UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA Y LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

TABLAS SEMÁNTICAS PARA LÓGICA EPISTÉMICA

Dirigida por el Prof. Dr. D. Ángel Nepomuceno Fernández.

Tesis presentada para acceder al título de Doctor por D. Emilio Francisco Gómez-Caminero Parejo.

Sevilla, abril de 2011

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sobre este trabajo

El término *lógica epistémica* puede ser entendido en dos sentidos. En el sentido más amplio, incluye el análisis tanto del concepto de conocimiento como del más débil concepto de creencia. Esta es la forma en que se usa en el título de este trabajo. En un sentido más restringido, el nombre de lógica epistémica se reserva para el primero de ellos; dejando para el segundo el nombre de *lógica doxástica* (del griego $\delta\acute{o}\xi\alpha$: opinión). Cuando no quede claro por el contexto se especificará en cuál de los sentidos se estamos hablando.

El objeto principal de este trabajo es, como su título indica, presentar un método de tablas semánticas para distintos sistemas de lógica epistémica. Con todo, no podía ser de otra manera, no nos hemos limitado exclusivamente al método de tablas: es imposible hacerlo sin discutir previamente los supuestos teóricos en que se basa. De todos los sistemas que analizamos hacemos tanto una presentación semántica como axiomática; y demostramos la corrección y completud de los correspondientes sistemas. Una excepción a esto último lo constituye capítulo dedicado a lógica epistémica temporal. En este caso, el número de sistemas posibles es tan elevado, y tan grande la complejidad de tratar con ellos, que hemos optado por presentar brevemente los resultados conocidos sobre el tema y elaborar el método de tablas sólo para aquellos sistemas que parecían ofrecer más interés, los llamados *sistemas sincrónicos*.

El plan general de este trabajo es el siguiente:

El capítulo segundo, el primero es esta introducción, es el pilar sobre el que se construyen, por así decirlo, todos los demás; hasta el punto de que muchas de las demostraciones que se ofrecen en el resto de los capítulos se presentan como una continuación de las de éste; añadiendo la parte de la prueba que afecta a los operadores añadidos. En este segundo capítulo se estudia la lógica epistémica proposicional, en el sentido restringido del término epistémico, y se presenta un método de tablas semánticas del que se demuestra que es correcto y completo.

El capítulo tercero, con mucho el más breve de esta investigación, está dedicado a la lógica doxástica proposicional. La razón de su brevedad radica principalmente en que la semejanza con la lógica epistémica hace que las demostraciones metateóricas de interés sean, en la mayor parte de los casos, virtualmente idénticas a las pruebas correspondientes para lógica epistémica, por lo que no nos parecía necesario repetirlas. Tan es así, que este capítulo bien podría haber quedado comprendido en el anterior, sin menoscabo de su contenido. No obstante lo cual, la decisión metodológica de tratar separadamente el concepto de conocimiento y el de creencia nos impulsó a mantener esta separación. A partir de este momento, el concepto de creencia se estudiará como un subapartado del capítulo correspondiente.

En este capítulo se estudian también, aunque sólo someramente, las combinaciones de lógica epistémica y doxástica, y se presentan métodos de tablas para estos sistemas mixtos.

Al contrario del anterior, el capítulo cuarto es, con mucha diferencia, el más largo de los que componen este volumen. Si respecto al capítulo tercero decíamos que bien podría haber quedado incluido en el anterior; en este caso, no hubiera parecido extraña la decisión de dividirlo en dos capítulos. De nuevo fue la unidad conceptual el criterio que nos llevó a mantenerlos unidos.

Esta cuarta parte está dedicada a la lógica epistémica de primer orden. En un primer momento, se discuten algunas cuestiones generales, como la distinción *de dicto-de re*, y se adoptan algunas decisiones metodológicas; de las cuales la más relevante es la de considerar las constantes individuales como designadores rígidos. Pasadas estas primeras secciones, el resto del capítulo podría considerarse dividido en dos partes; la primera de ellas dedicada a la lógica epistémica de primer orden con dominio constante, y la segunda a la lógica de dominios variables; que constituye una variedad de *lógica libre*. Tanto para el caso de los dominios constantes como para el de los dominios variables se presentan métodos de tablas semánticas, que resultan ser correctos y completos.

El capítulo quinto está dedicado a la lógica epistémica proposicional extendida con operadores de conocimiento de grupo; esto es, con los operadores E, C y D y sus duales (extendido también al concepto de creencia colectiva). También en este caso se presenta un método de tablas semánticas, esta vez inspirados en el procedimiento que conocemos como DB-tableaux, formulado para la lógica de primer orden por Boolos y Díaz Estévez [1]. Tal procedimiento es sólo semidecidible[2], pero resulta ser correcto y completo.

Por último, el capítulo sexto está dedicado a un problema de enorme interés pero, a su vez, enormemente complejo: la modificación del conocimiento a lo largo del tiempo. En este capítulo, como ya se ha indicado, no se presentan las pruebas de corrección y completud para los sistemas axiomáticos posibles, que resultan ser un número elevado y de una gran complejidad. En su lugar, se estudia la forma en que pueden interactuar los operadores epistémicos y temporales, que se corresponde con ciertas propiedades de los sistemas, y se presenta un método de tablas para aquellos sistemas cuyas propiedades parecen más interesantes. Este método de tablas, que como el anterior es sólo semidecidible, incorpora además una característica nueva: la recursividad.

Éste, decimos, es el plan general de este trabajo. Pero antes de entrar en estos asuntos merece la pena detenerse en algunas cuestiones generales.

1.2. Un poco de historia

Como tantas otras cosas, la lógica epistémica bebe en sus orígenes de las fuentes de Aristóteles. Tanto en las *Refutaciones Sofísticas* como en los *Primeros Analíticos* y *Segundos Analíticos*, el filósofo de Estagira considera cuestiones relacionadas con la lógica del conocimiento y la creencia. Será sin embargo la Edad Media el periodo del pasado que conozca un mayor florecimiento de la lógica epistémica.

Ya en la primera mitad del S. XII, Garlandus Compotista y Abelardo intentaron, por lo que parece, formular una concepción epistémica de la noción de consecuencia lógica. Pero es sobre todo en el S. XIV, bajo la influencia de la escuela nominalista, que los problemas relacionados con la lógica epistémica co-

[1] Vid notas 14 y 15 del capítulo 5.

[2] En el sentido de que si la tabla es abierta y finita, entonces el conjunto de fórmulas que funciona como asunción de la tabla tiene un modelo que consta de un número finito de mundos posibles; pero si esto último no ocurre, puede suceder que la tabla se vuelva infinita.

bran una máxima relevancia. Hombres como Pedro de Mantua o Ralph Strode formularon reglas generales de las inferencias epistémicas.

Si en algo destacaron los filósofos medievales fue, más que en la lógica misma, en lo que hoy llamaríamos *filosofía de la lógica*. En este campo, su descubrimiento más notable es la distinción entre el uso *de re* y el uso *de dicto* de las modalidades; ya anticipado por Aristóteles. También dedicaron su atención a cuestiones tan modernas como la iteración de modalidades o la identidad en contextos intensionales.

El siglo XV fue, a juicio de los historiadores, el periodo más activo de la lógica epistémica, que se desarrolla sobre todo en universidades del norte de Italia donde destacan figuras como Paolo de Venecia, su discípulo Paolo da Pergola o Gaetano de Thiene[3].

Desgraciadamente, el descrédito de la filosofía escolástica en la edad moderna hizo que se abandonaran temas de enorme interés, como alguno de los mencionados. Habrá que esperar al S. XX para volver a encontrarnos con un tratamiento lógico del conocimiento y la creencia.

El libro de von Wright *An Essay on Modal Logic*[4] es reconocido en general como la obra que inicia el tratamiento de la lógica epistémica con los modernos métodos formales; si bien von Wright no presenta un tratamiento semántico y se limita al caso de un único agente (más bien al caso abstracto "se sabe que..."). Es Jaakko Hintikka, con su obra fundacional *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*[5], el primero en presentar un tratamiento semántico formal que dará el impulso definitivo a la moderna lógica epistémica. Conviene señalar, con todo, que la semántica presentada por Hintikka, aunque equivalente, no es la que actualmente suele encontrarse en los textos de la materia. La semántica de Hintikka se basa en las nociones de *conjunto modelo* y *sistemas modelo*; mientras que lo habitual en la actualidad es trabajar con semánticas kripkeanas de mundos posibles.

Los años que siguen se caracterizan por una intensa discusión en torno a problemas teóricos y filosóficos relacionados con la lógica epistémica. Entre los más relevantes destacan el de la omnisciencia lógica[6] (Hocutt, M. O. (1972)) y el de

[3]Dos monografías clásicas sobre este periodo son Boh, I. (1993) y Knuuttila, S. (1993).

[4]von Wright, G.H. (1951).

[5]Hintikka, J. (1962).

[6]En general, consideramos que el conocimiento de un agente es cerrado bajo consecuencia lógica. Tal supuesto, tildado con frecuencia de poco realista, es lo que se conoce como "omnisciencia

la identidad transmundana[7] (Chisholm, R., (1967)).

En los tiempos más recientes, hay tres grandes obras consideradas unánimemente como grandes contribuciones a la lógica epistémica. Una es *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit*, de Wolfgang Lenzen [8]; otra es *Reasoning About Knowledge*, de Fagin, Halpern, Moses, y Vardy[9], que aparecerá constantemente citada en este trabajo; y la tercera es *Epistemic Logic for AI and Computer Sciences, de* Meyer y van der Hoek[10], muestra clara del interés que ha tomado la materia para las ciencias de la computación y la inteligencia artificial.

Los trabajos más recientes muestran interés, de forma muy relevante, por los aspectos dinámicos del conocimiento[11] y por la combinación con otras lógicas[12]; además de por las aplicaciones en diversos campos como la teoría de la computación, la inteligencia artificial, la economía, la lingüística o incluso la criptografía[13].

1.3. Sentido y referencia. Los contextos opacos

Aunque los gramáticos especulativos medievales estudiaron con detalle la relación entre signo y referente, estudio que alcanzó su culminación con el análisis de las *propietates terminorum*, de Pedro Hispano, esta tradición desapareció en la edad moderna debido al descrédito de la gramática especulativa. Hemos de esperar a finales del S. XIX para que vuelvan a plantearse estas cuestiones desde el punto de vista de una teoría general del significado.

Fue el matemático alemán Gottlob Frege quien, al establecer la distinción entre sentido y referencia[14], sentó las bases de la semántica moderna y se convirtió en el padre de la lógica y la filosofía del lenguaje actuales. Frege estaba interesado por el problema de la fundamentación lógica de las matemáticas, lo que le llevó a

---

lógica". Trataremos este asunto en la sección 2.3.

[7]El problema tiene que ver con la cuestión de si es posible predicar la identidad entre entidades pertenecientes a mundos posibles diferentes. En la sección 1.4 trataremos brevemente esta cuestión. En el capítulo 4 estudiaremos la identidad, si bien no entraremos a discutir los argumentos de Chisholm.

[8]Lenzen, W. (1980).

[9]Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

[10]Meyer. J.J. y van der Hoek, W. (1995).

[11]Por ejemplo, Ditmarsch H. van; Hoek W. van der ; Kooi B. (2007).

[12]Por ejemplo, Halpern, J.Y. y Vardi, M.Y. (1989).

[13]Sobre la aplicación a estos campos puede consultarse Davis, E. y Morgenstern, L. (1983).

[14]Frege, G. (1892).

crear un formalismo lógico capaz de contener la aritmética elemental y, con ello, a interesarse por la relación entre el significado de las oraciones y el de los términos que la componen. Muy en resumen, su planteamiento es el siguiente:

En el significado de los términos cabe distinguir entre sentido y referencia. Por referencia de un término entendemos el objeto que éste denota, entendiendo por objeto no sólo las realidades físicas, sino también entidades abstractas, como los números[15]. El sentido de un término es *la forma de darse lingüísticamente el objeto*. Dos expresiones nominales pueden tener distinto sentido pero idéntica referencia, como ocurre con las expresiones "el lucero del alba" y "el lucero de la tarde"; lo contrario no es posible. También puede ocurrir que un término tenga sentido pero carezca de referencia, como ocurre con la expresión "el mayor número primo"; naturalmente, lo contrario no es tampoco posible.

El sentido y la referencia de las oraciones, por su parte, han de ser función del sentido y la referencia de los términos que las componen; es lo que se conoce como "principio de composicionalidad" de Frege. Pero ¿cuáles son el sentido y la referencia de las oraciones? Lo podemos descubrir observando lo que ocurre cuando en una oración sustituimos un término por otro con la misma referencia. Si en la oración

(1.1) Venus es el lucero del alba

sustituimos la expresión nominal "el lucero del alba" por la expresión "el lucero de la tarde", que tiene la misma referencia que ella, obtenemos la oración:

(1.2) Venus es el lucero de la tarde.

Es evidente que el valor de verdad de 1.2 ha de ser necesariamente el mismo que el de 1.1; ya que , por el principio de *sustituibilidad salva veritate*, formulado primeramente por Leibniz, este valor permanece inalterado cuando una parte del enunciado se sustituye por una expresión de la misma referencia, pero de distinto sentido. El pensamiento expresado por la oración 1.2 es sin embargo enteramente diferente del de 1.1, ya que una persona que ignorase que el lucero del alba y el

[15] La ontología de Frege parte de la consideración de "objeto" y "función" como categorías fundamentales, de forma que objeto es todo aquello que no es función (Frege, G. (1892)).

lucero de la tarde son el mismo cuerpo celeste podría tomar a uno de ellos por verdadero y al otro por falso.

El valor de verdad de una oración depende pues de la referencia de los términos que en ella intervienen; mientras que el pensamiento que ésta expresa es función del sentido de aquéllos. Tenemos por tanto que admitir que la referencia de un enunciado es su valor de verdad; y su sentido, el pensamiento que expresa. Un enunciado como

(1.3) El mayor número primo es divisible entre siete

no es ni verdadero ni falso, aunque expresa un pensamiento perfectamente comprensible. Esto es, tiene sentido, pero no referencia, ya que no la tiene tampoco uno de los términos que la componen.

Existen casos, no obstante, en que este análisis no tiene validez. Se trata de contextos en que las palabras se toman en sentido diferente del habitual, entre los cuales podemos destacar los que Frege denomina *enunciados nominales abstractos introducidos por "que"*, uno de cuyos casos es el estilo indirecto. En estos casos, la referencia de la proposición subordinada no es su valor de verdad, sino el pensamiento que expresa —esto es, lo que habitualmente es su sentido— mientras que su sentido es el de las palabras "el pensamiento de que…". Esto ocurre después de "decir", "oír" "opinar", y palabras semejantes.

Que en estos casos la referencia del enunciado subordinado no coincide con la habitual se puede ver fácilmente por el hecho de que éste no puede ser sustituido, en estos contextos, por otro enunciado con el mismo valor de verdad con la seguridad de que el enunciado completo del que forma parte siga siendo verdadero o falso. Así por ejemplo, si en la oración (verdadera):

(1.4) Copérnico creía que las órbitas de los planetas son circulares

sustituimos la subordinada por otra cualquiera con el mismo valor de verdad, obtenemos por ejemplo:

(1.5) Copérnico creía que dos más dos son cinco, que es obviamente un enunciado falso.

Nótese que Frege no concluye que el principio de sustituibilidad no sea válido para este tipo de oraciones, sino que la subordinada de 1.4 no puede ser sustituida por otra con la misma referencia habitual, sino por otra con la misma referencia indirecta; esto es, con el mismo sentido.

Esta estrategia, consistente en considerar que las palabras tienen en estos contextos una referencia distinta de la habitual, parece haber sido descartada en la actualidad; estimándose más bien que el principio de sustituibilidad *salva veritate* no es válido sin restricciones en el lenguaje natural. Los contextos donde este principio no tiene validez han sido denominados por W. O. Quine[16] contextos referencialmente opacos, por oposición a los contextos referencialmente transparentes, y son los introducidos por ciertos adverbios y giros lingüísticos ("necesariamente", "posiblemente", "está permitido que...", etc.), por verbos de actitud proposicional ("saber", "creer", etc.) o incluso por ciertos verbos transitivos ("querer", "necesitar", etc.)[17].

Dos variedades interesantes de contextos opacos las constituyen las expresiones que incorporan los verbos "saber", "conocer" y semejantes; y las que contienen los verbos "creer", "opinar", etc. Este tipo de expresiones, a las que denominamos respectivamente "contextos epistémicos" y "contextos doxásticos", constituye precisamente el objeto de este trabajo.

1.4. Contextos epistémicos

Antes de comentar otras peculiaridades de los contextos epistémicos tal vez deberíamos clarificar los conceptos mismos de *conocimiento* y *creencia*, que no por muy comunes dejan de tener aspectos intrigantes.

Al menos desde Platón se acepta que el conocimiento es creencia verdadera, además de algo que suele resultar difícil de precisar y que podemos describir sin mucha intención de ser precisos como "justificación racional". Dejemos aparte por el momento este "algo más", que parece demasiado inaprehensible; se diría que una condición que podemos exigir al conocimiento es la siguiente:

[16]Quine, W. V. (1961b).

[17]Esta distinción ha sido puesta en cuestión. Un interesante análisis de estos problemas en contextos epistémicos se encuentra en Frapolli, M.J. (1991).

Si a sabe que φ, entonces φ.

En cambio, al concepto de creencia no podemos exigirle semejante condición. De hecho, parece una característica definitoria de las creencias el hecho de poder ser falsas. ¿Debemos exigir al menos que sean consistentes?

En realidad, todos conocemos un buen número de personas cuyas creencias son enteramente irracionales; y es muy posible que todos mantengamos alguna creencia irracional. En este sentido, estaríamos dispuestos a aceptar que "a cree que α" y "a cree que β" son ambas verdaderas aun cuando α y β sean inconsistentes entre sí, siempre y cuando esta inconsistencia no sea demasiado manifiesta. Es decir, no exigimos que a sea consciente de que sus creencias son inconsistentes.

Sin embargo, resulta complicado tratar con lo irracional; y desde luego es imposible incluirlo en un sistema lógico. Convengamos pues que cuando hablamos de "creencia" nos referimos a *creencia racional*. Esto es, aceptaremos como condición:

a no cree que $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Hasta aquí, no suele haber muchos problemas con la aceptación de estas condiciones. Otros principios que podrían funcionar como axiomas de una lógica epistémica han sido más discutidos. Entre ellos, tal vez el más conflictivo haya sido el siguiente:

Si a sabe que $\varphi \to \psi$ y a sabe que φ, entonces a sabe que ψ

Intuitivamente, este esquema de axioma, y su contrapartida doxástica, parecen exigir demasiado, ya que presuponen que tratamos con sujetos "lógicamente perspicaces", por usar una expresión de Hocutt[18] ; y una lógica de agentes perspicaces no parece informarnos de nada relevante respecto al uso real de los verbos saber y creer. Algunas de las posturas que se han sostenido en torno a este esquema de axioma se discuten en la sección 2.3.

Igualmente discutidos han sido los esquemas de axioma siguientes, conocidos respectivamente como axiomas de introspección positiva y de introspección negativa:

[18] Hocutt, M. O. (1972).

Si a sabe que φ, entonces a sabe que sabe que φ

Si a no sabe que φ, entonces a sabe que no sabe que φ

No entraremos en más detalles sobre ellos, estos axiomas,como los anteriores, se discuten en la sección 2.3.

Aunque ya ha sido mencionada en la sección anterior, pasaremos ahora a comentar la que seguramente es la peculiaridad más característica de todos los contextos opacos y, por tanto, también de los contextos epistémicos y doxásticos: el fallo de los principios de sustituibilidad de la identidad y de generalización existencial.

Respecto al primero, ya vimos que la sustitución de una oración subordinada por otra con el mismo valor de verdad no garantiza en este tipo de casos que la oración resultante conserve el mismo valor de verdad de la original. Este problema se plantea también con respecto a los términos individuales correferenciales. En efecto, es una regla básica de la lógica de primer orden con identidad:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi(t_1)\\ t_1 = t_2\end{array}}{\varphi(t_2)}$$

Pero esta regla no es válida cuando intervienen los verbos creer o saber, lo que puede verse fácilmente con el siguiente contraejemplo:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Juan sabe (cree) que el lucero del alba es Venus}\\ \text{El lucero del alba es el lucero de la tarde}\end{array}}{\text{Juan sabe (cree) que el lucero de la tarde es Venus}}$$

donde la conclusión no se sigue de las premisas, ya que Juan puede ignorar que el lucero del alba y el lucero de la tarde son el mismo cuerpo celeste.

En el capítulo 4 manejamos este problema tratando las constantes individuales como designadores rígidos. Los términos de función, que sí que pueden designar a elementos diferentes del dominio en los distintos mundos posibles, exigen que se introduzca una restricción a la regla de sustituibilidad de la identidad.

La otra regla problemática es la de generalización existencial. Esta regla debe su validez al hecho de que en las lógicas de primer orden se supone habitualmente que todo término individual se refiere a algún individuo del dominio de discurso. Este supuesto existencial resulta por lo general inocuo para sus usos habituales, pero es manifiestamente nocivo en contextos epistémicos y doxásticos. Efectivamente, la regla:

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\varphi(x/t)}$$

nos llevaría a admitir razonamientos del tipo:

$$\frac{\text{Los cristianos creen que Dios les castigará}}{\text{Luego hay un Dios de quien los cristianos creen que les castigará}}$$

lo cual sería sin duda un método demasiado cómodo de demostrar cualquier cosa.

Este problema es tratado de dos maneras diferentes en este trabajo: en una semántica de dominio constante, simplemente resulta adecuado sin restricciones; en una semántica de dominios variables, las regla de la cuantificación deben ser modificada introduciendo un predicado de existencia. Todo ello se verá con detalle en el capítulo 4.

Mencionaremos muy brevemente un problema que ha sido objeto de profunda discusión y que, sin embargo, nosotros hemos preferido obviar en este trabajo. Se trata del problema de la identidad transmundana.

Efectivamente, cuando tratemos la lógica de primer orden podremos ver que recurrimos a modelos kripkeanos extendidos en que los individuos del dominio del modelo existen en los diversos mundos posibles que los componen (no necesariamente en todos) pero pueden tener diferentes propiedades en cada uno de ellos. La pregunta que surge inmediatamente es la siguiente: ¿qué sentido tiene predicar la identidad de dos individuos, en distintos mundos posibles, que tienen distintas propiedades?

Por explicarlo con un ejemplo de Chisholm[19], podemos imaginar un mundo posible, digamos t, en el que Noé tenga todas las propiedades atribuidas a Adán en el mundo real y Adán tiene todas las propiedades atribuidas a Noé en el mundo real (supongamos, sólo a efectos de la discusión, que las historias bíblicas describen el mundo real); ¿qué sentido tiene decir que el sujeto llamado Noé en el mundo real es el mismo que el sujeto llamado Noé en el mundo t?

No queremos entrar en todas las sutilezas que se han planteado en torno a esta cuestión. Algunos han planteado que se trata de un pseudo problema. Otros,

[19] Chisholm, R., (1967).

como Fitting y Mendelsohn[20], parecen pensar que el uso del término "mundos posibles", en lugar de otros como "situaciones posibles", ha introducido confusión en la discusión; argumentando que cuando interpretamos temporalmente los operadores modales nos parece natural pensar que los individuos puedan tener distintas propiedades en distintos momentos.

Si bien no podemos dejar de aceptar que se trata de un problema de hondo calado, no hemos querido plantear en esta investigación un análisis siquiera somero del problema ni de las propuestas que se han planteado para resolverlo. Baste decir que al tomar la decisión de tratar las constantes individuales como designadores rígidos estábamos suponiendo que era efectivamente posible identificar a esos individuos; esto es, estábamos suponiendo resuelto el problema. Queremos dejar constancia, sin embargo, de que se trata de una mera decisión metodológica, y no de una respuesta teórica al problema.

Naturalmente, no pretendemos darle respuestas a todos los problemas, ni siquiera tratarlos todos en profundidad; sólo intentamos presentar un método de tablas para distintos sistemas de lógica epistémica y resolver algunos de los problemas que nos encontraremos por el camino.

[20]Fitting, M. y Mendelsohn, R. L. (1988).

Capítulo 2

Lógica epistémica proposicional

2.1. Conceptos fundamentales

El objeto de la lógica epistémica es estudiar un tipo especial de contextos referencialmente opacos: aquellos en que se hace referencia al conocimiento que determinados agentes tienen de ciertos hechos, como ocurre, por ejemplo, con las expresiones que tienen la siguiente forma:

(1) a sabe que φ

(2) a sabe si φ

(3) a no sabe que φ

(4) a no sabe si φ

(5) Es posible, por lo que a sabe, que φ

Donde a es un término de individuo y φ es una proposición. Por el momento, nos ceñiremos al nivel proposicional. La cuantificación y la identidad serán estudiadas más adelante.

El procedimiento estádar para formalizar estas expresiones, introducido por Jaakko Hintikka en una obra ya clásica[1], consiste en introducir dos operadores modales, K y $\widehat{K}$, que aparecen siempre afectados por un subídice que expresa el sujeto de conocimiento. Así, las expresiones 1-5 se formalizarían:

[1] Hintikka, J. (1962).

(1') $K_a\varphi$

(2') $K_a\varphi \vee \neg K_a\varphi$

(3') $\neg K_a\varphi$

(4') $\neg K_a\varphi \wedge \neg K_a\neg\varphi$

(5') $\widehat{K}_a\varphi$

La expresión (5) resulta bastante poco natural, salvo tal vez en primera persona, pero resulta conveniente contar con un dual del operador K. De hecho, $\widehat{K}$ puede ser introducido por definición de la siguiente forma:

$$\widehat{K}_{a_i}\varphi =_{def} \neg K_{a_i}\neg\varphi$$

2.2. Sintaxis y semántica

Para definir el lenguaje de la lógica epistémica proposicional no necesitamos más que ampliar las reglas de formación de fórmulas del lenguaje de la lógica proposicional de la siguiente forma:

Sea P un conjunto no vacío de variables proposicionales, y dado un conjunto A de m agentes, LEP es el conjunto más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

1. si $p \in P$, $p \in LEP$
2. si $\varphi \in LEP$, $\neg\varphi \in LEP$
3. si $\varphi, \psi \in LEP$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ y $\varphi \rightarrow \psi \in LEP$
4. si $\varphi \in LEP$, $K_{a_i}\varphi$, y $\widehat{K}_{a_i}\varphi \in LEP$ (para $i \in A$)

Es fácil ver que estas reglas de formación de fórmulas permiten la reiteración de operadores epistémicos, dando lugar a fórmulas como

(6) $K_{a_i}K_{a_j}\varphi$

(7) $K_{a_i}K_{a_i}\varphi$

(8) $\neg K_{a_i} K_{a_i} \varphi$

que corresponderían a la formalización de expresiones como

(6') a_i sabe que a_j sabe que φ

(7') a_i sabe que sabe que φ

(8') a_i no sabe que sabe que φ

La primera de estas expresiones es perfectamente comprensible en cualquier lengua y no debe plantear ninguna dificultad. Las otras dos, por el contrario, son oraciones cuyo significado resulta difícil de comprender. Ya veremos cómo los distintos sistemas axiomáticos de lógica epistémica proposicional dan un distinto significado a estas expresiones.

Más complicada resulta la elaboración de una semántica formal para este tipo de lógicas. Lo habitual es entender que la lógica epistémica proposicional es un tipo de lógica modal con una semántica análoga a la que usamos para interpretar los conceptos de posibilidad y necesidad. Utilizando los términos de Kripke, entenderemos que la expresión (1) nos informa de que φ es verdadera en todos los mundos posibles compatibles con lo que a sabe, mientras que (5) nos dice que φ es verdadera en al menos un mundo posible compatible con lo que a sabe. La elaboración formal de estas intuiciones es una semántica kripkeana de mundos posibles en la que, dados un conjunto no vacío P de variables proposicionales y un conjunto A de m agentes, definimos un modelo M como una estructura

$$M = \langle W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle ,$$

tal que:

$W \neq \emptyset$ es un conjunto de índices o mundos posibles $\{s, t, u, \cdots\}$. Intuitivamente, cada mundo posible representa una alternativa epistémica para un sujeto dado.

$R_{a_i} \subseteq W^2$ (para $a_i \in A$) es una relación binaria entre mundos posibles que representa la noción intuitiva de accesibilidad desde un mundo posible a otro para un sujeto dado a_i. Como veremos, las propiedades de esta relación de accesibilidad determinan qué fórmulas son válidas en un sistema dado.

Por último, $v : P \times W \mapsto \{0, 1\}$ es una función de evaluación que asigna a cada variable proposicional un valor de verdad en cada mundo posible s, lo que escribiremos: $v(s, p) = 1$ ó $v(s, p) = 0$.

En lo sucesivo, escribiremos $s \in M$ como abreviatura de "$s \in W$, para W de la estructura M". La verdad de una fórmula φ en un mundo posible $s \in M$, que anotaremos $M, s \vDash \varphi$, queda definida por las siguientes cláusulas (de nuevo, para cualesquiera $s, t \in M$ y $p, \varphi, \psi \in LEP$).

1. $M, s \vDash p$ syss $(v, s)\, p = 1$
2. $M, s \vDash \neg\varphi$ syss $M, s \nvDash \varphi$
3. $M, s \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $M, s \vDash \varphi$ y $M, s \vDash \psi$
4. $M, s \vDash \varphi \vee \psi$ syss $M, s \vDash \varphi$ o $M, s \vDash \psi$ (o ambas cosas)
5. $M, s \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss $M, s \nvDash \varphi$ o $M, s \vDash \psi$ (o ambas cosas)
6. $M, s \vDash K_{a_i}\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t tal que $sR_{a_i}t$
7. $M, s \vDash \widehat{K}_{a_i}\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t tal que $sR_{a_i}t$

Diremos que $M \vDash \varphi$ si $M, s \vDash \varphi$ para todo $s \in M$, y que $\models_\chi \varphi$ para indicar que $M \vDash \varphi$ para todo modelo M de una cierta clase χ.

Las cláusulas 6 y 7 pretenden recoger la intuición de que hablábamos más arriba: decir que un sujeto a sabe que φ equivale a decir que φ es verdadero en toda descripción posible del mundo compatible con lo que a sabe (o, dicho de otro modo, con todas las alternativas epistémicas accesibles para el sujeto a; mientras que decir que φ es posible por lo que a sabe es lo mismo que indicar que hay al menos una descripción posible del mundo compatible con los conocimientos de a (una alternativa epistémica) en la que φ es verdadero. Supongamos, por ejemplo, que por lo que a nosotros respecta hay sólo dos hechos relevantes, a saber, que Cervantes escribió *El Quijote* (p) y que Cervantes escribió las *Novelas Ejemplares* (q). Respecto a estas dos cuestiones, hay sólo cuatro descripciones posibles del mundo (o, más brevemente, cuatro mundos posibles), en las que son verdaderos los siguientes enunciados:

s_1: $p \wedge q$

s_2: $p \wedge \neg q$

s_3**:** $\neg p \wedge q$

s_1**:** $\neg p \wedge \neg q$

Supongamos ahora que el sujeto a conoce el primero de estos hechos, pero ignora el segundo. Esto quiere decir que s_1 y s_2 son, por lo que a a respecta, descripciones posibles del mundo real que él mismo no puede distinguir. Sabiendo que s_1 es el mundo real, diremos que s_2 es accesible desde s_1 para el sujeto a, o también que es una alternativa epistémica para dicho sujeto (formalmente, $s_1 R_a s_2$), mientras que s_3 y s_4 no lo son. En este modelo, son verdaderas las formulas $K_a p$, $\widehat{K}_a q$ y $\widehat{K}_a \neg q$.

En cuanto a la relación de accesibilidad, ya hemos mencionado que las propiedades de esta relación determinan qué formulas son válidas en un determinado sistema. Así, parece razonable exigir que si afirmamos que a sabe que φ, para un sujeto a y una fórmula φ cualesquiera, esto implique que la fórmula φ sea verdadera; esto es, que $K_a\varphi \rightarrow \varphi$ sea válida, lo que ocurre sólo en aquellos modelos en que R_a es reflexiva. Si en cambio estuviéramos hablando del concepto de creencia, más débil, no parecería razonable exigir esta propiedad: la relación de accesibilidad no debe ser reflexiva, pero sí serial. Otras propiedades de la relación, como simetría, transitividad o euclidianidad, implican propiedades que trataremos en lo que sigue; pero antes debemos abordar el tratamiento axiomático de la cuestión.

2.3. Sistemas axiomáticos de lógica epistémica

Empezaremos presentando las posibles axiomatizaciones de la lógica epistémica proposicional antes de proceder a una discusión crítica de los axiomas que las componen. El sistema más simple, conocido como K_m, consta de los siguientes esquemas de axioma (en lo sucesivo, para abreviar, diremos simplemente axiomas) y reglas de inferencia (para $\varphi, \psi \in LEP$, $a_i \in A$):

A1 Todas las tautologías de la lógica proposicional.

A2 $(K_{a_i}\varphi \wedge K_{a_i}(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow K_{a_i}\psi$

R1 $\dfrac{\begin{matrix}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{matrix}}{\psi}$

R2 $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash K_{a_i}\varphi}$

Podemos obtener sistemas más fuertes añadiendo algunos de los siguientes axiomas:

A3 $K_{a_i}\varphi \to \varphi$

A4 $K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}K_{a_i}\varphi$

A5 $\neg K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$

Los sistemas derivados de la adición de cada uno de estos axiomas se conocen, por razones históricas, por los siguientes nombres:

$T_m = K_m + A3$

$S4_m = Tm + A4$

$S5_m = S4_m + A5$

Expresaremos que una fórmula φ es derivable en cualquiera de estos sistemas X mediante la notación $\vdash_X \varphi$, aunque la referencia al sistema se omitirá cuando quede clara por el contexto.

Respecto a la justificación intuitiva de estos axiomas, el primero de ellos resulta evidente, ya que la lógica espistémica no es sino una extensión de la lógica clásica. El segundo de ellos, conocido como axioma de distribución (de K en $\to$), también podría parecerlo, ya que es axioma que caracteriza a todas las lógicas modales normales; no obstante, ha sido protagonista de innumerables, y fructíferas, discusiones.

La razón de ello es que la propiedad que expresa parece demasiado fuerte para agentes epistémicos normales; esto es, personas: los agentes deben ser capaces de obtener todas las consecuencias lógicamente derivables de sus conocimientos; deben ser, en acertada expresión de Hocutt[2], sujetos lógicamente perspicaces, o como también se dice, lógicamente omniscientes.

Es obvio que si entendemos "saber" en el sentido ordinario del término, los agentes normales no se comportan así: una persona pude asentir a todas las formulas de un conjunto dado Γ y disentir de φ, aunque sea el caso que $\Gamma \vDash \varphi$. De hecho, es probable que la mayoría de las personas razonen así habitualmente. Esto lleva a Hocutt a concluir que la lógica epistémica como tal es imposible: "parece

[2]Hocutt, M. O. (1972).

que no puede haber lógica del conocimiento en el sentido de que pueda haber una lógica del acto de saber. Brevemente, podemos tener una lógica de lo que sabemos (que, en cualquier caso, trata el hecho de que lo sabemos como irrelevante); pero parece que no podemos tener una lógica del conocimiento"[3].

Hintikka ya se había anticipado a estas críticas reinterpretando las nociones de "consistencia" e "inconsistencia" en términos de "defendibilidad" e "indefendibilidad"[4]; estrategia que Hocutt analiza y descarta en su artículo. Toscamente hablando, la estrategia de Hintikka puede resumirse así: si para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$ se cumple que $K_a\alpha$, y sucede que $\Gamma \vDash \beta$, entonces se cumple que $K_a\beta$ no en el sentido de que el agente a sea consciente de que β es verdad, pero sí en el sentido de que a no puede defender que es posible que $\neg\beta$ (esto es, $\widehat{K}_a\neg\beta$) con argumentos racionales. En otras palabras, a puede darse cuenta por sí mismo de que β es verdad, sin más que analizar las consecuencias de lo que ya sabe. Hocutt rechaza también una interpretación realizativa (performative) y una normativa como formas de resolver este problema, aunque sus argumentos no siempre son igualmente fuertes. En todo caso, no pretendemos analizar exhaustivamente los argumentos de Hocutt, pero sí podemos apuntar un par de razones a favor de la aceptación del axioma $A2$:

a) Aunque es verdad que la noción de agentes lógicamente omniscientes constituye una concepción altamente idealizada de los agentes epistémicos, esto no la convierte en una noción absurda o inútil para propósitos científicos. De hecho, la mayoría de los conceptos científicos son construcciones altamente idealizadas a partir de la experiencia. Piénsese por ejemplo en entidades como la masa puntual o el hilo inextensible de masa despreciable que constituyen la definición del péndulo matemático, que por supuesto no pueden existir en ningún sitio. La lógica epistémica construida sobre este axioma ha demostrado su utilidad no sólo para el análisis filosófico, sino también en campos tan diversos como las ciencias de la computación, la inteligencia artificial, la teoría de juegos o la lingüística; lo cual constituye una razón suficiente para su aceptación.

b) Si hubiéramos de aceptar los argumentos de Hocutt, entonces parece que deberíamos extenderlos a toda la ciencia de la lógica; ya que, si aceptamos

[3]Hocutt, M. O. (1972). La traducción es mía.
[4]Hintikka, J. (1962), Sec. 2.6

> alguna vaga definición de esta disciplina como "ciencia del razonamiento", tendríamos que reconocer que la mayoría de las personas no razonan siempre como indican las reglas de la lógica (y algunas no lo hacen casi nunca). Si esto no nos lleva a tirar a la basura todos los libros de la materia es porque entendemos que la lógica no nos indica cómo razona de hecho la gente, sino cómo se razona correctamente. De igual manera, podemos entender que la lógica epistémica no trata sobre cómo razonan los agentes humanos sobre lo que otros agentes (o ellos mismos) saben o ignoran, sino sobre cómo se razona correctamente sobre estos asuntos. Esto, dicho sea de paso, parece apuntar a la concepción normativa que Hocutt rechaza; pero no es necesario apuntarse al normativismo para aceptar este argumento, basta con recordar la distinción escolar entre ciencias formales y ciencias empíricas para reconocer que los argumentos empíricos no tienen ninguna fuerza en cuestiones lógicas (además, conviene recordar que lo normativo y lo descriptivo no son elementos incompatibles, como muestra el interesante ejemplo de la lingüística[5]).

En cualquier caso, $A2$ ha sido ampliamente aceptado por la comunidad científica y parece imprescindible para elaborar un sistema de lógica epistémica; así pues, lo daremos por aceptado y pasaremos a discutir más brevemente los otros axiomas.

El axioma $A3$ se conoce como axioma de verdad, o también como axioma de conocimiento. Como ya se ha comentado, no parece problemático, ya que resulta natural exigir que aquello que se sabe sea verdadero. Si en lugar de conocimiento estuviéramos hablando de creencia deberíamos sustituirlo por el más débil axioma $D = \neg (B_{a_i}\varphi \wedge B_{a_i}\neg\varphi)$ (donde B es el operador análogo a K para la creencia).

Sin embargo $A4$, conocido como axioma de introspección positiva, resulta si no contraintuitivo sí al menos bastante confuso; y ello es debido a que es bastante difícil saber qué queremos decir en el lenguaje ordinario con una expresión de la forma "yo sé que yo sé que φ". La interpretación más natural parece ser que "saber que uno sabe algo" equivale simplemente a "saber algo". Esta es la postura de Hintikka, que se apoya en toda una colección de filósofos clásicos como Platón, Aristóteles, Santo Tomás, Averroes, etc[6]. Por supuesto, es posible encontrar ejemplos en que es razonable afirmar que alguien sabe algo, pero no sabe que lo

[5] Cf.: Díez, J. A. y Moulines, C. U. (1997), pp. 20 y ss.
[6] Hintikka, J. (1962), sec. 5.3.

sabe. En un momento de la tragedia *Edipo Rey*, por ejemplo, puede tener sentido la afirmación de que Edipo sabe quién es el asesino de Layo, pero no sabe que lo sabe[7]. Hintikka da a entender que en este caso "saber que uno sabe" aporta un significado residual que resulta irrelevante en términos filosóficos[8]. Es posible pensar, sin embargo, que el problema afecta a una cuestión tan central como es el significado de los términos individuales en los distintos mundos posibles: Edipo no sabe que Layo es el nombre del hombre que él mató en el camino. Este problema se mencionará más adelante y se tratará con detenimiento cuando tratemos la lógica epistémica de primer orden.

Pasemos ahora al llamado axioma de introspección negativa; esto es, a $A5$. Se diría que este postulado resulta claramente contraintuitivo, ya que una persona puede no saber que, por ejemplo, Gracián es el autor de *El Criticón* y no saber tampoco que no lo sabe, tal vez porque nunca haya oído hablar ni del autor ni de su obra. Hintikka lo rechaza con cierto humor:

> Nótese, sin embargo, que uno puede dejar de saber —a menos que resulte ser tan sagaz como Sócrates— aquello que ignora. Porque "$\neg K_a p$" no implica (virtualmente) "$K_a \neg K_a p$" como puede comprobarse fácilmente.[9]

Sin embargo, y contra nuestra intuición primera, si queremos formalizar ciertas situaciones $A5$ resulta plenamente adecuado. Pensemos por ejemplo en cosas tales como un juego de naipes. Supongamos nuestro vocabulario restringido a las circunstancias del propio juego y supongamos también que todos los jugadores saben cuáles son las cartas y conocen sus nombres. Dadas estas restricciones, si un jugador no sabe quién tiene una carta, entonces sabe que no lo sabe. Si al repartir los naipes, por ejemplo, un jugador tiene el *as* de corazones, sabe que ningún otro jugador tiene esa misma carta; y si no tiene el *as* de corazones, entonces ignora si otro de los jugadores lo tiene, y cuál de ellos; pero además, sabe que lo ignora, a poco que se pregunte sobre el asunto.

Hemos mencionado estas restricciones porque parecen necesarias para poder aplicar el axioma, y es que cuando trabajamos con lenguajes formales introducimos convenciones que no se dan en el lenguaje natural y que explican por qué el axioma

[7] El ejemplo es de Hintikka: Hintikka, J. (1962), sec. 5.5, p. 142.
[8] En realidad considera perjudicial tratarlo. Ibid p. 144.
[9] Hintikka, J. (1962), sec. 5.2.

$A5$ puede ser usado para ofrecer modelos formales de ciertas situaciones a pesar de contradecir nuestras intuiciones sobre el conocimiento humano. Entre estas convenciones podemos citar:

a) En lógica formal se trabaja con un vocabulario previamente determinado. En nuestro caso, con un conjunto P de variables proposicionales que son los átomos del lenguaje (y en el caso de la lógica de primer orden, lo que es más relevante, con un dominio establecido). En el lenguaje ordinario, por el contrario, disponemos de un número indeterminado de proposiciones atómicas (y de términos individuales, por lo que respecta al primer orden).

b) Aunque esto afecta exclusivamente a la lógica de primer orden, cuando trabajamos con lenguajes formales se suele dar por supuesto que todos los términos individuales tienen referencia, cosa que no siempre ocurre en el lenguaje natural.

c) Por último, y esto resulta esencial tanto para el axioma de introspección positiva como para el de introspección negativa, en lenguaje natural resulta frecuente que los agentes no conozcan la referencia de alguno de los términos de individuo empleados en el discurso, lo cual complica notablemente la cuestión. El ejemplo citado al iniciar la discusión de este axioma es un caso claro: si el agente a no conoce la referencia de los términos "Gracián" y "El Criticón" no puede ser consciente de su propia ignorancia. Al utilizar el lenguaje de la lógica epistémica proposicional puede ser conveniente introducir la restricción de que todos los agentes conozcan el significado de los términos de individuo (o tal vez , de que las modalidades se usen siempre *de re*, y no *de dicto*, pero este es un asunto complicado del que no queremos tratar aún.).

En todo caso, estas cuestiones que acabamos de mencionar surgen casi exclusivamente en la lógica de primer orden. Trataremos estos problemas con más detalle cuando hablemos de ella e intentaremos resolver las dificultades, no pequeñas, que aparecen al introducir la cuantificación en contextos modales.

Para terminar de discutir estos sistemas axiomáticos, habría que mencionar algunos asuntos problemáticos relacionados con la regla R2 conocida como regla de necesidad o de generalización del conocimiento. De ella cabe hacer comentarios análogos a los que se hicieron sobre el axioma de distribución: R2 significa que los agentes conocen todas las fórmulas válidas de la lógica epistémica proposicional, lo que implica nuevamente la omnisciencia lógica. Pero tal vez la cuestión más interesante tenga que ver con el uso del teorema de deducción.

Para analizar este problema es necesario introducir previamente la noción de derivabilidad en un sistema axiomático AX: diremos que una fórmula ψ es derivable de una fórmula φ en el sistema AX (lo que escribiremos $AX, \varphi \vdash \psi$) si ψ es la última de una cadena de fórmulas cada una de las cuales o es una instancia de un axioma de AX, o es la misma ψ, o se sigue de las anteriores mediante la aplicación de una de las reglas de AX. Una vez introducida esta noción, en los sistemas de lógica de primer orden se puede demostrar el siguiente teorema:

$$\text{TD: Si } AX, \varphi \vdash \psi, \text{ entonces } AX \vdash \varphi \to \psi.$$

Sin embargo, parece que la conjunción de este teorema y la regla R2 nos permitiría deducir el siguiente teorema:

$$\varphi \to K_{a_i}\varphi,$$

lo que convertiría nuestros sistemas de lógica epistémica en triviales, ya que $K_{a_i}\varphi$ resultaría simplemente equivalente a φ.

Es realidad, esta es la razón de que hayamos presentado esta regla en la forma

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash K_{a_i}\varphi},$$

y no en la más común

$$\frac{\varphi}{K_{a_i}\varphi}.$$

Mientras nos mantengamos en el ámbito estricto de la deducción axiomática, no hay diferencia entre ambas presentaciones; pero cuando introducimos la noción de derivabilidad en un sistema AX, el signo de validez que precede a φ significa que hemos de entender la regla como sigue: si φ depende sólo de los axiomas[10] de

[10] La diferencia entre la presentación de R1 y R2 se corresponde, en el plano semántico con la diferencia entre los conceptos de consecuencia lógica local y global. Una fórmula α es consecuencia lógica local de un conjunto de fórmulas Γ (en signos, $\Gamma \vDash^l \alpha$), syss para todo modelo M y todo mundo posible $s \in W$ de la estructura M, si $M, s \vDash \Gamma$, entonces $M, s \vDash \alpha$ (donde $M, s \vDash \Gamma$ abrevia $M, s \vDash \gamma_1$, $M, s \vDash \gamma_2, \cdots$, para todo $\gamma_i \in \Gamma$). Una fórmula α es consecuencia lógica global de un conjunto de fórmulas Γ (en signos, $\Gamma \vDash^G \alpha$), syss para todo modelo M, si $M \vDash \Gamma$, entonces $M \vDash \alpha$. Como puede verse, el segundo concepto es más débil que el primero.

AX, entonces de φ se sigue $K_{a_i}\varphi$ (la noción de dependencia hay que entenderla en el siguiente sentido: a) una fórmula depende de sí misma; b) si φ es el resultado de aplicar a ψ una regla de AX, entonces φ depende de ψ; c) si φ depende de ψ y a su vez ψ depende de κ, entonces φ depende de κ.). Con esta restricción al uso de la regla R2 el teorema de deducción resulta válido, sin que de la combinación de ambos se sigan las consecuencias indeseables que acabamos de comentar[11].

No quisiéramos dejar de mencionar, por último, la posibilidad de proponer sistemas alternativos a los tres mencionados. El carácter contraintuitivo del axioma A5, en concreto, ha propiciado la aparición de sistemas más débiles que $S5_m$ pero más fuertes que $S4_m$[12]. Más en particular, Lenzen[13] ha sugerido añadir a $S4_m$ el siguiente esquema de axioma:

$$\widehat{K}_{a_i}K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\widehat{K}_{a_i}\varphi;$$

el resultado, conocido como $S4{,}2_m$, contiene a $S4_m$ y está contenido en $S5_m$.

Van der Hoek[14], a su vez, propone un sistema que contiene al anterior, y por tanto a $S4_m$, y que también está contenido en $S5_m$. Se conoce como $S4{,}3_m$ y es el resultado de añadir a $S4_m$ el siguiente esquema de axioma:

$$K_{a_i}\left(K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\psi\right) \vee \left(K_{a_i}\psi \to K_{a_i}\varphi\right).$$

Por último, de acuerdo con Kutschera[15], podemos obtener el más fuerte $S4{,}4_m$ añadiendo un esquema de axioma a $S4_m$:

$$\varphi \to \left(\widehat{K}_{a_i}K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\varphi\right).$$

Estudiar estos sistemas no carece, sin duda, de interés. No obstante lo cual, en el resto de este trabajo nos ceñiremos al estudio de los tres sistemas clásicos: T_m, $S4_m$ y $S5_m$.

[11] Para un tratamiento diferente del problema, vid. Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995) , pp. 54 y 92.

[12] En realidad, estos sistemas eran ya conocidos para lógicas modales aléticas. Puede verse una breve exposición en Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1968), cap. XIV.

[13] Lenzen, W. (1978).

[14] Hoek, W. van der, (1996).

[15] Kutschera, F. von. (1976).

2.4. Relación entre modelos y sistemas axiomáticos

Hemos mencionado antes que el hecho de que una fórmula sea válida en un determinado sistema depende de las propiedades de la relación de accesibilidad. Así, $A2$ y $R2$ son válidos en todos los modelos kripkeanos; $A3$ es válido sólo si la relación de accesibilidad es reflexiva, $A4$ es válido cuando la relación de accesibilidad es transitiva; y $A5$ cuando, además de transitiva, es simétrica (y por tanto, euclídea). El conjunto de los cinco axiomas, por consiguiente, será válido cuando R_i sea una relación de equivalencia. Demostremos esto con más detalle.

Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los modelos kripkeanos, $\mathcal{M}^r$ la clase de todos los modelos kripkeanos en los que R_{a_i} es reflexiva , $\mathcal{M}^t$ la de los modelos en los que R_{a_i} es transitiva; y por último, sea $\mathcal{M}^{s,t}$ la clase de todos los modelos en que R_{a_i} es simétrica y transitiva (siempre para $a_i \in A$). Tenemos entonces que:

Teorema 2.4.1. $A2$ *es válido en todos los modelos kripkeanos, esto es:*

$$\models_{\mathcal{M}} (K_{a_i}\varphi \wedge K_{a_i}(\varphi \to \psi)) \to K_{a_i}\psi$$

Demostración: Supongamos que $M, s \models K_{a_i}\varphi \wedge K_{a_i}(\varphi \to \psi)$ para cualesquiera $M \in \mathcal{M}$ y $s \in M$. Por evaluación del conjuntor, $M, s \models K_{a_i}\varphi$ y $M, s \models K_{a_i}(\varphi \to \psi)$. Por evaluación de K, para todo t tal que $sR_{a_i}t$, $M, t \models \varphi$ y $M, t \models \varphi \to \psi$. Por evaluación del condicional, $M, t \models \psi$. Luego $M, s \models K_{a_i}\psi$, por evaluación de K. QED.

Teorema 2.4.2 (Regla R2)**.** *Si* $\models_{\mathcal{M}} \varphi$*, entonces* $\models_{\mathcal{M}} K_{a_i}\varphi$*.*

Demostración: Si $\models_{\mathcal{M}}\varphi$, entonces $M, t \models \varphi$ para todo $M \in \mathcal{M}$ y $t \in M$. En particular, dado cualquier mundo posible s, $M, t \models \varphi$ para todo t tal que $sR_{a_i}t$ (para $a_i \in A$). Así pues, por evaluación de K, $M, s \models K_{a_i}\varphi$. Puesto que esto es válido para todo $M \in \mathcal{M}$ y $s \in M$, $\models_{\mathcal{M}} K_{a_i}\varphi$. QED.

Teorema 2.4.3. $A3$ *es válido en todos los modelos kripkeanos reflexivos, esto es:*

$$\models_{\mathcal{M}^r} K_{a_i}\varphi \to \varphi$$

Demostración: Para cualesquiera $M \models \mathcal{M}^r$ y $s \in M$, si $M, s \models K_{a_i}\varphi$ entonces $M, t \models \varphi$ para todo t tal que $sR_{a_i}t$. Puesto que R_{ia} es reflexiva, se cumple que $sR_{a_i}s$, y por tanto que $M, s \models \varphi$. QED.

Teorema 2.4.4. *A4 es válido en todos los modelos kripkeanos transitivos, esto es:*

$$\vDash_{\mathcal{M}^t} K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}K_{a_i}\varphi$$

Demostración: Partimos del supuesto de que $M, s \vDash K_{a_i}\varphi$ (para $M \in \mathcal{M}^t$ y $s \in M$). Tomemos t y u cualesquiera ($t, u \in M$) tales que $sR_{a_i}t$ y $tR_{a_i}u$. Puesto que R_{a_i} es transitiva, tenemos que $sR_{a_i}u$, y por evaluación de K, que $M, u \vDash \varphi$. Ahora bien, si $M, u \vDash \varphi$ para todo u tal que $tR_{a_i}u$, entonces $M, t \vDash K_{a_i}\varphi$, y puesto que esto ocurre para todo t tal que $sR_{a_i}t$, por evaluación de K, se cumple que $M, s \vDash K_{a_i}K_{a_i}\varphi$. QED.

Teorema 2.4.5. *A5 es válido en todos los modelos kripkeanos simétricos y transitivos, esto es:*

$$\vDash_{\mathcal{M}^{s,t}} \neg K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$$

Demostración: Partimos del supuesto de que $M, s \vDash \neg K_{a_i}\varphi$ (para $M \in \mathcal{M}^{s,t}$ y $s \in M$). Esto significa que hay un $u \in M$ tal que $sR_{a_i}u$ y $M, u \nvDash \varphi$. Sea ahora un t cualquiera ($t \in M$) tal que $sR_{a_i}t$. Puesto que R_{a_i} es simétrica, $tR_{a_i}s$; y puesto que es transitiva, $tR_{a_i}u$. Así pues, hay un u tal que $tR_{a_i}u$ y $M, u \nvDash \varphi$, por tanto $M, t \nvDash K_{a_i}\varphi$ (por evaluación de K) y $M, t \vDash \neg K_{a_i}\varphi$ (por evaluación del negador). Puesto que esto sucede para todo t tal que $sR_{a_i}t$, $M, s \vDash K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$ (por evaluación de K). QED.

2.5. Resultados metateóricos

Teorema 2.5.1. *Para fórmulas en LEP:*

a) T_m es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}^r$.

c) $S4_m$ es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$.

d) $S5_m$ es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.

Demostración: La validez de A1 y R1 se sigue inmediatamente del hecho de que la interpretación de los functores proposicionales es la misma que en la lógica proposicional. La validez de A2 quedó demostrada en el teorema 2.4.1 , y la de R2 en el teorema 2.4.2 . Si a eso unimos que el teorema 2.4.3 demuestra la validez del axioma A3 respecto a $\mathcal{M}^r$, se sigue inmediatamente la corrección de T_m respecto a $\mathcal{M}^r$.

La corrección de $S4_m$ respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$ se sigue de todo lo anterior junto al teorema 2.4.4, que demuestra que A4 es válido en todos los modelos transitivos.

La corrección de $S5_m$ respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$ se sigue de todo lo anterior junto al teorema 2.4.5, que demuestra que A5 es válido en todos los modelos simétricos y transitivos. QED.

Con lo anterior queda demostrada la corrección de los sistemas T_m, $S4_m$, y $S5_m$. Demostrar la completud de estos sistemas es algo más complejo. Como es habitual desde que Henkin presentara su prueba de completud para la lógica elemental de predicados[16], seguiremos la estrategia de demostrar previamente el teorema de satisfacción; esto es, que si una fórmula φ es consistente con el sistema axiomático en cuestión, esta fórmula es satisfactible (en un cierto tipo de modelos). La completud del sistema es una consecuencia casi inmediata del teorema de satisfacción.

Pero antes de esto debemos introducir ciertas nociones previas que, aunque bien conocidas, no conviene dejar pasar de largo.

Dado un sistema axiomático, escribiremos $\vdash_S \alpha$ para indicar que α es derivable en S (omitiremos el subíndice cuando quede claro por el contexto). Diremos que una fórmula α es consistente con relación a S (para abreviar, que α es S-consistente) syss $\neg\alpha$ no es derivable en S; esto es:

Definición 2.5.2. Dado un sistema axiomático S expresado en el lenguaje $\mathcal{L}$, una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$ es S-consistente syss $\nvdash_S \neg\alpha$.

Diremos igualmente que un conjunto finito de fórmulas Γ es S-consistente si lo es la conjunción de todas las fórmulas de Γ. Un conjunto infinito de fórmulas se considera consistente si lo son todos sus subconjuntos finitos.

Dados un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula α, siempre respecto a un lenguaje $\mathcal{L}$ y un sistema axiomático S, puede ocurrir que tanto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ sean consistentes con los axiomas de S. Por ejemplo, dado cualquier sistema axiomático de lógica proposicional, el conjunto $\{p \vee q, p\}$ sigue siendo consistente tanto si añadimos q como si añadimos $\neg q$. Cuando esto no es posible

[16] Henkin, L. (1949).

para ninguna fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$, decimos que se trata de un conjunto máximamente consistente:

Definición 2.5.3. Dado un sistema axiomático S expresado en el lenguaje $\mathcal{L}$, un conjunto de fórmulas Γ es máximamente S-consistente syss, para toda fórmula α tal que $\alpha \in \mathcal{L}$ pero $\alpha \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\alpha\}$ no es S-consistente.

Dado un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y un conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}$, para un cierto sistema axiomático S, siempre es posible construir un conjunto máximamente S-consistente Γ que contiene a Δ. La prueba es como sigue:

Puesto que nuestro lenguaje es numerable, podemos suponer todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ dispuestas en cierta ordenación $\alpha_1, \alpha_2, \cdots .\alpha_n$. Definimos ahora una serie de conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ de la siguiente forma:

i) $\Gamma_0 = \Delta$

ii) Si $\Gamma_i \cup \{\alpha_{i+1}\}$ es S-consistente, entonces $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\alpha_{i+1}\}$; en caso contrario, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$.

Sea ahora $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$; es claro que $\Delta \subseteq \Gamma$, puesto que $\Gamma_0 = \Delta$, y que Γ es S-consistente, puesto que todo subconjunto finito suyo lo es. Γ es también, además, máximamente consistente. Para probarlo supongamos una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es S-consistente; puesto que $\varphi \in \mathcal{L}$, debe figurar en nuestra enumeración, digamos como α_j; ahora bien, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es S-consistente, todo subconjunto finito suyo también lo es, y en particular, $\Gamma_{j-1} \cup \{\varphi\}$ es S-consistente[17]. Pero si $\varphi = \alpha_j$ y $\Gamma_{j-1} \cup \{\varphi\}$ es S-consistente, entonces $\Gamma_j = \Gamma_{j-1} \cup \{\varphi\}$; y por tanto $\varphi \in \Gamma_j$, luego $\varphi \in \Gamma$. QED.

Es fácil demostrar que, dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y un sistema axiomático S que contenga la lógica proposicional, todo conjunto máximamente S-consistente Γ de fórmulas de $\mathcal{L}$ tiene las siguientes propiedades:

a) Para cualquier fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$, no es el caso que $\alpha \in \Gamma$ y $\neg\alpha \in \Gamma$.

b) Para cualquier fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$.

c) Si $\alpha \to \beta \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$, entonces $\beta \in \Gamma$

[17] Puesto que las demostraciones son bien conocidas, no consideramos necesario incluirlas aquí. Pueden encontrarse, por ejemplo, en Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1968), pp. 133 y ss.

d) Si $\vdash_S \alpha$, entonces $\alpha \in \Gamma$.

Una vez explicados estos conceptos, podemos demostrar el teorema de satisfacción para T_m, $S4_m$ y $S5_m$. La estrategia es como sigue: construimos un modelo M^C, denominado modelo canónico[18] tal que para cada conjunto máximamente consistente Φ de fórmulas del lenguaje de LEP, hay un mundo posible $s_\Phi \in W$ de M^C. Luego demostraremos que para toda fórmula $\varphi \in LEP$, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$. Naturalmente, esto es equivalente a demostrar que si φ es T_m-consistente (respectivamente: $S4_m$-consistente, $S5_m$-consistente) entonces φ es satisfactible; ya que si es φ consistente con los axiomas de T_m ($S4_m$, $S5_m$), entonces se puede construir un conjunto máximamente T_m-consistente Φ' que contiene a φ, y por tanto $M^C, s_{\Phi'} \vDash \varphi$. Habrá que demostrar independientemente que $M^C \in \mathcal{M}^r$, en el caso de T_m; que $M^C \in \mathcal{M}^{r,t}$, en el caso de $S4_m$ y que que $M^C \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ en el caso de $S4_m$. Veamos los detalles.

Teorema 2.5.4. *Para toda fórmula $\varphi \in LEP$:*

a Si φ es T_m-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^r$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

b Si φ es $S4_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

c Si φ es $S5_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

Demostración: Haremos primero la parte común de la prueba, ciñéndonos al sistema T_m. Posteriormente demostraremos que el modelo que presentamos pertenece a $\mathcal{M}^r$, en el caso de T_m; a $\mathcal{M}^{r,t}$, en el de $S4_m$, o a $\mathcal{M}^{r,s,t}$, en el de $S5_m$.

Sea $\mathcal{C}(T_m)$ el conjunto de todos los conjuntos máximamente T_m-consistentes de fórmulas de LEP, sea P el conjunto de átomos del lenguaje y A el conjunto de agentes. Definimos el modelo

$$M^C = \{W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon\}$$

[18]Este tipo de estructura se corresponde con los modelos de Henkin para la lógica de primer orden. Fue usado por primera vez para lógicas modales por Makinson, D. (1966) y Lemmon, E. J. (1977). Carnielli, W. y Pizzi, C. (2009) dedican un capítulo a “completud y canonicidad”.

de la siguiente forma:

En primer lugar, hacemos corresponder un mundo posible a cada conjunto máximamente T_m-consistente:

$$W = \{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{C}(T_m)\}$$

La función de evaluación υ se define como sigue:

$$\upsilon(s_\Phi, p) = 1 \text{ syss } p \in \Phi \text{ (para todo } p \in P)$$

En cuanto a las relaciones de accesibilidad, para cualesquiera conjuntos $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}(T_m)$, y $a_i \in A$, establecemos:

$$R_{a_i} = \{\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \mid \text{para todo } \alpha \in LEP, \text{ si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$$

Escribiremos $|\varphi|$ para designar al grado lógico de φ; demostraremos por inducción sobre $|\varphi|$ que para toda fórmula $\varphi \in LEP$, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$:

La base es trivial: si φ es atómica entonces, por la definición de υ, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$.

Partamos ahora como hipótesis de la inducción que la afirmación vale para $|\varphi| \leq n$ y demostremos que también vale para $|\varphi| = n + 1$.

Los casos de los operadores proposicionales son también triviales, ya que Φ contiene todas las tautologías de la lógica proposicional. Veamos el caso en que $\varphi = K_{a_i}\alpha$:

> De izquierda a derecha, supongamos que $M^C, s_\Phi \vDash K_{a_i}\alpha$. Esto significa que $M^C, s_\Psi \vDash \alpha$ para todo $s_\Psi \in W$ de la estructura M^C tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_{a_i}$. De aquí se sigue que el conjunto $\{\gamma \mid K_{a_i}\gamma \in \Phi\} \cup \{\neg\alpha\}$ no es T_m-consistente; pues de lo contrario, habría una extensión suya, digamos Ψ', máximamente T_m-consistente, y puesto que Ψ' contiene $\{\gamma \mid K_{a_i}\gamma \in \Phi\}$, se cumpliría que $\langle s_\Phi, s_{\Psi'} \rangle \in R_{a_i}$, y por tanto que $M^C, s_{\Psi'} \vDash \neg\alpha$, por hipótesis de la inducción, y por consiguiente, también que $M^C, s_\Phi \vDash \neg K_{a_i}\alpha$; lo que contradice nuestra hipótesis de partida.
>
> Puesto que el conjunto $\{\gamma \mid K_{a_i}\gamma \in \Phi\} \cup \{\neg\alpha\}$ no es T_m-consistente, debe haber un subconjunto finito suyo $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \neg\alpha\}$ que no es T_m-consistente; y por tanto, por lógica proposicional:

$$\vdash_{T_m} \gamma_1 \to (\gamma_2 \to (\cdots \to (\gamma_k \to \alpha)))\,;$$

y por tanto, aplicando R2:

$$\vdash_{T_m} K_{a_i}(\gamma_1 \to (\gamma_2 \to (\cdots \to (\gamma_k \to \alpha))))\,;$$

de donde, aplicando A2 y cálculo proposicional, obtenemos

$$\vdash_{T_m} K_{a_i}\gamma_1 \to (K_{a_i}\gamma_2 \to (\cdots \to (K_{a_i}\gamma_k \to K_{a_i}\alpha)))\,;$$

y puesto que Φ es máximamente T_m-consistente:

$$K_{a_i}\gamma_1 \to (K_{a_i}\gamma_2 \to (\cdots \to (K_{a_i}\gamma_k \to K_{a_i}\alpha))) \in \Phi.$$

Ahora bien, recordemos que $\gamma_1, \cdots, \gamma_k \in \{\gamma \mid K_{a_i}\gamma \in \Phi\}$, y por tanto $K_{a_i}\gamma_1, \cdots, K_{a_i}\gamma_k \in \Phi$; de donde se sigue, por el hecho de que Φ sea máximamente T_m-consistente, que $K_{a_i}\alpha \in \Phi$.

En sentido contrario, supongamos que $K_{a_i}\alpha \in \Phi$. Por construcción del modelo, para todo Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$ $\alpha \in \Psi$; pero entonces, por hipótesis de la inducción, $M^C, s_\Psi \vDash \alpha$. Así bien, $M^C, s_\Psi \vDash \alpha$ para todo s_Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$; y por tanto, $M^C, s_\Phi \vDash K_{a_i}\alpha$.

Hasta aquí la parte la prueba es idéntica para T_m, $S4_m$ y $S5_m$. Aunque la hemos presentado para el primero de estos sistemas, para obtener la prueba correspondiente a los otros dos basta sustituir $\mathcal{C}(T_m)$ por $\mathcal{C}(S4_m)$ o $\mathcal{C}(S5_m)$, respectivamente; y T_m-consistente por $S4_m$-consistente o $S5$-consistente. Esto es así porque todas las tesis de T_m implicadas en la prueba lo son también de $S4_m$ y $S5_m$, como puede comprobarse fácilmente. Demostremos ahora que $M^C \in \mathcal{M}^r$, en el caso de T_m; que $M^C \in \mathcal{M}^{r,t}$, en el caso de $S4_m$; y que $M^C \in \mathcal{M}^{r,s,t}$, en el caso de $S5_m$:

T_m: Cuando construimos el modelo canónico para T_m definimos W de la estructura M^C como $\{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{C}(T_m)\}$, donde $\mathcal{C}(T_m)$ es el conjunto de todos los conjuntos máximamente T_m-consistentes de fórmulas de LEP. Ahora bien, para cualquier fórmula $\alpha \in LEP$, y para cualquier $a_i \in A$,

$K_{a_i}\alpha \to \alpha$ es una tesis de T_m; por consiguiente, para cualquier $\Phi \in \mathcal{C}(T_m)$, $K_{a_i}\alpha \to \alpha \in \Phi$, de donde se sigue que si $K_{a_i}\alpha \in \Phi$, entonces $\alpha \in \Phi$. Así pues, $\langle s_\Phi, s_\Phi\rangle \in \{\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \mid \text{si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$; de donde $\langle s_\Phi, s_\Phi\rangle \in R_{a_i}$; y por tanto, $M^C \in \mathcal{M}^r$.

$S4_m$: La reflexividad se demuestra como en el caso anterior. La transitividad se demuestra como sigue:

Cuando construimos el modelo canónico para $S4_m$ definimos W de la estructura M^C como $\{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{C}(S4_m)\}$, donde $\mathcal{C}(S4_m)$ es el conjunto de todos los conjuntos máximamente $S4_m$-consistentes de fórmulas de LEP. Ahora bien, para cualquier fórmula $\alpha \in LEP$, y para cualquier $a_i \in A$, $K_{a_i}\alpha \to K_{a_i}K_{a_i}\alpha$ es una tesis de $S4_m$; por consiguiente, para cualquier $\Phi \in \mathcal{C}(S4_m)$, $K_{a_i}\alpha \to K_{a_i}K_{a_i}\alpha \in \Phi$, de donde se sigue que si $K_{a_i}\alpha \in \Phi$, entonces $K_{a_i}K_{a_i}\alpha \in \Phi$. Sean ahora cualesquiera $\Phi, \Psi, \Omega \in \mathcal{C}(S4_m)$ tales que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$ y $\langle s_\Psi, s_\Omega\rangle \in R_{a_i}$, y supongamos que $K_{a_i}\alpha \in \Phi$. De aquí se sigue que $K_{a_i}K_{a_i}\alpha \in \Phi$; y por construcción del modelo, que $K_{a_i}\alpha \in \Psi$. Ahora bien, puesto que $\langle s_\Psi, s_\Omega\rangle \in R_{a_i}$, se sigue también que $\alpha \in \Omega$. Así pues, $\langle s_\Phi, s_\Omega\rangle \in \{\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \mid \text{si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$; de donde $\langle s_\Phi, s_\Omega\rangle \in R_{a_i}$; y por tanto, $M^C \in \mathcal{M}^{r,t}$.

$S5_m$: La reflexividad y la transitividad se demuestran como en el caso anterior. La simetría se demuestra como sigue:

Cuando construimos el modelo canónico para $S5_m$ definimos W de la estructura M^C como $\{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{C}(S5_m)\}$, donde $\mathcal{C}(S5_m)$ es el conjunto de todos los conjuntos máximamente $S5_m$-consistentes de fórmulas de LEP. Ahora bien, para cualquier fórmula $\alpha \in LEP$, y para cualquier $a_i \in A$, $\neg K_{a_i}\alpha \to K_{a_i}\neg K_{a_i}\alpha$ es una tesis de $S5_m$; por consiguiente, para cualquier $\Phi \in \mathcal{C}(S5_m)$, $\neg K_{a_i}\alpha \to K_{a_i}\neg K_{a_i}\alpha \in \Phi$, de donde se sigue que si $\neg K_{a_i}\alpha \in \Phi$, entonces $K_{a_i}\neg K_{a_i}\alpha \in \Phi$.

Sean ahora cualesquiera $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}(S5_m)$ tales que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$ y partamos del supuesto de que $K_{a_i}\alpha \in \Psi$. Partamos también del supuesto, para proceder por reducción al absurdo, de que $\alpha \notin \Phi$. Puesto que Φ es máximamente $S5_m$-consistente, $\neg\alpha \in \Phi$; y puesto que $\neg\alpha \to \neg K_{a_i}\alpha$ es una tesis de $S5_m$, $\neg K_{a_i}\alpha \in \Phi$; y por tanto también $K_{a_i}\neg K_{a_i}\alpha \in \Phi$. Ahora bien, puesto que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$, esto implica que $\neg K_{a_i}\alpha \in \Psi$, lo que contradice nuestra hipótesis de partida. Concluimos pues que para todo $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}(S5_m)$ tales que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_{a_i}$, si $K_{a_i}\alpha \in \Psi$, entonces $\alpha \in \Phi$; y por consiguiente que $\langle s_\Psi, s_\Phi \rangle \in \{\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \mid \text{si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$; o lo que es igual, $\langle s_\Psi, s_\Phi \rangle \in R_{a_i}$. Así pues, $M^C \in \mathcal{M}^s$. QED.

Con esto queda demostrado el teorema de satisfacción. Como es bien conocido, la completud se sigue ahora de forma casi inmediata:

Teorema 2.5.5. *Para fórmulas en LEP:*

a) T_m es una axiomatización completa respecto a $\mathcal{M}^r$.

c) $S4_m$ es una axiomatización completa respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$.

d) $S5_m$ es una axiomatización completa respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.

Demostración: Hay que demostrar que:

a) Si $\models_{T_m} \alpha$, entonces $\vdash_{T_m} \alpha$.

c) Si $\models_{S4_m} \alpha$, entonces $\vdash_{S4_m} \alpha$.

d) Si $\models_{S5_m} \alpha$, entonces $\vdash_{S5_m} \alpha$.

En los tres casos, esto se deduce automáticamente del teorema 2.5.4. Veamos el caso de T_m:

Partimos del supuesto de que $\models_{T_m} \alpha$; y por tanto, no hay ningún modelo $M \in M^r$ tal que para algún $s \in W$ de la estructura M, $M, s \models \neg\alpha$. Por la contraposición del punto a) del teorema 2.5.4, de aquí se sigue que $\neg\alpha$ no es T_m-consistente. Ahora bien, dijimos que una fórmula φ es S-consistente syss $\neg\varphi$ no es derivable en S; luego decir que $\neg\alpha$ no es T_m-consistente equivale a decir que $\neg\neg\alpha$ es derivable en T_m. Pero $\vdash_{T_m} \neg\neg\alpha \to \alpha$; y por tanto, por R1, $\vdash_{T_m} \alpha$. QED.

2.6. Tablas semánticas

En esta sección presentaremos un método de tablas semánticas etiquetadas para los sistemas T_m, $S4_m$ y $S5_m$. Este método no es más que una modificación del que se presentó en su día para $S4_m$[19], aunque dispuesto en la manera en que

[19]Gómez-Caminero Parejo, E.F. (2003).

lo hace Goré[20], que a su vez combina los métodos de Fitting[21] y Massacci[22]. La intuición básica es que para realizar la tabla de una fórmula (o un conjunto de fórmulas) en la que intervienen operadores modales no es suficiente con encontrar una asignación de valores que haga verdaderas a las variables, sino que además tenemos que encontrar mundos posibles alternativos que hagan verdaderas a las fórmulas afectadas por operadores modales y que satisfagan las propiedades de la relación de accesibilidad en cada sistema. En el caso de una lógica multiagente, esta exigencia se complica por el hecho de que hay una relación de accesibilidad diferente para cada sujeto epistémico. Así, por ejemplo, cuando hacemos la tabla de una fórmula de la forma $\varphi \wedge \widehat{K}_{a_i}\psi$ lo que buscamos es un modelo M y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$ y $M, s \vDash \widehat{K}_{a_i}\psi$, pero para esto último tenemos que encontrar un mundo posible $t \in M$ tal que $M, t \vDash \psi$, lo cual nos obligaría ahora a realizar la tabla semántica de la fórmula ψ. Ahora bien, En φ pueden ocurrir fórmulas de la clase $K_{a_i}\chi$; lo que, según el sistema, nos obligará a incluir ciertas fórmulas en la tabla de ψ. Todo esto, que en lugar citado se representaba con un sistema de árboles subsidiarios enmarcados en recuadros, se representa ahora con un sistema de etiquetas que representan el mundo posible al que pertenece una fórmula y el agente respecto al cual es accesible. Empecemos describiendo con detalle el sistema de etiquetas.

Sea $A = \{a_1, a_{2,}, \cdots, a_m\}$ un conjunto de agentes epistémicos; y cada K_{a_i} es el operador modal correspondiente al agente a_i. Una etiqueta es entonces una cadena de enteros y términos de agente generada por las siguientes reglas:

a) 1 es una etiqueta.

b) Si σ es una etiqueta, $\sigma.a_in$ también lo es (para algún $n \geq 1$ y para $a_i \in A$).

Diremos que una etiqueta τ es una extensión simple de otra σ si $\tau = \sigma.a_in$ (de nuevo, para algún $n \geq 1$ y para $a_i \in A$). Diremos que τ es una extensión de σ si es una extensión simple, o la extensión de una extensión simple, etc. Diremos que una cadena de etiquetas Σ es fuertemente generada (con raíz 1) si:

a) toda etiqueta σ es una extensión de 1; y

b) si $\sigma.a_in \in \Sigma$, entonces $\sigma \in \Sigma$.

[20]Goré, R. (1999).
[21]Fitting, M. (1983).
[22]Massachi, F. (1994).

Por último, conviene definir otro término con vistas a introducir ciertas restricciones en las reglas: diremos que una etiqueta τ es un ascendiente epistémico de otra σ (respecto a un cierto agente a_i) si el término de agente que introduce cada nuevo eslabón hasta obtener τ es siempre el mismo a partir del último que aparece en σ. Convencionalmente, entenderemos que una cadena es un ascendiente epistémico de sí misma. Podemos definir recursivamente esta noción como sigue:

a) σ es un ascendiente epistémico de σ respecto a cualquier agente.

b) $\sigma.a_i n$ es un ascendiente epistémico (respecto a a_i) de $\sigma.a_i n.a_j m$ syss $a_i = a_j$.

c) Si σ es un ascendiente epistémico de τ respecto a a_i y τ lo es de κ, entonces σ es un ascendiente epistémico respecto a a_i de κ.

El siguiente es un ejemplo de una serie de etiquetas cada una de las cuales es un ascendiente epistémico de todas las que le siguen:

$$1.a_1 3 \quad 1.a_1 3.a_1 1 \quad 1.a_1 3.a_1 1.a_1 5$$

Una fórmula etiquetada es una expresión de la forma $\sigma :: \varphi$, donde σ es una etiqueta y φ es una fórmula. Una tabla semántica etiquetada para un conjunto de fórmulas Γ es un conjunto de sucesiones de fórmulas, construida según las reglas que a continuación se indican, que cobra la forma de un árbol invertido en el que cada nodo contiene una fórmula etiquetada. En lo sucesivo hablaremos indistintamente de tabla o árbol y llamaremos ramas a cada una de las sucesiones que lo componen. Diremos también que una rama de la tabla semántica es cerrada si contiene una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \varphi$ y otra de la forma $\sigma :: \neg\varphi$, y que una tabla es cerrada si y sólo si cada una de sus ramas es cerrada.

Pasemos ahora a estipular las reglas del cálculo. Podemos hablar de dos tipos de reglas. Las primeras, a las que podemos llamar simplemente reglas comunes, son las mismas para T_m, $S4_m$ y $S5_m$[23], y se aplican sólo una vez a cada fórmula en la elaboración de la tabla. Las segundas, a las que denominaremos reglas de herencia, son las que nos exigen trasladar fórmulas de un mundo posible a otro, y son por tanto las que diferencian a los tres sistemas. Estas reglas pueden aplicarse más de una vez en la elaboración de la tabla. Para facilitar las pruebas por inducción, se

[23]Por simplicidad, llamaremos a cada uno de estos cálculos de tablas semánticas como los correspondientes sistemas axiomáticos

ha supuesto que los únicos functores proposicionales son $\wedge$ y $\neg$. En la redacción de estas reglas se han incorporado ciertas restricciones que evitan que la tabla se vuelva infinita aún cuando el conjunto de fórmulas que actúan como asunción de la tabla tenga un modelo finito, estas restricciones se explicarán más adelante. Las reglas en cuestión son las siguientes:

REGLAS COMUNES:

1. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \neg\alpha$:

   a) si α es $\neg\beta$, se escribe $\sigma :: \beta$ al término de la rama,

   b) si α es $\beta \wedge \gamma$, se abren dos subramas, una con $\sigma :: \neg\beta$ y otra con $\sigma :: \neg\gamma$,

   c) si α es $K_{a_i}\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\neg\beta$ al término de la rama,

   d) si α es $\widehat{K}_{a_i}\beta$, se escribe $\sigma :: K_{a_i}\neg\beta$ al término de la rama.

   En todos los casos anteriores la fórmula a la que se ha aplicado la regla se marca con $\neg$.

2. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \alpha \wedge \beta$ se escriben consecutivamente $\sigma :: \alpha$ y $\sigma :: \beta$ al término de la rama y se marca con $\wedge$.

3. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma :: \alpha$ al término de la rama y se marca con K.

4. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma.a_in :: \alpha$ al término de la rama (donde n es el primer entero positivo tal que $\sigma.a_in$ es nueva en la rama) y se marca con $\widehat{K}(\sigma.a_in)$. Restricción: salvo que $\tau :: \alpha$ aparezca en la rama y τ sea un ascendiente epistémico de σ respecto a a_i, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con $\widehat{K}(\tau)$.

REGLAS DE HERENCIA:

HKT: Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: \alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

HKS4: Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: K_{a_i}\alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

HKS5:

a) Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: K_{a_i}\alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

b) Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma.a_in :: K_{a_i}\alpha$, se escribe $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ al término de la rama.

Estas reglas de herencia sólo se aplican si el consecuente de la regla no existe ya en la rama. En todos los casos, la fórmula a la que se aplica se marca con el nombre de la regla y el número de línea en que se escribe el resultado de su aplicación.

Como se ve, $HKS5$ contiene a $HKS4$, que a su vez implica a HKT, en unión con la regla de K; de forma que el cálculo para cada sistema se podría obtener añadiendo una regla al anterior. En lugar de eso, hemos preferido presentar un cálculo que consta de las reglas comunes y una regla de herencia específica para cada uno de los sistemas, por considerar que resulta más cómodo y menos redundante. En cualquier caso, se trata de una cuestión intrascendente que no afecta al núcleo del problema.

Por lo que respecta a la regla de $\widehat{K}$, se puede observar que es la única que nos permite crear etiquetas nuevas. Esto responde a exigencias de la semántica: para que $\widehat{K}_{a_i}\varphi$ sea verdadero en un mundo $s \in M$, es necesario que φ sea verdadero en algún mundo t alternativo a s para el agente a_i; pero esto es exactamente lo que intentan representar las etiquetas, y es por ello que las presencia de una fórmula etiquetada $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\varphi$ exige que se escriba φ al final de la rama, pero precedida de una etiqueta nueva de la forma $\sigma.a_in$.

Esta regla, sin embargo, aplicada sin ninguna restricción, hace que se vuelvan infinitas tablas de fórmulas que tienen un modelo finito. Un ejemplo de ello es la fórmula $K_{a_i}\widehat{K}_{a_i}\varphi$ (en $S4$ y $S5$): $\sigma :: K_{a_i}\widehat{K}_{a_i}\varphi$ nos obliga a escribir $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\varphi$, que a su vez nos lleva a $\sigma.a_in :: \varphi$, pero ahora la regla de herencia nos obliga de nuevo a escribir $\sigma.a_in :: K_{a_i}\widehat{K}_{a_i}\varphi$, lo cual nos lleva a $\sigma.a_in :: \widehat{K}_i\varphi$, y esto a $\sigma.a_in.a_im :: \varphi$; y así sucesivamente. No obstante, esta fórmula tiene modelos finitos muy simples; uno de ellos, aunque no el más simple, consta sólo de dos mundos posibles: un mundo s, en el que φ puede o no ser verdad, y una alternativa epistémica con respecto a_i, t, tal que $M, t \vDash \varphi$. La restricción a la regla 4 nos permite encontrar este modelo.

La justificación de la restricción es la siguiente: sean $\sigma_1, \sigma_{2,} \cdots, \sigma_n$ una sucesión de etiquetas cada una de las cuales es un ascendiente epistémico respecto a un agente dado a_i de todas las que le siguen, y sean $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \cdots, \Gamma(\sigma_n)$ los conjuntos de fórmulas etiquetadas con $\sigma_1, \sigma_{2,} \cdots, \sigma_n$, respectivamente. Es claro que cada fórmula que aparezca en uno de estos conjuntos o bien ha sido introducida por la aplicación de la regla de $\widehat{K}$, o bien por aplicación de la regla de herencia, o bien procede de una fórmula obtenida por aplicación de uno de los procedimientos anteriores. Ahora bien, dados dos cualesquiera de estos conjuntos, $\Gamma(\sigma_i)$ y $\Gamma(\sigma_j)$ $(i > j)$, es claro que todas las fórmulas de la forma $K_{a_i}\psi$ que estén en el primero de ellos están también en el segundo, por aplicación de la regla de herencia. Puesto que la única regla que nos permite crear una etiqueta nueva es la de $\widehat{K}$, y puesto que esta regla se aplica sólo una vez, si $\Gamma(\sigma_i)$ y $\Gamma(\sigma_j)$ proceden ambos de la aplicación de la regla 4 a la misma fórmula $\widehat{K}_{a_i}\varphi$, ambos contienen la misma fórmula φ, las mismas fórmulas de la forma $K_{a_i}\psi$, y todas las que proceden de la aplicación de las reglas a las fórmulas anteriores; esto es, ambos son idénticos. Siendo esto así, si nos encontramos una fórmula etiquetada $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\varphi$ pero ya existe en la rama $\tau :: \varphi$, siendo τ un ascendiente epistémico de σ, no necesitamos crear una nueva etiqueta (un nuevo mundo posible) $\sigma.a_in$, ya que $\Gamma(\sigma.a_in)$ será necesariamente igual a $\Gamma(\tau)$; nos basta con establecer en el modelo la correspondiente relación de accesibilidad desde σ a τ.

Conviene destacar que en el caso del sistema T_m no es necesaria una restricción tan fuerte a la regla 4, ya que al no ser transitiva la relación de accesibilidad no se pueden generar tablas infinitas. Bastaría, y sólo para no alargar innecesariamente la ejecución del árbol, con la siguiente restricción: salvo que $\sigma : \alpha$ aparezca en la rama.

La aplicación de esta restricción a la regla 4 garantiza que la tabla semántica de un conjunto de fórmulas es siempre finita. Para ver esto no tenemos más que darnos cuenta de que todas las reglas, salvo la de herencia, se aplican sólo una vez; y por tanto una secuencia infinita de aplicaciones de las reglas sólo puede venir producida porque uno o varios operadores $\widehat{K}_{a_i}$ caigan bajo el alcance de un operador K_{a_i} (nótese que deben ir afectados por el mismo subíndice). Siendo así, la serie de etiquetas que se generará será tal que cada una de ellas sea un ascendiente epistémico de las siguientes. Además, puesto que se trata de una aplicación cíclica de las reglas a las mismas fórmulas, que se van transmitiendo por la regla de herencia, necesariamente llegará un momento en que tengamos que aplicar la regla 4 a una fórmula $\widehat{K}_{a_i}\varphi$ que ya ha aparecido con otra etiqueta y a la que ya se le ha aplicado la regla. En este momento, la restricción nos permite considerar la fórmula como marcada, evitando que la tabla se vuelva infinita.

2.7. Algunos ejemplos

A modo de ejemplo, demostraremos la validez de los esquemas de axioma[24] A2, A4 y A5 (usando las reglas de herencia de T_m, $S4_m$ y $S5_m$, respectivamente); para ello, haremos las tablas de verdad de sus negaciones. Omitimos la prueba de A3 porque la tabla semántica de su negación es demasiado simple para que resulte interesante. Empecemos con A2: en el cuadro 2.1 se muestra que la tabla semántica de $\{K_a(p \to q), K_a p, \neg K_a q\}$ es cerrada.

En cuanto al axioma A4, su negación es:

$$K_a p \wedge \widehat{K}_a \widehat{K}_a \neg p.$$

Su tabla semántica se muestra en el cuadro 2.2.

Por último, la negación de A5, (interiorizados los negadores) es:

$$\widehat{K}_a \neg p \wedge \widehat{K}_a K_a p.$$

Su tabla semántica se puede ver en el cuadro 2.3.

2.8. Corrección

Demostrar la corrección del cálculo que acabamos de presentar equivale a probar el siguiente teorema:

Teorema 2.8.1. *Para fórmulas de LEP, si la tabla semántica de un conjunto de fórmulas* Γ *tiene al menos una rama abierta, entonces* Γ *tiene un modelo.*

Demostración: la demostración consta de dos partes, la primera consiste en mostrar cómo se construye el modelo a partir de una rama abierta del árbol;

[24] Estrictamente hablando, se realiza la tabla semántica de una fórmula, y no de un esquema de fórmula. Por esta razón, presentaremos la tabla de una instancia particular de cada uno de estos esquemas de axioma, sustituyendo φ por p, etc. El mismo procedimiento se seguirá en otros apartados de este trabajo.

Cuadro 2.1: $\{K_a(p \to q), K_a p, \neg K_a q\}$

1) $1 :: K_a\,(p \to q)$ $\quad_K$ (asunción)

2) $1 :: K_a p$ $\quad_K$ (asunción)

3) $1 :: \neg K_a q$ $\quad_\neg$ (asunción)

4) $p \to q$ $\quad_\to$ (de 1)

5) $1 :: p$ (de 2)

6) $1 :: \neg p$ (de 4)

$\otimes$

7) $1 :: q$ (de 4)

8) $1 :: \widehat{K}_a \neg q$ $\quad_{\widehat{K}(1.a1)}$ (de 3)

9) $1.a1 :: \neg q$ (de 8)

10) $1.a1 :: p \to q$ $\quad_\to$ (HKT de 1)

11) $1.a1 :: p$ (HKT de 2)

12) $1.a1 :: \neg p$ (de 10)

$\otimes$

13) $1.a1 :: q$ (de 10)

$\otimes$

Cuadro 2.2: $K_a p \wedge \widehat{K}_a \widehat{K}_a \neg p$

1) $1 :: K_a p \wedge \widehat{K}_a \widehat{K}_a \neg p$ $\quad_{\wedge}$ (asunción)

2) $1 :: K_a p$ $\quad_{K}$ (de 1)

3) $1 :: \widehat{K}_a \widehat{K}_a \neg p$ $\quad_{\widehat{K}(1.a1)}$ (de 1)

4) $1 :: p$ (de 2)

5) $1.a1 :: \widehat{K}_a \neg p$ $\quad_{\widehat{K}(1.a1.a1)}$ (de 3)

6) $1.a1 :: K_a p$ $\quad_{K}$ (HKS4 de 2)

7) $1.a1 :: p$ (de 6)

8) $1.a1.a1 :: \neg p$ (de 5)

9) $1.a1.a1 :: K_a p$ $\quad_{K}$ (HKS4 de 6)

10) $1.a1.a1 :: p$ de 9

$\otimes$

Cuadro 2.3: $\widehat{K}_a\neg p \wedge \widehat{K}_a K_a p$

$$
\begin{array}{c}
1) \quad 1 :: \widehat{K}_a\neg p \wedge \widehat{K}_a K_a p \quad {}_{\wedge} \qquad \text{(asunción)} \\
| \\
2) \quad 1 :: \widehat{K}_a\neg p \quad {}_{\widehat{K}(1.a1)} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
3) \quad 1 :: \widehat{K}_a K_a p \quad {}_{\widehat{K}(1.a2)} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
4) \quad 1.a1 :: \neg p \qquad \text{(de 2)} \\
| \\
5) \quad 1.a2 :: K_a p \quad {}_{K} \qquad \text{(de 3)} \\
| \\
6) \quad 1.a2 :: p \qquad \text{(de 5)} \\
| \\
7) \quad 1 :: K_a p \quad {}_{k} \qquad \text{(HKS5b de 5)} \\
| \\
8) \quad 1 :: p \qquad \text{de 7} \\
| \\
9) \quad 1.a1 :: K_a p \quad {}_{K} \qquad \text{(HKS5a de 7)} \\
| \\
10) \quad 1.a1 :: p \qquad \text{(de 9)} \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

la segunda, en demostrar que el modelo así construido satisface a la fórmula. Realizaremos una prueba única para los cálculos T_m, $S4_m$ y $S5_m$, indicando las diferencias allí donde sea preciso.

Construcción del modelo: Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla semántica de φ, y Σ el conjunto de etiquetas que aparecen en dicha rama. Definimos un modelo

$$M = \langle W, R_{a_1}, R_{a_2}, \cdots R_{a_m}, \upsilon \rangle$$

de la siguiente forma:

En primer lugar, creamos un mundo posible por cada etiqueta que aparezca en la rama. Llamaremos s_σ al mundo posible correspondiente a la etiqueta σ. Así pues:

$$W = \{s_\sigma | \sigma \in \Sigma\}.$$

Las relaciones de accesibilidad entre mundos posibles las definimos del siguiente modo:

A1. Si $\tau = \sigma.a_i n$, entonces $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

A2. Si $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ y aparece marcada con $\widehat{K}_\tau$, entonces $s_\tau R_{a_i} s_\sigma$[25].

A3. Según se trate del cálculo T_m, $S4_m$ o $S5_m$, cada relación de accesibilidad R_{a_i} es respectivamente: reflexiva; reflexiva y transitiva; reflexiva, simétrica y transitiva.

Por último, la función de evaluación υ se define como sigue:

> Para toda variable proposicional p del lenguaje y cada mundo posible $s_\sigma \in W$, $\upsilon(s_\sigma, p) = 1$ si $\sigma :: p \in \mathcal{F}$; en caso contrario, $(\upsilon, s_\sigma)p = 0$.

Antes de continuar, conviene destacar que esta forma de estipular las relaciones de accesibilidad establece una relación importante entre los conjuntos de etiquetas y los mundos posibles a que dan lugar: digamos que una etiqueta τ es a_i-hereditaria con respecto a σ (lo que escribiremos $\sigma H_{a_i} \tau$) si y sólo si para toda fórmula $K_{a_i}\varphi$ tal que $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$. Se cumple entonces el siguiente lema:

[25] En el cálculo $S5_m$ esta cláusula es redundante, pues se sigue de 1 y 3.

Lema 2.8.2. *$s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo si $\sigma H_{a_i} \tau$.*

Demostración:

De derecha a izquierda, partimos del supuesto de que $\sigma H_{a_i} \tau$. Esto sólo puede ser por:

i) $\tau = \sigma$: La cláusula A3 de la definición de las relaciones de accesibilidad garantiza que la relación de accesibilidad es reflexiva, y por tanto $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

ii) $\tau = \sigma.a_i n$: La cláusula A1 de la definición de las relaciones de accesibilidad garantiza que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

iii) En $S5_m$, $\sigma = \tau.a_i n$: La cláusula A1 de la definición de las relaciones de accesibilidad garantiza que $s_\tau R_{a_i} s_\sigma$, y la cláusula A3 R_{a_i} es simétrica, y por tanto que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

iv) En $S4_m$ y $S5_m$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$ como resultado de una serie de aplicaciones sucesivas de las reglas de herencia sobre $\sigma :: K_{a_i}\varphi$, y de una aplicación de la regla 3: Entonces hay una serie de etiquetas $\delta_1, \cdots, \delta_m$ tales que $\delta_1 = \sigma.a_i j, \cdots, \delta_m = \delta_{m-1}.a_i k, \tau = \delta_m.a_i n$. La cláusula A1 de la definición de las relaciones de accesibilidad garantiza que $s_{\delta_k} R_{a_i} s_{\delta_{k+1}}$, y la cláusula A3 que la relación de accesibilidad es transitiva. Por tanto, $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

v) $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$ como resultado de la aplicación de la restricción a la regla sobre $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\varphi$: La cláusula 2 de la definición de las relaciones de accesibilidad garantiza que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

De izquierda a derecha, supongamos que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$; esto sólo puede ser resultado de la aplicación de una de las tres cláusulas que definen la relación de accesibilidad:

i) En aplicación de la cláusula A1, $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ porque $\tau = \sigma.a_i n$: Por las reglas de herencia, para toda fórmula etiquetada $\sigma :: K_{a_i}\varphi$, si $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma.a_i :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$; y por la regla 3, $\sigma.a_i :: \varphi \in \mathcal{F}$. Por consiguiente, $\sigma H_{a_i} \tau$.

ii) En aplicación de la cláusula A2, $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ porque $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ y aparece marcada con $\widehat{K}(\tau)$: Si se ha aplicado la restricción a la regla 4 es porque τ es un ascendiente epistémico de σ respecto al agente a_i. En este caso, toda fórmula de la forma $K_{a_i}\beta$ tal que $\sigma :: K_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$ es, o bien la misma $K_{a_i}\alpha$, y entonces $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$, o bien una fórmula resultante de la aplicación de las reglas de herencia. En este último caso, puesto que τ es un ascendiente epistémico de σ con respecto al agente a_i, $\tau :: K_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$, y por tanto también que $\tau :: \beta \in \mathcal{F}$. Así pues, para toda fórmula $K_{a_i}\beta$ tal que que $\sigma :: K_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$, se cumple que que $\tau :: \beta \in \mathcal{F}$; y por tanto, $\sigma H_{a_i}\tau$.

iii) $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ por alguna de las propiedades especificadas en la cláusula 3: En este caso, basta darse cuenta de que la relación de i-heredabilidad es reflexiva en los tres sistemas, por la regla de K (Regla 3); transitiva en $S4_m$ y $S5_m$, por HKS4 y HKS5(a); y simétrica en $S5_m$, por HKS5(b).

Una vez construido este modelo, se demuestra que $M, s_1 \vDash \Gamma$, Donde s_1 es el mundo posible correspondiente a la primera etiqueta que aparece en la tabla. Para ello, demostramos por inducción sobre el grado lógico de la fórmula el siguiente lema:

Lema 2.8.3. *$\sigma :: \varphi \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\sigma \vDash \varphi$.*

Demostración:

La base es trivial: si φ es atómica: , $v(s_\sigma, \varphi) = 1$, y por tanto $M, s_\sigma \vDash \varphi$.

Como hipótesis de la inducción, partimos ahora de si el grado lógico de φ es menor o igual que n, $M, s(\sigma) \vDash \varphi$. Hay que demostrar que lo mismo vale cuando el grado lógico de φ es igual a $n+1$:

1. $\varphi = \neg\alpha$:

   a) α es atómica: puesto que la rama es abierta, $\sigma :: \alpha \notin \mathcal{F}$, por lo que $v(s_\sigma, \alpha) = 0$; y por tanto $M, s_\sigma \nvDash \alpha$ y, por evaluación del negador, $M, s_\sigma \vDash \neg\alpha$.

   b) $\alpha = \neg\beta$: por las reglas del cálculo, $\sigma :: \beta \in \mathcal{F}$, y por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \beta$; luego, por evaluación del negador, $M, s_\sigma \vDash \neg\neg\beta$.

   c) $\alpha = \beta \wedge \gamma$: por las reglas del cálculo, la rama abierta consta de dos subramas, al menos una de las cuales es abierta, en las que aparecen $\sigma :: \neg\beta$ y $\sigma :: \neg\gamma$, respectivamente. Supongamos que la subrama en la que aparece $\sigma :: \neg\beta$ es abierta. Entonces, por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \neg\beta$; luego, por evaluación del negador, $M, s_\sigma) \nvDash \beta$ y, por evaluación del conjuntor, $M, s_\sigma \nvDash \beta \wedge \gamma$. Por consiguiente, $M, s_\sigma \vDash \neg(\beta \wedge \gamma)$, por evaluación del negador.

d) $\alpha = K_{a_i}\beta$: por las reglas del cálculo, $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\neg\beta \in \mathcal{F}$, y como se demostrará en el punto 4, $M, s_\sigma \vDash \widehat{K}_{a_i}\neg\beta$; luego, hay un $s_\tau \in M$ tal que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ y $M, s_\tau \vDash \neg\beta$, y por tanto $M, s_\tau \nvDash \beta$. Así pues $M, s_\sigma \nvDash K_{a_i}\beta$, y por tanto, $M, s_\sigma \vDash \neg K_{a_i}\beta$.

e) $\alpha = \widehat{K}_{a_i}\beta$: por las reglas del cálculo, $\sigma :: K_{a_i}\neg\beta \in \mathcal{F}$, y como se demostrará en el punto 3, $M, s_\sigma \vDash K_{a_i}\neg\beta$; luego, para todo $s_\tau \in M$ tal que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$, $M, s_\tau \vDash \neg\beta$, y por tanto no hay un $s_\tau \in M$ tal que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ para el cual $M, s_\tau \vDash \beta$. Así pues $M, s_\sigma \nvDash \widehat{K}_{a_i}\beta$, y por tanto, $M, s_\sigma \vDash \neg\widehat{K}_{a_i}\beta$.

2. $\varphi = \alpha \wedge \beta$: por las reglas del cálculo, $\sigma :: \alpha \in \mathcal{F}$ y $\sigma :: \beta \in \mathcal{F}$. Por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \alpha$ y $M, s_\sigma \vDash \beta$; luego, por evaluación del conjuntor, $M, s_\sigma \vDash \alpha \wedge \beta$.

3. $\varphi = K_{a_i}\alpha$: Para todo $\tau \in \Sigma$ tal que $\sigma H_i \tau$, $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$; y por hipótesis de la inducción, $M, s_\tau \vDash \alpha$. Pero por el lema 2.8.2, $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo $\sigma H_{a_i} \tau$. Luego $M, s_\tau \vDash \alpha$ para todo s_τ tal que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$; y por tanto, por evaluación de K, $M, s_\sigma \vDash K_{a_i}\alpha$.

4. $\varphi = \widehat{K}_{a_i}\alpha$: si $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 4, hay una etiqueta $\sigma.a_i n \in \Sigma$ tal que $\sigma.a_{i_n} :: \alpha \in \mathcal{F}$ y, por la cláusula A1 de la definición de las relaciones de accesibilidad, $s_\sigma R_{a_i} s_{\sigma.a_i n}$. Pero, por hipótesis de la inducción, $M, s_{\sigma.a_i n} \vDash \alpha$. Por tanto, por evaluación de $\widehat{K}$, $M, s_\sigma \vDash \widehat{K}_{a_i}\alpha$.

Una vez demostrado esto, el teorema 2.8.1 se sigue trivialmente: para cada fórmula$\varphi \in \Gamma$, es claro que $1 :: \varphi \in \mathcal{F}$ (donde 1 es la primera etiqueta que aparece en el árbol); y por el lema 2.8.3, $M, s_1 \vDash \varphi$. QED.

2.9. Completud

Demostrar la completud del cálculo de tablas semánticas que acabamos de presentar es tanto como demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.9.1. *Para fórmulas de LEP, si una fórmula φ tiene un modelo, entonces su tabla semántica tiene al menos una rama abierta.*

Demostración: se realiza por inducción sobre el grado lógico de la fórmula. Como en el apartado anterior, denominaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla.

La base es trivial: si φ es atómica, la tabla semántica de φ consta de una sola fórmula etiquetada, $\sigma :: \varphi$, y por tanto es abierta.

Partimos ahora de la hipótesis de que la afirmación es válida cuando el grado lógico de la fórmula es menor o igual que n, y hay que demostrar que es válido cuando el grado lógico de $\varphi = n + 1$.

1. $\varphi = \neg\alpha$:

   a) α es atómica: como en la base, el árbol semántico de φ consta de una sola fórmula etiquetada, y por tanto es abierto.

   b) $\alpha = \neg\beta$: si $\sigma :: \neg\neg\beta \in \Gamma$, entonces $\sigma :: \beta \in \Gamma$, por las reglas del cálculo. Ahora bien, si $M, s \vDash \neg\neg\beta$, entonces $M, s \vDash \beta$, y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de β es abierta. Puesto que la tabla semántica de β es abierta, la de $\neg\neg\beta$ también lo es.

   c) $\alpha = \beta \wedge \gamma$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: \neg(\beta \wedge \gamma) \in \Gamma$ la tabla consta de dos ramas, una con $\sigma :: \neg\beta$ y otra con $\sigma :: \neg\gamma$. Así pues, si la tabla semántica de una de estas dos es abierta, también lo es la de $\sigma :: \neg(\beta \wedge \gamma)$. Ahora bien, por evaluación del negador y el conjuntor, si $M, s \vDash \neg(\beta \wedge \gamma)$, entonces $M, s \vDash \neg\beta$ o $M, s \vDash \neg\gamma$ (o ambas cosas). En cada uno de los dos casos, por hipótesis de la inducción, bien la tabla semántica de $\neg\beta$ es abierta, bien lo es la de $\neg\gamma$ (o bien ambos lo son). En cualquiera de los dos casos, la tabla semántica de $\sigma :: \neg(\beta \wedge \gamma)$ es abierta.

   d) $\alpha = K_{a_i}\beta$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: \neg K_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\neg\beta \in \mathcal{F}$; pero, como se demostrará en el punto 4, si $\widehat{K}_{a_i}\varphi$ tiene un modelo, entonces su la tabla semántica es abierta. así pues, la tabla semántica de $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\neg\beta$ es abierta, y por tanto la de $\sigma :: \neg K_{a_i}\beta$ también lo es.

   e) $\alpha = \widehat{K}_{a_i}\beta$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: \neg\widehat{K}_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: K_{a_i}\neg\beta \in \mathcal{F}$; pero, como se demostrará en el punto 3, si $K_{a_i}\varphi$ tiene un modelo, entonces su tabla semántica es abierta. Así pues, la tabla semántica de $\sigma :: K_{a_i}\neg\beta$ es abierta, y por tanto la de $\sigma :: \neg\widehat{K}_{a_i}\beta$ también lo es.

2. $\varphi = \beta \wedge \gamma$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: \beta \wedge \gamma \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \beta \in \mathcal{F}$ y $\sigma :: \gamma \in \mathcal{F}$. Por evaluación del conjuntor, si $M, s(\sigma) \vDash \beta \wedge \gamma$, entonces $M, s(\sigma) \vDash \beta$ y $M, s(\sigma) \vDash \gamma$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\sigma :: \beta$ es abierta y la de $\sigma :: \gamma$ también lo es. Ahora bien, si estos dos tablas son abiertas, la única posibilidad de que la tabla semántica de $\sigma :: \beta \wedge \gamma$ sea cerrada es que haya una fórmula atómica δ procedente de β y una fórmula elemental $\neg\delta$ procedente de γ, o viceversa, tales que $\sigma :: \delta \in \mathcal{F}$ y $\sigma :: \neg\delta \in \mathcal{F}$; pero entonces el modelo no puede satisfacer simultáneamente a β y a γ. Luego la tabla de $\sigma :: \beta \wedge \gamma$ es también abierta.

3. $\varphi = K_{a_i}\alpha$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: K_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$, $\sigma :: \alpha \in \mathcal{F}$ y $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\tau \in \Gamma$ tal que $\sigma H_{a_i} \tau$. Por hipótesis de la inducción, si $M, s \vDash \alpha$, la tabla semántica de α es abierta. Pero entonces la tabla semántica de $\sigma :: \alpha$ es abierta, y también lo es el de $\tau :: \alpha$ para cualquier fórmula etiquetada $\tau :: \alpha$ que la regla de herencia nos obligue a introducir. Luego la tabla semántica de $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ es abierta.

4. $\varphi = \widehat{K}_{a_i}\alpha$: por las reglas del cálculo, si $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma.a_i n :: \alpha \in \mathcal{F}$. Ahora bien, si $M, s \vDash \widehat{K}_{a_i}\alpha$, entonces hay un $t \in M$ tal que $sR_{a_i}t$ y $M, t \vDash \alpha$, y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Así pues, la tabla semántica de $\sigma.a_i n :: \alpha$ es abierta, y por tanto la de $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ también lo es.

Capítulo 3

Lógica doxástica

3.1. El concepto de creencia

Ya mencionamos en los apartados 2.2 y 2.3 que el operador K puede interpretarse en un sentido más débil que supone rechazar el axioma de conocimiento y que entendemos que capta el concepto intuitivo de creencia. Lo normal, en este caso, es sustituir los operadores K y $\widehat{K}$ por B y su dual $\widehat{B}$. Nos referimos habitualmente a esta lógica como *lógica dox*ástica (del griego *doxa*, opinión) como contrapuesta a la lógica epistémica propiamente dicha; aunque con frecuencia se usa este último término genéricamente, englobando tanto al conocimiento como a la creencia.

Para definir el lenguaje de esta lógica doxástica proposicional (LDP), dados como siempre un conjunto no vacío de variables proposicionales P y un conjunto A de m agentes, no tenemos más que sustituir la cláusula 4 del apartado 2.2 por la siguiente:

4'. Si $\varphi \in LDP$, $B_{a_i}\varphi$ y $\widehat{B}_{a_i}\varphi \in LDP$ (para $a_i \in A$)

Tampoco respecto a los axiomas y reglas básicos hay modificaciones esenciales: se siguen admitiendo como axiomas básicos todas las tautologías de la lógica proposicional y el axioma de distribución; además de las reglas de *Modus Ponens* y *Generalización del Conocimiento*. Es en el axioma 3, como ya comentamos, donde se produce una diferencia notable. Mientras hablábamos de conocimiento parecía razonable postular que todo lo que alguien sabe es verdad; en caso contrario no hablaríamos de conocimiento, sino precisamente de creencia. Tratando de esta última, por tanto, el axioma de verdad resulta manifiestamente excesivo, y debemos conformarnos con la exigencia más débil de que las creencias de nuestros agentes sean lógicamente consistentes. Esto es, deberemos sustituir el axioma 3 por el más débil:

$$\textbf{D: } \neg B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi).$$

Estos tres axiomas forman el sistema básico de lógica doxástica proposicional, conocido como KD_m. A ellos podemos añadir los axiomas de introspección positiva (A4) y negativa (A5) dando lugar respectivamente a los sistemas $KD4_m$ y $KD45_m$.

Respecto a la semántica, un modelo M se define igual que anteriormente como una estructura $M = \langle W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_i}, \upsilon\rangle$, donde $W \neq \emptyset$ es un conjunto de índices o mundos posibles $\{s, t, u, \cdots\}$, $R_{a_i} \subseteq W^2$ (para $a_i \in A$) es ahora la relación de accesibilidad doxástica y $\upsilon : P \times W \mapsto \{0, 1\}$ es una función de evaluación que asigna a cada variable proposicional un valor de verdad en cada mundo posible s. La verdad de una fórmula φ en un mundo posible s de un modelo M ($M, s \vDash \varphi$) se define como anteriormente, sustituyendo K por B y $\widehat{K}$ por $\widehat{B}$. La diferencia entre operadores epistémicos y doxásticos radica, pues, no ya en su definición, sino en las propiedades de la relación de accesibilidad. Así pues, si el axioma 3 se cumple en aquellos modelos en los que la relación de accesibilidad es reflexiva, el axioma D sólo exige que sea serial; esto es, que para todo $s \in M$ haya un $t \in M$ tal que $sR_{a_i}t$.

Teorema 3.1.1. *Sea $M^{se} \in \mathcal{M}$ el conjunto de todos los modelos kripkeanos en los que la relación de accesibilidad es serial. Se cumple que:*

$$\vDash_{\mathrm{M}^{se}} \neg B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi).$$

Demostración: Sean $M \in M^{se}$ y $s \in M$ tales que $M, s \vDash B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Puesto que M es serial, hay un $t \in M$ tal que $sR_{a_i}t$; y por evaluación de B, $M, t \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$. Por evaluación de $\wedge$, $M, t \vDash \varphi$ y $M, t \vDash \neg\varphi$. Pero si $M, t \vDash \neg\varphi$, entonces $M, t \nvDash \varphi$, por evaluación del negador, lo cual supone una contradicción. Así pues, $M, s \nvDash B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi)$; y de nuevo por evaluación del negador, $M, s \vDash \neg B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi)$. QED.

Respecto al axioma de introspección positiva, ocurre lo que ya dijimos al hablar del operador de conocimiento: es válido en todos los modelos kripkeanos en los que la relación de accesibilidad es transitiva. La demostración es idéntica a la que se hizo en aquel lugar, por lo que no resulta necesario repetirla.

Si seguimos comparando con el operador K, dijimos entonces que el axioma de introspección negativa era válido en aquellos modelos en los que la relación de accesibilidad era simétrica, además de transitiva. Aquí no podemos imponer esas condiciones, ya que una relación serial, simétrica y transitiva es también reflexiva; y ya vimos que en un modelo donde la relación es reflexiva se cumple el axioma 3, que es precisamente el que diferencia la lógica epistémica de la doxástica. En realidad, no necesitamos que la relación de accesibilidad sea simétrica para que sea válido el axioma 2, nos basta con que sea euclídea; esto es, con que se cumpla que $\forall s, t, u\,(sR_{a_i}t \wedge sR_{a_i}u \rightarrow tR_{a_i}u)$; lo que se demuestra a continuación:

Teorema 3.1.2. *Sea $M^e \in \mathcal{M}$ el conjunto de todos los modelos kripkeanos en los que la relación de accesibilidad es euclídea. Se cumple que:*

$$\models_{\mathrm{M}^e} \neg B_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}\neg B_{a_i}\varphi.$$

Demostración: Sean $M \in M^e$ y $s \in M$ tales que $M, s \models \neg B_{a_i}\varphi$. Por evaluación del negador, hay algún $t \in M$ tal que $sR_{a_i}t$ y que $M, t \models \neg\varphi$. Sea ahora un u cualquiera tal que $sR_{a_i}u$. Como R_{a_i} es euclídea se cumple que $uR_{a_i}t$, y por tanto $M, u \not\models B_{a_i}\varphi$, por lo que $M, u \models \neg B_{a_i}\varphi$, por evaluación del negador. Pero u es una alternativa doxástica cualquiera a s, por lo que $M, u \models B_{a_i}\neg B_{a_i}\varphi$. QED.

Estos dos teoremas, junto a los análogos a 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.4 para el concepto de creencia, cuya demostración es idéntica a la que se hizo en 2.4, demuestran la corrección deKD_m, $KD4_m$ y $KD45_m$. En cuanto a la completud, la prueba es idéntica a la presentada en 2.5, por lo que no creemos necesario repetirla.

3.2. Tablas semánticas

Presentaremos ahora un método de tablas semánticas etiquetadas para lógica doxástica análogo al presentado en la sección 2.6 para los distintos sistemas de lógica epistémica. Como en el caso anterior, presentaremos simultáneamente el cálculo para KD_m, $KD4_m$, y $KD45_m$. Para evitar tediosas repeticiones, nos limitaremos a presentar las reglas propias de los operadores doxásticos. Las reglas de los functores proposicionales, que de nuevo reducimos a $\neg$ y $\wedge$, son las habituales. El sistema de etiquetas es también el mismo que se presentó en la sección 2.6, con la salvedad de que ahora sustituimos el concepto de ascendiente epistémico de una etiqueta por el de ascendiente doxástico (respecto a un cierto agente), definido de manera análoga a como se hizo entonces.

Las reglas del cálculo son las siguientes:

REGLAS COMUNES:

1. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \neg\alpha$:

   $(\cdots)$

   c) si α es $B_{a_i}\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\neg\beta$ al término de la rama,

   d) si α es $\widehat{B}_{a_i}\beta$, se escribe $\sigma :: B_{a_i}\neg\beta$ al término de la rama.

      En todos los casos anteriores la fórmula a la que se ha aplicado la regla se marca con $\neg$.

   $(\cdots)$

3. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: B_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\alpha$ al término de la rama y se marca con B.

4. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma.a_{a_i}n :: \alpha$ al término de la rama (donde n es el primer entero positivo tal que $\sigma.a_{a_i}n$ es nueva en la rama) y se marca con $\widehat{B}(\sigma.a_in)$. Restricción: salvo que $\tau :: \alpha$ aparezca en la rama y τ sea un ascendiente doxástico respecto a a_i de σ, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con $\widehat{K}(\tau)$.

REGLAS DE HERENCIA:

HBD: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: B_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: \alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

HBD4: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: B_{a_i}\alpha$, se escriben consecutivamente al término de la rama $\sigma.a_in :: B_{a_i}\alpha$ y $\sigma.a_in :: \alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

HBD45:

- **a** Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: B_{a_i}\alpha$, se escriben consecutivamente al término de la rama $\sigma.a_in :: B_{a_i}\alpha$ y $\sigma.a_in :: \alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.
- **b** Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: \widehat{B}_{a_i}\alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

Como en el caso anterior, las reglas de herencia se aplicarán sólo si el consecuente de las reglas no existe ya en la rama.

La restricción aplicada a la regla 4 tiene la misma justificación que la aplicada en el caso de los operadores epistémicos y en este caso resulta aún más importante, ya que sin ella incluso la fórmula $B_{a_i}\alpha$ genera una tabla infinita, como se puede comprobar con facilidad. Las pruebas de corrección y completud de este cálculo son idénticas a las del cálculo correspondiente para lógica epistémica, salvo que en las pruebas por inducción, la regla del operador B remite a la del operador $\widehat{B}$.

3.3. Saber y creer combinados

Hemos estado tratando la interpretación del operador epistémico en el sentido más débil de creencia, en cuyo caso escribíamos B en lugar de K; pero puede parecer razonable, y así lo hacemos en el lenguaje ordinario, combinar ambos operadores dando lugar a una lógica epistémico-doxástica ($LEDP$). La sintaxis de este nuevo lenguaje resulta extraordinariamente fácil, sólo tenemos que ampliar las reglas de formación de fórmulas del apartado 2.2 de la siguiente forma:

4. si $\varphi \in LEDP$, $K_{a_i}\varphi$, $\widehat{K}_{a_i}\varphi$, $B_{a_i}\varphi$ y $\widehat{B}_{a_i}\varphi \in LEDP$ (para $a_i \in A$).

La semántica de esta lógica, por el contrario, requiere una modificación más sustancial. Para empezar, necesitamos distinguir entre las relaciones de accesibilidad epistémicas y la doxásticas, a las que denominaremos respectivamente E y D. De manera que ahora, dado un conjunto A de m agentes, diremos que un modelo M es una estructura

$$M = \langle W, E_{a_1}, \cdots E_{a_m}, D_{a_1}, \cdots D_{a_m}, v\rangle \text{ (para } a_i \in A).$$

Como anteriormente, $E_{a_i} \subseteq W^2$ (para $a_i \in A$) es una relación binaria de entre mundos posibles que representa la noción intuitiva de accesibilidad epistémica desde un mundo posible a otro para un sujeto dado a_i. Respecto a la relación de accesibilidad doxástica, por el contrario, parece necesario imponer alguna restricción: es razonable suponer que, puesto que la noción de creencia es más débil que la de conocimiento, toda alternativa doxástica ha de ser también una alternativa epistémica (o lo que es igual, si a sabe que φ, entonces a cree que φ). Si aceptamos esto, debemos restringir la definición de D de forma que ya no baste con exigir que $D_{a_i} \subseteq W^2$, sino más bien $D_{a_i} \subseteq E_{a_i} \subseteq W^2$. De esta forma se garantiza que si a sabe que φ, entonces φ es verdadero no sólo en todos los mundos posibles compatibles con lo que a sabe, sino también en aquellos compatibles con lo que a cree. La función de evaluación v y la verdad de una fórmula φ en un mundo posible s de un modelo M ($M, s \vDash \varphi$) se definen como anteriormente.

Como vimos respecto al conocimiento y la creencia, las propiedades de las respectivas relaciones de accesibilidad determinarán qué axiomas son válidos respecto a cada uno de estos operadores. Aunque lo común es suponer las mismas propiedades para ambas relaciones, no hay en principio inconveniente en usar, por ejemplo, un operador doxástico con las propiedades de $KD4_m$ y un operador epistémico con las de $S5_m$. Tenemos, pues, nueve sistemas posibles de lógica epistémico-doxástica (salvo que decidamos añadir una propiedad que mencionaremos a continuación). Estos sistemas son:

$T_m + KD_m$
$T_m + KD4_m$
$T_m + KD45_m$
$S4_m + KD_m$
$S4_m + KD4_m$
$S4_m + KD45_m$
$S5_m + KD_m$
$S5_m + KD4_m$
$S5_m + KD45_m$

En cuanto a la axiomatización, los esquemas de axioma y las reglas necesarios para axiomatizar completamente $LEDP$, suponiendo $S5_m$ para el operador K y $KD45_m$ para el operador B, son los que se muestran en el cuadro 3.3.

A1 Todas las tautologías de la lógica proposicional.

A2 $(K_{a_i}\varphi \wedge K_{a_i}(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow K_{a_i}\psi$

A3 $K_{a_i}\varphi \rightarrow \varphi$

A4 $K_{a_i}\varphi \rightarrow K_{a_i}K_{a_i}\varphi$

A5 $\neg K_{a_i}\varphi \rightarrow K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$

A6 $(B_{a_i}\varphi \wedge B_{a_i}(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow B_{a_i}\psi$

A7 $\neg B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi)$

A8 $B_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}B_{a_i}\varphi$

A9 $\neg B_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}\neg B_{a_i}\varphi$

A10 $K_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}\varphi$

R1 $\dfrac{\begin{matrix}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{matrix}}{\psi}$

R2 $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash K_{a_i}\varphi}$

R3 $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash B_{a_i}\varphi}$

Cuadro 3.3

Los axiomas 2-5 son los propios del sistema $S5_m$ de lógica epistémica, mientras que los axiomas 6-9 son los propios de $KD45_m$ para la lógica doxástica; de manera que el único axioma especifico de $LEDP$ es A10[1], que recoge la relación entre operadores epistémicos y doxásticos: resulta del hecho de que toda alternativa doxástica es también una alternativa epistémica (esto es, $D_{a_i} \subseteq E_{a_i}$), lo que se demuestra a continuación.

[1] Hitikka (Hintikka, J. (1962), sec. 3.7) ofrece una versión algo diferente, aunque expresada en otros términos. Expresada como esquema de axioma su condición C.KB sería: $K_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}K_{a_i}\varphi$, que depende del hecho de que $D_{a_i} \subseteq E_{a_i}$ y de que E_{a_i}es transitiva. Es, por tanto, más fuerte que A10. El sistema axiomático de Kraus y Lehmann, por su parte, consta de los axiomas A2, A3, A5, A6, A7, A10 y $K_{a_i}\varphi \rightarrow B_{a_i}K_{a_i}\varphi$.

Teorema 3.3.1. *Sea* M^I *el conjunto de todos los modelos tales que* $D_{a_i} \subseteq E_{a_i} \subseteq W$. *se cumple que:*

$$\vDash_{M^I} K_{a_i}\varphi \to B_{a_i}\varphi$$

Demostración: suponemos que $M, s \vDash K_{a_i}\varphi$ para algún $M \in M^I$ y para algún $s \in M$ (recordemos que usamos $s \in M$ para abreviar $s \in W$ de la estructura M). Supongamos ahora un $t \in M$ tal que $sD_{a_i}t$. Puesto que $D_{a_i} \subseteq E_{a_i}$, se cumple que $sE_{a_i}t$; y por evaluación de K, que $M, t \vDash \varphi$. Pero, puesto que t es una alternativa doxástica cualquiera a s, esto significa que $M, s \vDash B_{a_i}\varphi$, por evaluación de B. QED.

A este axioma específico algunos[2] añaden el siguiente:

$$\textbf{A11: } B_{a_i}\varphi \to K_{a_i}B_{a_i}\varphi.$$

Hintikka rechaza esta propuesta por la siguiente razón: el axioma 11, al que él llama condición $C.bb^+ep$, significa que si $M, s \vDash B_{a_i}\varphi$, entonces $M, t \vDash B_{a_i}\varphi$, para todo $t \in M$ tal que $sE_{a_i}t$. Esto es, las creencias de un sujeto se mantienen constantes a lo largo de todas las alternativas epistémicas. Sin embargo, es pensable una alternativa epistémica en la que el agente pueda tener más conocimientos de los que actualmente tiene, y que ello le obligue a renunciar a alguna de sus creencias, pero esto es exactamente lo que A11 prohibe. De hecho, la fórmula $B_{a_i}\varphi \wedge \widehat{K}_{a_i}B_{a_i}\neg\varphi$ es contradictoria con el axioma 11.

En cualquier caso, este axioma es válido en todos los modelos en que las relaciones E_{a_i} y D_{a_i} cumplen la siguiente propiedad, que podemos llamar intertransitividad:

Definición 3.3.2. Un modelo kripkeano M es intertransitivo syss para todo $s, t, u \in W$ de la estructura M, si $sE_{a_i}t$ y $tD_{a_i}u$, entonces $sD_{a_i}u$.

Teorema 3.3.3. *Sea* M^{it} *el conjunto de todos los modelos kripkeanos de intertransitivos, se cumple que:*

$$\vDash_{M^{it}} B_{a_i}\varphi \to K_{a_i}B_{a_i}\varphi$$

[2]Por ejemplo, Ditmarsch, H. van y Verbrugge, R. (2003c).

Demostración: partimos del supuesto de que $M, s \vDash B_{a_i}\varphi$, para $M \in M^{it}$ y $s \in M$. Sean t y u cualesquiera tales que $sE_{a_i}t$ y $tD_{a_i}u$. Por intertransitividad, $sD_{a_i}u$; y por evaluación de B, $M, u \vDash \varphi$. como esto ocurre para cualquier alternativa doxástica a t con respecto al agente a_i, $M, t \vDash B_{a_i}\varphi$; y como, a su vez, t es una alternativa epistémica cualquiera a s respecto al agente a_i, $M, s \vDash K_{a_i}B_{a_i}\varphi$. QED.

Así pues, si queremos trabajar con $S5_m$ respecto a los operadores epistémicos y $KD45_m$ respecto a los doxásticos, tendremos que usar los esquemas de axioma 1-10 y las reglas 1-3. Si queremos que los operadores doxásticos respondan a $KD4_m$, deberemos eliminar el axioma 9; y lo mismo deberemos hacer con el axioma 5 si queremos que K responda a $S4$. Para bajar aún más el nivel a KD_m y T_m tendremos que eliminar, respectivamente, A8 y A4. a todas estas combinaciones podemos añadir el ya citado, aunque controvertido, axioma 11, con lo que los nueve sistemas mencionados se convierten en dieciocho. La prueba de corrección de estos sistemas se obtiene inmediatamente del teorema 3.3.1 (y de 3.3.3, si deseamos añadir el axioma 11) junto a los ya conocidos para lógica epistémica y para lógica doxástica. La prueba de completud es, una vez más, idéntica a la de 2.5.

3.4. El creyente perfecto

Un resultado considerado indeseable de la adopción del sistema $S5_m$ para la noción de conocimiento, al combinarse con el axioma A10, es que la siguiente proposición resulta ser válida:

$$B_{a_i}K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\varphi.$$

Intuitivamente, esto significa que un agente no puede equivocarse cuando cree saber algo. Por esta razón, este resultado se conoce como *la paradoja del creyente*[3] *perfecto*. La derivación es como sigue:

[3]La palabra *creyente* no es una traducción afortunada del inglés *believer*; ya que en español alude siempre a una creencia religiosa. Si lo usamos es tan sólo porque no se nos ocurre una traducción mejor.

1.	$K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi \to B_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$	A10: $\neg K_{a_i}\varphi/\varphi$
2.	$B_{a_i}\varphi \to \neg B_{a_i}\neg\varphi$	A7+LP
3.	$B_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi \to \neg B_{a_i}K_{a_i}\varphi$	2: $\varphi/\neg K_{a_i}\varphi$
4.	$\neg K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$	A5
5.	$\neg K_{a_i}\varphi \to B_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$	Sil. Hip. 4,1
6.	$\neg K_{a_i}\varphi \to \neg B_{a_i}K_{a_i}\varphi$	Sil. Hip. 5,3
7.	$B_{a_i}K_{a_i}\varphi \to K_{a_i}\varphi$	Contr. 6

En realidad, no se trata de una verdadera paradoja (no al menos en el sentido de la paradoja de Russell y similares), aunque sí que se trata de una conclusión contraintuitiva. En realidad, no debería resultarnos extraño si recordamos que $S5_m$ es un sistema en el que si un agente sabe algo, sabe que lo sabe; y si no sabe algo, también sabe que no lo sabe; de forma que no queda espacio para que un agente crea saber algo que no sabe realmente.

Así pues, si no queremos aceptar este resultado contraintuitivo, parece que la opción más natural sería sustituir $S5_m$ por un sistema más débil. Algunas sugerencias sobre sistemas más débiles que $S5_m$ pero más fuertes que $S4_m$ pueden verse en 2.3.

Sin embargo, no es esta la única opción. Hemos visto que la demostración depende esencialmente de los axiomas A10 y A7, además de A5; así pues, podemos optar por sustituir cualquiera de los otros dos para evitar la conclusión indeseada.

La opción seguida por Voorbraak[4] es sustituir el esquema de axioma A10 por los dos siguientes:

$$B_{a_i}\varphi \to K_{a_i}B_{a_i}\varphi$$

$$B_{a_i}\varphi \to B_{a_i}K_{a_i}\varphi.$$

Esta propuesta abandona la idea intuitiva, fuertemente anclada en la tradición filosófica, de que todo el que sabe algo también lo cree. Sin embargo, no resulta imposible de defender si recordamos que el axioma A2 exige que el agente sea "lógicamente omnisciente", y por tanto no podemos considerar que estamos usando el término saber en el sentido ordinario de "ser consciente de". Esto hace

[4]Voorbraak, F. (1992).

más verosímil que alguien pueda saber algo (aunque no necesariamente de forma consciente) pero no creerlo.

Cabe mencionar, aunque sólo sea de pasada, que aún cabe una tercera opción: el tercer axioma implicado en la derivación de la llamada *paradoja del perfecto creyente* es A7, en su forma $B_{a_i}\varphi \rightarrow \neg B_{a_i}\neg\varphi$. Así pues, una forma de evitar esta consecuencia indeseada es renunciar a A7 y permitir $B_{a_i}\varphi \wedge B_{a_i}\neg\varphi$.

Naturalmente, $B_{a_i}\varphi \wedge B_{a_i}\neg\varphi$ da lugar, por factorización, a $B_{a_i}(\varphi \wedge \neg\varphi)$; que es una consecuencia aún más indeseable, puesto que parece aceptado que no se puede creer una contradicción. Con todo, se puede evitar también esta consecuencia indeseable renunciando al principio de factorización $B_{a_i}\varphi \wedge B_{a_i}\psi \rightarrow B_{a_i}(\varphi \wedge \varphi)$, con lo que la lógica epistémica dejaría de ser una lógica modal normal. Esta es, al parecer, la posición actual de R. Barcan Marcus[5].

3.5. Tablas semánticas

Proponer un método de tablas semánticas para esta lógica epistémico-doxástica requiere poco más que modificar las reglas de herencia y combinar el resto de las reglas ya presentadas para la lógica epistémica y la doxástica; aunque previamente es necesario hacer algunas adaptaciones formales.

Para empezar, hay que modificar el sistema de etiquetas para indicar si el mundo posible al que corresponde cada una de ellas es una alternativa epistémica o doxástica. El concepto de etiqueta queda ahora definido por las siguientes reglas:

a) 1 es una etiqueta.

b) Si σ es una etiqueta, $\sigma.Ea_in$ y $\sigma.Da_in$ también lo son (para algún $n \geq 1$ y para $a_i \in A$).

Los conceptos de ascendiente epistémico y doxástico respecto a un agente dado a_i de una etiqueta deben ser reformulados teniendo en cuenta la nueva forma de las etiquetas, pero además, puesto que hemos estipulado que $D_{a_i} \subseteq E_{a_i}$, nos vemos obligados a modificar el concepto de ascendiente epistémico de una etiqueta de la siguiente forma:

a) σ es un ascendiente epistémico de σ respecto a cualquier agente.

[5] Así al menos lo afirma Gochet, P y Gribomont, P. (2006).

b) $\sigma.Xa_in$ es un ascendiente epistémico respecto a a_i de $\sigma.Xa_in.Xa_jm$ syss $a_i = a_j$ (donde X puede ser indistintamente E o D).

c) Si σ es un ascendiente epistémico de τ respecto a a_i y τ lo es de κ, entonces σ es un ascendiente epistémico de κ.

Este sería ahora un ejemplo de una serie de etiquetas, cada una de las cuales es un ascendiente epistémico de todas las que le siguen:

$$1.Ea_13 \quad 1.Ea_13.Da_11 \quad 1.Ea_13.Da_11.Ea_15$$

El concepto de ascendiente doxástico de una etiqueta (respecto a un agente a_i) queda definido como anteriormente, con el correspondiente cambio de notación. Esto exige, en concreto, especificar que en una cadena de etiquetas cada una de las cuales constituye un ascendiente doxástico respecto a a_i de las anteriores, cada nuevo eslabón es de tipo doxástico (esto es, comienza con la letra D):

a) $\sigma.Da_in$ es un ascendiente doxástico de $\sigma.Da_in$ respecto a cualquier agente.

b) $\sigma.Da_in$ es un ascendiente doxástico respecto a a_i de $\sigma.Da_in.Da_jm$ syss $a_i = a_j$.

c) Si σ es un ascendiente doxástico de τ respecto a a_i y τ lo es de κ entonces σ es un ascendiente doxástico de κ.

En cuanto a las reglas de construcción de la tabla, ya hemos dicho que las que denominamos reglas comunes no necesitan ninguna modificación, salvo en lo relativo a la notación de las etiquetas. Esta modificación consiste meramente en que si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\varphi$, tendremos que escribir al final de la rama $\sigma.Ea_in :: \varphi$; y si la fórmula a marcar es es $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\varphi$, tendremos que escribir es $\sigma.Da_in :: \varphi$.

Las reglas correspondientes a los operadores epistémicos deben ser modificadas para ajustarlas al hecho de que las alternativas doxásticas son también epistémicas. Quedan redactadas de la siguiente forma:

HKT: Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escriben al término de la rama $\sigma.Ea_in :: \alpha$, y $\sigma.Da_in :: \alpha$ para todas las etiquetas $\sigma.Ea_in$ y $\sigma.Da_in$ que aparezcan en la rama.

HKS4: Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escriben al término de la rama $\sigma.Ea_in :: K_{a_i}\alpha$, y $\sigma.Da_in :: K_{a_i}\alpha$ para todas las etiquetas $\sigma.Ea_in$ y $\sigma.Da_in$ que aparezcan en la rama.

HKS5:

a) Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$, se escriben al término de la rama $\sigma.Ea_in :: K_{a_i}\alpha$, y $\sigma.Da_in :: K_{a_i}\alpha$ para todas las etiquetas $\sigma.Ea_in$ y $\sigma.Da_in$ que aparezcan en la rama.

b) Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma.Ea_in :: K_{a_i}\alpha$ o $\sigma.Da_in :: K_{a_i}\alpha$, se escribe $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ al término de la rama.

Como en los casos anteriores, estas reglas sólo se aplican si la fórmula que en cada caso tendríamos que escribir no existe ya en la rama.

Tenemos pues una regla de herencia para cada sistema de lógica epistémica y otra para cada sistema de lógica doxástica. La combinación correspondiente a cada uno de los nueve sistemas posibles de lógica epistémico-doxástica se logra simplemente eligiendo la regla adecuada de cada uno de ellos.

En cuanto a las reglas de herencia correspondientes a los operadores doxásticos, quedan sin modificar, salvo los cambios oportunos en la notación de las etiquetas, a menos que queramos aceptar el axioma 11 (y la correspondiente relación de intertransitividad); en cuyo caso hay que añadir la siguiente:

HBK: Si en una rama de la tabla aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: B_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.Ea_in :: B_{a_i}\alpha$, para toda etiqueta $\sigma.Ea_in$ que aparezca en la rama.

Las pruebas de corrección y completud de este método de tablas son, nuevamente, idénticas a las presentadas para lógica epistémica, salvo por la diferencia ya mencionada para el operador B.

3.6. Un caso a modo de ejemplo

A modo de ejemplo, demostraremos la paradoja del perfecto creyente. Esto es, mostraremos que la tabla semántica de la negación de $B_aK_ap \to K_ap$ es cerrada

Cuadro 3.1: $B_aK_ap \wedge \widehat{K}_a\neg p$

$$
\begin{array}{lll}
1) & 1 :: B_aK_ap \wedge \widehat{K}_a\neg p \quad {\scriptstyle \wedge} & \text{(asunción)} \\
2) & 1 :: B_aK_ap \quad {\scriptstyle B} & \text{(de 1)} \\
3) & 1 :: \widehat{K}_a\neg p \quad {\scriptstyle \widehat{K}(1.Ea1)} & \text{(de 1)} \\
4) & 1 :: \widehat{B}_aK_ap \quad {\scriptstyle \widehat{B}(1.Da1)} & \text{(de 2)} \\
5) & 1.Da1 :: K_ap \quad {\scriptstyle K} & \text{(de 4)} \\
6) & 1.Da1 :: p & \text{(de 5)} \\
7) & 1 :: K_ap \quad {\scriptstyle K} & \text{(HKS5b de 5)} \\
8) & 1 :: p & \text{(de7)} \\
9) & 1.Ea1 :: \neg p & \text{(de 3)} \\
10) & 1.Ea1 :: K_ap \quad {\scriptstyle K} & \text{(HKS5a de 7)} \\
11) & 1.Ea1 :: p & \text{(de 10)} \\
 & \otimes &
\end{array}
$$

cuando se utilizan las reglas de herencia de $S5_m$, en la versión correspondiente a este cálculo epistémico doxástico. Esta tabla se muestra en el cuadro 3.1.

Capítulo 4

Lógica epistémica de primer orden

4.1. Sintaxis

Trataremos ahora el que quizá sea el asunto que más discusiones ha suscitado en relación con las lógicas modales, y no sólo con la epistémica, que es la extensión de esta lógica con símbolos de predicados y cuantificadores para definir una lógica epistémica de primer orden. La razón de que esta extensión haya sido tan discutida es que da lugar a problemas que han resultado centrales en la filosofía de la lógica del último medio siglo. Estos problemas son esencialmente dos: el fallo de las reglas de generalización existencial y de sustituibilidad de la identidad; aunque también ha jugado un papel relevante el problema de identificar a los individuos a través de los distintos mundos posibles. Ya se ha hecho alguna mención de pasada a alguno de estos problemas, y volverán a discutirse con detalle cuando llegue la ocasión. Por el momento, es necesario detenerse en cuestiones de índole más técnico antes de poderlas tomar en consideración,

Para empezar, necesitamos definir el lenguaje de una lógica epistémica de primer orden, al que denominaremos $LEPO$. Por razones de simplicidad, no introduciremos por el momento términos de función ni identidad, ambos serán tratados más adelante. Por supuesto, es fácil reconstruir lo que aquí se dice introduciendo términos de función, pero eso añadiría complicaciones innecesarias en este primer acercamiento.

Hemos de decir también que no consideraremos por ahora la cuantificación sobre los agentes de conocimiento, por lo que se entenderá que los cuantificadores no afectan a los subíndices de los operadores epistémicos. Por supuesto, puede ser interesante formalizar expresiones como "todo el mundo sabe que φ", pero eso se tratará cuando introduzcamos nociones de conocimiento de grupos. también es claro que los agentes de conocimiento pueden a su vez formar parte del dominio de cada mundo posible, y que podemos por tanto predicar sobre ellos como sobre un objeto más, pero este es un asunto trivial que no merece más consideración.

Las reglas de formación de fórmulas son pues las siguientes:

Sean $\mathcal{P}$ un conjunto de constantes predicativas (cuando no se deduzca del contexto, indicaremos con un superíndice la aridad de cada constante), $T = C \cup V$ un conjunto de términos de individuo, donde C es un conjunto numerable (posiblemente infinito) de constantes individuales a, b, c (eventualmente con subíndices) y V es un conjunto numerable (posiblemente infinito) de variables individuales x, y, z (también eventualmente con subíndices); y sea A un conjunto de agentes. $LEPO$ es el conjunto más pequeño que cumple:

1. Si $P^n \in \mathcal{P}$ y $t_1, \cdots, t_n \in T$, entonces $P^n(t_1, \cdots, t_n) \in LEPO$
2. Si $\varphi \in LEPO$, entonces $\neg\varphi \in LEPO$
3. Si $\varphi, \psi \in LEPO$, entonces $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in LEPO$
4. Si $\varphi \in LEPO$ y $x \in V$, entonces $\forall x\varphi, \exists x\varphi \in LEPO$
5. Si $\varphi \in LEPO$, entonces $K_{a_i}\varphi, \widehat{K}_{a_i}\varphi \in LEPO$ (para $i \in A$)

Es interesante destacar que las reglas de formación de fórmulas que hemos presentado permiten que un cuantificador caiga bajo el alcance de un operador epistémico. Aunque esto ha sido bastante discutido, especialmente por Quine[1], parece un uso bastante natural y común en el lenguaje ordinario. Pensemos por ejemplo en la siguiente pareja de expresiones:

$$(1)\ \exists x K_{a_i} P(x, a)$$

$$(2)\ K_{a_i} \exists x P(x, a)$$

Supongamos que a designa a la República Francesa, la traducción directa de estas expresiones sería:

[1]Aunque no específicamente en relación con las modalidades epistémicas. Por ejemplo, en Quine, W. V. (1956).

(3) Hay alguien de quien a_i sabe que es el presidente de la República Francesa

(4) a_i sabe que hay alguien que es el presidente de la República Francesa

Pero es evidente que una traducción más natural sería:

(3') a_i sabe quién es el presidente de la República Francesa

(4') a_i sabe que hay un presidente de la República Francesa (i.e.: i sabe que Francia es una república)

Esto es, permitir que los cuantificadores caigan dentro del alcance de los operadores modales permite expresar de manera bastante natural la diferencia entre "saber quién" y "saber que". Aunque ya veremos que, según cómo se construyan los modelos, estas expresiones podrían resultar equivalentes.

4.2. De dicto y de re

La diferencia entre las oraciones (1) y (2) del apartado anterior se corresponde además con lo que los lógicos medievales llamaron "modalidades *de dicto*" y "modalidades *de re*". Efectivamente, cuando decimos por ejemplo que todos los hombres son, necesariamente, mortales; podemos estar diciendo dos cosas: (a) que es necesariamente verdadero que todos los hombres son mortales, o bien (b) que todos los hombres son tales que son necesariamente mortales. En el primer caso, la modalidad se atribuye a la proposición completa "todos los hombres son mortales"; en el segundo, la necesidad se atribuye a la posesión de una propiedad, la mortalidad, por cada hombre. De ahí que se llame a las primeras "modalidades tomadas de dicto" y a las segundas "modalidades tomadas de re". Como era de esperar, esta distinción se aplica sin más a las modalidades epistémicas; así, mientras que $K_{a_i}\forall x\varphi(x)$ expresa una modalidad de dicto, $\forall x K_{a_i}\varphi(x)$ la expresa de re.

Todo parecería indicar que se trata meramente de una diferencia de alcance. Así lo interpretan Hughes y Cresswell; quienes, sin pretensión de analizar las diferencias entre el uso medieval y el moderno de esta distinción, definen las modalidades de dicto y de re como sigue:

> Una fbf, α, que contenga un operador modal (L o M) se dirá que expresa una modalidad *de re* SI el ámbito de algún operador modal de ella contiene alguna aparición libre de una variable individual; de lo contrario se dirá que α expresa una modalidad *de dicto*[2].

El problema de esta interpretación es que no dice nada sobre los términos de individuo; pero es obvio que respecto a ellos la modalidad también puede ser usada de dicto o de re. Parafraseando un ejemplo de Quine, supongamos que t designa el número de los planetas; y supongamos también un agente i que aún no se ha enterado de la reciente decisión de los astrónomos de degradar a Plutón de su condición de planeta (quedando así su número reducido a ocho). Resulta verdad entonces lo siguiente:

(5) a_i no sabe que el número de planetas es par

que formalmente expresamos:

$$(6) \neg K_{a_i} P(t)$$

pero (5) puede significar dos cosas:

(7) del número de planetas (i.e., ocho), a_i no sabe que es par

o bien

(8) a_i no sabe que el número de planetas (sea cual sea éste) es par.

Como puede verse, la diferencia entre (7) y (8) es más que notable. Probablemente, hay poca gente que ignore que ocho es par; pero puede haber muchas personas que ignoren que el número de planetas es ocho (y por tanto par). La diferencia es una vez más la que se da entre modalidades de re y de dicto.

El problema es: ¿cómo podemos expresar esta diferencia de significado en una fórmula como (6)? Ya veremos que no nos va a hacer demasiada falta, puesto que entenderemos las constantes individuales como designadores rígidos. Pero es necesario entender adecuadamente esta cuestión antes de continuar avanzando. Para ello, y aunque no lo hemos introducido en nuestro formalismo, podemos hacer uso provisionalmente de la abstracción de predicados.

[2]Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1968). La expresión SI es abreviatura de "si y sólo si".

Es conocido que podemos obtener un nuevo predicado a partir de una fórmula usando el operador lambda (λ). Dada una fórmula φ, $\langle \lambda x \varphi(x) \rangle$ designa al conjunto de los x tales que $\varphi(x)$. De esta forma, podemos reescribir $P(t)$ como $\langle \lambda x P(x) \rangle (t)$. Las dos interpretaciones posibles de (6) dependen ahora del alcance mutuo del operador λ y el operador K; de modo que

$$(9)\ \langle \lambda x \neg K_{a_i} P(x) \rangle (t)$$

y

$$(10)\ \neg K_{a_i} \langle \lambda x P(x) \rangle (t)$$

son ahora las formalizaciones adecuadas para (7) y (8). La primera de ellas, (9), contiene la aparición libre de una variable bajo el alcance de un operador epistémico; y expresa por tanto una modalidad de re. Esto es, es del objeto designado por la expresión "el número de planetas" del que i no sabe que es par. En la fórmula (10), por el contrario, no aparece ninguna variable libre bajo el alcance del operador K. Es sobre la expresión completa "el número de planetas es par" sobre lo que versa la ignorancia de a_i; y la modalidad es por tanto de dicto.

4.3. Designadores rígidos

Aquí es donde intervienen los que Kripke [3] denominó "designadores rígidos"[4]. Un designador rígido es aquel que designa al mismo objeto en todos los mundos posibles[5]. Si decimos, por ejemplo, que Barack Obama podría no haber ganado las elecciones, estamos considerando un mundo posible en el que el sujeto llamado (en el mundo real) "Barack Obama" no sería presidente de los Estados Unidos de América. El nombre propio empleado en la expresión no cambia él mismo su denotación cuando cambiamos de un mundo posible a otro, aunque la persona

[3]Kripke, S.A. (1986).

[4]Un análisis interesante de los problemas aquí planteados se encuentra en Priest, G (2002).

[5]En realidad, cabe distinguir entre designadores rígidos y designadores localmente rígidos. Los primeros son aquellos que designan al mismo objeto en todos los mundos posibles de un modelo dado. Los segundos, sólo en todos los mundos accesibles entre sí; es decir, si $sR_{a_i}t$, entonces t designa al mismo objeto en s y en t. Ambos conceptos son distintos, pero definen la misma lógica en un sentido preciso: si φ es una fórmula en la que ocurre el término (sin variables libres) t, entonces φ es válida en todos los modelos en los que t es rígido syss φ es válida en todos los modelos en que t es localmente rígido.

designada por él sí que tiene distintas propiedades en los distintos mundos. El término individual aparece usado, pues, como un designador rígido.

Kripke es de la opinión de que los nombres propios funcionan como designadores rígidos cuando interpretamos las modalidades aléticamente. Se trata de términos cuya referencia se fija por procedimientos arbitrarios, al contrario que los términos de función o las descripciones definidas, y que no cambia cuando transitamos de un mundo posible a otro[6].

Hay que destacar, sin embargo, que un término puede ser rígido bajo ciertas modalidades y no-rígido bajo otras. Por ejemplo, el menor número perfecto es necesariamente seis, pero la mayor parte de la gente probablemente no lo sabe; así pues, la descripción definida "el menor número perfecto" puede funcionar como designador rígido bajo una modalidad alética, pero no bajo una modalidad epistémica. A Fitting y Mendelsohn les parece difícil incluso saber si hay designadores rígidos en contextos epistémicos[7].

Aunque no es nuestra intención dilucidar el uso de los designadores rígidos en lenguajes naturales, parece ser una cuestión fuertemente dependiente del contexto y de la intención de los hablantes. Cuando usamos términos de individuo en contextos modales necesitamos referirnos a ellos bajo el supuesto de que tuvieran (o no tuvieran) propiedades que realmente no tienen (o tienen). La forma más natural de hacerlo parece el uso del nombre propio, que en general no designa por medio de una propiedad concreta; pero el hablante está perfectamente legitimado para elegir otro término siembre que su mensaje resulte comprensible. Así, siguiendo con el ejemplo anterior, un hablante podría decir "el presidente de los Estados Unidos podría no haber ganado las elecciones", y nadie entendería que se está sugiriendo que ha dado un golpe de estado. De forma algo extraña, pero comprensible, se está usando la descripción definida "el presidente de los Estados Unidos" como designador rígido para designar al individuo Barack Obama en un mundo posible en que, precisamente, no es el presidente de los Estados Unidos. Nada que objetar.

Sea o no este el uso habitual en los lenguajes naturales, nosotros desde luego estamos perfectamente legitimados para introducir designadores rígidos en nuestro lenguaje formal; y las constantes son sin duda el elemento más adecuado para ello.

[6]Llega a afirmar que un símbolo que no sea un designador rígido 'es tan diferente de los nombres del lenguaje ordinario que no debería llamarse un "nombre" '. Ibíd. Nota 5.

[7]Fitting, M. y Mendelsohn, R. L. (1988), p. 219

Así pues, entenderemos que la función de evaluación v asigna el mismo individuo del dominio a cada constante individual en cada mundo posible del modelo en cuestión, exista o no ese individuo en ese mundo posible[8], que es una cuestión que se tratará más adelante.

Mencionamos antes que el uso de las constantes individuales como designadores rígidos soluciona el problema de distinguir entre el uso de re y de dicto de la modalidad, por lo que hace a estas constantes. Y es que efectivamente, si denominamos $M^{(c)}$ al conjunto de modelos en los que el término c aparece usado como designador rígido, se cumple que

$$\vDash_{M^{(c)}} \langle \lambda x K_{a_i} P(x) \rangle (c) \leftrightarrow K_{a_i} \langle \lambda x P(x) \rangle (c)^9,$$

lo cual significa que los designadores rígidos se caracterizan porque respecto ellos no puede hacerse la distinción *de re/de dicto*.

4.4. Dominio constante y dominios variables

En buena medida, la semántica de una lógica epistémica de primer orden es una combinación de la habitual en primer orden con la que hemos presentado para la lógica epistémica. No obstante, la existencia de mundos posibles alternativos al, digamos, mundo real, exige adoptar ciertos compromisos, incluso ontológicos, sobre los individuos que existen en cada uno de estos mundos.

Una posibilidad es admitir un dominio único común a todos los mundos posibles de un modelo dado; con lo cual pueden variar las propiedades que los individuos tienen en un mundo respecto a las que tienen en otro, así como las relaciones que mantienen con otros individuos del dominio, pero no los individuos propiamente dichos, que son los mismos en todos los mundos.

Este tipo de semánticas es más simple técnicamente y resulta adecuada para formalizar ciertas situaciones, como mencionaremos más adelante. No obstante,

[8]Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995) hacen exactamente lo contrario. Para cada modelo M y cada mundo s introducen una función de evaluación V que asigna a cada variable individual el mismo significado en todos los mundos posibles, y a cada constante individual un significado que puede ser distinto en cada mundo posible.

[9]Puesto que no introducimos el operador lambda en nuestro lenguaje formal, sino que lo usamos simplemente con propósitos expositivos, no ofreceremos prueba de esta proposición. el lector interesado puede encontrarla en Fitting, M. y Mendelsohn, R. L. (1988), pp. 212 y ss.

hay un gran número de situaciones en que la suposición de que todos los mundos posibles contienen los mismos individuos resulta totalmente inadecuada. Por ejemplo, resulta natural decir de alguien que no sabe que Napoleón existió (dejemos de lado por ahora el elemento temporal, ya veremos cómo se formaliza la existencia), lo cual significa que hay un mundo posible compatible con lo que el sujeto en cuestión sabe en el que el individuo designado por el término *Napoleón*, no existe. En sentido contrario, hay muchos niños que creen en la existencia de los Reyes Magos. Si aceptamos, sólo hipotéticamente, que los Reyes Magos no existen en el mundo real, entonces debe haber un mundo posible compatible con lo que cada uno de estos niños cree cuyo dominio contiene más individuos que el mundo real; a saber, Melchor, Gaspar y Baltasar.

Hablaremos de semántica de dominio constante para referirnos a aquella en que el dominio es común a todos los mundos posibles del modelo, y de semántica de dominios variables para este último tipo, en que los individuos existentes pueden variar de un mundo a otro.

En el caso de los dominios variables, podemos imponer la restricción de que el dominio de cada alternativa epistémica contenga al menos los mismos individuos que el del mundo desde el que es accesible. Esto es, si denominamos $\mathfrak{D}(s)$ al dominio del mundo s y $\mathfrak{D}(t)$ al del mundo t; si $sR_{a_i}t$, entonces $\mathfrak{D}(s) \subseteq \mathfrak{D}(t)$. Hablaremos en este caso de dominios crecientes o monótonos. En el caso contrario, si $sR_{a_i}t$, entonces $\mathfrak{D}(t) \subseteq \mathfrak{D}(s)$, hablamos de dominios decrecientes o antimonótonos. Ya veremos que según que optemos por una u otra de estas opciones obtendremos sistemas con diferentes fórmulas válidas; la fórmula Barcan, por ejemplo, es válida en todos los modelos variables con dominios antimonótonos, y su conversa en los modelos con dominios monótonos. Por supuesto, ambas son válidas en los dominios de modelo constante.

Cuando queramos distinguir entre los distintos sistemas de lógica epistémica, denominaremos CS a la extensión a primer orden del correspondiente sistema S con dominio constante y VS a la extensión de S con dominios variables. Los sistemas con dominios variables monótonos y antimonótonos se denominarán respectivamente MS y AS.

4.5. Semántica de dominio constante

Para este primer caso, no necesitamos más que añadir a nuestros modelos el dominio $\mathfrak{D}$ común a todos los mundos. Así, un modelo kripkeano extendido será una estructura $M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$, y la función de evaluación υ ya no es una función que asigna a cada variable proposicional en cada mundo posible un valor de verdad, sino una función que asigna i) a cada constante individual un elemento del dominio, y ii) a cada constante predicativa n-ádica una n-pla ordenada de elementos del dominio. Así pues:

a $\upsilon(s, a) \in \mathfrak{D}$

b $\upsilon(s, P^n) \in \mathfrak{D}^n$

Si además aceptamos, como haremos aquí, el uso de las constantes de individuo como designadores rígidos; tendremos que imponer la siguiente condición: para todo $s, t \in W$ y para toda constante individual a, $\upsilon(s, a) = \upsilon(t, a)$. Para abreviar, siempre que estemos considerando las constantes individuales como designadores rígidos escribiremos $\upsilon(a)$ en lugar de $\upsilon(s, a)$, etc. Por supuesto, no podemos hacer un tratamiento semejante de las constantes predicativas, pues en ese caso todos los mundos posibles harían verdaderas y falsas a las mismas fórmulas y nuestro sistema de lógica epistémica proposicional devendría en un sistema trivial.

La noción de verdad de una fórmula φ en un mundo s de un modelo M, que como siempre escribiremos $M, s \vDash \varphi$, queda definida como hasta ahora, añadiendo las cláusulas correspondientes a la lógica de primer orden. Aunque, por supuesto, es perfectamente posible asignar valores a las variables libres y establecer así el valor de verdad de formulas abiertas bajo ciertas asignaciones, consideramos preferible asignar valores de verdad tan sólo a las sentencias. Como siempre, escribiremos $s \in M$ como abreviatura de $s \in W$ de la estructura M. La cláusula para fórmula atómicas queda ahora definida como sigue:

1. $M, s \vDash P(a_1, \cdots, a_n)$ syss $\langle \upsilon(a_1), \cdots, \upsilon(a_n) \rangle \in \upsilon(s, P)$

Las condiciones de verdad para las conectivas proposicionales y los operadores epistémicos son las mismas que en el caso proposicional (2-7 de la sección 2.2). Las condiciones para los cuantificadores son las siguientes:

8. $M, s \vDash \forall x \varphi$ syss $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para toda M', s' tales que $s' = s$ y $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$.

9. $M, s \vDash \exists x\varphi$ syss $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$.

La expresión $\varphi\,(a/x)$ que aparece en estas dos cláusulas denota el resultado de sustituir uniformemente x por a en la fórmula φ. $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$ significa que $M' = M$ salvo, a lo sumo, respecto al valor que la función de evaluación υ asigna a la constante a.

Respecto a estos modelos con dominio constante, es interesante considerar las que se suelen llamar, por analogía con la lógica modal alética, *Fórmula Barcan* y *Conversa de la Fórmula Barcan*[10] (respectivamente: FB y CFB):

FB: $\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to K_{a_i}\forall x\varphi(x)$

CFB: $K_{a_i}\forall x\varphi(x) \to \forall x K_{a_i}\varphi(x)$

Es fácil demostrar que todo modelo con dominio constante satisface ambas fórmulas:

Teorema 4.5.1. *Sea M_c el conjunto de todos los modelos kripkeanos con dominio constante. Se cumple que*

$$\vDash_{M_c} \forall x K_{a_i}\varphi(x) \to K_{a_i}\forall x\varphi(x).$$

Demostración: Suponemos que $M, s \vDash \forall x K_{a_i}\varphi(x)$, para $M \in M_c$ y $s \in M$. Esto significa que para toda s', M' tales que $s' = s$ y $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$, $M', s' \vDash K_{a_i}\varphi(a)$. De aquí se sigue, por evaluación de K, que $M', t' \vDash \varphi(a)$ para todo t' tal que $s' R_{a_i} t'$. Puesto que $t' = t$ y $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$, $M, t \vDash \forall x\varphi(x)$; y puesto que ambos modelos son iguales salvo, a lo sumo, por lo que hace a la evaluación de a, t es una alternativa epistémica cualquiera a s para el agente i; y por tanto, por evaluación de K, $M, s \vDash K_{a_i}\forall x\varphi(x)$. QED.

Teorema 4.5.2. *Sea M_c el conjunto de todos los modelos kripkeanos con dominio constante. Se cumple que*

$$\vDash_{M_c} K_{a_i}\forall x\varphi(x) \to \forall x K_{a_i}\varphi(x).$$

[10] Como puede observarse, no se trata realmente de fórmulas, sino de esquemas de fórmulas.

Demostración: Suponemos que $M, s \vDash K_{a_i} \forall x \varphi(x)$, para $M \in M_c$ y $s \in M$. Esto significa que $M, t \vDash \forall x \varphi(x)$, para todo $t \in M$ tal que $sR_{a_i}t$. Por evaluación de $\forall$, $M', t' \vDash \varphi(a)$, para toda M, t tales que $t = t'$ y $M' \underset{v(a)}{=} M$. Puesto que ambos modelos son iguales salvo por lo que respecta a $v(a)$, t' es una alternativa epistémica cualquiera a s' para el agente i, y por tanto $M', s' \vDash K_{a_i} \varphi(a)$; y puesto que $M' \underset{v(a)}{=} M$ y $s' = s$, $M, s \vDash \forall x K_{a_i} \varphi(x)$. QED.

El hecho de que tanto la fórmula Barcan como su conversa sean válidas en los modelos de dominio constante ha suscitado ciertas críticas contra estas lógicas, y es que intuitivamente parecen no ser válidas. Pensemos en la primera de ellas: un sujeto puede saber de todos los objetos de un cierto dominio que tienen la propiedad P, pero no saber que todos los objetos tienen esa propiedad, simplemente porque no sepa que esos son efectivamente todos los objetos. Esto es, para ese agente es posible que haya otros objetos que no tienen esa propiedad. A sensu contrario, si miramos a CFB, también es posible que un agente sepa que todos los objetos de un cierto dominio tienen una cierta propiedad, pero no saberlo de cada uno de ellos particularmente. Por ejemplo, alguien puede saber que todos los alumnos de filosofía son inteligentes, pero no que, digamos, Juan Fernández es inteligente, porque no sepa que ese individuo es miembro del conjunto.

Estas críticas muestran algo que ya hemos mencionado con anterioridad, que los sistemas así construidos sólo son válidos si se cumple cierta condición, a saber, que todos los agentes saben exactamente cuáles son los individuos del dominio (y conocen sus nombres, o bien la modalidad se toma *de re*). Esto es algo que no sucede habitualmente en el discurso ordinario, y por tanto estos sistemas no valen en general para formalizar el conocimiento de sentido común. No obstante, hay casos interesantes que se pueden formalizar usando alguno de los sistemas lógicos de dominio constante. Pensemos por ejemplo, una vez más, en un juego de naipes. Resulta bien poco habitual que los jugadores de uno de estos juegos no conozcan exactamente cuáles son las cartas de la baraja con que juega; es decir, ninguno de ellos considera posible que haya más ni menos cartas que las que exactamente hay. Todos los mundos posibles accesibles para cada agente tienen los mismos individuos y por tanto las dos fórmulas mencionadas son perfectamente válidas. Si, por ejemplo, un agente sabe que todas las cartas están sobre la mesa, también es verdad que de cada una de ellas, individualmente considerada, el agente sabe que está sobre la mesa, y viceversa.

4.6. Sistemas axiomáticos

Para axiomatizar la lógica epistémica de primer orden con dominio constante no tenemos más que añadir a los distintos sistemas de lógica epistémica proposicional los axiomas y reglas de la lógica de primer orden, además de la fórmula Barcan en el caso de T_m y $S4_m$ (no así en el de $S5_m$). Así pues, el primer esquema de axioma, A1, debe ser sustituido por:

A1' Todas las formulas válidas de la lógica de primer orden.

y hay que añadir además la siguiente regla:

Generalización: $\dfrac{\varphi \to \psi\,(a/x)}{\varphi \to \forall x \psi}$

(a condición de que a no figure en A).

La expresión $\varphi(a/x)$ que figura en la regla 3 se entiende como habitualmente: la fórmula resultante de sustituir cada ocurrencia libre de x por a en la fórmula φ; donde x es una variable y a una constante individual.

Los sistemas resultantes de lógica epistémica de primer orden con dominio constante, que designaremos anteponiendo la letra C al sistema proposicional correspondiente, como antes mencionamos, son pues los siguientes:

CT_m**:** A1'+A2+A3+R1+R2+R3+FB

$CS4_m$**:** CT_m+A4

$CS5_m$**:** A1'+A2+A3+R1+R2+R3+A4+A5

No es necesario incluir como axioma la conversa de la fórmula Barcan, puesto que se sigue de CT_m, y por tanto, de todos los sistemas más fuertes. La demostración es como sigue:

1. $\forall x \varphi\,(x) \to \varphi\,(a)$ (LPO)

2. $K_{a_i}(\forall x \varphi\,(x) \to \varphi\,(a))$ (de 1 por R2)

3. $K_{a_i}\,(\forall x \varphi\,(x) \to \varphi\,(a)) \to (K_{a_i} \forall x \varphi\,(x) \to K_{a_i} \varphi\,(a))$ (A2+LP)

4. $K_{a_i} \forall x \varphi\,(x) \to K_{a_i} \varphi\,(a)$ (de 2 y 3 por R1)

5. $K_{a_i}\forall x\varphi\,(x) \to \forall x K_{a_i}\varphi\,(x)$ (de 4 por R3)

El paso 5 es válido, ya que evidentemente a no puede figurar libre en $K_{a_i}\forall x\varphi\,(x)$, ni tampoco en la matriz de $\forall x K_{a_i}\varphi\,(x)$.

En cuanto a $CS5_m$, ya hemos mencionado que no es necesario añadir la fórmula Barcan. La razón de ello es que FB se sigue sin más de los axiomas y reglas de $S5_m$, junto a A1' y R3. Probar esto exige la demostración de algunos axiomas y reglas derivadas que no vamos a hacer aquí, ya que la nuestra no es esencialmente una presentación axiomática. Estos axiomas y reglas, a los que denominaremos, siguiendo a Hughes y Cresswell[11], RD3, T34 y RD5, son los siguientes:

RD3: $\dfrac{\alpha \to \beta}{\widehat{K}_{a_i}\alpha \to \widehat{K}_{a_i}\beta}$

T34: $\widehat{K}_{a_i}K_{a_i}\alpha \to \alpha$

RD5: $\dfrac{\widehat{K}_{a_i}\alpha \to \beta}{\alpha \to K_{a_i}\beta}$

Es fácil comprobar que RD3 es válida en T_m, y por tanto también en $S4_m$ y $S5_m$, mientras que T34 y RD5 sólo son válidos en $S5_m$[12]. Aceptado lo anterior, la prueba de FB resulta casi elemental:

1. $\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to K_{ia_i}\varphi(a)$ (LPO)

2. $\widehat{K}_{a_i}\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to \widehat{K}_{a_i}K_{a_i}\varphi(a)$ (de 1 por RD3)

3. $\widehat{K}_{a_i}K_{a_i}\varphi(a) \to \varphi(a)$ (T34)

4. $\widehat{K}_{a_i}\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to \varphi(a)$ (de 2,3 por LP)

5. $\widehat{K}_{a_i}\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to \forall x\varphi(x)$ (de 4 por R3)

6. $\forall x K_{a_i}\varphi(x) \to K_{a_i}\forall x\varphi(x)$ (de 5 por RD5)

4.7. Resultados metateóricos

Empecemos demostrando la corrección de la regla R3:

[11] Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1968).

[12] Por ejemplo, utilizando el método de tablas etiquetadas presentado en la sección 2.6

Teorema 4.7.1. *Para todo modelo kripkeano extendido M de dominio constante y todo $s \in W$ de la estructura M; si $M, s \vDash \varphi \to \psi\,(a/x)$, $M, s \vDash \varphi \to \forall x \psi$ (a condición de que a no figure en φ.*

Demostración: partimos del supuesto de que $M, s \vDash \varphi \to \psi\,(a/x)$, siendo el caso que a no figura en φ. O bien $M, s \vDash \varphi$, o bien $M, s \nvDash \varphi$. Si $M, s \nvDash \varphi$, entonces $M, s \vDash \varphi \to \forall x \psi$, por evaluación del condicional. Supongamos ahora que $M, s \vDash \varphi$, de aquí se sigue que $M, s \vDash \psi\,(a/x)$ (por R1). Ahora bien, M es un modelo cualquiera y a no aparece en φ, lo cual significa que $M, s \vDash \psi\,(a/x)$ cualquiera que sea el elemento del dominio de M que la función de interpretación v asigna a la constante a; o lo que es igual, $M', s' \vDash \psi(a/x)$ para toda M', s' tales que $s' = s$ y $M' \underset{v(a)}{=} M$. Así pues, por evaluación de $\forall$, $M, s \vDash \forall x \psi$. Luego, en cualquier caso, $M, s \vDash \varphi \to \forall x \psi$. QED.

R3 es la única regla añadida respecto a los correspondientes sistemas axiomáticos de lógica epistémica proposicional. Podemos dar igualmente por demostrado que que para todo teorema T de la lógica de primer orden, todo modelo kripkeano extendido M y todo mundo posible $s \in W$ de M; $M, s \vDash T$[13]. Procedamos ahora a demostrar la corrección de CT_m, $CS4_m$ y $CS5_m$:

Teorema 4.7.2. *Sean $\mathcal{M}_c^r$, $\mathcal{M}_c^{r,t}$ y $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$, los conjuntos de todos los modelos kripkeanos extendidos de dominio constante reflexivos; reflexivos y transitivos; reflexivos, simétricos y transitivos (respectivamente). Para fórmulas en LEPO:*

a) CT_m es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}_c^r$.

c) $CS4_m$ es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}_c^{r,t}$.

d) $CS5_m$ es una axiomatización correcta respecto a $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$.

Como hemos dicho, consideraremos demostrada la corrección de los esquemas de axioma y de la lógica de primer orden; así pues, basta con demostrar que los axiomas correspondientes a la lógica epistémica de primer orden son válidos en todo modelo con dominio constante (con las propiedades de la relación de accesibilidad acostumbradas en cada sistema) y que la única regla propia, R2, preserva la validez. Respecto a los axiomas A2-A5, ya se demostró en 2.4 que A2

[13]Basta con tomar cualquier sistema axiomático de Lógica de Primer orden, por ejemplo el de Church, y demostrar que sus axiomas son válidos en todo modelo kripkeano.

es válido en todos los modelos kripkeanos; A3, en todos los modelos kripkeanos reflexivos[14]; A4, en todos los modelos reflexivos y transitivos; y por último, que A5 es válido en todos los modelos reflexivos, simétricos y transitivos (teoremas 2.4.1, 2.4.3, 2.4.4 y 2.4.5). Puesto que en ninguno de estos axiomas interviene la cuantificación, estos resultados son trasladables sin modificaciones esenciales a la lógica epistémica de primer orden; y lo mismo ocurre con la prueba de la regla R2 (Teorema 2.4.2). En cuanto a R3, acabamos de demostrar su corrección (Teorema 4.7.1) . Con esto, pues, queda demostrada la corrección del sistema $CS5_m$.

Respecto a los sistemas CT_m y $CS4_m$, que contienen como axioma propio la fórmula Barcan, es necesario demostrar además que esta fórmula es válida en todos los modelos de dominio constante, lo que ya se hizo la sección 4.5 (Teorema 4.5.1). Con esta demostración, pues, tenemos garantizada también la corrección de CT_m y $CS4_m$. QED.

En cuanto a la completud, la prueba sigue la misma estrategia que la utilizada en la sección 2.5; esto es, demostraremos previamente que si una fórmula es CT_m-consistente ($CS4_m$-consistente, $CS5_m$-consistente) entonces tiene un modelo en $\mathcal{M}_c^r$ (respectivamente, en $\mathcal{M}_c^{r,t}$ y en $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$); de aquí se sigue directamente la completud de cada uno de estos sistemas axiomáticos respecto a los correspondientes conjuntos de modelos. La diferencia con la prueba ofrecida en 2.5 consiste en que ahora, con vistas a la construcción del modelo canónico, tendremos que recurrir no al conjunto de todos los conjuntos de fórmulas máximamente CT_m-consistentes ($CS4_m$-consistentes, $CS5_m$-consistentes), sino al conjunto de todos los conjuntos máximamente CT_m-consistentes y existencialmente saturados (e igualmente para $CS4_m$ y $CS5_m$). Expliquemos brevemente este concepto.

El concepto de conjunto de fórmulas máximamente S-consistente se define como en 2.5.3. La propiedad que ahora añadimos, la saturación existencial, se define del siguiente modo:

Definición 4.7.3. Un conjunto de fórmulas Γ en el lenguaje $\mathcal{L}$ es existencialmente saturado syss, para toda fórmula de $\mathcal{L}$ de la forma $\exists x\varphi(x)$, si $\exists x\varphi(x) \in \Gamma$ entonces $\varphi(c/x) \in \Gamma$ (donde c es una constante que no ocurre en $\exists x\varphi(x)$ y $\varphi(c/x)$ es el resultado de sustituir uniformemente x por c en φ).

Dado un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y un conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}$, para un cier-

[14]Por abreviar, hablamos de modelos reflexivos para referirnos a aquellos en los que la relación de accesibilidad es reflexiva, y así sucesivamente.

to sistema axiomático S, siempre es posible construir un conjunto Γ máximamente S-consistente y existencialmente saturado que contiene a Δ. El procedimiento es como sigue:

Sea $\mathcal{L}_0$ el lenguaje de la lógica epistémica de primer orden sin constantes individuales. Construimos ahora una serie de sistemas lingüísticos, añadiendo una serie infinita, pero numerable, de constantes individuales de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathcal{L}_0, a_1^1, a_2^1, \cdots, a_i^1\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathcal{L}_1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_i^2\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}_j = \left\{\mathcal{L}_{j-1}, a_1^j, a_2^j, \cdots, a_i^j\right\}$$

$$\vdots$$

Definimos ahora el lenguaje $\mathcal{L}_w$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_w = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_j \cup \cdots$$

Una vez definido el lenguaje, procedemos a la construcción de un conjunto máximamente S-consistente y existencialmente saturado. Para ello hemos de suponer todas las fórmulas de $\mathcal{L}_0$ dispuestas en cierta ordenación $\alpha_1, \alpha_2, \cdots .\alpha_n$. Definimos ahora una serie de conjuntos $\Gamma_0^0, \Gamma_0^1, \cdots, \Gamma_0^m$ de la siguiente forma:

i) $\Gamma_0^0 = \Delta$

ii) Si $\Gamma_0^i \cup \{\alpha_{i+1}\}$ es S-consistente, entonces $\Gamma_0^{i+1} = \Gamma_0^i \cup \{\alpha_{i+1}\}$; en caso contrario, $\Gamma_0^{i+1} = \Gamma_0^i$.

Sea ahora $\Gamma_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^1, \cdots, \Gamma_0^n$. Obtenemos así un conjunto máximamente consistente, aunque no existencialmente saturado. Para convertirlo en un conjunto de formulas existencialmente saturado añadimos el resultado de instanciar cada fórmula existencial de Γ_0 con una constante individual diferente de $\mathcal{L}_1$. Hemos de suponer para ello las fórmulas existenciales de Γ_0 dadas en cierto orden, lo cual siempre es posible, puesto que el lenguaje es numerable; y si, digamos, $\exists x \varphi(x)$ es la k-ésima fórmula existencial de Γ_0, añadimos a Γ_0 la fórmula $\varphi\left(a_1^k/x\right)$. El resultado de estas adiciones es un conjunto Γ_0^* existencialmente saturado, pero que ya no es máximamente consistente. Por supuesto, Γ_0^* sigue siendo consistente, pero ya no es máximo, al haber añadido instancias de la matriz de las fórmulas existenciales con constantes de una extensión de $\mathcal{L}_0$ (a saber, $\mathcal{L}_1$).

Tomamos ahora $\Gamma_1^0 = \Gamma_0^*$, y procedemos a maximizarlo tal y como hicimos con Γ_0^0, con lo que obtenemos $\Gamma_1 = \Gamma_1^0 \cup \Gamma_1^1, \cdots, \Gamma_1^n$. A continuación, saturamos existencialmente Γ_1 por el procedimiento de añadir la instanciación de cada fórmula existencial de Γ_1 con una constante individual diferente de $\mathcal{L}_2$, y así sucesivamente.

Definimos ahora $\Gamma = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1^0 \cdots \cup \Gamma_n^0$. Este conjunto es máximamente consistente y existencialmente saturado, como se prueba con facilidad.

Procederemos a continuación a demostrar el teorema de satisfacción por el procedimiento habitual; esto es, construiremos un modelo canónico asignando un mundo posible a cada conjunto máximamente consistente y existencialmente saturado, el dominio de este modelo será el conjunto de las constantes individuales consideradas como objetos. Veamos los detalles.

Teorema 4.7.4. *Para toda fórmula $\varphi \in LEPO$:*

a Si φ es CT_m-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_c^r$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

b Si φ es $CS4_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_c^{r,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

c Si φ es $CS5_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_c^{r,s,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

Demostración: Como en el caso de la lógica epistémica proposicional, haremos primero la parte común de la prueba, ciñéndonos al sistema CT_m. Posteriormente demostraremos que el modelo que presentamos pertenece a $\mathcal{M}_c^r$, en el caso de CT_m; a $\mathcal{M}_c^{r,t}$, en el de $CS4_m$, o a $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$, en el de $CS5_m$.

Sea $\mathcal{C}^+(CT_m)$ el conjunto de todos los conjuntos máximamente CT_m-consistentes y existencialmente saturados de fórmulas de $LEPO$, $\mathcal{P}$ el conjunto de letras predicativas del lenguaje $\mathcal{L}_w$; *Cons*, el conjunto de las constantes individuales del lenguaje $\mathcal{L}_w$, y A el conjunto de agentes. Definimos el modelo $M^C = \{\mathfrak{D}, W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon\}$ de la siguiente forma:

El dominio del modelo canónico es el conjunto de las constantes del lenguaje, tomadas como objetos:

$$\mathfrak{D} = \{c_i \mid c_i \in Cons\}$$

Hacemos ahora corresponder un mundo posible a cada conjunto máximamente CT_m-consistente y existencialmente saturado:

$$W = \{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{C}^+(CT_m)\}$$

La función de evaluación υ se define como sigue:

a) $\upsilon(c_i) = c_i$ (Para todo $c_i \in Cons$)

b) $\langle \upsilon(c_1), \upsilon(c_2), \cdots, \upsilon(c_n) \rangle \in \upsilon(s_\Phi, P^n)$ syss $P^n(c_1, c_2, \cdots c_n) \in \Phi$ (Para cualesquiera $c_1, c_2, \cdots, c_n \in Cons$)

En cuanto a las relaciones de accesibilidad, para cualesquiera conjuntos $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^+(CT_m)$, y $a_i \in A$, establecemos:

$$R_{a_i} = \{\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \mid \text{para todo } \alpha \in LEPO, \text{ si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$$

Una vez construido el modelo M^C demostraremos, por inducción sobre el grado lógico de φ, que para toda fórmula $\varphi \in LEP$, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$:

La base es trivial, y los casos de los operadores proposicionales y del operador K son ya conocidos. Nos limitaremos pues a presentar la prueba para el caso en que $\varphi = \forall x \varphi(x)$

De izquierda a derecha, supongamos que $M^C, s_\Phi \vDash \forall x \varphi(x)$ para algún $s_\Phi \in W$ de la estructura M^C. Por evaluación de $\forall$, $M', s'_\Phi \vDash \varphi(a/x)$ para todo M', s'_Φ tales que $s'_\Phi = s_\Phi$ y $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M^C$. Ahora bien, puesto que el dominio del modelo es el conjunto de las variables individuales del lenguaje $\mathcal{L}_w$ tomadas como objetos, esto quiere decir que $M^C, s_\Phi \vDash \varphi(c_i)$, para todo $c_i \in Cons$[15]; de donde se sigue,

[15]Este razonamiento equivale a pasar de una interpretación referencial de la cuantificación, que es la que hemos estado manejando hasta ahora, a una interpretación sustitucional. Ello es posible porque hemos asegurado que a cada elemento del dominio se le asigna una constante individual.

por hipótesis de la inducción, que $\varphi(c_i) \in \Phi$ (para todo $c_i \in Cons$). De aquí se sigue que $\exists x \neg\varphi(x) \notin \Phi$; pues de lo contrario, al ser Φ existencialmente saturado, ocurriría que $\neg\varphi(c_j) \in \Phi$ para algún $c_j \in Cons$, con lo cual Φ no sería consistente. Ahora bien; si $\exists x \neg\varphi(x) \notin \Phi$, entonces $\neg\exists x \neg\varphi(x) \in \Phi$, puesto que Φ es máximamente consistente. A su vez, $\neg\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x) \in \Phi$, puesto que es una tesis de CT_m. De donde, por R1, $\forall x \varphi(x) \in \Phi$.

En sentido contrario, supongamos que $\forall x \varphi(x) \in \Phi$. Puesto que Φ es máximamente consistente, $\varphi(c_i) \in \Phi$, para todo $c_i \in Cons$; pues de lo contrario, $\exists x \neg\varphi(x) \in \Phi$, y por tanto $\neg\forall x \varphi(x) \in \Phi$, con lo que Φ no sería consistente. Por hipótesis de la inducción, de aquí se sigue que que $M^C, s_\Phi \vDash \varphi(c_i)$ para todo $c_i \in Cons$; y puesto que el dominio del modelo es numerable e igual al conjunto de las constantes del lenguaje, esto significa que $M', s'_\Phi \vDash \varphi(a/x)$ para toda M', s'_Φ tales que[16] $s'_\Phi = s_\Phi$ y $M' \underset{v(a)}{=} M^C$; y por tanto que $M^C, s_\Phi \vDash \forall x \varphi(x)$.

Hasta aquí la prueba es idéntica para los tres sistemas implicados, simplemente sustituyendo CT_m por $CS4_m$ o $CS5_m$. Faltaría por demostrar que en el caso de CT_m, $M^C \in \mathcal{M}_c^r$; en el caso de $CS4_m$, $M^C \in \mathcal{M}_c^{r,t}$ y en el caso de $CS5_m$, $M^C \in \mathcal{M}_c^{r,s,t}$; pero esta prueba es idéntica a la análoga para el caso proposicional (Teorema 2.5.4). Para abreviar, evitamos repetirla. QED.

Una vez demostrado el teorema de satisfacción, la completud se sigue inmediatamente:

Teorema 4.7.5. *Para fórmulas en LEP:*

a) CT_m *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_c^r$.

c) $CS4_m$ *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_c^{r,t}$.

d) $CS5_m$ *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$.

Demostración: Se sigue de 4.7.4. La demostración es idéntica a la del teorema 2.5.5; para abreviar, evitamos repetirla. QED.

4.8. Tablas semánticas

Como era de esperar, dado que tratamos con dominios constantes, los cuantificadores no suponen una dificultad superior a la de la lógica de primer orden. El

[16]Vid. nota anterior

método de tablas para CT_m, $CS4_m$ y $CS5_m$ se obtiene simplemente añadiendo a las reglas comunes para T_m, $S4_m$ y $S5_m$ las habituales para los cuantificadores en primer orden (recordemos que el método para los tres sistemas se diferencia sólo en las reglas de herencia). Las reglas en cuestión son las siguientes:

1. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \neg\alpha$:

   $(\cdots)$

   e) si α es $\forall x\beta$, se escribe $\sigma :: \exists x\neg\beta$ al término de la rama.

   f) si α es $\exists x\beta$, $\sigma :: \forall x\neg\beta$ al término de la rama

$(\cdots)$

5. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \forall x\alpha$, se escribe $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ al término de la rama, para todo parámetro c_i que aparezca en la rama, y se marca con c_i. (En caso de no haber uno disponible, se introduce un parámetro nuevo).

6. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \exists x\alpha$, se escribe $\sigma :: \alpha(c_{n+1}/x)$ al término de la rama, donde c_n es el último parámetro que aparece en la rama, y se marca con c_{n+1}

4.9. Algunos ejemplos

A modo de ejemplo, demostraremos la validez en CT_m (y por tanto en todos los sistemas más fuertes) de la Fórmula Barcan y su conversa. La negación de la Fórmula Barcan es:

$$\forall x K_a P(x) \wedge \widehat{K}_a \exists x \neg P(x).$$

Su tabla semántica se muestra en el cuadro 4.1

En cuanto a la Conversa de la Fórmula Barcan, su negación es:

$$K_a \forall x P(x) \wedge \exists x \widehat{K}_a \neg P(x).$$

Su tabla semántica se muestra en el cuadro 4.2

Cuadro 4.1: Fórmula Barcan

$$
\begin{array}{llll}
1) & 1 :: \forall x K_a P(x) \wedge \widehat{K}_a \exists x \neg P(x) & {\scriptstyle \wedge} & \text{(asunción)} \\
2) & 1 :: \forall x K_a P(x) & {\scriptstyle c_1} & \text{(de 1)} \\
3) & \widehat{K}_a \exists x \neg P(x) & {\scriptstyle \widehat{K}(1.a1)} & \text{(de 1)} \\
4) & 1.a1 :: \exists x \neg P(x) & {\scriptstyle c_1} & \text{(de 3)} \\
5) & 1.a1 :: \neg P\left(c_1\right) & & \text{(de 4)} \\
6) & 1 :: K_a P\left(c_1\right) & {\scriptstyle K} & \text{de 2} \\
7) & 1 :: P\left(c_1\right) & & \text{(de 6)} \\
8) & 1.a1 :: P\left(c_1\right) & & \text{(HKT de 6)} \\
 & \otimes & &
\end{array}
$$

Cuadro 4.2: Conversa Fórmula Barcan

$$
\begin{array}{c}
1) \quad 1 :: K_a \forall x P(x) \wedge \exists x \widehat{K}_a \neg P(x) \quad {}_{\wedge} \qquad \text{(asunción)} \\
| \\
2) \quad 1 :: K_a \forall x P(x) \quad {}_{K} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
3) \quad 1 :: \exists x \widehat{K}_a \neg P(x) \quad {}_{c_1} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
4) \quad 1 :: \forall x P(x) \quad {}_{c_1} \qquad \text{(de 2)} \\
| \\
5) \quad 1 :: \widehat{K}_a \neg P(c_1) \quad {}_{\widehat{K}(1.a1)} \qquad \text{(de 3)} \\
| \\
6) \quad 1 :: P(c_1) \qquad \text{(de 4)} \\
| \\
7) \quad 1.a1 :: \neg P(c_1) \qquad \text{(de 5)} \\
| \\
8) \quad 1.a1 :: \forall x P(x) \quad {}_{c_1} \qquad \text{(HKT de 2)} \\
| \\
9) \quad 1.a1 :: P(c_1) \qquad \text{(de 8)} \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

4.10. Corrección y completud

El método que acabamos de presentar constituye un procedimiento correcto y completo para la lógica epistémica de primer orden, aunque naturalmente no la hace decidible, ya que la lógica de primer orden no lo es. Las pruebas de corrección y completud son una simple extensión de las presentadas en las secciones 2.8 y 2.9 para la lógica epistémica proposicional. Veamos algunos detalles.

Teorema 4.10.1. *Para fórmulas de LEPO, si la tabla semántica de un conjunto de fórmulas* Γ *tiene al menos una rama abierta, entonces* Γ *tiene un modelo.*

Demostración: Como en el caso proposicional, la demostración consta de dos partes. La primera consiste en mostrar cómo se construye el modelo a partir de una rama abierta del árbol; la segunda, en demostrar que el modelo así construido satisface a la fórmula. Realizaremos una prueba única para los cálculos[17] CT_m, $CS4_m$ y $CS5_m$, indicando las diferencias allí donde sea preciso.

Construcción del modelo: Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla semántica de φ, y Σ el conjunto de etiquetas que aparecen en dicha rama. Definimos un modelo $M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$ de la siguiente forma:

El dominio del modelo es el conjunto de constantes individuales que aparecen en la rama abierta de la tabla. Esto es:

$$\mathfrak{D} = \{c_i \mid \sigma :: \varphi(c_i) \in \mathcal{F}\}$$

.

W se define como en 2.8.1. Esto es, creamos un mundo posible por cada etiqueta que aparezca en la rama. Llamaremos s_σ al mundo posible correspondiente a la etiqueta σ. Así pues, $W = \{s_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$.

Las relaciones de accesibilidad entre mundos posibles las definimos como en el caso proposicional:

A1. Si $\tau = \sigma.a_i n$, entonces $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

A2. Si $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ y aparece marcada con $\widehat{K}_\tau$, entonces $s_\tau R_{a_i} s_\sigma$[18].

[17] Como hicimos con la lógica epistémica proposicional, llamaremos a cada uno de estos cálculos como los correspondientes sistemas axiomáticos.

[18] Recordemos que en el cálculo $CS5_m$ esta cláusula es redundante, pues se sigue de 1 y 3.

A3. Según se trate del cálculo CT_m, $CS4_m$ o $CS5_m$, cada relación de accesibilidad R_{a_i} es respectivamente: reflexiva; reflexiva y transitiva; reflexiva, simétrica y transitiva.

Por último, la función de evaluación υ se define como sigue:

a) $\upsilon(c_i) = c_i$

b) $\langle \upsilon(c_1), \upsilon(c_2), \cdots, \upsilon(c_n)\rangle \in \upsilon(s_\sigma, P^n)$ syss $\sigma :: P^n(c_1, c_2, \cdots c_n) \in \mathcal{F}$

Es importante destacar que respecto al modelo así construido también se cumple el lema 2.8.2, que nos dice que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo si $\sigma H_{a_i} \tau$[19]. La razón es que en la demostración de este lema sólo intervienen los operadores epistémicos y las correspondientes relaciones de accesibilidad; además de, por supuesto, el procedimiento de creación de etiquetas del árbol. Así pues, la existencia de cuantificadores en nuestro lenguaje resulta irrelevante para la demostración, que sigue siendo válida en este contexto.

Una vez construido el modelo, basta demostrar el siguiente lema, lo cual se hace por inducción sobre el grado lógico de la fórmula:

Lema 4.10.2. *Si $\sigma :: \varphi \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\sigma \vDash \varphi$.*

Demostración:

La base es trivial: si φ es $P^n(c_1, \cdots, c_n)$ entonces, por construcción del modelo, $\langle \upsilon(c_1), \upsilon(c_2), \cdots, \upsilon(c_n)\rangle \in \upsilon(s_\sigma, P^n)$; y por tanto $M, s_\sigma \vDash \varphi$.

En el caso de los operadores proposicionales y epistémicos, la demostración es igual a la que se realizó en 2.8.3; por lo que no nos parece necesario repetirla. Centrémonos pues en los cuantificadores:

5. $\varphi = \forall x \alpha$: Si $\sigma :: \forall(x)\alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 5, $\sigma :: \alpha(c_i/x) \in \mathcal{F}$, para toda constante individual c_i que aparezca en la rama. Por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ para todo c_i que aparezca en la rama; y puesto que el dominio de M está constituido por todas las constantes que aparecen en la rama abierta de la tabla tomadas como objetos, y sólo por ellas, esto equivale a decir que $M', s'_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ para toda M', s'_σ tales que $s'_\sigma = s_\sigma$ y $M' \underset{\upsilon(c_i)}{=} M$ [20]; y por tanto, que $M, s_\sigma \vDash \forall x \alpha$.

[19] Recordemos que $\sigma H_{a_i} \tau$ se lee "τ es a_i-hereditaria con respecto a σ" y se define así: $\sigma H_{a_i} \tau$ si y sólo si para toda fórmula $K_{a_i}\varphi$ tal que $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$.

[20] En este caso, al contrario que en la sección 4.7 estamos pasando de una interpretación sustitucional a una referencial. La construcción del modelo garantiza que ambas son equivalentes.

6. $\varphi = \exists x\alpha$: Si $\sigma :: \exists (x) \alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 6, $\sigma :: \alpha (c_i/x) \in \mathcal{F}$, para un parámetro individual c_i que aún no haya aparecido en la rama. Por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \alpha (c_i/x)$; y puesto que el dominio de M está constituido por todas las constantes que aparecen en la rama abierta de la tabla tomadas como objetos, y sólo por ellas, esto equivale a decir que $M', s'_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ para algún M', s'_σ tales que $s'_\sigma = s_\sigma$ y $M' \underset{v(c_i)}{=} M$; y por tanto, que $M, s_\sigma \vDash \exists x\alpha$.

Demostrado este lema, como en el caso proposicional, el teorema 4.10.1 se sigue de forma inmediata: para cada fórmula $\varphi \in \Gamma$, es claro que $1 :: \varphi \in \mathcal{F}$ (donde 1 es la primera etiqueta que aparece en el árbol); y por el lema 4.10.2, $M, s_1 \vDash \varphi$. QED.

Teorema 4.10.3. *Para fórmulas de LEPO, si una fórmula φ tiene un modelo, entonces su tabla semántica tiene al menos una rama abierta.*

Demostración: se realiza por inducción sobre el grado lógico de la fórmula. Como anteriormente, denominaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla.

La base es trivial: si φ es de la forma $P(c_1, \cdots, c_n)$, la tabla semántica de φ consta de una sola fórmula etiquetada,a $\sigma :: P(c_1, \cdots, c_n)$, y por tanto es abierta.

En el caso de los operadores proposicionales y epistémicos, la demostración es igual a la que se realizó en 2.9.1; por lo que no es necesario repetirla. Presentamos la prueba para los cuantificadores:

5. $\varphi = \forall x\alpha$: Partimos del supuesto de que para algún modelo M y algún mundo posible $s \in W$ de la estructura M, $M, s \vDash \forall x\alpha$, y por tanto, $M', s' \vDash \alpha (c_i/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' \underset{v(c_i)}{=} M$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\sigma :: \alpha (c_i/x)$ es abierta. Ahora bien, por la regla 5, si $\sigma :: \forall x\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \alpha (c_i/x) \in \mathcal{F}$, para todo c_i que aparezca en la rama; y puesto que la tabla semántica de $\sigma :: \alpha (c_i/x)$ es abierta (para todo c_i que aparezca en la rama) la de $\sigma :: \forall x\alpha$ también lo es.

6. $\varphi = \exists x\alpha$: Partimos del supuesto de que para algún modelo M y algún mundo posible $s \in W$ de la estructura M, $M, s \vDash \exists x\alpha$, y por tanto, $M', s' \vDash \alpha (c_i/x)$ para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' \underset{v(c_i)}{=} M$; y por hipótesis de la

inducción, la tabla semántica de $\sigma :: \alpha\,(c_i/x)$ es abierta. Ahora bien, por la regla 6 , si $\sigma :: \exists x\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \alpha\,(c_i/x) \in \mathcal{F}$, para un c_i que aún no haya aparecido en la rama; y puesto que la tabla semántica de $\sigma :: \alpha\,(c_i/x)$ es abierta la de $\sigma :: \exists x\alpha$ también lo es. QED.

4.11. Identidad y funciones

Hemos presentado una primera versión de la lógica epistémica de primer orden en la que no hacíamos uso de la identidad ni de términos de función. Como ya decíamos, es fácil extender nuestro lenguaje para introducir tanto la una como los otros. De hecho, vamos a necesitarlos cuando tratemos la semántica de dominios variables; así pues, ha llegado el momento de hacerlo.

Para empezar, además de un conjunto C de constantes y un conjunto V de variables, necesitaremos ampliar nuestro vocabulario básico con un conjunto numerable (posiblemente infinito) F de términos de función $f^1, g^1, \cdots, f^n, g^n$ (eventualmente con subíndices). El superíndice expresa la aridad de la función; por simplicidad, lo omitiremos cuando se deduzca del contexto.

El conjunto T de los términos queda ahora definido así:

1. Si $t \in C$, entonces $t \in T$.

2. Si $t \in V$, entonces $t \in T$.

3. Si $t_1, \cdots, t_n \in T$ y $f^n \in F$, entonces $f^n(t_1, \cdots, t_n) \in T$.

Introduciremos además el signo $=$ para designar el predicado diádico de identidad. Las reglas de formación de fórmulas son las mismas del apartado 1, salvo que debemos añadir la siguiente:

1'. Si $t_1, t_2 \in T$, entonces $t_1 = t_2 \in LEPO$.

Tampoco la semántica requiere muchas modificaciones mientras sigamos tratando con dominios constantes. Como hasta ahora, diremos que un modelo extendido es una estructura $M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$. También como hasta ahora, diremos que la función de evaluación υ asigna a cada constante individual en cada mundo posible un elemento del dominio (el mismo en todos los mundos posibles, por lo que seguiremos escribiendo $\upsilon(c)$ en lugar de $\upsilon(s, c)$) y a cada constante predicativa n-ádica, en cada mundo posible, un conjunto de n-plas ordenadas de elementos del dominio. La única modificación necesaria tiene que ver con la evaluación de los términos de función, y esto no es muy diferente de lo que hacemos en primer orden: para todo término de función n-ádico f^n y todo mundo posible s, $\upsilon(s, f^n) \in \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} : \mathfrak{D}^n \mapsto \mathfrak{D}\}$; esto es, υ asigna a cada término de función n-ádico, en cada mundo posible, una función con dominio en $\mathfrak{D}^n$ y recorrido en $\mathfrak{D}$.

En cuanto a la verdad de una fórmula en un mundo posible de un modelo dado, sólo necesitamos modificar levemente la cláusula 1 y añadir una segunda cláusula específica para la identidad:

1. $M, s \vDash P(t_1, \cdots, t_n)$ syss $\langle \upsilon(s, t_1), \cdots, \upsilon(s, t_n) \rangle \in \upsilon(s, P)$

2. $M, s \vDash t_1 = t_2$ syss $\upsilon(s, t_1) = \upsilon(s, t_2)$

El resto de las cláusulas no necesita ninguna modificación.

Nótese que si bien la identidad es en predicado diádico, resulta un predicado especial en relación con los demás; ya que éstos modifican su interpretación de un mundo posible a otro, mientras que el primero tiene una interpretación constante. Por supuesto, dada una constante c cualquiera $c = c$ es una fórmula válida; y por tanto también lo es $K_{a_i}(c = c)$ (para un agente a_i cualquiera). En cambio, $f(t_1, \cdots, t_n) = c$ no es en absoluto una fórmula válida; y de forma más relevante, no lo es $(f(t_1, \cdots, t_n) = c) \to K_{a_i}(f(t_1, \cdots, t_n) = c)$, lo que explica el fallo del principio de sustituibilidad de la identidad característico de estos contextos.

Efectivamente, dado que Cervantes es el autor del Quijote, por ejemplo, el principio de sustituibilidad nos permite sustituir el primer término por el segundo conservando el valor de verdad de la oración en que aparece. Así, si la oración "Cervantes era manco" es verdadera, también debe serlo "el autor del Quijote era manco". Este principio, sin embargo, no resulta válido en ciertos contextos que denominamos intensionales; entre los que se cuentan aquellas expresiones en las que aparecen operadores epistémicos. Claramente, en la oración "Juan sabe que Cervantes era manco" no podemos sustituir sin más ambos términos para obtener "Juan sabe que el autor de Quijote era manco". Puede ocurrir que Juan ignore que Cervantes es el autor del Quijote, lo cual haría falsa a la segunda oración incluso aunque la primera fuera verdadera.

Nuestra semántica da cumplida cuenta de esta peculiaridad. Si interpretamos, como estamos proponiendo, que el nombre Propio *Cervantes* es un designador rígido, mientras que *el autor de* es un término de función, entonces el primero mantendrá su interpretación en todos los mundos posibles mientras que el segundo podrá tener interpretaciones diferentes, lo cual hace que la identidad "Cervantes es el autor del Quijote", aun siendo verdadera en un mundo dado s, no lo sea necesariamente en todos los que son accesibles desde él (para un agente dado, Juan); con lo cual "Juan sabe que el autor de Quijote era manco" tampoco sería verdadera en s.

4.12. Sistemas axiomáticos

Ya hemos mencionado que introducir el predicado de identidad y términos de función en nuestra lógica epistémica de primer orden no resulta demasiado difícil. Los términos de función no requieren de ningún axioma adicional, pues los hemos incluido en la sintaxis del lenguaje como un tipo de términos. La regla de sustituibilidad de la identidad sí que debe ser restringida: puesto que las funciones reciben una interpretación diferente en cada mundo posible, no podemos sustituir un término en una expresión en la que caiga bajo el alcance de un operador epistémico. La base que debemos adoptar para nuestra lógica de dominios constantes consta de los siguientes esquemas de axioma:

LPO1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

LPO2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

LPO3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

LPO4. $\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ (Con la condición de que x no aparezca libre en φ)

LPO5. $\forall x\varphi \rightarrow \varphi\,(t/x)$ (Con la condición de que x no aparezca libre en t)

LPO6. $\forall x(x = x)$

Además de las reglas:

Modus Ponens: $\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$

Generalización: $\dfrac{\varphi \to \psi\,(t/x)}{\varphi \to \forall x \psi}$

(Con la condición de que x no aparezca libre en φ)

Sustituibilidad de la identidad: $\dfrac{\begin{array}{c} t_1 = t_2 \\ \varphi\,(t_1) \end{array}}{\varphi\,(t_2/t_1)}$

(donde t_1 y t_2 son términos que no contienen variables y t_1 no cae en φ bajo el alcance de un operador epistémico)

La expresión $\varphi(t/x)$ que figura en la regla de generalización se entiende en los casos anteriores, como la fórmula resultante de sustituir cada ocurrencia libre de x por t en la fórmula φ; sólo que ahora tenemos que añadir la restricción de que x no ocurra libre en t.

Añadiendo a estos axiomas y reglas los característicos de cada sistema de lógica epistémica obtenemos los sistemas correspondientes de lógica epistémica de primer orden con identidad.

Puesto que ya hemos demostrado la corrección de la lógica epistémica de primer orden sin identidad ni términos de función, basta con demostrar ahora la corrección de LPO6 y R3 para disponer de una prueba de que el sistema así construido es correcto. Lo primero, probar la corrección de LPO6, no parece necesario, ya que evidentemente la función de interpretación asigna un único valor a cada constante individual o término de función en cada mundo posible. procedamos pues a demostrar la corrección de la regla de sustituibilidad de la identidad.

Teorema 4.12.1. *Para todo modelo kipkeano extendido M y todo $s \in W$ de la estructura M, si $M, s \vDash t_1 = t_2$ y $M, s \vDash \varphi\,(t_1)$, entonces $M, s \vDash \varphi\,(t_2/t_1)$ (con la condición de que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico).*

Demostración: Sean un modelo kripkeano extendido de dominio constante M y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash t_1 = t_2$ y $M, s \vDash \varphi\,(t_1)$, donde t_1 no cae en φ bajo el alcance de un operador epistémico. Por evaluación de $=$, $\upsilon\,(s, t_1) = \upsilon\,(s, t_2)$; y puesto que t_1 no cae en φ bajo el alcance de un operador epistémico, es en el mundo posible s donde habremos de evaluar $\varphi\,(t_2/t_1)$. Así pues, $M, s \vDash \varphi\,(t_2/t_1)$. QED.

En cuanto a la completud, la prueba es básicamente idéntica a la de la sección 4.7. Respecto a la construcción del modelo canónico M^C; hablaremos, además de un conjunto *Cons* de constantes individuales, de un conjunto T de términos individuales tal que $T = \{Cons \cup Func\}$ (donde $Func$ es el conjunto de términos de función del lenguaje $\mathcal{L}_w$). Sólo necesitamos redefinir la función de evaluación de la siguiente forma:

a) $\upsilon\,(c_i) = c_i$ (Para todo $t_i \in Cons$)

b) $\upsilon\,(s_\Phi, t_i) = \upsilon\,(s_\Phi, t_j)$ syss $t_i = t_j \in \Phi$ (Para cualesquiera $t_i, t_j \in T$)

c) $\langle \upsilon\,(s_\Phi, t_1)\,, \upsilon\,(s_\Phi, t_2)\,, \cdots, \upsilon\,(s_\Phi, t_n) \rangle \in \upsilon\,(s_\Phi, P^n)$ syss $P^n\,(t_1, t_2, \cdots t_n) \in \Phi$ (Para cualesquiera $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$)

Una vez construido el modelo M^C la demostración de que para toda fórmula $\varphi \in LEP$, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$ es idéntica a la de 4.7, salvo por lo que hace al caso en que φ es $t_i = t_j$. Veamos la demostración:

De izquierda a derecha, supongamos que $M^C, s_\Phi \vDash t_i = t_j$. Por R3, para cada fórmula ψ tal que $M^C, s_\Phi \vDash \psi\,(t_i)$, $M^C, s_\Phi \vDash \psi\,(t_j/t_i)$ (siempre que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico); y por hipótesis de la inducción, si $M^C, s_\Phi \vDash \psi\,(t_i)$ entonces$\psi\,(t_i) \in \Phi$; y también $\psi\,(t_j/t_i) \in \Phi$. Ahora bien, si $\psi\,(t_j/t_i) \in \Phi$ para toda fórmula ψ tal que $\psi\,(t_i) \in \Phi$, entonces $t_i = t_j$ es consistente con Φ, y por tanto $t_i = t_j \in \Phi$.

En sentido contrario, supongamos que $t_i = t_j \in \Phi$. Por la construcción del modelo, si $t_i = t_j \in \Phi$, entonces $\upsilon\,(s_\Phi, t_i) = \upsilon\,(s_\Phi, t_j)$; y por tanto $M^C, s_\Phi \vDash t_i = t_j$. QED.

4.13. Tablas semánticas con identidad y funciones

No resulta demasiado difícil añadir al método de tablas que hemos diseñado las reglas específicas para tratar con la identidad. Por lo pronto, ya hemos visto que el principio característico es el de sustituibilidad, pero que en contextos modales no se cumple necesariamente cuando transitamos de un mundo posible a otro. Ahora bien, en nuestro método de tablas los mundos posibles aparecen representados por etiquetas; tenemos pues que exigir que las fórmulas implicadas vayan precedidas por la misma etiqueta. Además, los términos de función no designan a los mismos individuos en todos los mundos posibles, por lo que la sustitución no es legítima cuando uno de los términos cae bajo el alcance de un operador modal. Las reglas que debemos añadir a las del apartado 6 son las siguientes:

7. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: t_1 = t_2$, se escribe al final de la rama $\sigma :: \varphi(t_2/t_1)$ para toda fórmula $\sigma :: \varphi(t_1)$ que aparezca en ella tal que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico. La fórmula a la que se ha aplicado la regla se marca con el número de línea donde aparece $\sigma :: \varphi(t_1)$.

La expresión $\varphi(t_2/t_1)$ se entiende, igual que anteriormente, como el resultado de sustituir t_1 por t_2 en todas sus ocurrencias.

Además, es necesario garantizar otra propiedad esencial de la identidad; a saber, que todo es idéntico a sí mismo; lo que hacemos añadiendo la siguiente regla:

8. Para todo término individual t y toda etiqueta σ que aparezcan en la rama, se escribe $\sigma :: t = t$.

Si bien esta última regla se puede suprimir si simplemente adoptamos la convención de considerar una rama cerrada cuando en ella aparezca una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \neg(t = t)$, lo cual facilita notablemente la confección de la tabla. Además, puede resultar conveniente adoptar como regla derivada la simétrica de 7, lo que nos permite obviar el orden en que aparecen los términos en la identidad. A saber:

7'. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: t_1 = t_2$, se escribe al final de la rama $\sigma :: \varphi(t_1/t_2)$ para toda fórmula $\sigma :: \varphi(t_2)$ que aparezca en ella tal que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico; y se marca con el número de línea donde aparece $\sigma :: \varphi(t_2)$.

La corrección de este método se demuestra igual que en la sección 4.10. Como hicimos entonces, creamos un modelo cuyo dominio es el conjunto de parámetros que aparecen en la rama abierta de la tabla, tomados como objetos. W consta de un mundo posible por cada etiqueta que aparezca en la rama; las relaciones de accesibilidad se establecen igual que en 4.10 . La función de evaluación debe redefinirse de la siguiente forma:

a) $\upsilon(c_i) = c_i$

b) $\upsilon(s_\sigma, t_i) = \upsilon(s_\sigma, t_j)$ syss $\sigma :: t_i = t_j \in \mathcal{F}$ (Para cualesquiera $t_i, t_j \in T$)

b) $\langle \upsilon (s_\sigma, t_1), \upsilon (s_\sigma, t_2), \cdots, \upsilon (s_\sigma, t_n) \rangle \in \upsilon (s_\sigma, P^n)$ syss $P^n (t_1, t_2, \cdots t_n) \in \mathcal{F}$ (Para cualesquiera $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$)

Una vez definido el modelo, se procede a demostrar por inducción sobre el grado lógico de la fórmula que si $\sigma :: \varphi \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\sigma \vDash \varphi$. La demostración es idéntica a la de 4.10 salvo por lo que hace a las fórmulas de la forma $t_1 = t_2$, caso en el cual el lema se sigue de forma inmediata:

> φ es $t_1 = t_2$: Por la construcción del modelo, si $\sigma :: t_i = t_j \in \mathcal{F}$, entonces $\upsilon (s_\sigma, t_i) = \upsilon (s_\sigma, t_j)$; y por evaluación de $=$, $M, s_\sigma \vDash t_i = t_j$. QED.

En cuanto a la completud, la demostración es exactamente la misma que la de 4.10 (que a su vez es una simple ampliación de la de 2.9). Sólo hay que tener en cuenta el caso en que φ es de la forma es $t_1 = t_2$; en cuyo caso la tabla consta de una sola fórmula etiquetada, y por tanto es abierta..

4.14. Semántica de dominios variables

Ya hemos visto la lógica resultante de considerar el dominio constante resulta inadecuada para formalizar un importante número de situaciones: todas aquellas en los agentes consideren posible la existencia de más o menos individuos de los que existen en el mundo (supuestamente) real. En estos casos, deberemos optar por modelos de dominios variables.

La sintaxis de esta lógica de dominios variables es la misma que hemos presentado anteriormente, incluyendo el predicado diádico de identidad y los términos de función. El predicado diádico de identidad resulta especialmente importante porque nos permite definir un predicado de existencia $\mathcal{E}$, tal que para cada constante individual c,

$$\mathcal{E}(c) =_{def} \exists x\,(x = c)$$

La fórmula $\exists x(x = c)$ es universalmente válida en la lógica clásica de primer orden, y también en una lógica epistémica de dominio constante; pero ya no lo es en una lógica epistémica de dominio variable, puesto que el individuo del dominio designado por la constante c puede no existir en todos los mundos posibles de un modelo dado. Es interesante destacar que la fórmula $\forall x \exists y(x = y)$ sí que resulta universalmente válida en esta lógica, ya que el ámbito de variabilidad de los cuantificadores es el dominio de cada mundo posible, y de cada uno de los individuos del dominio de un mundo posible dado es obviamente verdadero que existe en ese mundo. En breve veremos los detalles.

Para construir la semántica necesitaremos tener en consideración un dominio específico $\mathfrak{D}_s$ para cada mundo posible s; además del dominio $\mathfrak{D}$ del modelo, que debe cumplir que $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{D}_s \cup \mathfrak{D}_t, \cdots\}$ (para todo $s, t, \ldots \in W$, de la estructura M). Hay varias maneras posibles de presentar esto, una de ellas es ampliar la definición de la función de evaluación υ de forma que asigne a cada mundo posible un subconjunto de $\mathfrak{D}$. Un modelo kripkeano extendido variable es entonces una estructura $M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$ donde W y $R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}$ se interpretan como habitualmente, $\mathfrak{D}$ es un conjunto no vacío de individuos y υ es una función de evaluación tal que:

a) $\upsilon(s, \mathfrak{D}) \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$ (habitualmente, escribiremos $\mathfrak{D}_s$ en lugar de $\upsilon(s, \mathfrak{D})$)

b) $\upsilon(s, a) \in \mathfrak{D}$ (como anteriormente, estipularemos que para todo $s, t \in W$, $\upsilon(s, a) = \upsilon(t, a)$; por lo que abreviaremos escribiendo simplemente $\upsilon(a)$)

c) $\upsilon(s, P^n) \in \mathfrak{D}^n$

d) $\upsilon(s, f^n) \in \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} : \mathfrak{D}^n \mapsto \mathfrak{D}\}$

La verdad de una fórmula en un mundo posible $s \in W$ de la estructura M (abreviado, $s \in M$) se define de forma semejante a los casos anteriores. En el caso de las fórmulas atómicas, se mantiene la misma definición que en el caso de los dominios constantes (aunque con un significado algo distinto, como acabamos de explicar); lo mismo ocurre con la identidad:

1. $M, s \vDash Pt_1, \cdots, t_n$ syss $\langle \upsilon(t_1), \cdots, \upsilon(t_n) \rangle \in \upsilon(s, P)$

2. $M, s \vDash t_1 = t_2$ syss $\upsilon(s, t_1) = \upsilon(s, t_2)$

Las conectivas proposicionales y los operadores epistémicos se tratan como en el caso proposicional. Respecto a las condiciones de verdad para los cuantificadores y la identidad, necesitamos especificar previamente algunas cuestiones sobre notación. En la sección 4.5 introdujimos la expresión $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$ para indicar que $M' = M$ salvo, a lo sumo, por lo que hace al valor que la función de evaluación υ asigna a la constante a. Diremos ahora que $M' = M[\upsilon(a)/s]$ (que leeremos "M'

es una variante de M para a en s") syss $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$ y $\upsilon(a) \in \mathfrak{D}_s$. Las condiciones son ahora las siguientes:

8. $M, s \vDash \forall x\varphi$ syss $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$.

9. $M, s \vDash \exists x\varphi$ syss $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$.

Intuitivamente, lo que estas cláusulas nos dicen es que el ámbito de variabilidad de los términos es el dominio del modelo, mientras que el de los cuantificadores es el dominio de cada mundo posible, de manera que puede ocurrir que una fórmula de la forma $\forall x\varphi(x)$ sea verdadera en un mundo s de un modelo M, y que sin embargo $\varphi(t)$ sea falsa en ese mismo mundo, siempre que $\upsilon(t)$ no pertenezca a $\mathfrak{D}_s$. Por ejemplo, en el mundo real es verdad que todos los hombres son mortales, y también que Aquiles era inmortal, salvo por un pequeño problema con el talón.

La semántica que hemos presentado tiene la peculiaridad de que, si bien las constantes individuales designan a un mismo individuo del dominio en todos los mundos posibles, ese individuo no existe en todos esos mundos; i.e., no existe en el dominio específico de cada uno de ellos. Esta es una característica propia de una familia de lógicas conocidas como *Lógicas Libres.* Obsérvese que la función de evaluación υ asigna a cada predicado n-ádico, en cada mundo posible s, un conjunto de n-plas ordenadas de $\mathfrak{D}^n$ y no de $\mathfrak{D}^n_s$; de manera que una fórmula de la forma $P(a)$ puede ser verdadera en un mundo posible s incluso en el caso de que $a \notin \mathfrak{D}_s$; y por tanto, $M, s \vDash \neg\mathcal{E}(a)$. Cuando esto ocurre, se habla de una lógica *libre positiva.*

Una alternativa, sin duda razonable, es optar por la denominada *lógica libre negativa*, en la que se impone la restricción de que los objetos inexistentes no pueden tener propiedades positivas. La forma en que podría hacerse esto sería exigir que $\upsilon\,(s, P^n)$ pertenezca a $\mathfrak{D}^n_s$, y no a $\mathfrak{D}^n$.

Seguramente, hay buenas razones filosóficas a favor de ambas aproximaciones. La segunda podría parecer más cercana a la intuición: se antoja poco razonable aceptar como verdadero que el abominable hombre de las nieves es inmensamente grande, si bien no existe. Sin embargo, este enfoque negativo tampoco está exento de problemas. Para empezar, podemos encontrar ejemplos en que es razonable aceptar como verdaderos enunciados sobre seres inexistentes, como "Prometeo es un personaje mitológico". Pero sobre todo, parece que hay al menos un predicado que puede ser verdadero de cualquier objeto; a saber, la identidad. Parece que $a = a$ debería ser verdadero en todos los mundos posibles, independientemente de que exista o no en ese mundo. Hemos optado por la primera opción por ser la más extendida y, seguramente, la que menos problemas técnicos presenta. No obstante lo cual, es necesario aceptar que ambas propuestas son dudosas desde un punto de vista filosófico.

Nos interesa destacar que hay otro enfoque del asunto que tal vez sea el más sugerente, que consiste en asignar un valor de verdad a una proposición $P(t_1, \cdots, t_n)$ en un mundo posible s de un modelo M syss $\langle t, \cdots, t_n \rangle \in \mathfrak{D}^n_s$, con lo que una afirmación sobre un objeto inexistente no sería ni verdadera ni falsa. La principal razón para no adoptar este enfoque ha sido la pretensión de alejarse lo menos posible de la lógica clásica.

Mencionábamos al comenzar este capítulo que uno de los principales problemas planteados por la lógica epistémica (y modal, en general) de primer orden es el fallo de la regla de generalización existencial. Efectivamente, del enunciado "Juanito cree que el abominable hombre de las nieves es inmenso" no podemos deducir sin más que "hay algo de lo que Juanito cree que es inmenso". De aceptar esta inferencia como válida dispondríamos de un método demasiado fácil para probar cualquier cosa.

Nuestra semántica da cumplida cuenta de esta peculiaridad de los contextos intensionales. Ya hemos visto que una fórmula $\varphi(t)$ puede ser verdadera en un mundo posible s de un modelo dado M incluso en el caso de que el objeto designado por t no exista en ese mundo. En cambio para que la fórmula $\exists x\varphi(x)$ sea verdadera es necesario que lo sea también $\varphi(x)$ para al menos un valor de x perteneciente al dominio de s. por supuesto, puede ocurrir que se cumpla lo primero pero no lo segundo.

Esto seguiría siendo así incluso aunque hubiéramos optado por una lógica libre negativa. De ser así, sería verdad que $P(t) \vDash \exists xP(x)$, pero no genéricamente que $\varphi(t) \vDash \exists x\varphi(x)$. En concreto, no lo es cuando x cae bajo el alcance de un operador epistémico: de "los antiguos griegos creían que Aquiles era inmortal" no se deduce que haya alguien de quien los antiguos griegos creían que era inmortal.

4.15. Modelos monótonos y antimonótonos

Algunos tipos interesantes de modelos variables son aquellos en que se dan relaciones de inclusión entre los dominios de los distintos mundos posibles accesibles entre sí. Diremos que se trata de un modelo de dominios monótonos (o simplemente de un modelo monótono) cuando esta inclusión da lugar a un conjunto de dominios crecientes, y de un modelo de dominios antimonótonos (un modelo antimonótono) si da lugar a un conjunto de dominios decrecientes. En el caso de que se cumplan ambas propiedades hablaremos de dominios localmente constantes. Veamos algunos detalles.

Definición 4.15.1. Un modelo kripkeano extendido

$$M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$$

es monótono syss para todo $s, t \in W$, si $sR_{a_i}t$, entonces $\mathfrak{D}_s \subseteq \mathfrak{D}_t$.

Definición 4.15.2. Un modelo kripkeano extendido

$$M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$$

es antimonótono syss para todo $s, t \in W$, si $sR_{a_i}t$, entonces $\mathfrak{D}_t \subseteq \mathfrak{D}_s$.

Informalmente hablando, un modelo monótono es aquel en que los agentes conocen todos los objetos existentes, pero no saben que son todos los objetos, y por tanto consideran posible una situación en la que haya más objetos. Supongamos, por ejemplo, que un cierto agente a ha ido conociendo por separado a todos los miembros de una cierta familia, digamos los Pérez, pero no sabe si los que él conoce son efectivamente todos los miembros de la familia. Supongamos también que todos los Pérez que a ha conocido son rubios. Entonces, es cierto que, de todos los Pérez, a sabe que son rubios; pero no es el caso que a sepa que todos los Pérez son rubios. En cambio, si alguien informa a a de que todos los miembros de la familia son, pongamos, daltónicos; a efectivamente sabe de cada uno de los Pérez que es daltónico, aunque sin saber que esos son todos los que existen.

Ya se habrá descubierto que estamos hablando de la Fórmula Barcan y su conversa, y es que efectivamente estas dos fórmulas están estrechamente ligadas a la monotonía y antimonotonía de modelos variables. No obstante, no sería correcto decir que la Formula Barcan es válida en todos los modelos antimonótonos, y sólo en ellos; ni que su conversa es válida en todos los modelos monótonos, y sólo en ellos. Una cierta instancia de la Formula Barcan puede ser válida en un cierto modelo que no sea antimonótono porque, por ejemplo, los elementos del dominio que hacen que no lo sea resulten irrelevantes para la evaluación de la fórmula, y lo mismo ocurre con su conversa. Sin embargo, siempre es posible cambiar la función de interpretación de forma que el modelo resultante no satisfaga a la fórmula. Para expresar esto con precisión necesitamos hablar de marcos, mejor que de modelos[21].

Toscamente hablando, un marco es un modelo sin función de evaluación. Esto es, un marco kripkeano extendido para m agentes es una estructura

$$\mathcal{F} = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m} \rangle .$$

Lógicamente, ahora podemos decir que un modelo es una estructura $M = \langle \mathcal{F}, v \rangle$. Diremos que un modelo M está basado en un marco $\mathcal{F}$ syss $M = \langle \mathcal{F}, v \rangle$.

Hasta ahora, era la función de evaluación la que asignaba un dominio a cada mundo posible del modelo. Esto, aunque cómodo, resultaba algo artificioso; sin embargo, ya no podemos seguir recurriendo a este artificio, puesto que los marcos carecen de función de evaluación. Aun así, podemos expresar la misma idea simplemente considerando el dominio del modelo como la unión de los modelos de cada mundo posible:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{s_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{D}_{s_n} \text{ (para todo } s_i \in W \text{)}$$

Hablaremos de marcos monótonos y antímonótonos en el mismo sentido en que lo hacíamos de los modelos. Diremos que un marco $\mathcal{F}$ satisface una fórmula φ syss lo hacen todos los modelos basados en ese marco, y que una familia de marcos satisface una fórmula φ syss lo hacen todos los marcos de esa familia.

Teorema 4.15.3. *Sea $\mathcal{F}^+$ el conjunto de todos los marcos kripkeanos con dominios monótonos. Se cumple que $\mathcal{F} \vDash K_{a_i}\forall x P(x) \to \forall x K_{a_i} P(x)$ syss[22] $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^+$.*

[21] En realidad, podemos demostrar los dos teoremas que siguen para modelos, y no para marcos, siempre que añadamos la condición de que la función de evaluación asigne una constante a cada elemento del dominio.

[22] Por razones técnicas —para poderle asignar una evaluación— expresamos la conversa de la

Demostración: De derecha a izquierda , sea $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^{+}$. Partimos del supuesto de que $M, s \vDash K_{a_i}\forall x P(x)$, para todo M tal que $M = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ y cualquier $s \in W$ de la estructura M. Por evaluación de K, $M, t \vDash \forall x P(x)$ para todo $t \in W$ tal que $sR_{a_i}t$. De aquí se sigue que $M', t' \vDash P(a/x)$ para todo M', t' tales que $t' = t$ y $M' = M[\upsilon(a)/t]$. Puesto que $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$, hay un s' tal que t' es una alternativa epistémica cualquiera a s' para el agente a_i; y por tanto $M', s' \vDash K_{a_i}P(a/x)$. Pero puesto que $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^{+}$, si $\upsilon(a) \in \mathfrak{D}_s$ entonces $\upsilon(a) \in \mathfrak{D}_t$, por lo que toda variante de M para a en s es también una variante de M para a en t ; y puesto que $M', s' \vDash K_{a_i}P(a/t)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y que $M' = M[\upsilon(a)/t]$, $M', s' \vDash K_{a_i}P(a/t)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y que $M' = M[\upsilon(a)/s]$. Luego $M, s \vDash \forall x K_{a_i}P(x)$.

En sentido contrario, procederemos por contraposición; esto es, supondremos que $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{+}$ y demostraremos que $\mathcal{F} \nvDash K_{a_i}\forall x P(x) \rightarrow \forall x K_{a_i}P(x)$. Supongamos pues que $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{+}$; entonces, hay al menos un $s, t \in W$ de $\mathcal{F}$ tales que $\mathfrak{D}_s \nsubseteq \mathfrak{D}_t$; y por tanto, hay al menos un elemento de $\mathfrak{D}$, digamos $\boldsymbol{c}$, tal que $\mathbf{c} \in \mathfrak{D}_s$ y $\mathbf{c} \notin \mathfrak{D}_t$. Sea ahora $M = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$, donde υ se define de la siguiente forma:

$$\upsilon(s_i, P) = \mathfrak{D}_{s_i} \text{ (Para todo } s_i \in W \text{ de la estructura } M).$$

Por una parte, $M, s \vDash K_{a_i}\forall x P(x)$; ya que para todo $t \in W$ de M tal que $sR_{a_i}t$, $M, t \vDash \forall x P(x)$. A su vez, esto es cierto porque $\upsilon(t, P) = \mathfrak{D}_t$; y por tanto, para todo M', t' tales que $t' = t$ y $M' = M[\upsilon(a)/t]$, $M', t' \vDash P(a/x)$.

Sin embargo, $M, s \nvDash \forall x K_{a_i}P(x)$, ya que si fuera así, debería ocurrir que para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M[\upsilon(a)/s]$, $M', s' \vDash K_{a_i}P(a/x)$; y por tanto, que para todo $t' \in W$ de M' tal que $s'R_{a_i}t'$, $M, t' \vDash P(a/x)$. Pero esto no es verdad, ya que hay un elemento de $\mathfrak{D}_s$ (a saber, $\mathbf{c}$) que no pertenece a $\mathfrak{D}_t$, y por tanto, para $\upsilon(a) = \mathbf{c}$, $\upsilon(a) \notin \upsilon(t', P)$, y por tanto $M, t' \nvDash P(a/x)$. QED.

Dado que, por supuesto, todo modelo monótono está basado en un marco monótono, de aquí se sigue que toda instancia de la conversa de la Fórmula Barcan es válida en cualquier modelo monótono; esto es, que si $M \in M^{+}$, entonces $M \vDash CFB$ (donde M^{+} es el conjunto de todos los modelos monótonos y CFB cualquier instancia de sustitución de la conversa de la Fórmula Barcan).

Fórmula Barcan como una fórmula concreta, y no como un esquema de fórmula. Con todo, esta demostración es fácilmente extendible a cualquier instancia de CFB, dado que para cualquier modelo M y cualquier fórmula $\varphi(x)$, se puede construir un predicado P tal que $M \vDash P(x)$ syss $M \vDash \varphi(x)$. Tal predicado es $\lambda x \varphi(x)$. La misma observación es válida para el teorema siguiente.

Lo que no se sigue, por las razones que hemos mencionado, es lo contrario; esto es, que si $M \notin M^{+}$, entonces $M \nvDash CFB$. Aun así, dado un modelo no monótono M siempre es posible encontrar una cierta instancia de CFB, digamos CFB', tal que para un cierto $s \in W$ de M, $M, s \nvDash CFB'$[23].

Teorema 4.15.4. *Sea $\mathcal{F}^{-}$ el conjunto de todos los marcos kripkeanos con dominios antimonótonos. Se cumple que $\mathcal{F} \vDash \forall x K_{a_i} P(x) \rightarrow K_{a_i} \forall x P(x)$ syss $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^{-}$.*

Demostración: De derecha a izquierda, sea $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^{-}$. Partimos del supuesto de que $M, s \vDash \forall x K_{a_i} P(x)$, para todo M tal que $M = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ y cualquier $s \in W$ de la estructura M. Por evaluación de $\forall$, $M', s' \vDash K_{a_i} P(a/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$. De aquí se sigue que para todo $t' \in W'$ tal que $s' R_{a_i} t'$, $M', t' \vDash P(a/x)$.

Ahora bien, puesto que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{-}$, si $\upsilon(a) \in \mathfrak{D}_t$ entonces $\upsilon(a) \in \mathfrak{D}_s$, por lo que toda variante de M para a en t es también una variante de M para a en s. Puesto que $M', t' \vDash P(a/x)$ para todo $t' \in W'$ de la estructura M' tales que $s' R_{a_i} t'$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$, $M', t' \vDash P(a/x)$ para todo $t' \in W'$ de la estructura M' tales que $s' R_{a_i} t'$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/t]$; luego $M, t \vDash \forall x P\,(x)$.

Puesto que $M' \underset{\upsilon(a)}{=} M$ y $s' R t'$, también se cumple que sRt; y puesto que t es una alternativa epistémica cualquiera a s respecto al agente a_i, $M, s \vDash K_{a_i} \forall x P(x)$.

En sentido contrario, procederemos por contraposición; esto es, supondremos que $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{-}$ y demostraremos que $\mathcal{F} \nvDash \forall x K_{a_i} P(x) \rightarrow K_{a_i} \forall x P(x)$. Supongamos pues que $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}^{-}$; entonces, hay al menos un $s, t \in W$ de la estructura $\mathcal{F}$ tales $\mathfrak{D}_t \nsubseteq \mathfrak{D}_s$; y por tanto, hay al menos un elemento de $\mathfrak{D}$, digamos $\boldsymbol{c}$, tal que $\mathbf{c} \in \mathfrak{D}_t$ y $\mathbf{c} \notin \mathfrak{D}_s$.

Sea ahora $M = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$, donde υ se define de la siguiente forma:

$$\upsilon\,(s, P) = \upsilon\,(t, P) = \mathfrak{D}_s.$$

Por una parte, $M, s \vDash \forall x K_{a_i} P\,(x)$; ya que para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon\,(a)\,/s]$, $M', s' \vDash K_{a_i} P\,(a/x)$. Lo cual es verdad ya que para todo t' tal que $s' R_{a_i} t'$, se cumple que $M', t' \vDash P\,(a/x)$ (puesto que $\upsilon\,(a) \in \mathfrak{D}_s$).

Sin embargo, $M, s \nvDash K_{a_i} \forall x P\,(x)$, ya que para eso tendría que ocurrir que para todo t tal que $s R_{a_i} t$, $M, t \vDash \forall x P\,(x)$; y esto sólo es verdad si para todo M', t' tales

[23] La fórmula en cuestión es $K_a \forall x \exists y\,(x = y) \rightarrow \forall x K_a \exists y\,(x = y)$.

que $t' = t$ y $M' = M[\upsilon(a)/t]$, $M't' \vDash P(a/x)$. Pero esto no es cierto, porque para $\upsilon(a) = \mathbf{c}$, $\upsilon(a) \notin \upsilon(t, P)$, y por tanto $M', t' \nvDash P(a/x)$. QED.

Como en el caso anterior, y dado que, por supuesto, todo modelo antimonótono está basado en un marco antimonótono, de aquí se sigue que toda instancia de la Fórmula Barcan es válida en cualquier modelo antimonótono; esto es, que si $M \in M^-$, entonces $M \vDash FB$ (donde M^- es el conjunto de todos los modelos antimonótonos y FB cualquier instancia de sustitución de la Fórmula Barcan).

Por las mismas razones tampoco se sigue lo contrario; esto es, que si $M \notin M^-$, entonces $M \nvDash FB$. Aun así, dado un modelo no antimonótono M, sigue siendo posible encontrar una cierta instancia de FB, digamos FB', tal que para un cierto $s \in W$ de M $M, s \nvDash FB'$; aunque en este caso necesitamos imponer el requisito adicional de que la función de evaluación asigne una constante a ciertos elementos del dominio [24].

Un modelo puede tener dominios que sean a la vez monótonos y antimonótonos, en ese caso diremos que es un modelo localmente constante. La noción de modelo de dominios localmente constantes (por abreviar, modelos localmente contantes) no es idéntica a la de dominio constante, pero el conjunto de fórmulas válidas es el mismo en ambos.

Definición 4.15.5. Un modelo kripkeano extendido

$$M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$$

es localmente constante syss para todo $s, t \in W$, si $sR_{a_i}t$, entonces $\mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_s$.

Teorema 4.15.6. *Sea M^c el conjunto de todos los modelos constantes, y M^{lc} el conjunto de todos los modelos localmente constantes. $\vDash_{M^c} \varphi$ syss $\vDash_{M^{lc}} \varphi$.*

Demostración: En un sentido resulta trivial: todo modelo constante es también un modelo localmente constante; y por tanto, si una fórmula φ es válida en todo dominio localmente constante lo es también en todo dominio constante.

En sentido contrario, por contraposición, supongamos una fórmula φ, un modelo localmente constante M y un mundo posible $s \in W$ de M tales que $M, s \nvDash \varphi$. Para evaluar φ necesitaremos tener en consideración una serie de mundos posibles

[24] Si $M \notin M^-$ debe haber al menos un $s, t \in W$ de la estructura M tales que para al menos un elemento de $\mathfrak{D}$, digamos $\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathfrak{D}_t$ y $\mathbf{c} \notin \mathfrak{D}_s$. Sea c una constante tal que $\upsilon(c) = \mathbf{c}$. Es fácil demostrar que $M, s \nvDash \forall x K_{a_i} \neg(x = c) \rightarrow K_{a_i} \forall x \neg(x = c)$.

$s_1, s_{2,} \cdots, s_n$ tales que $s_1 R_{a_i} s_2, \cdots, s_{r-1} R_{a_j} s_n$; diremos que estos son los mundos posibles relevantes para la evaluación de la fórmula.

Sea ahora M' un modelo kripkeano extendido

$$M' = \left\langle \mathfrak{D}', W', R'_{a_1}, \cdots, R'_{a_m}, \upsilon' \right\rangle$$

tal que W' consta de todos los miembros de W relevantes para la evaluación de φ; sean $R'_{a_1}, \cdots, R'_{a_1}$ las mismas $R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}$ restringidas a los miembros de W; sea $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_{s_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{D}_{s_n}$ (donde $s_1, s_{2,} \cdots, s_n$ son los mundos posibles relevantes para la evaluación φ); y sea υ' la misma υ restringida a W' y $\mathfrak{D}'$. Para empezar, M' es un modelo de dominio constante, ya que todos los elementos de W' están conectados entre sí por las relaciones de accesibilidad o, de lo contrario, no serían relevantes para la evaluación de φ. Además, es obvio que $M', s \nvDash \varphi$, ya que los miembros de W' son los únicos relevantes para la evaluación de φ. QED.

4.16. Sistemas axiomáticos

Para axiomatizar la *LEPO* con dominios variables ya no es suficiente con añadir los axiomas de la lógica epistémica a los axiomas propios de la lógica clásica de primer orden. La razón de esto que, como hemos visto, ni la regla de *Generalización Existencial* ni la de *Sustituibilidad de la Identidad* funcionan sin restricciones en este marco. En realidad, ni tan siquiera la regla de *Instanciación Universal* es válida sin más cuando los dominios son diferentes en cada mundo posible, ya que puede ocurrir que una fórmula $\varphi(x)$ sea válida para todo valor de x perteneciente al dominio de un mundo s, pero no para un cierto valor, digamos $\mathbf{c}$, perteneciente al dominio general del modelo; de manera que, si $\upsilon(c) = \mathbf{c}$, $M, s \vDash \forall x \varphi(x)$, pero $M, s \nvDash \varphi(c)$.

Tomaremos como términos primitivos $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $=$ y K, aunque por simplicidad escribiremos $\mathcal{E}(t)$ en lugar de su definición $\exists x(x = t)$. $\wedge$,$\vee$, $\exists$ y $\widehat{K}$ se definen de la forma habitual. El vocabulario básico consta de un conjunto $\mathcal{P}$ de predicados n-ádicos, un conjunto $\mathcal{C}$ de constantes individuales y un conjunto A de agentes. Podemos prescindir de los términos de función, en cuyo caso la ocurrencia de un término t en un esquema de axioma debe interpretarse como la ocurrencia de una constante. Las reglas de formación de fórmulas son también las habituales, salvo por lo referente a los términos de función, en caso de que decidamos prescindir de ellos.

La base que debemos adoptar para nuestra lógica de dominios variables consta de los siguientes esquemas de axioma:

LPO1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

LPO2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

LPO3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

LPO4. $\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ (Con la condición de que x no ocurra libre en φ)

LPO5. $(\forall x\varphi(x) \wedge \mathcal{E}(t)) \rightarrow \varphi\,(t/x)$

LPO6. $\forall x(x = x)$

Además de las reglas:

Modus Ponens (MP): $\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$

Generalización (Gen): $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi\,(t/x)}{\varphi \rightarrow \forall x\psi}$

(Con la condición de que t no ocurra en φ)

Sustituibilidad de la Identidad (SI): $\dfrac{\begin{array}{c}t_1 = t_2 \\ \varphi\,(t_1)\end{array}}{\varphi\,(t_2/t_1)}$

(donde t_1 y t_2 son términos que no contienen variables y t_1 no cae en φ bajo el alcance de un operador epistémico)

La restricción a la regla SI sólo es necesaria en el caso de que nuestro lenguaje cuente con términos de función, ya que las constantes se interpretan como designadores rígidos y no plantean problemas con la sustituibilidad de la identidad. En caso de que decidamos prescindir de ellos podemos eliminar la restricción.

A estos hay que añadir la regla de generalización del conocimiento y los axiomas A2 y A3 para obtener el sistema análogo a T_m de lógica de primer orden con dominios variables, al que denominaremos VT_m. Añadiendo A4 obtenemos el sistema $VS4_m$, y añadiendo a este último sistema el axioma A5 obtenemos $VS5_m$.

Los correspondientes sistemas para lógicas epistémicas de primer orden con dominios monótonos se obtienen simplemente añadiendo a los anteriores la conversa de la Fórmula Barcan. Así, $MT_m = VT_m + CFB$ y $MS4_m = VS4_m + CFB$. Como era de esperar, los sistemas para lógicas epistémicas de primer orden con dominios antimonótonos sólo requieren agregar la Fórmula Barcan, de modo que $AT_m = VT_m + FB$ y $AS4_m = VS4_m + FB$.

No hemos mencionado el caso de $S5_m$ porque para él no tiene demasiado sentido hablar de modelos monótonos o antimonótonos. La razón es que en $S5_m$ la relación de accesibilidad es simétrica, de manera que los dominios monótonos son también antimonótonos, y por tanto localmente constantes; y ya hemos visto que las fórmulas válidas en todos los dominios constantes son las mismas que las fórmulas válidas en los dominios localmente constantes. Así pues, $VS5_m + FB = VS5_m + CFB = CS5_m$.

En cuanto al concepto de creencia, basta sustituir A3 por D para obtener los sistemas análogos.

4.17. Corrección

Los esquemas de axioma LPO1, LPO2 y LPO3, así como la regla de *Modus Ponens*, son los propios de la lógica proposicional, por lo que no nos parece necesario demostrar su corrección. Hagamos pues las pruebas correspondientes a los axiomas y reglas específicos de primer orden. Sea M^V el conjunto de todos los modelos kripkeanos extendidos de dominio variable. Se cumple:

Teorema 4.17.1. *Para cualesquiera M, s tales que $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M, y para cualesquiera fórmulas $\varphi, \psi \in LEPO$,*

$$M, s \vDash \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$$

(siempre que x no ocurra libre en φ).

Demostración: Sean $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \forall x\, (\varphi \to \psi)$ y x no ocurre libre en φ. Por evaluación de $\forall$, esto significa que $M', s' \vDash (\varphi \to \psi)\, (a/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\, [\upsilon(a)/s]$. Supongamos ahora que $M, s \vDash \varphi$. Puesto que x no ocurre libre en φ, a no ocurre en $\varphi\, (a/x)$, que es la misma φ. Además, puesto que M' sólo difiere de M en el valor asignado a a, $M', s' \vDash \varphi\,(a/x)$; y por tanto, $M', s' \vDash \psi\,(a/x)$. Pero esto vale para M', s' cualesquiera tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$; por tanto, $M, s \vDash \forall x\psi$. QED.

Teorema 4.17.2. *Para cualesquiera M, s tales que $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M, y para toda fórmula $\varphi \in LEPO$,*

$$M, s \vDash (\forall x\varphi(x) \wedge \mathcal{E}(t)) \to \varphi\,(t/x)\,.$$

Demostración: Sean $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash (\forall x\varphi(x) \wedge \mathcal{E}(t))$. Por una parte, $M, s \vDash \forall x\varphi(x)$; y por tanto $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$. Por otro lado, $M, s \vDash \mathcal{E}(t)$, y por tanto $\upsilon\,(t) \in \mathfrak{D}_s$ (porque $\mathcal{E}\,(t) =_{def} \exists x(x = t)$). Sea $\upsilon\,(t) = \mathbf{t}$; dado que $\mathbf{t} \in \mathfrak{D}_s$, hay un $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$ tal que $\upsilon\,(a) = \mathbf{t}$, y puesto que $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para $\upsilon\,(a) = \mathbf{t}$ y M' sólo difiere de M respecto al valor de a, $M, s \vDash \varphi\,(t/x)$. QED.

Teorema 4.17.3. *Para cualesquiera M, s tales que $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M,*

$$M, s \vDash \forall x\,(x = x)\,.$$

Demostración: Supongamos que $M, s \nvDash \forall x\,(x = x)$. Entonces para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$, $M', s' \nvDash a = a$; o lo que es igual, $M', s' \vDash \neg\,(a = a)$. Pero esto es imposible, ya que $\upsilon\,(s', a)$ es necesariamente igual a que $\upsilon\,(s', a)$. Así pues, $M, s \vDash \forall x\,(x = x)$. QED.

Teorema 4.17.4. *Para cualesquiera M, s tales que $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M, y para cualesquiera fórmulas $\varphi, \psi \in LEPO$, si $M, s \vDash \varphi \to \psi\,(t/x)$ y t no ocurre en φ, entonces $M, s \vDash \varphi \to \forall x\psi\,(x)$.*

Demostración: Sean $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi \to \psi\,(t)$ (supuesto que t no ocurra en φ). Puesto que M es un modelo cualquiera, también es cualquiera el valor que la función de evaluación υ asigna a t, de manera que podemos afirmar que $M', s' \vDash (\varphi \to \psi\,(t))\,(a/t)$, para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$. Supongamos ahora que $M, s \vDash \varphi$. Puesto que t no ocurre en φ y M' sólo difiere de M en la evaluación de a, $M', s' \vDash \varphi\,(a/t)$, y por tanto $M', s' \vDash \psi\,(t)\,(a/t)$. Pero si $M, s \vDash \psi\,(t)\,(a/t)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M\,[\upsilon(a)/s]$, entonces $M, s \vDash \forall x\psi\,(x)$. QED.

Teorema 4.17.5. *Para cualesquiera M, s tales que $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M, y para toda fórmula $\varphi \in LEPO$, si $M, s \vDash t_1 = t_2$ y $M, s \vDash \varphi(t_1)$, supuesto que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico, entonces $M, s \vDash \varphi(t_2/t_1)$.*

Demostración: Sean $M \in M^V$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash t_1 = t_2$ y $M, s \vDash \varphi(t_1)$, supuesto que t_1 no caiga en φ bajo el alcance de un operador epistémico. Por evaluación de $=$, $\upsilon(s, t_1) = \upsilon(s, t_2)$; y puesto que t_1 no cae en φ bajo el alcance de un operador epistémico, s es el único mundo posible relevante para la evaluación de $\varphi(t_2/t_1)$. Así pues, $M, s \vDash \varphi(t_2/t_1)$. QED.

Con esto queda demostrada la corrección de los esquemas de axioma y las reglas de inferencia específicos de primer orden (con dominios variables). Si a los teoremas demostrados en esta sección añadimos 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3 tendremos demostrada la corrección de VT_m; si añadimos 2.4.4, queda demostrada la corrección de $VS4_m$; todos los teoremas anteriores más 2.4.5 demuestran la corrección de $VS5_m$. En cuanto a los correspondientes sistemas para dominios monótonos y antimonótonos, basta con demostrar la corrección de la Fórmula Barcan y su Conversa respecto a los modelos correspondientes, lo que ya se hizo en la sección 4.15.

4.18. Completud

Para demostrar la completud de los distintos sistemas de lógica epistémica de primer orden con dominios variables seguiremos la misma estrategia que la adoptada en 4.7, consistente en demostrar previamente el teorema de satisfacción mostrando como construir un modelo canónico. Por simplicidad, supondremos un lenguaje sin términos de función. La diferencia con la demostración de 4.7 es que ahora, en vez de partir del concepto de *conjunto máximamente consistente y existencialmente saturado* , partiremos del concepto de *conjunto máximamente consistente y existencialmente R-saturado*[25]. Definamos este último concepto:

Definición 4.18.1. Un conjunto de fórmulas Γ en el lenguaje $\mathcal{L}$ es existencialmente R-saturado syss, para toda fórmula de $\mathcal{L}$ de la forma $\exists x \varphi(x)$, si $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$

[25] La R es por cuantificación realista, que es la que estamos utilizando, por oposición a la cuantificación posibilista, que es aquella cuyo ámbito de variabilidad es el dominio del modelo.

entonces $\varphi(c/x) \in \Gamma$ y $\mathcal{E}(c) \in \Gamma$ (donde c es una constante que no ocurre en $\exists x\varphi(x)$ y $\varphi(c/x)$ es el resultado de sustituir uniformemente x por c en φ).

Dado un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y un conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}$, para un cierto sistema axiomático S, siempre es posible construir un conjunto Γ máximamente S-consistente y existencialmente R-saturado que contiene a Δ. El procedimiento es el mismo que usamos en la sección 4.7, con la diferencia de que para cada fórmula de la forma $\exists x\varphi(x)$ añadimos no sólo su instanciación con una constante individual c_i, sino también la afirmación de existencia de esa constante. Esto es:

Dado el lenguaje de la lógica epistémica de primer orden sin constantes individuales $\mathcal{L}_0$, construimos una serie de sistemas lingüísticos:

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathcal{L}_0, a_1^1, a_2^1, \cdots, a_i^1\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathcal{L}_1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_i^2\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}_j = \left\{\mathcal{L}_{j-1}, a_1^j, a_2^j, \cdots, a_i^j\right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}_w = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_j \cup \cdots$$

Y procedemos a la construcción de un conjunto máximamente S-consistente y existencialmente R-saturado. Para ello suponemos todas las fórmulas de $\mathcal{L}_0$ dispuestas en cierta ordenación $\alpha_1, \alpha_2, \cdots .\alpha_n$ y definimos una serie de conjuntos $\Gamma_0^0, \Gamma_0^1, \cdots, \Gamma_0^m$ tal como hicimos en 4.7:

i) $\Gamma_0^0 = \Delta$

ii) Si $\Gamma_0^i \cup \{\alpha_{i+1}\}$ es S-consistente, entonces $\Gamma_0^{i+1} = \Gamma_0^i \cup \{\alpha_{i+1}\}$; en caso contrario, $\Gamma_0^{i+1} = \Gamma_0^i$.

Sea ahora $\Gamma_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^1, \cdots, \Gamma_0^n$. Obtenemos así un conjunto máximamente consistente, aunque no existencialmente R-saturado. Procedemos entonces a convertirlo en un conjunto de formulas existencialmente R-saturado de la siguiente forma:

Supongamos las fórmulas existenciales de Γ_0 dadas en cierto orden. si $\exists x\varphi(x)$ es la k-ésima fórmula existencial de Γ_0, añadimos a Γ_0 las fórmulas:

i) $\varphi\left(a_1^k/x\right)$

ii) $\mathcal{E}\left(a_i^k\right)$

El resultado de estas adiciones es un conjunto Γ_0^* existencialmente R-saturado, pero que ahora no es máximamente consistente.

Tomamos ahora $\Gamma_1^0 = \Gamma_0^*$, y procedemos a maximizarlo tal y como hicimos con Γ_0^0, con lo que obtenemos $\Gamma_1 = \Gamma_1^0 \cup \Gamma_1^1, \cdots, \Gamma_1^n$. A continuación, llevamos a cabo la R-saturación existencial de Γ_1 por el procedimiento de añadir la instanciación de cada fórmula existencial de Γ_1 con una constante individual diferente de $\mathcal{L}_2$ y la afirmación de existencia de dicha constante, y así sucesivamente.

Definimos ahora $\Gamma = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1^0 \cdots \cup \Gamma_n^0$. No resulta difícil probar que este conjunto es máximamente consistente y existencialmente R-saturado.

Procederemos ahora a demostrar el teorema de satisfacción por el procedimiento habitual; esto es, construiremos un modelo canónico asignando un mundo posible a cada conjunto máximamente consistente y existencialmente R-saturado, el dominio de este modelo será el conjunto de las constantes individuales consideradas como objetos. Llamaremos $\mathcal{M}_v^r$ al conjunto de todos los modelos variables reflexivos; $\mathcal{M}_v^{r,t}$, al conjunto de todos los modelos variables reflexivos y transitivos; y $\mathcal{M}_v^{r,s,t}$ al conjunto de todos los modelos variables reflexivos, simétricos y transitivos. Veamos los detalles.

Teorema 4.18.2. *Para toda fórmula $\varphi \in LEPO$:*

a Si φ es VT_m-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_v^r$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

b Si φ es $VS4_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_v^{r,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

c Si φ es $VS5_m$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}_v^{r,s,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \models \varphi$.

Demostración: Como en el caso de la lógica epistémica proposicional, haremos primero la parte común de la prueba, ciñéndonos al sistema VT_m. Posteriormente demostraremos que el modelo que presentamos pertenece a $\mathcal{M}_c^r$, en el caso de VT_m; a $\mathcal{M}_c^{r,t}$, en el de $VS4_m$, o a $\mathcal{M}_c^{r,s,t}$, en el de $VS5_m$.

La construcción del modelo canónico es esencialmente igual a la de la sección 4.7, salvo por lo que respecta a la función de evaluación. Sea $\mathcal{CR}^{+}(VT_m)$ el conjunto de todos los conjuntos máximamente VT_m-consistentes y existencialmente R-saturados de fórmulas de $LEPO$, $\mathcal{P}$ el conjunto de letras predicativas del lenguaje $\mathcal{L}_w$, A el conjunto de agentes y $Cons = \{c_1, \cdots, c_j\}$ el conjunto de las constantes individuales del lenguaje $\mathcal{L}_w$.

Definimos el modelo $M^C = \{\mathfrak{D}, W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon\}$ de la siguiente forma:

El dominio del modelo canónico es el conjunto de las constantes del lenguaje, tomadas como objetos:

$$\mathfrak{D} = \{c_i \mid c_i \in Cons\}$$

W se definen como en el caso de los dominios constantes:

$$W = \left\{s_\Phi \mid \Phi \in \mathcal{CR}^{+}(VT_m)\right\}$$

La función de evaluación υ se define, ahora, como sigue:

a) $\upsilon(c_i) = c_i$ (Para todo $c_i \in Cons$)

b) $\upsilon(s_\Phi, c_i) \in \upsilon(s_\Phi, \mathfrak{D})$ (esto es, $\upsilon(s_\Phi, c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$) syss $\mathcal{E}(c_i) \in \Phi$

c) $\langle \upsilon(c_1), \upsilon(c_2), \cdots, \upsilon(c_n)\rangle \in \upsilon(s_\Phi, P^n)$ syss $P^n(c_1, c_2, \cdots c_n) \in \Phi$ (Para cualesquiera $c_1, c_2, \cdots, c_n \in Cons$)

Las relaciones de accesibilidad se establecen como en los casos anteriores:

$$R_{a_i} = \{\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \mid \text{para todo } \alpha \in LEPO, \text{ si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\}$$

(para cualesquiera conjuntos $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^{+}(VT_m)$, y $a_i \in A$)

Una vez construido el modelo M^C, se demuestra por inducción sobre el grado lógico de φ, que para toda fórmula $\varphi \in LEP$, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi$ syss $\varphi \in \Phi$:

La base es trivial. Los casos de los operadores proposicionales y del operador K son ya conocidos. Presentaremos únicamente la prueba para el caso en que φ es $\forall x \varphi(x)$.

De izquierda a derecha, supongamos que $M^C, s_\Phi \vDash \forall x\varphi(x)$. Por evaluación de $\forall$, $M', s'_\Phi \vDash \varphi(a/x)$ para todo M', s'_Φ tales que $s'_\Phi = s_\Phi$ y $M' = M^C[\upsilon(a)/s_\Phi]$. Ahora bien, puesto que el dominio del modelo es el conjunto de las variables individuales del lenguaje $\mathcal{L}_w$ tomadas como objetos, esto quiere decir que $M^C, s_\Phi \vDash \varphi(c_i/x)$, para todo $c_i \in Cons$ tal que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$[26]; de donde se sigue, por hipótesis de la inducción, que $\varphi(c_i/x) \in \Phi$ para todo $c_i \in Cons$ tal que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$. Ahora bien, por construcción del modelo, $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$ syss $\mathcal{E}(c_i) \in \Phi$; luego para todo c_i tal que $\mathcal{E}(c_i) \in \Phi$, $\varphi(c_i/x) \in \Phi$. De aquí se sigue que $\exists x \neg\varphi(x) \notin \Phi$; pues de lo contrario, al ser Φ existencialmente R-saturado, ocurriría que $\neg\varphi(c_j) \in \Phi$ y $\mathcal{E}(c_j) \in \Phi$ para algún $c_j \in Cons$, con lo cual Φ no sería consistente. Ahora bien; si $\exists x\neg\varphi(x) \notin \Phi$, entonces $\neg\exists x\neg\varphi(x) \in \Phi$, puesto que Φ es máximamente consistente. A su vez, $\neg\exists x\neg\varphi(x) \to \forall x\varphi(x) \in \Phi$, puesto que es una tesis de CT_m. De donde, por R1, $\forall x\varphi(x) \in \Phi$.

En sentido contrario, supongamos que $\forall x\varphi(x) \in \Phi$. Puesto que Φ es máximamente consistente, $(\forall x\varphi(x) \wedge \mathcal{E}(c_i)) \to \varphi(c_i/x)$. Luego, para todo c_i tal que $\mathcal{E}(c_i) \in \Phi$, $\varphi(c_i/x) \in \Phi$; y por hipótesis de la inducción, $M^C, s_\Phi \vDash \varphi(c_i/x)$. Ahora bien; $\mathcal{E}(c_i) \in \Phi$ syss $\upsilon(s_\Phi, c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$, y por tanto $M^C, s_\Phi \vDash \varphi(c_i/x)$ para todo c_i tal que $\upsilon(s_\Phi, c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\Phi}$. Esto equivale a decir que $M', s'_\Phi \vDash \varphi(a/x)$ para todo M', s'_Φ tales que $s'_\Phi = s_\Phi$ y $M' = M^C[\upsilon(a)/s_\Phi]$; y por tanto, que $M^C, s_\Phi \vDash \forall x\varphi(x)$.

Como en los caso anteriores, esta parte de la prueba es idéntica para los tres sistemas implicados, simplemente sustituyendo VT_m por $VS4_m$ o $VS5_m$. La demostración de que $M^C \in \mathcal{M}_v^r$, en el caso de VT_m ; $M^C \in \mathcal{M}_v^{r,t}$, en el de $VS4_m$; y $M^C \in \mathcal{M}_v^{r,s,t}$, en el caso de $VS5_m$, es idéntica a la análoga para el caso proposicional (Teorema 2.5.4), por lo que consideramos superfluo repetirla. QED.

Una vez demostrado el teorema de satisfacción, la completud se sigue de forma prácticamente automática:

Teorema 4.18.3. *Para fórmulas en LEP:*

a) VT_m *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_v^r$.

c) $VS4_m$ *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_v^{r,t}$.

d) $VS5_m$ *es una axiomatización completa respecto a* $\mathcal{M}_v^{r,s,t}$.

[26]Vid nota 15 de la sección 4.7. La diferencia con la prueba realizada en ese lugar es que ahora el ámbito de variabilidad de los cuantificadores es el dominio de cada mundo posible.

Demostración: Se sigue de 4.18.2. La demostración es idéntica a la del teorema 2.5.5, por lo que no consideramos necesario repetirla. QED.

Con esto queda demostrada la corrección y la completud de los sistemas axiomáticos VT_m, $VS4_m$ y $VS5_m$ respecto a $\mathcal{M}_v^r$, $\mathcal{M}_v^{r,t}$ y $\mathcal{M}_v^{r,s,t}$, respectivamente. Por lo que hace a los mismos sistemas para dominios monótonos o antimonótonos, baste recordar que en la sección 4.15 quedó demostrado que un modelo M satisface la conversa de la Fórmula Barcan si y sólo si es monótono (teorema 4.15.3); y la Fórmula Barcan si y sólo si es antimonótono (teorema 4.15.4).

4.19. Tablas semánticas

Ya hemos visto que el problema de las lógicas de dominios variables radica en que no podemos estar seguros de que los términos de individuo designen a un objeto realmente existente en un mundo posible dado, ni tampoco es seguro que designen al mismo individuo en todos ellos. Todas las críticas a la cuantificación en contextos modales parecen descansar en última instancia sobre estos dos problemas.

El primero de ellos, el de la existencia en distintos mundos posibles, nos obliga o modificar las reglas habituales de la lógica de primer orden. Hemos visto también que ni $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ ni $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t/x)$ son válidas sin restricciones cuando nos enfrentamos a una lógica epistémica de dominios variables, y esto nos obliga a modificar las reglas de nuestro método de tablas semánticas. Específicamente, la regla del cuantificador universal, que nos obliga a escribir $\varphi(c_i)$ para cada parámetro c_i que aparezca en la rama, deja de ser válida, puesto que el objeto designado por c_i podría no existir en el dominio del mundo posible en el que evaluamos $\forall x\varphi(x)$. Hay varias maneras de solucionar este problema, una de ellas es recurrir al predicado de existencia. Las reglas correspondientes a los cuantificadores quedarían de esta manera:

5. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \forall x\alpha$, para cada parámetro c_i que aparezca en la rama se abren dos sub-ramas, en una de las cuales se escribe $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ y en la otra $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_i)$. La fórmula a la que se ha aplicado la regla se marca con c_i. (En caso de no haber uno disponible, se introduce un parámetro nuevo).

6. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \exists x\alpha$, se escribe consecutivamente al término de la rama $\sigma :: \alpha\,(c_{n+1}/x)$ y $\sigma :: \mathcal{E}\,(c_{n+1})$, donde c_n es el último parámetro que aparece en la rama. La fórmula a la que se ha aplicado la regla se marca con c_{n+1}.

En el caso de la identidad, el problema es el mismo que ya vimos al hablar de las lógicas de dominio constante. Si no introducimos términos de función podemos utilizar la versión normal de las reglas , ya que las constantes individuales se interpretan como designadores rígidos. Si admitimos términos de función, debemos ser más cuidadosos. Las reglas a aplicar son las que ya mencionamos en el apartado 4.13. El resto de las reglas, incluidas las de herencia, son las mismas que en el caso proposicional.

Más complicado es el caso de las lógicas de dominios monótonos y antimonótonos. Una posibilidad, por supuesto, es adoptar como asunción del árbol la conversa de la Fórmula Barcan, en el Primer caso, o la Fórmula Barcan, en el segundo; puesto que ya vimos que cada uno de estos tipos de modelos queda caracterizado por una de estas dos fórmulas. Si esta posibilidad parece demasiado pedestre, siempre queda la opción de introducir una regla de herencia análoga a las que usábamos para los operadores epistémicos. En el caso de dominios monótonos, esta regla sería la misma para los sistemas MT_m y $MS4_m$:

H$\mathcal{E}^+$: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \mathcal{E}\,(c_j)$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: \mathcal{E}\,(c_j)$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

En el caso de dominios antimonótonos, la regla es exactamente la simétrica:

H$\mathcal{E}^-$: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma.a_in :: \mathcal{E}\,(c_j)$, se escribe $\sigma :: \mathcal{E}\,(c_j)$ al término de la rama.

Como ocurría con las demás reglas de herencia, estas dos sólo se aplican si el consecuente de la regla no aparece ya en la rama.

H$\mathcal{E}^+$ y H$\mathcal{E}^-$ son suficientes para MT_m y AT_m, respectivamente; pero no para $MS4_m$. La razón es que introdujimos una restricción a la regla de $\widehat{K}$ que permitía encontrar un modelo finito en casos que, de otra manera, producirían una tabla infinita. Recordemos que cuando la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$, la regla nos obliga a escribir $\sigma.a_in :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ al término de la rama, para un n tal que

$\sigma.a_in$ sea una nueva etiqueta; pero con la siguiente restricción : "salvo que $\tau :: \alpha$ aparezca en la rama y τ sea un ascendiente epistémico de σ, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con $\widehat{K}(\tau)$". Esta salvaguarda no es realmente necesaria para T_m, ya que al no ser transitiva la relación de accesibilidad no se da la circunstancia de que se pueda producir una rama infinita; por lo que podemos tranquilamente prescindir de ella.

En $S4_m$, en cambio, necesitamos la restricción para garantizar la eficacia del algoritmo; pero a cambio, esta limitación a la regla hace que H$\mathcal{E}^+$no sea suficiente. Pensemos que cada etiqueta representa un mundo posible; cuando una etiqueta $\sigma.a_in$ es una extensión de una etiqueta σ, esto significa que el mundo posible representado por la primera es accesible desde la segunda; lo que justifica la aplicación de H$\mathcal{E}^+$ y H$\mathcal{E}^-$. Este es el mecanismo general por el que se establecen las relaciones de accesibilidad; pero cuando, en aplicación de la restricción a la regla 4, marcamos con $\widehat{K}(\tau)$ una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$, porque $\tau :: \alpha$ aparece en la rama y τ es un ascendiente epistémico de σ, lo que en realidad estamos haciendo es establecer que el mundo representado por la etiqueta τ es accesible desde el mundo representado por σ. De este modo, en el caso de que los dominios sean monótonos, si para un parámetro c cualquiera, $\sigma :: \mathcal{E}(c)$ aparece en la rama, debería aparecer también $\tau :: \mathcal{E}(c)$. En el caso de $MS4_m$, por tanto, deberemos añadir la siguiente regla:

H$S4\mathcal{E}^+$**:** Si en aplicación de la restricción a la regla 4, marcamos con $\widehat{K}(\tau)$ una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la tabla $\tau :: \mathcal{E}(c_j)$, para todo parámetro c_j tal $\sigma :: \mathcal{E}(c_j)$ aparece en la tabla.

Como en los casos anteriores, esta regla sólo se aplica si su consecuente no aparece ya en la rama.

En cuanto al sistema $AS4_m$, no necesitamos una regla análoga a H$S4\mathcal{E}^+$: puesto que τ es un ascendiente epistémico de σ, esta última etiqueta es una extensión de la primera, y por tanto la regla H$\mathcal{E}^-$ basta para garantizar la monotonía del modelo resultante.

No hemos mencionado los casos $MS5_m$ y $AS5_m$, porque, como ya vimos, ambos son iguales entre sí y a $CS5_m$; por lo que la reglas son las mismas que para dominios constantes. Todas estas reglas son aplicables sin modificaciones a los sistemas correspondientes de lógica doxástica.

Cuadro 4.3: Fórmula Barcan

$$
\begin{array}{c}
1)\quad 1 :: \forall x K_a P(x) \wedge \widehat{K}_a \exists x \neg P(x) \quad {}_{\wedge} \qquad \text{(asunción)} \\
| \\
2)\quad 1 :: \forall x K_a P(x) \quad {}_{c_1} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
3)\quad \widehat{K}_a \exists x \neg P(x) \quad {}_{\widehat{K}(1.a1)} \qquad \text{(de 1)} \\
| \\
4)\quad 1.a1 :: \exists x \neg P(x) \quad {}_{c_1} \qquad \text{(de 3)} \\
| \\
5)\quad 1.a1 :: \neg P(c_1) \qquad \text{(de 4)} \\
| \\
6)\quad 1.a1 :: \mathcal{E}(c_1)\ \text{(de 4)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
7)\quad 1 :: K_a P(c_1) \quad {}_{K} \qquad \text{(de 2)} & 8)\quad 1 :: \neg\mathcal{E}(c_1)\ \text{(de 2)} \\
| & \\
9)\quad 1.a1 :: P(c_1) \qquad \text{(HKT de 7)} & \\
| & \\
\otimes &
\end{array}
$$

4.20. Un par de ejemplos

A modo de ejemplo, demostraremos que la Fórmula Barcan y su conversa no son ya válidas con las nuevas reglas para dominios variables. En los cuadros 4.3 y 4.4 se muestran las tablas semánticas de las negaciones de la Fórmula Barcan y su conversa.

Es fácil comprobar que estas tablas se vuelven cerradas si añadimos la regla H$\mathcal{E}^-$, en el primer caso, o H$\mathcal{E}^+$, en el segundo.

4.21. Corrección

Procederemos ahora a demostrar que este método de tablas que acabamos de presentar es correcto con respecto a los distintos conjuntos de modelos con

Cuadro 4.4: Conversa Fórmula Barcan

1) $1 :: K_a \forall x P(x) \wedge \exists x \widehat{K}_a \neg P(x)$ $_{\wedge}$ (asunción)

2) $1 :: K_a \forall x P(x)$ $_{K}$ (de 1)

3) $1 :: \exists x \widehat{K}_a \neg P(x)$ $_{c_1}$ (de 1)

4) $1 :: \forall x P(x)$ $_{c_1}$ (de 2)

5) $1 :: \widehat{K}_a \neg P(c_1)$ $_{\widehat{K}(1.a1)}$ (de 3)

6) $1 :: \mathcal{E}(c_1)$ (de 3)

7) $1 :: P(c_1)$ (de 4) 8) $1 :: \neg\mathcal{E}(c_1)$ (de 4)

$\otimes$

9) $1.a1 :: \neg P(c_1)$ (de 5)

10) $1.a1 :: \forall x P(x)$ $_{c_1}$ (HKT de 2)

11) $1.a1 :: P(c_1)$ (de 10) 12) $1.a1 :: \neg\mathcal{E}(c_1)$ (de 10)

$\otimes$

dominios variables. Esto es:

Teorema 4.21.1. *Para fórmulas de LEPO, si la tabla semántica de un conjunto de fórmulas* Γ *tiene al menos una rama abierta, entonces* Γ *tiene un modelo.*

Demostración: Como en el caso proposicional, la demostración consta de dos partes. La primera consiste en mostrar cómo se construye el modelo a partir de una rama abierta del árbol; la segunda, en demostrar que el modelo así construido satisface a la fórmula. Realizaremos una prueba única para los cálculos VT_m, $VS4_m$ y $VS5_m$[27], indicando las diferencias allí donde sea preciso.

Construcción del modelo: Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla semántica de Γ, y Σ el conjunto de etiquetas que aparecen en dicha rama. Definimos un modelo

$$M = \langle \mathfrak{D}, W, R_{a_1}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$$

de la siguiente forma:

El dominio del modelo es el conjunto de parámetros de individuo que aparecen en la rama abierta de la tabla. Esto es:

$$\mathfrak{D} = \{c_i \mid \sigma :: \varphi(c_i) \in \mathcal{F}\}$$

.

W se define como en 2.8.1. Esto es, creamos un mundo posible por cada etiqueta que aparezca en la rama. Llamaremos s_σ al mundo posible correspondiente a la etiqueta σ. Así pues, $W = \{s_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$.

Las relaciones de accesibilidad entre mundos posibles las definimos como en el caso proposicional:

A1. Si $\tau = \sigma.a_i n$, entonces $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$.

A2. Si $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ y aparece marcada con $\widehat{K}_\tau$, entonces $s_\tau R_{a_i} s_\sigma$[28].

[27]Como hicimos en los casos anteriores, llamaremos a cada uno de estos cálculos como los correspondientes sistemas axiomáticos.

[28]Como ya hemos dicho otras veces, en el cálculo $VS5_m$ esta cláusula es redundante, pues se sigue de 1 y 3.

A3. Según se trate del cálculo VT_m, $VS4_m$ o $VS5_m$, cada relación de accesibilidad R_{a_i} es respectivamente: reflexiva; reflexiva y transitiva; reflexiva, simétrica y transitiva.

La función de evaluación υ se define como sigue:

a) $\upsilon(c_i) = c_i$

b) $\upsilon(s_\sigma, c_i) \in \upsilon(s_\sigma, \mathfrak{D})$ (esto es, $\upsilon(s_\sigma, c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\sigma}$) syss $\sigma :: \mathcal{E}(c_i) \in \mathcal{F}$

c) $\upsilon(s_\sigma t_i) = \upsilon(s_\sigma, t_j)$ syss $\sigma :: t_i = t_j \in \mathcal{F}$ (Para cualesquiera $t_i, t_j \in T$)

e) $\langle \upsilon(c_1), \upsilon(c_2), \cdots, \upsilon(c_n) \rangle \in \upsilon(s_\sigma, P^n)$ syss $\sigma :: P^n(c_1, c_2, \cdots c_n) \in \mathcal{F}$

Como en todos los casos anteriores, respecto al modelo así construido también se cumple que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo si $\sigma H_{a_i} \tau$ (Lema 2.8.2)[29].

Una vez construido el modelo, demostramos el siguiente lema por inducción sobre el grado lógico de la fórmula :

Lema 4.21.2. *Si $\sigma :: \varphi \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\sigma \vDash \varphi$.*

Demostración:

A la base hay que añadir, aparte del caso trivial en que φ es $P^n(c_1, \cdots, c_n)$, cuya prueba es idéntica a la de 4.10.2 , el caso en que φ es $t_1 = t_2$: Por la construcción del modelo, si $\sigma :: t_i = t_j \in \mathcal{F}$, entonces $\upsilon(s_\sigma, t_i) = \upsilon(s_\sigma, t_j)$; y por evaluación de $=$, $M, s_\sigma \vDash t_i = t_j$.

En el caso de los operadores proposicionales y epistémicos, la demostración es igual a la que se realizó en 2.8.3; por lo que no nos parece necesario repetirla. Centrémonos pues en los cuantificadores:

5. $\varphi = \forall x\alpha$: Si $\sigma :: \forall(x)\alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 5, para todo parámetro individual c_i que aparezca en la rama se abren dos subramas, en una de las cuales se escribe $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ y en la otra $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_i)$. Así pues, para todo parámetro c_j tal que $\mathcal{E}(c_j) \in \mathcal{F}$, la rama que contiene $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_j)$ es cerrada; y puesto que por hipótesis la tabla tiene una rama abierta, la rama que contiene $\sigma :: \alpha(c_j/x)$ es abierta. De aquí se sigue, por hipótesis de la

[29] Recordemos una vez más que $\sigma H_{a_i} \tau$ se lee "τ es a_i-hereditaria con respecto a σ" y se define así: $\sigma H_{a_i} \tau$ si y sólo si para toda fórmula $K_{a_i}\varphi$ tal que $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$.

inducción, que $M, s_\sigma \vDash \alpha(c_j/x)$ para todo c_i tal que $\sigma :: \mathcal{E}(c_j) \in \mathcal{F}$. Ahora bien, por construcción del modelo $\upsilon(s_\sigma, c_j) \in \mathfrak{D}_{s_\sigma})$ syss $\sigma :: \mathcal{E}(c_j) \in \mathcal{F}$; así pues, $M, s_\sigma \vDash \alpha(c_j/x)$ para todo c_j tal que $\upsilon(c_j) \in \mathfrak{D}_{s_\sigma}$; y puesto que el dominio de M está constituido por todas las constantes que aparecen en la rama abierta de la tabla tomadas como objetos, y sólo por ellas, esto equivale a decir que $M', s'_\sigma \vDash \alpha(c_j/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M[\upsilon(c_j)/s_\sigma]$[30]; y por tanto, que $M, s_\sigma \vDash \forall x\alpha$.

6. $\varphi = \exists x\alpha$: Si $\sigma :: \exists(x)\alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 6, $\sigma :: \alpha(c_i/x) \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{E}(c_i) \in \mathcal{F}$, para un parámetro individual c_i que aún no haya aparecido en la rama. Por hipótesis de la inducción, $M, s_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ y $M, s_\sigma \vDash \mathcal{E}(c_i)$. Ahora bien, por construcción del modelo $\upsilon(s_\sigma, c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\sigma}$ syss $\sigma :: \mathcal{E}(c_i) \in \mathcal{F}$; así pues, $M, s_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ para algún c_i tal que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_{s_\sigma}$; y puesto que el dominio de M está constituido por todas las constantes que aparecen en la rama abierta de la tabla tomadas como objetos, y sólo por ellas, esto equivale a decir que $M', s'_\sigma \vDash \alpha(c_i/x)$ para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M[\upsilon(c_i)/s_\sigma]$; y por tanto, que $M, s_\sigma \vDash \exists x\alpha$.

Demostrado este lema, el teorema 4.21.1 se sigue igual de trivialmente que en el caso proposicional: para cada fórmula $\varphi \in \Gamma$, es claro que $1 :: \varphi \in \mathcal{F}$ (donde 1 es la primera etiqueta que aparece en el árbol); y por el lema 4.21.2, $M, s_1 \vDash \varphi$. QED.

4.22. Completud

La prueba de completud del método de tablas que acabamos de presentar no es esencialmente diferente de la demostración correspondiente para modelos constantes, salvo, por supuesto, por lo que respecta a la cuantificación:

Teorema 4.22.1. *Para fórmulas de LEPO, si una fórmula φ tiene un modelo, entonces su tabla semántica tiene al menos una rama abierta.*

Demostración: se realiza por inducción sobre el grado lógico de la fórmula. Como anteriormente, denominaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla.

[30] Vid. nota 20 de la sección 4.10.

La base es trivial, y los casos de los operadores proposicionales y epistémicos, se demuestran igual que en 2.9.1. Presentamos la prueba para los cuantificadores:

5. $\varphi = \forall x\alpha$: Partimos del supuesto de que $M, s \vDash \forall x\alpha$. Así pues, dado cualquier c_i tal que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}$ de la estructura M, hay dos posibilidades:

   La primera, que $\upsilon(c_i) \notin \mathfrak{D}_s$, en cuyo caso $M, s \nvDash \mathcal{E}(c_i)$, y por tanto $M, s \vDash \neg\mathcal{E}(c_i)$. Por hipótesis de la inducción , de aquí se sigue que la tabla semántica de $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_i)$ es abierta.

   La segunda, que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_s$, en cuyo caso $M, s \vDash \alpha(c_i/x)$, ya que $M', s' \vDash \alpha(a/x)$ para todo M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M[\upsilon(a)/s]$, y $\upsilon(c_i)$ es uno de los valores pertenecientes al dominio de s que puede adoptar a. En este caso, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $M, s \vDash \alpha(c_i/x)$ es abierta.

   Ahora bien, por la regla 5 , para todo parámetro individual c_i que aparezca en la rama se abren dos subramas, en una de las cuales se escribe $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ y en la otra $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_i)$. Si $\upsilon(c_i) \notin \mathfrak{D}_s$, entonces la tabla semántica de $\sigma :: \neg\mathcal{E}(c_i)$ es abierta, y por tanto la de $\sigma :: \forall x\alpha$ también lo es. Si $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}_s$, entonces la tabla semántica $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ es abierta; y por tanto la de $\sigma :: \forall x\alpha$ también lo es.

6. $\varphi = \exists x\alpha$: Partimos del supuesto de que $M, s \vDash \exists x\alpha$; y por tanto que $M', s' \vDash \varphi(a/x)$ para algún M', s' tales que $s' = s$ y $M' = M[\upsilon(a)/s]$. Esto es tanto como decir que $M, s \vDash \alpha(c_i/x)$, para algún c_i tal que $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}$, y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ es abierta. Pero si $\upsilon(c_i) \in \mathfrak{D}$, entonces también es verdad que $M, s \vDash \mathcal{E}(c_i)$, y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\mathcal{E}(c_i)$ es abierta.

   Ahora bien, por la regla 6 , si $\sigma :: \exists x\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \alpha(c_i/x) \in \mathcal{F}$ y $\sigma :: \mathcal{E}(c_i)$ (para un c_i que aún no haya aparecido en la rama). Como hemos visto, tanto la tabla semántica de $\sigma :: \alpha(c_i/x)$ como la de $\sigma :: \mathcal{E}(c_i)$ son abiertas; y por tanto la de $\sigma :: \exists x\alpha$ también lo es. QED.

Capítulo 5

Conocimiento de grupos

5.1. Nociones fundamentales

Cuando tratamos con el conocimiento (o las creencias) que tienen los agentes que interactúan en un grupo, con frecuencia no es suficiente con disponer de los operadores de conocimiento relativos a cada agente. Ya mencionamos en el capítulo anterior que podría ser interesante cuantificar sobre los subíndices de los operadores epistémicos, y poder expresar cosas tales como "alguien sabe que φ" o "todo el mundo sabe que φ". Aunque en este caso sería perfectamente factible recurrir a la cuantificación, hay otras nociones de conocimiento de grupos que requieren un tratamiento más específico, por lo que será necesario disponer de operadores adicionales .

Una de estas nociones que no pueden tratarse meramente con la cuantificación, y que fue introducida por Lewis[1] para el estudio de las convenciones, es la de conocimiento común. Lewis estimaba, efectivamente, que para que exista una convención no es suficiente con que todo el mundo sepa algo; es necesario además que todos sepan que todos lo saben, que todos sepan que todos saben que todos lo saben, etc. las normas de tráfico son un ejemplo en este sentido: aunque todo el mundo las conozca, es necesario también que todos sepan que los demás las conocen, etc. ¿Como si no se atrevería alguien a cruzar un semáforo? Es probable que la noción de conocimiento de grupos sea esencial, por ejemplo, para explicar los complejos fenómenos económicos; y es probablemente la ignorancia de estas cuestiones lo que explica la insuficiencia de muchas de las teorías que intentan dar

[1] Lewis, D.K. (1969).

cuenta de ellos.

Una noción más débil, pero que ha despertado interés especialmente en ciencias de la computación, es la de conocimiento implícito o distribuido. Dos personas pueden tener la misma fecha de cumpleaños sin saberlo, pero obtendrían de inmediato este conocimiento con sólo que pusieran en común lo que cada uno de ellos sabe. En este caso diremos que es conocimiento distribuido en el grupo (formado por esas dos personas) que ambos tienen la misma fecha de cumpleaños.

Los operadores habituales en la literatura sobre el tema [2] se representan con los signos E, C y D. $E\varphi$ significa intuitivamente "todo el mundo sabe que φ". Así pues, dado un grupo A de m agentes, $E\varphi$ equivale a la conjunción finita

$$K_{a_1}\varphi \wedge K_{a_2}\varphi \wedge ... \wedge K_{a_m}\varphi.$$

Nótese que, aunque aceptemos el axioma de introspección positiva para K, esto no vale necesariamente para E. El axioma de introspección positiva nos dice que si alguien sabe algo, también sabe que lo sabe (formalmente, $K_{a_i}\varphi \rightarrow K_{a_i}K_{a_i}\varphi$), pero el hecho de que todo el mundo sepa algo no implica que todos sepan que todos lo saben. Imaginemos una mano de póker con cuatro jugadores en que cada uno tiene un as: todos saben que nadie tiene un póker de ases, pero no saben que los demás lo saben.

Pero la situación cambia cuando algo ocurre públicamente. Si en un juego de naipes, por ejemplo, una carta está boca arriba sobre la mesa todos los jugadores saben que nadie tiene esa carta, todos saben que todos lo saben, etc. Expresamos esto mediante la noción de conocimiento común, que representamos mediante el operador monádico C. $C\varphi$ se lee "es de conocimiento común que φ", y podría considerarse equivalente a una conjunción infinita de la forma

$$E\varphi \wedge EE\varphi \wedge EEE\varphi...$$

Es interesante destacar que, al contrario de lo que ocurre con el operador E, C sí que cumple el principio análogo al axioma de introspección positiva: si algo es de conocimiento común, también es de conocimiento común que es de conocimiento común (formalmente, $C\varphi \rightarrow CC\varphi$).

$D\varphi$, por último, expresa que φ es conocimiento implícito o distribuido en un grupo. Viene a referirse al conocimiento que todos ellos tendrían si pusieran su

[2]Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

conocimiento en común, por eso se ha glosado a veces como "el hombre sabio sabe que φ". Todos estos operadores pueden llevar un subíndice que expresa el grupo al que hacemos referencia. En general, omitiremos este subíndice cuando quede claro por el contexto.

Es fácil ver que entre estos operadores se da una relación de implicación:

$$C\varphi \rightarrow E\varphi \rightarrow D\varphi$$

Para algunos propósitos, como el de elaborar un método de tablas semánticas, necesitaremos además contar con los duales de estos operadores[3], que definimos como sigue:

$$\widehat{E}\varphi =_{def} \neg E \neg \varphi$$

$$\widehat{C}\varphi =_{def} \neg C \neg \varphi$$

$$\widehat{D}\varphi =_{def} \neg D \neg \varphi$$

$\widehat{E}\varphi$ se lee "es posible para alguien que φ" y, dado un conjunto A de m agentes, equivale a la disyunción:

$$\widehat{K}_{a_1}\varphi \vee \widehat{K}_{a_2}\varphi \vee ... \vee \widehat{K}_{a_m}\varphi$$

$\widehat{C}\varphi$, por su parte, se puede entender intuitivamente con el significado "es compatible con el conocimiento común que φ", y se podría considerar equivalente a la disyunción infinita

$$\widehat{E}\varphi \vee \widehat{E}\widehat{E}\varphi \vee \widehat{E}\widehat{E}\widehat{E}\varphi ...$$

Naturalmente, una disyunción infinita de este tipo va a complicar enormemente la confección de las tablas semánticas, haciendo que en determinados casos aparezcan ramas infinitas, lo que hace que el procedimiento que presentamos sea sólo semidecidible[4].

Por último, aunque no tiene una traducción muy clara al lenguaje natural, $\widehat{D}\varphi$ significa intuitivamente "es compatible con lo que sabe el grupo que φ".

[3] También introducen operadores análogos a estos Alberucci, L. y Jäger, G. (2005).

[4] En el sentido definido en la nota 2 del Cap. 1.

5.2. Sintaxis y semántica

Para construir el lenguaje de la lógica epistémica proposicional ampliada con estos nuevos operadores, que denominaremos $LEP(G)$, no necesitamos más que ampliar las reglas de formación de fórmulas de la siguiente forma:

Sea P un conjunto no vacío de variables proposicionales, y dado un conjunto A de agentes , $LEP(G)$ es el conjunto más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

1. Si $p \in P$, $p \in LEP(G)$.
2. Si $\varphi \in LEP(G)$, $\neg\varphi \in LEP(G)$.
3. Si $\varphi, \psi \in LEP(G)$, $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \varphi$ y $\varphi \rightarrow \psi \in LEP(G)$.
4. Si $\varphi \in LEP(G)$, $K_{a_i}\varphi, \widehat{K}_{a_i}\varphi, E\varphi, \widehat{E}\varphi, C\varphi$ y $\widehat{C}\varphi \in LEP(G)$ *(para* $a_i \in A$).

En cuanto a la semántica, seguimos considerando un modelo M como una estructura $M = \langle W, R_{a_1}, ..., R_{a_m}, v\rangle$, y definimos la verdad de una fórmula φ en un mundo posible $s \in W$ de la estructura M de la forma habitual para los functores proposicionales y los operadores K y $\widehat{K}$ (cláusulas 1-7 del apartado 2.2). Las cláusulas correspondientes al operador E podrían expresarse simplemente como sigue:

8. $M, s \vDash E\varphi$ syss $M, s \vDash K_{a_i}\varphi$ para todo $a_i \in A$.
9. $M, s \vDash \widehat{E}\varphi$ syss $M, s \vDash \widehat{K}_{a_i}\varphi$ para algún $a_i \in A$.

El significado intuitivo de estas cláusulas es absolutamente claro: $E\varphi$ es verdadero en un mundo $s \in W$ de la estructura M si también lo es $K_{a_i}\varphi$, para todo agente $a_i \in A$. Esto es lo mismo que decir que φ es verdadera en todo mundo posible accesible desde s para cualquier agente $a_i \in A$; de manera que podemos expresar 8 y 9 de esta otra forma:

8. $M, s \vDash E\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$).
9. $M, s \vDash \widehat{E}\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$).

La cláusula correspondiente al operador C resulta algo más complicada. Antes de presentarla, debemos precisar la terminología: dados $s, t \in W$ de la estructura M, diremos que s es alcanzable desde t syss hay $u_1, u_2, \cdots, u_n \in W$ tales que $sR_{a_i}u_1, u_1R_{a_j}u_2, ..., u_nR_{a_k}t$ para agentes $a_i, a_j, a_k \in A$ que pueden ser diferentes. Hablando toscamente, si hay un camino desde s hasta t que puede pasar por diferentes mundos posibles cada uno de los cuales puede ser accesible desde el anterior para un agente diferente. Una vez definida esta noción, podemos estipular las cláusulas para C y $\widehat{C}$:

10. $M, s \vDash C\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t alcanzable desde s.

11. $M, s \vDash \widehat{C}\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t alcanzable desde s.

En cuanto a la noción de conocimiento distribuido, captaremos mejor su significado si reparamos en que cuanto mayor es la cantidad de conocimiento de que dispone un agente, menor es el número de mundos que considera posibles. Un hipotético agente que fuera adquiriendo paulatinamente el conocimiento que tiene cada uno de los otros miembros del grupo, iría simultáneamente reduciendo el número de mundos que para él son posibles, hasta dejarlos reducidos exactamente a aquellos que todos consideran posibles. Expresamos esta idea mediante las dos siguientes cláusulas:

12. $M, s \vDash D\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$)

13. $M, s \vDash \widehat{D}\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$)

5.3. Propiedades del conocimiento de grupos

Una vez que hemos establecido la semántica de esta lógica epistémica ampliada con operadores específicos de conocimiento de grupos, podemos establecer algunas propiedades interesantes que nos serán útiles para la axiomatización de la teoría[5].

Respecto al operador E, su semejanza con el cuantificador universal lo hace poco interesante de comentar. Es obvio que de su propia semántica se sigue inmediatamente:

[5]En este apartado, como en el siguiente, seguimos básicamente a Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

$$E\varphi \leftrightarrow K_{a_1}\varphi \wedge \cdots \wedge K_{a_m} \text{ (para todo } i_m \in A,\, j \leq m),$$

que basta para caracterizar completamente a este operador.

E no cumple el axioma de introspección positiva, como ya se ha dicho, ni tampoco el de introspección negativa, pero sí que cumple el axioma de distribución y, en todos los modelos en que la relación de accesibilidad es reflexiva, el axioma de verdad del conocimiento. Procedemos a demostrarlo a continuación:

Teorema 5.3.1. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash E\varphi \wedge E(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow E\psi.$$

Demostración: Sea M cualquier modelo kripkeano y sean $s, t \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash E\varphi \wedge E(\varphi \rightarrow \psi)$ y $\langle s, t\rangle \in R_i \cup \cdots \cup R_j$ (para todo $R_i \ldots R_j \in M$). Puesto que $M, s \vDash E\varphi \wedge E(\varphi \rightarrow \psi)$, $M, t \vDash \varphi$ y $M, t \vDash \varphi \rightarrow \psi$; de aquí se sigue que $M, t \vDash \psi$.Así pues, $M, s \vDash E\psi$. QED.

Teorema 5.3.2. *Sea $\mathcal{M}^r$ el conjunto de todos los modelos kripkeanos reflexivos. Para todo $M \in \mathcal{M}^r$ y $s \in W$ de la estructura M,*

$$M, s \vDash E\varphi \rightarrow \varphi.$$

Demostración: Sea $M \in \mathcal{M}^r$ y sea $s \in W$ de la estructura M tal que $M, s \vDash E\varphi$. Puesto que $M \in \mathcal{M}^r$, $\langle s, s\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$); y por tanto $M, s \vDash \varphi$. QED.

El operador C, por supuesto, también cumple los axiomas de distribución y, en todos los modelos reflexivos, de verdad del conocimiento. la demostración en completamente análoga a la anterior:

Teorema 5.3.3. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash C\varphi \wedge C(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow C\psi.$$

Demostración: Sea M cualquier modelo kripkeano y sean $s, t \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash C\varphi \wedge C(\varphi \rightarrow \psi)$ y que t es alcanzable desde s. Puesto que $M, s \vDash C\varphi \wedge C(\varphi \rightarrow \psi)$, $M, t \vDash \varphi$ y $M, t \vDash \varphi \rightarrow \psi$; de aquí se sigue que $M, t \vDash \psi$; y puesto que t es cualquier mundo posible alcanzable desde s, $M, s \vDash C\psi$. QED.

Teorema 5.3.4. *Sea $\mathcal{M}^r$ el conjunto de todos los modelos kripkeanos reflexivos. Para todo $M \in \mathcal{M}^r$ y $s \in W$ de la estructura M,*

$$M, s \vDash C\varphi \to \varphi.$$

Demostración: Sea $M \in \mathcal{M}^r$ y sea $s \in W$ de la estructura M tal que $M, s \vDash C\varphi$. Puesto que $M \in \mathcal{M}^r$, se cumple que $sR_{a_i}s$ (para cualquier $a_i \in A$); y por tanto s es alcanzable desde s. Luego $M, s \vDash \varphi$. QED.

Más interesante resulta el hecho de que el axioma de introspección positiva es válido independientemente de las propiedades de la relación de accesibilidad:

Teorema 5.3.5. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash C\varphi \leftrightarrow CC\varphi.$$

Demostración: De derecha a izquierda resulta trivial, ya que $C\varphi \to \varphi$. En sentido contrario, sea M cualquier modelo kripkeano y $s \in W$ de la estructura M tal que $M, s \vDash C\varphi$, sea $t \in W$ cualquier mundo posible alcanzable desde s y $u \in W$ cualquier mundo posible alcanzable desde t. Puesto que u es alcanzable desde t, también lo es desde s; así pues, $M, u \vDash \varphi$; y por tanto, $M, t \vDash C\varphi$. Puesto que t es cualquier mundo alcanzable desde s, de aquí se sigue que $M, s \vDash CC\varphi$. QED.

Más importante resulta destacar el llamado *axioma de punto fijo*:

$$C\varphi \leftrightarrow E(\varphi \wedge C\varphi)$$

Esta fórmula muestra un rasgo tan relevante que Fagin et al.[6] sugieren que la caracterización de C como punto fijo es más fundamental que su caracterización como conjunción infinita. En cualquier caso es una fórmula válida en todos los modelos kripkeanos, independientemente de las propiedades de la relación de accesibilidad; lo cual se prueba a continuación.

Teorema 5.3.6. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash C\varphi \leftrightarrow E(\varphi \wedge C\varphi).$$

[6] Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

Demostración: En un sentido, partimos del supuesto de que $M, s \models C\varphi$, para cualquier modelo kripkeano M y cualquier $s \in W$ de la estructura M. Puesto que $M, s \models C\varphi$, $M, t \models \varphi$ para todo t alcanzable desde s. Sea ahora $u \in W$ de M tal que $sR_{a_i}u$ (para $a_i \in A$). Evidentemente, u es alcanzable desde s, y por tanto $M, u \models \varphi$. Además, puesto que u es alcanzable desde s, todo mundo alcanzable desde u lo es también desde s; luego para todo t' tal que t' es alcanzable desde u, $M, t' \models \varphi$, luego $M, u \models C\varphi$. Así pues, $M, u \models \varphi \wedge C\varphi$ para todo $u \in W$ de M y todo $a_i \in A$ tales que $sR_{a_i}u$; luego $M, s \models E(\varphi \wedge C\varphi)$.

En sentido contrario, supongamos que $M, s \models E(\varphi \wedge C\varphi)$, de nuevo para cualquier modelo kripkeano M y cualquier $s \in W$ de la estructura M. Sea ahora $t \in W$ cualquier mundo posible alcanzable desde s, y sea $u \in W$ tal que $sR_{a_i}u$ (para $a_i \in A$) y t es alcanzable desde u (es decir, u es el primer nodo en el camino desde s hasta t). Ocurre que o bien $t = u$, o bien t es alcanzable desde u. En el primer caso, $M, t \models \varphi$, puesto que $M, u \models \varphi$; en el segundo también ocurre que $M, t \models \varphi$, ya que $M, u \models C\varphi$ y t es alcanzable desde u. Así pues, puesto que $M, t \models \varphi$ para cualquier $t \in W$ que sea alcanzable desde s, $M, s \models C\varphi$. QED.

La segunda propiedad interesante es conocida como *Regla de Inducción*, y funciona como una regla de introducción del operador C:

$$\text{Si } \varphi \to E(\psi \wedge \varphi), \text{ entonces } \varphi \to C\psi.$$

Como en el caso anterior, esta regla es válida en todos los modelos kripkeanos, independientemente de las propiedades de la relación de accesibilidad, lo que se demuestra a continuación:

Teorema 5.3.7. *Para todo modelo M y cualesquiera fórmulas φ y ψ, si $M \models \varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$, entonces $M \models \varphi \to C\psi$.*

Demostración: Partimos del supuesto de que $M \models \varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$ y $M, s \models \varphi$, para $s \in W$ de la estructura M. Sea $t \in W$de la estructura M un mundo posible alcanzable desde s en n pasos. Demostraremos por inducción sobre n que $M, t \models \psi \wedge \varphi$:

Si $n = 1$, entonces $sR_{a_i}t$ (para algún $a_i \in A$). Pero $M, s \models \varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$ y $M, s \models \varphi$; por tanto $M, s \models E(\psi \wedge \varphi)$, de donde se sigue que $M, t \models \psi \wedge \varphi$.

Hipótesis de la inducción: si t es alcanzable en n pasos, $M, t \models \psi \wedge \varphi$. Demostremos que lo mismo vale para el caso $n + 1$:

Si t es alcanzable en $n+1$ pasos, entonces hay un $u \in W$ de M tal que u es alcanzable desde s en n pasos y $uR_{a_i}t$ (para algún $a_i \in A$). Por hipótesis de la inducción, $M, u \models \psi \wedge \varphi$, por lo que $M, u \models \varphi$. Además, $M, u \models \varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$, luego $M, u \models E(\psi \wedge \varphi)$. Pero $uR_i t$, y por tanto $M, t \models \psi \wedge \varphi$.

Así pues, para cualquier t alcanzable desde s, $M, t \models \psi \wedge \varphi$, y por tanto también $M, t \models \psi$. por lo que $M, s \models C\psi$. QED.

En cuanto al concepto de conocimiento distribuido, las dos únicas propiedades diferentes de las habituales tienen que ver con el tamaño del grupo de agentes:

$$D_{\{a_i\}}\varphi \leftrightarrow K_{a_i}\varphi$$

$$\text{Si } G \subseteq G', \text{ entonces } D_G\varphi \to D_{G'}\varphi$$

Recordemos que el subíndice del operador expresa el grupo al que este se refiere. La primera de estas propiedades expresa el hecho bastante obvio de que el conocimiento distribuido en un grupo de un solo agente coincide con el conocimiento de ese agente. La segunda, que el conocimiento implícito de un subgrupo lo es también del grupo en su conjunto. Ambas son bastante evidentes, por lo que no creemos necesario ofrecer la demostración.

Por lo demás, El operador D se comporta como K. Es decir, tanto el axioma de distribución como el equivalente a la regla de generalización del conocimiento son válidos en todos los modelos kripkeanos; el axioma de verdad es válido en todos modelos kripkeanos reflexivos; el de introspección positiva, en todos los modelos transitivos y el axioma de introspección negativa en aquellos modelos en que la relación de accesibilidad en una relación de equivalencia.

5.4. Axiomatización

Comenzaremos presentando la axiomatización de los operadores E y C, y dejaremos para algo más adelante la incorporación del operador D. Para hacer esto, no tenemos más que incorporar a los correspondientes sistemas de lógica epistémica proposicional los siguientes esquemas de axiomas y reglas:

C1 $E\varphi \leftrightarrow K_{a_1}\varphi \wedge \cdots \wedge K_{a_m}\varphi$ (para todo $a_i \in A$)

C2 $C\varphi \to E(\varphi \wedge C\varphi)$

RC1 $\dfrac{\vdash \varphi \to E\,(\psi \wedge \varphi)}{\vdash \varphi \to C\psi}$

El uso del símbolo $\vdash$ en la regla RC1 tiene el mismo sentido que en la regla R2. El significado de la regla es que si $\varphi \to E\,(\psi \wedge \varphi)$ es una fórmula válida, entonces $\varphi \to C\psi$ también lo es. Como decíamos respecto a R2, el asunto no es relevante mientras nos mantengamos en el ámbito estricto de la deducción axiomática, pero sí que lo es si queremos introducir el concepto de derivabilidad en un sistema axiomático AX. En este caso, hemos de interpretar el signo antepuesto a ambos componentes de la regla de la misma manera que hicimos en la página 28 y ss[7].: si $\varphi \to E\,(\psi \wedge \varphi)$ depende sólo de los axiomas de AX, entonces de $\varphi \to E\,(\psi \wedge \varphi)$ se sigue $\varphi \to C\psi$.

Llamaremos T_m^C, $S4_m^C$ y $S5_m^C$ al resultado de añadir C1, C2 y RC1 a T_m, $S4_m$ y $S5_m$, respectivamente. La validez de C1 en todos los modelos kipkeanos se sigue inmediatamente de su semántica; la de C2 se ha demostrado en el teorema 5.3.6 . En cuanto a RC1, se demostró en 5.3.7 que también preserva la verdad en todos los modelos kripkeanos. Puesto que la corrección de T_m, $S4_m$ y $S5_m$ está ya demostrada, estos tres teoremas bastan para demostrar la corrección de T_m^C respecto a $\mathcal{M}^r$, de $S4_m^C$ respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$ y de $S5_m^C$ respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.

Cada uno de estos sistemas axiomáticos es también completo respecto a los conjuntos de modelos correspondiente. Para demostrarlo, presentamos previamente la prueba del teorema de satisfacción. Sea $\mathcal{L}_m^C$ el lenguaje de la lógica epistémica proposicional con los operadores C y E para un conjunto $\mathcal{P}$ de variables proposicionales y un conjunto A de m agentes. Diremos que un conjunto de fórmulas Γ (o una fórmula γ) es T_m^C-consistente (alternativamente, $S4_m^C$-consistente, $S5_m^C$-consistente) en el sentido definido en 2.5.2. Se demuestra lo siguiente:

Teorema 5.4.1. *Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_m^D$:*

a Si φ es T_m^C-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^r$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

b Si φ es $S4_m^C$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

c Si φ es $S5_m^C$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

[7]Véase también la nota 10 de la página 29

Demostración[8]**:** Ofreceremos la demostración únicamente para T_m^C. La prueba para $S4_m^C$ y $S5_m^C$ puede obtenerse con leves modificaciones. En este caso, no ofreceremos la prueba clásica usando modelos canónicos; la razón de ello es que en un determinado momento de la demostración necesitaremos que cada mundo posible pueda describirse como la conjunción de un conjunto finito de fórmulas. Para lograr esto, procedemos de la siguiente manera:

Sea $Sub_C(\varphi)$ el conjunto formado por todas las subfórmulas de φ además de todas las fórmulas de la forma $E(\psi \wedge C\psi)$, $\psi \wedge C\psi$ y $K_{a_i}(\psi \wedge C\psi)$, para toda subfórmula de φ de la forma $C\psi$ y todo $a_i \in A$; y de todas las fórmulas de la forma $K_{a_i}\psi$ para toda subfórmula de φ de la forma $E\psi$ y todo $a_i \in A$. Definamos ahora $Sub_C^+(\varphi)$ como el conjunto de todas las fórmulas de $Sub_C(\varphi)$ junto con sus negaciones, y $Con_C(\varphi)$ como el conjunto de todos los conjuntos máximamente T_m^C-consistentes de $Sub_C^+(\varphi)$.

Definimos ahora un modelo $M = \langle W, R_{a_i}, \cdots, R_{a_m}, \upsilon \rangle$ de la siguiente forma:

Por cada conjunto $\Phi \in Con_C$ creamos un mundo posible s_Φ, y definimos W de M como $\{s_\Phi \mid \Phi \in Con_C(\varphi)\}$.

La función de evaluación υ se define como sigue: $\upsilon(s_\Phi, p) = 1$ syss $p \in \Phi$.

En cuanto a las relaciones de accesibilidad, para cualesquiera conjuntos $\Phi, \Psi \in Con_C(\varphi)$, establecemos que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_i$ syss para todo α tal que $K_{a_i}\alpha \in \Phi$, $\alpha \in \Psi$ (para todo $a_i \in A$).

Es importante destacar que W consta de un número finito de elementos. De hecho, no resulta difícil demostrar que $\mid W \mid \leq \mid \varphi \mid$, donde $\mid \varphi \mid$ expresa el número de símbolos que aparecen en φ[9].

Demostraremos ahora que para toda fórmula $\varphi' \in Sub_C^+(\varphi)$, $M, s_\Phi \models \varphi'$ syss $\varphi' \in \Phi$; lo cual se hace por inducción sobre el grado lógico de la fórmula.

La prueba de los casos en que φ' es atómica y los relativos a los operadores proposicionales, así como del caso en que $\varphi' = K_{a_i}\psi$, no se diferencian esencialmente de las ofrecidas para el sistema T_m, por lo que no creemos necesario repetirlas. Veamos los casos en que $\varphi' = E\psi$ y $\varphi' = C\psi$.

$\varphi' = E\psi$: En un sentido, supongamos que $\varphi' \in \Phi$. Por una parte, Φ es un subconjunto máximamente T_m^C-consistente de $Sub_C^+(\varphi)$; por otra, $Sub_C^+(\varphi)$ incluye, por definición, todas las fórmulas $K_{a_i}\psi$ para todo $a_i \in A$. Así pues, $K_{a_i}\psi \in \Phi$

[8] Esta demostración sigue en lo esencial la ofrecida por Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

[9] Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995) pag. 67.

(para todo $a_i \in A$). También por construcción, para todo ψ tal que $K_{a_i}\psi \in \Phi$, si $\psi \in \Psi$ entonces $s_\Phi R_{a_i} s_\Psi$ (para todo $i \in A$); y por hipótesis de la inducción, $M, s_\Psi \models \psi$. Así pues, $M, s_\Psi \models \psi$ para todo s_Ψ tal que $s_\Phi R_{a_i} s_\Psi$, y por tanto $M, s_\Phi \models K_{a_i}\psi$, para todo $a_i \in A$, y por tanto $M, s_\Phi \models E\psi$.

En sentido contrario, supongamos que $M, s_\Phi \models \varphi'$; esto es, que $M, s_\Phi \models E\psi$. Por evaluación de E, $M, s_\Phi \models K_{a_i}\psi$ para todo $a_i \in A$; y por tanto, $M, s_\Psi \models \psi$ para todo s_Ψ tal que $s_\Phi R_i s_\Psi$ (para todo $a_i \in A$); luego, por hipótesis de la inducción, $\psi \in \Psi$ para todo s_Ψ tal que $s_\Phi R_{a_i} s_\Psi$ (para todo $i \in A$) . De aquí se sigue que el conjunto $\{\alpha \mid K_{a_i}\alpha \in \Psi\} \cup \{\neg\psi\}$ no es T_m^C-consistente; pues de lo contrario habría un conjunto máximamente T_m^C-consistente Ψ' que sería extensión de $\{\alpha \mid K_{a_i}\alpha \in \Psi\} \cup \{\neg\psi\}$ y, por construcción, $\langle \Psi, \Psi' \rangle \in R_{a_i}$, de donde $M, s_\Psi \not\models K_{a_i}\psi$, contra nuestra asunción inicial. Puesto que $\{\alpha \mid K_{a_i}\alpha \in \Psi\} \cup \{\neg\psi\}$ no es T_m^C-consistente, debe haber un subconjunto finito $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \neg\psi\}$ que no es consistente; luego, por lógica proposicional:

$$T_m^C \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots (\alpha_n \to \psi)) \, .$$

Y por R2:

$$T_m^C \vdash K_{a_i} (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots (\alpha_n \to \psi))) \, .$$

De donde, por aplicación reiterada de A2 y *Modus Ponens*, obtenemos:

$$T_m^C \vdash K_{a_i}\alpha_1 \to (K_{a_i}\alpha_2 \to \cdots (K_{a_i}\alpha_n \to K_{a_i}\psi)) \, .$$

Y puesto que Ψ es máximamente T_m^C-consistente:

$$K_{a_i}\alpha_1 \to (K_{a_i}\alpha_2 \to \cdots (K_{a_i}\alpha_n \to K_{a_i}\psi)) \in \Psi,$$

pero recordemos que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \{\alpha \mid K_{a_i}\alpha \in \Psi\}$; luego, puesto que Ψ es máximamente T_m^C-consistente, $K_{a_i}\psi \in \Psi$ (para todo $a_i \in A$).

Pero Φ es un conjunto máximamente T_m^C-consistente, y por tanto $E\psi \leftrightarrow K_{a_i}\psi \wedge \cdots \wedge K_{a_m}\psi \in \Phi$ (para todo $a_i \in A$); luego también $E\psi \in \Phi$.

Veamos ahora el caso en que $\varphi' = C\psi$. En un sentido, supongamos que $C\psi \in \Phi$. Demostraremos por inducción sobre el número de pasos que si s_Ψ es alcanzable en k pasos desde s_Φ, entonces tanto ψ como $C\psi$ pertenecen a Ψ.

Para $k = 1$, puesto que Φ es máximamente T_m^C-consistente $C\psi \to E(\psi \wedge C\psi) \in \Phi$ (puesto que es una instancia de C2), y por tanto también $E(\varphi \wedge C\varphi) \in \Phi$. Pero también $E\psi \leftrightarrow K_{a_i}\psi \wedge \cdots \wedge K_{a_m}\psi \in \Phi$ (para todo $a_i \in A$), puesto que es una instancia de C1, de donde $K_{a_i}(\varphi \wedge C\varphi) \in \Phi$ (para todo $a_i \in A$). Por construcción, de aquí se sigue que para todo Ψ tal que s_Ψ es alcanzable en un paso desde s_Φ (esto es, tal que $s_\Phi R_{a_i} s_\Psi$, para algún $a_i \in A$), $\varphi \wedge C\varphi \in \Psi$, luego $\varphi \in \Psi$ y $C\varphi \in \Psi$.

Partamos ahora, como hipótesis de la inducción, de que nuestra afirmación vale para k y demostremos que también vale para $k+1$. Si s_Ψ es alcanzable en $k+1$ pasos desde s_Φ, entonces hay un s_Ω tal que, para algún $a_i \in A$, $s_\Omega R_{a_i} s_\Psi$ y s_Ω es alcanzable en k pasos desde s_Φ. Por hipótesis de la inducción, tanto ψ como $C\psi$ pertenecen a Ω, y por el mismo razonamiento que en la base, $\varphi \in \Psi$ y $C\varphi \in \Psi$.

Hemos demostrado que si s_Ψ es alcanzable en k pasos desde s_Φ, entonces tanto $C\psi$ como, especialmente, ψ pertenecen a Ψ. Por la hipótesis de la inducción principal, tenemos que $M, s_\Psi \vDash \psi$; y, puesto que s_Ψ es cualquier mundo posible alcanzable desde s_Φ, que $M, s_\Phi \vDash C\psi$.

En sentido contrario, partimos del supuesto de que $M, s_\Phi \vDash C\psi$. Puesto que Ψ es un conjunto finito de fórmulas, podemos describir cada mundo posible s_Ψ con una fórmula φ_Ψ consistente en la conjunción de todas las fórmulas de Ψ. Sea ahora $\mathcal{C} = \{\Psi \in Con_C(\varphi) \mid M, s_\Psi \vDash C\psi\}$. Definimos $\varphi_\mathcal{C}$ como la disyunción $\varphi_{\Psi_1} \vee \cdots \vee \varphi_{\Psi_n}$, para todo $\Psi_i \in \mathcal{C}$. Se demostrará a continuación (lema 5.4.2) que $T_m^C \vdash \varphi_\mathcal{C} \to E(\psi \wedge \varphi_\mathcal{C})$. De aquí se sigue, por la regla RC1, que $T_m^C \vdash \varphi_\mathcal{C} \to C\psi$; y puesto que $\Phi \in \mathcal{C}$, $T_m^C \vdash \varphi_\Phi \to \varphi_\mathcal{C}$; y por tanto que $T_m^C \vdash \varphi_\Phi \to C\psi$. Pero Φ es máximamente T_m^C-consistente, luego $C\psi \in \Phi$. QED.

Lema 5.4.2. *Sea $\mathcal{C} = \{\Psi \in Con_C(\varphi) \mid M, s_\Psi \vDash C\psi\}$ y $\varphi_\mathcal{C}$ la disyunción $\varphi_{\Psi_1} \vee \cdots \vee \varphi_{\Psi_n}$, para todo $\Psi_i \in \mathcal{C}$. Se se cumple que $T_m^C \vdash \varphi_\mathcal{C} \to E(\psi \wedge \varphi_\mathcal{C})$.*

Demostración: La demostración consta de varias partes:

a) Empezaremos probando que para todo $a_i \in A$ y todo $\Psi \in \mathcal{C}$, $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\psi$.

Para ello sólo hay que ver que, por definición, $M, s_\Psi \vDash C\psi$; luego, por evaluación de K, $M, s_\Psi \vDash K_{a_i}\psi$ (para todo $a_i \in A$). Pero, como ya se ha demostrado, esto implica que $K_{a_i}\psi \in \Psi$; y puesto que φ_Ψ no es sino la conjunción de todas las fórmulas de Ψ, por lógica proposicional, $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\psi$, como queríamos demostrar.

b) Sea ahora $\overline{\mathcal{C}} = \{\Psi \in Con_C(\varphi) \mid M, s_\Psi \not\models C\psi\}$. Demostraremos que para todo $a_i \in A$, todo $\Psi \in \mathcal{C}$ y todo $\Psi' \in \overline{\mathcal{C}}$, $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\neg\varphi_{\Psi'}$.

Por la definición de $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ se sigue inmediatamente que $M, s_\Psi \models C\psi$ y que $M, s_{\Psi'} \not\models C\psi$. Pero para todo modelo M y todo mundo posible $s \in W$ de M, se cumple que $M, s \models C\psi \to CC\psi$; y por tanto, para todo $t \in W$ de M tal que t es alcanzable desde s, se cumple también que $M, t \models C\psi$. Así pues, puesto que $M, s_{\Psi'} \not\models C\psi$, $s_{\Psi'}$ no es alcanzable desde s_Ψ; y en concreto, $\langle s_{\Psi'}, s_\Psi\rangle \notin R_{a_i}$. Luego hay una fórmula, digamos β, tal que $K_{a_i}\beta \in \Psi$ y $\beta \notin \Psi'$; y puesto que Ψ' es máximamente T_m^C-consistente, $\Psi' \cup \{\beta\}$ no es T_m^C-consistente; de donde se sigue, por lógica proposicional, que $T_m^C \vdash \beta \to \neg\varphi_{\Psi'}$. De aquí, por R2 y A2, se concluye que $T_m^C \vdash K_{a_i}\beta \to K_{a_i}\neg\varphi_{\Psi'}$. Pero $K_{a_i}\beta \in \Psi$; y por tanto $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\beta$; luego, por lógica proposicional, $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\neg\varphi_{\Psi'}$.

c) De a) y b) se sigue que $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \to K_{a_i}\left(\psi \wedge \neg\varphi_{\Psi'}\right)$ (para todo $a_i \in A$ y todo $\Psi' \in \overline{\mathcal{C}}$); puesto que, por A1:

$$T_C^m \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma)),$$

y también:

$$T_m^C \vdash K_{a_i}\alpha \wedge K_{a_i}\beta \to K_{a_i}(\alpha \wedge \beta).$$

.

d) Sea ahora φ_T la disyunción de todas las fórmulas φ_Ψ para todo $\Psi \in Con_C(\varphi)$. Se demuestra que $T_m^C \vdash \varphi_T$.

Para empezar, si $Sub_C(\varphi) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$,

$$Con_C(\varphi) = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \{\neg\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \cdots, \{\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \cdots, \neg\alpha_n\}\},$$

por lo que

$$\varphi_T = (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots, \wedge\alpha) \vee \cdots \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n).$$

Pero para cada fórmula $\alpha_i \in Sub_C(\varphi)$, $T_m^C \vdash \alpha_i \vee \neg\alpha_i$, por lo que

$$T_m^C \vdash (\alpha_1 \vee \neg\alpha_1) \wedge (\alpha_2 \vee \neg\alpha_2) \wedge \cdots \wedge (\alpha_n \wedge \neg\alpha_n).$$

Pero también que

$$T_m^C \vdash (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \gamma)\,;$$

por lo que

$$T_m^C \vdash (\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \neg\alpha_2)) \vee (\neg\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \neg\alpha_2)) \vee \cdots$$

$$\cdots \vee (\alpha_1 \wedge (\alpha_n \vee \neg\alpha_n)) \vee (\neg\alpha_1 \wedge (\alpha_n \vee \neg\alpha_n))$$

y por tanto también

$$T_m^C \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \vee \cdots$$

$$\cdots \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_n) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_n) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_n) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_n).$$

Y aplicando esto reiteradamente,

$$T_m^C \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots, \wedge\alpha) \vee \cdots$$

$$\cdots \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n);$$

esto es, $T_m^C \vdash \varphi_T$.

e) Sea ahora $\varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$ la conjunción de todas las fórmulas $\varphi_{\Psi'}$ para todo $\Psi' \in \overline{\mathcal{C}}$, se demuestra que $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$.

Por una parte, $Con_C(\varphi) = \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{C}}$. Luego $\varphi_T = \varphi_{\mathcal{C}} \vee \varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$, y por tanto $T_C^m \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \vee \varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$, y también $T_C^m \vdash \neg\varphi_{\mathcal{C}} \rightarrow \varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$.

Pero, por otra parte, para todo $\Psi, \Psi' \in Con_C(\varphi)$, dado que ambos conjuntos son máximamente consistentes, hay una fórmula α tal que $\alpha \in \Psi$ y $\neg\alpha \in \Psi'$; y por tanto, si Γ es una conjunción de fórmulas $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in Sub_C^+(\varphi)$ y Δ es una conjunción de fórmulas $\delta_1, \cdots, \delta_n \in Sub_C^+(\varphi)$, φ_Ψ es de la forma $\Gamma \wedge \alpha$ y $\varphi_{\Psi'}$ es de la forma $\Delta \wedge \neg\alpha$; luego $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \rightarrow \neg\varphi_{\Psi'}$. Puesto que $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ son conjuntos disjuntos, de aquí se sigue que $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \rightarrow \neg\varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$. Así pues, $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\overline{\mathcal{C}}}$.

f) De c) y e) se sigue que que $T_m^C \vdash \varphi_\Psi \rightarrow K_{a_i}(\psi \wedge \varphi_{\mathcal{C}})$ (para todo $a_i \in A$). Pero $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \rightarrow \varphi_\Psi$, luego $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \rightarrow K_{a_i}(\psi \wedge \varphi_{\mathcal{C}})$. Y puesto que esto vale para todo $a_i \in A$, $T_m^C \vdash \varphi_{\mathcal{C}} \rightarrow E(\psi \wedge \varphi_{\mathcal{C}})$. QED.

Se habrá observado que la prueba que hemos ofrecido no hace uso del hecho de que la relación de accesibilidad es reflexiva. esto se debe a que esta cuestión sólo afecta a la parte de la prueba correspondiente al operador K, que no hemos ofrecido por ser básicamente idéntica a la de T_m. Así pues, esta demostración puede trasladarse a $S4_m$ y $S5_m$, sin más cambios que los relativos a este operador.

La completud de estos tres sistemas axiomáticos se sigue ahora inmediatamente:

Teorema 5.4.3. *Para fórmulas de $\mathcal{L}_m^D$:*

a) T_m^C es completo respecto a $\mathcal{M}^r$.

b) $S4_m^C$ es completo respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$.

c) $S5_m^C$ es completo respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.

Demostración: Se sigue inmediatamente de 5.4.1. La demostración es idéntica a la del teorema 2.5.5, por lo que no consideramos necesario repetirla. QED

5.5. Axiomatización del conocimiento distribuido

El sistema más simple de lógica epistémica con conocimiento distribuido o implícito, al que llamaremos T_m^D, consiste en añadir al sistema T_m los siguientes esquemas de axiomas:

D1 $K_{a_i}\varphi \to D\varphi$

D2 $(D\varphi \wedge D(\varphi \to \psi)) \to D\psi$

D3 $D\varphi \to \varphi$

Para obtener el sistema $S4_m^D$, deberemos añadir a $S4_m$, además de los anteriores, el análogo al axioma de introspección positiva:

D4 $D\varphi \to DD\varphi$

Si lo que queremos es el sistema $S5_m^D$, tenemos que añadir a $S5_m$, además de todo lo anterior, el equivalente al axioma de introspección negativa:

D5 $\neg D\varphi \to D\neg D\varphi$

Es fácil demostrar que todo modelo kripkeano satisface los esquemas de axioma D1 y D2, que todo modelo kripkeano reflexivo satisface D3, que D4 es válido en todo modelo reflexivo y transitivo y que D5, para finalizar, es válido en todo modelo reflexivo, simétrico y transitivo.

Teorema 5.5.1. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash K_{a_i}\varphi \to D\varphi$$

(para todo $a_i \in A$).

Demostración: Sea M un modelo kripkeano cualquiera y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash K_{a_i}\varphi$. Sea ahora $t \in W$ de M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $a_i \in A$). Naturalmente, $\langle s, t\rangle \in R_{a_i}$, y por tanto, $M, t \vDash \varphi$. Así pues, $M, s \vDash D\varphi$. QED.

Teorema 5.5.2. *Para todo modelo kripkeano M y toda fórmula φ,*

$$M \vDash (D\varphi \wedge D(\varphi \to \psi)) \to D\psi.$$

Demostración: Sea M un modelo kripkeano cualquiera y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash D\varphi \wedge D(\varphi \to \psi)$. Sea ahora $t \in W$ de M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $a_i \in A$). Por evaluación de D, $M, t \vDash \varphi$ y $M, t \vDash \varphi \to \psi$; y por tanto, $M, s \vDash D\psi$. QED.

Teorema 5.5.3. *Para todo modelo kripkeano $M \in \mathcal{M}^r$ y toda fórmula φ,*

$$M \vDash D\varphi \to \varphi.$$

Demostración: Sea $M \in \mathcal{M}^r$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash D\varphi$, y supongamos que $M, s \nvDash \varphi$. Puesto que $M \in \mathcal{M}^r$, $\langle s, s\rangle \in R_{a_i}$ (para todo $a_i \in A$). Así pues, no es cierto que $M, t \vDash \varphi$ para todo $t \in W$ tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$; y por tanto $M, s \nvDash D\varphi$, lo que contradice la hipótesis inicial. QED.

Teorema 5.5.4. *Para todo modelo kripkeano $M \in \mathcal{M}^t$ y toda fórmula φ,*

$$M \vDash D\varphi \to DD\varphi.$$

Demostración: Sea $M \in \mathcal{M}^t$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash D\varphi$, y sean $t, v \in W$ de M tales que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ y $\langle t, v\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $a_i \in A$). Puesto que $M \in \mathcal{M}^t$, es el caso que $\langle s, v\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$, y por tanto $M, v \vDash \varphi$. De donde $M, t \vDash D\varphi$, y por tanto $M, s \vDash DD\varphi$. QED.

Teorema 5.5.5. *Para todo modelo kripkeano $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y toda fórmula φ,*

$$M \vDash \neg D\varphi \rightarrow D\neg D\varphi$$

.

Demostración: Sea $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \neg D\varphi$. Puesto que $M, s \vDash \neg D\varphi$, hay un $t \in W$ de M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $a_i \in A$) y $M, t \nvDash \varphi$. Supongamos ahora que $M, s \nvDash D\neg D\varphi$. Por evaluación de $\neg$, $M, s \vDash \neg D\neg D\varphi$; y por tanto hay un $v \in W$ de M tal que $\langle s, v\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $a_i \in A$) y $M, v \nvDash \neg D\varphi$, por lo que $M, v \vDash D\varphi$. Puesto que $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y $\langle s, v\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$, también se cumple que $\langle v, s\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$; y por transitividad, que $\langle v, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$. Pero $M, v \vDash D\varphi$, y por tanto $M, t \vDash \varphi$; lo que contradice la hipótesis inicial. QED.

De estos resultados, más los teoremas análogos de T_m, $S4_m$ y $S5_m$ se sigue inmediatamente la corrección de T_m^D, $S4_m^D$ y $S5_m^D$:

Teorema 5.5.6. *Sea $\mathcal{M}^r$ el conjunto de todos los modelos kripkeanos reflexivos; $\mathcal{M}^{r,t}$, el de todos los modelos kripkeanos reflexivos y transitivos; y $\mathcal{M}^{r,s,t}$, el de los modelos reflexivos, simétricos y transitivos:*

a) *T_m^D es correcto respecto a $\mathcal{M}^r$.*

b) *$S4_m^D$ es correcto respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$.*

c) *$S5_m^D$ es correcto respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.*

Demostración: a) se sigue directamente de la corrección de T_m y los teoremas 5.5.1, 5.5.2 y 5.5.3**.** b.) se sigue de la corrección de $S4_m$ y 5.5.4, además de los tres teoremas anteriores. c) se sigue los cinco teoremas que acabamos de demostrar y de la corrección de $S5_m$. QED.

5.6. T_m^D, $S4_m^D$ y $S5_m^D$: completud

Para demostrar la completud de estos tres sistemas de lógica epistémica con conocimiento distribuido procederemos primero a demostrar el teorema de satisfacción. La demostración es la habitual en lógicas modales pero con una modificación, consistente en añadir a nuestros modelos un *hombre sabio*[10]. Para ello, ampliaremos el conjunto de agentes con un nuevo individuo, al que llamaremos w, y añadiremos a nuestros sistemas axiomáticos un esquema de axioma específico que garantice que este agente sabe al menos tanto como todos los demás. Sea $\mathcal{L}_m^D$ el lenguaje de la lógica epistémica proposicional con conocimiento distribuido para un conjunto $\mathcal{P}$ de variables proposicionales y un conjunto A de m agentes. Se demuestra lo siguiente:

Teorema 5.6.1. *Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_m^D$:*

a Si φ es T_m^D-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^r$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

b Si φ es $S4_m^D$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

c Si φ es $S5_m^D$-consistente, entonces hay un modelo $M \in \mathcal{M}^{r,s,t}$ y un mundo posible $s \in W$ de la estructura M tales que $M, s \vDash \varphi$.

Demostración: presentaremos la prueba para el sistema T_m^D. La demostración para los otros dos sistemas es idéntica, simplemente sustituyendo T_m^D por $S4_m^D$ o $S5_m^D$; T_{m+1}^{D+} por $S4_{m+1}^{D+}$, etc.

Sea $\mathcal{L}_m$, el lenguaje de la lógica epistémica proposicional para un conjunto $\mathcal{P}$ de variables proposicionales y un conjunto A de m agentes; y $\mathcal{L}_m^D$, como hemos dicho, el mismo lenguaje con el operador de conocimiento distribuido . Construimos los lenguajes $\mathcal{L}_{m+1}$ y $\mathcal{L}_{m+1}^D$ sustituyendo A por $A' = A \cup \{w\}$. Sobre este lenguaje $\mathcal{L}_{m+1}^D$ definimos el sistema axiomático T_{m+1}^{D+} añadiendo a T_m^D el siguiente esquema:

$$K_{a_i}\alpha \to K_w\alpha \text{ (para todo agente } a_i \in A).$$

[10]Utilizamos también esta estrategia en la sección 5.7.

Hablaremos de un conjunto de fórmulas T^{D+}_{m+1}-consistente en el sentido definido en 2.5.2.

Una vez extendidos el lenguaje y el sistema axiomático, construimos un modelo canónico

$$M^C = \langle W, R_{a_i}, \cdots, R_w, \upsilon \rangle$$

de la siguiente forma:

Sea Con^+_D el conjunto de todos los conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}^D_{m+1}$ máximamente T^{D+}_{m+1}-consistentes. Para cada conjunto $\Phi \in Con^+_D$ creamos un mundo posible s_Φ, y definimos W de la estructura M^C de la siguiente forma:

$$W = \left\{ s_\Phi \mid \Phi \in Con^+_D \right\}$$

.

La función de evaluación υ se define como habitualmente:

$$\upsilon\left(s_\Phi, p\right) = 1 \text{ syss } p \in \Phi.$$

En cuanto a las relaciones de accesibilidad, para cualesquiera conjuntos $\Phi, \Psi \in Con^+_D$ establecemos:

$$R_{a_i} = \{\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \mid \text{si } K_{a_i}\alpha \in \Phi, \text{ entonces } \alpha \in \Psi\} \text{ (para } a_i \in A')$$

Dado este modelo canónico, para fórmulas de $\mathcal{L}_{m+1}$ (esto es, sin el operador de conocimiento distribuido), en la demostración del teorema 2.5.4 se estableció que $M, s_\Phi \vDash \alpha$ syss $\alpha \in \Phi$. Así pues, para establecer el mismo resultado para fórmulas de $\mathcal{L}^D_{m+1}$, nos bastará con demostrar que $M, s_\Phi \vDash D\alpha$ syss $M, s_\Phi \vDash K_w\alpha$. Para ello demostraremos previamente lo siguiente:

$$\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_w \text{ syss } \langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m} \text{ (para } a_i \in A).$$

La demostración es como sigue:

De izquierda a derecha, sean $\Phi, \Psi \in Con^+_D$ tales que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \in R_w$. Supongamos que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \notin R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$. Entonces hay un agente a_i tal que que $\langle s_\Phi, s_\Psi \rangle \notin R_{a_i}$; y por tanto, para alguna fórmula $\alpha \in \mathcal{L}^D_{m+1}$, $K_{a_i}\alpha \in \Phi$ y $\alpha \notin \Psi$.

Pero, puesto que Φ es T_{m+1}^{D+}-consistente, $K_{a_i}\alpha \to K_w\alpha \in \Phi$; y por tanto también $K_w\alpha \in \Phi$. Ahora bien, por hipótesis, $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_w$; y por tanto $\alpha \in \Psi$; con lo que llegamos a una contradicción. Así pues; si $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_w$, entonces $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$.

De derecha a izquierda, sean $\Phi, \Psi \in Con_D^+$ tales que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$. Entonces, para cualquier agente $a_i \in A$, $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_i}$; y por tanto, para cualquier fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_{m+1}^D$ tal que $K_{a_i}\alpha \in \Phi$, se cumple que $\alpha \in \Psi$. Pero, puesto que Φ es T_{m+1}^{D+}-consistente, $K_{a_i}\alpha \to K_w\alpha \in \Phi$; y por tanto, $K_w\alpha \in \Phi$. Así pues, $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in \{\langle s_{\Phi'}, s_{\Psi'}\rangle \mid \text{si } K_w\alpha \in \Phi', \text{ entonces } \alpha \in \Psi'\}$; y por tanto, $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_w$.

Una vez demostrado esto, la demostración de que $M, s_\Phi \models D\alpha$ syss $M, s_\Phi \models K_w\alpha$ resulta trivial:

De izquierda a derecha, partimos del supuesto de que $M, s_\Phi \models D\alpha$; por tanto, $M, s_\Psi \models \alpha$ para todo s_Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$. Pero $R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m} = R_w$; y por tanto $M, s_\Psi \models \alpha$ para todo s_Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_w$; de donde se sigue que $M, s_\Phi \models K_w\alpha$.

En sentido contrario, suponemos que $M, s_\Phi \models K_w\alpha$; luego $M, s_\Psi \models \alpha$ para todo s_Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_w$. pero puesto que $R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m} = R_w$, esto significa que $M, s_\Psi \models \alpha$ para todo s_Ψ tal que $\langle s_\Phi, s_\Psi\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$; y por tanto que $M, s_\Phi \models D\alpha$. QED.

Teorema 5.6.2. *Sean $\mathcal{M}^r$, a $\mathcal{M}^{r,t}$ y a $\mathcal{M}^{r,s,t}$:*

a) T_m^D es completo respecto a $\mathcal{M}^r$.

b) $S4_m^D$ es completo respecto a $\mathcal{M}^{r,t}$.

c) $S5_m^D$ es completo respecto a $\mathcal{M}^{r,s,t}$.

Demostración: Se sigue inmediatamente de 5.6.1. La demostración es idéntica a la del teorema 2.5.5, por lo que no consideramos necesario repetirla. QED

Para simplificar las pruebas, hemos presentado por separado un sistema axiomático para los operadores de E y C y otro para el operador D[11]. No resulta difícil mostrar que la combinación de ambos sistemas es también correcta y completa, con lo que la combinación de los axiomas propios del operador K con los presentados en este capítulo constituye un sistema adecuado para la noción de conocimiento de grupos.

[11] En esto hemos seguido una vez más a Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

5.7. Tablas semánticas

Veamos ahora cómo ampliar las reglas del método de tablas que presentamos en el capítulo 2 para contemplar los operadores de conocimiento de grupos[12]. Aunque, como ya comentamos, el carácter infinitario del operador C hará que en ciertas ocasiones la tabla se vuelva infinita, por lo que este método no constituye un algoritmo , sino sólo un procedimiento semidecidible[13].

El problema radica en que una fórmula de la forma $\widehat{C}\varphi$ es equivalente a la disyunción infinita $\widehat{E}\varphi \vee \widehat{E}\widehat{E}\varphi \vee \widehat{E}\widehat{E}\widehat{E}\varphi \vee \cdots$, por lo que parece imposible tratarla con métodos finitistas. Sin embargo, existen métodos que nos permiten, en ocasiones, encontrar un modelo que satisface a una fórmula de este tipo y que consta de un número finito de mundos posibles; siempre, naturalmente, que este modelo exista. Cuando este no es el caso la tabla se vuelve infinita.

El problema se encuentra ya en la lógica de primer orden: es bien conocido que la fórmula $\forall x \exists y Rxy$ genera una tabla infinita. Sin embargo, esta fórmula es satisfactible en un dominio de un único individuo. Para tratar con estos casos, Boolos[14] y Díaz Estévez[15] idearon independientemente una modificación al método de tablas de Beth consistente en sustituir la regla

$$\frac{\exists x \varphi}{\varphi\left(k_{n+1}/x\right)}$$

(donde k_n es la última constate que haya aparecido en la rama) por esta otra:

$$\frac{\exists x \varphi}{\varphi\left(k_1/x\right) \mid \cdots \mid \varphi\left(k_n/x\right) \mid \varphi\left(k_{n+1}/x\right)}$$

Llamamos DB-Tableaux, en honor a sus autores, a esta modificación del método de tablas[16].

El procedimiento que proponemos para tratar el operador $\widehat{C}$ se basa en la

[12] Para otro trabajo sobre el tema, puede consultarse Abate, P y Gore, R. (2006).

[13] En el sentido definido en la nota 2 del Cap. 1.

[14] Boolos, G. (1984).

[15] Díaz Estévez, E (1993).

[16] Puede encontrarse una explicación de esta variante del método de tablas semánticas en Nepomuceno Fernández, A. (1999), Nepomuceno Fernández, A. (2008) y Nepomuceno Fernández, A. (2009).

misma idea[17]: dada una fórmula $\widehat{C}\varphi$ abrimos una serie de ramas

$$\widehat{E}\varphi \mid \widehat{E}\widehat{E}\varphi \mid \widehat{E}\widehat{E}\widehat{E}\varphi \mid \cdots$$

Por supuesto, en este caso no podemos escribir todas las ramas de la disyunción, ya que su número es infinito. Pero esto no es realmente necesario si sucede que una de estas ramas es abierta; pues en este caso ya habremos encontrado un modelo que satisface a la fórmula.

Veamos los detalles del procedimiento. Para empezar, debemos ampliar las reglas correspondientes a la negación:

1. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \neg\alpha$:

    e) si α es $E\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{E}\neg\beta$ al término de la rama.

    f) si α es $\widehat{E}\beta$, se escribe $\sigma :: E\neg\beta$ al término de la rama.

    g) si α es $C\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{C}\neg\beta$ al término de la rama.

    h) si α es $\widehat{C}\beta$, se escribe $\sigma :: C\neg\beta$ al término de la rama.

    i) si α es $D\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{D}\neg\beta$ al término de la rama.

    j) si α es $\widehat{D}\beta$, se escribe $\sigma :: D\neg\beta$ al término de la rama.

Debemos además presentar las reglas correspondientes a cada uno de estos operadores y modificar adecuadamente las reglas de herencia.

Comencemos con el operador E y su dual. El primero se trata simplemente como si fuera un cuantificador universal sobre el subíndice del operador K:

5. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: E\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma :: K_{a_1}\alpha, \sigma :: K_{a_2}\alpha, \cdots, \sigma :: K_{a_m}\alpha$, para todo agente a_i que aparezca en la rama, y se marca con $a_1, a_2, \cdots, a_m$.

En cuanto a su dual, aunque la regla parece más complicada, es similar al tratamiento que damos al cuantificador existencial:

[17] Una primera versión de este método, aunque usando otros procedimientos de representación y sin contar con el operador D, fue presentada en Gómez-Caminero Parejo, E.F. (2007). En aquel momento no éramos conscientes de que se trataba de una variante de los DB-Tableaux.

6. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{E}\alpha$ se escribe $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ (donde a_i es un parámetro de individuo que aún no haya aparecido en la rama) y se marca con a_i. Restricción: salvo que σ sea de la forma $\tau.a_jn$ y $\tau.a_jn :: \alpha$ aparezca en la rama, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con a_j.

La restricción a la regla 6 tiene como objeto evitar repeticiones innecesarias que, en combinación con el operador C pueden producir una rama infinita en casos en que claramente la fórmula tiene un modelo finito, como es el caso de $C\widehat{E}\alpha$. En el caso del sistema $S5_m$, puesto que lo relación de accesibilidad es simétrica, es conveniente ampliar la restricción de la siguiente forma:

Restricción $S5_m$: salvo que i) σ sea de la forma $\tau.a_jn$ y $\tau.a_jn :: \alpha$ aparezca en la rama, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con a_j., o ii) σ sea de la forma $\tau.a_jn.a_km$ y $\tau.a_jn :: \alpha$ aparezca en la rama, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con a_j.

Los siguientes conceptos que tenemos que tratar son los de conocimiento común y su dual. Se trata sin duda de los operadores más complicados, puesto que, como ya se ha dicho, C equivale a una conjunción infinita y $\widehat{C}$ a una disyunción infinita. Esto hará que en ocasiones las tablas se vuelvan infinitas, razón por la cual el procedimiento que aquí presentamos es tan sólo semidecidible.

La regla correspondiente al operador C es extremadamente simple:

7. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: C\alpha$, se escribe $\sigma :: \alpha$ al término de la rama y se marca con C.

Mucho más compleja resulta la regla para $\widehat{C}$:

8. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{C}\alpha$, se abre una subrama, se escribe a su término $\sigma :: \widehat{E}\alpha$ y se marca $\widehat{C}1$. Si esta subrama se cierra, se abre otra subrama, se escribe $\sigma :: \widehat{E}\widehat{E}\alpha$ a su término y se marca con $\widehat{C}2$; y así sucesivamente hasta encontrar una subrama abierta.

Como se verá, esta regla nos permite encontrar un modelo que haga verdadero al conjunto de fórmulas que funciona como asunción del árbol, pero no nos permite demostrar que este conjunto no es simultáneamente satisfactible, ya que para ello tendríamos que probar con todas las fórmulas de la sucesión infinita:

$$\widehat{E}\alpha,\ \widehat{E}\widehat{E}\alpha,\ \widehat{E}\widehat{E}\widehat{E}\alpha,\ \ldots$$

En cuanto a las reglas de herencia, recordemos que se cumple que $C\varphi \leftrightarrow CC\varphi$, como se demostró en el teorema 4.3.5; lo que significa que la relación "ser alcanzable desde" es transitiva. La regla de herencia común a T y $S4$ será, por tanto, análoga a la del operador K:

HC: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma :: C\varphi$, se escribe $\sigma.a_i n :: C\varphi$, para toda etiqueta $\sigma.a_i n$ que aparezca en la rama.

Si el sistema con el que queremos manejarnos es $S5$, tendremos que garantizar además que la relación "ser alcanzable desde" es simétrica, por lo que tendremos que añadir la siguiente regla:

HCS5: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma.a_i n :: C\varphi$, se escribe $\sigma :: C\varphi$ al término de la rama.

Estas reglas serían suficientes si no hubiéramos introducido una restricción a la regla del operador $\widehat{K}$. Esa restricción, recordemos, evitaba que tuviéramos que escribir al término de la rama $\sigma.a_i n :: \alpha$ cuando nos encontrábamos $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$, siempre que ya apareciera en la rama una fórmula etiquetada de la forma $\tau :: \alpha$ y τ fuera un ascendiente epistémico de σ (respecto al agente a_i). Al construir el correspondiente modelo, esto nos obligaba a establecer que s_τ fuera accesible desde s_σ. Tendremos que contemplar esta relación de accesibilidad, lo que hacemos de la siguiente forma:

HCS4: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma :: C\varphi$ y, en aplicación de la restricción a la regla 4, una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}$ se ha marcado con $\widehat{K}(\tau)$, se escribe al término de la rama $\tau :: C\varphi$.

Esta última regla, de ahí su nombre, sólo resulta necesaria en $S4_m$. En $S5_m$ resulta redundante, ya que HCS5 garantiza que $\tau :: C\varphi$ aparece en la rama; mientras que en T_m es la restricción a la regla 4 la que resulta innecesaria, como ya se dijo en su momento.

Veamos ahora como tratar el concepto de conocimiento distribuido. Comentamos anteriormente que esta noción se parafrasea a veces con la expresión "el hombre sabio sabe que φ". Lo que esto nos sugiere es que podemos tratar este concepto como una especie de ficción lógica, algo así como si dispusiéramos de un agente que tiene acceso al conocimiento de todos los demás. Usaremos esta ficción al definir las reglas de nuestro método de tablas semánticas. Para ello basta con darse cuenta del hecho de que si una fórmula en la que intervienen los operadores D y $\widehat{D}$ es satisfactible, entonces es satisfactible en un modelo en el que exista un auténtico "hombre sabio". Introduciremos, pues, un término de agente especial que nos permita jugar con esta ficción lógica. Sea w el término empleado para designar a nuestro hipotético hombre sabio. Permitiremos ahora, dada una etiqueta σ, construir una nueva etiqueta $\sigma.wn$, donde n es como siempre el primer número natural tal que $\sigma.wn$ no aparece en la rama. Las reglas que debemos añadir a nuestro método de tablas para tratar con el operador de conocimiento distribuido o implícito son, ahora, las siguientes:

9. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: D\alpha$, se escribe $\sigma :: K_w\alpha$ al término de la rama y se marca con D.

10. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{D}\alpha$, se escribe $\sigma.wn :: \alpha$ al término de la rama y se marca con $\widehat{D}$; donde n es el menor número natural tal que $\sigma.wn$ no aparece en la rama.

En cuanto a las reglas de herencia, no necesitamos más que garantizar que nuestro hombre sabio tiene efectivamente acceso al conocimiento de todos los demás:

HD: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ (para $a_i \in A$), se escribe al término de la rama $\sigma :: K_w\alpha$.[18]

5.8. Algunos ejemplos

Presentaremos a continuación dos ejemplos del uso de estas tablas. En primer lugar, demostraremos que $Ep \to EEp$ no es válida; para ello haremos la tabla semántica de $\left\{Ep, \widehat{E}\widehat{E}\neg p\right\}$, que se muestra en el cuadro 5.1. A continuación, como ejemplo de tabla infinita, haremos la de $\left\{Cp, \widehat{C}\neg p\right\}$. Esta tabla se muestra en el cuadro 5.2.

[18]Parecería que esto no es realmente una regla de herencia, puesto que no permite transferir fórmulas de un mundo posible a otro, que es realmente la función de este tipo de reglas. En realidad se trata de una especie de meta-regla de herencia, que nos permite aplicar las del operador K, para cualquier agente a_i, siempre que aparezca una etiqueta de la forma $\sigma.wn :: \alpha$.

Cuadro 5.1: $\{Ep, \widehat{E}\widehat{E}\neg p\}$

$$1)\quad 1 :: Ep \quad {}_{a_1,a_2} \qquad \text{(asunción)}$$

$$2)\quad 1 :: \widehat{E}\widehat{E}\neg p \quad {}_{a_1} \qquad \text{(asunción)}$$

$$3)\quad 1 :: \widehat{K}_{a_1}\widehat{E}\neg p \quad {}_{\widehat{K}(1.a_1 1)} \qquad \text{(de 2)}$$

$$4)\quad 1 :: K_{a_1}p \quad {}_{K} \qquad \text{(de 1)}$$

$$5)\quad 1 :: p \qquad \text{(de 4)}$$

$$6)\quad 1.a_1 1 :: \widehat{E}\neg p \quad {}_{a_2} \qquad \text{(de 3)}$$

$$7)\quad 1.a_1 1 :: K_{a_1}p \quad {}_{K} \qquad \text{(HKS5a de 4)}$$

$$8)\quad 1.a_1 1 :: p \qquad \text{(de 7)}$$

$$9)\quad 1.a_1 1 :: \widehat{K}_{a_2}\neg p \quad {}_{\widehat{K}(1.a_1 1.a_2 1)} \qquad \text{(de 6)}$$

$$10)\quad 1 :: K_{a_2}p \quad {}_{K} \qquad \text{(de 1)}$$

$$11)\quad 1 :: p \qquad \text{(de 10)}$$

$$12)\quad 1.a_1 1.a_2 1 :: \neg p \qquad \text{(de 9)}$$

Cuadro 5.2: $\{Cp, \widehat{C}\neg p\}$

1) $1 :: Cp$ $\quad_{C}$ (asunción)

2) $1 :: \widehat{C}\neg p$ $\quad_{\widehat{C}1, \widehat{C}2, \cdots}$ (asunción)

3) $1 :: p$ (de 1)

4) $1 :: \widehat{E}\neg p$ $\quad_{a_1}$ (de 2)	9) $1 :: \widehat{E}\widehat{E}\neg p$ $\quad_{a_1}$ (de 2)	$(\cdots)$
5) $1 :: \widehat{K}_{a_1}\neg p$ $\quad_{\widehat{K}(1.a_1 1)}$ (de 4)	10) $1 :: \widehat{K}_{a_1}\widehat{E}\neg p$ $\quad_{\widehat{K}(1.a_1 1)}$ (de 9)	
6) $1.a_1 1 :: \neg p$ (de 5)	11) $1.a_1 1 :: \widehat{E}\neg p$ $\quad_{a_2}$ (de 10)	
7) $1.a_1 1 :: Cp$ $\quad_{C}$ (HC de 1)	12) $1.a_1 1 :: Cp$ $\quad_{C}$ (HC de 1)	
8) $1.a_1 1 :: p$ (de 7)	13) $1.a_1 1 :: p$ (de 12)	
$\otimes$	14) $1.a_1 1 :: \widehat{K}_{a_2}\neg p$ $\quad_{\widehat{K}(1.a_1 1.a_2 1)}$ (de 11)	
	15) $1.a_1 1.a_2 1 :: \neg p$ (de 11)	
	16) $1.a_1 1.a_2 1 :: Cp$ (HC de 8)	
	17) $1.a_1 1.a_2 1 :: p$ (de 16)	
	$\otimes$	

5.9. Corrección

Como ya se mencionó anteriormente, en este caso el método de tablas semánticas no hace decidible a la lógica epistémica con operadores de conocimiento de grupos. La razón es el carácter infinitario del operador C, que hace que en ciertos casos la tabla se vuelva infinita.

Así, por ejemplo, la fórmula $C\varphi \wedge \widehat{C}\neg\varphi$ es claramente insatisfactible, pero da lugar a una rama infinita. La razón de ello es que la regla del operador $\widehat{C}$ nos obliga a seguir buscando una fórmula satisfactible de la forma $\widehat{E}^n\alpha$ cada vez que la fórmula $\widehat{E}^{n-1}\alpha$ hace que la rama se cierre (donde $\widehat{E}^n$ abrevia la reiteración del operador $\widehat{E}$ n veces).

No obstante, sí que podemos demostrar que el método es correcto, Esto es:

Teorema 5.9.1. *Si la tabla semántica de un conjunto de fórmulas* Γ *tiene una rama abierta, entonces* Γ *tiene un modelo.*

Demostración: La demostración consta de dos partes bien diferenciadas. La primera consiste en mostrar cómo se construye un modelo $M = \langle W, R_i, \ldots, R_j, v\rangle$ a partir de la tabla semántica; la segunda, en demostrar que para cierto $s \in W$ de la estructura M, $M, s \models \Gamma$.

Para la primera parte, partimos del supuesto de que la tabla semántica de Γ tiene al menos una rama abierta. definimos ahora un modelo $M = \langle W, R_i, \ldots, R_j, v\rangle$ de la siguiente forma:

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en la rama y Σ el conjunto de las etiquetas que aparecen en la rama abierta del árbol. Definimos ahora W de la siguiente forma:

$$W = \{s_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$$

Esto es, construimos un mundo posible por cada etiqueta que aparece en la tabla.

Las relaciones de accesibilidad, las definimos de la siguiente manera:

i) Para cualesquiera dos etiquetas σ y $\sigma.a_in$ tales que σ es una extensión simple de $\sigma.a_in$, $\langle s_\sigma, s_{\sigma.a_i.n}\rangle \in R_{a_i}$.

ii) Según trabajemos con T_m, con $S4_m$ o con $S5_m$, la relación de accesibilidad es respectivamente reflexiva; reflexiva y transitiva o reflexiva, simétrica y transitiva.

iii) Si en aplicación de la excepción a la regla del operador $\widehat{K}$ (regla 4) una formula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ aparece marcada con la etiqueta $\widehat{K}(\tau)$, entonces $\langle s_\sigma, s_\tau \rangle \in R_{a_i}$.

En cuanto a, la función de evaluación υ se define de la siguiente forma:

$$\upsilon(s_\sigma, p) = 1 \text{ syss } \sigma :: p \in \mathcal{F}$$

Recordemos que decíamos en el capítulo 2 que una etiqueta τ es a_i-hereditaria con respecto a σ (lo que escribíamos $\sigma H_{a_i}\tau$) si y sólo si para cualquier fórmula de la forma $K_{a_i}\varphi$ si $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$. Demostrábamos entonces que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo si $\sigma H_{a_i}\tau$ (Lema 2.8.2). Añadiremos ahora otra noción: diremos que una etiqueta τ es C-hereditaria con respecto a σ (lo que escribiremos $\sigma C \tau$) si y sólo si para cualquier fórmula de la forma $C\varphi$ tal que $\sigma :: C\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$. Es fácil demostrar el siguiente lema:

Lema 5.9.2. *s_τ es alcanzable desde s_σ syss $\sigma C \tau$.*

Demostración: En un sentido, si $\sigma C \tau$ hay una serie de etiquetas $\delta_1, \cdots, \delta_n$ tales que $\delta_i :: C\varphi \in \mathcal{F}$ (para $1 \leq i \leq n$), y en cada uno de los casos, ha sido introducida por una aplicación de la regla de herencia sobre una fórmula etiquetada $\delta_j :: C\varphi \in \mathcal{F}$. En todos los casos en que entre dos etiquetas δ_i y δ_j se aplica la regla de herencia, las reglas de construcción del modelo garantizan que $s_{\delta_i} R_{a_k} s_{\delta_j}$ para algún $a_k \in A$. Así pues, hay una serie de agentes $a_1, \cdots, a_m \in A$ tales que $s_\sigma R_{a_1} s_{\delta_1}, \cdots, s_{\delta_n} R_{a_m} s_\tau$; y por tanto, s_τ es alcanzable desde s_σ.

En sentido contrario, supongamos que s_τ es alcanzable desde s_σ. Hay pues una serie de mundos $s_{\delta_1}, \cdots, s_{\delta_n}$ tales que $s_\sigma R_{a_1} s_{\delta_1}, \cdots, s_{\delta_n} R_{a_m} s_\tau$. Ahora bien, por la construcción del modelo, En todos los casos en que se cumple que $s_{\delta_i} R_{a_k} s_{\delta_j}$, si ocurre que $\delta_i :: C\varphi \in \mathcal{F}$, las reglas de herencia nos exigen escribir al final de la rama $\delta_j :: C\varphi$. Así pues hay una serie de etiquetas $\delta_1, \cdots, \delta_n$ tales que $\delta_1 = \sigma, \delta_n = \tau$ y para todo δ_i $(1 \leq i \leq n)$, si $\delta_i :: \varphi \in \mathcal{F}$, entonces $\delta_{i+1} :: \varphi \in \mathcal{F}$; y por tanto $\sigma C \tau$. QED.

Una vez construido este modelo, se demuestra que $M, s_1 \vDash \Gamma$, Donde s_1 es el mundo posible correspondiente a la primera etiqueta que aparece en la tabla. Para ello, demostramos por inducción sobre el grado lógico de la fórmula el siguiente lema:

Lema 5.9.3. *Si* $\sigma :: \varphi \in \mathcal{F}$, *entonces* $M, s_\sigma \vDash \varphi$.

Demostración: La base es trivial. Si φ es atómica, por construcción, $\upsilon(s_\sigma, \varphi) = 1$, y por tanto $M, s_\sigma \vDash \varphi$.

Los pasos correspondientes a los operadores proposicionales y a los operadores K y $\widehat{K}$ son los mismos que en los casos anteriores; con la excepción de la negación de estos tres operadores, que no ofrece la menor dificultad. Veamos pues los caso de E, C y D, y su duales (comenzamos la numeración en el apartado 5, continuando la prueba de la sección 2.9):

5. $\varphi = E\alpha$: Por la regla 5, si $\sigma :: E\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma :: K_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ para todo a_i que aparezca en la rama; y por tanto, $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para toda τ y todo a_i tales que $\sigma H_{a_i}\tau$. Por el lema 2.8.2, $\sigma H_{a_i}\tau$ syss $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$; y por hipótesis de la inducción, si $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\tau \vDash \alpha$. Así pues, $M, s_\tau \vDash \alpha$ para todo s_τ y todo agente a_i tales que $s_\sigma Ra_i s_\tau$; esto es, tales que $\langle s_\sigma, s_\tau\rangle \in R_{a_i} \cup \cdots \cup R_{a_j}$ (para todo $R_{a_i} \ldots R_{a_j} \in M$). Luego, por evaluación de E, $M, s_\sigma \vDash E\alpha$.

6. $\varphi = \widehat{E}\alpha$: Por la regla 6, si $\sigma :: \widehat{E}\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ (para un agente a_i que no apareciera previamente en la rama), y por tanto $\sigma.a_i n :: \alpha \in \mathcal{F}$. Luego, por hipótesis de la inducción $M, s_{\sigma.a_i n} \vDash \alpha$. Pero $\sigma.a_i n$ es a_i-hereditaria respecto a σ, y por tanto $s_\sigma R_{a_i} s_{\sigma.a_i n}$. Así pues, $M, s_\tau \vDash \alpha$ para algún s_τ tal que $\langle s_\sigma, s_\tau\rangle \in R_{a_i} \cup \cdots \cup R_{a_j}$ (para todo $R_{a_i} \ldots R_{a_j} \in M$), y por tanto $M, s_\sigma \vDash \widehat{E}\alpha$.

7. $\varphi = C\alpha$: Por construcción, si $\sigma :: C\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para toda τ tal que $\sigma C\tau$. Por el lema 5.8.2, si $\sigma C\tau$ entonces s_τ es alcanzable desde s_σ; y por hipótesis de la inducción, si $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\tau \vDash \alpha$. Luego $M, s_\tau \vDash \alpha$ para todo s_τ que es alcanzable desde s_σ; y por tanto, $M, s_\sigma \vDash C\alpha$.

8. $\varphi = D\alpha$: Por la regla 9, si $\sigma :: D\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma :: K_w\alpha \in \mathcal{F}$, y por construcción, $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo τ tal que $\sigma H_w\tau$. Por el lema 2.8.2, $\sigma H_w\tau$ syss $s_\sigma R_w s_\tau$; y por hipótesis de la inducción, si $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\tau \vDash \alpha$. Así pues, $M, s_\tau \vDash \alpha$ para todo s_τ tal que $s_\sigma R_w s_\tau$. Por otra parte, la regla HD garantiza que si $\sigma :: K_{a_i}\beta \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma :: K_w\beta \in \mathcal{F}$, para todo a_i que aparezca en la rama; y por tanto, si $\tau :: \beta \in \mathcal{F}$ para todo τ tal que $\sigma H_{a_i}\tau$, también se cumple que $\tau :: \beta \in \mathcal{F}$ para todo τ tal que $\sigma H_w\tau$;

esto es, $H_w = H_{a_1} \cap \cdots \cap H_{a_n}$. Ahora bien, puesto que sabemos que $s_\sigma R_{a_i} s_\tau$ si y sólo si $\sigma H_{a_i}\tau$, por el lema 2.8.2, esto significa que $R_w = R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_n}$. De aquí se sigue que $M, s_\tau \vDash \alpha$ para todo s_τ tal que $\langle s_\sigma s_\tau\rangle \in R_{a_i} \cap \cdots \cap R_{a_n}$, y por tanto $M, s_\sigma \vDash D\alpha$.

9. $\varphi = \widehat{D}\alpha$: Por la regla 10, si $\sigma :: \widehat{D}\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma.wn :: \alpha \in \mathcal{F}$, y por tanto, $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para algún τ tal que $\sigma H_w \tau$. Por el Lema 2.8.2, $\sigma H_w \tau$ syss $s_\sigma R_w s_\tau$; y por hipótesis de la inducción, si $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$, entonces $M, s_\tau \vDash \alpha$. Así pues, $M, s_\tau \vDash \alpha$ para algún s_τ tal que $s_\sigma R_w s_\tau$. Pero $R_w = R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_n}$, como acabamos de mostrar; luego $M, s_\tau \vDash \alpha$ para algún s_τ tal que $\langle s_\sigma, s_\tau\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_n}$; y por tanto $M, s_\sigma \vDash \widehat{D}\alpha$.

Una vez demostrado esto, el teorema 5.9.1 se sigue trivialmente: para cada fórmula $\varphi \in \Gamma$, es claro que $1 :: \varphi \in \mathcal{F}$ (donde 1 es la primera etiqueta que aparece en el árbol); y por el lema 5.9.3 , $M, s_1 \vDash \varphi$. QED.

5.10. Completud

Ya hemos comentado que el carácter infinitario del operador C y, especialmente, de su dual, hace que en ocasiones la tabla semántica de una fórmula se vuelva infinita. Sin embargo, esto sólo ocurre cuando la fórmula es insatisfactible. En caso contrario, el método de tablas da lugar en un número finito de pasos a una rama abierta que nos permite construir un modelo que satisface a la fórmula, lo que se demuestra a continuación:

Teorema 5.10.1. *Si una fórmula φ tiene un modelo, entonces su tabla semántica tiene al menos una rama abierta.*

Demostración: se realiza por inducción sobre el grado lógico de la fórmula. Denominaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta del árbol y Γ al conjunto de etiquetas que aparecen en dicha rama. Recordemos que decíamos que una etiqueta τ es a_i-hereditaria con respecto a σ (lo que escribimos $\sigma H_{a_i}\tau$) si y sólo si para toda fórmula $K_{a_i}\varphi$ tal que $\sigma :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$ y que una etiqueta τ es C-hereditaria con respecto a σ (lo que escribimos $\sigma C\tau$) si y sólo si para cualquier fórmula de la forma $C\varphi$ tal que $\sigma :: C\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau :: \varphi \in \mathcal{F}$. La expresión $|\varphi|$ designa el grado lógico de φ.

La base es trivial: si φ es atómica, el árbol semántico de φ consta de una sola fórmula etiquetada, $\sigma :: \varphi$, y por tanto es abierto.

Como hipótesis de la inducción, partimos de que la afirmación es verdadera para $|\varphi| = n$ y demostramos que también lo es para $|\varphi| = n + 1$.

El caso de los operadores proposicionales, así como el de K y $\widehat{K}$, es idéntico a la prueba de la sección 2.9, por lo que no es necesario repetirlo. En cuanto a la negaciones de E, C y D; la prueba remite a las de sus duales, y viceversa, por lo que basta con presentar la prueba para los operadores E,C y D y sus duales $\widehat{E}$,$\widehat{C}$ y $\widehat{D}$.

$\varphi = E\alpha$: Por la regla 5, si $\sigma :: E\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: K_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$, para todo término de agente a_i que aparezca en la rama; y por tanto $\sigma :: \alpha \in \mathcal{F}$ y $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\tau \in \Gamma$ tal que $\sigma H_{a_i}\tau$. Ahora bien, si $M, s \vDash E\alpha$, entonces para todo $t \in W$ de la estructura M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_j \in M$), $M, t \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Pero entonces la tabla semántica de $\sigma :: \alpha$ es abierta, y también lo es la de $\tau :: \alpha$ para cualquier fórmula etiquetada $\tau :: \alpha$ que la regla de herencia nos obligue a introducir. Luego la tabla semántica de $\sigma :: K_{a_i}\alpha$ es abierta, para todo agente a_i que aparece en la rama, y por tanto también lo es la de $E\alpha$.

$\varphi = \widehat{E}\alpha$: Por la regla 6, si $\sigma :: \widehat{E}\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$, para algún término de agente a_i que aún no haya aparecido en la rama, luego $\sigma.a_in :: \alpha \in \mathcal{F}$. Ahora bien, si $M, s \vDash \widehat{E}\alpha$, entonces hay un $t \in W$ de la estructura M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1} \ldots R_{a_m} \in M$) y $M, t \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Así pues, la tabla semántica de $\sigma.a_in :: \alpha$ es abierta, y por tanto la de $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ también lo es; por lo que también lo es la de $\widehat{E}\alpha$.

$\varphi = C\alpha$: La regla 7 y la regla HC (o HCS5) garantizan que si $\sigma :: C\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\tau \in \Gamma$ tal que $\sigma C\tau$. Ahora bien, si $M, s \vDash C\alpha$, entonces para todo $t \in W$ de la estructura M tal que t es alcanzable desde s, $M, t \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto, también lo es la de $\sigma :: C\alpha$.

$\varphi = \widehat{C}\alpha$: Si $M, s \vDash \widehat{C}\alpha$, entonces $M, t \vDash \alpha$ para algún $t \in W$ de la estructura M tal que t es alcanzable desde s en k pasos. Demostraremos que la tabla semántica de α es abierta por inducción sobre k.

$k = 1$: Por una parte, puesto que $M, t \vDash \alpha$, la tabla semántica de α es abierta, por la hipótesis de la inducción principal. Por otra parte, si $\sigma :: \widehat{C}\alpha \in \mathcal{F}$, la regla 8 garantiza que $\sigma :: \widehat{E}\alpha \in \mathcal{F}$, y de aquí se sigue que $\sigma :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$, por la regla 6, y que $\sigma.a_i n :: \alpha \in \mathcal{F}$, por la regla 4. Pero hemos visto que la tabla semántica de α es abierta, luego la de $\widehat{C}\alpha$ también lo es.

Suponemos ahora que la afirmación es válida para $k = n$ y demostramos que también lo es para $k = n + 1$.

Si t en alcanzable desde s en $n + 1$ pasos, entonces hay un mundo posible $v \in W$ de la estructura M tal que v es alcanzable desde s en un paso, t es alcanzable desde v en n pasos y $M, v \vDash \widehat{C}\alpha$. Luego, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\widehat{C}\alpha$ es abierta.

$\varphi = D\alpha$: Por la regla 9, si $\sigma :: D\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma :: K_w\alpha \in \mathcal{F}$; y por tanto $\sigma :: \alpha \in \mathcal{F}$ y $\tau :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\tau \in \Gamma$ tal que $\sigma H_w \tau$. Ahora bien, si $M, s \vDash D\alpha$, entonces para todo $t \in W$ de la estructura M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a-m} \in M$), $M, t \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Pero entonces la tabla semántica de $\sigma :: \alpha$ es abierta, y también lo es la de $\tau :: \alpha$ para cualquier fórmula etiquetada $\tau :: \alpha$ que la regla de herencia nos obligue a introducir. Luego la tabla semántica de $\sigma :: K_w\alpha$ es abierta, y por tanto también lo es la de $D\alpha$.

$\varphi = \widehat{D}\alpha$: Por la regla 10, si $\sigma :: \widehat{D}\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma.a_w n :: \alpha \in \mathcal{F}$. Ahora bien, si $M, s \vDash \widehat{D}\alpha$, entonces hay un $t \in W$ de la estructura M tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cap \cdots \cap R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$) y $M, t \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Así pues, la tabla semántica de $\sigma.wn :: \alpha$ es abierta; y por tanto la de $\widehat{D}\alpha$ también lo es.

5.11. Creencia colectiva

La lógica doxástica proposicional también puede extenderse para incluir operadores relacionados con las creencias que tienen los miembros de un grupo considerados en su conjunto. Como análogo al operador E para la creencia usaremos E_B, que se leerá como "todo el mundo cree que..."; como análogo del operador C

introducimos C_B, que puede leerse “es creencia común que...”, o tal vez “el grupo cree colectivamente que...”. También introduciremos los duales de estos dos operadores, $\widehat{E}_B$ y $\widehat{C}_B$, respectivamente; pues aunque su formulación resulta artificiosa en castellano, son útiles para trabajar con tablas semánticas. No tiene sentido, por el contrario, introducir una noción análoga a la de conocimiento distribuido. La razón de esto es que los conocimientos que tienen los agentes en un grupo no pueden ser contradictorios entre sí, pero las creencias sí que pueden serlo. Naturalmente, si las creencias de los miembros de un grupo resultan ser contradictorias, de esas creencias tomadas conjuntamente se sigue cualquier cosa; por lo que un operador de creencia distribuida no aportaría ninguna información.

La semántica de los operadores E_B y C_B, y sus duales, es completamente análoga a la de los respectivos operadores epistémicos; sólo hay que añadir a las cláusulas corespondientes al concepto de creencia —que son las mismas que las correspondientes al concepto de conocimiento (sección 2.2), sustituyendo K por B y $\widehat{K}$ por $\widehat{B}$— las siguientes:

8. $M, s \vDash E_B\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$).
9. $M, s \vDash \widehat{E}_B\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t tal que $\langle s, t\rangle \in R_{a_1} \cup \cdots \cup R_{a_m}$ (para todo $R_{a_1}, \ldots, R_{a_m} \in M$).
10. $M, s \vDash C_B\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para todo t alcanzable desde s.
11. $M, s \vDash \widehat{C}_B\varphi$ syss $M, t \vDash \varphi$ para algún t alcanzable desde s.

La diferencia entre estos operadores y los de conocimiento común radica, como ya estamos acostumbrados, en las propiedades de la relación de accesibilidad. Así, si la relación de accesibilidad es serial tendremos el sistema KD^c_m; si es serial y transitiva, $KD4^c_m$; y si es serial y euclídea, $KD45^c_m$.

Tampoco respecto a la axiomatización hay diferencias importantes respecto a los sistemas correspondientes de conocimiento de grupos. Basta con añadir a los correspondientes sistemas KD_m, $KD4_m$ y $KD45_m$ los dos esquemas de axioma y el esquema de regla resultante de sustituir en C1, C2 y RC1 los operadores epistémicos por los operadores doxásticos correspondientes:

B1 $E_B\varphi \leftrightarrow B_{a_i}\varphi \wedge \cdots \wedge B_m\varphi$ (para todo $i \in A$)

C2 $C_B\varphi \rightarrow E_B(\varphi \wedge C_B\varphi)$

RC1 $\frac{\varphi\rightarrow E_B(\psi\wedge\varphi)}{\varphi\rightarrow C_B\psi}$

La prueba de validez y corrección de los sistemas resultantes es absolutamente análoga a la de los sistemas epistémicos correspondientes, por lo que no creemos necesario repetirlas.

5.12. Tablas semánticas para creencia colectiva

Tampoco resulta muy difícil modificar el método de tablas que hemos presentado para adaptarlo a la noción de creencia colectiva. Por supuesto, tendremos que reescribir las reglas correspondientes a la negación:

1. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \neg\alpha$:

    e) si α es $E_B\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{E}_B\neg\beta$ al término de la rama.

    f) si α es $\widehat{E}_B\beta$, se escribe $\sigma :: E_B\neg\beta$ al término de la rama.

    g) si α es $C_B\beta$, se escribe $\sigma :: \widehat{C}_B\neg\beta$ al término de la rama.

    h) si α es $\widehat{C}_B\beta$, se escribe $\sigma :: C_B\neg\beta$ al término de la rama.

Las reglas de los operadores E_B y $\widehat{E}_B$ son idénticas a las de E y $\widehat{E}$:

5. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: E_B\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma :: B_{a_1}\alpha, \sigma :: B_{a_2}\alpha, \cdots, B_{a_m}\alpha$, para todo agente a_i que aparezca en la rama, y se marca con $a_1, a_2, \cdots, a_m$.

6. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{E}_B\alpha$ se escribe $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}\alpha$ (donde a_i es un parámetro de individuo que aún no haya aparecido en la rama) y se marca con a_i. Restricción: salvo que σ sea de la forma $\tau.a_jn$ y $\tau.a_jn :: \alpha$ aparezca en la rama, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con a_j.

La regla del operador C_B sí que requiere una modificación: la que resulta del hecho de que la relación de accesibilidad no es reflexiva (pero sí serial). La diferencia entre las reglas de C y C_B es análoga a la que existe entre K y B.

7. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: C_B\alpha$, se escribe $\sigma :: \widehat{C}_B\alpha$ al término de la rama y se marca con C_B.

   La de su dual, $\widehat{C}_B$, tampoco requiere más modificación que el cambio de signo:

8. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma :: \widehat{C}_B\alpha$, se abre una subrama, se escribe a su término $\sigma :: \widehat{E}_B\alpha$ y se marca $\widehat{C}_B1$. Si esta subrama se cierra, se abre otra subrama, se escribe $\sigma :: \widehat{E}_B\widehat{E}_B\alpha$ al término de la rama y se marca con $\widehat{C}_B2$; y así sucesivamente hasta encontrar una subrama abierta.

También el las reglas de herencia tendremos que hacer alguna modificación, derivada del hecho de que la relación de accesibilidad doxástica no es reflexiva. La forma en que quedan estas reglas es la siguiente:

HCDox: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma :: C_B\varphi$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in :: C_B\varphi$ y $\sigma.a_in :: \varphi$, para toda etiqueta $\sigma.a_in$ que aparezca en la rama.

Si el sistema con el que queremos manejarnos es $KD45_m$, tendremos que garantizar además que la relación "ser alcanzable desde" es simétrica, por lo que tendremos que añadir la siguiente regla:

HCKD45: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma.a_in :: C_B\varphi$, se escribe $\sigma :: C_B\varphi$ y $\sigma :: \varphi$ al término de la rama.

Como en el caso del operador de conocimiento de grupos, la restricción impuesta a la regla del operador $\widehat{B}$ nos obliga a introducir una nueva regla cuando nos manejamos en el sistema $KD4_m$:

HCKD4: Si en una rama del árbol aparece la fórmula etiquetada $\sigma :: C_B\varphi$ y, en aplicación de la restricción a la regla 4, una fórmula etiquetada de la forma $\sigma :: \widehat{B}_{a_i}$ se ha marcado con $\widehat{B}(\tau)$, se escribe al término de la rama $\tau :: C\varphi$ y $\tau :: \varphi$.

Una vez más, la prueba de corrección de este método es virtualmente idéntica, salvo los cambios evidentes, a la del método de tablas para conocimiento de grupos, por lo que evitaremos su repetición.

Capítulo 6

Conocimiento y tiempo

6.1. Generalidades

Hemos tratado hasta ahora del conocimiento y la creencia de los agentes con diferentes niveles de complejidad, añadiendo operadores que nos permitían analizar estos niveles cada vez más complejos; pero en todos los casos hemos partido de un supuesto implícito que no conviene pasar por alto; a saber, que el conocimiento de los agentes permanece invariable a lo largo del tiempo, de manera que el factor temporal resulta irrelevante para el análisis y puede ser ignorado en el sistema[1].

Esta forma de abordar la cuestión puede ser adecuada para ciertas situaciones y durante cortos periodos de tiempo; pero no se nos oculta que en un número importante de casos relevantes el conocimiento de los agentes puede verse alterado por la adquisición de nueva información (o tal vez por el olvido o la pérdida de información), de manera que resulta imprescindible incluir el tiempo en nuestros análisis para obtener una comprensión cabal del conocimiento de los agentes[2].

Hay una gran cantidad de puzzles sobre cuestiones epistémicas que incorporan, implícita o explícitamente, el concepto de tiempo. De ellos, seguramente el más conocido es el de los niños manchados[3]. Los protagonistas de este puzzle son un

[1]Hintikka sí explicita esta condición, en Hintikka, J. (1962), sec. 1.3.

[2]También puede tratarse adecuadamente el cambio del conocimiento usando sistemas lógicos que no introducen explícitamente operadores temporales, como la Lógica Epistémica Dinámica o la Lógica de Anuncios Públicos.

[3]Se puede encontrar en la literatura una gran cantidad de versiones de este puzzle, que es a su vez una variante de otros como el de los "hombres sabios", o las "esposas infieles". Algunas de estas versiones se pueden consultar en Moses, Y. O.; Dolev, D y Halpern, J.Y. (1986), Hoek, W. van der y Verbrugge, L.C. (2002) y Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995).

grupo de niños, de los que suponemos que son agentes perfectamente racionales y, tal vez, que han asistido con aprovechamiento a un curso de lógica epistémica, que han estado jugando en el parque. Al terminar el juego, el padre de uno de ellos los reune en círculo, de forma que todos pueden verse las caras, y anuncia:

— Al menos uno de vosotros tiene la cara manchada de barro. El que tenga la cara manchada, que de un paso al frente.

Suponemos que el padre repite este anuncio tantas veces como sea necesario, dejando cada vez el tiempo suficiente para que podamos considerar de conocimiento común que nadie sabe que tiene la cara llena de barro. ¿Pueden los niños descubrir que tienen barro en la cara? Sorprendentemente, la respuesta es sí[4]: suponiendo que hay exactamente n niños manchados, al enésimo anuncio todos ellos darán un paso al frente, lo que se demuestra de la siguiente manera:

Si es un solo niño el que tiene la cara manchada, después del primer anuncio aquel que no vea a ningún niño sucio dará un paso al frente. Si son dos los niños con la cara manchada, después del primer anuncio todos sabrán que el número de niños manchados es mayor que uno (pues nadie ha dado un paso al frente); con lo cual, el que vea una sola cara embarrada dará un paso al frente al producirse el segundo anuncio. Reiterando este razonamiento comprobamos que al pasar el anuncio $n-1$ sin que nadie se adelante, todos sabrán que hay al menos n niños manchados; con lo que al producirse el anuncio número n todos los que vean sólo $n-1$ caras sucias darán un paso al frente.

Así pues, si queremos analizar el cambio del conocimiento, conviene añadir operadores temporales a nuestros sistemas de lógica epistémica. Como es habitual, supondremos un tiempo discreto que se extiende infinitamente hacia el futuro. La asunción de que el tiempo es infinito hacia el futuro parece bastante natural, pues si bien todos los procesos reales tienen lugar en un tiempo limitado, es imposible determinar a priori la duración total del proceso. Por supuesto, es posible extender también el tiempo hacia el pasado añadiendo operadores simétricos a los de futuro. Este proceso no resulta difícil, pero añade complejidad a la notación, por lo que no lo haremos en este lugar.

Más extraño resulta, por el contrario, el hecho de considerar el tiempo como

[4]Por supuesto, el hecho de que nos resulte sorprendente indica claramente que nuestra concepción de los agente epistémicos es altamente idealizada: un grupo de niños reales jamás llegaría a esta conclusión. Es seguramente el precio que tenemos que pagar por tratar el asunto desde un punto de vista lógico.

discreto. Hemos de considerar, no obstante, que la infinita divisibilidad del tiempo no parece aportar nada realmente significativo al análisis de los procesos epistémicos. Cualquier proceso en que se produce una alteración del conocimiento de los agentes puede ser analizado como si constara de una sucesión de intervalos en cada uno de los cuales los sujetos tienen, o no, una serie de conocimientos, y cuya estructura matemática interna nos resulta irrelevante; de manera que podemos considerarlos a todos los efectos como una sucesión de instantes.

Desgraciadamente, la dificultad de razonar sobre conocimiento y tiempo es muy grande. Entre otras cosas, hay que tomar decisiones sobre el lenguaje empleado y sobre ciertas asunciones que afectan a los sistemas distribuidos subyacentes. Halpern, van de Meyer, y Vardi[5] cuentan hasta noventa y seis lógicas posibles resultantes de la combinación de estos parámetros, cuarenta y ocho de las cuales consideran un tiempo lineal y cuarenta y ocho un tiempo ramificado. El conjunto de fórmulas válidas en un cierto número de estas lógicas no es recursivamente numerable, lo que debe ser tenido en cuenta a la hora de presentar sistemas axiomáticos. Como es natural, no podemos analizar exhaustivamente todos estos sistemas, lo que sería objeto de un trabajo independiente. En este capítulo nos limitaremos a analizar alguna de estas lógicas y a presentar un método de tablas semánticas en los casos en que resulte posible.

6.2. Sintaxis

Para construir el lenguaje de una lógica epistémica temporal sólo necesitamos añadir al de la lógica epistémica proposicional (con o sin operadores de conocimiento de grupos) el operador monádico $\bigcirc$ y el operador diádico U. $\bigcirc\varphi$ se lee "en el siguiente momento φ", mientras que $\varphi U\psi$ se lee "φ hasta que ψ". A partir de estos dos operadores se definen $\Box$, y $\Diamond$:

$$\Diamond\varphi =_{def} \top U\varphi$$

$$\Box\varphi =_{def} \varphi U\bot$$

El significado intuitivo de $\bigcirc\varphi$ es que φ es verdad en el siguiente momento o intervalo temporal; el de $\varphi U\psi$, que φ es verdad hasta que lo sea ψ; $\Diamond\varphi$ (se lee

[5] Halpern, J.Y.; van der Meiden, R. y Vardi, M.Y. (1999).

"en algún momento φ") significa intuitivamente que φ es verdad en el presente o en algún momento del futuro; $\Box\varphi$ (léase "siempre φ"), que φ es verdad en el presente y en todo momento del futuro. No introduciremos operadores de tiempo ramificado.

Llamaremos CKL_m al lenguaje construido con estos operadores temporales y los operadores epistémicos K, E y C (y sus duales). KL_m es el lenguaje correspondiente sin los operadores E y C.

Sea P un conjunto no vacío de variables proposicionales, y dado un conjunto A de agentes, CKL_m es el conjunto más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

1. Si $p \in P$, $p \in CKL_m$.
2. Si $\varphi \in CKL_m$, $\neg\varphi \in CKL_m$.
3. Si $\varphi, \psi \in CKL_m$, $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \varphi$ y $\varphi \rightarrow \psi \in CKL_m$.
4. Si $\varphi \in CKL_m$, $K_{a_i}\varphi, \widehat{K}_{a_i}\varphi, E\varphi, \widehat{E}\varphi, C\varphi$ y $\widehat{C}\varphi \in CKL_m$ *(para* $i \in A$).
5. Si $\varphi, \psi \in CKL_m$, $\bigcirc\varphi, \varphi U\psi, \Box\varphi$ y $\Diamond\varphi \in CKL_m$

Por supuesto, las reglas de formación de fórmulas de KL_m son simplemente una restricción de las anteriores, por lo que no las presentamos explícitamente.

6.3. Semántica

Para presentar la semántica de una lógica epistémica temporal debemos antes decir algo sobre la noción de sistema. Podemos partir, como hemos hecho otras veces, del ejemplo de un juego de naipes. Si suponemos un juego en que cada jugador tiene en todo momento cuatro cartas, entonces el conjunto de todos los estados posibles para cada jugador es el de todos los repartos posibles de cuatro cartas. Por ejemplo, si suponemos todos los naipes numerados del uno al cuarenta, los repartos $(1, 2, 3, 4)$, $(10, 20, 30, 40)$ ó $(5, 18, 23, 34)$ son manos posibles de un jugador dado, digamos a_i. Llamaremos a cada una de estas situaciones posibles en las que puede estar un agente un *estado local* de a_i, y lo denotaremos por s_{a_i}. Además, suele ser necesario tener en consideración aspectos relevantes del sistema que no se incluyen en la descripción del estado local de los agentes, tales como cartas vueltas boca arriba sobre la mesa, para ello incluimos un estado local s_e que describe las características relevantes del entorno.

Sea A un conjunto de m agentes. Si L_e es el conjunto de estados posibles del entorno y L_{a_i} (para $a_i \in A$) el conjunto de estados locales posibles para el agente a_i, entonces $\mathcal{G} = L_e \times L_{a_1} \times \cdots \times L_{a_m}$ es el conjunto de *estados globales*.

Definimos ahora un *recorrido* sobre $\mathcal{G}$ como una función del conjunto de los números naturales, que hemos elegido como dominio temporal, en $\mathcal{G}$. Esto es, cada recorrido es una secuencia de estados globales. Hablaremos del *punto* (r, n) para referirnos al momento temporal n del recorrido r, y escribiremos $r(n)$ para referirnos al estado global del sistema en el punto (r, n). A su vez, escribiremos $r_e(n)$ para referirnos al estado local del entorno en el punto (r, n); y $r_{a_i}(n)$ para referirnos al estado local del agente a_i en ese mismo punto.

Ahora ya podemos definir un *sistema* $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{G}$ como un conjunto de recorridos sobre $\mathcal{G}$.

El concepto de sistema es la base sobre la que podemos construir la semántica de una lógica epistémica temporal. El sistema $\mathcal{R}$ jugará el papel que el conjunto W de mundos posibles jugaba en los modelos kripkeanos; pero para definir la verdad de una fórmula necesitamos disponer todavía de las relaciones de accesibilidad y de la función de evaluación.

Las primeras pueden definirse directamente sobre el concepto de *estado global*. Esto se ve fácilmente volviendo a los juegos de naipes: si un jugador a tiene el reparto $(1, 2, 3, 4)$ considerará posible que otro jugador b tenga, por ejemplo $(5, 6, 7, 8)$; pero no $(1, 5, 6, 7)$, ya que es incompatible con las cartas que él mismo tiene. Esto es, dados dos estados globales de $\mathcal{R}$ $s = (s_e, s_{a_1}, \cdots, s_{a_n})$ y $s' = \left(s'_e, s'_{a_1}, \cdots, s'_{a_n}\right)$, diremos que s es indistinguible de s' para el agente a_i, lo que escribiremos $s \sim_{a_i} s'$, syss el estado local de a_i es el mismo en s y en s'; esto es, si $s_{a_i} = s'_{a_i}$. Como puede verse, esta relación es una relación de equivalencia, lo que significa que el sistema de lógica epistémica subyacente es $S5$.

Sea ahora P un conjunto no vacío de variables proposicionales[6]. Podemos definir un sistema interpretado $\mathcal{I}$ como un par $(\mathcal{R}, v)$, donde $\mathcal{R}$ es un sistema sobre $\mathcal{G}$ y v es una función que asigna valores de verdad a los elementos de P

[6]Asumimos que se pueden describir las propiedades relevantes del sistema usando lógica proposicional. Por supuesto, es posible extender el concepto de sistema interpretado a la lógica de primer orden; pero no lo haremos en este lugar, por razones de simplicidad.

en cada estado $s \in \mathcal{G}$; esto es, $v : P \times \mathcal{G} \mapsto \{1, 0\}$[7]. Escribiremos $v(s)(p) = 1$ ó $v(s)(p) = 0$ para indicar que el valor asignado a la variable p en el estado global s es respectivamente 0 ó 1. El valor de verdad de una variable en un punto (r, n) es simplemente el valor de esa variable en el estado $r(n)$ correspondiente.

Ahora ya podemos definir el concepto de verdad de una fórmula φ en un punto (r, n) de un sistema interpretado $\mathcal{I}$. Escribiremos $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \varphi$ para denotar que la fórmula φ es verdadera en (o satisfecha por) el punto (r, n) del sistema $\mathcal{I}$. Presentaremos las cláusulas para el lenguaje CKL_m, dados como siempre un conjunto A de m agentes y un conjunto no vacío P de variables proposicionales; las de KL_m sólo requieren eliminar las cláusulas correspondientes a los operadores C y E, y sus duales.

La verdad de una fórmula atómica se define de forma completamente previsible:

$$(\mathcal{I}, r, n) \vDash p \text{ (para } p \in P) \text{ syss } v\,(r, n)\,(p) = 1$$

El caso de los operadores proposicionales se define de la forma habitual. Las cláusulas correspondientes a los operadores epistémicos son simplemente una variación formal de las que hemos usado hasta ahora:

$(\mathcal{I}, r, n) \vDash K_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para todo (r', n') tal que $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$.

$(\mathcal{I}, r, n) \vDash \widehat{K}_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para algún (r', n') tal que $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$.

$(\mathcal{I}, r, n) \vDash E_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para todo (r', n') tal que $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$ (para todo $a_i \in A$).

$(\mathcal{I}, r, n) \vDash \widehat{E}_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para algún (r', n') tal que $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$ (para algún $a_i \in A$).

$(\mathcal{I}, r, n) \vDash C_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para todo (r', n') tal que (r', n') es alcanzable desde (r, n).

$(\mathcal{I}, r, m) \vDash C_{a_i}\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \varphi$ para algún (r', n') tal que (r', n') es alcanzable desde (r, n).

[7]Esta es la forma en que lo presentan Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995) y Halpern, J.Y. y Vardi, M.Y. (1989); en cambio, Halpern, J.Y.; van der Meiden, R. y Vardi, M.Y. (1999) interpretan que v asigna un valor de verdad en cada punto, y no en cada estado global; con lo que el valor de verdad de las variables en puntos a los que les corresponde el mismo estado global puede ser distinto. Esta es una interpretación más amplia, pero hemos adoptado la primera por parecernos más natural.

El concepto “ser alcanzable desde” que aparece en las cláusulas de C y $\widehat{C}$ se define como en el capítulo 5: (r', n') es alcanzable desde (r, n) syss hay un camino desde (r, n) hasta (r', n') pasando por las diferentes relaciones de accesibilidad para diferentes agentes.

Queda, por último, definir la verdad de una fórmula en un punto de un sistema interpretado para el caso de los operadores temporales. Las cláusulas correspondientes son las siguientes:

$(\mathcal{I}, r, n) \models \bigcirc\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r, n+1) \models \varphi$

$(\mathcal{I}, r, n) \models \Box\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r, n') \models \varphi$ para todo $n' \geq n$

$(\mathcal{I}, r, n) \models \Diamond\varphi$ syss $(\mathcal{I}, r, n') \models \varphi$ para algún $n' \geq n$

$(\mathcal{I}, r, n) \models \varphi U \psi$ syss hay algún $n' \geq n$ tal que $(\mathcal{I}, r, n') \models \psi$ y para todo n'' tal que $n' > n'' \geq n$, $(\mathcal{I}, r, n'') \models \varphi$

Diremos que $\mathcal{I} \models \varphi$ si para todo punto $(r, n) \in \mathcal{R}$ del sistema interpretado $\mathcal{I}$, $(\mathcal{I}, r, n) \models \varphi$. A su vez, dado un conjunto de sistemas interpretados Θ, escribiremos $\models_\Theta \varphi$ para denotar que $\mathcal{I} \models \varphi$ para todo $\mathcal{I} \in \Theta$.

6.4. Propiedades de los sistemas

En la primera sección de este capítulo mencionábamos que en función de ciertas asunciones sobre los sistemas subyacentes, además de sobre el el lenguaje empleado, se generaban distintas lógicas epistémico-temporales. Veremos ahora ciertas propiedades que definen clases interesantes de sistemas interpretados. Tales propiedades son cuatro: *memoria perfecta*, *no aprendizaje*, *sincronía* y *estado inicial único*.

6.4.1. Memoria perfecta

Una de las razones por las que nuestras formalizaciones del conocimiento de los agentes resultan idealizadas es que con frecuencia los agentes reales, al menos los humanos, tenemos una memoria demasiado limitada para retener toda la información relevante. En un juego de naipes suficientemente complejo, la mayoría de los humanos normales es incapaz de recordar qué cartas han aparecido y en qué circunstancias del juego más allá de una pocas jugadas. Con todo, la suposición contraria es habitual en teoría de juegos; y hay una cierta cantidad de casos en que resulta interesante modelar los sistemas *como si* los agentes pudieran retener toda la información relevante ocurrida hasta el momento. De los sistemas en que los agentes tienen esta propiedad diremos que son *sistemas con memoria perfecta.*

Lo que intuitivamente significa la propiedad de memoria perfecta es que el estado local de un agente a_i contiene toda la información de lo ocurrido hasta entonces, desde el punto de vista del agente. Hay varias maneras equivalentes de caracterizar esta noción. Una de ellas es la siguiente:

Llamemos *secuencia de estados locales* del agente a_i hasta el punto (r, n) a la secuencia de estados locales que adopta el agente a_i a lo largo del recorrido r hasta llegar al momento n, incluyendo el estado $r\,(n)$, omitiendo repeticiones consecutivas[8]. Por ejemplo, si el agente a pasa desde el momento 0 al 4, en el recorrido r, por los estados locales $\langle s_a^1, s_a^2, s_a^2, s_a^3, s_a^3\rangle$, su secuencia de estados locales será $\langle s_a^1, s_a^2, s_a^3\rangle$. Pues bien, el agente a_i tiene memoria perfecta en el sistema $\mathcal{R}$ si para cualesquiera puntos $(r, n)\,, (r', n') \in \mathcal{R}$, si $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$ entonces la secuencia de estados locales que adopta a_i a lo largo de r es la misma en (r, n) y en (r', n').

Puesto que el significado intuitivo de esta propiedad es que los agentes no pierden información, podría parecer que los sistemas con memoria perfecta se caracterizan por la validez de la fórmula $K_{a_i}\varphi \to \Box K_{a_i}\varphi$. Esto sin embargo no es cierto. Piénsese, por ejemplo, que dada una fórmula cualquiera φ puede ser verdadero en un punto (r, n) de un sistema interpretado $\mathcal{I}$ que $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \neg K_{a_i}\varphi$; y por tanto también que $(\mathcal{I}, r, n) \vDash K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$. Pero en un momento posterior n', a_i puede haber aprendido si φ es verdadero o falso; con lo cual no sería verdad que $(\mathcal{I}, r, n') \vDash \neg K_{a_i}\varphi$, y por tanto $(\mathcal{I}, r, n') \nvDash K_{a_i}\neg K_{a_i}\varphi$.

6.4.2. No aprendizaje

Si la propiedad de memoria perfecta significa que los agentes no pierden ni olvidan información, la propiedad de no aprendizaje consiste, hablando algo toscamente, en que los agentes no pueden adquirir información nueva; de manera

[8]La razón por la que puede haber repeticiones es que, en los sistemas asíncronos, el estado local del agente puede no verse afectado por el paso del tiempo; cosa imposible en los estados sincrónicos. Hablaremos de estas propiedades un poco más adelante.

que lo que el agente considera posible en un momento n lo seguirá considerando posible en todo momento del futuro.

Llamemos *secuencia de estados locales futuros* del agente a_i en el punto (r, n) a la secuencia de estados locales que adopta el agente a_i a partir del punto (r, n), omitiendo repeticiones consecutivas, e incluyendo $r(n)$. Diremos que el agente a_i no aprende en el sistema $\mathcal{R}$ si para cualesquiera puntos $(r, n), (r', n') \in \mathcal{R}$, si $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$ entonces la secuencia de estados locales futuros del agente a_i a lo largo de r es la misma en (r, n) y en (r', n').

6.4.3. Sincronía

En los ejemplos que hemos propuesto, tales como juegos de naipes, el cambio de un momento a otro venía marcado por rondas o anuncios públicos (en el caso de los niños manchados) de forma que cada agente tenía siempre constancia de cual era el momento en que se encontraba. Podemos describir esto como la suposición de que todos los agentes tienen acceso a un reloj común que marca el paso de un momento a otro, y la lectura de ese reloj es parte de la descripción de cada estado local; de forma que si estamos, por ejemplo, en el momento 3, todos los agentes saben que estamos en el momento 3. Cuando esto ocurre, decimos que el sistema es sincrónico.

Una consecuencia inmediata de esta descripción es que en un punto (r, n) los agentes no consideran posible que estén en un momento distinto de n. Podemos tomar esto como definición de sincronía: un sistema $\mathcal{R}$ es sincrónico syss para todo agente $a_i \in A$ y cualesquiera puntos $(r, n), (r', n') \in \mathcal{R}$, si $(r, n) \sim_{a_i} (r', n')$ entonces $n = n'$.

6.4.4. Estado inicial único

En los juegos de naipes que hemos estado tomando como ejemplo, hay un gran número de repartos de cartas posibles al iniciarse el juego. Pero no en todos las situaciones imaginables se da esta situación. En el juego del ajedrez, por ejemplo, la situación inicial de la partida es siempre la misma[9]. Decimos que un sistema $\mathcal{R}$

[9] Claro que el ajedrez no es lo que podríamos llamar un juego epistémico. Aun así, es fácil imaginar sistemas epistémicos que funcionan como el ajedrez en el sentido de que todos los agentes saben cuál es el estado inicial.

tiene un estado inicial único si para cualesquiera recorridos $r, r' \in \mathcal{R}$, $r(0) = r'(0)$; lo cual significa que para todo agente $a_i \in A$, $(r, 0) \sim_{a_i} (r', 0)$.

En lo que sigue usaremos $\mathcal{C}_m$ para referirnos al conjunto de todos los sistemas interpretados para m agentes, y añadiremos los superíndices mp, na, s y eiu para referirnos a los conjuntos de sistemas interpretados para m agentes que tienen cada una de estas propiedades.

6.5. Axiomatización

Dada la vastedad del tema, en esta sección nos limitaremos a presentar algunos resultados conocidos sobre sistemas axiomáticos de lógica epistémica temporal que nos permitirán a continuación proponer un método de tablas semánticas.

Ya hemos mostrado en el capítulo 2 que los esquemas de axioma A1-A5 junto a las reglas R1 y R2 constituyen una axiomatización correcta y completa del sistema $S5_m$ de lógica epistémica proposicional. A su vez, en el capítulo 5 se demostró que añadiendo a los anteriores los esquemas de axioma C1 y C2, además de la regla RC1, obtenemos una axiomatización correcta y completa del sistema $S5_m^C$. Así pues, para construir los correspondientes sistemas de lógica epistémica temporal, deberemos añadir a $S5_m$ o $S5_m^C$ los correspondientes axiomas y reglas de lógica temporal más aquellos que especifiquen la relación entre conocimiento y tiempo.

Respecto a los operadores temporales, el siguiente conjunto de esquemas de axiomas y reglas constituye, junto a A1 y R1, una axiomatización correcta y completa respecto a la semántica que acabamos de presentar[10]:

T1 $\bigcirc\varphi \wedge \bigcirc(\varphi \to \psi) \to \bigcirc\psi$

T2 $\bigcirc\neg\varphi \leftrightarrow \neg\bigcirc\varphi$

T3 $\varphi U\psi \leftrightarrow \psi \vee (\varphi \wedge \bigcirc(\varphi U\psi))$

RT1 $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \bigcirc\varphi}$

RT2 $\dfrac{\vdash \varphi' \to \neg\psi \wedge \bigcirc\varphi'}{\vdash \varphi' \to \neg(\varphi U\psi)}$

El uso del signo $\vdash$ en las reglas RT1 y RT2 tiene el mismo sentido que en la regla R2 (sección 2.3). Mientras nos mantengamos en el ámbito estricto de la deducción

[10] Gabbay, D.; Pnueli, A.; Shelah, S. y Stavi, J. (1980)

axiomática, tal signo no aporta nada relevante; pero si queremos introducir el concepto de derivabilidad de una fórmula en un sistema axiomático AX, tal como lo definíamos en ese lugar, el uso irrestricto de esta regla tendría la consecuencia de que $AX, \varphi \vdash \bigcirc\varphi$, que es obviamente indeseable. En la forma en que está presentada la regla, pues, ha de entenderse como sigue: si φ depende sólo de los axiomas de AX, entonces de φ se sigue $\bigcirc\varphi$. Análogamente ocurre con la regla R2.

Llamaremos $S5_m^U$ al sistema formado por los esquemas de axioma A1-A5 + T1-T3, junto a las reglas R1, R2, RT1 y RT2; y $S5C_m^U$ al resultado de añadir a $S5_m^U$ C1, C2 y RC1. Puesto que en la clase de sistemas interpretados $\mathcal{C}_m$ no hay interacción entre conocimiento y tiempo, $S5_m^U$ resulta ser una axiomatización correcta y completa para el lenguaje KL_m respecto a $\mathcal{C}_m$; e igualmente ocurre con $S5C_m^U$ para el lenguaje CKL_m. De forma bastante más inesperada, esto no se modifica si añadimos las propiedades de sincronía y estado inicial único; de manera que $S5_m^U$ sigue siendo una axiomatización correcta y completa respecto a $\mathcal{C}_m^s$, $\mathcal{C}_m^{eiu}$ y $\mathcal{C}_m^{s,eiu}$, para el lenguaje KL_m; y lo mismo ocurre con $S5C_m^U$ para el lenguaje CKL_m. Al parecer, el lenguaje CKL_m no es lo suficientemente rico como para captar estas diferencias.

En cambio, si queremos tomar en consideración las propiedades de memoria perfecta y no aprendizaje tendremos que añadir axiomas adicionales. Los candidatos que se han propuesto son los siguientes:

KT1 $K_{a_i}\Box\varphi \to \Box K_{a_i}\varphi$ (para todo $a_i \in A$)

KT2 $K_{a_i} \bigcirc \varphi \to \bigcirc K_{a_i}\varphi$ (para todo $a_i \in A$)

KT3 $K_{a_1}\varphi \wedge \bigcirc (K_{a_i}\psi \wedge \neg K_{a_i}\chi) \to \widehat{K}_{a_i} (K_{a_i}\varphi U (K_{a_i}\psi U \neg\chi))$ (para todo $a_i \in A$)

KT4 $K_{a_i}\varphi U K_{a_i}\psi \to K_{a_i} (K_{a_i}\varphi U K_{a_i}\psi)$ (para todo $a_i \in A$)

KT5 $\bigcirc K_{a_i}\varphi \to K_{a_i} \bigcirc \varphi$ (para todo $a_i \in A$)

Resumiremos brevemente algunos resultados conocidos:

De KT1 se conjeturó que caracterizaba completamente la propiedad de memoria perfecta; esto es, que $S5_m^U$+ KT1 es una axiomatización completa respecto a $\mathcal{C}_m^{mp}$. Sin embargo, esta conjetura resultó ser falsa, como se demostró en Meyden, R. van der (1994). para obtener un sistema completo hace falta añadir el axioma KT3. KT1 es demostrable en $S5_m^U$+ KT3.

El esquema de axioma KT2 expresa la combinación de memoria perfecta y sincronía; de forma que $S5^U_m$+ KT2 es una axiomatización correcta y completa para el lenguaje KL_m respecto a $\mathcal{C}^{mp,s}_m$, pero también respecto a $\mathcal{C}^{mp,s,eiu}_m$.

Como ya hemos comentado, a $S5^U_m$+ KT3 es una axiomatización correcta y completa respecto a a $\mathcal{C}^{mp}_m$, y también lo es respecto a $\mathcal{C}^{mp,eiu}_m$; siempre respecto a KL_m.

El axioma KT4 caracteriza la propiedad de no aprendizaje; de modo que $S5^U_m$+ KT4 constituye una axiomatización correcta y completa respecto a $\mathcal{C}^{na}_m$. Como resulta previsible, $S5^U_m$+ KT3 + KT4 es una axiomatización correcta y completa para el lenguaje KL_m respecto a $\mathcal{C}^{mp,na}_m$ y a $\mathcal{C}^{mp,na,eiu}_m$.

Por último, el axioma KT5 expresa la combinación de no aprendizaje y sincronía; esto es, $S5^U_m$+ KT5 es una axiomatización correcta y completa para el lenguaje KL_m respecto a $\mathcal{C}^{na,s}_m$. De aquí se sigue que KT4 es demostrable en $S5^U_m$+ KT5, pero también que $S5^U_m$+ KT2 + KT5 es una axiomatización correcta y completa para el lenguaje KL_m respecto a $\mathcal{C}^{na,mp,s}_m$.

6.6. Tablas recursivas para sistemas sincrónicos

Como hacíamos en el capítulo dedicado a conocimiento de grupos, presentaremos un método de tablas basado en los DB-tableaux[11], que permiten encontrar, en caso de que los haya, modelos tan simples como sea posible. Por razones de simplicidad tomaremos K y $\widehat{K}$ como únicos operadores epistémicos; esto es, no presentaremos reglas para tratar con el conocimiento de grupos. Este método, con todo, no hace decidible a la lógica epistémica temporal; ya que la naturaleza infinita del tiempo hace que haya fórmulas que sólo sean satisfactibles en modelos infinitos. Explicaremos esto con detalle más adelante.

El método de DB-tableaux, tal como lo aplicábamos en 5.7, permite abrir ramas provisionales que en caso de ser abiertas dan por finalizada la aplicación de la regla; pero que en caso de ser cerradas exigen la apertura de otra rama. En el método que ahora vamos a presentar añadimos a ciertas reglas otra característica: la recursividad; esto ocurre con las fórmulas de la forma $\Diamond\alpha$, $\alpha U \beta$ y $\neg(\alpha U \beta)$. En los casos de estos tres tipos de fórmulas la regla consta de dos partes; una primera, a la que llamaremos la condición de parada, que en caso de dar lugar a

[11]Para una aproximación diferente véase Wooldridge, M.; Dixon, C. and M. Fisher (1998).

una rama abierta da por concluida la aplicación de la regla; y una segunda que se aplica sólo si la primera da lugar a una rama cerrada y que característicamente genera una rama que contiene las fórmulas $\bigcirc\Diamond\alpha$, $\bigcirc(\alpha U\beta)$ o $\bigcirc\neg(\alpha U\beta)$ (en los casos de $\Diamond\alpha$, $\alpha U\beta$ o $\neg(\alpha U\beta)$, respectivamente). Llamaremos a esta segunda parte la cláusula recursiva de la regla. Por supuesto, puede ocurrir que la condición de parada nunca genere una rama abierta, bien porque la fórmula no sea satisfactible, bien porque sólo lo sea en sistemas interpretados que constan de infinitos puntos. En estos casos, la regla da lugar a una rama infinita.

Para extender los métodos que hemos estado utilizando a sistemas de lógica epistémica temporal necesitamos, por lo pronto, modificar las etiquetas de forma que contemplen el elemento temporal. Para ello, añadiremos un sufijo al tipo de etiquetas que hemos estado utilizando que indicará el momento del tiempo en que nos encontramos.

Una etiqueta es pues una secuencia $\sigma(t)$, donde σ se construye como en la sección 2.6 y $t \in \mathbb{N}$. Diremos que σ es el segmento epistémico y t el segmento temporal de la etiqueta. Por supuesto, la primera etiqueta de toda tabla es $1(0)$.

Las reglas para los operadores proposicionales no sufren más modificación que el cambio de etiqueta, por lo que no consideramos necesario reseñarlas. Tampoco las reglas de los operadores K y $\widehat{K}$ sufren realmente modificación; sin embargo, hay en ello algo interesante que conviene destacar. Reescribimos pues las reglas con los correspondientes cambios:

3. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma(t) :: K_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma(t) :: \alpha$ al término de la rama y se marca con K.

4. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma(t) :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$ se escribe $\sigma.a_in(t) :: \alpha$ al término de la rama (donde n es el primer entero positivo tal que $\sigma.a_in(t)$ es nueva en la rama) y se marca con $\widehat{K}(\sigma.a_in(t))$. Restricción: salvo que $\tau(t) :: \alpha$ aparezca en la rama y $\tau(t)$ sea un ascendiente epistémico de $\sigma(t)$ respecto a a_i, en cuyo caso se da la regla por aplicada y se marca la fórmula con $\widehat{K}(\tau(t))$.

HKS5: a) Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma(t) :: K_{a_i}\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma.a_in(t) :: K_{a_i}\alpha$, para toda etiqueta $\sigma.a_in(t)$ que aparezca en la rama.

b) Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma.a_i n\,(t) :: K_{a_i}\alpha$, se escribe $\sigma\,(t) :: K_{a_i}\alpha$ al término de la rama.

Se habrá podido observar que la única modificación que se ha hecho respecto a las reglas presentadas en 2.6 es el añadido de un segmento temporal a las etiquetas que permanece invariable, y que por tanto no parece aportar nada nuevo. El concepto de ascendiente epistémico usado en la restricción a la regla 4 debe redefinirse por el mismo procedimiento; esto es, manteniendo invariable el elemento temporal.

Esta modificación no es, sin embargo, totalmente inocente. De hecho, el que el segmento temporal permanezca invariable es lo que garantiza que tratamos con sistemas sincrónicos. Hablando toscamente, esto significa que los agentes sólo consideran posibles aquellos estados globales situados en el mismo momento, que es precisamente lo que define la sincronía.

A estas reglas debemos añadir ahora las específicas para los operadores temporales, y las que establecen la relación entre operadores epistémicos y temporales, en los sistemas que las requieran. A diferencia de lo que hemos hecho hasta ahora, presentar una regla para la negación de todos los operadores, presentaremos una regla para cada operador y otra para su negación. Podemos suponer el resto de las reglas reescritas de igual forma.

Las reglas para los operadores $\bigcirc$ y $\Box$ no presentan mayor dificultad:

5. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \bigcirc\alpha$ se escribe $\sigma\,(t+1) :: \alpha$ al término de la rama y se marca con $\bigcirc$.

6. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \neg\bigcirc\alpha$ se escribe $\sigma\,(t+1) :: \neg\alpha$ al término de la rama y se marca con $\neg$.

7. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \Box\alpha$ se escribe $\sigma\,(t) :: \alpha$ al término de la rama y se marca con $\Box$.

8. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \neg\Box\alpha$ se escribe $\sigma\,(t) :: \Diamond\neg\alpha$ al término de la rama y se marca con $\neg$.

Además, es necesaria la siguiente regla de herencia:

HT: Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma\,(t) :: \Box\alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma\,(t') :: \alpha$, para toda etiqueta $\sigma\,(t')$ que aparezca en la rama tal que $t' > t$.

Los operadores $\Diamond$ y U son los que introducen complicaciones adicionales que nos obligan a utilizar los procedimientos de DB-tableaux recursivos que hemos explicado. Las reglas en cuestión son las siguientes:

9. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \Diamond\alpha$ se abre una subrama, se escribe a su término $\sigma\,(t) :: \alpha$ y se marca $\Diamond 1$. Si esta subrama se cierra, se abre otra subrama, se escribe $\sigma\,(t) :: \bigcirc\Diamond\alpha$ y se marca con $\Diamond 2$[12].

10. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \neg\Diamond\alpha$ se escribe $\sigma\,(t) :: \Box\neg\alpha$ al término de la rama y se marca con $\neg$.

11. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \alpha U\beta$ se abre una subrama, se escribe a su término $\sigma\,(t) :: \beta$ y se marca con $U1$. Si esta subrama se cierra, se abre otra subrama, se escribe consecutivamente $\sigma\,(t) :: \alpha$ y $\sigma\,(t) :: \bigcirc\,(\alpha U\beta)$, y se marca con $U2$.

12. Si la fórmula etiquetada a marcar es $\sigma\,(t) :: \neg\,(\alpha U\beta)$ se abre una subrama, se escribe consecutivamente $\sigma\,(t) :: \neg\alpha$ y $\sigma\,(t) :: \neg\beta$; y se marca con $\neg U1$. Si esta subrama se cierra, se abre otra subrama, se escribe consecutivamente $\sigma\,(t) :: \alpha$, $\sigma\,(t) :: \neg\beta$ y $\sigma\,(t) :: \bigcirc\neg\,(\alpha U\beta)$; y se marca con $\neg U2$.

Ya hemos explicado que el hecho de que el segmento temporal de la etiqueta permanezca invariable en las reglas de los operadores epistémicos garantiza que se cumple la condición de sincronía. Por otra parte, no hemos introducido aún reglas que determinen la interacción entre operadores epistémicos y temporales. Así pues, los sistemas interpretados que este método de tablas nos permite construir pertenecen a la clase $\mathcal{C}_m^s$. Pero hemos comentado también que $S5_m^U$ constituye una axiomatización correcta y completa respecto a $\mathcal{C}_m^s$, por lo que el conjunto de fórmulas válidas definido por las reglas que acabamos de definir se corresponde con este sistema.

Por supuesto, esto no significa que este método de tablas constituya un procedimiento algorítmico de decisión para $S5_m^U$, por la razón de que hay fórmulas cuya tabla se vuelve infinita.

[12] Por supuesto es posible, y muy conveniente a efectos prácticos, escribir $\sigma\,(t+1) :: \Diamond\alpha$ en lugar de $\sigma\,(t) :: \bigcirc\Diamond\alpha$. Si hemos presentado la regla de esta forma es porque nos interesaba destacar que $\bigcirc$ es el único operador que introduce un segmento temporal nuevo. La misma apreciación puede hacerse para las reglas del operador U y su negación.

Un ejemplo claro lo constituye la fórmula $\Box p \wedge \Diamond\neg p$: para cada fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \Diamond\neg p$ tendremos que abrir una subrama y escribir $\sigma(t) :: \neg p$, que se cerrará por obra de la regla HT; y entonces cláusula recursiva de la regla 9 nos obligará a escribir $\sigma(t) :: \bigcirc\Diamond\neg p$, lo que a su vez nos obliga a crear una nueva etiqueta y escribir $\sigma(t+1) :: \Diamond p$, y así *ad infinitum*.

En el ejemplo anterior era una fórmula no satisfactible la que generaba una rama infinita; pero esto también puede ocurrir con fórmulas satisfactibles. La razón estriba, como ya se ha sugerido, en el carácter infinito del tiempo, que hace que haya fórmulas que sólo tienen modelos infinitos. Por ejemplo, la fórmula $p \wedge \Box(p \rightarrow \bigcirc p) \wedge \Diamond\neg p$ sólo es satisfactible en sistemas interpretados que constan de infinitos puntos.

6.7. Algunos ejemplos

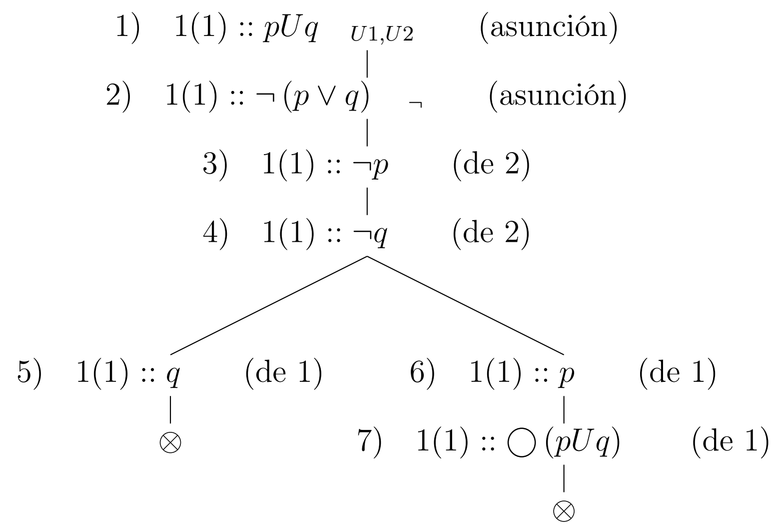
En un buen número de casos interesantes, el método que acabamos de presentar produce tablas infinitas cuando el conjunto de fórmulas que funciona como asunción de la tabla no tiene un modelo. No obstante, presentaremos algunos casos simples para ejemplificar el uso de estas tablas.

El primero de ellos es bastante intuitivo. Es fácil ver que $pUq \rightarrow p \vee q$ es una fórmula válida; para comprobarlo, mostraremos que la tabla semántica de $\{pUq, \neg(p \vee q)\}$ es cerrada (cuadro 6.1).

El siguiente ejemplo es de una tabla infinita. Dada la semántica del operador U, es intuitivamente evidente que $pUq \rightarrow \Diamond q$ es una fórmula válida; pero cuando hacemos la tabla semántica del antecedente y la negación del consecuente ($\{pUq, \Box\neg q\}$) nos encontramos con un proceso infinito. Se trata de un caso semejante al de los cuantificadores en lógica de primer orden: la rama abierta por la condición de parada siempre se cierra, por efecto de la fórmula $\neg q$, que se trasmite a cada nueva etiqueta por efecto de la regla HT; y la condición recursiva nos obliga a crear una nueva etiqueta, en la que se repite el proceso. La tabla en cuestión se muestra en el cuadro 6.2.

Los dos ejemplos que acabamos de presentar contienen sólo operadores temporales. A modo de ejemplo en que aparezcan también operadores epistémicos, demostraremos que nuestro método sólo es válido para sistemas interpretados que tengan ciertas propiedades.

Cuadro 6.1: $\{pUq, \neg(p \vee q)\}$



6.8. Memoria perfecta y no aprendizaje

Ya hemos mencionado que el método que acabamos de presentar sólo es válido para sistemas sincrónicos. De forma algo sorprendente, también resulta estar restringido a sistemas con la propiedad de *no aprendizaje*. Prueba de ello es que la tabla semántica de la negación del esquema de axioma KT5 es cerrada sin necesidad de añadir reglas adicionales; y, como sabemos, tal axioma expresa precisamente estas dos propiedades. La tabla se muestra en el cuadro 6.3.

La razón de que esto ocurra, que el método de tablas que hemos propuesto se restrinja a sistemas interpretados con la propiedad de no aprendizaje, es que el sistema de etiquetas no es lo suficientemente fino como para distinguir el *camino* que lleva de un punto (r, n) a otro punto (r', n'). Veamos esto con cierto detalle:

Una etiqueta $\sigma(t)$ de una tabla semántica designa en realidad un estado global, digamos $r_\sigma(t)$, del sistema interpretado generado por la tabla, que satisface a las fórmulas que funcionan como asunción de dicha tabla (lo que demostraremos en el siguiente apartado). Supongamos ahora un estado global $r'_\sigma(t)$ tal que

Cuadro 6.2: $\{pUq, \Box\neg q\}$

1) $1(1) :: pUq$ $\quad {}_{U1,U2}$ (asunción)

2) $1(1) :: \Box\neg q$ $\quad {}_{\Box}$ (asunción)

3) $1(1) :: \neg q$ (de 2)

4) $1(1) :: q$ (de 1)

$\otimes$

5) $1(1) :: p$ (de 1)

6) $1(1) :: \bigcirc(pUq)$ $\quad {}_{\bigcirc}$ (de 1)

7) $1(2) :: pUq$ $\quad {}_{U1,U2}$ (de 6)

8) $1(2) :: \neg q$ (HT de 2)

9) $1(2) :: q$ (de 7)

$\otimes$

10) $1(2) :: p$ (de 7)

11) $1(2) :: \bigcirc(pUq)$ (de 7)

$(\cdots)$

Cuadro 6.3: $\{\bigcirc K_a p, \widehat{K}_a \neg \bigcirc p\}$

$$
\begin{array}{llll}
1) & 1(1) :: \bigcirc K_a p & \bigcirc & \text{(asunción)} \\
2) & 1(1) :: \widehat{K}_a \neg \bigcirc p & \widehat{K}(1.a1(1)) & \text{(asunción)} \\
3) & 1(2) :: K_a p & K & \text{(de 1)} \\
4) & 1(2) :: p & & \text{(de 3)} \\
5) & 1.a1(1) :: \neg \bigcirc p & \neg & \text{(de 2)} \\
6) & 1.a1(2) :: \neg p & & \text{(de 5)} \\
7) & 1.a1(2) :: K_a p & K & \text{(HKS5(a) de 3)} \\
8) & 1.a1(2) :: p & & \text{(de 7)} \\
 & \otimes & &
\end{array}
$$

$r_\sigma(t) \backsim_a r'_\sigma(t)$. Nuestro método de tablas asignaría a tal estado la etiqueta $\sigma.a1(t)$, y la evolución de ese estado global en el momento inmediatamente posterior sería designada con la etiqueta $\sigma.a1(t+1)$.

Sea ahora $r_\sigma(t{+}1)$ la evolución al instante inmediatamente posterior del estado global designado por la etiqueta $\sigma\,(t)$, y sea $r''_\sigma(t+1)$ un estado global del sistema tal que $r_\sigma(t+1) \backsim_a r''_\sigma(t+1)$. La etiqueta que nuestro sistema asigna a $r''_\sigma(t+1)$ es también $\sigma.a1(t+1)$.

Esta es la razón de que la tabla sólo pueda construir un sistema interpretado que satisfaga al axioma KT5: supongamos que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \models \bigcirc K_a\varphi$ (donde $\mathcal{I}$ es el sistema interpretado generado por la tabla semántica que estemos considerando); entonces, por evaluación de $\bigcirc$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t+1) \models K_a\varphi$; y por tanto $(\mathcal{I}, r_{\sigma.a1}, t+1) \models K_a\varphi$, y tanto la fórmula etiquetada $\sigma.a1(t+1) :: K_a\varphi$ como $\sigma.a1(t+1) :: \varphi$ aparecen en la rama (para toda etiqueta $\sigma.a1(t+1)$).

Supongamos ahora, por contraposición, que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \not\models K_a \bigcirc \varphi$; y por tanto, que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \models \widehat{K}_a \bigcirc \neg\varphi$ y la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \widehat{K}_a \bigcirc \neg\varphi$ aparece en la rama. En aplicación de la regla 4, $\sigma.a1(t) :: \bigcirc\neg\varphi$ aparece en la rama, y por tanto también $\sigma.a1(t+1) :: \neg\varphi$. Pero ya hemos visto que $\sigma.a1(t+1) :: \varphi$ aparece en la rama; y por tanto la tabla es cerrada.[13]

En caso de que busquemos un sistema interpretado con la condición de memoria perfecta, no tendremos mas que añadir una regla de herencia. Ya hemos visto que para obtener la combinación de memoria perfecta y sincronía basta añadir a $S5^U_m$ el esquema de axioma KT2: $K_{a_i} \bigcirc \varphi \to \bigcirc K_{a_i}\varphi$ (para todo $a_i \in A$); y resulta fácil definir una regla que recoja esta condición:

HKT(MP): Si en una rama del árbol aparece una fórmula etiquetada de la forma $\sigma\,(t) :: K_{a_i} \bigcirc \alpha$, se escribe al término de la rama $\sigma\,(t+1) :: K_{a_i}\alpha$.

La prueba de que al añadir esta regla obtenemos la propiedad deseada se muestra en el cuadro 6.4.

[13] Para algunos propósitos, sería conveniente disponer de un método de tablas para sistemas sin esta propiedad. Conjeturamos que es posible presentar un método tal usando un sistema en el que estados globales como los que acabamos de mencionar sean representados por etiquetas diferentes, pero no hemos explorado tal posibilidad.

Cuadro 6.4: $\{K_a \bigcirc p, \neg \bigcirc K_a p\}$

$$
\begin{array}{llll}
1) & 1(1) :: K_a \bigcirc p & {}_{K} & \text{(asunción)} \\
2) & 1(1) :: \neg \bigcirc K_a p & {}_{\neg} & \text{(asunción)} \\
3) & 1(1) :: \bigcirc p & {}_{\bigcirc} & \text{(de 1)} \\
4) & 1(2) :: p & & \text{(de 3)} \\
5) & 1(2) :: K_a p & {}_{K} & \text{(HK(MP) de 1)} \\
6) & 1(2) :: p & & \text{(de 5)} \\
7) & 1(2) :: \neg K_a p & {}_{\neg} & \text{(de 2)} \\
8) & 1(2) :: \widehat{K}_a \neg p & {}_{\widehat{K}(1.a1(2))} & \text{(de 6)} \\
9) & 1.a1(2) :: \neg p & & \text{(de 7)} \\
10) & 1.a1(2) :: K_a p & {}_{K} & \text{(HKS5(a) de 5)} \\
11) & 1.a1(2) :: p & & \text{(de 10)} \\
 & \otimes & &
\end{array}
$$

6.9. Corrección

Teorema 6.9.1. *Si la tabla semántica de una fórmula φ tiene al menos una rama abierta, entonces hay un sistema interpretado $\mathcal{I}$ y un punto $(r, n) \in \mathcal{R}$ de la estructura $\mathcal{I}$ tal que $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \varphi$.*

Demostración: Como en ocasiones anteriores, procederemos a mostrar cómo se construye un sistema interpretado a partir de la rama abierta de la tabla, para a continuación demostrar que dicho sistema satisface a la fórmula. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas etiquetadas que aparecen en una rama abierta de la tabla semántica de φ, y Σ el conjunto de etiquetas que aparecen en dicha rama, Definimos un sistema interpretado $\mathcal{I} = (\mathcal{R}, \upsilon)$ de la siguiente forma:

El segmento epistémico de las etiquetas que aparecen en la rama define los recorridos de $\mathcal{R}$; esto es:

$$\mathcal{R} = \{r_\sigma \mid \sigma(t) \in \Sigma\} \text{ (para } t \in \mathbb{N}).$$

No necesitamos describir expresamente cada estado local, ya que el conjunto de fórmulas etiquetadas con cada etiqueta $\sigma(t)$ define el estado global $r_\sigma(t)$, correspondiente al punto (r_σ, t), y las relaciones de accesibilidad se definen también en función de las etiquetas:

A1) Para cualesquiera etiquetas $\sigma(t), \sigma'(t') \in \Sigma$, si $t = t'$ y $\sigma' = \sigma.a_i n$ (para $a_i \in A$, con $i \leq m$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $t, t' \in \mathbb{N}$), entonces $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_{\sigma'}(t')$.

A2) La relación de accesibilidad es reflexiva, simétrica y transitiva.

En cuanto a la función de evaluación, la definimos:

$$\upsilon(r_\sigma(t))(p) = 1 \text{ syss } \sigma(t) :: p \in \mathcal{F}$$

Como en casos anteriores diremos que una etiqueta $\tau(t')$ es a_i-hereditaria con respecto a $\sigma(t)$ (lo que escribiremos $\sigma(t)\, H_{a_i} \tau(t')$) si y sólo si para toda fórmula $K_{a_i}\varphi$ tal que $\sigma(t) :: K_{a_i}\varphi \in \mathcal{F}$, $\tau(t') :: \varphi \in \mathcal{F}$. Se cumple entonces el análogo del lema 2.8.2 :

Lema 6.9.2. *$r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_\tau(t')$ si y sólo si $\sigma(t)\, H_{a_i} \tau(t')$.*

Demostración: Puesto que el segmento temporal de las etiquetas permanece invariable en las reglas de los operadores K y $\widehat{K}$, la demostración es la misma que la del lema 2.8.2, restringida al caso $S5_m$. QED.

Procederemos ahora a demostrar que para un cierto estado global $r(n) \in \mathcal{R}$ del sistema así definido $\mathcal{I}$, $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \varphi$. Para ello demostraremos previamente el siguiente lema:

Lema 6.9.3. *Para toda fórmula* $\alpha \in KL_m$*, si* $\sigma(t) :: \alpha \in \mathcal{F}$*, entonces* $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \alpha$.

Demostración: se demuestra por inducción sobre el grado lógico de la fórmula. Como en casos anteriores, escribiremos $|\alpha|$ para referirnos al grado lógico de α.

La base es trivial: si α es atómica, entonces $\upsilon(r_\sigma(t))(\alpha) = 1$; y por tanto $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \alpha$.

Suponemos ahora como hipótesis de la inducción que el lema se cumple para $|\alpha| \leq n$. Demostremos que también se cumple cuando $|\alpha| = n + 1$.

El caso de los operadores proposicionales no difiere de la prueba de la sección 2.8, igual que ocurre con las negaciones de K y $\widehat{K}$, que se reducen respectivamente a $\widehat{K}$ y K. Repetiremos la prueba para los dos operadores epistémicos para adaptarla a las nuevas etiquetas, si bien no hay nada sustancialmente nuevo en estos casos, y añadiremos las de los operadores temporales y sus negaciones. Podemos considerar pues esta prueba como una continuación de la de la sección 2.8 (razón por la cual comenzamos la numeración a partir del punto 3).

3. $\varphi = K_{a_i}\alpha$: Para todo $\tau(t') \in \Sigma$ tal que $\sigma(t) H_{a_i} \tau(t')$, $\tau(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$; y por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\tau, t') \vDash \alpha$. Pero por el lema 6.9.2, $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_\tau(t')$ si y sólo si $\sigma(t) H_{a_i} \tau(t')$; luego $(\mathcal{I}, r_\tau, t') \vDash \alpha$ para todo $r_\tau(t')$ tal que $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_\tau(t')$; y por tanto, por evaluación de K, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash K_{a_i}\alpha$.

4. $\varphi = \widehat{K}_{a_i}\alpha$: Si $\sigma(t) :: \widehat{K}_{a_i}\alpha \in \mathcal{F}$ entonces, por la regla 4, hay una etiqueta $\sigma.a_i n(t) \in \Sigma$ tal que $\sigma.a_{i_n}(t) :: \alpha \in \mathcal{F}$ y, por la cláusula A1 de la definición de las relaciones de accesibilidad, $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_\tau(t)$. Pero, por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_{\sigma.a_i}, t) \vDash \alpha$. Luego $(\mathcal{I}, r_\tau, t') \vDash \alpha$ para algún $r_\tau(t')$ tal que $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_\tau(t')$. Por tanto, por evaluación de $\widehat{K}$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \widehat{K}_{a_i}\alpha$.

5. $\varphi = \bigcirc\alpha$: Por la regla 5, si $\sigma(t) :: \bigcirc\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t+1) :: \alpha \in \mathcal{F}$ y, por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t+1) \vDash \alpha$. Luego, por evaluación de $\bigcirc$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \bigcirc\alpha$.

6. $\varphi = \neg\bigcirc\alpha$: Por la regla 6, si $\sigma(t) :: \neg\bigcirc\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t+1) :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$ y, por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t+1) \vDash \neg\alpha$. De aquí se sigue que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t+1) \nvDash \alpha$; y por tanto que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \nvDash \bigcirc\alpha$. Luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \neg\bigcirc\alpha$.

7. $\varphi = \Box\alpha$: Por la regla 7, si $\sigma(t) :: \Box\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t) :: \alpha \in \mathcal{F}$. Por la regla HT, si $\sigma(t) :: \Box\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $t' > t$. Así pues, $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$ para todo $t' \geq t$; y por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \alpha$ para todo $t' \geq t$. Luego, por evaluación de $\Box$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \Box\alpha$.

8. $\varphi = \neg\Box\alpha$: Por la regla 8, si $\sigma(t) :: \neg\Box\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t) :: \Diamond\neg\alpha \in \mathcal{F}$. Si esta rama es abierta, entonces hay un $t' \geq t$ tal que $\sigma(t') :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$ (la demostración es igual que en el paso 9; por brevedad no la repetimos); y por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \neg\alpha$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \alpha$. Así pues, no es cierto que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \alpha$ para todo $t' \geq t$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \nvDash \Box\alpha$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \neg\Box\alpha$.

9. $\varphi = \Diamond\alpha$: Sea $k \in \mathbb{N}$ el número de fórmulas que contiene la rama abierta a partir de $\sigma(t) :: \Diamond\alpha$. Demostraremos por inducción sobre k que hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$

   Si $k = 1$, entonces la primera parte de la regla 9 da lugar a una rama abierta que contiene $\sigma(t) :: \alpha$ (y α es un literal); pues de lo contrario, la segunda parte de la regla daría lugar a $\sigma(t) :: \bigcirc\Diamond\alpha$, que a su vez daría lugar a $\sigma(t+1) :: \Diamond\alpha$, y entonces $k > 1$, contra la hipótesis de partida. Así pues, hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$.

   Aceptemos ahora como hipótesis de la inducción que la afirmación vale para $k = n$ y demostremos que vale también para $k = n+1$. Si $\sigma(t) :: \alpha \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es abierta, entonces, o bien la primera parte de la regla 9 da lugar a una rama abierta que contiene $\sigma(t) :: \alpha$, y entonces hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$; o bien la segunda parte de la regla da lugar a $\sigma(t) :: \bigcirc\Diamond\alpha$, que a su vez da lugar a $\sigma(t+1) :: \Diamond\alpha$. De este último caso, por hipótesis de la inducción, se sigue que hay un $t' \geq t+1$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$; y por tanto también que hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$.

Queda demostrado, pues, que hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \alpha \in \mathcal{F}$; y por la hipótesis de la inducción principal, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \alpha$. Así pues, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \Diamond\alpha$.

10. $\varphi = \neg\Diamond\alpha$: Por la regla 10, si $\sigma(t) :: \neg\Diamond\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t) :: \Box\neg\alpha \in \mathcal{F}$. Por la regla 7, si $\sigma(t) :: \Box\neg\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t) :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$; y por la regla HT, si $\sigma(t) :: \Box\neg\alpha \in \mathcal{F}$ entonces $\sigma(t') :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$ para todo $t' > t$. Así pues, $\sigma(t') :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$ para todo $t' \geq t$; y por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \neg\alpha$ para todo $t' \geq t$; y por tanto $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \alpha$ para ningún $t' \geq t$. Luego, por evaluación de $\Diamond$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \nvDash \Diamond\alpha$; y por tanto $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \neg\Diamond\alpha$.

11. $\varphi = \alpha U \beta$: Sea $k \in \mathbb{N}$ el número de fórmulas que contiene la rama abierta a partir de $\sigma(t) :: \alpha U \beta$. Demostraremos por inducción sobre k que hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \beta \in \mathcal{F}$ y para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t$, $\sigma(t'') :: \alpha \in \mathcal{F}$.

    Si $k = 1$, entonces la primera parte de la regla 11 da lugar a una rama abierta que contiene $\sigma(t) :: \beta$ (y α es un literal); pues de lo contrario $k > 1$, contra la hipótesis de partida. Así pues, hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \beta \in \mathcal{F}$ y, por vacuidad, para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t$, $\sigma(t'') :: \alpha \in \mathcal{F}$.

    Aceptemos ahora como hipótesis de la inducción que la afirmación vale para $k = n$ y demostremos que vale también para $k = n+1$. Si $\sigma(t) :: \alpha U \beta \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es abierta, entonces, o bien la primera parte de la regla 11 da lugar a una rama abierta que contiene $\sigma(t) :: \beta$, y entonces estamos en el caso anterior; o bien la segunda parte de la regla da lugar a $\sigma(t) :: \alpha$ y $\sigma(t) :: \bigcirc(\alpha U \beta)$. De la primera de estas fórmulas etiquetadas se sigue que $\sigma(t) :: \alpha \in \mathcal{F}$; la segunda da lugar a $\sigma(t+1) :: (\alpha U \beta)$, de donde por hipótesis de la inducción, se sigue que hay un $t' \geq t+1$ tal que de $\sigma(t') :: \beta \in \mathcal{F}$ y para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t+1$, $\sigma(t'') :: \alpha \in \mathcal{F}$. Así pues, hay un $t' \geq t$ tal que de $\sigma(t') :: \beta \in \mathcal{F}$ y para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t$, $\sigma(t'') :: \alpha \in \mathcal{F}$.

    Demostrado esto, de la hipótesis de la inducción principal se sigue que $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \beta$ y para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t$, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t'') \vDash \alpha$. Así pues, por evaluación de U, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \alpha U \beta$.

12. $\varphi = \neg(\alpha U \beta)$: Es fácil observar que la aplicación de la regla sólo se interrumpe cuando la primera parte da lugar a una rama abierta; pues de lo contrario, la segunda parte de la regla nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \bigcirc\neg(\alpha U \beta)$, que a

su vez produce $\sigma(t+1) :: \neg(\alpha U \beta)$. Igualmente se ve que tanto si aplicamos la primera parte de la regla como si aplicamos la segunda, habremos escrito $\sigma(t) :: \neg\beta$. Así pues, o bien la aplicación de la regla de no se interrumpe nunca, o bien se interrumpe al encontrar una rama abierta que contiene $\sigma(t') :: \neg\alpha$ y $\sigma(t') :: \neg\beta$ (para $t' \geq t$).

En el primer caso, para todo $t' \geq t$, $\sigma(t') :: \neg\beta \in \mathcal{F}$; y por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \neg\beta$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \beta$. Pero si para todo $t' \geq t$ $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \beta$, entonces $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \nvDash \alpha U \beta$; luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \neg(\alpha U \beta)$.

En el segundo caso, hay un $t' \geq t$, tal que $\sigma(t') :: \neg\alpha \in \mathcal{F}$ y $\sigma(t') :: \neg\beta \in \mathcal{F}$, y para todo t'' tal que $t' > t'' \geq t$, $\sigma(t'') :: \neg\beta \in \mathcal{F}$. Por hipótesis de la inducción, $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \neg\alpha$ y $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \vDash \neg\beta$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \alpha$ y $(\mathcal{I}, r_\sigma, t') \nvDash \beta$; y además $(\mathcal{I}, r_\sigma, t'') \vDash \neg\beta$, luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t'') \nvDash \beta$. Así pues, no se cumple que hay algún $t' \geq t$ tal que $(\mathcal{I}, r, t') \vDash \beta$ y para todo t'' tal que $t' \geq t'' \geq t$, $(\mathcal{I}, r, t'') \vDash \alpha$; luego $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \nvDash \alpha U \beta$, y por tanto $(\mathcal{I}, r_\sigma, t) \vDash \neg(\alpha U \beta)$.

Con esto queda demostrado el lema 6.9.3. La demostración del teorema 6.9.1 se sigue trivialmente de este último: la tabla semántica de φ contiene sin duda la fórmula etiquetada $1(0) :: \varphi$, y por el lema 6.9.3, $(\mathcal{I}, r_1, 0) \vDash \varphi$. QED.

En esta demostración no se ha hecho referencia alguna a las propiedades de los sistemas. Si nos fijamos en la forma en que establecimos las relaciones de accesibilidad, sin embargo, podemos comprobar que dadas dos etiquetas cualesquiera $\sigma(t), \sigma'(t') \in \Sigma$, establecíamos que t fuera igual a t' como condición para estipular que $r_\sigma(t) \sim_{a_i} r_{\sigma'}(t')$; lo que garantiza que el sistema interpretado que hemos construido es sincrónico. Para demostrar que el sistema obtenido si añadimos la regla de herencia HKT(MP) tiene la propiedad de memoria perfecta, no tenemos más que demostrar que la tabla semántica de la negación del axioma KT2, contando con esta última regla, es cerrada. Lo mismo ocurre con la regla HKT(NA) y la propiedad de no aprendizaje, sólo que esta vez tendremos que demostrar que es cerrada la tabla semántica de la negación de KT5.

6.10. Completud

Teorema 6.10.1. *Para toda fórmula $\varphi \in KL_m$, si hay un sistema interpretado $\mathcal{I}$ y un punto $(r, n) \in \mathcal{R}$ de la estructura $\mathcal{I}$ tal que $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \varphi$, entonces la tabla* *semántica de φ tiene al menos una rama abierta.*

Demostración: Se realiza por inducción sobre el grado lógico de φ. Como en el caso anterior, presentaremos sólo los casos de los operadores K y $\widehat{K}$, así como de los operadores temporales y sus negaciones.

La base es trivial: si φ es atómica, su tabla semántica consta de una sola fórmula etiquetada, y por tanto es abierta.

Partamos ahora como hipótesis de la inducción de que la afirmación es válida para $|\varphi| = k$ y demostremos que también vale para $|\varphi| = k + 1$.

3. $\varphi = K_{a_i}\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: K_{a_i}\alpha$, la regla 3 nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \alpha$ al término de la rama, y la combinación de la regla HKS5 con la regla 3 garantiza que para toda etiqueta $\sigma.a_im(t)$ que aparezca en la rama, $\sigma.a_im(t) :: \alpha$ aparece en la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \vDash K_{a_i}\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \alpha$ para todo punto $(r', n') \in \mathcal{R}$ del sistema $\mathcal{I}$ tal que $r\,(n) \sim_{a_i} r'\,(n')$; y, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto, la tabla semántica de $K_{a_i}\alpha$ es abierta.

4. $\varphi = \widehat{K}_{a_i}\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \widehat{K}_{a_i}\alpha$, la regla 4 nos obliga a escribir $\sigma.a_im(t) :: \alpha$ al término de la rama (donde m es el primer número natural tal que la etiqueta $\sigma.am(t)$ es nueva en la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \widehat{K}_{a_i}\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r', n') \vDash \alpha$ para algún punto $(r', n') \in \mathcal{R}$ del sistema $\mathcal{I}$ tal que $r\,(n) \sim_{a_i} r'\,(n')$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto, la tabla semántica de $\widehat{K}_{a_i}\alpha$ es abierta.

5. $\varphi = \bigcirc\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \bigcirc\alpha$, la regla 5 nos obliga a escribir $\sigma(t+1) :: \alpha$ al término de la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \bigcirc\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r, n+1) \vDash \alpha$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto, la tabla semántica de $\bigcirc\alpha$ es abierta.

6. $\varphi = \neg \bigcirc \alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \neg \bigcirc \alpha$, la regla 6 nos obliga a escribir $\sigma(t+1) :: \neg\alpha$ al término de la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \neg\bigcirc\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r, n) \nvDash \bigcirc\alpha$, y por tanto $(\mathcal{I}, r, n+1) \nvDash \alpha$, por lo que $(\mathcal{I}, r, n+1) \vDash \neg\alpha$; y por hipótesis

de la inducción, la tabla semántica de $\neg\alpha$ es abierta. Por tanto, la tabla semántica de $\neg \bigcirc \alpha$ es abierta.

7. $\varphi = \Box\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \Box\alpha$, la regla 7 nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \alpha$ al término de la rama; y la regla HT garantiza que para toda etiqueta $\sigma(t')$ (para $t' > t$) que aparezca en la rama, $\sigma(t') :: \alpha$ aparece en la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \models \Box\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r, n') \models \alpha$ para todo $n' \geq n$; y por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto, la tabla semántica de $\Box\alpha$ es abierta.

8. $\varphi = \neg\Box\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \neg\Box\alpha$, la regla 8 nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \Diamond\neg\alpha$ al término de la rama. Ahora bien, si $(\mathcal{I}, r, n) \models \neg\Box\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r, n) \not\models \Box\alpha$, luego hay un $r\,(n')$ (para $n' \geq n$) tal que $(\mathcal{I}, r, n') \not\models \alpha$, y por tanto $(\mathcal{I}, r, n') \models \neg\alpha$, luego $(\mathcal{I}, r, n) \models \Diamond\neg\alpha$. Pero si $(\mathcal{I}, r, n) \models \Diamond\neg\alpha$, entonces la tabla semántica de $\sigma(t) :: \Diamond\neg\alpha$ es abierta (la demostración es idéntica al punto 9, por brevedad no la repetimos), con lo que la tabla semántica de $\neg\Box\alpha$ es también abierta.

9. $\varphi = \Diamond\alpha$: Si $(\mathcal{I}, r, n) \models \Diamond\alpha$, entonces $(\mathcal{I}, r, n') \models \alpha$ para algún $n' = n + k$ (con $k \geq 0$). Demostraremos por inducción sobre k que la tabla semántica de $\Diamond\alpha$ es abierta.

   Si $k = 0$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \Diamond\alpha$, la condición de parada de la regla 9 nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \alpha$ al término de la rama. Ahora bien, si $k = 0$ entonces $(\mathcal{I}, r, n) \models \alpha$ y, por la hipótesis de la inducción principal, la tabla semántica de α es abierta. Por tanto la tabla semántica de $\Diamond\alpha$ es también abierta.

   Supongamos ahora como hipótesis de la inducción que la afirmación vale para $k = j$ y demostremos que vale para $k = j + 1$.

   Si $(\mathcal{I}, r, n) \models \Diamond\alpha$ y $k = j + 1$, entonces para $n'' = n + 1$, $(\mathcal{I}, r, n'') \models \Diamond\alpha$ y $n' = n'' + j$. Así pues, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\Diamond\alpha$ es abierta.

10. $\varphi = \neg\Diamond\alpha$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \neg\Diamond\alpha$, la regla 10 nos obliga a escribir $\sigma\,(t) :: \Box\neg\alpha$ al término de la rama. la demostración es como la del punto 7, cambiando α por $\neg\alpha$.

11. $\varphi = \alpha U\beta$: Si $(\mathcal{I}, r, n) \models \alpha U\beta$, entonces $(\mathcal{I}, r, n') \models \beta$ para algún $n' = n + k$ (con $k \geq 0$); y para todo n'' tal que $n' > n'' \geq n$, $(\mathcal{I}, r, n'') \models \alpha$. Demostraremos por inducción sobre k que la tabla semántica de $\alpha U\beta$ es abierta.

    Para $k = 0$: Si en una rama de una tabla semántica aparece la fórmula etiquetada $\sigma(t) :: \alpha U\beta$, la condición de parada de la regla 11 nos obliga a escribir $\sigma(t) :: \beta$ al término de la rama. Ahora bien, si $k = 0$ entonces $(\mathcal{I}, r, n) \models \beta$ y, por la hipótesis de la inducción principal, la tabla semántica de β es abierta. Por tanto la tabla semántica de $\alpha U\beta$ es también abierta.

    Supongamos ahora como hipótesis de la inducción que la afirmación vale para $k = j$ y demostremos que vale para $k = j + 1$.

    Si $(\mathcal{I}, r, n) \models \alpha U\beta$ y $k = j + 1$, entonces para $n^* = n + 1$, $(\mathcal{I}, r, n^*) \models \alpha U\beta$ y $n' = n^* + j$. Así pues, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\alpha U\beta$ es abierta.

11. $\varphi = \neg(\alpha U\beta)$: Si $(\mathcal{I}, r, n) \models \neg(\alpha U\beta)$, entonces $(\mathcal{I}, r, n) \not\models \alpha U\beta$. Hay dos posibilidades:

    a) Para todo $n' \geq n$, $(\mathcal{I}, r, n') \not\models \beta$, independientemente de lo que ocurra con α. Podemos suponer que para todo n'' tal que que $n' \geq n'' \geq n$, $(\mathcal{I}, r, n'') \models \alpha$; ya que, de lo contrario, estaríamos en el caso b).

    En este caso,$(\mathcal{I}, r, n') \models \neg\beta$ y $(\mathcal{I}, r, n') \models \alpha$. Por tanto, por hipótesis de la inducción, tanto la tabla semántica de $\neg\beta$ como la de α son abiertas. Ahora bien, la tabla semántica de $(\alpha U\beta)$ sólo puede cerrarse si se cierra la subrama abierta por la condición recursiva de la regla 11 (ya que el cierre de la condición de parada no hace cerrada a la rama), y esto sólo puede ocurrir si la tabla semántica de $\neg\beta$ es cerrada, si la tabla semántica de α es cerrada, o si en la tabla aparecen con la misma etiqueta una fórmula atómica y su negación, procedentes una de α y otra de $\neg\beta$. Los dos primeros casos ya hemos visto que no ocurren, y el tercero es también imposible, ya que, por corrección, un determinado punto del sistema interpretado generado por la tabla debería satisfacer tanto a esa fórmula atómica como a su negación, lo cual es imposible. así pues, la tabla semántica de $\neg(\alpha U\beta)$ es abierta.

    b) hay un $n' = n + k$ (con $k \geq 0$) tal que $(\mathcal{I}, r, n') \not\models \beta$, $(\mathcal{I}, r, n') \not\models \alpha$ y para todo n'' tal que que $n' > n'' \geq n$, que $(\mathcal{I}, r, n'') \not\models \beta$: Demostraremos por inducción sobre k que la tabla semántica de $\neg(\alpha U\beta)$ es abierta:

$k = 0$: En este caso, $(\mathcal{I}, r, n) \nvDash \beta$ y $(\mathcal{I}, r, n) \nvDash \alpha$; y por tanto, $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \neg\beta$ y $(\mathcal{I}, r, n) \vDash \neg\alpha$; luego, por la hipótesis de la inducción principal, la tabla semántica de $\neg\alpha$ es abierta y la de $\neg\beta$ también lo es. Ahora bien, si en una rama de la tabla aparece la fórmula etiquetada $\sigma :: \neg(\alpha U \beta)$, la condición de parada de la regla 11 nos obliga a abrir una subrama y escribir sucesivamente $\sigma :: \neg\alpha$ y $\sigma :: \neg\beta$. Pero esta subrama es abierta, por lo que la tabla de $\sigma :: \neg(\alpha U \beta)$ también lo es.

Supongamos ahora que la afirmación vale para $k = j$, y demostremos que también vale para $k = j + 1$.

Si $n' = n + j + 1$, entonces para $n'' = n + 1$, $(\mathcal{I}, r, n'') \vDash \neg(\alpha U \beta)$ y $n' = n'' + j$. Luego, por hipótesis de la inducción, la tabla semántica de $\neg(\alpha U \beta)$es abierta. QED.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo que nos propusimos al iniciar este trabajo era, como indica su título y como ya se explicó en la introducción, presentar un método de tablas semánticas para distintos sistemas de lógica epistémica; incluyendo bajo este concepto también la noción de creencia. Como también se indicó entonces, necesariamente la investigación ha tenido que tomar en consideración una gama mucho más amplia de temas, aunque nunca hasta el punto de desviarnos de nuestro objetivo original.

La base de todo este trabajo es la presentada en el capítulo 2, donde se estudian los sistemas T_m, $S4_m$ y $S5_m$ y se propone un método de tablas semánticas para cada uno de ellos. Se trata de un método de tablas etiquetadas donde cada mundo posible queda representado por una etiqueta, que también incluye al agente respecto al cual se establece la relación. Tal vez lo más interesante de este cálculo, como de los que se establecen en los capítulos siguientes, es que consta de un conjunto de reglas común para los tres sistemas. Las diferencias entre ellos se establecen mediante lo que denominamos *reglas de herencia*, cuya misión es garantizar que la relación de accesibilidad tenga en cada caso las propiedades requeridas.

Especialmente problemático resultaba el hecho de que el método de tablas, tomado sin ninguna restricción, hubiera producido tablas infinitas incluso en casos muy simples, en que la fórmula o conjunto de fórmulas que se toman como asunción de la tabla tienen claramente un modelo que consta de un número finito de mundos posibles. Afortunadamente, tal problema se puede tratar añadiendo una restricción a la regla del operador $\widehat{K}$. Para ello introdujimos el concepto de *ascendiente epistémico* de una etiqueta dada (respecto a un cierto agente).

El capítulo 3 está dedicado a los sistemas en que el operador modal ha de ser interpretado con e significado "a cree que φ"; esto es, a los tres sistemas básicos de lógica doxástica. Tales sistemas son KD, $KD4$ y $KD45$; y se caracterizan, como es bien conocido, porque la relación de accesibilidad no es reflexiva, sino sólo serial. Para construir el método de tablas correspondiente nos bastó con sustituir la regla correspondiente al operador K por una versión más débil, que garantizase la serialidad.

En este capítulo también hemos estudiado los sistemas que combinan operadores epistémicos y doxásticos, y hemos propuesto los correspondientes métodos de tablas semánticas. Para ello, básicamente, era necesario distinguir en la etiquetas entre relaciones de accesibilidad epistémicas y doxásticas; además de garantizar que entre ellas se de la adecuada relación (de inclusión, en el caso que consideramos más natural). Para ello hemos añadido añadir reglas de herencia que garantizan que toda alternativa doxástica es también una alternativa doxástica.

La llamada *paradoja del creyente perfecto* muestra, sin embargo, que la combinación de operadores epistémicos y doxásticos no es un asunto tan simple como a primera vista pudiera parecer. La conclusión más natural, y por la que tendemos a inclinarnos, es que el sistema $S5_m$ supone una caracterización demasiado fuerte del concepto de conocimiento; o lo que igual, que el axioma de introspección negativa, del cual depende esencialmente la derivación de esta paradoja, puede ser considerado válido cuando formalizamos ciertas situaciones especiales, como juegos de cartas, pero no puede aceptarse sin más cuando tratamos del conocimiento en general. Ésta, decimos, nos parece la conclusión más aceptable; no obstante lo cual, hemos visto también que es posible eliminar este resultado contraintuitivo por otros procedimientos, aunque no siempre resulten tan naturales.

El capítulo 4, con diferencia el más largo de este trabajo, está dedicado a la lógica epistémica de primer orden, un tema a nuestro parecer demasiado olvidado en la literatura. Las primeras partes de este capítulo se han dedicado a estudiar cuestiones generales, como la distinción *de dicto*-*de re* o el papel de la fórmula Barcan y su conversa, y se adoptan algunas decisiones metodológicas; fundamentalmente, la de considerar las constantes individuales como designadores rígidos. Algunas cuestiones filosóficas que están en la base de estas decisiones han sido analizadas someramente, sin ánimo de presentar una solución definitiva. Particularmente, no adoptamos un compromiso sobre el funcionamiento de los nombres propios en el lenguaje ordinario; nos limitamos a adoptar el tratamiento antes mencionado de las constantes individuales como una decisión metodológica. El problema de la identidad transmundana ni siquiera se plantea. La decisión metodológica que acabamos de mencionar equivale a dar por supuesto que efectivamente podemos identificar a los individuos a lo largo de los distintos mundos posibles de un modelo dado, si es que existen en esos mundos; y por tanto, a tratar el problema como resuelto.

Dos opciones se plantean cuando extendemos la lógica epistémica hasta el nivel de la lógica de primer orden. La primera de ellas, considerar que los mismos individuos existen en todos los mundos posibles, si bien pueden tener características diferentes en cada uno de ellos; la segunda, aceptar también la posibilidad de que los individuos del dominio existan en algunos mundos posibles, pero no en otros. En el primer caso hablamos de semántica de dominio constante; en el segundo, de semánticas de dominio variable. En este último caso, además, debemos considerar los casos especiales en que los dominios son monótonos (o crecientes) y los casos en que los dominios son antimonótonos (o decrecientes). Se demuestra que la fórmula Barcan es válida en el segundo conjunto de modelos y su conversa en el primero.

Una vez más, no parece haber razones definitivas a favor o en contra de cada una de estas opciones; parecería que más que plantearse cuál de estos sistemas es el adecuado como representación del conocimiento en general deberíamos plantearnos cuál es el sistema adecuado para formalizar cada situación concreta. Como decíamos a cuenta del axioma A5, la semántica de dominio constante puede ser adecuada como formalización del conocimiento en determinados casos; pero si lo que pretendemos es una caracterización general del conocimiento humano, las semánticas de dominios variables parecen más adecuadas.

Los sistemas lógicos correspondientes a esta semántica de dominio constante, mientras mantengamos la interpretación rígida de las constantes individuales y no introduzcamos identidad y términos de función, resultan ser una extensión bastante simple de la lógica de primer orden; por lo que el método de tablas semánticas no ofrece la menor dificultad. Para tratar con la identidad y los términos de función, en cambio, tuvimos que introducir restricciones que permitieran tratar con el fallo de la sustituibilidad de la identidad, característico de estos contextos.

Más complicados resultan los sistemas correspondientes a la semántica de dominios variables. Los sistemas que presentamos para esta semántica constituyen un tipo de *lógica libre positiva*, que se caracteriza entre otras cosas porque de una fórmula de la forma $\varphi(c/x)$ no podemos inferir sin más $\exists x\varphi(x)$. La regla que deberíamos usar en su lugar sería:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi(c/x)\\ \mathcal{E}(c)\end{array}}{\exists x\varphi(x)};$$

lo que sin duda constituye una explicación adecuada al fallo de la regla de generalización existencial que es también característico de los contextos opacos. Para adaptar el método de tablas a las características de esta semántica utilizamos versiones modificadas de las reglas de los cuantificadores en las que se contempla la posibilidad de que un cierto elemento del dominio no exista en todos los mundos posibles, lo cual nos permite presentar un método correcto y completo. También extendemos el método a los sistemas correspondientes a la semántica de dominios monótonos y antimonótonos por el simple procedimiento de añadir reglas de herencia que garanticen estas propiedades.

En el capítulo 5 analizamos la lógica epistémica proposicional ampliada con los operadores de conocimiento de grupos; tema de enorme actualidad y de gran interés para varias clases de aplicaciones. A los operadores E, C y D, característicos en la literatura sobre el tema, añadimos sus duales; que si bien no resultan muy naturales en el lenguaje ordinario, son necesarios para trabajar con tablas semánticas.

Esto último, presentar un método de tablas, no resulta sin embargo tan simple como en casos anteriores, debido al carácter infinitario del operador C y, sobre todo, de su dual. Para poder tratar con estos operadores, tuvimos que introducir métodos especiales. En concreto, el método que aquí presentamos es una variación del que propusieron independientemente Boolos y Díaz Estévez para la lógica de primer orden; y se caracteriza por la regla:

$$\frac{\sigma :: \widehat{C}\varphi}{\sigma :: \widehat{E}\varphi \mid \sigma :: \widehat{E}\widehat{E}\varphi \mid \sigma :: \widehat{E}\widehat{E}\widehat{E}\varphi \mid \ldots}$$

Aunque el número de ramas exigido por la regla es infinito, este proceso se interrumpe el el momento en que encontremos una rama abierta; de modo que si la fórmula o conjunto de fórmulas que funcionan como asunción de la tabla tiene un modelo que consta de un número finito de mundos posibles, este método nos permite hallarlo en un número finito de pasos; en caso contrario, la tabla se vuelve infinita. De este modo conseguimos presentar un procedimiento que, si bien sólo semidecidible, resulta ser correcto y completo.

Por último, hemos dedicado el capítulo 5 a analizar algunos de los sistemas que combinan operadores epistémicos y temporales. La razón de esto no es el mero deseo de experimentar con combinaciones de lógicas modales, claro está, sino la intuición de que una lógica epistémico-temporal constituye la forma más natural —no la única— de representar el cambio del conocimiento.

Las diferentes propiedades que pueden tener los sistemas interpretados (*memoria perfecta*, *no aprendizaje*, *sincronía* y *estado inicial único*), unidas a las posibilidades de elección del lenguaje empleado, dan lugar a un elevado número de sistemas (noventa y seis, según Halpern, J.Y.; van der Meiden, R. y Vardi, M.Y. 1999) imposible de tratar en su totalidad . Nosotros nos hemos limitado a proponer un método de tablas semánticas para sistemas sincrónicos sin operadores de conocimiento de grupos.

Proponer un método de tablas semánticas topa, una vez más, con el carácter infinitario de los operadores temporales. Para solucionar las dificultades que estos operadores presentaban, además de utilizar los mismos procedimientos que usamos para las nociones de conocimiento de grupos, hemos utilizado reglas que introducen una característica nueva: la recursividad. Creamos así un procedimiento al que hemos denominado *tablas semánticas recursivas*.

El caso prototípico es el de las fórmulas de la forma $\Diamond\varphi$, cuyo significado intuitivo es *en algún momento (presente o futuro)* φ. La regla para este operador es la siguiente:

$$\frac{\sigma(t) :: \Diamond\varphi}{\sigma(t) :: \varphi \mid \sigma(t) :: \bigcirc\Diamond\varphi}$$

Como en el caso anterior, el procedimiento se interrumpe en el momento en que encontramos una rama abierta, pero continúa infinitamente en el caso de que no haya un sistema interpretado que satisfaga a la fórmula y que conste de un número finito de puntos. Obtenemos de esta forma un procedimiento que de nuevo es sólo semidecidible, pero correcto y completo.

Por supuesto, no hemos tratado todos los problemas; y son muchas las líneas de investigación que quedan abiertas. Por ejemplo, respecto a todos los sistemas analizados, resultaría interesante estudiar la posibilidad de proponer cálculos deductivos naturales[1], u otros procedimientos de decisión diferentes de las tablas

[1]Para la lógica epistémica y doxástica proposicional, esto se hizo en Gómez-Caminero Parejo,

semánticas.

En cuanto a las líneas de investigación que, como decimos, quedan abiertas, podríamos poner algunos ejemplos.

Para empezar con el final de este trabajo, los aspectos dinámicos del conocimiento requieren de una elucidación mayor. No sólo es posible explorar la posibilidad de proponer métodos de tablas semánticas para otros tipos de sistemas (por ejemplo, sistemas no sincrónicos) y para lenguajes más potentes (con operadores de conocimiento de grupos, con tiempo ramificado); sino que, sobre todo, sigue habiendo un amplísimo campo de investigación en otros sistemas lógicos cuyo objeto es también el aspecto dinámico del conocimiento. De entre ellos destacamos la *lógica epistémica dinámica* y la *lógica de anuncios públicos*; las cuales son objeto de atención prioritaria por parte del *Grupo de Lógica, Lenguaje e Información* de la Universidad de Sevilla.

De gran interés resulta, también, el estudio de sistemas que combinen operadores epistémicos con otros tipos de operadores modales; lo que podría resultar de enorme valor para el análisis de una variada gama de problemas. En este terreno, desatacaríamos la importancia de contar con un sistema de lógica epistémico-deóntica, que podría alcanzar una enorme importancia en el estudio de problemas ético-jurídicos.

Por supuesto, queda abierto el inmenso campo de las aplicaciones de los sistemas lógicos aquí estudiados a una gran variedad de problemas y disciplinas. Ya se ha mencionado en varios lugares que la lógica epistémica ha adquirido gran importancia en terrenos como las ciencias de la computación, la inteligencia artificial, la economía o la lingüística. En este sentido, queremos destacar que este trabajo se ha desarrollado en el marco de un proyecto de excelencia titulado *Lógica de Protocolos Incondicionalmente Seguros*.

Bibliografía

Abate, P y Gore, R. (2006): “A cut free tableau calculus for the logic of common knowledge”. http://www.cduce.org/~abate/biblio

Alberucci, L. y Jäger, G. (2005): “About Cut Elimination for Logics of Common Knowledge”. En *Annals of Pure and Applied Logic*, 113, pp. 73-75.

Amerbauer, M. (1996): “Cut-Free Tableau Calculi for Some Prepositional Normal Modal Logics”. *Studia Logica*, vol. 57, nº 2-3, pp.359-371.

Baltag, A. (2002): “A Logic for Suspicious Players: Epistemic Actions and Belief-Updates in Games”. *Bulletin of Economic Research*, Vol. 54, pp. 1-45.

Benthem,J. van (2006): “One is a Lonely Number: on th logic of communication”. En Z. Chatzidakis, P. Koepke & W. Pohlers, eds., 2006, *Logic Colloquium '02*, ASL & A.K. Peters, Wellesley MA, pp. 96 – 129.

Bochenski, I.M. (1961): *A History of Formal Logic,* Notre Dame: University of Notre Dame Press. Edición española de Millán Bravo Lozano: *Historia de la Lógica Formal*. Madrid, Gredos, 1967.

Boh, I. (1993): *Epistemic Logic in the Middle Ages*. Londres, Routledge.

Boolos, G. (1984): “Trees and Finite Satisfactibility”. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol 25, pp. 110-115.

Burgess, J.P. (1984): “Basic Tense logic”. En Gabbay and Guenthner (eds.) *Handbook of PhilosoPhical Logic*, Vol II, Extensions of Classical Logic, pp. 89-133. Synthese library; v.165 Dordrecht ; Boston : Reidel.

Carnap, R. (1946): “Modalities and Quantification”. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 11, Nº 2 , pp.: 33-64.

Carnielli, W. y Pizzi, C. (2009): *Modalities and Multimodalities*. Serie: Logic, Epistemology, and the Unity of Science, Vol. 12, Springer.

Castaneda, H-N (1967): "On the Logic of Self-Knowledge", Noûs, Vol. 1, Nº 1 pp. 9-21.

Chisholm, R. (1963): "The Logic of Knowing". *Journal of Philosophy*, vol. LX, pp. 793-94.

Chisholm, R., (1967): "Identity through Possible Worlds: Some Questions", Noûs, Vol. 1, Nº 1 pp. 1-8.

Davis, E. y Morgenstern, L. (1983): "Epistemic Logic and its Applications: Tutorial Notes". *International Joint Conferences on Artificial Intelligence-93*. http://cs.nyu.edu/faculty/davise/

Díaz Estévez, E (1993): "Árboles semánticos y modelos mínimos". En *Actas del I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Madrid, pp.40-43.

Díez, J. A. y Moulines, C. U. (1997): *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*. Barcelona, Ariel.

Ditmarsch, H. van y Verbrugge, R. (2003a): *Introductory Course Epistemic Logic and Multiagent Systems*. ESSLLI 2003, Vienna August 2003. Lecture 2: Multi-agent epistemic logic.

Ditmarsch, H. van y Verbrugge, R. (2003b): *Introductory Course Epistemic Logic and Multiagent Systems*. ESSLLI 2003, Vienna August 2003. Lecture 5: Chanche of Common Knowledge over Time.

Ditmarsch, H. van y Verbrugge, R. (2003c): *Introductory Course Epistemic Logic and Multiagent Systems*. ESSLLI 2003, Vienna August 2003. Lecture 5: Belief and boundaries of epistemic logic.

Ditmarsch H. van; Hoek W. van der ; Kooi B. (2007) *Dynamic Epistemic Logic* Dordrecht, Netherlands, Springer.

Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. y Vardy, M.Y. (1995): *Reasoning About Knowledge*. Cambridge. The MIT Press.

Ferrari, M. (1997): "Cut-Free Tableau Calculi for Some Intuitionistic Modal Logics". *Studia Logica*, vol. 59, nº 3, pp.: 303-330.

Fitting, M. (1972): "Tableau Methods of Proof for Modal Logics". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XIII, pp.: 237-247.

Finger, M y Gabbay, M. (1992) : "Adding a Temporal Dimension to a logic System". En *Journal of Logic, Language and Information* 1, pp. 203-233. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. (1983): *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, volumen 169 de *Synthese Library*. D. Reidel, Dordrecht, Holand.

Fitting, M. y Mendelsohn, R. L. (1988): *First-Order Modal Logic.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Føllesdal, D. (1967): "Knoledge, Identity and Existence". *Theoria*, vol. XXXIII, pp. 1-27.

Føllesdal, D. (1968): "Quine on Modality". *Synthese*, 19 , pp. 147-157.

Frapolli, M.J. (1991): "Extensionalidad, opacidad y estructura intensional. Un análisis de las falacias en contextos epistémicos". *Revista de Filosofía. 3ª época*, vol. VII (1994). núm. 12, págs. 355-367. Editorial Complutense. Madrid.

Frege, G. (1892): Ueber Sinn und Bedeutung. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100, pp. 25-50. Traducción española de U. Moulines en *Estudios sobre Semántica*, Barcelona, Ariel, 1984.

Freund, M. A. (1995): "Lógica epistémica", en Carlos E. Alchurrón (ed.): *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía Vol. 7: Lógica*, Editorial Trotta / Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

Gabbay, D.; Pnueli, A.; Shelah, S. y Stavi, J. (1980): "On the Temporal Analysis of Fairness. En *Poc. 7th ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, pp. 163-173.

Galton, A. (2008): "Temporal Logic". En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/logic-temporal/>.

Gärdenfors, P. (1988): *Knowledge in Flux. Modeling the Dynamics of Epistemic States* . MA, MIT Press, Bradford Books.

Gardies J-L. (1975): *La logique du temps,* Paris , Presses Universitaires de France, 1975. Traducción española de Javier Ordóñez: *Lógica del tiempo*, Madrid, Paraninfo, 1979.

Gochet, P y Gribomont, P. (2006): "Epistemic Logic". En Gabbay, D. M. and Woods, J (Editors): *Handbook of the History of Logic.* Volume 7, Elsevier B.V., pp. 99-195.

Gómez-Caminero Parejo, E.F. (2003): *Sobre la Lógica del Conocimiento y la Creencia. Nivel Proposicional.* Sevilla, Kronos.

Gómez-Caminero Parejo, E.F. (2007): "Tablas semánticas para conocimiento de grupos". en Nepomuceno, A; Salguero, F.J. y Soler, F. (eds): *Lógica, Filosofía del Lenguaje y de la Lógica.* Sevilla, Mergablum, pp. 177-188.

Goré, R.(1999): "Tableau Methods for Modal and Temporal Logics". En D'Agostino, M.; Gabbay, D.M.; Hähnle, R. y Possega, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Halpern, J.Y. y Vardi, M.Y. (1989): "The complexity of Reasoning about Knowledge and Time. I: Lower Boundns. En *Journal of Computer and Systems Science*, 38, pp. 195-237.

Halpern, J. Y. y Moses, Y. (1990): "Knowledge and common knowledge in a distributed environment". En *Journal of the ACM*, 37:3, pp. 549-587.

Halpern, J.Y. y Moses, Y.A (1992): "Guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief". En *Artificial Intelligence* 54, pp. 319-379.

Halpern, J.Y. (1995): "Reasoning about knowledge: a survey". En *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 4, D. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, eds., Oxford University Press, pp. 1-34.

Halpern, J.Y. (1997): "A theory of knowledge and ignorance for many agents". En *Journal of Logic and Computation*, 7:1, pp. 79-108.

Halpern, J. Y. (1998): “A logical approach to reasoning about uncertainty: a tutorial”. En *Discourse, Interaction, and Communication.* Arrazola, X. Korta, K. y . Pelletier, F. J. (eds)., Kluwer, 1998, pp. 141-155.

Halpern, J.Y.; van der Meiden, R. y Vardi, M.Y. (1999): “Complete axiomatizations for reasoning about Knowledge and Time.”. En SIAM Journal on Computing 33:2, 2004, pp. 674-703.

Hendricks, V. y Symons, J. (2009): "Epistemic Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/logic-epistemic/>.

Henkin, L. (1949): “The Completeness of the First-order Functional Calculus”. En *The Journal of symbolic Logic*, vol. 14, pp.159-166.

Herrera González, J.R. (2002): “Lógica Epistémica y Acción Colectiva”. *Contextos*, XIX- XX/37-40, pp. 209-255.

Hintikka, J. (1957): “Quantifiers in Deontic Logic”. Societas Scientiarum Fennica, Comentationes Humanarum Literarum, 23.

Hintikka, J. (1957): “Modality as Referential Multiplicity”. *Eripainos Ajatus*, vol. XX, pp.:49-64.

Hintikka, J. (1962): *Knowledge and Belief.* Cornell, Cornell University Press. Traducción española: Saber y Creer. Una Introducción a la Lógica de las Dos Nociones Tecnos. Madrid 1979. Traducción y prólogo de J. Acero.

Hintikka, J. (1967): “Individuals, Possible Worlds and Epistemic Logic”. *Noûs*, 1 pp. 33-62.

Hintikka, J. (1969): “Epistemic Logic and the Methods of Filosofical Analysis”. En *Models for Modalities.* D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

Hintikka, J. (1973): *Logic, Language-Games and Information.* The Clarendon Press, Oxford. Traducción española: Lógica Juegos de Lenguaje e Información. Tecnos, Madrid, 1976.

Hintikka, J. (1975): *Knowledge and the Known: Historical Perspectives in Epistemology.* D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

Hoek, W. van der y Verbrugge, L.C. (2002): ”Epistemic Logic: a Survey”. En Mazalov, V y Petrohan, L: *Game Theory and Applications,* vol 8., New York, Nova Science Publishers, pp 53-94.

Hoek, W. van der, (1996): “Systems for Knowledge and Belief”. En *Journal of Logic and Computation*, 3; pp.: 173-195.

Hocutt, M. O. (1972): “Is Epistemic Logic Posible?”. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XIII, Num. 4, octubre 1972, pp.: 433-453.

Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1968): *An Introduction to Modal Logic*. London, Methuen and Co Lt. Traducción española de Esperanza Guisán Seijas (1973): *Introducción a la Lógica Modal.* Madrid, Tecnos.

Jamroga, W.J. (2003): “Some Remarks on Alternating Temporal Epistemic Logic”. En: *Proceedings of Formal Approaches to Multi-Agent Systems* (FAMAS 2003), April 12, 2003, Warsaw, Poland. pp. 133-139.

Jansana, R. (1990): *Una Introducción a la Lógica Modal.* Tecnos, Madrid.

Kaneko, M. et al. (2002): “A Map of Common Knowledge Logics”. *Studia Logica* 71, pp.57-86.

Knuuttila, S. (1993): *Modal Logic in the Middle Ages.* London, Routledge.

Kraus, S. y Lehmann, D. (1988): “Knowledge, belief and time”. En *Theoretical Computer Science*, 58, pp. 155-174.

Kneale, W. y Kneale, M. (1962): *The Development of Logic*, Clarendon Press: Oxford. Traducción española de Javier Muguerza: *El desarrollo de la Lógica.* Madrid, Tecnos, 1972.

Kripke, S.A. (1959): "A Completeness Theorem in Modal Logic". En *Journal of Symbolic Logic* 24(1) pp. 1–14.

Kripke, S. (1962): “The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory”. *Zeitschrift für Mathematische Logic und Grundlagen der Mathemathic*, 8, pp. 113-116.

Kripke, S. (1963): “Semantical Analysis of Modal Logic”. En *Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Matematik*, 9: 67-96.

Kripke, S.A. (1986): *Naming and Necessity*. Basil Blackwell, Oxford. Traducción española de M. Valdés: *El Nombrar y la Necesidad*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Kutschera, F. von. (1976): *Einführung in die intensional Semantik*. Berlin; W. de Gruyter.

Lemmon, E. J. (1977): *An Introduction to Modal Logic*, Blackwell, Oxford.

Lenzen, W. (1978): "Recent Work in Epistemic Logic". En *Acta Philosophica Fennica*, 30; pp.: 1-219.

Lenzen, W. (1980): *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit*. Viena, Springer Verlag.

Lenzen, W. (2001): "Free Epistemic Logic". En Morscher, E. y Hieke, A. (eds): *New Essays in Free Logic*, pp. 117-124, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Lenzen, W. (2004): "Epistemic Logic". En Niniluoto, I.; Sintonen, M. y Woleski, J.: *Handbook of Epistemology*, Dordrecht, Kluwer, pp. 963-983.

Lewis, D. K. (1968): "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic". *The Journal of Philosophy*, Vol. 65, Nº 5, pp. 113-126.

Lewis, D. K. (1969): *Convention*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

McCarthy, J., Sato, M., Hayashi, T., y Igarashi, S. (1978): *On the Model Theory of Knowledge*. Technical Report. UMI Order Number: CS-TR-78-657., Stanford University.

Makinson, D. (1966): "On some Completness Theorems in Modal Logic". En Zeit. Math.. Logik. Grund. 12, 379-384.

Massachi, F. (1994): "Strongly analytic tableaux for normal modal logics". En Bundy, A. (ed.) *Proc. CADE-12, LNAI 814*, pp. 723-737. Springer.

Meyden, R. van der (1994): "Axioms for Knowledge and Time in Distribuited Systems with Perfect Recall". En Proc. 9th IEEE Symp, on on Logic in Computer Science, pp. 256-268.

Meyer. J.J. y van der Hoek, W. (1995): *Epistemic Logic for AI and Computer Sciences.* Cambridge, Cambridge University Press.

Moses, Y. O.; Dolev, D y Halpern, J.Y. (1986): "Cheating husbands and other stories: a case study in knowledge, action, and communication". En *Journal of Computer and Systems Science* 32:2, pp. 230-250.

Nepomuceno Fernández, A. (1999): "Tablas Semánticas y metalógica (el caso de la lógica de segundo orden)". En *Critica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol XXXI, No 93, pp. 21-47.

Nepomuceno Fernández, A. (2008): *Modied Tableaux at Work.* Tecnical report, Lille.

Nepomuceno Fernández, A. (2009): "Tableaux for n-logical consequence". En Bézieu, J.Y. y Costa-Leite, A. (eds): *Dimensions of Logical Concepts.* Campinas. Centro de Lógica, Epistemología e História da Ciência, coleçao LLE5.

Priest, G (2002): "The Hooded Man". En *Journal of Philosophical Logic* 31, pp. 445-467, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Priest, G (2008): *An Introduction to Non-Classical Logic: from if to is.* Cambridge; New York: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1976): *Historia de la lógica.* Versión castellana de Amador Antón y Esteban Requena. Madrid, Tecnos.

Quine, W. V. (1956): "Quantifiers and Propositional Attitudes". En *The Journal of Philosiphy*, Vol. 53, Nº 5, pp. 177-187.

Quine, W. V. (1961a): *From a Logical Point Of View*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press. Traducción castellana de M. Sacristán: Desde un Punto de Vista Lógico. Ariel, barcelona, 1962.

Quine, W. V. (1961b): "Reference and Modality", en *From a Logical Point of View*, pp. 139–159.

Salguero, F.J. (1991): *Arboles Semánticos para la Lógica Modal con Algunos Resultados sobre Sistemas Normales.* Tesis doctoral. Sevilla 1991.

Schotch, P. K. (2000): “Skepticism and Epistemic Logic”. *Studia Logica* 65, pp. 187-198. Netherlands, Kluwer Academic Plublishers.

Slaght, R.L. (1977): “Modal Tree Constructions”. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII , pp.: 517-256.

Sleig, R.C. (1967): “On Quantifying into Epistemic Contexts”. *Noûs*, Vol 1, Nº 1, pp. 23-31.

Sleigh, R.C. (1968): “On a proposed System of Epistemic Logic”. *Noûs*, Vol. 2, Nº 4, pp., 391-398.

Thomason, R. H. (1984): “Combinations of Tense and modality”. En Gabbay and Guenthner (eds.) *Handbook of PhilosoPhical Logic*, Vol II, Extensions of Classical Logic, pp. 135-165. Synthese library; v.165 Dordrecht ; Boston : Reidel.

Voorbraak, F. (1992): “Generalized Kripke Models for Epistemic Logic”. En Moses, Y (edit): *Proceedings of the 4th Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge, Monterey, CA, March 1992*, San Mateo, Morgan Kauufmann Publishers, pp. 214-228.

von Wright, G.H. (1951): *An Essay in Modal Logic.* Amsterdam, North-Holland.

Wooldridge, M.; Dixon, C. and M. Fisher (1998): “A Tableau-Based Proof Method for Temporal Logics of Knowledge and Belief”. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 8(3):225–258 .