UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal

Memoria presentada por Desamparados Fernández Ternero para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Desamparados Fdez

$V^{\underline{o}}$ $B^{\underline{o}}$ del Director,

Núñez

Fdo. Juan Núñez Valdés, Titular de Universidad del Dept. de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Abril de 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al folio 67 número 167 del libro correspondiente.

Sevilla, 6 MAR. 2001

El Jefe del Negociado.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en la Secretaría Dpto de la Fac. Matemáticas de esta Universidad desde el día 9 marzo hasta el día 26 marzo

Sevilla 27 de Marzo de 2001

EL DIRECTOR DE

DPTO. DE GEOMETRÍA

A José Luis

AGRADECIMIENTOS

En estas líneas, quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me han mostrado su apoyo y estímulo durante la realización de esta Memoria.

En primer lugar, quisiera agradecer al director de la misma, D. Juan Núñez Valdés, toda su ayuda y las muchas horas de trabajo que ha dedicado a esta investigación, así como sus consejos y asesoramiento, sin los que no hubiera sido posible realizar este trabajo.

He de hacer especial mención al profesor Louis Santharoubane, que ha supervisado buena parte de la investigación y que con sus observaciones y consejos ha contribuido a que este trabajo llegue a buen término.

Quiero resaltar la ayuda "informática" prestada por Rafael Fernández Mateos y el profesor Eduardo Díaz Delgado, la cual no sólo ha sido importante para el trabajo comprendido en esta memoria, sino que también contribuirá a continuar con la investigación.

Gracias también a todos los compañeros y amigos del Departamento de Geometría y Topología que me animaron en mi tarea.

Por último, quiero dar las gracias a mi familia y, en especial, a mi marido, que no ha cesado de apoyarme y animarme a continuar con mi trabajo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Como ya es sabido, existen 3 tipos distintos de álgebras de Lie: las *semisimples*, las *resolubles* y un tercer tipo constituido por todas aquellas álgebras de Lie que no son ni semisimples ni resolubles. Para clasificar entonces las álgebras de Lie en general, bastaría con dar la clasificación de cada uno de estos tres subconjuntos disjuntos.

No obstante, el *Teorema de descomposición* de E. E. Levi, enunciado a finales de los años 50, establece que toda álgebra de Lie puede descomponerse como suma semidirecta de su radical (que es resoluble) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Levi del álgebra de Lie inicial). Este resultado permite entonces reducir la clasificación de las álgebras de Lie en general a la clasificación de las álgebras de Lie semisimples y a la de las resolubles.

Por lo que respecta a las primeras, las semisimples, esta clasificación es ya totalmente conocida dado que toda álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples y la clasificación de estas álgebras de Lie simples ya fue obtenida en 1890 por Killing y Cartan, entre otros. Estos autores encontraron que existen 4 tipos distintos de álgebras de Lie simples: las del *conjunto especial lineal*, las *ortogonales impares*, las *simplécticas* y las *ortogonales pares*, más otras 5 álgebras de Lie simples, no pertenecientes a ninguno de estos cuatro grupos anteriores y que ellos denominaron álgebras *exóticas*.

Con respecto a las álgebras de Lie resolubles, sólo es conocida hasta el momento la clasificación de estas álgebras para dimensiones menores o iguales que 5. No obstante, Malcev, en 1945 (véase [39]), probó que la determinación de las álgebras de Lie resolubles se podía reducir a la obtención de las álgebras de Lie nilpotentes, que constituyen un subconjunto suyo. En su trabajo, Malcev utiliza ideales nilpotentes maximales para definir un tipo particular de álgebras resolubles, que él denomina *álgebras separadas*, y prueba que toda álgebra de Lie resoluble está contenida en una álgebra separada minimal unívocamente determinada. La relación entre un álgebra de Lie resoluble y sus separadas permite construir todas las álgebras de Lie resolubles que tienen álgebras separadas dadas, lo cual le permite reducir la clasificación de las álgebras de Lie resolubles a la de las nilpotentes.

Respecto a las álgebras de Lie nilpotentes, ya en 1891, K. A. Umlauf (véase [51]), discípulo de Engel, clasificó todas las álgebras de Lie nilpotentes complejas hasta dimensión 6, viendo que existían un número finito de ellas. También estudió estas álgebras en dimensiones 7, 8 y 9, encontrando que aparecían varias familias infinitas de álgebras de Lie nilpotentes de estas dimensiones.

Posteriormente, varios autores realizaron diferentes intentos para obtener estas clasificaciones. Así, en la década de los 50, se encuentran entre otros trabajos los de Morosov, Dixmier y Vranceanu. En particular, Dixmier, en 1957 (véase [19]), clasifica las álgebras de Lie nilpotentes sobre un cuerpo conmutativo hasta dimensión 5. En ese mismo año, Morosov ([42]) publica un primer intento de clasificar las álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión 6 y clasifica correctamente las complejas de esa dimensión. Previamente, Vranceanu en 1950 y Chevalley en 1957 habían trabajado sobre estas álgebras de Lie nilpotentes (véanse [54] y [17], respectivamente).

Vergne y Safiullina son principalmente los que en la década de los 60 realizaron diversos intentos de clasificación de estas álgebras, consiguiendo en muchos casos notables resultados. Así, Safiullina, en 1964, aporta nuevos resultados al estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 (véase [46]), pero es realmente M. Vergne, en 1966, en su tesis doctoral (véase [52]), posteriormente publicada en [53], la que da un fuerte impulso al tratamiento de estas álgebras. En realidad, Vergne realiza una labor doblemente importante: por un lado, da la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión menor o igual que 6 y por otra parte, define las álgebras de Lie filiformes, tal y como las conocemos actualmente. Estas álgebras de Lie filiformes constituyen un subconjunto de las álgebras de Lie nilpotentes. Chong Yun Chao fue otro de los autores de esta década que también trabajaron en el tema de las álgebras de Lie nilpotentes (véase [18]), así como el colectivo Bourbaki [8].

En la década de los 70 son también varios los autores que continúan trabajando en esta clasificación, entre ellos P. de la Harpe (véase [35]) en 1972, Favre y Gauger (véanse [26] y [29], respectivamente) en 1973, y Skjelbred y Sund, en 1977 (véase [50]).

No obstante, no es hasta la década siguiente cuando se produce un avance sustancial en la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes. Así, en 1988, Goze y Ancochea realizan una clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 8 (véase [4]), mediante la introducción de un invariante para estas álgebras, llamado por ellos *sucesión característica*, que definen como la dimensión maximal de las cajas de Jordan de una cierta matriz nilpotente (véanse [4] y [5]). Este mismo invariante les posibilitó dar una clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 (véase [5]). De esos trabajos se deduce que las álgebras de Lie filiformes son las que, dentro de las nilpotentes, tienen la mayor sucesión característica $(n-1, 1)$ en un orden natural dado por ellos. Pese a todo, la lista dada en [4] no estaba completa y presentaba algunos defectos. Posteriormente, los mismos autores la rectificaron en [6], casi al mismo tiempo que Seeley (véase [49]), aunque de manera independiente. Sin embargo, los intentos de estos dos autores de continuar con su método en dimensiones mayores no fructificaron, debido a la aparición de numerosas dificultades. Otro de los autores que también trabajó en esta década en el estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas fue Romdhani, en 1989 (véase [45]).

Desde entonces, pese a los numerosos intentos realizados, no se ha llegado a clasificar el conjunto de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 8 ni los de dimensiones superiores, por lo que éste es un problema que continúa abierto en la actualidad.

Al objeto de ir avanzando algo en la resolución del mismo, Gómez y Echarte, en 1991, utilizaron una técnica similar a la ideada por Goze para clasificar las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 9 (véase [21]). En esta clasificación aparecen por primera vez familias biparamétricas de álgebras de Lie filiformes. Además, en varias familias, los parámetros no recorren el cuerpo complejo, sino un conjunto cociente de este cuerpo por una relación de equivalencia dada.

Posteriormente, en 1994, Boza, Echarte y Núñez clasifican las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 10 (véase [9]). Para ello, introducen un nuevo invariante, que ellos denominan el *par (i, h)*. En esta clasificación aparecen por primera vez familias triparamétricas de álgebras de Lie filiformes.

Más tarde, Gómez, Jiménez y Khakimdjanov, en 1996, aprovechan las ideas de Vergne e introducen los *cambios de base elementales* para clasificar las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 11 y para dar algunas correcciones a clasificaciones anteriores (véase [32]).

Finalmente, mediante una nueva técnica de clasificación de álgebras de Lie filiformes, basada en el isomorfismo de álgebras, Boza, Fedriani y Núñez obtuvieron en 1998 la clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 12 (véanse [10] y [11]).

No obstante, llegados a este punto, surgieron de nuevo las dificultades, sobre todo de tipo computacional, que se habían detectado ya antes en el tratamiento de este problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes en dimensiones mayores, por lo que de nuevo apareció con fuerza la idea de reducir este problema considerando nuevos subconjuntos de álgebras de Lie nilpotentes, cuya clasificación fuese más sencilla de conseguir. Al mismo tiempo, también se estaban considerando problemas que se dirigen más a la búsqueda de nuevos resultados relativos a estas álgebras de Lie que a la clasificación en sí de las mismas. Nos referimos a problemas tales como la obtención de nuevos invariantes para estas álgebras o la descripción de los conjuntos algebraicos de leyes de álgebras de Lie filiformes y de sus componentes irreducibles. Desde luego, este estudio requiere también de cálculos largos y complicados, para cuya realización es necesario el uso de programas de computación simbólica.

Así, referente al tema de los invariantes, Echarte, Núñez y Ramírez obtienen en 1996 (véase [25]) un nuevo invariante para las álgebras de Lie filiformes complejas que ellos denominan el *invariante* j, cuyas propiedades están muy relacionadas con el *invariante* i (previamente obtenido por los dos primeros autores en 1994 (véase [22]). En el citado artículo, estos autores prueban que un álgebra de Lie filiforme compleja queda completamente determinada si se conocen todos los productos corchete de la forma $[e_h, e_n]$ con $i \leq h < n$ o bien todos los productos corchete de la forma $[e_k, e_{k+1}]$, con $j \leq k < n$, donde i, j y n son los invariantes definidos. También prueban que la relación entre estos invariantes viene determinada por las siguientes desigualdades:

$4 \leq i \leq j < n \leq 2j - 2$.

Con respecto al tema de las componentes irreducibles, indicar que ya Khakimdjanov (véase [38]) había probado que las álgebras de Lie filiformes de dimensión $n \geq 12$ poseen, al menos, 3 componentes irreducibles y que si n es par, entonces el número de componentes es siempre mayor que 3. Nótese que el estudio de la dimensión 12 tiene un aliciente especial, ya que en ese mismo artículo, Khakimdjanov afirma que las álgebras de Lie filiformes poseen propiedades comunes comenzando en la dimensión 12. No obstante, como ya ha sido comentado, la clasificación de estas álgebras de Lie filiformes de dimensión $n > 12$ no ha sido aún obtenida.

En 1995, Castro y Núñez estudian el conjunto de álgebras de Lie filiformes complejas característicamente nilpotentes de dimensión 9 (véase [15]). Las álgebras de Lie característicamente nilpotentes se definen como aquellas álgebras de Lie complejas en las cuales todas sus derivaciones son nilpotentes. Estas álgebras fueron introducidas por Dixmier y Lister en 1957 (véase [20]).

Según la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que 6 dada por Morosov (véase [42]), no existen álgebras de Lie característicamente nilpotentes de dimensión menor o igual que 6 en el cuerpo complejo. En [14], Carles prueba que el conjunto de álgebras de Lie característicamente nilpotentes de dimensión n es un subconjunto constructible de Zariski, no vacío, de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes sobre $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 7$. Más aún, en [30] y [31], Godfrey prueba que existen (salvo isomorfismos) tres álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes de dimensión 7. Respecto a la dimensión 8, Echarte, Gómez y Núñez indican en [22] siete álgebras de Lie filiformes y cinco familias uniparamétricas de álgebras de Lie filiformes que son característicamente nilpotentes.

Castro y Núñez prueban, asimismo en [15] que el conjunto de álgebras de Lie filiformes complejas característicamente nilpotentes de dimensión 9 es un conjunto constructible de Zariski en la variedad de álgebras de Lie filiformes. Este resultado ya había sido probado anteriormente por Carles (véase [14]), pero Castro y Núñez lo mejoran en el sentido de dar una expresión explícita de este conjunto como unión finita de conjuntos de Zariski localmente cerrados. Para ello, utilizan la teoría de bases de Gröbner (véase [13]) y el programa de computación simbólica *Mathematica* para realizar los cálculos necesarios, basados en la manipulación de un sistema lineal de ecuaciones con coeficientes en un anillo cociente de polinomios.

Al año siguiente, en 1996, esos mismos autores estudian en [16] las álgebras de Lie filiformes complejas característicamente nilpotentes de dimensión 10. Prueban que el conjunto de leyes (salvo isomorfismos) de las álgebras de Lie filiformes sobre $\mathbb{C}^{10}$ es un subconjunto algebraico afín $\mathcal{V}_{10}$ de $\mathbb{C}^{13}$ con dimensión de Krull 10 y que ese conjunto tiene tres componentes irreducibles, cada una de las cuales es una hipercuádrica. Estudian cada una de esas tres componentes y dan, mediante la teoría de Bases de Gröbner y la utilización del programa *Mathematica*, el conjunto de puntos correspondientes a las álgebras de Lie filiformes complejas característicamente nilpotentes de esa dimensión como unión finita de subconjuntos de Zariski localmente cerrados.

Posteriormente, a finales de ese año, Benjumea, Castro, Márquez y Núñez describen en [7] el conjunto de leyes (salvo isomorfismo) de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 13 como un subconjunto algebraico afín $\mathcal{V}^{13} \subset \mathbb{C}^{25}$ y el de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 14 como un subconjunto algebraico afín $\mathcal{V}^{14} \subset \mathbb{C}^{31}$. Para la realización de estos cálculos, estos autores se sirven de nuevo del paquete de computación simbólica *Mathematica* y de la teoría algebraica de bases de Gröbner.

Finalmente, en [33], Gómez, Jiménez y Núñez describen un algoritmo para obtener las familias de leyes de álgebras de Lie filiformes, al tiempo que aparecen nuevos intentos de continuar reduciendo el tratamiento de las álgebras de Lie nilpotentes, a fin de abordar con mayores probabilidades de éxito el problema de su clasificación. Entre estos nuevos intentos, citar el tratamiento, por diverso, de las álgebras de Lie p-abelianas, el de las álgebras de Lie casifiliformes graduadas (véase [44]) y el de reciente aparición de las álgebras de Lie filiformes complejas c-graduadas (véanse [23] y [24]).

No obstante, la introducción por parte de V. Kac y R.V. Moody, en 1968, de las actualmente conocidas con el nombre de *álgebras de Kac-Moody* (véase [36] y [41]) supuso la aparición de una nueva línea de investigación en el estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes, esencialmente distinta de la expuesta anteriormente. Estas álgebras de Kac-Moody, construidas a partir de unas matrices muy parecidas a las matrices de Cartan (por lo que se las denomina *matrices de Cartan generalizadas*) son generalmente de dimensión infinita y constituyen en realidad una generalización de las álgebras de Lie semisimples (véase Cap. 1).

Así, L. J. Santharoubane, mediante la utilización de los *sistemas de raíces* en las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal (que habían sido previamente definidos por Bratzlavski [12] en 1972 y Favre [26] en 1973, si bien Gurevic ya había aplicado este concepto al estudio de las álgebras de Lie metabelianas en [34]), asocia canónicamente a cada álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y dimensión finita $\mathfrak{g}$ una matriz de Cartan generalizada A y, por tanto, un álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ (se dice entonces que el álgebra de Lie nilpotente de rango maximal $\mathfrak{g}$ es de tipo A). Esto le permite establecer una relación natural entre las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y las álgebras de Kac-Moody, al tiempo que le proporciona una herramienta adecuada: la teoría de álgebras de Kac-Moody, para clasificar las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal. Santharoubane obtiene que, dada una matriz de Cartan generalizada A, toda álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo A es un cociente de la parte positiva del álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ (véanse [47] y [48]).

La "primera"familia de álgebras de Kac-Moody son las álgebras de Lie simples, que son de dimensión finita, por esto las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal que se obtienen a partir de éstas se llaman de tipo finito. El estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipos finitos A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ y D_ℓ, con $\ell \geq 1$, $\ell \geq 2$, $\ell \geq 3$ y $\ell \geq 4$, respectivamente, fue realizado por Favre y Santharoubane en [27].

Posteriormente, otros autores han investigado otras álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo finito. Así, las de tipo E_6, E_7 y E_8 fueron estudiadas por Agrafiotou y Tsagas en [3]. Estos autores prueban que, salvo isomorfismos, existen 149 álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo E_6 y 1605 de tipo E_7.

Recientemente, Favre y Tsagas han considerado las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo F_4 [28].

La "segunda"familia de álgebras de Kac-Moody está constituida por las álgebras de Kac-Moody afines y éstas, a su vez, se dividen en dos subfamilias: tipos no torcido y torcido. Santharoubane estudió en 1982 (véase [47]) las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipos afines no torcido $A_1^{(1)}$ y torcido $A_2^{(2)}$, y probó que salvo isomorfismos, existen exactamente 3 series infinitas de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $A_1^{(1)}$ y 10 series infinitas de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $A_2^{(2)}$.

El resto de casos estudiados corresponden a tipos afines no torcidos. Así, Kanagavel estudió en [37] las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipos $A_2^{(1)}$, $B_2^{(1)}$ y $G_2^{(1)}$, encontrando que hay exactamente $n(X)$ series infinitas y una familia continua de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo X, donde $n(A_2^{(1)}) = 9$, $n(B_2^{(1)}) = 18$ y $n(G_2^{(1)}) = 39$.

Posteriormente, en [2], X. Agrafiotou estudió el caso de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $D_5^{(1)}$, llegando a la conclusión de que salvo isomorfismos, existen exactamente 217 series infinitas con parámetros discretos y 18 series infinitas con parámetros continuos de estas álgebras. Previamente, el mismo autor había estudiado el tipo $D_4^{(1)}$ (véase [1]), que presenta la particularidad de que no puede ser tratado de forma análoga al caso general $D_\ell^{(1)}$ con $\ell > 5$, debido a que el grupo de automorfismos de su *diagrama de Dynkin* es diferente al de este caso general. El autor concluye que salvo isomorfismos, existen exactamente 81 series infinitas con parámetros discretos y 8 series infinitas con parámetros continuos de estas álgebras.

Continuando entonces con este estudio , el objetivo principal de esta Memoria se centra fundamentalmente en el estudio de nuevos tipos de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal, en particular, de los tipos afines no torcidos $F_4^{(1)}$ y $E_6^{(1)}$, a cada uno de los cuales se les dedica un Capítulo de la misma. También se dedica un Capítulo al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal e índice de nilpotencia menor ($p = 2$), es decir, las álgebras de Lie metabelianas de rango maximal. Así, el contenido de la presente Memoria se ha estructurado en 4 Capítulos y dos Apéndices.

En el Capítulo 0 se indican los conceptos y resultados previos relativos a las álgebras de Lie y a las álgebras de Kac-Moody, ya conocidos, que creemos indispensables para una adecuada comprensión del resto del trabajo. Aunque estos conceptos han sido ya definidos anteriormente, hacemos especial énfasis en aquellos que, a pesar de haber sido ya estudiados, no suelen ser de uso frecuente debido a su especificidad. Entre estos últimos se recuerdan de forma algo más exhaustiva los resultados relativos al método de clasificación para las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal, debido a L. J. Santharoubane. Se incluyen también en este Capítulo las definiciones y propiedades relativas a los grafos que serán usadas posteriormente en el tratamiento de las álgebras objeto de nuestro estudio.

El Capítulo 1 de esta Memoria se dedica fundamentalmente al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $F_4^{(1)}$. En las dos primeras secciones se dan las álgebras de Kac-Moody asociadas a las matrices F_4 y $F_4^{(1)}$. En la tercera sección se calcula el grupo de automorfismos de $F_4^{(1)}$. En la cuarta sección se explica detenidamente el método seguido para la clasificación de estas álgebras de Lie y cómo se calculan los ideales en Δ_+. En la quinta sección se utilizan los resultados anteriores para dar la lista de los ideales en $\mathfrak{n}_+$ y en la sexta sección se da el teorema principal del Capítulo. Finalmente, en la última sección se da un ejemplo de álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$. El principal resultado obtenido en este Capítulo es que, salvo isomorfismos, existen exactamente 1095 familias infinitas con parámetro discreto y 28 familias infinitas con parámetro continuo de estas álgebras de Lie.

El Capítulo 2 de esta Memoria se dedica fundamentalmente al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $E_6^{(1)}$, dándose la misma distribución en secciones que en el Capítulo anterior. El principal resultado obtenido en este Capítulo es que, salvo isomorfismos, existen exactamente 2808 familias infinitas con parámetro discreto y 126 familias infinitas con parámetro continuo de estas álgebras de Lie.

En el Capítulo 3 de esta Memoria se estudian las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal e índice de nilpotencia $p = 2$. En la primera sección se aplica el método de clasificación para este índice de nilpotencia y se obtiene que sólo a partir de determinadas matrices de Cartan generalizadas de tipo finito o afín se llega a álgebras de Lie metabelianas. En las secciones segunda y tercera se estudian por separado las álgebras de Lie metabelianas de tipos finito y afín. El principal resultado obtenido en este Capítulo es que, salvo isomorfismos, existen exactamente 4 familias infinitas con parámetro discreto y 6 álgebras de Lie metabelianas de rango maximal de tipos finito o afín.

Se concluye esta Memoria con dos Apéndices finales y la Bibliografía consultada. En los Apéndices se dan, respectivamente, los ideales de Δ_+ para las álgebras de Kac-Moody asociadas a las matrices $F_4^{(1)}$ y $E_6^{(1)}$. La Bibliografía aparece separada en dos listas independientes: en la primera se citan los artículos y textos que se referencian en esta Memoria, mientras que en la segunda se incluyen otros textos, de carácter general, no referenciados directamente, cuya consulta puede facilitar una mejor comprensión y lectura de la misma.

CAPÍTULO 0

Preliminares

0–A ÁLGEBRAS DE LIE

Aunque las álgebras de Lie son objetos ya muy conocidos, empezamos definiendo brevemente algunos de los conceptos que vamos a manejar en las siguientes secciones.

Definición 0–A.1 ■ Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{L}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ dotado de una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, llamada *producto corchete o ley del álgebra de Lie*, que cumple las propiedades

$$\mu(X, X) = 0$$

y la identidad de Jacobi, que se expresa como

$$\mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$. Se suele designar $\mu(X, Y)$ por $[X, Y]$. Se denomina *dimensión* de $\mathfrak{L}$ a la que tiene como espacio vectorial.

Definición 0–A.2 ■ Una *subálgebra* de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{L}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{J}$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{J}$.

Definición 0–A.3 ■ Una *ideal* $\mathfrak{I}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es una subálgebra de $\mathfrak{L}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{I}$ para cualesquiera $X \in \mathfrak{I}$ e $Y \in \mathfrak{L}$.

Definición 0–A.4 ■ Un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es *conmutativa* si $[X, Y] = 0$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{L}$.

Definición 0–A.5 ■ Un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es *simple* si no es conmutativa y no tiene ideales propios (esto es, ideales distintos de $\{0\}$ y $\mathfrak{L}$).

Definición 0–A.6 ■ Un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es *semisimple* si no tiene ideales conmutativos propios.

Nota 0–A.7 ■ De las definiciones anteriores se deduce que toda álgebra de Lie simple es semisimple. Además, si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie simple o semisimple se tiene que $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = \mathfrak{L}$.

Definición 0–A.8 ■ Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie, llamamos *sucesión de derivadas* de $\mathfrak{L}$ a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} C_1\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \\ C_{k+1}\mathfrak{L} = [C_k\mathfrak{L}, C_k\mathfrak{L}] \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Si existe un entero n para el cual $C_{n+1}\mathfrak{L} = \{0\}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es *resoluble* y, en tal caso, el menor entero que cumple tal condición se llama *índice de resolubilidad* de $\mathfrak{L}$

Definición 0–A.9 ■ Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie, llamamos *sucesión central descendente* de $\mathcal{L}$ a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} C^1\mathcal{L} = \mathcal{L} \\ C^{k+1}\mathcal{L} = [C^k\mathcal{L}, \mathcal{L}] \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Si existe un entero p para el cual $C^{p+1}\mathcal{L} = \{0\}$, el álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es *nilpotente* y, en tal caso, el menor entero que cumple tal condición se llama *índice de nilpotencia* de $\mathcal{L}$

Nota 0–A.10 ■ Como consecuencia inmediata de las dos definiciones anteriores, toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble, debido a que si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie se verifica que $C_k\mathcal{L} \subseteq C^k\mathcal{L}$ para todo $k \geq 1$.

Definición 0–A.11 ■

- Dadas dos álgebras de Lie $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, sobre el mismo cuerpo, decimos que $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ es un *homomorfismo* si Φ es lineal y $\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$ para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{L}$ y Φ es un *isomorfismo* si también es biyectivo.
- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, decimos que Φ es un *endomorfismo* y si además Φ es biyectivo, decimos que es un *automorfismo.* Denotamos por $Aut\mathcal{L}$ al conjunto de los automorfismos.
- Un endomorfismo Φ de $\mathcal{L}$ es una *derivación* si

$$\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), Y] + [X, \Phi(Y)], \quad X, Y \in \mathcal{L}.$$

Denotamos por $Der\mathcal{L}$ al conjunto de las derivaciones y se le puede dotar de estructura de álgebra de Lie definiendo el producto corchete por

$$[\Phi, \Psi] = \Phi \circ \Psi - \Psi \circ \Phi, \quad \Phi, \Psi \in Der\mathcal{L}$$

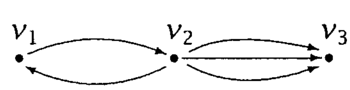
0-B GRAFOS

Veamos algunas nociones básicas relacionadas con los grafos.

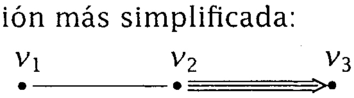
Definición 0-B.1 ■ Un *grafo* G está constituido por un conjunto finito no vacío $V = V(G)$ y un conjunto $A = A(G)$ de pares de elementos distintos de V. Los elementos de V se llaman *vértices* y los elementos de A se llaman *aristas*.

Definición 0-B.2 ■ Si consideramos que las aristas de un grafo G son pares ordenados (*aristas dirigidas*), decimos que G es un *grafo dirigido*.

Para representar un grafo dibujamos un punto por cada vértice del grafo y una línea de u a v por cada arista (u, v) del grafo. Si el grafo es dirigido, dibujamos una flecha de u a v por cada arista dirigida (u, v). Por ejemplo, una representación del grafo dirigido G de vértices v_1, v_2 y v_3 y aristas (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_3) y (v_2, v_3) es:



Si cada vez que aparecen dos flechas entre dos vértices con sentido contrario, las sustituimos por una línea, obtenemos una representación más simplificada:



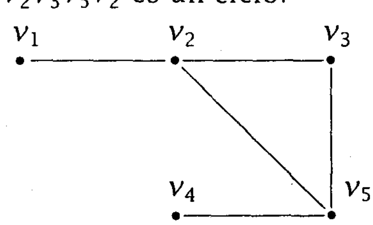
Definición 0-B.3 ■ Un *isomorfismo* φ entre dos grafos G_1 y G_2 es una aplicación biyectiva de $V(G_1)$ en $V(G_2)$ tal que $\varphi(A(G_1)) = A(G_2)$. Un *automorfismo* de un grafo G es un isomorfismo de G en sí mismo.

Definición 0-B.4 ■ Decimos que un grafo H es un *subgrafo* de otro grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición 0–B.5 ■ Sea G un grafo.

- Se llama *recorrido* en G a una sucesión de vértices de G tal que cualesquiera dos vértices consecutivos constituyen una arista de G y no se repiten aristas.
- Se llama *arco* en G a un recorrido en el que no se repiten vértices.
- Se llama *ciclo* en G a un recorrido en el que no se repiten vértices, salvo el primero y el último que coinciden.

En el siguiente grafo $v_1v_2v_3v_5v_2$ es un recorrido, $v_1v_2v_3v_5v_4$ es un arco y $v_2v_3v_5v_2$ es un ciclo:

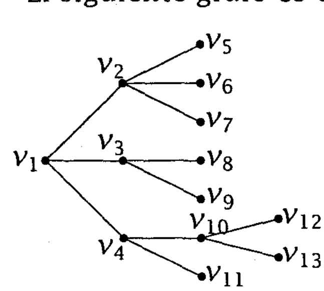


Definición 0–B.6 ■ Decimos que un grafo G es *conexo* si, dados dos vértices cualesquiera, existe un arco en G que comienza en uno de los vértices y termina en el otro.

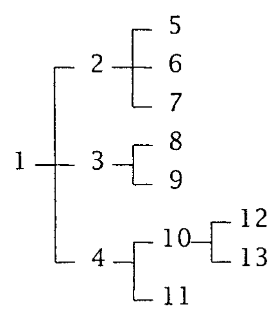
El grafo del ejemplo anterior es conexo.

Definición 0–B.7 ■ Decimos que un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.

El siguiente grafo es un árbol:



o bien, podemos representar el árbol anterior de la siguiente forma:



Definición 0–B.8 ■ Una *rama* en un árbol G es un arco en G.

Por ejemplo, $v_1v_4v_{10}v_{12}$ y v_1v_3 son dos ramas en el árbol que hemos dado antes.

0–C ÁLGEBRAS DE KAC-MOODY

Vamos a considerar una clase de álgebras de Lie de dimensión infinita conocidas como álgebras de Kac-Moody (véanse [40], [41] y Cap. 1 de [36]). Estas álgebras son una generalización de las álgebras de Lie simples y se definen a partir de las llamadas matrices de Cartan generalizadas.

Definición 0–C.1 ■ Una *matriz de Cartan generalizada* es una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $a_{ii} = 2$ para $i = 1, \ldots, \ell$;
2. $a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$;
3. $a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ji} = 0$.

Definición 0–C.2 ■ Diremos que dos matrices de Cartan generalizadas A y B son *equivalentes* si existe $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ (grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, \ell\}$) tal que

$b_{i,j} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ para $i, j = 1, \ldots, \ell$.

Definición 0–C.3 ■ Una matriz de Cartan generalizada A es *descomponible* si es equivalente a una matriz diagonal por bloques, es decir, de la forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O & O \\ O & A_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{k-1} & O \\ O & O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}$$

donde las A_i son matrices cuadradas y $k \leq \ell$. En caso contrario, A es *indescomponible*.

Definición 0–C.4 ■ Sean $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ una matriz de Cartan generalizada y $\mathfrak{h}$ un espacio vectorial complejo de dimensión $2\ell - rango(A)$. Sean $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \mathfrak{h}^*$, donde $\mathfrak{h}^*$ es el espacio dual de $\mathfrak{h}$, y $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_\ell^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ subconjuntos linealmente independientes de $\mathfrak{h}^*$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente, que satisfacen la siguiente condición:

$$\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij} \ (i, j = 1, \ldots, \ell)$$

Al álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ generada por E_i, F_i $(i = 1\ldots, \ell)$ y $\mathfrak{h}$, y las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} [E_i, F_j] &= \delta_{ij}\alpha_i^\vee & (i, j = 1, \ldots, \ell), \\ [h, h'] &= 0 & (h, h' \in \mathfrak{h}), \\ [h, E_i] &= \alpha_i(h)E_i & (i = 1, \ldots, \ell, h \in \mathfrak{h}), \\ [h, F_i] &= -\alpha_i(h)F_i & (i = 1, \ldots, \ell, h \in \mathfrak{h}). \end{cases}$$

la llamamos *álgebra (de Lie) de Kac-Moody no reducida asociada a la matriz de Cartan generalizada* A. Sea $\mathfrak{r}$ el ideal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ que no corta a $\mathfrak{h}$, al álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$$

la llamamos *álgebra (de Lie) de Kac-Moody asociada a la matriz de Cartan generalizada A*.

Nota 0–C.5 ■ Usaremos la misma notación para las imágenes de E_i, F_i y $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}(A)$. Para $\alpha = \sum d_i\alpha_i$ con $(d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell - \{0\}$, denotamos por $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$) al subespacio de $\mathfrak{g}(A)$ generado por los elementos $[E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}]$ (resp. $[F_{i_1}, \ldots, F_{i_r}]$) donde E_i (resp. F_i) aparece d_i veces. Si en $(d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ no todos los d_i's tienen el mismo signo, entonces $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$. Tomamos $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ y $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_\ell^\vee\}$ son la *base de las raíces* y la *base de las corraíces*, respectivamente. $E_1, \ldots, E_\ell$ and $F_1, \ldots, F_\ell$ son los *generadores de Chevalley* (véase Cap. 7 de [67]) y $\mathfrak{h}$ es la *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}(A)$.

Los conjuntos $\Delta = \{\alpha = \sum d_i\alpha_i\,;\, (d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell - \{0\} \text{ y } \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$ y $\Delta_+ = \{\alpha = \sum d_i\alpha_i\,;\, (d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell - \{0\} \text{ y } \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$ son, respectivamente, el *sistema de raíces* y el *sistema de raíces positivas* de $\mathfrak{g}(A)$ y tomamos $\Delta_- = -\Delta_+$(el sistema de raíces negativas). Resulta entonces que $\Delta = \Delta_- \cup \{0\} \cup \Delta_+$. Tenemos la siguiente descomposición en subespacios raíces con respecto a $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

Luego, $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ donde a $\mathfrak{n}_- = \oplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathfrak{g}_\alpha$ la llamamos la *parte negativa* y a $\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ la *parte positiva* de $\mathfrak{g}(A)$.

Si $\alpha = \sum d_i\alpha_i$, la *altura* de α es el número $|\alpha| = \sum d_i$.

Teorema 0–C.6 ■ Dadas dos matrices de Cartan generalizadas A y B, se tiene que las álgebras de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ y $\mathfrak{g}(B)$, asociadas a dichas matrices, son isomorfas si y sólo si A y B son equivalentes.

Por tanto, para clasificar las álgebras de Kac-Moody tenemos que tener la clasificación de las matrices de Cartan generalizadas (véase

Cap. 4 de [36]).

Teorema 0–C.7 ■ Si A es una matriz de Cartan generalizada descomponible en bloques indescomponibles $A_1, \ldots, A_k$, se tiene que las álgebras de Kac-Moody asociadas a dichas matrices verifican que $\mathfrak{g}(A)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}(A_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}(A_k)$

Como consecuencia de este último resultado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las matrices de Cartan generalizadas que manejamos son indescomponibles.

Seguimos la siguiente notación: para un vector $u^t = (u_1, \ldots, u_\ell)$ decimos que $u > 0$ si $u_i > 0$, $i = 1, \ldots, \ell$, y que $u \geq 0$ si $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$. Recordemos el siguiente resultado fundamental de la teoría de inecuaciones lineales:

> *Un sistema lineal de inecuaciones real homogéneo $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, tiene una solución si y sólo si no hay dependencia lineal con coeficientes no negativos entre los λ_i.*

Lema 0–C.8 ■ Si A es una matriz real $m \times s$ tal que no existe $u \geq 0$, $u \neq 0$, que verifique $A^t u \geq 0$, entonces existe $v > 0$ tal que $Av < 0$.

Lema 0–C.9 ■ Si A es una matriz de Cartan generalizada indescomponible, entonces $Au \geq 0$, $u \geq 0$ implican que $u > 0$ ó $u = 0$.

Teorema 0–C.10 ■ Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$, una matriz de Cartan generalizada indescomponible. Se tiene una sóla de las tres posibilidades siguientes:

(Fin) $det(A) \neq 0$; existe $u > 0$ tal que $Au > 0$; $Av \geq 0$ implica que $v > 0$ ó $v = 0$;

(Af) $rango(A) = \ell - 1$; existe $u > 0$ tal que $Au = 0$; $Av \geq 0$ implica que $Av = 0$;

(Ind) existe $u > 0$ tal que $Au < 0$; $Av \geq 0$, $v \geq 0$ implican que $v = 0$.

Decimos que A es de *tipo finito, afín* o *indefinido* según la posibilidad que cumpla.

Lema 0–C.11 ■ Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$, una matriz de Cartan generalizada indescomponible de tipo finito o afín. Entonces A es *simetrizable*, esto es, existen una matriz diagonal invertible $D = diag(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell)$ y una matriz simétrica $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ tales que $A = DB$.

Nota 0–C.12 ■ Vamos a dar la clasificación de las matrices de Cartan generalizadas indescomponibles de tipo finito y de tipo afín. Para esto utilizamos los llamados *diagramas de Dynkin* (véase Cap. 3 de [67]). Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ una matriz de Cartan generalizada, vamos a asociar a A un grafo $S(A)$, llamado *diagrama de Dynkin* de A, como sigue:

- Si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ y $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$, entre los vértices i y j hay $|a_{ij}|$ aristas y estas aristas están dirigidas hacia el vértice i si $|a_{ij}| > |a_{ji}|$.
- Si $a_{ij}a_{ji} > 4$, entre los vértices i y j hay una arista de trazo más grueso sobre la que situamos el par de enteros ordenado $|a_{ij}|, |a_{ji}|$.

Se ve fácilmente que A es indescomponible si y sólo si $S(A)$ es un grafo conexo. Notemos también que A está determinada por el diagrama de Dynkin $S(A)$ y una enumeración de sus vértices. Decimos que $S(A)$ es de tipo finito, afín o indefinido si A es del tipo correspondiente.

Teorema 0–C.13 ■ Los diagramas de Dynkin de todas las matrices de Cartan generalizadas indescomponibles de tipo finito aparecen en la tabla Fin (con ℓ

vértices) y los de todas las de tipo afín en las tablas Afl – 3 (con $\ell + 1$ vértices). Las etiquetas numéricas de los grafos de las tablas Afl – 3 son las coordenadas del único vector $\delta = (a_0, a_1, \ldots, a_\ell)^t$ tal que $A\delta = 0$, donde los a_i son enteros positivos primos entre sí.

Tabla Fin

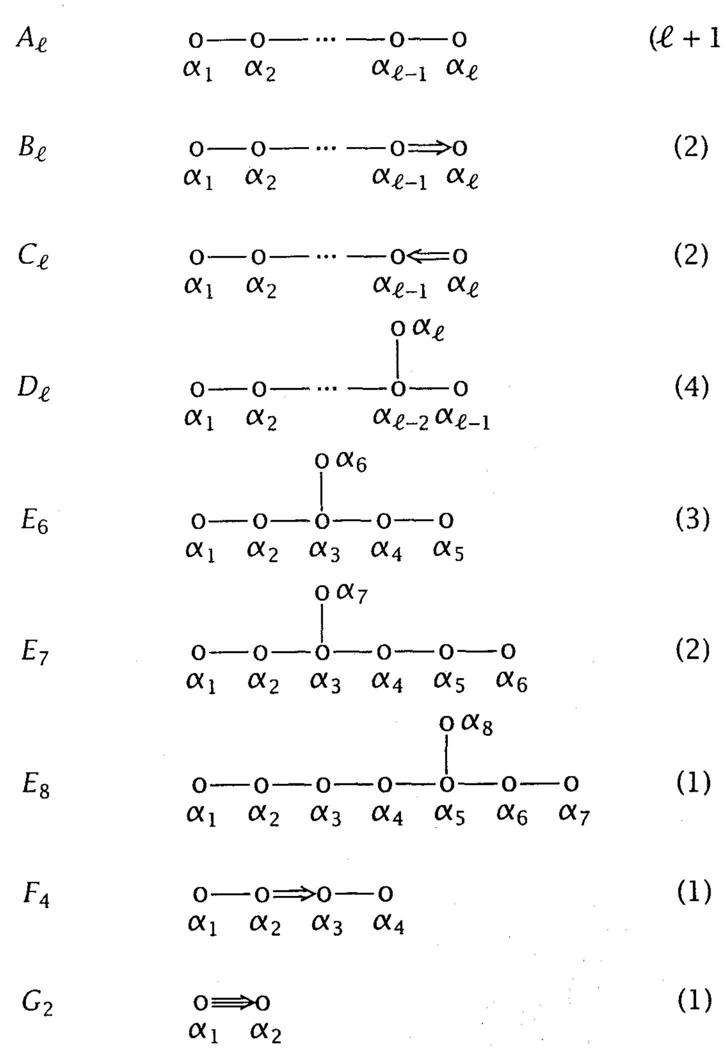
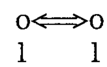
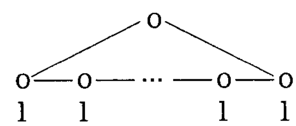


Tabla Af1

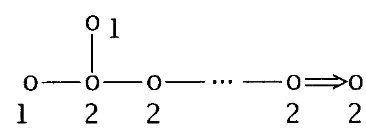
$A_1^{(1)}$



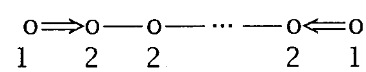
$A_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$



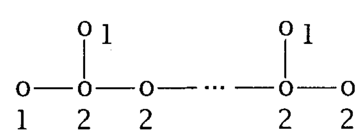
$B_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 3)$



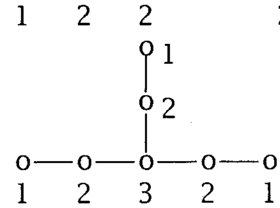
$C_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$



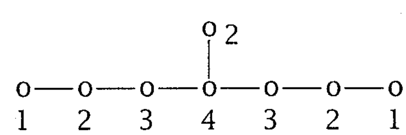
$D_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 4)$



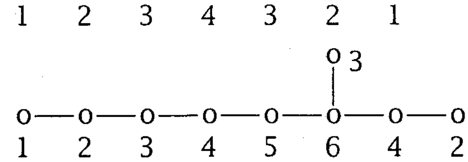
$E_6^{(1)}$



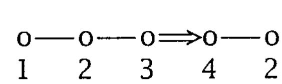
$E_7^{(1)}$



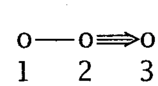
$E_8^{(1)}$



$F_4^{(1)}$



$G_2^{(1)}$



Los números entre paréntesis de la columna derecha corresponden al determinante de la matriz A. Los vértices de los grafos de la tabla Fin están enumerados con los símbolos $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, cada grafo $X_\ell^{(1)}$ de la tabla Af1 se obtiene a partir del grafo X_ℓ añadiendo un nuevo vértice que se enumera con el símbolo α_0 y manteniendo la enumeración de los demás como en X_ℓ.

Tabla Af2

$A_2^{(2)}$	$\underset{\alpha_0}{\overset{2}{\circ}} \Lleftarrow \underset{\alpha_1}{\overset{1}{\circ}}$
$A_{2\ell}^{(2)}\ (\ell \geq 2)$	$\underset{\alpha_0}{\overset{2}{\circ}} \Leftarrow \underset{\alpha_1}{\overset{2}{\circ}} - \cdots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\overset{2}{\circ}} \Leftarrow \underset{\alpha_\ell}{\overset{1}{\circ}}$
$A_{2\ell-1}^{(2)}\ (\ell \geq 3)$	$\underset{\alpha_1}{\overset{1}{\circ}} - \underset{\alpha_2}{\overset{\overset{\alpha_0\circ 1}{\vert}\,2}{\circ}} - \underset{\alpha_3}{\overset{2}{\circ}} - \cdots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\overset{2}{\circ}} \Leftarrow \underset{\alpha_\ell}{\overset{1}{\circ}}$
$D_{\ell+1}^{(2)}\ (\ell \geq 2)$	$\underset{\alpha_0}{\overset{1}{\circ}} \Leftarrow \underset{\alpha_1}{\overset{1}{\circ}} - \cdots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\overset{1}{\circ}} \Rightarrow \underset{\alpha_\ell}{\overset{1}{\circ}}$
$E_6^{(2)}$	$\underset{\alpha_0}{\overset{1}{\circ}} - \underset{\alpha_1}{\overset{2}{\circ}} - \underset{\alpha_2}{\overset{3}{\circ}} \Leftarrow \underset{\alpha_3}{\overset{2}{\circ}} - \underset{\alpha_4}{\overset{1}{\circ}}$

Tabla Af3

$D_4^{(3)}$	$\underset{\alpha_0}{\overset{1}{\circ}} - \underset{\alpha_1}{\overset{2}{\circ}} \Lleftarrow \underset{\alpha_2}{\overset{1}{\circ}}$

Además, para el tipo finito se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 0–C.14 ■ Sea A una matriz de Cartan generalizada indescomponible. Se tiene que A es de tipo finito si y sólo si $\mathfrak{g}(A)$ es un álgebra de Lie simple de dimensión finita.

Teorema 0–C.15 ■ Sea A una matriz de Cartan generalizada simetrizable y sea $\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$ el álgebra de Kac-Moody asociada a A. Entonces los elementos

$$(adE_i)^{1-a_{ij}}E_j, \ \ i \neq j\,(i,j = 1,\ldots,\ell),$$

$$(adF_i)^{1-a_{ij}}F_j, \ \ i \neq j\,(i,j = 1,\ldots,\ell)$$

generan el ideal $\mathfrak{r}$.

Como las matrices de Cartan generalizadas de tipo finito o afín son simetrizables, si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ es una matriz de Cartan generalizada de tipo finito o afín, entonces el álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$, asociada a A, es el álgebra de Lie con generadores E_i, F_i $(i = 1.\ldots,\ell)$ y $\mathfrak{h}$ que cumplen las siguientes relaciones:

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee \quad (i,j = 1,\ldots,\ell),$$

$$\left[h, h'\right] = 0 \quad (h, h' \in \mathfrak{h})$$

$$[h, E_i] = \alpha_i(h)E_i, \ [h, F_i] = -\alpha_i(h)F_i \quad (i = 1,\ldots,\ell, h \in \mathfrak{h}),$$

$$(adE_i)^{1-a_{ij}}E_j = 0, \ (adF_i)^{1-a_{ij}}F_j = 0 \quad (i,j = 1,\ldots,\ell\ ;\ i \neq j).$$

0–D ÁLGEBRAS DE KAC-MOODY AFINES

Vamos a describir la estructura de las álgebras de Kac-Moody asociadas a matrices de Cartan generalizadas de tipo afín y, en particular, cuando el diagrama de Dynkin de la matriz es de la tabla Af1 (véase Caps. 6, 7 y 8 de [36]).

Definición 0–D.1 ■ A las álgebras de Kac-Moody asociadas a matrices de Cartan generalizadas de tipo afín las llamamos *álgebras (de Kac-Moody) afines* y si, además, el diagrama de Dynkin de la matriz pertenece a la tabla Af1 decimos que el álgebra afín es *no torcida*.

Nota 0–D.2 ■ A partir de esta sección consideramos $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{\ell} = X_{\ell}^{(1)}$ una matriz de Cartan generalizada de tipo afín de la tabla Af1, A es una matriz cuadrada de orden $\ell + 1$ y rango ℓ, y $\mathring{A} = X_{\ell}$ la matriz de Cartan generalizada de tipo finito que se obtiene a partir de A eliminando la fila y la columna 0-ésimas. Sea $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\mathring{A})$ el álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz de tipo finito $\mathring{A}$.

Sea $L = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ el álgebra de los polinomios de Laurent en t, es decir, los polinomios de la forma $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$, donde todos salvo un número finito de c_k son nulos. El residuo de un polinomio de Laurent P se define por $Res\, P = c_{-1}$. Esto es, Res es una función lineal sobre L definida por las propiedades:

$$Res\, t^{-1} = 1\ ;\ \ Res \frac{dP}{dt} = 0.$$

Definimos una función bilineal φ sobre L con valores en $\mathbb{C}$ como sigue:

$$\varphi(P, Q) = Res \frac{dP}{dt} Q.$$

Se verifican las dos propiedades siguientes:

- $\varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P)$,
- $\varphi(PQ, R) + \varphi(QR, P) + \varphi(RP, Q) = 0, \ \ \forall P, Q, R \in L.$

Consideramos el *álgebra lazo*

$$L(\mathring{\mathfrak{g}}) = L \otimes_{\mathbb{C}} \mathring{\mathfrak{g}}.$$

Esta es un álgebra de Lie de dimensión infinita con producto corchete $[\, ,\,]_0$ definido por

$$[P \otimes X, Q \otimes Y]_0 = PQ \otimes [X, Y], \ \ \forall P, Q \in L;\ X, Y \in \mathring{\mathfrak{g}}.$$

Fijamos una forma bilineal simétrica no degenerada $(.|.)$ sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ invariante, es decir, que verifica $([X, Y]|Z) = (X|[Y, Z]), \ \forall X, Y, Z \in \mathring{\mathfrak{g}}$. Extendemos esta forma por linealidad a una forma bilineal $(.|.)_t$ sobre $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ con valores en L como sigue:

$$(P \otimes X|Q \otimes Y)_t = PQ(X|Y).$$

También podemos extender toda derivación D del álgebra L a una derivación del álgebra de Lie $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ mediante

$$D(P \otimes X) = D(P) \otimes X.$$

Podemos definir el siguiente 2-cociclo sobre el álgebra de Lie $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ con valores en $\mathbb{C}$:

$$\psi(P \otimes X, Q \otimes Y) = Res(\frac{dP}{dt} \otimes X|Q \otimes Y)_t.$$

Para probar que ψ es un 2-cociclo hay que comprobar las dos condiciones siguientes:

- $\psi(a,b) = -\psi(a,b)$,
- $\psi([a,b],c) + \psi([b,c],a) + \psi([c,a],b) = 0, \ \ \forall a,b,c \in L(\mathring{\mathfrak{g}})$,

para ello basta tener en cuenta que $\psi(P \otimes X, Q \otimes Y) = (X|Y)\varphi(P,Q)$.

Definimos la extensión del álgebra de Lie $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ mediante un centro 1-dimensional asociado al cociclo ψ siguiente:

$$\widetilde{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = L(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}c$$

con producto corchete definido por

$$[a + \lambda c, b + \mu c] = [a,b]_0 + \psi(a,b)c, \ \ \forall a,b \in L(\mathring{\mathfrak{g}});\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Finalmente, consideramos el álgebra de Lie $\widehat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ que se obtiene al añadir a $\widetilde{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ una derivación d que actúa sobre $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ como $t\frac{d}{dt}$ y se anula sobre c. Esto es, el álgebra de Lie definida por:

$$\widehat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = L \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

con el producto corchete definido como sigue:
$[t^k \otimes X \oplus \lambda c \oplus \mu d, t^{k_1} \otimes Y \oplus \lambda_1 c \oplus \mu_1 d] =$
$(t^{k+k_1} \otimes [X,Y] + \mu k_1 t^{k_1} \otimes Y - \mu_1 k t^k \otimes X) \oplus k\delta_{k,-k_1}(X|Y)c,$
donde $X, Y \in \mathring{\mathfrak{g}}; \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}$.

Teorema 0–D.3 ■ $\mathfrak{g}(A) = \widehat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$, es decir, el álgebra de Lie que acabamos de definir es el álgebra de Kac-Moody afín asociada a la matriz A.

Veamos ahora la estructura del álgebra afín $\mathfrak{g}(A)$.

Nota 0–D.4 ■ Sean $\mathring{\mathfrak{h}}$ la subálgebra de Cartan, $\mathring{\Delta}$ el sistema de raíces, $\{\mathring{\alpha}_1, \ldots, \mathring{\alpha}_\ell\}$ la base de las raíces, $\{\mathring{\alpha}_1^\vee, \ldots, \mathring{\alpha}_\ell^\vee\}$ la base de las corraíces y $E_1, \cdots, E_\ell$, $F_1, \cdots, F_\ell$ los generadores de Chevalley de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Sea $\mathring{\theta}$ la raíz más alta del sistema de raíces finito $\mathring{\Delta}$. Sea $\mathring{\mathfrak{g}} = \oplus_{\alpha \in \mathring{\Delta}} \mathring{\mathfrak{g}}_{\alpha}$ la descomposición en subespacios raíces de $\mathring{\mathfrak{g}}$. La involución de Cartan $\mathring{\omega}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ está definida sobre los generadores de Chevalley como $\mathring{\omega}(E_i) = -F_i (i = 1, \ldots, \ell)$. Elegimos $F_0 \in \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\theta}}$ tal que $(F_0 | \mathring{\omega}(F_0)) = -2/(\mathring{\theta}|\mathring{\theta})$ y tomamos $E_0 = -\mathring{\omega}(F_0)$. Entonces, $\mathfrak{h} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ es la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}(A)$. Denotamos por δ la función lineal sobre $\mathfrak{h}$ definida por $\delta|_{\mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c} = 0$, $\delta(d) = 1$.
Los generadores de Chevalley de $\mathfrak{g}(A)$ son:

$$e_0 = t \otimes E_0, e_1 = 1 \otimes E_1, \ldots, e_\ell = 1 \otimes E_\ell$$

$$f_0 = t^{-1} \otimes F_0, f_1 = 1 \otimes F_1, \ldots, f_\ell = 1 \otimes F_\ell.$$

Ahora vamos a describir el sistema de raíces y la descomposición en subespacios raíces de $\mathfrak{g}(A)$ con respecto a $\mathfrak{h} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$:

$$\Delta = \{j\delta + \mathring{\gamma} \, ; \, j \in \mathbb{Z}, \, \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}\} \cup \{j\delta \, ; \, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha),$$

donde

$$\mathfrak{g}_{j\delta + \mathring{\gamma}} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}} \text{ y } \mathfrak{g}_{j\delta} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}}.$$

Denotamos $\mathring{\alpha}_i$ por α_i $(i = 1, \ldots, \ell)$ y tomamos $\alpha_0 = \delta - \mathring{\theta}$. Entonces la base de las raíces de $\mathfrak{g}(A)$ es $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$.

Sea $\mathring{\mathfrak{n}}_+$ la parte positiva de $\mathring{\mathfrak{g}}$, entonces la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ de $\mathfrak{g}(A)$ es :

$$\mathfrak{n}_+ = \mathring{\mathfrak{n}}_+ \oplus (t\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}})$$

y el conjunto Δ_+ de las raíces positivas de $\mathfrak{g}(A)$ es :

$$\Delta_+ = \mathring{\Delta}_+ \cup \{j\delta + \mathring{\gamma}\,;\, j \geq 1,\ \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta} \cup \{0\}\}.$$

Si tomamos:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mathring{\Delta}_+ \cup \{\delta - \mathring{\gamma}\,;\, \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}_+ \cup \{0\}\} \cup \{0\} \\ \Delta_j &= \{j\delta + \gamma\,;\, \gamma \in \Delta_0\} \end{aligned}$$

entonces

$$\Delta_+ \cup \{0\} = \bigcup_{j \geq 0} \Delta_j.$$

0–E ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE RANGO MAXIMAL

En esta sección vamos a ver los conceptos relacionados con las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal, su relación con las álgebras de Kac-Moody y el método de clasificación que se obtiene a partir de esta relación (véanse [47] y [48]).

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie nilpotente y $Der\mathcal{L}$ su álgebra de derivaciones.

■ Definiciones

Definición 0–E.1 ■ Un *toro* de derivaciones sobre $\mathcal{L}$ es una subálgebra conmutativa de $Der\mathcal{L}$ cuyos elementos son endomorfismos semisimples. Un toro es *maximal* si no está contenido estrictamente en ningún otro toro.

Como el cuerpo base es algebraicamente cerrado, los elementos de un toro de derivaciones pueden diagonalizarse simultáneamente. Entonces $\mathcal{L}$ se descompone en una suma directa de subespacios

$$\mathcal{L} = \oplus_{\beta \in T^*} \mathcal{L}^{\beta},$$

donde T^* es el espacio dual de T y

$$\mathfrak{L}^{\beta} = \{X \in \mathfrak{L} \ : \ tX = \beta(t)X, \ \forall t \in T\}.$$

Definición 0–E.2 ■ Si T es un toro maximal sobre $\mathfrak{L}$, llamamos *sistema de raíces* de $\mathfrak{L}$ asociado a T al conjunto:

$$R(T) = \{\beta \in T^* \ : \ \mathfrak{L}^{\beta} \neq \{0\}\}.$$

Por el teorema de Mostow, si T y T' son dos toros maximales sobre $\mathfrak{L}$, entonces existe $\theta \in Aut\mathfrak{L}$ tal que $\theta T \theta^{-1} = T'$ y, por tanto, T y T' tienen la misma dimensión $k \leq \ell$.

Definición 0–E.3 ■ A la dimensión común de todos los toros maximales sobre $\mathfrak{L}$ la llamamos el *rango* de $\mathfrak{L}$.

Lema 0–E.4 ■ Dados $X_1, \ldots, X_\ell \in \mathfrak{L}$, se tiene que $\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ es un sistema minimal de generadores de $\mathfrak{L}$ si y sólo si $\{X_1 + [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}], \ldots, X_\ell + [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]\}$ es una base de $\mathfrak{L}/[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$.

Definición 0–E.5 ■ Si T es un toro sobre $\mathfrak{L}$, decimos que $X_1, \ldots, X_\ell \in \mathfrak{L}$ constituye un *T-smg* si $\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ es un sistema minimal de generadores de $\mathfrak{L}$ y para cada $i = 1, \ldots, \ell$ existe $\beta_i \in T^*$ tal que $X_i \in \mathfrak{L}^{\beta_i}$.

Lema 0–E.6 ■ Sean T un toro maximal sobre $\mathfrak{L}$, $\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ un T-smg y β_i la raíz correspondiente a X_i para cada $i = 1, \ldots, \ell$. Si $\{t_1, \ldots, t_k\}$ es una base de T, entonces k es igual al rango de la matriz

$$(\beta_i(t_j))_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq k}$$

Por tanto, el rango r de $\mathcal{L}$ es menor o igual que la dimensión ℓ de $\mathcal{L}/[\mathcal{L},\mathcal{L}]$.

Definición 0–E.7 ■ Decimos que $\mathcal{L}$ es de *rango maximal* si $r = \ell$.

Teorema 0–E.8 ■ Sean $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie nilpotente de rango maximal ℓ, T un toro maximal sobre $\mathcal{L}$, $R(T)$ el sistema de raíces asociado a T, $\{X_1,\dots,X_\ell\}$ un T-smg y $\{\beta_1,\dots,\beta_\ell\}$ las raíces correspondientes. Se tiene:

1. $\{\beta_1,\dots,\beta_\ell\}$ es una base del espacio vectorial T^*.
2. Para cada $\beta \in R(T)$ existe un único $(d_1,\dots,d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ tal que $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} d_i\beta_i$.
3. Si $|\beta| = \sum_{i=1}^{\ell} d_i$, entonces $1 \leq |\beta| \leq p$ donde p es el índice de nilpotencia de $\mathcal{L}$.

■ La matriz de Cartan generalizada asociada a un álgebra de Lie nilpotente de rango maximal

El primer paso para clasificar las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal es obtener un nuevo invariante para estas álgebras de Lie. Este invariante es una matriz de Cartan generalizada (salvo equivalencia). Los términos de esta matriz se obtienen de la siguiente forma:
Si T es un toro maximal sobre un álgebra de Lie nilpotente de rango maximal ℓ y $\{X_1,\dots,X_\ell\}$ es un T-smg, al ser el álgebra de Lie nilpotente, adX_i es nilpotente para cada $i = 1,\dots,\ell$. Por tanto, para cualesquiera $i,j = 1,\dots,\ell$, $i \neq j$ existe un único $a_{ij} \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ tal que

$$(adX_i)^{-a_{ij}}X_j \neq 0 \text{ y } (adX_i)^{-a_{ij}+1}X_j = 0.$$

Si tomamos $a_{ii} = 2$ para cada $i = 1\dots,\ell$, obtenemos una matriz de Cartan generalizada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$.

Lema 0–E.9 ■ Si T es un toro maximal sobre $\mathcal{L}$ y si $\{X_1,\dots,X_\ell\}$ e $\{Y_1,\dots,Y_\ell\}$ son dos

T-smg, entonces existe un único $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ (permutación de $\{1,\dots,\ell\}$) y un único $(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) \in (\mathbb{K}-\{0\})^\ell$ tales que $Y_i = \lambda_i X_{\sigma(i)}$, $i = 1,\dots,\ell$.

Además, por el lema anterior tenemos la unicidad salvo equivalencia de la matriz de Cartan generalizada obtenida y, por tanto, el siguiente resultado:

Teorema 0–E.10 ■ Podemos asociar a cada álgebra de Lie nilpotente $\mathcal{L}$ de rango maximal ℓ una matriz de Cartan generalizada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ cuya clase de equivalencia es un invariante de $\mathcal{L}$ y que está caracterizada por la siguiente propiedad:

para cualquier toro maximal T sobre $\mathcal{L}$ y para cualquier T-smg $\{X_1,\dots,X_\ell\}$ existe $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ tal que

$$(adX_{\sigma(i)})^{-a_{ij}}X_{\sigma(j)} \neq 0 \text{ y } (adX_{\sigma(i)})^{-a_{ij}+1}X_{\sigma(j)} = 0, \quad \text{para cada } i,j = 1,\dots,\ell,\ i \neq j.$$

Definición 0–E.11 ■ Con la notación del resultado anterior, decimos que $\{X_1,\dots,X_\ell\}$ está ordenado respecto a la matriz A si $\sigma = Id$.

Definición 0–E.12 ■ Si A es la matriz de Cartan generalizada asociada al álgebra de Lie nilpotente de rango maximal $\mathcal{L}$, entonces decimos que $\mathcal{L}$ es de *tipo* A.

■ Modelo de álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo A

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ una matriz de Cartan generalizada y sea $\mathfrak{g}(A)$ el álgebra de Kac-Moody asociada a A. Si seguimos la notación de la sección anterior, se tienen las siguientes propiedades:

Lema 0–E.13 ■ La parte positiva de $\mathfrak{g}(A)$, $\mathfrak{n}_+$, es un álgebra de Lie generada por $E_1,\dots,E_\ell$ y las relaciones

$$(adE_i)^{-a_{ij}+1}E_j = 0, \ \forall i \neq j$$

y, además, verifica que

$$\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$$

donde $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Delta_+$.

Lema 0–E.14 ■ El término n-ésimo de la sucesión central descendente de $\mathfrak{n}_+$ es

$$C^n\mathfrak{n}_+ = \oplus_{|\alpha|\geq n}\mathfrak{g}_\alpha.$$

Lema 0–E.15 ■ Para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, \ell$ tenemos que

$$\mathfrak{g}_{\alpha_j+k\alpha_i} = \mathbb{K}(adE_i)^k E_j.$$

Sea $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p \geq sup\{-a_{ij} + 1 \,/ i, j = 1, \ldots, \ell,\ i \neq j\}$. Además, en el caso de que A sea una matriz de Cartan generalizada de tipo finito, p lo tomamos menor o igual que la altura de la raíz más alta de $\mathfrak{g}(A)$.

Teorema 0–E.16 ■ Sea $\mathfrak{M}_p(A) = \mathfrak{n}_+/C^{p+1}\mathfrak{n}_+$ y sea $\mu : \mathfrak{n}_+ \longrightarrow \mathfrak{M}_p(A)$, $X \longmapsto \overline{X}$ la proyección canónica. Se tiene que:

1. La restricción de μ a los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$ con $\alpha \in \Delta_+$ y $|\alpha| \leq p$ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}_\alpha$ en $\overline{\mathfrak{g}_\alpha}$ y, por tanto,

$$\mathfrak{M}_p(A) = \oplus_{|\alpha|\leq p}\overline{\mathfrak{g}_\alpha} \text{ con } [\overline{\mathfrak{g}_\alpha}, \overline{\mathfrak{g}_\beta}] \subseteq \overline{\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}}.$$

2. El álgebra de Lie $\mathfrak{M}_p(A)$ es nilpotente y su índice de nilpotencia es p.

3. El álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{M}_p(A)$ es de rango maximal, un toro maximal sobre $\mathfrak{M}_p(A)$ se define así: $T = \oplus_{i=1}^{\ell}\mathbb{K}t_i$ donde cada $t_i \in Der\mathfrak{M}_p(A)$ se define por $t_i\overline{E_j} = \delta_{ij}\overline{E_j}$, $1 \leq i, j \leq \ell$. Y $\{\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_\ell}\}$ es un T-smg.

4. Si identificamos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ con la base dual de $\{t_1, \ldots, t_\ell\}$, entonces el sistema de raíces de $\mathfrak{M}_p(A)$ asociado a T es $R(T) = \{\alpha \in \Delta_+ / |\alpha| \leq p\}$ y $\mathfrak{M}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ para cada $\alpha \in R(T)$.

5. A es una matriz de Cartan generalizada asociada a $\mathfrak{M}_p(A)$ y $\{\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_\ell}\}$ está ordenado respecto a la matriz A.

■ Método de clasificación

Consideramos una matriz de Cartan generalizada A y $p \in \mathbb{N}^*$ como en la subsección anterior. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p(A)$ y sea el álgebra de Lie $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}/\mathfrak{a}$.

Lema 0–E.17 ■ $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie nilpotente con índice de nilpotencia menor o igual que p.

Denotamos por $\pi : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{L} = \mathfrak{M}/\mathfrak{a}$ la proyección canónica. Sean T el toro maximal que hemos dado sobre $\mathfrak{M}$, $R(T)$ el sistema de raíces asociado a T y la descomposición respecto de $R(T)$:

$$\mathfrak{M} = \oplus_{\alpha \in R(T)} \mathfrak{M}^\alpha.$$

Definición 0–E.18 ■ Un ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{M}$ es *homogéneo* si existe $I \subseteq R(T)$ tal que $\mathfrak{a} = \oplus_{\alpha \in I} \mathfrak{M}^\alpha$.

Lema 0–E.19 ■ Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{a} \subseteq C^2\mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{L}$ es de rango maximal ℓ.

Lema 0–E.20 ■ Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de $\mathfrak{M}$ y si

$$(ad\overline{E_i})^{-a_{ij}}\overline{E_j} \notin \mathfrak{a}, \ \forall i, j = 1, \ldots, \ell, \ i \neq j,$$

entonces $\mathfrak{L}$ es de rango maximal ℓ y tipo A.

Lema 0–E.21 ■ $\mathfrak{L}$ tiene índice de nilpotencia p si y sólo si $C^p\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{a}$.

Definición 0–E.22 ■ El *grupo de automorfismos de la matriz de Cartan generalizada* A es

$$\mathfrak{S}_\ell(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell \,/\, a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij}, \ \forall i,j = 1,\ldots,\ell\}.$$

Lema 0–E.23 ■ Sea $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$, existe $\tilde{\sigma} \in Aut\,\mathfrak{M}$ tal que $\tilde{\sigma}\overline{E_i} = \overline{E_{\sigma(i)}}$, $\forall i = 1,\ldots,\ell$ si y sólo si $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell(A)$.

Consideramos el siguiente conjunto:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A) = \{\tilde{\sigma} \in Aut\,\mathfrak{M} \,/\, \sigma \in \mathfrak{S}_\ell(A)\}.$$

Lema 0–E.24 ■ El conjunto

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_p(A) = \{\mathfrak{a} \text{ ideal homogéneo de } \mathfrak{M}\,;\ C^p\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{a} \text{ y } (ad\overline{E_i})^{-a_{ij}}\overline{E_j} \notin \mathfrak{a},\ \forall i \neq j\}$$

es estable por la acción de $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$.

Proposición 0–E.25 ■ Si $\mathfrak{L}'$ es un álgebra de Lie nilpotente de rango maximal ℓ y tipo A y con índice de nilpotencia p, entonces:

1. Existe $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{J}$ tal que $\mathfrak{L}' \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{a}'$.
2. Si $\mathfrak{a}'' \in \mathfrak{J}$ es tal que $\mathfrak{L}' \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{a}''$, entonces existe $\tilde{\sigma} \in \tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$ tal que $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}''$.

Teorema 0–E.26 ■ Las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal ℓ, índice de nilpotencia p y tipo A están en biyección con las órbitas de $\mathfrak{J}_p(A)$ por la acción de $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$.

La biyección se obtiene al asociar a cada $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ la clase de isomorfismo de $\mathfrak{M}/\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de $\mathfrak{M}_p(A)$ entonces

$$\mathfrak{a} = \oplus_{\alpha \in \Delta_p} \mathfrak{a}_\alpha ,$$

donde $\Delta_p = \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \leq p\}$ y $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a} \cap \overline{\mathfrak{g}_\alpha}$.

Sea $\Delta_\mathfrak{a} = \{\alpha \in \Delta_p \,;\, \mathfrak{a}_\alpha \neq \{0\}\}$.

Como $C^n\mathfrak{n}_+ = \oplus_{|\alpha| \geq n} \mathfrak{g}_\alpha$, $C^p\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{a}$ es equivalente a $\Delta_+^p \nsubseteq \Delta_\mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{g}_{\alpha_j + k\alpha_i} = \mathbb{C}(adE_i)^k E_j$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $(ad\overline{E_i})^{-a_{ij}}\overline{E_j} \notin \mathfrak{a}$ es equivalente a $\alpha_j - a_{ij}\alpha_i \notin \Delta_\mathfrak{a}$ y, por tanto, equivalente a $\alpha_j + k\alpha_i \notin \Delta_\mathfrak{a}$ para $0 \leq k \leq -a_{ij}$.

Sea $\mathfrak{n}_{++}$ el ideal de $\mathfrak{n}_+$ definido por

$$\mathfrak{n}_+ = \Big(\bigoplus_{\substack{1 \leq i \neq j \leq \ell \\ 0 \leq k \leq -a_{ji}}} \mathfrak{g}_{\alpha_i + k\alpha_j} \Big) \oplus \mathfrak{n}_{++}$$

y sea $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ los ideales homogéneos de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$.

Lema 0–E.27 ■ Se tiene que

$$\mathfrak{J}_p(A) = \{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}_p(A) \,;\, \mathfrak{a} \oplus C^{p+1}\mathfrak{n}_+ \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++}),\ \Delta_+^p \nsubseteq \Delta_\mathfrak{a}\}.$$

Además, si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}_p(A)$ entonces $\mathfrak{M}_p(A)/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{n}_+/\mathfrak{a} \oplus C^{p+1}\mathfrak{n}_+$. Por tanto si consideramos ideales de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$ podemos olvidarnos del índice de nilpotencia.

Sea Δ_{++} el conjunto definido por

$$\Delta_+ = \{\alpha_i + k\alpha_j \,;\, 1 \leq i \neq j \leq \ell, 0 \leq k \leq -a_{ji}\} \cup \Delta_{++}.$$

Decimos que I es un ideal de Δ_+ si para todo $\alpha \in I$ y para todo $i = 1, \ldots, \ell$ tal que $\alpha + \alpha_i \in \Delta_+$ se tiene que $\alpha + \alpha_i \in I$. Sea $\mathcal{I}(\Delta_{++})$ el conjunto de los ideales de Δ_+ contenidos en Δ_{++}.

Vamos a considerar las siguientes aplicaciones:

$$\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++}) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}(\Delta_{++})$$

donde si $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ entonces $\varphi(\mathfrak{a}) = \Delta_{\mathfrak{a}}$ y si $I \in \mathcal{I}(\Delta_{++})$ entonces $\psi(I) = \oplus_{\alpha \in \overline{I}\mathfrak{g}_\alpha}$.

Se tiene que $\varphi \circ \psi = Id$, pero que $\psi \circ \varphi \neq Id$. Además, si $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell(A)$ entonces $\tilde{\sigma}(\varphi(\mathfrak{a})) = \varphi(\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}))$ para cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ y, como $\sigma(\sum d_i\alpha_i) = \sum d_i\alpha_{\sigma i}$, $\sigma(\psi(I)) = \psi(\sigma(I))$ para cada $I \in \mathcal{I}(\Delta_{++})$.

Luego, estas aplicaciones inducen las siguientes:

$$\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})/\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}(\Delta_{++})/\mathfrak{S}_\ell(A)$$

con $\Phi \circ \Psi = Id$.

Si no fijamos el índice de nilpotencia obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 0–E.28 ■ La aplicación

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A) \cdot \mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{n}_+/\mathfrak{a}$$

es una biyección del conjunto de las $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$-órbitas de $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ en un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo A.

Lema 0–E.29 ■ La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})/\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{I}(\Delta_{++})/\mathfrak{S}_\ell(A) \\ \mathfrak{a} & \longmapsto & \Delta_{\mathfrak{a}} \end{array}$$

es sobreyectiva pero no es inyectiva.

Luego, dada una matriz de Cartan generalizada A, para obtener todas las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo A tenemos que encontrar las $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$-órbitas de $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$. Y para obtener éstas tenemos que encontrar las $\mathfrak{S}_\ell(A)$-órbitas de $\mathcal{I}(\Delta_{++})$ y para cada $O \in \mathcal{I}(\Delta_{++})/\mathfrak{S}_\ell(A)$ determinar $\Phi^{-1}(O)$.

CAPÍTULO 1

Álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$

En este Capítulo vamos a considerar la matriz de Cartan generalizada afín $A = F_4^{(1)}$ y queremos obtener las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo A. Representantes de estas clases de isomorfismo se obtienen como ciertos cocientes de la parte positiva del álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz $F_4^{(1)}$. Como esta matriz de Cartan generalizada es afín, en primer lugar hemos de obtener el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada la matriz de Cartan generalizada finita $\mathring{A} = F_4$ y, después, dar la construcción del álgebra afín $\mathfrak{g}$ asociada a $F_4^{(1)}$, como extensión central de un álgebra lazo construida sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ (la construcción general aparece en la sección D del Capítulo 0).

1-A EL ÁLGEBRA DE KAC-MOODY ASOCIADA A F_4

La matriz de Cartan generalizada afín que consideramos es:

$$A = F_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de Cartan generalizada finita $\mathring{A} = F_4$ se obtiene al eliminar la fila y la columna 0-ésimas en $F_4^{(1)}$ y por tanto, es:

$$F_4 = (a_{ij})_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es:

$$\overset{\mathring{\alpha}_1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\mathring{\alpha}_2}{\circ}\!\!\Longrightarrow\!\!\overset{\mathring{\alpha}_3}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\mathring{\alpha}_4}{\circ}$$

donde $\{\mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \mathring{\alpha}_3, \mathring{\alpha}_4\}$ es la base de las raíces del álgebra de Kac-Moody asociada a F_4, $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(F_4)$.

Además de considerar la matriz F_4, consideramos un espacio vectorial complejo $\mathring{\mathfrak{h}}$ de dimensión $2 \times 4 - rango(F_4) = 4$, que será la subálgebra de Cartan de $\mathring{\mathfrak{g}}$, y dos conjuntos $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ y $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, que serán los generadores de Chevalley de $\mathring{\mathfrak{g}}$. La base de las raíces $\{\mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \mathring{\alpha}_3, \mathring{\alpha}_4\}$ y la base de las corraíces $\{\mathring{\alpha}_1^\vee, \mathring{\alpha}_2^\vee, \mathring{\alpha}_3^\vee, \mathring{\alpha}_4^\vee\}$ son dos subconjuntos linealmente independientes de $\mathring{\mathfrak{h}}^*$ (el espacio dual de $\mathring{\mathfrak{h}}$) y $\mathring{\mathfrak{h}}$, respectivamente, que verifican:

$$\mathring{\alpha}_j(\mathring{\alpha}_i^\vee) = a_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, 4).$$

Recordemos que, por ser F_4 una matriz de Cartan de tipo finito y por el teorema 0–C.15, el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada a F_4 es el álgebra de Lie con generadores E_i, F_i $(i = 1, \ldots, 4)$ y $\mathring{\mathfrak{h}}$ que cumple las siguientes relaciones:

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\overset{\circ}{\alpha}{}_i^{\vee} \quad (i, j = 1, \ldots, 4),$$

$$\left[h, h'\right] = 0 \quad (h, h' \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}})$$

$$[h, E_i] = \overset{\circ}{\alpha}_i(h)E_i,\ [h, F_i] = -\overset{\circ}{\alpha}_i(h)F_i \quad (i = 1, \ldots, 4, h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}),$$

$$(adE_i)^{1-a_{ij}}E_j = 0,\ (adF_i)^{1-a_{ij}}F_j = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, 4\ ;\ i \neq j).$$

Tenemos la siguiente descomposición de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ en subespacios raíces con respecto a $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus \left(\bigoplus_{\overset{\circ}{\alpha}\in\overset{\circ}{\Delta}} \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\alpha}}\right) = \bigoplus_{\overset{\circ}{\alpha}\in\overset{\circ}{\Delta}\cup\{0\}} \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\alpha}},$$

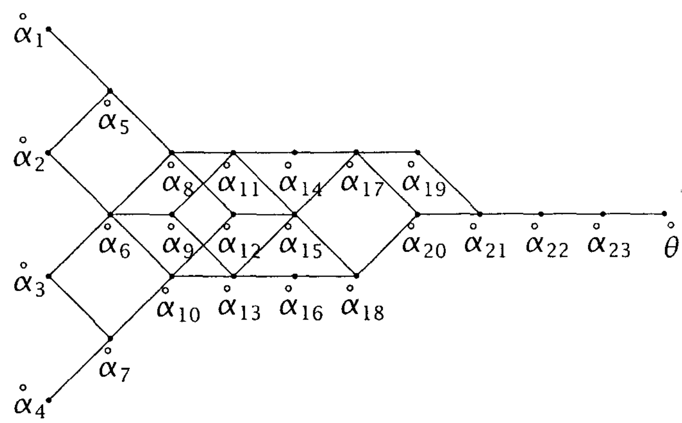
donde el sistema de raíces es $\overset{\circ}{\Delta} = \overset{\circ}{\Delta}_+ \cup \overset{\circ}{\Delta}_-$ con $\overset{\circ}{\Delta}_- = -\overset{\circ}{\Delta}_+$ y el sistema de raíces positivas es (véase [36], p. 91):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Delta}_+ = \{\, & \overset{\circ}{\alpha}_1,\ \overset{\circ}{\alpha}_2,\ \overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_5 = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2,\ \overset{\circ}{\alpha}_6 = \overset{\circ}{\alpha}_2 + \overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_7 = \overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_8 = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2 + \overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_9 = \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_{10} = \overset{\circ}{\alpha}_2 + \overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{11} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_{12} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2 + \overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{13} = \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{14} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3,\ \overset{\circ}{\alpha}_{15} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{16} = \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{17} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{18} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{19} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 3\overset{\circ}{\alpha}_3 + \overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{20} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 2\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{21} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 3\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{22} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 2\overset{\circ}{\alpha}_2 + 4\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\\
& \overset{\circ}{\alpha}_{23} = \overset{\circ}{\alpha}_1 + 3\overset{\circ}{\alpha}_2 + 4\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4,\ \overset{\circ}{\alpha}_{24} = 2\overset{\circ}{\alpha}_1 + 3\overset{\circ}{\alpha}_2 + 4\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4\,\}
\end{aligned}$$

Y la raíz más alta es:

$$\overset{\circ}{\theta} = 2\overset{\circ}{\alpha}_1 + 3\overset{\circ}{\alpha}_2 + 4\overset{\circ}{\alpha}_3 + 2\overset{\circ}{\alpha}_4$$

Podemos representar mediante un grafo el conjunto de raíces positivas $\overset{\circ}{\Delta}_+$ tomando como conjunto de vértices $\overset{\circ}{\Delta}_+$ y trazando una arista de una raíz $\overset{\circ}{\alpha}$ a otra raíz $\overset{\circ}{\beta}$ si existe $i = 1, \ldots, 4$ tal que $\overset{\circ}{\beta} = \overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\alpha}_i$ (en realidad, la arista sería dirigida de $\overset{\circ}{\alpha}$ a $\overset{\circ}{\beta}$ y tendríamos un grafo dirigido). Además, los vértices que se encuentran en una misma línea vertical corresponden a raíces de la misma altura y la altura va aumentando de izquierda a derecha. Tendríamos el siguiente grafo:



Como la subálgebra de Cartan $\mathring{\mathfrak{h}}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ es un espacio complejo de dimensión 4, entonces la base de las corraíces es una base de $\mathring{\mathfrak{h}}$. Luego, tenemos lo siguiente:

$$\mathring{\mathfrak{g}}_0 = \mathring{\mathfrak{h}} = \{h = \sum_{i=1}^{4} h_i \mathring{\alpha}_i^{\vee} \ / \ h_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \dots, 4\}.$$

Para cada raíz $\mathring{\alpha} = d_1\mathring{\alpha}_1 + d_2\mathring{\alpha}_2 + d_3\mathring{\alpha}_3 + d_4\mathring{\alpha}_4$ tenemos que el subespacio raíz $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}}$ asociado a $\mathring{\alpha}$ está generado por los elementos $[E_{i_1}, \dots, E_{i_r}]$ donde E_i aparece d_i veces, si $\mathring{\alpha}$ es una raíz positiva, y está generado por los elementos $[F_{i_1}, \dots, F_{i_r}]$ donde E_i aparece d_i veces, si $\mathring{\alpha}$ es una raíz negativa. Por tanto, $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_i}$ es el subespacio unidimensional $\mathbb{C}E_{\mathring{\alpha}_i}$ y $\mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\alpha}_i}$ es el subespacio unidimensional $\mathbb{C}E_{-\mathring{\alpha}_i}$, utilizando para los generadores de Chevalley la notación:

$$E_{\mathring{\alpha}_i} = E_i, \ E_{-\mathring{\alpha}_i} = F_i, \ i = 1, \dots, 4.$$

Cuando la matriz de Cartan es de tipo finito, resulta que también los subespacios raíces asociados a raíces no simples tienen dimensión 1 y, siguiendo la misma notación, tenemos que $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}} = \mathbb{C}E_{\mathring{\alpha}}$ para cada $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$.

Además, si $\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}, \mathring{\alpha} + \mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}$ tenemos que $[\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\beta}}] \subseteq \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$.

Por tanto, la dimensión del álgebra de Kac-Moody asociada a F_4 es $dim(\mathring{\mathfrak{h}}) + \#\mathring{\Delta} = 4 + 48 = 52$ (donde # denota cardinal de un conjunto) y una base sería

$$\{\mathring{\alpha}_i^\vee \,/\, i = 1, \dots, 4\} \cup \{E_{\mathring{\alpha}} \,/\, \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}\}.$$

Los productos corchete que relacionan los $E_{\mathring{\alpha}}$ con $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_+$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lcl}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] & = & -E_{\mathring{\theta}} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3}\right] & = & -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] & = & -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] & = & E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\theta}}
\end{aligned}
$$

Si $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}$ son raíces positivas y $\left[E_{\mathring{\alpha}}, E_{\mathring{\beta}}\right] = C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})E_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$, entonces tomamos $\left[E_{-\mathring{\alpha}}, E_{-\mathring{\beta}}\right] = -C(\mathring{\alpha}, \mathring{\beta})E_{-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}}$.

Consideramos la siguiente partición del sistema de raíces:

$$\mathring{\Delta} = \mathring{\Delta}_s \cup \mathring{\Delta}_l,$$

donde

$$\mathring{\Delta}_s = (\mathring{\Delta}_s)_+ \cup (\mathring{\Delta}_s)_-, \quad (\mathring{\Delta}_s)_- = \{-\mathring{\alpha} \,/\, \mathring{\alpha} \in (\mathring{\Delta}_s)_+\}$$
$$\mathring{\Delta}_l = (\mathring{\Delta}_l)_+ \cup (\mathring{\Delta}_l)_-, \quad (\mathring{\Delta}_l)_- = \{-\mathring{\alpha} \,/\, \mathring{\alpha} \in (\mathring{\Delta}_l)_+\} \text{ y}$$

$$\begin{aligned}(\mathring{\Delta}_s)_+ = \{ \ & \mathring{\alpha}_3,\ \mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3,\ \mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3,\ \mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3\mathring{\alpha}_4,\\ & \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\\ & \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4,\\ & \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathring{\Delta}_l)_+ = \mathring{\Delta}_+ - (\mathring{\Delta}_s)_+ = \{ \ & \mathring{\alpha}_1,\ \mathring{\alpha}_2,\ \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2,\ \mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3,\ \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3,\\ & \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3,\ \mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4,\\ & \mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4,\\ & \mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4,\ \mathring{\theta}\}.\end{aligned}$$

Si $\mathring{\alpha} = d_1\mathring{\alpha}_1 + d_2\mathring{\alpha}_2 + d_3\mathring{\alpha}_3 + d_4\mathring{\alpha}_4$ es una raíz, entonces

$$\left[E_{\mathring{\alpha}}, E_{-\mathring{\alpha}}\right] = D(\mathring{\alpha})\mathring{\alpha}^{\vee},$$

donde $\mathring{\alpha}^{\vee} = d_1\mathring{\alpha}_1^{\vee} + d_2\mathring{\alpha}_2^{\vee} + \frac{d_3}{2}\mathring{\alpha}_3^{\vee} + \frac{d_4}{2}\mathring{\alpha}_4^{\vee}$ y $D : \mathring{\Delta} \longrightarrow \{1, 2\}$ es la aplicación definida por

$$D(\mathring{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_l \\ 2 & \text{si } \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_s \end{cases}$$

Nos queda ver los productos corchete $\left[E_{\mathring{\gamma}}, E_{\mathring{\delta}}\right]$ con $\mathring{\gamma} + \mathring{\delta} \in \mathring{\Delta}$, pero siendo $\mathring{\gamma}$ y $\mathring{\delta}$ raíces de distinto signo. Como $[\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\delta}}] \subseteq \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}+\mathring{\delta}}$, entonces $\left[E_{\mathring{\gamma}}, E_{\mathring{\delta}}\right] = C(\mathring{\gamma}, \mathring{\delta})E_{\mathring{\gamma}+\mathring{\delta}}$.

Si $\overset{\circ}{\alpha}$, $\overset{\circ}{\beta}$ y $\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta}$ son raíces positivas con $\overset{\circ}{\alpha} < \overset{\circ}{\beta}$ y $\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}}, E_{\overset{\circ}{\beta}}\right] = C(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})E_{\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta}}$, utilizando la identidad de Jacobi para $E_{\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta}}$, $E_{-\overset{\circ}{\alpha}}$ y $E_{-\overset{\circ}{\beta}}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
C(\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta},-\overset{\circ}{\alpha}) &= -\frac{C(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})D(\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta})}{D(\overset{\circ}{\beta})}\\
C(\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta},-\overset{\circ}{\beta}) &= \frac{C(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})D(\overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta})}{D(\overset{\circ}{\alpha})}
\end{aligned}$$

y tendríamos, aplicando las relaciones anteriores, los siguientes productos:

$$\begin{aligned}
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1}\right] &= -E_{\overset{\circ}{\alpha}_2}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_2}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_1}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_2}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\overset{\circ}{\alpha}_2}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_3+\overset{\circ}{\alpha}_4}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_4}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_3+\overset{\circ}{\alpha}_4}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_4}\right] &= -E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1}\right] &= -E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_2-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= 2E_{\overset{\circ}{\alpha}_1}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_1+\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1-\overset{\circ}{\alpha}_2}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+2\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+2\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_2-\overset{\circ}{\alpha}_3}\right] &= -E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}\\
\left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_2+\overset{\circ}{\alpha}_3+\overset{\circ}{\alpha}_4}, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_2}\right] &= E_{\overset{\circ}{\alpha}_3+\overset{\circ}{\alpha}_4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= 2E_{\mathring\alpha_2}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_4}\right] &= -2E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-2\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3}\right] &= E_{\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2}\right] &= E_{\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= -2E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3}\right] &= -E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3}\right] &= -E_{\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1}\right] &= -E_{\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-2\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_1}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= -E_{\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= -E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+2\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+3\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_3}\right] &= -E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+3\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-2\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_3}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+3\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_2-\mathring\alpha_3}\right] &= -E_{\mathring\alpha_1+\mathring\alpha_2+2\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}\\
\left[E_{\mathring\alpha_1+2\mathring\alpha_2+3\mathring\alpha_3+\mathring\alpha_4}, E_{-\mathring\alpha_1-\mathring\alpha_2-2\mathring\alpha_3-\mathring\alpha_4}\right] &= E_{\mathring\alpha_2+\mathring\alpha_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -2E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= 2E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}
\end{aligned}
$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}$$

$$\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+3\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-3\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1}$$

$$\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+4\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}$$

$$\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

Si utilizamos la identidad de Jacobi para $E_{-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}}$, $E_{\mathring{\alpha}}$ y $E_{\mathring{\beta}}$, con $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}$ raíces positivas y $\mathring{\alpha} < \mathring{\beta}$, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\alpha}) &= \frac{C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})D(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta})}{D(\mathring{\beta})} \\
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\beta}) &= -\frac{C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})D(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta})}{D(\mathring{\alpha})}.
\end{aligned}
$$

Luego tenemos las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\alpha}) &= -C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha}) \\
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\beta}) &= -C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\beta})
\end{aligned}
$$

y acabamos de dar los valores de $C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha})$ y $C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha})$ que son no nulos, cuando consideramos todos los $\mathring{\alpha}, \mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}_+$ con $\mathring{\alpha} < \mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}_+$.

Teniendo en cuenta que, para cada $h \in \mathring{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$
\left[h, E_{\mathring{\alpha}_i}\right] = \mathring{\alpha}_i(h) E_{\mathring{\alpha}_i} \quad \text{y} \quad \left[h, E_{-\mathring{\alpha}_i}\right] = -\mathring{\alpha}_i(h) E_{-\mathring{\alpha}_i},
$$

obtenemos que los productos corchete que relacionan los $E_{\mathring{\alpha}}$ con la subálgebra de Cartan $\mathring{\mathfrak{h}}$ son los siguientes:

$$\left[h, E_{\mathring{\alpha}}\right] = \mathring{\alpha}(h)E_{\mathring{\alpha}} \quad (h \in \mathring{\mathfrak{h}},\ \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}).$$

Si $h = h_1\mathring{\alpha}_1^\vee + h_2\mathring{\alpha}_2^\vee + h_3\mathring{\alpha}_3^\vee + h_4\mathring{\alpha}_4^\vee \in \mathring{\mathfrak{h}}$ y $\mathring{\alpha} = d_1\mathring{\alpha}_1 + d_2\mathring{\alpha}_2 + d_3\mathring{\alpha}_3 + d_4\mathring{\alpha}_4 \in \mathring{\Delta}$, entonces

$$\left[h, E_{\mathring{\alpha}}\right] = \sum_{i,j=1}^{4} d_i h_j \mathring{\alpha}_i(\mathring{\alpha}_j^\vee) = \sum_{i,j=1}^{4} d_i h_j a_{ji}.$$

Los productos corchete que hemos calculado son todos los productos no nulos, salvo antisimetría, en el álgebra de Lie $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(F_4)$.

1-B EL ÁLGEBRA DE KAC-MOODY AFÍN ASOCIADA A $F_4^{(1)}$

Ahora vamos a obtener el álgebra de Kac-Moody afín $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(F_4^{(1)})$ asociada a $F_4^{(1)}$. Para ello necesitamos el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada a F_4 que hemos obtenido en la sección anterior, ya que vamos a utilizar la construcción dada en el Capítulo 0 para álgebras de Kac-Moody afines. Tenemos que, si $L = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ es el álgebra de los polinomios de Laurent en t,

$$\mathfrak{g} = L \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

con el producto corchete definido como sigue:
$[t^k \otimes X \oplus \lambda c \oplus \mu d, t^{k_1} \otimes Y \oplus \lambda_1 c \oplus \mu_1 d] =$
$(t^{k+k_1} \otimes [X, Y] + \mu k_1 t^{k_1} \otimes Y - \mu_1 k t^k \otimes X) \oplus k\delta_{k,-k_1}(X|Y)c$
donde $X, Y \in \mathring{\mathfrak{g}}$; $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}$.

Veamos como queda la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en este caso (véase la nota 0–D.4). Antes de estudiar dicha estructura tenemos que conocer algunos datos más sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$, como una forma bilineal simétrica invariante $(.|.)$ sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ y la involución de Cartan $\mathring{\omega}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ (para sus definiciones consúltese los Caps. 1 y 2 de [36]).

Para dar una forma bilineal simétrica invariante sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ tenemos que considerar una descomposición de la matriz F_4 en producto de una matriz diagonal $D = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ y una matriz simétrica $B = (b_{ij})_{i,j=1}^4$, por ejemplo:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = DB.$$

A partir de la descomposición dada de F_4, tenemos que una forma bilineal simétrica invariante $(.|.)$ sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ está determinada por:

$$\begin{array}{ll} (\overset{\circ}{\alpha}{}_i^{\vee} | \overset{\circ}{\alpha}{}_j^{\vee}) = b_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j & i, j = 1, \ldots, 4, \\ (\overset{\circ}{\alpha}_i | \overset{\circ}{\alpha}_j) = b_{ij} & i, j = 1, \ldots, 4, \\ (\mathring{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\alpha}} | \mathring{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\beta}}) = 0 & \text{si } \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta} \in \overset{\circ}{\Delta} \cup \{0\},\ \overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta} \neq 0, \\ (E_{\overset{\circ}{\alpha}} | E_{-\overset{\circ}{\alpha}}) = D(\overset{\circ}{\alpha}) & \overset{\circ}{\alpha} \in \overset{\circ}{\Delta}. \end{array}$$

La involución de Cartan $\overset{\circ}{\omega}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ está determinada por:

$$\begin{array}{ll} \overset{\circ}{\omega}(E_{\overset{\circ}{\alpha}_i}) = -E_{-\overset{\circ}{\alpha}_i},\ \overset{\circ}{\omega}(E_{-\overset{\circ}{\alpha}_i}) = -E_{\overset{\circ}{\alpha}_i} & i = 1, \ldots, 4 \\ \overset{\circ}{\omega}(h) = -h & \text{si } h \in \mathring{\mathfrak{h}}. \end{array}$$

Consideramos los generadores de Chevalley de $\mathring{\mathfrak{g}}$, $E_{\overset{\circ}{\alpha}_1}, \ldots, E_{\overset{\circ}{\alpha}_4}$ y $E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1}, \ldots, E_{-\overset{\circ}{\alpha}_4}$, y tomamos $F_0 \in \mathring{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\theta}}$ tal que $(F_0|\overset{\circ}{\omega}(F_0)) = -2/(\overset{\circ}{\theta}|\overset{\circ}{\theta})$ y $E_0 = -\overset{\circ}{\omega}(F_0)$. Esto es, tomamos $F_0 = E_{\overset{\circ}{\theta}}$ y $E_0 = E_{-\overset{\circ}{\theta}}$. Entonces los generadores de Chevalley de $\mathfrak{g}$ son:

$$e_0 = t \otimes E_{-\overset{\circ}{\theta}}, e_1 = 1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_1}, \ldots, e_4 = 1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_4}$$

$$f_0 = t^{-1} \otimes E_{\overset{\circ}{\theta}}, f_1 = 1 \otimes E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1}, \ldots, f_4 = 1 \otimes E_{-\overset{\circ}{\alpha}_4}.$$

La subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{h} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ (identificando $1 \otimes \mathring{\mathfrak{h}}$ con $\mathring{\mathfrak{h}}$).

Consideramos la notación $\alpha_i = \overset{\circ}{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, denotamos por δ al elemento de $\mathfrak{h}^*$ determinado por $\delta|_{\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c} = 0$ y $\delta(d) = 1$ y tomamos

$\alpha_0 = \delta - \overset{\circ}{\theta}$, entonces la base de las raíces de $\mathfrak{g}$ es $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_4\}$ y $\delta = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$.

Tenemos que, si $\overset{\circ}{\Delta}$ es el sistema de raíces de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, entonces el sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ es:

$$\Delta = \{j\delta + \overset{\circ}{\gamma}\, ;\, j \in \mathbb{Z}, \overset{\circ}{\gamma} \in \overset{\circ}{\Delta}\} \cup \{j\delta\, ;\, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

y el sistema de raíces positivas es:

$$\Delta_+ \cup \{0\} = \overset{\circ}{\Delta}_+ \cup \{j\delta + \overset{\circ}{\gamma}\, ;\, j \geq 1,\ \overset{\circ}{\gamma} \in \overset{\circ}{\Delta} \cup \{0\}\} \cup \{0\} = \bigcup_{j \geq 0} \Delta_j,$$

donde $\Delta_j = \{j\delta + \gamma\, ;\, \gamma \in \Delta_0\}$ si $j \geq 1$ y $\Delta_0 = \overset{\circ}{\Delta}_+ \cup \{\delta - \overset{\circ}{\gamma}\, ;\, \overset{\circ}{\gamma} \in \overset{\circ}{\Delta}_+ \cup \{0\}\} \cup \{0\} = \{0, \alpha_0, \dots, \alpha_{48}\}$ con

$\alpha_5 = \alpha_0 + \alpha_1$, $\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_8 = \alpha_3 + \alpha_4$,

$\alpha_9 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_{10} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_{11} = \alpha_2 + 2\alpha_3$,
$\alpha_{12} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,

$\alpha_{13} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_{14} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_{15} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{16} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$,

$\alpha_{17} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_{18} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{19} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_{20} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{21} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{22} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_{23} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{24} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_{25} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{26} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_{27} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{28} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\alpha_{29} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$,
$\alpha_{30} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{31} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_{32} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$,

$\alpha_{33} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\alpha_{34} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{35} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_{36} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{37} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\alpha_{38} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{39} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_{40} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{41} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\alpha_{42} = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$,

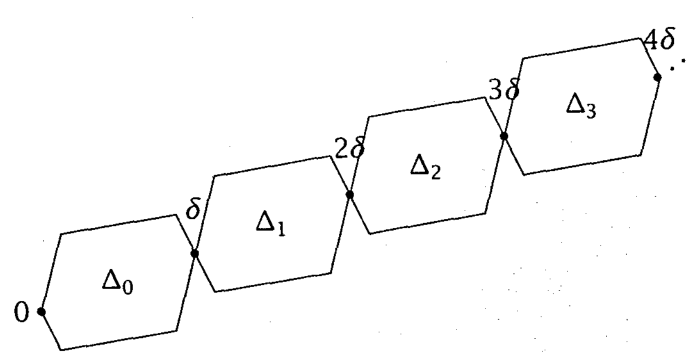
$\alpha_{43} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_{44} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{45} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\alpha_{46} = \alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$,

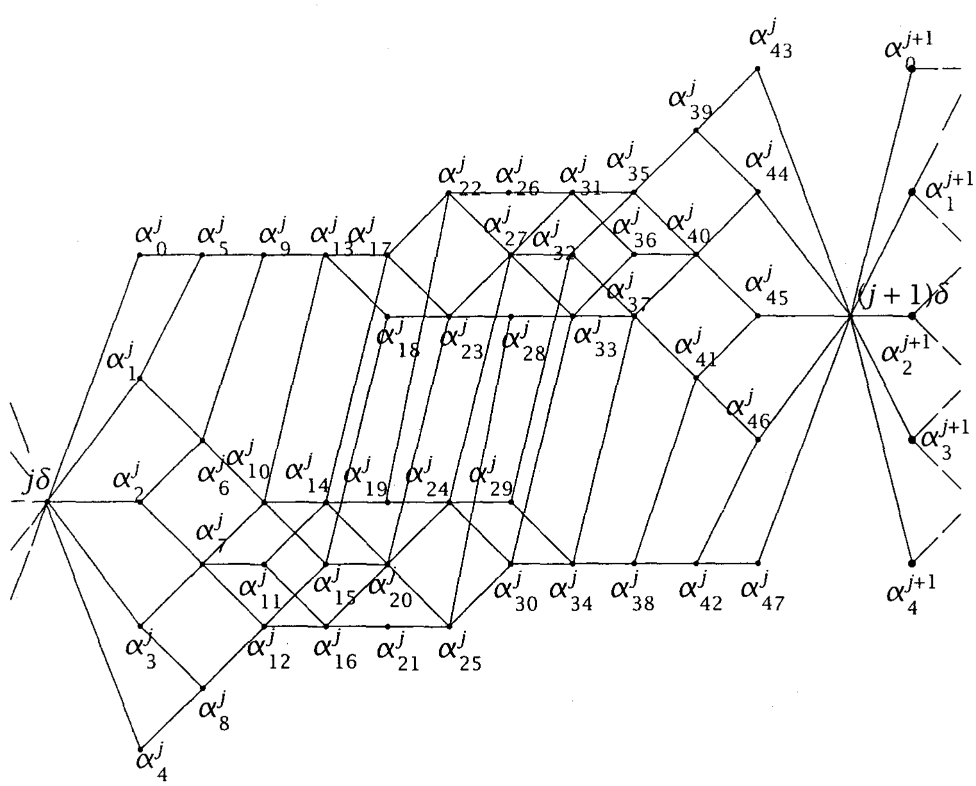
$\alpha_{47} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$,

$\alpha_{48} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \delta$.

Podemos representar mediante un grafo el conjunto de raíces positivas Δ_+ (igual que hicimos en la sección anterior con $\mathring{\Delta}_+$). Dicho grafo tendría la siguiente estructura:



donde Δ_j es el siguiente grafo:



con la notación $\alpha_i^j = j\delta + \alpha_i$ si $j \geq 1$ para $i = 0, \ldots, 47$. Recordemos que el grafo que obtenemos es un grafo dirigido. Cada arista que aparece entre dos vértices α_i^j y α_k^j es, en realidad, una arista dirigida de α_i^j a α_k^j si $i < k$, es decir, las aristas van dirigidas desde cada vértice hacia los que se encuentran a su derecha en el grafo. Hemos dibujado líneas en lugar de flechas para no complicar el dibujo. Además, los vértices que se encuentran en cada vertical corresponden a raíces que tienen la misma altura y ésta va aumentando de izquierda a derecha.

La descomposición en subespacios raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a su subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ es:

$$\mathfrak{g} = \oplus_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha),$$

donde:

$$\mathfrak{g}_{j\delta+\mathring{\gamma}} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}} \text{ y } \mathfrak{g}_{j\delta} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}}.$$

Como vimos en la sección anterior, $\mathring{\mathfrak{h}}$ tiene dimensión 4 y está generada por $\{\mathring{\alpha}_1^\vee, \ldots, \mathring{\alpha}_4^\vee\}$ y, además, si $\mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}$ entonces $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}} = \mathbb{C}E_{\mathring{\gamma}}$. Por tanto, los subespacios $\mathfrak{g}_{j\delta}$ tienen dimensión 6, si $j = 0$, y dimensión 4, si $j \neq 0$, y los subespacios $\mathfrak{g}_{j\delta+\mathring{\gamma}}$ son unidimensionales.

Los productos corchete no nulos en $\mathfrak{g}$ son los siguientes:

$$\left[t^{k_1} \otimes E_{\mathring{\gamma}_1}, t^{k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}_2}\right] = \begin{cases} C(\mathring{\gamma}_1, \mathring{\gamma}_2) t^{k_1+k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}_1+\mathring{\gamma}_2} & \text{si } \mathring{\gamma}_1 + \mathring{\gamma}_2 \in \mathring{\Delta} \\ D(\mathring{\gamma}_1) t^{k_1+k_2} \otimes \mathring{\gamma}_1^\vee & \text{si } k_1 \neq -k_2,\ \mathring{\gamma}_1 = -\mathring{\gamma}_2 \\ D(\mathring{\gamma}_1)(1 \otimes \mathring{\gamma}_1^\vee \oplus k_1 c) & \text{si } k_1 = -k_2,\ \mathring{\gamma}_1 = -\mathring{\gamma}_2 \end{cases}$$

$$\left[t^{k_1} \otimes h, t^{k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}}\right] = \mathring{\gamma}(h) t^{k_1+k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}}$$

$$\left[1 \otimes h \oplus \lambda c \oplus \mu d, t^k \otimes E_{\mathring{\gamma}}\right] = (\mathring{\gamma}(h) + \mu k) t^k \otimes E_{\mathring{\gamma}}$$

$$\left[t^k \otimes h_1, t^{-k} \otimes h_2\right] = k(h_1 | h_2) c$$

donde $\mathring{\gamma}_1, \mathring{\gamma}_2, \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}$; $h, h_1, h_2 \in \mathring{\mathfrak{h}}$; $k_1, k_2, k, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

En las siguientes secciones no trabajaremos con el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(F_4^{(1)})$, sino con su parte positiva $\mathfrak{n}_+$, pues las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$ se obtienen como ciertos cocientes de $\mathfrak{n}_+$. Tenemos que:

$$\mathfrak{n}_+ = \mathring{\mathfrak{n}}_+ \oplus (t\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}})$$

y su descomposición en subespacios raíces es:

$$\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

(el sistema de raíces positivas Δ_+ ya hemos visto cómo queda).

Como vimos en el teorema 0–E.28, para obtener todas las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$, tenemos que determinar el conjunto de las $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\mathcal{L}}(F_4^{(1)})$-órbitas de $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$. En la siguiente sección vamos a calcular $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\mathcal{L}}(F_4^{(1)})$.

1-C EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE $F_4^{(1)}$

El grupo de automorfismos de la matriz de Cartan generalizada $F_4^{(1)}$ es $\mathfrak{S}_\ell(F_4^{(1)}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell \,/\, a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij},\ \forall i,j = 0,\dots 4\} = \{Id\}$ (donde aquí $\mathfrak{S}_\ell$ es el grupo de permutaciones de $\{0,1,\dots,4\}$, pues para la matriz $F_4^{(1)}$ hemos seguido la notación $F_4^{(1)} = (a_{ij})_{i,j=0}^4$).

Este grupo también coincide con el grupo de automorfismos del diagrama de Dynkin de $F_4^{(1)}$ que es:

$$S(F_4^{(1)}) \equiv \overset{\alpha_0}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\alpha_1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\alpha_2}{\circ}\!\Longrightarrow\!\overset{\alpha_3}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\alpha_4}{\circ}$$

No hay ninguna aplicación del conjunto de vértices de $S(F_4^{(1)})$ en sí mismo, salvo la identidad, que mantenga fijas las aristas.

Y, por tanto,

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(F_4^{(1)}) = \{\tilde{\sigma} \in Aut\mathfrak{M} \,/\, \sigma \in \mathfrak{S}_\ell(F_4^{(1)})\} = \{Id\}.$$

Como consecuencia, cada $\mathfrak{S}_\ell(F_4^{(1)})$-órbita de $\mathcal{I}(\Delta_{++})$ tiene un único ideal y lo mismo sucede con cada $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(F_4^{(1)})$-órbita de $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$. Luego, podemos identificar $\mathcal{I}(\Delta_{++})/\mathfrak{S}_\ell(F_4^{(1)})$ con $\mathcal{I}(\Delta_{++})$ y $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})/\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(F_4^{(1)})$ con $\mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$.

1-D LOS IDEALES DE Δ_+

El siguiente paso para obtener las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $F_4^{(1)}$ es determinar $\mathcal{I}(\Delta_{++})$. Antes hemos calculado el sistema de raíces positivas Δ_+ del álgebra de Kac-Moody afín asociada a $F_4^{(1)}$ y lo representamos mediante un grafo (dirigido).

Recordemos que I es un ideal de Δ_+ si para todo $\alpha \in I$ y para todo $i = 0,\dots,4$ tal que $\alpha+\alpha_i \in \Delta_+$ se tiene que $\alpha+\alpha_i \in I$. Los ideales de Δ_+ se corresponden con los subgrafos del grafo obtenido que verifican la propiedad de que, si un vértice está en el subgrafo, también están todas las aristas (dirigidas) que parten de este vértice.

Tenemos que calcular el conjunto de los ideales de Δ_+ que están contenidos en Δ_{++}, $\mathcal{I}(\Delta_{++})$. Como Δ_{++} es el conjunto definido por

$$\Delta_+ = \{\alpha_i + k\alpha_j\,;\ 0 \le i \ne j \le 4,\ 0 \le k \le -a_{ji}\} \cup \Delta_{++},$$

entonces

$$\Delta_{++} = \{\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{48}\} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots$$

Para $j \in \mathbb{N}$, tomamos:

$$\mathcal{I}^j(\Delta_{++}) = \{I \in \mathcal{I}(\Delta_{++})\,;\ j\delta \notin I,\ (j+1)\delta \in I\}$$

entonces tenemos la siguiente partición del conjunto de los ideales de Δ_+ contenidos en Δ_{++}:

$$\mathcal{I}(\Delta_{++}) = \bigcup_{j\ge 0} \mathcal{I}^j(\Delta_{++}).$$

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}^1(\Delta_{++}) & \rightarrow & \mathcal{I}^j(\Delta_{++}),\ j \ge 1 \\ I & \mapsto & I + (j-1)\delta \end{array}$$

es una biyección para cada $j \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Entonces para obtener $\mathcal{I}(\Delta_{++})$ es suficiente determinar $\mathcal{I}^0(\Delta_{++})$ y $\mathcal{I}^1(\Delta_{++})$. Existe $i_{F_4^{(1)}} \in \mathbb{N}$ independiente de $j \ge 1$ tal que $\#\mathcal{I}^j(\Delta_{++}) = i_{F_4^{(1)}}$.

Obtenemos 1036 series de ideales, $\#\mathcal{I}^0(\Delta_{++}) = 742$ y $\#\mathcal{I}^j(\Delta_{++}) =$ 1036 si $j \ge 1$. Dichos ideales se pueden encontrar en el apéndice A de esta Memoria.

El último paso es calcular los ideales de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$. Realizando los cocientes de la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ del álgebra afín asociada a $F_4^{(1)}$ por estos ideales, obtendremos representantes de las clases de isomorfía de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$.

1-E LOS IDEALES DE $\mathfrak{N}_+$

Ahora, para cada $I \in \mathcal{I}(\Delta_{++})$ tenemos que obtener $\varphi^{-1}(I)$, es decir, todos los $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ tales que $\varphi(\mathfrak{a}) = \{\alpha \in \Delta_+ \,/\, \mathfrak{a}_\alpha \ne \{0\}\} = I$.

Sea $I \in F^j(\Delta_{++})$, entonces $j\delta \notin I$, pero $(j+1)\delta \in I$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} I' &= \{\alpha \in I\,;\ \mid\alpha\mid\leq\mid(j+1)\delta\mid-2\} \\ I'' &= \{\alpha \in I\,;\ \mid\alpha\mid=\mid(j+1)\delta\mid-1\} \end{aligned}$$

Tenemos, por tanto, la siguiente partición de I:

$$I = I' \cup I'' \cup \langle (j+1)\delta\rangle$$

Si $\varphi(\mathfrak{a}) = I$, entonces tenemos que $\mathfrak{a} = \oplus_{\alpha\in I}\mathfrak{a}_\alpha$ donde $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}_\alpha$, identificando $\overline{\mathfrak{g}_\alpha}$ con $\mathfrak{g}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta_+$.

La partición que tenemos para I nos induce la siguiente descomposición en suma directa para $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = (\oplus_{\alpha\in I'}\mathfrak{a}_\alpha \oplus (\oplus_{\alpha\in I''}\mathfrak{a}_\alpha) \oplus (\oplus_{\alpha\in\langle(j+1)\delta\rangle}\mathfrak{a}_\alpha)$$

Veamos como son cada uno de los sumandos que aparecen en esta descomposición. Como la dimensión de $\mathfrak{g}_\alpha$ es 1 si $\alpha \in \Delta_+$ y $\alpha \neq k\delta$, entonces se tiene que $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ si $\alpha \in I$ and $\alpha \neq k\delta$. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{k\delta-\alpha_m} = \mathfrak{g}_{k\delta-\alpha_m}$ para cada $m = 0,\ldots,4$ y $k \geq j+1$, entonces se tiene que $\mathfrak{a}_{k\delta} = \mathfrak{g}_{k\delta}$ para cada $k \geq j+1$. Como resultado obtenemos que:

$$\mathfrak{a} = (\oplus_{\alpha\in I'}\mathfrak{g}_\alpha) \oplus (\oplus_{\alpha\in I''}\mathfrak{g}_\alpha) \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}\,,$$

donde

$$\mathfrak{b} = (\oplus_{\alpha>(j+1)\delta}\mathfrak{g}_\alpha)$$

Luego, lo que nos queda por obtener es $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, que depende de I''.

Tenemos que

$$\mathfrak{g}_{(j+1)\delta} = t^{j+1} \otimes \mathring{\mathfrak{h}} = \oplus_{i=1}^4 \mathbb{C}\, t^{j+1} \otimes \mathring{\alpha}_i^\vee$$

Para simplificar, denotamos $\oplus_{i=1}^4\mathbb{C}\lambda_i t^{j+1}\otimes\mathring{\alpha}_i^\vee$ por $[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4]$ para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}^4$.

También denotamos el ideal de Δ_+ generado por $\alpha^j_{i_1},\ldots,\alpha^j_{i_k}$ por $\langle i_1,\ldots,i_k\rangle$.

Sea $n = \#I''$. Como

$$I'' \subseteq \{(j+1)\delta - \alpha_m\ ;\ m = 0,1,2,3,4\} = \{j\delta + \alpha_m\ ;\ m = 43,44,45,46,47\},$$

tenemos que $0 \leq n \leq 5$. Si tomamos $\mathcal{I}_n^j = \{I \in \mathcal{I}^j(\Delta_{++}) \,/\, \#I'' = n\}$, tenemos que $\mathcal{I}^j(\Delta_{++}) = \cup_{0\leq n\leq 5}\mathcal{I}_n^j$. Por tanto, tenemos que considerar 5 casos (que, en realidad, son 6, pero los casos $n = 4$ y $n = 5$ son similares, por lo que los estudiamos juntos):

Caso 1: $n = 0$. Entonces $I'' = \emptyset$ y $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$. Hay un único ideal en este caso ($\#\mathcal{I}_0^j = 1$): $I = \langle (j+1)\delta\rangle = \langle 48\rangle$ con $j \geq 0$. Como $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 4, hay que considerar 4 posibilidades:

(1.a) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)} = [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}^4$.

(1.b) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))} = [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4] \oplus [\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4), (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) \in \mathbb{C}^4$.

(1.c) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))} \\ &= [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4] \oplus [\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4] \oplus [\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4] \oplus \mathfrak{b} \end{aligned}$$

para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4), (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4), (\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \in \mathbb{C}^4$.

(1.d) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j} = \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$\varphi^{-1}(\langle 48\rangle) =$
$\{\mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{C}^4\}\cup$
$\{\mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)\in\mathbb{C}^4\}\cup$
$\{\mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\in\mathbb{C}^4\}\cup$
$\{\mathfrak{a}_{\langle 48\rangle}^{j}\}$

Caso 2: $n = 1$. Hay 5 ideales en este caso ($\#I_1^j = 5$):
$\langle 43\rangle, \langle 44\rangle, \langle 45\rangle, \langle 46\rangle, \langle 47\rangle$ con $j \geq 1$.

Si llamamos γ al único elemento de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}\,,$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_\gamma$, que es

$$\langle\mathfrak{g}_\gamma\rangle = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_\gamma \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_\gamma$ un cierto subespacio de dimensión 1 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay cinco ideales en este caso. A modo de ejemplo consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 43\rangle = \langle j\delta + \alpha_{43}\rangle$. Para los otros ideales se procede de modo similar, obteniéndose resultados análogos para los cinco ideales. Como tenemos que $\mathfrak{a}_\gamma \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_\gamma$ es 1 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 4, hay que considerar 4 posibilidades:

(2.a) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 43\rangle,1} = \langle\mathfrak{g}_\gamma\rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_\gamma = [0,0,0,1]$$

pues $\gamma = j\delta + \alpha_{43} = (j+1)\delta - \alpha_4$ para $I = \langle 43\rangle$.

(2.b) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,1] \oplus [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0]$$

para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3$.

(2.c) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,1] \oplus [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0] \oplus [\mu_1,\mu_2,\mu_3,0]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$.

(2.d) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\langle 43\rangle) = \\
&\{\mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3\} \cup \\
&\{\mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in \mathbb{C}^3\} \cup \\
&\{\mathfrak{a}_{\langle 43\rangle}^{j},\ \mathfrak{a}_{\langle 43\rangle,1}^{j}\}
\end{aligned}$$

Caso 3: $n = 2$. Hay 15 ideales en este caso ($\# I_2^j = 15$):

$\langle 36\rangle$, $\langle 39\rangle$, $\langle 40\rangle$, $\langle 41\rangle$, $\langle 42\rangle$,
$\langle 43,44\rangle$, $\langle 43,45\rangle$, $\langle 43,46\rangle$, $\langle 43,47\rangle$, $\langle 44,45\rangle$, $\langle 44,46\rangle$,
$\langle 44,47\rangle$, $\langle 45,46\rangle$, $\langle 45,47\rangle$, $\langle 46,47\rangle$

con $j \geq 1$.

Si llamamos γ_1 y γ_2 a los dos elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ y $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$, que es

$$\langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2} \rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2}$ un cierto subespacio de dimensión 2 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay quince ideales en este caso. A modo de ejemplo consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 36 \rangle = \langle j\delta + \alpha_{36} \rangle$. Para los otros ideales se procede de modo similar obteniéndose resultados análogos para los quince ideales. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2}$ es 2 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 4, hay que considerar 3 posibilidades:

(3.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 36 \rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2} \rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} = [0,1,0,0] \oplus [0,0,1,0]$$

pues $\gamma_1 = j\delta + \alpha_{45} = (j+1)\delta - \alpha_2$ y $\gamma_2 = j\delta + \alpha_{44} = (j+1)\delta - \alpha_3$ para $I = \langle 36 \rangle$.

(3.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_4)}_{\langle 36 \rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,1,0,0] \oplus [0,0,1,0] \oplus [\lambda_1,0,0,\lambda_4]$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{C}^2$.

(3.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 36 \rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\varphi^{-1}(\langle 36 \rangle) = \{\mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2)}_{\langle 36 \rangle} ; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2\} \cup \{\mathfrak{a}^{j}_{\langle 36 \rangle}, \mathfrak{a}^{j}_{\langle 36 \rangle,1}\}.$$

Caso 4: $n = 3$. Hay 39 ideales en este caso ($\# I_3^j = 39$):

$$\begin{array}{llllll}
\langle 26\rangle, & \langle 28\rangle, & \langle 31\rangle, & \langle 33\rangle, & \langle 35\rangle, & \langle 37\rangle,\ \langle 38\rangle, \\
\langle 35,36\rangle, & \langle 36,37\rangle, & \langle 36,39\rangle, & \langle 36,41\rangle, & \langle 36,43\rangle, & \langle 36,46\rangle, \\
\langle 36,47\rangle, & \langle 39,40\rangle, & \langle 39,45\rangle, & \langle 39,46\rangle, & \langle 39,47\rangle, & \langle 40,41\rangle, \\
\langle 40,43\rangle, & \langle 40,46\rangle, & \langle 40,47\rangle, & \langle 41,42\rangle, & \langle 41,43\rangle, & \langle 41,44\rangle, \\
\langle 41,47\rangle, & \langle 42,43\rangle, & \langle 42,44\rangle, & \langle 42,45\rangle, & & \\
\langle 43,44,45\rangle, & \langle 43,44,46\rangle, & \langle 43,44,47\rangle, & \langle 43,45,46\rangle, & \langle 43,45,47\rangle, & \\
\langle 43,46,47\rangle, & \langle 44,45,46\rangle, & \langle 44,45,47\rangle, & \langle 44,46,47\rangle, & \langle 45,46,47\rangle &
\end{array}$$

con $j \geq 1$.

Si llamamos γ_1, γ_2 y γ_3 a los tres elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ contiene al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$ y $\mathfrak{g}_{\gamma_3}$, que es

$$\langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3} \rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ un cierto subespacio de dimensión 3 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay treinta y nueve ideales en este caso. A modo de ejemplo consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 26\rangle = \langle j\delta + \alpha_{26}\rangle$. Para los otros ideales se procede de modo similar obteniéndose resultados análogos para los treinta y nueve ideales. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ es 3 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 4, hay que considerar 2 posibilidades:

(4.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 26\rangle,1} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,1,0,0] \oplus [0,0,1,0] \oplus [0,0,0,1]$$

pues $\gamma_1 = j\delta + \alpha_{45} = (j+1)\delta - \alpha_2$, $\gamma_2 = j\delta + \alpha_{44} = (j+1)\delta - \alpha_3$ y $\gamma_3 = j\delta + \alpha_{43} = (j+1)\delta - \alpha_4$ para $I = \langle 26\rangle$.

(4.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 26\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\varphi^{-1}(\langle 26\rangle) = \{\mathfrak{a}^j_{\langle 26\rangle}, \mathfrak{a}^j_{\langle 26\rangle,1}\}.$$

Caso 5: $n = 4, 5$. En este caso están el resto de los ideales ($\#I^0_4 \cup I^0_5 = 682$ y $\#I^j_4 \cup I^j_5 = 976$ si $j \geq 1$).

$n = 4, 5$ implica que $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, por tanto, $\mathfrak{a} = \psi(I) = \oplus_{\alpha\in I}\mathfrak{g}_\alpha$.

Luego

$$\varphi^{-1}(I) = \{\mathfrak{a}^j_I\}.$$

Como consecuencia de este estudio tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1–E.1 ■ Los ideales de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$ son los siguientes:

$\mathfrak{a}^j_I$ con $I \in I^j(\Delta_{++})$, $j \geq 0$;

$\mathfrak{a}^j_{I,1}$ con $I \in I^j_n$, $1 \leq n \leq 3$, $j \geq 1$;

$\mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)}_{\langle 48\rangle}$ con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$, $j \geq 0$;

$$\begin{cases} \mathfrak{a}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))}_{\langle 48\rangle} \\ \text{con } ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4,\ j \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{a}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))}_{\langle 48\rangle} \\ \text{con} \begin{cases} ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \\ j \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$\mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_I$ con $I \in I^j_1$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, $j \geq 1$;

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} \\ \text{con } I \in I_1^j,\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3,\ j \geq 1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{a}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_4)} \quad \text{con } I \in I_2^j,\ (\lambda_1,\lambda_4) \in \mathbb{C}^2,\ j \geq 1.$$

1-F EL TEOREMA PRINCIPAL

Finalmente, si calculamos los cocientes de la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ de $\mathfrak{g}$ por cada uno de los ideales obtenidos, tendremos todas las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$ salvo isomorfismo (véase la sección E del Capítulo 0). La relación de las álgebras de Lie obtenidas aparece en el siguiente resultado:

Teorema 1-F.1 ■ Salvo isomorfismo hay exactamente:

(a) 1095 familias infinitas con parámetro discreto:

$$\mathfrak{L}_I^j \quad \text{con } I \in I^j(\Delta_{++}),\ j \geq 0;$$

$$\mathfrak{L}_{I,1}^j \quad \text{con } I \in I_n^j,\ 1 \leq n \leq 3,\ j \geq 1.$$

(b) 28 familias infinitas con parámetro continuo:

$$\mathfrak{L}_{\langle 48\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}^4,\ j \geq 0;$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4,\ j \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 48\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))} \\ \text{con} \begin{cases} ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \\ j \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \quad \text{con } I \in I_1^j,\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3,\ j \geq 1;$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} \\ \text{con } I \in \mathcal{I}_1^j,\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3,\ j \geq 1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_4)} \quad \text{con } I \in \mathcal{I}_2^j,\ (\lambda_1,\lambda_4) \in \mathbb{C}^2,\ j \geq 1.$$

de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$.

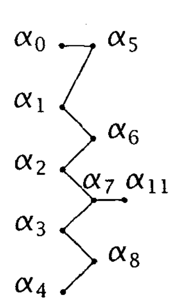
Para terminar este Capítulo vamos a ver un ejemplo de álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$.

1-G UN EJEMPLO DE ÁLGEBRA DE LIE NILPOTENTE DE RANGO MAXIMAL Y TIPO $F_4^{(1)}$

Vamos a construir el álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo $F_4^{(1)}$ que se obtiene a partir del ideal $\mathfrak{a}^0_{\langle 9,10,12\rangle} \in \mathcal{I}^0(\mathfrak{n}_{++})$. Como $\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{a}^0_{\langle 9,10,12\rangle} = \oplus_{\alpha\in\langle 9,10,12\rangle}\mathfrak{g}_\alpha$, siguiendo la misma notación para los subespacios raíces del cociente, tenemos que:

$$\mathfrak{L}^0_{\langle 9,10,12\rangle} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+-\langle 9,10,12\rangle}\mathfrak{g}_\alpha.$$

El sistema de raíces de este álgebra de Lie es $\Delta_+ - \langle 9,10,12\rangle = \{\alpha_0,\dots,\alpha_8,\alpha_{11}\}$ con la siguiente representación:



Tenemos que $\alpha_0 = \delta - \mathring{\theta}$, $\alpha_1 = \mathring{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \mathring{\alpha}_2$, $\alpha_3 = \mathring{\alpha}_3$, $\alpha_4 = \mathring{\alpha}_4$, $\alpha_5 = \delta - \mathring{\alpha}_1 - 3\mathring{\alpha}_2 - 4\mathring{\alpha}_3 - 2\mathring{\alpha}_4$, $\alpha_6 = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2$, $\alpha_7 = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3$, $\alpha_8 = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4$ y $\alpha_{11} = \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3$. Luego los subespacios raíces correspondientes quedan así:

$$\mathfrak{g}_{\alpha_0} = t \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\theta}} = \mathbb{C}\, t \otimes E_{-\mathring{\theta}}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_1} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_1} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_2} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_2} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_3} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_3} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_4} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_4} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_4}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_5} = t \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\alpha}_1-3\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4} = \mathbb{C}\, t \otimes E_{-\mathring{\alpha}_1-3\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_6} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_7} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_8} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_{11}} = 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}$$

Si tenemos en cuenta que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y los productos corchete de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathring{\mathfrak{g}}$, entonces obtenemos que los únicos productos corchete no nulos, salvo antisimetría, en este álgebra de Lie son:

$$\begin{aligned}
\left[t \otimes E_{-\mathring{\theta}}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1}\right] &= t \otimes \left[E_{-\mathring{\theta}}, E_{\mathring{\alpha}_1}\right] &&= -t \otimes E_{-\mathring{\alpha}_1-3\mathring{\alpha}_2-4\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4} \\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2}\right] &&= 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3}\right] &&= -1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &&= -1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &&= -2\left(1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3}\right)
\end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{L}^0_{\langle 9,10,12\rangle}$ es el álgebra de Lie de dimensión 10 con descomposición:

$$\mathfrak{L}^0_{\langle 9,10,12\rangle} = \left(\bigoplus_{i=0}^{8} \mathbb{C}e_i\right) \bigoplus \mathbb{C}e_{11}$$

y está definida por los productos corchete:

$$[e_0, e_1] = -e_5,\ [e_1, e_2] = e_6,\ [e_2, e_3] = -e_7,\ [e_3, e_4] = -e_8,\ [e_3, e_7] = -2e_{11}$$

respecto de la base $\{e_0,\ e_1, \dots,\ e_8,\ e_{11}\}$.

CAPÍTULO 2

Álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$

En este Capítulo vamos a considerar la matriz de Cartan generalizada afín $A = E_6^{(1)}$ y, al igual que en el Capítulo anterior, queremos obtener las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo A. Representantes de estas clases de isomorfismo se obtienen como ciertos cocientes de la parte positiva del álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz $E_6^{(1)}$. Como esta matriz de Cartan generalizada también es afín, en primer lugar tenemos que obtener el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada a la matriz de Cartan generalizada finita $\mathring{A} = E_6$ y, después, dar la construcción del álgebra afín $\mathfrak{g}$ asociada a $E_6^{(1)}$, como extensión central de un álgebra lazo construida sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$.

2–A EL ÁLGEBRA DE KAC-MOODY ASOCIADA A E_6

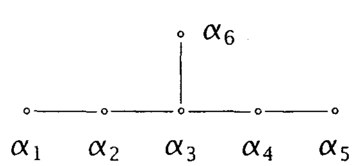
La matriz de Cartan generalizada afín que consideramos es:

$$A = E_6^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de Cartan generalizada finita $\mathring{A} = E_6$ se obtiene al eliminar la fila y la columna 0-ésimas en $E_6^{(1)}$ y, por tanto, es:

$$E_6 = (a_{ij})_{i,j=1}^{6} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es:



donde $\{\mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \ldots, \mathring{\alpha}_6\}$ es la base de las raíces del álgebra de Kac-Moody asociada a E_6, $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(E_6)$.

Además de considerar la matriz E_6, consideramos un espacio vectorial complejo $\mathring{\mathfrak{h}}$ de dimensión $2 \times 6 - rango(E_6) = 6$, que será la subálgebra de Cartan de $\mathring{\mathfrak{g}}$, y dos conjuntos $\{E_1, \ldots, E_6\}$ y $\{F_1, \ldots, F_6\}$, que serán los generadores de Chevalley de $\mathring{\mathfrak{g}}$. La base de las raíces $\{\mathring{\alpha}_1, \ldots, \mathring{\alpha}_6\}$ y la base de las corraíces $\{\mathring{\alpha}_1^\vee, \ldots, \mathring{\alpha}_6^\vee\}$ son dos subconjuntos linealmente independientes de $\mathring{\mathfrak{h}}^*$ (el espacio dual de $\mathring{\mathfrak{h}}$) y $\mathring{\mathfrak{h}}$, respectivamente, que verifican:

$$\mathring{\alpha}_j(\mathring{\alpha}_i^\vee) = a_{ij} \, (i, j = 1, \dots, 6).$$

Recordemos que, por ser E_6 una matriz de Cartan de tipo finito y por el teorema 0–C.15, el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada a E_6 es el álgebra de Lie con generadores E_i, F_i $(i = 1, \dots, 6)$ y $\mathring{\mathfrak{h}}$ que cumple las siguientes relaciones:

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\mathring{\alpha}_i^\vee \quad (i, j = 1, \dots, 6),$$

$$\left[h, h'\right] = 0 \quad (h, h' \in \mathring{\mathfrak{h}})$$

$$[h, E_i] = \mathring{\alpha}_i(h)E_i, \ [h, F_i] = -\mathring{\alpha}_i(h)F_i \quad (i = 1, \dots, 6, h \in \mathring{\mathfrak{h}}),$$

$$(adE_i)^{1-a_{ij}}E_j = 0, \ (adF_i)^{1-a_{ij}}F_j = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 6 \,; \ i \neq j).$$

Tenemos la siguiente descomposición de $\mathring{\mathfrak{g}}$ en subespacios raíces con respecto a $\mathring{\mathfrak{h}}$:

$$\mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \left(\bigoplus_{\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}} \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}} \right) = \bigoplus_{\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta} \cup \{0\}} \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}},$$

donde el sistema de raíces es $\mathring{\Delta} = \mathring{\Delta}_+ \cup \mathring{\Delta}_-$ con $\mathring{\Delta}_- = -\mathring{\Delta}_+$ y el sistema de raíces positivas es (véase [36], p. 91):

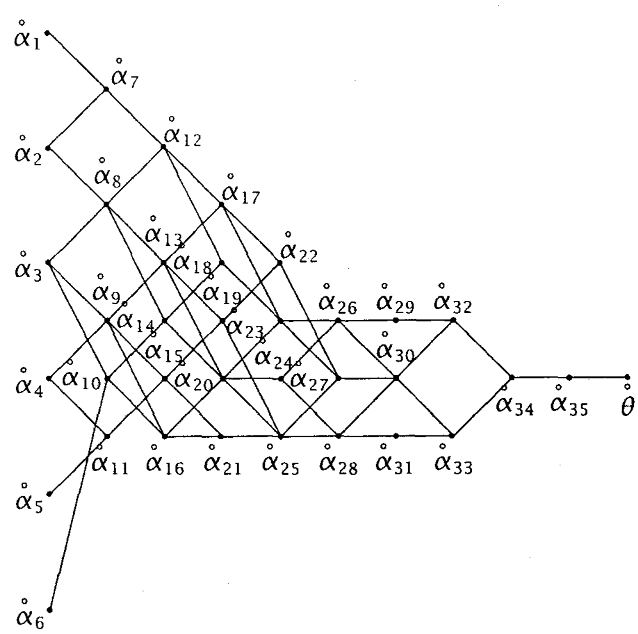
$$\begin{aligned}
\mathring{\Delta}_+ = \{ & \mathring{\alpha}_1, \ \mathring{\alpha}_2, \ \mathring{\alpha}_3, \ \mathring{\alpha}_4, \ \mathring{\alpha}_5, \ \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_7 = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2, \ \mathring{\alpha}_8 = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3, \ \mathring{\alpha}_9 = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4, \\
& \mathring{\alpha}_{10} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{11} = \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5, \ \mathring{\alpha}_{12} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3, \\
& \mathring{\alpha}_{13} = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4, \ \mathring{\alpha}_{14} = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{15} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5, \\
& \mathring{\alpha}_{16} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{17} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4, \ \mathring{\alpha}_{18} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_6, \\
& \mathring{\alpha}_{19} = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5, \ \mathring{\alpha}_{20} = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{21} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6, \\
& \mathring{\alpha}_{22} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5, \ \mathring{\alpha}_{23} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6, \\
& \mathring{\alpha}_{24} = \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{25} = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6, \\
& \mathring{\alpha}_{26} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{27} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6, \\
& \mathring{\alpha}_{28} = \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6, \ \mathring{\alpha}_{29} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_6,
\end{aligned}$$

$\mathring{\alpha}_{30} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,\ \mathring{\alpha}_{31} = \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,$
$\mathring{\alpha}_{32} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,$
$\mathring{\alpha}_{33} = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,$
$\mathring{\alpha}_{34} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 2\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,$
$\mathring{\alpha}_{35} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 3\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + \mathring{\alpha}_6,$
$\mathring{\alpha}_{36} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 3\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + 2\mathring{\alpha}_6\,\}$

Y la raíz más alta es:

$$\mathring{\theta} = \mathring{\alpha}_1 + 2\mathring{\alpha}_2 + 3\mathring{\alpha}_3 + 2\mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5 + 2\mathring{\alpha}_6$$

Podemos representar mediante el siguiente grafo el conjunto de raíces positivas $\mathring{\Delta}_+$ tomando como conjunto de vértices $\mathring{\Delta}_+$ y trazando una arista de una raíz $\mathring{\alpha}$ a otra raíz $\mathring{\beta}$ si existe $i = 1, \ldots, 6$ tal que $\mathring{\beta} = \mathring{\alpha} + \mathring{\alpha}_i$ (en realidad, la arista sería dirigida de $\mathring{\alpha}$ a $\mathring{\beta}$ y tendríamos un grafo dirigido). El procedimiento para construir este grafo es el mismo que el seguido en el Capítulo anterior.



Como la subálgebra de Cartan $\mathring{\mathfrak{h}}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ es un espacio complejo de dimensión 6, entonces la base de las corraíces es una base de $\mathring{\mathfrak{h}}$. Luego, tenemos lo siguiente:

$$\mathring{\mathfrak{g}}_0 = \mathring{\mathfrak{h}} = \{h = \sum_{i=1}^{6} h_i \mathring{\alpha}_i^{\vee} \,/\, h_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, 6\}.$$

Para cada raíz $\mathring{\alpha} = d_1\mathring{\alpha}_1+d_2\mathring{\alpha}_2+d_3\mathring{\alpha}_3+d_4\mathring{\alpha}_4+d_5\mathring{\alpha}_5+d_6\mathring{\alpha}_6$ tenemos que el subespacio raíz $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}}$ asociado a $\mathring{\alpha}$ está generado por los elementos $[E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}]$ donde E_i aparece d_i veces, si $\mathring{\alpha}$ es una raíz positiva, y está generado por los elementos $[F_{i_1}, \ldots, F_{i_r}]$ donde E_i aparece d_i veces, si $\mathring{\alpha}$ es una raíz negativa. Por tanto, $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_i}$ es el subespacio unidimensional $\mathbb{C}E_{\mathring{\alpha}_i}$ y $\mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\alpha}_i}$ es el subespacio unidimensional $\mathbb{C}E_{-\mathring{\alpha}_i}$, utilizando para los generadores de Chevalley la notación:

$$E_{\mathring{\alpha}_i} = E_i,\ E_{-\mathring{\alpha}_i} = F_i,\ i = 1, \ldots, 6.$$

Cuando la matriz de Cartan es de tipo finito, resulta que también los subespacios raíces asociados a raíces no simples tienen dimensión 1 y, siguiendo la misma notación, tenemos que $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}} = \mathbb{C}E_{\mathring{\alpha}}$ para cada $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$.

Además, si $\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}, \mathring{\alpha} + \mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}$ tenemos que $[\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\beta}}] \subseteq \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$.

Por tanto, la dimensión del álgebra de Kac-Moody asociada a E_6 es $dim(\mathring{\mathfrak{h}}) + \#\mathring{\Delta} = 6 + 72 = 78$ y una base sería

$$\{\mathring{\alpha}_i^{\vee} \,/\, i = 1, \ldots, 6\} \cup \{E_{\mathring{\alpha}} \,/\, \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}\}.$$

Los productos corchete que relacionan los $E_{\mathring{\alpha}}$ con $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_+$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\theta}}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\theta}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\theta}} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\theta}} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\theta}} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\theta}} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\theta}}
\end{aligned}
$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\right] = -E_{\mathring{\theta}}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\right] = -E_{\mathring{\theta}}$$

Si $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}$ son raíces positivas y $\left[E_{\mathring{\alpha}}, E_{\mathring{\beta}}\right] = C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})E_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$, entonces tomamos $\left[E_{-\mathring{\alpha}}, E_{-\mathring{\beta}}\right] = -C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})E_{-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}}$.

Si $\mathring{\alpha} = \sum_{i=1}^{6} d_i\mathring{\alpha}_i$ es una raíz, entonces

$$\left[E_{\mathring{\alpha}}, E_{-\mathring{\alpha}}\right] = \mathring{\alpha}^{\vee} = \sum_{i=1}^{6} d_i\mathring{\alpha}_i^{\vee}.$$

Nos queda ver los productos corchete $\left[E_{\mathring{\gamma}}, E_{\mathring{\delta}}\right]$ con $\mathring{\gamma}+\mathring{\delta} \in \mathring{\Delta}$, pero siendo $\mathring{\gamma}$ y $\mathring{\delta}$ raíces de distinto signo. Como $[\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\delta}}] \subseteq \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}+\mathring{\delta}}$, entonces $\left[E_{\mathring{\gamma}}, E_{\mathring{\delta}}\right] = C(\mathring{\gamma},\mathring{\delta})E_{\mathring{\gamma}+\mathring{\delta}}$.

Si $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}$ son raíces positivas con $\mathring{\alpha} < \mathring{\beta}$ y $\left[E_{\mathring{\alpha}}, E_{\mathring{\beta}}\right] = C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})E_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$, utilizando la identidad de Jacobi para $E_{\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}}$, $E_{-\mathring{\alpha}}$ y $E_{-\mathring{\beta}}$, obtenemos lo siguiente:

$$C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha}) = -C(\mathring{\alpha},\mathring{\beta}) = -C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\beta})$$

y tendríamos, aplicando las relaciones anteriores, los siguientes productos:

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_3}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] = E_{\mathring{\alpha}_4}$$
$$\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_3}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_5}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_5}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] = E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_1}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] = E_{\mathring{\alpha}_4}$$

$$\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] = -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}$$

$$\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_4} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+3\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+2\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+2\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6}\\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_2-\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\right] &= E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2+2\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4\mathring{\alpha}_6} \\
\left[E_{\mathring{\theta}}, E_{-\mathring{\alpha}_1-\mathring{\alpha}_2-2\mathring{\alpha}_3-\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_6}\right] &= -E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5+\mathring{\alpha}_6}
\end{aligned}
$$

Si utilizamos la identidad de Jacobi para $E_{-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}}$, $E_{\mathring{\alpha}}$ y $E_{\mathring{\beta}}$, con $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}$ raíces positivas y $\mathring{\alpha} < \mathring{\beta}$, obtenemos lo siguiente:

$$C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\alpha}) = C(\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}) = -C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\beta}).$$

Luego tenemos las siguientes relaciones (son las mismas que obtuvimos en el Capítulo anterior):

$$
\begin{aligned}
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\alpha}) &= -C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha}) \\
C(-\mathring{\alpha}-\mathring{\beta}, \mathring{\beta}) &= -C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\beta})
\end{aligned}
$$

y acabamos de dar los valores de $C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha})$ y $C(\mathring{\alpha}+\mathring{\beta}, -\mathring{\alpha})$ que son no nulos, cuando consideramos todos los $\mathring{\alpha}, \mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}_+$ con $\mathring{\alpha} < \mathring{\beta}$ y $\mathring{\alpha}+\mathring{\beta} \in \mathring{\Delta}_+$.

Teniendo en cuenta que, para cada $h \in \mathring{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$\left[h, E_{\mathring{\alpha}_i}\right] = \mathring{\alpha}_i(h)E_{\mathring{\alpha}_i} \quad \text{y} \quad \left[h, E_{-\mathring{\alpha}_i}\right] = -\mathring{\alpha}_i(h)E_{-\mathring{\alpha}_i},$$

obtenemos que los productos corchete que relacionan los $E_{\mathring{\alpha}}$ con la subálgebra de Cartan $\mathring{\mathfrak{h}}$ son los siguientes:

$$\left[h, E_{\mathring{\alpha}}\right] = \mathring{\alpha}(h)E_{\mathring{\alpha}} \ (h \in \mathring{\mathfrak{h}},\ \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}).$$

Si $h = \sum_{i=1}^{6} h_j \mathring{\alpha}_j^{\vee} \in \mathring{\mathfrak{h}}$ y $\mathring{\alpha} = \sum_{i=1}^{6} d_i \mathring{\alpha}_i \in \mathring{\Delta}$, entonces

$$\left[h, E_{\mathring{\alpha}}\right] = \sum_{i,j=1}^{6} d_i h_j \mathring{\alpha}_i(\mathring{\alpha}_j^{\vee}) = \sum_{i,j=1}^{6} d_i h_j a_{ji}.$$

Los productos corchete que hemos calculado son todos los productos no nulos, salvo antisimetría, en el álgebra de Lie $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(E_6)$.

2–B EL ÁLGEBRA DE KAC-MOODY AFÍN ASOCIADA A $E_6^{(1)}$

Ahora vamos a obtener el álgebra de Kac-Moody afín $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(E_6^{(1)})$ asociada a $E_6^{(1)}$. Para ello necesitamos el álgebra de Kac-Moody $\mathring{\mathfrak{g}}$ asociada a E_6 que hemos obtenido en la sección anterior, pues vamos a utilizar la construcción dada en el Capítulo 0 para álgebras de Kac-Moody afines, igual que hicimos para el álgebra de Kac-Moody afín asociada a $F_4^{(1)}$. Tenemos que, si $L = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ es el álgebra de los polinomios de Laurent en t,

$$\mathfrak{g} = L \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

con el producto corchete definido como sigue:
$[t^k \otimes X \oplus \lambda c \oplus \mu d, t^{k_1} \otimes Y \oplus \lambda_1 c \oplus \mu_1 d] =$
$(t^{k+k_1} \otimes [X, Y] + \mu k_1 t^{k_1} \otimes Y - \mu_1 k t^k \otimes X) \oplus k\delta_{k,-k_1}(X|Y)c$
donde $X, Y \in \mathring{\mathfrak{g}}; \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}$.

Veamos cómo queda la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en este caso (véase la nota 0–D.4). Antes de estudiar dicha estructura tenemos que conocer algunos datos más sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$, como una forma bilineal simétrica invariante $(.|.)$ sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ y la involución de Cartan $\mathring{\omega}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ (para sus definiciones consúltense los Caps. 1 y 2 de [36]).

Para dar una forma bilineal simétrica invariante sobre $\mathring{\mathfrak{g}}$ tenemos que considerar una descomposición de la matriz E_6 en producto de una matriz diagonal $D = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ y una matriz simétrica $B = (b_{ij})_{i,j=1}^6$. Como E_6 es simétrica, podemos tomar $D = Id$ y $B = E_6$.

Tenemos entonces que una forma bilineal simétrica invariante

$(.|.)$ sobre $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ está determinada por:

$$\begin{array}{ll}
(\overset{\circ}{\alpha}{}_i^{\vee}|\overset{\circ}{\alpha}{}_j^{\vee}) = b_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = a_{ij} & i,j = 1,\ldots,6, \\
(\overset{\circ}{\alpha}_i|\overset{\circ}{\alpha}_j) = b_{ij} = a_{ij} & i,j = 1,\ldots,6, \\
(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\alpha}}|\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\beta}}) = 0 & \text{si } \overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta} \in \overset{\circ}{\Delta}\cup\{0\},\ \overset{\circ}{\alpha}+\overset{\circ}{\beta}\neq 0, \\
(E_{\overset{\circ}{\alpha}}|E_{-\overset{\circ}{\alpha}}) = 1 & \overset{\circ}{\alpha}\in\overset{\circ}{\Delta}.
\end{array}$$

La involución de Cartan $\overset{\circ}{\omega}$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ está determinada por:

$$\begin{array}{ll}
\overset{\circ}{\omega}(E_{\overset{\circ}{\alpha}_i}) = -E_{-\overset{\circ}{\alpha}_i},\ \overset{\circ}{\omega}(E_{-\overset{\circ}{\alpha}_i}) = -E_{\overset{\circ}{\alpha}_i} & i = 1,\ldots,6 \\
\overset{\circ}{\omega}(h) = -h & \text{si } h\in\overset{\circ}{\mathfrak{h}}.
\end{array}$$

Consideramos los generadores de Chevalley de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, $E_{\overset{\circ}{\alpha}_1},\ldots,E_{\overset{\circ}{\alpha}_6}$ y $E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1},\ldots,E_{-\overset{\circ}{\alpha}_6}$, y tomamos $F_0\in\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\overset{\circ}{\theta}}$ tal que $(F_0|\overset{\circ}{\omega}(F_0)) = -2/(\overset{\circ}{\theta}|\overset{\circ}{\theta})$ y $E_0 = -\overset{\circ}{\omega}(F_0)$. Esto es, tomamos $F_0 = E_{\overset{\circ}{\theta}}$ y $E_0 = E_{-\overset{\circ}{\theta}}$. Entonces los generadores de Chevalley de $\mathfrak{g}$ son:

$$e_0 = t\otimes E_{-\overset{\circ}{\theta}}, e_1 = 1\otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_1},\ldots,e_6 = 1\otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_6}$$

$$f_0 = t^{-1}\otimes E_{\overset{\circ}{\theta}}, f_1 = 1\otimes E_{-\overset{\circ}{\alpha}_1},\ldots,f_6 = 1\otimes E_{-\overset{\circ}{\alpha}_6}.$$

La subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{h} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$ (identificando $1\otimes\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ con $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$).

Consideramos la notación $\alpha_i = \overset{\circ}{\alpha}_i$, $i = 1,\ldots,6$, denotamos por δ al elemento de $\mathfrak{h}^*$ determinado por $\delta|_{\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c} = 0$ y $\delta(d) = 1$ y tomamos $\alpha_0 = \delta - \overset{\circ}{\theta}$, entonces la base de las raíces de $\mathfrak{g}$ es $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_6\}$ y $\delta = \alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6$.

Tenemos que, si $\overset{\circ}{\Delta}$ es el sistema de raíces de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, el sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ es:

$$\Delta = \{j\delta+\overset{\circ}{\gamma}\,;\,j\in\mathbb{Z},\overset{\circ}{\gamma}\in\overset{\circ}{\Delta}\}\cup\{j\delta\,;\,j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$$

y el sistema de raíces positivas es:

$$\Delta_+\cup\{0\} = \overset{\circ}{\Delta}_+\cup\{j\delta+\overset{\circ}{\gamma}\,;\,j\geq 1,\ \overset{\circ}{\gamma}\in\overset{\circ}{\Delta}\cup\{0\}\}\cup\{0\} = \bigcup_{j\geq 0}\Delta_j,$$

donde $\Delta_j = \{j\delta+\gamma\,;\ \gamma \in \Delta_0\}$ si $j \geq 1$ y $\Delta_0 = \mathring{\Delta}_+ \cup \{\delta - \mathring{\gamma}\,;\ \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}_+ \cup \{0\}\} \cup \{0\} = \{0, \alpha_0, \dots, \alpha_{72}\}$ con

$$\alpha_7 = \alpha_0 + \alpha_6,\ \alpha_8 = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_9 = \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_4,$$
$$\alpha_{11} = \alpha_3 + \alpha_6,\ \alpha_{12} = \alpha_4 + \alpha_5,$$

$$\alpha_{13} = \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_6,\ \alpha_{14} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_{15} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$
$$\alpha_{16} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6,\ \alpha_{17} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\ \alpha_{18} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{19} = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6,\ \alpha_{20} = \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{21} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\ \alpha_{22} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\ \alpha_{24} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{25} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{26} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6,\ \alpha_{27} = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{28} = \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,\ \alpha_{29} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,$$
$$\alpha_{30} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,\ \alpha_{31} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{32} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{33} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,\ \alpha_{34} = \alpha_0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{35} = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,\ \alpha_{36} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{37} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,\ \alpha_{38} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{39} = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_{40} = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,$$
$$\alpha_{41} = \alpha_0+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \alpha_{42} = \alpha_0+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_6,$$
$$\alpha_{43} = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6,\ \alpha_{44} = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,$$
$$\alpha_{45} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{46} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{47} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{48} = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_6,\ \alpha_{49} = \alpha_0+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,$$
$$\alpha_{50} = \alpha_0+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6,\ \alpha_{51} = \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,$$

$$\alpha_{52} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

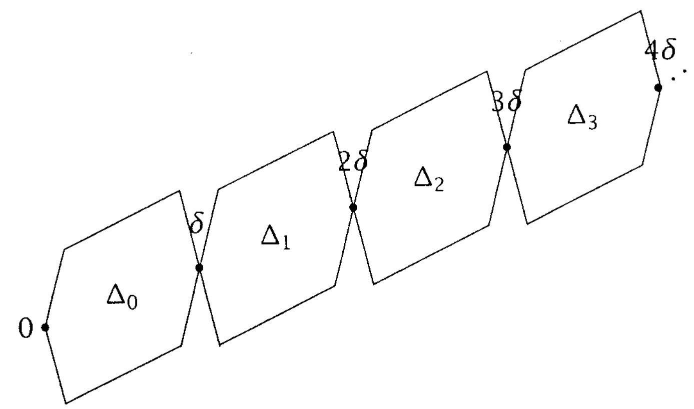
$$\alpha_{53} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{54} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{55} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{56} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{57} = \alpha_0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{58} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{59} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{60} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{61} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{62} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{63} = \alpha_0 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{64} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

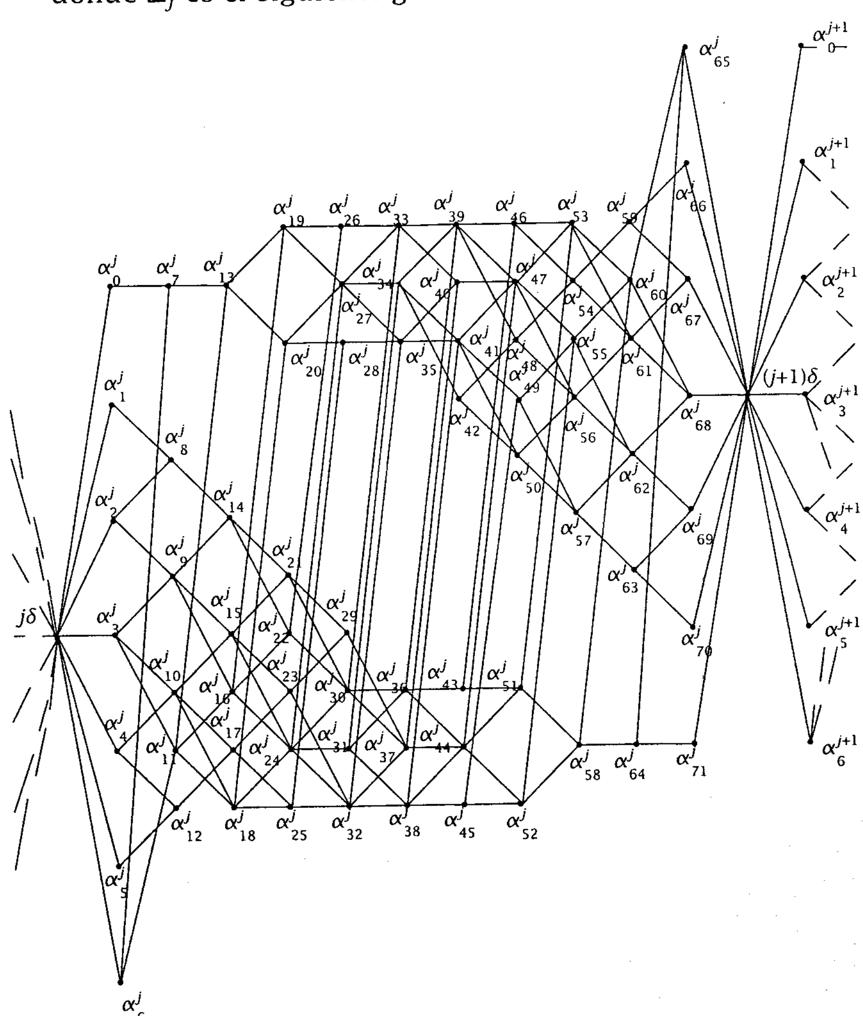
$$\alpha_{65} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_{66} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{67} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{68} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{69} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{70} = \alpha_0 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\alpha_{71} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$

$$\alpha_{72} = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 = \delta$$

Podemos representar mediante un grafo el conjunto de raíces positivas Δ_+. Dicho grafo tendría la siguiente estructura:



donde Δ_j es el siguiente grafo:



hemos seguido la notación $\alpha_i^j = j\delta + \alpha_i$ si $j \geq 1$ para $i = 0, \dots, 71$ (el grafo que obtenemos es en realidad un grafo dirigido, las aristas van dirigidas de cada vértice hacia los que se encuentran a su derecha en el grafo).

La descomposición en subespacios raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a su subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ es:

$$\mathfrak{g} = \oplus_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha),$$

donde:

$$\mathfrak{g}_{j\delta + \mathring{\gamma}} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}} \text{ y } \mathfrak{g}_{j\delta} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}}.$$

Como vimos en la sección anterior, $\mathring{\mathfrak{h}}$ tiene dimensión 6 y está generada por $\{\mathring{\alpha}_1^\vee, \dots, \mathring{\alpha}_6^\vee\}$ y, además, si $\mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}$ entonces $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\gamma}} = \mathbb{C}E_{\mathring{\gamma}}$. Por tanto, los subespacios $\mathfrak{g}_{j\delta}$ tienen dimensión 8, si $j = 0$, y dimensión 6, si $j \neq 0$, y los subespacios $\mathfrak{g}_{j\delta + \mathring{\gamma}}$ son unidimensionales.

Los productos corchete no nulos en $\mathfrak{g}$ son los siguientes:

$$\left[t^{k_1} \otimes E_{\mathring{\gamma}_1}, t^{k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}_2}\right] = \begin{cases} C(\mathring{\gamma}_1, \mathring{\gamma}_2) t^{k_1+k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}_1 + \mathring{\gamma}_2} & \text{si } \mathring{\gamma}_1 + \mathring{\gamma}_2 \in \mathring{\Delta} \\ t^{k_1+k_2} \otimes \mathring{\gamma}_1^\vee & \text{si } k_1 \neq -k_2,\ \mathring{\gamma}_1 = -\mathring{\gamma}_2 \\ 1 \otimes \mathring{\gamma}_1^\vee \oplus k_1 c & \text{si } k_1 = -k_2,\ \mathring{\gamma}_1 = -\mathring{\gamma}_2 \end{cases}$$

$$\left[t^{k_1} \otimes h, t^{k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}}\right] = \mathring{\gamma}(h) t^{k_1+k_2} \otimes E_{\mathring{\gamma}}$$

$$\left[1 \otimes h \oplus \lambda c \oplus \mu d, t^k \otimes E_{\mathring{\gamma}}\right] = (\mathring{\gamma}(h) + \mu k) t^k \otimes E_{\mathring{\gamma}}$$

$$\left[t^k \otimes h_1, t^{-k} \otimes h_2\right] = k(h_1 | h_2) c$$

donde $\mathring{\gamma}_1, \mathring{\gamma}_2, \mathring{\gamma} \in \mathring{\Delta}$; $h, h_1, h_2 \in \mathring{\mathfrak{h}}$; $k_1, k_2, k, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

En las siguientes secciones no trabajaremos con el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(E_6^{(1)})$, sino con su parte positiva $\mathfrak{n}_+$, pues las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$ se obtienen como ciertos cocientes de $\mathfrak{n}_+$. Tenemos que:

$$\mathfrak{n}_+ = \mathring{\mathfrak{n}}_+ \oplus (t\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}})$$

y su descomposición en subespacios raíces es:

$$\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$$

(el sistema de raíces positivas Δ_+ ya hemos visto cómo queda).

Como vimos en el teorema 0–E.28, para obtener todas las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$, tenemos que determinar el conjunto de las $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$-órbitas de $I(\mathfrak{n}_{++})$. En la siguiente sección vamos a calcular $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$.

2–C EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE $E_6^{(1)}$

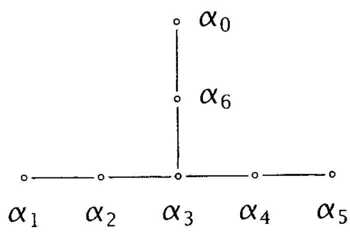
El grupo de automorfismos de la matriz de Cartan generalizada $E_6^{(1)}$ es

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_\ell(E_6^{(1)}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell \,/\, a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij},\ \forall i,j = 0,\dots 6\} = \\
&= \{\text{ permutaciones } \sigma \text{ de } \{0,1,\dots,6\} \,/\, a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij},\ \forall i,j = 0,\dots 6\} = \\
&= \{\text{ permutaciones } \sigma \text{ de } \{(0,6),(1,2),(5,4)\}\},
\end{aligned}$$

donde aquí $\mathfrak{S}_\ell$ es el grupo de permutaciones de $\{0,1,\dots,6\}$, pues la matriz $E_6^{(1)}$ es

$$E_6^{(1)} = (a_{ij})_{i,j=0}^6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Este grupo también coincide con el grupo de automorfismos del diagrama de Dynkin de $E_6^{(1)}$, que es:

$S(E_6^{(1)}) \equiv$ 

Luego, tenemos que $\mathfrak{S}_\ell(E_6^{(1)}) = \{Id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y este grupo de automorfismos está generado por σ_1 y σ_2, ya que $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\sigma_4 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ y $\sigma_5 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Tenemos que:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)}) = \{\tilde{\sigma} \in Aut\mathfrak{M} \,/\, \sigma \in \mathfrak{S}_\ell(E_6^{(1)})\} == \{Id, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4, \tilde{\sigma}_5\}.$$

Veamos la acción de este grupo de automorfismos sobre $\mathfrak{M}$. Como está generado por $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$, es suficiente conocer la acción de estos dos automorfismos sobre $\mathfrak{M}$.

La acción sobre la base del subespacio $\mathfrak{g}_{j\delta} = \oplus_{i=1}^{6} t^j \otimes \mathring{\alpha}_i^{\vee}$ $(j \geq 1)$ es la siguiente:

$$\tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_1^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_5^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_2^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_4^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_3^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_3^{\vee},$$
$$\tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_4^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_2^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_5^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_1^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_1(t^j \otimes \mathring{\alpha}_6^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_6^{\vee};$$

$$\tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_1^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_5^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_2^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_4^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_3^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_3^{\vee},$$
$$\tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_4^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_6^{\vee}, \quad \tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_6^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_2^{\vee},$$
$$\tilde{\sigma}_2(t^j \otimes \mathring{\alpha}_5^{\vee}) = t^j \otimes \mathring{\alpha}_0^{\vee} =$$
$$= -t^j \otimes \mathring{\alpha}_1^{\vee} - 2t^j \otimes \mathring{\alpha}_2^{\vee} - 3t^j \otimes \mathring{\alpha}_3^{\vee} - 2t^j \otimes \mathring{\alpha}_4^{\vee} - t^j \otimes \mathring{\alpha}_5^{\vee} - 2t^j \otimes \mathring{\alpha}_6^{\vee}.$$

La acción de $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$ sobre los subespacios unidimensionales de $\mathfrak{g}_{j\delta}$ $(j \geq 1)$ viene dada por:

$$\widetilde{\sigma}(\mathbb{C}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i t^j \otimes \overset{\circ}{\alpha}{}_i^\vee) = \mathbb{C}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\widetilde{\sigma}(t^j \otimes \overset{\circ}{\alpha}{}_i^\vee)\ (\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\dots,6$$

si $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$. Si consideramos la notación

$$[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6] = \mathbb{C}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i t^j \otimes \overset{\circ}{\alpha}{}_i^\vee$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}_1([\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6]) &= [\lambda_5,\lambda_4,\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_6]\\
\widetilde{\sigma}_2([\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6]) &= \\
= [-\lambda_5, -2\lambda_5+\lambda_6, \lambda_3-3\lambda_5, &\lambda_2-2\lambda_5, \lambda_1-\lambda_5, \lambda_4-2\lambda_5]
\end{aligned}$$

Finalmente, la acción de $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$ sobre cualquier subespacio $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2 \oplus \dots$ de $\mathfrak{g}_{j\delta}$ $(j \geq 1)$ viene dada por:

$$\widetilde{\sigma}(\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2 \oplus \dots) = \mathbb{C}\widetilde{\sigma}(v_1) \oplus \mathbb{C}\widetilde{\sigma}(v_2) \oplus \dots$$

si $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$ y $v_1, v_2, \cdots \in \mathfrak{g}_{j\delta}$.

Veamos ahora la acción de $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$ sobre el subespacio $\mathfrak{g}_{j\delta+\alpha_i}$ $(j \geq 0,\ i = 0,\dots,71)$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell(E_6^{(1)})$ e $i = 1,\dots,6$, entonces $\widetilde{\sigma}(\mathfrak{g}_{j\delta+\alpha_i}) = \mathfrak{g}_{j\delta+\alpha_{\sigma(i)}}$. Si $i > 6$ entonces $\widetilde{\sigma}_k(\mathfrak{g}_{j\delta+\alpha_i}) = \mathfrak{g}_{j\delta+\alpha_{\sigma_k(i)}}$ con $k = 1, 2$ donde

$\sigma_1(8) = 12$, $\sigma_1(9) = 10$, $\sigma_1(10) = 9$, $\sigma_1(12) = 8$, $\sigma_1(14) = 17$,
$\sigma_1(16) = 18$, $\sigma_1(17) = 14$, $\sigma_1(18) = 16$, $\sigma_1(19) = 20$, $\sigma_1(20) = 19$,
$\sigma_1(21) = 23$, $\sigma_1(22) = 25$, $\sigma_1(23) = 21$, $\sigma_1(25) = 22$, $\sigma_1(26) = 28$,
$\sigma_1(28) = 26$, $\sigma_1(30) = 32$, $\sigma_1(32) = 30$, $\sigma_1(33) = 35$, $\sigma_1(35) = 33$,
$\sigma_1(36) = 38$, $\sigma_1(38) = 36$, $\sigma_1(39) = 41$, $\sigma_1(41) = 39$, $\sigma_1(43) = 45$,
$\sigma_1(45) = 43$, $\sigma_1(46) = 49$, $\sigma_1(48) = 50$, $\sigma_1(49) = 46$, $\sigma_1(50) = 48$,
$\sigma_1(51) = 52$, $\sigma_1(52) = 51$, $\sigma_1(53) = 55$, $\sigma_1(54) = 57$, $\sigma_1(55) = 53$,
$\sigma_1(57) = 54$, $\sigma_1(59) = 63$, $\sigma_1(61) = 62$, $\sigma_1(62) = 61$, $\sigma_1(63) = 59$,
$\sigma_1(66) = 70$, $\sigma_1(67) = 69$, $\sigma_1(69) = 67$, $\sigma_1(70) = 66$,

$\sigma_1(i) = i$ para $i = 7, 11, 13, 15, 24, 27, 29, 31, 34, 37, 40, 42, 44, 47, 56, 58, 60, 64, 65, 68, 71$.

$\sigma_2(7) = 8$,	$\sigma_2(8) = 12$,	$\sigma_2(9) = 10$,	$\sigma_2(10) = 11$,	$\sigma_2(11) = 9$,
$\sigma_2(12) = 7$,	$\sigma_2(13) = 14$,	$\sigma_2(14) = 17$,	$\sigma_2(15) = 18$,	$\sigma_2(16) = 15$,
$\sigma_2(17) = 13$,	$\sigma_2(18) = 16$,	$\sigma_2(19) = 21$,	$\sigma_2(20) = 22$,	$\sigma_2(21) = 25$,
$\sigma_2(22) = 23$,	$\sigma_2(23) = 20$,	$\sigma_2(24) = 24$,	$\sigma_2(25) = 19$,	$\sigma_2(26) = 29$,
$\sigma_2(27) = 30$,	$\sigma_2(28) = 26$,	$\sigma_2(29) = 28$,	$\sigma_2(30) = 32$,	$\sigma_2(31) = 31$,
$\sigma_2(32) = 27$,	$\sigma_2(33) = 37$,	$\sigma_2(34) = 36$,	$\sigma_2(35) = 33$,	$\sigma_2(36) = 38$,
$\sigma_2(37) = 35$,	$\sigma_2(38) = 34$,	$\sigma_2(39) = 44$,	$\sigma_2(40) = 40$,	$\sigma_2(41) = 39$,
$\sigma_2(42) = 43$,	$\sigma_2(43) = 45$,	$\sigma_2(44) = 41$,	$\sigma_2(45) = 42$,	$\sigma_2(46) = 52$,
$\sigma_2(47) = 47$,	$\sigma_2(48) = 51$,	$\sigma_2(49) = 48$,	$\sigma_2(50) = 46$,	$\sigma_2(51) = 49$,
$\sigma_2(52) = 50$,	$\sigma_2(53) = 55$,	$\sigma_2(54) = 58$,	$\sigma_2(55) = 56$,	$\sigma_2(56) = 53$,
$\sigma_2(57) = 54$,	$\sigma_2(58) = 57$,	$\sigma_2(59) = 64$,	$\sigma_2(60) = 62$,	$\sigma_2(61) = 60$,
$\sigma_2(62) = 61$,	$\sigma_2(63) = 59$,	$\sigma_2(64) = 63$,	$\sigma_2(65) = 69$,	$\sigma_2(66) = 71$,
$\sigma_2(67) = 65$,	$\sigma_2(68) = 68$,	$\sigma_2(69) = 67$,	$\sigma_2(70) = 66$,	$\sigma_2(71) = 70$.

Para simplificar, en las secciones siguientes vamos a denotar tanto $\mathfrak{S}_\ell(E_6^{(1)})$ como $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(E_6^{(1)})$ por G.

2-D LOS IDEALES DE Δ_+

El siguiente paso para obtener las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y de tipo $E_6^{(1)}$ es determinar el conjunto $I(\Delta_{++})/G$. Antes hemos calculado el sistema de raíces positivas Δ_+ del álgebra de Kac-Moody afín asociada a $E_6^{(1)}$ y lo representamos mediante un grafo (dirigido).

Recordemos que I es un ideal de Δ_+ si para todo $\alpha \in I$ y para todo $i = 0, \ldots, 6$ tal que $\alpha + \alpha_i \in \Delta_+$ se tiene que $\alpha + \alpha_i \in I$. Los ideales de Δ_+ se corresponden con los subgrafos del grafo obtenido que verifican la propiedad de que, si un vértice está en el subgrafo, también están todas las aristas (dirigidas) que parten de este vértice.

Tenemos que calcular el conjunto de los ideales de Δ_+ que están contenidos en Δ_{++}, $\mathcal{I}(\Delta_{++})$. Como Δ_{++} es el conjunto definido por

$$\Delta_+ = \{\alpha_i + k\alpha_j\,;\ 0 \leq i \neq j \leq 6,\ 0 \leq k \leq -a_{ji}\} \cup \Delta_{++},$$

entonces

$$\Delta_{++} = \{\alpha_{13}, \dots, \alpha_{72}\} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots$$

Para $j \in \mathbb{N}$, tomamos:

$$\mathcal{I}^j(\Delta_{++}) = \{I \in \mathcal{I}(\Delta_{++})\,;\ j\delta \notin I,\ (j+1)\delta \in I\}$$

entonces tenemos la siguiente partición del conjunto de los ideales de Δ_+ contenidos en Δ_{++}:

$$\mathcal{I}(\Delta_{++}) = \bigcup_{j \geq 0} \mathcal{I}^j(\Delta_{++}).$$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^1(\Delta_{++}) & \rightarrow & \mathcal{I}^j(\Delta_{++}),\ j \geq 1 \\ I & \mapsto & I + (j-1)\delta \end{array}$$

es una biyección para cada $j \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Si consideramos las G-órbitas de estos ideales, tenemos la siguiente partición de $\mathcal{I}(\Delta_{++})/G$:

$$\mathcal{I}(\Delta_{++})/G = \bigcup_{j \geq 0} \mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G$$

y la biyección anterior induce la siguiente biyección:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^1(\Delta_{++})/G & \rightarrow & \mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G,\ j \geq 1 \\ G \cdot I & \mapsto & G \cdot (I + (j-1)\delta) \end{array}$$

Entonces es suficiente determinar $\mathcal{I}^0(\Delta_{++})/G$ y $\mathcal{I}^1(\Delta_{++})/G$ para obtener $\mathcal{I}(\Delta_{++})/G$. Existe $i_{E_6^{(1)}} \in \mathbb{N}$ independiente de $j \geq 1$ tal que $\#\mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G = i_{E_6^{(1)}}$.

Obtenemos 2626 series de G-órbitas, $\#\mathcal{I}^0(\Delta_{++})/G = 1936$ y si $j \geq 1$ $\#\mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G = 2626$. Un representante de cada una de estas G-órbitas se puede encontrar en el apéndice B de esta Memoria.

El último paso es calcular las G-órbitas de los ideales de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$. Realizando los cocientes de la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ del álgebra afín asociada a $E_6^{(1)}$ por un ideal de cada una de estas G-órbitas, obtendremos representantes de las clases de isomorfía de las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$.

2-E LOS IDEALES DE $\mathfrak{N}_+$

Ahora, para cada $O \in \mathcal{I}(\Delta_{++})/G$ tenemos que obtener $\Phi^{-1}(O)$. Para ello consideramos $I \in O$ y calculamos todos los $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})$ tales que $\varphi(\mathfrak{a}) = \{\alpha \in \Delta_+ \,/\, \mathfrak{a}_\alpha \neq \{0\}\} = I$, salvo la acción de

$$G_I = \{\sigma \in G\,;\ \sigma(I) = I\}$$

(pues elegimos un $I \in O$ arbitrario), para cada uno de estos ideales $\mathfrak{a}$ tendremos una órbita $\Omega \in \mathcal{I}(\mathfrak{n}_{++})/G$ que verifica que $\Phi(\Omega) = O$.

Sean $O \in \mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G$ e $I \in O$, entonces $j\delta \notin I$, pero $(j+1)\delta \in I$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} I' &= \{\alpha \in I\,;\ |\alpha| \leq |(j+1)\delta| - 2\} \\ I'' &= \{\alpha \in I\,;\ |\alpha| = |(j+1)\delta| - 1\} \end{aligned}$$

Tenemos, por tanto, la siguiente partición de I:

$$I = I' \cup I'' \cup \langle (j+1)\delta \rangle$$

Si $\varphi(\mathfrak{a}) = I$, entonces tenemos que $\mathfrak{a} = \oplus_{\alpha \in I}\mathfrak{a}_\alpha$ donde $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\alpha$, identificando $\overline{\mathfrak{g}_\alpha}$ con $\mathfrak{g}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta_+$.

La partición que tenemos para I nos induce la siguiente descomposición en suma directa para $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = (\oplus_{\alpha \in I'}\mathfrak{a}_\alpha \oplus (\oplus_{\alpha \in I''}\mathfrak{a}_\alpha) \oplus (\oplus_{\alpha \in \langle (j+1)\delta \rangle}\mathfrak{a}_\alpha)$$

Veamos cómo son cada uno de los sumandos que aparecen en esta descomposición. Como la dimensión de $\mathfrak{g}_\alpha$ es 1 si $\alpha \in \Delta_+$ y $\alpha \neq k\delta$, entonces se tiene que $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ si $\alpha \in I$ and $\alpha \neq k\delta$. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{k\delta - \alpha_m} = \mathfrak{g}_{k\delta-\alpha_m}$ para cada $m = 0, \ldots, 6$ y $k \geq j+1$, entonces se tiene que $\mathfrak{a}_{k\delta} = \mathfrak{g}_{k\delta}$ para cada $k \geq j+1$. Como resultado obtenemos que:

$$\mathfrak{a} = (\oplus_{\alpha \in I'}\mathfrak{g}_\alpha) \oplus (\oplus_{\alpha \in I''}\mathfrak{g}_\alpha) \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}\,,$$

donde

$$\mathfrak{b} = (\oplus_{\alpha>(j+1)\delta}\mathfrak{g}_\alpha)$$

Luego, lo que nos queda por obtener es $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, que depende de I''.

Tenemos que

$$\mathfrak{g}_{(j+1)\delta} = t^{j+1} \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{h}} = \oplus_{i=1}^{6}\mathbb{C}\, t^{j+1} \otimes \overset{\circ}{\alpha}{}_i^{\vee}$$

Para simplificar, denotamos $\oplus_{i=1}^{4}\mathbb{C}\lambda_i t^{j+1} \otimes \overset{\circ}{\alpha}{}_i^{\vee}$ por $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]$ para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{C}^6$ (ya habíamos considerado esta notación cuando calculamos los automorfismos de $E_6^{(1)}$).

También denotamos el ideal de Δ_+ generado por $\alpha^j_{i_1}, \ldots, \alpha^j_{i_k}$ por $\langle i_1, \ldots, i_k\rangle$.

Sea $n = \#I''$. Como

$$I'' \subseteq \{(j+1)\delta - \alpha_m \,;\; m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} =$$

$$= \{j\delta + \alpha_m \,;\; m = 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71\},$$

tenemos que $0 \leq n \leq 7$. Cuando elegimos un ideal I en cada órbita $O \in \mathcal{I}^j(\Delta_{++})/G$, nos quedamos con una subfamilia de $\mathcal{I}^j(\Delta_{++})$ que podemos denotarla por $\mathcal{J}^j$. Si tomamos $\mathcal{J}^j_n = \{I \in \mathcal{J}^j \,/\, \#I'' = n\}$ para cada $n = 0, 1, \ldots, 7$, tenemos que $\mathcal{J}^j = \cup_{0\leq n\leq 7}\mathcal{J}^j_n$. Por tanto, tenemos que considerar 7 casos (que, en realidad, son 8, pero los casos $n = 6$ y $n = 7$ son similares, por lo que los estudiamos juntos):

Caso 1: $n = 0$. Entonces $I'' = \varnothing$ y $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$. Hay un único ideal en este caso ($\#\mathcal{J}^j_0 = 1$): $I = \langle (j+1)\delta\rangle = \langle 72\rangle$ con $j \geq 0$ y $G_I = G$. Como $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 6 posibilidades:

(1.a) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}_{\langle 72\rangle} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{C}^6/G$.

(1.b) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6))} \\ &= [\lambda_1, 1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] \oplus [\mu_1, 0, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6] \oplus \mathfrak{b}\end{aligned}$$

para cada $((\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), (\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G$.

(1.c) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_4,\nu_5,\nu_6))} = [\lambda_1, 1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]\oplus$$
$$\oplus[\mu_1, 0, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6] \oplus [\nu_1, 0, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G$.

(1.d) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5))} = [\lambda_1, 1, 0, \lambda_4, \lambda_5, 0]\oplus$$
$$\oplus[\mu_1, 0, 1, \mu_4, \mu_5, 0] \oplus [\nu_1, 0, 0, \nu_4, \nu_5, 1] \oplus [\eta_1, 0, 0, \eta_4, \eta_5, 0] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G$.

(1.e) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta),(\rho))} = [1, 0, 0, 0, \lambda, 0] \oplus [0, 1, 0, 0, \mu, 0]\oplus$$
$$\oplus[0, 0, 1, 0, \nu, 0] \oplus [0, 0, 0, 1, \eta, 0] \oplus [0, 0, 0, 0, \rho, 1] \oplus \mathfrak{b}$$

para cada $(\lambda, \mu, \nu, \eta, \rho) \in \mathbb{C}^5/G$.

(1.f) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 72\rangle}^{j} = \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Para cada uno de los ideales $\mathfrak{a}$ obtenidos a partir de $I = \langle (j+1)\delta\rangle = \langle 72\rangle$ tenemos una G-órbita Ω.

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}\,;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)\in\mathbb{C}^6/G\}\cup$$
$$\cup\{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6))}\,;$$
$$((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6))\in\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G\}\cup$$
$$\cup\{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6))}\,;$$
$$((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6))\in\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G\}\cup$$
$$\cup\{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5))}\,;$$
$$((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5))\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G\}\cup$$
$$\cup\{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta),(\rho))}\,;\ (\lambda,\mu,\nu,\eta,\rho)\in\mathbb{C}^5/G\}\cup\{\Omega_{\langle 72\rangle}^{j}\}$$

En los casos siguientes, para cada ideal I considerado, también obtendremos una G-órbita Ω para cada uno de los ideales $\mathfrak{a}$ obtenidos a partir de I.

En algunos de los apartados correspondientes al ideal $I = \langle 72\rangle$, hemos podido reducir el número de parámetros necesarios. Esto lo hemos podido conseguir ya que, como tenemos que calcular todos los ideales $\mathfrak{a}$ tales que $\varphi(\mathfrak{a}) = I$ salvo la acción de G_I, al utilizar el grupo G_I que obtenemos podemos suponer que alguno de los parámetros es nulo o no nulo y simplificar así el número de parámetros.

En los casos siguientes también reduciremos, si es posible, el número de parámetros utilizando el grupo G_I que tenemos para cada ideal I considerado.

Caso 2: $n = 1$. Hay 3 ideales en este caso ($\#\mathcal{J}_1^j = 3$): $\langle 65\rangle$, $\langle 66\rangle$, $\langle 68\rangle$ con $j \geq 1$. Tenemos que $G_{\langle 65\rangle} = \{\sigma_1, id\} = \langle\sigma_1\rangle$, $G_{\langle 66\rangle} = \{\sigma_3, id\} = \langle\sigma_3\rangle$, $G_{\langle 68\rangle} = G$.

Si llamamos γ al único elemento de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_\gamma$, que es

$$\langle\mathfrak{g}_\gamma\rangle = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_\gamma \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_\gamma$ un cierto subespacio de dimensión 1 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay tres ideales en este caso y, como tenemos que $\mathfrak{a}_\gamma \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_\gamma$ es 1 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 6 posibilidades para cada ideal:

Consideramos primero el ideal $I = \langle 65\rangle$, que verifica que $G_I = G_{\langle 65\rangle} = \langle\sigma_1\rangle$:

(2.1.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 65\rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_\gamma\rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_\gamma = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

pues $\gamma = j\delta + \alpha_{65} = (j+1)\delta - \alpha_6$ para $I = \langle 65\rangle$.

(2.1.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)}_{\langle 65\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 0, 1] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, 0]$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}$.

(2.1.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5))}_{\langle 65\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 0, 1] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, 0] \oplus [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, 0]$$

para cada $((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}$.

(2.1.d) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5))}_{\langle 65\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,0,0,1] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, 0] \oplus$$
$$\oplus [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, 0] \oplus [\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, 0]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}$.

(2.1.e) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5))}_{\langle 65\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,0,0,1] \oplus [1,0,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,0] \oplus [0,1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,0] \oplus$$
$$\oplus [0,0,\nu_3,\nu_4,\nu_5,0] \oplus [0,0,\eta_3,\eta_4,\eta_5,0]$$

para cada $((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 65\rangle}$.

(2.1.f) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 65\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)}_{\langle 65\rangle}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}\} \cup$
$\cup \{\Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5))}_{\langle 65\rangle}\ ;$
$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}\} \cup$
$\cup \{\Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5))}_{\langle 65\rangle}\ ;$
$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 65\rangle}\} \cup$
$\cup \{\Omega^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5)(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5))}_{\langle 65\rangle}\ ;$
$((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 65\rangle}\} \cup$
$\cup \{\Omega^{j}_{\langle 65\rangle}\} \cup \{\Omega^{j}_{\langle 65\rangle,1}\}$

Ahora continuamos con el estudio del segundo ideal $I = \langle 66\rangle$, para el cual se tiene que $G_I = G_{\langle 66\rangle} = \langle\sigma_3\rangle$. Tenemos de nuevo 6 posibilidades:

(2.2.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 66\rangle,1} = \langle\mathfrak{g}_\gamma\rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_\gamma = [0, 0, 0, 0, 1, 0]$$

pues $\gamma = j\delta + \alpha_{66} = (j+1)\delta - \alpha_5$ para $I = \langle 66 \rangle$.

(2.2.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 66 \rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6)} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, \lambda_6]$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6) \in \mathbb{C}^5/G_{\langle 66 \rangle}$.

(2.2.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 66 \rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, \lambda_6] \oplus [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, 0, \mu_6]$$

para cada $((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6), (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 66 \rangle}$.

(2.2.d) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 66 \rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \oplus [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, \lambda_6] \oplus$$
$$\oplus [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, 0, \mu_6] \oplus [\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, 0, \nu_6]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_{\langle 66 \rangle}$.

(2.2.e) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 66 \rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \oplus [\lambda, 1, 0, 0, 0, 0] \oplus [\mu, 0, 1, 0, 0, 0] \oplus$$
$$\oplus [\nu, 0, 0, 1, 0, 0] \oplus [\eta, 0, 0, 0, 0, 1]$$

para cada $(\lambda, \mu, \nu, \eta) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 66\rangle}$.

(2.2.f) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 66\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6)}_{\langle 66\rangle};\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6) \in \mathbb{C}^5/G_{\langle 66\rangle}\}\cup$$
$$\cup\{\Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6))}_{\langle 66\rangle};$$
$$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6)) \in \mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G_{\langle 66\rangle}\}\cup$$
$$\cup\{\Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6))}_{\langle 66\rangle};$$
$$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6)) \in \mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G_{\langle 66\rangle}\}\cup$$
$$\cup\{\Omega^{j,((\lambda),(\mu)(\nu),(\eta))}_{\langle 66\rangle};\ (\lambda,\mu,\nu,\eta) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 66\rangle}\}\cup$$
$$\cup\{\Omega^j_{\langle 66\rangle}\}\cup\{\Omega^j_{\langle 66\rangle,1}\}$$

Finalmente, consideramos el tercer ideal $I = \langle 68\rangle$, para el cual tenemos que $G_I = G_{\langle 68\rangle} = G$. Tenemos 6 posibilidades:

(2.3.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 1$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 68\rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_\gamma\rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_\gamma = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$$

pues $\gamma = j\delta + \alpha_{68} = (j+1)\delta - \alpha_3$ para $I = \langle 68\rangle$.

(2.3.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}_{\langle 68\rangle} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0, 0, 1, 0, 0, 0] \oplus [\lambda_1, 1, 0, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}$.

(2.3.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [\lambda_1, 1, 0, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] \oplus [\mu_1, 0, 0, \mu_4, \mu_5, \mu_6]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}$.

(2.3.d) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [\lambda_1, 1, 0, 0, \lambda_5, \lambda_6] \oplus$$
$$\oplus [\mu_1, 0, 0, 1, \mu_5, \mu_6] \oplus [\nu_1, 0, 0, 0, \nu_5, \nu_6]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 68\rangle}$.

(2.3.e) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta))} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [1,0,0,0,\lambda,0] \oplus [0,1,0,0,\mu,0] \oplus$$
$$\oplus [0,0,0,1,\nu,0] \oplus [0,0,0,0,\eta,1]$$

para cada $(\lambda,\mu,\nu,\eta) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}$.

(2.3.f) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 68\rangle}^{j} = \mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega_{\langle 68\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}\}\cup$
$\cup\{\Omega_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6))}\ ;$
$((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6)) \in \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}\}\cup$
$\cup\{\Omega_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6))}\ ;$
$((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6)) \in \mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G_{\langle 68\rangle}\}\cup$
$\cup\{\Omega_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda),(\mu)(\nu),(\eta))}\ ;\ (\lambda,\mu,\nu,\eta) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}\}\cup$
$\cup\{\Omega_{\langle 68\rangle}^{j}\}\cup\{\Omega_{\langle 68\rangle,1}^{j}\}$

En este caso hemos considerado los tres ideales por separado pues, al considerar las 6 posibilidades para cada uno de ellos y el grupo G_I correspondiente, no obtenemos la misma reducción del número de parámetros necesarios para los tres ideales.

Caso 3: $n = 2$. Hay 8 ideales en este caso ($\#\mathcal{J}_2^j = 8$):

$\langle 59\rangle$, $\langle 60\rangle$,
$\langle 65,66\rangle$, $\langle 65,67\rangle$, $\langle 65,68\rangle$, $\langle 65,71\rangle$, $\langle 66,68\rangle$, $\langle 66,70\rangle$

con $j \geq 1$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} G_{\langle 59\rangle} &= G_{\langle 66,68\rangle} = \langle\sigma_3\rangle, \\ G_{\langle 60\rangle} &= G_{\langle 65,68\rangle} = G_{\langle 65,71\rangle} = G_{\langle 66,70\rangle} = \langle\sigma_1\rangle, \\ G_{\langle 65,66\rangle} &= \{id\}, \\ G_{\langle 65,67\rangle} &= \langle\sigma_4\rangle. \end{aligned}$$

Si llamamos γ_1 y γ_2 a los dos elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ y $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$, que es

$$\langle\mathfrak{g}_{\gamma_1},\mathfrak{g}_{\gamma_2}\rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2}$ un cierto subespacio de dimensión 2 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay ocho ideales en este caso. A modo de ejemplo y para no alargar innecesariamente la extensión de esta Memoria, consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 59\rangle = \langle j\delta + \alpha_{59}\rangle$. Para los otros ideales se procede de modo similar obteniéndose resultados parecidos (la reducción del número de parámetros no es igual para todos los ideales) para los ocho ideales. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2}$ es 2 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 5 posibilidades:

(3.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 2$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 59\rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}\rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2} = [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,1,0]$$

pues $\gamma_1 = (j+1)\delta - \alpha_4$ y $\gamma_2 = (j+1)\delta - \alpha_5$ para $I = \langle 59\rangle$.

(3.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6)}_{\langle 59\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,1,0] \oplus [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0,0,\lambda_6]$$

para cada $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 59\rangle}$.

(3.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6))}_{\langle 59\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,1,0] \oplus [\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0,0,\lambda_6] \oplus$$
$$\oplus [\mu_1,\mu_2,\mu_3,0,0,\mu_6]$$

para cada $((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4/G_{\langle 59\rangle}$.

(3.d) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu))}_{\langle 59\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,1,0] \oplus [\lambda,1,0,0,0,0] \oplus$$
$$\oplus [\mu,0,1,0,0,0] \oplus [\nu,0,0,0,0,1]$$

para cada $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3/G_{\langle 59\rangle}$.

(3.e) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 59\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6)}_{\langle 59\rangle}\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 59\rangle}\} \cup$$
$$\cup \{\Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6))}_{\langle 59\rangle}\ ;$$
$$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4/G_{\langle 59\rangle}\} \cup$$
$$\cup \{\Omega^{j,((\lambda),(\mu),(\nu))}_{\langle 59\rangle}\ ;\ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3/G_{\langle 59\rangle}\} \cup \{\Omega^{j}_{\langle 59\rangle}\} \cup \{\Omega^{j}_{\langle 59\rangle,1}\}$$

Caso 4: $n = 3$. Hay 20 ideales en este caso ($\# J^j_3 = 20$):

$\langle 53\rangle$, $\langle 54\rangle$,
$\langle 59,61\rangle$, $\langle 59,65\rangle$, $\langle 59,68\rangle$, $\langle 59,70\rangle$, $\langle 60,61\rangle$, $\langle 60,66\rangle$,
$\langle 60,67\rangle$, $\langle 60,71\rangle$,
$\langle 65,66,67\rangle$, $\langle 65,66,68\rangle$, $\langle 65,66,69\rangle$, $\langle 65,66,70\rangle$, $\langle 65,66,71\rangle$,
$\langle 65,67,68\rangle$, $\langle 65,67,69\rangle$, $\langle 65,68,71\rangle$, $\langle 66,68,70\rangle$, $\langle 66,70,71\rangle$

con $j \geq 1$.

Tenemos que

$G_{\langle 53\rangle} = G_{\langle 60,61\rangle} = G_{\langle 65,67,68\rangle} = \langle \sigma_4\rangle$,
$G_{\langle 54\rangle} = G_{\langle 59,61\rangle} = G_{\langle 59,68\rangle} = G_{\langle 65,66,69\rangle} = \langle \sigma_3\rangle$,
$G_{\langle 59,65\rangle} = G_{\langle 59,70\rangle} = G_{\langle 60,66\rangle} = G_{\langle 60,67\rangle} = G_{\langle 65,66,67\rangle} = G_{\langle 65,66,68\rangle} = G_{\langle 65,66,71\rangle} =$
$= \{id\}$,
$G_{\langle 60,71\rangle} = G_{\langle 65,66,70\rangle} = G_{\langle 65,68,71\rangle} = G_{\langle 66,68,70\rangle} = \langle \sigma_1\rangle$,
$G_{\langle 65,67,69\rangle} = G_{\langle 66,70,71\rangle} = G$.

Si llamamos γ_1, γ_2 y γ_3 a los tres elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ contiene al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$ y $\mathfrak{g}_{\gamma_3}$, que es

$$\langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3} \rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} \oplus \mathfrak{b},$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ un cierto subespacio de dimensión 3 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay veinte ideales en este caso. Tal como hicimos en el caso anterior (y como haremos también en los siguientes) consideraremos a continuación uno de ellos, $I = \langle 53 \rangle = \langle j\delta + \alpha_{53} \rangle$, procediéndose de forma similar con los otros y obteniéndose resultados similares para todos ellos. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ es 3 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 4 posibilidades:

(4.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 3$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 53 \rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3} \rangle$$

con

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,0,1]$$

pues $\gamma_1 = (j+1)\delta - \alpha_3$, $\gamma_2 = (j+1)\delta - \alpha_4$ y $\gamma_3 = (j+1)\delta - \alpha_6$ for $I = \langle 53 \rangle$.

(4.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5)}_{\langle 53 \rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,0,1]$$
$$\oplus [\lambda_1, \lambda_2, 0, 0, \lambda_5, 0]$$

para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5) \in \mathbb{C}^3 / G_{\langle 53 \rangle}$.

(4.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 53\rangle}^{j,((\lambda),(\mu))} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus [0,0,0,0,0,1]$$

$$\oplus [1,0,0,0,\lambda,0] \oplus [0,1,0,0,\mu,0]$$

para cada $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2/G_{\langle 53\rangle}$.

(4.d) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\langle 53\rangle}^{j} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega_{\langle 53\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5)};\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5) \in \mathbb{C}^3/G_{\langle 53\rangle}\} \cup$$
$$\cup \{\Omega_{\langle 53\rangle}^{j,((\lambda),(\mu))};\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2/G_{\langle 53\rangle}\} \cup \{\Omega_{\langle 53\rangle}^{j}\} \cup \{\Omega_{\langle 53\rangle,1}^{j}\}.$$

Caso 5: $n = 4$. Hay 45 ideales en este caso ($\#\mathcal{J}_4^j = 45$):

$\langle 40\rangle$, $\langle 46\rangle$, $\langle 47\rangle$,
$\langle 53,54\rangle$, $\langle 53,55\rangle$, $\langle 53,59\rangle$, $\langle 53,62\rangle$, $\langle 53,66\rangle$, $\langle 53,69\rangle$,
$\langle 53,70\rangle$, $\langle 54,60\rangle$, $\langle 54,65\rangle$, $\langle 54,70\rangle$, $\langle 59,60\rangle$, $\langle 59,63\rangle$,
$\langle 53,55,56\rangle$, $\langle 59,60,61\rangle$, $\langle 59,61,65\rangle$, $\langle 59,61,70\rangle$, $\langle 59,65,68\rangle$,
$\langle 59,65,69\rangle$, $\langle 59,65,70\rangle$, $\langle 59,65,71\rangle$, $\langle 59,68,70\rangle$, $\langle 59,70,71\rangle$,
$\langle 60,61,62\rangle$, $\langle 60,61,66\rangle$, $\langle 60,61,69\rangle$, $\langle 60,61,70\rangle$, $\langle 60,66,67\rangle$,
$\langle 60,66,69\rangle$, $\langle 60,66,70\rangle$, $\langle 60,66,71\rangle$, $\langle 60,67,69\rangle$, $\langle 60,67,71\rangle$,
$\langle 65,66,67,68\rangle$, $\langle 65,66,67,69\rangle$, $\langle 65,66,67,70\rangle$, $\langle 65,66,67,71\rangle$,
$\langle 65,66,68,69\rangle$, $\langle 65,66,68,70\rangle$, $\langle 65,66,68,71\rangle$, $\langle 65,66,70,71\rangle$,
$\langle 65,67,68,69\rangle$, $\langle 66,68,70,71\rangle$

con $j \geq 1$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&G_{\langle 40\rangle} = G_{\langle 47\rangle} = G_{\langle 53,55,56\rangle} = G_{\langle 60,61,62\rangle} = G_{\langle 65,67,68,69\rangle} = G_{\langle 66,68,70,71\rangle} = G\,,\\
&G_{\langle 46\rangle} = G_{\langle 53,54\rangle} = G_{\langle 53,59\rangle} = G_{\langle 53,66\rangle} = G_{\langle 54,60\rangle} = G_{\langle 54,65\rangle} = G_{\langle 54,70\rangle} = G_{\langle 59,60\rangle} =\\
&= G_{\langle 59,60,61\rangle} = G_{\langle 59,61,65\rangle} = G_{\langle 59,61,70\rangle} = G_{\langle 59,65,68\rangle} = G_{\langle 59,65,70\rangle} = G_{\langle 59,65,71\rangle} =\\
&= G_{\langle 59,68,70\rangle} = G_{\langle 60,61,66\rangle} = G_{\langle 60,66,67\rangle} = G_{\langle 60,66,69\rangle} = G_{\langle 60,66,71\rangle} = G_{\langle 60,67,71\rangle} =\\
&= G_{\langle 65,66,67,68\rangle} = G_{\langle 65,66,67,70\rangle} = G_{\langle 65,66,68,71\rangle} = \{id\}\,,\\
&G_{\langle 53,55\rangle} = G_{\langle 59,63\rangle} = G_{\langle 60,66,70\rangle} = G_{\langle 60,67,69\rangle} = G_{\langle 65,66,68,70\rangle} = G_{\langle 65,66,70,71\rangle} = \langle \sigma_1\rangle,\\
&G_{\langle 53,62\rangle} = G_{\langle 53,69\rangle} = G_{\langle 53,70\rangle} = G_{\langle 60,61,69\rangle} = G_{\langle 60.61,70\rangle} = G_{\langle 65,66,67,71\rangle} = \langle \sigma_4\rangle,\\
&G_{\langle 59,65,69\rangle} = G_{\langle 59,70,71\rangle} = G_{\langle 65,66,67,69\rangle} = G_{\langle 65,66,68,69\rangle} = \langle \sigma_3\rangle.
\end{aligned}
$$

Si llamamos γ_1, γ_2, γ_3 y γ_4 a los cuatro elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}\,,$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_3}$ and $\mathfrak{g}_{\gamma_4}$, que es

$$\langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3}, \mathfrak{g}_{\gamma_4}\rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} \oplus \mathfrak{b}$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$ un cierto subespacio de dimensión 4 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay cuarenta y cinco ideales en este caso. A modo de ejemplo consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 40\rangle = \langle j\delta + \alpha_{40}\rangle$. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$ es 4 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 3 posibilidades:

(5.a) $\dim \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 4$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 40\rangle,1} = \langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3}, \mathfrak{g}_{\gamma_4}\rangle,$$

con

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} = [0,1,0,0,0,0] \oplus [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus$$
$$\oplus [0,0,0,0,0,1]$$

pues $\gamma_1 = (j+1)\delta - \alpha_2$, $\gamma_2 = (j+1)\delta - \alpha_3$, $\gamma_3 = (j+1)\delta - \alpha_4$ y $\gamma_4 = (j+1)\delta - \alpha_6$ para $I = \langle 40\rangle$.

(5.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j,\lambda}_{\langle 40\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}$$

con

$$\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = [0,1,0,0,0,0] \oplus [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus$$
$$\oplus [0,0,0,0,0,1] \oplus [1,0,0,0,\lambda,0]$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}/G_{\langle 40\rangle}$.

(5.c) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{j}_{\langle 40\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^{j,\lambda}_{\langle 40\rangle} \,;\, \lambda \in \mathbb{C}/G_{\langle 40\rangle}\} \cup \{\Omega^{j}_{\langle 40\rangle}\} \cup \{\Omega^{j}_{\langle 40\rangle,1}\}.$$

Caso 6: $n = 5$. Hay 107 ideales en este caso ($\#\mathcal{J}^j_5 = 107$):

$\langle 26\rangle$, $\langle 33\rangle$, $\langle 39\rangle$, $\langle 42\rangle$,
$\langle 39,40\rangle$, $\langle 40,46\rangle$, $\langle 40,54\rangle$, $\langle 40,59\rangle$, $\langle 40,66\rangle$, $\langle 46,47\rangle$,
$\langle 46,48\rangle$, $\langle 46,51\rangle$, $\langle 46,55\rangle$, $\langle 46,56\rangle$, $\langle 46,58\rangle$, $\langle 46,62\rangle$,
$\langle 46,64\rangle$, $\langle 46,69\rangle$, $\langle 46,70\rangle$, $\langle 46,71\rangle$, $\langle 47,54\rangle$, $\langle 47,59\rangle$,
$\langle 47,66\rangle$, $\langle 53,57\rangle$, $\langle 53,63\rangle$, $\langle 54,57\rangle$, $\langle 54,63\rangle$,
$\langle 40,46,48\rangle$, $\langle 46,47,48\rangle$, $\langle 46,48,55\rangle$, $\langle 46,55,56\rangle$, $\langle 53,54,55\rangle$,
$\langle 53,54,56\rangle$, $\langle 53,54,58\rangle$, $\langle 53,54,62\rangle$, $\langle 53,54,64\rangle$, $\langle 53,54,69\rangle$,
$\langle 53,54,70\rangle$, $\langle 53,54,71\rangle$, $\langle 53,55,59\rangle$, $\langle 53,55,64\rangle$, $\langle 53,55,66\rangle$,
$\langle 53,55,71\rangle$, $\langle 53,59,62\rangle$, $\langle 53,59,64\rangle$, $\langle 53,59,69\rangle$, $\langle 53,59,70\rangle$,
$\langle 53,59,71\rangle$, $\langle 53,62,63\rangle$, $\langle 53,62,66\rangle$, $\langle 53,62,70\rangle$, $\langle 53,66,69\rangle$,
$\langle 53,66,70\rangle$, $\langle 53,66,71\rangle$, $\langle 53,69,70\rangle$, $\langle 54,60,62\rangle$, $\langle 54,60,64\rangle$,
$\langle 54,60,69\rangle$, $\langle 54,60,70\rangle$, $\langle 54,60,71\rangle$, $\langle 54,65,69\rangle$, $\langle 54,65,70\rangle$,
$\langle 54,65,71\rangle$, $\langle 54,70,71\rangle$, $\langle 59,60,62\rangle$, $\langle 59,60,64\rangle$, $\langle 59,60,69\rangle$,
$\langle 59,60,70\rangle$, $\langle 59,60,71\rangle$, $\langle 59,63,65\rangle$, $\langle 59,63,68\rangle$, $\langle 59,63,71\rangle$,

$\langle 53, 54, 55, 56\rangle$, $\langle 53, 55, 56, 59\rangle$, $\langle 53, 55, 56, 66\rangle$, $\langle 59, 60, 61, 62\rangle$,
$\langle 59, 60, 61, 64\rangle$, $\langle 59, 60, 61, 69\rangle$, $\langle 59, 60, 61, 70\rangle$, $\langle 59, 60, 61, 71\rangle$,
$\langle 59, 61, 65, 69\rangle$, $\langle 59, 61, 65, 70\rangle$, $\langle 59, 61, 65, 71\rangle$, $\langle 59, 61, 70, 71\rangle$,
$\langle 59, 65, 68, 69\rangle$, $\langle 59, 65, 68, 70\rangle$, $\langle 59, 65, 68, 71\rangle$, $\langle 59, 65, 69, 70\rangle$,
$\langle 59, 65, 70, 71\rangle$, $\langle 59, 68, 70, 71\rangle$, $\langle 60, 61, 62, 66\rangle$, $\langle 60, 61, 66, 69\rangle$,
$\langle 60, 61, 66, 70\rangle$, $\langle 60, 61, 66, 71\rangle$, $\langle 60, 61, 69, 70\rangle$, $\langle 60, 66, 67, 69\rangle$,
$\langle 60, 66, 67, 70\rangle$, $\langle 60, 66, 67, 71\rangle$, $\langle 60, 66, 69, 71\rangle$, $\langle 60, 66, 70, 71\rangle$,
$\langle 60, 67, 69, 71\rangle$,
$\langle 65, 66, 67, 68, 69\rangle$, $\langle 65, 66, 67, 68, 70\rangle$, $\langle 65, 66, 67, 68, 71\rangle$,
$\langle 65, 66, 67, 69, 70\rangle$, $\langle 65, 66, 67, 70, 71\rangle$, $\langle 65, 66, 68, 70, 71\rangle$

con $j \geq 1$.

Si llamamos γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 y γ_5 a los cinco elementos de I'', entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ tiene que contener al ideal generado por $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_2}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_3}$, $\mathfrak{g}_{\gamma_4}$ y $\mathfrak{g}_{\gamma_5}$, que es

$$\langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3}, \mathfrak{g}_{\gamma_4}, \mathfrak{g}_{\gamma_5}\rangle = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} \oplus \mathfrak{b}$$

con $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5}$ un cierto subespacio de dimensión 5 de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$.

Hay ciento siete ideales en este caso. A modo de ejemplo consideramos a continuación uno de ellos, $I = \langle 26\rangle = \langle j\delta + \alpha_{26}\rangle$. Como tenemos que $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5} \subseteq \mathfrak{a}_{(j+1)\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, la dimensión de $\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5}$ es 5 y la dimensión de $\mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$ es 6, hay que considerar 2 posibilidades:

(6.a) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 5$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{(26),1} = \langle \mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \mathfrak{g}_{\gamma_3}, \mathfrak{g}_{\gamma_4}, \mathfrak{g}_{\gamma_5}\rangle,$$

con

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5} = [0,1,0,0,0,0] \oplus [0,0,1,0,0,0] \oplus [0,0,0,1,0,0] \oplus$$
$$\oplus [0,0,0,0,1,0] \oplus [0,0,0,0,0,1]$$

pues $\gamma_1 = (j+1)\delta - \alpha_2$, $\gamma_2 = (j+1)\delta - \alpha_3$, $\gamma_3 = (j+1)\delta - \alpha_4$, $\gamma_4 = (j+1)\delta - \alpha_5$ y $\gamma_5 = (j+1)\delta - \alpha_6$ para $I = \langle 26\rangle$.

(6.b) dim $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = 6$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^j_{\langle 26\rangle} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{g}_{(j+1)\delta} \oplus \mathfrak{b}.$$

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^j_{\langle 26\rangle}\} \cup \{\Omega^j_{\langle 26\rangle,1}\}.$$

Caso 7: $n = 6, 7$. En este caso están el resto de los ideales ($\#\mathcal{J}^0_6 \cup \mathcal{J}^0_7 = 1752$ y $\#\mathcal{J}^j_6 \cup \mathcal{J}^j_7 = 2442$ si $j \geq 1$).

$n = 6, 7$ implica que $\mathfrak{a}_{(j+1)\delta} = \mathfrak{g}_{(j+1)\delta}$, por tanto, $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_I$.

Luego

$$\Phi^{-1}(O) = \{\Omega^j_I\}.$$

Como consecuencia de este estudio tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2–E.1 ■ Las G-órbitas de los ideales de $\mathfrak{n}_+$ contenidos en $\mathfrak{n}_{++}$ son las siguientes:

Ω^j_I con $I \in \mathcal{J}^j$, $j \geq 0$;

$\Omega^j_{I,1}$ con $I \in \mathcal{J}^j_n$, $1 \leq n \leq 5$, $j \geq 0$;

$\Omega^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}_{\langle 72\rangle}$ con $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6) \in \mathbb{C}^6/G$, $j \geq 0$;

$\left\{\begin{array}{l} \Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6))}_{\langle 72\rangle} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G,\ j \geq 0; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \Omega^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6))}_{\langle 72\rangle} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G,\ j \geq 0; \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\Omega_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta),(\rho))} \quad \text{con } (\lambda,\mu,\nu,\eta,\rho)\in\mathbb{C}^5/G,\ j\geq 0;$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)} \\ \text{con } I=\langle 65\rangle,\langle 66\rangle,\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\mathbb{C}^5/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5))} \\ \text{con } I=\langle 65\rangle,\langle 66\rangle, \\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5))\in\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5))} \\ \text{con } I=\langle 65\rangle,\langle 66\rangle, \\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5))\in\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5\times\mathbb{C}^5/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 65\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5))\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G_{\langle 65\rangle},\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\Omega_I^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta))} \quad \text{con } I=\langle 66\rangle,\langle 68\rangle,\ (\lambda,\mu,\nu,\eta)\in\mathbb{C}^4/G_I,\ j\geq 0;$$

$$\Omega_{\langle 68\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)\in\mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle},\ j\geq 0;$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6))\in\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle},\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6))\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G_{\langle 68\rangle},\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6)} \\ \text{con } I\in\mathcal{F}_2^j-\{\langle 65,66\rangle\},\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6)\in\mathbb{C}^4/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\Omega_{\langle 65,66\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{C}^4,\ j\geq 0;$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6))} \\ \text{con } I\in\mathcal{F}_2^j-\{\langle 65,66\rangle,\langle 65,71\rangle\}, \\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6))\in\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 65,66\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)) \in \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 65,71\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5)) \in \mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G_{\langle 65,71\rangle},\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\Omega_I^{j,((\lambda),(\mu),(\nu)} \quad \text{con } I=\langle 59\rangle,\langle 65,67\rangle,\langle 66,68\rangle,\ (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{C}^3/G_I,\ j\geq 0;$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda_4,\lambda_5),(\mu_4,\mu_5),(\nu_4,\nu_5))} \\ \text{con } I=\langle 60\rangle,\langle 65,68\rangle,\langle 65,71\rangle, \\ ((\lambda_4,\lambda_5),(\mu_4,\mu_5),(\nu_4,\nu_5)) \in \mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 65,66\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)) \in \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_{\langle 66,70\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_3,\nu_4,\nu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5)) \in \mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3/G_{\langle 66,70\rangle},\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5)} \\ \text{con } I=\langle 53\rangle,\langle 54\rangle,\langle 59,61\rangle,\langle 59,68\rangle,\langle 60,61\rangle,\langle 60,71\rangle,\langle 65,66,69\rangle, \\ \langle 65,66,70\rangle,\langle 65,67,68\rangle,\langle 65,68,71\rangle,\langle 66,68,70\rangle,\langle 66,70,71\rangle, \\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5)\in\mathbb{C}^3/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \\ \text{con } I=\langle 59,65\rangle,\langle 59,70\rangle,\langle 60,66\rangle,\langle 60,67\rangle,\langle 65,66,67\rangle,\langle 65,66,68\rangle, \\ \langle 65,66,71\rangle,\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{C}^3,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\Omega_{\langle 65,67,69\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_5)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_5)\in\mathbb{C}^2/G_{\langle 65,67,69\rangle},\ j\geq 0;$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda),(\mu))} \\ \text{con } I=\langle 53\rangle,\langle 54\rangle,\langle 59,61\rangle,\langle 59,68\rangle,\langle 60,61\rangle,\langle 60,71\rangle,\langle 65,66,69\rangle, \\ \langle 65,67,68\rangle,\langle 65,67,69\rangle,\langle 65,68,71\rangle,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2/G_I,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} \\ \text{con } I=\langle 59,65\rangle,\langle 59,70\rangle,\langle 60,66\rangle,\langle 60,67\rangle,\langle 65,66,67\rangle,\langle 65,66,68\rangle, \\ \langle 65,66,71\rangle,\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3,\ j\geq 0; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_I^{j,\lambda} \\ \quad \text{con } I = \langle 40\rangle, \langle 47\rangle, \langle 53, 55\rangle, \langle 53, 62\rangle, \langle 53, 69\rangle, \langle 53, 70\rangle, \langle 53, 55, 56\rangle, \\ \langle 59, 65, 69\rangle, \langle 60, 61, 62\rangle, \langle 60, 61, 69\rangle, \langle 60, 61, 70\rangle, \langle 60, 66, 70\rangle, \\ \langle 60, 67, 69\rangle, \langle 65, 66, 67, 69\rangle, \langle 65, 66, 68, 69\rangle, \langle 65, 66, 68, 70\rangle, \\ \langle 65, 67, 68, 69\rangle, \langle 66, 68, 70, 71\rangle, \ \lambda \in \mathbb{C}/G_I, \ j \geq 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_I^{j,(\lambda_3,\lambda_6)} \\ \quad \text{con } I = \langle 59, 63\rangle, \langle 59, 70, 71\rangle, \langle 65, 66, 67, 71\rangle, \langle 65, 66, 70, 71\rangle \\ (\lambda_3, \lambda_6) \in \mathbb{C}^2/G_I, \ j \geq 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2)} \\ \quad \text{con } I = \langle 46\rangle, \langle 53, 54\rangle, \langle 53, 59\rangle, \langle 53, 66\rangle, \langle 54, 60\rangle, \langle 54, 65\rangle, \langle 54, 70\rangle, \\ \langle 59, 60\rangle, \langle 59, 60, 61\rangle, \langle 59, 61, 65\rangle, \langle 59, 61, 70\rangle, \langle 59, 65, 68\rangle, \langle 59, 65, 70\rangle, \\ \langle 59, 65, 71\rangle, \langle 59, 68, 70\rangle, \langle 60, 61, 66\rangle, \langle 60, 66, 67\rangle, \langle 60, 66, 69\rangle, \\ \langle 60, 66, 71\rangle, \langle 60, 67, 71\rangle, \langle 65, 66, 67, 68\rangle, \langle 65, 66, 67, 70\rangle, \\ \langle 65, 66, 68, 71\rangle, \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \ j \geq 0. \end{array}\right.$$

2-F EL TEOREMA PRINCIPAL

Finalmente, si calculamos los cocientes de la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ de $\mathfrak{g}$ por cada uno de los ideales $\mathfrak{a}$ representantes de cada una de las G-órbitas obtenidas, tendremos todas las álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$, salvo isomorfismo (véase la sección E del Capítulo 0). La relación de las álgebras de Lie obtenidas aparece en el siguiente resultado:

Teorema 2-F.1 ■ Salvo isomorfismo hay exactamente:

(a) 2808 familias infinitas con parámetro discreto:

$$\mathfrak{L}_I^j \quad \text{con } I \in \mathcal{J}^j, \ j \geq 0;$$

$$\mathfrak{L}_{I,1}^j \quad \text{con } I \in \mathcal{J}_n^j, \ 1 \leq n \leq 5, \ j \geq 0;$$

(b) 126 familias infinitas con parámetro continuo: ($j \geq 0$)

$\mathfrak{L}_{\langle 72\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}$ con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{C}^6/G$;

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), (\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_4,\nu_5),(\eta_1,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G; \end{array}\right.$

$\mathfrak{L}_{\langle 72\rangle}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta),(\rho))}$ con $(\lambda, \mu, \nu, \eta, \rho) \in \mathbb{C}^5/G$;

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{I}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)} \\ \text{con } I = \langle 65\rangle, \langle 66\rangle,\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{C}^5/G_I; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{I}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5))} \\ \text{con } I = \langle 65\rangle, \langle 66\rangle, \\ ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_I; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{I}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5))} \\ \text{con } I = \langle 65\rangle, \langle 66\rangle, \\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5/G_I; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 65\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5),(\nu_3,\nu_4,\nu_5),(\eta_3,\eta_4,\eta_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 65\rangle}; \end{array}\right.$

$\mathfrak{L}_{I}^{j,((\lambda),(\mu),(\nu),(\eta))}$ con $I = \langle 66\rangle, \langle 68\rangle,\ (\lambda, \mu, \nu, \eta) \in \mathbb{C}^4/G_I$;

$\mathfrak{L}_{\langle 68\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)}$ con $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}$;

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_4,\mu_5,\mu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), (\mu_1, \mu_4, \mu_5, \mu_6)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4/G_{\langle 68\rangle}; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_{\langle 68\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_5,\lambda_6),(\mu_1,\mu_5,\mu_6),(\nu_1,\nu_5,\nu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_1, \lambda_5, \lambda_6), (\mu_1, \mu_5, \mu_6), (\nu_1, \nu_5, \nu_6)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 68\rangle}; \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6)} \\ \text{con } I \in \mathcal{J}_2^j - \{\langle 65,66\rangle\},\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6) \in \mathbb{C}^4/G_I; \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_{\langle 65,66\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{C}^4;$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6))} \\ \text{con } I \in \mathcal{J}_2^j - \{\langle 65,66\rangle, \langle 65,71\rangle\}, \\ ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_6),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_6)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4/G_I; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 65,66\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 65,71\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 65,71\rangle}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_I^{j,((\lambda),(\mu),(\nu)} \quad \text{con } I = \langle 59\rangle, \langle 65,67\rangle, \langle 66,68\rangle,\ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3/G_I;$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,((\lambda_4,\lambda_5),(\mu_4,\mu_5),(\nu_4,\nu_5))} \\ \text{con } I = \langle 60\rangle, \langle 65,68\rangle, \langle 65,71\rangle, \\ ((\lambda_4,\lambda_5),(\mu_4,\mu_5),(\nu_4,\nu_5)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2/G_I; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 65,66\rangle}^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4))} \\ \text{con } ((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4),(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\langle 66,70\rangle}^{j,((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6),(\mu_3,\mu_4,\mu_6),(\nu_3,\nu_4,\nu_6))} \\ \text{con } ((\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5),(\mu_3,\mu_4,\mu_5)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3/G_{\langle 66,70\rangle}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5)} \\ \text{con } I = \langle 53\rangle, \langle 54\rangle, \langle 59,61\rangle, \langle 59,68\rangle, \langle 60,61\rangle, \langle 60,71\rangle, \langle 65,66,69\rangle, \\ \langle 65,66,70\rangle, \langle 65,67,68\rangle, \langle 65,68,71\rangle, \langle 66,68,70\rangle, \langle 66,70,71\rangle, \\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5) \in \mathbb{C}^3/G_I; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \\ \text{con } I = \langle 59,65\rangle, \langle 59,70\rangle, \langle 60,66\rangle, \langle 60,67\rangle, \langle 65,66,67\rangle, \langle 65,66,68\rangle, \\ \langle 65,66,71\rangle,\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3; \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_{\langle 65,67,69\rangle}^{j,(\lambda_1,\lambda_5)} \quad \text{con } (\lambda_1,\lambda_5) \in \mathbb{C}^2/G_{\langle 65,67,69\rangle};$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_I^{j,((\lambda),(\mu))} \\ \text{con } I = \langle 53\rangle, \langle 54\rangle, \langle 59, 61\rangle, \langle 59, 68\rangle, \langle 60, 61\rangle, \langle 60, 71\rangle, \langle 65, 66, 69\rangle, \\ \langle 65, 67, 68\rangle, \langle 65, 67, 69\rangle, \langle 65, 68, 71\rangle,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2/G_I; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_I^{j,((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\mu_1,\mu_2,\mu_3))} \\ \text{con } I = \langle 59, 65\rangle, \langle 59, 70\rangle, \langle 60, 66\rangle, \langle 60, 67\rangle, \langle 65, 66, 67\rangle, \langle 65, 66, 68\rangle, \\ \langle 65, 66, 71\rangle,\ ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\mu_1, \mu_2, \mu_3)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_I^{j,\lambda} \\ \text{con } I = \langle 40\rangle, \langle 47\rangle, \langle 53, 55\rangle, \langle 53, 62\rangle, \langle 53, 69\rangle, \langle 53, 70\rangle, \langle 53, 55, 56\rangle, \\ \langle 59, 65, 69\rangle, \langle 60, 61, 62\rangle, \langle 60, 61, 69\rangle, \langle 60, 61, 70\rangle, \langle 60, 66, 70\rangle, \\ \langle 60, 67, 69\rangle, \langle 65, 66, 67, 69\rangle, \langle 65, 66, 68, 69\rangle, \langle 65, 66, 68, 70\rangle, \\ \langle 65, 67, 68, 69\rangle, \langle 66, 68, 70, 71\rangle,\ \lambda \in \mathbb{C}/G_I; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_3,\lambda_6)} \\ \text{con } I = \langle 59, 63\rangle, \langle 59, 70, 71\rangle, \langle 65, 66, 67, 71\rangle, \langle 65, 66, 70, 71\rangle \\ (\lambda_3, \lambda_6) \in \mathbb{C}^2/G_I; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}_I^{j,(\lambda_1,\lambda_2)} \\ \text{con } I = \langle 46\rangle, \langle 53, 54\rangle, \langle 53, 59\rangle, \langle 53, 66\rangle, \langle 54, 60\rangle, \langle 54, 65\rangle, \langle 54, 70\rangle, \\ \langle 59, 60\rangle, \langle 59, 60, 61\rangle, \langle 59, 61, 65\rangle, \langle 59, 61, 70\rangle, \langle 59, 65, 68\rangle, \langle 59, 65, 70\rangle, \\ \langle 59, 65, 71\rangle, \langle 59, 68, 70\rangle, \langle 60, 61, 66\rangle, \langle 60, 66, 67\rangle, \langle 60, 66, 69\rangle, \\ \langle 60, 66, 71\rangle, \langle 60, 67, 71\rangle, \langle 65, 66, 67, 68\rangle, \langle 65, 66, 67, 70\rangle, \\ \langle 65, 66, 68, 71\rangle,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2. \end{array}\right.$$

de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$.

Para terminar este Capítulo vamos a ver un ejemplo de álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$.

2-G UN EJEMPLO DE ÁLGEBRA DE LIE NILPOTENTE DE RANGO MAXIMAL Y TIPO $E_6^{(1)}$

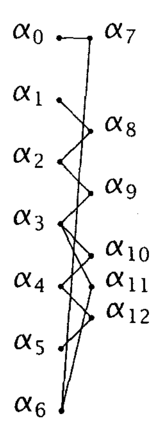
Vamos a construir el álgebra de Lie nilpotente de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$ que se obtiene a partir del ideal $\mathfrak{a}^0_{\langle 13,14,15,16,17,18\rangle} \in \mathcal{I}^0(\mathfrak{n}_{++})$. Como $\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{a}^0_{\langle 13,14,15,16,17,18\rangle} = \oplus_{\alpha\in\langle 13,14,15,16,17,18\rangle}\mathfrak{g}_\alpha$, siguiendo la misma notación para los subespacios raíces del cociente, tenemos que:

$$\mathfrak{L}^0_{\langle 13,14,15,16,17,18\rangle} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+-\langle 13,14,15,16,17,18\rangle}\mathfrak{g}_\alpha.$$

El sistema de raíces de este álgebra de Lie es

$$\Delta_+ - \langle 13, 14, 15, 16, 17, 18\rangle = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{12}\}$$

con la siguiente representación:



Tenemos que $\alpha_0 = \delta - \mathring{\theta}$, $\alpha_1 = \mathring{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \mathring{\alpha}_2$, $\alpha_3 = \mathring{\alpha}_3$, $\alpha_4 = \mathring{\alpha}_4$, $\alpha_5 = \mathring{\alpha}_5$, $\alpha_6 = \mathring{\alpha}_6$, $\alpha_7 = \delta - \mathring{\alpha}_1 - 2\mathring{\alpha}_2 - 3\mathring{\alpha}_3 - 2\mathring{\alpha}_4 - \mathring{\alpha}_5 - \mathring{\alpha}_6$, $\alpha_8 = \mathring{\alpha}_1 + \mathring{\alpha}_2$, $\alpha_9 = \mathring{\alpha}_2 + \mathring{\alpha}_3$, $\alpha_{10} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_4$, $\alpha_{11} = \mathring{\alpha}_3 + \mathring{\alpha}_6$ y $\alpha_{12} = \mathring{\alpha}_4 + \mathring{\alpha}_5$. Luego los subespacios raíces correspondientes quedan así:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\alpha_0} &= t \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\theta}} = \mathbb{C}\, t \otimes E_{-\mathring{\theta}}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_1} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_1} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_2} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_2} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_3} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_3} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_4} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_4} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_4}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_5} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_5} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_5}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_6} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_6} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_6}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_7} &= t \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6} = \mathbb{C}\, t \otimes E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_8} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_9} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_{10}} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_{11}} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_6}\\
\mathfrak{g}_{\alpha_{12}} &= 1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5} = \mathbb{C}\, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_4+\mathring{\alpha}_5}
\end{aligned}
$$

Si tenemos en cuenta que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y los productos corchete de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathring{\mathfrak{g}}$, entonces obtenemos que los únicos productos corchete no nulos, salvo antisimetría, en este álgebra de Lie son:

$$
\begin{aligned}
\left[t \otimes E_{-\mathring{\theta}}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_6}\right] &= t \otimes \left[E_{-\mathring{\theta}}, E_{\mathring{\alpha}_6}\right] &&= -t \otimes E_{-\mathring{\alpha}_1-2\mathring{\alpha}_2-3\mathring{\alpha}_3-2\mathring{\alpha}_4-\mathring{\alpha}_5-\mathring{\alpha}_6}\\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_1}, E_{\mathring{\alpha}_2}\right] &&= 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_1+\mathring{\alpha}_2}\\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_2}, E_{\mathring{\alpha}_3}\right] &&= 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_2+\mathring{\alpha}_3}\\
\left[1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3}, 1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &= 1 \otimes \left[E_{\mathring{\alpha}_3}, E_{\mathring{\alpha}_4}\right] &&= -1 \otimes E_{\mathring{\alpha}_3+\mathring{\alpha}_4}
\end{aligned}
$$

$$\left[1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}, 1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_6}\right] = 1 \otimes \left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_3}, E_{\overset{\circ}{\alpha}_6}\right] = -1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_3+\overset{\circ}{\alpha}_6}$$
$$\left[1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_4}, 1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_5}\right] = 1 \otimes \left[E_{\overset{\circ}{\alpha}_4}, E_{\overset{\circ}{\alpha}_5}\right] = -1 \otimes E_{\overset{\circ}{\alpha}_4+\overset{\circ}{\alpha}_5}$$

Entonces $\mathfrak{L}^0_{\langle 13,14,15,16,17,18\rangle}$ es el álgebra de Lie de dimensión 13 con descomposición:

$$\mathfrak{L}^0_{\langle 13,14,15,16,17,18\rangle} = \bigoplus_{i=0}^{12} \mathbb{C}e_i$$

y está definida por los productos corchete:

$$[e_0, e_1] = -e_7, \quad [e_1, e_2] = e_8, \quad [e_2, e_3] = e_9,$$
$$[e_3, e_4] = -e_{10}, \quad [e_3, e_6] = -e_{11}, \quad [e_4, e_5] = -e_{12}$$

respecto de la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_{12}\}$.

CAPÍTULO 3

Álgebras de Lie metabelianas de rango maximal

En este Capítulo vamos a considerar un caso particular de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal: las que tienen menor índice de nilpotencia y no son conmutativas.

3-A MÉTODO DE CLASIFICACIÓN

Vamos a aplicar el método de clasificación para álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal a este caso particular.

Recordemos que un álgebra de Lie metabeliana es un álgebra de Lie nilpotente con índice de nilpotencia $p = 2$. Esto es, un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es metabeliana si $C^2\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \neq \{0\}$ y $C^3\mathfrak{L} = [C^2\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = [[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}], L] = \{0\}$.

El método de clasificación se basa en la aparición de un nuevo invariante, la matriz de Cartan generalizada asociada a cada álgebra de Lie nilpotente de rango maximal (que es única salvo equivalencia). Y dicha matriz se obtiene como sigue: Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie nilpotente de rango maximal ℓ, T es un toro maximal sobre $\mathfrak{L}$ y $\{X_1, \dots, X_\ell\}$ es un T-smg, entonces para cualesquiera $i, j = 1, \dots, \ell$, $i \neq j$, existe un único $a_{ij} \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ tal que $(adX_i)^{-a_{ij}} X_j \neq 0$ y $(adX_i)^{-a_{ij}+1} X_j = 0$. Si tomamos $a_{ii} = 2$ para cada $i = 1, \dots, \ell$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ es una matriz de Cartan generalizada (y la clase de equivalencia de A es un invariante de $\mathfrak{L}$).

Si p es el índice de nilpotencia de $\mathfrak{L}$, se deduce que $(adX_i)^p X_j = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \dots, \ell$, $i \neq j$ pues $(adX_i)^p X_j \in C^{p+1}\mathfrak{L} = \{0\}$. Y, por tanto, si $\mathfrak{L}$ es de rango maximal y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ es la matriz de Cartan generalizada asociada a $\mathfrak{L}$, entonces $-a_{ij} < p$ para cualesquiera $i, j = 1, \dots, \ell$, $i \neq j$. Luego, se tiene

$$p \geq sup\{-a_{ij} + 1 \, ; \, i, j = 1, \dots, \ell, \, i \neq j\}.$$

Si aplicamos lo anterior al caso particular de álgebras de Lie metabelianas, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3–A.1 ■ Si $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie metabeliana de rango maximal ℓ y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ es la matriz de Cartan generalizada asociada a $\mathfrak{L}$ entonces

$$2 \geq sup\{-a_{ij} + 1 \, ; \, i, j = 1, \dots, \ell, \, i \neq j\}.$$

Nota 3–A.2 ■ La condición que aparece en este lema es equivalente a la siguiente:

$$a_{ij} = a_{ji} = 0 \text{ ó } -1, \; \forall i, j = 1, \dots, \ell, \; i \neq j.$$

Si consideramos las matrices de Cartan generalizadas de tipo finito o afín (la lista completa de los diagramas de Dynkin de estos dos tipos de matrices de Cartan generalizadas se da a continuación del teorema 0–C.13) vemos que hay algunas matrices que no verifican la condición del lema anterior. Dicha condición la verifica una matriz de Cartan generalizada si y sólo si en su diagrama de Dynkin no aparece más de una arista uniendo dos vértices cualesquiera.

Damos a continuación las matrices de Cartan generalizadas de tipos finito o afín que se obtienen a partir de álgebras de Lie metabelianas de rango maximal:

Teorema 3–A.3 ■ Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y sea A la matriz de Cartan generalizada asociada a $\mathfrak{L}$.

1. Si A es de tipo finito, entonces es una de las siguientes matrices:
$$A_\ell\,(\ell \geq 2),\quad D_\ell\,(\ell \geq 4),\quad E_6,\quad E_7,\quad E_8.$$
2. Si A es de tipo afín, entonces es una de las siguientes matrices:
$$A_\ell^{(1)}\,(\ell \geq 2),\quad D_\ell^{(1)}\,(\ell \geq 4),\quad E_6^{(1)},\quad E_7^{(1)},\quad E_8^{(1)}.$$

Para cada una de las matrices que aparecen en el teorema anterior tenemos al menos un álgebra de Lie metabeliana de rango maximal: el álgebra de Lie metabeliana de rango maximal modelo. Recordemos cómo se construye este álgebra de Lie a partir de la matriz de Cartan generalizada.

A partir de este momento consideramos una matriz de Cartan generalizada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ que verifica la condición del lema 3–A.1 (o equivalentemente, la condición de la nota 3–A.2) y la parte positiva $\mathfrak{n}_+$ del álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ asociada a A. Tenemos que si $E_1,\ldots,E_\ell$ y $F_1,\ldots,F_\ell$ son los generadores de Chevalley de $\mathfrak{g}(A)$, Δ y Δ_+ son los sistemas de raíces y de raíces positivas de $\mathfrak{g}(A)$, respectivamente, y la descomposición de $\mathfrak{g}(A)$ en subespacios raíces respecto de su subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ es:
$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha),$$
entonces
$$n_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$$
y está generada por $E_1,\ldots,E_\ell$. El álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A modelo es $\mathfrak{M}_2(A) = \mathfrak{n}_+/C^3\mathfrak{n}_+$ donde $C^3\mathfrak{n}_+$ es el tercer término de la sucesión central descendente de $\mathfrak{n}_+$. Aplicando que

$C^3\mathfrak{n}_+ = \oplus_{|\alpha|\geq 3}\mathfrak{g}_\alpha$ y el teorema 0–E.16 tenemos que

$$\mathfrak{M}_2(A) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+,\,|\alpha|\leq 2} \mathfrak{g}_\alpha$$

(identificaremos estas dos álgebras de Lie) con

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j} = \mathbb{C}(adE_i)E_j = \mathbb{C}[E_i, E_j]$$

para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, \ell$, donde $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ es la base de las raíces de $\mathfrak{g}(A)$.

Veamos cómo podemos obtener todas las álgebras de Lie metabelianas de rango maximal y tipo A. Por el teorema 0–E.26 tenemos que las clases de isomorfismo de las álgebras de Lie metabelianas de rango maximal ℓ y tipo A están en biyección con las órbitas de $\mathfrak{J}_2(A)$ por la acción de $\tilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$. Por tanto, el primer paso es obtener $\mathfrak{J}_2(A)$ para cada A. Este es el conjunto de los ideales $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{M}_2(A)$ homogéneos que verifican

$$C^2\mathfrak{M}_2(A) \nsubseteq \mathfrak{a} \text{ y } (adE_i)^{-a_{ij}}E_j \notin \mathfrak{a},\ \forall i \neq j.$$

Como vimos en el Capítulo 0, que $\mathfrak{a}$ sea ideal homógeneo de $\mathfrak{M}_2(A)$ es equivalente a

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+,\,|\alpha|\leq 2} \mathfrak{a}_\alpha$$

con $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\alpha$ y para que sea un elemento de $\mathfrak{J}_2(A)$ tiene que verificar las dos propiedades siguientes:

- que exista $\alpha \in \Delta_+$ con $|\alpha| = 2$ tal que $\mathfrak{a}_\alpha = \{0\}$, pues tiene que darse $C^2\mathfrak{M}_2(A) = \oplus_{|\alpha|=2}\mathfrak{g}_\alpha \nsubseteq \mathfrak{a}$ y ,como $dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ para raíces de altura 2, $\mathfrak{a}_\alpha = \{0\}$ o $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ son las únicas posibilidades, y
- que $\mathfrak{a}_\alpha = \{0\}$ para todo $\alpha \in \{\alpha_j + k\alpha_i\,;\ i, j = 1, \ldots, \ell,\ k = 0, 1\}$, pues, como $\mathfrak{g}_{\alpha_j - a_{ij}\alpha_i} = \mathbb{C}(adE_i)^{-a_{ij}}E_j$, $(adE_i)^{-a_{ij}}E_j \notin \mathfrak{a}$ es equivalente a $\mathfrak{a}_{\alpha_j - a_{ij}\alpha_i} = \{0\}$ y, por tanto, equivalente a $\mathfrak{a}_{\alpha_j + k\alpha_i} = \{0\}$ para $0 \leq k \leq -a_{ij}$ y $a_{ij} = -1$ ó 0.

La segunda de las propiedades implica la primera y a partir de la segunda propiedad, como $\mathfrak{a} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+,\,|\alpha|\leq 2}\mathfrak{a}_\alpha$ y $\{\alpha \in \Delta_+\,;\ |\alpha| \leq 2\} \subseteq$

$\{\alpha_j+k\alpha_i\,;\ i,j=1,\ldots,\ell,\ k=0,1\}$, deducimos que necesariamente $\mathfrak{a}=\{0\}$ y, por tanto, $\mathfrak{J}_2(A)=\{\{0\}\}$ y no tiene sentido calcular $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$ para obtener las órbitas de $\mathfrak{J}_2(A)$ por la acción de $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$.

El último paso es tomar un elemento $\mathfrak{a}$ de cada $\widetilde{\mathfrak{S}}_\ell(A)$-órbita de $\mathfrak{J}_2(A)$ y realizar los cocientes $\mathfrak{M}_2(A)/\mathfrak{a}$. En este caso la única posibilidad es $\mathfrak{a}=\{0\}$ y, por tanto, el único álgebra de Lie metabeliana (salvo isomorfismo) de rango maximal y tipo A es $\mathfrak{M}_2(A)$.

Teorema 3–A.4 ■ Sea $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ una matriz de Cartan generalizada que verifica la condición

$$2\geq sup\{-a_{ij}+1\,;\ i,j=1,\ldots,\ell,\ i\neq j\}.$$

Existe un único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A.

En las siguientes secciones vamos a calcular el álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A, cuando A es una de las matrices de Cartan generalizadas del teorema 3–A.3. Dicho álgebra de Lie es $\oplus_{\alpha\in\Delta_+,\,|\alpha|\leq 2}\mathfrak{g}_\alpha$ donde Δ_+ es el sistema de raíces positivas del álgebra de Kac-Moody asociada a A, $\mathfrak{g}(A)$. Y resulta que para estas matrices

$$\{\alpha\in\Delta\,;\ |\alpha|\leq 2\}=\{\alpha_j+k\alpha_i\,;\ i,j=1,\ldots,\ell,\ i\neq j,\ 0\leq k\leq -a_{ji}\}$$

3–B ÁLGEBRAS DE LIE METABELIANAS DE RANGO MAXIMAL Y TIPO FINITO

Tenemos que calcular el álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A, donde A es una de las siguientes matrices:

$$A_\ell\ (\ell\geq 2),\quad D_\ell\ (\ell\geq 4),\quad E_6,\quad E_7,\quad E_8.$$

■ $A = A_\ell \; (\ell \geq 2)$

Tenemos que

$$A_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$$S(A_\ell) \equiv \underset{\alpha_1}{\circ} \!-\!\!-\!\!-\! \underset{\alpha_2}{\circ} \!-\!\!-\!\!-\! \underset{\alpha_3}{\circ} \cdots \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \!-\!\!-\!\!-\! \underset{\alpha_\ell}{\circ}$$

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(A_\ell) = \{\alpha \in \Delta_+ \, ; \, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(A_\ell)} \mathfrak{g}_\alpha \, ,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(A_\ell)$ son:

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i \qquad \text{para } i = 1, \dots, \ell$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] \qquad \text{para } i = 1, \dots, \ell - 1.$$

Si utilizamos la notación $E_{\ell+i} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, \dots, \ell - 1$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–B.1 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A_ℓ (para $\ell \geq 2$) salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(A_\ell)$ con productos corchete

$$[E_i, E_i + 1] = E_{\ell+i} \; \text{ para } i = 1, \dots, \ell - 1$$

respecto de la base $\{E_1, \dots, E_\ell, E_{\ell+1}, \dots, E_{2\ell-1}\}$.

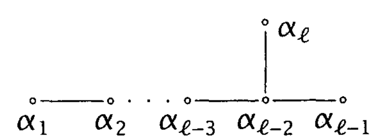
■ $A = D_\ell \ (\ell \geq 4)$

Tenemos que

$$D_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(D_\ell) \equiv$



Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(D_\ell) = \{\alpha \in \Delta_+ \, ; \, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-3} + \alpha_{\ell-2}, \alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1}, \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(D_\ell)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(D_\ell)$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 1, \ldots, \ell \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 1, \ldots, \ell - 2 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell} = \mathbb{C}[E_{\ell-2}, E_\ell] & \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{\ell+i} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, \ldots, \ell - 2$ y $E_{2\ell-1} = [E_{\ell-2}, E_\ell]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–B.2 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo D_ℓ (para $\ell \geq 4$) salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(D_\ell)$ con productos corchete

$$[E_i, E_i + 1] = E_{\ell+i} \text{ para } i = 1, \dots, \ell - 2 \text{ y } [E_{\ell-2}, E_\ell] = E_{2\ell-1}$$

respecto de la base $\{E_1, \dots, E_\ell, E_{\ell+1}, \dots, E_{2\ell-1}\}$.

■ $A = E_6$

Tenemos que

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$$S(E_6) \equiv \begin{array}{ccccccccc} & & & & \circ\, \alpha_6 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 \end{array}$$

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(E_6) = \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_6, \alpha_4 + \alpha_5\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_6)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_6)$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 1, \dots, 6 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 1, \dots, 4 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_3 + \alpha_6} = \mathbb{C}[E_3, E_6] & \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{6+i} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, 2, 3$, $E_{10} = [E_3, E_6]$ y $E_{11} = [E_4, E_5]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–B.3 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo E_6 salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_6)$ con productos corchete

$$[E_1, E_2] = E_7, \quad [E_2, E_3] = E_8, \quad [E_3, E_4] = E_9,$$
$$[E_3, E_6] = E_{10}, \quad [E_4, E_5] = E_{11}$$

respecto de la base $\{E_1, \ldots, E_{11}\}$.

■ $A = E_7$

Tenemos que

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$$S(E_7) \equiv \begin{tikzcd} & & \circ\, \alpha_7 \arrow[d, dash] & & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_2}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_3}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_4}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_5}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_6}{\circ} \end{tikzcd}$$

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(E_7) = \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \le 2\} =$$
$$= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_7, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_7)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_7)$ son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\alpha_i} &= \mathbb{C}E_i && \text{para } i = 1,\dots,7 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} &= \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] && \text{para } i = 1,\dots,5 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_3+\alpha_7} &= \mathbb{C}[E_3, E_7] \end{aligned}$$

Si utilizamos la notación $E_{7+i} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1,\dots,3$, $E_{11} = [E_3, E_7]$, $E_{12} = [E_4, E_5]$ y $E_{13} = [E_5, E_6]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–B.4 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo E_7 salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_7)$ con productos corchete

$$\begin{aligned} &[E_1, E_2] = E_8, && [E_2, E_3] = E_9, && [E_3, E_4] = E_{10}, \\ &[E_3, E_7] = E_{11}, && [E_4, E_5] = E_{12}, && [E_5, E_6] = E_{13} \end{aligned}$$

respecto de la base $\{E_1,\dots,E_{13}\}$.

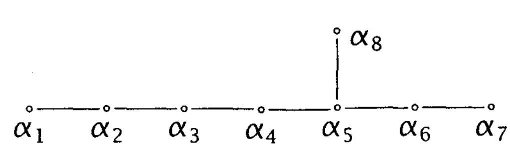
■ $A = E_8$

Tenemos que

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(E_8) \equiv$



Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(E_8) = \{\alpha \in \Delta_+ ; \ |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_5 + \alpha_8, \alpha_6 + \alpha_7\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_8)} \mathfrak{g}_\alpha ,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_8)$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 1, \ldots, 8 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 1, \ldots, 6 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_5 + \alpha_8} = \mathbb{C}[E_5, E_8] & \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{8+i} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, \ldots, 5$, $E_{14} = [E_5, E_8]$ y $E_{15} = [E_6, E_7]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–B.5 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo E_8 salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_8)$ con productos corchete

$$\begin{array}{llll} [E_1, E_2] = E_9, & [E_2, E_3] = E_{10}, & [E_3, E_4] = E_{11}, & [E_4, E_5] = E_{12}, \\ [E_5, E_6] = E_{13}, & [E_5, E_8] = E_{14}, & [E_6, E_7] = E_{15} & \end{array}$$

respecto de la base $\{E_1, \ldots, E_{15}\}$.

3–C ÁLGEBRAS DE LIE METABELIANAS DE RANGO MAXIMAL Y TIPO AFÍN

Tenemos que calcular el álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo A, donde A es una de las siguientes matrices:

$$A_\ell^{(1)} \, (\ell \geq 2), \quad D_\ell^{(1)} \, (\ell \geq 4), \quad E_6^{(1)}, \quad E_7^{(1)}, \quad E_8^{(1)}.$$

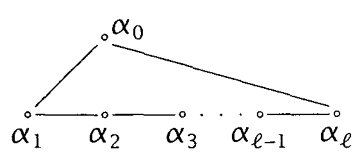
■ $A = A_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$

Tenemos que

$$A_\ell^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(A_\ell^{(1)}) \equiv$



Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(A_\ell^{(1)}) = \{\alpha \in \Delta_+ \, ; \, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell, \alpha_0 + \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_\ell, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(A_\ell^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha \, ,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(A_\ell^{(1)})$ son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\alpha_i} &= \mathbb{C}E_i && \text{para } i = 0, 1, \ldots, \ell \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} &= \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] && \text{para } i = 0, 1, \ldots, \ell - 1 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_0 + \alpha_\ell} &= \mathbb{C}[E_0, E_\ell]. \end{aligned}$$

Si utilizamos la notación $E_{\ell+1} = [E_0, E_1]$, $E_{\ell+2} = [E_0, E_\ell]$ y $E_{\ell+i+2} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, \ldots, \ell - 1$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.1 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $A_\ell^{(1)}$ (para $\ell \geq 2$) salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(A_\ell^{(1)})$ con productos corchete

$$[E_0, E_1] = E_{\ell+1}\,,\ [E_0, E_\ell] = E_{\ell+2}\,,\ [E_i, E_i + 1] = E_{\ell+i+2} \text{ para } i = 1, \ldots, \ell - 1$$

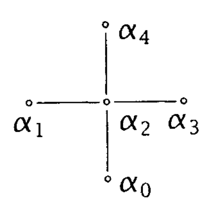
respecto de la base $\{E_0, E_1, \ldots, E_\ell, E_{\ell+1}, \ldots, E_{2\ell+1}\}$.

■ $A = D_4^{(1)}$

Tenemos que

$$D_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(D_4^{(1)}) \equiv$ 

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$\begin{aligned} R(D_4^{(1)}) &= \{\alpha \in \Delta_+ \,;\ |\alpha| \le 2\} = \\ &= \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_0 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4\} \end{aligned}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(D_4^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha\,,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(D_4^{(1)})$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 0, 1, \ldots, 4 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_2} = \mathbb{C}[E_i, E_2] & \text{para } i = 0, 1 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_i} = \mathbb{C}[E_2, E_i] & \text{para } i = 3, 4 \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_5 = [E_0, E_2]$, $E_6 = [E_1, E_2]$, $E_7 = [E_2, E_3]$ y $E_8 = [E_2, E_4]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.2 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $D_4^{(1)}$ salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(D_4^{(1)})$ con productos corchete

$$[E_0, E_2] = E_5\,, \quad [E_1, E_2] = E_6\,, \quad [E_2, E_3] = E_7\,, \quad [E_2, E_4] = E_8$$

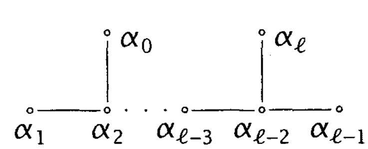
respecto de la base $\{E_0, E_1, \ldots, E_8\}$.

■ $A = D_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 5)$

Tenemos que

$$D_\ell^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(D_\ell^{(1)}) \equiv$ 

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$\begin{aligned} R(D_\ell^{(1)}) &= \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \leq 2\} = \\ &= \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell, \alpha_0 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell-3} + \alpha_{\ell-2}, \\ &\quad \alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1}, \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell\} \end{aligned}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(D_\ell^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha ,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(D_\ell^{(1)})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 0, 1, \dots, \ell \\
\mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 1, \dots, \ell - 2 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_0+\alpha_2} = \mathbb{C}[E_0, E_2] & \\
\mathfrak{g}_{\alpha_{\ell-2}+\alpha_\ell} = \mathbb{C}[E_{\ell-2}, E_\ell] &
\end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{\ell+1} = [E_0, E_2]$, $E_{\ell+i+1} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, \dots, \ell - 2$ y $E_{2\ell} = [E_{\ell-2}, E_\ell]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.3 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $D_\ell^{(1)}$ (para $\ell \geq 5$) salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(D_\ell^{(1)})$ con productos corchete

$$[E_0, E_2] = E_{\ell+1}\,,\ [E_i, E_i + 1] = E_{\ell+i+1} \text{ para } i = 1, \dots, \ell - 2 \text{ y } [E_{\ell-2}, E_\ell] = E_{2\ell}$$

respecto de la base $\{E_0, E_1, \dots, E_\ell, E_{\ell+1}, \dots, E_{2\ell}\}$.

■ $A = E_6^{(1)}$

Tenemos que

$$E_6^{(1)} = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$$S(E_6^{(1)}) \equiv \begin{tikzcd}[row sep=small] & & \circ\, \alpha_0 \arrow[d, dash] & & \\ & & \circ\, \alpha_6 \arrow[d, dash] & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_2}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_3}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_4}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{\alpha_5}{\circ} \end{tikzcd}$$

Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$\begin{aligned} R(E_6^{(1)}) &= \{\alpha \in \Delta_+ \, ; \, |\alpha| \leq 2\} = \\ &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6, \alpha_0 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_6, \alpha_4 + \alpha_5\} \end{aligned}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_6^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha ,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_6^{(1)})$ son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\alpha_i} &= \mathbb{C}E_i && \text{para } i = 0, 1, \dots, 6 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} &= \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] && \text{para } i = 1, \dots, 4 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_0 + \alpha_6} &= \mathbb{C}[E_0, E_6] && \\ \mathfrak{g}_{\alpha_3 + \alpha_6} &= \mathbb{C}[E_3, E_6]. && \end{aligned}$$

Si utilizamos la notación $E_7 = [E_0, E_6]$, $E_{6+i+1} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 1, 2, 3$, $E_{11} = [E_3, E_6]$ y $E_{12} = [E_4, E_5]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.4 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $E_6^{(1)}$ salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_6^{(1)})$ con productos corchete

$$\begin{aligned} &[E_0, E_6] = E_7 , && [E_1, E_2] = E_8 , && [E_2, E_3] = E_9 , \\ &[E_3, E_4] = E_{10} , && [E_3, E_6] = E_{11} , && [E_4, E_5] = E_{12} \end{aligned}$$

respecto de la base $\{E_0, E_1, \dots, E_{12}\}$.

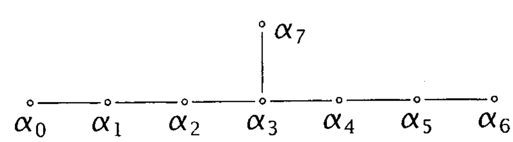
■ $A = E_7^{(1)}$

Tenemos que

$$E_7^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(E_7^{(1)}) \equiv$



Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(E_7^{(1)}) = \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_7, \alpha_0 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_7, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_7^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_7^{(1)})$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 0, 1, \dots, 7 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 0, 1, \dots, 5 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_3 + \alpha_7} = \mathbb{C}[E_3, E_7] & \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{7+i+1} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \dots, 3$, $E_{12} = [E_3, E_7]$, $E_{13} = [E_4, E_5]$ y $E_{14} = [E_5, E_6]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.5 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $E_7^{(1)}$ salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_7^{(1)})$ con productos corchete

$$[E_0, E_1] = E_8, \quad [E_1, E_2] = E_9, \quad [E_2, E_3] = E_{10}, \quad [E_3, E_4] = E_{11},$$
$$[E_3, E_7] = E_{12}, \quad [E_4, E_5] = E_{13}, \quad [E_5, E_6] = E_{14}$$

respecto de la base $\{E_0, E_1, \ldots, E_{14}\}$.

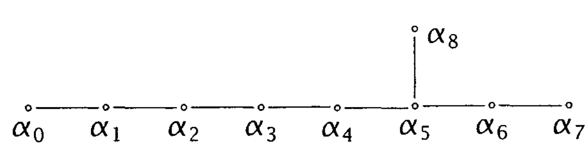
■ $A = E_8^{(1)}$

Tenemos que

$$E_8^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin es

$S(E_8^{(1)}) \equiv$



Por tanto, el sistema de raíces del álgebra de Lie que queremos construir es

$$R(E_8^{(1)}) = \{\alpha \in \Delta_+ \,;\, |\alpha| \leq 2\} =$$
$$= \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_8, \alpha_0 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\alpha_5 + \alpha_8, \alpha_6 + \alpha_7\}$$

y el álgebra de Lie es

$$\bigoplus_{\alpha \in R(E_8^{(1)})} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde los subespacios raíces asociados a las raíces de $R(E_8^{(1)})$ son:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i & \text{para } i = 0, 1, \ldots, 8 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} = \mathbb{C}[E_i, E_{i+1}] & \text{para } i = 0, 1, \ldots, 6 \\ \mathfrak{g}_{\alpha_5+\alpha_8} = \mathbb{C}[E_5, E_8] & \end{array}$$

Si utilizamos la notación $E_{8+i+1} = [E_i, E_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \ldots, 5$, $E_{15} = [E_5, E_8]$ y $E_{16} = [E_6, E_7]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3–C.6 ■ El único álgebra de Lie metabeliana de rango maximal y tipo $E_8^{(1)}$ salvo isomorfismo es el álgebra de Lie $\mathfrak{M}(E_8^{(1)})$ con productos corchete

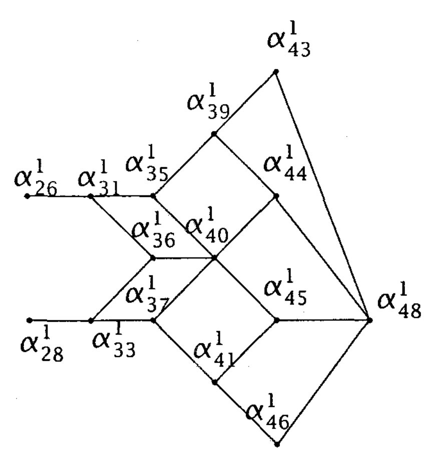
$$\begin{array}{llll} [E_0, E_1] = E_9\,, & [E_1, E_2] = E_{10}\,, & [E_2, E_3] = E_{11}\,, & [E_3, E_4] = E_{12}\,, \\ [E_4, E_5] = E_{13}\,, & [E_5, E_6] = E_{14}\,, & [E_5, E_8] = E_{15}\,, & [E_6, E_7] = E_{16} \end{array}$$

respecto de la base $\{E_0, E_1, \ldots, E_{16}\}$.

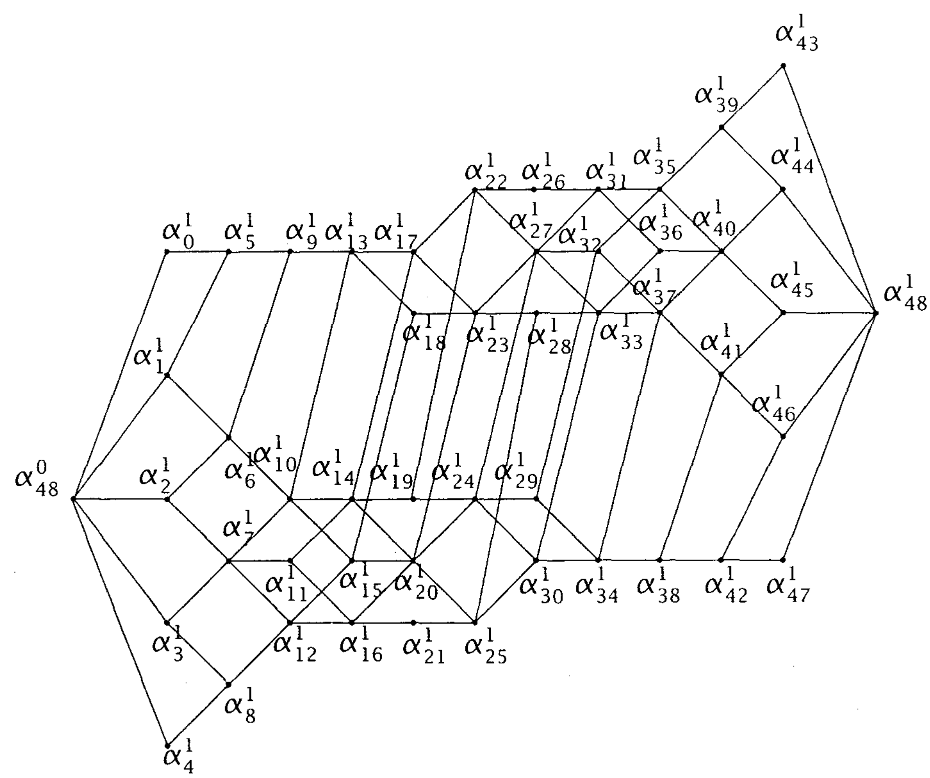
APÉNDICE A

En este apéndice damos el conjunto de ideales $I^j(\Delta_{++})$ con $j \geq 0$ para la matriz $F_4^{(1)}$.

Para $j \geq 1$ consideramos $j = 1$, pues tenemos una biyección de $I^1(\Delta_{++})$ en $I^j(\Delta_{++})$, y cada ideal de $I^1(\Delta_{++})$ se corresponde con un subgrafo de Δ_1 que verifica la propiedad de que, si un vértice está en el subgrafo, también están todas las aristas (dirigidas) que parten de este vértice. Por ejemplo, el ideal generado por α_{26}^1 y α_{28}^1, que representaremos por $\langle 26, 28\rangle$, se corresponde con el subgrafo



de Δ_1, que era el siguiente grafo:



Entonces para obtener $I^1(\Delta_{++})$, calculamos todos los subgrafos de Δ_1 que verifican la propiedad dada.

Para cada uno de los árboles que damos a continuación, tenemos que cada rama $i_1, i_2, \ldots, i_r$ que comienza en el vértice que se encuentra más a la izquierda en el árbol, representa el ideal $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle$ de $I^1(\Delta_{++})$. Así, en el primero de los árboles tenemos, por ejemplo, la rama $0, 1, 2$ que representa el ideal $\langle 0, 1, 2\rangle$.

- 0
  - 1
    - 2
      - 3 — 4
      - 4
      - 8
    - 3 — 4
    - 4
      - 7
      - 11
    - 7 — 8
    - 8 — 11
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21
  - 2
    - 3 — 4
    - 4
    - 8
  - 3
    - 4 — 6
    - 6
  - 4
    - 6
      - 7
      - 11
    - 7
    - 10 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 6
    - 7 — 8
    - 8 — 11
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21
  - 7 — 8
  - 8
    - 14 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 10
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21

- 0
  - 11
    - 12
    - 15
  - 12
    - 14
    - 19
  - 14
    - 15
      - 16
      - 21
    - 16
    - 21
  - 15
    - 16 — 19
    - 19 — 21
    - 21
  - 16 — 19
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20 — 21
  - 21
    - 24
    - 29
  - 24 — 25
  - 25 — 29
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 1
  - 2
    - 3 — 4
    - 4
    - 8
  - 3 — 4
  - 4
    - 7
    - 11
  - 7 — 8
  - 8 — 11
  - 11 — 12
  - 12
  - 16
  - 21

- 2
  - 3
    - 4 — 5
    - 5
  - 4 — 5
  - 5 — 8
  - 8

- 3
  - 4
    - 5 — 6
    - 6
    - 9
  - 5 — 6
  - 6
  - 9

- 4
  - 5
    - 6
      - 7
      - 11
    - 7
    - 10 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 6
    - 7
    - 11
  - 7 — 9
  - 9
    - 10 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 10 — 11
  - 11 — 13
  - 13
    - 14
    - 19
  - 14
  - 17 — 19
  - 19
  - 22
  - 26

- 5
  - 6
    - 7 — 8
    - 8 — 11
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21
  - 7 — 8
  - 8
    - 10 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 10
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21
  - 11
    - 12
    - 15
  - 12
    - 14
    - 19
  - 14
    - 15
      - 16
      - 21
    - 16
    - 21
  - 15
    - 16 — 19
    - 19 — 21
    - 21
  - 16 — 19
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20 — 21
  - 21
    - 24
    - 29
  - 24 — 25
  - 25 — 29
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 6
  - 7 — 8
  - 8 — 11
  - 11 — 12
  - 12
  - 16
  - 21

- 7
  - 8 — 9
  - 9

- 8
  - 9
    - 10 — 11
    - 11
    - 14
    - 19
  - 10 — 11
  - 11 — 13
  - 13
    - 14
    - 19
  - 14
  - 17 — 19
  - 19
  - 22
  - 26

- 10
  - 11 — 12
  - 12
  - 16
  - 21

- 11
  - 12 — 13
  - 13 — 15
  - 15
  - 18

- 9
  - 10
    - 11 — 12
    - 12
    - 16
    - 21
  - 11
    - 12
    - 15
  - 12
    - 14
    - 19
  - 14
    - 15
      - 16
      - 21
    - 16
    - 21
  - 15
    - 16 — 19
    - 19 — 21
    - 21
  - 16 — 19
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20 — 21
  - 21
    - 24
    - 29
  - 24 — 25
  - 25 — 29
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 12
  - 13
    - 14
    - 19
  - 14
  - 17 — 19
  - 19
  - 22
  - 26

- 13
  - 14
    - 15
      - 16
      - 21
    - 16
    - 21
  - 15
    - 16 — 19
    - 19 — 21
    - 21
  - 16 — 19
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20 — 21
  - 21
    - 24
    - 29
  - 24 — 25
  - 25 — 29
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 14
  - 15
    - 16
    - 21
  - 16 — 18
  - 18 — 21
  - 21

- 15
  - 16
    - 17 — 19
    - 19
    - 22
    - 26
  - 17
    - 19 — 21
    - 21
  - 19 — 21
  - 21
    - 22
    - 26
  - 22
  - 26

- 16
  - 17
    - 18 — 19
    - 19
  - 18
    - 19
    - 22
    - 26
  - 19
  - 22
  - 26

- 17
  - 18
    - 19
      - 20 — 21
      - 21
      - 25
    - 20 — 21
    - 21
      - 24
      - 29
    - 24 — 25
    - 25 — 29
    - 29 — 30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20 — 21
  - 21
    - 24
    - 29
  - 24 — 25
  - 25 — 29
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 18
  - 19
    - 20 — 21
    - 21
    - 25
  - 20
    - 21
      - 22
      - 26
    - 22
    - 26
  - 21
    - 22
      - 24
      - 29
    - 24 — 26
    - 26 — 29
    - 29
  - 22
    - 24 — 25
    - 25 — 29
    - 29 — 30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 24
    - 25 — 26
    - 26
  - 25
    - 26 — 29
    - 29
  - 26
    - 29 — 30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 19
  - 20—21
  - 21—23
  - 23—25
  - 25
  - 28

- 20
  - 21
    - 22
    - 26
  - 22
  - 26

- 21
  - 22
    - 23
      - 24
      - 29
    - 24
    - 29
  - 23
    - 24—26
    - 26—29
    - 29
  - 24—26
  - 26
    - 27—29
    - 29
    - 32
  - 27—29
  - 29—31
  - 31—32
  - 32
  - 35
  - 39
  - 43

- 25
  - 26
    - 27—29
    - 29
    - 32
  - 27—29
  - 29—31
  - 31—32
  - 32
  - 35
  - 39
  - 43

- 22
  - 23
    - 24—25
    - 25—29
    - 29—30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 24
    - 25
    - 28
  - 25—29
  - 28
    - 29—30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29—30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 24
  - 25—26
  - 26—28
  - 28

- 26—27
  - 28
    - 29—30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29—30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 26
  - 28
    - 29—30
    - 30—32
    - 32
      - 34
      - 38
      - 42
      - 47
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29
    - 30
    - 33
  - 30—32
  - 32
    - 33
      - 34
      - 38
      - 42
      - 47
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 33
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 34
  - 37
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
  - 41
    - 42
    - 47
  - 42
  - 46—47
  - 47

- 28
  - 29
    - 30 — 31
    - 31
  - 30
    - 31 — 32
    - 32
    - 35
    - 39
    - 43
  - 31
    - 32
      - 34
      - 38
      - 42
      - 47
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 32
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 34
    - 35
    - 39
    - 43
  - 35
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
    - 39
    - 43
  - 39
    - 42
    - 47
  - 42 — 43
  - 43 — 47
  - 47
- 29
  - 30 — 31
  - 31 — 33
  - 33
  - 36
- 34
  - 35 — 36
  - 36
    - 39
    - 43
  - 39
  - 43

- 27
  - 28
    - 29 — 30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47
- 30
  - 31 — 32
  - 32
  - 35
  - 39
  - 43
- 31
  - 32
    - 33
      - 34
      - 38
      - 42
      - 47
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 33
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 34
  - 37
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
  - 41
    - 42
    - 47
  - 42
  - 46 — 47
  - 47

- 32
  - 33
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 34 — 36
  - 36
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
  - 42
  - 47
- 33
  - 34
    - 35
    - 39
    - 43
  - 35
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
    - 39
    - 43
  - 39
    - 42
    - 47
  - 42 — 43
  - 43 — 47
  - 47
- 23
  - 24
    - 25 — 26
    - 26
  - 25
    - 26 — 29
    - 29
  - 26
    - 29 — 30
    - 30
    - 34
    - 38
    - 42
    - 47
  - 29 — 30
  - 30
  - 34
  - 38
  - 42
  - 47

- 35
  - 36
    - 37
      - 38
      - 42
      - 47
    - 38
    - 41
      - 42
      - 47
    - 42
    - 46 — 47
    - 47
  - 37
    - 38
    - 42
    - 47
  - 38
  - 41
    - 42
    - 47
  - 42
  - 46 — 47
  - 47

- 37
  - 38
    - 39
    - 43
  - 39
    - 42
    - 47
  - 42 — 43
  - 43 — 47
  - 47

- 39
  - 40
    - 41
      - 42
      - 47
    - 42
    - 46 — 47
    - 47
  - 41
    - 42
    - 47
  - 42 — 45
  - 45
    - 46 — 47
    - 47
  - 46 — 47
  - 47

- 36
  - 37
    - 38
      - 39
      - 43
    - 39
      - 42
      - 47
    - 42 — 43
    - 43 — 47
    - 47
  - 38
    - 39
    - 43
  - 39
    - 41
      - 42
      - 47
    - 42
    - 46 — 47
    - 47
  - 41
    - 42 — 43
    - 43 — 47
    - 47
  - 42 — 43
  - 43
    - 46 — 47
    - 47
  - 46 — 47
  - 47

- 38
  - 39 — 40
  - 40 — 43
  - 43 — 44
  - 44

- 40
  - 41
    - 42 — 43
    - 43 — 47
    - 47
  - 42 — 43
  - 43
    - 46 — 47
    - 47
  - 46 — 47
  - 47

- 41
  - 42
    - 43 — 44
    - 44
  - 43
    - 44 — 47
    - 47
  - 44 — 47
  - 47

- 42
  - 43
    - 44 — 45
    - 45
  - 44 — 45
  - 45

- 43
  - 44
    - 45
      - 46 — 47
      - 47
    - 46 — 47
    - 47
  - 45
    - 46 — 47
    - 47
  - 46 — 47
  - 47

- 44
  - 45
    - 46 — 47
    - 47
  - 46 — 47
  - 47

- 45
  - 46 — 47
  - 47

- 46 — 47

- 47

- 48

Para $j = 0$, como tenemos que

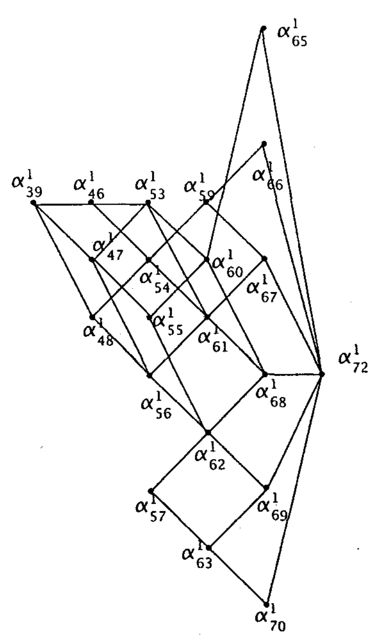
$$\Delta_{++} = \{\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{48}\} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots$$

el conjunto $\mathcal{I}^0(\Delta_{++})$ está constituido por todos los ideales de la forma $\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \rangle$, donde $\langle \alpha^1_{i_1}, \alpha^1_{i_2}, \ldots, \alpha^1_{i_r} \rangle \in \mathcal{I}^1(\Delta_{++})$, con $i_k \notin \{0, 1, \ldots, 8, 11\}$ para $k = 1, 2, \ldots, r$.

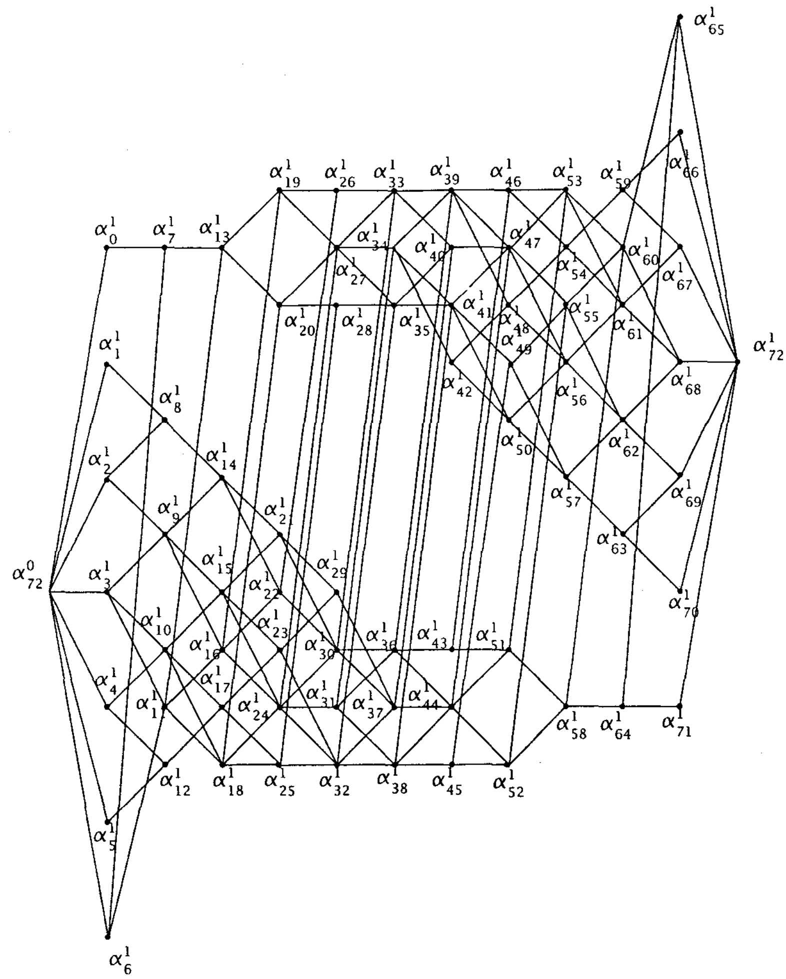
APÉNDICE B

En este apéndice damos el conjunto de ideales J^j con $j \geq 0$, que obtenemos al tomar un representante de cada G-órbita de $I^j(\Delta_{++})/G$ para la matriz $E_6^{(1)}$.

Para $j \geq 1$ consideramos $j = 1$, pues tenemos una biyección de $I^1(\Delta_{++})/G$ en $I^j(\Delta_{++})/G$, y cada ideal de $I^1(\Delta_{++})$ se corresponde con un subgrafo de Δ_1 que verifica la propiedad de que, si un vértice está en el subgrafo, también están todas las aristas (dirigidas) que parten de este vértice. Por ejemplo, el ideal generado por α_{39}^1 y α_{57}^1, que representaremos por $\langle 39, 57\rangle$, se corresponde con el subgrafo



de Δ_1, que era el siguiente grafo:



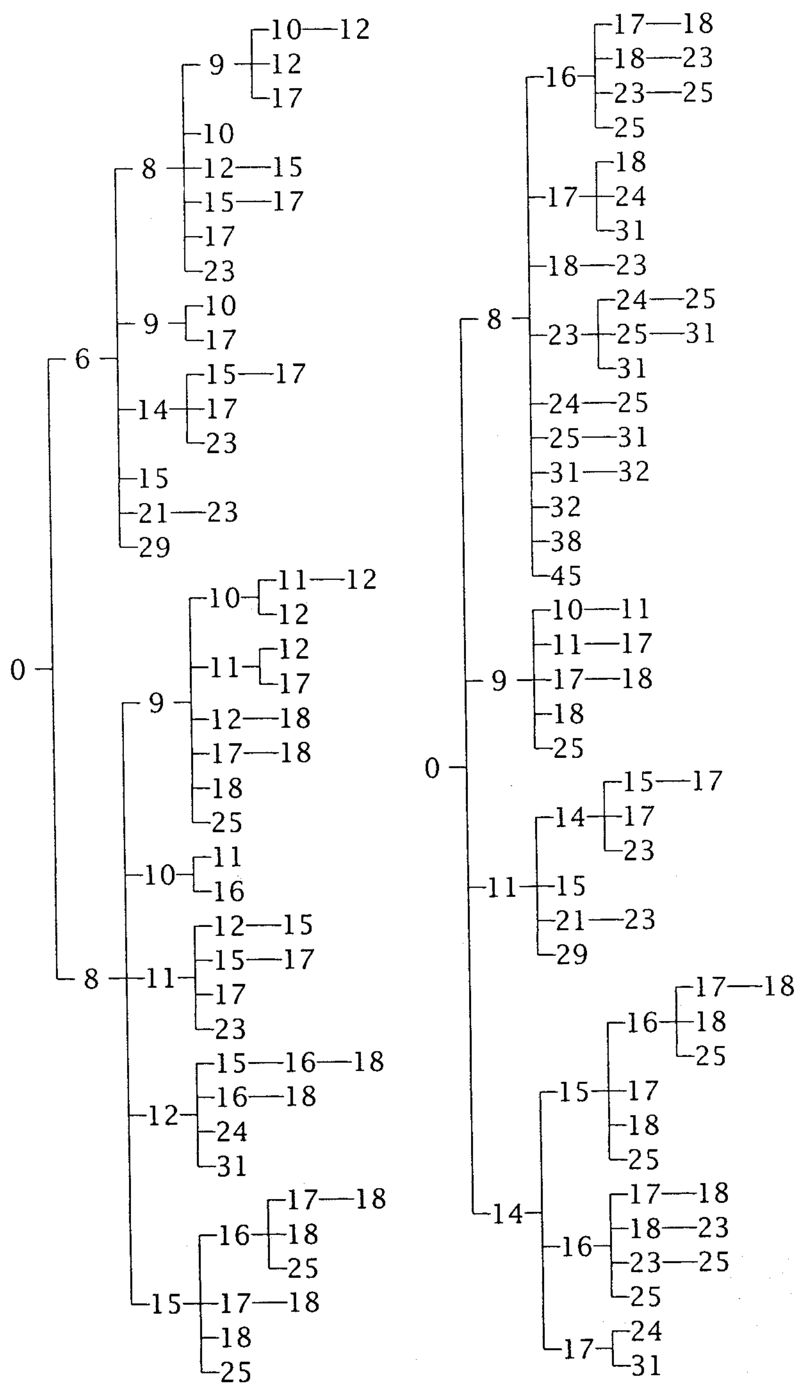
A la misma G-órbita que el ideal $\langle 39, 57\rangle$ también pertenecen los ideales $\langle 39, 58\rangle$, $\langle 41, 54\rangle$, $\langle 41, 58\rangle$, $\langle 44, 54\rangle$ y $\langle 44, 57\rangle$. Sólo tomamos un ideal de cada G-órbita, en la G-órbita constituida por estos 6 ideales consideramos, por ejemplo, el ideal $\langle 39, 57\rangle$.

Entonces para obtener J^1, calculamos todos los subgrafos de Δ_1 que verifican la propiedad dada salvo la acción de G.

Para cada uno de los árboles que damos a continuación, tenemos que cada rama $i_1, i_2, \ldots, i_r$ que comienza en el vértice que se encuentra más a la izquierda en el árbol, representa el ideal $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle$ de J^1.

- 0 — 1
  - 2
    - 3
      - 4
        - 5 — 6
        - 6
      - 5
      - 6 — 12
      - 12
    - 4
      - 5
        - 6
        - 11
      - 6
      - 11
    - 5
      - 10 — 11
      - 18
    - 6
      - 10 — 12
      - 12
      - 17
    - 10
      - 11 — 12
      - 12
    - 11
      - 12
      - 17
    - 12 — 18
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 3
    - 4
    - 5
    - 12
  - 4
    - 9 — 11
    - 16
  - 5
    - 9
      - 10 — 11
      - 18
    - 15 — 16 — 18
    - 24
    - 31
  - 9
    - 10
      - 11 — 12
      - 12
    - 11
      - 12
      - 17
    - 12 — 18
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 10
    - 12 — 16
    - 16

- 0
  - 1
    - 12
      - 15
        - 16 — 18
        - 18
      - 16
      - 24
      - 31
    - 15
      - 16
        - 17 — 18
        - 18
        - 25
      - 17 — 18
      - 18
      - 25
    - 16
      - 17
      - 23 — 25
    - 17
      - 24
      - 31
    - 23
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31
    - 24
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 2
    - 3
      - 4 — 6
      - 6 — 12
      - 12
    - 4
      - 6
      - 11
    - 6
      - 10 — 12
      - 12
      - 17
    - 10
      - 11 — 12
      - 12
    - 11
      - 12
      - 17
    - 12 — 18
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 3
    - 6 — 8 — 12
    - 8 — 12



- 0
  - 14
    - 18 — 23
    - 23
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31
    - 24 — 25
    - 25 — 31
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 15
    - 16
      - 18
      - 25
    - 22 — 25
  - 16
    - 18
      - 21 — 23
      - 29
    - 21
      - 23 — 25
      - 25
    - 23 — 25
    - 25 — 29
    - 29
  - 21
    - 22
      - 23
        - 24 — 25
        - 25 — 31
        - 31
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 23
      - 24
      - 31
    - 24 — 25
    - 25 — 31
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45

- 0
  - 22
    - 24
      - 25 — 29
      - 29
    - 25
      - 29 — 31
      - 31
    - 29
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 24 — 29
  - 29
    - 30
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31
    - 36
      - 38
      - 45
    - 43 — 45
  - 30
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31 — 37
  - 36
    - 37
      - 38
      - 45
    - 38
    - 45
  - 37 — 43 — 45
  - 43
    - 44 — 45
    - 45
    - 52
  - 44
  - 51 — 52
  - 58
  - 64
  - 71

- 7
  - 8
    - 9
      - 10
        - 11 — 12
        - 12
      - 11 — 17
      - 12 — 18
      - 17 — 18
      - 18
      - 25
    - 10 — 16
    - 12
      - 15 — 16 — 18
      - 24
      - 31
    - 15
      - 16
        - 17 — 18
        - 18
        - 25
      - 17 — 18
      - 18
      - 25
    - 16
      - 17
      - 23 — 25
    - 17
      - 24
      - 31
    - 23
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31
    - 24
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 9
    - 10 — 11
    - 11 — 17
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 11
    - 14
      - 15 — 17
      - 17
      - 23
    - 15
    - 21 — 23
    - 29
  - 14 — 15 — 16
    - 17 — 18
    - 18
    - 25

- 7
  - 14
    - 15
      - 17
      - 18
      - 25
    - 16
      - 17 — 18
      - 18 — 23
      - 23 — 25
      - 25
    - 17
      - 24
      - 31
    - 18 — 23
    - 23
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31
    - 24 — 25
    - 25 — 31
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 15
    - 16
      - 18
      - 25
    - 22 — 25
  - 16
    - 18
      - 21 — 23
      - 29
    - 21
      - 23 — 25
      - 25
    - 23 — 25
    - 25 — 29
    - 29
  - 21
    - 22
      - 23
        - 24 — 25
        - 25 — 31
        - 31
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 23
      - 24
      - 31
    - 24 — 25
    - 25 — 31
    - 31 — 32

- 7
  - 21
    - 32
    - 38
    - 45
  - 22
    - 24
      - 25 — 29
      - 29
    - 25
      - 29 — 31
      - 31
    - 29
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 24 — 29
  - 29
    - 30
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31
    - 36
      - 38
      - 45
    - 43 — 45
  - 30
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31 — 37
  - 36
    - 37
      - 38
      - 45
    - 38
    - 45
  - 37 — 43 — 45
  - 43
    - 44 — 45
    - 45
    - 52
  - 44
  - 51 — 52
  - 58
  - 64
  - 71

- 2
  - 3
    - 4
      - 6
      - 7
    - 7 — 12
  - 4
    - 6
    - 7 — 11
    - 11
    - 13
  - 7
    - 10
      - 11 — 12
      - 12
    - 11 — 17
    - 12 — 18
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 10
    - 11
    - 13
  - 13
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 18
  - 20 — 25
  - 28

3 — 7 — 8 — 12

- 9
  - 10
    - 11
    - 13
  - 13
    - 17 — 18
    - 18
    - 25
  - 18
  - 20 — 25
  - 28

- 13
  - 14
    - 15
      - 16
        - 17 — 18
        - 18
        - 25
      - 17
      - 18
      - 25
    - 16 — 23 — 25
    - 17
      - 24
      - 31
    - 23
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31
    - 24
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 15
    - 16
      - 18
      - 25
    - 22 — 25
  - 16
    - 18
      - 21 — 23
      - 29
    - 21
      - 23 — 25
      - 25
    - 23 — 25
    - 25 — 29
    - 29
  - 21
    - 22
      - 23
        - 24 — 25
        - 25 — 31
        - 31
      - 24 — 25
      - 25 — 31
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 23
      - 24
      - 31
    - 24 — 25
    - 25 — 31
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45

- 13
  - 22
    - 24
      - 25 — 29
      - 29
    - 25
      - 29 — 31
      - 31
    - 29
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 24 — 29
  - 29
    - 30
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31
    - 36
      - 38
      - 45
    - 43 — 45
  - 30
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31 — 37
  - 36
    - 37
      - 38
      - 45
    - 38
    - 45
  - 37 — 43 — 45
  - 43
    - 44 — 45
    - 45
    - 52
  - 44
  - 51 — 52
  - 58
  - 64
  - 71

- 19—20
  - 21
    - 22
      - 23
        - 24—25
        - 25—31
        - 31
      - 24
      - 31—32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 23
      - 24
      - 31
    - 24—25
    - 25—31
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 22
    - 24
      - 25—29
      - 29
    - 25
      - 29—31
      - 31
    - 29
      - 31—32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 24—29
  - 29
    - 30
      - 31—32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31
    - 36
      - 38
      - 45
    - 43—45
  - 30
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31—37

- 19
  - 20
    - 36
      - 37
        - 38
        - 45
      - 38
      - 45
    - 37—43—45
    - 43
      - 44—45
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51—52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 21
    - 23
      - 24—28
      - 28—31
      - 31
    - 24
      - 25
      - 28
    - 25—31
    - 28
      - 31—32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 22
    - 24—28—29
    - 28
      - 29
        - 31—32
        - 32
        - 38
        - 45
      - 31—32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45

- 19
  - 23
    - 24 — 28
    - 28
      - 30 — 31
      - 31
      - 36
      - 43
    - 30 — 31
    - 31
    - 36
    - 43
  - 24
    - 28 — 29
    - 29
  - 28
    - 29
      - 30
        - 31 — 32
        - 32
        - 38
        - 45
      - 31 — 32
      - 32
        - 36
        - 43
      - 36
        - 38
        - 45
      - 38 — 43
      - 43 — 45
      - 45
    - 30
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31
      - 32
      - 37
    - 32
      - 36
      - 43
    - 36
      - 37
        - 38
        - 45
      - 38
      - 45
    - 37
      - 38 — 43
      - 43 — 45
      - 45
    - 38 — 43
    - 43
      - 44 — 45
      - 45
      - 52
    - 44 — 45

- 19
  - 28
    - 45 — 51
    - 51 — 52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 29
    - 30
      - 31 — 32
      - 32
      - 38
      - 45
    - 31 — 32
    - 32
      - 36
      - 43
    - 36
      - 38
      - 45
    - 38 — 43
    - 43 — 45
    - 45
  - 30
    - 31 — 32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31
    - 32
    - 37
  - 32
    - 36
    - 43
  - 36
    - 37
      - 38
      - 45
    - 38
    - 45
  - 37
    - 38 — 43
    - 43 — 45
    - 45
  - 38 — 43
  - 43
    - 44 — 45
    - 45
    - 52
  - 44 — 45
  - 45 — 51
  - 51 — 52
  - 58
  - 64
  - 71

```
26──27
    ├──28
    │   ├──29
    │   │   ├──30
    │   │   │   ├──31──32
    │   │   │   ├──32
    │   │   │   ├──38
    │   │   │   └──45
    │   │   ├──31
    │   │   ├──36
    │   │   │   ├──38
    │   │   │   └──45
    │   │   └──43──45
    │   ├──30
    │   │   ├──31──32
    │   │   ├──32
    │   │   ├──38
    │   │   └──45
    │   ├──31──37
    │   ├──36
    │   │   ├──37
    │   │   │   ├──38
    │   │   │   └──45
    │   │   ├──38
    │   │   └──45
    │   ├──37──43──45
    │   ├──43
    │   │   ├──44──45
    │   │   ├──45
    │   │   └──52
    │   ├──44
    │   ├──51──52
    │   ├──58
    │   ├──64
    │   └──71
    ├──29
    │   ├──31──32
    │   ├──32
    │   │   ├──36
    │   │   └──43
    │   ├──36
    │   │   ├──38
    │   │   └──45
    │   ├──38──43
    │   ├──43──45
    │   └──45
    ├──30
    │   ├──31──32
    │   ├──32
    │   ├──38
    │   └──45
    ├──31
    │   ├──32
    │   └──37
    ├──32
    │   ├──36
    │   └──43
    └──36──37
            ├──38
            └──45
```

```
26
├──27
│   ├──36
│   │   ├──38
│   │   └──45
│   ├──37
│   │   ├──38──43
│   │   ├──43──45
│   │   └──45
│   ├──38──43
│   ├──43
│   │   ├──44──45
│   │   ├──45
│   │   └──52
│   ├──44──45
│   ├──45──51
│   ├──51──52
│   ├──52
│   ├──58
│   ├──64
│   └──71
└──28
    ├──29
    │   ├──31
    │   ├──34
    │   │   ├──36
    │   │   │   ├──38
    │   │   │   └──45
    │   │   └──43──45
    │   └──42──43──45
    ├──31──37
    ├──34
    │   ├──36
    │   │   ├──37
    │   │   │   ├──38
    │   │   │   └──45
    │   │   ├──38
    │   │   └──45
    │   ├──37──43──45
    │   ├──43
    │   │   ├──44──45
    │   │   ├──45
    │   │   └──52
    │   ├──44
    │   ├──51──52
    │   ├──58
    │   ├──64
    │   └──71
    └──36
        ├──37
        │   ├──38──42
        │   ├──42──45
        │   └──45
        ├──38──42
        ├──42──45
        └──45
```

- 26
  - 28
    - 37
      - 42 — 43 — 45
      - 43 — 45
    - 42
      - 43
        - 44 — 45
        - 45
        - 52
      - 44
      - 51 — 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 44 — 45
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51 — 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 31
    - 32
    - 35 — 37
  - 32
    - 34
      - 36
      - 43
    - 42 — 43
  - 34
    - 35
      - 36
        - 37
          - 38
          - 45
        - 38
        - 45
      - 37
        - 38 — 43
        - 43 — 45
        - 45
      - 38 — 43
      - 43
        - 44 — 45
        - 45
        - 52
      - 44 — 45
      - 45 — 51
      - 51 — 52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 36
      - 38
      - 45

- 26
  - 34
    - 37
      - 38 — 43
      - 43 — 45
      - 45
    - 38 — 43
    - 43
      - 44 — 45
      - 45
      - 52
    - 44 — 45
    - 45 — 51
    - 51 — 52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 35
    - 37
      - 38 — 42 — 43
      - 42
        - 43 — 45
        - 45
      - 45
    - 38
      - 42 — 43
      - 43
    - 42
      - 43
        - 44 — 45
        - 45
        - 52
      - 44 — 45
      - 45 — 51
      - 51 — 52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 44 — 45
      - 45
      - 52
    - 44 — 45
    - 45 — 51
    - 51 — 52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71

- 26
  - 38—42—43
  - 41
    - 42
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44—45
      - 45—51
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 45
      - 52
    - 44—45
    - 45—51
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 42
    - 43
      - 45
      - 49—52
    - 45—51
    - 49
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 45—50—51

- 26
  - 49
    - 50
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 50
    - 51
    - 58
    - 64
    - 71
  - 57
    - 58
    - 64
    - 71
  - 63
    - 64
    - 71
  - 70—71

- 33
  - 34
    - 35
      - 36
        - 37
          - 38
          - 45
        - 38
        - 45
      - 37—43—45
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44
      - 51—52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 36
      - 38
      - 45
    - 37
      - 38—43
      - 43—45
      - 45
    - 38—43
    - 43
      - 44—45
      - 45
      - 52
    - 44—45
    - 45—51
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 35
    - 37—42—43—45
    - 42
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44
      - 51—52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 44—45
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51—52

- 33
  - 35
    - 58
    - 64
    - 71
  - 38—42—43
  - 41
    - 42
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44—45
      - 45—51
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 45
      - 52
    - 44—45
    - 45—51
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 42
    - 43
      - 45
      - 49—52
    - 45—51
    - 49
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 45—50—51

- 33
  - 49
    - 50
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 50
    - 51
    - 58
    - 64
    - 71
  - 57
    - 58
    - 64
    - 71
  - 63
    - 64
    - 71
  - 70—71

- 34
  - 36
    - 38—40
    - 40—45
    - 45
  - 40
    - 43
      - 44—45
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51—52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 43
    - 44—45
    - 45
    - 52
  - 44
  - 51—52
  - 58
  - 64
  - 71

- 15
  - 16
    - 18
    - 20—25
    - 28
  - 19
    - 20—22—25
    - 22
      - 25
      - 28
    - 25
    - 28
  - 22
    - 25
    - 28
  - 26—28

- 24—26—28—29

- 27
  - 30
    - 31—32
    - 32
    - 38
    - 45
  - 31—37
  - 36
    - 37
      - 38
      - 45
    - 38
    - 45
  - 37—43—45
  - 43
    - 44—45
    - 45
    - 52
  - 44
  - 51—52
  - 58
  - 64
  - 71

- 31
  - 33—35—37
  - 40

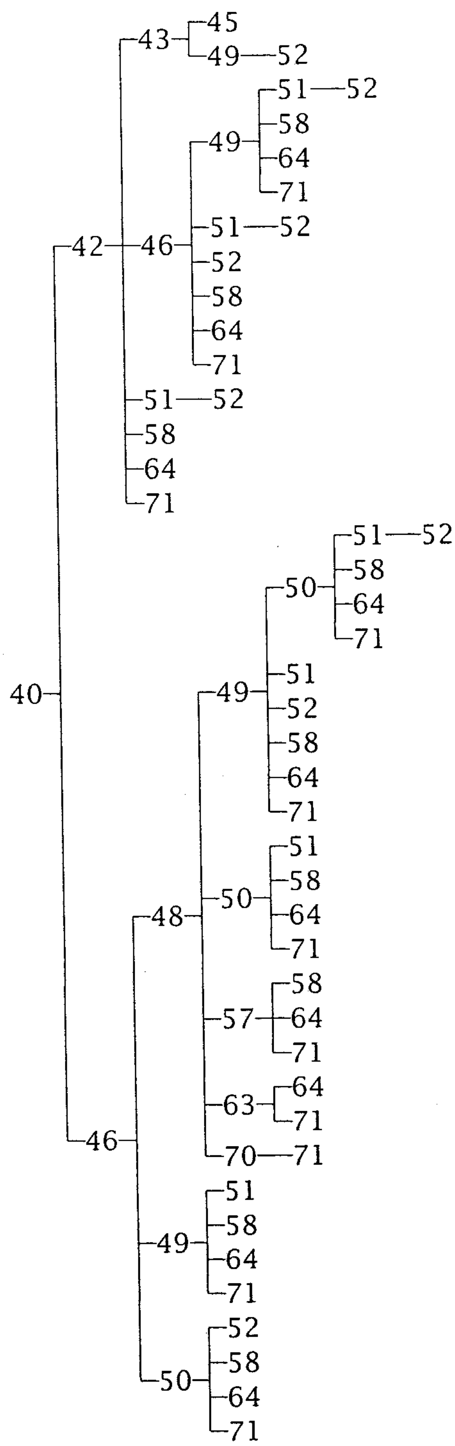
- 39—40
  - 41
    - 42
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44
      - 51—52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51—52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 42
    - 43
      - 45
      - 49—52
    - 45—51
    - 49
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 45—50—51
  - 49
    - 50
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 50
    - 51
    - 58
    - 64
    - 71

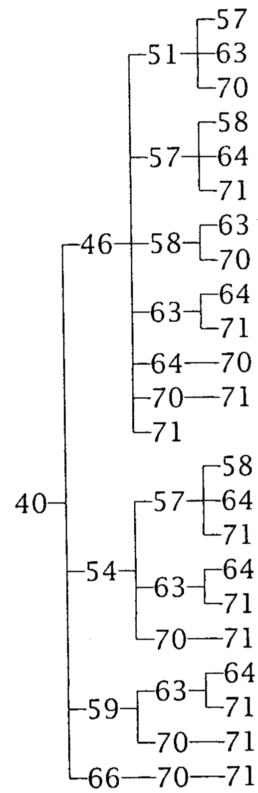
- 39
  - 40
    - 57
      - 58
      - 64
      - 71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 70—71
  - 41
    - 42
      - 43
        - 44—45
        - 45
        - 52
      - 44
      - 51—52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 43
      - 45
      - 52
    - 44
    - 51—52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 42
    - 43
      - 45
      - 49—52
    - 45—51
    - 49
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51—52
    - 52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 45—50—51
  - 49
    - 50
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
    - 52
    - 58

- 39
  - 49
    - 64
    - 71
  - 50
    - 51
    - 58
    - 64
    - 71
  - 57
    - 58
    - 64
    - 71
  - 63
    - 64
    - 71
  - 70—71

- 47
  - 54
    - 57
      - 58
      - 64
      - 71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 70—71
  - 59
    - 63
      - 64
      - 71
    - 70—71
  - 66—70—71

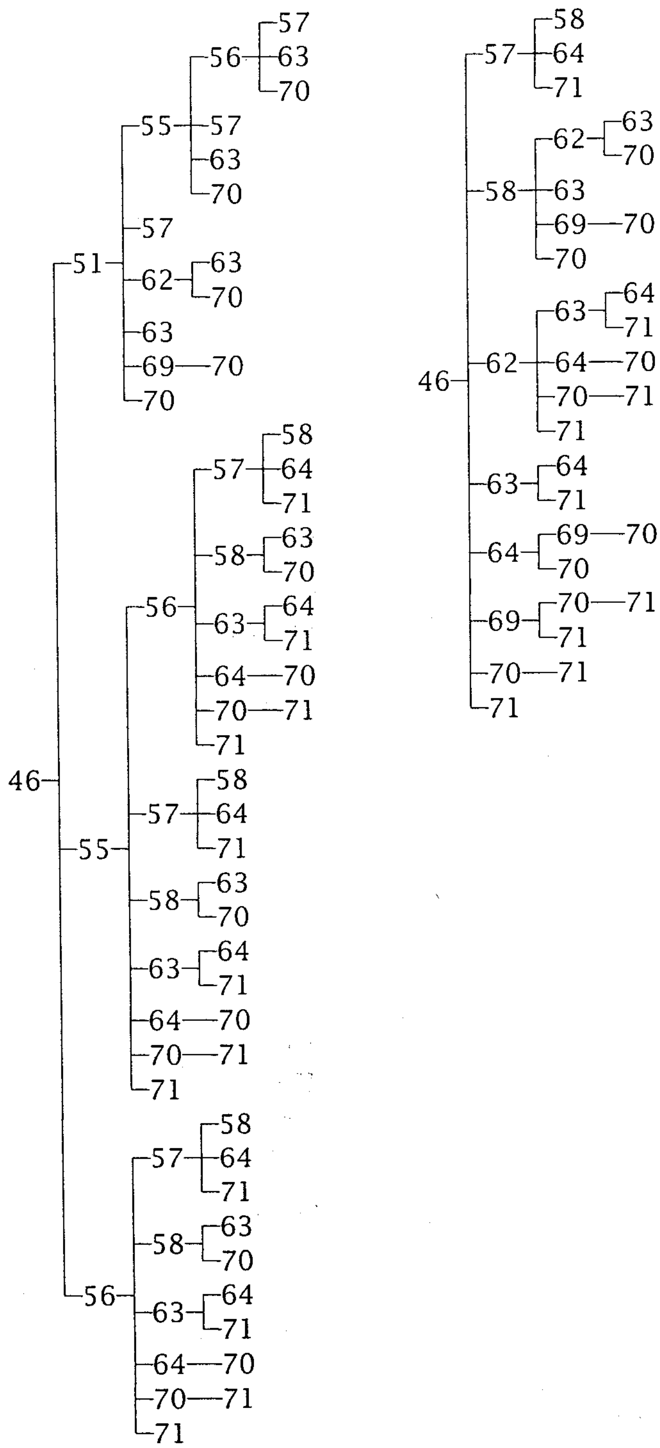
- 42
  - 43
    - 45—47
    - 47—49—52
    - 49—52
    - 55
  - 46
    - 47
      - 49
        - 51—52
        - 58
        - 64
        - 71
      - 51—52
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 49
      - 51—52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
      - 52
      - 55
    - 52
    - 55
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
    - 64
    - 71
  - 47
    - 51—52
    - 58
    - 64
    - 71
  - 51
    - 52
    - 55
  - 53
    - 55
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
    - 64
    - 71
  - 58
  - 60
    - 64
    - 71
  - 64
  - 65—71
  - 71


45
43 49 52
51 52
58
49
64
71
51 52
42 46
52
58
64
71
51 52
58
64
71
51 52
58
50
64
71
51
40 49
52
58
64
71
51
58
50
64
48
71
58
57 64
71
64
63
71
46
70 71
51
58
49
64
71
52
58
50
64
71


57
51 63
70
58
57 64
71
63
46 58
70
64
63
71
64 70
70 71
71
58
57 64
40
71
64
54
63
71
70 71
64
59 63
71
70 71
66 70 71

- 46
  - 47
    - 48
      - 49
        - 50
          - 51
            - 52
          - 58
          - 64
          - 71
        - 51
        - 52
        - 58
        - 64
        - 71
      - 50
        - 51
        - 58
        - 64
        - 71
      - 57
        - 58
        - 64
        - 71
      - 63
        - 64
        - 71
      - 70
        - 71
    - 49
      - 51
      - 58
      - 64
      - 71
    - 50
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 51
      - 57
      - 63
      - 70
    - 57
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
      - 63
      - 70
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64
      - 70
    - 70
      - 71
    - 71

- 46
  - 48
    - 49
      - 50
        - 51
          - 52
        - 58
        - 64
        - 71
      - 51
      - 52
      - 58
      - 64
      - 71
    - 50
      - 51
        - 55
      - 55
        - 58
        - 64
        - 71
      - 58
      - 64
      - 71
    - 55
      - 57
        - 58
        - 64
        - 71
      - 63
        - 64
        - 71
      - 70
        - 71
    - 57
      - 58
      - 64
      - 71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 70
      - 71
  - 49
    - 51
      - 56
    - 56
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
    - 64
    - 71
  - 50
    - 52
    - 55
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
    - 64
    - 71


57
56 63
70
55 57
63
70
57
51 63
62
70
63
69 70
70
58
57 64
71
58 63
70
56 64
63
71
64 70
70 71
71
46 58
57 64
71
55
58 63
70
63 64
71
64 70
70 71
71
58
57 64
71
58 63
70
56 64
63
71
64 70
70 71
71
58
57 64
71
62 63
70
58 63
69 70
70
63 64
71
46 62 64 70
70 71
71
63 64
71
64 69 70
70
69 70 71
71
70 71
71

- 53—54
  - 55
    - 56
      - 57
        - 58
        - 64
        - 71
      - 63
        - 64
        - 71
      - 70—71
    - 57
      - 58
      - 64
      - 71
    - 58
      - 63
      - 70
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64—70
    - 70—71
    - 71
  - 56
    - 63
      - 64
      - 71
    - 70—71
  - 57
    - 58
    - 64
    - 71
  - 58
    - 62
      - 63
      - 70
    - 63
    - 69—70
    - 70
  - 62
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64—70
    - 70—71
    - 71
  - 63
    - 64
    - 71
  - 64
    - 69—70
    - 70
  - 69
    - 70—71
    - 71
  - 70—71
  - 71

- 53
  - 55
    - 56
      - 59
        - 63
          - 64
          - 71
        - 70—71
      - 66—70—71
    - 59
      - 63
        - 64
        - 71
      - 64—70
      - 70—71
      - 71
    - 64—66—70
    - 66
      - 70—71
      - 71
    - 71
  - 57
    - 59
      - 64
      - 71
    - 66—71
  - 59
    - 62
      - 63
        - 64
        - 71
      - 64—70
      - 70—71
      - 71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64
      - 69—70
      - 70
    - 69
      - 70—71
      - 71
    - 70—71
    - 71
  - 62
    - 63—66—71
    - 66
      - 70—71
      - 71
    - 70
  - 63—66—71
  - 66
    - 69
      - 70—71
      - 71
    - 70—71
    - 71
  - 69—70
  - 70

- 54
  - 57
    - 58
    - 60
      - 64
      - 71
    - 64
    - 65—71
    - 71
  - 60
    - 62
      - 63
        - 64
        - 71
      - 70—71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64
      - 69—70
      - 70
    - 69
      - 70—71
      - 71
    - 70—71
    - 71
  - 63
    - 64
    - 65—71
    - 71
  - 65
    - 69—70—71
    - 70—71
    - 71
  - 70—71

- 59
  - 60
    - 61
      - 62
        - 63
          - 64
          - 71
        - 70—71
      - 63
        - 64
        - 71
      - 64
        - 69—70
        - 70
      - 69
        - 70—71
        - 71
      - 70—71
      - 71
    - 62—70—71
    - 63
      - 64
      - 71
    - 64
      - 69—70
      - 70
    - 69
      - 70—71
      - 71
    - 70—71
    - 71
  - 61
    - 65
      - 69—70—71
      - 70—71
      - 71
    - 70—71
  - 63
    - 64—68
    - 65
      - 68—71
      - 71
    - 68—71
    - 71
  - 65
    - 68
      - 69—70—71
      - 70—71
      - 71
    - 69—70—71
    - 70—71
    - 71
  - 68—70—71
  - 70—71

```
       ┌62──66──70──71
       │          ┌70──71
       │      ┌69─┤
       │      │   └71
   ┌61─┼66────┼70──71
   │   │      └71
   │   ├69──70
   │   └70
   │              ┌70──71
   │          ┌69─┤
   │          │   └71
   │      ┌67─┼70──71
   │      │   └71
60─┼66────┼69──71
   │      ├70──71
   │      └71
   ├67─┬69──71
   │   └71
   └71

                  ┌69──70──71
              ┌68─┼70──71
              │   └71
          ┌67─┼69──70──71
          │   ├70──71
          │   └71
          │   ┌69
   ┌66────┼68─┼70──71
   │      │   └71
   │      ├69
   │      ├70──71
   │      └71
65─┼67─┬68──69
   │   └69
   ├68──71
   └71

66─┬68──70──71
   └70──71

68

72
```

Para $j = 0$, como tenemos que

$$\Delta_{++} = \{\alpha_{13}, \ldots, \alpha_{72}\} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots$$

el conjunto $\mathcal{J}^0$ estará constituido por todos los ideales de la forma $\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \rangle$, donde $\langle \alpha^1_{i_1}, \alpha^1_{i_2}, \ldots, \alpha^1_{i_r} \rangle \in \mathcal{J}^1$, con $i_k \notin \{0, 1, \ldots, 12\}$ para $k = 1, 2, \ldots, r$.

BIBLIOGRAFÍA

MONOGRAFÍAS REFERENCIADAS EN ESTA MEMORIA

[1] X. Agrafiotou, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of Kac-Moody type: $D_4^{(1)}$, Accepted for publication in *Comm. Algebra.*

[2] X. Agrafiotou, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of Kac-Moody type: $D_5^{(1)}$, Personal Manuscript.

[3] X. Agrafiotou and G. Tsagas, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of type E_6, E_7 and E_8, Accepted for publication in *J. Pure Appl. Algebra.*

[4] J.M. Ancochéa-Bermúdez et M. Goze, Classificatiòn des algèbres de Lie filiformes de dimension 8, *Archiv. Math. (Basel)* 50 (1988), nº 6, 511-525.

[5] J.M. Ancochéa-Bermúdez et M. Goze, Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, *Archiv. Math. (Basel)* 52 (1989), nº 2, 175-185.

[6] J.M. Ancochéa-Bermúdez and M. Goze, On the varietes of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8, *J. Pure Appl. Algebra* 77 (1992), nº 2, 131-140.

[7] J.C. Benjumea, F.J. Castro, M.C. Márquez and J. Núñez, The equations of the sets of filiform Lie algebras of dimension 13 and 14, *Actas del 2º Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones (EA-CA)* (1996), 67-75.

[8] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie.* Chap. 1, Hermann, Paris, 1960.

[9] L. Boza, F.J. Echarte and J. Núñez, Classification of Complex Filiform Lie Algebras of Dimension 10, *Algebras Groups Geom.* 11 (1994), nº 3, 253-276.

[10] L. Boza, E. M. Fedriani and J. Núñez, Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 12, Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (sección Álgebra, Computación, Geometría y Topología), nº 38, Sevilla, 1997.

[11] L. Boza, E. M. Fedriani and J. Núñez, A new method for classifying complex filiform Lie algebras, Accepted for publication in *Appl. Math. Comput.*.

[12] F. Bratzlavsky, Sur les algèbres admettant un tore d'automorphismes donnè, *J. Algebra* 30 (1974), 305-316.

[13] B. Buchberger, Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory, in multidimensional systems theory, N.K.Bose ed., Reidel Publishing Company 1985, 184-232.

[14] R. Carles, Sur les algebres de Lie caractéristiquement nilpotentes, *Prépublication* Université de Poitiers, 1984.

[15] F.J. Castro and J. Núñez, On caracteristically nilpotent filiform Lie algebras of dimension 9, *Comm. Algebra* 23 (1995), nº 8, 3059-3071.

[16] F.J. Castro and J. Núñez, Gröbner basis in the classification of characteristically nilpotent filiform Lie algebras of dimension 10, *Progr. Math.* 143 (1996), 115-133.

[17] C. Chevalley, Unpublished work, quoted by J. Dixmier in [19].

[18] Chong-yun Chao, Uncountably many non isomorphics nilpotent Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962), 903-906.

[19] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes II, *Bull. Soc. Math. France* 85 (1957), 325-388.

[20] J. Dixmier and W.G. Lister, Derivations of nilpotent Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957), 155-158.

[21] F.J. Echarte and J.R. Gómez, Clasification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9, *Rendiconti Seminario Facolta di Scienze della Universita di Cagliari* 61 (1991), nº 1, 21-29.

[22] F.J. Echarte, J.R. Gómez et J. Núñez, Les algèbres de Lie filiformes complexes derivées d'autres algèbres de Lie, *Collection Travaux en Cours* 50 (1996), 44-55.

[23] F. J. Echarte, M.C. Márquez and J. Núñez, General cases of c-graded complex filiform Lie algebras. Manuscrito personal.

[24] F. J. Echarte, M.C. Márquez and J. Núñez, c-graded complex filiform Lie algebras. Manuscrito personal.

[25] F.J. Echarte, J. Núñez and F. Ramírez, Study of two invariants in complex filiform Lie algebras, *Algebras Groups Geom.* 13 (1996), nº 1, 55-70.

[26] G. Favre, Système de poids sur une algèbre de Lie nilpotente, *Manuscripta Math.* 9 (1973), 53-90.

[27] G. Favre and L. J. Santharoubane, Nilpotent Lie algebras of classical simple type, *J. Algebra* 202 (1998), nº 2, 589-610.

[28] G Favre and G. Tsagas, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of type F_4, Personal Manuscript.

[29] M. A. Gauger, On the classification of metabelian Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 179 (1973), 293-329.

[30] C. Godfrey, Tables of coadjoint orbits for nilpotent Lie algebras, Universities of Manchester and Boston. Boston Mass., 021125, U.S.A.

[31] C. Godfrey, Ideals of coadjoint orbits of nilpotent Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 233 (1977), 295-307.

[32] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov, On the Variety of Nilpotent Lie Algebra Laws of Dimension 11, *Prepublicación* 9, Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, 1996.

[33] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and J. Núñez, An Algorithm to obtain Laws Families of Filiform Lie Algebras, *Linear Algebra Appl.* 279 (1998), nº 1-3, 1-12.

[34] G. R. Gurevic, On metabelian Lie algebras, *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.* 12 (1963), 9-61.

[35] P. de la Harpe, On complex varieties of nilpotent Lie algebras, *Global Analysis and its Applications* II, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974.

[36] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras* (3rd ed), Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[37] S. Kanagavel, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of affine Kac-Moody types $A_2^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $G_2^{(1)}$. Accepted for publication in *Algebras Groups Geom.*.

[38] Y. Khakimdjanov, Variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Geom. Dedicata* 40 (1991), nº 3, 269-295.

[39] A. I. Malcev, Solvable Lie algebras, *Amer. Math. Soc. Translation* (1950), nº 27, 36 pp.

[40] R. V. Moody, Lie algebras associated with generalized Cartan matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 217-221.

[41] R. V. Moody, A new class of Lie algebras, *J. Algebra* 10 (1968), 211-230.

[42] V.V. Morozov, Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order, (Russian) *Izv. Vyschih Uchebn. Zaved. Matematika* (1958), nº

4(5), 161-171.

[43] G.D. Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*, *Amer. J. Math.* 78 (1956), 200-221.

[44] J. Reyes, Algebras de Lie casifiliformes graduadas de longitud maximal, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1998.

[45] M. Romdhani, Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7, *Linear and Multilinear Algebra* 24 (1989), nº 3, 167-189.

[46] E. N. Safiullina, Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (Russian), *Candidates' Works (1964), Math., Mech., Phys.* , 66-69. Izdat. Kazan. Univ., Kazan.

[47] L. J. Santharoubane, Kac-Moody Lie algebras and the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank, *Canad. J. Math.* 34 (1982), 1215-1239.

[48] L. J. Santharoubane, Kac-Moody Lie algebras and the universal element for the category of nilpotent Lie algebras, *Math. Ann.* 263 (1983), 365-370.

[49] C. Seeley, Some nilpotent Lie algebras of even dimensions, *Bull. Austral. Math. Soc.* 45 (1992), nº 1, 71-77.

[50] T. Skjelbred and T. Sund, On the classification of nilpotent Lie algebras, *Preprint no 8, May 3* (1977), Matematick Institutt Universitet i Oslo, Norway.

[51] K.A. Umlauf, Über die Zusammensetzung der endlichen continuierliechen transformations Gruppen, insbesondre der Gruppen vom Range Null, Inaugural-Dissertation zur Erwerbung der Doktorwürde der philosophische Fakultät der Universität Leipzig, Leipzig, Druck von Breitkopk & Härtel, 1891.

[52] M. Vergne, Sur la variété des algèbres de Lie nilpotentes, Thèse 3ª cycle, Paris, 1966.

[53] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France* 98 (1970), 81-116.

[54] G. Vranceanu, Classification des groupes de Lie de rang zéro, (Romanian) *Acad. Repub. Pop. Române. Stud. Cerc. Mat.* 1 (1950), 40-86.

MONOGRAFÍAS DE INTERÉS GENERAL

[55] D. W. Barnes, On Cartan subalgebras of Lie algebras, *Math. Z.*, 101 (1967) 350-355.

[56] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie.* Chap. 7 et 8, C.C.L.S. Paris, 1968.

[57] P. Callegari, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of type A_l, Manuscript and software available, CNRS, URA 1190, Gif/Yvette (France).

[58] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 28. John Wiley and Sons, London-New York-Sidney, 1972.

[59] C. Chevalley and S. Eilemberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948), 85-124.

[60] Y. Chow, *General Theory of Lie algebras*, Vol. 1 and 2, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1978.

[61] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes III, *Canad. J. Math.* 10 (1958), 321-348.

[62] G. Favre and L. J. Santharoubane, Nilpotent Lie algebras of type A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ, *Prépublications* Université de Paris-Sud, 1992.

[63] D. Fernández and J. Núñez, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and of Kac-Moody type: $F_4^{(1)}$, Accepted for publication in *Comm. Algebra.*

[64] D. Fernández and J. Núñez, Nilpotent Lie algebras of maximal rank and Kac-Moody type: $E_6^{(1)}$, Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (sección Geometría y Topología), nº 2, 2000.

[65] M. Goze and Y. Khakimdjanov, *Nilpotent Lie Algebras.* Mathematics and its Applications, 361. Kluwer Academic Publishers Group,

Dordrecht, 1996.

[66] J. E. Humphreys, Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups, *J. Algebra* 19 (1971), 51-79.

[67] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation theory*. Graduate texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[68] N. Jacobson, *Exceptional Lie algebras*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[69] N. Jacobson, *Lie algebras*. Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[70] V. G. Kac, Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 32 (1968), 1323-1367.

[71] A. Kobotis and G. Tsagas, Classification on special nilpotent Lie algebras of dimension eight and their invariants, *Tensor (N.S.)* 47 (1988), nº 2, 116-118.

[72] A. Kobotis and G. Tsagas, Special class of nilpotent Lie algebras, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 81 (1989), nº 4, 327-341.

[73] A. Kobotis and G. Tsagas, Characteristic elements of a category of nilpotent Lie algebras of dimension eight. *Algebras Groups Geom.* 9 (1992), nº 3, 137-256.

[74] G. Leger and E. Luks, On derivations and holomorphs of nilpotent Lie algebras, *Nagoya Math. J.* 44 (1971), 39-50.

[75] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie groups and Lie algebras, I. Foundations of Lie theory. Lie transformation groups*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 20. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[76] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg (Eds.), *Lie groups and Lie algebras, III. Structure of Lie groups and Lie algebras*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 41. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[77] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg (Eds.), *Lie groups and Lie algebras, II. Discrete subgroups of Lie groups and cohomologies of Lie groups and Lie algebras.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 21. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[78] M. K. Prisco, On the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank, *Publ. Math. Debrecen* 39 (1991), nº 3-4, 199-217.

[79] L. J. Santharoubane, Infinite families of nilpotent Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan* 35 (1983), nº 3, 515-519.

[80] L. J. Santharoubane, Nilpotent Lie algebras of affine type, Personal Manuscript.

[81] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simple complexes*, W. A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam, 1966.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Desamparados Fernández Ternero titulada Clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de rango maximal

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude unanimidad

Sevilla, 28 de Mayo 2001

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Doctorado,

El Presidente El Secretario

Desamparados Fdez