordenada $\widehat{x}_k$ *como:*

$$\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}(\widehat{\overrightarrow{x}})}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}=\widehat{\left(\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_k}\right)}_k.$$

Se definirá en $\overline{\widehat{E}}$ la isoderivada de $\overline{\widehat{f}}$ respecto a la isocoordenada $\overline{\widehat{x}}_k$ *como:*

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}=\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}(\widehat{\overrightarrow{x}})}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}=\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}*\widehat{I'}^k_i.$$

Ahora, dado $\widehat{\overrightarrow{u}}\in\widehat{D}$, se define la isoderivada de $\widehat{f}$ respecto a $\widehat{x}_k$ en $\widehat{\overrightarrow{u}}$ *como:*

$$\left(\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}(\widehat{\overrightarrow{x}})}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}\right)_{|\widehat{x}_k=\widehat{u}_k}=\widehat{\left(\left(\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_k}\right)_{x_k=u_k}\right)}_k.$$

En $\overline{\widehat{E}}$ se definirá la isoderivada de $\overline{\widehat{f}}$ respecto a $\overline{\widehat{x}}_k$ en $\overline{\widehat{\overrightarrow{u}}}$ *como:*

$$\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}\right)_{|\overline{\widehat{x}}_k=\overline{\widehat{u}}_k}=\overline{\left(\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}(\widehat{\overrightarrow{x}})}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}\right)_{|\widehat{x}_k=\widehat{u}_k}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}*\widehat{I'}^k_i\right)_{|x_k=u_k}.$$

Obsérvese entonces que, en el caso en el que sea $*\equiv\times$ para todo $j\in\{1,...,n\}$, siendo además $\widehat{I}=+1$ y $\delta'=\delta=diag_n(+1,...,+1)$, se tiene que:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}=\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_k}.$$

Esto prueba que el concepto convencional de derivación de una función es un caso particular del concepto de isoderivación que propone Santilli.

Definición 3.2.2. *Sea $\widehat{f} = \widehat{f}(\widehat{\overrightarrow{x}})$ una isofunción definida en un dominio cerrado $\widehat{D}$. Se dirá entonces que $\widehat{f}$ es* isodiferenciable en un subconjunto $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$ *si existe la isoderivada de $\widehat{f}$ respecto a cada una de sus isocoordenadas en todos los puntos de $\widehat{C}$.*

Análogamente, $\overline{\widehat{f}}$ se dirá isodiferenciable en $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$ *si existe la isoderivada de $\overline{\widehat{f}}$ respecto a cada una de sus isocoordenadas en todos los puntos de $\overline{\widehat{C}}$.*

Llegamos de esta forma al siguiente resultado, inmediato por construcción:

Proposición 3.2.3. *En las condiciones de la definición anterior se tiene que:*

a) Para $k \in \{1, ..., n\}$, existe la isoderivada de $\widehat{f}$ respecto a la isocoordenada k-ésima si y sólo si existe la derivada de f respecto a la coordenada k-ésima. Por tanto, $\widehat{f}$ es isodiferenciable en $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$ si y sólo si f es diferenciable en $C \subseteq D$.

b) $\widehat{f}$ es isodiferenciable en $\widehat{C}$ si y sólo si $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{C}}$. □

Veamos a continuación algunos ejemplos acerca del concepto de isodiferenciabilidad de una isofunción:

Ejemplo 3.2.4. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.3, consideremos en el nivel convencional las funciones:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2; \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^2; \quad h(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2}{x_3}.$$

Todas están definidas en $\mathbb{R}^3$ salvo h, que lo está en $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, siendo sus derivadas usuales:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 0;$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = x_2 x_3^2; \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = x_1 x_3^2; \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_3} = 2x_1 x_2 x_3;$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_3}; \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_3}; \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} = x_1 x_2 \ln |x_3|.$$

A continuación consideramos las isofunciones asociadas a f, g y h en el nivel de proyección:

$$\overline{\widehat{f}}(x_1, x_2, x_3) = 5\left((x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 + (2x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2\right),$$

$$\overline{\widehat{g}}(x_1, x_2, x_3) = 5\left((x_1 + 2x_2 + 3x_3)(2x_1 + 4x_2 + 5x_3)(3x_1 + 5x_2 + 6x_3)^2\right),$$

$$\overline{\widehat{h}}(x_1, x_2, x_3) = 5\frac{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)(2x_1 + 4x_2 + 5x_3)}{3x_1 + 5x_2 + 6x_3}.$$

Las isoderivadas de dichas isofunciones serán entonces:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_1}}} = 2x_1 - 6x_2; \quad \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_2}}} = -6x_1 + 6x_2; \quad \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_3}}} = 4x_1 - 2x_2;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_1}}} = x_2x_3^2 - 3x_1x_3^2 + 4x_1x_2x_3; \quad \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_2}}} = -3x_2x_3^2 + 3x_1x_3^2 - 2x_1x_2;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_3}}} = 2x_2x_3^2 - x_1x_3^2;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{h}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_1}}} = \frac{x_2}{x_3} - \frac{3x_1}{x_3} + 2x_1x_2\ln|x_3|; \quad \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{h}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_2}}} = -\frac{3x_2}{x_3} + \frac{3x_1}{x_3} - x_1x_2\ln|x_3|;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{h}}(\overline{\widehat{x}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x_3}}} = 2x_2x_3^2 - x_1x_3^2.$$

Para finalizar este ejemplo debemos indicar que, atendiendo a la Proposición 3.2.3, las isofunciones $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ son isodiferenciables en $\widehat{\mathbb{R}^3}$ y las isofunciones $\overline{\widehat{f}}$ y $\overline{\widehat{g}}$ son isodiferenciables en $\overline{\widehat{\mathbb{R}^3}}$, siendo por su parte $\widehat{h}$ y $\overline{\widehat{h}}$ isodiferenciables en $\widehat{\mathbb{R}^3} - \{(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{0}) \in \widehat{\mathbb{R}^3}\}$ y en $\overline{\widehat{\mathbb{R}^3}} - \{(\overline{\widehat{a}}, \overline{\widehat{b}}, \overline{\widehat{0}}) \in \widehat{\mathbb{R}^3}\}$, respectivamente. $\triangleleft$

Ejemplo 3.2.5. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.4, consideramos las isofunciones asociadas a las funciones f, g y h del ejemplo anterior:*

$$\overline{\widehat{f}}(x_1, x_2, x_3) = 5\left((2x_1)^2 + (\frac{x_2}{2})^2\right),$$

$$\overline{\widehat{g}}(x_1, x_2, x_3) = 5g(x_1, x_2, x_3),$$

$$\overline{\widehat{h}}(x_1, x_2, x_3) = 5h(x_1, x_2, x_3).$$

En esta ocasión, las isoderivadas de las isofunciones que hemos mencionado son las siguientes:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = x_1; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = 4x_2; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = \widehat{\overline{0}} = 0;$$

$$\frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = \frac{1}{2}x_2x_3^2; \qquad \frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = 2x_1x_3^2; \qquad \frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = 2x_1x_2x_3;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = \frac{x_2}{2x_3}; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = \frac{2x_2}{x_3}; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = x_1x_2\ln|x_3|.$$

Indicar por último que la isodiferenciabilidad de las isofunciones anteriores coincide con la estudiada bajo las condiciones del Ejemplo 3.2.4, teniendo en cuenta que por la Proposición 3.2.3, dicha isodiferenciabilidad sólo depende de la correspondiente diferenciabilidad de las funciones de las que se levantan isotópicamente las anteriores isofunciones. $\triangleleft$

Ejemplo 3.2.6. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.5, consideramos las isofunciones asociadas a las funciones f, g y h del Ejemplo 3.2.4:*

$$\widehat{\overline{f}}(x_1,x_2,x_3) = \left\{ \begin{array}{c} 5x_2^2 \ , \ si\ x_1 = 0, \\ 5\left(\frac{1}{x_1^2} + x_2^2\right) \ , \ si\ x_1 \neq 0. \end{array} \right\},$$

$$\widehat{\overline{g}}(x_1,x_2,x_3) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ , \ si\ x_1 = 0, \\ 5x_2\frac{x_3^2}{4x_1} \ , \ si\ x_1 \neq 0. \end{array} \right\},$$

$$\widehat{\overline{h}}(x_1,x_2,x_3) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ , \ si\ x_1 = 0, \\ 10\frac{x_2}{x_1x_3} \ , \ si\ x_1 \neq 0. \end{array} \right\}.$$

En esta ocasión, las isoderivadas de las isofunciones que hemos mencionado son las siguientes:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_1 = 0 \\ \frac{1}{2x_1},\ si\ x_1 \neq 0 \end{array} \right\}; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = 2x_2 = (\widehat{\overline{2}})_2 \widehat{\overline{\times}}_2 (\widehat{\overline{x}}_2)_2; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{f}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = \widehat{\overline{0}} = 0;$$

$$\frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_2x_3^2 = 0 \\ \frac{1}{x_2x_3^2},\ si\ x_2x_3^2 \neq 0 \end{array} \right\}; \qquad \frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = x_1x_3^2; \qquad \frac{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{\overline{g}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = 4x_1x_2x_3;$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_1}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_2 = 0 \\ \frac{x_3}{x_2},\ si\ x_2 \neq 0 \end{array} \right\}; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_2}} = \frac{x_1}{x_3}; \qquad \frac{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{h}}(\widehat{\overline{x}})}{\widehat{\overline{\partial}}\widehat{x_3}} = 2x_1x_2\ln|x_3|;$$

Nuevamente, la isodiferenciabilidad de las isofunciones anteriores coincide con la estudiada bajo las condiciones del Ejemplo 3.2.4. $\triangleleft$

3.2.1. Resultados generales

Las distintas definiciones que hemos visto hasta ahora nos introducen ya en el cálculo isodiferencial. Cabe indicar además que, si prescindimos de la construcción de la isométrica, las definiciones de isodiferencial e isoderivada en $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$, puede darse directamente para isotopías de cualquier clase, sin más que atender a la isounidad $\left(\widehat{I'}_i^j\right)_{i,j=1}^n$ correspondiente. Basta tener en cuenta las definiciones:

$$\overline{\widehat{x}}_k = \sum_{i=1}^n x_i * \widehat{I'}_i^k$$

$$\overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{x}}_k = \sum_{i=1}^n dx_i * \widehat{I'}_i^k$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} * \widehat{I'}_i^k$$

Una vez llegado a este punto de nuestro estudio, nos centraremos en el nivel de proyección, pues el isotópico es isomorfo al convencional. Cabe destacar entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.2.7. *Supongamos que el levantamiento isotópico utilizado en la construcción de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ sea compatible respecto $+$ y $\times$ (las operaciones usuales en $\mathbb{R}$). Dadas entonces $\overline{\widehat{f}}$ y $\overline{\widehat{g}}$, dos isofunciones definidas en un mismo dominio cerrado $\overline{\widehat{D}}$, se cumple que:*

a) Para todo $\overline{\widehat{\vec{x}}} \in \overline{\widehat{D}}$:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\left(\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{+}}\,\overline{\widehat{g}}\right)(\overline{\widehat{\vec{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k} = \frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\vec{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}\,\overline{\widehat{+}}\,\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\vec{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}.$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\left(\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{g}}\right)(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}} = \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}\,\overline{\widehat{\times}}\left(\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})\right)_k \overline{\widehat{+}}\left(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})\right)_k \overline{\widehat{\times}}\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}.$$

b) Si $\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}) \neq 0 * \widehat{I}_k$ *en* $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$, *entonces, para todo* $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}} \in \overline{\widehat{C}}$*:*

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}^{-\overline{\widehat{I}}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}} = -\frac{\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}}{\left(\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})\right)_k^{\overline{\widehat{2}}}}.$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\left(\frac{\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}\right)}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}} = \frac{\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}\,\overline{\widehat{\times}}\left(\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})\right)_k\right) - \left(\left(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})\right)_k \overline{\widehat{\times}}\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}\right)}{\left(\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})\right)_k^{\overline{\widehat{2}}}}.$$

Demostración.

Obsérvese que la compatibilidad respecto a $+$ y $\times$ implica la equivalencia entre los niveles isotópico y general en la restricción al espacio vectorial inicial. De esta forma, el resultado se tiene por construcción inmediatamente a partir del análogo convencional. Así por ejemplo, la primera de las expresiones indicadas se obtiene de la siguiente forma:

Para todo $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}} \in \overline{\widehat{D}}$:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}\left(\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{+}}\,\overline{\widehat{g}}\right)(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}} = \frac{\overline{\widehat{\partial}}\left(\overline{\widehat{f+g}}\right)(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}} = \frac{\partial(f+g)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}\widehat{I'}_i^k =$$

$$= \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}\widehat{I'}_i^k + \frac{\partial g(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}\widehat{I'}_i^k = \frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}\,\overline{\widehat{+}}\,\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})}{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}.$$

El resto de expresiones se obtienen de forma análoga a la anterior. □

La condición de compatibilidad va a adquirir una importancia vital en nuestro estudio. De hecho, la utilización de isotopías no compatibles respecto a las operaciones de partida es una de las novedades que permite el MCIM de [14].

Con vistas a tratar un ejemplo al respecto, obsérvese que, fijada una estructura matemática cualquiera $(E, +, \times)$, de unidades respectivas $0, 1$, existen dos tipos de isotopías no compatibles con respecto a $\times$: aquéllas en la que el nivel general correspondiente $(V,*)$ es tal que $*_{|E} \equiv \times$ y aquéllas en las que no se cumple esta última condición.

Las del segundo tipo son las más sencillas de construir, siendo las del primer tipo las que encierran un mayor carácter algebraico, al poder considerar la ley $*$ como extensión de la ley $\times$ a $V \supseteq E$.

En este sentido, una posible construcción que permite obtener una isotopía compatible con respecto a $\times$, correspondiente al primer tipo, es la que utiliza el conjunto general:

$$V = E \cup E^2 \cup E^3.$$

De tal forma que, para todo $a,b,c,d,e,f \in E$:

$$a * b = a \times b = ab,$$
$$a * (b,c) = (b,c) * a = \left\{ \begin{array}{c} (a,b,c) \text{ , si } a \neq 1, \\ (b,c) \text{ , si } a = 1. \end{array} \right\},$$
$$a * (b,c,d) = (b,c,d) * a = (ab, ac, ad),$$
$$(a,b) * (c,d) = ab + cd,$$
$$(a,b) * (c,d,e) = (c,d,e) * (a,b) = (c, ad, be),$$
$$(a,b,c) * (d,e,f) = (F(a,d), be, cf).$$

Donde $F : E^2 \rightarrow E$ es tal que $F(a,b) \neq ab$, para algún $(a,b) \in E^2$, distinto de $(1,1)$.

Tomando ahora la isounidad $\widehat{I} = (1,0) = T = \widehat{I}^{-1}$, puede comprobarse que:

$$\overline{\widehat{E}} = (1,0) \cup \{(a,1,0) : a \in E, a \neq 1\},$$
$$(1,0)\overline{\widehat{\times}}(1,0) = \overline{\widehat{1 * 1}} = (1,0),$$
$$(1,0)\overline{\widehat{\times}}(a,1,0) = \overline{1 * \widehat{(a,1,0)}} = (a,1,0) = (a,1,0)\overline{\widehat{\times}}(1,0),$$
$$(a,1,0)\overline{\widehat{\times}}(b,1,0) = \overline{(a,1,\widehat{0) * (b},1,0)} = (F(a,b),1,0).$$

Donde $a,b \in E$, son distintos de 0 y 1. En particular, $\widehat{I} = (1,0)$ es la unidad de $\overline{\widehat{E}}$ respecto a $\overline{\widehat{\times}}$.

Esta construcción que acabamos de realizar permite obtener ejemplos de isotopías no compatibles respecto a las operaciones de partida, que no verifican la Proposición 3.2.7:

Ejemplo 3.2.8. *Consideremos* $E = \mathbb{R}$ *en la construcción anterior y tomemos la función* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} \text{ , si } y \neq 0, \\ 0 \text{ , si } y = 0. \end{array} \right\}$.

Supongamos además definida la ley $\star$ *en* V *de tal forma que, para todo* $a, b, c, d, e, f \in V$*:*

$$a \star b = a + b,$$

$$a \star (b, c) = (b, c) \star a = (a + b, c),$$

$$a \star (b, c, d) = (b, c, d) \star a = (a + b, c, d),$$

$$(a, b) \star (a + c, a + d),$$

$$(a, b) \star (c, d, e) = (c, d, e) * (a, b) = (a + c, b + d, be),$$

$$(a, b, c) \star (d, e, f) = (a + d, 1, 0).$$

Se tiene entonces que, para $a, b \in E$*, distintos de* 0 *y* 1*:*

$$(1, 0)\overline{\widehat{+}}(1, 0) = \overline{\widehat{1 \star 1}} = (2, 0),$$

$$(1, 0)\overline{\widehat{+}}(a, 1, 0) = \overline{\widehat{1 \star (a, 1, 0)}} = (1 + a, 1, 0) = (a, 1, 0)\overline{\widehat{+}}(1, 0),$$

$$(a, 1, 0)\overline{\widehat{+}}(b, 1, 0) = \overline{\widehat{(a, 1, 0) \star (b, 1, 0)}} = (a + b, 1, 0).$$

Obsérvese en particular que se puede identificar el conjunto isotópico $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = (1, 0) \cup \{(a, 1, 0) : a \in \mathbb{R}, a \neq 1\}$ *con* $\mathbb{R}$*, siendo* $\overline{\widehat{x}} = x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*. De tal forma que finalmente* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}) = (\mathbb{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$ *es tal que para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*, distintos de* 1*:*

$$1\overline{\widehat{\times}}a = a\overline{\widehat{\times}}1 = a; \qquad a\overline{\widehat{\times}}0 = 0; \qquad a\overline{\widehat{\times}}b = \frac{a}{b}.$$

Puede comprobarse que la isoestructura resultante es un pseudoisocuerpo [41] al verificar todas las propiedades de un cuerpo, salvo la distributividad.

A continuación consideramos las aplicaciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = x,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x) = x^2,$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to h(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \text{ , si } x \neq 0, \\ 0 \text{ , si } x = 0. \end{array} \right\}.$$

Tenemos asociada entonces las isoaplicaciones $\overline{\widehat{f}} = f$ *y* $\overline{\widehat{g}} = g$. *Ambas son isodiferenciables en* $\mathbb{R}$ *al ser diferenciables en* $\mathbb{R}$ *las aplicaciones* f *y* g.

Ahora bien, fijado $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{f(x)\,\widehat{\times}\,\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{x}})}} = x\,\overline{\widehat{\times}}\,x^2 = h(x) = \overline{\widehat{h}}(\overline{\widehat{x}}).$$

Así pues, $\overline{\overline{\widehat{f}}\,\widehat{\times}\,\overline{\widehat{g}}}$ *no es isodiferenciable, pues* h *no es diferenciable en* 0. ◁

Antes de proseguir nuestro desarrollo teórico estudiando el concepto de isoderivada de una isofunción de orden mayor que uno, vamos a analizar un aspecto ya tratado en parte con anterioridad. Se trata del hecho de imponer que el levantamiento isotópico asociado a una isofunción cualquiera sea el asociado a su vez a la construcción del isocuerpo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$.

Esta imposición se ha realizado para favorecer los diferentes cálculos que se hacen en la práctica. Sin embargo, veremos con el siguiente ejemplo que también es posible asociar una isofunción a cualquiera del resto de levantamientos isotópicos asociados a su vez a la construcción del isocuerpo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_k}$, para un cierto $k \in \{1, ...n\}$.

Ejemplo 3.2.9. *Consideremos un espacio isoeuclídeo* 2*-dimensional* $\overline{\widehat{E}}$ *, obtenido a partir de un levantamiento isotópico tal que* $*_{|\mathbb{R}} \equiv *_{1_{|\mathbf{R}}} \equiv *_{2_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$, $\star \equiv +$ *y teniendo como isounidades a* $\widehat{S} = 0$, $\widehat{I} = 1 = \widehat{I}'_1 = 1$ *e* $\widehat{I}'_2 = 2$.

Consideremos ahora la función en $\overline{\widehat{E}}$, $\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, \overline{\widehat{x}}_2) = \overline{\widehat{x}}_2 - \overline{\widehat{x}}_1 = 2x_2 - x_1$. *Obsérvese que para que* $\overline{\widehat{f}}$ *sea realmente una isofunción deberá existir una función* f *en* E *tal que fuese* $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, \overline{\widehat{x}}_2) = \overline{\widehat{f(x_1, x_2)}}$. *Nos interesa comprobar en este ejemplo que no importa cuál es el levantamiento isotópico utilizado en el último término de la expresión anterior, esto es, si es el correspondiente a la construcción de* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_1}, \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_2}$ *o bien,* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$.

En general tendremos que probar varias posibilidades. Por ejemplo, si buscamos f_1 *tal que* $2x_2 - x_1 = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, \overline{\widehat{x}}_2) = f_1(x_1, x_2) *_1 \widehat{I}'_1$*; con lo cual, una posible función de la que se levanta isotópicamente* f *sería* $f(x_1, x_2) = 2x_2 - x_1$, *usando el levantamiento isotópico que lleva* $\mathbb{R}$ *a* $\widehat{\mathbb{R}}_{\widehat{I}'_1}$. *En particular:*

$$\left(\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1}}, \overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1, 4).$$

Supongamos ahora que queremos obtener $\overline{\widehat{f}}$ como levantamiento isotópico de una función f_2 en E mediante el levantamiento isotópico que lleva $\mathbb{R}$ a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_2}$. Deberá ser entonces $2x_2 - x_1 = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, \overline{\widehat{x}}_2) = f_2(x_1, x_2) *_2 \widehat{I}'_2 = 2f_2(x_1, x_2)$. Luego, $f_2(x_1, x_2) = x_2 - \frac{x_1}{2}$. De esta forma:

$$\left(\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1}}, \overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}, 2). \qquad \triangleleft$$

Como ha quedado patente, la isoderivada de una isofunción asociada a isocoordenadas covariantes, depende exclusivamente de la función de la que se levanta isotópicamente. No obstante, si, como en este ejemplo, no se conoce a priori la función de la que se levanta isotópicamente la isofunción $\overline{\widehat{f}}$, se hará notar explícitamente con posterioridad dicha función y el levantamiento isotópico utilizado para la obtención de la isofunción correspondiente. De esta forma, en unas condiciones similares a las del ejemplo anterior, para evitar la ambigüedad de la notación $\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}$, deberíamos escribir $\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}$ o bien $\overline{\frac{\widehat{\partial}\widehat{f}_2}{\widehat{\partial}\widehat{x}_k}}$.

Veamos otro ejemplo en este sentido, si bien ahora existe dependencia de las coordenadas en alguna de las isounidades utilizadas:

Ejemplo 3.2.10. *Consideremos un isoespacio isoeuclídeo 2-dimensional $\overline{\widehat{E}}$, obtenido a partir de un levantamiento isotópico que sigue nuestro modelo de construcción habitual, siendo en particular $*_{|\mathbb{R}} \equiv *_{1_{|\mathbf{R}}} \equiv *_{2_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$, $\star \equiv +$ y teniendo como isounidades a $\widehat{S} = 0$, $\widehat{I} = 1$, $\widehat{I}'_1 = \widehat{I}'_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ si\ x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, \ si\ x \neq 0. \end{array} \right\}$ e $\widehat{I}'_2 = 2$.*

En particular, tenemos en $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_1}$ el levantamiento isotópico dado por $x \to \overline{\widehat{x}} = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ si\ x = 0, \\ \frac{1}{x}, \ si\ x \neq 0. \end{array} \right\}$, ya utilizado en ejemplos anteriores.

Volvemos a considerar la función en $\overline{\widehat{E}}$, $\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, \overline{\widehat{x}}_2) = \overline{\widehat{x}}_2 - \overline{\widehat{x}}_1$. En este caso, si queremos que $\overline{\widehat{f}}$ sea una isofunción para el levantamiento que lleva $\mathbb{R}$ a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_1}$, buscaremos f_1 tal que en $\overline{\widehat{E}}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0, \ si\ \overline{\widehat{x}_1} = \overline{\widehat{x}_2}, \\ \frac{1}{\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1}, \ si\ \overline{\widehat{x}_1} \neq \overline{\widehat{x}_2}. \end{array} \right\} = \overline{\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)} = \overline{f_1\widehat{(x_1, x_2)}_1} = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si\ f_1(x_1, x_2) = 0, \\ \frac{1}{f_1(x_1, x_2)}, \ si\ f_1(x_1, x_2) \neq 0. \end{array} \right\}.$$

$$\textit{Luego, } f_1(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si \ x_1 = x_2 = 0, \\ 0, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} = 2x_2, \\ 2x_2, \ si \ x_1 = 0 \neq x_2, \\ 2x_2 - \frac{1}{x_1}, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2. \end{array} \right\}.$$

De esta forma:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f_1}}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1} = \left\{ \begin{array}{c} {x_1}^2, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2 \times x_2, \\ \nexists, \ en \ otro \ caso. \end{array} \right\},$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f_1}}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2} = \left\{ \begin{array}{c} 4, \ si \ x_1 = 0 \neq x_2, \\ 4, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2 \times x_2, \ . \\ \nexists, \ en \ otro \ caso. \end{array} \right\}$$

Si queremos ahora que $\overline{\widehat{f}}$ *sea una isofunción para el levantamiento que lleva* $\mathbb{R}$ *a* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'_2}}$*, buscaremos* f_2 *tal que en* $\overline{\widehat{E}}$*:*

$$\left\{ \begin{array}{c} 0, \ si \ \overline{\widehat{x_1}} = \overline{\widehat{x_2}}, \\ \frac{1}{\overline{\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1}}, \ si \ \overline{\widehat{x_1}} \neq \overline{\widehat{x_2}}. \end{array} \right\} = \overline{\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)} = \overline{f_2\widehat{(x_1,x_2)}_2} = 2 \times f_2(x_1,x_2).$$

$$\textit{Luego, } f_2(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si \ x_1 = x_2 = 0, \\ 0, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} = 2 \times x_2, \\ \frac{1}{4 \times x_2}, \ si \ x_1 = 0 \neq x_2, \\ \frac{1}{4 \times x_2 - \frac{2}{x_1}}, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2 \times x_2. \end{array} \right\}.$$

Así:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f_2}}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{(4 \times x_1 \times x_2 - 2)^2}{2}, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2 \times x_2, \\ \nexists, \ en \ otro \ caso. \end{array} \right\}$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}\widehat{f_2}}}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2} = \left\{ \begin{array}{c} -(2 \times x_2 - \frac{1}{x_1})^2, \ si \ x_1 \neq 0 \ y \ \frac{1}{x_1} \neq 2 \times x_2, \\ \nexists, \ en \ otro \ caso. \end{array} \right\}$$

$\triangleleft$

3.3. Isoderivadas de orden mayor que uno

A continuación veremos la noción de isoderivabilidad de orden mayor que uno. Para ello, empezando con orden dos basta observar que la isoderivada de una isofunción es por construcción una nueva isofunción, que como tal, en su dominio de definición podrá calcularse de nuevo su isoderivada de primer orden. Esto es:

Definición 3.3.1. *Sea* $\widehat{\overline{\overline{f}}} = \widehat{\overline{\overline{f}}}(\widehat{\overline{\overline{\overrightarrow{x}}}})$ *una isofunción definida en un dominio cerrado* $\widehat{\overline{\overline{D}}}$*. Se define la* isoderivada de segundo orden en $\widehat{\overline{\overline{E}}}$ de $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ respecto a las isocoordenadas $\widehat{\overline{\overline{x}}}_k$ y $\widehat{\overline{\overline{x}}}_l$ *como:*

$$\frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}^{\widehat{2}}\widehat{\overline{\overline{f}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_k\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_l} = \frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_k}\left(\frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{f}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_l}\right) = \frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} * \widehat{I'}^{l}_{i}\right) =$$

$$= \frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_k}\left(\mathbf{I}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} * \widehat{I'}^{l}_{i}\right) * T\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} * \widehat{I'}^{l}_{i}\right) * T\right)}{\partial x_j} * \widehat{I'}^{k}_{j}.$$

Dado $\widehat{\overline{\overline{\overrightarrow{u}}}} \in \widehat{\overline{\overline{D}}}$*, se define* la isoderivada de segundo orden de $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ respecto a $\widehat{\overline{\overline{x}}}_k$ en $\widehat{\overline{\overline{\overrightarrow{u}}}}$ *como:*

$$\left(\frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}^{\widehat{2}}\widehat{\overline{\overline{f}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_k\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_l}\right)_{|\widehat{\overline{\overline{\overrightarrow{x}}}}_k=\widehat{\overline{\overline{\overrightarrow{u}}}}_k} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} * \widehat{I'}^{l}_{i}\right) * T\right)}{\partial x_j} * \widehat{I'}^{k}_{j}\right)_{|x_k=u_k}.$$

Se dirá entonces que $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ *es* dos veces isodiferenciable en un subconjunto $\widehat{\overline{\overline{C}}} \subseteq \widehat{\overline{\overline{D}}}$ *si existe la isoderivada de segundo orden de* $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ *respecto a cada par de sus isocoordenadas en todos los puntos de* $\widehat{\overline{\overline{C}}}$*.*

Se llega entonces rápidamente por construcción al siguiente resultado:

Proposición 3.3.2. *En las condiciones de la Definición 3.3.1, existe la isoderivada de segundo orden de* $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ *respecto a las isocoordenadas* $\widehat{\overline{\overline{x}}}_k$ *y* $\widehat{\overline{\overline{x}}}_l$ *si y sólo si existe la derivada de segundo orden de* f *respecto a la coordenadas* x_k *y* x_l*.*

La isofunción $\widehat{\overline{\overline{f}}}$ *es dos veces isodiferenciable en* $\widehat{\overline{\overline{C}}} \subseteq \widehat{\overline{\overline{D}}}$ *si y sólo si* f *es dos veces diferenciable en* $C \subseteq D$*.* □

Veamos algunos ejemplos de lo anterior:

Ejemplo 3.3.3. *En las condiciones del Ejemplo 3.2.9, para* $i \in \{1, 2\}$ *se tiene que:*

$$\frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}^{\widehat{2}}\widehat{\overline{\overline{f}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_1^{\widehat{2}}} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} \times 1 \times 1 \times 1 = 0 = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}^{\widehat{2}}\widehat{\overline{\overline{f}}}}{\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_1\widehat{\overline{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{\overline{x}}}_2}.$$

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}^{\widehat{2}}\,\overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{x}}_2^{\widehat{2}}} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} \times 2 \times 1 \times 2 = 0 = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{\overline{\widehat{\partial}}^{\widehat{2}}\,\overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{x}}_2\,\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{x}}_1}.$$

Por otra parte, en las condiciones del Ejemplo 3.2.10 se comprueba que:

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1^{\widehat{2}}}} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2}{{x_1}^3},\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1\widehat{\partial}\widehat{x}_2}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_1 = 0 \neq x_2, \\ 0,\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2\widehat{\partial}\widehat{x}_1}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2^{\widehat{2}}}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_1 = 0 \neq x_2, \\ 0,\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_2}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1^{\widehat{2}}}} = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2 = 0, \\ -\frac{16x_2}{(4x_1x_2-2)^3},\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2 \neq 0, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_2}{\widehat{\partial}\widehat{x}_1\widehat{\partial}\widehat{x}_2}} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{{x_1}^2(2x_2-\frac{1}{x_1})^3}{4},\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_2}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2\widehat{\partial}\widehat{x}_1}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(4x_1x_2-1)^3}{8x_1},\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\frac{\widehat{\partial}^{\widehat{2}}\widehat{f}_1}{\widehat{\partial}\widehat{x}_2^{\widehat{2}}}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{16}{(2x_2-\frac{1}{x_1})^3}{}_2,\ si\ x_1 \neq 0\ y\ \frac{1}{x_1} \neq 2x_2, \\ \nexists,\ en\ otro\ caso. \end{array} \right\}.$$

$\triangleleft$

El ejemplo anterior muestra que, por construcción, no se mantiene en general en el nivel de proyección un resultado similar a la igualdad de Schwarz convencional para derivadas cruzadas.

Sí se tendrá este resultado de forma inmediata, por ejemplo, en el caso práctico utilizado por Santilli:

Proposición 3.3.4. *Si* $*_{|\mathbb{R}} \equiv \times$, $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$ *e* $\widehat{I}, \widehat{I'}_i^j \in \mathbb{R}$, *para todo* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *se verifica entonces la igualdad de Schwarz para isoderivadas cruzadas:*

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}^2 \overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k \overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_l} = \frac{\overline{\widehat{\partial}}^2 \overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_l \overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}.$$

Demostración.

Fijados $k, l \in \{1, ..., n\}$ se tiene que, utilizando la igualdad de Schwarz convencional para f:

$$\frac{\overline{\widehat{\partial}}^2 \overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k \overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} \widehat{I'}_i^l\right) T\right)}{\partial x_j} \widehat{I'}_j^k = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i \partial x_j} \widehat{I'}_i^l T \widehat{I'}_j^k =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overrightarrow{x})}{\partial x_j \partial x_i} \widehat{I'}_j^k T \widehat{I'}_i^l = \frac{\overline{\widehat{\partial}}^2 \overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_l \overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}_k}. \quad \square$$

Un estudio similar al que hemos hecho acerca de isoderivadas de orden dos puede hacerse para isoderivadas de orden superior a dos. En particular, se dirá que $\overline{\widehat{f}}$ es m *veces isodiferenciable en un subconjunto* $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$ si existe la isoderivada de orden m de $\overline{\widehat{f}}$ respecto a cada una de sus isocoordenadas en todos los puntos de $\overline{\widehat{C}}$.

De forma análoga al caso $m = 2$ se obtienen entonces los siguientes resultados:

Proposición 3.3.5. *Existe la isoderivada de orden* m *de* $\overline{\widehat{f}}$ *respecto a las isocoordenadas* $\overline{\widehat{x}}_{k_1}, ..., \overline{\widehat{x}}_{k_m}$, *siendo* $k_1, ..., k_m \in \{1, ..., n\}$, *si y sólo si existe la derivada de orden* m *de* f *respecto a las coordenadas* $x_{k_1}, ..., x_{k_m}$.

La isofunción $\overline{\widehat{f}}$ *es* m *veces isodiferenciable en* $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$ *si y sólo si* f *es* m *veces diferenciable en* $C \subseteq D$. $\square$

Cuando además exijimos la isocontinuidad de las isoderivadas, tenemos:

Definición 3.3.6. $\overline{\widehat{f}}$ *se dice* de clase m, *denotándose* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^m$, *si* $\overline{\widehat{f}}$ *es* m *veces isodiferenciable, siendo isocontinuas todas sus isoderivadas de orden* m. *Se dirá que* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^\infty$ *si es de clase* m *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *con isoderivadas isocontinuas.*

Proposición 3.3.7. *Fijado $m \in \mathbb{N}$, una isofunción $\overline{\widehat{f}}$ es de clase m si y sólo si $f \in C^m$. Como consecuencia, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}$ si y sólo si $f \in C^{\infty}$.* □

3.4. Isoderivadas de isoaplicaciones

Por último, para finalizar este Capítulo y para nuestro posterior estudio de isovariedades isodiferenciables, nos conviene generalizar las nociones anteriores al caso de isoaplicaciones, esto es, levantados isotópicos de aplicaciones convencionales, donde la imagen ya no ha de ser $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ necesariamente.

Previamente vemos los siguientes resultados:

Proposición 3.4.1.

a) La composición de isoaplicaciones es una isoaplicación. De hecho, dadas $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{V}}$ y $\overline{\widehat{g}} : \overline{\widehat{V}} \to \overline{\widehat{W}}$, dos isoaplicaciones entre los isoespacios vectoriales $\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{V}}$ y $\overline{\widehat{W}}$, entonces $\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{g \circ f}}$.

b) El producto topológico de isoaplicaciones es una isoaplicación.

Demostración.

a) Sea $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}} \in \overline{\widehat{U}}$. Entonces, $\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}) = \overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})) = \overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{f(\overrightarrow{x})}}) = \overline{\widehat{g(f(\overrightarrow{x}))}} = \overline{\widehat{(g \circ f)(\overrightarrow{x})}} = \overline{\widehat{g \circ f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})$.

Como $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}$ era arbitrario en $\overline{\widehat{U}}$, llegamos a que $\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{g \circ f}}$, como queríamos probar.

b) Sean $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U_1}} \to \overline{\widehat{V_1}}$ y $\overline{\widehat{g}} : \overline{\widehat{U_2}} \to \overline{\widehat{V_2}}$, dos isoaplicaciones cualesquiera. Definimos entonces $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}} : \overline{\widehat{U_1}} \times \overline{\widehat{U_2}} \to \overline{\widehat{V_1}} \times \overline{\widehat{V_2}}$ (donde aquí $\times$ denota el producto topológico usual), como $(\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}})(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{y}}}) = (\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}), \overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{y}}})) = (\overline{\widehat{f(\overrightarrow{x})}}, \overline{\widehat{g(\overrightarrow{y})}})$, para todos $\overrightarrow{x} \in U_1$ e $\overrightarrow{y} \in U_2$.

Basta entonces considerar la isotopía que lleva $U_1 \times U_2$ a $\overline{\widehat{U_1 \times U_2}}$, dada por $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \to \overline{\widehat{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}} = (\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{y}}})$, donde $\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}$ es el levantado isotópico de $\overrightarrow{x}$ en $\overline{\widehat{U_1}}$ e $\overline{\widehat{\overrightarrow{y}}}$ es el levantado isotópico de $\overrightarrow{y}$ en $\overline{\widehat{U_2}}$.

De esta forma tenemos también que $\overline{\widehat{U_1 \times U_2}} = \overline{\widehat{U_1}} \times \overline{\widehat{U_2}}$. De manera análoga, realizando la correspondiente isotopía, llegamos a que $\overline{\widehat{V_1 \times V_2}} = \overline{\widehat{V_1}} \times \overline{\widehat{V_2}}$. Tenemos entonces que para todo $\overrightarrow{x} \in U_1$ y para todo $\overrightarrow{y} \in U_2$, $(\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}})(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{y}}}) = (\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}), \overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{y}}})) = (\overline{\widehat{f(\overrightarrow{x})}}, \overline{\widehat{g(\overrightarrow{y})}}) = \overline{\widehat{(f(\overrightarrow{x}), g(\overrightarrow{y}))}} = \overline{\widehat{(f \times g)(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}} = \overline{\widehat{(f \times g)}}\, \overline{\widehat{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}} = (\overline{\widehat{f \times g}})(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\overrightarrow{y}}})$.

Con lo cual, llegamos a que $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{f \times g}}$, siendo por tanto, $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}}$ una isoaplicación, tal y como queríamos probar. $\square$

Tenemos entonces como consecuencia inmediata el siguiente:

Corolario 3.4.2. *La isoinversa de una isoaplicación coincide con el levantado isotópico de la inversa de la aplicación de partida. Esto es,* $\overline{\widehat{f}}^{-1} = \overline{\widehat{f^{-1}}}$.

Demostración.

Basta aplicar la proposición 3.4.1, pues si tenemos la isoaplicación $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{V}}$ entre los isoespacios $\overline{\widehat{U}}$ y $\overline{\widehat{V}}$, resulta que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{f^{-1}}} = \overline{\widehat{f \circ f^{-1}}} = \overline{\widehat{Id}}$ y $\overline{\widehat{f^{-1}}} \circ \overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f^{-1} \circ f}} = \overline{\widehat{Id}}$, siendo así $\overline{\widehat{f}}^{-1} = \overline{\widehat{f^{-1}}}$, como queríamos probar. $\square$

Los resultados anteriores pueden verse también como consecuencia de considerar el isoálgebra de isofunciones asociado al álgebra convencional de funciones.

A partir de ahora, con vistas al estudio de las isovariedades isodiferenciables, nos restringiremos a las isoaplicaciones con imagen $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\hat{I}''_1} \times ... \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\hat{I}''_m}$. Trabajaremos de hecho con isoespacios vectoriales localmente isoeuclídeos, es decir, dado un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$-isoespacio vectorial $\overline{\widehat{U}}$, siendo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\hat{I}'_1} \times ... \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\hat{I}'_n}$, consideraremos un sistema local de isocoordenadas $\{\overline{\widehat{x}}_1, ..., \overline{\widehat{x}}_n\}$, bajo el cual el isoespacio $\overline{\widehat{U}}$ sea localmente isomorfo como espacio vectorial a un espacio isoeuclídeo.

De esta forma, dada una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^m$, donde $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, ..., x_n) = (f_1(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x}))$, se definirá la isoaplicación $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$, donde consideraremos que:

$$\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}) = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}_1, ..., \overline{\widehat{x}}_n) = \overline{\widehat{f(\overrightarrow{x})}} = \overline{\widehat{(f_1(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x}))}} =$$
$$= \left(\left(\overline{\widehat{f_1(\overrightarrow{x})}} \right)_1, ..., \left(\overline{\widehat{f_m(\overrightarrow{x})}} \right)_m \right) = (\overline{\widehat{f}}_1(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}), ..., \overline{\widehat{f}}_m(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}})),$$

siendo $f_i = \pi_i \circ f$ y $\overline{\widehat{f}}_i = \overline{\widehat{\pi_i}} \circ \overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{\pi_i \circ f}}$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y siendo π_i en este caso la función coordenada i-ésima usual.

Damos así la definición de isodiferencial de la isofunción $\overline{\widehat{f}}$:

Definición 3.4.3. *En las condiciones anteriores se define la* isodiferencial de $\overline{\widehat{f}}$, *a la que denotaremos por $\overline{\widehat{D}}\widehat{f}$, como la matriz:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{f}_1}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}_1} & .. & .. & \frac{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{f}_1}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}_n} \\ . & & & . \\ . & .. & .. & . \\ . & & & . \\ \frac{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{f}_m}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}_1} & .. & .. & \frac{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{f}_m}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}_n} \end{pmatrix}.$$

Diremos que $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable *si se tiene la existencia de todos los elementos de la anterior matriz.*

Esta definición de isodiferenciabilidad nos permite además obtener la siguiente:

Proposición 3.4.4. *Se cumple que:*

a) En las condiciones de la definición anterior, $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable si y sólo si f es diferenciable.

b) La composición de isoaplicaciones isodiferenciables es otra isoaplicación isodiferenciable.

c) El producto topológico de isoaplicaciones isodiferenciables es otra isoaplicación isodiferenciable.

Demostración.

a) Basta aplicar el apartado (b) de la Proposición 3.2.3.

b) Sean $\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{g}}$ dos isoaplicaciones isodiferenciables tales que $\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}$ tenga sentido. Aplicando el apartado (a) tenemos que f y g deben ser aplicaciones diferenciables en el nivel general, con lo cual $g \circ f$ debe ser diferenciable en dicho nivel, siendo así $\widehat{g \circ f}$ isodiferenciable de nuevo por el apartado (a). Ahora, aplicando el apartado (a) de la Proposición 3.4.1, tenemos finalmente que $\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{g \circ f}}$ es una isoaplicación isodiferenciable.

c) Dados $\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{g}}$ dos isoaplicaciones isodiferenciables, tendremos por el apartado (a) que f y g son diferenciables en el nivel general, con lo cual $f \times g$ será también diferenciable en dicho nivel, siendo así $\widehat{f \times g}$ isodiferenciable de nuevo por el apartado (a). Ahora, aplicando el apartado (b) de la Proposición 3.4.1, tenemos finalmente que $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{f \times g}}$ es una isoaplicación isodiferenciable. $\square$

Veamos algunos ejemplos de isoaplicaciones isodiferenciables:

Ejemplo 3.4.5. *Sea $\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}$ el plano isoeuclídeo construido a partir de un levantamiento isotópico de π_{xy}, siendo en particular $\star \equiv +$, $*_{|\mathbb{R}} \equiv *_{1_{|\mathbb{R}}} \equiv *_{2_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$, $\widehat{S} = 0$ e $\widehat{I} = 3$, $\widehat{I}'_1 = 1, \widehat{I}'_2 = 2$.*

Consideremos ahora el isocuerpo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3$, construido a partir de los elementos de isotopía principales $*$ e $\widehat{I}$ anteriores y donde sus dos primeras dimensiones se levantan isotópicamente siguiendo la misma isotopía que el plano isoeuclídeo $\pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}}$, siendo además $*_{3_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$ e $\widehat{I}''_3 = 3$.

Sea $f : \pi_{xy} \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \to (x^2, x + y, y^2)$. Tendremos entonces la isoaplicación $\overline{\widehat{f}} : \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3 = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_1} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I'}_2} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I''}_3} : ((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{y}})_2) \to ((\overline{\widehat{x^2}})_1, (\overline{\widehat{x + y}})_2, (\overline{\widehat{y^2}})_3) = (x^2, 2(x + y), 3y^2)$.

En particular se obtiene que la isofunción f puede definirse de la siguiente forma, haciendo uso del levantamiento isotópico principal que construye $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3$:

$$\overline{\widehat{f}} : \pi_{\overline{\widehat{x}\widehat{y}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3 = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_1} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I}'_2} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{\widehat{I''}_3} : ((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{y}})_2) \to ((\frac{\overline{\widehat{x^2}}}{3}, \frac{\overline{\widehat{2(x + y)}}}{3}, \overline{\widehat{y^2}}).$$

Se tiene por tanto en este caso que:

$$\overline{\widehat{D}\widehat{f}} = \begin{pmatrix} \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{x^2}{3})}{\partial x}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{x^2}{3})}{\partial y}}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{2(x+y)}{3})}{\partial x}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{2(x+y)}{3})}{\partial y}}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(y^2)}{\partial x}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(y^2)}{\partial y}}}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\overline{\widehat{\frac{2x}{3}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{0}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{\frac{2}{3}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{2}{3}}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{0}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{2y}}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 4y \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 3.4.6. *Sea $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$ el plano isoeuclídeo construido a partir de un levantamiento isotópico de π_{xy}, siendo en particular $\star \equiv +$, $*_{|\mathbb{R}} \equiv *_{1_{|\mathbb{R}}} \equiv *_{2_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$, $\widehat{S} = 0$ e $\widehat{I} = 3$, $\widehat{I}'_1 = \widehat{I}'_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ si \ x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, \ si \ x \neq 0. \end{array} \right\}, \widehat{I}'_2 = 2$.*

Consideremos ahora el isocuerpo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3$, construido a partir de los elementos de isotopía principales $*$ e $\widehat{I}$ anteriores y donde sus dos primeras dimensiones se levantan isotópicamente siguiendo la misma isotopía que el plano isoeuclídeo $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$, siendo además $*_{3_{|\mathbb{R}}} \equiv \times$ e $\widehat{I}''_3 = 3$.

Volvemos a considerar $\overline{\widehat{f}}$ la misma isoaplicación que en el ejemplo anterior, siendo esta vez en $\pi_{\widehat{x}\widehat{y}}$:

$$\overline{\widehat{f}}((\overline{\widehat{x}})_1, (\overline{\widehat{y}})_2) = \left\{ \begin{array}{c} (0, 2y, 3y^2), \ si \ x = 0, \\ (\frac{1}{x^2}, 2(x+y), 3y^2), \ si \ x \neq 0. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (\overline{\widehat{0}}, \overline{\widehat{\frac{2y}{3}}}, \overline{\widehat{y^2}}), \ si \ x = 0, \\ (\overline{\widehat{\frac{1}{3x^2}}}, \overline{\widehat{\frac{2(x+y)}{3}}}, \overline{\widehat{y^2}}), \ si \ x \neq 0. \end{array} \right\}.$$

Se tiene por tanto en este caso que:

$$\overline{\widehat{D}\widehat{f}} = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(0)}{\partial x}}}\right)_1, \ si \ x = 0, \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{1}{3x^2})}{\partial x}}}\right)_1, \ si \ x \neq 0. \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(0)}{\partial y}}}\right)_2, \ si \ x = 0, \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{1}{3x^2})}{\partial y}}}\right)_2, \ si \ x \neq 0. \end{array} \right\} \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{2(x+y)}{3})}{\partial x}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(\frac{2(x+y)}{3})}{\partial y}}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(y^2)}{\partial x}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{\partial(y^2)}{\partial y}}}\right)_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \left(\overline{\widehat{0}}\right)_1, \ si\ x = 0 \\ \left(\widehat{-\frac{2}{3x^3}}\right)_1, \ si\ x \neq 0 \end{array} \right\} & \left(\overline{\widehat{0}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{\frac{2}{3}}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{\frac{2}{3}}}\right)_2 \\ \left(\overline{\widehat{0}}\right)_1 & \left(\overline{\widehat{2y}}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0, \ si\ x = 0 \\ -\frac{3x^3}{2}, \ si\ x \neq 0 \end{array} \right\} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 4y \end{pmatrix}. \qquad \triangleleft$$

Para finalizar la sección, damos la siguiente:

Definición 3.4.7. *En las condiciones de la Definición 3.4.3, diremos que* $\overline{\widehat{f}}$ *es de clase* m*, con* $m \in \mathbb{N}$ *y la denotamos como* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^m$*, si es* de clase m *cada una de las isofunciones* $\overline{\widehat{f}}_i = \overline{\widehat{\pi}}_i \circ \overline{\widehat{f}}$*, para* $i \in \{1, ..., n\}$*. Se dirá que* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^\infty$ *si* $\overline{\widehat{f}}_i \in \overline{\widehat{C}}^\infty$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$*. Cuando no haya lugar a confusión, se dirá que* $\overline{\widehat{f}}$ *es* isodiferenciable *cuando* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{C}}^\infty$*.*

En particular se obtienen los siguientes resultados, inmediatos por construcción:

Proposición 3.4.8. *En las condiciones de la Definición 3.4.3, una isoaplicación* $\overline{\widehat{f}}$ *será de clase* m *si y sólo si la aplicación* f *de la que se levanta isotópicamente es de clase* m*. Además, la composición de isoaplicaciones de clase* m *y el producto topológico de isoaplicaciones de clase* m *son ambas también isoaplicaciones de clase* m*.* □

Corolario 3.4.9. *En las condiciones de la Definición 3.4.3, una isoaplicación* $\overline{\widehat{f}}$ *será de clase* $\overline{\widehat{C}}^\infty$ *si y sólo si la aplicación* f *de la que se levanta isotópicamente es de clase* C^∞ *en el nivel general correspondiente. Además, la composición de isoaplicaciones de clase* $\overline{\widehat{C}}^\infty$ *y el producto topológico de isoaplicaciones de clase* $\overline{\widehat{C}}^\infty$ *son ambas también isoaplicaciones de clase* $\overline{\widehat{C}}^\infty$*.* □

No queremos terminar este Capítulo sin hacer mención del levantamiento isotópico de la integración convencional. Por motivos de extensión no podemos dedicarle espacio a este desarrollo teórico, que precisaría no obstante de un estudio similar al realizado aquí, haciendo uso de los distintos tipos de elementos de isotopía utilizados. El lector interesado puede ver las primeras propuestas al efecto dadas por Santilli y sus colaboradores en [25] o [43], cuyas consecuencias en aplicaciones físicas y químicas han dado lugar a importantes desarrollos teórico-prácticos (véanse [46], [47] o [48]).

Capítulo 4

ISOVARIEDADES ISODIFERENCIABLES

Como ya se ha indicado, en 1993, los matemáticos griegos Tsagas y Sourlas desarrollan el primer monográfico matemático sobre isoteoría [50]. En particular definen por primera vez los conceptos de isotopología y de isovariedad diferenciable. En ambos casos trabajan con isocuerpos de tipo I y hacen uso del cálculo diferencial convencional.

Para ello construyen en primer lugar el levantado isotópico de la variedad diferenciable Cartesiana real n-dimensional $\{\mathbb{R}^n, Id\}$, donde Id es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^n$. Consideran así el isoespacio n-dimensional $\widehat{\mathbb{R}}^n = \{\widehat{P} = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, ..., \widehat{P}_n) \mid \widehat{P}_i \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}\}$, dotado de su estructura de espacio vectorial, afín e isotopológica. Consideran también la aplicación identidad en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $\widehat{Id} : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$, tal que $\widehat{Id}(\widehat{P}) = \widehat{P}$, $\forall \widehat{P} \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. De esta forma, el par obtenido $\{\widehat{\mathbb{R}}^n, \widehat{Id}\}$ resulta ser el levantado isotópico del par $\{\mathbb{R}^n, Id\}$ y lo llaman *isovariedad diferenciable real Cartesiana de dimensión* n. A continuación, una vez visto el caso real, pasan a estudiar los levantados isotópicos del resto de variedades diferenciables, comenzando con la definición de isocarta e isoatlas diferenciable.

En 1995, ambos autores siguen estudiando las isovariedades diferenciables en [51] y [52]. Por su parte, en 1996, en el mismo artículo donde introduce el cálculo isodiferencial [43], Santilli presenta una generalización de la isotopología de Tsagas-

Sourlas, planteando la posibilidad de utilizar isocuerpos de tipo II.

Desde ese momento, el propio Santilli ha indicado varias veces como problema abierto el obtener de nuevo los levantados isotópicos de las variedades diferenciables, pero haciendo uso esta vez del cálculo isodiferencial.

En 2003 [15], con vistas a abordar más adelante el anterior problema aún abierto, se propone una generalización de la isotopología de Tsagas-Sourlas-Santilli, haciendo uso para ello del MCIM [14], que permite a su vez un primer avance en la generalización del isoanálisis de Kadeisvili [23], el cual de hecho no fue usado en [50].

Es sin embargo en el presente Capítulo cuando se tratará al fin de recopilar todas las anteriores herramientas con el objetivo de generalizar el concepto de isovariedad diferenciable para dar lugar a lo que denominaremos *isovariedad isodiferenciable*.

Para ello seguiremos en la medida de lo posible el modelo propuesto por Tsagas y Sourlas, si bien haremos uso no sólo de la isodiferenciabilidad propuesta por Santilli, sino también del isoanálisis de Kadeisvili y del modelo isotópico MCIM. Además, con vistas a obtener un mayor número de ejemplos, en una primera sección se estudiarán las condiciones necesarias para poder disponer del citado isoanálisis en el caso en que estemos trabajando con isotopías no inyectivas.

Nos restringiremos a aquellos resultados necesarios para la correcta construcción de los isogrupos isotópicos de Lie, que serán estudiados en el capítulo siguiente. Por tanto, será necesario efectuar en el futuro un estudio más profundo acerca de isovariedades isodiferenciables, que queda por ahora como una línea de investigación abierta.

4.1. Isocontinuidad en isotopías no inyectivas

Con vistas a obtener resultados generales, vamos a centrarnos en el estudio de isoespacios isotopológicos [15] en el nivel de proyección, donde previsiblemente los resultados pueden diferir de los convencionales. Esto es debido a que el nivel isotópico es isomorfo al general y por tanto hereda todas las propiedades directamente de este último.

Es conveniente además trabajar con isotopías no inyectivas, pues en otro caso obtenemos de nuevo un isomorfismo entre el nivel de proyección y el isotópico. Para ello, basta usar los resultados indicados en Preliminares, donde se ha hecho referencia a estudios actualmente en desarrollo ([18], [19]) de isotopías no asociativas y no inyectivas, que permiten generalizar resultados obtenidos previamente en isoteoría.

En particular, se utilizaba la inyectividad para lograr que las aplicaciones del tipo $\overline{\widehat{f}}(x) = \overline{\widehat{f(x)}}$ estuviesen bien definidas, pudiendo de esta forma estudiar la isocontinuidad y la isodiferenciabilidad de la misma. No obstante, es conveniente analizar el caso no inyectivo y determinar las condiciones bajo las cuales podamos trabajar con este tipo de isotopías. Es este aspecto lo que vamos a ver en la primera sección del presente capítulo.

Comenzaremos con un resultado que permitirá definir isofunciones en caso de trabajar con isotopías no inyectivas:

Proposición 4.1.1. *Sean $\overline{\widehat{U}}$ un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial, $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ un isocuerpo isorreal y $f : U \to \mathbb{R}$ una función real. Supongamos que las isounidades utilizadas $\widehat{I}$ e $\widehat{I}'$ dependen de unos factores externos respectivos, $F^{\mathbb{R}}$ y F^U. Sea $\Phi_f : F^U \to F^{\mathbb{R}}$, la aplicación asociada a la isofunción $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : X \Diamond \widehat{I}'(X, F_0^U) \to \overline{\widehat{f}}(X \Diamond \widehat{I}'(X, F_0^U)) = f(X) * \widehat{I}(f(X), \Phi_f(F_0^U))$. Tal isofunción estará entonces bien definida si y sólo si dados $F_0 \in F^U$ y $X, Y \in U$ tales que $X \Diamond \widehat{I}'(X, F_0^U) = Y \Diamond \widehat{I}'(Y, F_0^U)$, se tiene $f(X) * \widehat{I}(f(X), \Phi_f(F_0^U)) = f(Y) * \widehat{I}(f(Y), \Phi_f(F_0^U))$.* □

Es evidente que las isotopías inyectivas verifican la condición anterior. Además, otro caso particular que verifica la condición anterior se tiene al trabajar con isotopías (inyectivas o no) tales que la proyección isotópica correspondiente sí sea inyectiva para cada una de las correspondientes restricciones al tomar valores concretos en F^U. Dado que tal condición será utilizada con asiduidad en nuestro estudio, nos referiremos a ella como *inyectividad en* F^U.

Por su parte puede generalizarse también el concepto de isoorden $\widehat{\widehat{\leq}}$ en el nivel de proyección y en consecuencia, la isocontinuidad de isofunciones en dicho nivel:

Definición 4.1.2. *Sea $\widehat{\widehat{U}}$ un $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial isonormado, obtenido a partir de una isotopía compatible respecto a cada una de las operaciones iniciales, tal que las isounidades correspondientes $\widehat{I}$ e $\widehat{I}'$ dependen de factores externos F^U y $F^{\mathbb{R}}$, respectivamente. Consideremos además el isoorden $\widehat{\widehat{\leq}}$, tal que $X\diamondsuit\widehat{I}'(X,F_0^U)\widehat{\widehat{\leq}}Y\diamondsuit\widehat{I}'(Y,F_0^U)$ si y sólo si $X\leq Y$.*

Sea $\widehat{\widehat{f}}$ una isofunción bien definida en $\widehat{\widehat{U}}$. Se dirá que $\widehat{\widehat{f}}$ es isocontinua *en $X\diamondsuit\widehat{I}'(X,\, F_0^U)\in\widehat{\widehat{U}}$, si se verifican las siguientes condiciones:*

a) $\Phi_{||.||}(F_0^U)=\Phi_{|.|}(\Phi_f(F_0^U))$.

b) *Para todo $\epsilon*\widehat{I}(\epsilon,\Phi_{||.||}(F_0^U))\widehat{\widehat{>}}S*\widehat{I}(S,\Phi_{||.||}(F_0^U))$, existe $\delta*\widehat{I}(\delta,\Phi_{||.||}(F_0^U))\widehat{\widehat{>}}S*\widehat{I}(S,\Phi_{||.||}(F_0^U))$, tal que para todo $Y\diamondsuit\widehat{I}'(Y,F_0^U)\in\widehat{\widehat{U}}$ con $\widehat{\widehat{||}}X\diamondsuit\widehat{I}'(X,F_0^U)-Y\diamondsuit\widehat{I}'(Y,F_0^U)\widehat{\widehat{||}}=||X-Y||*\widehat{I}(||X-Y||,\Phi_{||.||}(F_0^U))\widehat{\widehat{<}}\delta*\widehat{I}(\delta,\Phi_{||.||}(F_0^U))$, se verifica que $\widehat{\widehat{|}}\widehat{\widehat{f}}(X\diamondsuit\widehat{I}'(X,F_0^U))-\widehat{\widehat{f}}(Y\diamondsuit\widehat{I}'(Y,F_0^U))\widehat{\widehat{|}}=|f(X)-f(Y)|*\widehat{I}(|f(X)-f(Y)|,\Phi_{|.|}(\Phi_f(F_0^U)))\widehat{\widehat{<}}\epsilon*\widehat{I}(\epsilon,\Phi_{|.|}(\Phi_f(F_0^U)))$.*

Se dirá que $\widehat{\widehat{f}}$ es isocontinua *en $\widehat{\widehat{U}}$ si es isocontinua en $\widehat{\widehat{X}}$, para todo $\widehat{\widehat{X}}\in\widehat{\widehat{U}}$.*

Obsérvese que la condición (b) de la definición anterior equivale a la siguiente:

b') Para todo $\epsilon>S$, existe $\delta>S$, tal que para todo $Y\diamondsuit\widehat{I}'(Y,F_0^U)\in\widehat{\widehat{U}}$ con $||X-Y||<\delta$, se verifica que $|f(X)-f(Y)|<\epsilon$.

Con lo cual es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 4.1.3. *En las condiciones de la Definición 4.1.2, en caso de ser $\Phi_{||.||}(F_0^U)=\Phi_{|.|}(\Phi_f(F_0^U))$, para todo $F_0^U\in F^U$, la isofunción $\widehat{\widehat{f}}$ es isocontinua en $X\diamondsuit\widehat{I}'(X,\, F_0^U)$ si y sólo si la función asociada f es continua en $X\in U$.* □

Veamos un par de ejemplos al respecto:

Ejemplo 4.1.4. *Consideremos el levantamiento isotópico de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *usando los elementos* $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $*_{|\mathbb{R}} \equiv \times$ *e* $\widehat{I} = \widehat{I}(s,t) = st^3$, *siendo* $T = T(s,t) = s^{-1}t^{-1/3}$, *para* $s, t \in \mathbb{N}$. *Esto es, consideramos la proyección isotópica* $x \to \widehat{\overline{x}} = xst^3$, *siendo así* $\widehat{\overline{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$.

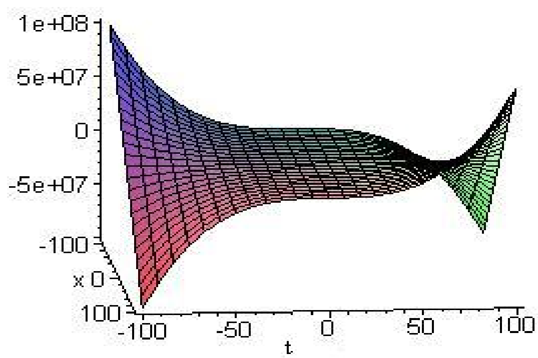

Figura 4.1: $x \to x * \widehat{I}(1,t) = xt^3$.

Este levantamiento es no inyectivo, pues por ejemplo, $2 * \widehat{I}(4,1) = 1 * \widehat{I}(1,2) = 8$. *Sin embargo, para valores concretos* s_0, t_0, *la aplicación* $x \to xs_0t_0^3$ *es inyectiva. De hecho, esto hace que el levantamiento isotópico sea no inyectivo de tipo I.*

Obsérvese por otra parte que en este caso $F^U = F^{\mathbb{R}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Supongamos que todas las aplicaciones de tipo* Φ *que relacionen estos factores sean la aplicación identidad.*

En particular, toda isofunción $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da lugar a una isofunción* $\widehat{\overline{f}} : \widehat{\overline{\mathbb{R}}} \to \widehat{\overline{\mathbb{R}}}$ *tal que* $\widehat{\overline{f}}(a * \widehat{I}(s_0,t_0)) = f(a) * \widehat{I}(\Phi_f(s_0,t_0)) = f(a) * \widehat{I}(s_0,t_0) = f(a)s_0t_0^3$.

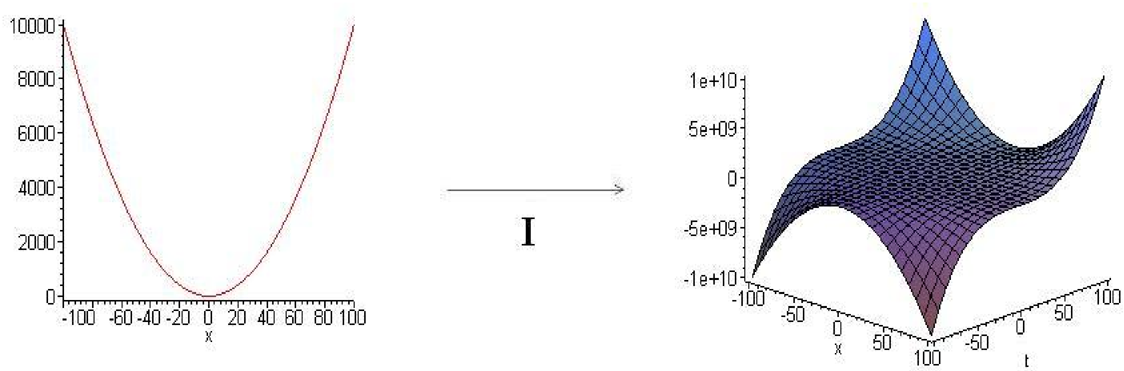

Figura 4.2: $f(x) \to f(x) * \widehat{I}(1,t) = (x^2+5)t^3$.

Así por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 5$, *entonces:*

a) $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{a}}) = \{f(a)st^3 : s, t \in \mathbb{N}\}$.

b) *Dado que* $8 = 8 * \widehat{I}(1,1) = 4 * \widehat{I}(2,1) = 2 * \widehat{I}(4,1) = 1 * \widehat{I}(8,1) = 1 * \widehat{I}(1,2)$, *entonces* $\overline{\widehat{f}}(8) = \{69, 42, 36, 48\}$.

c) $\overline{\widehat{f}}(5 * \widehat{I}(2,3)) = 30 * \widehat{I}(2,3) = 1620$.

Pues bien, teniendo en cuenta que en este caso, $\Phi_{||\cdot||}(F_0^U) = F_0^U = \Phi_{|\cdot|}(\Phi_f(F_0^U))$, *resulta aplicando la Proposición 4.1.3 que* $\overline{\widehat{f}}$ *es una isofunción isocontinua en* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, *al ser* f *continua convencionalmente en* $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Ejemplo 4.1.5. *Consideremos el levantamiento isotópico de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *usando los elementos* $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $*_{|\mathbb{R}} \equiv \times$ *e* $\widehat{I} = \widehat{I}(x,t) = xt$, *con* $t \in \mathbb{N}$. *De esta forma tenemos la proyección isotópica* $x \to \overline{\widehat{x}} = x^2t$, *siendo así* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$.

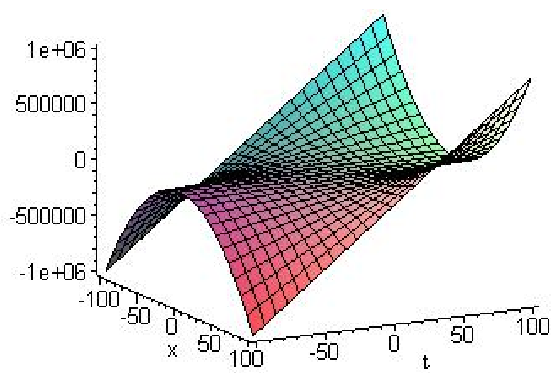

Figura 4.3: $x \to x * \widehat{I}(x,t) = xt^3$.

Este levantamiento es no inyectivo de tipo II, pues por ejemplo, $2 * \widehat{I}(2,1) = -2 * \widehat{I}(-2,1) = 4$, *no siendo invertible por tanto la proyección isotópica.*

Supongamos de nuevo que todas las aplicaciones de tipo Φ *que relacionen el factor externo* $F = \mathbb{N}$ *sean la aplicación identidad. Considerando entonces las funciones* $f_1(x) = x$ *y* $f_2(x) = x + 1$, *podemos comprobar que la isoaplicación* $\overline{\widehat{f_1}}(x * \widehat{I}(x,t)) = f_1(x) * \widehat{I}(f_1(x), t) = x^2t$ *está bien definida, pero en cambio no lo está la aplicación* $\overline{\widehat{f_2}}(x * \widehat{I}(x,t)) = f_2(x) * \widehat{I}(f_2(x), t) = (x+1)^2t$, *pues tenemos que* $2 * \widehat{I}(2,1) = -2 * \widehat{I}(-2,1) = 4$, *pero en cambio* $\overline{\widehat{f_2}}(2 * \widehat{I}(2,1)) = 9 \neq 1 = \overline{\widehat{f_2}}(-2 * \widehat{I}(-2,1))$.

Con lo cual, únicamente podemos afirmar que la isofunción $\overline{\widehat{f_1}}$ *es isocontinua en* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *al ser* f_1 *continua convencionalmente en* $\mathbb{R}$ *y aplicar la Proposición 4.1.3.* $\triangleleft$

Nos interesará trabajar también con isoespacios (iso)topológicos construidos a partir de isotopías no inyectivas. En estos casos hay que tener en cuenta que en general, el levantado isotópico de los abiertos de la topología de partida no tiene por qué constituir una topología en el isoespacio correspondiente, pues la intersección de dos isoabiertos no es en general un isoabierto en la isotopología asociada.

En concreto, en caso de tener la topología inicial $\Upsilon = \{\emptyset, E, \cup_{\alpha\in A} U_\alpha\}$ en un espacio E, que se levanta isotópicamente a partir de una isotopía de elementos principales $\diamondsuit$ e $\widehat{I}'$, asociada a factores externos F, en principio cada abierto $U \in \Upsilon$ se proyecta isotópicamente al conjunto:

$$\overline{\widehat{U}} = \left\{ U \diamondsuit \widehat{I}'(U, F_k) : F_k \in F \right\}.$$

La unión de tales conjuntos constituye la isotopología $\overline{\widehat{\Upsilon}}$. No obstante, para evitar singularidades, consideraremos a partir de ahora la isotopología como unión disjunta de las isotopologías correspondientes a cada valor $F_k \in F$:

$$\overline{\widehat{\Upsilon}} = \cup_{F_k \in F}\{\emptyset, E\diamondsuit\widehat{I}'(E, F_k), \cup_{\alpha\in A} U_\alpha \diamondsuit \widehat{I}'(U_\alpha, F_k)\}.$$

De esta forma, fijado un punto $P\diamondsuit\widehat{I}'(P, F_0) \in \overline{\widehat{E}}$, los entornos abiertos de dicho punto serán aquéllos obtenidos al aplicar el levantamiento isotópico para el valor F_0. Con lo cual, la isotopología resultante es de hecho una topología del isoespacio $\overline{\widehat{E}}$ en aquellos casos en que la isotopía sea inyectiva en F.

Tras estas observaciones previas, podemos generalizar ya el concepto de isoaplicación isocontinua entre dos isoespacios topológicos.

Definición 4.1.6. *Sea $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{E_1}} \to \overline{\widehat{E_2}}$ una isoaplicación bien definida entre dos isoespacios topológicos $\overline{\widehat{E_1}}$ y $\overline{\widehat{E_2}}$, obtenidos a partir de los elementos de isotopía principales $\diamondsuit_1$ e $\widehat{I}'_1$ y $\diamondsuit_2$ e $\widehat{I}'_2$, respectivamente, con isounidades dependientes de factores externos respectivos F^{E_1} y F^{E_2}. Se dirá que $\overline{\widehat{f}}$ es isocontinua en $F_0^{E_1}$ si conserva las adherencias para dichos valores. Esto es, si para todo $A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1}) \subseteq E_1\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(E_1, F_0^{E_1}) \subseteq \overline{\widehat{E_1}}$, se tiene que:*

$$\overline{\widehat{f}}\left(\mathbf{Cl}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right) \subseteq \mathbf{Cl}\left(\overline{\widehat{f}}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right).$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 4.1.7. *En las condiciones de la definición anterior, supongamos que $\overline{\widehat{E_1}}$ y $\overline{\widehat{E_2}}$ son dos isoespacios isotopológicos asociados a E_1 y E_2, respectivamente, siendo la isotopía que construye $\overline{\widehat{E_1}}$ inyectiva en F^{E_1}. Se verifica en este caso que si la correspondiente aplicación $f : E_1 \to E_2$ es continua convencionalmente en E_1, entonces la isoaplicación $\overline{\widehat{f}}$ es isocontinua para cada valor $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$.*

En caso de que la isotopía que construye $\overline{\widehat{E_2}}$ sea además inyectiva en F^{E_2}, se tiene el recíproco.

Demostración.

La inyectividad en F^{E_1} que tenemos por hipótesis permite aplicar el apartado (b) de la Proposición 1.3.5, para cada valor concreto $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$. En particular nos interesa el hecho de ser $\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}}$, para todo conjunto $C \in E_1$.

Supongamos en primer lugar que f es continua en E_1 y fijemos un conjunto $A \subseteq E_1$ y unos valores $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$. En particular, f es continua en A, siendo por tanto $f(\mathbf{Cl}(A)) \subseteq \mathbf{Cl}(f(A))$. Se tiene entonces que:

$$\overline{\widehat{f}}\left(\mathbf{Cl}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right) = \overline{\widehat{f}}\left(\mathbf{Cl}(A)\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(\mathbf{Cl}(A), F_0^{E_1})\right) =$$
$$= f(\mathbf{Cl}(A))\diamondsuit_2\widehat{I}'_2(f(\mathbf{Cl}(A)), \Phi_f\left(F_0^{E_1}\right)) \subseteq$$
$$\subseteq \mathbf{Cl}(f(A))\diamondsuit_2\widehat{I}'_2(\mathbf{Cl}(f(A)), \Phi_f\left(F_0^{E_1}\right)) = \mathbf{Cl}\left(\overline{\widehat{f}}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right).$$

Se obtiene de esta forma la isocontinuidad de $\overline{\widehat{f}}$ en $A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})$ y por tanto en $\overline{\widehat{E_1}}$.

En cuanto al recíproco, la isocontinuidad de $\overline{\widehat{f}}$ en $\overline{\widehat{E_1}}$ implica que:

$$f(\mathbf{Cl}(A))\diamondsuit_2\widehat{I}'_2(f(\mathbf{Cl}(A)), \Phi_f\left(F_0^{E_1}\right)) = \overline{\widehat{f}}\left(\mathbf{Cl}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right) \subseteq$$
$$\subseteq \mathbf{Cl}\left(\overline{\widehat{f}}\left(A\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(A, F_0^{E_1})\right)\right) = \mathbf{Cl}(f(A))\diamondsuit_2\widehat{I}'_2(\mathbf{Cl}(f(A)), \Phi_f\left(F_0^{E_1}\right)).$$

Ahora, si suponemos además la inyectividad en F^{E_2}, debe ser $f(\mathbf{Cl}(A)) \subseteq \mathbf{Cl}(f(A))$, obteniéndose la continuidad en f. $\square$

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 4.1.8. *Consideremos el círculo $C \subseteq \pi_{xy}$ de radio 2, como espacio topológico con la topología euclídea usual y la aplicación identidad $Id : C \to C$. Consideremos a continuación las dos siguientes isotopías:*

a) *En primer lugar, el levantamiento isotópico $\mathbf{I_1}$ de C a partir de los elementos principales $\diamondsuit_1$ e $\widehat{I}'_1$, dependiente del factor tiempo $t \in \{0,1\}$, tal que $C\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(C,0)$ es la inversa de la proyección estereográfica de la esfera unidad en C desde el polo norte, dando lugar por tanto al hemisferio sur de la misma.*

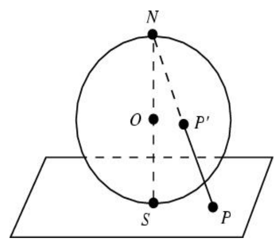

Figura 4.4: Proyección estereográfica desde el polo norte.

Por su parte, $C\diamondsuit_1\widehat{I}'_1(C,1)$ es la inversa de la proyección estereográfica de la esfera unidad en C desde el polo sur, dando lugar al hemisferio norte de la misma.

b) *En segundo lugar, el levantamiento isotópico $\mathbf{I_2}$ de C a partir de los elementos principales $\diamondsuit_2$ e $\widehat{I}'_2$, dependiente del factor tiempo $t \in \{0,1\}$, tal que $C\diamondsuit_2\widehat{I}'_1(C,i)$ es una translación de C en el plano π_{xy}, distinta para cada $i \in \{0,1\}$.*

En particular se obtienen como proyección isotópica la esfera de radio unidad S^2 y dos copias de C (C_1 y C_2), conjuntos que pueden ser dotados de la isotopología isoeuclídea correspondiente, al ser inyectivas las isotopías $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$, respectivamente, en los factores externos asociados.

Consideramos por otra parte la aplicación $\Phi_{Id} : \{0,1\} \to \{0,1\} : t \to \Phi_{Id}(t) = t$. Aplicando entonces la Proposición 4.1.7 tenemos que la isoaplicación $\widehat{\widehat{Id}} : S^2 \to C_1 \bigcup C_2$ es isocontinua en S^2, al ser continua convencionalmente la función identidad en C. No obstante obsérvese que en este caso, $\widehat{\widehat{Id}}$ es una aplicación y no una función, pues llamando E al ecuador de S^2, resulta que cada punto de E se transforma mediante $\widehat{\widehat{Id}}$ en dos puntos, cada uno en la frontera de C_1 y C_2, respectivamente.

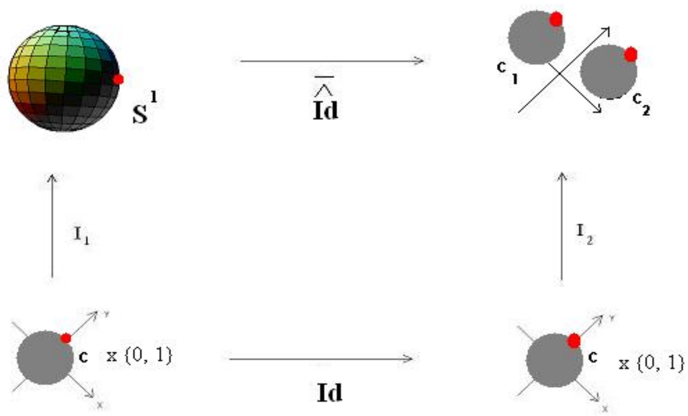

Figura 4.5: Aplicación isocontinua desde una esfera a dos círculos.

◁

A continuación pasamos a dar la definición de isohomeomorfismo entre isoespacios:

Definición 4.1.9. *Sean $\overline{\widehat{E_1}}$ y $\overline{\widehat{E_2}}$ dos isoespacios cualesquiera. Se denomina* isohomeomorfismo entre $\overline{\widehat{E_1}}$ y $\overline{\widehat{E_2}}$, *a toda isoaplicación $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{E_1}} \to \overline{\widehat{E_2}}$, que, estando asociada isotópicamente a un homeomorfismo $\varphi : E_1 \to E_2$, sea además biyectiva y biisocontinua (esto es, que tanto ella como su inversa sean isocontinuas).*

Así, en las condiciones del Ejemplo 4.1.4, la isofunción $\overline{\widehat{f}}$ no es isohomeomorfismo, al no ser f homeomorfismo. En cambio, puede comprobarse que si $g(x) = x^3$, entonces la isofunción $\overline{\widehat{g}}(x * \widehat{I}(s,t)) = x^3 st^3$ es un isohomeomorfismo de inversa $\overline{\widehat{g^{-1}}}(x * \widehat{I}(s,t)) = \frac{x^{1/3}}{st^3}$.

Es adecuado considerar el siguiente resultado:

Proposición 4.1.10. *Sea $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{E_1}} \to \overline{\widehat{E_2}}$ una isoaplicación bien definida entre dos isoespacios topológicos $\overline{\widehat{E_1}}$ y $\overline{\widehat{E_2}}$, obtenidos a partir de los elementos de isotopía principales $\diamondsuit_1$ e $\widehat{I}'_1$ y $\diamondsuit_2$ e $\widehat{I}'_2$, respectivamente, con isounidades dependientes de factores externos respectivos F^{E_1} y F^{E_2}. Sea $\varphi : E_1 \to E_2$ la aplicación asociada a $\overline{\widehat{\varphi}}$. Se cumple entonces que:*

a) En caso de ser Φ_φ sobreyectiva, entonces si φ es sobreyectiva, también lo es $\overline{\widehat{\varphi}}$.

b) Si la isotopía utilizada es inyectiva en F^{E_2}, se tiene el recíproco del apartado anterior.

c) Si la isotopía utilizada es inyectiva en F^{E_1}, entonces, si $\overline{\widehat{\varphi}}$ es inyectiva, también lo es φ.

d) En caso de ser inyectivas la aplicación Φ_φ y la isotopía que origina $\overline{\widehat{E_2}}$, entonces se tiene el recíproco del apartado anterior.

Demostración.

a) Sea $Y\Diamond_2\widehat{I}'_2(Y,F_0^{E_2}) \in \overline{\widehat{E_2}}$. Dada la sobreyectividad de φ y Φ_φ, existen entonces $X \in E_1$ tal que $\varphi(X) = Y$ y $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$ tal que $\Phi_\varphi(F_0^{E_1}) = F_0^{E_2}$. En definitiva, existe $X\Diamond_1\widehat{I}'_1(X,F_0^{E_1}) \in \overline{\widehat{E_1}}$ tal que $\overline{\widehat{\varphi}}(X\Diamond_1\widehat{I}'_1(X,F_0^{E_1})) = Y\Diamond_2\widehat{I}'_2(Y,F_0^{E_2})$.

b) Sea $Y \in E_2$. Tomamos $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$ cualquiera y consideramos entonces $Y\Diamond_2 \widehat{I}'_2(Y,\Phi_\varphi(F_0^{E_1})) \in \overline{\widehat{E_2}}$. Puesto que $\overline{\widehat{\varphi}}$ es sobreyectiva, entonces existe $X \in E_1$ tal que $\varphi(X)\Diamond_2\widehat{I}'_2(\varphi(X),\Phi_\varphi(F_0^{E_1})) = \overline{\widehat{\varphi}}(X\Diamond_1\widehat{I}'_1(X,F_0^{E_1})) = Y\Diamond_2\widehat{I}'_2(Y,\Phi_\varphi(F_0^{E_1}))$. Con lo cual, al ser la isotopía utilizada inyectiva en F^{E_2}, se llega a que debe ser $\varphi(X) = Y$.

c) Supongamos que $\varphi(X_1) = \varphi(X_2) \in E_2$. Entonces, fijado $F_0^{E_1} \in F^{E_1}$ cualquiera, se tiene que $\overline{\widehat{\varphi}}(X_1\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_1,F_0^{E_1})) = \varphi(X_1)\Diamond_2\widehat{I}'_2(\varphi(X_1),\Phi_\varphi(F_0^{E_1})) = \varphi(X_2)\Diamond_2 \widehat{I}'_2(\varphi(X_2),\Phi_\varphi(F_0^{E_1})) = \overline{\widehat{\varphi}}(X_2\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_2,F_0^{E_1}))$. Dada entonces la inyectividad de $\overline{\widehat{\varphi}}$ se tiene entonces que $X_1\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_1,F_0^{E_1}) = X_2\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_2,F_0^{E_1})$. Con lo cual, la inyectividad en F^{E_1} implica finalmente que $X_1 = X_2$.

d) Supongamos que $\overline{\widehat{\varphi}}(X_1\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_1,F_1^{E_1})) = \overline{\widehat{\varphi}}(X_2\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_2,F_2^{E_1}))$. Debe ser entonces $\varphi(X_1)\Diamond_2\widehat{I}'_2(\varphi(X_1),\Phi_\varphi(F_1^{E_1})) = \varphi(X_2)\Diamond_2\widehat{I}'_2(\varphi(X_2),\Phi_\varphi(F_2^{E_1}))$. La inyectividad de la isotopía utilizada en la construcción de $\overline{\widehat{E_2}}$ implica entonces que $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$ y $\Phi_\varphi(F_1^{E_1}) = \Phi_\varphi(F_2^{E_1})$. A continuación, la inyectividad de φ y Φ_φ hace que $X_1 = X_2$ y $F_1^{E_1} = F_2^{E_1}$. Y por tanto, $X_1\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_1,F_1^{E_1}) = X_2\Diamond_1\widehat{I}'_1(X_2,F_2^{E_1})$. $\square$

De esta forma tenemos en particular que la aplicación $\overline{\widehat{Id}}$ del Ejemplo 4.1.8 es una biyección al serlo la aplicación Id y verificarse cada una de las condiciones de la proposición anterior. Obsérvese que $\widehat{\overline{Id}}$ es una aplicación biyectiva, pero no una función biyectiva.

Por otra parte, teniendo en cuenta las Proposiciones 4.1.7 y 4.1.10, se llega al siguiente resultado:

Corolario 4.1.11. *En caso de cumplirse las siguientes propiedades:*

a) Φ_φ *es una biyección.*

b) La isotopía utilizada es inyectiva en F^{E_1}.

c) La isotopía que origina $\widehat{\overline{E_2}}$ *es inyectiva,*

entonces, φ *es un homeomorfismo si y sólo si* $\widehat{\overline{\varphi}}$ *es un isohomeomorfismo.* □

En concreto, la aplicación $\widehat{\overline{Id}}$ del Ejemplo 4.1.8 es un isohomeomorfismo al ser un homeomorfismo la aplicación Id y verificarse cada una de las condiciones del corolario anterior.

Otro resultado que utilizaremos en los ejemplos posteriores es la siguiente:

Proposición 4.1.12. *Sea* $\widehat{\overline{\varphi}} : \widehat{\overline{E_1}} \to \widehat{\overline{E_2}}$ *un isohomeomorfismo entre dos isoespacios isotopológicos* $\widehat{\overline{E_1}}$ *y* $\widehat{\overline{E_2}}$*, obtenidos a partir de los elementos de isotopía principales* $\diamondsuit_1$ *e* $\widehat{I}'_1$ *y* $\diamondsuit_2$ *e* $\widehat{I}'_2$*, respectivamente, con isounidades dependientes de factores externos respectivos* F^{E_1} *y* F^{E_2}*. Sea* $\varphi : E_1 \to E_2$ *el homeomorfismo asociado a* $\widehat{\overline{\varphi}}$*. Sea* $\widehat{\overline{U}}$ *un abierto de* $\widehat{\overline{E_1}}$*. Se verifica entonces que* $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}})$ *es un abierto de* $\widehat{\overline{E_2}}$*.*

Si la isotopía utilizada es inyectiva en F^{E_1} *y* F^{E_2}*, en el caso en que* $\widehat{\overline{U}}$ *sea un isoabierto de* $\widehat{\overline{E_1}}$*, se tendrá entonces que* $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}})$ *es un isoabierto de* $\widehat{\overline{E_2}}$*.*

Demostración.

La primera parte es inmediata, ya que $\widehat{\overline{\varphi}}^{-1}$ es isocontinua al ser $\widehat{\overline{\varphi}}$ un isohomeomorfismo.

Para la segunda parte del enunciado observamos en primer lugar que la inyectividad en F^{E_1} y F^{E_2} asegura que la isotopologías en $\widehat{\overline{E_1}}$ y $\widehat{\overline{E_2}}$ son de hecho topologías en dichos espacios.

Fijado entonces un isoabierto $\overline{\widehat{U}}$ en $\overline{\widehat{E_1}}$, se cumple que $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\varphi(U)}}$. Ahora bien, teniendo en cuenta que U debe ser un abierto de E_1 al ser $\widehat{U}$ un isoabierto de $\widehat{E_1}$, llegamos aplicando el caso convencional a que $\varphi(U)$ es un abierto de E_2. Pero entonces, por construcción de la isotopología sobre $\widehat{E_2}$, debe ser $\widehat{\varphi(U)} = \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}})$ un isoabierto de $\widehat{E_2}$, como queríamos probar. □

Ejemplo 4.1.13. *Consideremos el isocuerpo $(\mathbb{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$, obtenido usando la isounidad $\widehat{I} = \widehat{I}(x) = x^4$. Esto es, suponemos el levantamiento isotópico inyectivo $x \to \overline{\widehat{x}} = x^5$.*

Consideramos por otra parte el espacio isoeuclídeo unidimensional $\overline{\widehat{E}}(\overline{\widehat{\overrightarrow{x}}}, \overline{\widehat{\delta}}, \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, obtenido a partir de:

a) Los elementos $\star \equiv +, \widehat{S} = 0, *_{|\mathbb{R}} \equiv \times$ e $\widehat{I'} = \widehat{I'}(x,t)$ tal que $t \in \{0,1\}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x * \widehat{I'} = \left\{ \begin{array}{l} (x,0),\ si\ t = 0, \\ (0,x),\ si\ t = 1. \end{array} \right\}.$$

b) Las aplicaciones $\Phi_+(t,t) = t = \Phi_\times(t,t)$.

En particular, $\overline{\widehat{E}}$ se ha obtenido a partir de un levantamiento isotópico inyectivo.

Resulta entonces que el homeomeorfismo $f : \mathbb{R} \to E : x \to f(x) = x^3$ se proyecta isotópicamente al isohomeomorfismo:

$$\overline{\widehat{f}}(x) = \overline{\widehat{f}}(x^{1/5} * \widehat{I}) = \left\{ \begin{array}{l} (x^{3/5},0),\ si\ t = 0, \\ (0,x^{3/5}),\ si\ t = 1. \end{array} \right\}.$$

En consecuencia, cualquier intervalo (a,b), que es abierto en $(\mathbb{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$ se transforma en un abierto isoeuclídeo de la forma $(a^{3/5}, b^{3/5}) \times \{0\}$, o bien $\{0\} \times (a^{3/5}, b^{3/5})$.

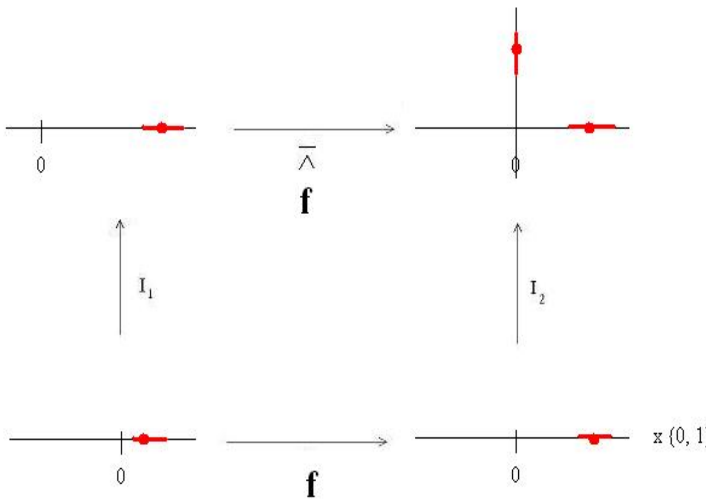

Figura 4.6: Dos rectas cruzadas como proyección isotópica de una recta.

$\triangleleft$

4.2. Isovariedades isodiferenciables

Estamos ya en condiciones de dar la definición de isocarta local. Para ello, tomaremos $\overline{\widehat{M}}$ de ahora en adelante un isoespacio isotopológico de (iso)Hausdorff ((iso)segundo-numerable), obtenido a partir de una isotopía de elementos principales $\diamondsuit_M$ e $\widehat{I}'_M$ y dependiente de factores externos F^M. Análogamente, supondremos que $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ es levantado isotópico del espacio real m-dimensional $\mathbb{R}^m$, obtenido a partir de los elementos principales $\diamondsuit_{\mathbb{R}^m}$ e $\widehat{I}'_{\mathbb{R}^m}$, dependiente de factores externos $F^{\mathbb{R}^m}$:

Definición 4.2.1. *Se llama* isocarta local de dimensión m sobre $\overline{\widehat{M}}$ *a todo par* $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$*, donde* $\overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$ *es un abierto de* $\overline{\widehat{M}}$*,* $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ *es un abierto isoeuclídeo y* $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}})$ es un isohomeomorfismo.

Las isocoordenadas $(\overline{\widehat{\varphi}}_1(\overline{\widehat{P}}), ..., \overline{\widehat{\varphi}}_m(\overline{\widehat{P}}))$, con $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$, son llamadas *isocoordenadas de la isocarta* $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$. Aquí, $\overline{\widehat{\varphi}}_i = \pi_i \circ \overline{\widehat{\varphi}}$, donde π_i es la proyección i-ésima.

Así, en las condiciones del Ejemplo 4.1.13, si consideramos el espacio isoeuclídeo $\overline{\widehat{E}}$ como isoespacio isotopológico asociado a la recta real como espacio topológico, entonces el par $(\mathbb{R}\times\{0\}\bigcup\{0\}\times\mathbb{R},\overline{\widehat{f}}^{-1})$ es de hecho una isocarta local de dimensión 1 sobre $\overline{\widehat{E}}$.

Por su parte, en las condiciones del Ejemplo 4.1.8, si consideramos la extensión de la isotopía $\mathbf{I_2}$ de C a todo el plano $\mathbb{R}^2$, tendremos que el par $(S^2,\overline{\widehat{Id}})$ es una isocarta local de dimensión 2 sobre S^2.

Cabe observar no obstante, que en general la proyección isotópica de una carta local convencional no tiene porqué ser una isocarta local en el nivel de proyección. Podemos ver esto en el siguiente:

Ejemplo 4.2.2. *Consideremos el grupo* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *y tomemos como conjunto general a* $V=\mathbb{R}\bigsqcup\mathbb{R}'\bigsqcup\mathbb{R}''$*, donde* $\bigsqcup$ *denota unión disjunta y* $\mathbb{R}=\mathbb{R}'=\mathbb{R}''$*, si bien para distinguir sus elementos notamos estos por* a, a' *y* a''*, respectivamente.*

Suponemos además la ley $*$ *definida como:*

$$a*b=a\times b=ab.$$
$$a*b'=b'*a=(b^a)'.$$
$$a*b''=b''*a=(b^a)''.$$
$$a'*b'=\left\{\begin{array}{c}1\ ,\ si\ ab=1,\\(ab)''\ ,\ si\ ab\neq 1.\end{array}\right\}.$$
$$a'*b''=b''*a'=(ab)'.$$
$$a''*b''=\left\{\begin{array}{c}1\ ,\ si\ ab=1,\\(ab)''\ ,\ si\ ab\neq 1.\end{array}\right\}.$$

Tenemos en particular que 1 *es la unidad de* V *respecto a* $*$.

A continuación, tomamos $\widehat{I}=\widehat{I}(t)=t$*, con* $t\in\mathbb{N}$*, siendo entonces* $T=\widehat{I}^{-1}=\frac{1}{t}$*. Resulta pues el conjunto isotópico* $\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}=\mathbb{R}^+$.

Consideremos finalmente la aplicación:

$$\Phi_\times:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}:(t_1,t_2)\to\left\{\begin{array}{c}t_1t_2\ ,\ si\ t_1\neq t_2,\\t_1\ ,\ si\ t_1=t_2.\end{array}\right\}.$$

Resulta entonces que para tiempos distintos, se tiene la ley $\overline{\widehat{\times}}\equiv\times$*, si bien la isotopía no es compatible respecto a* $\times$*, pues:*

$$a*\widehat{I}(t_1)\overline{\widehat{\times}}b*\widehat{I}(t_2)=t_1^at_2^b\neq(t_1t_2)^{ab}=(ab)*\widehat{I}(t_1t_2).$$

En cambio, para $t_1 = t_2 = t$:

$$a \overline{\widehat{\times}} b = \frac{ab}{t}.$$

En particular, fijado un tiempo $t = t_0$, $\widehat{I} = t_0$ es unidad de $\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}$.

Seguidamente consideramos $(\mathbb{R}^*, Id_{\mathbb{R}^*})$ como carta local de $\mathbb{R}^*$ y tomamos la aplicación $\Phi_{Id_{\mathbb{R}^*}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : t \to 1$, que no es biyección. Obtenemos entonces la isoaplicación:

$$\overline{\widehat{Id_{\mathbb{R}^*}}} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to 1.$$

Obsérvese entonces que mientras que $Id_{\mathbb{R}^*}$ es una biyección, su proyección isotópica no lo es. En particular, $(\mathbb{R}^+, \overline{\widehat{Id_{\mathbb{R}^*}}})$ no es una isocarta local de $\mathbb{R}^+$. $\triangleleft$

No obstante, podemos obtener un resultado que asegure una correspondencia biyectiva entre cartas e isocartas locales:

Proposición 4.2.3. *Consideremos una isoaplicación $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{M}} \to \mathbb{R}^m$. En caso de que la isotopía utilizada sea inyectiva en F^M y en la construcción de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ y se verifique que Φ_φ sea una biyección, se cumple entonces que (U, φ) es una carta local de dimensión m sobre M si y sólo si $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ es una isocarta local de dimensión m sobre $\overline{\widehat{M}}$.*

Demostración.

En primer lugar, atendiendo a la inyectividad en F^M, tenemos que U es un abierto de M si y sólo si $\overline{\widehat{U}}$ es un abierto de $\overline{\widehat{M}}$.

En segundo lugar, la inyectividad en $F^{\mathbb{R}^m}$ asegura que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\varphi(U)}} \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}^m}} \equiv \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ y que $\varphi(U)$ es un abierto euclídeo si y sólo si $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}})$ es un abierto isoeuclídeo.

Finalmente, el Corolario 4.1.11, bajo cuyas condiciones nos encontramos, asegura que $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo si y sólo si $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}})$ es un isohomeomorfismo. $\square$

Veamos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo 4.2.4. *Consideremos en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *la esfera* $S^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$, *que es una variedad diferenciable de dimensión* n, *que podemos recubrir con las cartas* (U_+, φ_+) *y* (U_-, φ_-), *donde están definidas las proyecciones estereográficas:*

$$\varphi_+ : U_+ = \{x \in S^n : x_{n+1} > -1\} \to \mathbb{R}^n : x \to \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right).$$

$$\varphi_- : U_- = \{x \in S^n : x_{n+1} < 1\} \to \mathbb{R}^n : x \to \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

Consideramos a continuación la isotopía inyectiva de clase III, de elementos $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $* \equiv \times$ *e* $\widehat{I'} = \left(\widehat{I'}_i^j\right)_{i,j=1}^{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$, *no singular, siendo* $T' = \widehat{I'}^{-1}$. *En particular resulta el conjunto isotópico:*

$$\overline{\widehat{S^n}} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \widehat{I'}_i^1, ..., \sum_{i=1}^{n+1} x_i \widehat{I'}_i^{n+1}\right) : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}.$$

Así por ejemplo, en la figura siguiente podemos observar el conjunto $\overline{\widehat{S^2}}$ *para* $\widehat{I'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

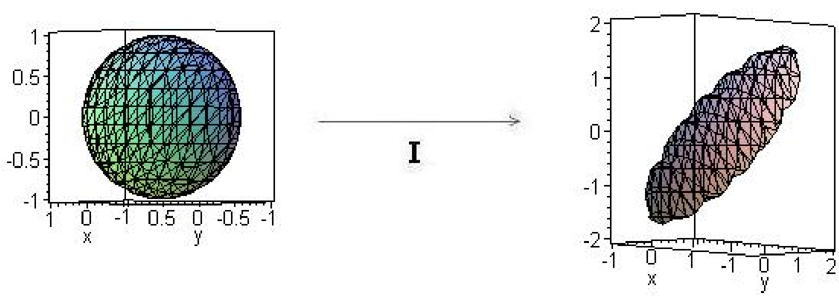

Figura 4.7: $\overline{\widehat{S^2}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - x)^2 + (z - y)^2 = 1\}$.

Por su parte, dado que la isotopía utilizada es inyectiva al ser no singular la matriz $\widehat{I'}$, *el conjunto isotópico* $\overline{\widehat{S^n}}$ *puede dotarse a su vez de la isotopología correspondiente a la topología euclídea de* S^n, *resultando entonces, aplicando la Proposición 1.3.2, un isoespacio isotopológico* $\overline{\widehat{T_2}}$. *De hecho, por construcción, también tendremos que es isosegundo-numerable, pues el levantamiento isotópico utilizado lleva bases a bases.*

En particular, se tendrán a su vez los abiertos en $\overline{\widehat{S^n}}$:

$$\overline{\widehat{U_+}} = \left\{x \in \overline{\widehat{S^n}} : \pi_{n+1}(x \cdot T) > -1\right\}; \qquad \overline{\widehat{U_-}} = \left\{x \in \overline{\widehat{S^n}} : \pi_{n+1}(x \cdot T) < 1\right\}.$$

Finalmente, consideramos la isotopía inyectiva de clase III de $\mathbb{R}^n$ *de elementos* $\star$, $\widehat{S}$, $*$ *e* $\widehat{I}'' = \left(\widehat{I''}_i^j\right)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$*, no singular.*

Puesto que en este caso no intervienen factores externos en el levantamiento isotópico, resultan las proyecciones isoestereográficas*:*

$$\overline{\widehat{\varphi_+}} : \overline{\widehat{U_+}} \to \mathbb{R}^n : (x_1, ..., x_{n+1}) \to \overline{\widehat{\varphi_+}\left((x_1, ..., x_{n+1}) \cdot T\right)} = \varphi_+\left((x_1, ..., x_{n+1}) \cdot T\right) \cdot \widehat{I}''.$$

$$\overline{\widehat{\varphi_-}} : \overline{\widehat{S^n}} \to \mathbb{R}^n : (x_1, ..., x_{n+1}) \to \overline{\widehat{\varphi_+}\left((x_1, ..., x_{n+1}) \cdot T\right)} = \varphi_-\left((x_1, ..., x_{n+1}) \cdot T\right) \cdot \widehat{I}''.$$

Dado que estamos en las condiciones de la Proposición 4.2.3, resulta entonces que $(\overline{\widehat{U_+}}, \overline{\widehat{\varphi_+}})$ *y* $(\overline{\widehat{U_-}}, \overline{\widehat{\varphi_-}})$ *son isocartas locales de dimensión* n *sobre* $\overline{\widehat{S^n}}$.

Así por ejemplo, en la isoesfera $\overline{\widehat{S^2}}$ *que hemos construido anteriormente, si consideramos a su vez la isounidad* $\widehat{I}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, resultan:*

$$T' = \widehat{I}'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{\widehat{U_+}} = \left\{(x, y, z) \in \overline{\widehat{S^2}} : z - y > -1\right\}; \qquad \overline{\widehat{U_-}} = \left\{x \in \overline{\widehat{S^2}} : z - y < 1\right\}.$$

$$\overline{\widehat{\varphi_+}} : \overline{\widehat{U_+}} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to \varphi_+(x, y-x, z-y) \cdot \widehat{I}'' = \left(\frac{x}{1+z-y}, \frac{y-x}{1+z-y}\right) \cdot \widehat{I}'' = \left(\frac{y}{1+z-y}, \frac{y-x}{1+z-y}\right).$$

$$\overline{\widehat{\varphi_-}} : \overline{\widehat{U_-}} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to \varphi_+(x, y-x, z-y) \cdot \widehat{I}'' = \left(\frac{x}{1-z+y}, \frac{y-x}{1-z+y}\right) \cdot \widehat{I}'' = \left(\frac{x}{1-z+y}, \frac{y-x}{1-z+y}\right).$$

$\triangleleft$

Ejemplo 4.2.5. *Consideremos la circunferencia S^1 asociada a sus dos cartas locales obtenidas a partir de las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur, junto a la esfera S^2 como levantado isotópico de S^1, mediante la revolución respecto al eje OZ en $\mathbb{R}^3$ natural al considerar el factor externo $F^{S^1} = [0,\pi)$. Por otra parte consideremos el homeomorfismo $\varphi : S^1 \to [0,2\pi)$, tal que a cada punto de la circunferencia le asigna el ángulo que forma con el eje horizontal en el plano π_{xy}. Finalmente, supongamos la isotopía de $[0,2\pi)$ a partir de los elementos $\diamondsuit$ e $\widehat{I}'$, dependiente del factor externo $F^{[0,2\pi)} = [0,2\pi)$, tal que: $x\diamondsuit\widehat{I}'(x,t) = (x,t)$. Esto es, $\overline{\widehat{[0,2\pi)}} = [0,2\pi) \times [0,\pi)$.*

Esta última isotopía puede extenderse a todo $\mathbb{R}$, de tal forma que $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}\diamondsuit\widehat{I}'(\mathbb{R}, [0,\pi)) = \mathbb{R}\times[0,\pi)$, que si bien tiene dimensión 2 en el sentido convencional, respecto a la unidad $+1$, tendrá dimensión 1 respecto a la isounidad $\widehat{I}'$.

Tomando ahora la aplicación $\Phi_\varphi = Id : [0,\pi) \to [0,\pi)$, resulta aplicando la Proposición 4.2.3 que, fijado cualquier meridiano salvo uno de los polos, U, en S^2, el par $(U,\overline{\widehat{\varphi}})$ es una isocarta local de dimensión 1 sobre S^2.

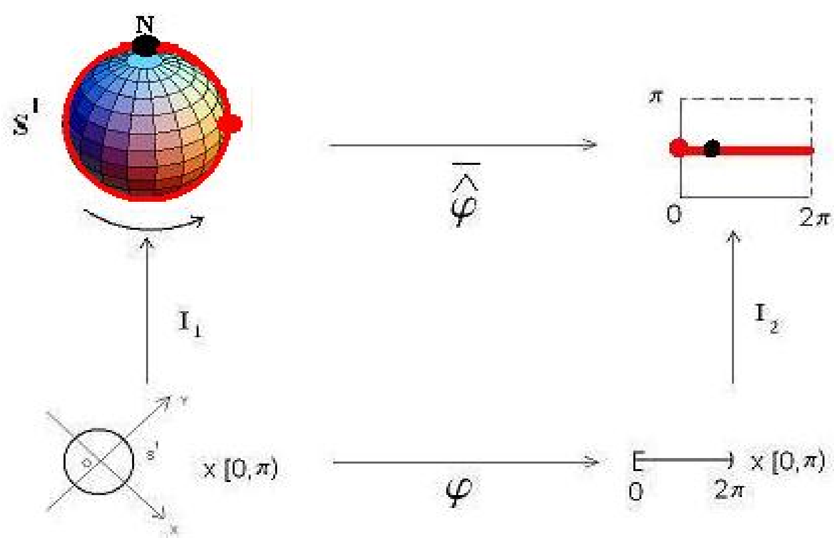

Figura 4.8: Isocarta local de dimensión 1 de una esfera.

◁

A continuación vamos a dar una relación entre isocartas locales:

Definición 4.2.6. *Sean $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}})$ y $(\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$ dos isocartas locales de dimensión m sobre $\overline{\widehat{M}}$. Se dice que $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}})$ y $(\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$* están relacionadas *y se denota $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}}) \sim (\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$ si:*

a) *O bien,* $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} = \emptyset$.

b) *O bien,* $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \neq \emptyset$ *y se verifica que pertenecen a* $\overline{\widehat{C}}^{\infty}$ *las isoaplicaciones siguientes:*

b.1) $\overline{\widehat{\Psi}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \to \overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}})$.

b.2) $\overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} : \overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \to \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}})$.

A estas dos últimas isoaplicaciones les llamaremos isoaplicaciones de transición.

Obsérvese que estamos trabajando con isoespacios localmente isoeuclídeos y que como tales, las nociones y resultados sobre isodiferenciabilidad que vimos al final del capítulo anterior son aplicables a nuestro estudio sobre isovariedades isodiferenciables, siendo coherente en particular la anterior definición.

Veamos un par de ejemplos al respecto:

Ejemplo 4.2.7. *Consideramos la esfera* $\overline{\widehat{S^2}}$ *en las condiciones del Ejemplo 4.2.4. Veamos que las isocartas* $(\overline{\widehat{U_+}}, \overline{\widehat{\varphi_+}})$ *y* $(\overline{\widehat{U_-}}, \overline{\widehat{\varphi_-}})$ *están relacionadas. Para ello utilizamos las isoaplicaciones siguientes:*

$$\overline{\widehat{\varphi_+}} : \overline{\widehat{U_+}} \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \to \left(\frac{y}{1+z-y}, \frac{y-x}{1+z-y}\right).$$

$$\overline{\widehat{\varphi_+}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi_+}}(\overline{\widehat{U_+}}) \to \overline{\widehat{U_+}} : (x,y) = \overline{\widehat{(x-y,y)}} \to \overline{\widehat{\varphi_+}}^{-1}(x,y) = \overline{\varphi_+^{-1}\widehat{(x-y,y)}} =$$

$$= \pi \circ \mathbf{I}' \left(\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2y}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{1-(x-y)^2-y^2}{1+(x-y)^2+y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x+1-(x-y)^2-y^2}{1+(x-y)^2+y^2}\right).$$

$$\overline{\widehat{\varphi_-}} : \overline{\widehat{U_-}} \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \to \left(\frac{x}{1-z+y}, \frac{y-x}{1-z+y}\right).$$

$$\overline{\widehat{\varphi_-}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi_-}}(\overline{\widehat{U_-}}) \to \overline{\widehat{U_-}} : (x,y) = \overline{\widehat{(x-y,y)}} \to \overline{\widehat{\varphi_-}}^{-1}(x,y) = \overline{\varphi_-^{-1}\widehat{(x-y,y)}} =$$

$$= \pi \circ \mathbf{I}' \left(\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2y}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{-1+(x-y)^2+y^2}{1+(x-y)^2+y^2} \right) =$$
$$= \left(\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x-1+(x-y)^2+y^2}{1+(x-y)^2+y^2} \right).$$

En particular, para $(x,y) \in \overline{\widehat{U_+}} \cap \overline{\widehat{U_-}}$*:*

$$\overline{\widehat{\varphi_+}} \circ \overline{\widehat{\varphi_-}}^{-1}(x,y) =$$
$$= \overline{\widehat{\varphi_+}} \left(\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x}{1+(x-y)^2+y^2}, \frac{2x-1+(x-y)^2+y^2}{1+(x-y)^2+y^2} \right) =$$
$$= \left(\frac{x}{(x-y)^2+y^2}, \frac{y}{(x-y)^2+y^2} \right) = \overline{\widehat{\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}}(\widehat{x-y,y})} = \overline{\widehat{\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}}}(x,y) =$$
$$= \overline{\widehat{\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}}}(x,y) = \overline{\widehat{\varphi_-}} \circ \overline{\widehat{\varphi_+}}^{-1}(x,y).$$

La diferenciabilidad de $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}$ *y* $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}$ *implica entonces la isodiferenciabilidad de* $\overline{\widehat{\varphi_+}} \circ \overline{\widehat{\varphi_-}}^{-1}$ *y* $\overline{\widehat{\varphi_-}} \circ \overline{\widehat{\varphi_+}}^{-1}$*. Por tanto, las dos isocartas locales están relacionadas.*

$\lhd$

Ejemplo 4.2.8. *Consideremos las cartas locales de dimensión* 1 *sobre* $M = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, Id)$ *y* $(\mathbb{R}, f)$*, donde* Id *es la aplicación identidad en* $\mathbb{R}$ *y* f *es tal que* $f(x) = x^3$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Usemos a continuación el levantamiento isotópico inyectivo que tiene como elementos de isotopía, $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $* \equiv \times$ *e* $\widehat{I} = 2$*, esto es, aquél que lleva* x *a* $\overline{\widehat{x}} = 2x$ *en el nivel de proyección correspondiente, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

La Proposición 4.2.3 nos dice que entonces las isocartas $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})$ *y* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})$ *son isocartas locales de dimensión* 1 *sobre* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*. En este caso:*

a) $\overline{\widehat{Id}} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, es tal que* $\overline{\widehat{Id}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{Id(x)}} = \overline{\widehat{x}} = 2x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

b) $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, es tal que* $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{f(x)}} = \overline{\widehat{x^3}} = \overline{\widehat{x}}^{\widehat{3}} = 2x^3$*.*

De esta forma, $\overline{\widehat{Id}}^{-1} = \overline{\widehat{Id}}$ *y* $\overline{\widehat{f}}^{-1}$ *es tal que* $\overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{x}}^{\widehat{\frac{1}{3}}}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Resulta por tanto que:*

a) $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{Id}}^{-1} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, *es tal que* $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{Id}}^{-1}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{x}}^{\widehat{3}} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}$, *pues* $f \circ Id^{-1}(x) = x^3$ *es de clase* C^{∞} *y podemos aplicar entonces el Corolario 3.4.9.*

b) $\overline{\widehat{Id}} \circ \overline{\widehat{f}}^{-1} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, *es tal que* $\overline{\widehat{Id}} \circ \overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{Id}}(\overline{\widehat{x}}^{\widehat{\frac{1}{3}}}) = \overline{\widehat{x}}^{\widehat{\frac{1}{3}}} \notin \overline{\widehat{C}}^{\infty}$, *pues no es isodiferenciable en* $\overline{\widehat{x}} = \overline{\widehat{0}}$, *pues* $Id \circ f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ *no es diferenciable en* 0 *y podemos aplicar entonces el Corolario 3.4.9.*

De esta forma, las isocartas locales $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})$ *y* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})$ *no están relacionadas, al igual que ocurría con las cartas locales* $(\mathbb{R}, Id)$ *y* $(\mathbb{R}, f)$, en el caso convencional. $\lhd$

Como podemos ver en los ejemplos anteriores, parece existir una cierta equivalencia entre los resultados convencionales y los resultados en el nivel de proyección. Sin embargo, apurando las herramientas que proporcionan las isotopías podemos obtener resultados interesantes. Por ejemplo, acabamos de ver que las isocartas locales $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})$ y $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})$ no están relacionadas según la relación dada en la Definición 4.2.6, al igual que teníamos convencionalmente que $(\mathbb{R}, Id) \not\sim (\mathbb{R}, f)$. Ahora bien, estas últimas sí pueden relacionarse por medio de una isotopía. Bastaría aplicar para ello una isotopía que levantase isotópicamente cada número $x \in \mathbb{R}$ a $\overline{\widehat{x}} = x^3 \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$, como puede ser la basada en la isounidad $\widehat{I} = \left\{ \begin{array}{c} x^2, \text{ si } x \neq 0, \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{array} \right\}$, de elemento isotópico $T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x^{2/3}}, \text{ si } x \neq 0, \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{array} \right\}$.

De esta forma se tiene además que $\overline{\widehat{Id}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{x}} = x^3$. Esto es, $\overline{\widehat{Id}} = f$. Con lo cual, resulta que en este caso, $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}}) = (\mathbb{R}, f)$. Llegamos por tanto a obtener que dos cartas locales convencionalmente distintas, aun no estando relacionadas, pueden considerarse isotópicamente equivalentes.

Veamos a continuación un resultado que relaciona cartas locales equivalentes con isocartas locales equivalentes en el nivel de proyección. Para ello, cuando dos cartas locales (U, φ) y (V, Ψ) de un espacio topológico M estén relacionadas en el nivel convencional, notaremos tal relación por:

$$(U, \varphi) \sim (V, \Psi).$$

De esta forma probamos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.9. *Dadas dos cartas locales de dimensión m sobre M, (U,φ) y (V,Ψ), en las condiciones de la Proposición 4.2.3, se tiene que:*

$$(U,\varphi) \sim (V,\Psi) \Leftrightarrow (\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}}) \sim (\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}}).$$

Demostración.

En primer lugar, aplicando la Proposición 4.2.3, tenemos que $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}})$ y $(\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$ son dos isocartas locales de dimensión m sobre $\overline{\widehat{M}}$. Luego, basta ver las dos implicaciones indicadas. En concreto, veremos la condición suficiente, siendo completamente análogo el razonamiento referente a la condición necesaria:

Supongamos por tanto que $(U,\varphi) \sim (V,\Psi)$. Entonces pueden ocurrir:

a) $U \cap V = \emptyset$. Por ser inyectiva en F^M la isotopía utilizada por hipótesis, debe ser entonces $\emptyset = \overline{\widehat{U \cap V}} = \overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}$, con lo cual, $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}}) \sim (\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$.

b) $U \cap V \neq \emptyset$. De nuevo atendiendo a la inyectividad en F^M, se cumple entonces que $\emptyset \neq \overline{\widehat{U \cap V}} = \overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}$. Ahora bien, teniendo en cuenta la relación existente por hipótesis entre las cartas (U,φ) y (V,Ψ), resulta que las aplicaciones de transición correspondientes son diferenciables en el nivel convencional, esto es, $\varphi \circ \Psi^{-1}$ y $\Psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$. Ahora, aplicando el Corolario 3.4.9 llegamos a que $\overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} = \overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi^{-1}}} = \overline{\widehat{\varphi \circ \Psi^{-1}}} \in \overline{\widehat{C}}^\infty$, al ser $\varphi \circ \Psi^{-1} \in C^\infty$. De forma análoga, $\overline{\widehat{\Psi}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^\infty$.

Así, $(\overline{\widehat{U}},\overline{\widehat{\varphi}}) \sim (\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\Psi}})$, como queríamos probar.

□

En particular, dado que en las condiciones de los Ejemplos 4.2.7 y 4.2.8, se verifican las condiciones necesarias para aplicar la Proposición 4.2.9, dicho resultado nos aseguraría directamente los resultados obtenidos en dichos ejemplos.

Pasamos ya a dar la definición de isoatlas isodiferenciable:

Definición 4.2.10. *Un* isoatlas isodiferenciable *(o simplemente* isoatlas*, cuando no haya lugar a confusión)* de dimensión m sobre $\overline{\widehat{M}}$ *es una familia* $\overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{U_h}},\overline{\widehat{\varphi_h}})\}_{h\in H}$*, de isocartas locales de dimensión m sobre M, tales que:*

a) $\overline{\widehat{M}} = \cup_{h\in H}\overline{\widehat{U_h}}$.

b) $(\overline{\widehat{U_i}}, \overline{\widehat{\varphi_i}})$ *y* $(\overline{\widehat{U_j}}, \overline{\widehat{\varphi_j}})$ *están relacionadas para todo* $i, j \in H$.

Como puede observarse, tenemos que, por construcción, un isoatlas isodiferenciable sobre $\overline{\widehat{M}}$ no es más que un atlas sobre $\overline{\widehat{M}}$, visto bajo la isotopología definida en $\overline{\widehat{M}}$, usando isodiferenciabilidad en lugar de la diferenciabilidad convencional.

Señalemos también que el hecho de haber denotado a un isoatlas por $\overline{\widehat{A}}$, en lugar de A simplemente, proviene de que, bajo la construcción que estamos llevando a cabo, si levantamos isotópicamente las cartas de un atlas diferenciable en el nivel convencional, resulta un isoatlas isodiferenciable. Vemos esto en la siguiente:

Proposición 4.2.11. *Bajo las condiciones de la Proposición 4.2.3, se verifica que* $\overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{U}}_h, \overline{\widehat{\varphi}}_h)\}_{h\in H}$ *es un isoatlas isodiferenciable en* $\overline{\widehat{M}}$ *si y sólo si el atlas* $A = \{(U_h, \varphi_h)\}_{h\in H}$ *es diferenciable en* M.

Demostración.

El resultado es evidente usando la Proposición 4.2.9, bajo cuyas condiciones nos encontramos, junto con el hecho de que $\overline{\widehat{\cup_{h\in H}U_h}} = \cup_{h\in H}\overline{\widehat{U_h}}$, al tener por hipótesis la inyectividad en F^M. $\square$

Veamos un par de ejemplos de lo anterior:

Ejemplo 4.2.12. *En las condiciones del Ejemplo 4.2.7, resulta que sobre la isoesfera* $\overline{\widehat{S^n}}$*, las dos proyecciones isoestereográficas constituyen un isoatlas isodiferenciable de dimensión* n $\overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{U_+}}, \overline{\widehat{\varphi_+}}), (\overline{\widehat{U_-}}, \overline{\widehat{\varphi_-}})\}$*, pues:*

$$\overline{\widehat{U_+}} \cup \overline{\widehat{U_-}} = \overline{\widehat{S^n}}; \qquad (\overline{\widehat{U_+}}, \overline{\widehat{\varphi_+}}) \sim (\overline{\widehat{U_-}}, \overline{\widehat{\varphi_-}})$$

Coincide además con el levantamiento isotópico del atlas convencional $A = \{(U_+\varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$*, considerado este levantamiento carta a carta. De hecho se podría haber aplicado la Proposición 4.2.11 para ver que* $\overline{\widehat{A}}$ *era un isoatlas, pues el levantamiento isotópico utilizado verifica las condiciones necesarias para ello.* $\triangleleft$

Ejemplo 4.2.13. *En las condiciones del Ejemplo 4.2.8,* $\overline{\widehat{A_1}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})\}$ *y* $\overline{\widehat{A_2}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})\}$ *serían dos isoatlas isodiferenciables de dimensión* 1*, triviales sobre* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, pues ambos están constituidos por una única isocarta local, relacionada consigo misma de forma evidente. Coinciden además con los levantamientos isotópicos respectivos de los atlas sobre* $\mathbb{R}$*,* $A_1 = \{(\mathbb{R}, Id)\}$ *y* $A_2 = \{(\mathbb{R}, f)\}$*, pudiendo de nuevo haber aplicado la Proposición 4.2.11 para verlo.* $\triangleleft$

Observamos también que en general la unión de isoatlas isodiferenciables no es otro isoatlas isodiferenciable, pues, haciendo uso del Ejemplo 4.2.13 que acabamos de ver, $\overline{\widehat{A_1}}$ y $\overline{\widehat{A_2}}$ son dos isoatlas distintos, si bien $\overline{\widehat{A_1}} \cup \overline{\widehat{A_2}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}}), (\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})\}$ no es un isoatlas, pues ya vimos en el Ejemplo 4.2.8 que las isocartas locales $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})$ y $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})$ no estaban relacionadas.

De hecho, podemos dar una relación de equivalencia entre isoatlas isodiferenciables:

Definición 4.2.14. *Dos isoatlas isodiferenciables sobre un isoespacio isotopológico* $\overline{\widehat{M}}$ *se dicen* equivalentes *(o* compatibles*) si su unión es otro isoatlas isodiferencable.*

Es claro que los dos isoatlas deben tener la misma dimensión, que también será la dimensión del isoatlas resultante. Tenemos además la siguiente:

Proposición 4.2.15. *Ser isoatlas equivalentes es una relación de equivalencia.*

Demostración.

Las propiedades reflexiva y simétrica son evidentes. La transitividad se demuestra mediante una mera repetición de la prueba en el caso convencional, si bien hay que hacer uso de las propiedades de la isotopología ITSSFN y el Corolario 3.4.9. Es de destacar que en ningún momento de la prueba se requieren isotopías inyectivas. $\square$

Estamos ya en condiciones de dar la definición de isovariedad isodiferenciable:

Definición 4.2.16. *Se denomina* isovariedad isodiferenciable de dimensión m *a todo par* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$*, donde* $\overline{\widehat{M}}$ *es un isoespacio isotopológico de (iso)Hausdorff ((iso)segundo-numerable) y* $\overline{\widehat{A}}$ *es un isoatlas isodiferenciable de dimensión* m *sobre* $\overline{\widehat{M}}$*. A* $\overline{\widehat{A}}$ *se le denomina* isoestructura isodiferenciable de $\overline{\widehat{M}}$*.*

Podemos dar como ejemplos de isovariedades isodiferenciables el par $(\overline{\widehat{S^n}}, \overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{U_+}}, \overline{\widehat{\varphi_+}}), (\overline{\widehat{U_-}}, \overline{\widehat{\varphi_-}})\})$ del Ejemplo 4.2.12, o bien los pares $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{A_1}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}})\})$ y $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{A_2}}) = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{f}})\})$ del Ejemplo 4.2.13.

Obsérvese el siguiente resultado:

Proposición 4.2.17. *Bajo las condiciones de la Proposición 4.2.3, se verifica que* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ *es una isovariedad isodiferenciable, si y sólo si* (M, A) *es una variedad diferenciable.*

Demostración.

La inyectividad en F^M de la isotopía utilizada permite asegurar la equivalencia en las propiedades de ser Hausdorff y segundo numerable en M y $\overline{\widehat{M}}$, asegurando por otra parte la Proposición 4.2.11 que $\overline{\widehat{A}}$ es un isoatlas isodiferenciable si y sólo si A es un atlas diferenciable. $\square$

Veamos más ejemplos de isovariedades isodiferenciables:

Ejemplo 4.2.18. *Consideremos la circunferencia* $S^1 \subseteq \pi_{xy}$*, dotado del atlas diferenciable usual* A*, con dos cartas locales, correspondiente a la proyección estereográfica desde el polo norte. Consideremos también el intervalo* $[0, 2\pi)$ *y construyamos las isotopías* $\mathbf{I_1}$ *e* $\mathbf{I_2}$ *de estos conjuntos, basadas respectivamente en los elementos* $\diamondsuit_{S^1}$ *e* $\widehat{I}'_{S^1}$ *y* $\diamondsuit_{[0,2\pi)}$ *e* $\widehat{I}'_{[0,2\pi)}$*, dependientes de los factores externos* $F^{S^1} = F^{[0,2\pi)} = [0, 2\pi)$*, tales que* $\mathbf{I_1}$ *consiste en la rotación de* S^1 *alrededor del eje* OZ *en* $\mathbb{R}^3$ *y* $x\diamondsuit_{[0,2\pi)}\mathbf{I_2}(x, t) = (x, t)$*.*

La primera isotopía construye el toro $\mathbf{T}$ *como proyección isotópica de la circunferencia* S^1*. Por su parte, la segunda isotopía puede extenderse de forma natural a todo* $\mathbb{R}$*, siendo entonces* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$*.*

Consideramos la aplicación $\varphi : S^1 \to [0, 2\pi)$ *tal que asigna a cada punto de la circunferencia el ángulo que forma con el eje horizontal en el plano* π_{xy} *y suponemos la aplicación* $\Phi_\varphi = Id_{[0,2\pi)}$*.*

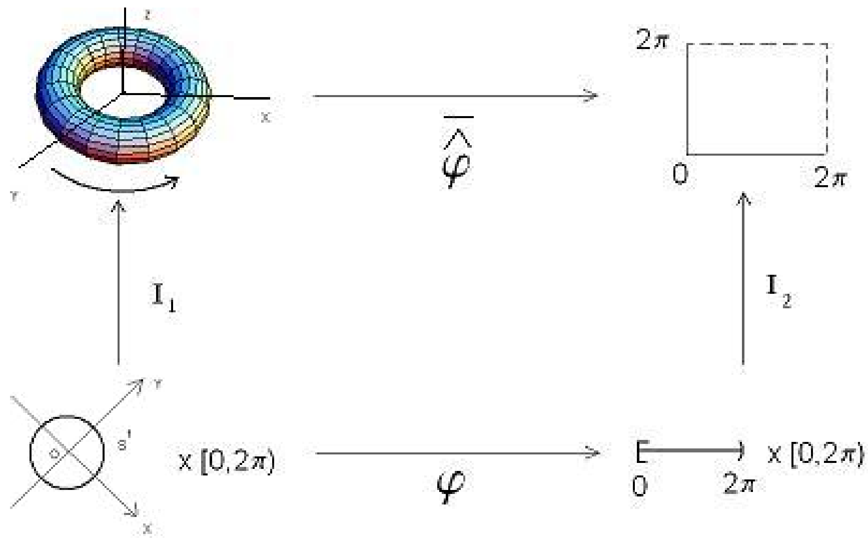

Figura 4.9: Toro como isovariedad isodiferenciable de dimensión 1.

Estamos por tanto en las condiciones de la Proposición 4.2.17, con lo cual podemos asegurar que el par $(\overline{\widehat{S^1}}, \overline{\widehat{A}})$ *es una isovariedad isodiferenciable de dimensión 1, mientras que como variedad diferenciable, el toro es de dimensión* 2.

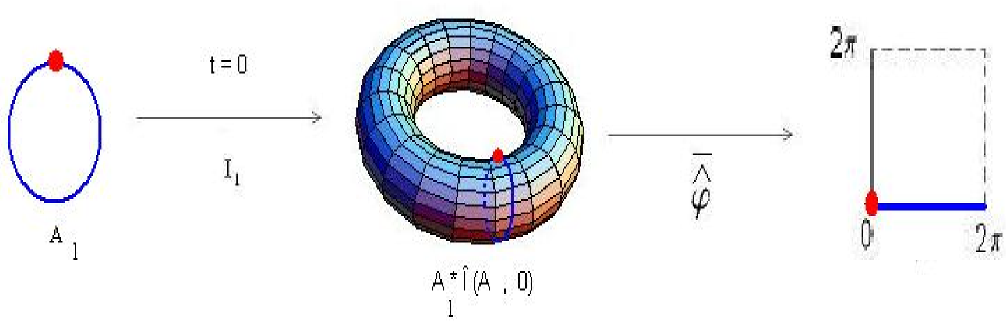

Figura 4.10: Isocarta local en **T**.

$\triangleleft$

Ejemplo 4.2.19. *Si en la situación del ejemplo anterior se consideran como factores externos a* $F^{S^1} = F^{[0,2\pi]} = [0,2\pi)\times 0, 1$, *podemos conseguir un par de toros enlazados como proyección isotópica de* S^1, *cada uno de ellos correspondiente al levantado isotópico* $S^1\diamondsuit\widehat{I}_1'(S^1,[0,2\pi),0)$ *y* $S^1\diamondsuit\widehat{I}_1'(S^1,[0,2\pi),1)$, *respectivamente, mediante las rotaciones adecuadas en el espacio* $\mathbb{R}^3$.

De forma análoga, como proyección isotópica de $[0,2\pi)$ *podemos obtener la unión* *disjunta* $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \bigcup [2\pi, 4\pi) \times [0, 2\pi) = [0, 4\pi) \times [0, 2\pi)$*, tal que para cada* $x, t \in [0, 2\pi)$*,* $x \diamondsuit \widehat{I}'_2(x, t, 0) = (x, t)$ *y* $x \diamondsuit \widehat{I}'_2(x, t, 1) = (x + 2\pi, t)$*.*

Si consideramos ahora la aplicación $\Phi_\varphi : F^{S^1} \to F^{[0,2\pi]} : (t, s) \to \Phi_\varphi(t, s) = (t, s)$*, estaremos de nuevo en las condiciones de la Proposición 4.2.17, con lo cual podemos asegurar que el par* $(\widehat{\widehat{S^1}}, \widehat{\widehat{A}})$ *es una isovariedad isodiferenciable de dimensión 1, mientras que el toro enlazado no tiene estructura convencional de variedad diferenciable.*

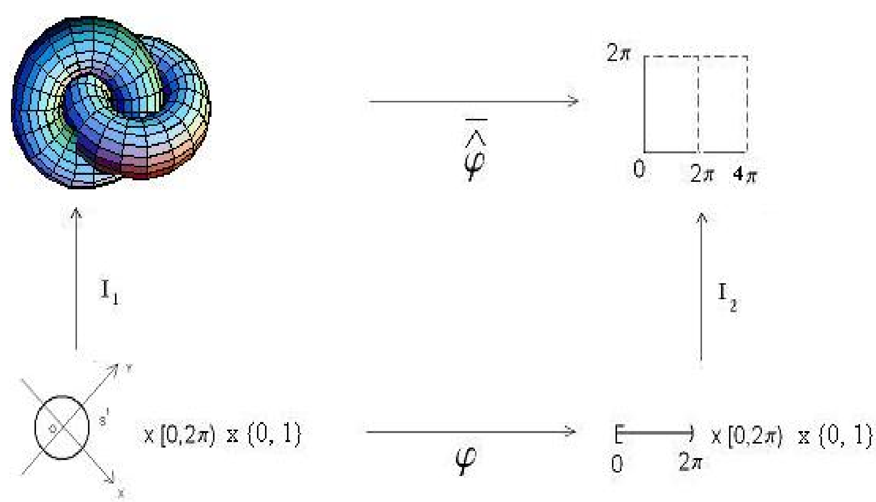

Figura 4.11: Toros enlazados como isovariedad isodiferenciable de dimensión 1*.*

$\triangleleft$

Al igual que ocurre con el caso convencional (y teniendo en cuenta que éste no es más que un caso particular en el nivel isotópico), podemos encontrar isoespacios isotopológicos que no admiten isoestructuras isodiferenciables, o bien que admiten varias (véase [50]). Es por ello que damos la siguiente:

Definición 4.2.20. *Diremos que dos isoestructuras isodiferenciables* son la misma *si son equivalentes como isoatlas isodiferenciables.*

De esta forma, estudiar si dos isoestructuras isodiferenciables coinciden, se reduce a estudiar la relación existente entre sus isocartas locales, de forma análoga a como sucedía en el caso convencional. Es así que, según hemos visto en el Ejemplo 4.2.13,

$\widehat{\overline{A_1}} = \{(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{Id}})\}$ y $\widehat{\overline{A_2}} = \{(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{f}})\}$ no son la misma isoestructura isodiferenciable sobre $\widehat{\overline{\mathbb{R}}}$, al no estar relacionadas las isocartas locales que las forman.

No obstante, podemos reunir isoatlas isodiferenciables equivalentes en lo que llamaremos un isoatlas maximal:

Definición 4.2.21. *Un* isoatlas isodiferenciable $\widehat{\overline{A}}$ sobre $\widehat{\overline{M}}$ *se dice* maximal *si no está contenido propiamente en otro isoatlas isodiferenciable sobre* $\widehat{\overline{M}}$.

A continuación vamos a probar la existencia y unicidad de un isoatlas maximal asociado a una isoestructura isodiferenciable dada. Para ello previamente damos la siguiente:

Definición 4.2.22. *Sea* $(\widehat{\overline{M}}, \widehat{\overline{A}})$ *una isovariedad isodiferenciable de dimensión* m. *Una* isocarta local $(\widehat{\overline{U}}, \widehat{\overline{\varphi}})$ *de dimensión* m *se dice* admisible *en la isoestructura isodiferenciable, si está relacionada con todas las isocartas locales de* $\widehat{\overline{A}}$.

Tenemos así por Ejemplo que la isocarta local $(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{f}})$ del Ejemplo 4.2.13 no es admisible en el isoatlas isodiferenciable $\widehat{\overline{A_1}} = \{(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{Id}})\}$, pues ya vimos que $(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{Id}})$ no estaba relacionada con $(\widehat{\overline{\mathbb{R}}}, \widehat{\overline{f}})$. En cambio, podemos asegurar que todas las isocartas locales de un isoatlas isodiferenciable son admisibles en dicho isoatlas como isoestructura isodiferenciable, pues por definición de isoatlas todas están relacionadas entre sí.

Proposición 4.2.23. *Sea* $\widehat{\overline{A}} = \{(\widehat{\overline{U_h}}, \widehat{\overline{\varphi_h}})\}_{h \in H}$ *un isoatlas isodiferenciable sobre* $\widehat{\overline{M}}$, *construido a partir de una isotopía inyectiva en los factores externos de los que depende. Entonces, existe un único isoatlas isodiferenciable maximal sobre* $\widehat{\overline{M}}$ *que contiene a* $\widehat{\overline{A}}$.

Demostración.

La prueba es mera repetición de la correspondiente al caso convencional, si bien hay que hacer uso de las propiedades de la isotopología ITSSFN y el Corolario 3.4.9. Es conveniente además que, con vistas a evitar singularidades, cuando se trabaje con abiertos de la isotopología correspondiente a la isotopía en cuestión, se supongan fijados unos valores concretos para los factores externos de los que dependa dicha isotopía. □

Para terminar esta sección vamos a ver la construcción de las isosubvariedades abiertas y de las isovariedades producto, que se obtienen de una manera análoga al caso convencional. Comenzaremos viendo las isosubvariedades abiertas:

Proposición 4.2.24. *Cualquier abierto de una isovariedad isodiferenciable, construida en las condiciones de la Proposición 4.2.3, hereda la isoestructura de isovariedad isodiferenciable.*

Demostración.

Supongamos dada una isovariedad isodiferenciable $\left(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{U_h}}, \overline{\widehat{\varphi_h}})\}_{h\in H}\right)$ de dimensión m, donde Φ_φ es una biyección para cada $h \in H$. Sea además $\overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$ un abierto del isoespacio respecto a la isotopología asociada $\overline{\widehat{\Upsilon}}$.

En primer lugar se asigna a $\overline{\widehat{U}}$ la *isotopología relativa a* $\overline{\widehat{U}}$, proyección isotópica de la topología relativa Υ_U al abierto $U \in \Upsilon$, del cual se obtiene $\overline{\widehat{U}}$:

$$\overline{\widehat{\Upsilon_U}} = \{\overline{\widehat{G \cap U}} : G \in \Upsilon\} = \{\overline{\widehat{G}} \cap \overline{\widehat{U}} : \overline{\widehat{G}} \in \overline{\widehat{\Upsilon}}\}.$$

En particular, $\overline{\widehat{\Upsilon_U}}$ es $\overline{\widehat{T_2}}$, al ser T_2 la topología Υ_U y ser inyectiva en los factores externos la isotopía utilizada.

Resulta entonces que, considerando el atlas diferenciable que dota a U de estructura de variedad diferenciable, $A_U = \left\{(V, \phi_{h|V})_{h\in H, V\in\Upsilon_U}\right\}$, tendremos aplicando la Proposición 4.2.17 que la correspondiente proyección isotópica $\overline{\widehat{A}}_{\overline{\widehat{U}}} = \{(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{U_h}}, \overline{\widehat{\varphi_h}}_{|(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{U_h}})})\}_{h\in H} = \overline{\widehat{A_U}}$, dota a $\overline{\widehat{U}}$ de estructura de isovariedad isodiferenciable. $\square$

La estructura resultante recibe el nombre de *isosubvariedad isodiferenciable*, siendo su dimensión la misma que la de la isovariedad correspondiente.

Como ejemplo de isosubvariedad isodiferenciable de dimensión 1 podemos considerar cualquier segmento de meridiano del toro en el Ejemplo 4.2.18, junto con el isoatlas restringido a este abierto:

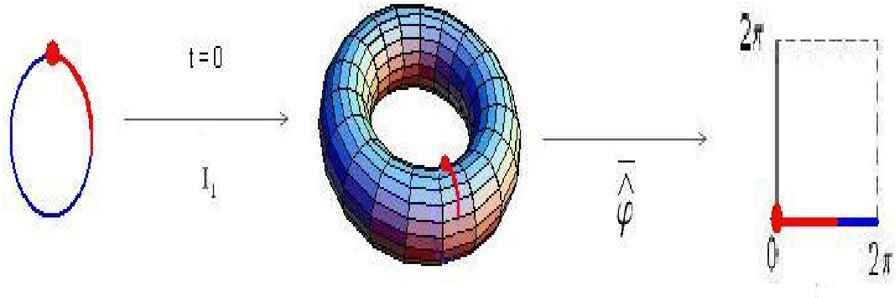

Figura 4.12: Isosubvariedad isodiferenciable de dimensión 1.

Finalmente pasamos a construir las isovariedades producto:

Proposición 4.2.25. *Sean* $\left(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A_M}} = \{(\overline{\widehat{U_h}}, \overline{\widehat{\varphi_h}})\}_{h\in H}\right)$ *y* $\left(\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{A_N}} = \{(\overline{\widehat{V_j}}, \overline{\widehat{\Psi_j}})\}_{j\in J}\right)$ *dos isovariedades isodiferenciables de dimensiones respectivas* m *y* n*, construidas en las condiciones de la Proposición 4.2.3. Resulta entonces que* $\overline{\widehat{M}} \times \overline{\widehat{N}}$ *puede dotarse de una isoestructura isodiferenciable de dimensión* $m+n$*.*

Demostración.

En primer lugar se dota a $\overline{\widehat{M}} \times \overline{\widehat{N}}$ de la *isotopología producto*, proyección isotópica de la topología producto asociada a $M \times N$:

$$\overline{\widehat{\Upsilon_M}} \times \overline{\widehat{\Upsilon_N}} = \overline{\widehat{\Upsilon_M \times \Upsilon_N}}.$$

Dado que $\Upsilon_M \times \Upsilon_N$ es T_2, la inyectividad de la isotopía utilizada asegura que $\overline{\widehat{\Upsilon_M}} \times \overline{\widehat{\Upsilon_N}}$ es $\widehat{T}_2$.

Por otra parte, si Φ_{φ_h} y Φ_{Ψ_h} son las biyecciones que relacionan los factores externos correspondientes a la isotopía que construye $\overline{\widehat{U_h}}$ y $\overline{\widehat{V_h}}$, se tendrá que las aplicaciones $\Phi_{\varphi_h \times \Psi_h} = \Phi_{\varphi_h} \times \Phi_{\Psi_h}$ son de hecho biyecciones para cada $h \in H$.

Finalmente, la inyectividad en las isotopías que construyen $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{N}}$, $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ y $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$ implican la inyectividad de las isotopías que construyen $\overline{\widehat{M}} \times \overline{\widehat{N}} = \overline{\widehat{M \times N}}$ y $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \times \overline{\widehat{\mathbb{R}^n}} = \overline{\widehat{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}}$.

Resulta entonces aplicando la Proposición 4.2.17 que la proyección isotópica $\overline{\widehat{A_{M\times N}}} = \{(\overline{\widehat{U}} \times \overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}} \times \overline{\widehat{\Psi}}) : (\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}}) \in \overline{\widehat{A_M}} \text{ y } (\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\Psi}}) \in \overline{\widehat{A_N}}\}$ del atlas diferenciable que dota a $M \times N$ de estructura de variedad diferenciable producto, dota a $\overline{\widehat{M}}$ de estructura de isovariedad isodiferenciable. $\square$

A la estructura anterior se le da el nombre de *isoestructura producto*, por su analogía con la construcción de las estructuras productos convencionales.

4.3. Isoaplicaciones isodiferenciables

Vamos a estudiar en esta sección las isoaplicaciones existentes entre dos isovariedades isodiferenciables $\overline{\widehat{M}}$ y $\overline{\widehat{N}}$, que serán a su vez dos isoespacios isotopológicos. En primer lugar trabajaremos con $\overline{\widehat{N}} = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, siendo así cualquier isoaplicación $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, una isofunción.

De esta forma, la isodiferenciabilidad entre isovariedades se buscará darla respecto a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, donde sabemos su definición. Usaremos para ello que las isovariedades isodiferenciables son por definición localmente isoeuclídeas.

Comenzamos por tanto con el caso $\overline{\widehat{N}} = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, viendo antes una definición previa:

Definición 4.3.1. *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ *una isovariedad isodiferenciable de dimensión* m*. Sea* $\overline{\widehat{P}}$ *un punto de* $\overline{\widehat{M}}$*. Diremos que una* isocarta local $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ *de* $\overline{\widehat{A}}$ *es* entorno de $\overline{\widehat{P}}$ *si* $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$*.*

Diremos que $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ *está* isocentrada en $\overline{\widehat{P}}$ *si es entorno de* $\overline{\widehat{P}}$ *y además* $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{S}}$*, siendo* $\overline{\widehat{S}}$ *el elemento unidad de la isosuma* $\overline{\widehat{+}}$ *del isocuerpo* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ *sobre el cual está definido* $\overline{\widehat{M}}$*.*

En concreto, en el Ejemplo 4.2.5, cualquier proyección isotópica de una de las dos cartas locales de S^1 está isocentrada en el punto correspondiente $\overline{\widehat{(0,1)}} \in S^2$, perteneciente al ecuador de la esfera.

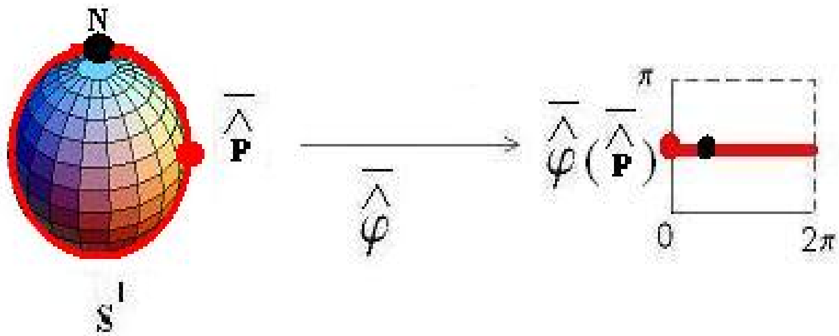

Figura 4.13: Isocarta local isocentrada en $\overline{\widehat{P}}$

A continuación damos la noción de isodiferenciabilidad en el caso que nos ocupa:

Definición 4.3.2. *Sean* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ *una isovariedad isodiferenciable de dimensión* m, $\overline{\widehat{P}}$ *un isopunto de* $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{U}}$ *un abierto de* $\overline{\widehat{M}}$ *tal que* $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$ *y sea* $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *una isofunción isocontinua. Se dice que* $\overline{\widehat{f}}$ *es* isodiferenciable en $\overline{\widehat{P}}$ *y se denota* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$ *si existe una isocarta local* $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}}) \in \overline{\widehat{A}}$, *entorno de* $\overline{\widehat{P}}$, *tal que* $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ *es isodiferenciable en un entorno isoeuclídeo de* $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}})$.

Observemos que si $\overline{\widehat{M}}$ es una isovariedad isodiferenciable de dimensión m, la isoaplicación que debemos estudiar sería $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} = \overline{\widehat{f \circ \varphi^{-1}}} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$.

Según hemos visto al final del tercer capítulo, la isodiferenciabilidad de este tipo de isoaplicaciones depende directamente de la diferenciabilidad de la aplicación de la que se proyecta isotópicamente. Con lo cual, si se busca obtener una relación entre aplicaciones entre variedades diferenciables y sus proyecciones isotópicas, únicamente habrá que atender a la correspondiente relación entre dichas variedades y las isovariedades asociadas.

Esto último es lo que hemos hecho en la sección anterior, atendiendo a las condiciones mostradas en la Proposición 4.2.3. Consecuentemente, bajo tales circunstancias, cabe esperar que el conjunto de resultados conocidos acerca de aplicaciones entre variedades diferenciables, obtengan su correspondiente análogo en el nivel de proyección. No obstante, veremos en lo que sigue que podemos debilitar las condiciones citadas en algunos de estos resultados.

No ocurre esto en la siguiente proposición, en la que se estudia directamente la relación existente citada anteriormente entre aplicaciones e isoaplicaciones:

Proposición 4.3.3. *Sea $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m, construida en las condiciones de la Proposición 4.2.3. Dados U abierto en M y $P \in U$, se tiene entonces que $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en P en el nivel convencional, si y sólo si $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$. Esto es, $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(P)}}$, donde hemos denotado por $\mathbf{F}(P)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables en el punto P, con respecto al nivel convencional.*

Demostración.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, podemos aplicar la Proposición 4.1.7 y asegurar así que f es continua si y sólo si f es isocontinua.

Por otra parte, aplicando la Proposición 4.2.11, podemos considerar como isoestructura isodiferenciable sobre $\overline{\widehat{M}}$ la obtenida mediante levantamiento isotópico de los elementos de la estructura diferenciable de M.

Con lo cual, dado que isocartas locales de $\overline{\widehat{M}}$ estarán relacionadas biunívoca e isotópicamente con cartas locales de M, tendremos aplicando el Corolario 3.4.9, que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} = \overline{\widehat{f \circ \varphi^{-1}}}$ es isodiferenciable si y sólo si $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el nivel convencional. En definitiva, se tendrá por definición que $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{P}}$ si y sólo si f es diferenciable en P en el nivel convencional, como queríamos probar. □

En particular, volviendo al Ejemplo 4.1.7, tendremos entonces, aplicando el resultado anterior, que $\overline{\widehat{\varphi}} : S^2 \to [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ es isodiferenciable en todo punto de la esfera.

Obsérvese por otra parte que en general no podemos asegurar que $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ sea un espacio vectorial, pues ya vimos en la Proposición 3.2.7 que debíamos imponer la compatibilidad respecto a $+$ y $\times$ (las operaciones usuales en $\mathbb{R}$) del levantamiento isotópico utilizado en la construcción de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, para conseguir la isodiferenciabilidad de isosumas e isoproductos de isofunciones isodiferenciables. No obstante, podemos dar el siguiente resultado:

Proposición 4.3.4. *Bajo las condiciones de la Proposición 4.2.3, si $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ se construye a partir de un levantamiento isotópico compatible respecto a $+$ y $\times$ (las operaciones usuales en $\mathbb{R}$), entonces $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ es un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial.*

Demostración.

Sean $\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(U)}}$ y $\overline{\widehat{a}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ y consideremos $f, g \in \mathbf{F}(U)$ y $a \in \mathbb{R}$, los elementos de los que se levantan isotópicamente. Se tiene entonces, aplicando la Proposición 4.3.3, que:

a) $\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{+}}\,\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, pues $\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{+}}\,\overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{f+g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}(U)}} = \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$.

b) $\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, pues $\overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{a \times f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}(U)}} = \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$.

Teniendo en cuenta estos resultados se comprueba entonces que $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ es efectivamente un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial. De hecho es un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial, al ser levantado isotópico de $\mathbf{F}(U)$, que es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $\square$

Parece por tanto que, bajo las condiciones señaladas en la Proposición 4.2.3, los resultados convencionales pueden generalizarse coherentemente en el nivel de proyección. No obstante, nos interesa ver en qué medida podemos generalizar tales resultados.

Nos interesará para ello el siguiente resultado previo:

Proposición 4.3.5. *Sea $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$, una isoaplicación entre un isoespacio vectorial isorreal topológico $\overline{\widehat{M}}$ de dimensión m, construido a partir de una isotopía inyectiva en F^M, y un espacio isoeuclídeo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$. Sea $\overline{\widehat{U}}$ un isoabierto de $\overline{\widehat{M}}$. Entonces, si $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable, la restricción de $\overline{\widehat{f}}$ a $\overline{\widehat{U}}$, $\overline{\widehat{f}}|_{\overline{\widehat{U}}}$, es también isodiferenciable.*

Demostración.

Fijada $\left\{\widehat{\overline{e_1}}, ..., \widehat{\overline{e_m}}\right\}$ una base de $\overline{\widehat{M}}$, introducimos un sistema de coordenadas en este isoespacio. Esto permite identificar cada punto $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$ con sus coordenadas $\left(\overline{\widehat{P}}_1, ..., \overline{\widehat{P}}_m\right) \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$ respecto a dicha base. En definitiva, podemos tratar la isodiferencibilidad de $\overline{\widehat{f}}$ atendiendo a la última parte vista en el tercer Capítulo.

En particular, decir que $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$ es una isoaplicación isodiferenciable, significa, según el Corolario 3.4.9, que f es diferenciable en el nivel convencional. Por otro lado, al ser $\overline{\widehat{U}}$ un isoabierto de $\overline{\widehat{M}}$, será el levantado isotópico de un abierto U de M. De esta forma, tenemos que $f|_U$ es diferenciable en el nivel convencional. Volviendo a aplicar el corolario mencionado, llegamos a que $\overline{\widehat{f}}|_{\overline{\widehat{U}}} = \overline{\widehat{f|_U}}$ es isodiferenciable, como queríamos probar. $\square$

Llegamos de esta forma al siguiente resultado:

Proposición 4.3.6. *Una isofunción isocontinua definida en un abierto $\overline{\widehat{U}}$ de una isovariedad isodiferenciable $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$, contruida a partir de una isotopía inyectiva en F^M, $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, es isodiferenciable en $\overline{\widehat{P}}$ si y sólo si para toda isocarta local $(\overline{\widehat{W}}, \overline{\widehat{\Psi}}) \in \overline{\widehat{A}}$, que sea entorno de $\overline{\widehat{P}}$, se tiene que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1}$ es isodiferenciable en un entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{P}})$.*

Demostración.

La condición suficiente es evidente atendiendo a la Definición 4.3.2. Supongamos entonces que $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$. Atendiendo a la definición citada, existe una isocarta local sobre $\overline{\widehat{M}}$, $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$, tal que $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}}$ y $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ es isodiferenciable en un entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}})$.

Sea ahora $(\overline{\widehat{W}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ otra isocarta local sobre $\overline{\widehat{M}}$, entorno de $\overline{\widehat{P}}$. Tenemos entonces que, si nos restringimos a $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \cap \overline{\widehat{W}}$ ($\neq \emptyset$, pues contiene a $\overline{\widehat{P}}$), llegamos a que $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \cap \overline{\widehat{W}}) \subseteq \overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{V}} \cap \overline{\widehat{W}})$. Con lo cual, dado que $\overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}(\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{V}} \cap \overline{\widehat{W}}))$, al ser $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ y $(\overline{\widehat{W}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ isocartas locales de $\overline{\widehat{A}}$, llegamos, aplicando las Proposiciones 4.1.12 y 4.3.5, a que $\overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}(\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \cap \overline{\widehat{W}}))$. Por otro lado, como teníamos que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ era isodiferenciable en un entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}})$, llegamos aplicando el Corolario 3.4.9 a que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} = \overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} \circ \overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}$ en un entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{P}})$. Ahora, como $(\overline{\widehat{W}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ era arbitraria en $\overline{\widehat{A}}$, tenemos el resultado anterior para toda isocarta local sobre $\overline{\widehat{M}}$, lo cual prueba la proposición. $\square$

Llegamos por tanto con este resultado a que la isodiferenciabilidad de una isofunción no depende de la isocarta local elegida. Por otro lado, si estudiamos la isodiferenciabilidad de una isofunción en todos los isopuntos de un abierto, se llega a la siguiente:

Definición 4.3.7. *En las condiciones de la Definición 4.3.2, $\overline{\widehat{f}}$ se dice* isodiferenciable en *$\overline{\widehat{U}}$ si $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$, para todo isopunto $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$. Al conjunto de las isofunciones isodiferenciables en $\overline{\widehat{U}}$ se le denotará por $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$.*

En particular, en el Ejemplo 4.2.18, cualquier proyección isotópica de una de las dos cartas locales de S^1 constituye un abierto en el toro $\mathbf{T} = \widehat{\overline{S^1}}$, siendo la aplicación $\overline{\widehat{\varphi}} : \mathbf{T} \to [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ isodiferenciable en todo punto de dicho abierto.

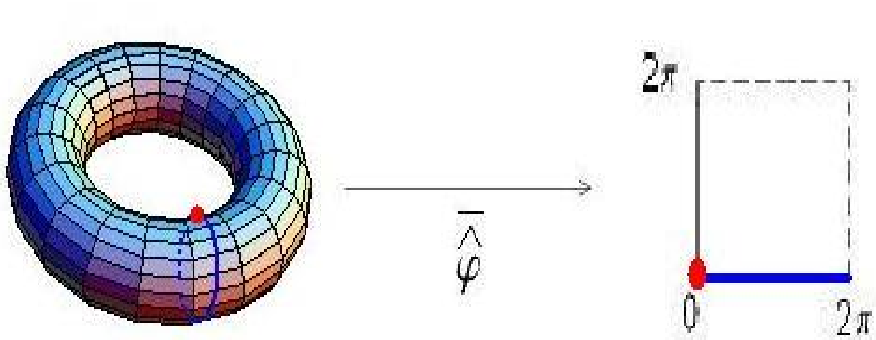

Figura 4.14: Isofunción isodiferenciable de $\mathbf{T}$ en $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Por construcción se cumple que $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) = \cap_{\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}} \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$, alcanzándose además el siguiente resultado:

Proposición 4.3.8. *En las condiciones de la definición anterior se tienen:*

a) En caso de que la isovariedad $\widehat{\overline{M}}$ esté construida a partir de una isotopía inyectiva en F^M, se cumple que si $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ y $\overline{\widehat{V}} \subseteq \overline{\widehat{U}}$ es un abierto de $\widehat{\overline{M}}$, entonces $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{V}})$.

b) Si $\overline{\widehat{V}} = \cup_{i \in I} \overline{\widehat{V}}_i$, con $\overline{\widehat{V}}_i$ abierto de $\widehat{\overline{M}}$, $\forall i \in I$, es tal que $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}_i} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{V}}_i)$, $\forall i \in I$, entonces, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{V}})$.

Demostración.

a) Sea $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}} \subseteq \overline{\widehat{U}}$. Como $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, llegamos a que $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$. La arbitrariedad de $\overline{\widehat{P}}$ en $\overline{\widehat{U}}$ asegura que $\overline{\widehat{f}}$ es isodiferenciable en todos los isopuntos de $\overline{\widehat{V}}$. Con lo cual, aplicando la Proposición 4.3.5, llegamos a que $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}} : \overline{\widehat{V}} \subseteq \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{V}}$, esto es, $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{V}})$, como queríamos probar.

b) Sea $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}} = \cup_{i \in I} \overline{\widehat{V}}_i$. Entonces, existe $i \in I$ tal que $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}}_i$. Como $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}_i} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{V}}_i)$, llegamos a que $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}_i} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$. De esta forma, existe $(\widehat{\overline{W}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ isocarta local entorno de $\overline{\widehat{P}}$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, tal que $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}_i} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}$ en un entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{P}})$. Ahora bien, podemos restringir tal entorno de $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{P}})$ a uno tal que $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{V}}_i} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} = \overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1}$ en dicho entorno. Así, sería $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} \in \overline{\widehat{C}}^{\infty}$ en este último entorno isoeuclídeo de $\overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{P}})$ y por tanto, por definición, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$. Ahora bien, como $\overline{\widehat{P}}$ era arbitrario en $\overline{\widehat{U}}$, llegamos finalmente a que $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, lo que prueba el resultado. □

Por otra parte, atendiendo a la Proposición 4.3.3 se tiene, de forma evidente, el siguiente:

Corolario 4.3.9. *Sea $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m construida en las condiciones de la Proposición 4.2.3. Dado un abierto U en M, $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en U en el nivel convencional, si y sólo si $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{U}}$. Esto es, $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(U)}}$, donde hemos denotado por $\mathbf{F}(U)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables en el abierto U, con respecto al nivel convencional.* □

Vemos a continuación un resultado que caracteriza a las isofunciones isodiferenciables en un abierto:

Proposición 4.3.10. *En las condiciones de la Definición 4.3.2, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ sólo si para toda isocarta local $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, tal que $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable. En caso de que $\overline{\widehat{M}}$ esté construida a partir de una isotopía inyectiva en F^M, se verifica también el recíproco.*

Demostración.

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Rightarrow$

Consideramos $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ una isocarta local sobre $\overline{\widehat{M}}$, tal que $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \neq \emptyset$. Tenemos que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ será isodiferenciable si es isodiferenciable en cada punto de $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}})$, que es un abierto de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$, al ser $\overline{\widehat{\varphi}}$ un isohomeomorfismo, ser $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}$ un abierto de $\overline{\widehat{M}}$ contenido en $\overline{\widehat{V}}$ y aplicar la Proposición 4.1.12. Para ello, debe ser isodiferenciable en un entorno isoeuclídeo del punto.

Tomamos por tanto $\overline{\widehat{a}} \in \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m$. Entonces, existe $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}$, tal que $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{a}}$. En particular, será $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$, siendo así $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$, al ser $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$. Por otro lado, $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}}$, con lo cual, $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ es una isocarta local entorno de $\overline{\widehat{P}}$. Ahora, dado que la isotopía utilizada es inyectiva en F^M, podemos aplicar la Proposición 4.3.6, llegando entonces a que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ es isodiferenciable en un entorno de $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{a}}$, que es lo que buscábamos.

b) $\Leftarrow$

Debemos ver que $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$, $\forall \overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$. Tomamos por tanto $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$. Sea $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ una isocarta local entorno de $\overline{\widehat{P}}$. Será entonces $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \neq \emptyset$, con lo cual está en las condiciones de las hipótesis. Así pues, $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{P}})$, por lo que, por definición, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$. Como $\overline{\widehat{P}}$ era arbitrario en $\overline{\widehat{U}}$, llegamos a que $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, que es lo que se quería probar. □

A continuación estudiamos la isodiferenciabilidad en toda la isovariedad $\widehat{\widehat{M}}$:

Definición 4.3.11. *En las condiciones de la Definición 4.3.2, $\overline{\widehat{f}}$ se dice* isodiferenciable en $\widehat{\widehat{M}}$ *y se denota por $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\widehat{\widehat{M}})$, si lo es considerando a $\widehat{\widehat{M}}$ como abierto.*

Como caso concreto podemos indicar, aparte de los ejemplos ya vistos en la presente sección, el Ejemplo 4.2.19, en el cual, la aplicación $\overline{\widehat{\varphi}} : \widehat{\widehat{S^1}} \to [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ es isodiferenciable en todo punto del toro enlazado.

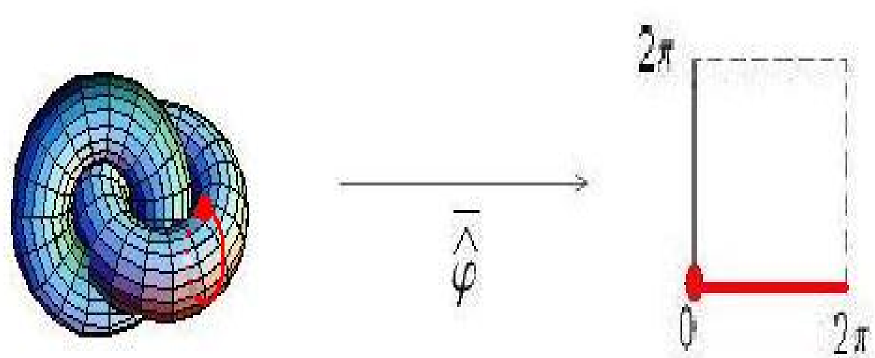

Figura 4.15: Isoaplicación isodiferenciable del toro enlazado en $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Atendiendo al Corolario 4.3.9 se tiene, de forma inmediata el siguiente:

Corolario 4.3.12. *Sea $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m, construida en las condiciones de la Proposición 4.2.3. Dado un abierto U en M, $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en M en el nivel convencional, si y sólo si $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{M}}$. Esto es, $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}}) = \widehat{\overline{\mathbf{F}(M)}}$, donde hemos denotado por $\mathbf{F}(M)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables en M, con respecto al nivel convencional.* $\square$

Llegamos también a la siguiente:

Proposición 4.3.13. *Sea $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ una isovariedad isodiferenciable, construida a partir de una isotopía inyectiva en F^M. Entonces, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$ si y sólo si para toda isocarta local $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{U}}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable.*

Demostración.

Aplicando la Proposición 4.3.10, tenemos que $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$ si y sólo si para toda isocarta local $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, con $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{M}} = \overline{\widehat{U}} \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{M}}) = \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, es isodiferenciable. Ahora bien, como $\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} = \overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{U}}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1}$, lo anterior equivale a que para toda isocarta local $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{f}}_{|\overline{\widehat{U}}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, es isodiferenciable, lo cual prueba el resultado. $\square$

Antes de pasar al caso general, vemos como ejemplo de isofunciones isodiferenciables a las isofunciones isocoordenadas:

Ejemplo 4.3.14. *Sean $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m, construida a partir de una isotopía inyectiva en F^M y $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}}) \in \overline{\widehat{A}}$.*

Consideremos $\overline{\widehat{\pi}}_i : \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, la isoproyección i-ésima, con $i \in \{1, ..., m\}$ y notemos $\overline{\widehat{\varphi}}_i$ a la isofunción isocoordenada i-ésima asociada a $\overline{\widehat{\varphi}}$, esto es, $\overline{\widehat{\varphi}}_i = \overline{\widehat{\pi}}_i \circ \overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$. Veamos entoces que $\overline{\widehat{\varphi}}_i \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

Para ello, en primer lugar, fijamos $i \in \{1, ..., m\}$ y tomamos $\overline{\widehat{x}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_i$ y $\overline{\widehat{B}} \in \left(\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}_i}\right)_{\overline{\widehat{x}}}$. Será entonces $\overline{\widehat{\varphi}}_i^{-1}(\overline{\widehat{B}}) = \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_1 \times ... \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{i-1} \times \overline{\widehat{B}} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_{i+1} \times ... \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}_m \in \left(\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m}\right)_{\overline{\widehat{\varphi}}_i^{-1}(\overline{\widehat{x}})}$. Por la arbitrariedad de $i, \overline{\widehat{x}}$ y $\overline{\widehat{B}}$ llegamos entonces a que $\overline{\widehat{\varphi}}_i$ es isocontinua para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

En segundo lugar, para $i \in \{1, .., m\}$ fijo, consideramos $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ una isocarta local de $\overline{\widehat{M}}$ con $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} \neq \emptyset$. Entonces, $\overline{\widehat{\varphi}}_i \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} : \overline{\widehat{\Psi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \to \overline{\widehat{\varphi}}_i(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) =$

$(\overline{\widehat{\pi}}_i \circ \overline{\widehat{\varphi}})(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$. Ahora bien, $\overline{\widehat{\varphi}}_i \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1} = \overline{\widehat{\pi}}_i \circ \overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}^{-1}$ es isodiferenciable. Entonces, como $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ era una isocarta local arbitraria en $\overline{\overline{\widehat{M}}}$, llegamos por la Proposición 4.3.10 a que $\overline{\widehat{\varphi}}_i \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, como queríamos ver. $\triangleleft$

Pasamos ya al caso general en el cual $\overline{\widehat{N}}$ no ha de ser necesariamente $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$:

Definición 4.3.15. *Sean $(\overline{\overline{\widehat{M}}}, \overline{\widehat{A}})$ y $(\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{B}})$ dos isovariedades isodiferenciables de dimensiones m y n, respectivamente, y sea $\overline{\widehat{f}} : \overline{\overline{\widehat{M}}} \to \overline{\widehat{N}}$ una isoaplicación isocontinua. Se dice que $\overline{\widehat{f}}$ es* isodiferenciable *y se denota por $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\overline{\widehat{M}}}, \overline{\widehat{N}})$, si para todo isopunto $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\overline{\widehat{M}}}$, para toda isocarta local $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ entorno de $\overline{\widehat{P}}$ y para toda isocarta local $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\Psi}})$ entorno de $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})$, tales que $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{V}}) \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{\widehat{\Psi}} \circ \overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\varphi}}^{-1} : \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{V}})) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m \to (\overline{\widehat{\Psi}} \circ \overline{\widehat{f}})(\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{V}})) \subseteq \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^n$ es isodiferenciable.*

De forma análoga a la prueba de la Proposición 4.3.3, se puede probar entonces el siguiente resultado:

Proposición 4.3.16. *Sean $\overline{\overline{\widehat{M}}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m y $\overline{\widehat{N}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión n, construidas ambas en las condiciones de la Proposición 4.2.3. Entonces, $f : M \to N$ es diferenciable en M en el nivel convencional, si y sólo si $\overline{\widehat{f}} : \overline{\overline{\widehat{M}}} \to \overline{\widehat{N}}$ es isodiferenciable en $\overline{\overline{\widehat{M}}}$. Esto es, $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\overline{\widehat{M}}}, \overline{\widehat{N}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(M, N)}}$, donde hemos denotado por $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\overline{\widehat{M}}}, \overline{\widehat{N}})$ al conjunto de todas las funciones diferenciables en M con imagen en N, con respecto al nivel convencional.* $\square$

Ejemplo 4.3.17. *Consideremos la circunferencia $S^1 \subseteq \pi_{xy}$ y la aplicación $\varphi : S^1 \to [0, 2\pi)$, que asocia a cada punto de S^1 el ángulo que forma con el eje horizontal OX del plano. Sea $\mathbf{I_1}$ la isotopía del Ejemplo 4.2.5, que construye la esfera S^2 a partir de S^1 e $\mathbf{I_2}$ la isotopía de dicho ejemplo, que construye el conjunto $[0, 2\pi) \times [0, \pi)$ a partir de $[0, 2\pi)$. Sea además $\Phi^1_\varphi(t) = 2t$, para todo $t \in [0, \pi)$.*

Por otra parte, consideremos $\mathbf{I_3}$, la isotopía del Ejemplo 4.2.18 que origina el toro $\mathbf{T}$ a partir de S^1 e $\mathbf{I_4}$ la isotopía de dicho ejemplo que construye el conjunto $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, a partir de $[0, 2\pi)$. Sea finalmente $\Phi^2_\varphi(t) = t$, para todo $t \in [0, 2\pi)$.

Dado que la aplicación identidad $Id : S^1 \to S^1$ es diferenciable en S^1, considerando la estructura diferenciable de la circunferencia S^1, vista en los ejemplos *citados, y dado que la construcción realizada verifica las condiciones de la Proposición 4.3.16, si tomamos $\Phi_{Id}(t) = 2t$ para todo $t \in [0, \pi)$, llegamos finalmente a que la isoaplicación asociada a Id, $\overline{\widehat{Id}} : S^2 \to \mathbf{T}$, es isodiferenciable en S^2.*

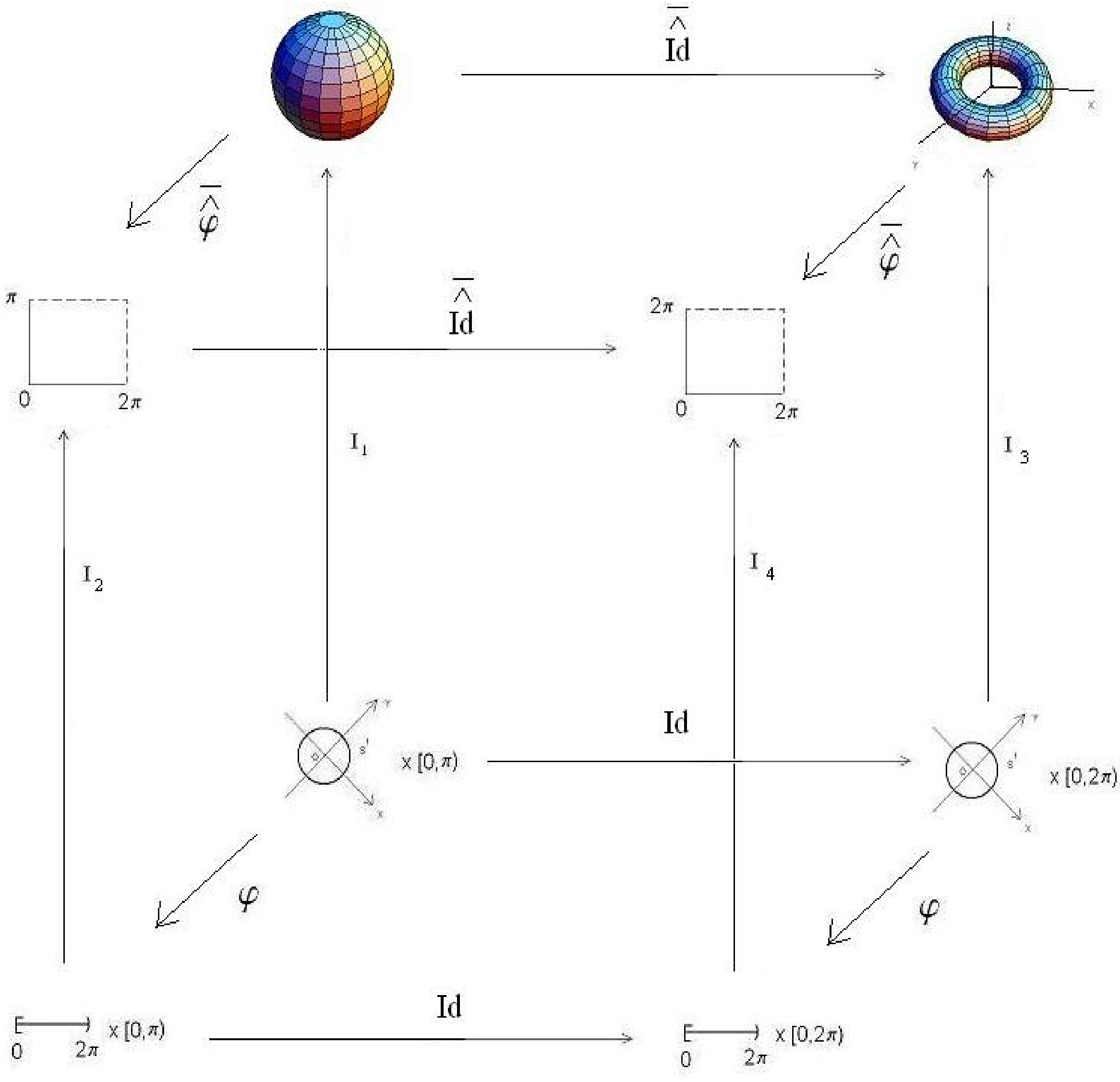

Figura 4.16: Isoaplicación isodiferenciable de S^2 en $\mathbf{T}$.

$\triangleleft$

Por otra parte, en la práctica, no se fijará un isopunto, sino que tomaremos una isocarta de cada isovariedad y procederemos a la intersección señalada. De esta forma, cuando $\overline{\widehat{f}}$ se dé explícitamente, trabajaremos en cada isopunto de las isovariedades. En cambio, si $\widehat{\overline{f}}$ viene dada en forma genérica, nos interesará trabajar con otra definición de isodiferenciabilidad equivalente a la anterior:

Definición 4.3.18. *Sean* $(\widehat{\overline{M}}, \widehat{\overline{A}})$ *y* $(\widehat{\overline{N}}, \widehat{\overline{B}})$ *dos isovariedades isodiferenciables de dimensiones* m *y* n*, respectivamente, y sea* $\widehat{\overline{f}} : \widehat{\overline{M}} \to \widehat{\overline{N}}$ *una isoaplicación isocontinua. Se dice que* $\widehat{\overline{f}}$ *es* isodiferenciable *y se denota por* $\widehat{\overline{f}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{M}}, \widehat{\overline{N}})$*, si para toda isocarta local* $(\widehat{\overline{U}}, \widehat{\overline{\varphi}})$ *sobre* $\widehat{\overline{M}}$ *y para toda isocarta local* $(\widehat{\overline{V}}, \widehat{\overline{\Psi}})$ *sobre* $\widehat{\overline{N}}$*, tales que* $\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}) \neq \emptyset$*, se tiene que* $\widehat{\overline{\Psi}} \circ \widehat{\overline{f}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1} : \widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}})) \subseteq \widehat{\overline{\mathbb{R}}}^m \to (\widehat{\overline{\Psi}} \circ \widehat{\overline{f}})(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}})) \subseteq \widehat{\overline{\mathbb{R}}}^n$ *es isodiferenciable.*

Llegamos entonces al siguiente resultado:

Proposición 4.3.19. *En las condiciones de la definición anterior, si la isotopías utilizadas son inyectivas en* F^M *y* F^N*, entonces, en el caso en que* $\widehat{\overline{f}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{M}}, \widehat{\overline{N}})$*, se tiene que* $\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{f}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{M}})$ *para toda isoaplicación* $\widehat{\overline{g}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{N}})$*.*

Demostración.

Sean $\widehat{\overline{f}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{M}}, \widehat{\overline{N}})$, $\widehat{\overline{g}} \in \widehat{\overline{\mathbf{F}}}(\widehat{\overline{N}})$ y $(\widehat{\overline{U}}, \widehat{\overline{\varphi}})$ una isocarta local sobre $\widehat{\overline{M}}$. Si el isoatlas asociado a $\widehat{\overline{N}}$ es $\widehat{\overline{B}} = \{(\widehat{\overline{V}}_i, \widehat{\overline{\Psi}}_i)\}_{i\in I}$, entonces, $\widehat{\overline{U}} = \cup_{i\in I}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))$. Con lo cual, $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}}) = \cup_{i\in I}\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))$.

Atendiendo a la Proposición 4.3.13, bastará probar que $(\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{f}})_{|\widehat{\overline{U}}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1} : \widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}}) \subseteq \widehat{\overline{\mathbb{R}}}^m \to \widehat{\overline{\mathbb{R}}}$ es isodiferenciable. No obstante, como $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}})$ es unión de abiertos en $\widehat{\overline{\mathbb{R}}}^m$, resta ver, aplicando el apartado (b) de la Proposición 4.3.8, que $(\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{f}}))_{|\widehat{\overline{U}}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1}$ es isodiferenciable en cada $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))$.

Ahora bien:

$$(\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{f}}))_{|\widehat{\overline{U}}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1}_{|\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))} = \widehat{\overline{g}}_{|\widehat{\overline{f}}(\widehat{\overline{U}}) \cap \widehat{\overline{V}}_i} \circ \widehat{\overline{\Psi}}_i^{-1} \circ \widehat{\overline{\Psi}}_i \circ \widehat{\overline{f}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1}_{|\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))}$$

De esta forma, como $\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{\Psi}}_i^{-1}$ y $\widehat{\overline{\Psi}}_i \circ \widehat{\overline{f}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1}$ son isodiferenciables, basta aplicar el Corolario 3.4.9, llegando a que $(\widehat{\overline{g}} \circ \widehat{\overline{f}})_{|\widehat{\overline{U}}} \circ \widehat{\overline{\varphi}}^{-1}$ es isodiferenciable en $\widehat{\overline{\varphi}}(\widehat{\overline{U}} \cap \widehat{\overline{f}}^{-1}(\widehat{\overline{V}}_i))$, como queríamos probar. □

De esta forma, teniendo en cuenta que a partir de la construcción del Ejemplo 4.2.18 hemos encontrado una isofunción isodiferenciable $\widehat{\overline{\varphi}}$ (ver Figura 4.13) de $\mathbf{T}$ en

$[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ y que atendiendo al Ejemplo 4.3.17 hemos obtenido una isoaplicación isodiferenciable $\overline{\widehat{Id}}$ de S^2 en $\mathbf{T}$, resultará, aplicando la Proposición 4.3.19, que $\overline{\widehat{\varphi}} \circ \overline{\widehat{Id}}$: $S^2 \to [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ es una isofunción isodiferenciable en S^2:

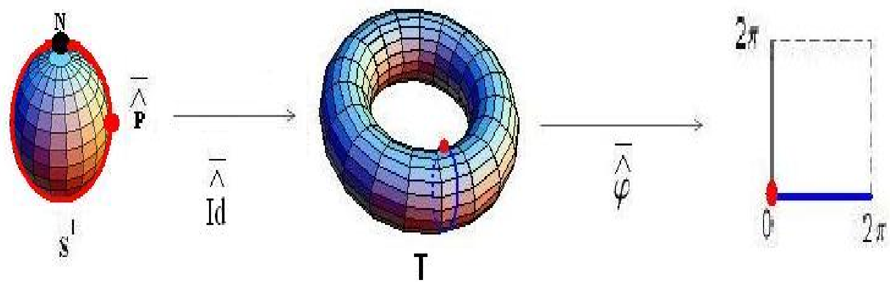

Figura 4.17: Composición de una isoaplicación y una isofunción isodiferenciables.

Es conocido que el recíproco del resultado convencional correspondiente a la Proposición 4.3.19 requiere una complicada construcción [12], que será similar a la hora de dar el correspondiente recíproco en el nivel de proyección.

En particular, gracias a los resultados vistos hasta ahora, puede comprobarse que, siguiendo una demostración análoga al caso convencional [12], se prueban los siguientes resultados:

Lema 4.3.20. *Sea $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable de dimensión m, contruida a partir de una isotopía inyectiva en F^M y sea $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, con $\overline{\widehat{U}}$ un isoentorno abierto de $\overline{\widehat{P}}$. Sea $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ un isocuerpo isorreal construido a partir de una isotopía inyectiva en $F^{\mathbb{R}}$ y compatible respecto a $+$ y $\times$. Entonces, existen un isoentorno abierto $\overline{\widehat{V}}$ de $\overline{\widehat{P}}$ y una isofunción isodiferenciable $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$, tales que:*

a) $\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{U}}$.

b) $\overline{\widehat{S}} \overline{\widehat{\leq}} \overline{\widehat{f}} \overline{\widehat{\leq}} \overline{\widehat{I}} = \overline{\widehat{1}}$, $\overline{\widehat{f}} \equiv \overline{\widehat{I}} = \overline{\widehat{1}}$ *en* $\mathbf{CL}(\overline{\widehat{V}})$ *y* $f \equiv \overline{\widehat{S}} = \overline{\widehat{0}}$ *en* $\overline{\widehat{M}} - \overline{\widehat{U}}$.

Si se fija además $\overline{\widehat{h}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, existen entonces un isoentorno abierto $\overline{\widehat{V}}$ de $\overline{\widehat{P}}$, con $\mathbf{CL}(\overline{\widehat{V}}) \subseteq \overline{\widehat{U}}$ y una isofunción $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$, tales que $\overline{\widehat{g}} \equiv \overline{\widehat{h}}$ en $\overline{\widehat{V}}$ y $\overline{\widehat{g}} \equiv \overline{\widehat{S}} = \overline{\widehat{0}}$ en $\overline{\widehat{M}} - \overline{\widehat{U}}$. □

Proposición 4.3.21. *En las condiciones de la Definición 4.3.18, supongamos que $\overline{\widehat{M}}$ y $\overline{\widehat{N}}$ se construyen a partir de isotopías inyectivas en F^M y F^N, respectivamente,* *y que $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ lo hace a partir de una isotopía inyectiva en $F^{\mathbb{R}}$ y compatible respecto a $+$ y $\times$. En caso de que para toda isoaplicación $\overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{N}})$ se tenga que $\overline{\overline{g}} \circ \overline{\widehat{f}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$, resulta $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{N}})$.* □

Atendiendo ahora a las Proposiciones 4.3.19 y 4.3.21, llegamos inmediatamente al siguiente:

Corolario 4.3.22. *Sean $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A}})$ y $(\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{B}})$ dos isovariedades isodiferenciables de dimensiones m y n, respectivamente, en las condiciones de la Proposición 4.3.21 y sea $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{N}}$ una isoaplicación isocontinua. Entonces, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{N}})$ si y sólo si para toda isoaplicación $\overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{N}})$ se tiene que $\overline{\overline{g}} \circ \overline{\widehat{f}} \in \overline{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}})$.* □

Siguiendo de nuevo la misma línea de la correspondiente prueba en el nivel convencional, pueden probarse los siguientes resultados:

Proposición 4.3.23. *Se verifica que:*

a) Si $\overline{\widehat{M}}$ es una isovariedad isodiferenciable con dos isoestructuras isodiferenciables $\overline{\widehat{A_1}}$ y $\overline{\widehat{A_2}}$ compatibles, entonces la isoaplicación isoidentidad $\overline{\widehat{Id}} : (\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A_1}}) \to (\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{A_2}})$ es isodiferenciable.

b) Sean $(\overline{\widehat{M_1}}, \overline{\widehat{A_1}})$, $(\overline{\widehat{M_2}}, \overline{\widehat{A_2}})$ y $(\overline{\widehat{M_3}}, \overline{\widehat{A_3}})$ tres isovariedades isodiferenciables, tales que las isotopías que construyen $\widehat{M_1}$ y $\widehat{M_2}$ son inyectivas en F^{M_1} y F^{M_2}, respectivamente. Se verifica entonces que dadas $\overline{\widehat{f}} : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ y $\overline{\overline{g}} : \widehat{M_2} \to \widehat{M_3}$ dos isoaplicaciones isodiferenciables, la composición $\overline{\overline{g}} \circ \overline{\widehat{f}} : \widehat{M_1} \to \widehat{M_3}$ es otra isoaplicación isodiferenciable. □

En particular, si consideramos la isoaplicación isodiferenciable entre S^2 y $\mathbf{T}$ del Ejemplo 4.3.17 y construimos de forma análoga una isoaplicación entre $\mathbf{T}$ y el toro enlazado construido en el Ejemplo 4.2.19, obtendremos, aplicando el apartado (b) de la proposición anterior, bajo cuyas condiciones nos encontramos, una isoaplicación isodiferenciable entre S^2 y el toro enlazado:

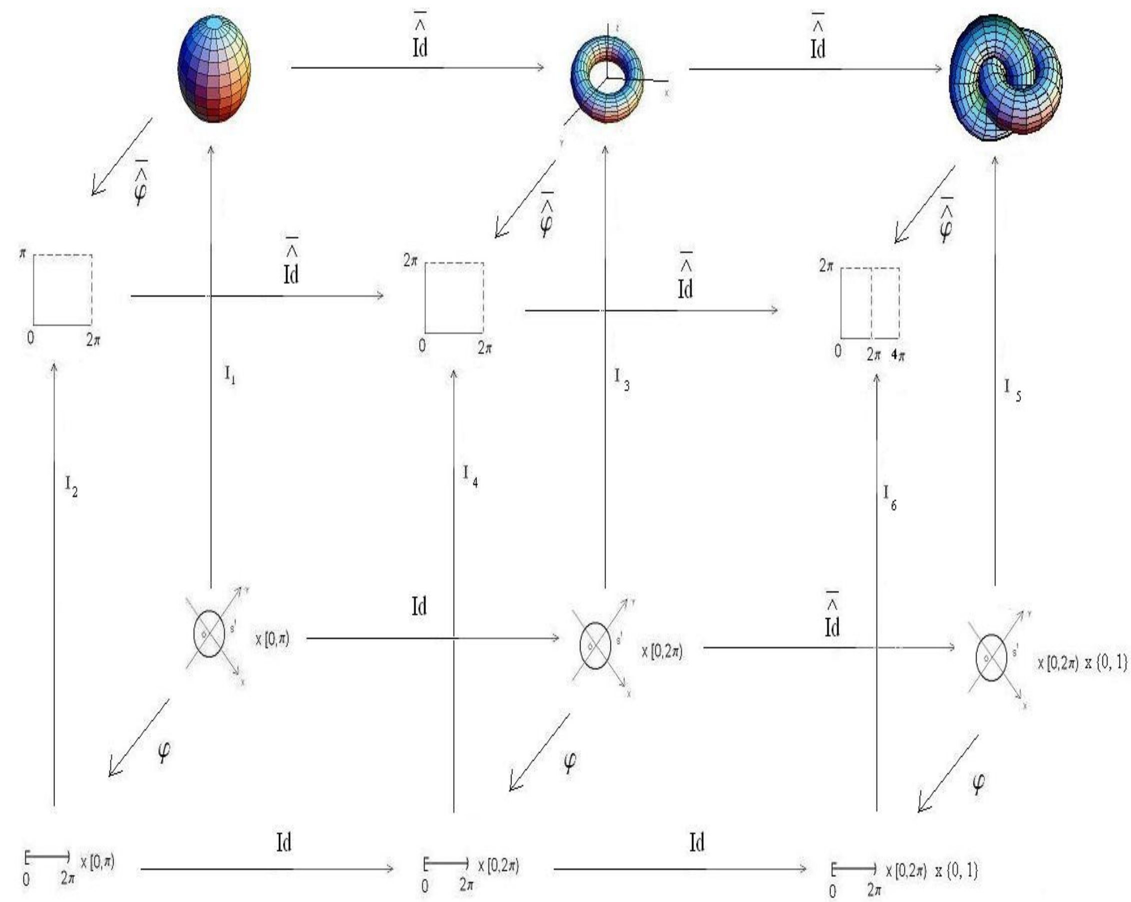

Figura 4.18: Composición de isoaplicaciones isodiferenciables.

Finalmente, terminamos esta sección con el siguiente resultado:

Proposición 4.3.24. *Sean $\overline{\widehat{M_1}}, \overline{\widehat{M_2}}, \overline{\widehat{N_1}}$ y $\overline{\widehat{N_2}}$ cuatro isovariedades isodiferenciables, tales que las isotopías utilizadas son inyectivas en los factores externos correspondientes. Sean $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M_1}} \to \overline{\widehat{N_1}}$ y $\overline{\widehat{g}} : \overline{\widehat{M_2}} \to \overline{\widehat{N_2}}$ dos isoaplicaciones isodiferenciables en $\overline{\widehat{M_1}}$ y $\overline{\widehat{M_2}}$, respectivamente. Entonces, la isoaplicación $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}} : (\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}) \to (\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}})(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}) = (\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}}), \overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{Y}}))$ es isodiferenciable en $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$.*

Demostración.

La inyectividad impuesta permite asegurar mediante la Proposición 4.2.25 que $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$ y $\overline{\widehat{N_1}} \times \overline{\widehat{N_2}}$ pueden dotarse de sus respectivas isoestructuras isodiferenciables productos. Atendiendo ahora a que $\overline{\widehat{f}} \times \overline{\widehat{g}} = \overline{\widehat{f \times g}}$, basta tener en cuenta el caso convencional y aplicar entonces la Proposición 4.3.16 para obtener el resultado. □

Capítulo 5

ISOGRUPOS DE LIE

En 1978, Santilli plantea por primera vez la definición de grupo de Lie-Santilli, conocido también por grupo de isotransformación. Lo define como un isogrupo que verifica unas condiciones análogas a los grupos de transformaciones convencionales, aunque vistas ahora a nivel isotópico (véase [34]). Posteriores estudios prosiguieron desarrollando el concepto y las propiedades de los grupos de Lie-Santilli (véanse [4],[24],[30],[43] y [50]). El penúltimo de los trabajos mencionados ya trabajaba con la noción adaptada al concepto de isodiferenciabilidad.

Lo que nos proponemos en este Capítulo es alcanzar la noción de grupo de Lie-Santilli, después de haber realizado un amplio desarrollo de los levantados isotópicos de los grupos de Lie convencionales, a los que llamaremos isogrupos isotópicos de Lie. Esto lo haremos con vistas a obtener las relaciones existentes entre éstos y las álgebras isotópicas de Lie, cuyas propiedades básicas son ya conocidas.

Aplicaremos aquí los resultados vistos en las secciones anteriores sobre isodiferenciabilidad, lo cual nos llevará a ampliar y generalizar resultados ya existentes en la literatura acerca de los isogrupos isotópicos de Lie, como puede ser el tratado de 1993 de los matemáticos griegos Sourlas y Tsagas (véase [50]). Veremos también una importante cantidad de ejemplos que nos ayudarán a comprender los resultados teóricos que obtendremos. Además, en todo momento plantearemos las diferencias existentes entre los niveles convencional y de proyección, al igual que las semejanzas que hay entre ellos.

5.1. Isogrupos isotópicos de Lie

En esta sección daremos la definición de isogrupo isotópico de Lie, estudiando una serie de ejemplos de estos isogrupos. Analizaremos también la relación existente entre los grupos de Lie convencionales y los isogrupos isotópicos de Lie. Finalmente, daremos una caracterización de estos últimos.

Definición 5.1.1. *Sea* $\overline{\widehat{G}}$ *un conjunto isotópico asociado a un conjunto* G *cualquiera. Se dice que una isoestructura isodiferenciable y una isoestructura de isogrupo sobre* $\overline{\widehat{G}}$*,* $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$*, son* compatibles*, si:*

a) $\overline{\widehat{G}} \times \overline{\widehat{G}}$ *está dotado de isoestructura isodiferenciable.*

b) La isoaplicación $\overline{\widehat{\eta}} : \overline{\widehat{G}} \times \overline{\widehat{G}} \to \overline{\widehat{G}} : (\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{y}}) \to \overline{\widehat{\overline{\widehat{x}} \widehat{\circ} \overline{\widehat{y}}^{-\widehat{I}}}}$*, es isodiferenciable, siendo* $\widehat{I}$ *la isounidad asociada a* $\overline{\widehat{G}}$*.*

Se denomina isogrupo isotópico de Lie *a todo conjunto isotópico dotado de una isoestructura de isogrupo y de una isoestructura isodiferenciable compatibles.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1.2. *Consideramos el grupo aditivo* $(\mathbb{R}^2, +)$ *dotado de estructura de grupo de Lie para el atlas* $A = (\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$ *y la aplicación diferenciable* $\eta(x, y) = x+y$*. Tomamos a continuación la isotopía inyectiva de elementos* $*$*, el producto usual entre matrices, e* $\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*

Resulta la proyección $\overline{\widehat{(x, y)}} = (x, y) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (x + y, y)$*, obteniéndose el isogrupo* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2, \overline{\widehat{+}}) = (\mathbb{R}^2, +)$*.*

Por otra parte, consideremos la proyección isotópica correspondiente $\overline{\widehat{A}}$ *y la isoaplicación* $\overline{\widehat{\eta}}(x, y) = x + y = \eta(x, y)$*. Se comprueba entonces que el Corolario 4.3.12 asegura la isodiferenciabilidad de* $\overline{\widehat{\eta}}$*, pudiéndose dotar entonces a* $\mathbb{R}^2$ *de estructura de isogrupo isotópico de Lie.* $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.3. *Consideremos el isogrupo* $(\overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}, \overline{\widehat{+}})$, *obtenido como revolución respecto al* $(0,0) \in \pi_{xy}$, *al considerar el tiempo en el factor externo* $F^{\mathbb{R}} = [0, 2\pi)$.

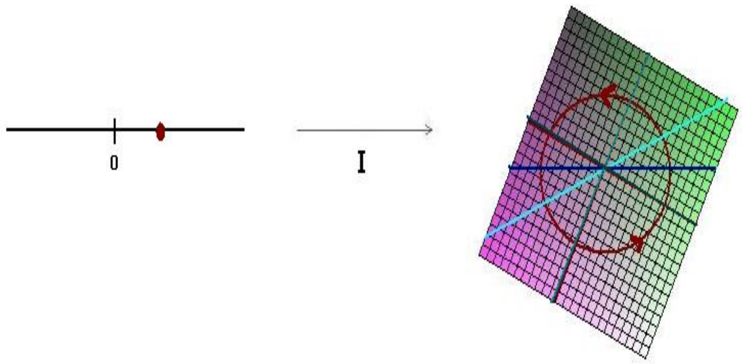

Figura 5.1: π_{xy} *como proyección isotópica de una recta.*

Este levantamiento isotópico es no inyectivo, pues el origen de coordenadas se mantiene fijo en todo instante de tiempo. Sin embargo, sí es inyectivo en $F^{\mathbb{R}}$.

Consideramos ahora la aplicación:

$$\Phi_{+} : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to [0, 2\pi) : (s, t) \to \Phi_{+}(s, t) = s + t \ (mod\ 2\pi).$$

Observemos entonces que dotamos al plano $\pi_{xy} = \overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}$ *de estructura de isogrupo para la isooperación* $\overline{\widehat{+}}$, *definida como:*

$$(r_1\ cos\ t_1, r_1\ sen\ t_1)\overline{\widehat{+}}(r_2\ cos\ t_2, r_2\ sen\ t_2) = ((r_1+r_2)\ cos\ (t_1+t_2), (r_1+r_2)\ sen\ (t_1+t_2)).$$

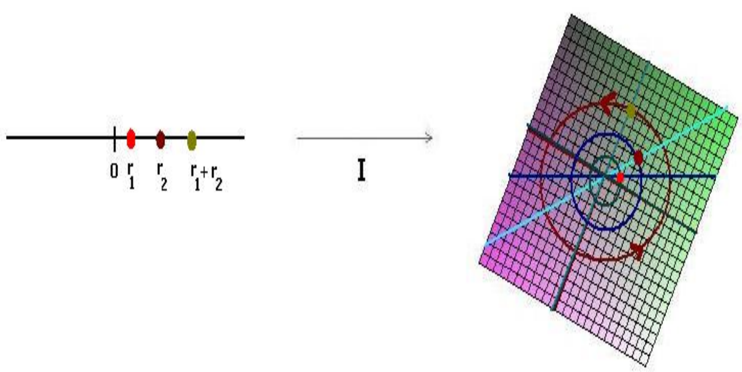

Figura 5.2: Estructura de isogrupo en π_{xy}.

Resulta que $\overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}})\}$ *es un isoatlas isodiferenciable sobre* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, siendo* $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{A}}$ *un isoatlas isodiferenciable sobre* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, donde considerando la aplicación* $\Phi_{Id_{\mathbb{R}}} = Id_{[0,2\pi)}$*, se alcanza que* $\overline{\widehat{Id}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, es tal que* $\overline{\widehat{Id}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{x}}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Consideramos ahora la aplicación diferenciable $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \to x - y = x + y^{-0}$*. Si tomamos* $\Phi_\eta(s, t) = \Phi_+(s, t) = s + t$*, resulta finalmente la isoaplicación:*

$$\overline{\widehat{\eta}} : \pi_{xy} \times \pi_{xy} \to \pi_{xy}$$

$$\overline{\widehat{\eta}}(x * \widehat{I}(x, s), y * \widehat{I}(y, t)) = \eta(x, y) * \widehat{I}((\eta(x, y), \Phi_\eta(s, t)) =$$

$$= (x - y) * \widehat{I}(x - y, s + t) = x * \widehat{I}(x, s) \overline{\widehat{+}} (y * \widehat{I}(y, t))^{-\widehat{I}}.$$

En particular, aplicando el Corolario 4.3.12, obtenemos que $\overline{\widehat{\eta}}$ *es isodiferenciable. Dotamos de esta forma al plano* π_{xy} *de estructura de isogrupo isotópico de Lie.* $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.4. *Consideremos el isogrupo* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{\times}})$ *asociado al grupo* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *a partir de la isotopía de elementos* $\widehat{I} = i \in \mathbb{C}$ *y* $* \equiv \cdot$*, el producto usual de complejos. De esta forma, para todos* $x, y \in \mathbb{R}^*$*, se tiene que* $\overline{\widehat{x}} \overline{\widehat{\times}} \overline{\widehat{y}} = \overline{\widehat{x \cdot y}} = \overline{\widehat{x \times y}} = (x \times y) \cdot i$*, obteniéndose por tanto la compatibilidad respecto a* $\times$ *de la isotopía utilizada.*

Consideremos el isoatlas sobre $\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}} \equiv \mathbb{C}^*$*,* $\overline{\widehat{A}} = \{(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{Id}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}})\} = \{(\mathbb{C}^*, Id_{\mathbb{C}^*})\}$*. Se comprueba entonces que* $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{A}}$ *dota a* $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *de isoestructura isodiferenciable.*

Tomemos por otro lado la aplicación diferenciable $\eta : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* : (x, y) \to x \times y^{-1}$*. Definimos entonces* $\overline{\widehat{\eta}} : \overline{\widehat{\mathbb{R}^*}} \times \overline{\widehat{\mathbb{R}^*}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}$*, tal que* $\overline{\widehat{\eta}}(\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{y}}) = \overline{\widehat{\eta(x, y)}} = \overline{\widehat{x \times y^{-1}}} = \overline{\widehat{x}} \overline{\widehat{\times}} \overline{\widehat{y}}^{-\widehat{I}} = (x \cdot y^{-1}) \cdot i$*, para todos* $x, y \in \mathbb{R}^*$*.*

El Corolario 4.3.12 asegura que $\overline{\widehat{\eta}}$ *es isodiferenciable. Así, la isoestructura de isogrupo de* $(\mathbb{C}^*, \overline{\widehat{\times}})$ *es compatible con la isoestructura isodiferenciable de* $\mathbb{C}^*$ *dada por el isoatlas* $\overline{\widehat{A}}$*.* $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.5. *Puede haber situaciones en las que nos interese trabajar con una isotopía múltiple (constituida por varios levantamientos isotópicos), que deba variar en el tiempo de una forma constante y relativamente arbitraria. Para ello es necesario disponer de un cierto sistema para determinar explícitamente tal isounidad.*

Supongamos por ejemplo, fijado $m \in \mathbb{N}$*, las siguientes funciones:*

$$\mathbf{t} : \mathbb{R} \to \mathbb{N} : x \to \mathbf{t}(x) = t_x,$$

$$\mathbf{h} : \{1, ..., t_0\} \times \{1, ..., m\} \to \mathbb{N}^* : x \to \mathbf{h}(i,j) = h_{ij}.$$

Sea ahora $(\mathbf{GL}(m,\mathbb{R}), \cdot)$ *el grupo general de matrices de orden* m, *siendo* $\cdot$ *el producto usual de matrices. Construyamos a continuación la proyección* $(\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}}, \bar{\hat{\cdot}})$, *a partir de una isotopía que a cada elemento de la fila* j*-ésima le aplica a su vez el levantamiento isotópico correspondiente a los elementos de isotopía* $* \equiv \times$, *el producto usual en* $\mathbb{R}$, *e isounidad* $\widehat{I}_j = h_{ij}$. *Tal construcción depende pues del tiempo como factor externo* $F^{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})} = \{0, ..., t_0\}$, *dando lugar a un levantamiento isotópico inyectivo, tal que:*

$$\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}} = \{\overline{\widehat{M}} \in \overline{\widehat{\mathbf{M}_m(\mathbb{R})}} : M \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{R})\} = \{\overline{\widehat{M}} \in \overline{\widehat{\mathbf{M}_m(\mathbb{R})}} : \det(M) \neq 0\} =$$

$$= \{\overline{\widehat{M}} \in \overline{\widehat{\mathbf{M}_n(\mathbb{R})}} : \overline{\widehat{\det}}(\overline{\widehat{M}}) \neq \overline{\hat{0}} = \overline{\widehat{S}}\}.$$

Consideramos además el levantado isotópico del cuerpo real $(\mathbb{R}, +, \times)$ *a partir del levantamiento isotópico de elementos de isotopía principales* t_0 *y* $\times$ *y secundarios* 0 *y* $+$. *Como además las isomatrices serán isorreales, vamos a denotar a* $\overline{\widehat{\mathbf{M}_n(\mathbb{R})}}$ *por* $\overline{\widehat{\mathbf{M}}}_n(\overline{\widehat{\mathbb{R}}})$ *y a* $\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}}$ *por* $\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m, \overline{\widehat{\mathbb{R}}})$, *dando así una mejor idea del levantamiento isotópico que estamos llevando a cabo.*

Finalmente, supondremos que todas las aplicaciones de tipo Φ *que intervengan en la construcción estén definidas en tiempos paralelos, coincidiendo con la identidad en dichos tiempos. Esto es,* $\Phi(t,t) = t$, *para todo* $t \in \{0, ..., t_0\}$.

A continuación, teniendo en cuenta la inyectividad de la isotopía utilizada podemos dotar a $\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}}$ *de la isotopología* $\overline{\widehat{\Upsilon}}_f$ *asociada a la topología final* Υ_f *correspondiente a la función determinante* $\det : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. *Tendremos entonces que* $\overline{\widehat{U}} \in \overline{\widehat{\Upsilon}}_f \Leftrightarrow U \in \Upsilon_f \Leftrightarrow \det(U) \in T$, *donde* T *es la topología euclídea usual asociada a* $\mathbb{R}$. *Ahora bien, si consideramos la isotopología de Tsagas-Sourlas* $\overline{\widehat{T}}$, *resulta que* $\det(U) \in T \Leftrightarrow \overline{\widehat{\det(U)}} = \overline{\widehat{\det}}(\overline{\widehat{U}}) \in \overline{\widehat{T}}$. *Así pues,* $\overline{\widehat{U}} \in \overline{\widehat{\Upsilon}}_f \Leftrightarrow \overline{\widehat{\det}}(\overline{\widehat{U}}) \in \overline{\widehat{T}}$.

Observamos con esto que la construcción de la isotopología final es coherente y que en particular, $\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}}$ *es un isoabierto de* $\overline{\widehat{\mathbf{M}_n(\mathbb{R})}}$. *Esto se tiene en primer lugar por ser el levantado isotópico de un abierto de* $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *y en segundo lugar* *porque* $\overline{\widehat{\det}}(\overline{\widehat{\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})}}) = \overline{\det(\widehat{\mathbf{GL}(m},\mathbb{R}))} = \overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}$*, que es isoabierto de* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *al ser* $\mathbb{R}^*$ *un abierto de* $\mathbb{R}$*.*

Sea ahora la isoaplicación $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^{m^2}$*, asociada a la aplicación:*

$$\varphi : \mathbf{GL}(m,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{m^2}$$

$$\varphi(A) = (a_{11}, ..., a_{1m}, a_{21}, ..., a_{2m}, a_{31}, ..., a_{mm}),$$

para todo $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{R})$*. Esto es:*

$$\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{A}}) = \overline{\widehat{\varphi(A)}} = (\overline{\widehat{a_{11}}}, ..., \overline{\widehat{a_{1m}}}, ..., \overline{\widehat{a_{mm}}}).$$

Tenemos entonces por construcción que $\overline{\widehat{\mathcal{A}}} = \{(\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}}), \overline{\widehat{\varphi}})\}$ *constituye un isoatlas isodiferenciable sobre* $\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}})$*, formado por una única isocarta local, siendo* $\overline{\widehat{\mathcal{A}}} \times \overline{\widehat{\mathcal{A}}}$ *un isoatlas isodiferenciable sobre* $\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}}) \times \overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}})$*.*

Consideramos ahora la aplicación diferenciable $\eta(A,B) = A \cdot B^{-Id_m}$*. Definimos entonces* $\overline{\widehat{\eta}}(\overline{\widehat{A}}, \overline{\widehat{B}}) = \overline{\widehat{\eta(A,B)}} = \overline{\widehat{A \cdot B^{-Id_m}}} = \overline{\widehat{A}}\hat{\cdot}\overline{\widehat{B}}^{-\hat{I}}$*, para todos* $A, B \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{R})$*. El Corolario 4.3.12 asegura entonces que* $\overline{\widehat{\eta}}$ *es isodiferenciable y por tanto, que la isoestructura de isogrupo de* $(\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}}), \hat{\cdot})$ *es compatible con la isoestructura isodiferenciable de* $\overline{\widehat{\mathbf{GL}}}(m,\overline{\widehat{\mathbb{R}}})$*, dada por el isoatlas* $\overline{\widehat{\mathcal{A}}}$*.* $\triangleleft$

Hagamos notar que en la Definición 5.1.1, $\overline{\widehat{\eta}}$ es una isoaplicación, por lo cual debe estar asociada a una aplicación $\eta : G \times G \to G$ en el nivel convencional. De hecho, si estamos usando un levantamiento isotópico de elementos de isotopía $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I), η vendrá dada como $\eta : G \times G \to G : (x, y) \to \eta(x, y) = x * y^{-I}$.

Un caso particular que será muy utilizado en nuestro estudio se dará cuando impongamos en el levantamiento isotópico utilizado en la construcción de $\overline{\widehat{G}}$, la compatibilidad respecto a $\circ$:

Proposición 5.1.6. *Sea* $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ *un isogrupo asociado a* $(G, \circ)$ *mediante una isotopía de elementos* $*$ *e* $\widehat{I}$*. En el caso de que* $*$ *sea asociativa en el conjunto general* V *y la isotopía sea inyectiva, la compatibilidad del levantamiento isotópico utilizado* *respecto a $\circ$ implica que los niveles convencional y general coinciden, en el sentido de ser $(G, \circ) \equiv (G, *)$.*

Demostración.

Se tendrá por definición de compatibilidad que, para todos $a*\widehat{I}(F_a), b*\widehat{I}(F_b) \in \overline{\overline{\widehat{E}}}$ se cumple:

$$\left(a * \widehat{I}(F_a)\right) \overline{\overline{\widehat{\circ}}} \left(b * \widehat{I}(F_b)\right) =$$
$$= \left[\left((a * \widehat{I}(F_a)) * T(F_a)\right) * \left((b * \widehat{I}(F_b)) * T(F_b)\right)\right] * \widehat{I}\left(\Phi_\circ(F_a, F_b)\right) =$$
$$= (a \circ b) * \widehat{I}(\Phi_\circ(F_a, F_b)).$$

Atendiendo a la asociatividad de $*$ en el conjunto general, resulta:

$$(a * b) * \widehat{I}\left(\Phi_\circ(F_y, F_a)\right) = (a \circ b) * \widehat{I}(\Phi_\circ(F_a, F_b)).$$

La inyectividad de la isotopía utilizada obliga finalmente a ser $a*b = a\circ b$. Luego, $* \equiv \circ$ y así, $(G, \circ) \equiv (G, *)$. $\square$

De esta forma, bajo las condiciones del resultado anterior, $\overline{\overline{\widehat{x}\widehat{\circ}\widehat{y}}}^{-\widehat{I}} = \overline{\overline{\widehat{x}\widehat{\circ}}}\overline{\widehat{y^{-e}}} = \overline{\widehat{x \circ y^{-e}}}$, $\forall x, y \in G$, donde e es el elemento unidad de $(G, \circ)$. Con lo cual, en este caso, $\eta : G \times G \to G : (x, y) \to \eta(x, y) = x \circ y^{-e}$.

Es interesante observar también el siguiente resultado:

Proposición 5.1.7. *Sea $(G, \circ)$ un grupo dotado de una estructura diferenciable de dimensión m, $A = \{(U_h, \varphi_h)\}_{h\in H}$, en el nivel general y sea $(\overline{\overline{\widehat{G}}}, \overline{\overline{\widehat{\circ}}})$ un isogrupo asociado a G, construido a partir de una isotopía inyectiva en F^G y en la construcción del isocuerpo $\overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}^m$ correspondiente, siendo la aplicación Φ_{φ_h} una biyección para todo $h \in H$. Bajo estas condiciones, $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ está dotado de una isoestructura isodiferenciable.*

De hecho, se tiene que $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ es un isogrupo isotópico de Lie si y sólo si G tiene estructura de grupo de Lie en el nivel general.

Demostración.

Por una parte, la Proposición 4.2.11 nos asegura que $A = \{(U_h, \varphi_h)\}_{h\in H}$ es una estructura diferenciable sobre G si y sólo si $\overline{\overline{\widehat{A}}} = \{(\overline{\overline{\widehat{U_h}}}, \overline{\overline{\widehat{\varphi_h}}})\}_{h\in H}$ es una isoestructura isodiferenciable sobre $\overline{\overline{\widehat{G}}}$.

Ahora, para la segunda parte del resultado consideramos la aplicación $\eta : G \times G \to G : (x, y) \to \eta(x, y) = x * y^{-I}$, donde $*$ es la $*$-ley principal utilizada en la construcción de $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ e I es el elemento unidad de G respecto a $*$.

Dado que aplicando la Proposición 4.3.24, tenemos que $\overline{\overline{\widehat{G}}} \times \overline{\overline{\widehat{G}}}$ puede dotarse de la isoestructura isodiferenciable producto, tiene sentido considerar entonces la proyección isotópica de η, $\overline{\overline{\widehat{\eta}}} : \overline{\overline{\widehat{G}}} \times \overline{\overline{\widehat{G}}} \to \overline{\overline{\widehat{G}}}$. De tal forma que, aplicando a su vez la Proposición 4.3.16, llegamos a que η es diferenciable si y sólo si $\overline{\overline{\widehat{\eta}}}$ es isodiferenciable, lo cual sirve por definición para terminar de probar nuestro resultado. □

Obsérvese que el resultado anterior permite simplificar el análisis realizado en cada uno de los ejemplos que hemos visto al comienzo de esta sección.

Veamos algunos ejemplos más al respecto:

Ejemplo 5.1.8. *Consideremos la circunferencia S^1 dotada de su estructura diferenciable habitual, atendiendo a dos proyecciones estereográficas, y de la multiplicación inducida como grupo de complejos unimodulares:*

$$\eta : S^1 \times S^1 \to S^1$$
$$\eta(e^{it_1}, e^{it_2}) = e^{i(t_1+t_2)}.$$

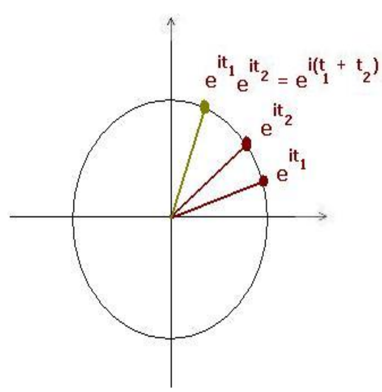

Figura 5.3: S^1 como grupo multiplicativo.

Este producto dota de hecho a S^1 de estructura de grupo de Lie.

Consideremos por otro lado la isotopía dependiente del factor externo $F^{S^1} = [0, \pi)$, de elementos $*$ e $\widehat{I}$, que construye la esfera S^2 como proyección de S^1 al rea-

lizar la revolución de la circunferencia respecto al eje OZ de $\mathbb{R}^3$, que ya hemos visto que permite considerar la esfera como isoestructura isodiferenciable de dimensión 1.

Sea ahora $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente, tal que $r(1) = 1$. Podemos extender entonces la anterior isotopía a $F^{S^1} = [0, +\infty)$, de tal forma que, fijado $k \in \mathbb{N}$, en cada $[(k-1)\pi, k\pi)$, la circunferencia S^1 origine de forma análoga una esfera de radio $r(k)$, de tal forma que cada una sea secante a la anterior, en el polo norte de esta última. Dicha isotopía sería inyectiva en F^{S^1}.

Tal construcción permite de hecho considerar la cadena de esferas como isovariedad isodiferenciable de dimensión 1, atendiendo a la estructura diferenciable de la circunferencia. Obsérvese que dicha cadena no es en cambio una variedad diferenciable, pues los polos de cada esfera son puntos conflictivos para ello.

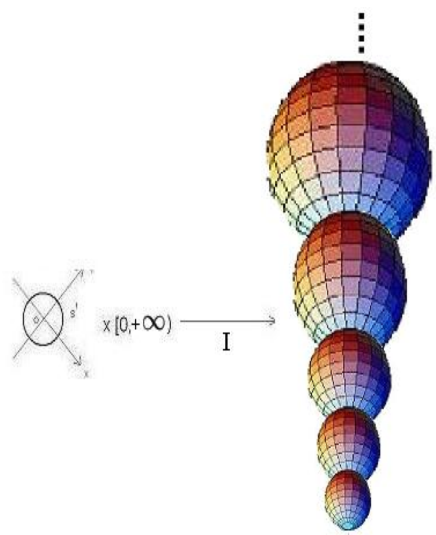

Figura 5.4: Cadena de esferas como isovariedad isodiferenciable de dimensión 1.

Aplicando entonces la Proposición 5.1.7, en cuyas condiciones nos encontramos, llegamos a que podemos dotar a la cadena de esferas de estructura de isogrupo isotópico de Lie.

Para ello, si tomamos por ejemplo la aplicación $\Phi_\eta : F^{S^1} \times F^{S^1} \to F^{S^1} : (s,t) \to \Phi_\eta(s,t) = s + t$, bastará considerar el producto:

$$\overline{\widehat{\eta}}(e^{it_1} * \widehat{I}(e^{it_1}, s), e^{it_2} * \widehat{I}(e^{it_2}, t)) = e^{i(t_1+t_2)} * \widehat{I}(e^{i(t_1+t_2)}, s+t).$$

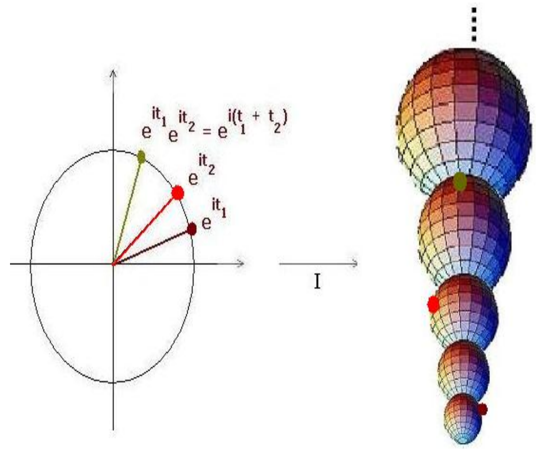

Figura 5.5: Cadena de esferas como isogrupo isotópico de Lie.

$\triangleleft$

Ejemplo 5.1.9. *Para el grupo de Lie* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *dotado de la estructura diferenciable* $\{(\mathbb{R}^*, Id_{\mathbb{R}^*})\}$ *consideramos el levantamiento isotópico de elementos de isotopía* $\widehat{I} = \widehat{I}(x) = \frac{1}{x^2}$ *y* $* \equiv \times$, *de elemento isotópico* $T = \widehat{I}$; *esto es, el levantamiento isotópico inyectivo dado por* $x \to \overline{\widehat{x}} = \frac{1}{x}$, *que es compatible respecto a* $\times$ *de forma inmediata. Tenemos por tanto, aplicando la Proposición 5.1.7, que* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{\times}})$ *dotado de la isoestructura isodiferenciable* $\{(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{Id_{\mathbb{R}^*}}})\}$ *es un isogrupo isotópico de Lie. Obsérvese que en el nivel de proyección la isoestructura anterior coincide íntegramente con la estructura inicial.* $\triangleleft$

Obsérvese por otra parte que la Proposición 5.1.7 permite que $(G, \circ)$ sólo tenga estructura de grupo y no necesariamente de grupo de Lie. Así pues, podemos encontrar isogrupos isotópicos de Lie que sean levantados isotópicos de grupos que no son grupos de Lie. Lo vemos en el siguiente:

Ejemplo 5.1.10. *Consideramos el grupo* $(\mathbb{R}, \mu)$ *dotado de la estructura diferenciable* $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$, *donde* μ *viene definida como* $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \to \mu(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$. *Sabemos que* $(\mathbb{R}, \mu)$ *dotado de dicha estructura diferenciable no es un grupo de Lie.*

Consideramos ahora la misma variedad diferenciable anterior pero ahora asociada al grupo $(\mathbb{R}, +)$, *donde* $+$ *es la suma usual de reales. Sabemos que dicho grupo dotado con la estructura diferenciable* $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ *es un grupo de Lie.*

Usamos ahora el levantamiento isotópico inyectivo que tiene como elementos de isotopía $* \equiv +$ *e* $\widehat{I} = 2$*, considerando para* $(\mathbb{R}, *)$ *la estructura de grupo de Lie que acabamos de ver anteriormente. Obtenemos entonces que el isogrupo* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{\mu}}) \equiv (\mathbb{R}, \overline{\widehat{\mu}})$*, el cual es un grupo aditivo con elemento unidad* 2*, dotado de la isoestructura isodiferenciable* $\{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{Id_{\mathbb{R}}}})\}$ *será un isogrupo isotópico de Lie, como consecuencia de la Proposición 5.1.7 para verlo.* $\triangleleft$

En el ejemplo anterior se mantiene la estructura diferenciable en los niveles general y de proyección, aunque se varían las estructuras de grupos. Se puede hacer también al contrario, obteniendo estructuras diferenciables que siendo distintas convencionalmente, estén relacionadas isotópicamente:

Ejemplo 5.1.11. *Consideramos el grupo* $(\mathbb{R}, \mu)$ *del Ejemplo 5.1.10 con la estructura diferenciable* $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$*, que no es grupo de Lie. Consideramos además el grupo de Lie* $(\mathbb{R}, \mu)$ *con la estructura diferenciable* $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$*, siendo* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \varphi(x) = x^3$*. Este segundo grupo es el que tomamos en el nivel general para un levantamiento isotópico del primer grupo (esto es, tomamos* $*$ *definida como* μ*) y consideramos como isounidad a* $\widehat{I} = 0$*, que es el elemento unidad de* $\mathbb{R}$ *respecto* $*$*. Así, la isotopía utilizada será inyectiva y, aplicando la Proposición 5.1.7, obtenemos finalmente que* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{\mu}}) \equiv (\mathbb{R}, \varphi)$ *es un isogrupo isotópico de Lie.* $\triangleleft$

5.2. Isoálgebra isotópica de un isogrupo isotópico de Lie

Trataremos en esta sección la relación existente entre las isoestructuras de las isoálgebras y los isogrupos isotópicos de Lie, estudiando la analogía con el caso convencional. Necesitamos para ello estudiar previamente algunos resultados básicos sobre vectores isotangentes y campos vectoriales en el nivel de proyección, haciendo uso para ello del cálculo isodiferencial visto en el tercer Capítulo:

5.2.1. Vectores isotangentes y campos vectoriales

Definición 5.2.1. *Sea* $\overline{\widehat{M}}$ *una isovariedad isodiferenciable y sea* $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$*. Se llama* vector isotangente a $\overline{\widehat{M}}$ en $\overline{\widehat{P}}$ *a toda aplicación* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*-lineal* $v : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *verificando la* *condición de Leibnitz; es decir, que para todos* $\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$*, se verifica:*

$$v(\overline{\widehat{f}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{g}}) = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})\overline{\widehat{\times}}v(\overline{\widehat{g}})\overline{\widehat{+}}\overline{\widehat{g}}(\overline{\widehat{P}})\overline{\widehat{\times}}v(\overline{\widehat{f}}).$$

Al conjunto de vectores isotangentes a $\overline{\widehat{M}}$ *en* $\overline{\widehat{P}}$ *se le denota por* $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$*. En el caso en que* $(\overline{\widehat{U}}, \overline{\widehat{\varphi}})$ *sea una isocarta local de* $\overline{\widehat{M}}$ *entorno de* $\overline{\widehat{P}}$ *se puede notar también por* $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{U}})$*. Finalmente, el conjunto de vectores isotangentes a* $\overline{\widehat{M}}$ *se notará por* $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{M}})$ *o bien por* $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{U}})$*.*

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.2.2. *En las condiciones del Ejemplo 5.1.2, supongamos además que utilizamos la isotopía identidad del grupo aditivo* $(\mathbb{R}, +)$*.*

Fijado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, consideramos las isoderivadas siguientes:*

$$\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)} : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}\left((x_0, y_0)\right) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{f}} \to \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)} \left(\overline{\widehat{f}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)},$$

$$\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)} : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}\left((x_0, y_0)\right) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{f}} \to \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)} \left(\overline{\widehat{f}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)}.$$

Se puede comprobar que estas isoderivadas son de hecho vectores isotangentes a $\mathbb{R}^2$ *en* (x_0, y_0)*, al ser* $\mathbb{R}$*-lineales y verificar la condición de Leibniz.* $\triangleleft$

En particular se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 5.2.3. *Bajo las condiciones de la Proposición 4.3.3, si la isotopía utilizada para la obtención de* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ *es compatible con respecto a las operaciones de partida, entonces, dado* $P \in M$ *se tiene que* v *es un vector tangente a* M *en* P *si y sólo si* $\overline{\widehat{v}}$ *es un vector isotangente a* $\overline{\widehat{M}}$ *en* $\overline{\widehat{P}}$*. De esta forma,* $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}}) = \overline{\widehat{\mathbf{T}_P(M)}}$*.*

Demostración.

En primer lugar hay que observar que bajo las condiciones indicadas, toda aplicación de $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$ en $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es de hecho una isoaplicación, teniendo en cuenta la inyectividad en los factores externos y que, según la Proposición 4.3.3, $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(P)}}$.

Sea ahora $v \in \mathbf{T}_P(M)$. Tiene sentido entonces la isoaplicación $\overline{\widehat{v}} : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(P)}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{f}} \to \overline{\widehat{v}}(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{v(f)}}$. Además, atendiendo a la compatibilidad en las operaciones iniciales, se comprueba de forma inmediata que $\overline{\widehat{v}}$ es un isovector isotangente a $\overline{\widehat{M}}$ en $\overline{\widehat{P}}$.

El recíproco se tiene análogamente, si bien hay que tener en cuenta la inyectividad en $F^{\mathbb{R}}$. $\square$

Por otra parte, obsérvese que $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$ es un espacio vectorial isorreal, al que se le llamará *espacio isotangente*, definiendo para $v, w \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$ y $\overline{\widehat{a}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$:

$$(v \widehat{+} w)(\overline{\widehat{f}}) = v(\overline{\widehat{f}}) \overline{\widehat{+}} w(\overline{\widehat{f}}); \qquad\qquad (\overline{\widehat{a}} \widehat{\times} v)(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{a}} \overline{\widehat{\times}} v(\overline{\widehat{f}}).$$

Si nos encontramos además bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, se verifica que $\overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}}) = \overline{\widehat{\mathbf{T}_P(M)}}$ será de hecho un isoespacio vectorial isorreal, al que se llamará *isoespacio isotangente*.

Buscamos a continuación obtener una base suya. En el nivel convencional sabemos que si $(U, \varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m))$ es una carta local entorno de P, entonces una base de $\mathbf{T}_P(M)$ es $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\right)_P, ..., \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_m}\right)_P \right\}$. Aparece así el cálculo diferencial. Por tanto, para obtener un desarrollo análogo en el nivel de proyección, debemos hacer uso del cálculo isodiferencial.

Para ello, buscando una construcción coherente y evitando singularidades, supondremos que estamos trabajando con una isovariedad isodiferenciable $\overline{\widehat{M}}$ de dimensión m, obtenida a partir de una isotopía de clase III, de elementos principales $\diamondsuit$ e $\widehat{I}' = \left(\widehat{I'}^j_i\right)^n_{i,j=1}$, siendo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ el isocuerpo isorreal obtenido a partir de la isotopía inyectiva en $F^{\mathbb{R}}$, compatible respecto a las operaciones iniciales.

Bajo las condiciones citadas, tomamos una isocarta local entorno de $\overline{\widehat{M}}$, $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\psi}} = (\overline{\widehat{\psi}}_1, ..., \overline{\widehat{\psi}}_m))$. Consideramos entonces para cada $k \in \{1, ..., n\}$ el siguiente operador:

$$\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_k}\right)_{\overline{\widehat{P}}} : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}}) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$$

$$\overline{\widehat{f}} \to \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_k}\right)_{\overline{\widehat{P}}} (\overline{\widehat{f}}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_i} *_i \widehat{I'}^i_k\right)_P = \left(\frac{\partial (f \circ \psi_i^{-1})}{\partial x_i} *_i \widehat{I'}^i_k\right)_P,$$

donde estamos considerando las aplicaciones coordenadas en $\mathbb{R}^m$: $\{x_1, ..., x_m\}$.

Estos operadores son por tanto vectores isotangentes a $\overline{\widehat{M}}$ en $\overline{\widehat{P}}$. De hecho se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.2.4. *Sea una isovariedad isodiferenciable $\overline{\widehat{M}}$ de dimensión m, obtenida a partir de una isotopía de clase III, siendo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ el isocuerpo isorreal asociado, obtenido a partir de una isotopía inyectiva en $F^{\mathbb{R}}$, compatible respecto a las operaciones iniciales. Fijada una isocarta local entorno de $\overline{\widehat{P}}$, $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\psi}} = (\overline{\widehat{\psi}}_1, ..., \overline{\widehat{\psi}}_m))$, se tiene entonces que $\overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$ es un espacio vectorial de dimensión m, siendo una base del mismo $\left\{\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_1}\right)_{\overline{\widehat{P}}}, ..., \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_m}\right)_{\overline{\widehat{P}}}\right\}$.*

Demostración.

Veamos en primer lugar que los operadores anteriores son linealmente independientes. Sean entonces $\overline{\widehat{\lambda}}_1, ..., \overline{\widehat{\lambda}}_1 \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ tales que $\sum_{k=1}^m \overline{\widehat{\lambda}}_k \overline{\widehat{\times}} \left(\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{\psi}}_k\right)_{\overline{\widehat{P}}} = \overline{\widehat{0}}$. Aplicado el operador suma anterior a cada $\overline{\widehat{\psi}_j}$ para $j \in \{1, ..., m\}$, obtenemos el sistema de ecuaciones $\sum_{k=1}^m \lambda_k * \widehat{I'}^k_j = 0$, para $j \in \{1, ..., n\}$. Ahora, teniendo en cuenta que estamos trabajando con una isotopía de clase III, la isounidad $\widehat{I'}$ es no singular y de esta forma, $\lambda_k = 0$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$.

Para comprobar que forman un sistema generador en $\overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$, hay que observar en primer lugar que para todo $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{P}})$ se verifica que $\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{f}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_i}\right)_{\overline{\widehat{P}}} (\overline{\widehat{\psi}}_i - \overline{\widehat{\psi}}_i(\overline{\widehat{P}}))$. Esto se obtiene fácilmente a partir del caso convencional, teniendo en cuenta la compatibilidad respecto a las operaciones iniciales de la isotopía que construye $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$.

Fijado entonces $v \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$, resulta que $v(\overline{\widehat{f}}) = \sum_{i=1}^m v(\overline{\widehat{\psi}}_i) \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_i}\right)_{\overline{\widehat{P}}} \overline{\widehat{f}}$. Esto es, $v = \sum_{i=1}^m v(\overline{\widehat{\psi}}_i) \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_i}\right)_{\overline{\widehat{P}}}$. □

Como aplicación de lo anterior tenemos en particular que en el Ejemplo 5.2.2, una base de $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{(x_0,y_0)}(\overline{\overline{\mathbb{R}}}^2)$ es la siguiente:

$$\left\{ \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}, \quad \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)} \right\}.$$

A continuación damos la definición de diferencial de una isoaplicación:

Definición 5.2.5. *Sean $\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{N}}$ dos isovariedades isodiferenciables, $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{N}})$ y $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$. Se llama* diferencial de $\overline{\widehat{f}}$ en $\overline{\widehat{P}}$ *a la aplicación $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}} : \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}}) \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})}(\overline{\widehat{N}}) : v \to \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)$, siendo $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v) : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})) \to \overline{\overline{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{g}} \to \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)(\overline{\widehat{g}}) = v(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}})$.*

Se comprueba entonces que $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)$ definido como acabamos de ver es un vector isotangente a $\overline{\widehat{N}}$ en $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})$, lo cual muestra la coherencia de la definición anterior.

Tenemos además el siguiente resultado:

Proposición 5.2.6. *En las condiciones de la definición anterior se tiene que:*

a) $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v \widehat{+} w) = \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v) \widehat{+} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(w)$, para todos $v, w \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$.

b) $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(\overline{\overline{a}} \widehat{\times} v) = \overline{\overline{a}} \widehat{\times} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)$, para todo $\overline{\overline{a}} \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ y para todo $v \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$.

Demostración.

a) Sean $v, w \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$ y tomemos $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}}))$. Se verifica entonces que: $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v \widehat{+} w)(\overline{\widehat{g}}) = (v \widehat{+} w)(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}) = v(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}) \widehat{+} w(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)(\overline{\widehat{g}}) \widehat{+} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(w)(\overline{\widehat{g}}) = \left(\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v) \widehat{+} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(w)\right)(\overline{\widehat{g}})$.

b) Sean $\overline{\overline{a}} \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ y $v \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$ y tomemos $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}}))$. Se tiene entonces que $\overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(\overline{\overline{a}} \widehat{\times} v)(\overline{\widehat{g}}) = (\overline{\overline{a}} \widehat{\times} v)(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}) = \overline{\overline{a}} \widehat{\times} v(\overline{\widehat{g}} \circ \overline{\widehat{f}}) = \overline{\overline{a}} \widehat{\times} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v)(\overline{\widehat{g}}) = (\overline{\overline{a}} \widehat{\times} \overline{\widehat{f}}_{*\overline{\widehat{P}}}(v))(\overline{\widehat{g}})$. $\square$

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.2.7. *En las condiciones del Ejemplo 5.2.2, consideramos la siguiente aplicación diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to f(x, y) = (x + y, xy^2).$$

Tenemos asociada entonces la isoaplicación isodiferenciable en $\mathbb{R}^2$*:*

$$\overline{\widehat{f}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to \overline{\widehat{f}}(x, y) = (x + (x - y)y^2, (x - y)y^2).$$

Fijado ahora $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, tendremos la diferencial de* $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(x_0, y_0)$ *definida como:*

$$\overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)} : \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{(x_0,y_0)}(\mathbb{R}^2) \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{f}}((x_0,y_0))}(\mathbb{R}^2) : v \to \overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)}(v).$$

En particular se tiene que:

$$\overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right) = a \times \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)} + b \times \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)},$$

$$\overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right) = c \times \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)} + d \times \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{y}}}\right)_{(x_0,y_0)},$$

para ciertos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, los cuales pueden obtenerse si aplicamos los vectores isotangentes anteriores a las aplicaciones isocoordenadas* $\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{y}}$*:*

$$a = \overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right)\left(\overline{\widehat{x}}\right) = \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\overline{\widehat{x}} \circ \overline{\widehat{f}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x+y)}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)} = 2,$$

$$b = \overline{\widehat{f}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right)\left(\overline{\widehat{y}}\right) = \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{x}}}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\overline{\widehat{y}} \circ \overline{\widehat{f}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial f(xy^2)}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)} = y_0^2 + 2(x_0-y_0)y_0,$$

$$c = \overline{\widehat{\overline{f}}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{y}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right)\left(\overline{\widehat{\overline{x}}}\right) = \left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{y}}}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\overline{\widehat{\overline{x}}} \circ \overline{\widehat{\overline{f}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x+y)}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)} = 1,$$

$$d = \overline{\widehat{\overline{f}}}_{*(x_0,y_0)}\left(\left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{y}}}\right)_{(x_0,y_0)}\right)\left(\overline{\widehat{\overline{y}}}\right) = \left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{y}}}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\overline{\widehat{\overline{y}}} \circ \overline{\widehat{\overline{f}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f(xy^2)}{\partial y}\right)_{(x_0-y_0,y_0)} = 2(x_0-y_0)y_0.$$

Obsérvese en particular que $\overline{\widehat{\overline{f}}}_{*(x_0,y_0)}$ *viene determinada entonces por la matriz isodiferencial:*

$$\overline{\widehat{\overline{D}}\widehat{\overline{f}}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y^2 + 2xy & 2xy \end{pmatrix}.$$

En concreto, dado $v = \alpha \times \left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{x}}}\right)_{(x_0,y_0)} + \beta \times \left(\frac{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}}{\overline{\widehat{\overline{\partial}}}\widehat{\overline{y}}}\right)_{(x_0,y_0)} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$*, un vector isotangente a* $\mathbb{R}^2$ *en* (x_0, y_0)*, se verifica que:*

$$\overline{\widehat{\overline{f}}}_{*(x_0,y_0)}(v) = \overline{\widehat{\overline{D}}\widehat{\overline{f}}}_{(x_0-y_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y_0^2 + 2(x_0-y_0)y_0 & 2(x_0-y_0)y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

Finalmente desarrollamos la noción de campo vectorial en el nivel de proyección:

Definición 5.2.8. *Sea* $\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *una isovariedad isodiferenciable y* $\overline{\widehat{\overline{U}}}$ *un abierto de* $\overline{\widehat{\overline{M}}}$*. Un* campo isovectorial *en* $\overline{\widehat{\overline{U}}}$ *es un operador que asigna a puntos de* $\overline{\widehat{\overline{U}}}$ *vectores isotangentes a* $\overline{\widehat{\overline{U}}}$ *en dichos puntos; es decir, son de la forma* $X : \overline{\widehat{\overline{U}}} \to \overline{\widehat{\overline{\mathbf{T}}}}(\overline{\widehat{\overline{U}}}) : \overline{\widehat{\overline{P}}} \to X(\overline{\widehat{\overline{P}}}) = X_{\overline{\widehat{\overline{P}}}}$.

Obsérvese que el conjunto de campos isovectoriales en $\overline{\widehat{U}}$ constituye un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial, definiendo para X, Y dos campos isovectoriales en $\overline{\widehat{U}}$, $\overline{\widehat{a}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ y $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$:

$$(X\widehat{+}Y)(\overline{\widehat{P}}) = X_{\overline{\widehat{P}}}\widehat{+}Y_{\overline{\widehat{P}}} \,; \qquad (\overline{\widehat{a}}\widehat{\times}X)(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{a}}\widehat{\times}X_{\overline{\widehat{P}}}.$$

Además, si nos encontramos bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, dicho conjunto tendrá estructura de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial, puesto que entonces el conjunto de campos vectoriales en $\overline{\widehat{U}}$ es el levantado isotópico del conjunto de campos vectoriales en el abierto U de la variedad diferenciable M de la que se proyecta isotópicamente $\overline{\widehat{M}}$. En particular tendremos que $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\mathbf{T}_P(U)}}$ y así cada campo vectorial en $\overline{\widehat{U}}$, $X : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{U}})$, será proyección isotópica de un campo vectorial en U, $\widetilde{X} : U \to \mathbf{T}(U)$. Es decir, se tiene el siguiente resultado inmediato:

Proposición 5.2.9. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, $X : U \to \mathbf{T}(U)$ es un campo vectorial en U, si y sólo si $\overline{\widehat{X}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{U}})$ es un campo vectorial en $\overline{\widehat{U}}$.*

$\square$

Obsérvese por otra parte que, bajo las condiciones de la Proposición 5.2.4, se tiene que para todo $i \in \{1, ..., m\}$, son campos vectoriales en $\overline{\widehat{U}}$ los siguientes operadores:

$$\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{\psi}}_k}\right) : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{U}}) : \overline{\widehat{P}} \to \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{\psi}}_k}\right)\left(\overline{\widehat{P}}\right) = \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{\psi}}_k}\right)_{\overline{\widehat{P}}}.$$

Nos interesa centrarnos a continuación en el concepto de campos vectoriales isodiferenciables:

Definición 5.2.10. *Sean $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable, $\overline{\widehat{U}}$ un abierto de $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$ y $X : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{U}})$ un campo isovectorial en $\overline{\widehat{U}}$. Dado $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ podemos definir la aplicación $X\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{P}} \to X\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}}) = X_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{f}})$.*

Diremos entonces que X es un campo vectorial isodiferenciable en $\overline{\widehat{U}}$ *si para todo $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ se tiene que $X\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$. En dicho caso puede considerarse la aplicación $X : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) \to \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) : \overline{\widehat{f}} \to X(\overline{\widehat{f}}) = X\overline{\widehat{f}}$. Al conjunto de los campos isovectoriales isodiferenciables en $\overline{\widehat{U}}$ se notará por $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$.*

Llegamos entonces al siguiente resultado:

Proposición 5.2.11. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, un campo vectorial* $\overline{\widehat{X}}$ *en* $\overline{\widehat{U}}$ *es isodiferenciable si y sólo si la aplicación* X *de la que se levanta isotópicamente* $\overline{\widehat{X}}$ *es un campo vectorial diferenciable en* U*. Es decir,* $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\chi(U)}}$*.*

Demostración.

Aplicando la Proposición 5.2.9 tenemos que X es un campo vectorial en U si y sólo si $\widehat{X}$ es un campo isovectorial en $\widehat{U}$ en el nivel general.

Sea ahora $f \in \mathbf{F}(U)$ y consideremos la isoaplicación $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(U)}}$ correspondiente. Se tiene entonces que $Xf \in \mathbf{F}(U)$ si y sólo si $\overline{\widehat{Xf}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$.

Ahora bien, $\overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{Xf}}$, pues fijado $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$ se tiene que $\overline{\widehat{Xf}}(\overline{\widehat{P}}) = \overline{\widehat{Xf(P)}} = \overline{\widehat{X_P(f)}} = \overline{\widehat{X_P}}(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})$. Así pues, $\overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$, lo que conlleva por definición a que $X \in \chi(U)$ si y sólo si $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$, como queríamos probar. $\square$

Obsérvese que para asegurar la estructura de espacio vectorial de $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$ debemos imponer la compatibilidad respecto a las operaciones de partida de la isotopía que construye $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, pues son las condiciones necesarias para dotar a $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ de estructura de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial. En el caso de $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$, basta definir para $X, Y \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$, $\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$ y $\overline{\widehat{a}}, \overline{\widehat{b}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$:

$$(X+Y)\overline{\widehat{f}} = X\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{+}}\,Y\overline{\widehat{f}}\ ; \qquad (\overline{\widehat{a}}\times X)\overline{\widehat{f}} = \overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\times}}\,X\overline{\widehat{f}}.$$

Se comprueba entonces que, con las operaciones que acabamos de definir, $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$ es un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial. En caso de verificarse las condiciones de la Proposición 5.2.3, tendremos de hecho que es un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial.

Bajo las mismas condiciones podemos dotar a $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$ de estructura de $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$-módulo, definiendo para todos $X, Y \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$, $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$ y $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$:

$$(X+Y)_{\overline{\widehat{P}}} = X_{\overline{\widehat{P}}} + Y_{\overline{\widehat{P}}}\ ; \qquad (\overline{\widehat{f}}X)_{\overline{\widehat{P}}} = \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{P}})\times X_{\overline{\widehat{P}}}.$$

Finalmente, en caso de verificarse las condiciones de la Proposición 5.2.3, tendremos de hecho que es un $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$-isomódulo.

Por otra parte, es importante el siguiente resultado:

Proposición 5.2.12. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.4,* $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$ *es un* $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{U}})$*-módulo de dimensión* m*, siendo una base del mismo* $\left\{\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_1}\right),\ldots,\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\psi}_m}\right)\right\}$.

Demostración.

Las condiciones de la Proposición 5.2.4 aseguran la compatibilidad respecto a las operaciones de partida de la isotopía utilizada en la construcción de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$. Esto nos da la estructura de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-espacio vectorial, tal y como acabamos de ver anteriormente. La prueba del resto del resultado es análoga a la correspondiente a dicha proposición.

□

En particular, se comprueba que en el Ejemplo 5.2.2, una base de $\overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^2)$ es la siguiente:

$$\left\{\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}}\right), \quad \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{y}}\right)\right\}.$$

Veamos otro ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.2.13. *Supongamos el grupo aditivo* $(\mathbb{R}^3,+)$ *con su estructura diferenciable asociada al atlas* $A=\{(\mathbb{R}^3, Id_{\mathbb{R}^3})\}$ *y la aplicación diferenciable* $\eta(x,y)=x+y$. *Tomamos a continuación la isotopía inyectiva de elementos* $*$ *el producto usual entre matrices e* $\widehat{I}=\widehat{I}(t)\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$*, donde suponemos el factor tiempo* $t\in F=\mathbb{N}$ *y consideramos la aplicación* $\Phi_+(t,t)=t$.

Resulta la proyección $\overline{\widehat{(x,y,z)}}=(x,y,z)*\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(x,tx+y,t^2x+ty+z)$*,* *obteniéndose el isogrupo* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^3,\overline{\widehat{+}})=(\mathbb{R}^3,+)$.

Podemos dotar entonces a $\mathbb{R}^3$ *de estructura de isogrupo isotópico de Lie, haciendo uso de la proyección isotópica correspondiente* $\overline{\widehat{A}}$ *y de la isoaplicación* $\overline{\widehat{\eta}}(x,y)=x+y=\eta(x,y)$.

Supongamos además que utilizamos la isotopía identidad del grupo aditivo $(\mathbb{R},+)$. *Fijado* $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^2$*, tendremos entonces definidas las isoderivadas de tal forma que para todo* $\overline{\widehat{f}}\in\overline{\widehat{\mathbf{F}}}((x_0,y_0,z_0))$*:*

$$\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\left(\overline{\widehat{f}}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0-x_0t,z_0-y_0t)},$$

$$\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{y}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\left(\overline{\widehat{f}}\right)=\left(t\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0-x_0t,z_0-y_0t)},$$

$$\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{z}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\left(\overline{\widehat{f}}\right)=\left(t^2\frac{\partial f}{\partial x}+t\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0-x_0t,z_0-y_0t)}.$$

Se tiene entonces que:

$$\left\{\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)},\quad\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{y}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)},\quad\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{z}}}}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\right\},$$

$$\left\{\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{x}}}}\right),\quad\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{y}}}}\right),\quad\left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}\widehat{z}}}}\right)\right\},$$

son, respectivamente, bases de $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{(x_0,y_0,z_0)}(\mathbb{R}^3)$ *y* $\overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^3)$.

Finalmente, consideramos la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:(x,y,x)\to(x^2y,x+y,z)$. *Tendremos asociada entonces la isofunción:*

$$\overline{\widehat{f}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,x)\to(x^2(y-xt),x^2(y-xt)t+x+y-xt,x^2(y-xt)t^2+(x-xt)t+z).$$

Fijado ahora $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^3$, *la diferencial de* $\overline{\widehat{f}}\in\overline{\overline{\mathbf{F}}}(x_0,y_0,z_0)$ *estará definida como:*

$$\overline{\widehat{f}}_{*P_0}:\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{P_0}(\mathbb{R}^3)\to\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{f}}(P_0)}(\mathbb{R}^3):v\to\overline{\widehat{f}}_{*P_0}(v).$$

A su vez, tendremos definida la isodiferencial de $\overline{\widehat{f}}$*:*

$$\overline{\widehat{D}\widehat{f}}=\begin{pmatrix}2xy & 2txy+x^2 & 2t^2xy+tx^2\\ 1 & t+1 & t^2+t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Entonces, dado un vector isotangente a $\mathbb{R}^3$ *en* (x_0, y_0, z_0)*:*

$$v = \alpha \times \left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}\widehat{x}} \right)_{(x_0,y_0,z_0)} + \beta \times \left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}\widehat{y}} \right)_{(x_0,y_0,z_0)} + \gamma \times \left(\frac{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}}{\overline{\overline{\widehat{\partial}}}\widehat{z}} \right)_{(x_0,y_0,z_0)} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

se verifica que:

$$\overline{\overline{\widehat{f}}}_{*(x_0,y_0,z_0)}(v) = \overline{\overline{\widehat{D}\widehat{f}}}_{(x_0,y_0-x_0t,z_0-y_0t)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_0(y_0 - x_0t) & 2tx_0(y_0 - x_0t) + x_0^2 & 2t^2x_0(y_0 - x_0t) + tx_0^2 \\ 1 & t+1 & t^2 + t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

Para acabar esta subsección y con vistas a la construcción del isoálgebra isotópica de Lie asociada a un isogrupo isotópico de Lie, conviene dar ahora la definición del producto corchete en $\overline{\overline{\widehat{\chi}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$:

Definición 5.2.14. *Para isotopías compatibles respecto a las operaciones de partida en la construcción del isocuerpo* $\overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}$*, dados* $X, Y \in \overline{\overline{\widehat{\chi}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$*, se define el* producto corchete de X *e* Y *como el campo vectorial isodiferenciable* $\overline{\overline{\widehat{[}}}X,Y\overline{\overline{\widehat{]}}} : \overline{\overline{\widehat{\mathbf{F}}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}}) \to \overline{\overline{\widehat{\mathbf{F}}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}}) :$ $\overline{\overline{\widehat{f}}} \to \overline{\overline{\widehat{[}}}X,Y\overline{\overline{\widehat{]}}}\overline{\overline{\widehat{f}}} = X(Y\overline{\overline{\widehat{f}}}) - Y(X\overline{\overline{\widehat{f}}})$*.*

Efectivamente se tiene que $\overline{\overline{\widehat{[}}}X,Y\overline{\overline{\widehat{]}}}$ definido como acabamos de hacerlo es un campo vectorial isodiferenciable, pues $X(Y\overline{\overline{\widehat{f}}}), Y(X\overline{\overline{\widehat{f}}}) \in \overline{\overline{\widehat{\mathbf{F}}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$, para todo $\overline{\overline{\widehat{f}}} \in \overline{\overline{\widehat{\mathbf{F}}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$, al ser $X, Y \in \overline{\overline{\widehat{\chi}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$ por hipótesis, bastando usar ahora que $\overline{\overline{\widehat{\chi}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$ es cerrado bajo la operación $+$ al ser compatible respecto a la suma usual en $\mathbb{R}$ la isotopía utilizada.

En el caso de encontrarnos bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, se tiene además que, fijado $\overline{\overline{\widehat{P}}} \in \overline{\overline{\widehat{U}}}$, existirán $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \chi(U)$ y $P \in U$, tales que $\overline{\overline{\widehat{\widetilde{X}}}} = X$ y $\overline{\overline{\widehat{\widetilde{Y}}}} = Y$, y de esta forma se puede comprobar que $\overline{\overline{\widehat{[}}}X,Y\overline{\overline{\widehat{]}}} = \overline{\overline{\widehat{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}}}$. De aquí la notación que hemos seguido para denotar como $\overline{\overline{\widehat{[}}}.,.\overline{\overline{\widehat{]}}}$ al producto corchete en $\overline{\overline{\widehat{\chi}}}(\overline{\overline{\widehat{U}}})$.

Se verifica entonces la siguiente:

Proposición 5.2.15. $(\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{\overline{U}}}), \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, \overline{\widehat{[}}., .\overline{\widehat{]}})$ *es un isoálgebra isotópica de Lie bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3.*

Demostración.

En primer lugar tenemos por construcción y haciendo uso de la Proposición 5.2.11, que $(\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{\overline{U}}}), +, \times, \overline{\widehat{[}}., .\overline{\widehat{]}})$ es proyección isotópica del álgebra de Lie en el nivel convencional, $(\chi(U), +, \times, [., .])$.

Por otra parte, dada la compatibilidad de la isotopía utilizada respecto a las operaciones usuales en $\mathbb{R}$, tenemos que $(\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{\overline{U}}}), +, \times)$ está dotado de estructura de $\overline{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}}$-isoespacio vectorial y así de espacio vectorial. Es una mera comprobación obtener finalmente que de hecho tiene estructura de álgebra de Lie y por tanto de isoálgebra isotópica de Lie. $\square$

Tenemos así en particular que en el Ejemplo 5.2.2, el isoálgebra isotópica de Lie $\overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^2)$ está dotado de la ley:

$$\overline{\widehat{[}}\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{x}}}\right), \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{y}}}\right)\overline{\widehat{]}} = \overline{[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{,}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)]} = \overline{\widehat{\mathbf{0}}} = \mathbf{0}.$$

Equivalentemente:

$$\overline{\widehat{[}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overline{\widehat{]}} = \mathbf{0}.$$

Diremos entonces que dicho isoálgebra es *conmutativa*, verificándose en particular que $\overline{\widehat{[}}\overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^2), \overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^2)\overline{\widehat{]}} = \mathbf{0}$.

Puede comprobarse por su parte que en el Ejemplo 5.2.13, el isoálgebra isotópica de Lie $\overline{\widehat{\chi}}(\mathbb{R}^3)$, es también conmutativa. De hecho, es claro que bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, el isoálgebra $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{\overline{U}}})$ es conmutativa si y sólo si lo es la correspondiente álgebra $\chi(U)$.

5.2.2. Campos vectoriales invariantes

Buscamos ya en esta subsección la construcción del isoálgebra isotópica de Lie de un isogrupo isotópico de Lie. Sea por tanto $(\overline{\widehat{\overline{G}}}, \overline{\widehat{\circ}})$ un isogrupo isotópico de Lie. Fijado $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{\overline{G}}}$, consideramos las isoaplicaciones isodiferenciables:

$$L_{\widehat{\overline{g}}}:\overline{\widehat{G}}\to\overline{\widehat{G}}:\overline{\widehat{x}}\to L_{\widehat{\overline{g}}}(\overline{\widehat{x}})=\overline{\widehat{g}\widehat{\circ}\widehat{x}},$$

$$R_{\widehat{\overline{g}}}:\overline{\widehat{G}}\to\overline{\widehat{G}}:\overline{\widehat{x}}\to R_{\widehat{\overline{g}}}(\overline{\widehat{x}})=\overline{\widehat{x}\widehat{\circ}\widehat{g}}.$$

Explícitamente téngase en cuenta que $L_{\widehat{\overline{g}}}$ y $R_{\widehat{\overline{g}}}$ son de hecho proyecciones isotópicas respectivas de las aplicaciones en el nivel general $L_g : G \to G : x \to L_g(x) = x*g$ y $R_g : G \to G : x \to x * g$, es decir, de la translación a izquierda y a derecha, respectivamente. Por ello nos referiremos a $L_{\widehat{\overline{g}}}$ y $R_{\widehat{\overline{g}}}$ como *isotranslaciones a izquierda y a derecha*, respectivamente.

En particular,$L_{\widehat{\overline{g}}}$ y $R_{\widehat{\overline{g}}}$ son biyectivas y biisodiferenciables, puesto que $\left(L_{\widehat{\overline{g}}}\right)^{-1} = L_{\widehat{\overline{g}}^{-\hat{I}}}$ y $\left(R_{\widehat{\overline{g}}}\right)^{-1} = R_{\widehat{\overline{g}}^{-\hat{I}}}$, siendo $\widehat{I}$ el elemento unidad de $\overline{\widehat{G}}$ respecto a $\overline{\widehat{\circ}}$.

Trabajaremos a partir de ahora con las isotransformaciones a izquierda, pudiéndose hacer un desarrollo análogo para las isotransformaciones a derecha. Damos entonces la siguiente definición previa:

Definición 5.2.16. *Sean $(\overline{\widehat{G}},\overline{\widehat{\circ}})$ un isogrupo isotópico de Lie y $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$. Sea $X \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{G}})$. Definimos entonces el campo vectorial en $\overline{\widehat{G}}$:*

$$L_{\widehat{\overline{g}}}X:\overline{\widehat{G}}\to\overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{G}}):\overline{\widehat{h}}\to L_{\widehat{\overline{g}}}X(\overline{\widehat{h}})=L_{\widehat{\overline{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}}\left(X_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\right),$$

siendo $\widehat{I}$ el elemento unidad de $\overline{\widehat{G}}$ respecto a $\overline{\widehat{\circ}}$.

Obsérvese que la definición anterior es coherente, pues $L_{\widehat{\overline{g}}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{G}},\overline{\widehat{G}})$, teniendo sentido así considerar su diferencial en $\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}} \in \overline{\widehat{G}}$, siendo además $X_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}} \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{G}})$ por ser X campo vectorial en $\overline{\widehat{G}}$. De esta forma, por definición de diferencial, se tiene que $L_{\widehat{\overline{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}}\left(X_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\right) \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}(\overline{\widehat{G}})$.

Se tendrá explícitamente además que:

$$L_{\widehat{\overline{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}}\left(X_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\right):\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{G}})\to\overline{\widehat{\mathbb{R}}}:\overline{\widehat{f}}\to L_{\widehat{\overline{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}}\left(\overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\right)(\overline{\widehat{f}})=X_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}(\overline{\widehat{f}}\circ L_{\widehat{\overline{g}}}).$$

Podemos dar ya la definición de campo vectorial isodiferenciable invariante:

Definición 5.2.17. *Sean* $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ *un isogrupo isotópico de Lie y* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{G}})$. *Se dice que* $\overline{\widehat{X}}$ *es un* campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda *si* $L_{\overline{\widehat{g}}}X = X$, *para todo* $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$. *Al conjunto de campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda de* $\overline{\widehat{G}}$ *se le denotará por* $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$.

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 5.2.18. *Sea* $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ *un isogrupo isotópico de Lie de elemento unidad* $\widehat{I}$. *Se cumple que:*

a) Todo campo isovectorial isodiferenciable invariante a izquierda está determinado por su valor en $\widehat{I}$.

b) El conjunto $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ de campos isovectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda constituyen un $\widehat{\mathbb{R}}$-espacio vectorial.

c) Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, si $(G, \circ)$ con elemento unidad e es el grupo de Lie del que se levanta isotópicamente $\overline{\widehat{G}}$, siendo inyectivo y compatible respecto a $\circ$ dicho levantamiento isotópico, entonces $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ es un $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$-isoespacio vectorial. De hecho es el levantado isotópico del conjunto $\mathbf{g}$ de campos vectoriales diferenciables a izquierda de G.

Demostración.

a) Sea $X \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ un campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda. Debe ser entonces $L_{\overline{\widehat{g}}}X = X$, para todo $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$. Fijado $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$, si tomamos $\overline{\widehat{h}} \in \overline{\widehat{G}}$ debe tenerse que $L_{\overline{\widehat{g}}}X(\overline{\widehat{h}}) = X(\overline{\widehat{h}})$. En particular, tomando $\overline{\widehat{h}} = \overline{\widehat{g}}$ será $L_{\overline{\widehat{g}}}X(\overline{\widehat{g}}) = X(\overline{\widehat{g}})$. Es decir, $L_{\overline{\widehat{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\widehat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{g}}}}\left(X_{\overline{\widehat{g}}^{-\widehat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{g}}}\right) = X_{\overline{\widehat{g}}}$. Esto es, $\overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{g}}} = L_{\overline{\widehat{g}}_{*\widehat{I}}}\left(X_{\widehat{I}}\right)$, lo que prueba el resultado al ser $\overline{\widehat{g}}$ arbitrario en $\overline{\widehat{G}}$.

b) Basta tener en cuenta los resultados de la Proposición 5.2.6, teniéndose entonces de forma inmediata por definición que, dados $X, Y \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ y $\overline{\widehat{a}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, se cumple:

$$L_{\overline{\widehat{g}}}(X+Y) = L_{\overline{\widehat{g}}}X + L_{\overline{\widehat{g}}}Y; \qquad L_{\overline{\widehat{g}}}(\overline{\widehat{a}} \times X) = \overline{\widehat{a}} \times L_{\overline{\widehat{g}}}X.$$

c) Aplicando la Proposición 5.1.7, tenemos que el par $(G, \circ)$ es efectivamente un grupo de Lie. Tiene sentido por tanto considerar el conjunto $\mathbf{g}$ de los campos vectoriales diferenciables invariantes a izquierda de G, los cuales se levantan isotópicamente, según la Proposición 5.2.11 a campos vectoriales isodiferenciables de $\overline{\widehat{G}}$.

Ahora bien, por ser compatible respecto a $\circ$ la isotopía utilizada para la obtención de $\overline{\widehat{G}}$, se tiene que $L_{\overline{\widehat{g}}} = \overline{\widehat{L_g}}$, para todo $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$, siendo $L_g(x) = g \circ x$. Ahora, fijado $X \in \mathbf{g}$, se tiene que $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, pues tomando $\overline{\widehat{h}} \in \overline{\widehat{G}}$ y $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{G}})$ (levantado isotópico de una cierta función $f \in \mathbf{F}(G)$, al ser $\overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{G}}) = \overline{\widehat{\mathbf{F}(G)}}$), se cumple que:

$L_{\overline{\widehat{g}}}\overline{\widehat{X}}\left(\overline{\widehat{h}}\right)\left(\overline{\widehat{f}}\right) = L_{\overline{\widehat{g}}_{*\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}}\left(\overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\right)\left(\overline{\widehat{f}}\right) = \overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{g}}^{-\hat{I}}\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{h}}}\left(\overline{\widehat{f}} \circ L_{\overline{\widehat{g}}}\right) = \overline{\widehat{X_{g^{-e}\circ h}}}\left(\overline{\widehat{f \circ L_g}}\right) = \overline{\widehat{X_{g^{-e}\circ h}\,(f \circ L_g)}} = \overline{L_{g_{*g^{-e}\circ h}}\widehat{\left(X_{g^{-e}\circ h}\right)}(f)} = \overline{L_g\widehat{X(h)(f)}} = \overline{\widehat{X(h)(f)}} = \overline{\widehat{X_h(f)}} = \overline{\widehat{X_h}}(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{X}}(\overline{\widehat{h}})(\overline{\widehat{f}})$.

Análogamente, tomando $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, levantado isotópico de un campo vectorial diferenciable X, deberá ser $X \in \mathbf{g}$, pues fijados $h \in G$ y $f \in \mathbf{F}(G)$ (siendo $\overline{\widehat{f}} \in \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{G}})$), se cumple que $\left(L_g X(h)\right)(f) = X(h)(f)$, pues $\overline{L_g\widehat{X(h)}(f)} = \overline{\widehat{L_g X}}(\overline{\widehat{h}})(\overline{\widehat{f}}) = L_{\overline{\widehat{g}}}\overline{\widehat{X}}(\overline{\widehat{h}})(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{X}}(\overline{\widehat{h}})(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{X(h)(f)}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, siendo inyectiva en $F^{\mathbb{R}}$ la isotopía utilizada. Terminamos de esta forma de probar por tanto que $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ es el levantado isotópico de $\mathbf{g}$, como queríamos ver. $\square$

El último resultado de la proposición anterior muestra el motivo de la notación de $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ para el conjunto de campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda de $\overline{\widehat{G}}$. De hecho es un resultado práctico que sirve, en caso de disponer de las condiciones señaladas, para calcular rápidamente dichos campos vectoriales, siempre que se conozcan los campos vectoriales en el nivel convencional, de los cuales se levantan isotópicamente.

En particular, supuesta una isocarta local entorno de $\overline{\widehat{M}}$, $(\overline{\widehat{V}}, \overline{\widehat{\psi}} = (\overline{\widehat{\psi}}_1, ..., \overline{\widehat{\psi}}_m))$, tendremos que en el nivel convencional, todo campo vectorial diferenciable se encuentra en el espacio vectorial generado por $\{X_1, ..., X_m\}$, siendo para cada $i \in \{1, ..., m\}$:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L_{g_j}}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Ahora, bajo las condiciones de la Proposición 5.2.12, si la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{\overline{G}}$ es compatible respecto a $\circ$, podremos asegurar que todo campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda se encontrará en el espacio vectorial generado por $\left\{\overline{\widehat{X_1}}, ..., \overline{\widehat{X_m}}\right\}$, siendo para cada $i \in \{1, ..., m\}$:

$$\overline{\widehat{X_i}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\widehat{\frac{\partial L_{g_j}}{\partial \psi_i}}} \left(\overline{\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{\widehat{\partial}} L_{\overline{\widehat{g}}_j}}{\overline{\widehat{\partial}} \overline{\widehat{\psi}}_i} \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial x_j}}}\right).$$

Hágase notar en la expresión anterior que se hace distinción entre la proyección isotópica de una función cualquiera y la proyección isotópica de la derivada de una función, según la construcción realizada en el tercer Capítulo. Se obtiene de esta forma el paralelismo entre los niveles convencional y de proyección, objetivo de nuestra construcción.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.2.19. *Consideramos el isogrupo isotópico de Lie* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{\times}})$ *obtenido en el Ejemplo 5.1.9. Sabemos que, en el nivel convencional, el conjunto de campos vectoriales diferenciables invariantes a izquierda de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *es el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbf{g} =< X >_{\mathbb{R}}$*, donde* $X = x \times \frac{\partial}{\partial x}$.

Ahora, dado que el levantamiento isotópico utilizado en la obtención de $\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}$ *verifica todas las condiciones del apartado (c) de la Proposición 5.2.18, llegamos a que el conjunto de campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda de* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}^*}}, \overline{\widehat{\times}})$ *es el* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*-isoespacio vectorial* $\overline{\widehat{\mathbf{g}}} =< \overline{\widehat{X}} >_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}$*, donde* $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{x \times \frac{\partial}{\partial x}}} = \overline{\widehat{x}} \overline{\widehat{\times}} \overline{\widehat{\frac{\partial}{\partial x}}} = \overline{\widehat{x}} \overline{\widehat{\times}} \frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}} \overline{\widehat{x}}} = \frac{1}{x} \overline{\widehat{\times}} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{1}{x \times \frac{\partial}{\partial x}}$. ◁

Ejemplo 5.2.20. *Consideramos* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m, \overline{\widehat{+}})$ *asociado isotópicamente a* $(\mathbb{R}^m, +)$*, dotado este último de su estructura habitual de grupo de Lie, mediante un levantamiento isotópico de elementos* $\widehat{I'} = \left(\widehat{I'}_i^j\right)_{i,j=1}^m$*, y* $*_1 \equiv ... \equiv *_m \equiv +$.

Dicho levantamiento isotópico es inyectivo y compatible con la suma en $\mathbb{R}^m$*. Así pues, aplicando la Proposición 5.1.7, llegamos a que* $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^m, \overline{\widehat{+}})$ *es un isogrupo isotópico de Lie.*

Sabemos que en el nivel convencional, el conjunto de campos diferenciables invariantes a izquierda de $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$ *es el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbf{g} =< X_1, ..., X_m >_{\mathbb{R}}$, *con* $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$*, para todo* $i \in \{1, ..., m\}$*. Dado que nuestro levantamiento isotópico verifica las condiciones necesarias para poder aplicar el apartado (c) de la Proposición 5.2.18, llegamos finalmente a que el conjunto de campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda es el* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*-isoespacio vectorial* $\overline{\widehat{\mathbf{g}}} =< \overline{\widehat{X_1}}, ..., \overline{\widehat{X_m}} >_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}$*, donde , para todo* $i \in \{1, ..., m\}$, $\overline{\widehat{X_i}} = \overline{\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}} = \frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{x}_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} + \widehat{I'}^i_j$. $\triangleleft$

Ejemplo 5.2.21. *Consideremos el grupo de Lie* $(\mathbb{R}^2, \mu)$*, donde* $\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : ((a, b), (c, d)) \to (a + c, e^a d + b)$*, dotado del atlas* $A = (\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$ *y la aplicación diferenciable* $\eta(x, y) = \mu(x, y)$*. Tomamos a continuación la isotopía inyectiva de elementos* $*$ *el producto usual entre matrices e* $\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene entonces el isogrupo $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2, \overline{\widehat{\mu}}) = (\mathbb{R}^2, \overline{\widehat{\mu}})$*, donde para todo* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*:*

$$\overline{\widehat{\mu}}((a, b), (c, d)) = (a + c + (e^{a-b} - 1)d, e^{a-b}d + b).$$

En particular, $(0, 0)$ *es la unidad de* $\mathbb{R}^2$ *respecto a* $\overline{\widehat{\mu}}$ *y se tiene el elemento opuesto* $(a, b)^{-0} = (b - a - be^{b-a}, -be^{b-a})$.

Por otra parte, consideramos la proyección isotópica correspondiente $\overline{\widehat{A}}$ *y la isoaplicación* $\overline{\widehat{\eta}} \equiv \overline{\widehat{\mu}}$*. Se comprueba que el Corolario 4.3.12 asegura la isodiferenciabilidad de* $\overline{\widehat{\eta}}$*, pudiéndose dotar entonces a* $\mathbb{R}^2$ *de estructura de isogrupo isotópico de Lie.*

Por construcción se tiene además que la base de los vectores isotangentes a $\mathbb{R}^2$ *de los campos vectoriales en* $\mathbb{R}^2$ *coinciden con los correspondientes al Ejemplo 5.2.2.*

En el nivel convencional, una base de los campos vectoriales diferenciables invariantes a izquierda del grupo de Lie de partida viene dada por los campos:

$$X_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial L_{g_1}}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial L_{g_2}}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$X_2 = e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial L_{g_1}}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial L_{g_2}}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Por tanto, los campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda correspondiente tienen como base los campos:

$$\overline{\widehat{X_1}} = \frac{\overline{\widehat{\partial}} L_{\overline{\widehat{g}}_1}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{x}}}\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{x}}}\right) + \frac{\overline{\widehat{\partial}} L_{\overline{\widehat{g}}_2}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{x}}}\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{y}}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (e^x+1)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\overline{\widehat{X_2}} = \frac{\overline{\widehat{\partial}} L_{\overline{\widehat{g}}_1}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{y}}}\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{x}}}\right) + \frac{\overline{\widehat{\partial}} L_{\overline{\widehat{g}}_2}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{y}}}\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\widehat{\overline{y}}}\right) = e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$\triangleleft$

Teniendo en cuenta los últimos resultados obtenidos en la subsección anterior, si buscamos dotar a $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ de estructura de isoálgebra por medio de la utilización del producto corchete en $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{U}})$, necesitaremos imponer en nuestro estudio las condiciones de la Proposición 5.2.3. Ya hemos visto a lo largo de los resultados que hemos ido desarrollando que tales condiciones favorecen una buena generalización de los conceptos y resultados convencionales.

En particular, se verifica la siguiente:

Proposición 5.2.22. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.3, si la isotopía utilizada en la construcción de $\overline{\widehat{G}}$ es compatible respecto a $\circ$,se tiene que dados $\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, se verifica $\overline{\widehat{[}}\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}\overline{\widehat{]}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$.*

Demostración.

Sabemos que bajo las condiciones impuestas es coherente el uso del producto corchete $\overline{\widehat{[}}.,.\overline{\widehat{]}}$. Además, fijados $\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, se tiene que $\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{G}})$ y así, $\overline{\widehat{[}}\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}\overline{\widehat{]}} \in \overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{G}})$.

De hecho, $\overline{\widehat{[}}\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}\overline{\widehat{]}} = \overline{\widehat{[X,Y]}}$. Ahora bien, se tendrá que $\overline{\widehat{X}}$ e $\overline{\widehat{Y}}$ son levantados isotópicos de $X, Y \in \mathbf{g}$, respectivamente. De esta forma, $[X,Y] \in \mathbf{g}$ y por tanto, $\overline{\widehat{[}}\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}\overline{\widehat{]}} = \overline{\widehat{[X,Y]}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, como queríamos probar. $\square$

Además obtenemos el siguiente:

Corolario 5.2.23. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.22, $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ es una isosubálgebra isotópica de Lie de $\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{G}})$.*

Demostración.

Teniendo en cuenta la Proposición 5.2.22 y el apartado (b) de la Proposición 5.2.18, llegamos a que $(\overline{\overline{\mathbf{g}}}, +, \times, \widehat{[.,.]})$ hereda la isoestructura de álgebra de Lie de $(\overline{\overline{\chi}}(\overline{\overline{\widehat{U}}}), +, \times, \hat{\bar{\bar{[}}}.,.\hat{\bar{\bar{]}}})$, siendo por tanto subálgebra de esta última isoestructura.

Ahora, por construcción y usando el apartado (c) de la Proposición 5.2.18, llegamos a que $(\widehat{\overline{\overline{\mathbf{g}}}}, +, \times, \hat{\bar{\bar{[}}}.,.\hat{\bar{\bar{]}}})$ es el levantado isotópico de $(\mathbf{g}, +, \times, [.,.])$, que es subálgebra de $(\chi(U), +, \times, [.,.])$ en el nivel convencional. Así pues, tenemos finalmente que $\widehat{\overline{\overline{\mathbf{g}}}}$ está dotado de isoestructura de isosubálgebra isotópica de Lie. $\square$

Por todo lo anterior, terminamos esta sección dando la siguiente:

Definición 5.2.24. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.22,* $\widehat{\overline{\overline{\mathbf{g}}}}$ *se denomina* isoálgebra isotópica de Lie asociada al isogrupo isotópico de Lie $\widehat{\overline{\overline{G}}}$.

Atendiendo a los resultados anteriores, convendremos de ahora en adelante que cuando sea necesario establecer la estructura de isoálgebra isotópica de Lie de $\widehat{\overline{\overline{\mathbf{g}}}}$, supondremos que la isotopía que se esté utilizando verificará las condiciones de la Proposición 5.2.22.

Así, en el Ejemplo 5.2.19, el isoálgebra isotópica de Lie asociada a $\mathbb{R}^*$ es conmutativa, al igual que la asociada a $\mathbb{R}^m$ en el Ejemplo 5.2.20. Por su parte, en el Ejemplo 5.2.21, el isoálgebra isotópica de Lie asociada a $\mathbb{R}^2$ estará dotada de la ley:

$$\hat{\bar{\bar{[}}}\widehat{\overline{\overline{X_1}}}, \widehat{\overline{\overline{X_2}}}\hat{\bar{\bar{]}}} = \widehat{\overline{\overline{X_1}}}.$$

Equivalentemente:

$$\hat{\bar{\bar{[}}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (e^x+1)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{\bar{\bar{]}}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (e^x+1)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \neq$$
$$\neq e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = [\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (e^x+1)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), e^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)].$$

5.3. La isoaplicación isoexponencial

Construiremos en esta sección la aplicación que relaciona el isoálgebra isotópica de Lie asociada a un isogrupo isotópico de Lie con este último. Se requiere pues que en un primer paso se estudie el concepto de isotrayectorias:

5.3.1. Isotrayectorias

Convencionalmente, se define una curva como una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, que sea regular y que esté definida en un intervalo real. Se hace uso implícito por tanto del orden $\leq$ usual en $\mathbb{R}$. Supondremos por tanto en nuestro desarrollo que el correspondiente isocuerpo $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ es ordenado, como ocurre por ejemplo en isotopías que permitan el uso del isoorden $\overline{\widehat{\leq}}$. En particular, tendrá sentido trabajar con intervalos isorreales: $(\widehat{a},\widehat{b})$, $[\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$, $(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}}]$, $[\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}}]$.

Con estas condiciones podemos dotar a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ de isoestructura de isoespacio isotopológico, haciendo uso de la isotopología isorreal cartesiana. De hecho, $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ será una isovariedad isodiferenciable si lo consideramos dotado del isoatlas $\{(\overline{\widehat{\mathbb{R}}},\overline{\widehat{Id}}_{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}})\}$.

Podemos dar entonces la definición de curva isodiferenciable:

Definición 5.3.1. *Sean $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable y $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}},\overline{\widehat{+}},\overline{\widehat{\times}})$ un isocuerpo isorreal dotado de orden. Se llamará* curva isodiferenciable en $\overline{\widehat{M}}$ *a toda isoaplicación isodiferenciable entre isovariedades isodiferenciables, de la forma:*

$$\overline{\widehat{\alpha}}:(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})\subseteq\overline{\widehat{\mathbb{R}}}\to\overline{\widehat{M}}:\overline{\widehat{t}}\to\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}}).$$

Por otra parte, se dirá que $\overline{\widehat{\alpha}}$ pasa por *$\overline{\widehat{P}}\in\overline{\widehat{M}}$ si existe $\overline{\widehat{t_0}}\in(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$ tal que $\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})=\overline{\widehat{P}}$.*

Obsérvese que, con las condiciones impuestas, no podemos asegurar que $\overline{\widehat{\alpha}}$ sea proyección isotópica de una curva diferenciable en una variedad diferenciable, pues en particular, $\overline{\widehat{M}}$ no tiene porqué ser proyección isotópica de una variedad diferenciable. No obstante, en el caso de que se obtuviese a partir de una isotopía de un espacio topológico M, podremos definir una aplicación $\alpha:(a,b)\to M:t\to\alpha(t)$, tal que $\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}})=\overline{\widehat{\alpha(t)}}$, para todo $\overline{\widehat{t}}\in(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$. En particular se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 5.3.2. *En las condiciones de la Proposición 4.3.3, $\alpha:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to M$ es una curva diferenciable en M, si y sólo si su proyección isotópica $\overline{\widehat{\alpha}}:(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})\subseteq\overline{\widehat{\mathbb{R}}}\to\overline{\widehat{M}}$ es una curva isodiferenciable en $\overline{\widehat{M}}$. Además, α pasa por $P\in M$ si y sólo si $\overline{\widehat{\alpha}}$ pasa por $\overline{\widehat{P}}\in\overline{\widehat{M}}$.*

Demostración.

El resultado se obtiene sin más que considerar (a,b) y $(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$ como subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}$ e isosubvariedad isodiferenciable de $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, respectivamente. $\square$

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.3.3. *En las condiciones del Ejemplo 5.1.2, consideremos la curva diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : t \to (cos\ t, sen\ t).$$

Dado que estamos en las condiciones de la Proposición 5.3.2, la isoaplicación correspondiente es por tanto una curva isodiferenciable en $\mathbb{R}^2$*:*

$$\overline{\widehat{\alpha}} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : t \to (cos\ t + sen\ t, sen\ t).$$

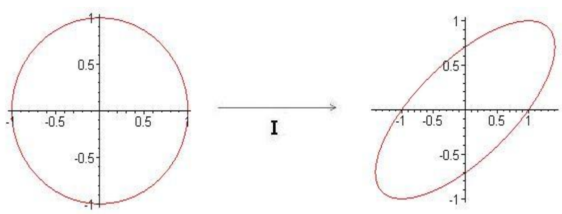

Figura 5.6: Curva isodiferenciable en $\mathbb{R}^2$*.*

$\triangleleft$

A continuación buscamos generalizar el concepto de vector tangente a una curva en un punto:

Proposición 5.3.4. *En las condiciones de la Proposición 5.2.3, sea una curva isodiferenciable en* $\overline{\widehat{M}}$*,* $\overline{\widehat{\alpha}} : (\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}}) \to \overline{\widehat{M}} : \overline{\widehat{t}} \to \overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}})$*. Definimos ahora para cada* $\overline{\widehat{t_0}} \in (\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$ *la isoaplicación:*

$$\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{dt}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}}) : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{f}} \to \frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{dt}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})\overline{\widehat{f}} = \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}(\overline{\widehat{f}} \circ \overline{\widehat{\alpha}})}{\overline{\widehat{\partial t}}}\right)_{|\overline{\widehat{t}}=\overline{\widehat{t_0}}}.$$

Se tiene entonces que $\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{dt}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}}) \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})}(\overline{\widehat{M}})$*.*

Demostración.

El resultado se obtiene atendiendo a la definición de isoderivada de una isofunción y haciendo uso de la compatibilidad de la isotopía respecto a las operaciones de partida. □

Por analogía al caso convencional llamaremos a $\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{t}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})$ *vector tangente a* $\overline{\widehat{\alpha}}$ *en* $\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})$. Se dirá además que $\overline{\widehat{\alpha}}$ es una *curva isodiferenciable regular* si $\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{d}}\overline{\widehat{t}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}}) \neq \overline{\widehat{\mathbf{0}}}$, para todo $\overline{\widehat{t_0}} \in (\overline{\widehat{a}}, \overline{\widehat{b}})$, siendo $\overline{\widehat{\mathbf{0}}} : \overline{\widehat{\mathbf{F}}}(\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t_0}})) \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}} : \overline{\widehat{f}} \to \overline{\widehat{\mathbf{0}}}(\overline{\widehat{f}}) = \overline{\widehat{0}}$.

Se tiene entonces el siguiente resultado inmediato:

Corolario 5.3.5. *α es una curva diferenciable regular en M en el nivel general, si y sólo si $\overline{\widehat{\alpha}}$ es una curva isodiferenciable regular en $\overline{\widehat{M}}$.* □

En el caso en que podamos tener una base de $\overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$, tenemos además el siguiente resultado:

Proposición 5.3.6. *En las condiciones de la Proposición 5.2.4, dados $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$ y $\overline{\widehat{v}} \in \overline{\widehat{\mathbf{T}}}_{\overline{\widehat{P}}}(\overline{\widehat{M}})$, existe una curva isodiferenciable en $\overline{\widehat{M}}$ que pasa por $\overline{\widehat{P}}$ y cuyo vector tangente en $\overline{\widehat{P}}$ es $\overline{\widehat{v}}$.*

Demostración.

Dados $\overline{\widehat{P}} = (\overline{\widehat{P}}_1, ..., \overline{\widehat{P}}_m)$ y $\overline{\widehat{v}} = \sum_{i=1}^m \overline{\widehat{\lambda}}_i \left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\overline{\widehat{\psi}}_i}\right)_{\overline{\widehat{P}}}$, bastará tomar:

$$\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}}) = \overline{\widehat{\psi}}^{-1}\overline{\widehat{(P_1 + \lambda_1 \times t, ..., P_m + \lambda_m \times t)}},$$

para $\overline{\widehat{t}} \in (-\overline{\widehat{\epsilon}}, \overline{\widehat{\epsilon}})$, siendo $\overline{\widehat{\epsilon}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$ tal que $\overline{\widehat{\alpha}}\left((-\overline{\widehat{\epsilon}}, \overline{\widehat{\epsilon}})\right) \subseteq \overline{\widehat{\psi}}(\overline{\widehat{V}})$. □

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.3.7. *En las condiciones del Ejemplo 5.2.21, consideramos la isotopía identidad del cuerpo de los números reales. Tomamos además el campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda $\overline{\widehat{X}} = a \times \overline{\widehat{X_1}} + b \times \overline{\widehat{X_2}}$, donde $a, b \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$. Esto es:*

$$\overline{\widehat{X}} = a\times\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{x}}}\right)+(a+b)e^{x}\times\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{y}}}\right) = a\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+((a+b)e^{x}+a)\times\left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Si aplicamos este campo al punto $(\overline{\widehat{0}},\overline{\widehat{0}})=(0,0)$ *resulta el vector isodiferenciable:*

$$\overline{\widehat{X}}_{(0,0)} = a\times\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{x}}}\right)_{(0,0)}+(a+b)\times\left(\frac{\overline{\widehat{\partial}}}{\overline{\widehat{\partial}}\,\overline{\widehat{y}}}\right)_{(0,0)} = a\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(0,0)}+(2a+b)\times\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(0,0)}.$$

Haciendo uso entonces de la Proposición 5.3.6 obtenemos la curva isodiferenciable en $\mathbb{R}^2$ *que pasa por* $(0,0)$ *y cuyo vector tangente en* $(0,0)$ *es* $\overline{\widehat{X}}_{(0,0)}$*:*

$$\overline{\widehat{\alpha}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t\to\overline{\widehat{\alpha}}(t)=\overline{(at,\widehat{(a+b)}t)}=((2a+b)t,(a+b)t).$$

◁

Seguidamente damos la definición de isotrayectoria:

Definición 5.3.8. *En las condiciones de la Proposición 5.2.3, sea una isocarta local entorno de* $\overline{\widehat{M}}$, $(\overline{\widehat{V}},\overline{\widehat{\psi}}=(\overline{\widehat{\psi}}_1,\dots,\overline{\widehat{\psi}}_m))$. *Una curva isodiferenciable en* $\overline{\widehat{M}}$, $\overline{\widehat{\alpha}}:(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})\to\overline{\widehat{M}}$, *se dirá entonces* isotrayectoria de $\overline{\widehat{X}}\in\overline{\widehat{\chi}}(\overline{\widehat{V}})$*, si:*

a) $\overline{\widehat{\alpha}}((\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}}))\subseteq\overline{\widehat{V}}$.

b) $\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{d}}\,\overline{\widehat{t}}}\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}})=\overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}})}$*, para todo* $\overline{\widehat{t}}\in(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})$.

En particular tenemos el siguiente resultado inmediato por construcción:

Proposición 5.3.9. $\alpha:(a,b)\to M$ *es una trayectoria de* X*, si y sólo si* $\overline{\widehat{\alpha}}:(\overline{\widehat{a}},\overline{\widehat{b}})\to\overline{\widehat{M}}:\overline{\widehat{t}}\to\overline{\widehat{\alpha}}(\overline{\widehat{t}})=\overline{\widehat{\alpha(t)}}$ *es una isotrayectoria de* $\overline{\widehat{X}}$. □

Uno de los resultados más destacables en el nivel convencional, que generalizaremos a continuación en el nivel isotópico, es el de existencia y unicidad de trayectorias en una variedad diferenciable, consecuencia del Teorema de Cauchy acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales:

Teorema 5.3.10. *Fijado $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$, existe una única isotrayectoria de $\overline{\widehat{X}}$, $\overline{\widehat{\alpha}} : (-\overline{\widehat{\epsilon}}, \overline{\widehat{\epsilon}}) \to \overline{\widehat{M}}$, que pasa por $\overline{\widehat{P}}$.*

Demostración.

El resultado es consecuencia inmediata del caso convencional y de la Proposición 5.3.9. □

En concreto, suponiendo que en el Ejemplo 5.3.7 queremos obtener la isotrayectoria del campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda $\overline{\widehat{X}}$ que pasa por $(0,0)$, basta tener en cuenta que la correspondiente trayectoria del campo $X = aX_1 + bX_2$ que pasa por $(0,0)$ es:

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \to (at, \frac{b}{a}(e^{at} - 1)) \text{ , si } a \neq 0,$$

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \to (0, bt) \text{ , si } a = 0.$$

De esta forma, la isotrayectoria mencionada será $\overline{\widehat{\beta}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\overline{\widehat{\beta}}(t) = \overline{\widehat{\beta(t)}} = \overline{(at, \widehat{\frac{b}{a}(e^{at} - 1)})} = (at + \frac{b}{a}(e^{at} - 1), \frac{b}{a}(e^{at} - 1)) \text{ , si } a \neq 0,$$

$$\overline{\widehat{\beta}}(t) = \overline{\widehat{\beta(t)}} = \overline{\widehat{(0, bt)}} = (bt, bt) \text{ , si } a = 0.$$

5.3.2. Isotrayectorias en $\overline{\widehat{\mathfrak{g}}}$

Como caso particular del Teorema 5.3.10 obtenemos el correspondiente resultado acerca de existencia y unicidad de isotrayectorias en un isogrupo isotópico de Lie:

Proposición 5.3.11. *Sean $(\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}})$ un isocuerpo isorreal y $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ un isogrupo isotópico de Lie, de elemento unidad $\widehat{I}$, construido mediante un levantamiento isotópico verificando las condiciones de la Proposición 5.2.22. Sea $\overline{\widehat{\mathfrak{g}}}$ el isoálgebra isotópica* *de Lie asociada a $\overline{\widehat{G}}$. Fijado $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ se tiene entonces que existe una única isotrayectoria de $\overline{\widehat{X}}$, $\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}} : \overline{\widehat{\mathbb{R}}} \to \overline{\widehat{G}} : \overline{\widehat{t}} \to \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t}})$, que pasa por $\widehat{I}$. Se notará la misma por $\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}})$.*

Como consecuencia, se verifica entonces que $\frac{\overline{\widehat{d}}}{\overline{\widehat{d}}t}\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}}) = \overline{\widehat{X}}_{\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}})}$.

Demostración.

Bajo las condiciones señaladas tendremos, aplicando la Proposición 5.1.7, que en el nivel convencional, $(G, \circ)$ es un grupo de Lie. Sea e el elemento unidad de G y consideremos su álgebra de Lie asociada, $\mathbf{g}$, de la cual se levanta isotópicamente $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$. En el nivel convencional tenemos entonces la existencia de una única trayectoria de X, $\Psi_X : \mathbb{R} \to G : t \to \Psi_X(t)$, pasando por e.

Ahora bien, por ser compatible respecto $\circ$ el levantamiento isotópico utilizado para la construcción de $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$, tenemos aplicando la Proposición 5.1.6 que los niveles convencional y general coinciden. En particular, e debe ser el elemento de G del cual se levanta isotópicamente $\widehat{I}$. Así podemos denotar $I = e$.

Aplicando entonces la Proposición 5.3.9, tenemos finalmente que $\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}} = \overline{\widehat{\Psi_X}}$ es una isotrayectoria de $\overline{\widehat{X}}$ que pasa por $\widehat{I}$. □

Se obtiene en particular el siguiente resultado:

Corolario 5.3.12. *En las condiciones de la Proposición 5.3.11, se tiene que:*

a) Fijados $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ y $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$, la isotrayectoria de $\overline{\widehat{X}}$ que pasa por $\overline{\widehat{g}}$ es $L_{\overline{\widehat{g}}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}$. Se notará la misma por $\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{g}}$.

b) Fijados $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ y $\overline{\widehat{t_0}}, \overline{\widehat{t_1}} \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$, se verifica que $\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t_0}}\overline{\widehat{+}}\overline{\widehat{t_1}}) = \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t_0}})\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t_1}})$. Esto es, $\overline{\widehat{\exp}}((\overline{\widehat{t_1}}\overline{\widehat{+}}\overline{\widehat{t_2}})\overline{\widehat{X}}) = \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t_1}}\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t_2}}\overline{\widehat{X}})$.

c) Una aplicación $\overline{\widehat{f}} : (\overline{\widehat{\mathbb{R}}}, \overline{\widehat{+}}) \to (\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ es un morfismo isodiferenciable de isogrupos si y sólo si es la isotrayectoria de un campo vectorial isodiferenciable invariante a izquierda que contenga a $\widehat{I}$.

Demostración.

a) Dado que $L_{\overline{\widehat{g}}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}} = \overline{\widehat{L_g}} \circ \overline{\widehat{\Psi_X}} = \overline{\widehat{L_g \circ \Psi_X}}$, siendo $L_g \circ \Psi_X$ la trayectoria de X que pasa por g, tenemos aplicando la Proposición 5.3.9, que $L_{\overline{\widehat{g}}} \circ \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}$ es la trayectoria de $\overline{\widehat{X}}$ que pasa por $\overline{\widehat{g}}$.

b) Por construcción y aplicando las propiedades conocidas en el nivel convencional se cumple que $\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\widehat{t_0}\widehat{+}\widehat{t_1}) = \overline{\widehat{\Psi_X}}(\overline{\widehat{t_0 + t_1}}) = \overline{\widehat{\Psi_X(t_0 + t_1)}} = \overline{\widehat{\Psi_X(t_0) \circ \Psi_X(t_1)}} = \overline{\widehat{\Psi_X(t_0)}}\,\overline{\widehat{\circ}}\,\overline{\widehat{\Psi_X(t_1)}} = \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t_0}})\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{t_1}})$.

c) Atendiendo a las condiciones impuestas, el resultado es consecuencia inmediata del caso convencional y del apartado anterior. □

Obsérvese la estructura de grupo uniparamétrico, atendiendo a la isodiferenciabilidad, de la aplicación $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} \times \overline{\widehat{\mathbf{g}}} \to \overline{\widehat{\mathbf{g}}} : (\overline{\widehat{t}}, \overline{\widehat{g}}) \to \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{g}}$. Por su analogía al caso convencional, diremos en particular que la aplicación $\overline{\widehat{\psi}}_{\overline{\widehat{X}}}$ es el *grupo uniparamétrico asociado a* $\overline{\widehat{X}}$.

Podemos por tanto pasar ya a definir de la aplicación que relaciona el isoálgebra isotópica de Lie asociada a un isogrupo isotópico de Lie con este último:

Definición 5.3.13. *En las condiciones de la Proposición 5.3.11, se denominará* isoaplicación isoexponencial *a* $\overline{\widehat{\exp}} : \overline{\widehat{\mathbf{g}}} \to \overline{\widehat{G}} : \overline{\widehat{X}} \to \overline{\widehat{\Psi}}_{\overline{\widehat{X}}}(\overline{\widehat{1}})$.

Por la construcción realizada es inmediato notar que $\overline{\widehat{\exp}}$ es la proyección isotópica correspondiente de la aplicación exponencial que relaciona el álgebra de Lie $\mathbf{g}$ asociado al grupo de Lie G. Así, en el Ejemplo 5.3.7, la isoaplicación isoexponencial que relaciona el isoálgebra isotópica de Lie $\mathbf{g}$ asociada a $\mathbb{R}^2$ con este isogrupo isotópico de Lie será la proyección isotópica de $\exp : \mathbf{g} \to \mathbb{R}^2$, tal que, para $X = aX_1 + bX_2$:

$$\exp(X) = \left\{ \begin{array}{c} (a, \frac{b}{a}(e^a - 1)) \text{ , si } a \neq 0, \\ (0, b) \text{ , si } a = 0. \end{array} \right\}.$$

Es decir, $\overline{\widehat{\exp}} : \overline{\widehat{\mathbf{g}}} \to \mathbb{R}^2$, donde, para $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{a}}\overline{\widehat{X_1}} + \overline{\widehat{b}}\overline{\widehat{X_2}}$:

$$\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{X}}) = \overline{\widehat{\exp(X)}} = \left\{ \begin{array}{c} (a + \frac{b}{a}(e^a - 1), \frac{b}{a}(e^a - 1)) \text{ , si } a \neq 0, \\ (b, b) \text{ , si } a = 0. \end{array} \right\}.$$

Las hipótesis impuestas permiten además garantizar que la isoexponencial herede convenientemente propiedades de la exponencial convencional (véase por ejemplo [33], para las demostraciones de estas últimas):

Proposición 5.3.14. *La isoexponencial es una isoaplicación isodiferenciable tal que:*

a) Para toda isoaplicación isodiferenciable $\overline{\widehat{\varphi}} : \overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{G}} \to \overline{\widehat{\mathbb{R}}}$*, definida en un isoentorno* $\overline{\widehat{U}}$ *de* $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$*, se verifica que:*

$$\overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{g}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\widehat{t}}^{\widehat{k}}}{\overline{\widehat{k!}}} \overline{\widehat{X}}^{\widehat{k}} \overline{\widehat{\varphi}}(\overline{\widehat{g}}),$$

donde la serie converge en un intervalo, salvo para $\overline{\widehat{t}} = \overline{\widehat{0}}$*.*

b) Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff-Santilli*:*

$$\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{Y}}) = \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{Z}}) \text{ , siendo:}$$

$$\overline{\widehat{Z}} = \overline{\widehat{X}} \widehat{+} \overline{\widehat{Y}} \widehat{+} \overline{\widehat{\frac{1}{2}}} \widehat{\times} \overline{\widehat{[\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}]}} \widehat{+} \overline{\widehat{\frac{1}{12}}} \widehat{\times} \left(\overline{\widehat{[\overline{\widehat{X}} - \overline{\widehat{Y}}, \overline{\widehat{[\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}]}}\,]}} \right) \widehat{+} \ldots$$

c) $\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}(\overline{\widehat{X}} \widehat{+} \overline{\widehat{Y}})) = \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}}) \widehat{\circ} \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{Y}})$ *si y sólo si* $\overline{\widehat{[\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}]}} = \overline{\widehat{\mathbf{0}}}$*.*

d) Si $\overline{\widehat{[\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}]}} = \overline{\widehat{\mathbf{0}}}$ *para todo* $\overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$*, entonces existen isoentornos abiertos* $\overline{\widehat{U}}$ *de* $\overline{\widehat{X}}$ *en* $\overline{\widehat{\mathbf{g}}}$ *y* $\overline{\widehat{V}}$ *de* $\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{X}})$ *en* $\overline{\widehat{G}}$*, tales que* $\overline{\widehat{\exp}}_{|\overline{\widehat{U}}}$ *es un* isodifeomorfismo *(esto es, una isoaplicación biyectiva isodiferenciable, con inversa isodiferenciable) .*

$\square$

Cabe indicar que el resultado indicado en el apartado (b) generaliza el propuesto por Santilli en [34] y [36], al permitir la utilización de isocuerpos de tipo II en los coeficientes, esto es, aquéllos en los que $\widehat{K} \neq K$.

Veamos esto en el siguiente:

Ejemplo 5.3.15. *Consideremos el conjunto general* $V = \mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{C}' \bigsqcup \mathbb{C}''$*, siguiendo la notación del Ejemplo 4.2.2, donde* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es el cuerpo de los complejos. Suponemos además la ley* $*$ *definida como:*

$$a * b = a \times b = ab,$$

$$a * (b + ci)' = (b + ci)' * a = (a \cdot (b + ci))',$$

$$a * (b + ci)'' = (b + ci)'' * a = (a \cdot (b + ci))'',$$

$$(a + bi)' * (c + di)' = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ , \ si \ (a + bi) \cdot (c + di) = 1, \\ ((a + bi) \cdot (c + di))'' \ , \ si \ (a + bi) \cdot (c + di) \neq 1. \end{array} \right\},$$

$$(a + bi)' * (c + di)'' = (c + di)'' * (a + bi)' = ((a + bi) \cdot (c + di))',$$

$$(a + bi)'' * (c + di)'' = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ , \ si \ (a + bi) \cdot (c + di) = 1, \\ ((a + bi) \cdot (c + di))'' \ , \ si \ (a + bi) \cdot (c + di) \neq 1. \end{array} \right\},$$

Tenemos en particular que 1 *es la unidad de* V *respecto a* $*$.

A continuación, tomamos $\widehat{I'}_{11} = \widehat{I'}_{11}(t) = ti \in \mathbb{C}'$*, con* $t \in \mathbb{N}$*, siendo entonces* $T_{11} = \widehat{I'}_{11}^{-1} = -\frac{1}{t} i \in \mathbb{C}'$*. Resulta pues el conjunto isotópico* $\widehat{\overline{\mathbb{R}}} = Im(\mathbb{C})$.

Consideremos finalmente la aplicación:

$$\Phi_{\times}^{11} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (t_1, t_2) \to \left\{ \begin{array}{c} t_1 t_2 \ , \ si \ t_1 \neq t_2, \\ t_1 \ , \ si \ t_1 = t_2. \end{array} \right\}.$$

Resulta entonces que para tiempos distintos obtenemos una isotopía compatible respecto a $\times$*, estando definida la ley:*

$$ai \widehat{\overline{\times}} bi = \left\{ \begin{array}{c} abi \ , \ si \ t_1 \neq t_2, \\ \frac{ab}{t} i \ , \ si \ t_1 = t_2 = t. \end{array} \right\}.$$

En particular, fijado un tiempo $t = t_0$*,* $\widehat{I} = t_0$ *es unidad de* $\widehat{\overline{\mathbb{R}}}$.

De forma análoga a lo anterior podemos construir isotopías de $\mathbb{R}$*, compatibles respecto a* $\times$*, usando los elementos:*

$$\widehat{I'}_{12}(t) = t^2 i; \qquad T_{12} = -\frac{1}{t^2}; \qquad \Phi_{\times}^{11}(t_1, t_2) = \left\{ \begin{array}{c} t_1^2 t_2^2 \ , \ si \ t_1 \neq t_2, \\ t_1^2 \ , \ si \ t_1 = t_2. \end{array} \right\}.$$

$$\widehat{I'}_{22}(t) = t^3 i; \qquad T_{22} = -\frac{1}{t^3}; \qquad \Phi^{11}_{\times}(t_1,t_2) = \left\{ \begin{array}{c} t_1^3 t_2^3 \text{ , } si\ t_1 \neq t_2, \\ t_1^3 \text{ , } si\ t_1 = t_2. \end{array} \right\}.$$

De tal forma que podemos construir el levantamiento isotópico de $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *a partir de los elementos* $\star \equiv +, \widehat{S}=0, * \equiv \cdot$ *e* $\widehat{I'} = \widehat{I'}(t_1,t_2,t_3) = \begin{pmatrix} t_1 i & 0 \\ t_2^2 i & t_3^3 i \end{pmatrix}$, *para* $t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{N}$

Tenemos entonces la proyección isotópica:

$$(a,b) \to ((at_1 + bt_2^2)i, bt_3^3 i).$$

En particular, para cada $F_t = (t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{N}^3$ *fijo,* $\mathbb{R}^2 * \widehat{I}(F_t) = Im(\mathbb{C}) \times Im(\mathbb{C})$, *siendo además inyectiva en* $F^{\mathbb{R}^2}$ *la isotopía utilizada, pues fijado* $(ai,bi) \in \overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2$, *tendremos para el valor* F_t *anterior, que la única proyección isotópica posible para obtenerlo es:*

$$\left(\frac{a - \frac{bt_2^2}{t_3^3}}{t_1}, \frac{b}{t_3^3} \right) * \widehat{I}(F_t) = (ai,bi).$$

Debemos disponer también de la proyección isotópica del cuerpo base $(\mathbb{R},+,\times)$, *lo que haremos de forma análoga a la construcción inicial, a partir de la isounidad* $\widehat{I} = i \in \mathbb{C}$.

Consideramos a continuación el grupo de Lie $(\mathbb{R}^2,\mu)$ *del Ejemplo 5.2.21. Fijado* $F_t = (t_1,t_2,t_3)$, *si definimos la aplicación que relaciona los factores externos como* $\Phi_\mu(F_t,F_t) = F_t$, *resulta finalmente que:*

$$\overline{\widehat{\mu}}\left((ai,bi),(ci,di)\right) = \mu\left(\left(\frac{a - \frac{bt_2^2}{t_3^3}}{t_1}, \frac{b}{t_3^3} \right), \left(\frac{c - \frac{dt_2^2}{t_3^3}}{t_1}, \frac{d}{t_3^3} \right) \right) * \widehat{I}(t_1,t_2,t_3) =$$

$$= \left(\left(a - \frac{bt_2^2}{t_3^3} + c - \frac{dt_2^2}{t_3^3} + t_2^2 \frac{e^{\frac{a - \frac{bt_2^2}{t_3^3}}{t_1}} d + b}{t_3^3} \right) i, \left(e^{\frac{a - \frac{bt_2^2}{t_3^3}}{t_1}} d + b \right) i \right) =$$

$$= \left(\left(a + c + \frac{t_2^2}{t_3^3} \left(e^{\frac{at_3^3 - bt_2^2}{t_1 t_3^3}} - 1 \right) d \right) i, \left(e^{\frac{at_3^3 - bt_2^2}{t_1 t_3^3}} d + b \right) i \right).$$

En particular, $(0,0)$ *es la unidad de* $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2$ *respecto* $\overline{\widehat{\mu}}$ *y se tiene el elemento opuesto:*

$$(ai,bi)^{-0} = \left(\left(\frac{bt_2^2}{t_3^3} - a - \frac{bt_2^2}{t_3^3}e^{\frac{bt_2^2-at_3^3}{t_1t_3^3}}\right)i, -\left(be^{\frac{bt_2^2-at_3^3}{t_1t_3^3}}\right)i\right).$$

De forma análoga al Ejemplo 5.2.21, dotamos a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2$ *de estructura de isogrupo isotópico de Lie, siendo en particular una base de los campos vectoriales isodiferenciables invariantes a izquierda:*

$$\overline{\widehat{X_1}} = t_1 i\left(t_1 i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + t_2^2 i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) + t_2^2 e^x i\left(t_3^3 i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = t_1^2 i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + t_2^2(t_3^3e^x + t_1)i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\overline{\widehat{X_2}} = t_3^3e^x i\left(t_3^3 i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = t_3^6 e^x i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Por su parte, el isoálgebra isotópica de Lie asociada a $\overline{\widehat{\mathbb{R}}}^2$ *estará dotada de la ley:*

$$\widehat{\overline{[\overline{\widehat{X_1}}, \overline{\widehat{X_2}}]}} = \overline{\widehat{X_1}}.$$

Con lo cual, el teorema de Baker-Campbell-Hausdorff-Santilli queda según :

$$\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{X_1}})\overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{X_2}}) = \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{Z}}),$$

donde:

$$\overline{\widehat{Z}} = \overline{\widehat{X_1}} + \overline{\widehat{X_2}} + \frac{\overline{\widehat{1}}}{2} \times \overline{\widehat{X_1}} - \frac{\overline{\widehat{1}}}{12}\overline{\widehat{X_1}} + \ldots = \overline{\widehat{X_2}} - \frac{\overline{\widehat{17}}}{12} \times \overline{\widehat{X_1}} + \ldots =$$

$$= t_3^6 e^x i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{17}{12} i\left(t_1^2 i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + t_2^2(t_3^3e^x + t_1)i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) + \ldots =$$

$$= \frac{17t_1^2}{12} i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{17t_2^2(t_3^3e^x + t_1)}{12} + t_3^6e^x\right) i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \ldots \qquad \triangleleft$$

5.4. Aplicación: Grupos de isotransformaciones

Estamos ya en condiciones de dar la definición de los grupos de Lie-Santilli o grupos de isotransformaciones (ver contribución original [34] o los monográficos [4],

[30], [27]), haciendo uso del cálculo isodiferencial (Kadeisvili plantea por primera vez esta mejora en [26], si bien trabaja únicamente con $\overline{\widehat{K}}$-espacios vectoriales y no con isovariedades).

Téngase en cuenta para ello que, fijada $\overline{\widehat{M}}$ una isovariedad isodiferenciable, se denomina *isotransformación de* $\overline{\widehat{M}}$ a todo isodifeormorfismo $\overline{\widehat{\tau}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{M}}$. En particular, si $\overline{\widehat{M}}$ está dotado de una isotopología asociada al correspondiente espacio topológico M, siendo inyectiva en F^M, $\overline{\widehat{\tau}}$ será proyección isotópica de una transformación de M.

Seguidamente se da la definición de actuación a derecha sobre una isovariedad (el concepto de actuación a izquierda es análogo):

Definición 5.4.1. *Sean* $\overline{\widehat{M}}$ *una isovariedad isodiferenciable y* $(\overline{\widehat{G}}, \overline{\widehat{\circ}})$ *un isogrupo isotópico de Lie. Se dice que* $\overline{\widehat{G}}$ actúa por la derecha de $\overline{\widehat{M}}$ *si existe una isoaplicación isodiferenciable:*

$$\overline{\widehat{\sigma}} : \overline{\widehat{M}} \times \overline{\widehat{G}} \to \overline{\widehat{M}} : (\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{g}}) \to \overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{g}}),$$

tal que para todo $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{M}}$ *y* $\overline{\widehat{a}}, \overline{\widehat{b}} \in \overline{\widehat{G}}$*, se verifique que:*

$$\overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b}}) = \overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{a}})\overline{\widehat{\circ}}\overline{\widehat{b}}; \qquad \overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{I}}) = \overline{\widehat{P}},$$

siendo $\overline{\widehat{I}}$ *la unidad de* $\overline{\widehat{G}}$*. En este caso se dirá que* $\overline{\widehat{M}}$ *es un* $\overline{\widehat{G}}$-isoespacio.

Obsérvese en particular que si en las las condiciones de la Proposición 4.3.16, imponemos además la compatibilidad de la isotopía utilizada respecto a $\circ$, entonces $\overline{\widehat{M}}$ es un $\overline{\widehat{G}}$-espacio si y sólo la correspondiente variedad diferenciable M es un G-espacio para la actuación asociada σ. Se puede obtener por tanto de esta forma una amplia gama de ejemplos al respecto.

Por otra parte, téngase en cuenta que fijado $\overline{\widehat{g}} \in \overline{\widehat{G}}$, la isoaplicación $\overline{\widehat{\sigma}}_{\overline{\widehat{g}}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{M}} : \overline{\widehat{P}} \to \overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{g}})$ es una isotransformación de inversa $\overline{\widehat{\sigma}}_{\overline{\widehat{g}}^{-\widehat{I}}}$. Por este motivo, el grupo de Lie $\overline{\widehat{G}}$ es denotado como *grupo de isotransformaciones* o bien como *grupo de Lie-Santilli*.

En particular, en las condiciones de la Proposición 5.3.11, fijado $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{\mathbf{g}}}$, la aplicación $\overline{\widehat{\mathbb{R}}} \times \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{M}} : (\overline{\widehat{t}}, \overline{\widehat{P}}) \to \overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{P}}, \overline{\widehat{\exp}}(\overline{\widehat{t}}\overline{\widehat{X}}))$, será un *grupo uniparamétrico de isotransformaciones.*

Definición 5.4.2. *Sea $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ un grupo de Lie-Santilli, siendo $\widehat{\overline{\overline{M}}}$ un $\overline{\overline{\widehat{G}}}$-isoespacio. Se dirá que $\overline{\overline{\widehat{G}}}$* actúa efectivamente*, si de ser $\overline{\overline{\sigma}}_{\overline{\widehat{g}}} = Id_{\widehat{\overline{\overline{M}}}}$, se sigue que $\overline{\overline{g}} = \overline{\overline{\widehat{I}}}$.*

Se dirá que $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ actúa libremente *si de existir $\overline{\widehat{\overline{P}}} \in \widehat{\overline{\overline{M}}}$, tal que $\overline{\overline{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\overline{g}}) = \overline{\widehat{\overline{P}}}$ para algún $\overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\widehat{G}}}$, se sigue que $\overline{\overline{g}} = \overline{\overline{\widehat{I}}}$.*

Se dirá que $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ actúa transitivamente*, o bien que $\widehat{\overline{\overline{M}}}$ es un* isoespacio homogéneo *de $\overline{\overline{\widehat{G}}}$, si para cada $\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\widehat{\overline{Q}}} \in \widehat{\overline{\overline{M}}}$ existe $\overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\widehat{G}}}$ tal que $\overline{\overline{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\overline{g}}) = \overline{\widehat{\overline{Q}}}$.*

Finalmente, fijado $\overline{\widehat{\overline{P}}} \in \widehat{\overline{\overline{M}}}$ se llamará grupo de isotropía *en $\overline{\widehat{\overline{P}}}$ o* estabilizador *de $\overline{\widehat{\overline{P}}}$, al conjunto $\overline{\overline{\widehat{G}}}_{\overline{\widehat{\overline{P}}}} = \left\{\overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\widehat{G}}} : \overline{\overline{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\overline{g}}) = \overline{\widehat{\overline{P}}}\right\}$. Se llamará $\overline{\overline{\widehat{G}}}$-*órbita *de $\overline{\widehat{\overline{P}}}$ al conjunto $\overline{\overline{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\overline{\widehat{G}}}) = \left\{\overline{\overline{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}}, \overline{\overline{g}}) : \overline{\overline{g}} \in \overline{\overline{\widehat{G}}}\right\}$.*

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo 5.4.3. *Sea $G = \left\{ G_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, que puede dotarse de estructura de grupo de transformaciones mediante la actuación:*

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times G \to \mathbb{R}^3 : ((a, b, c), G_{xyz}) \to (a, b, c) \cdot G_{xyz} = (a, ax + b, ay + bz + c).$$

Es conocido que G actúa efectivamente, pero no libre ni transitivamente.

Consideramos a continuación el conjunto general $V = \mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R}' \bigsqcup \mathbb{R}''$, siguiendo la notación del Ejemplo 4.2.2. Suponemos además la ley $*$ definida como:

$$a * b = a \times b = ab,$$

$$a * b' = b' * a = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{b}{a}\right)' \text{ , si } a \neq 0, \\ 0' \text{ , si } a = 0. \end{array} \right\},$$

$$a * b'' = b'' * a = (ab)'',$$

$$a' * b' = b' * a' = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ , si } ab = 1, \\ (ab)'' \text{ , si } ab \neq 1. \end{array} \right\},$$

$$a' * b'' = b'' * a' = (ab)',$$

$$a'' * b'' = (ab)''.$$

Tenemos en particular que 1 es la unidad de V respecto a $*$.

A continuación, tomamos $\widehat{I'}_1 = \widehat{I}'_1(t) = t \in \mathbb{R}'$, con $t \in \mathbb{N}$, siendo entonces $T_1 = \widehat{I}'^{-1}_1 = -\frac{1}{t}i \in \mathbb{R}'$. La proyección isotópica es entonces:

$$\overline{\overline{x}}_1 = x * \widehat{I}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{t}{x}\ ,\ si\ x \neq 0, \\ 0\ ,\ si\ x = 0. \end{array} \right\}.$$

Resulta de esta forma el conjunto isotópico $\overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}} = \mathbb{R}$.

Consideremos finalmente la aplicación:

$$\Phi_\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (t_1, t_2) \to \left\{ \begin{array}{c} t_1 t_2\ ,\ si\ t_1 \neq t_2, \\ t_1\ ,\ si\ t_1 = t_2. \end{array} \right\}.$$

Resulta entonces que para tiempos distintos obtenemos una isotopía compatible respecto a $\times$, estando definida la ley:

$$a \overline{\widehat{\times}} b = \left\{ \begin{array}{c} ab\ ,\ si\ t_1 \neq t_2, \\ \frac{ab}{t}\ ,\ si\ t_1 = t_2 = t. \end{array} \right\}.$$

En particular, fijado un tiempo $t = t_0$, $\widehat{I} = t_0$ es unidad de $\overline{\overline{\widehat{\mathbb{R}}}}$.

A continuación consideramos la isotopía de $\mathbb{R}^3$ y de G, de elementos $\star \equiv +$, $\widehat{S} = 0$, $* \equiv \cdot$ (el producto entre matrices) y la isounidad:

$$\widehat{I}' = \widehat{I}'(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} \widehat{I}'_1(t_1) & 1 & 1 \\ 0 & \widehat{I}'_1(t_2) & 1 \\ 0 & 0 & \widehat{I}'_1(t_3) \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces las proyecciones isotópicas:

$$(a, b, c) \to (\overline{\overline{a}}_{1t_1}, a + \overline{\overline{b}}_{1t_2}, a + b + \overline{\overline{c}}_{1t_3}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t_1 & 1 + \overline{\overline{x}}_{1t_2} & 1 + x + \overline{\overline{y}}_{1t_3} \\ 0 & t_2 & 1 + \overline{\overline{z}}_{1t_2} \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix}.$$

En particular, para cada $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{N}^3$ fijo, $\mathbb{R}^3 * \widehat{I}'(t) = \mathbb{R}^3$ y $G * \widehat{I}'(t) = G \cdot diag(t_1, t_2, t_3)$, pudiéndose comprobar además que son inyectivas en $F^{\mathbb{R}}$ y F^G cada una de las isotopías correspondientes. En particular, obtendremos para $\overline{\overline{\widehat{G}}}$ la *estructura de isogrupo isotópico de Lie, de manera análoga a lo visto en ejemplos anteriores.*

Tomamos seguidamente, para $t=(t_1,t_2,t_3)$, *la aplicación* $\Phi_\sigma(t,t)=t$. *Podremos dotar entonces a* $\overline{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}}^3$ *de estructura de* G*-isoespacio, mediante la isoaplicación isodiferenciable:*

$$\overline{\widehat{\sigma}}:\overline{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}}^3\times\overline{\widehat{\overline{G}}}\to\overline{\widehat{\overline{\mathbb{R}^3}}}$$

$$\left((\overline{\widehat{a}}_{1_{t_1}},a+\overline{\widehat{b}}_{1_{t_2}},a+b+\overline{\widehat{c}}_{1_{t_3}}),\begin{pmatrix}t_1 & 1+\overline{\widehat{x}}_{1_{t_2}} & 1+x+\overline{\widehat{y}}_{1_{t_3}}\\ 0 & t_2 & 1+\overline{\widehat{z}}_{1_{t_2}}\\ 0 & 0 & t_3\end{pmatrix}\right)\to$$

$$\to(\overline{\widehat{a}}_{1_{t_1}},a+\overline{\widehat{ax+b}}_{1_{t_2}},a+ax+b+\overline{\widehat{ay+bz+c}}_{1_{t_3}}).$$

Por construcción, puede comprobarse que $\overline{\widehat{\overline{G}}}$ *actúa efectivamente, pero no libre ni transitivamente sobre* $\overline{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}}^3$. $\lhd$

Los conceptos de grupo de Lie-Santilli y sus propiedades notables culminan el estudio realizado en la presente Memoria. Para finalizar, es conveniente notar que la proyección isotópica de los grupos de transformaciones convencionales, permiten generalizar de una forma coherente los resultados conocidos sobre estos últimos. Así por ejemplo, dada la analogía con el caso convencional, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 5.4.4. *Dado un grupo de Lie-Santilli* $\overline{\widehat{\overline{G}}}$, *un* $\overline{\widehat{\overline{G}}}$*-espacio* $\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *y un punto* $\overline{\widehat{\overline{P}}}\in\overline{\widehat{\overline{M}}}$, *se cumple que:*

a) $\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *es unión disjunta de las distintas* $\overline{\widehat{\overline{G}}}$*-órbitas.*

b) El estabilizador de $\overline{\widehat{\overline{P}}}\in\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *es un subgrupo de* $\overline{\widehat{\overline{G}}}$. *Es de hecho un isosubgrupo bajo las condiciones de la Proposición 4.3.16, si se exige además la compatibilidad de la isotopía utilizada respecto a* $\circ$.

c) $\overline{\widehat{\overline{G}}}$ *actúa transitivamente sobre* $\overline{\widehat{\overline{M}}}$, *si* $G_{\overline{\widehat{\overline{Q}}}}=\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *para al menos un* $\overline{\widehat{\overline{Q}}}\in\overline{\widehat{\overline{M}}}$.

d) Si $\overline{\widehat{\overline{M}}}=\overline{\widehat{\overline{G}}}_{\overline{\widehat{\overline{P}}}}$, *la isoaplicación natural* $\overline{\widehat{j}}:\overline{\widehat{\overline{G}}}/\overline{\widehat{\overline{G}}}_{\overline{\widehat{\overline{P}}}}\to\overline{\widehat{\overline{M}}}:\overline{\widehat{g}}\widehat{+}\overline{\widehat{\overline{G}}}_{\overline{\widehat{\overline{P}}}}\to\overline{\widehat{\sigma}}(\overline{\widehat{\overline{P}}},\overline{\widehat{g}})$ *es un isodifeomorfismo.*

$\square$

No cabe duda de que el último resultado únicamente inicia el estudio de los grupos de isotransformaciones. Los resultados prácticos ya encontrados por Santilli y sus colaboradores, junto con los nuevos modelos propuestos en la presente Memoria, permiten preveer que la generalización de resultados más específicos podrán ser obtenidos de forma coherente y sistemática. En este sentido, planteamos desde aquí la línea de investigación que permita enlazar los resultados obtenidos haciendo uso del MCIM, con algunas de las aplicaciones físicas que se han ido creando desde el comienzo de la isoteoría de Santilli.

Apéndice A

TEORÍA DE ISOTOPISMOS GENERALIZADOS

A.1. Álgebra abstracta

A.1.1. Leyes de composición

Un conjunto r es una *relación binaria* si está formado por pares ordenados (x, y). Se dice que r es una *relación binaria en un conjunto* G, si es una relación binaria y para todo $(x, y) \in r$, se verifica que $x, y \in G$.

Se define un *orden parcial en un conjunto* G como una relación binaria $\leq$ en G, cuyos pares ordenados $(x, y) \in \leq$ se denotan como $x \leq y$, tal que verifica las siguientes propiedades:

a) *Reflexividad* : $a \leq a$, para todo $a \in G$.

b) *Transitividad* : Dados $a, b, c \in G$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

c) *Antisimetría* : Dados $a, b \in G$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Se dirá que $\leq$ es un *orden total en* G si es un orden parcial en G, tal que verifica la siguiente propiedad:

d) *Totalidad*: Dados $a, b \in G$, o bien $a \leq b$, o bien $b \leq a$.

Dado un subconjunto $H \subseteq G$, se dice que H *tiene primer elemento respecto a* $\leq$, si existe $a \in H$, tal que para todo $b \in H$ se verifica que $a \leq b$. Se dice entonces que $\leq$ es un *buen orden en* G si es un orden parcial en G y todo subconjunto de G tiene primer elemento respecto a $\leq$. En particular, todo buen orden en G es un orden total en G.

Dados dos conjuntos no vacíos G y H, se dice que f es una *correspondencia de* G *en* H, si es una relación binaria y para todo $(x, y) \in f$, se cumple que $x \in G$ e $y \in H$. Se denotará $f : G \to H$ y se dirá que G es el *dominio de* f y que f *tiene imagen en* H. Se define además, para cada $x \in G$, el conjunto $f(x) = \{y : (x, y) \in f\}$. Se dice que f es una *aplicación de* G en H, si es una correspondencia de G en H, tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a f, entonces $y = z$. Se verifica entonces que $f(x)$ es un conjunto unitario para todo $x \in G$. En particular, si $f(x) = \{y\}$, se nota $f(x) = y$.

Dado un conjunto no vacío G, se llama *ley de composición* u *operación binaria* sobre G [7] (ley u operación, resp., cuando no haya lugar a confusión) a una correspondencia f de un subconjunto $\mathfrak{H} \subseteq G \times G$ en G. Se nota $f : \mathfrak{H} \to G$ y para cada $(x, y) \in \mathfrak{H}$, se nota $f((x, y)) = f(x, y)$, que recibe a su vez el nombre de *composición de* x e y para la ley f y se denota usualmente escribiendo x e y, separados ambos caracteres por un signo característico de dicha ley ($x \circ y$, $x \cdot y$, etc). Dicho signo denota usualmente también la ley de composición f ($f \equiv \circ$, $f \equiv \cdot$, etc.). En caso de ser f una aplicación de $\mathfrak{H} \subseteq G \times G$ en G, se dice que la ley f *toma valores únicos* .

Un conjunto no vacío G junto a un número finito de operaciones binarias sobre G, $\{\circ_1, ..., \circ_n\}$, recibe el nombre de *álgebra parcial* y se denota como $(G, \circ_1, ..., \circ_n)$. Si G es un conjunto finito de n elementos se dice que $(G, \circ_1, ..., \circ_n)$ es un álgebra parcial de *orden* n .

Una *estructura algebraica* es un álgebra parcial G cuyas operaciones binarias tienen todas dominio $G \times G$. Dos estructuras algebraicas G y H tienen *el mismo orden* si existe una biyección de G en H.

Un *semigrupoide* es un álgebra parcial $(G, \circ)$, donde $\circ$ es una operación binaria que toma valores únicos. Un *grupoide* es una estructura algebraica $(G, \circ)$, donde $\circ$ es una operación binaria que toma valores únicos. Un *subgrupoide* de un grupoide $(G, \circ)$ es un subconjunto H de G, tal que $(H, \circ)$ tiene estructura de grupoide.

Un *multigrupoide* [10] es una estructura algebraica $(G, \circ)$, donde $\circ$ es una operación binaria. Se dirá que un elemento $x \in G$ es un *escalar a izquierda* (*a derecha*, resp.) [13] *de* G si $x \cdot y$ ($y \cdot x$, resp.) es un único elemento de G, para todo $y \in G$. Se dirá que x es un *escalar de* G si es un escalar a izquierda y a derecha de G.

Dado un multigrupoide $(G, \circ)$:

a) Se denota, para todos $a, b, c \in G$:

$$(a \circ b) \circ c = \{d \circ c : d \in a \circ b\}, \qquad a \circ (b \circ c) = \{a \circ d : d \in b \circ c\}.$$

b) Toda aplicación f con dominio G e imagen un conjunto H, puede extenderse a una aplicación con imagen en el conjunto $\mathfrak{P}(H)$ de partes de H y dominio $\mathfrak{P}(G)$ de partes de G, de tal forma que, para todo $X \in \mathfrak{P}(G)$, $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. En particular, para todos $a, b \in G$:

$$f(a \circ b) = \{f(c) : c \in a \circ b\}.$$

Un multigrupoide $(Q, \circ)$ se dirá *entrópico* si verifica que $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$.

Un *multigrupo* [13] es un multigrupoide $(G, \circ)$, tal que $\circ$ verifica la propiedad asociativa ($(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$) y, fijados $a, b \in G$, existen $x, y \in G$, tal que $b \in a \circ x$ y $b \in y \circ a$.

Un *cuasigrupo* es un grupoide $(Q, \circ)$ tal que, para todos $(a, b) \in Q \times Q$ existe un único $(x, y) \in Q \times Q$ tales que:

$$a \circ x = b, \quad y \circ a = b.$$

A menudo se notan los elmentos x e y anteriores como $a \backslash b$ y b/a, respectivamente. Estas nuevas operaciones son llamadas *división a izquierda* y *división a derecha de b por a*, respectivamente. Estas operaciones binarias dan lugar a nuevos cuasigrupos al definirse sobre Q. Si sólo se verifica una de las igualdades anteriores se habla de *cuasigrupos a izquierda* o a derecha, respectivamente.

Se verifica que todo subgrupoide de un cuasigrupo de orden finito es también un cuasigrupo. En caso de ser $(Q, \circ)$ un cuasigrupo de orden finito n, puede considerarse $Q = \{0, 1, ..., n-1\}$. Se dirá entonces que Q es un *cuasigrupo normalizado* si $0 \circ x = x \circ 0 = 0$, para todo $x \in Q$. Un cuasigrupo normalizado no conmutativo es siempre no entrópico.

Se dice que un cuasigrupo $(Q, \circ)$ *verifica la condición de Reidemeister* si, dados $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in Q$, tales que $x_1 \circ y_2 = x_2 \circ y_1$, $x_1 \circ y_4 = x_2 \circ y_3, x_4 \circ y_1 = x_3 \circ y_2$, se cumple que $x_3 \circ y_4 = x_4 \circ y_3$.

Un grupoide $(Q, \circ)$ se dice *homogéneo* [21] si para todo $a \in Q$, existen $x, y \in Q$, tales que $a = x \circ y$.

Un grupoide $(G, \circ)$ tiene *elemento unidad a izquierda* (a derecha, resp.) si existe $e_\delta \in G$ (e_ρ, resp.), tal que $e_\delta \circ x = x$ ($x \circ e_\rho = x$, resp.), para todo $x \in G$. El grupoide $(G, \circ)$ tiene elemento unidad si tiene elemento unidad a izquierda e_δ y a derecha e_ρ. En particular, $e_\delta = e_\rho$, que es el *elemento unidad de G respecto a* $\circ$.

Se dice que un grupoide $(G, \circ)$ con elemento unidad e tiene *la propiedad de elemento inverso* si para todo $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x \circ y = y \circ x = e$. Se dirá además que x es *invertible respecto a* $\circ$ y que tiene como inverso a y.

Un *loop* es un cuasigrupo con elemento unidad. En particular, todo cuasigrupo normalizado es un loop.

Un *semigrupo* es un grupoide asociativo. Un *monoide* es un semigrupo con elemento unidad. Un *grupo* es un monoide con elemento inverso, o, de forma equivalente, un cuasigrupo asociativo.

Un *subgrupo* de un grupoide $(G, \circ)$ es un subgrupoide de $(G, \circ)$ que tiene estructura de grupo.

Un grupoide $(G, \circ)$ se dice *conmutativo* o *abeliano* si $x \circ y = y \circ x$ para todos $x, y \in G$.

Un *anillo* es un conjunto A dotado de dos leyes de composición, llamadas suma $+$ y producto $\times$, tal que $(A, +)$ es un grupo conmutativo, $(A, \times)$ es un monoide y se verifica la *propiedad distributiva* :

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z), \qquad (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$

para todos $x, y, z \in A$. Se notará $(A, +, \times)$ a dicho anillo.

Un *cuerpo* $(K, +, \times)$ es un anillo, con elementos unidades denotados 0 y 1, respecto a $+$ y $\times$, respectivamente, tal que todo elemento de K distinto de 0 es invertible respecto a $\times$.

Dado un cuerpo $(K, +, \times)$ y un orden total $\leq$ sobre K, se llama $\leq$-*módulo sobre* K a toda aplicación $g : K \to K$ tal que:

a) $0 \leq g(a)$, para todo $a \in K$,

b) $0 = g(a)$ si y sólo si $a = 0$,

c) $g(a \times b) = g(a) \times g(b)$, para todos $a, b \in K$,

d) *Desigualdad triangular* : $g(a + b) \leq g(a) + g(b)$, para todos $a, b \in K$.

Se suele denotar $|.| \equiv g$, de tal forma que $|a| = g(a)$, para todo $a \in K$. En caso de ser $K = \mathbb{R}$, se llama *valor absoluto sobre* $\mathbb{R}$ al módulo $|.|$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

A.1.2. Leyes de acción

Dados M y G dos conjuntos cualesquiera, se llama *acción de M sobre* G [7] a toda aplicación $m \to f_m$ de M en el conjunto de las aplicaciones de G en G. La aplicación $(m, x) \to f_m(x)$ de $M \times G$ en G se llama *ley de acción* y se notará $f_m(x) = m.x$, o bien mx cuando no haya lugar a confusión.

Dado un anillo $(A, +, \times)$, con elemento unidad e respecto a $\times$, se llama $(A, +, \times)$-*módulo* (o más simplemente, A-*módulo*) a todo grupo conmutativo $(G, +_G)$, cuyo elemento unidad respecto a $+_G$ es denotado como $\mathbf{0}$, tal que existe una ley de acción $(a, x) \to a.x$ de A sobre G, verificando que:

$$a.(x +_G y) = (a.x) +_G (a.y), \quad (a + b).x = (a.x) +_G (b.x), \quad a.(b.x) = (a \times b).x, \quad e.x = x,$$

para todos $a, b \in A$, $x, y \in G$. Se notará $(G, +_G, .)$ a dicho A-módulo.

Dado un cuerpo $(K, +, \times)$, se llama K-*espacio vectorial* a todo K-módulo $(G, +_G, .)$. A los elementos de G se les llaman *vectores* . Se dice que el conjunto $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de vectores de G es una *base* de G (y así, que G es n-*dimensional* o *de dimensión* n) si:

a) β es un *sistema de generadores* , es decir, $\forall X \in G$, $\exists x_1, ..., x_n \in K$ tales que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$.

b) β es un *sistema linealmente independiente* , es decir, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i = \mathbf{0}$, entonces $\lambda_i = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

En caso de ser entonces $X = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, se identifica X con dichos escalares, en la forma $X = (x_1, ..., x_n)_\beta$ y se dice que $(x_1, ..., x_n)$ son las *coordenadas del vector* X respecto a β. Esto permite a su vez identificar G con $K^n = K \times ..._{n \text{ veces}} \times K$.

Sean $(G, +_G, .)$ y $(H, +_H, \bullet)$ dos $(K, +, \times)$-espacios vectoriales, de dimensiones m y n, respectivamente y sean $\beta_G = \{e_1^G, ..., e_m^G\}$ y $\beta_H = \{e_1^H, ..., e_n^H\}$, bases respectivas de G y H. Sea $f : G \to H$ una aplicación y sean $X = (x_1, ..., x_m)_{\beta_G} \in G$, $Y = (y_1, ..., y_n)_{\beta_H} \in H$, tales que $f(X) = Y$. Se nota entonces $f(x_1, ..., x_m) = (y_1, ..., y_n)$. De esta forma, la aplicación f puede identificarse con una aplicación de K^m en K^n, atendiendo a las coordenadas de los vectores respecto a las bases correspondientes.

Dados un cuerpo $(K, +, \times)$, un orden total $\leq$ sobre K, un $\leq$-módulo $|.|$ sobre K y un K-espacio vectorial $(G, +_G, .)$ (de elemento unidad 0 respecto a $+_G$), se llama $\leq$-*norma sobre* G a toda aplicación $g : G \to K$ tal que:

a) $0 \leq g(X)$, para todo $X \in G$,

b) $0 = g(X)$ si y sólo si $X = \mathbf{0}$,

c) $g(a.X) = |a| \times g(X)$, para todos $a \in K, X \in G$,

d) *Desigualdad triangular* : $g(X +_G Y) \leq g(X) + g(Y)$, para todos $X, Y \in G$.

Se suele denotar $||.|| \equiv g$, de tal forma que $||X|| = g(X)$, para todo $X \in G$.

Dado un $(K, +, \times)$-espacio vectorial $(G, +_G, .)$, se llama *forma bilineal sobre* G a toda aplicación $g : G \times G \to K$, tal que, para todos $a, b \in K, X, Y, Z \in G$:

a) $g(a.X \ +_G \ b.Y, Z) = a \times g(X, Z) + b \times g(Y, Z)$,

b) $g(X, a.Y \ +_G \ b.Z) = a \times g(X, Y) + b \times g(X, Z)$.

En caso de ser G un K-espacio vectorial n-dimensional, siendo $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ una base de G, la forma bilineal g se identifica con la matriz $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, donde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$. Se dice que dicha matriz *representa la forma bilineal* g. De hecho, como notación, se denotará también por g a dicha matriz, verificándose entonces que $g(X, Y) = XgY^t$, donde estamos utilizando el producto usual entre matrices e Y^t denota la matriz traspuesta de Y.

Se dice que g es una *forma bilineal simétrica sobre* G si es una forma bilineal sobre G tal que $g(X, Y) = g(Y, X)$, para todos $X, Y \in G$. Se cumple que una matriz $n \times n$ en K representa una forma bilineal simétrica si y sólo si es una matriz simétrica.

Se dice que g es una *forma bilineal definida sobre* G si es una forma bilineal sobre G tal que $g(X, X) = 0$ implica que $X = \mathbf{0}$, el elemento unidad de G, respecto a $+_G$. Se dice que g es una *forma bilineal no degenerada sobre* G si, fijado $X \in G$, tal que $g(X, Y) = 0$, para todo $Y \in G$, debe ser $X = \mathbf{0}$. En caso de ser $\leq$ un orden total en K, se dice que g es una *forma bilineal definida positiva sobre* G si es una forma bilineal definida sobre G tal que $g(X, X) \geq 0$, para todo $X \in G$.

Toda forma bilineal simétrica g sobre G recibe el nombre de *producto interior sobre* G [55]. Se dice entonces que tal producto interior es *definido* (*no degenerado, definido positivo*, resp.), si lo es como forma bilineal.

Se suele denotar $< .,. >\equiv g$, de tal forma que $< X, Y >= g(X, Y) = XgY^t$, para todos $X, Y \in G$. En caso de ser G un K-espacio vectorial no nulo de dimensión finita, siempre se puede encontrar una *base ortogonal* de G [55], esto es, una base de G tal que la matriz asociada al producto interior sea una matriz diagonal.

En caso de ser $K = \mathbb{R}$ y ser g un producto interior definido positivo sobre G, se define el *módulo sobre* G *por* g como la aplicación $||.||_g : G \to \mathbb{R}$, que asigna a cada vector X de G, el único número real positivo a, tal que $a^2 =< X, X >$, esto es, $||X||_g =< X, X >^{1/2}$. Se verifica entonces que $||.||_g$ es una $\leq$-norma sobre G, donde $\leq$ es el orden usual real.

Dado $(G, +_G, .)$ un $(\mathbb{R}, +, \times)$-espacio vectorial n-dimensional y una base β de G, se define el *producto escalar euclídeo sobre* G como $< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$, para todos $X = (x_1, ..., x_n)_\beta, Y = (y_1, ..., y_n)_\beta \in G$. Dicho producto interior se identifica entonces con la matriz $\delta_n = diag_n(1, ..., 1)$. El espacio $(G, +_G, .)$ se denomina entonces *espacio euclídeo n-dimensional* y se denota $G = \mathbb{R}^n$ o bien, $G = \mathbb{E}^n$.

Dado un anillo $(A, +, \times)$, se llama $(A, +, \times)$-*álgebra* (o más simplemente, A-*álgebra*) a todo A-modulo $(G, +_G, .)$, tal que existe una ley de composición $*$ sobre G verificando que:

$$[(a.x)+_G(b.y)]*z = [a.(x*z)]+_G[b.(y*z)], \quad x*[(a.y)+_G(b.z)] = [a.(x*y)]+_G[b.(x*z)],$$

para todos $a, b \in A$, $x, y, z \in G$. Se notará $(G, +_G, ., *)$ a dicho A-álgebra.

A.1.3. Espacios métricos

Un *espacio métrico* es un conjunto G junto a una aplicación $g : G \times G \to \mathbb{R}$, llamada *métrica*, tal que, para todos $X, Y \in G$:

i) $g(X,Y) \geq 0$,

ii) $g(X,Y) = 0$ si y sólo si $X = Y$,

iii) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

iv) $g(X,Y) + g(Y,Z) \geq g(X,Z)$ (desigualdad triangular).

Dicho espacio métrico será denotado como (G, g).

Un *espacio vectorial métrico* es un $(K, +, \times)$-espacio vectorial $(G, +_G, .)$, tal que existe una aplicación $g : G \times G \to \mathbb{R}$ verificando que (G, g) es un espacio métrico.

Todo $(\mathbb{R}, +, \times)$-espacio vectorial $(G, +_G, .)$ sobre el que está definido un producto interior $< ., . >$ puede dotarse de una métrica definida como:

$$g(X,Y) = \sqrt{< X - Y, X - Y >}\ , \text{ para todos } X, Y \in G.$$

Generalmente se identifica dicha métrica con la matriz asociada al producto interior. Esto es, $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n}$, tal que $< X, Y >= xgY^t$.

En el caso de un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}^n$, se define la *métrica euclídea n-dimensional* como:

$$\delta_n(X,Y) = \sqrt{< X - Y, X - Y >} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$

para todos $X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) \in E^n$. Generalmente se identifica dicha métrica con la matriz $\delta_n = diag_n(1, ..., 1)$, correspondiente al producto interior asociado a $\mathbb{E}^n$.

A.1.4. Isotopismo

Multigrupoides

Definición A.1.1. *[22] Sean $(G, \cdot)$ y $(H, \circ)$ dos multigrupoides. Una terna (α, β, γ) de biyecciones α, β de G en H y γ de $G \cdot G$ en $H \circ H$ se llama un* isotopismo *de*

$(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$, si se cumple que:

$$\alpha(x)\circ\beta(y)=\gamma(x\cdot y),$$

para todos $x,y\in G$. Se dice entonces que $(G,\cdot)$ y $(H,\circ)$ son multigrupoides isotópicos *y que $(H,\circ)$ es* una isotopía de $(G,\cdot)$, *o bien que $(G,\cdot)$ es* isotopico a $(H,\circ)$.

Grupoides

La definición anterior extiende la noción de isotopismo entre grupoides:

Definición A.1.2. *[10] Sean $(G,\cdot)$ y $(H,\circ)$ dos grupoides. Una terna (α,β,γ) de biyecciones α,β de G en H y γ de $G\cdot G$ en $H\circ H$ se llama un* isotopismo *de $(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$, y $(H,\circ)$ se dice ser una* isotopía de $(G,\cdot)$ *o bien que $(G,\cdot)$ es* isotopico a $(H,\circ)$, por (α,β,γ), *si se cumple que:*

$$\alpha(x)\circ\beta(y)=\gamma(x\cdot y),$$

para todos $x,y\in G$. La operación $\circ$ suele llamarse producto isotópico respecto a (α,β,γ).

En caso de ser $H=G$, un isotopismo (α,β,Id_G) de $(G,\cdot)$ en $(G,\circ)$ se denomina principal *y $(G,\circ)$ se llama* isotopía principal de $(G,\cdot)$.

Un isotopismo (α,α,α) de $(G,\cdot)$ en $(G,\circ)$ se denomina isomorfismo *y $(G,\circ)$ se dice* isomorfo a $(G,\cdot)$.

La isotopía de grupoides es una relación de equivalencia. Se habla entonces de *grupoides isotópicamente equivalentes* . Más aún, dado el grupoide $(G,\cdot)$ y las biyecciones α,β,γ de G en un conjunto H, el producto isotópico define un grupoide $(H,\circ)$ que es una isotopía de $(G,\cdot)$.

Proposición A.1.3. *Se verifican los siguientes resultados:*

a) [10] Si $(G,\cdot)$ es un grupoide isotópico generalizado a un grupoide $(H,\circ)$, existe entonces un grupoide $(H,*)$, el cual, siendo isomorfo a $(G,\cdot)$ es a su vez isotópico generalizado principal a $(H,\circ)$.

b) [10] Todo isotopismo de grupos es un isomorfismo de grupos. Esto es, si $(G,\cdot)$ es un grupo isotópico a un grupo $(H,\circ)$ por un isotopismo (α,β,γ), debe verificarse que $\alpha=\beta=\gamma$.

c) *[9] Si Q es un loop isotópico a un grupo G, entonces Q es de hecho un grupo isomorfo a G.*

d) *[10] Todo cuasigrupo de orden n es isotópicamente equivalente a un cuasigrupo normalizado de orden n.*

$\square$

Teorema A.1.4. *[28] Un cuasigrupo es isotópico a un grupo si y sólo si dicho cuasigrupo verifica la condición de Reidemeister.* $\square$

Más resultados básicos sobre teoría clásica de isotopismo pueden verse por ejemplo en [2] o [10]. En lo que sigue llamaremos *clásico* a este tipo de isotopismo que se acaba de definir, para diferenciarlo de esta forma del isotopismo generalizado que veremos en la siguiente sección.

LP-isotopías de cuasigrupos

Sea $(G, \cdot)$ un cuasigrupo y sean fijados $u, v \in G$. Se define una *LP(loop-principal)-isotopía* [1] $(G, \circ)$ de $(G, \cdot)$ como:

$$(s \cdot v) \circ (u \cdot t) = s \cdot t, \text{ para todos } s, t \in G.$$

Dado que, fijados $u, v \in G$, cualesquiera dos elementos $x, y \in G$ pueden escribirse de forma única como $x = s \cdot v$ e $y = u \cdot t$, para ciertos $s, t \in G$, el elemento $x \circ y$ está unívocamente definido por lo anterior, siendo $(G, \circ)$ una isotopía principal de $(G, \cdot)$. De hecho, $(G, \circ)$ es un loop de unidad $e = u \cdot v$.

Recíprocamente, toda isotopía principal $(G, \circ)$ de $(G, \cdot)$ que sea loop se construye de esta manera, existiendo dos biyecciones f, g de G en sí mismo, tales que $f(s) \circ g(t) = s \cdot t$, para todos $s, t \in G$. De hecho, si e es la unidad de G respecto a $\circ$, existen $u, v \in G$, tales que $f(u) = e = g(v)$, siendo entonces $f(s) = s \cdot v$ y $g(t) = u \cdot t$, para todos $s, t \in G$. Finalmente, en el caso en que $(G, \cdot)$ sea un grupo con unidad I, será entonces:

$$x \circ y = x \cdot T \cdot y, \text{ para todos } x, y \in G,$$

siendo $T = e^{-I} = v^{-I} \cdot u^{-I}$, la inversa de e respecto a $\cdot$. Se verifica entonces que la LP-isotopía anterior es de hecho una *isotopía de Santilli* [34] y que $(G, \circ)$ es un grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, para la biyección $x \to x \cdot e$. En particular, e es la *isounidad* [34] de esta isotopía de Santilli.

A.1.5. Pseudoisotopismo

Definición A.1.5. *Sean* $(G, \cdot)$ *y* $(H, \circ)$ *dos grupoides. Una terna* (α, β, γ) *de aplicaciones sobreyectivas* α, β, γ *de* G *en* H *se llamará un* pseudoisotopismo *de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$*, y* $(G, \cdot)$ *se dirá ser* pseudoisotopico a $(H, \circ)$ *o bien que* $(H, \circ)$ *es una* pseudoisotopía de $(G, \cdot)$, por (α, β, γ)*, si se cumple que*

$$\alpha(x) \circ \beta(y) = \gamma(x \cdot y),$$

para todos $x, y \in G$*. La operación* $\circ$ *se llamará* producto pseudoisotópico respecto a (α, β, γ).

En caso de ser $H = G$*, un pseudoisotopismo* (α, β, Id_G) *de* $(G, \cdot)$ *en* $(G, \circ)$ *se denominará* principal *y* $(G, \circ)$ *se llamará* pseudoisotopía principal de $(G, \cdot)$.

Un pseudoisotopismo (α, α, α) *de* $(G, \cdot)$ *en* $(G, \circ)$ *se denominará* pseudoisomorfismo *y* $(G, \cdot)$ *se dirá* pseudoisomorfo a $(G, \circ)$.

Cabe observar que todo isotopismo entre grupoides es un pseudoisotopismo entre grupoides, pero no al revés.

A.2. Familia isotópica

Definición A.2.1. *Sean dados un conjunto cualquiera* A*, un conjunto de índices* I *y una familia* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$*, de biyecciones de* A *en un conjunto* B*. Diremos que* $\mathfrak{A}$ *es una* familia isotópica de A *en* B*. Se llamará* familia isotópica identidad de A *a la familia* $\{Id_A\}$.

Se llamará subfamilia isotópica de $\mathfrak{A}$ *a toda subfamilia no vacía* $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}$*. Sea* $I_{\mathcal{F}} = \{i \in I : \alpha_i \in \mathcal{F}\}$*. Se define la* aplicación base de $\mathcal{F}$, $\widehat{I}^{\mathcal{F}} : A \times I_{\mathcal{F}} \to B$*, de tal forma que* $\widehat{I}^{\mathcal{F}}(a, i) = \alpha_i(a)$*, para todos* $a \in A, i \in I_{\mathcal{F}}$.

En el caso en que $I_{\mathcal{F}}$ *y* B *sean espacios topológicos, se dirá que* $\mathcal{F}$ *es una* subfamilia isotópica continua *cuando, para todo* $a \in A$*, sea continua la aplicación* $\alpha_a : I_{\mathcal{F}} \to B$*, tal que* $\alpha_a(i) = \alpha_i(a)$*, para todo* $i \in I_{\mathcal{F}}$*. En caso de ser* $\mathcal{F} = \mathfrak{A}$ *se hablará de* familia isotópica continua .

Fijado un subconjunto Q *de* A*, llamaremos* conjunto isotópico asociado a Q *por* $\mathcal{F}$ *al conjunto* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}} = \{\alpha(a) : \alpha \in \mathcal{F}, a \in Q\}$*. Dado* $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}^{\mathcal{F}}$*, se notará por* $\mathfrak{a}^{-I_{\mathcal{F}}}$ *al* *conjunto* $\bigcup_{i\in I_{\mathcal{F}}}\{a \in Q : \alpha_i(a) = \mathfrak{a}\}$.

Se dirá que $\mathcal{F}$ *es* Q-inyectiva *si para todos* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}, a, b \in Q$, *tales que* $a \neq b$, *se verifica que* $\alpha(a) \neq \beta(b)$. *Se dirá que es* inyectiva *si es A-inyectiva .*

Fijado $a \in Q$, *se llamará* órbita isotópica de *a por* $\mathcal{F}$ *al conjunto isotópico asociado a* $\{a\}$ *por* $\mathcal{F}$, *que se denotará por* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a)$. *Esto es,* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a) = \widehat{\{a\}}^{\mathcal{F}} = \{\alpha(a) : \alpha \in \mathcal{F}\}$. *Llamaremos* conjunto orbital isotópico asociado a Q *por* $\mathcal{F}$ *al conjunto* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q) = \{\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a) : a \in Q\}$. *Se dirá entonces que* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}$ *es la* proyección isotópica de $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q)$ por $\mathcal{F}$.

Se dirá que $\mathcal{F}$ *es una* subfamilia isotópica Q-buena *si, para todos* $(a, b) \in Q \times Q$, *se tiene que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a) \neq \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(b)$. *Se dirá que* $\mathcal{F}$ *es una* subfamilia isotópica Q-óptima *si, para todos* $(a, b) \in Q \times Q$, *se tiene que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a) \cap \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(b) = \emptyset$. *Se dirá que* $\mathcal{F}$ *es una* subfamilia isotópica buena *(*óptima*, resp.), si es A-buena (A-óptima, resp.). En caso de ser* $\mathcal{F} = \mathfrak{A}$ *se dirá que* $\mathfrak{A}$ *es una* familia isotópica Q-buena, Q-óptima, buena *u* óptima*, respectivamente.*

Finalmente, dadas dos familias isotópicas $\mathfrak{A}_1$ *y* $\mathfrak{A}_2$ *de* A *en* B, *una subfamilia isotópica* $\mathcal{F}_1$ *de* $\mathfrak{A}_1$ *y una subfamilia isotópica* $\mathcal{F}_2$ *de* $\mathfrak{A}_2$, *se dirá que* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *son* Q-compatibles entre sí *si, para todo* $a \in Q$, *se verifica que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(a) = \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(a)$. *Se dirá que son* compatibles entre sí *si son A-compatibles.*

En particular, $\widehat{A}^{\mathcal{F}} = B$, para toda $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}$. Cuando no haya lugar a confusión, los conjuntos isotópicos de la definición anterior se notarán por $\widehat{Q}$, $\widehat{A}$, $\mathfrak{o}(a)$, $\mathfrak{o}(Q)$, etc. Obsérvese por otra parte que $\mathcal{F}$ es Q-buena si y sólo si la aplicación de Q en $\mathfrak{o}(Q)$, tal que cada elemento $a \in Q$ se aplica a su órbita $\mathfrak{o}(a)$, es una biyección.

Proposición A.2.2. *En las condiciones de la definición anterior,* $\mathcal{F}$ *es una subfamilia isotópica* Q*-inyectiva si y sólo si es* Q*-óptima. Por otra parte,* $\mathcal{F}$ *será inyectiva si y sólo si existe* $\alpha \in \mathfrak{A}$, *tal que para todo* $\beta \in \mathcal{F}$, $\beta = \alpha$. □

Ejemplo A.2.3. *Consideremos para cada* $t \in \mathbb{R}$ *la aplicación* $\alpha_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *tal que* $\alpha_t(x, y) = (x, y + t)$, *para todos* $x, y \in \mathbb{R}$. *La familia* $\mathfrak{A} = \{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es entonces una familia isotópica continua de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^2$.

Identifiquemos a continuación $\mathbb{R}$ *con* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *a partir de la biyección* $x \to (x, 0)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Diremos entonces que* $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ *en el sentido de ser* $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Resulta entonces que el conjunto isotópico asociado a* $\mathbb{R}$ *por* $\mathfrak{A}$ *es* $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Fijado un punto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, la órbita isotópica de P por $\mathfrak{A}$ es $\mathfrak{o}(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$. En particular se tiene que $\mathfrak{A}$ es una familia $\mathbb{R}$-óptima. $\triangleleft$

Definición A.2.4. *Sean dados:*

i) *4 conjuntos A, B, C y D,*

ii) *Dos conjuntos de índices I,J,*

iii) *Una aplicación sobreyectiva $\Phi : I \to J$,*

iv) *Dos familias isotópicas $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$, la primera de A en C y la segunda de B en D,*

v) *Una subfamilia isotópica $\digamma_{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$,*

vi) *Una aplicación $f : V \subseteq A \to B$.*

Sea $\digamma_{\mathfrak{B}} = \{\beta_{\Phi(i)}\}_{i\in I_{\digamma_{\mathfrak{A}}}}$. Llamaremos entonces familia f-isotópica *a la familia $\digamma = \{(\alpha_i, \beta_{\Phi(i)})\}_{i\in I_{\digamma_{\mathfrak{A}}}}$. Se notará $\widehat{V}^{\digamma} = \widehat{V}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}$. La aplicación $\Phi_{|_{I_{\digamma_{\mathfrak{A}}}}} : I_{\digamma_{\mathfrak{A}}} \to J_{\digamma_{\mathfrak{B}}}$ será llamada* aplicación f-isotópica por $\digamma$. *Se dirá que $\digamma$ es* continua *si son continuas $\digamma_{\mathfrak{A}}$ y $\digamma_{\mathfrak{B}}$.*

Dado Q un subconjunto de V, definimos entonces las siguientes correspondencias:

a) $\widehat{f}^{\digamma} : \widehat{Q}^{\digamma_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}$, *tal que:*

$$\widehat{f}^{\digamma}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i\in I_{\digamma_{\mathfrak{A}}}} \{\beta_{\Phi(i)}(f(a)) : a \in Q, \ tal\ que\ \alpha_i(a) = \mathfrak{a}\},$$

para todo $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}$. Se dirá entonces que la aplicación f de Q en $f(Q)$ (que es la restricción a Q de $f : V \subseteq A \to B$) se levanta isotópicamente a $\widehat{f}^{\digamma}$ *por $\digamma$. En caso de ser $\widehat{f}^{\digamma}$ una aplicación, se dirá que es una* isoaplicación de $\widehat{Q}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}$ *en* $\widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}$, asociada a $f : Q \to f(Q)$ por $\digamma$. *Se dirá entonces que $\widehat{f}^{\digamma}$ es* inyectiva *(*sobreyectiva o biyectiva, *resp.) si lo es en el sentido convencional.*

b) $\mathfrak{o}^{\digamma}(f) : \mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(Q) \to \mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}(f(Q))$, *tal que:*

$$\mathfrak{o}^{\digamma}(f)(\mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(x)) = \{\mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}(f(a)) : a \in Q, \ tal\ que\ \mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(a) = \mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(x)\},$$

para todo $\mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(x) \in \mathfrak{o}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}(Q)$. Se dirá entonces que la correspondencia $\widehat{f}^{\digamma}$ de $\widehat{Q}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}$ en $\widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}$ es la proyección isotópica de $\mathfrak{o}^{\digamma}(f)$ por $\digamma$. *En el caso en que $\mathfrak{o}^{\digamma}(f)$ sea una aplicación, se dirá que $\widehat{f}^{\digamma}$ es una* $\digamma$-aplicación.

Se llamará aplicación reguladora de $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *a la aplicación* $\widehat{f}^{\mathcal{F}}_{reg} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \times I \to \widehat{f(Q)}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}} \bigcup \{\{\emptyset\}\}$, *definida como:*

$$\widehat{f}^{\mathcal{F}}_{reg}(x,i) = \begin{cases} \{\emptyset\}, & si\ no\ existe\ a \in Q\ tal\ que\ \alpha_i(a) = x, \\ \beta_{\Phi(i)}(f(a)), & si\ existe\ a \in Q\ tal\ que\ \alpha_i(a) = x. \end{cases},$$

para todos $x \in \widehat{Q}^{\mathfrak{A}}$, $i \in I$.

Cuando no haya lugar a confusión, las correspondencias anteriores se notarán por $\widehat{f}$, $\widehat{f}_{reg}$ y $\mathfrak{o}(f)$, respectivamente.

Proposición A.2.5. *En las condiciones de la definición anterior:*

a) La correspondencia $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *es una aplicación si y sólo si para todos* $a, b \in Q$, *tales que existen* $i, j \in I_{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}}$ *verificando que* $\alpha_i(a) = \alpha_j(b)$, *se cumple que* $\beta_{\Phi(i)}(f(a)) = \beta_{\Phi(j)}(f(b))$.

b) La correspondencia $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f)$ *será una aplicación, si y sólo si para todos* $a, b \in Q$, *tales que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}}(a) = \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}}(b)$, *se verifica que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}(f(a)) = \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}(f(b))$. *En particular, si* $\mathcal{F}$ *es una subfamilia isotópica* Q*-buena, la restricción a* Q *de toda aplicación de un subconjunto* V *de* A *en* B *es una* $\mathcal{F}$*-aplicación.*

$\square$

Proposición A.2.6. *En las condiciones de la Definición A.2.4, supongamos que* $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *es una isoaplicación. Entonces:*

a) Si $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *es una familia inyectiva, entonces* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *será inyectiva siempre que* $f : Q \subseteq A \to B$ *y* $\Phi_{|_{I_{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}}}} : I_{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to J_{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *sean ambas inyectivas.*

b) $f : Q \subseteq A \to B$ *será inyectiva siempre que* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *sea inyectiva.*

c) $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *será sobreyectiva siempre que* $f : Q \subseteq A \to B$ *sea sobreyectiva.*

d) Si $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *es una familia inyectiva, entonces* $f : Q \subseteq A \to B$ *será sobreyectiva siempre que* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *sea sobreyectiva.*

□

Ejemplo A.2.7. *En las condiciones del Ejemplo A.2.3, consideremos la familia isotópica identidad de* $\mathbb{R}$, $\mathfrak{B} = \{Id_{\mathbb{R}}\}$ *y sea* $\mathfrak{F} = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\}$. *Tomemos a continuación la aplicación* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x, y) = x + y$.

Se define entonces la correspondencia $\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *de forma que* $\widehat{f}(x, y) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}}\{x + y - t\} = \mathbb{R}$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *La aplicación reguladora* $\widehat{f}_{reg}$ *queda a su vez definida como* $\widehat{f}_{reg}((x, y), t) = x + y - t$, *para todos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, identificando nuevamente $\mathbb{R}$ *con* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *y dado que la familia* $\mathfrak{A}$ *es* $\mathbb{R}$*-óptima, se define la* $\mathfrak{F}$*-aplicación* $\widehat{f_{|\mathbb{R}}} : \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *tal que* $\widehat{f}(x, y) = x$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *que de hecho es una isoaplicación.* $\lhd$

Definición A.2.8. *En las condiciones de la Definición A.2.4, se definirá la* inversa *de* $\widehat{f}^{\digamma}$ *como la correspondencia* $\left(\widehat{f}^{\digamma}\right)^{-1} : \widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}} \to \widehat{Q}^{\digamma_{\mathfrak{A}}}$, *tal que:*

$$\left(\widehat{f}^{\digamma}\right)^{-1}(\mathfrak{b}) = \bigcup_{b\in B}\{\alpha_i(a) : f(a) = b \ \text{y} \ \exists j \in J_{\digamma_{\mathfrak{B}}}, \ \text{tal que } \Phi(i) = j \ \text{y} \ \beta_j(b) = \mathfrak{b}\},$$

para todo $\mathfrak{b} \in \widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}$.

Proposición A.2.9. *En las condiciones de la Definición A.2.4, definimos la familia:*

$$\digamma^{-1} = \left\{(\beta_{\Phi(i)}, \alpha_i)\right\}_{i\in I_{\digamma_{\mathfrak{A}}}}.$$

En caso de ser inyectiva la aplicación $f : Q \subseteq A \to B$, *resulta entonces que la aplicación inversa de* f, $f^{-1} : f(Q) \subseteq B \to A$ *se levanta isotópicamente por* $\digamma^{-1}$ *a la inversa de* $\widehat{f}^{\digamma}$; *es decir,* $\widehat{f^{-1}}^{\digamma^{-1}} = \left(\widehat{f}^{\digamma}\right)^{-1}$.

En particular, para todo $\mathfrak{b} \in \widehat{f(Q)}^{\digamma_{\mathfrak{B}}}$:

$$\left(\widehat{f}^{\digamma}\right)^{-1}(\mathfrak{b}) = \bigcup_{(\beta_{\Phi(i)},\alpha_i)\in\digamma^{-1}}\{\alpha_i(f^{-1}(b)) : b \in B, \ \text{tal que } \beta_{\Phi(i)}(b) = \mathfrak{b}\} =$$

$$= \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\digamma}\{\alpha(f^{-1}(b)) : \beta(b) = \mathfrak{b}\}.$$

□

A.3. Isotopismo generalizado e isotopismo parcial

Definición A.3.1. *Sean dados:*

i) *6 conjuntos* A, B, C, D, E, F,

ii) *Tres conjuntos de índices* I, J, K,

iii) *Una aplicación sobreyectiva* $\Phi : I \times J \to K$,

iv) *Una familia isotópica* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ *de* A *en* D, *una familia isotópica* $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$ *de* B *en* E *y una familia isotópica* $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k\in K}$ *de* C *en* F.

La familia $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$ *será llamada* familia isotópica de (A, B, C) en (D, E, F). *Por su parte,* Φ *será llamada* aplicación isotópica de $\mathfrak{F}$. *Se llamará* subfamilia isotópica de $\mathfrak{F}$ *a toda subfamilia* $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{F}$. *En caso de ser* $I = J$, *se llamará* subfamilia isotópica especial de F *a* $\mathfrak{F}_I = \{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_{\Phi(i,i)}\}_{i\in I}$.

Fijada una subfamilia isotópica $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{F}$, *se definen las familias siguientes:*

$$I_{\mathcal{F}} = \left\{i \in I : \exists j \in J \text{ tal que } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)}) \in \mathcal{F}\right\}, \quad \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathcal{F}}},$$

$$J_{\mathcal{F}} = \left\{j \in J : \exists i \in I \text{ tal que } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)}) \in \mathcal{F}\right\}, \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} = \{\beta_j\}_{j\in J_{\mathcal{F}}},$$

$$K_{\mathcal{F}} = \{k \in K : \exists i \in I, j \in J \text{ tales que } \Phi(i,j) = k \text{ y } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \in \mathcal{F}\}$$

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} = \{\gamma_k\}_{k\in K_{\mathcal{F}}}.$$

Se dirá que $\mathcal{F}$ *es* continua *si lo son las familias* $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ *y* $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$.

Por otra parte, se define la aplicación $\widehat{I}_1^{\mathcal{F}} : A \times I_{\mathcal{F}} \to D$, *tal que* $\widehat{I}_1^{\mathcal{F}}(a, i) = \alpha_i(a)$, *para todos* $a \in A, i \in I_{\mathcal{F}}$. *Análogamente se definen las aplicaciones* $\widehat{I}_2^{\mathcal{F}} : B \times J_{\mathcal{F}} \to E$ *e* $\widehat{I}_3^{\mathcal{F}} : C \times K_{\mathcal{F}} \to F$. *Se llamará* terna base de $\mathcal{F}$ *a la terna* $\left(\widehat{I}_1^{\mathcal{F}}, \widehat{I}_2^{\mathcal{F}}, \widehat{I}_3^{\mathcal{F}}\right)$. *La terna base de* $\mathfrak{F}$ *se denotará como* $(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3)$.

Finalmente, dado un subconjunto $Q \subseteq A \cup B$, *se definen los conjuntos:*

$$\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} = \widehat{Q \cap A}^{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}} \subseteq D, \quad \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}} = \widehat{Q \cap B}^{\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}} \subseteq E.$$

Se define el conjunto isotópico asociado a Q *por* $\mathcal{F}$ *como* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}} = \widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} \cup \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}$. *Los elementos de* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}$ *se denotarán o bien en la forma* $\widehat{a}_{1,i}^{\mathcal{F}} = \widehat{I}_1^{\mathcal{F}}(a, i), \widehat{b}_{2,j}^{\mathcal{F}} = \widehat{I}_2^{\mathcal{F}}(b, j)$

(siendo $a \in Q \cap A, b \in Q \cap A, i \in I, j \in J$), cuando se conozcan los elementos de Q de los que se obtienen, o bien con caracteres góticos, ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, etc.) para diferenciarlos de los elementos de Q.

Definición A.3.2. *Sean dados:*

i) *6 conjuntos A, B, C, D, E, F,*

ii) *Dos correspondencias $f : A \times B \to C$, $g : D \times E \to F$,*

iii) *Una familia isotópica $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ de A en D, una familia isotópica $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$ de B en E y una familia isotópica $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k\in K}$ de C en F.*

iv) *Una familia isotópica $\mathfrak{F} = \{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\}_{i\in I, j\in J}$ de (A, B, C) en (D, E, F),*

v) *Una subfamilia isotópica $\digamma$ de $\mathfrak{F}$.*

Entonces:

a) *Dado un subconjunto $Q \subseteq A \cup B$, se define el conjunto:*

$$\widehat{Q}_K^{\digamma,f} = \bigcup_{\gamma\in\mathfrak{C}_\digamma} \{x \in \gamma(f(a,b)) : a \in Q \cap A, b \in Q \cap B\} \subseteq F.$$

En caso de ser $\widehat{Q}_I^\digamma \neq \emptyset \neq \widehat{Q}_J^\digamma$, se define la correspondencia $\widehat{f}^\digamma : \widehat{Q}_I^\digamma \times \widehat{Q}_J^\digamma \to \widehat{Q}_K^{\digamma,f}$, de tal forma que:

$$\widehat{f}^\digamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \bigcup_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\digamma} \{\gamma(f(a,b)) : a \in Q \cap A, b \in Q \cap B \text{ , siendo } \alpha(a) = \mathfrak{a}, \beta(b) = \mathfrak{b}\},$$

para todos $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}_I^\digamma$, $\mathfrak{b} \in \widehat{Q}_J^\digamma$. El par $(\widehat{Q}^\digamma, \widehat{f}^\digamma)$ recibirá el nombre de levantado isotópico de (Q, f) *por $\digamma$. La subfamilia isotópica $\digamma$ será llamada* levantamiento isotópico de (Q, f) *en $(\widehat{Q}^\digamma, \widehat{f}^\digamma)$.*

Se llamará aplicación reguladora de $\widehat{f}^\digamma$ *a la aplicación $\widehat{f}_{reg}^\digamma : D \times I \times E \times J \to F \bigcup \{\{\emptyset\}\}$, definida como:*

$$\widehat{f}_{reg}^\digamma(d, i, e, j) =$$

$$= \begin{cases} \{\emptyset\}, \text{ si } \nexists a \in A \text{ tal que } \alpha_i(a) = d, \text{ o } \nexists b \in B \text{ tal que } \beta_j(b) = e, \\ \gamma_{\Phi(i,j)}(f(a,b)), \text{ si } \exists a \in A, b \in B \text{ tal que } \alpha_i(a) = d, \beta_j(b) = e. \end{cases},$$

para todos $d \in D, e \in E$.

b) *Se dirá que el cuádruple* (A, B, C, f) *es* isotópico parcial al *cuádruple* (D, E, F, g) por $\mathcal{F}$ *o bien que* (D, E, F, g) *es* una isotopía parcial de (A, B, C, f) por $\mathcal{F}$, *si se verifica que:*

$$g(\alpha(a), \beta(b)) = \gamma(f(a, b)),$$

para todos $a \in A$, $b \in B$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}$. *La subfamilia isotópica* $\mathcal{F}$ *se dirá entonces que es un* isotopismo parcial *de* (A, B, C, f) *en* (D, E, F, g).

En caso de ser $C = F$, *si para todo* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}$, *se cumple que* $\gamma = Id_C$, *la subfamilia isotópica* $\mathfrak{F}$ *se dirá que es un* isotopismo parcial principal *de* (A, B, C, f) *en* (D, E, F, g).

Si para todo $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}$, *se cumple que* $\alpha = \beta = \gamma$, *la subfamilia isotópica* $\mathfrak{F}$ *se dirá que es un* isomorfismo parcial *de* (A, B, C, f) *en* (D, E, F, g).

En caso de ser $\mathcal{F} = \mathfrak{F}$ *se hablará de* isotopismo generalizado, isotopismo generalizado principal *o* isomorfismo generalizado, *en lugar de isotopismo parcial, isotopismo parcial principal o isomorfismo parcial, respectivamente.*

En caso de ser $(A, B, C, f) = (D, E, F, g)$, *se llamará* isotopismo identidad *al isotopismo generalizado* $\{(Id_A, Id_B, Id_C)\}$.

Atendiendo a la definición anterior, obsérvese que, para toda subfamilia isotópica $\mathcal{F}$, se cumple que $D \subseteq \widehat{A}^{\mathcal{F}}$ y $E \subseteq \widehat{B}^{\mathcal{F}}$. Por otra parte, si en la definición anterior tomamos $Q = A \cup B$, obsérvese que, el levantado isotópico $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{f}^{\mathcal{F}})$ por $\mathcal{F}$ de (Q, f), no es en general tal que $(\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_K^{\mathcal{F}}, \widehat{f}^{\mathcal{F}})$ sea una isotopía parcial de (A, B, C, f).

Cuando no haya lugar a confusión, se suprimirá el superíndice $\mathcal{F}$ en las notaciones referentes a la construcción del levantado isotópico de (Q, f) por $\mathcal{F}$. Además, se hablará de *isotopismo de* (A, B, C, f) *en* (D, E, F, g), tanto en el caso de que se trate de un isotopismo generalizado como de uno parcial.

Definición A.3.3. *En las condiciones de la Definición A.3.2, supongamos que* $A = B = C$ *y* $D = E = F$. *Diremos entonces que* $\mathcal{F}$ *es un* isotopismo parcial simple de (A, B, C, f) en (A, B, C, g) *si, siendo un isotopismo parcial de* (A, B, C, f) *en* (A, B, C, g), *se cumple que* $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$.

En caso de ser $\mathcal{F} = \mathfrak{F}$, *se hablará de* isotopismo generalizado simple. *La aplicación* $\widehat{I}_1^{\mathfrak{F}} = \widehat{I}_2^{\mathfrak{F}} = \widehat{I}_3^{\mathfrak{F}}$ *será llamada entonces* isounidad del isotopismo *y será denotada por* $\widehat{I}$.

Obsérvese que todo isotopismo simple quedará determinado por su isounidad y su aplicación isotópica.

A.3.1. Leyes de composición

Definición A.3.4. *Sean* $(G,\cdot)$ *y* $(H,\circ)$ *dos multigrupoides del mismo orden y sea* $\mathfrak{F}$ *una familia isotópica de* $(G,G,G\cdot G,\cdot)$ *en* $(H,H,H\circ H,\circ)$*. Se dirá que* $\mathfrak{F}$ *es una familia isotópica de* $(G,\cdot)$ *en* $(H,\circ)$*. Por otra parte, se dirá que una subfamilia isotópica* $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{F}$ *es un* isotopismo parcial de $(G,\cdot)$ *en* $(H,\circ)$*, si lo es de* $(G,G,G\cdot G,\cdot)$ *en* $(H,H,H\circ H,\circ)$*. Diremos entonces que* $(G,\cdot)$ *es* isotópico parcial a $(H,\circ)$ por $\mathcal{F}$ *o bien que* $(H,\circ)$ *es una* una isotopía parcial de $(G,\cdot)$ por $\mathcal{F}$*. En particular:*

$$\gamma(a\cdot b)=\alpha(a)\circ\beta(b),$$

para todos $a,b\in G,(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{F}$*.*

De forma análoga se definen los conceptos de isotopismo parcial principal, isomorfismo parcial, isotopismo generalizado, isotopismo generalizado principal *o* isomorfismo generalizado de $(G,\cdot)$ *en* $(H,\circ)$*. En caso de que* $\mathfrak{F}$ *sea un isotopismo generalizado de* $(G,\cdot)$ *en* $(H,\circ)$*, se dirá que* $(G,\cdot)$ *es* isotópico generalizado a *o* una isotopía generalizada de $(H,\circ)$ *por* $\mathfrak{F}$*.*

Cabe indicar que cada terna (α,β,γ) de un isotopismo generalizado o parcial de de $(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$ es de hecho un isotopismo clásico de $(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$. Se verifican además los siguientes resultados:

Proposición A.3.5. *La relación de isotopía generalizada (parcial, resp.) entre multigrupoides del mismo orden es una relación de equivalencia.*

Demostración.

Lo vemos para isotopismos generalizados, siendo análoga la demostración para isotopismos parciales, teniendo en cuenta que todo isotopismo generalizado es un isotopismo parcial, como subfamilia de sí mismo.

a) Todo multigrupoide $(G,\circ)$ es una isotopía generalizada de sí mismo, sin más que tomar el isotopismo generalizado $\{(Id_G,Id_G,Id_G)\}$, siendo Id_G la aplicación identidad en G.

b) Sea $(G, \circ)$ un multigrupoide isotópico generalizado a un multigrupoide del mismo orden $(H, \cdot)$, a partir de un isotopismo generalizado $\left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$. Fijamos una terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{F}$. Resulta entonces que $(H, \cdot)$ es una isotopía generalizada de $(G, \circ)$ a partir del isotopismo generalizado (α, β, γ). En particular, $(G, \circ)$ $(H, \cdot)$ es una isotopía generalizada de $(H, \cdot)$ a partir del isotopismo generalizado $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$

c) Sea $(G_2, \star)$ un multigrupoide isotópico generalizado a un multigrupoide $(G_1, \cdot)$ a partir de un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}_{\cdot} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi_{\cdot}(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$ y sea $(G_3, *)$ un multigrupoide isotópico generalizado a $(G_2, \star)$ a partir de un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}_{\star} = \left\{(\delta_s, \epsilon_t, \lambda_{\Phi_{\star}(s,t)})\right\}_{s\in S, t\in T}$. Sean $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{F}_{\cdot}$ y $(\delta, \epsilon, \lambda) \in \mathfrak{F}_{\star}$. Resulta entonces que $(G_3, *)$ es una isotopía generalizada de $(G_1, \cdot)$ a partir del isotopismo generalizado $\{(\delta_\circ\alpha, \epsilon_\circ\beta, \lambda_\circ\gamma)\}$, donde $_\circ$ denota la composición de aplicaciones.

$\square$

Proposición A.3.6. *Si $(G, \cdot)$ es un multigrupoide isotópico generalizado a un multigrupoide del mismo orden $(H, \circ)$, existe entonces un multigrupoide del mismo orden que $(G, \cdot)$, $(H, *)$, el cual, siendo isomorfo a $(G, \cdot)$ es a su vez isotópico generalizado principal a $(H, \circ)$.*

Demostración.

Sea $(G, \circ)$ un multigrupoide isotópico generalizado a $(G, \cdot)$ por un isotopismo generalizado $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$. Fijamos una terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{F}$ y definimos para todos los elementos de G la operación binaria $*$ como:

$$a * b = \alpha_\circ\gamma^{-1}(a) \circ \beta_\circ\gamma^{-1}(b),$$

para todos $a, b \in G$.

Resulta entonces que $(H, \circ)$ es una isotopía generalizada principal de $(H, *)$ por $\{(\alpha_\circ\gamma^{-1}, \beta_\circ\gamma^{-1}, Id_G)\}$. Se cumple además que:

$$\gamma(a) * \gamma(b) = \alpha(a) \circ \beta(b) = \gamma(a \cdot b),$$

para todos $a, b \in G$, con lo cual, $(G, *)$ es isomorfo generalizado a $(G, \cdot)$. $\square$

Es interesante estudiar el levantamiento isotópico de un subconjunto de un multigrupoide dado. Para ello damos la siguiente definición previa:

Definición A.3.7. *Un* submultigrupoide *de un multigrupoide* $(G, \circ)$ *es un multigrupoide* $(H, *)$, *tal que* H *es un subconjunto de* G *y, para todos* $a, b \in H$, *se verifica que* $a * b \subseteq a \circ b$.

Es inmediato entonces el siguiente resultado:

Proposición A.3.8. *Sean* $(G, \cdot)$ *y* $(H, \circ)$ *dos multigrupoides del mismo orden. Fijada una subfamilia isotópica* $\mathcal{F}$ *de una familia isotópica* $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i \in I, j \in J}$ *de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$ *y fijado un subconjunto* Q *de* G *se cumple que, para todos* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \widehat{Q}^{\mathcal{F}}$:

$$\mathfrak{a} \widehat{\cdot} \mathfrak{b} = \bigcup_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{F} \\ a, b \in Q \,:\, \alpha(a) = \mathfrak{a}, \beta(b) = \mathfrak{b}}} \gamma(a \cdot b).$$

En caso de que $(Q, \cdot)$ *sea un submultigrupoide de* $(G, \cdot)$, *se verifica que* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}})$ *es un multigrupoide si y sólo si:*

(1) Se cumple que:

i) $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}_I = \widehat{Q}^{\mathcal{F}}_J = \widehat{Q}^{\mathcal{F}} \supseteq \widehat{Q}^{\mathcal{F}}_K$,

ii) $\forall (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \widehat{Q}^{\mathcal{F}} \times \widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}, (a, b) \in Q \times Q$, *tales que* $\alpha(a) = \mathfrak{a}, \beta(b) = \mathfrak{b}$,

En este caso se dirá que $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}})$ *es el* isomultigrupoide asociado a $(Q, \cdot)$ por $\mathcal{F}$.

$\square$

Corolario A.3.9. *En las condiciones de la proposición anterior, si se toma* $Q = G$, *se verifica entonces que* $\widehat{G}^{\mathcal{F}} = H$ *y que el levantado isotópico* $(\widehat{G}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}})$ *de* $(G, \cdot)$ *por* $\mathcal{F}$ *es un multigrupoide. De hecho,* $(\widehat{G}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}}) = (H, \circ)$. $\square$

Definición A.3.10. *Sean* $(G, \cdot)$ *y* $(H, \circ)$ *dos multigrupoides del mismo orden,* $\mathfrak{F}_1$ *y* $\mathfrak{F}_2$ *dos familias isotópicas de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$ *y* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *dos subfamilias isotópicas de* $\mathfrak{F}_1$ *y* $\mathfrak{F}_2$, *respectivamente. Sea* $(Q, \cdot)$ *un submultigrupoide de* $(G, \cdot)$. *Se dirá que* $\mathcal{F}_1$ *es* Q-equivalente a $\mathcal{F}_2$, *si* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_1}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_1}) = (\widehat{Q}^{\mathcal{F}_2}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_2})$. *En caso de ser* $Q = G$, *se dirán* equivalentes.

Es inmediato comprobar el siguiente resultado:

Proposición A.3.11. *Se verifica que:*

a) La relación de ser subfamilias isotópicas Q-equivalentes es de equivalencia.

b) Dada una familia isotópica $\mathfrak{F}_1$ que relaciona dos multigrupoides del mismo orden $(G,\cdot)$ y $(H,\circ)$, toda subfamilia isotópica de $\mathfrak{F}_1$ es equivalente a $\mathfrak{F}_1$. $\square$

Corolario A.3.12. *Dados dos multigrupoides del mismo orden cualesquiera, existe un isotopismo generalizado entre ambos si y sólo si existe un isotopismo clásico entre ellos.* $\square$

Definición A.3.13. *Sean $(Q,\cdot)$ y $(R,\circ)$ dos multigrupoides y sea $n \in \mathbb{N}$. Se dirá que $(Q,\cdot)$ y $(R,\circ)$ son* isotópicos generalizados de orden n *o* g_n-isotópicos *o que $(Q,\cdot)$ es* g_n-isotópico a $(R,\circ)$ *y se notará $(Q,\cdot) \sim_n (R,\circ)$, si se verifican las siguientes condiciones:*

a) Existen dos submultigrupoides $(Q_1,*_1)$ y $(Q_n,*_n)$ de dos multigrupoides del mismo orden $(M_1,*_1)$ y $(M_n,*_n)$, respectivamente, tales que existe un isotopismo clásico entre $(Q,\cdot)$ y $(Q_1,*_1)$ y existe un isotopismo clásico entre $(R,\circ)$ y $(Q_n,*_n)$.

b) Existen $2n-4$ multigrupoides $(M_2,*_2),(M_2',*_2'),...,(M_{n-1},*_{n-1}),(M_{n-1}',*_{n-1}')$, tales que:

b.1) $(M_1,*_1)$ y $(M_2,*_2)$ son del mismo orden, existiendo un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}_1$ entre ellos,

b.2) Para todo $i \in \{2,...,n-1\}$, los multigrupoides $(M_i',*_i')$ y $(M_{i+1},*_{i+1})$ son del mismo orden, existiendo un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}_i$ entre ellos.

c) Para todo $i \in \{2,...,n-1\}$ existe un multigrupoide $(Q_i,\star_i)$ que es submultigrupoide tanto de $(M_i,*_i)$ como de $(M_i',*_i')$, de tal forma que, tomando ahora $j \in \{2,...,n\}$, existe una subfamilia isotópica $\digamma_{j-1}$ de $\mathfrak{F}_{j-1}$, tal que, fijados $x,y \in Q_j$:

c.1) Existen $a,b \in Q_{j-1}$ y $(\alpha,\beta,\gamma) \in \digamma_{j-1}$, tales que $\alpha(a)=x$ y $\beta(b)=y$, *c.2) Fijados $a, b \in Q_{j-1}$ y $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}_{j-1}$, tales que $\alpha(a) = x$ y $\beta(b) = y$, se verifica entonces que $\gamma(a \star_{j-1} b) = x \star_j y$.*

*En general, dos multigrupoides $(Q, \cdot)$ y $(R, \circ)$ se dirán g-*isotópicos *y se notará $(Q, \cdot) \sim (R, \circ)$, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que sean g_n-isotópicos.*

Proposición A.3.14. *Se verifica que:*

a) Si $(Q, \cdot) \sim_n (R, \circ)$, entonces $(Q, \cdot) \sim_k (R, \circ)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, siendo $k \geq n$.

b) Si $(Q, \cdot) \sim_m (R, \circ) \sim_n (S, \star)$, entonces $(Q, \cdot) \sim_{m+n-1} (S, \star)$.

c) La relación de ser multigrupoides g_n-isotópicos es reflexiva y simétrica. La relación de ser g-isotópicos es de equivalencia.

d) Dos multigrupoides del mismo orden $(Q, \cdot)$ y $(R, \circ)$ son g_2-isotópicos si y sólo si existe un isotopismo clásico entre ellos.

e) Si $(Q, \cdot) \sim_2 (R, \circ) \sim_n (S, \star)$, siendo Q y R del mismo orden, entonces $(Q, \cdot) \sim_n (S, \star)$.

Demostración

a) Basta tomar uno de los multigrupoides asociados a la cadena de isotopismos correspondiente y considerar a continuación el isotopismo identidad tantas veces como sea necesario.

b) Basta considerar las dos cadenas de multigrupoides asociadas.

c) La propiedad reflexiva es inmediata en ambos casos, bastando tomar el isotopismo identidad. La transitividad es inmediata por el apartado (b) en el caso de ser multigrupoides g-isotópicos. Finalmente, para ver la propiedad simétrica, basta restringirnos al caso de ser multigrupoides g_2-isotópicos. Para ello, supongamos que un multigrupoide $(Q, \cdot)$ es g_2-isotópico a un multigrupoide $(R, \circ)$. Existen entonces dos multigrupoides del mismo orden $(G, *_1)$ y $(H, *_2)$ y dos submultigrupoides $(Q', \star_1)$ y $(R', \star_2)$ de $(G, *_1)$ y $(H, *_2)$, respectivamente, que son a su vez isotópicos clásicos a $(Q, \cdot)$ y $(R, \circ)$, respectivamente. Existe además un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}$ de $(G, *_1)$ en $(H, *_2)$ y una subfamilia isotópica $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{F}$, que verifica las condiciones de la Definición A.3.13.

Basta tomar entonces la familia isotópica $\mathfrak{F}' = \{\{(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})\}_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathfrak{F}}$ de $(H, \circ)$ en $(G, \cdot)$ y la subfamilia isotópica $\mathcal{F}' = \{(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})\}_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{F}}$ de $\mathfrak{F}'$, para comprobar que $(R, \circ)$ es g_2-isotópico a $(Q, \cdot)$.

d) La condición suficiente es inmediata, bastando considerar el isotopismo clásico que relaciona ambos multigrupoides como isotopismo generalizado. Para ver la condición necesaria, supongamos que $(Q, \cdot)$ y $(R, \circ)$ son multigrupoides g_2-isotópicos, siendo isotópicos clásicos a dos submultigrupoides $(Q', \star_1)$ y $(R', \star_2)$, de dos multigrupoides del mismo orden $(M_1, *_1)$ y $(M_2, *_2)$, que son a su vez isotópicos generalizados, a partir de un isotopismo generalizado $\mathfrak{F}$. Sea $\mathcal{F}$ la subfamilia isotópica de $\mathfrak{F}$ que verifica las condiciones de la Definición A.3.13. Se verifica entonces que cualquier terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}$ es un isotopismo clásico de $(Q', \star_1)$ en $(R', \star_2)$, existiendo por tanto, debido a la propiedad transitiva en los isotopismos clásicos, un isotopismo clásico de $(Q, \cdot)$ en $(R, \circ)$.

e) El resultado es inmediato atendiendo al apartado anterior y teniendo en cuenta la transitividad del isotopismo clásico.

□

En particular, para multigrupoides del mismo orden, los conceptos de isotopismo clásico, isotopismo generalizado y g_2-isotopismo son equivalentes.

Proposición A.3.15. *Todo cuasigrupo entrópico de orden finito es g_2-isotópico a cualquiera de sus subcuasigrupos.*

Demostración

Supongamos que $(M, \cdot)$ es un cuasigrupo entrópico de orden finito y sea $(Q, \cdot)$ un subcuasigrupo $(Q, \cdot)$. Definamos entonces para cada $m \in M$, las aplicaciones $\alpha_m : M \times M \to M$, tales que $\alpha_m(x) = m \cdot x$, para todo $x \in M$. Puede comprobarse que $\mathfrak{F} = \{(\alpha_m, \alpha_n, \alpha_{m\cdot n})\}_{m,n\in M}$ es una familia isotópica de $(M, \cdot)$ en $(M, \cdot)$, pues, fijados $x, y, m, n \in M$, resulta que:

$$\alpha_m(x) \cdot \alpha_n(y) = (m \cdot x) \cdot (n \cdot y) = (m \cdot n) \cdot (x \cdot y) = \alpha_{m\cdot n}(x \cdot y).$$

Se comprueba además que $(\widehat{Q}^{\mathfrak{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathfrak{F}}) = (M, \cdot)$, con lo cual tenemos finalmente que $(M, \cdot)$ y $(Q, \cdot)$ son g_2-isotópicos. □

Corolario A.3.16. *Todo par de cuasigrupos entrópicos normalizados son g_3-isotópicos entre sí. En particular, todo par de grupos abelianos de orden finito son g_3-isotópicos entre sí.*

Demostración

Dado que todo grupo abeliano es un cuasigrupo entrópico, basta tener en cuenta que si $(Q,\cdot)$ y $(R,\circ)$ son dos cuasigrupos entrópicos normalizados, entonces $(Q,\cdot) \sim_2 (\{x\},*) \sim_2 (R,\circ)$, siendo $x * x = x$. □

Un ejemplo que prueba que la construcción dada en la demostración de la Proposición A.3.15 no relaciona el grupo unitario $(\{0\},*)$ con cualquier cuasigrupo es el siguiente:

Ejemplo A.3.17. *Consideremos el cuasigrupo $(Q,\cdot)$ de orden 5 cuya tabla de Cayley es la siguiente:*

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	0	4	2
2	2	4	3	1	0
3	3	0	4	2	1
4	4	2	1	0	3

Siguiendo la notación de la demostración de la Proposición A.3.15, resulta que:

$$\alpha_4(2) \cdot \alpha_3(3) = 1 \cdot 2 = 0 \neq 1 = 0 \cdot 1 = \alpha_0(1) = \alpha_{4\cdot 3}(2 \cdot 3).$$

◁

Atendiendo a la estructura algebraica del levantado isotópico de un subconjunto de un multigrupoide, damos la siguiente:

Definición A.3.18. *Sean $(G,\cdot)$ y $(H,\circ)$ dos multigrupoides del mismo orden. Fijada una subfamilia isotópica $\mathcal{F}$ de una familia isotópica $\mathfrak{F}$ de $(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$ y fijado un submultigrupoide $(Q,\cdot)$ de $(G,\cdot)$, en caso de que tanto $(Q,\cdot)$ como su levantado isotópico $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ por $\mathcal{F}$, sean ambos grupoides (cuasigrupos, loops, semigrupos,* *monoides o grupos, resp.), el último se llamará* isogrupoide, isocuasigrupo, isoloop, isosemigrupo, isomonoide o isogrupo, resp.) asociado a $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}$.

Proposición A.3.19. *Sean* $(G,\cdot)$ *y* $(H,\circ)$ *dos multigrupoides del mismo orden. Fijada una subfamilia isotópica* $\mathcal{F}$ *de una familia isotópica* $\mathfrak{F}$ *de* $(G,\cdot)$ *en* $(H,\circ)$ *y fijado un submultigrupoide* $(Q,\cdot)$ *de* $(G,\cdot)$*, se cumple que:*

a) El levantado isotópico $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ *de* $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}$ *será un grupoide si y sólo si se verifican (1) y:*

(2) Fijado $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\in\widehat{Q}\times\widehat{Q}$ *resulta que, para todos* $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\in\mathcal{F}$*, tales que existen* $(a,b),(x,y)\in Q\times Q$*, tales que* $\alpha_1(a)=\alpha_2(x)=\mathfrak{a},\beta_1(b)=\beta_2(y)=\mathfrak{b}$*, se tiene que* $\gamma_1(a\cdot b)=\gamma_2(x\cdot y)$.

b) El levantado isotópico $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ *será un grupoide conmutativo si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(3) Para todos $x,y\in Q$*, se verifica que* $\gamma_2(s\cdot t)=\gamma_1(x\cdot y)$*, para todos* $s,t\in Q$*,* $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\in\mathcal{F}$*, tales que* $\alpha_2(s)=\beta_1(y)$ *y* $\beta_2(t)=\alpha_1(x)$.

c) El levantado isotópico $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ *será un semigrupo si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(4) $\gamma_2(\alpha_2^{-1}(\gamma_1(a\cdot b))\cdot c)=\gamma_4(x\cdot\beta_4^{-1}(\gamma_3(y\cdot z)))$*, para todos* $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$*, con* $i\in\{1,2,3,4\}$*,* $a,b,c,x,y,z\in Q$*, tales que:*

i) $\alpha_1(a)=\alpha_4(x)=\mathfrak{a},\beta_1(b)=\alpha_3(y)=\mathfrak{b},\beta_2(c)=\beta_3(z)=\mathfrak{c}$,

ii) $\alpha_2^{-1}(\gamma_1(a\cdot b)),\beta_4^{-1}(\gamma_3(y\cdot z))\in Q$.

d) El levantado isotópico $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ *será un cuasigrupo si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(5) Para todo $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\in\widehat{Q}\times\widehat{Q}$*, existen* $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\in\mathcal{F}$ *y* (a_1,x_1)*,* (a_2,x_2)*,* $\in Q\times Q$*, tales que:*

i) $\alpha_1(a_1)=\beta_2(a_2)=\mathfrak{a}$,

ii) $\gamma_1(a_1\cdot x_1)=\gamma_2(x_2\cdot a_2)=\mathfrak{b}$,

iii) si existen $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3),(\alpha_4,\beta_4,\gamma_4)\in\mathcal{F}$ *y* $(a_3,x_3),(a_4,x_4)\in Q\times Q$*, verificando condiciones análogas a (i) y (ii), debe cumplirse que* $\beta_1(x_1)$ $=\beta_3(x_3)$ *y* $\alpha_2(x_2)=\alpha_4(x_4)$.

e) El levantado isotópico $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot})$ *será un grupoide dotado de unidad a derecha* $\mathfrak{e}_\rho \in \widehat{Q}$ *respecto a* $\widehat{\cdot}$ *si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(6_ρ) *Fijado* $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}$*, se cumple que, para todo* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \digamma$*, tal que* $\alpha^{-1}(\mathfrak{a})$, $\beta^{-1}(\mathfrak{e}_\rho) \in Q$*, debe ser* $\gamma(\alpha^{-1}(\mathfrak{a}) \cdot \beta^{-1}(\mathfrak{e}_\rho)) = \mathfrak{a}$.

f) El levantado isotópico $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot})$ *será un grupoide dotado de unidad a izquierda* $\mathfrak{e}_\lambda \in \widehat{Q}$ *respecto a* $\widehat{\cdot}$ *si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(6_λ) *Fijado* $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}$*, se cumple que, para todo* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \digamma$*, tal que* $\alpha^{-1}(\mathfrak{e}_\lambda)$, $\beta^{-1}(\mathfrak{a}) \in Q$*, debe ser* $\gamma(\alpha^{-1}(\mathfrak{e}_\lambda) \cdot \beta^{-1}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$.

e) El levantado isotópico $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot})$ *tendrá unidad* $\mathfrak{e} \in \widehat{Q}$ *respecto a* $\widehat{\cdot}$ *si y sólo si se verifican (1), (2) y:*

(6) Se verifican (6_ρ) *y* (6_λ) *y se cumple que* $\mathfrak{e}_\rho = \mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}$.

□

Corolario A.3.20. *Sean* $(G, \cdot)$ *y* $(H, \circ)$ *dos multigrupoides del mismo orden. Fijada una subfamilia isotópica* $\digamma$ *de una familia isotópica* $\mathfrak{F}$ *de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$ *y fijado un submultigrupoide* $(Q, \cdot)$ *de* $(G, \cdot)$*, se cumple que, en caso de que* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{\cdot}^{\digamma})$ *sea un isogrupoide (isocuasigrupo, isoloop, isosemigrupo, isomonoide o isogrupo, resp.), la subfamilia* $\digamma$ *será de hecho un isotopismo parcial de* $(Q, \cdot)$ *en* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{\cdot}^{\digamma})$. □

Veamos algunos ejemplos de isogrupoides que no tienen porqué tener el mismo número de elementos que los grupoides a los que están asociados:

Ejemplo A.3.21. *Sea* $G = \{a, b\}$ *un grupoide dotado de la operación binaria* $\cdot$*, definida a partir de la tabla de Cayley es la siguiente:*

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	a

Definimos la aplicación $\alpha : G \to G$*, tal que* $\alpha(a) = b$ *y* $\alpha(b) = a$ *y consideramos el siguiente isotopismo generalizado de* $(G, \cdot)$ *en* $(G, \cdot)$*:*

$$\mathfrak{F} = \{(Id_G, Id_G, Id_G), (\alpha, \alpha, Id_G), (Id_G, \alpha, \alpha), (\alpha, Id_G, \alpha)\}.$$

Siguiendo las notaciones de la Definición A.3.4, el isotopismo $\mathfrak{F}$ *está asociado a:*

a) *Los conjuntos de índices* $I = J = K = \{1, 2\}$.

b) *La aplicación sobreyectiva* $\Phi : I \times J \to K$, *tal que:*

$$\Phi(1, 1) = 1, \Phi(1, 2) = 2, \Phi(2, 1) = 2, \Phi(2, 2) = 1.$$

c) *Las biyecciones* $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = Id_G$ *y* $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \alpha$.

d) *Las familias* $\mathfrak{A} = \{Id_G, \alpha\} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$.

En particular, $\mathfrak{F}$ *es un isotopismo generalizado simple, de isounidad* $\widehat{I} : G \times I \to G$, *tal que* $\widehat{I}(a, 1) = \widehat{I}(b, 2) = a$ *e* $\widehat{I}(b, 1) = \widehat{I}(a, 2) = b$.

Por otra parte, se puede comprobar que $(\widehat{G}, \widehat{\cdot}) = (G, \cdot)$.

Tomando ahora $Q = \{a\}$, *resulta que* $(Q, \cdot)$ *es un subgrupoide de* $(G, \cdot)$. *El conjunto isotópico asociado a* Q *por* $\mathfrak{F}$ *sería* $\widehat{Q} = G$ *y se comprueba que* $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot}) = (G, \cdot)$, *que es por tanto un isogrupoide asociado a* $(Q, \cdot)$ *por* $\mathfrak{F}$.

$\lhd$

Ejemplo A.3.22. *Sea* $G = \{a, b, c, d\}$ *un grupoide dotado de la operación binaria* $\cdot$, *definida a partir de la tabla de multiplicación siguiente:*

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Definimos la aplicación $\alpha : G \to G$, *tal que* $\alpha(a) = c, \alpha(b) = d, \alpha(c) = a$ *y* $\alpha(d) = b$ *y consideramos el siguiente isotopismo generalizado simple de* $(G, \cdot)$ *en* $(G, \cdot)$:

$$\mathfrak{F} = \{(Id_G, Id_G, Id_G), (\alpha, \alpha, Id_G), (Id_G, \alpha, \alpha), (\alpha, Id_G, \alpha)\}.$$

Se obtienen entonces el levantado isotópico por $\mathfrak{F}$, $(\widehat{G}, \widehat{\cdot}) = (G, \cdot)$. *Por otra parte, tomando ahora* $Q = \{a, b\}$, *resulta que* $(Q, \cdot)$ *es un subgrupoide de* $(G, \cdot)$. *Se puede comprobar entonces que el levantado isotópico por* $\mathfrak{F}$ *de* $(Q, \cdot)$ *es el isogrupoide* $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot}) = (G, \cdot)$. $\lhd$

Ejemplo A.3.23. *Consideremos el grupoide* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4, \times)$, *donde* $\times$ *es el producto usual en el anillo cociente* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4, +, \times)$. *Tomemos los conjuntos de índices* $I = J = K = \{1, 3\}$ *y la aplicación sobreyectiva* Φ *de* $I \times J$ *en* K, *tal que* $\Phi(i, j) = i \times j (mod\ 4)$. *Para cada* $t \in \{1, 3\}$, *consideremos la aplicación* $\alpha_t : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$, *tal que* $\alpha_t(x) = x \times t\ (mod\ 4)$, *para todo* $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Resulta entonces que la familia $\mathfrak{F} = \{(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_{i \times j (mod\ 4)})\}_{i \in I, j \in J}$ *es un isotopismo generalizado simple de* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4, \times)$ *en sí mismo, tal que el levantado isotópico por* $\mathfrak{F}$ *del subgrupoide* $(\{0, 1, 2\}, \times)$ *de* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4, \times)$, *coincide con* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4, \times)$. *La isounidad de* $\mathfrak{F}$ *es* $\widehat{I} : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4 \times I \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$, *tal que* $\widehat{I}(x, t) = x \times t\ (mod\ 4)$, *para todos* $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $t \in \{1, 3\}$. $\lhd$

El concepto de isotopismo generalizado se extiende de forma conveniente a pares de estructuras algebraicas dotadas ambas de n operaciones, siendo $n > 1$, sin más que considerar isotopismos generalizados para cada par de operaciones. Veamos este hecho para $n = 2$, siendo análogas las definiciones para $n > 2$:

Definición A.3.24. *Sean* $(G, \cdot)$, $(G, *)$, $(H, \circ)$ *y* $(H, \star)$ *multigrupoides del mismo orden,* $\mathfrak{F}_{\cdot}$ *una familia isotópica de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$ *y* $\mathfrak{F}_*$ *una familia isotópica de* $(G, *)$ *en* $(H, \star)$. *La familia* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\cdot} \times \mathfrak{F}_*$ *se llamará* familia isotópica de $(G, \cdot, *)$ *en* $(H, \circ, \star)$.

Sean ahora $\mathcal{F}_{\cdot}$ *y* $\mathcal{F}_*$ *subfamilias isotópicas de* $\mathfrak{F}_{\cdot}$ *y* $\mathfrak{F}_*$, *respectivamente. Se dirá que* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\cdot} \times \mathcal{F}_*$ *es una* subfamilia isotópica de $\mathfrak{F}$. *Por otra parte, se dirá que* $\mathcal{F}$ *es un* isotopismo parcial de $(G, \cdot, *)$ en $(H, \circ, \star)$, *si* $\mathcal{F}_{\cdot}$ *es un isotopismo parcial de* $(G, \cdot)$ *en* $(H, \circ)$ *y* $\mathcal{F}_*$ *es un isotopismo parcial de* $(G, *)$ *en* $(H, \circ)$. *Se dirá entonces que* $(G, \cdot, *)$ *es* isotópico parcial a $(H, \circ, \star)$ por $\mathcal{F}$ *o que* $(H, \circ, \star)$ *es* una isotopía parcial de $(G, \cdot, *)$ por $\mathcal{F}$.

De forma análoga se definen los conceptos de isotopismo parcial principal, isomorfismo parcial, isotopismo generalizado, isotopismo generalizado principal *o* isomorfismo generalizado de $(G, \cdot, *)$ en $(H, \circ, \star)$. *En caso de que* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\cdot} \times \mathfrak{F}_*$ *sea un* *isotopismo generalizado de* $(G,\cdot,*)$ *en* $(H,\circ,\star)$*, se dirá que* $(G,\cdot,*)$ *es es* isotópico generalizado a $(H,\circ,\star)$ por $\mathfrak{F}$ *o que* $(H,\circ,\star)$ *es* una isotopía generalizada de $(G,\cdot,*)$ por $\mathfrak{F}$.

Fijado un subconjunto $Q \subseteq G$ *se llamará* conjunto isotópico asociado a $(Q,\cdot,*)$ *por* $\mathcal{F}$ *a la unión del conjunto isotópico* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}_\cdot}$ *asociado a* Q *por* $\mathcal{F}_\cdot$ *y del conjunto isotópico* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}_*}$ *asociado a* Q *por* $\mathcal{F}_*$*. Se notará* $\widehat{Q} = \widehat{Q}^{\mathcal{F}_\cdot} \cup \widehat{Q}^{\mathcal{F}_*}$ *a dicho conjunto isotópico.*

Por otra parte, se llamará levantado isotópico de $(Q,\cdot,*)$ *a la terna* $(\widehat{Q},\widehat{\cdot},\widehat{*})$*, donde* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_\cdot},\widehat{\cdot})$ *es el levantado isotópico de* $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}_\cdot$ *y* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_*},\widehat{*})$ *es el levantado isotópico de* $(Q,*)$ *por* $\mathcal{F}_*$*. Se dirá entonces que* $\mathcal{F}$ *es un* levantamiento isotópico de $(Q,\cdot,*)$ *en* $(\widehat{Q},\widehat{\cdot},\widehat{*})$.

Atendiendo a la definición anterior se observa que la relación de isotopía generalizada entre dos multigrupoides del mismo orden dotados ambos del mismo número de operaciones binarias será una relación de equivalencia, por serlo la relación de isotopía generalizada entre dos multigrupoides del mismo orden. Por otra parte, teniendo en cuenta el Corolario A.3.9 es inmediato comprobar el siguiente:

Corolario A.3.25. *Sean* $(G,\cdot)$*,* $(G,*)$*,* $(H,\circ)$ *y* $(H,\star)$ *multigrupoides del mismo orden,* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\cdot \times \mathfrak{F}_*$ *una familia isotópica de* $(G,\cdot,*)$ *en* $(H,\circ,\star)$ *y* $\mathcal{F}$ *una subfamilia isotópica de* $\mathfrak{F}$*. Se verifica entonces que el levantado isotópico de* $(G,\cdot,\circ)$ *es* $(\widehat{G},\widehat{\cdot},\widehat{*}) = (H,\circ,\star)$. □

Atendiendo ahora a la estructura algebraica del levantado isotópico de un subconjunto de un multigrupoide, damos la siguiente:

Definición A.3.26. *Sean* $(G,\cdot)$*,* $(G,*)$*,* $(H,\circ)$ *y* $(H,\star)$ *multigrupoides,* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\cdot \times \mathfrak{F}_*$ *una familia isotópica de* $(G,\cdot,*)$ *en* $(H,\circ,\star)$ *y* $\mathcal{F}$ *una subfamilia isotópica de* $\mathfrak{F}$*. Sea* Q *un subconjunto de* G*. En caso de que tanto* $(Q,\cdot,*)$ *como su levantado isotópico por* $\mathcal{F}$ *sean ambos anillos (cuerpos, resp.), el segundo se llamará* isoanillo *(*isocuerpo*, resp.) asociado a* $(Q,\cdot,*)$ *por* $\mathcal{F}$.

Proposición A.3.27. *Sean* $(G,\cdot)$*,* $(G,*)$*,* $(H,\circ)$ *y* $(H,\star)$ *multigrupoides,* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\cdot \times \mathfrak{F}_*$ *una familia isotópica de* $(G,\cdot,*)$ *en* $(H,\circ,\star)$ *y* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\cdot \times \mathcal{F}_*$ *una subfamilia isotópica de* $\mathfrak{F}$*. Sean* Q *un subconjunto de* G*. Se cumple entonces que:*

a) *El levantado isotópico* $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot}, \widehat{*})$ *de* $(Q, \cdot, *)$ *por* $\mathcal{F}$ *será un anillo si y sólo si:*

a.1) *El isotopismo* $\mathcal{F}_{\cdot}$ *verifica las condiciones (1), (2),(3), (4) y (5).*

a.2) *El isotopismo* $\mathcal{F}_{*}$ *verifica las condiciones (1),(2),(4) y (6).*

a.3) *Fijado* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \in \widehat{Q} \times \widehat{Q} \times \widehat{Q}$, *se verifica la siguiente condición (7):*

a.3.a) *Existen* $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{F}_{\cdot}$, *con* $i \in \{1, 5\}$, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{F}_{*}$, *con* $i \in \{2, 3, 4\}$ *y* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2 \in Q$, *tales que:*

i) $\alpha_2(a_1) = \alpha_3(a_2) = \alpha_4(a_3) = \mathfrak{a}, \alpha_1(b_1) = \beta_3(b_2) = \mathfrak{b}, \beta_1(c_1) = \beta_4(c_2) = \mathfrak{c}$,

ii) $\beta_2^{-1}(\gamma_1(b_1 \cdot c_1)), \alpha_5^{-1}(\gamma_3(a_2 * b_2)), \beta_5^{-1}(\gamma_4(a_3 * c_2)) \in Q$,

iii) $\gamma_2(a_1 * \beta_2^{-1}(\gamma_1(b_1 \cdot c_1))) = \gamma_5(\alpha_5^{-1}(\gamma_3(a_2 * b_2) \cdot \beta_5^{-1}(\gamma_4(a_3 * c_2))))$.

a.3.b) *Existen* $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{F}_{\cdot}$, *con* $i \in \{1, 5\}$, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{F}_{*}$, *con* $i \in \{2, 3, 4\}$ *y* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 \in Q$, *tales que:*

i) $\alpha_1(a_1) = \alpha_3(a_2) = \mathfrak{a}, \beta_1(b_1) = \alpha_4(b_2) = \mathfrak{b}, \beta_2(c_1) = \beta_3(c_2) = \beta_4(c_3) = \mathfrak{c}$,

ii) $\alpha_2^{-1}(\gamma_1(a_1 \cdot b_1)), \alpha_5^{-1}(\gamma_3(a_2 * b_2)), \beta_5^{-1}(\gamma_4(a_3 * c_2)) \in Q$,

iii) $\gamma_2(\alpha_2^{-1}(\gamma_1(a_1 \cdot b_1)) * c_1) = \gamma_5(\alpha_5^{-1}(\gamma_3(a_2 * c_2) \cdot \beta_5^{-1}(\gamma_4(b_2 * c_3))))$.

b) *El levantado isotópico* $(\widehat{Q}, \widehat{\cdot}, \widehat{*})$ *de* $(Q, \cdot, *)$ *por* $\mathcal{F}$ *será un cuerpo si y sólo si se verifica (7) y los isotopismos* $\mathcal{F}_{\cdot}$ *y* $\mathcal{F}_{*}$ *verifican ambos las condiciones (1), (2),(3), (4) y (5).*

$\square$

Ejemplo A.3.28. *Consideremos el cuerpo* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3, +, \times)$. *Tomamos* $I = J = K = \{0, 1, 2\}$ *y* $S = T = U = \{1, 2\}$ *como conjuntos de índices y las aplicaciones sobreyectivas* $\Phi_+ : I \times J \to K$ *y* $\Phi_\times : S \times T \to U$, *definidas como:*

$$\Phi_+(i, j) = i + j(mod\ 3), \qquad \Phi_\times(s, t) = s \times t(mod\ 3).$$

Consideremos entonces el isotopismo generalizado simple $\mathfrak{F}_+$ *de* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3, +)$ *en sí mismo, de aplicación isotópica* Φ_+ *e isounidad* $\widehat{I}_+ : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 \times I \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, *tal que* $\widehat{I}_+(x, t) = x + t\ (mod\ 3)$. *Tomemos además el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_\times$ *de* $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3, \times)$ *en sí mismo, de aplicación isotópica* $\Phi_\times$ *e isounidad* $\widehat{I}_\times : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 \times I \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, *tal que* $\widehat{I}_\times(x, t) = x \times t(mod\ 3)$. *En particular,* $(\widehat{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3, +, \times)$ *es un isocuerpo asociado a sí mismo por* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$. $\triangleleft$

Ejemplo A.3.29. *Consideremos el cuerpo* $(\mathbb{R}^2, +, \times)$, *donde:*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (a,b)\times(c,d)=(a\times c, b\times d),$$

para todos $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Tomamos $I=J=K=\mathbb{R}$ *y* $S=T=U=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *como conjuntos de índices y las aplicaciones sobreyectivas* $\Phi_+ : I\times J \to K$ *y* $\Phi_\times : S\times T \to U$, *definidas como:*

$$\Phi_+(i,j)=i+j, \qquad \Phi_\times(s,t)=s\times t.$$

Sea ahora $\mathfrak{F}_+$ *el isotopismo generalizado simple de* $(\mathbb{R}^2,+)$ *en sí mismo, de aplicación isotópica* Φ_+ *e isounidad* $\widehat{I}_+ : \mathbb{R}^2\times I \to \mathbb{R}^2$, *tal que* $\widehat{I}_+((a,b),t)=(a,b+t)$. *Tomemos además el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_\times$ *de* $(\mathbb{R}^2,\times)$ *en sí mismo, de aplicación isotópica* $\Phi_\times$ *e isounidad* $\widehat{I}_\times : \mathbb{R}^2\times I \to \mathbb{R}^2$, *tal que* $\widehat{I}_\times((a,b),t)=(a,b\times t)$. *En particular,* $(\widehat{\mathbb{R}^2},\widehat{+},\widehat{\times})=(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *es un isocuerpo asociado a sí mismo por* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_+\times\mathfrak{F}_\times$. ◁

Isotopismo generalizado de Santilli

Definición A.3.30. *Sea* $(V,\circ_1,...,\circ_n)$ *una estructura algebraica cuyas operaciones son todas binarias. Sea* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\times...\times\mathfrak{F}_n$ *un isotopismo generalizado de* $(V,\circ_1,...,\circ_n)$ *en sí mismo, siendo* $\mathfrak{F}_l=\left\{(\alpha_i^l,\beta_j^l,\gamma_{\Phi(i,j)}^l)\right\}_{i\in I_l, j\in J_l}$, *para todo* $l\in\{1,...,n\}$. *La familia* $\mathfrak{F}$ *se dirá que es un* isotopismo generalizado de Santilli *de* $(V,\circ_1,...,\circ_n)$, *si existe una estructura algebraica* $(V,*_1,...,*_n)$, *tal que:*

a) *Todas sus operaciones son binarias.*

b) *Para todo* $l\in\{1,...,n\}$, *se cumple que para cada biyección* δ *perteneciente a una de las ternas del isotopismo* $\mathfrak{F}_l$, *podemos encontrar un elemento* $\widehat{I}_\delta\in V$ *tal que* $\delta(x)=x*_l\widehat{I}_\delta$, *para todo* $x\in V$.

En particular, debe verificarse que:

$$\left(a*_l\widehat{I}_{\alpha_i^l}\right)\circ_l\left(b*_l\widehat{I}_{\beta_j^l}\right)=(a\circ_l b)*_l\widehat{I}^l_{\Phi(i,j)},$$

para todos $a,b\in V, l\in\{1,...,n\}, i\in I_l, j\in J_l$.

A $(V, *_1, ..., *_n)$ *se le llamará* estructura general del isotopismo. *Para cada* $l \in \{1, ..., n\}$ *consideramos los conjuntos:*

$$\widehat{\mathfrak{I}}_l^{I_l} = \left\{\widehat{I}_{\alpha_i^l}\right\}_{i \in I_l}, \quad \widehat{\mathfrak{I}}_l^{J_l} = \left\{\widehat{I}_{\beta_j^l}\right\}_{j \in J_l} \quad \widehat{\mathfrak{I}}_l^{K_l} = \left\{\widehat{I}_{\gamma^l_{\Phi(i,j)}}\right\}_{i \in I_l, j \in J_l}$$

y definimos los conjuntos

$$\widehat{\mathfrak{I}}_l = \widehat{\mathfrak{I}}_l^{I_l} \bigcup \widehat{\mathfrak{I}}_l^{J_l} \bigcup \widehat{\mathfrak{I}}_l^{K_l}, \quad \widehat{\mathfrak{I}} = \widehat{\mathfrak{I}}_1 \bigcup ... \bigcup \widehat{\mathfrak{I}}_n.$$

El conjunto $\mathfrak{I} = \{*_1, ..., *_n\} \times \widehat{\mathfrak{I}}$ *se llamará* conjunto de los elementos de isotopía del isotopismo $\mathfrak{F}$ *respecto a* $(V, *_1, ..., *_n)$.

El isotopismo generalizado de Santilli $\mathfrak{F}$ *se dirá* compatible con respecto a $\circ_l$ *si se verifica que* $*_l \equiv \circ_l$. *Se dirá que es* compatible *si se verifica que* $*_l \equiv \circ_l$ *para todo* $l \in \{1, ..., n\}$.

Definición A.3.31. *Sea* $(V, \circ_1, ..., \circ_n)$ *una estructura algebraica cuyas operaciones son todas binarias. Un* isotopismo clásico de Santilli *será un isotopismo generalizado de Santilli en el que, para todo* $i \in \{1, ..., n\}$, *cada grupoide* $(V, *_i)$ *asociado a la estructura general del isotopismo es un monoide con unidad* $I_i \in V$, *tal que para todo* $l \in \{1, ..., n\}$, *se verifica que todo* $\widehat{I}_\delta \in \widehat{\mathfrak{I}}_l$ *es invertible en* V *con respecto a* $*_i$ *(notaremos* T_δ *a su inversa). El conjunto* $\widehat{\mathfrak{I}}$ *será llamado* isounidad de Santilli del isotopismo. *El conjunto* $\mathfrak{T}$ *de los elementos* T_δ *será llamado* elemento isotópico del isotopismo.

Como caso concreto, el isotopismo generalizado $\mathfrak{F}$ del Ejemplo A.3.21 es un isotopismo clásico de Santilli, donde $(G, \cdot)$ es la estructura general del isotopismo. Dado que para todo $x \in G$ se tiene que:

$$Id_G(x) = x \cdot a, \qquad \alpha(x) = x \cdot b,$$

el conjunto isounidad de Santilli del isotopismo será $\widehat{\mathfrak{I}} = G$, coincidiendo a su vez con el elemento isotópico del isotopismo.

Por su parte, el isotopismo generalizado $\mathfrak{F}$ del Ejemplo A.3.22 es también un isotopismo clásico de Santilli, donde $(G, \cdot)$ es la estructura general del isotopismo. En este caso, $\widehat{\mathfrak{I}} = \{a, c\} = \mathfrak{T}$.

A.3.2. Leyes de acción

Definición A.3.32. *Sean M, N, G y H cuatro conjuntos cualesquiera, $(m,g) \to m.g$ una acción de M sobre G y $(n,h) \to n \bullet h$ una acción de N sobre H. Sea $\mathfrak{F}$ una familia isotópica de $(M,G,G,.)$ en $(N,H,H,\bullet)$. Se dirá que $\mathfrak{F}$ es una* familia isotópica de *$(M,G,.)$ en $(N,H,\bullet)$. Por otra parte, se dirá que una subfamilia isotópica $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{F}$ es un* isotopismo parcial de *$(M,G,.)$ en $(N,H,\bullet)$, si lo es de $(M,G,G,.)$ en $(N,H,H,\bullet)$. Diremos entonces que $(M,G,.)$ es* isotópico parcial a *$(N,H,\bullet)$ por $\mathcal{F}$ o que $(N,H,\bullet)$ es una* isotopía parcial de *$(M,G,.)$ por $\mathcal{F}$. En particular:*

$$\gamma(m.g) = \alpha(m) \bullet \beta(g),$$

para todos $m \in M, g \in G, (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{F}$.

De forma análoga se definen los conceptos de isotopismo parcial principal, isomorfismo parcial, isotopismo generalizado, isotopismo generalizado principal *o* isomorfismo generalizado de $(M,G,.)$ en $(N,H,\bullet)$. *En caso de que $\mathfrak{F}$ sea un isotopismo generalizado de $(M,G,.)$ en $(N,H,\bullet)$, se dirá que $(M,G,.)$ es* isotópico generalizado a $(N,H,\bullet)$ *por $\mathfrak{F}$ o que $(N,H,\bullet)$ es* una isotopía generalizada de $(M,G,.)$ *por $\mathfrak{F}$.*

Definición A.3.33. *Sean dados:*

i) 6 multigrupoides del mismo orden $(G,\cdot)$, $(M,\star)$, $(M,\triangleright)$, $(H,\circ)$, $(N,*)$ y $(N,\triangleleft)$,

ii) Una familia isotópica $\mathfrak{F}_.$ de $(G,\cdot)$ en $(H,\circ)$ y una familia isotópica $\mathfrak{F}_\star \times \mathfrak{F}_\triangleright$ de $(M,\star,\triangleright)$ en $(N,*,\triangleleft)$,

iii) $(m,g) \to m.g$ y $(n,h) \to n \bullet h$, acciones de M sobre G y de N sobre H, respectivamente,

iv) $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i,\beta_j,\gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$ una familia isotópica de $(M,G,.)$ en $(N,H,\bullet)$,

v) $\mathcal{F}_\star, \mathcal{F}_\triangleright$ y $\mathcal{F}$, subfamilias isotópicas de $\mathfrak{F}_\star, \mathfrak{F}_\triangleright$ y $\mathfrak{F}$, respectivamente,

vi) A, un subconjunto de M y Q, un subconjunto de G.

Sean $(\widehat{A},\widehat{\star},\widehat{\triangleright})$ el levantado isotópico de $(A,\star,\triangleright)$ por $\mathfrak{F}_\star \times \mathfrak{F}_\triangleright$ y $(\widehat{Q},\widehat{\cdot})$ el levantado isotópico de $(Q,\cdot)$ por $\mathfrak{F}_.$. En el caso en que $\widehat{A}^{\mathcal{F}}_I = \widehat{A}$ y $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}_J = \widehat{Q}$, sea $\widehat{.}$ tal que $(\widehat{A \cup Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{.})$ sea el levantado isotópico de $(A \cup Q, .)$ por $\mathcal{F}$. Entonces, en caso de que $(\widehat{A},\widehat{\star},\widehat{\triangleright})$ sea un isoanillo, $(Q,\cdot,.)$ sea un $(A,\star,\triangleright)$-espacio vectorial y $(\widehat{Q},\widehat{\cdot},\widehat{.})$ sea un

$(\widehat{A}, \widehat{\star}, \widehat{\triangleright})$*-espacio vectorial, este último será llamado* isoespacio vectorial asociado a $(Q, \cdot, .)$ *por* $\mathfrak{F}_\star \times \mathfrak{F}_\triangleright \times \mathfrak{F}_. \times \mathfrak{F}$.

Ejemplo A.3.34. *Sea* $(K, +, \times)$ *un cuerpo con elemento unidad e respecto a* $\times$ *y sea* $(U, +_U, .)$ *un* $(K, +, \times)$*-espacio vectorial* n*-dimensional, con base* $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$*. Cada vector* $x \in U$ *podrá escribirse entonces de la forma* $\sum_{i=1}^n x_i.e_i$*, siendo* $x_i \in K$*, para todo* $i \in \{1, ..., n\}$ *y se identificará con* $(x_1, ..., x_n) \in K^n$*, de tal forma que, para todos* $x, y \in U$*,* $a \in K$*:*

$$x +_U y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \qquad a.x = (a \times x_1, ..., a \times x_n).$$

Seguidamente consideramos un isocuerpo $(\widehat{K}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *asociado al cuerpo* $(K, +, \times)$ *por un isotopismo generalizado* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$*, siendo:*

$$\mathfrak{F}_+ = \{(\alpha_{+i}, \beta_{+j}, \gamma_{+\Phi_+(i,j)})\}_{i \in I_+, j \in J_+}, \qquad \mathfrak{F}_\times = \{(\alpha_{\times i}, \beta_{\times j}, \gamma_{\times \Phi_\times(i,j)})\}_{i \in I_\times, j \in J_\times}.$$

Consideramos ahora los conjuntos de índices $I = I_+ \times ..._{n \text{ veces}} \times I_+$ *y* $J = J_+ \times ..._{n \text{ veces}} \times J_+$ *y la aplicación* $\Phi_{+_U} : I \times J \to \Phi_+(I_+ \times J_+) \times ..._{n \text{ veces}} \times \Phi_+(I_+ \times J_+)$*, tal que* $\Phi_{+_U}(i, j) = (\Phi_+(i_1, j_1), ..., \Phi_+(i_n, j_n))$*, para todos* $i = (i_1, ..., i_n) \in I, j = (j_1, ..., j_n) \in J$*. Definimos entonces las siguientes aplicaciones de* U *en* $\widehat{K} \times ..._{n \text{ veces}} \times \widehat{K}$*:*

$$\alpha_{+_U i}(x) = (\alpha_{+i_1}(x_1), ..., \alpha_{+i_n}(x_n)),$$

$$\beta_{+_U j}(x) = (\beta_{+j_1}(x_1), ..., \beta_{+j_n}(x_n)),$$

$$\gamma_{+_U \Phi_{+_U}(i,j)}(x) = (\gamma_{+\Phi_+(i_1,j_1)}(x_1), ..., \gamma_{+\Phi_+(i_n,j_n)}(x_n)),$$

para todos $x = (x_1, ..., x_n) \in U$*,* $i = (i_1, ..., i_n) \in I, j = (j_1, ..., j_n) \in J$*.*

A continuación construimos el levantado isotópico $(\widehat{U}, \widehat{+_U})$ *de* $(U, +_U)$ *a partir de la familia* $\mathfrak{F}_{+_U} = \{(\alpha_{+_U i}, \beta_{+_U j}, \gamma_{+_U \Phi_{+_U}(i,j)})\}_{i \in I, j \in J}$*. Resulta en particular que podemos identificar* $\widehat{U}$ *con* $\widehat{K} \times ..._{n \text{ veces}} \times \widehat{K}$ *y que la aplicación* $\widehat{+_U}$ *viene definida como:*

$$\alpha_{+_U i}(x) \widehat{+_U} \beta_{+_U j}(y) = \gamma_{+_U \Phi_{+_U}(i,j)}(x +_U y),$$

para todos $x, y \in U$*,* $i \in I, J \in J$*. Se comprueba entonces que* $(\widehat{U}, \widehat{+_U})$ *es de hecho un isogrupo conmutativo asociado a* $(U, +_U)$ *por* $\mathfrak{F}_{+_U}$*.*

Sea ahora $J_. = J_\times \times ..._{n \text{ veces}} \times J_\times$ *y para cada* $j = (j_1, ..., j_n) \in J_.$ *consideremos la aplicación* $\Phi_. : I_\times \times J_. \to \Phi_\times(I_\times \times J_\times) \times ..._{n \text{ veces}} \times \Phi_\times(I_\times \times J_\times)$*, tal que* $\Phi_.(i, j) =$

$(\Phi_+(i,j_1),...,\Phi_+(i,j_n))$, *para todos* $i \in I_\times, j=(j_1,...,j_n)\in J_.$. *Definimos entonces las siguientes aplicaciones de* U *en* $\widehat{K}\times ..._{n\ veces}\times\widehat{K}$:

$$\beta_{.j}(x)=(\beta_{\times j_1}(x_1),...,\beta_{\times j_n}(x_n)),$$

$$\gamma_{.\Phi_.(i,j)}(x)=(\gamma_{\times\Phi_\times(i,j_1)}(x_1),...,\gamma_{\times\Phi_\times(i,j_n)}(x_n)),$$

para todos $x=(x_1,...,x_n)\in U$, $i\in I_\times$, $j=(j_1,...,j_n)\in J_.$.

Resulta entonces que la familia $\mathfrak{F}_.=\{(\alpha_{\times i},\beta_{.j},\gamma_{.\Phi_.(i,j)})\}_{i\in I^0_\times, j\in J_.}$ *es un isotopismo generalizado de* $(K,U,.)$ *en* $(\widehat{K},\widehat{U},\widehat{.})$, *donde:*

$$\alpha_{\times i}(a)\widehat{.}\beta_{.j}(x)=\gamma_{.\Phi_.(i,j)}(a.x),$$

para todos $a\in K$, $x\in U$, $i\in I_\times$, $j\in J_.$.

Finalmente, $(\widehat{U},\widehat{+_U},\widehat{.})$ *resulta ser un* $(\widehat{K},\widehat{+},\widehat{\times})$*-isoespacio vectorial por el isotopismo generalizado* $\mathfrak{F}_{+_U}\times\mathfrak{F}_.$. $\triangleleft$

Definición A.3.35. *En las condiciones de la Definición A.3.33, sea* $(H,\diamondsuit)$ *una isotopía generalizada de un multigrupoide* $(G,\diamond)$ *por un isotopismo generalizado* $\mathfrak{F}_\diamond$. *Tomemos* $(Q,\diamond)$ *un submultigrupoide de* $(G,\diamond)$ *y sea* $(\widehat{Q},\widehat{\diamond})$ *el levantado isotópico de* $(Q,\diamond)$ *por* $\mathfrak{F}_\diamond$. *En caso de que* $(\widehat{A},\widehat{\star},\widehat{\triangleright})$ *sea un isoanillo,* $(Q,\cdot,.,\diamond)$ *sea un* $(A,\star,\triangleright)$*-álgebra y* $(\widehat{Q},\widehat{\cdot},\widehat{.},\widehat{\diamond})$ *sea un* $(\widehat{A},\widehat{\star},\widehat{\triangleright})$*-álgebra, este último será llamado* isoálgebra asociado a $(Q,\cdot,.,\diamond)$ *por* $\mathfrak{F}_\star\times\mathfrak{F}_\triangleright\times\mathfrak{F}_.\times\mathfrak{F}_\diamond\times\mathfrak{F}_.$

Análogamente se tiene la definición de isoálgebra por un isotopismo parcial.

A.4. Pseudoisotopismo generalizado y parcial

En esta sección se definirá una extensión del concepto de isotopismo generalizado. Para ello, basta tener en cuenta la siguiente:

Definición A.4.1. *Sean dados un conjunto cualquiera* A, *un conjunto de índices* I *y una familia* $\mathfrak{A}=\{\alpha_i\}_{i\in I}$, *de aplicaciones de* A *en un conjunto* B, *tal que* $\bigcup_{i\in I}\alpha_i(A)=B$. *Diremos que* $\mathfrak{A}$ *es una* familia pseudoisotópica de A *en* B. *Se llamará* subfamilia pseudoisotópica de $\mathfrak{A}$ *a toda subfamilia* $\mathcal{F}\subseteq\mathfrak{A}$.

Se dirá que $\mathcal{F}$ *es una subfamilia pseudoisotópica* inyectiva de evolución (sobreyectiva de evolución, *resp.), si toda aplicación* $\alpha\in\mathcal{F}$ *es inyectiva (sobreyectiva,* *resp.). En caso de ser* $\mathcal{F} = \mathfrak{F}$ *hablaremos de* familia pseudoisotópica inyectiva de evolución *o* sobreyectiva de evolución*, respectivamente.*

Por otra parte, fijado un subconjunto Q *de* A*, llamaremos* conjunto pseudoisotópico asociado a Q *por* $\mathcal{F}$ *al conjunto* $\widehat{Q}_I = \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{F}, x \in Q\}$*. Se dirá que* $\mathcal{F}$ *es* Q-inyectiva *si para todos* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}, a, b \in Q$*, tales que* $a \neq b$*, se verifica que* $\alpha(a) \neq \beta(b)$*. Se dirá que es* inyectiva *si es* A*-inyectiva.*

Proposición A.4.2. *En las condiciones de la definición anterior,* $\mathcal{F}$ *será* Q*-inyectiva si y sólo si para todos* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ *se verifica que* α *y* β *son aplicaciones inyectivas en* Q*, tales que* $\alpha(Q) \cap \beta(Q) = \emptyset$*.* □

Basta ahora volver a ver todos y cada uno de los conceptos tratados en las secciones anteriores, trabajando con subfamilias pseudoisotópicas en lugar de isotópicas y analizar las posibles diferencias. Así por ejemplo, en la Definición A.2.4, se observa que no tiene sentido hablar ahora de aplicación reguladora del levantado isotópico de una aplicación como tal, pues puede comprobarse que se trataría en general de una correspondencia y no de una aplicación.

Por otra parte, si en la Definición A.3.1, sustituimos la condición (iv) por:

iv') Tres familias $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j \in J}, \mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k \in K}$ de aplicaciones de A en D, de B en E y de C en F, respectivamente, tales que $\bigcup_{i \in I}\{\alpha_i(x) : x \in A\} = D$, $\bigcup_{j \in J}\{\beta_j(x) : x \in B\} = E$ y $\bigcup_{k \in K}\{\gamma_k(x) : x \in C\} = F$,

las nociones de isotopismo parcial y generalizado se sustituirán respectivamente por *pseudoisotopismo parcial* y *pseudoisotopismo generalizado*. En particular, todo isotopismo generalizado es un pseudoisotopismo generalizado, pero no al revés. Por otra parte y de forma análoga a los isotopismos generalizados, se hablará de pseudoisotopismos generalizados asociados a leyes de composición y a leyes de acción y se definirán los conceptos de: *familias y subfamilias pseudoisotópicas*, *conjuntos y levantados pseudoisotópicos*, *pseudoisotopismos simples*, *pseudoisounidades*, *pseudoisomultigrupoides, pseudoisogrupos, pseudoisoanillos*, etc. Se utilizarán las mismas notaciones que en el caso de los isotopismos generalizados y el único aspecto a tener en cuenta es que las aplicaciones que componen las distintas ternas de los pseudoisotopismos generalizados no son en general biyecciones.

Veamos algunos ejemplos:

A.4.1. Pseudoisogrupos

Ejemplo A.4.3. *Consideremos el subconjunto* $G =< 1, -1, i, -i >$ *de los complejos* $\mathbb{C}$. *Sea* $\times$ *el producto usual entre complejos. Será así* $(G, \times)$ *un grupo. Llamando* $H = \{1, -1\}$, *resulta que* $(H, \times)$ *es un subgrupo de* $(G, \times)$.

Sea $\alpha : G \to H$ *tal que* $\alpha(1) = \alpha(-1) = 1$ *y* $\alpha(i) = \alpha(-i) = -1$. *La familia* $\mathfrak{F}$ *compuesta por una única terna* (α, α, α) *es entonces un pseudoisomorfismo de* $(G, \times)$ *en* $(H, \times)$. *De esta forma, el levantado pseudoisotópico* $(\widehat{G}, \widehat{\times})$ *de* $(G, \times)$ *por* $\mathfrak{F}$ *es de hecho un pseudoisogrupo.* $\triangleleft$

A.4.2. Pseudoisoespacios vectoriales

Ejemplo A.4.4. *Consideremos el cuerpo* $(\mathbb{R}, +, \times)$, *con la suma y producto usuales y sea* $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) : f$ *es una función diferenciable* $\}$, *conjunto al que dotamos de estructura de espacio vectorial definiendo para todos* $f, g \in U$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(f +_U g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x).$$

Así, $(U, +_U, .)$ *es un* $\mathbb{R}$-*espacio vectorial.*

A continuación construimos el isocuerpo $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *a partir del isotopismo generalizado* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$, *donde* $\mathfrak{F}_+$ *es el isotopismo identidad y* $\mathfrak{F}_\times = \{(\alpha, \alpha, \alpha)\}$, *siendo* $\alpha(x) = \frac{x}{2}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Consideramos ahora la aplicación sobreyectiva $\beta : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $\beta(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(2)$, *para todo* $f = f(x) \in U$. *En particular,* $\beta(U) = \mathbb{R}$, *pues, dado* $a \in \mathbb{R}$, *resulta tomando* $f(x) = \frac{a}{4}x^2$, *que* $\beta(f) = a$. *La aplicación* β *no es inyectiva, pues por ejemplo, dados los dos siguientes elementos en* U:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 15x^2; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 5x^3,$$

se tiene entonces que $\beta(f_1) = \beta(f_2) = 60$.

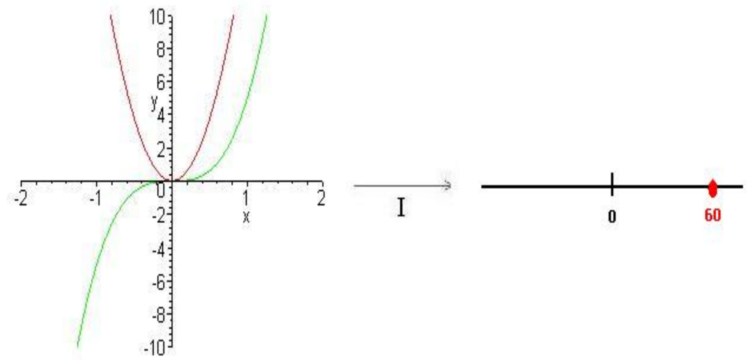

Figura A.1: Pseudoisotopismo de $(U, +_U)$ en $(\mathbb{R}, +)$.

Construimos entonces el levantado pseudoisotópico de $(U, +_U)$ por el pseudoisomorfismo $\mathfrak{F}_{+_U} = \{(\beta, \beta, \beta)\}$. Resulta que $\widehat{U}_{+_U} = \mathbb{R}$ y, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, observamos que:

$$a \widehat{+_U} b = \bigcup_{f,g \in U} \left\{ \beta(f +_U g) : \frac{\partial f}{\partial x}(2) = a, \frac{\partial g}{\partial x}(2) = b \right\} = a + b.$$

Luego, $(\widehat{U}, \widehat{+_U}) = (\mathbb{R}, +)$ es un pseudoisogrupo asociado a $(U, +_U)$ por $\mathfrak{F}_{+_U}$.

Seguidamente consideramos la familia $\mathfrak{F}_. = \{(\alpha, \beta, \beta)\}$, que resulta ser un pseudoisotopismo de $(\mathbb{R}, U, .)$ en $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \times)$, pues, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, observamos que:

$$a \widehat{.} b = \bigcup_{f,g \in U} \left\{ \beta(2a.g) : \frac{\partial g}{\partial x}(2) = b \right\} = 2ab.$$

Resulta entonces que, a partir del pseudoisotopismo generalizado $\mathfrak{F}_{+_U} \times \mathfrak{F}_.$, se construye el $\mathbb{R}$-pseudoisoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{+_U}, \widehat{.}) = (\mathbb{R}, +, \widehat{.})$ asociado al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $(U, +_U, .)$. $\triangleleft$

Ejemplo A.4.5. *Consideremos el cuerpo $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, +, \times)$, con la suma y producto usuales y sea $P = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2[x]$, conjunto al que dotamos con su estructura de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial usual $(P, +_P, .)$, definiendo para todos $p, q \in P$, $\lambda \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$:*

$$(p +_P q)(x) = p(x) + q(x); \quad (\lambda.p)(x) = \lambda \times p(x).$$

A continuación construimos el isocuerpo $(\widehat{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, +, \times)$, levantado isotópico de sí mismo por el isotopismo generalizado $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$, donde $\mathfrak{F}_+$ y $\mathfrak{F}_\times$ son ambos el isotopismo identidad.

Tomando $F = \{0,1\}$, consideramos ahora los conjuntos de índices $I = J = K = F$ y para cada $t \in F$ definimos la biyección $\alpha_t : P \to P$ tal que $\alpha(p) = p +_P t$, para todo $p \in P$.

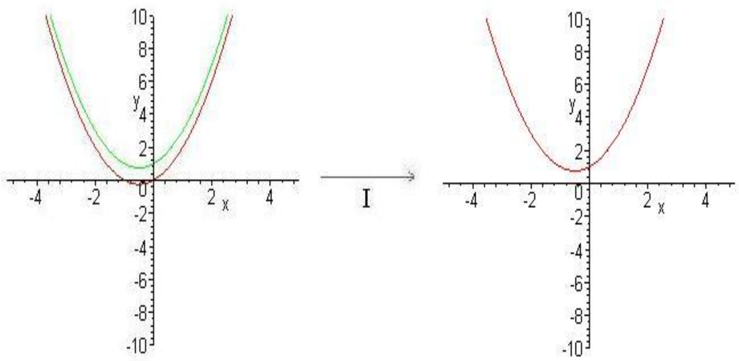

Figura A.2: $\alpha_1(x^2 + x) = \alpha_0(x^2 + x + 1) = x^2 + x + 1.$

Tomamos la siguiente aplicación sobreyectiva:

$$\Phi_{+_P} : F \times F \to F$$

$$(t_1, t_2) \to \Phi_{+_P}(t_1, t_2) = t_1 + t_2 (mod\ 2).$$

La familia $\mathfrak{F}_{+_P} = \{(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \alpha_{t_1+t_2(mod\ 2)})\}_{t_1,t_2 \in F}$ es de hecho un isotopismo clásico de Santilli, cuya estructura general es $(P, +_P)$, con isounidad y elemento isotópico $\widehat{\mathfrak{I}} = \mathfrak{T} = F$ y tal que el levantado isotópico de $(P, +_P)$ por $\mathfrak{F}_{+_P}$ coincide con $(P, +_P)$, pues fijados $p, q \in P$ y $a \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$, se cumple que:

$$p \widehat{+_P} q = \alpha_{t_p}(p - t_p) \widehat{+_P} \alpha_{t_q}(q - t_q) = \alpha_{t_p + t_q (mod\ 2)}(p +_P q - t_p - t_q) = p +_P q,$$

para todos $t_p, t_q \in F$. Luego, $(P, +_P)$ es un isogrupo asociado a sí mismo por $\mathfrak{F}_{+_P}$.

Seguidamente consideramos para cada $t \in F$ la aplicación γ_t de P en P tal que, para todo $p \in P$:

$$\gamma_t(p) = \begin{cases} 0, \ si\ p = 0, \\ \alpha_t(p), \ si\ p \neq 0. \end{cases} .$$

Obsérvese que γ_1 no es inyectiva, pues $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = 0$. La familia $\mathfrak{F}_. = \{(Id_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2}, \alpha_t, \gamma_t)\}_{t \in F}$ es entonces un pseudoisotopismo generalizado de $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, P, .)$ en sí mismo, pues fijados $p, q \in P$ y $a \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$, se cumple que:

$$a \hat{.} p = Id_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2}(a) \hat{.} \alpha_{t_p}(p - t_p) = \gamma_{t_p}(a.(p - t_p)) = a.p,$$

para todo $t_p \in F$.

Resulta entonces que, a partir del pseudoisotopismo generalizado $\mathfrak{F}_{+_P} \times \mathfrak{F}_{.}$, *se construye el* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$*-pseudoisoespacio vectorial* $(\widehat{P}, \widehat{+_P}, \widehat{.}) = (P, +_P, .)$.

$\triangleleft$

A.5. (Pseudo)isotopismo externo

Definición A.5.1. *Sean dados:*

i) *6 conjuntos* A, B, C, D, E, F,

ii) *Tres conjuntos de índices* I, J, K,

iii) *Una aplicación sobreyectiva* $\Phi : A \times I \times B \times J \to K$,

iv) *Una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ *de* A *en* D, *una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j \in J}$ *de* B *en* E *y una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k \in K}$ *de* C *en* F.

Fijados $i \in I, j \in J$, *se define la aplicación* $\gamma_{i,j}^{\Phi} : A \times B \to \mathfrak{C}$, *de tal forma que* $\gamma_{i,j}^{\Phi}(a,b) = \gamma_{\Phi(a,i,b,j)}$, *para todos* $a \in A, b \in B$. *Se dirá entonces que la familia* $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}^{\Phi})\right\}_{i \in I, j \in J}$ *es una* familia (pseudo)isotópica externa de (A, B, C) en (D, E, F). *Por su parte,* Φ *será llamada* aplicación (pseudo)isotópica externa de $\mathfrak{F}$. *Se llamará* subfamilia (pseudo)isotópica externa de $\mathfrak{F}$ *a toda subfamilia* $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{F}$. *En caso de ser* $I = J$, *se llamará* subfamilia (pseudo)isotópica externa especial de F *a* $\mathfrak{F}_I = \{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_{i,i}^{\Phi})\}_{i \in I}$.

Fijada una subfamilia (pseudo)isotópica externa $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{F}$, *se definen las familias siguientes:*

$$I_{\mathcal{F}} = \left\{i \in I : \exists j \in J \text{ tal que } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}^{\Phi}) \in \mathcal{F}\right\}, \quad \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \{\alpha_i\}_{i \in I_{\mathcal{F}}},$$

$$J_{\mathcal{F}} = \left\{j \in J : \exists i \in I \text{ tal que } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}^{\Phi}) \in \mathcal{F}\right\}, \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} = \{\beta_j\}_{j \in J_{\mathcal{F}}},$$

$$K_{\mathcal{F}} = \left\{k \in K : \exists a \in A, i \in I, b \in B, j \in J \text{ tales que } \Phi(a,i,b,j) = k \text{ y } (\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}^{\Phi}) \in \mathcal{F}\right\}$$

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} = \{\gamma_{i,j}^{\Phi}\}_{i \in I_{\mathcal{F}}, j \in J_{\mathcal{F}}}.$$

Se define entonces la aplicación $\widehat{I}_1^{\mathcal{F}} : A \times I_{\mathcal{F}} \to D$, *tal que* $\widehat{I}_1^{\mathcal{F}}(a,i) = \alpha_i(a)$, *para todos* $a \in A, i \in I_{\mathcal{F}}$. *Análogamente se define las aplicación* $\widehat{I}_2^{\mathcal{F}} : B \times J_{\mathcal{F}} \to E$. *Por su parte, se define la aplicación* $\widehat{I}_3^{\mathcal{F}} : A \times I_{\mathcal{F}} \times B \times J_{\mathcal{F}} \times C \to F$, *tal que* $\widehat{I}_3^{\mathcal{F}}(a,i,b,j,c) = (\gamma_{i,j}^{\phi}(a,b))(c) = \gamma_{\Phi(a,i,b,j)}(c)$, *para todos* $a \in A, i \in I_{\mathcal{F}}, b \in B, j \in J_{\mathcal{F}}, c \in C$. *Se llamará* terna base de $\mathcal{F}$ *a la terna* $\left(\widehat{I}_1^{\mathcal{F}}, \widehat{I}_2^{\mathcal{F}}, \widehat{I}_3^{\mathcal{F}}\right)$. *La terna base de* $\mathfrak{F}$ *se denotará como* $(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3)$.

Finalmente, dado un subconjunto $Q \subseteq A \cup B$, *se definen los conjuntos:*

$$\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} = \widehat{Q \cap A}^{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}} \subseteq D, \quad \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}} = \widehat{Q \cap B}^{\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}} \subseteq E.$$

Se define el conjunto (pseudo)isotópico asociado a Q *por* $\mathcal{F}$ *como* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}} = \widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} \cup \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}$. *Los elementos de* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}$ *se denotarán o bien en la forma* $\widehat{a}_{1,i}^{\mathcal{F}} = \widehat{I}_1^{\mathcal{F}}(a,i), \widehat{b}_{2,j}^{\mathcal{F}} = \widehat{I}_2^{\mathcal{F}}(b,j)$ *(siendo* $a \in Q \cap A, b \in Q \cap A, i \in I, j \in J$*), cuando se conozcan los elementos de* Q *de los que se obtienen, o bien con caracteres góticos, (*$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$*, etc.) para diferenciarlos de los elementos de* Q.

Definición A.5.2. *Sean dados:*

i) *6 conjuntos* A, B, C, D, E, F,

ii) *Dos correspondencias* $f : A \times B \to C$, $g : D \times E \to F$,

iii) *Una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ *de* A *en* D, *una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j \in J}$ *de* B *en* E *y una familia isotópica* $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k \in K}$ *de* C *en* F.

iv) *Una familia (pseudo)isotópica externa* $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}^{\Phi})\right\}_{i \in I, j \in J}$ *de* (A, B, C) en (D, E, F),

v) *Una subfamilia (pseudo)isotópica externa* $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{F}$.

Entonces:

a) *Dado un subconjunto* $Q \subseteq A \cup B$, *se define el conjunto:*

$$\widehat{Q}_K^{\mathcal{F},f} = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}} \{a \in (\gamma(x,y))(f(x,y)) : x \in Q \cap A, y \in Q \cap B\} \subseteq F.$$

En caso de ser $\widehat{Q}_I^{\digamma} \neq \emptyset \neq \widehat{Q}_J^{\digamma}$, *se define la correspondencia* $\widehat{f}^{\digamma} : \widehat{Q}_I^{\digamma} \times \widehat{Q}_J^{\digamma} \to \widehat{Q}_K^{\digamma, f}$, *de tal forma que:*

$$\widehat{f}^{\digamma}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) =$$

$$= \bigcup_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\digamma} \{(\gamma(a,b))(f(a,b)) : a \in Q \cap A, b \in Q \cap B \text{ , siendo } \alpha(a) = \mathfrak{a}, \beta(b) = \mathfrak{b}\},$$

para todos $\mathfrak{a} \in \widehat{Q}_I^{\digamma}$, $\mathfrak{b} \in \widehat{Q}_J^{\digamma}$. *El par* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{f}^{\digamma})$ *recibirá el nombre de* levantado isotópico externo de (Q, f) *por* $\digamma$. *La subfamilia isotópica* $\digamma$ *será llamada* levantamiento isotópico externo de (Q, f) *en* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{f}^{\digamma})$.

b) *Se dirá que el cuádruple* (A, B, C, f) *es* isotópico parcial externo a (D, E, F, g) por $\digamma$ *o que* (D, E, F, g) *es* una isotopía parcial externa de (A, B, C, f) por $\digamma$, *si se verifica que:*

$$g(\alpha(a), \beta(b)) = (\gamma(a,b))(f(a,b)),$$

para todos $a \in A$, $b \in B$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \digamma$. *La subfamilia isotópica* $\digamma$ *se dirá entonces que es un* isotopismo parcial externo *de* (A, B, C, f) *en* (D, E, F, g). *En caso de ser* $\digamma = \mathfrak{F}$ *se hablará entonces de* isotopismo generalizado externo.

Puede observarse en particular que todo (pseudo)isotopismo generalizado puede verse como un (pseudo)isotopismo generalizado externo, sin más que considerar $\Phi(a, i, b, j) = \Phi(i, j)$, para todos $a \in A, i \in I, b \in B, j \in J$. El recíproco no es cierto evidentemente.

Definición A.5.3. *En las condiciones de la Definición A.5.2, supongamos que* $A = B = C$ *y* $D = E = F$. *Diremos entonces que* $\digamma$ *es un* (pseudo)isotopismo parcial externo simple de (A, B, C, f) en (A, B, C, g) *si, siendo un (pseudo)isotopismo parcial externo de* (A, B, C, f) *en* (A, B, C, g), *se cumple que* $\mathfrak{A}_{\digamma} = \mathfrak{B}_{\digamma} = \mathfrak{C}_{\digamma}$.

En caso de ser $\digamma = \mathfrak{F}$, *se hablará de* (pseudo)isotopismo generalizado externo simple. *La aplicación* $\widehat{I}_1^{\mathfrak{F}} = \widehat{I}_2^{\mathfrak{F}}$ *será llamada entonces* (pseudo)isounidad del (pseudo)isotopismo *y será denotada por* $\widehat{I}$.

Por otra parte y de forma análoga a los (pseudo)isotopismos generalizados, se hablará de (pseudo)isotopismos generalizados externos asociados a leyes de composición y a leyes de acción.

Veamos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo A.5.4. *Consideremos el cuerpo de los reales* $(\mathbb{R}, +, \times)$. *Por una parte utilizamos el pseudoisotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_+$ *de pseudoisounidad* $\widehat{I} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, *tal que* $\widehat{I}(a, t_1, t_2) = a + t_1 + t_2 i$, *para todos* $a, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *y aplicación pseudoisotópica* $\Phi_+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *tal que* $\Phi_+((t_1, t_2), (t_3, t_4)) = (t_1 + t_3, t_2 + t_4)$. *Dicho isotopismo permite obtener el grupo aditivo* $(\mathbb{C}, +)$ *como levantado isotópico del grupo aditivo* $(\mathbb{R}, +)$.

Por otra parte utilizamos el pseudoisotopismo generalizado simple externo $\mathfrak{F}_\times$ *de pseudoisounidad* $\widehat{I}$ *y aplicación pseudoisotópica externa* $\Phi_\times : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *tal que:*

$$\Phi_\times(a, t_1, t_2, b, t_3, t_4) = ((a + t_1)t_3 + (b + t_3)t_1 - t_1 t_3 - t_2 t_4, (a + t_1)t_4 + t_2(b + t_3)),$$

para todos $a, t_1, t_2, b, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$. *Usando dicho isotopismo, resulta que* $\widehat{\times}$ *es el producto usual de complejos* $\bullet$.

En definitiva, el isotopismo generalizado externo $\mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$ *permite obtener el cuerpo* $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ *como levantado isotópico del cuerpo* $(\mathbb{R}, +, \times)$. $\triangleleft$

Ejemplo A.5.5. *Consideremos el* $(\mathbb{R}, +, \times)$*-espacio vectorial* $(U, +_U, .)$ *del Ejemplo A.4.4 y el isocuerpo obtenido a partir del isotopismo identidad de* $(\mathbb{R}, +, \times)$. *Para su posterior utilización, notaremos a tal isotopismo como* $\{(Id_{\mathbb{R}i}, Id_{\mathbb{R}i}, Id_{\mathbb{R}i})\}_{i \in \{1\}}$.

Consideremos ahora, para cada $t \in \mathbb{N}$ *la aplicación sobreyectiva* $\alpha_t : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha_t(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(2) + t$, *para todo* $f = f(x) \in U$. *En particular,* $\alpha_t(U) = \mathbb{R}$, *siendo* α_t *una aplicación no inyectiva para cada* $t \in \mathbb{N}$, *pues por ejemplo, dados los dos siguientes elementos en* U*:*

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x^3; \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 24x,$$

se tiene entonces que $25 = \alpha_1(f_1) = \alpha_1(f_2)$. *De hecho, cada valor real puede obtenerse como imagen de elementos de* U *para diferentes valores de* $t \in \mathbb{N}$. *Así por ejemplo, tomando:*

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 5x^2,$$

resulta que $\alpha_5(f_3) = 25$.

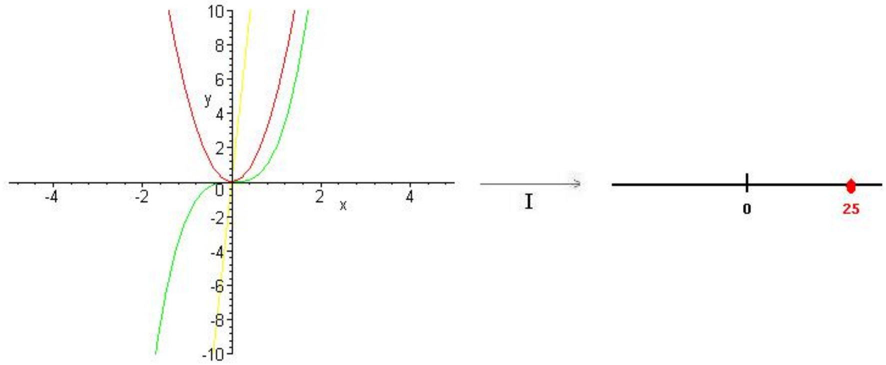

Figura A.3: Pseudoisotopismo de $(U, +_U)$ en $(\mathbb{R}, +)$.

Consideramos a continuación la siguiente aplicación:

$$\Phi_{+_U} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(t_1, t_2) \to \Phi_{+_U}(t_1, t_2) = t_1 + t_2.$$

Construimos entonces el levantado pseudoisotópico de $(U, +_U)$ por el pseudoisotopismo $\mathfrak{F}_{+_U} = \{(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \alpha_{\Phi_{+_U}(t_1,t_2)})\}_{t_1,t_2 \in \mathbb{N}}$. Resulta que $\widehat{U}_{+_U} = \mathbb{R}$ y, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, observamos que:

$$a \widehat{+} b = \bigcup_{\substack{f, g \in U \\ t_f, t_g \in \mathbb{N}}} \left\{ \alpha_{t_f + t_g} (f +_U g) : \frac{\partial f}{\partial x}(2) + t_f = a, \frac{\partial g}{\partial x}(2) + t_g = b \right\} = a + b$$

Luego, $(\widehat{U}, \widehat{+_U}) = (\mathbb{R}, +)$ es un pseudoisogrupo asociado a $(U, +_U)$ por $\mathfrak{F}_{+_U}$.

Seguidamente consideramos la aplicación:

$$\Phi_. : \mathbb{R} \times \{1\} \times U \times \mathbb{N} \to F$$

$$(a, 1, f, t) \to \Phi_.(a, 1, b, t) = a \times t.$$

Así, la familia $\mathfrak{F}_. = \{(Id_{\mathbb{R}1}, \alpha_t, \alpha^{\Phi_.}_{1,t})\}$ resulta ser un pseudoisotopismo generalizado externo de $(\mathbb{R}, U, .)$ en $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \times)$, pues, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, observamos que:

$$a \widehat{.} b = \bigcup_{g \in U, t \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\alpha^{\Phi_.}_{1,t}(a, g) \right) (a.g) : \frac{\partial g}{\partial x}(2) + t = b \right\} =$$

$$= \bigcup_{g \in U, t \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\alpha_{\Phi(a,1,g,t)} \right) (a.g) : \frac{\partial g}{\partial x}(2) + t = b \right\} = \bigcup_{g \in U, t \in \mathbb{N}} \{ a \times (b - t) + a \times t \} = a \times b.$$

Resulta entonces que, a partir del pseudoisotopismo generalizado externo $\mathfrak{F}_{+_U} \times \mathfrak{F}_{.}$, *se construye el* $\mathbb{R}$*-pseudoisoespacio vectorial* $(\widehat{U}, \widehat{+_U}, \widehat{.}) = (\mathbb{R}, +, \times)$ *asociado al* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $(U, +_U, .)$. $\lhd$

A.6. Órbitas (pseudo)isotópicas

Definición A.6.1. *Sean dados:*

i) *6 conjuntos* A, B, C, D, E, F,

ii) *Una aplicación* $f : A \times B \to C$,

iii) *Tres conjuntos de índices* I, J, K,

iv) *Una aplicación sobreyectiva* $\Phi : I \times J \to K$,

v) *Una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{F} = \big\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\big\}_{i\in I, j\in J}$ *de* (A, B, C) *en* (D, E, F),

vi) *Una subfamilia (pseudo)isotópica* $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{F}$.

Sean $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}, \mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$ *y* $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k\in K}$. *Entonces:*

a) *Dados* $a \in A, b \in B, c \in C$, *se definen los conjuntos:*

$$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(a) = \mathfrak{o}^{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}(a), \quad \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(b) = \mathfrak{o}^{\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}}(b), \quad \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{K_{\mathcal{F}}}(c) = \mathfrak{o}^{\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}}(c).$$

Fijados P, Q *y* R, *subconjuntos de* A, B *y* C, *respectivamente, se dirá que* $\mathcal{F}$ *es una* subfamilia (pseudo)isotópica (P, Q, R)-buena *(*(P, Q, R)-óptima, *resp.) si* $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ *y* $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ *son subfamilias (pseudo)isotópicas* P*-buena (*P*-óptima, resp.),* Q*-buena (*Q*-óptima, resp.) y* R*-buena (*R*-óptima, resp.), respectivamente. Si* $(P, Q, R) = (A, B, C)$, *diremos que* $\mathcal{F}$ *es* buena *u óptima , respectivamente.*

En caso de ser $\mathcal{F} = \mathfrak{F}$ *se hablará de* familia (pseudo)isotópica (P, Q, R)-buena *o* (P, Q, R)-óptima, *respectivamente.*

b) Dado $Q \subseteq A \cup B$, se definen los conjuntos:

$$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(Q) = \bigcup_{x \in Q \cap A} \{\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(x)\} \subseteq \mathfrak{P}(D),$$

$$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(Q) = \bigcup_{x \in Q \cap B} \{\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(x)\} \subseteq \mathfrak{P}(E),$$

$$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{K_{\mathcal{F}}}(Q) = \bigcup_{a \in Q \cap A, b \in Q \cap B} \{\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{K_{\mathcal{F}}}(f(a,b))\} \subseteq \mathfrak{P}(F)$$

Se define el conjunto orbital (pseudo)isotópico asociado a *Q por $\mathcal{F}$ como $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q) = \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(Q) \cup \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(Q)$. Los elementos de $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q)$ se denotarán o bien en la forma $\mathfrak{o}(a), \mathfrak{o}(b)$, etc., cuando se conozcan los elementos de Q de los que se obtienen, o bien con caracteres góticos, ($\overline{\mathfrak{a}}, \overline{\mathfrak{b}}$, etc.) para diferenciarlos de los elementos de Q y de $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}$.*

En caso de ser $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(Q) \neq \emptyset \neq \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(Q)$, se define la correspondencia $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f) : \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(Q) \times \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(Q) \to \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{K_{\mathcal{F}}}(Q)$, de tal forma que:

$$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f)(\overline{\mathfrak{a}}, \overline{\mathfrak{b}}) = \bigcup_{a \in Q \cap A,\ b \in Q \cap B} \left\{\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{K_{\mathcal{F}}}(f(a,b)) : \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(a) = \overline{\mathfrak{a}}, \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(b) = \overline{\mathfrak{b}}\right\},$$

para todos $\overline{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{I_{\mathcal{F}}}(Q)$, $\overline{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}_{J_{\mathcal{F}}}(Q)$.

El par $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f))$ recibirá el nombre de levantado orbital (pseudo)isotópico de (Q, f) *por $\mathcal{F}$. La subfamilia (pseudo)isotópica $\mathcal{F}$ será llamada* levantamiento orbital (pseudo)isotópico de (Q, f) *en $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f))$. Finalmente, el levantado (pseudo)isotópico $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{f}^{\mathcal{F}})$ de (Q, f) por $\mathcal{F}$ recibirá el nombre de* proyección (pseudo)isotópica de $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(f))$ por $\mathcal{F}$.

Cuando no haya lugar a confusión, se suprimirá el superíndice $\mathcal{F}$ en las notaciones referentes a la construcción del levantado orbital (pseudo)isotópico de (Q, f) por $\mathcal{F}$.

Veamos un ejemplo al respecto:

Ejemplo A.6.2. *Sean $(\mathbb{E}^2, +_2, \cdot_2)$ y $(\mathbb{E}^3, +_3, \cdot_3)$ $(\mathbb{R}, +, \times)$-espacios euclídeos* 2 *y* 3*-dimensionales, respectivamente. Para cada $t \in [0, 2\pi)$, sea $\alpha_t : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$, tal que $\alpha_t(x, y) = (x cos(t), y, x sen(t))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{E}^2$.*

La familia $\mathfrak{F} = \{(Id_{\mathbb{R}}, \alpha_t, \alpha_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una familia pseudoisotópica de $(\mathbb{R}, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$ en $(\mathbb{R}, \mathbb{E}^3, \mathbb{E}^3)$. En particular, la órbita pseudoisotópica por $\mathfrak{F}$ de todo punto de $\mathbb{E}^2$, *cuya primera coordenada es no nula, es una circunferencia, siendo* $(0, y, 0)$ *la órbita de* $(0, y)$*, para todo* $y \in \mathbb{R}$*.*

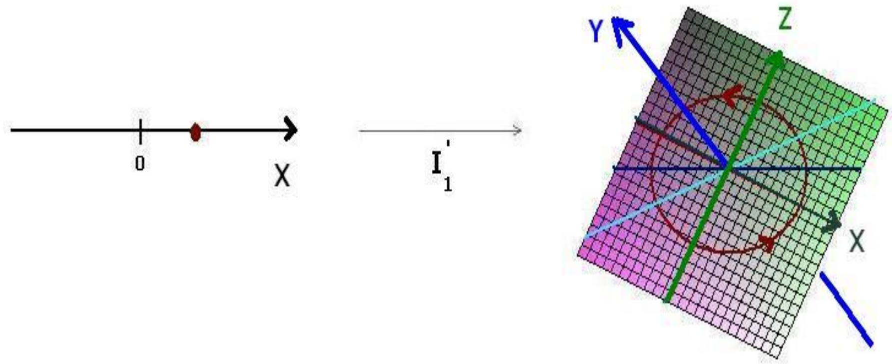

Figura A.4: Órbita pseudoisotópica de un punto de $\mathbb{E}^2$*.*

La unión de todas estas circunferencias y puntos constituyen el conjunto orbital pseudoisotópico asociado a $\mathbb{E}^2$*, siendo* $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^3$ *el conjunto pseudoisotópico asociado a* $\mathbb{E}^2$ *por* $\mathfrak{F}$*.*

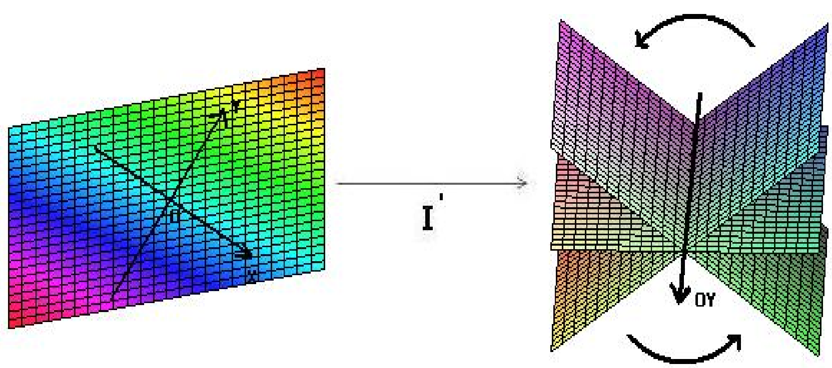

Figura A.5: $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^3$*.*

Desde el punto de vista físico, fijado cualquier observador isotópico en $\mathbb{R}^3$*, éste pensará en todo momento que vive en un universo plano de 2 dimensiones. En particular, si suponemos el tiempo medido en segundos y consideramos que dicho observador describe una círcunferencia en* 2π *segundos, atendiendo a su geometría en dos dimensiones, en realidad habrá descrito una trayectoria elíptica en una esfera de* $\mathbb{R}^3$*.*

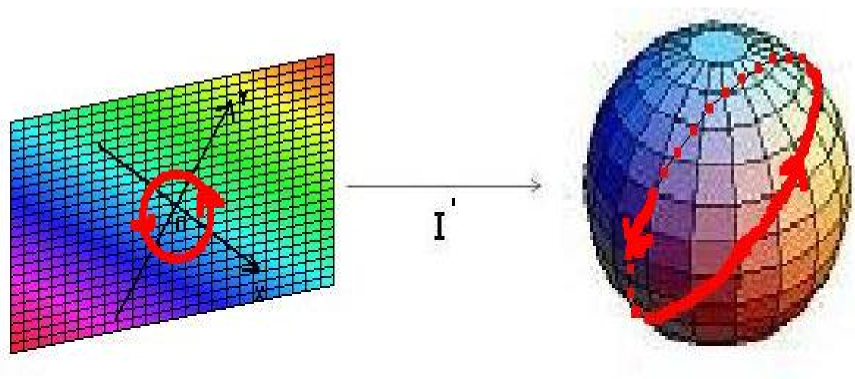

Figura A.6: Trayectoria recorrida por un observador isotópico.

$\triangleleft$

A.6.1. Leyes de composición

Definición A.6.3. *Sean $(G, \cdot)$ un multigrupoide, H un conjunto cualquiera, $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i\in I, j\in J}$ una familia (pseudo)isotópica de (G, G, G) en (H, H, H) y $\mathcal{F}$ una subfamilia (pseudo)isotópica de $\mathfrak{F}$. Fijado Q un subconjunto de G, diremos que $\mathfrak{F}$ es Q-*buena *(Q-*óptima*, resp.) si es (Q, Q, Q)-buena ((Q, Q, Q)-óptima, resp.). Si $Q = G$, diremos que $\mathfrak{F}$ es* buena *u* óptima*, respectivamente.*

*Sean $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}, \mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$ y $\mathfrak{C} = \{\gamma_k\}_{k\in K}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es Q-*compatible *si las familias $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ y $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ son Q-compatibles entre sí dos a dos. En particular, fijado $a \in Q$, se notará $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(a)$ a la órbita de a por las familias (pseudo)isotópicas que componen $\mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es* compatible *si es G-compatible.*

*Diremos que $\mathcal{F}$ es Q-*orbital *si es Q-buena y Q-compatible. Diremos que es* orbital *si es G-orbital .*

Por otra parte, si $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(\cdot))$ es el levantado orbital (pseudo)isotópico de $(Q, \cdot)$ por $\mathcal{F}$, entonces, en caso de que tal levantado sea un grupoide (cuasigrupo, loop, semigrupo, monoide o grupo, resp.), su proyección (pseudo)isotópica por $\mathcal{F}$ recibirá el nombre de $\mathcal{F}$-grupoide *(*$\mathcal{F}$-cuasigrupo, $\mathcal{F}$-loop, $\mathcal{F}$-semigrupo, $\mathcal{F}$-monoide o $\mathcal{F}$-grupo*, resp.).*

Obsérvese que si $\mathcal{F}$ es Q-compatible, entonces, para comprobar que es Q-orbital, basta ver que una de las familias $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{C}$ es Q-buena.

El siguiente resultado es inmediato por construcción:

Proposición A.6.4. *En las condiciones de la Definición A.6.3, supongamos que F es una subfamilia (pseudo)isotópica Q-orbital de $\mathfrak{F}$. Entonces, si $(Q,\cdot)$ es un subgrupoide (ya sea cuasigrupo, loop, semigrupo, monoide o grupo), resulta que el levantado orbital (pseudo)isotópico $(\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(Q),\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(\cdot))$ de $(Q,\cdot)$ por F es una estructura algebraica del mismo tipo que $(Q,\cdot)$. Como consecuencia, el levantado isotópico $(\widehat{Q}^{\mathsf{F}},\widehat{\cdot}^{\mathsf{F}})$ de $(Q,\cdot)$ es un F-grupoide (F-cuasigrupo, F-loop, F-semigrupo, F-monoide o F-grupo, resp.).* $\square$

Nótese que en caso de que e sea unidad de Q respecto a $\cdot$, la correspondiente unidad de $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(Q)$ respecto a $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(\cdot)$ es $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(e)$.

Veamos algunos ejemplo al respecto:

Ejemplo A.6.5. *Sean $(\mathbb{E}^1,+_1,\cdot_1)$ y $(\mathbb{E}^2,+_2,\cdot_2)$ $(\mathbb{R},+,\times)$-espacios euclídeos 1 y 2-dimensionales, respectivamente. Para cada $t\in\mathbb{R}$ sea $\alpha_t:\mathbb{E}^1\to\mathbb{E}^2$, tal que $\alpha_t(x)=(x,t)$, para todo $x\in\mathbb{R}$.*

La familia $\mathfrak{F}=\{(\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},\alpha_{t_1+t_2})\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$ es una familia pseudoisotópica orbital de $(\mathbb{E}^1,\,\mathbb{E}^1,\mathbb{E}^1)$ en $(\mathbb{E}^2,\mathbb{E}^2,\mathbb{E}^2)$. De esta forma, el levantado isotópico $(\widehat{\mathbb{E}^1},\widehat{+_1})$ de $(\mathbb{E}^1,+_1)$ por $\mathfrak{F}$ es un $\mathfrak{F}$-grupo. En concreto, $\widehat{\mathbb{E}^1}=\mathbb{E}^2$ y se define la operación $\widehat{+_1}$ en $\widehat{\mathbb{E}^1}$ como:

$$(x_1,y_1)\widehat{+_1}(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

para todos $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$. Luego, de hecho, $(\widehat{\mathbb{E}^1},\widehat{+_1})=(\mathbb{E}^2,+_2)$ es un pseudoisogrupo asociado a $(\mathbb{E}^1,+_1)$ por $\mathfrak{F}$. $\lhd$

Ejemplo A.6.6. *Sean $(\mathbb{E}^1,+_1,\cdot_1)$ y $(\mathbb{E}^2,+_2,\cdot_2)$ $(\mathbb{R},+,\times)$-espacios euclídeos 1 y 2-dimensionales, respectivamente. Para cada $t\in[0,\pi)$ sea $\alpha_t:\mathbb{E}^1\to\mathbb{E}^2$, tal que:*

$$\alpha_t(x)=\begin{cases}(xcos(t),xsen(t))\ ,\ si\ x\geq 0,\\ (-xcos(t+\pi),-xsen(t+\pi))\ ,\ si\ x\leq 0.\end{cases},$$

para todo $x\in\mathbb{R}$.

La familia $\mathfrak{F}=\{(\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},\alpha_{t_1+t_2\ (mod\ \pi)})\}_{t_1,t_2\in[0,\pi)}$ es una familia pseudoisotópica órbital de $(\mathbb{E}^1,\,\mathbb{E}^1,\mathbb{E}^1)$ en $(\mathbb{E}^2,\mathbb{E}^2,\mathbb{E}^2)$. De esta forma, el levantado isotópico $(\widehat{\mathbb{E}^1},\widehat{+_1})$

de $(\mathbb{E}^1, +_1)$ *por* $\mathfrak{F}$ *es un* $\mathfrak{F}$*-grupo. En concreto,* $\widehat{\mathbb{E}^1} = \mathbb{E}^2$ *y se define la operación* $\widehat{+_1}$ *en* $\widehat{\mathbb{E}^1}$ *como:*

$$(xcos(t_1), xsen(t_1))\widehat{+_1}(ycos(t_2), ysen(t_2)) =$$

$$= \begin{cases} ((x+y)cos(t_1+t_2\ (mod\ \pi)), (x+y)sen(t_1+t_2\ (mod\ \pi))), \\ \ si\ t_1, t_2 \in [0,\pi), \\ ((x-y)cos(t_1+t_2\ (mod\ \pi)), (x-y)sen(t_1+t_2\ (mod\ \pi))), \\ \ si\ t_1 \in [0,\pi), t_2 \in [\pi, 2\pi), \\ ((-x+y)cos(t_1+t_2\ (mod\ \pi)), (-x+y)sen(t_1+t_2\ (mod\ \pi))), \\ \ si\ t_1 \in [\pi,2\pi), t_2 \in [0, \pi), \\ ((-x-y)cos(t_1+t_2\ (mod\ \pi)), (-x-y)sen(t_1+t_2\ (mod\ \pi))), \\ \ si\ t_1, t_2 \in [\pi,2\pi). \end{cases},$$

para todos $x, y \geq 0$. $\triangleleft$

Ejemplo A.6.7. *Sea* $(\mathbb{R}, +)$ *el grupo real aditivo y consideremos para cada* $t \in \mathbb{R}$, *la aplicación* $\alpha_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *tal que:*

$$\alpha_t(x) = \begin{cases} (x,t),\ si\ t \geq 0, \\ (t,x),\ si\ t < 0. \end{cases},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Resulta entonces que* $\mathfrak{F} = \{(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \alpha_{t_1+t_2})\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$ *es una familia pseudoisotópica orbital de* $(\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R})$ *en* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{R}})$, *siendo:*

$$\widehat{\mathbb{R}} = \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}\right).$$

Aplicando la Proposición A.6.4, se obtiene que $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+})$ *es un* $\mathfrak{F}$*-grupo. Llamando entonces* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \geq 0\}$ *y* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$, *se tiene que, fijados* $P = (a,b), Q = (c,d) \in \widehat{\mathbb{R}}$*:*

$$(a,b)\widehat{+}(c,d) =$$

$$
= \begin{cases}
(a+c,b+d)\ ,\ si\ ac \geq 0, \\
(a+d,b+c)\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in C \wedge b+c \geq 0) \vee (P \in C \wedge Q \in A \wedge a+d < 0), \\
(b+c,a+d)\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in C \wedge b+c < 0) \vee (P \in C \wedge Q \in A \wedge a+d \geq 0), \\
\{(a+c,b+d),(a+d,b+c)\}\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in B \wedge b+c \geq 0) \vee \\
\quad \vee (P \in B \wedge Q \in A \wedge a+d < 0) \vee (P \in C \wedge Q \in B \wedge a+d < 0) \vee \\
\quad \vee (P \in B \wedge Q \in C \wedge b+c \geq 0) \vee (P,Q \in B \wedge (a+d < 0 \wedge b+c \geq 0)), \\
\{(a+c,b+d),(b+c,a+d)\}\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in B \wedge b+c < 0) \vee \\
\quad \vee (P \in B \wedge Q \in A \wedge a+d \geq 0) \vee (P \in C \wedge Q \in B \wedge a+d \geq 0) \vee \\
\quad \vee (P \in B \wedge Q \in C \wedge b+c < 0) \vee (P,Q \in B \wedge (a+d \geq 0 \wedge b+c < 0)), \\
\{(a+c,b+d),(b+c,a+d),(a+d,b+c)\}\ ,\ si\ P,Q \in B \wedge \\
\quad \wedge ((a+d \geq 0 \wedge b+c \geq 0) \vee (a+d < 0 \wedge b+c < 0))
\end{cases}.
$$

Se comprueba entonces que $(0,0)$ *es elemento unidad de* $\widehat{\mathbb{R}}$ *respecto a* $\widehat{+}$. $\triangleleft$

Definición A.6.8. *Sean* $(G,\cdot)$ *y* $(G,*)$ *dos multigrupoides,* H *un conjunto cualquiera,* $\mathfrak{F}_1 = \left\{(\alpha_i^1, \beta_j^1, \gamma^1_{\Phi_1(i,j)})\right\}_{i \in I_1, j \in J_1}$ *y* $\mathfrak{F}_2 = \left\{(\alpha_i^2, \beta_j^2, \gamma^2_{\Phi_2(i,j)})\right\}_{i \in I_2, j \in J_2}$ *dos familias (pseudo)isotópicas de* (G,G,G) *en* (H,H,H) *y* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *dos subfamilias (pseudo)isotópicas de* $\mathfrak{F}_1$ *y* $\mathfrak{F}_2$*, respectivamente. Notemos* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ *y* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$*. Fijado* Q *un subconjunto de* G*, se dirá que* $\mathcal{F}$ *es una subfamilia (pseudo)isotópica* Q-buena (Q-óptima*, resp.) de* $\mathfrak{F}$*, si* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *son ambas, respectivamente, subfamilias* Q*-buenas (*Q*-óptimas, resp.) de* $\mathfrak{F}_1$ *y* $\mathfrak{F}_2$*.*

Fijado $l \in \{1,2\}$*, sean* $\mathfrak{A}^l = \{\alpha_i^l\}_{i \in I_l}, \mathfrak{B}^l = \{\beta_j^l\}_{j \in J_l}$ *y* $\mathfrak{C}^l = \{\gamma_k^l\}_{k \in K_l}$*. Diremos que* $\mathcal{F}$ *es* Q-compatible *si las familias* $\mathfrak{A}^1_{\mathcal{F}}, \mathfrak{B}^1_{\mathcal{F}}, \mathfrak{C}^1_{\mathcal{F}}, \mathfrak{A}^2_{\mathcal{F}}, \mathfrak{B}^2_{\mathcal{F}}$ *y* $\mathfrak{C}^2_{\mathcal{F}}$ *son* Q*-compatibles entre sí dos a dos. Diremos que* $\mathcal{F}$ *es* compatible *si es* G*-compatible. Diremos que es* Q-orbital *si es* Q*-buena y* Q*-compatible. Diremos que es* orbital *si es* G*-orbital.*

Sean $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(\cdot))$ *el levantado orbital (pseudo)isotópico de* $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}_1$ *y* $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(*))$ *el levantado orbital (pseudo)isotópico de* $(Q,*)$ *por* $\mathcal{F}_2$*. Supuesto entonces que* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(Q) = \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(Q)$ *(que será denotado entonces como* $\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q)$*), si además* $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(\cdot), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(*))$ *es un anillo (cuerpo, resp.), su proyección (pseudo)isotópica por* $\mathcal{F}$*,* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}}, \widehat{*}^{\mathcal{F}})$*, recibirá el nombre de* $\mathcal{F}$-anillo ($\mathcal{F}$-cuerpo*, resp.).*

Proposición A.6.9. *En las condiciones de la definición anterior, supongamos que* $\mathcal{F}$ *es una subfamilia (pseudo)isotópica* Q*-orbital de* $\mathfrak{F}$*. Entonces, si* $(Q,\cdot,*)$ *es un anillo (cuerpo, resp.), resulta que el levantado orbital (pseudo)isotópico* $(\mathfrak{o}^{\mathcal{F}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathcal{F}_1}(\cdot),$

$\mathfrak{o}^{\mathcal{F}_2}(*))$ *de* $(Q, \cdot, *)$ *por* $\mathcal{F}$ *es una estructura algebraica del mismo tipo que* $(Q, \cdot, *)$. *Como consecuencia, el levantado isotópico* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}}, \widehat{*}^{\mathcal{F}})$ *de* $(Q, \cdot, *)$ *es un* $\mathcal{F}$*-anillo* ($\mathcal{F}$*-cuerpo, resp.).* $\square$

Veamos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo A.6.10. *En las condiciones del Ejemplo A.6.5, si tomamos la familia* $\mathfrak{F}_\times = \{(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \alpha_{t_1 t_2})\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$*, resulta entonces que* $\mathfrak{F} \times F_\times$ *es una familia pseudoisotópica orbital de* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *en* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$*. En particular se comprueba que el levantado isotópico por* $\mathfrak{F} \times F_\times$ *de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *es el* $\mathfrak{F} \times F_\times$*-cuerpo* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbb{R}^2, +, \times)$*, que es a su vez un pseudoisocuerpo.* $\triangleleft$

Ejemplo A.6.11. *En las condiciones del Ejemplo A.6.7, se tiene que* $\mathfrak{F}_\times = \{(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \alpha_{t_1 t_2})\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$ *es una familia pseudoisotópica orbital de* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *en* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{R}})$*. Sea* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\times})$ *el levantado pseudoisotópico de* $(\mathbb{R}, \times)$ *por* $\mathfrak{F}_\times$*. Aplicando la Proposición A.6.9, se obtiene entonces que* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *es un* $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}_\times$*-cuerpo. Además, fijados* $P = (a, b), Q = (c, d) \in \widehat{\mathbb{R}}$*, se cumple que:*

$$(a, b)\widehat{\times}(c, d) =$$

$$= \begin{cases} (ac, bd)\ ,\ si\ ac \geq 0, \\ (ad, bc)\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in C \wedge b = 0) \vee (P \in C \wedge Q \in A \wedge d > 0), \\ (bc, ad)\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in C \wedge b > 0) \vee (P \in C \wedge Q \in A \wedge d = 0), \\ \{(ac, bd), (bc, ad)\}\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in B \wedge b > 0), \\ \{(ac, bd), (ad, bc)\}\ ,\ si\ (P \in A \wedge Q \in B \wedge b = 0) \vee (P \in B \wedge Q \in A \wedge d > 0), \\ \{(bd, ac), (ad, bc)\}\ ,\ si\ (P \in C \wedge Q \in B \wedge d > 0) \vee (P \in B \wedge Q \in C \wedge b = 0), \\ \{(bd, ac), (bc, ad)\}\ ,\ si\ (P \in C \wedge Q \in B \wedge d = 0) \vee (P \in B \wedge Q \in C \wedge b > 0), \\ \{(ac, 0), (0, ac), (ad, 0)\}\ ,\ si\ P, Q \in B \wedge b = 0 \wedge d > 0, \\ \{(ac, 0), (0, ac), (bc, 0)\}\ ,\ si\ P, Q \in B \wedge b > 0 \wedge d = 0, \\ \{(ac, bd), (bd, ac), (ad, bc), (bc, ad)\}\ ,\ si\ P, Q \in B \wedge (b = 0 = d \vee bd > 0). \end{cases}$$

Se comprueba entonces que $(1, 1)$ *es elemento unidad de* $\widehat{\mathbb{R}}$ *respecto a* $\widehat{\times}$*.* $\triangleleft$

A.6.2. Leyes de acción

Definición A.6.12. *Sean* $(K,+,\times)$ *un cuerpo y* $(\widehat{K}^{\mathsf{F}_K}, \widehat{+}^{\mathsf{F}_K}, \widehat{\times}^{\mathsf{F}_K})$ *un* F_K*-cuerpo, para cierta subfamilia (pseudo)isotópica* F_K *de una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{F}_K$*. Sea* $(G,+_G)$ *un multigrupoide y* $.$ *una acción de* K *sobre* G*. Sea* $\mathfrak{F}_{+_G}$ *una familia (pseudo)isotópica de* $(G,+_G)$ *en un multigrupoide* $(\widehat{G}^{\mathfrak{F}_{+_G}}, \widehat{+_G}^{\mathfrak{F}_{+_G}})$ *y* $\mathfrak{F}$ *una familia (pseudo)isotópica de* $(K,G,.)$ *en* $(\widehat{K}^{\mathsf{F}_K}, \widehat{G}^{\mathfrak{F}_{+_G}}, \widehat{.}^{\mathfrak{F}})$*. Finalmente, sean* Q *un subconjunto de* G*,* F_{+_G} *y* F *subfamilias de* $\mathfrak{F}_{+_G}$ *y* $\mathfrak{F}$*, respectivamente y* $(\mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(+_G))$ *el levantado orbital (pseudo)isotópico de* $(Q,+_G)$ *por* F_{+_G}*. Supuesto entonces que* $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(Q) = \mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(Q)$ *y que* $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}}_{I_{\mathsf{F}}}(K) = \mathfrak{o}^{\mathsf{F}_K}(K)$*, si además* $(\mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(+_G), \mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(.))$ *es un* $\mathfrak{o}^{\mathsf{F}_K}(K)$*-espacio vectorial, su proyección isotópica por* $\mathsf{F}_{+_G} \times \mathsf{F}$*,* $(\widehat{Q}^{\mathsf{F}_{+_G}}, \widehat{+_G}^{\mathsf{F}_{+_G}}, \widehat{.}^{\mathsf{F}})$*, recibirá el nombre de* $\mathsf{F}_{+_G} \times \mathsf{F}$*-*$\widehat{K}$*-espacio vectorial.*

Proposición A.6.13. *En las condiciones de la definición anterior, sea* $\mathfrak{F} = \{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\}_{i\in I, j\in J}$*, siendo* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$*,* $\mathfrak{B} = \{\beta_j\}_{j\in J}$ *y* $\mathfrak{C} = \{\gamma_{\Phi(i,j)}\}_{i\in I, j\in J}$ *y supongamos que:*

a) F_K *es orbital,*

b) F_{+_G} *es* Q*-orbital,*

c) La familia $\mathfrak{A}_{\mathsf{F}}$ *es compatible con las familias isotópicas que componen* F_K*.*

d) Las familias $\mathfrak{B}_{\mathsf{F}}$ *y* $\mathfrak{C}_{\mathsf{F}}$ *son* Q*-compatibles con las familias isotópicas que componen* F_{+_G}*.*

Entonces, si $(Q,+_G,.)$ *es un* K*-espacio vectorial, resulta que el levantado orbital (pseudo)isotópico* $(\mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(Q), \mathfrak{o}^{\mathsf{F}_{+_G}}(+_G), \mathfrak{o}^{\mathsf{F}}(.))$ *de* $(Q,+_G,.)$ *por* $\mathsf{F}_{+_G} \times \mathsf{F}$ *es un* $\mathfrak{o}(K)^{\mathsf{F}_K}$*-espacio vectorial. Como consecuencia, el levantado isotópico* $(\widehat{Q}^{\mathsf{F}_{+_G}}, \widehat{+_G}^{\mathsf{F}_{+_G}}, \widehat{.}^{\mathsf{F}})$ *de* $(Q,+_G,.)$ *es un* $\mathsf{F}_{+_G} \times \mathsf{F}$*-*$\widehat{K}$*-espacio vectorial.* $\square$

Ejemplo A.6.14. *Sea* $(\mathbb{E}^2, +_2, .)$ *un* $(\mathbb{R},+,\times)$*-espacio euclídeo 2-dimensional de base* $\beta = \{e_1, e_2\}$*. Consideremos* $\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}$ *el isotopismo identidad de* $(\mathbb{R},+,\times)$ *en sí mismo. Sean ahora* A *y* B *dos matrices reales* 2×2 *no singulares, tales que* $AB^{-1} \neq BA^{-1}$ *y consideremos las aplicaciones* α_A *y* α_B *de* $\mathbb{E}^2$ *en* $\mathbb{E}^2$*, tales que* $\alpha_M((x,y)_\beta) = ((x,y)M)_\beta$*, para todos* $(x,y)_\beta \in \mathbb{E}^2$ *y* $M \in \{A,B\}$*. Tomamos entonces las familias* $\mathfrak{F}_{+_2} = \{(\alpha_A,\alpha_A,\alpha_A), (\alpha_A,\alpha_B,\alpha_B), (\alpha_B,\alpha_A,\alpha_B), (\alpha_B,\alpha_B,\alpha_A)\}$ *y* $\mathfrak{F} = \{(Id_{\mathbb{R}}, \alpha_A, \alpha_A), (Id_{\mathbb{E}^2}, \alpha_B, \alpha_B)\}$*. En particular,* $\widehat{\mathbb{E}^2}^{\mathfrak{F}_{+_2}} = \widehat{\mathbb{E}^2}^{\mathfrak{F}} = \mathbb{E}^2$*. Puede comprobarse además* *que estamos en condiciones de poder aplicar la Proposición A.6.13 y que por tanto* $(\widehat{\mathbb{E}^2}^{\mathfrak{F}_{+_2}}, \widehat{+_2}^{\mathfrak{F}_{+_2}}, \widehat{.}^{\mathfrak{F}})$ *es un* $\mathfrak{F}_{+_2} \times \mathfrak{F}$*-*$\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

Si por ejemplo tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$*, resulta entonces que, para todos* $(a,b)_\beta, (x,y)_\beta \in \mathbb{E}^2, c \in \mathbb{R}$*:*

$$(a,b)_\beta \widehat{+_2}^{\mathfrak{F}_{+_2}} (x,y)_\beta = \{(a+x, b+y)_\beta, (a+x+2b, 2a+y+b)_\beta, (a+x+2y, 2x+y+b)_\beta,$$
$$(\frac{-a+2b-x+2y}{3}, \frac{2a-b+2x-y}{3})_\beta\},$$
$$c \widehat{.}^{\mathfrak{F}} (a,b)_\beta = (ca, cb)_\beta.$$

◁

Ejemplo A.6.15. *En las condiciones del Ejemplo A.6.11, sea* $(\mathbb{E}^2, +_2, .)$ *un espacio euclídeo 2-dimensional de base* β *y consideremos* $\mathfrak{F}_{+_2}$ *el isotopismo identidad de* $(\mathbb{E}^2, +_2)$ *en sí mismo. Por otra parte, se verifica que* $\mathfrak{F}_. = \{(\alpha_t, Id_{\mathbb{E}^2}, Id_{\mathbb{E}^2})\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es una familia pseudoisotópica de* $(\mathbb{R}, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$ *en* $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$*. Sea* $(\mathbb{E}^2, \widehat{.})$ *el levantado pseudoisotópico de* $(\mathbb{E}^2, .)$ *por* $\mathfrak{F}_.$*. Se comprueba entonces fácilmente que estamos bajo las condiciones necesarias para poder aplicar la Proposición A.6.13 y por tanto, se verifica que* $(\mathbb{E}^2, +_2, \widehat{.})$ *es un* $\mathfrak{F}_{+_2} \times \mathfrak{F}_.$*-*$\widehat{\mathbb{R}}$*-espacio vectorial, tal que, fijados* $P = (a,b) \in \widehat{\mathbb{R}}$ *y* $(c,d)_\beta \in \mathbb{E}^2$*, se cumple que:*

$$(a,b)\widehat{.}(c,d)_\beta = \begin{cases} (ac, ad)\ ,\ si\ P \in A, \\ (bc, bd)\ ,\ si\ P \in C, \\ \{(ac, ad), (bc, bd)\}\ ,\ si\ P \in B. \end{cases} .$$

◁

Ejemplo A.6.16. *En las condiciones del Ejemplo A.6.11, sean* $(\mathbb{E}^2, +_2, ._2)$ *y* $(\mathbb{E}_3, +_3, ._3)$ *espacios euclídeos de dimensiones 2 y 3 y bases* $\beta_{\mathbb{E}^2}$ *y* $\beta_{\mathbb{E}^3}$*, respectivamente. Consideremos además para cada* $t \in \mathbb{R}$ *la aplicación* $\beta_t : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$*, tal que:*

$$\beta_t((x,y)_{\beta_{\mathbb{E}^2}}) = \begin{cases} (x,y,t)_{\beta_{\mathbb{E}^3}},\ si\ t \geq 0 \\ (t,x,y)_{\beta_{\mathbb{E}^3}},\ si\ t < 0 \end{cases} ,$$

para todo $(x,y)_{\beta_{\mathbb{E}^2}} \in \mathbb{E}^2$*. Resulta entonces que* $\mathfrak{F}_{+_2} = \{(\beta_{t_1}, \beta_{t_2}, \beta_{t_1+t_2})\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$ *es una familia pseudoisotópica orbital de* $(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$ *en* $(\widehat{\mathbb{E}^2}, \widehat{\mathbb{E}^2}, \widehat{\mathbb{E}^2})$*, siendo:*

$$\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^3 \backslash \left(\{(x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \mathbb{E}^3 : x \geq 0 \wedge z < 0\right\}.$$

Aplicando la Proposición A.6.4, se obtiene que $(\widehat{\mathbb{E}^2}, \widehat{+_2})$ *es un* $\mathfrak{F}_{+_2}$*-grupo. Llamando entonces* $D = \{(x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \mathbb{E}^3 : x \geq 0, z \geq 0\}$, $E = \{(x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \mathbb{E}^3 : x < 0, z \geq 0\}$ *y* $F = \{(x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \mathbb{E}^3 : x < 0, z < 0\}$, *se tiene que, fijados* $X = (a,b,c)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, Y = (x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \widehat{\mathbb{E}^2}$:

$$(a,b,c)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \widehat{+_2} (x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} =$$

$$= \begin{cases} (a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\ , \text{ si } X, Y \in D \vee X, Y \in F, \\ (a+y, b+z, c+x)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\ , \text{ si } X \in D \wedge Y \in F \wedge c+x \geq 0, \\ (a+z, b+x, c+y)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\ , \text{ si } X \in F \wedge Y \in D \wedge a+z < 0, \\ (c+x, a+y, b+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\ , \text{ si } X \in D \wedge Y \in F \wedge c+x < 0, \\ (b+x, c+y, a+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, \text{ si } X \in F \wedge Y \in D \wedge a+z \geq 0, \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+y, b+z, c+x)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } (X \in D \wedge Y \in E \wedge c+x \geq 0) \vee (X \in E \wedge Y \in F \wedge c+x \geq 0), \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (b+x, c+y, a+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } (X \in E \wedge Y \in D \wedge a+z \geq 0) \vee (X \in F \wedge Y \in E \wedge a+z \geq 0), \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (c+x, a+y, b+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } (X \in D \wedge Y \in E \wedge c+x < 0) \vee (X \in E \wedge Y \in F \wedge c+x < 0), \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+z, b+x, c+y)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } (X \in E \wedge Y \in D \wedge a+z < 0) \vee (X \in F \wedge Y \in E \wedge a+z \geq 0), \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+z, b+x, c+y)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (c+x, a+y, b+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } X, Y \in E \wedge a+z < 0 \wedge c+x < 0, \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (b+x, c+y, a+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (c+x, a+y, b+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } X, Y \in E \wedge a+z \geq 0 \wedge c+x < 0, \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+z, b+x, c+y)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+y, b+z, c+x)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } X, Y \in E \wedge a+z < 0 \wedge c+x \geq 0, \\ \{(a+x, b+y, c+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (b+x, c+y, a+z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (a+y, b+z, c+x)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\ \quad \text{si } X, Y \in E \wedge a+z \geq 0 \wedge c+x \geq 0. \end{cases}$$

Se comprueba entonces que $(0,0,0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}$ *es elemento unidad de* $\widehat{\mathbb{R}}$ *respecto a* $\widehat{+_2}$.

Por otra parte, resulta que $\mathfrak{F}_{\cdot_2} = \{(\alpha_{t_1}, \beta_{t_2}, \beta_{t_1 t_2})\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$ *es una familia pseudoisotópica orbital de* $(\mathbb{R}, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$ *en* $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{E}^2}, \widehat{\mathbb{E}^2})$, *tal que podemos aplicar la Proposición A.6.13, obteniéndose de esta forma que* $(\widehat{\mathbb{E}^2}, \widehat{+_2}, \widehat{\cdot_2})$ *es un* $\mathfrak{F}_{+_2} \times \mathfrak{F}_{\cdot_2}$*-*$\widehat{\mathbb{R}}$*-espacio vectorial, tal que, fijados* $P = (a,b) \in \widehat{\mathbb{R}}, X = (x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \in \widehat{\mathbb{E}^2}$:

$$(a,b) \widehat{\cdot_2} (x,y,z)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} =$$

$$
= \begin{cases}
(ax, ay, bz)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in A \wedge X \in D, \\
\{(ax, ay, bz)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (ay, az, bx)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, ay, az)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in A \wedge X \in E, \\
(ay, az, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in A \wedge X \in E \wedge b = 0, \\
(bx, ay, az)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in A \wedge X \in E \wedge b > 0, \\
\{(ax, ay, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, by, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in B \wedge X \in D \wedge z = 0, \\
\{(ax, ay, bz)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (az, bx, by)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in B \wedge X \in D \wedge z > 0, \\
\{(ax, ay, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (by, 0, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, by, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, ay, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \\
\quad si \ P \in B \wedge X \in E \wedge z = 0 \wedge b > 0, \\
\{(ax, ay, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (0, 0, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (0, 0, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (ay, 0, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\
\quad si \ P \in B \wedge X \in E \wedge z = 0 \wedge b = 0, \\
\{(ax, ay, bz)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (by, bz, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (az, bx, by)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, ay, az)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\
\quad si \ P \in B \wedge X \in E \wedge z < 0 \wedge b > 0, \\
\{(ax, ay, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (0, 0, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (az, 0, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (ay, az, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\}, \\
\quad si \ P \in B \wedge X \in E \wedge z < 0 \wedge b = 0, \\
\{(0, 0, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (ay, az, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in B \wedge X \in F \wedge b = 0, \\
\{(by, bz, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, ay, az)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in B \wedge X \in F \wedge b > 0, \\
(bx, by, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in C \wedge X \in D \wedge z = 0, \\
(az, bx, by)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in C \wedge X \in D \wedge z > 0, \\
\{(by, 0, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (bx, by, 0)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in C \wedge X \in E \wedge z = 0, \\
\{(by, bz, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}, (az, bx, by)_{\beta_{\mathbb{E}^3}}\} \ , \ si \ P \in C \wedge X \in E \wedge z > 0, \\
(by, bz, ax)_{\beta_{\mathbb{E}^3}} \ , \ si \ P \in C \wedge X \in F.
\end{cases} .
$$

◁

A.7. Levantamientos (pseudo)isotópicos de evolución

Definición A.7.1. *Sean* $(G, \cdot)$ *un multigrupoide,* H *un conjunto cualquiera,* $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i \in I, j \in J}$ *una familia (pseudo)isotópica de* (G, G, G) *en* (H, H, H) *y* $\digamma$ *una subfamilia (pseudo)isotópica de* $\mathfrak{F}$*. Fijado* Q *un subconjunto de* G*, sea* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{\cdot}^{\digamma})$ *el levantado (pseudo)isotópico de* $(Q, \cdot)$ *por* $\digamma$*. Se dirá que* $(\widehat{Q}^{\digamma}, \widehat{\cdot}^{\digamma})$ *es un* cuasigrupo *(*loop, semigrupo, monoide o grupo*, resp.)* (pseudo)isotópico de evolución asociado a $(Q,\cdot)$ por $\mathcal{F}$, *si se verifica que el levantado (pseudo)isotópico* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}^{(\alpha,\beta,\gamma)}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}^{(\alpha,\beta,\gamma)}})$ *asociado a* $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ *es un cuasigrupo (loop, semigrupo, monoide o grupo, resp.), para toda subfamilia (pseudo)isotópica* $\mathcal{F}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \{(\alpha,\beta,\gamma)\}$ *de* $\mathfrak{F}$*, tal que* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{F}$.

Ejemplo A.7.2. *Consideremos el grupo aditivo real* $(\mathbb{R},+)$ *y utilicemos el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_+$ *de* $(\mathbb{R},+)$ *en* $(\mathbb{R},\widehat{+})$*, que tiene por isounidad a* $\widehat{I}_+ : \mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$*, tal que* $\widehat{I}_+(x,t) = x\times t = xt$ *y por aplicación isotópica a* $\Phi_+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$*, tal que* $\Phi_+(t_1,t_2) = t_1t_2$*. En particular,* $a\widehat{+}b = \{at_2 + bt_1 : t_1,t_2\in\mathbb{N}\}$.

Sea $\mathfrak{F}_{+I}$ *la subfamilia isotópica especial de* $\mathfrak{F}_+$*. Se verifica que* $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathfrak{F}_{+I}} = \mathbb{R}$ *y que para todos* $a,b\in\mathbb{R}$, $a\widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I}}b = \{(a+b)t : t\in\mathbb{N}\}$*. Por otra parte, cabe observar que fijar una terna de* $\mathfrak{F}_{+I}$ *equivale a fijar un valor* $t\in\mathbb{N}$*. Llamando* $\mathfrak{F}_{+It}$ *a la familia formada por dicha terna, resulta en particular que* $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathfrak{F}_{+It}} = \mathbb{R}$ *y que para todos* $a,b\in\mathbb{R}$, $a\widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+It}}b = (a+b)t$*. De esta forma,* $(\mathbb{R},\widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+It}})$ *es un grupo para cada* $t\in\mathbb{N}$ *y, por tanto,* $(\mathbb{R},\widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I}})$ *es un grupo isotópico de evolución asociado a* $(\mathbb{R},+)$ *por* $\mathfrak{F}_{+I}$. ◁

Proposición A.7.3. *En las condiciones de la Definición A.7.1, si* $\mathcal{F}$ *es un isomorfismo parcial de* $(G,\cdot)$ *en* $(\widehat{G},\widehat{\cdot})$*, entonces* $(\widehat{G},\widehat{\cdot})$ *es una estructura algebraica del mismo tipo que* $(G,\cdot)$. □

Definición A.7.4. *Sean* $(G,\cdot)$ *y* $(G,*)$ *dos multigrupoides,* H *un conjunto cualquiera,* $\mathfrak{F}_1 = \left\{(\alpha_i^1,\beta_j^1,\gamma^1_{\Phi_1(i,j)})\right\}_{i\in I_1, j\in J_1}$ *y* $\mathfrak{F}_2 = \left\{(\alpha_i^2,\beta_j^2,\gamma^2_{\Phi_2(i,j)})\right\}_{i\in I_2, j\in J_2}$ *dos familias (pseudo)isotópicas de* (G,G,G) *en* (H,H,H) *y* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *dos subfamilias (pseudo)isotópicas de* $\mathfrak{F}_1$ *y* $\mathfrak{F}_2$*, respectivamente. Notemos* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2$ *y* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$*. Fijado* Q *un subconjunto de* G*, sean* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_1},\widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_1})$ *y* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_2},\widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_2})$ *los levantados (pseudo)isotópicos respectivos de* $(Q,\cdot)$ *por* $\mathcal{F}_1$ *y de* $(Q,*)$ *por* $\mathcal{F}_2$*. En caso de ser* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}_1} = \widehat{Q}^{\mathcal{F}_2}$ *(que será denotado entonces como* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}}$*):*

a) *Se dirá que* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}},\widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_1},\widehat{*}^{\mathcal{F}_2})$ *es un* anillo *(*cuerpo*, resp.)* (pseudo)isotópico de evolución asociado a $(Q,\cdot,*)$ por $\mathcal{F}$, *si para todo par de ternas* $(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)$ *y* $(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)$*, de* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$*, respectivamente, las subfamilias (pseudo)isotópicas* $\mathcal{F}_1^{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)} = \{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)\}$ *y* $\mathcal{F}_2^{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)} = \{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)\}$ *verifican que:*

   a.1) $\widehat{Q}^{\mathcal{F}_1^{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)}} = \widehat{Q}^{\mathcal{F}_2^{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}}$ *(que será denotado por* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}^{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1),(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}}$*),* *a.2)* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}^{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1),(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_1^{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)}}, \widehat{*}^{\mathcal{F}_2^{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}})$ *es un anillo (cuerpo, resp.).*

b) *Se dirá que* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_1}, \widehat{*}^{\mathcal{F}_2})$ *es un* anillo *(*cuerpo, *resp.)* (pseudo)isotópico de evolución limitada asociado a $(Q, \cdot, *)$ por $\mathcal{F}$, *si para cada terna* $(\alpha^i, \beta^i, \gamma^i) \in \mathcal{F}_i$ *existe una terna* $(\alpha^j, \beta^j, \gamma^j) \in \mathcal{F}_j$*, tal que se verifican las condiciones (a.1) y (a.2), siendo* $i, j \in \{1, 2\}$*, distintos.*

Ejemplo A.7.5. *Consideremos el cuerpo real* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *y utilicemos por una parte el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_+$ *del Ejemplo A.7.2 y, por otra parte, el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_\times$ *de* $(\mathbb{R}, \times)$ *en* $(\mathbb{R}, \widehat{\times})$*, que tiene por isounidad a* $\widehat{I}_\times : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, tal que* $\widehat{I}_\times(x, \delta) = \widehat{I}_+(x, \delta) = x\delta$ *y por aplicación isotópica a* $\Phi_\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tal que* $\Phi_\times(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 + \delta_2$*. En particular,* $a \widehat{\times} b = \{\frac{ab}{\delta_2} + \frac{ab}{\delta_1} : \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{N}\}$*.*

Sea $\mathfrak{F}_{\times I}$ *la subfamilia isotópica especial de* $\mathfrak{F}_\times$*. Se verifica que* $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathfrak{F}_{\times I}} = \mathbb{R}$ *y que para todos* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I}} b = \{\frac{2ab}{\delta} : \delta \in \mathbb{N}\}$*. Por otra parte, cabe observar que fijar una terna de* $\mathfrak{F}_{\times I}$ *equivale a fijar un valor* $\delta \in \mathbb{N}$*. Llamando* $\mathfrak{F}_{\times I\delta}$ *a la familia formada por dicha terna, resulta en particular que* $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathfrak{F}_{\times I\delta}} = \mathbb{R}$ *y que para todos* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I\delta}} b = \frac{2ab}{\delta}$*.*

Puede comprobarse que $(\mathbb{R}, \widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+It}}, \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I\delta}})$ *es entonces un cuerpo y, por tanto,* $(\mathbb{R}, \widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I}}, \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I}})$ *es un cuerpo isotópico de evolución asociado a* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *por* $\mathfrak{F}_{+I} \times \mathfrak{F}_{\times I}$*.* $\lhd$

Definición A.7.6. *Sean* $(K, +, \times)$ *un cuerpo y* $(\widehat{K}^{\mathcal{F}_K}, \widehat{+}^{\mathcal{F}_K}, \widehat{\times}^{\mathcal{F}_K})$ *un cuerpo (pseudo)isotópico de evolución, para cierta subfamilia (pseudo)isotópica* $\mathcal{F}_K$ *de una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{F}_K$*. Sea* $(G, \cdot)$ *un multigrupoide y* $.$ *una acción de* K *sobre* G*. Sea* $\mathfrak{F}_\cdot$ *una familia (pseudo)isotópica de* $(G, \cdot)$ *en un multigrupoide* $(\widehat{G}^{\mathfrak{F}_\cdot}, \widehat{\cdot}^{\mathfrak{F}_\cdot})$ *y* $\mathfrak{F}$ *una familia (pseudo)isotópica de* $(K, G, .)$ *en* $(\widehat{K}^{\mathcal{F}_K}, \widehat{G}^{\mathfrak{F}_\cdot}, \widehat{.}^{\mathfrak{F}})$*. Finalmente, sean* Q *un subconjunto de* G*,* $\mathcal{F}_\cdot$ *y* $\mathcal{F}$ *subfamilias de* $\mathfrak{F}_\cdot$ *y* $\mathfrak{F}$*, respectivamente y* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}_\cdot}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_\cdot})$ *el levantado (pseudo)isotópico de* $(Q, \cdot)$ *por* $\mathcal{F}_\cdot$*. En caso de ser* $\widehat{Q}^{\mathcal{F}_\cdot} = \widehat{Q}^{\mathcal{F}}$*:*

a) *Se dirá que* $(\widehat{Q}^{\mathcal{F}}, \widehat{\cdot}^{\mathcal{F}_\cdot}, \widehat{.}^{\mathcal{F}})$ *es un* $\widehat{K}^{\mathcal{F}_K}$-espacio vectorial (pseudo)isotópico de evolución asociado a $(Q, \cdot, .)$ por $\mathcal{F}_\cdot \times \mathcal{F}$, *si para todo* $((\alpha_+, \beta_+, \gamma_+), (\alpha_\times, \beta_\times, \gamma_\times), (\alpha_., \beta_., \gamma_.), (\alpha, \beta, \gamma)) \in \mathcal{F}_+ \times \mathcal{F}_\times \times \mathcal{F}_. \times \mathcal{F}$*, se cumple que las subfamilias (pseudo)isotópicas* $\mathcal{F}_+^{(\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)} = \{(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)\}$*,* $\mathcal{F}_\times^{(\alpha_\times,\beta_\times,\gamma_\times)} = \{(\alpha_\times, \beta_\times, \gamma_\times)\}$*,* $\mathcal{F}_.^{(\alpha_.,\beta_.,\gamma_.)} = \{(\alpha_., \beta_., \gamma_.)\}$ *y* $\mathcal{F}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \{(\alpha, \beta, \gamma)\}$ *verifican que:*

a.1) $\alpha(K) = \widehat{K}^{F^{(\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)}} = \widehat{K}^{F^{(\alpha_\times,\beta_\times,\gamma_\times)}}$ $(\equiv \widehat{K}^{F^{(\alpha_+,\beta_+,\gamma_+),(\alpha_\times,\beta_\times,\gamma_\times)}})$,

a.2) $\widehat{Q}^{F^{(\alpha_\cdot,\beta_\cdot,\gamma_\cdot)}_\cdot} = \widehat{Q}^{F^{(\alpha,\beta,\gamma)}}$ $(\equiv \widehat{Q}^{F^{(\alpha_\cdot,\beta_\cdot,\gamma_\cdot),(\alpha,\beta,\gamma)}})$,

a.3) $(\widehat{Q}^{F^{(\alpha_\cdot,\beta_\cdot,\gamma_\cdot),(\alpha,\beta,\gamma)}}, \widehat{\cdot}^{F^{(\alpha_\cdot,\beta_\cdot,\gamma_\cdot)}_\cdot}, \widehat{.}^{F^{(\alpha,\beta,\gamma)}})$ *es un* $\widehat{K}^{F^{(\alpha_+,\beta_+,\gamma_+),(\alpha_\times,\beta_\times,\gamma_\times)}}$*-espacio vectorial.*

b) Se dirá que $(\widehat{Q}^{F}, \widehat{\cdot}^{F_\cdot}, \widehat{.}^{F})$ *es un* $\widehat{K}^{F_K}$-espacio vectorial (pseudo)isotópico de evolución limitada asociado a $(Q,\cdot,.)$ por $F_\cdot \times F$*, si, fijada una terna* $(\delta,\epsilon,\lambda)$ *de* $\mathfrak{G}$*, siendo* $\mathfrak{G} \in \{F_+, F_\times, F_\cdot, F\}$*, existe una terna de ternas, cada una de ellas pertenecientes a cada una de las subfamilias restantes a las que no pertenece* $\mathfrak{G}$*, tales que las cuatro ternas resultantes verifican las condiciones (a.1), (a.2) y (a.3).*

Ejemplo A.7.7. *En las condiciones del Ejemplo A.7.5, consideramos el espacio euclídeo 1-dimensional* $(\mathbb{E}^1, +_1, .)$*. Utilicemos por una parte el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_{+_1}$ *de* $(\mathbb{E}^1, +_1)$ *en* $(\mathbb{E}^1, \widehat{+_1})$*, que tiene por isounidad a* $\widehat{I}_{+_1} : \mathbb{E}^1 \times \mathbb{N} \to \mathbb{E}^1$*, tal que* $\widehat{I}_{+_1}(x,s) = s.x$ *y por aplicación isotópica a* $\Phi_{+_1} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tal que* $\Phi_{+_1}(s_1,s_2) = s_1 s_2$*. Por otra parte, consideramos el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}$ *de* $(\mathbb{E}^1, .)$ *en* $(\mathbb{E}^1, \widehat{.})$*, que tiene por isounidad a* $\widehat{I} : \mathbb{E}^1 \times \mathbb{N} \to \mathbb{E}^1$*, tal que* $\widehat{I}(x,\epsilon) = \epsilon.x$ *y por aplicación isotópica a* $\Phi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tal que* $\Phi(\epsilon_1,\epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2$*.*

Sean $\mathfrak{F}_{+_1 I}$ *y* $\mathfrak{F}_I$ *las subfamilias isotópicas especiales de* $\mathfrak{F}_{+_1}$ *y* $\mathfrak{F}$*, respectivamente. Al igual que en los ejemplos anteriores, fijar una terna de* $\mathfrak{F}_{+_1 I}$ *o de* $\mathfrak{F}_I$*, equivale a fijar un valor* $s \in \mathbb{N}$ *o* $\epsilon \in \mathbb{N}$*, respectivamente. Llamando entonces* $\mathfrak{F}_{+_1 I_s}$ *y* $\mathfrak{F}_{I_\epsilon}$ *a las familias correspondientes formadas por dichas ternas, se verifica en particular que* $\widehat{\mathbb{E}^1}^{\mathfrak{F}_{+_1 I_s}} = \widehat{\mathbb{E}^1}^{\mathfrak{F}_{I_\epsilon}} = \mathbb{E}^1$ *y que para todos* $a \in \mathbb{R}$*,* $x, y \in \mathbb{E}^1$*, se cumple que* $x \widehat{+_1}^{\mathfrak{F}_{+_1 I_s}} y = s.(x +_1 y)$ *y* $a \widehat{.}^{\mathfrak{F}_{I_\epsilon}} x = \frac{2a}{\epsilon}.x$*.*

Supongamos ahora que tenemos fijadas cuatro ternas $\mathfrak{F}_{+I_t}$*,* $\mathfrak{F}_{\times I_\delta}$*,* $\mathfrak{F}_{+_1 I_s}$ *y* $\mathfrak{F}_{I_\epsilon}$*. En particular, la unidad de* $\mathbb{E}^1$ *respecto a* $\widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I_\delta}}$ *es* $\frac{\delta}{2}$*. De esta forma, en caso de ser* $\delta \neq \epsilon$*, resulta que* $(\mathbb{E}^1, \widehat{+_1}^{\mathfrak{F}_{+_1 I_s}}, \widehat{.}^{\mathfrak{F}_{I_\epsilon}})$ *no es un* $(\mathbb{R}, \widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I_t}}, \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I_\delta}})$*-espacio vectorial, debido a que, fijado* $x \in \mathbb{E}^1$*, se cumple que* $\frac{\delta}{2} \widehat{.}^{\mathfrak{F}_{I_\epsilon}} x = \frac{\delta}{\epsilon}.x \neq x$*. Sin embargo, se comprueba que sí es un* $(\mathbb{R}, \widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I_t}}, \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I_\epsilon}})$*-espacio vectorial para* $\delta = \epsilon$*. De esta forma, se demuestra que* $(\mathbb{E}^1, \widehat{+_1}^{\mathfrak{F}_{+_1 I}}, \widehat{.}^{\mathfrak{F}_I})$ *es un* $(\mathbb{R}, \widehat{+}^{\mathfrak{F}_{+I}}, \widehat{\times}^{\mathfrak{F}_{\times I}})$*-espacio vectorial isotópico de evolución limitada asociado a* $(\mathbb{E}^1, +_1, .)$ *por* $\mathfrak{F}_{+_1 I} \times \mathfrak{F}_I$*.* $\lhd$

La idea de que ciertas propiedades se cumplan para toda terna de una determinada subfamilia (pseudo)isotópica es utilizada en una diversidad de conceptos a tener en cuenta:

A.7.1. Topología (pseudo)isotópica de evolución

Definición A.7.8. *Sean M un espacio topológico con topología de abiertos $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia (pseudo)isotópica de M en un conjunto N, $\digamma$ una subfamilia de $\mathfrak{A}$ y $\widehat{M}^{\digamma}$ el conjunto isotópico asociado a M por $\digamma$. Se dirá que $\widehat{M}^{\digamma}$ es un* espacio topológico (pseudo)isotópico de evolución *(*espacio (pseudo)isotopológico *para abreviar)* asociado a M por $\digamma$, *si, para cada $i \in I_{\digamma}$, el levantado (pseudo)isotópico de M, $\widehat{M}^{\{\alpha_i\}}$, es un espacio topológico con la topología final de abiertos $\widehat{\mathfrak{T}}^{\digamma_i} = \{\alpha_i(U) : U \in \mathfrak{T}\}$, asociada a la aplicación $\alpha_i : M \to \widehat{M}^{\{\alpha_i\}}$. Se dirá entonces que $\widehat{\mathfrak{T}}^{\digamma} = \bigcup_{i\in I} \widehat{\mathfrak{T}}^{\digamma_i}$ es una* topología (pseudo)isotópica de evolución *(*(pseudo)isotopología, *para abreviar)* asociada a $\mathfrak{T}$ *por* $\digamma$.

Los elementos de $\widehat{\mathfrak{T}}^{\digamma}$ se llamarán (pseudo)isoabiertos.

Proposición A.7.9. *En las condiciones de la definición anterior, $\widehat{M}^{\digamma}$ será un espacio (pseudo)isotopológico siempre que $\digamma$ sea una subfamilia (pseudo)isotópica inyectiva de evolución de $\mathfrak{F}$.* □

A.7.2. (Pseudo)isoaplicación de evolución

Definición A.7.10. *Consideremos las condiciones de la Definición A.2.4, si bien $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ pueden ser pseudoisotópicas. Se dirá que $\widehat{f}^{\digamma}$ es una* (pseudo)isoaplicación de evolución asociada a f *por* $\digamma$, *si, para cada $(\alpha, \beta) \in \digamma$, se verifica que el levantado (pseudo)isotópico $\widehat{f}^{\{(\alpha,\beta)\}}$ de f por la subfamilia (pseudo)isotópica $\{(\alpha, \beta)\}$ es de hecho una aplicación. Si además $\widehat{f}^{\{(\alpha,\beta)\}}$ es inyectiva (sobreyectiva o biyectiva, resp.) para todo $(\alpha, \beta) \in \digamma$, se dirá que $\widehat{f}^{\digamma}$ es* inyectiva *(*sobreyectiva o biyectiva, *resp.)* de evolución.

Obsérvese que toda (pseudo)isoaplicación es una (pseudo)isoaplicación de evolución.

Proposición A.7.11. *En las condiciones de la definición anterior:*

a) $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *será una (pseudo)isoaplicación de evolución siempre que* $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ *sea inyectiva de evolución.*

b) *En caso de ser* $f : Q \subseteq A \to B$ *una aplicación inyectiva, entonces, la inversa de* $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$, $\left(\widehat{f}^{\mathcal{F}}\right)^{-1} = \widehat{f^{-1}}^{\mathcal{F}^{-1}}$ *será una (pseudo)isoaplicación de evolución siempre que* $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *sea inyectiva de evolución.*

c) *Suponiendo que* $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *sea una (pseudo)isoaplicación de evolución, se verifica que:*

c.1) $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *será inyectiva de evolución si, para todos* $a, b \in Q, (\alpha, \beta) \in \mathcal{F}$, *tales que* $\beta(f(a)) = \beta(f(b))$, *se verifica que* $\alpha(a) = \alpha(b)$.

c.2) *En caso de que la familia* $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ *sea inyectiva de evolución, se verifica que, si* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *es inyectiva de evolución, entonces es inyectiva la aplicación* $f : Q \to B$.

c.3) *En caso de que la aplicación* $f : Q \subseteq A \to B$ *sea sobreyectiva,* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *será sobreyectiva de evolución.*

c.4) *En caso de que la familia* $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *sea inyectiva de evolución, se tendrá el recíproco del apartado anterior.*

□

Corolario A.7.12. *En las condiciones de la Definición A.7.10, suponiendo que* $\widehat{f}^{\mathcal{F}}$ *sea una (pseudo)isoaplicación de evolución, resulta que:*

a) *Si* $f : Q \subseteq A \to B$ *es inyectiva,* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *será inyectiva siempre que la familia* $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *sea inyectiva de evolución.*

b) *En caso de que las familias* $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ *y* $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ *sean ambas inyectivas de evolución, entonces* $f : Q \subseteq A \to B$ *será biyectiva si y sólo si* $\widehat{f}^{\mathcal{F}} : \widehat{Q}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}} \to \widehat{B}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}}$ *es biyectiva de evolución.*

□

A.8. Continuidad en (pseudo)isofunciones

Definición A.8.1. *Sean* $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ *una familia (pseudo)isotópica de* $\mathbb{R}$ *en un conjunto* $\widehat{\mathbb{R}}$ *y* $\mathcal{F}$ *una subfamilia (pseudo)isotópica de* $\mathfrak{A}$. *Sea* $\leq$ *el orden usual en* $\mathbb{R}$.

Se definirá el (pseudo)isoorden $\widehat{\leq}^{F}$ *en* $\widehat{\mathbb{R}}^{F}$ *como:*

$$\mathfrak{a}\widehat{\leq}^{F}\mathfrak{b} \Leftrightarrow \begin{array}{c} a \leq b, \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}, \text{ tales que existen } i_1, i_2 \in I_F, \\ \text{verificando que } \alpha_{i_1}(a) = \mathfrak{a} \text{ y } \alpha_{i_2}(b) = \mathfrak{b}, \end{array}$$

para todos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \widehat{\mathbb{R}}^{F}$.

Se definirá el (pseudo)isoorden de evolución $\widehat{\leq}^{F}_{e}$ *en* $\widehat{\mathbb{R}}^{F}$ *como:*

$$\mathfrak{a}\widehat{\leq}^{F}_{e}\mathfrak{b} \Leftrightarrow \begin{cases} i)\exists i_0 \in I_F, a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \alpha_{i_0}(a_0) = \mathfrak{a} \text{ y } \alpha_{i_0}(b_0) = \mathfrak{b}, \text{ siendo } a_0 \leq b_0, \\ ii) a \leq b, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \exists i \in I_F, \text{ siendo } \alpha_i(a) = \mathfrak{a} \text{ y } \alpha_i(b) = \mathfrak{b}. \end{cases}$$

para todos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \widehat{\mathbb{R}}^{F}$.

Proposición A.8.2. *En las condiciones de la definición anterior, se verifica que:*

a) Los (pseudo)isoórdenes $\widehat{\leq}^{F}$ *y* $\widehat{\leq}^{F}_{e}$ *verifican la propiedad antisimétrica. Por su parte, el (pseudo)isoorden* $\widehat{\leq}^{F}$ *verifica la propiedad transitiva.*

b) El (pseudo)isoorden $\widehat{\leq}^{F}$ *(el (pseudo)isoorden de evolución* $\widehat{\leq}^{F}_{e}$*, resp.) verifica la propiedad reflexiva si y sólo si* F *es una subfamilia (pseudo)isotópica inyectiva (de evolución, resp.). De hecho, el (pseudo)isoorden* $\widehat{\leq}^{F}$ *es un orden total y un buen orden si y sólo si* F *es una subfamilia (pseudo)isotópica inyectiva.*

c) El (pseudo)isoorden de evolución $\widehat{\leq}^{F}_{e}$ *cumple la propiedad transitiva si y sólo si se verifica:*

(P_{Tr}) *Dados* $a_1, b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha, \beta \in F$, *tales que* $a_1 \leq b_1, b_2 \leq c_1$ *y* $\alpha(b_1) = \beta(b_2)$, *entonces:*

i) Existe $(a_0, c_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F$, *tal que* $a_0 \leq c_0$, $\gamma_0(a_0) = \alpha(a_1)$ *y* $\gamma_0(c_0) = \beta(c_1)$,

ii) Para todo $(a, c, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F$, *tal que* $\gamma(a) = \alpha(a_1)$, $\gamma(c) = \beta(c_1)$, *se verifica que* $a \leq c$.

d) El (pseudo)isoorden de evolución $\widehat{\leq}^{F}_{e}$ *es un orden parcial si y sólo si* F *es una subfamilia (pseudo)isotópica inyectiva de evolución y se verifica* (P_{Tr}).

e) El (pseudo)isoorden de evolución $\widehat{\leq}^{F}_{e}$ *cumple la propiedad de totalidad si* F *es inyectiva de evolución y se verifican* (P_{Tr}) *y:*

(P_T) *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha, \beta \in F$, *tales que* $\alpha(a) \neq \beta(b)$, *entonces:*

i) *Si* $\alpha = \beta$, *se cumple que, para todo* $(c, d, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F$, *tal que* $\gamma(c) = \alpha(a)$ *y* $\gamma(d) = \beta(b)$, *se verifica que* $c \leq d \Leftrightarrow a \leq b$.

ii) *Si* $\alpha \neq \beta$, *entonces:*

ii.a) *Existe* $(c_0, d_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F$, *tal que* $\gamma_0(c_0) = \alpha(a)$ *y* $\gamma_0(d_0) = \beta(b)$.

ii.b) *Para todo* $(c, d, \gamma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times F$, *tal que* $\gamma(c) = \alpha(a)$ *y* $\gamma(d) = \beta(b)$, *se verifica que* $c \leq d \Leftrightarrow c_0 \leq d_0$.

f) *Fijado* $\widehat{A}^F$ *el subconjunto isotópico asociado a un subconjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *por* F, *se cumple que* $\widehat{A}$ *tiene primer elemento* $\mathfrak{a}$ *respecto a* $\widehat{\leq}_e^F$ *si y sólo si:*

i) $\alpha_i(a) = \mathfrak{a}$, *para todo* $i \in I_F$, *siendo* a *el primer elemento de* A *respecto a* $\leq$,

ii) *No existe* $(b, i) \in A \times I_F$, *siendo* $b \neq a$, *tal que* $\alpha_i(b) = \mathfrak{a}$.

g) $\widehat{\leq}_e^F$ *es un buen orden si y sólo si para todos* $\alpha, \beta \in F$ *se verifica que* $\alpha = \beta$ *es una aplicación inyectiva.*

$\square$

En lo que sigue, cuando se utilicen las notaciones $\widehat{<}^F, \widehat{>}^F, \widehat{\geq}^F, \widehat{<}_e^F, \widehat{>}_e^F, \widehat{\geq}_e^F$, nos referiremos al sentido usual que se da a las notaciones $<, >$ y $\geq$, si bien atendiendo a cada isoorden en cuestión.

Definición A.8.3. *Sean dados:*

a) *Una familia (pseudo)isotópica* $\mathfrak{A}_\leq = \{\alpha_i^\leq\}_{i \in I_\leq}$ *de* $\mathbb{R}$ *en un conjunto* $\widehat{\mathbb{R}}$,

b) *Una subfamilia (pseudo)isotópica* $F_\leq$ *de* $\mathfrak{A}_\leq$,

c) $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *obtenido como levantado isotópico del cuerpo real* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *por un isotopismo* $\mathfrak{F}_\mathbb{R} = \mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$, *siendo:*
$\mathfrak{F}_+ = \left\{(\alpha_i^+, \beta_j^+, \gamma^+_{\Phi_+(i,j)})\right\}_{i \in I_+, j \in J_+}$ *y* $\mathfrak{F}_\times = \left\{(\alpha_i^\times, \beta_j^\times, \gamma^\times_{\Phi_\times(i,j)})\right\}_{i \in I_\times, j \in J_\times}$,

d) *Una (pseudo)isoaplicación* $\widehat{|.|} : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$, *asociada al valor absoluto sobre* $\mathbb{R}$ *por una familia* $|.|$*-(pseudo)isotópica* $\mathfrak{F}_{|.|} = \{(\alpha_i^{|.|}, \beta^{|.|}_{\Phi_{|.|}(i)})\}_{i \in I_{|.|}}$,

e) $(\widehat{U}, \widehat{+_U}, \widehat{.})$, *obtenido como levantado isotópico de un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $(U, +_U, .)$ *por un isotopismo* $\mathfrak{F}_U = \mathfrak{F}_{+_U} \times \mathfrak{F}$, *siendo:*
$\mathfrak{F}_{+_U} = \left\{(\alpha_i^{+_U}, \beta_j^{+_U}, \gamma_{\Phi_+(i,j)}^{+_U})\right\}_{i \in I_{+_U}, j \in J_{+_U}}$ *y* $\mathfrak{F} = \left\{(\alpha_i, \beta_j, \gamma_{\Phi(i,j)})\right\}_{i \in I, j \in J}$,

f) *Una (pseudo)isoaplicación* $\widehat{|}.\widehat{|}| : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$, *asociada a una* $\leq$*-norma sobre* U *por una familia* $||.||$*-(pseudo)isotópica* $\mathfrak{F}_{||.||} = \{(\alpha_i^{||.||}, \beta_{\Phi_{||.||}(i)}^{||.||})\})_{i \in I_{||.||}}$,

g) *Una función* $f : V \subseteq U \to \mathbb{R}$,

h) *Una (pseudo)isoaplicación* $\widehat{f} : \widehat{V} \subseteq \widehat{U} \to \widehat{\mathbb{R}}$, *asociada a* f *por una familia* f*-(pseudo)isotópica* $\mathfrak{F}_f = \{(\alpha_i^f, \beta_{\Phi_f(i)}^f)\}_{i \in I_f}$.

A continuación, tomemos:

$$\alpha^{\leq} \in \mathfrak{A}_{\leq}, \quad (\alpha^+, \beta^+, \gamma^+) \in \mathfrak{F}_+, \quad (\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times) \in \mathfrak{F}_\times,$$

$$(\alpha^{|.|}, \beta^{|.|}) \in \mathfrak{F}_{|.|}, \quad (\alpha^{+_U}, \beta^{+_U}, \gamma^{+_U}) \in \mathfrak{F}_{+_U}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{F},$$

$$(\alpha^{||.||}, \beta^{||.||}) \in \mathfrak{F}_{||.||}, \quad (\alpha^f, \beta^f) \in F_f.$$

El conjunto de elementos anteriores $F = \{\alpha^{\leq}, (\alpha^+, \beta^+, \gamma^+), (\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times), (\alpha^{|.|}, \beta^{|.|}), (\alpha^{+_U}, \beta^{+_U}, \gamma^{+_U}), (\alpha, \beta, \gamma), (\alpha^{||.||}, \beta^{||.||}, (\alpha^f, \beta^f)\}$ *será un* conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad . *Notaremos entonces:*

$$F_{\widehat{\mathbb{R}}} = \{\alpha^{\leq}, \alpha^+, \beta^+, \gamma^+, \alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times, \alpha, \alpha^{|.|}, \beta^{|.|}, \beta^f\},$$

$$F_{\widehat{U}} = \{\alpha^{+_U}, \beta^{+_U}, \gamma^{+_U}, \beta, \gamma, \alpha^{||.||}\beta^{||.||}, \alpha^f\},$$

$$\widehat{\mathbb{R}}^F = \widehat{\mathbb{R}}^{\{\alpha^{\leq}\}} \bigcup \widehat{\mathbb{R}}^{\{(\alpha^+, \beta^+, \gamma^+)\}} \bigcup \widehat{\mathbb{R}}^{\{(\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times)\}} \bigcup \widehat{\mathbb{R}}^{\{\alpha\}} \bigcup \widehat{\mathbb{R}}^{\{\alpha^{|.|}\}} \bigcup \widehat{\mathbb{R}}^{\{\beta^{|.|}\}} \bigcup \widehat{f(V)}^{\{\beta^f\}},$$

$$\widehat{V}^F = \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}, \quad \widehat{U}^F = \widehat{U}^{\{(\alpha^{+_U}, \beta^{+_U}, \gamma^{+_U})\}} \bigcup \widehat{U}^{\{(\alpha, \beta, \gamma)\}} \bigcup \widehat{U}^{\{\alpha^{||.||}\}} \bigcup \widehat{U}^{\{\beta^{||.||}\}} \bigcup \widehat{V}^F.$$

Definición A.8.4. *En las condiciones de la Definición A.8.3, supongamos que* F *es un conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad, tal que:*

a) $\widehat{\mathbb{R}}^{\{\lambda\}} = \widehat{\mathbb{R}}^F$, *para todo* $\lambda \in F_{\widehat{\mathbb{R}}} \setminus \{\{\beta^f\}\}$,

b) $(\widehat{\mathbb{R}}^F, \widehat{+}^{\{(\alpha^+, \beta^+, \gamma^+)\}}, \widehat{\times}^{\{(\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times)\}})$ *es un cuerpo,*

c) $\widehat{U}^{\{\lambda\}} = \widehat{U}^F$, *para todo* $\lambda \in F_{\widehat{U}} \setminus \{\{\alpha^f\}\}$, *d)* $(\widehat{U}^F, \widehat{+_U}^{\{(\alpha^{+_U},\beta^{+_U},\gamma^{+_U})\}}, \widehat{\cdot}^{\{(\alpha,\beta,\gamma)\}})$ *es un* $\widehat{\mathbb{R}}^F$*-espacio vectorial,*

e) $\widehat{\widehat{|.|}}$ *es un* $\widehat{\leq}^{\{\alpha^{\leq}\}}$*-módulo sobre* $\widehat{\mathbb{R}}^F$*,*

f) $\widehat{||.||}$ *es una* $\widehat{\leq}^{\{\alpha^{\leq}\}}$*-norma sobre* $\widehat{U}^F$*,*

g) $\widehat{f}^{\{(\alpha^f,\beta^f)\}} : \widehat{V}^{\{\alpha^f\}} \to \widehat{f(V)}^{\{\beta^f\}}$ *es una aplicación.*

Se dirá entonces que F es bueno *o bien que es un* buen *conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad.*

Sea ahora $\mathfrak{o}^F$ el elemento unidad de $\widehat{\mathbb{R}}^F$ respecto a $\widehat{+}^{\{(\alpha^+,\beta^+,\gamma^+)\}}$. Fijado $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}$, se dirá entonces que $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica en $\mathfrak{X}$ por F*, si, para todo $\epsilon \in \widehat{\mathbb{R}}^F$, siendo $\mathfrak{o}^F \widehat{<}^{\{\alpha^{\leq}\}} \epsilon$, existe $\delta \in \widehat{\mathbb{R}}^F$, siendo $\mathfrak{o}^F \widehat{<}^{\{\alpha^{\leq}\}} \delta$, tal que, para todo $\mathfrak{Y} \in \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}$ cumpliendo que:*

$$\widehat{||\mathfrak{X} -^{\{(\alpha^{+_U},\beta^{+_U},\gamma^{+_U})\}} \mathfrak{Y}||}^{\{(\alpha^{||\cdot||},\beta^{||\cdot||})\}} \widehat{\leq}^{\{\alpha^{\leq}\}} \delta,$$

se verifica que:

$$\widehat{|\widehat{f}^{\{(\alpha^f,\beta^f)\}}(\mathfrak{X}) -^{\{(\alpha^+,\beta^+,\gamma^+)\}} \widehat{f}^{\{(\alpha^f,\beta^f)\}}(\mathfrak{Y})|}^{\{(\alpha^{|\cdot|},\beta^{|\cdot|})\}} \widehat{\leq}^{\{\alpha^{\leq}\}} \epsilon.$$

Se dirá que $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica por F *si, para todo $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$, $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica en $\mathfrak{X}$ por F. Por otra parte, fijado $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$, se dirá que $\widehat{f}$ es* continua (pseudo)isotópica de evolución en $\mathfrak{X}$ *si es continua (pseudo)isotópica en $\mathfrak{X}$ por F, para todo buen conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad F tal que $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^F$. Por último, se dirá que $\widehat{f}$ es* continua (pseudo)isotópica de evolución en $\widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$ *si es continua (pseudo)isotópica de evolución en $\mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$.*

Ejemplo A.8.5. *Sea $\mathfrak{A}_{\leq} = \{\alpha_{(s,t)}\}_{(s,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, tal que $\alpha_{(s,t)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $\alpha_{(s,t)}(x) = xst^3$, para todos $x \in \mathbb{R}, s,t \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathfrak{A}_{\leq}$ es una familia isotópica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dicha familia no es inyectiva (pues, por ejemplo, $\alpha_{(4,1)}(2) = \alpha_{(1,2)}(1) = 8$), aunque sí es inyectiva de evolución. Por otra parte, obsérvese que, fijado $(s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:*

$$\widehat{\mathbb{R}}^{\{\alpha_{(s,t)}\}} = \mathbb{R},$$

$$a \widehat{\leq}^{\{\alpha_{(s,t)}\}} b \Leftrightarrow \frac{a}{st^3} \leq \frac{b}{st^3} \text{ para todos } s,t \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \leq b,$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

A continuación, consideremos por una parte el isotopismo identidad de $(\mathbb{R},+)$, $\mathfrak{F}_+ = \{(Id_{\mathbb{R}}, Id_{\mathbb{R}}, Id_{\mathbb{R}})\}$, *y por otra parte el isotopismo generalizado simple* $\mathfrak{F}_\times$ *de* $(\mathbb{R},\times)$ *en sí mismo, que tiene por isounidad a* $\widehat{I} : \mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, *tal que* $\widehat{I}(x,s,t) = xst^3$, *para todos* $x \in \mathbb{R}, s,t \in \mathbb{N}$, *y como aplicación isotópica a* $\Phi_\times : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *tal* $\Phi_\times(t_1,s_1,t_2,s_2) = (t_1t_2, s_1s_2)$, *para todos* $t_1,s_1,t_2,s_2 \in \mathbb{N}$. *La familia* $\mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$ *es por tanto un isotopismo de* $(\mathbb{R},+,\times)$ *en sí mismo. De hecho, para cada* $(t_1,s_1,t_2,s_2) \in \mathbb{N}^4$, *se cumple que* $\mathfrak{F}_+ \times \{(\alpha_{(t_1,s_1)}, \alpha_{(t_2,s_2)}, \alpha_{(t_1t_2,s_1s_2)})\}$ *es una subfamilia isotópica de* $\mathfrak{F}_+ \times \mathfrak{F}_\times$, *que permite obtener de nuevo* $(\mathbb{R},+,\times)$ *como levantado isotópico de sí mismo.*

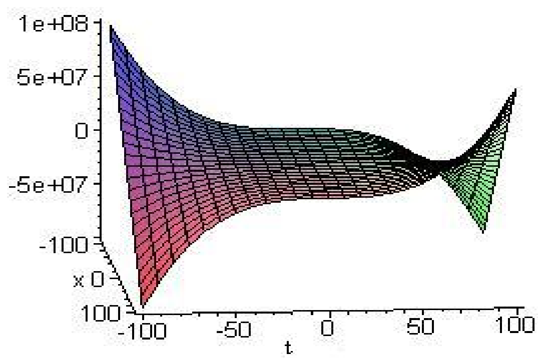

Figura A.7: $\widehat{I}(x,1,t) = xt^3$.

Sea ahora $\widehat{\widehat{|.|}}$ *la isoaplicación obtenida a partir de la familia* $|.|$*-isotópica* $\mathfrak{F} = \{(\mathfrak{A}_\leq, \mathfrak{A}_\leq)\}$, *siendo la aplicación* $|.|$*-isotópica correspondiente,* $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *tal que* $\Phi(s,t) = Id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(s,t) = (s,t)$, *para todos* $s,t \in \mathbb{N}$. *En particular,* $\widehat{\widehat{|.|}} : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ *es tal que* $\widehat{\widehat{|a|}} = |a|$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Consideremos ahora $(\mathbb{R},+,\times)$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y como* $\widehat{\mathbb{R}}$*-isoespacio vectorial, haciendo uso del mismo isotopismo que utilizamos para construir* $(\mathbb{R},+,\times)$ *como isocuerpo. De forma análoga, consideramos el valor absoluto sobre* $\mathbb{R}$ *como norma sobre* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y construimos la misma isoaplicación* $\widehat{\widehat{|.|}}$ *que antes.*

Fijada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cualquiera, consideramos* $\mathfrak{F}$ *y* Φ *como* f*-familia isotópica y* f*-aplicación isotópica, respectivamente. De esta forma, construiremos la isoaplicación de evolución* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que, para cada* $(s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *se tiene que* $\widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(s,t)}}}(a) = f(\frac{a}{st^3})st^3$, *donde* $F_{\mathfrak{A}_{(s,t)}} = \{\alpha_{(s,t)}\}$.

Tomemos como ejemplo la función $f(x) = x^2 + 5$. *Resulta entonces, por ejemplo, que:*

a) $\widehat{f}(a) = \left\{ f\left(\frac{a}{st^3}\right) st^3 : s,t \in \mathbb{N} \right\} = \{ \frac{a^2}{st^3} + 5st^3 : s,t \in \mathbb{N}\}$.

b) *Dado que* $8^{-\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{\mathfrak{A}_{\leq}}} = \{1,2,4,8\}$, *al ser* $8 = \alpha_{(1,1)}(8) = \alpha_{(2,1)}(4) = \alpha_{(4,1)}(2) = \alpha_{(8,1)}(1) = \alpha_{(1,2)}(1)$, *entonces* $\widehat{f}(8) = \{69, 42, 36, 48\}$.

c) $\widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(2,3)}}}(270) = \alpha_{(2,3)}(f(5)) = 1620$.

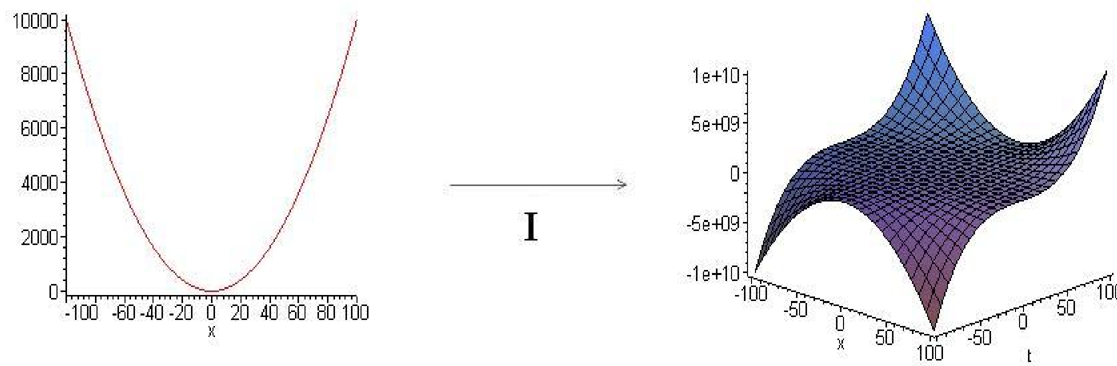

Figura A.8: $\widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(1,t)}}}(x) = \frac{x^2}{t^3} + 5t^3$.

La construcción que hemos realizado verifica las condiciones de la Definición A.8.4, necesarias para plantearnos la continuidad isotópica de evolución de la isoaplicación $\widehat{f}$. *En concreto vamos a suponer que* f *es una función continua y veamos que* $\widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(s,t)}}}$ *es una función continua isotópica de evolución. Para ello, fijamos* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\epsilon \in \mathbb{R}$, *tal que* $0 < \epsilon$. *Por ser* f *continua, podemos tomar* $\delta > 0$, *tal que si* $|a - b| < \frac{\delta}{st^3}$, *entonces* $|f(a) - f(b)| < \frac{\epsilon}{st^3}$. *Sea ahora* $c \in \mathbb{R}$, *tal que* $|a - c| < \delta$; *con lo cual,* $|\frac{a}{st^3} - \frac{c}{st^3}| < \frac{\delta}{st^3}$ *y así pues,* $|f(\frac{a}{st^3}) - f(\frac{c}{st^3})| < \frac{\epsilon}{st^3}$. *Se verifica entonces que* $|\widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(s,t)}}}(a) - \widehat{f}^{F_{\mathfrak{A}_{(s,t)}}}(c)| = |f(\frac{a}{st^3})st^3 - f(\frac{c}{st^3})st^3| = |f(\frac{a}{st^3}) - f(\frac{c}{st^3})|st^3 < \epsilon$. *Dada la arbitrariedad de* a *en* $\mathbb{R}$, *llegamos a que* f *es continua isotópica de evolución.* $\lhd$

Ejemplo A.8.6. *Sea* $\mathfrak{B} = \{\beta_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, *tal que* $\beta_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como* $\beta_t(x) = x^2 t$, *para todos* $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{N}$. *En particular,* $\mathfrak{B}$ *es una familia pseudoisotópica de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. *Dicha familia no es inyectiva de evolución, (pues, por ejemplo,* $\beta_1(2) = \beta_1(-2) = 4$*).*

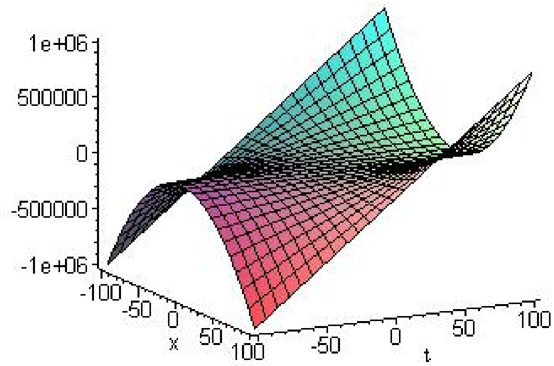

Figura A.9: $\beta_t(x) = x^2 t$.

Si en las condiciones del ejemplo anterior se considera que, fijada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se construye la correspondencia $\widehat{f} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, a partir de la f-familia pseudoisotópica $\mathfrak{F}_f = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, siendo $Id_{\mathbb{N}}$ la aplicación f-isotópica correspondiente, dicha correspondencia no es en general una pseudoisoaplicación de evolución. De hecho, para todo $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se verifica que $\widehat{f}(a) = \{\left(f\left(+\sqrt{\frac{a}{t}}\right)\right)^2 t, \left(f\left(-\sqrt{\frac{a}{t}}\right)\right)^2 t\}_{t\in\mathbb{N}}$.

Así por ejemplo, considerando las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x+1$, podemos comprobar que:

$$\widehat{f}_1(a) = a, \qquad \widehat{f}_2(a) = \left\{\left(+\sqrt{\frac{a}{t}}+1\right)^2 t, \left(-\sqrt{\frac{a}{t}}+1\right)^2 t\right\}_{t\in\mathbb{N}}.$$

De esta forma, $\widehat{f_1}$ es de hecho una pseudoisoaplicación, mientras que $\widehat{f_2}$ no es siquiera una pseudoisoaplicación de evolución. Respecto a $\widehat{f_1}$, se comprueba en concreto fácilmente que es continua pseudoisotópica de evolución. $\lhd$

Definición A.8.7. *En las condiciones de la Definición A.8.3, supongamos que $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ es un (pseudo)isocuerpo y que $(\widehat{U}, \widehat{+_U}, \widehat{\cdot})$ es un $\widehat{\mathbb{R}}$-(pseudo)isoespacio vectorial. Fijado $\mathfrak{X} \in \widehat{U}$, se dirá entonces que $\widehat{f}$ es* isocontinua en $\mathfrak{X}$ *(*isocontinua de evolución*, resp.) si, para todo $\epsilon \in \widehat{\mathbb{R}}$, existe $\delta \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que, para todo $\mathfrak{Y} \in \widehat{\mathbb{R}}$ cumpliendo que $\widehat{||\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}||}\widehat{\leq}^{F^{\leq}}\epsilon$ ($\widehat{||\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}||}\widehat{\leq}_e^{F^{\leq}}\epsilon$, resp.), se verifica que $\widehat{|\widehat{f}(\mathfrak{X}) - \widehat{f}(\mathfrak{Y})|}\widehat{\leq}^{F^{\leq}}\delta$ ($\widehat{|\widehat{f}(\mathfrak{X}) - \widehat{f}(\mathfrak{Y})|}\widehat{\leq}_e^{F^{\leq}}\delta$, resp.). Se dirá que $\widehat{f}$ es* isocontinua *(*isocontinua de evolución, *resp.) en $\widehat{U}$ si, para todo $\mathfrak{X} \in \widehat{U}$, $\widehat{f}$ es isocontinua (isocontinua de evolución, resp.) en $\mathfrak{X}$.*

A.9. Continuidad en espacios (pseudo)-isotopológicos

La noción de continuidad isotópica de evolución se generaliza fácilmente a espacios (pseudo)isotopológicos:

Definición A.9.1. *Sean dados:*

a) Dos espacios topológicos M y N, con topologías de abiertos $\mathfrak{T}_M$ y $\mathfrak{T}_N$, respectivamente,

b) Dos familias (pseudo)isotópicas, $\mathfrak{F}_M = \{\alpha_i^M\}_{i\in I_M}$ y $\mathfrak{F}_N = \{\alpha_i^N\}_{i\in I_N}$, de M en un conjunto $\widehat{M}$ y de N en un conjunto $\widehat{N}$, respectivamente,

c) Una aplicación $f : V \subseteq M \to N$,

d) Una (pseudo)isoaplicación $\widehat{f} : \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f} \subseteq \widehat{M} \to \widehat{N}$, asociada a f por una familia f-(pseudo)isotópica $\mathfrak{F}_f = \{(\alpha_i^f, \beta_{\Phi_f(i)}^f)\}_{i\in I_f}$.

A continuación tomemos $\alpha^M \in \mathfrak{F}_M$, $\alpha^N \in \mathfrak{F}_N$ y $(\alpha^f, \beta^f) \in \mathfrak{F}_f$. El conjunto $F = \{\alpha^M, \alpha^N, (\alpha^f, \beta^f)\}$ será un conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad*. Notaremos entonces:*

$$F_{\widehat{M}} = \{\alpha^M, \alpha^f\}, \qquad F_{\widehat{N}} = \{\alpha^N, \beta^f\},$$

$$\widehat{V}^F = \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}, \qquad \widehat{M}^F = \widehat{M}^{\{\alpha^M\}} \bigcup \widehat{V}^F, \qquad \widehat{N}^F = \widehat{N}^{\{\alpha^N\}} \bigcup \widehat{f(V)}^{\{\beta^f\}}.$$

Definición A.9.2. *En las condiciones de la Definición A.9.1, supongamos que F es un conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad, tal que:*

a) $\widehat{M}^F = \widehat{M}^{\{\alpha^M\}}$,

b) $\widehat{M}^F$ es un espacio topológico con topología de abiertos $\widehat{\mathfrak{T}_M}^{\{\alpha^M\}}$,

c) $\widehat{N}^F = \widehat{N}^{\{\alpha^N\}}$,

d) $\widehat{N}^F$ es un espacio topológico con topología de abiertos $\widehat{\mathfrak{T}_N}^{\{\alpha^N\}}$,

e) $\widehat{f}^{\{(\alpha^f,\beta^f)\}} : \widehat{V}^{\{\alpha^f\}} \to \widehat{f(V)}^{\{\beta^f\}}$ es una aplicación.

Se dirá entonces que F es bueno*, o bien que es un* buen *conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad.*

Fijado $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}$, se dirá entonces que $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica en $\mathfrak{X}$ por F*, si es una aplicación continua entre los espacios topológicos $\widehat{M}^F$ con topología de abiertos $\widehat{\mathfrak{T}_M}^{\{\alpha^M\}}$ y $\widehat{N}^F$ con topología de abiertos $\widehat{\mathfrak{T}_N}^{\{\alpha^N\}}$. Se dirá que $\widehat{f}$ es* continua (pseudo)isotópica por F *si, para todo $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\{\alpha^f\}}$, $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica de evolución en $\mathfrak{X}$ por F. Por otra parte, fijado $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$, se dirá que $\widehat{f}$ es* continua (pseudo)isotópica de evolución en $\mathfrak{X}$ *si es continua (pseudo)isotópica en $\mathfrak{X}$ por F, para todo buen conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad F tal que $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^F$. Por último, se dirá que $\widehat{f}$ es* continua (pseudo)isotópica de evolución en $\widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$ *si es continua (pseudo)isotópica de evolución en $\mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$.*

Se dirá que $\widehat{f}$ es bicontinua (pseudo)isotópica de evolución *si es biyectiva y continua (pseudo)isotópica de evolución en $\widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$ y su inversa $\widehat{f}^{-1} : \widehat{f(V)}^{\mathfrak{F}_f} \to \widehat{V}^{\mathfrak{F}_f}$ es continua (pseudo)isotópica de evolución en $\widehat{f(V)}^{\mathfrak{F}_f}$.*

Proposición A.9.3. *En las condiciones de la Definición A.9.1, supongamos que F sea un buen conjunto de valores específicos de (pseudo)isocontinuidad, tal que:*

a) $(\alpha^f, \beta^f) = (\alpha^M, \alpha^N)$,

b) α^M *y* α^N *son aplicaciones inyectivas.*

Resulta entonces que $\widehat{f}$ es continua (pseudo)isotópica por F si y sólo si f es una aplicación continua entre los espacios topólogicos M y N. □

Ejemplo A.9.4. *Sea $(\mathbb{E}^2, +, .)$ el espacio euclídeo 2-dimensional y consideremos, por una parte, el círculo de radio 2, $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, como espacio topológico con la topología euclídea usual y, por otra parte, la aplicación identidad $Id_C : C \to C$.*

Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera en $\mathbb{R}^3$ de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 y consideremos:

a) *La proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0, 0, 1) \in S^2$, π_N, de S^2 en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$,* *b)* *La proyección estereográfica desde el polo sur* $S = (0,0,-1) \in S^2$, π_S, *de* S^2 *en el plano* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$,

c) *Las aplicaciones* $\alpha_1 : C \to S^2$ *y* $\alpha_2 : C \to S^2$, *tales que* $\alpha_1(x,y) = \pi_N^{-1}(x,y,-1)$ *y* $\alpha_2(x,y) = \pi_S^{-1}(x,y,1)$, *para todo* $(x,y) \in C$.

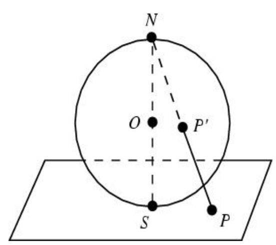

Figura A.10: Proyección estereográfica desde el polo norte.

En particular, $\alpha_1(C) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \leq 0\}$ *y* $\alpha_2(C) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ *son los hemisferios sur y norte de* S^2, *respectivamente. Resulta entonces que* $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ *es una familia pseudoisotópica de* C *en* S^2. *De hecho, por ser inyectivas las aplicaciones* α_1 *y* α_2, *se verifica que* S^2 *es un espacio pseudoisotopológico asociado a* C *por* $\mathfrak{A}$.

A continuación, fijados $A = (a,b), B = (c,d) \in \mathbb{E}^2$, *consideramos las aplicaciones* $\alpha_A : C \to \mathbb{E}^2$ *y* $\alpha_B : C \to \mathbb{E}^2$, *tales que* $\alpha_A(x,y) = (x+a, y+b)$ *y* $\alpha_B(x,y) = (x+c, y+d)$, *para todo* $(x,y) \in C$. *Supongamos además que* A *y* B *se han elegido de tal forma que* $\alpha_A(C) \cap \alpha_B(C) = \emptyset$. *Resulta entonces que* $\mathfrak{B} = \{\alpha_A, \alpha_B\}$ *es una familia isotópica de* C *en* $\widehat{C}^{\mathfrak{B}} = \alpha_A(C) \cup \alpha_B(C)$. *De hecho, por ser inyectivas las aplicaciones* α_A *y* α_B, *se verifica que* $\widehat{C}^{\mathfrak{B}}$ *es un espacio isotopológico asociado a* C *por* $\mathfrak{B}$.

Finalmente consideramos la familia Id*-pseudoisotópica inyectiva de evolución* $\mathfrak{F} = \{(\alpha_1, \alpha_A), (\alpha_2, \alpha_B)\}$. *Resulta por tanto que el levantado isotópico de* Id_C *por* $\mathfrak{F}$, $\widehat{Id_C} : S^2 \to \widehat{C}^{\mathfrak{B}}$, *es una aplicación continua pseudoisotópica de evolución en* S^2, *al ser continua convencionalmente la aplicación* Id_C. *Obsérvese en particular que* $\widehat{Id_C}$ *es de hecho una correspondencia y no una aplicación, si bien sí es una isoaplicación de evolución, biyectiva de evolución.*

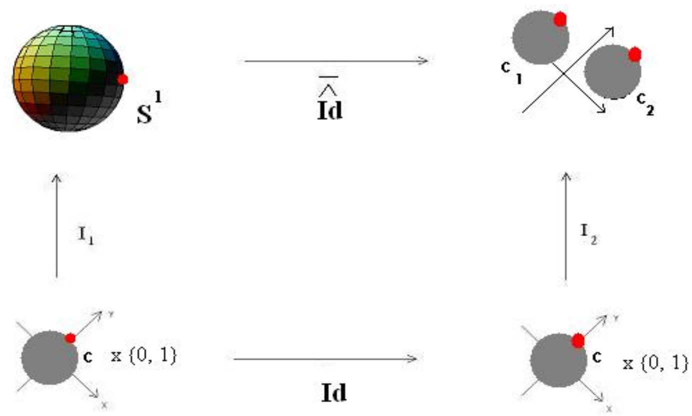

Figura A.11: Aplicación continua (pseudo)isotópica de evolución desde una esfera a dos círculos.

◁

Bibliografía

[1] J. Aczél, Quasigroups, Nets and Nomograms, *Advances in Math.*, **1**, issue 3, 383-450.

[2] Albert, A. A., Non-associative algebras. I. Fundamental Concepts and Isotopy *Annals of Mathematics*, **43**, 685-707.

[3] A. A. Albert, Power-associative rings *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, (1948), 552-593.

[4] A. K. Aringazin, A. Jannussis, D. F. Lopez, M. Nishioka and B. Veljanoski, Santilli's Lie-isotopic Generalization of Galilei's and Einstein's Relativities, [Kostarakis Publisher], Athens, (1991).

[5] A. K. Aringazin, D. A. Kirukhin and R. M. Santilli, Isotopic generalization of Legendre, Jacobi and Bessel functions, *Algebras, Groups and Geometries* **12**, (1995), 255-305.

[6] A. Arvanitoyeorgos, An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces, *Student Mathematical Library* **22**, ISBN 0-8218-2778-2, (2003).

[7] N. Bourbaki, Éléments de Mathematique, *Hermann*, Paris, (1970).

[8] N. Bourbaki, Lie Groups and Lie Algebras, *Addison Wesley-Hermann*, Paris, (1995).

[9] R. H. Bruck, Contributions to the theory of loops, *Trans. Amer. Math. Soc.* **60**, (1946), 245-354.

[10] R. H. Bruck, A survey of binary systems, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge* 20. Springer, Berlin (1958).

[11] Chun-Xuan Jiang, Foundations of Santilli's Isonumber Theory, with Applications to New Cryptograms, Fermat's Theorem and Goldbach's Conjecture, *International Academic Press*, (2002).

[12] M. P. Do Carmo, Differential Forms and Applications, *Springer-Verlag*, Berlín, (1994).

[13] M. Dresher, O. Ore, Theory of multigroups, *American Journal of Mathematics* **60**, (1938), 705-733.

[14] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, La isoteoría de Santilli, Mathematical Series, International Academic Press, America - Europe - Asia, ISBN 1-57485-055-5, (2001).

[15] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, Studies of the Tsagas-Sourlas-Santilli isotopology, *Algebras, Groups and Geometries* **20**, issue 1, (2003), 1-100.

[16] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, Isogroups and isosubgroups, *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.* Vol. 97 (1), (2003), 1-12.

[17] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, Hausdorff isospaces and coordinate-temporal charts, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, (2003). In press.

[18] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, The general set in the MCIM isotopic model (personal comunication).

[19] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, Extension of Santilli's isotopies to non-injective isoalgebras, *Nonlinear functional analysis and applications*, (2004). In press.

[20] R. M. Falcón Ganfornina, J. Núñez Valdés, Recent advances on Tsagas-Sourlas-Santilli isotopology, *Nonlinear functional analysis and applications*, (2004). In press.

[21] A. A. Hausmann, O. Ore, Theory of Quasi-groups, American Mathematical Journal **59**, 983-1004, (1937).

[22] V. Havel, Nets associated in multigroupoids, *Aequations Math* **5**, (1970), 10-18.

[23] J. V. Kadeisvili, Elements of functional isoanalysis, *Algebras, Groups and Geometries* **9**, (1992), 283-318.

[24] J. V. Kadeisvili, Santilli's isotopies of contemporary algebras, *Geometries and Relativities* second edition, Ukraine Academy of sciences, Kiev, (1994).

[25] J. V. Kadeisvili, An introduction to the Lie-Santilli isotopic theory, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **19**, (1996), 1349-1395.

[26] J. V. Kadeisvili, Foundations of the Lie-Santilli isotheory, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* serie II, supl. 42, (1996), 83-136.

[27] J. V. Kadeisvili, Santilli's Isotopies of Contemporary Algebras, Geometries and Relativities, Second Edition, Ukraine Academy of Sciences, Kiev , Second Edition, ISBN 0-911767-61-4, (1997).

[28] A. Krapež, M. A. Taylor, Quasigroups satisfying balanced but not Belousov equations are group isotopes, Aequations Mathematicae **42**, (1991), 37-46.

[29] R. Hermann, Lie Groups for Physicists, *University of Bangalore Press*, ISBN 0-72111-403-2, (1994).

[30] J. Lõhmus, E. Paal, L. Sorgsepp, Nonassociative Algebras in Physics. Hadronic Press, (1994).

[31] Y. Matsushima, Differentiable Manifolds, *Marcel Decker*, New York, (1972).

[32] H. C. Myung, Lie Algebras and Flexible Lie-Admissible Algebras, Hadronic Press, (1982).

[33] W. Rossmann, Lie Groups (An introduction through linear groups), *Oxford Science publications*, ISBN 0-19-859683-9, (2002).

[34] R. M. Santilli, On a possible Lie-admissible covering of the Galilei Relativity in Newtonian Mechanics for nonconservative and Galilei noninvariant systems, *Hadronic J.* **1** (1978), 223-423. Addendum, ibid, **1**, (1978), 1279-1342.

[35] R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended-deformable particles, *Letter Nuovo Cimento* **37**, (1983), 545-555.

[36] M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, Vol. II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, (1983).

[37] R. M. Santilli, Isotopic liftings of contemporary mathematical structures, *Hadronic Journal Suppl.* **4** A, (1988), 155-266.

[38] R. M. Santilli, Isotopic Generalizations of Galilei's and Einstein's Relativities, Vols. I and II, Hadronic Press, (1991).

[39] R. M. Santilli, Isotopies of contemporary mathematical structures, I: Isotopies of fields, vector spaces, transformation theory, Lie algebras, analytic mechanics ans space-time symmetries, *Algebras, Groups and Geometries* **8**, (1991), 169-266.

[40] R. M. Santilli, Elements of Hadronic Mechanics, Vol. I: Mathematical Foundations, Ukraine Academy of Sciences, Kiev, (1993).

[41] R. M. Santilli, Isonumbers and genonumbers of dimension 1,2,4,8, their isoduals and pseudoisoduals, and hidden numbers of dimension 3, 5, 6, 7, *Algebras, Groups and Geometries*, **10**, (1993), 273-322.

[42] R. M. Santilli, Elements of Hadronic Mechanics, Vol. I, *Mathematical Foundations* Second Edition, Kiev, (1995).

[43] R. M. Santilli, Nonlocal-integral isotopies of differential calculus, mechanics and geometries, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Serie II, Supl. 42, (1996), 7-82.

[44] R. M. Santilli: Isotopies of trigonometric and hyperbolic functions, *Ann. Univ. of Costanta, Romania*, (1998).

[45] R. M. Santilli: Isominkowsian geometry for the gravitational treatment of matter and its isodual for antimatter, *Intern. J. Modern Phys. D* **17**, (1998), 351-407.

[46] R. M. Santilli, Physical Laws of new energies as predicted by hadronic mechanics, *Journal New Energies* Papers I, II, III, IV and V, (1999), in press.

[47] R. M. Santilli and D. D. Shillady, A new isochemical model of the hydrogen molecule, *Intern. J. Hydrogen Energy* **24**, (1999), 943-956.

[48] R. M. Santilli and D. D. Shillady, A new isochemical model of the water molecule, *Intern. J. Hydrogen Energy* **25**, (2000), 173-183.

[49] R. M. Santilli, Foundations of Hadronic Chemistry with Applications to New Clean Energies and Fuels, *Kluwer Academic Publishers*, (2001).

[50] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Mathematical Foundations of the Lie-Santilli Theory, Hadronic Press, (1993).

[51] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12**, (1995), 1-65.

[52] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomappings between isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12**, (1995), 67-88.

[53] G. T. Tsagas, Isoaffine connections and Santilli's isoriemannian metrics on a isomanifold, *Algebras, Groups and Geometries* **13**, (1996), 149-170.

[54] G. T. Tsagas, Studies on the classification of Lie-Santilli Algebras, *Algebras, Groups and Geometries* **13**, (1996), 129-148.

[55] L. Serge, Álgebra lineal, Fondo educativo interamericano, Bogotá, (1975).

[56] F. W. Warner, Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman Comp., London, (1971).