

T
73

R. 5339



**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA
ELECTROCONVECCIÓN
INDUCIDA POR INYECCIÓN
UNIPOLAR
EN PRESENCIA O NO DE GRADIENTE
TÉRMICO**

Alberto Tomás Pérez Izquierdo

Licenciado en Ciencias Físicas
por la Universidad de Sevilla

Memoria presentada en la Universidad de Sevilla
para la obtención del Grado de Doctor
en Ciencias Físicas

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Sevilla, octubre 1989

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 174 número 40 del libro
correspondiente a
Sevilla, 1-8 SET. 1989

El Jefe del Departamento de Tesis,

Altera Laffitte



Agradecimientos

Sin el Profesor Antonio Castellanos este trabajo no hubiera sido posible. Su constante apoyo, sus consejos y un entusiasmo, superior a veces al mío, han hecho que la realización de este trabajo haya sido agradable y fructífera.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a M. Pierre Atten. Una buena parte de este trabajo tiene mucho que ver con él. Muchas de las ideas en él contenido le pertenecen y su generosidad me ha permitido compartirlas y elaborarlas.

A los doctores McCluskey y Malraison les tengo que agradecer lo mucho que he aprendido trabajando con ellos y lo mucho que me he reído al hacerlo. También quiero agradecer a todo el personal del LEMD de Grenoble el trato amable que me han dispensado durante mis estancias en el laboratorio y, en especial, a MM. Bely y Marteau su colaboración técnica.

En fin, gracias a mis compañeros Helio, Paco y Antonio, por su ayuda y el estimulante ambiente de trabajo que crean, y a todo el personal del Departamento de Electrónica y Electromagnetismo.

Gracias, también a Bernardo por echarme una mano con las gráficas.

Como le dijo Lucas al civil: "esto es lo que hay y con esto nos
tenemos que apañar"

Anónimo portuense

A la memoria
de mi padre.

Objetivos y resumen

El propósito de este trabajo es doble. En primer lugar se realiza el estudio teórico de la estabilidad lineal y no lineal y la convección de amplitud finita de una capa de líquido dieléctrico sometida a inyección unipolar de iones. En segundo lugar se realiza el estudio experimental del aumento de transferencia de calor en líquidos aislantes por medio de la aplicación de un campo eléctrico.

Para el estudio de la estabilidad y de la electroconvección de amplitud finita se han implementado varios algoritmos que reproducen el ciclo de histéresis asociado al carácter subcrítico de la inestabilidad. Se analizan estos algoritmos en detalle haciendo hincapié en sus ventajas e inconvenientes y en su capacidad para reproducir las características esenciales del problema.

Analizamos también la influencia de la difusión molecular de carga en la electroconvección de amplitud finita en el caso de inyección débil. La difusión de carga ha sido despreciada como mecanismo de transporte en casi todos los estudios realizados hasta ahora sobre la inyección unipolar. Nuestro propósito es poner de manifiesto su importancia y determinar en qué condiciones es o no despreciable.

En el apartado experimental se han realizado dos series de experiencias. En la primera de ellas un líquido aislante (aceite de silicona) se confina entre dos placas de cobre plano-paralelas. El dopado del aceite con una sal específica (TIAP) provoca una inyección unipolar de iones cuando uno de los electrodos se conecta a alta tensión. Hemos realizado medidas del flujo de calor que atraviesa la celda y de la diferencia de temperatura entre las placas en función del campo eléctrico aplicado y se han buscado correlaciones significativas entre las cantidades medidas.

En una segunda serie de experiencias la inyección se provoca por el reforzamiento del campo eléctrico en las puntas de láminas de acero situadas en uno de los electrodos. Se han realizado, en este caso, medidas en aceites de diferente viscosidad. Además de medidas de diferencia de temperatura y de flujo de calor se han realizado interferogramas que permiten obtener medidas locales de la temperatura en el interior del líquido.

Finalmente se hace una discusión de las experiencias realizadas en base a estimaciones en orden de magnitud.

Índice

Introducción	i
I Estudio teórico de la electroconvección isoterma	1
1 Planteamiento del problema	2
1.1 Fenómenos de conducción en líquidos	3
1.1.1 Fenómenos de volumen	3
1.1.2 Fenómenos de interfase	6
1.2 Modelo físico	9
1.3 Ecuaciones completas	11
1.3.1 Adimensionalización	12
1.4 Estabilidad lineal	14
1.5 Estabilidad no lineal	18
2 Simulación numérica	31
2.1 Algoritmo SIMPLER	32
2.1.1 Discretizado	33
2.1.2 Ecuaciones de transporte	34
2.1.3 Obtención de la presión	43
2.1.4 Potencial eléctrico	45
2.1.5 Solución del sistema de ecuaciones	47
2.1.6 Algoritmo	47
2.1.7 Comentarios sobre el algoritmo	49
2.1.8 Resultados y discusión	49
2.1.9 Difusión numérica en SIMPLER	53
2.2 Algoritmo FCT	56
2.2.1 Discretización	56

2.2.2	Limitación de flujos	58
2.2.3	Tests sobre el algoritmo FCT	60
2.2.4	Ciclo de histéresis	61
2.3	Método de las características	64
2.3.1	Implementación	66
2.3.2	Resultados	67
3	Difusión	72
3.1	Ecuaciones y condiciones de contorno	74
3.2	Discusión cualitativa	75
3.2.1	Densidad de carga en ausencia de repulsión coulombiana y de difusión	76
3.2.2	Repulsión coulombiana sin difusión	78
3.2.3	Solución con difusión sin repulsión coulombiana	79
3.2.4	Difusión y repulsión	80
3.3	Modelo unidimensional	92
3.4	Resultados numéricos	97
3.4.1	Cálculo de la densidad de carga	98
3.4.2	Ciclo de histéresis y criterio no lineal	101

II Estudio experimental del aumento de transferencia de calor por electroconvección **105**

4	Experiencias en geometría plano-paralela	106
4.1	Introducción	107
4.2	Dispositivo experimental	111
4.3	Característica tensión-corriente isoterma	113
4.4	Medidas en condiciones estacionarias	114
4.5	Análisis del transitorio	118
4.6	Discusión y conclusión	121
5	Experiencias con láminas	125
5.1	Celda de estudio	126
5.2	Sistema de regulación térmica	129
5.2.1	El puente	130
5.2.2	Amplificación	131

5.2.3	El P. I. D.	131
5.2.4	Sistemas de regulación retroalimentados	131
5.2.5	Análisis del sistema de regulación	133
5.3	Métodos de visualización	136
5.3.1	Método de Schlieren	137
5.3.2	Método de sombras	139
5.4	Interferometría	139
5.5	Características tensión-corriente	143
5.6	Medidas en régimen estacionario	145
5.6.1	Medidas sin tensión	146
5.6.2	Resultados con V50 y V350	147
5.7	Efecto del campo eléctrico sobre la distribución de temperatura	148
5.8	Resultados para V1	154
6	Discusión sobre las experiencias	166
6.1	Geometría plano-plano	167
6.1.1	Inyección fuerte en condiciones isotermas	167
6.1.2	Inyección débil en condiciones isotermas	169
6.1.3	Transferencia de calor	171
6.2	Experiencias con láminas	172
6.2.1	Chorro cargado laminar	173
6.2.2	Chorro cargado turbulento	173
6.2.3	Electroconvección en geometría lámina-plano	174
	Conclusiones	177
A	Ecuación de Landau para la inyección unipolar	179
B	Obtención de la función $\tau(r)$	181
C	Cálculo de la corriente de inyección en las experiencias plano-plano	184
D	Obtención del perfil de temperatura	186

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de la aproximación Electrohidrodinámica (EHD) de la Electrodinámica de Medios Continuos. La EHD es la parte de la electrodinámica que da cuenta de la interacción de los campos electromagnéticos con líquidos de baja conductividad. Para especificar qué entendemos por baja conductividad consideremos las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal caracterizado por una conductividad σ . Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

junto con la ley de conservación de la carga eléctrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

y las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Si el sistema considerado tiene una escala típica d podemos obtener los siguientes tiempos característicos:

- de la primera ecuación y de la ecuación de conservación de la carga :

$$\frac{D}{d} \sim \rho \sim \frac{j}{d} \tau \sim \frac{\sigma E \tau}{d}$$

y, por tanto,

$$\tau \sim \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Este tiempo, τ , es el tiempo en el que el sistema recupera la electroneutralidad abandonado a sí mismo.

- de la segunda ecuación y del primer término del segundo miembro de la última:

$$t_m \sim \mu\sigma d^2$$

que es el tiempo de difusión magnética.

- de la segunda ecuación y el término de corriente de desplazamiento (segundo término del segundo miembro de la última ecuación)

$$t_c \sim dc$$

que es el tiempo de residencia de las ondas electromagnéticas en el sistema.

Para líquidos conductores, como el mercurio, se tiene $\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$. Tomando dimensiones del orden del milímetro resulta ser $\tau \sim 10^{-18} s$, $t_m \sim 10^{-6} s$ y $t_c \sim 10^{-11} s$. La secuencia de tiempos es: $t_m \gg t_c \gg \tau$. Los efectos magnéticos dominan el sistema y se puede despreciar el término de corriente de desplazamiento. Se puede utilizar la aproximación cuasimagnetostática. Este tipo de situaciones entran en el campo de la Magnetohidrodinámica (MHD), disciplina afín a la EHD pero mucho más conocida y estudiada.

Para un líquido poco conductor ($\sigma \sim 10^{-11} \Omega^{-1} m^{-1}$) y para el mismo rango de escalas espaciales se tiene: $\tau \sim 1 s$, $t_m \sim 10^{-24} s$ y $t_c \sim 10^{-11} s$, es decir: $\tau \gg t_c \gg t_m$. De esta forma podemos adoptar la aproximación cuasielectrostática y retener, junto con la ecuación de conservación de la carga, sólo las dos primeras ecuaciones de Maxwell, despreciando el término de inducción magnética $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Este tipo de situación son las que entran en el campo de la EHD.

Los términos magnéticos pueden ser importantes también en sistemas poco conductores pero de enormes dimensiones (galaxias, polvo cósmico, etcétera). El término d^2 se hace entonces dominante y $t_m \gg t_c \gg \tau$.

La EHD comprende todos aquellos fenómenos en fluidos que son debidos a un acoplamiento mecánico y eléctrico y que tienen lugar bajo débiles corrientes y en presencia de cargas libres o ligadas, ya se presenten éstas en el volumen de los líquidos (fenómenos de volumen) o en las fronteras de los mismos (fenómenos de interfase). La dificultad de definir el estado eléctrico del fluido y el carácter no lineal de las ecuaciones dinámicas del mismo han impedido plantear la EHD sobre bases firmes hasta pasada la Segunda Guerra Mundial (para una revisión histórica véase [1]). Hacia la década de los setenta

se pusieron de manifiesto los mecanismos básicos de generación y transporte de carga aunque muchos aspectos quedan aún por estudiar en el terreno de los procesos físico-químicos que se producen en el seno de los líquidos así como en las interfases líquido-electrodo.

Paralelo a este desarrollo de la EHD se ha producido un gran avance en el conocimiento de la mecánica de fluidos. Estos progresos se deben a nuevas técnicas experimentales (anemometría láser, interferometría, digitalización de imágenes, termografía por cristales líquidos, etcétera), nuevas técnicas de simulación (posibles gracias a los modernos computadores) y nuevas herramientas teóricas (teoría de bifurcaciones, de perturbaciones singulares, métodos de escalas múltiples, caos determinista, etcétera).

Muchas aplicaciones técnicas e industriales han sido el fruto del doble desarrollo de la EHD y la mecánica de fluidos en los últimos años. Entre otras podemos citar: la mejora de precipitadores electrostáticos, nuevos líquidos aislantes menos inflamables, nuevas técnicas de pintura e impresión, generadores electrostáticos de alta potencia, etcétera. Otras disciplinas científicas se han visto también favorecidas por el progreso de la EHD, por ejemplo en Meteorología con el estudio de los procesos de carga y descarga en las nubes y otros fenómenos atmosféricos.

El nuevo impulso que recientemente han recibido los estudios del aumento de la transferencia de calor por medio de campos eléctricos han renovado el interés por conocer los detalles de la electroconvección inducida por inyección unipolar. Concretamente, al realizarse las experiencias con electrodos desnudos, interesa especialmente el caso en el que la inyección es débil. El trabajo que aquí presentamos se enmarca en dicha área y se refiere al estudio de la dinámica de capas líquidas aislantes sometidas a inyección unipolar de iones. Esta dividido en dos partes: la primera se dedica al estudio teórico y numérico de la inestabilidad no lineal y la electroconvección de amplitud finita inducidas por inyección unipolar en geometría plana. La segunda versa sobre el estudio experimental del aumento de transferencia térmica originado por electroconvección. El capítulo 1 está dedicado a una revisión sobre los conocimientos existentes en materia de estabilidad lineal y no lineal del sistema así como a los problemas que plantea y sus características especiales. El capítulo 2 presenta varios algoritmos numéricos y en él se discute su validez y los resultados con ellos obtenidos. El capítulo 3 está dedicado al estudio del papel que la difusión molecular juega en la electroconvección de amplitud finita a bajos niveles de inyección. Los capítulos 4 y 5 presentan los estu-

dios experimentales llevados a cabo, tanto en geometría plano-plano como en geometría lámina-plano, sobre el aumento de la transferencia de calor por electroconvección. Por último, el capítulo 6 está dedicado a la revisión crítica de las experiencias realizadas en el marco del análisis dimensional y de órdenes de magnitud.

Este trabajo forma parte de cuatro proyectos de investigación, tres nacionales: CAICYT núm. 2894-83 (1983-1985), CAICYT núm. PB85-0364 (1986-1988) y DGICYT núm. PB87-0943 (1988-1991); y uno internacional en colaboración con el grupo francés dirigido por el Dr. P. Atten del Laboratoire d'Electrostatique et Matériaux Diélectriques (LEMD) de Grenoble y con el grupo inglés dirigido por el Dr. A. T. Richardson: CEE núm. ST-2J-0151-3-E(CD).

Parte I

Estudio teórico de la electroconvección isoterma

Capítulo 1

Planteamiento del problema

Donde se cuentan mil zarandajas tan impertinentes como necesarias al verdadero entendimiento desta grande historia.

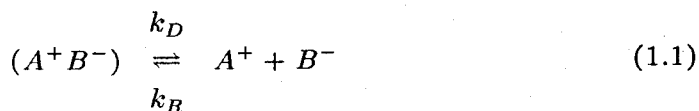
Miguel de Cervantes

1.1 Fenómenos de conducción en líquidos

De todas las propiedades físicas de la materia la conductividad eléctrica es una de las que mayor rango de variación alcanzan en la naturaleza, siendo de $10^{-14} \Omega^{-1} m^{-1}$ en algunos aislantes sólidos y llegando a valores de $10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$ en los metales (excluyendo los superconductores). Así como el origen de la conductividad eléctrica es bien conocido en la mayoría de los materiales sólidos ordinarios y en los gases, hasta hace unos años poco se podía decir de los mecanismos de conducción eléctrica en líquidos dieléctricos. Ello se debe a que el estado líquido de la materia es el más reactivo químicamente en presencia de electricidad y, así, cuando se aplica un campo eléctrico a una muestra líquida aparecen varios fenómenos de difícil comprensión y compleja descripción. Estos fenómenos se pueden clasificar en dos grandes grupos: los que tienen lugar en el interior de la fase líquida (fenómenos de volumen) y los que afectan a la interfase líquido-electrodo [2].

1.1.1 Fenómenos de volumen

Los portadores de carga eléctrica en los líquidos son, en la mayoría de los casos, iones preexistentes en el volumen del líquido o creados en los electrodos. Dichos iones pueden proceder de especies ionóforas, sustancias iónicas en estado sólido, o ionógenas, sustancias con enlaces covalentes. La reacción global de una sustancia neutra que se disocia para producir iones libres viene caracterizada por un proceso en dos etapas. Una primera en la que se forman pares iónicos a partir de moléculas neutras (importante sólo para electrolitos ionógenos) y una segunda en la que los pares iónicos se disocian en iones libres y que puede esquematizarse como



donde k_D y k_R son las constantes de disociación y recombinación, respectivamente. De esta forma se tiene que:

$$\frac{dn_+}{dt} = k_D c - k_R n_+ n_- \quad (1.2)$$

$$\frac{dn_-}{dt} = k_D c - k_R n_+ n_- \quad (1.3)$$

donde c es el número de pares iónicos por unidad de volumen, n_+ el número de iones positivos y n_- el número de iones negativos.

Tres longitudes típicas determinan el equilibrio disociación-recombinación:

- la longitud de Bjerrum: $L_B = e^2/8\pi\epsilon k\Theta$ (e carga elemental, ϵ permitividad eléctrica del líquido, k constante de Boltzmann, π mitad de la razón de la longitud de la circunferencia a su radio y Θ temperatura absoluta) que es la distancia típica a la cual la energía de interacción electrostática entre dos iones es del orden de la energía de agitación térmica.
- la distancia mínima entre los iones: a .
- la longitud de Debye: $L_D = (\epsilon k\Theta/n e^2)^{1/2}$ (n concentración de iones libres) que es la distancia típica a la que se extiende la "atmósfera" iónica de signo opuesto que rodea a cada ion en el caso de que la concentración de electrolito es grande.

Si la longitud de Bjerrum es menor que a los iones se encontrarán mayormente libres y, en el caso de electrolitos ionógenos, el número de iones libres vendrá determinado por la reacción de formación de iones a partir de moléculas neutras. Este es el caso de líquidos polares (con $\epsilon \gg 1$). Para $L_B \gg a$ el equilibrio 1.1 está volcado hacia la izquierda y, tanto para electrolitos ionóforos como ionógenos, es esta reacción la que determina el número de iones libres presentes.

La longitud de Debye caracteriza la intensidad de las interacciones ión-ión. Cuando la concentración del electrolito es pequeña $L_D \rightarrow \infty$ y dicha interacción es despreciable. L_D determina el comportamiento de la solución frente a un campo eléctrico aplicado. Así si $L_D \sim a$ la nube iónica que rodea a cada ion apantalla el campo externo y éste influirá poco sobre el equilibrio de disociación-recombinación. Para $L_D \rightarrow \infty$ la aplicación de un campo eléctrico puede modificar el equilibrio de disociación-recombinación. Al aplicar un campo eléctrico se introduce una nueva longitud característica $\Lambda = k\Theta/e|E|$ con E el campo aplicado. Λ representa la distancia a la cual la energía eléctrica que el campo exterior proporciona para separar el par iónico es comparable a la energía de agitación térmica. Cuando $L_B \gg a$ (líquidos no polares) y $L_D \gg L_B$ (pequeña concentración de electrolito) la constante

de disociación viene modificada por el campo eléctrico externo de acuerdo con la expresión dada por Onsager [4]:

$$k_D(E) = k_D^0 F(L_B/\Lambda) \quad (1.4)$$

donde F es una función creciente de su argumento y se encuentra tabulada. El campo eléctrico refuerza así la disociación, proveyendo de una mayor cantidad de portadores de carga. Cuando $L_B/\Lambda \ll 1$ el campo eléctrico no modifica apenas la constante de disociación, habiéndose de tener en cuenta la fórmula de Onsager en caso contrario. Por otro lado la constante de recombinación no se ve afectada por la presencia de un campo eléctrico externo.

En el límite $L_B/\Lambda \ll 1$ y $L_D \gg L_B \gg a$ el modelo clásico de J. J. Thompson [3] describe bien la conducción en los líquidos debida a procesos de disociación en volumen. En él aparecen dos tiempos característicos: $\tau = \epsilon/\sigma$ que es el tiempo de relajación de las perturbaciones de carga; y el tiempo de vuelo entre electrodos de los iones $\tau_v = d^2/KV$ (d distancia entre electrodos, K movilidad de los iones y V diferencia de potencial aplicada entre los electrodos).

En el modelo de Thompson se distinguen claramente dos límites:

1. Régimen óhmico: el tiempo de vuelo es muy superior al tiempo de relajación de las cargas y el volumen del líquido aparece prácticamente neutro, limitándose las zonas no neutras a distancias pequeñas cercanas al electrodo de espesor $\lambda = KV\epsilon/\sigma$. En este caso el campo eléctrico aplicado modifica poco el equilibrio de disociación-recombinación y se tiene:

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{dn_-}{dt} \simeq k_D c - k_R n_o^2 = 0$$

de donde $n_o = \sqrt{k_D c/k_R}$. La corriente eléctrica se escribe entonces:

$$\mathbf{j} = e(K_+ + K_-) \sqrt{\frac{k_D c}{k_R}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.5)$$

donde K_+ y K_- son las movilidades de los iones positivos y negativos, respectivamente. La corriente es proporcional al campo aplicado y la conductividad viene dada por: $\sigma = e(K_+ + K_-) \sqrt{k_D c/k_R}$.

2. Régimen de saturación: el tiempo de vuelo es mucho más corto que el de relajación de las cargas y la densidad de corriente queda limitada a un valor, independiente del potencial aplicado, que viene determinado por el ritmo al que se disocian los iones en el volumen:

$$j_s = ek_D cd \quad (1.6)$$

El número adimensional $C_0 = d/2\lambda = \tau_v/2\tau = \sigma d^2/2\epsilon KV$ indica cuando estamos en uno u otro régimen. Para $C_0 \gg 1$ estamos en el régimen óhmico, mientras que para $C_0 \ll 1$ nos hallamos en el régimen de saturación. El valor $C_0 = 1$ marca la transición entre ambos y al valor $V_s = \sigma d^2/2\epsilon K$ se le conoce como potencial de saturación.

Sobrepasado el potencial de saturación la densidad de corriente alcanza un valor constante a menos que la disociación se vea reforzada por el campo eléctrico, en cuyo caso vuelve a crecer con el campo en la forma:

$$j_s(E) = j_s^0 F(L_B/\Lambda)$$

donde $F(L_B/\Lambda)$ es la función antes aludida.

1.1.2 Fenómenos de interfase

Por efecto de la diferencia de potencial químico la situación de equilibrio termodinámico en la interfase líquido-metal corresponde a una ausencia de electroneutralidad a ambos lados de la interfase y a la existencia de un gradiente de potencial eléctrico. En la región cercana al electrodo se forma una estructura que se conoce con el nombre de doble capa. En ella se distinguen (ver figura 1.1): una región muy próxima al electrodo donde iones y pares iónicos no solvatados se hallan adheridos al electrodo por efecto de la fuerza imagen electrostática (esta primera región se conoce como Plano Interior de Helmholtz); una segunda región en la que se encuentran atrapados iones y pares iónicos solvatados que no pueden acercarse al electrodo más de cierta distancia (es el Plano exterior de Helmholtz) y, por último, una capa difusa de carga que decae rápidamente hacia el volumen del líquido.

Al igual que en el volumen, es posible definir una distancia característica $L_i = e^2/16\pi\epsilon k\Theta = L_B/2$ a la cual la energía de interacción electrostática entre cargas imágenes iguala a la de agitación térmica. Para líquidos no

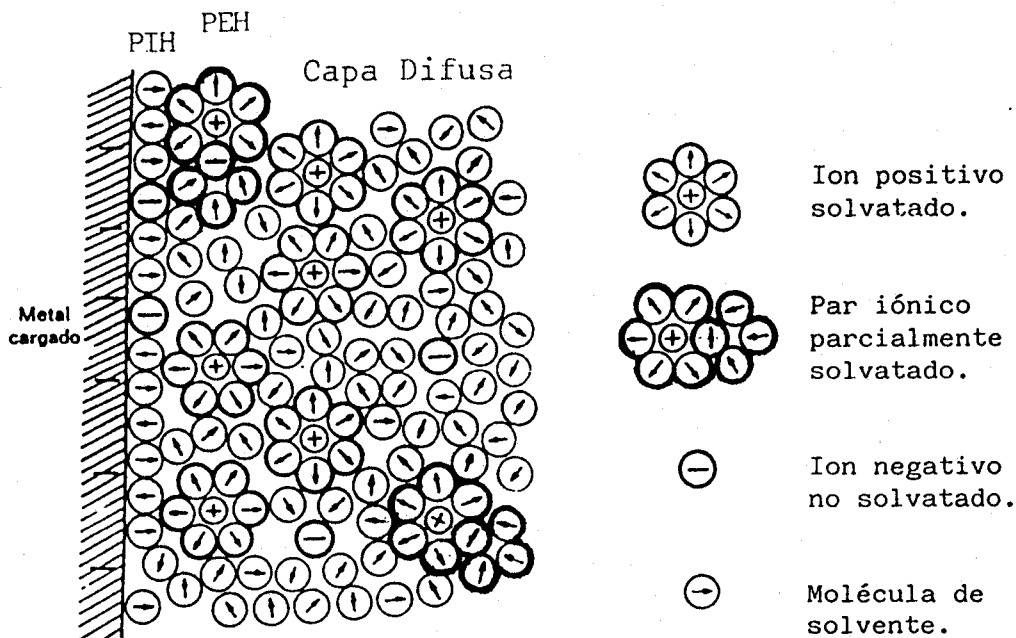


Figura 1.1: Estructura de la interfase electrodo-líquido.

polares $L_i \sim 70\text{Å}$ y toda la interfase se encuentra bajo la influencia de la fuerza imagen. En líquidos polares es $L_i \sim 2\text{Å}$ y sólo la región más próxima al electrodo siente la acción de la fuerza imagen.

Al aplicar un campo eléctrico a una interfase líquido metal así estructurada se producen dos tipos de fenómenos: procesos de descarga y procesos de inyección.

Procesos de descarga

Bajo la acción de un campo externo se produce una migración de iones cargados hacia los electrodos. El mantenimiento de esta corriente de migración exige que los iones que alcanzan el electrodo de signo opuesto se descarguen en él. El proceso de descarga viene caracterizado por las constantes de velocidad k_o (de oxidación del ion) y k_r (de reducción del mismo) y puede esquematizarse como:



Ambas constantes dependen de una energía de activación que toma en cuenta no sólo la energía libre sino el hecho de que el e^- ha de atravesar la barrera de potencial de la doble capa. La aplicación de un campo externo desplaza el equilibrio 1.7 en el sentido de la descarga distinguiéndose dos límites naturales:

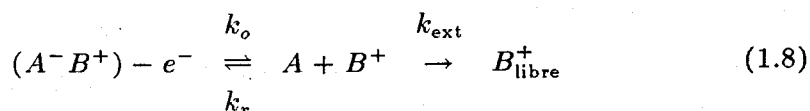
- $E \ll k\Theta/ex_A \simeq 10^7 \text{ V/m}$ donde x_A es la longitud de la doble capa. En este límite la corriente de descarga es proporcional al campo aplicado (régimen óhmico).
- $E \gg k\Theta/ex_A$ el equilibrio 1.7 está totalmente desplazado hacia la derecha y la corriente de descarga aumenta exponencialmente con el campo.

Inyección

Para campos por encima de 100 kV/m aparecen procesos de inyección de portadores de carga en la interfase. Los electrodos son capaces de inyectar iones de su mismo signo en el interior del líquido.

Denat [7] propone el siguiente mecanismo para describir los procesos de inyección en líquidos no polares. La base de la inyección se encuentra en los pares iónicos adsorbidos en el electrodo. Los procesos de transferencia electrónica entre el electrodo y el par neutralizan uno de los iones dejando el otro con la misma carga que el electrodo pero unido a él por la fuerza imagen. La aplicación de un campo eléctrico puede entonces provocar que el ion supere la barrera de la fuerza imagen siendo así inyectado en el líquido. Este último proceso es muy similar al del reforzamiento de la disociación en volumen por efecto de un campo eléctrico que antes comentamos.

El proceso queda esquematizado como:



Las constantes k_o y k_r responden al mismo mecanismo que en los proceso de descarga. k_{ext} es una función del campo eléctrico aplicado y da cuenta de cómo éste baja la barrera de potencial que crea la carga imagen, su dependencia con el campo es muy similar a la que presenta la constante de

disociación de los pares iónicos en el volumen. De nuevo podemos distinguir dos límites:

- $k_{\text{ext}} \ll k_r$ ($E < 5 \times 10^7 \text{V/m}$) El proceso viene limitado por el valor de k_{ext} . la densidad de iones inyectados depende del campo eléctrico aunque para valores por debajo de 10^6V/m es prácticamente constante.
- $k_{\text{ext}} \gg k_r$ Para campos muy intensos casi todo ion libre es inyectado inmediatamente y el ritmo de inyección viene determinado por el proceso de formación de dichos iones.

En líquidos polares no es posible, debido al corto alcance de la fuerza imagen, distinguir dos etapas en el proceso de inyección de iones. El mecanismo se puede reducir a una sola etapa en la que se condensan la formación del ión y su inyección y la modelización del proceso se hace más compleja.

Un parámetro adimensional $C = q_0 d^2 / \epsilon V$, donde q_0 es la densidad de carga en el electrodo inyector, determina la intensidad relativa de la inyección. C puede ser entendido como el cociente entre la densidad de carga inyectada y la densidad de carga existente en los electrodos por acción del campo aplicado. La condición $C \gg C_0$ asegura que la corriente que atraviesa el líquido está originada, fundamentalmente, por un proceso de inyección. Cuando la especie inyectada es la misma que produce los fenómenos de conducción en volumen, y esto se puede conseguir dopando con electrolitos ionóforos líquidos previamente purificados, Denat encuentra que existe una correlación entre C y C_0 : $C = 4C_0$.

Cuando el par iónico que origina el ion inyectado es tal que los iones que lo forman tienen tamaños muy diferentes, el ion menos voluminoso es el que resulta más fácilmente neutralizado por transferencia electrónica en la interfase líquido-electrodo, siendo, en consecuencia, el ion más voluminoso el inyectado. Tenemos entonces un proceso de inyección unipolar.

1.2 Modelo físico

Nuestro estudio se centra sobre la estabilidad, lineal y no lineal, y la convección en régimen de amplitud finita en un líquido dieléctrico sometido a inyección unipolar de iones en geometría plano-paralela. En este apartado

vamos a introducir las hipótesis esenciales que configuran el modelo físico que utilizaremos en adelante.

Consideramos un líquido incompresible, dieléctrico y de conductividad despreciable. Así como la hipótesis de incompresibilidad es realizable experimentalmente sin dificultad en cualquier líquido, el efecto de la conductividad puede ser importante si no se toman las precauciones adecuadas. El parámetro adimensional $C_0 = \sigma d^2 / 2K\epsilon V$, que introducimos en la sección anterior, es una medida de la importancia relativa de la corriente originada por conducción. La condición $C_0 \ll 1$ asegura que nos encontramos en régimen de saturación y que la corriente de conducción no aumenta con la tensión eléctrica aplicada. Dada la dificultad de obtener líquidos con σ por debajo de cierto valor (suele ser $\sigma \geq 10^{-13} \Omega^{-1} m^{-1}$) y dado que, como después veremos, los criterios de inestabilidad fijan para cada líquido el rango de V en el que se debe trabajar, la condición $C_0 \ll 1$ obliga a utilizar distancias entre electrodos lo más pequeñas posible.

Este líquido lo suponemos confinado entre dos electrodos plano-paralelos e infinitos. Al aplicar una diferencia de potencial V entre ambos suponemos que, en uno de ellos, se produce una inyección homogénea de carga. Esto es: se liberan, por algún mecanismo electroquímico del tipo ya discutido en la sección anterior, portadores de carga (iones) del mismo signo que el electrodo. A pesar de ser la inyección un fenómeno universal, y que por tanto está presente siempre que una interfase electrodo-líquido dieléctrico es perturbada por un campo eléctrico, desde el punto de vista experimental hay que emplear técnicas más o menos sofisticadas si se quiere que el régimen de inyección sea lo suficientemente estable y evitar fluctuaciones incontroladas en la corriente eléctrica a través de la interfase. Para ello se usan habitualmente varias técnicas: barrido de la interfase con haces de electrones [15], empleo de membranas de permeabilidad selectiva y barnices electrodiálíticos como recubrimiento de los electrodos [8], disolución en el líquido de sales específicas [5], etcétera. Aunque, en general, la densidad de carga inyectada depende del valor del campo eléctrico en el inyector, durante cierto rango de valores ésta permanece aproximadamente constante. Nosotros admitiremos la hipótesis de inyección autónoma, esto es: que la densidad de carga inyectada no depende del campo eléctrico.

El otro electrodo (colector) se supone perfectamente abierto, de forma que todo ion que lo alcanza se descarga instantáneamente. Esto corresponde a despreciar la barrera de potencial que la carga cedida por el ion al electrodo

ha de atravesar.

Los portadores de carga son arrastrados por el campo eléctrico con una velocidad proporcional a éste, $\mathbf{v} = K\mathbf{E}$, siendo K la movilidad de los iones en el líquido.

De acuerdo con la aproximación electrohidrodinámica despreciamos los efectos magnéticos y sustituimos la distribución discreta de carga por una densidad de carga $q = en$ donde e es la carga de cada ion y n la densidad media de iones por unidad de volumen.

Despreciamos el calor disipado por efecto Joule, dada la pequeñez de las corrientes eléctricas que se manejan, por lo que se puede considerar el sistema como isoterma (despreciamos la variación con la temperatura de las propiedades que caracterizan al líquido).

1.3 Ecuaciones completas

Nuestro sistema queda descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que son de naturaleza eléctrica y mecánica.

Desde el punto de vista eléctrico las ecuaciones de Maxwell se reducen a dos: la que expresa el carácter irrotacional del campo eléctrico y la ley de Poisson:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon} \quad (1.10)$$

A ellas hay que añadir la ecuación de conservación de la carga:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.11)$$

siendo

$$\mathbf{j} = q(K\mathbf{E} + \mathbf{v}) - D\nabla q \quad (1.12)$$

En ellas \mathbf{E} es el campo eléctrico, q la densidad volumínica de carga, ϵ la constante dieléctrica del medio, \mathbf{j} la densidad de corriente eléctrica, \mathbf{v} la velocidad del líquido y D el coeficiente de difusión de los iones en el líquido.

De 1.9 es $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y se tienen las condiciones de contorno:

$$\Phi(z = 0) = V \quad (1.13)$$

$$\Phi(z = d) = 0 \quad (1.14)$$

$$q(z = 0) = q_0 \quad (1.15)$$

donde Φ es el potencial eléctrico, q_0 la densidad de carga en el electrodo inyector, d la separación entre ambos electrodos y la dirección z se ha elegido perpendicular a los mismos.

Desde el punto de vista mecánico las ecuaciones son:
la ecuación de continuidad (conservación de la masa)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.16)$$

y la ecuación de Navier-Stokes (conservación de la cantidad de movimiento)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p \right) = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}_e \quad (1.17)$$

donde ρ es la densidad másica del líquido, η su viscosidad y p la presión. \mathbf{F}_e es la fuerza por unidad de volumen de origen eléctrico cuya expresión general es [9]:

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} - \frac{E^2}{2} \nabla \epsilon + \nabla \left(E^2 \frac{\rho}{2} \frac{d\epsilon}{d\rho} \right) \quad (1.18)$$

y que en nuestro caso (líquido homogéneo en condiciones isothermas) se reduce a:

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad (1.19)$$

Las condiciones de contorno mecánicas son:

$$\mathbf{v} = 0 \text{ en } z = 0, d \quad (1.20)$$

para electrodos rígidos e impenetrables.

1.3.1 Adimensionalización

Siguiendo el procedimiento habitual adimensionalizamos las ecuaciones eligiendo para ello las siguientes escalas: d para las distancias, d^2/KV para el tiempo, V para el potencial, $\epsilon V/d^2$ para la carga eléctrica. Con ello las ecuaciones adimensionalizadas son:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \Phi = -q \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q(\mathbf{E} + \mathbf{v}) - \alpha \nabla q) = 0 \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{T}{M^2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p \right) = \nabla^2 \mathbf{v} + Tq\mathbf{E} \quad (1.25)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$\Phi = 1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (1.26)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{en} \quad z = 1 \quad (1.27)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (1.28)$$

$$q = C \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (1.29)$$

Tenemos los siguientes parámetros adimensionales:

- $T = \epsilon V / K \eta$. Es la relación entre la potencia eléctrica inyectada y la potencia disipada por las fuerzas viscosas. Es el análogo al número de Rayleigh ($Ra = g\beta \Delta\Theta d^3 / \chi\nu$) en el problema de Rayleigh-Benard.
- $M = \sqrt{\epsilon/\rho} / K$. La cantidad $\sqrt{\epsilon/\rho}$, que tiene dimensiones de movilidad, es proporcional a la movilidad efectiva de los iones en el líquido en movimiento [10]. M representa así un cociente de movilidades. Por su papel en las inestabilidades electrohidrodinámicas se puede decir que el número M^2 es el análogo, para nuestro problema, del número de Prandtl ($Pr = \chi/\nu$) en el problema de Rayleigh-Benard [11].
- $\alpha = D/KV$. Es el coeficiente de difusión adimensionalizado. Empleando la relación de Einstein $D/K = k\Theta/e$ es $\alpha = k\Theta/eV \sim 0.025/V$, con V en voltios, a temperatura ambiente. Debido a su pequeñez en las condiciones experimentales usuales (el voltaje al que se presenta la inestabilidad es siempre superior a 40V) el término de difusión ha sido tradicionalmente excluido de casi todos los estudios de la inyección unipolar. Nosotros, sin embargo, analizaremos en detalle su papel en el capítulo 3. En todo lo que sigue, y hasta dicho capítulo despreciaremos la difusión.
- $C = q_0 d^2 / \epsilon V$. Es la razón entre la carga inyectada q_0 y la carga existente en los electrodos $\epsilon V/d^2$ por acción de la diferencia de potencial

aplicada. Es, por tanto, una medida de cuánto modifica la densidad de carga inyectada el campo armónico $E = V/d$. El valor de C distingue dos límites naturales del problema. Para $C \ll 1$ la carga inyectada no modifica esencialmente el campo aplicado y $E = V/d$ es una buena aproximación al campo total (inyección débil). Para $C \gg 1$ el campo eléctrico cercano al inyector se anula y la corriente eléctrica queda limitada por la carga presente en el volumen que tiende a no dejar pasar más carga. En estas condiciones se habla de corriente limitada por la densidad espacial de carga y las distribuciones hidroestáticas del campo y de la densidad de carga son análogas a las encontradas en ciertos dispositivos semiconductores [12,13].

1.4 Estabilidad lineal

El sistema de ecuaciones 1.21-1.25, despreciando la difusión, admite una solución de equilibrio dada por $v = 0$. El campo eléctrico y la distribución de carga, para esta solución hidroestática, vienen dados por:

$$E_z = \sqrt{2j(z+b)} \quad (1.30)$$

$$q = \sqrt{\frac{j}{2(z+b)}} \quad (1.31)$$

donde las condiciones de contorno 1.26-1.29 implican:

$$\sqrt{j(b^{\frac{3}{2}} - (1+b)^{\frac{3}{2}})} = \frac{3}{4} \quad (1.32)$$

y

$$2b^{\frac{1}{2}}C = j^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

Los dos límites significativos son:

- $C \ll 1$:

$$E_z = 1 - \frac{C}{2} + \frac{1}{2}Cz + O(C^2) \quad (1.34)$$

$$q = C - C^2z + O(C^3) \quad (1.35)$$

$$j = C + O(C^2) \quad (1.36)$$

• $C \gg 1$:

$$E_z = \frac{3}{2}\sqrt{z} \quad (1.37)$$

$$q = \frac{3}{4\sqrt{z}} \quad (1.38)$$

$$j = \frac{9}{8} \quad (1.39)$$

El estudio teórico de la inestabilidad frente a perturbaciones infinitesimales (inestabilidad lineal) de una capa de líquido dieléctrico sometido a inyección unipolar de iones ha sido realizado por Schneider y Watson [15] y Atten y Moreau [14] y el estudio experimental por Schneider y Watson [15], Filippini et al. [16] y Atten y Lacroix [17]. Atten ha extendido también el análisis lineal al caso en que la difusión molecular es tomada en cuenta como mecanismo de transporte [18].

La distribución de carga que se presenta en la solución hidrostática del conjunto de ecuaciones 1.21-1.25 es potencialmente inestable. Si consideramos que una partícula fluida sufre un desplazamiento vertical que le aleje del electrodo inyector dicha partícula se verá más cargada que sus vecinas, dada la distribución decreciente de carga, y sufrirá una fuerza neta tendente a amplificar la perturbación. Este es el mecanismo esencial de inestabilidad. A que se establezca el movimiento se oponen otros dos mecanismos: de un lado la viscosidad η del líquido que amortigua la perturbación; de otro lado la repulsión coulombiana entre los iones contenidos en la partícula desplazada que tiende, gracias a la movilidad propia de los iones, a liberar el exceso de carga que esta partícula tiene con respecto a sus vecinas. Las moléculas del líquido, en la medida de su carácter polar, tienden a apantallar a los iones, reduciendo la intensidad de la repulsión entre ellos. La importancia de este efecto la determina la permitividad eléctrica del líquido. Todos estos mecanismos están reflejados en el parámetro de estabilidad $T = \epsilon V / K \eta$.

Como la causa esencial de la inestabilidad es el carácter decreciente de la distribución de carga en volumen y éste está más marcado cuanto mayor sea el valor de C , este parámetro juega también un papel importante en la determinación del criterio lineal de inestabilidad. Atten y Moreau encuentran teóricamente que la solución hidrostática del sistema 1.21-1.25 es inestable por encima de cierto valor crítico de T , T_c , que varía según el valor de C .

El método por ellos utilizado consiste esencialmente en introducir una perturbación del estado sin movimiento y linealizar las ecuaciones resultantes para la perturbación. Las ecuaciones, ya lineales, se desarrollan en modos normales y su dependencia temporal se expresa como $e^{\sigma t}$. Dado T , a cada modo, caracterizado por un número de onda k , le corresponde un valor determinado de σ . Así la ecuación $\text{Re } \sigma = 0$ proporciona una curva que relaciona T y k . El valor de k que hace mínimo T corresponde al modo que primero se desestabiliza y este valor mínimo de T corresponde al criterio de inestabilidad. Atten y Moreau resuelven el problema tanto de forma analítica aproximada, con un método de Galerkin, como por métodos numéricos. Los valores por ellos obtenidos son, para los casos límite:

$$T_c C^2 = 222 \quad \text{para } C \ll 1 \quad (1.40)$$

$$T_c = 160 \quad \text{para } C \gg 1 \quad (1.41)$$

Experimentalmente se ha estudiado en detalle el caso $C \gg 1$, por ser el más realizable en la práctica. El valor encontrado para T_c está en torno a 100, netamente inferior al valor predicho. Para los líquidos típicamente usados ello supone un voltaje crítico del orden de 50 V. En inyección débil no se han llevado a cabo experiencias sistemáticas y fiables de inestabilidad, pero los voltajes típicos a los que ésta aparece son del orden de 1000 V.

A continuación describimos un modelo simplificado [19] que, sin tener en cuenta la dependencia temporal, y en la aproximación de inyección débil, nos da las características esenciales del problema.

En inyección débil la solución estacionaria es $q_s = C$, $E_{xs} = 0$, $E_{zs} = 1$. Perturbando las ecuaciones 1.21-1.25 y linealizando será:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{T}{M^2} (\nabla \delta p) = \nabla^2 \delta \mathbf{v} + T \delta q \mathbf{e}_z \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial z} = C^2 \delta w \quad (1.44)$$

donde δ significa perturbación, \mathbf{e}_z es el vector unitario en dirección z y w representa la componente z de la velocidad. La ecuación 1.44 merece un comentario especial. A partir de 1.23, despreciando la difusión, eliminando la dependencia temporal y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{E} = q$ se tiene: $q^2 + (\mathbf{E} + \mathbf{v}) \cdot \nabla q = 0$. Si q_s es la solución para $\mathbf{v} = 0$ de dicha ecuación será, admitiendo

que $\mathbf{E}_s = \mathbf{e}_z$, $q_s^2 + dq_s/dz = 0$. Teniendo esta última relación en cuenta y linealizando se obtiene 1.44. Hay que remarcar que aunque aproximamos q_s por C , retenemos su derivada en la expresión anterior, ya que, como se ve en 1.35 ésta es del mismo orden en C que q_s^2 .

Restringiéndonos a perturbaciones bidimensionales podemos introducir una función corriente Ψ , de forma que $u = \partial\Psi/\partial z$ y $w = -\partial\Psi/\partial x$ y la ecuación de continuidad 1.24 se cumple idénticamente. Admitimos que Ψ tiene una forma dada y que sólo varía su amplitud, esto es: $\Psi = A\Psi_0$. Para perturbaciones que representen rollos de convección alineados a lo largo del eje y será: $\Psi_0 = (L/2\pi)(1 - \cos 2\pi z)\sin \pi x/L$ con L la longitud de onda de la perturbación. Con ello la ecuación para δq se integra inmediatamente para dar:

$$\delta q(x, z) = C^2 \frac{A}{L} \left(z + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi z \right) \cos \frac{\pi x}{L} \quad (1.45)$$

que cumple la condición de contorno $\delta q(x, z) = 0$ en $z = 0$.

A partir de la ecuación 1.43, multiplicándola por \mathbf{v}_0 e integrándola sobre el rectángulo $\Omega \equiv [0, L] \times [0, 1]$ correspondiente a un rollo se tiene:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}_0 \, dx \, dz = -T \iint_{\Omega} \delta q w_0 \, dx \, dz \quad (1.46)$$

evaluando ambas integrales se obtiene:

$$\pi^2 \left(\frac{3}{16L} + \frac{L}{2} + L^3 \right) = T \frac{C^2 L}{16} \quad (1.47)$$

El valor de L que minimiza T en esta relación es $L = 0.66$ que da $T_c C^2 = 216$, a comparar con los resultados de Atten y Moreau de 0.69 y 222, respectivamente.

Del estudio de la inestabilidad lineal vemos ya una de las características esenciales del problema y que va a aparecer en todo el estudio subsiguiente: la importancia del término de repulsión coulombiana. De no haberlo incluido en el cálculo, reteniendo la divergencia de \mathbf{E} en la deducción de la ecuación 1.44, no habríamos obtenido ningún valor crítico ya que el carácter inestable de q_s se debe a que es decreciente con z y este decrecimiento ocurre porque los iones se alejan entre ellos a medida que viajan hacia el electrodo colector. La perturbación de velocidad, cuya componente z es la única que aparece explícitamente en el cálculo, tiene el efecto de que los iones de una mitad del rollo alcanzan el electrodo colector antes que los de la otra mitad,

la repulsión coulombiana ha tenido menos tiempo de actuar y, por tanto, la densidad de carga en esa mitad del rollo es mayor que en la otra. Esto da lugar a un gradiente de carga perpendicular al campo cuyo par de fuerzas asociado es el responsable de que se dispare el movimiento. C nos aparece como una medida cuantitativa de la importancia de la repulsión coulombiana: vemos que si $C \rightarrow 0$ el criterio $T_c \rightarrow \infty$, esto es, la capa de líquido es siempre estable.

1.5 Estabilidad no lineal

El análisis lineal de la sección anterior determina para qué valor del parámetro de estabilidad T deja de ser estable la solución hidrostática del sistema de ecuaciones, pero no predice nada sobre la naturaleza del movimiento convectivo que se instaura a partir de él. Una forma habitual de analizar el comportamiento de los sistemas convectivos cerca de la inestabilidad es la de desarrollar las funciones y el mismo parámetro de estabilidad en potencias de algún parámetro que caracterice cuánto se separa del estado de reposo el sistema. En nuestro caso podemos tomar la amplitud de la velocidad como parámetro y así escribiríamos:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}_1 + A^2\mathbf{v}_2 + \dots \quad (1.48)$$

$$q = q_s + Aq_1 + \dots \quad (1.49)$$

... ..

$$T = T_c + AT_1 + \dots \quad (1.50)$$

Admitiendo que toda la dependencia temporal se encuentra en A , la sustitución de los desarrollos anteriores en el sistema de ecuaciones 1.21-1.25 proporciona una ecuación tipo Landau para A de la forma [20]:

$$\frac{dA}{dt} = A(a_1 + a_2A + a_3A^2 + \dots) \quad (1.51)$$

que condensa todo el comportamiento del sistema en torno al punto crítico.

Atten y Lacroix encuentran una expresión del tipo 1.51 a partir de un modelo hidráulico en el que se pueden analizar comportamientos transitorios así como diferentes estructuras convectivas (ellos analizan concretamente rollos y hexágonos). Otra forma simplificada de obtener una ecuación de este

tipo es a partir de la ecuación de la vorticidad. En efecto, tomando el rotacional de la ecuación 1.25 y restringiéndonos al caso bidimensional, se tiene:

$$\frac{T}{M^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} \omega \right) = \nabla^2 \omega + \nabla \times q \mathbf{E}|_y \quad (1.52)$$

con $\omega = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$. Admitiendo que ω es de la forma $\omega = A \omega_0(x, z)$ donde $\omega_0(x, z)$ representa una estructura convectiva bidimensional (un rollo) de anchura L e integrando la ecuación en el dominio de una celda de convección es:

$$\frac{T}{M^2} b_1 \frac{dA}{dt} = A b_2 + T \oint q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.53)$$

donde hemos aplicado el teorema de Stokes al último miembro de la derecha y la integral se extiende al contorno de la celda. Los números b_1 y b_2 son, respectivamente, la integral de ω_0 y su laplaciano en la celda convectiva. Para un rollo levógiro b_1 es negativo y b_2 es positivo (ver apéndice A).

Para el caso de inyección débil podemos tomar $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z$ con lo cual la integral de la derecha se reduce a:

$$\oint q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 q(x=0, z) dz - \int_0^1 q(x=L, z) dz \quad (1.54)$$

y $q(z)$ viene determinado en ambas líneas por una ecuación unidimensional ya que $u = 0$ en los bordes del rollo y la ecuación de conservación de la carga se reduce a:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (1 \pm w(z)) \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (1.55)$$

donde el signo más corresponde al borde derecho del rollo y el menos al borde izquierdo.

La solución de 1.55 es:

$$q(z) = \frac{C}{1 + Ct(z)} \quad (1.56)$$

con

$$t(z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1 \pm A w_0(\eta)} \quad (1.57)$$

Desarrollando $t(z)$ y $q(z)$ en potencias de A se obtiene a partir de 1.53 la ecuación:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{M^2}{T} A (a + TC^2(b + cA^2) + \dots) \quad (1.58)$$

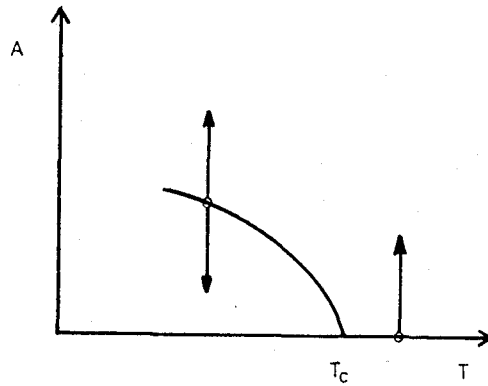


Figura 1.2: Diagrama de estabilidad de las soluciones de 1.58.

donde se puede ver que es $a < 0$, $b > 0$ y $c > 0$ (apéndice A). Las soluciones de equilibrio corresponden a $dA/dt = 0$ y vienen dadas por

$$A^2 = -\frac{a + bTC^2}{c} \quad (1.59)$$

El criterio lineal corresponde claramente al caso $A = 0$ y es $T_c C^2 = -a/b$. Vemos que para $T > T_c$ no hay soluciones de equilibrio. La ecuación 1.58 es directamente integrable dada una amplitud inicial. Por debajo de T_c los valores de equilibrio dados por 1.59 son inestables: para valores de la amplitud inicial por debajo de ellos la amplitud tiende a cero con el tiempo, y para valores por encima de ellos la amplitud crece sin límites. Para $T > T_c$ la amplitud crece exponencialmente con tal de que la amplitud inicial no sea nula (ver figura 1.2).

Este análisis muestra el carácter subcrítico de la inestabilidad en la inyección unipolar. Rebasado el valor crítico del parámetro T no existen soluciones de pequeña amplitud y ésta crecerá sobrepasando el límite de validez del desarrollo que hemos admitido. Nuevas potencias de A intervendrán y un análisis estrictamente no lineal se hace imprescindible. Por debajo de T_c existen soluciones de equilibrio inestables (que no se observarán por tanto experimentalmente) con $A \neq 0$. Por encima de dichas soluciones debe haber soluciones estables de amplitud finita y que se alcanzarán cuando las perturbaciones aplicadas al sistema sobrepasen cierto valor.

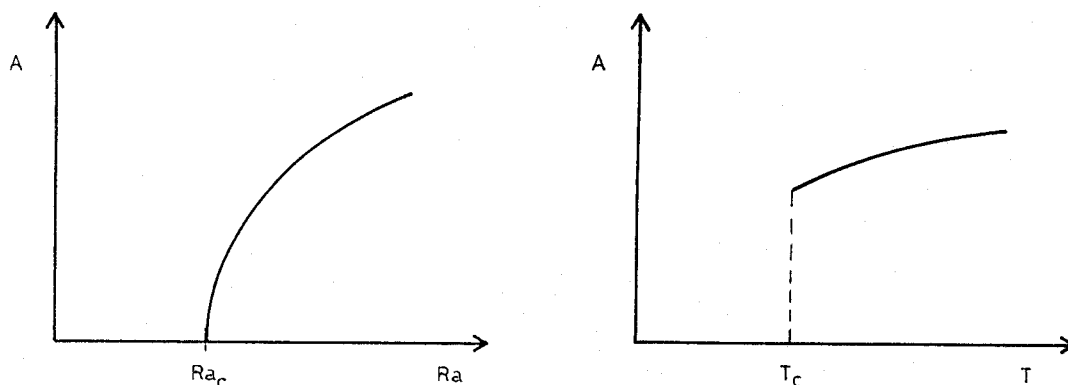


Figura 1.3: Amplitud del movimiento frente al parámetro de estabilidad en el problema de Rayleigh-Benard y en la inyección unipolar.

Resulta interesante comparar esta situación con la que se da en el problema de Rayleigh-Benard. En éste, el coeficiente c de la ecuación 1.58 es negativo, lo que permite soluciones de pequeña amplitud por encima del valor crítico. Entonces la transición del estado de reposo al estado de movimiento se lleva a cabo de forma continua. En nuestro problema dicha transición es brusca. Si establecemos la analogía con las transiciones de fase y tomamos la amplitud de la velocidad como parámetro de orden y el parámetro de estabilidad como la temperatura podemos concluir que, mientras en el problema de Rayleigh-Benard la transición al estado de movimiento corresponde a una transición de segundo orden (continuidad en las funciones de estado, discontinuidad en sus derivadas), en el problema de la inyección unipolar corresponde a una de primer orden (salto finito en las funciones). Este hecho se ilustra en la Figura 1.3.

Esta diferencia entre los dos problemas se debe al mecanismo de transporte subyacente. Mientras que en el problema de Rayleigh-Benard el calor se transporta por conducción, en la inyección unipolar la carga es transportada por el campo, gracias a la movilidad iónica, con velocidad finita relativa al fluido. Como veremos ahora, los estados de movimiento posibles en el caso de la inyección unipolar están caracterizados por una velocidad del líquido superior a la velocidad de arrastre de los portadores de carga.

De nuevo un cálculo analítico muy simplificado, para el caso de inyección débil, nos da las características esenciales del problema.

Partimos del sistema de ecuaciones 1.21-1.25, despreciando la difusión, la

dependencia temporal y limitándonos al caso bidimensional. Supondremos, al igual que hicimos para la inestabilidad lineal, que la velocidad se puede expresar a partir de la función corriente que admitiremos de la misma forma: $\Psi_0 = (L/2\pi)(1 - \cos 2\pi z)\sin \pi x/L$. La ecuación 1.23 en estado estacionario se escribe:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{E}) \cdot \nabla q + q^2 = 0 \quad (1.60)$$

donde se ha utilizado que $\nabla \cdot \mathbf{E} = q$. Tenemos pues una ecuación en derivadas parciales que es equivalente al sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dq}{ds} = -q^2 \quad (1.61)$$

$$\frac{dx}{ds} = u + E_x \quad (1.62)$$

$$\frac{dz}{ds} = w + E_z \quad (1.63)$$

y reteniendo sólo el orden cero en C :

$$\frac{dq}{ds} = 0 \quad (1.64)$$

$$\frac{dx}{ds} = u \quad (1.65)$$

$$\frac{dz}{ds} = w + 1 \quad (1.66)$$

vemos que la carga será constante a lo largo de las líneas solución de las ecuaciones 1.65-1.66. Estas dos últimas forman un sistema hamiltoniano, como se ve haciendo $H = -x + A\Psi_0(x, z)$, con lo cual:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (1.67)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.68)$$

Las trayectorias iónicas, que coinciden con líneas de carga constante porque hemos despreciado la repulsión coulombiana, son las líneas $H = \text{constante}$. Con la forma admitida de Ψ , el sistema 1.67-1.68 se escribe explícitamente:

$$\frac{dx}{ds} = AL \sin \frac{\pi x}{L} \sin 2\pi z \quad (1.69)$$

$$\frac{dz}{ds} = 1 - \frac{A}{2}(1 - \cos 2\pi z) \cos \frac{\pi x}{L} \quad (1.70)$$

Para $A < 1$ no hay puntos de equilibrio de este sistema, esto es: no hay puntos tales que $dx/ds = dz/ds = 0$. Para $A > 1$ tenemos tres puntos de equilibrio:

$$P_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{A-2}{A} \end{cases} \quad (1.71)$$

$$P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{A-2}{A} \end{cases} \quad (1.72)$$

$$P_3 : \begin{cases} x = \frac{L}{\pi} \arccos \frac{1}{A} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.73)$$

La trayectoria $H = 0$ (llamada *separatriz*) une P_1 con P_2 y el punto P_3 es un centro alrededor del cual se forman orbitas cerradas. La figura 1.4 muestra un *retrato de fases* del sistema. La zona interior a la separatriz (caracterizada por $H > 0$) es inaccesible a los iones desde el electrodo inyector y por tanto aparecerá vacía de carga. Fuera de la separatriz todas las líneas provienen del inyector, donde es $q = C$. En definitiva la distribución de carga es tal que q vale C fuera de la separatriz y 0 dentro de ella.

Volviendo ahora a 1.25 tenemos en cuenta el hecho de que para líquidos viscosos $M \sim 10^2$ y, por tanto, $M^2 \sim 10^4$, esto nos permite tomar el límite $M \rightarrow \infty$. Este límite simplifica mucho las cosas y aunque suprime el término inercial de la ecuación de momento, origen del comportamiento no lineal en muchos problemas de la hidrodinámica, veremos que no modifica esencialmente nuestro problema ya que la no-linealidad dominante de éste se encuentra en el acoplamiento entre las distribuciones de carga y velocidad. La ecuación 1.25 se escribe entonces:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -Tq\mathbf{E} \quad (1.74)$$

que, multiplicando por \mathbf{v}_0 e integrando resulta:

$$A \iint_{\Omega} \mathbf{v}_0 \nabla^2 \mathbf{v}_0 dx dz = -T \iint_{\Omega} qw_0 dx dz \quad (1.75)$$

La integral del término de la izquierda ya fue obtenida en el cálculo del criterio lineal:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v}_0 \nabla^2 \mathbf{v}_0 dx dz = -\pi^2 \left(\frac{3}{16L} + \frac{L}{2} + L^3 \right) = -\frac{1}{K} \quad (1.76)$$

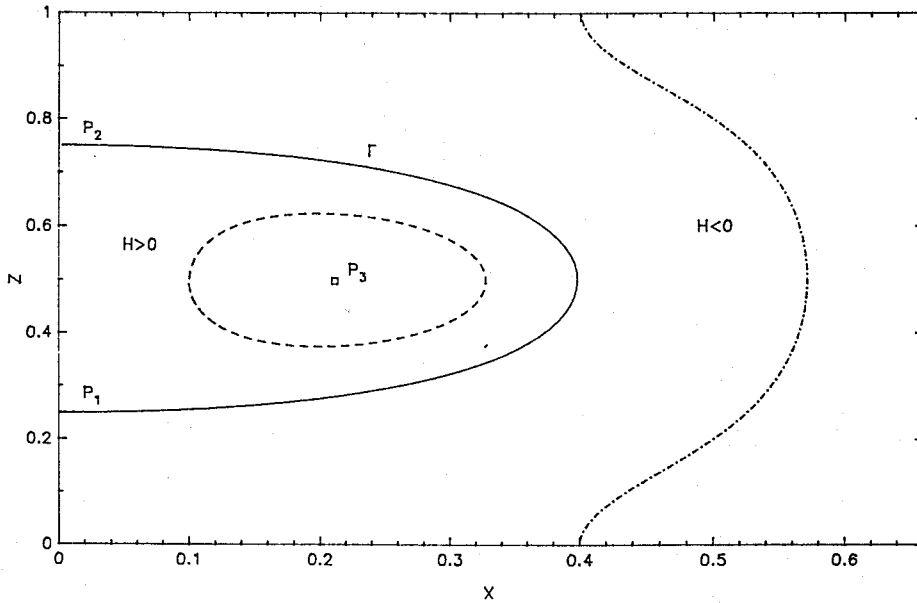


Figura 1.4: Retrato de fases. Se muestran los puntos de equilibrio, la separatriz (línea sólida) y las trayectorias típicas dentro y fuera de ésta.

En cuanto a la de la derecha es:

$$w_0 = -\frac{1}{A}\left(1 + \frac{\partial H}{\partial x}\right) \quad (1.77)$$

y

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} qw_0 \, dx \, dz &= -\frac{1}{A} \iint_{\Omega} \left(1 + \frac{\partial H}{\partial x}\right) \, dx \, dz \\ &= -\frac{1}{A}(CS_1 + CL) \\ &= \frac{1}{A}CS \end{aligned} \quad (1.78)$$

donde S_1 es la superficie externa a la separatriz y S es la superficie encerrada por la separatriz. De ambas se tiene:

$$A^2 = KTCS \quad (1.79)$$

con

$$S = \iint_{H>0} \, dx \, dz \quad (1.80)$$

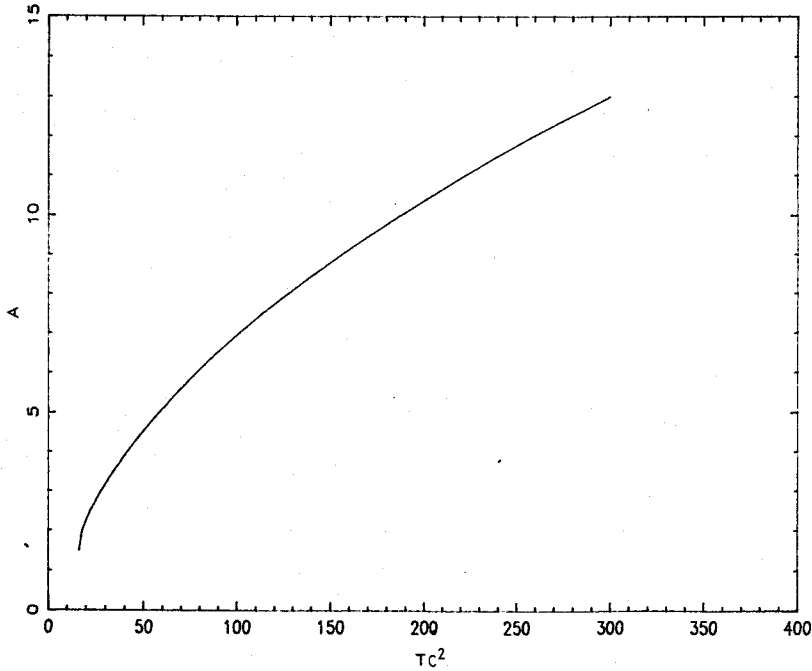


Figura 1.5: Ciclo de histéresis semianalítico.

que es función de A . Esta integral se resuelve numéricamente obteniendo así la curva presentada en la figura 1.5. El comportamiento asintótico, así como el valor del criterio no lineal pueden obtenerse analíticamente como casos límite de 1.79.

En efecto, para $A \sim 1$ los puntos P_1, P_2 y P_3 están próximos al punto $x = 0, z = 1/2$, podemos pues desarrollar la ecuación $H = 0$ en torno a dicho punto para obtener la separatriz:

$$\begin{aligned}
 H(x, z) &= -x + A \frac{L}{2\pi} (1 - \cos 2\pi z) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \\
 &\simeq -x + A \frac{L}{2\pi} \left(1 - \left(-1 + \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right) \left(\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi x}{L} \right)^3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.81}$$

de donde la curva $H = 0$ es la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(z - \frac{1}{2} \right)^2}{b^2} = 1
 \tag{1.82}$$

con

$$a = \frac{L}{\pi} \sqrt{6 \frac{A-1}{A}}, \text{ y } b = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-1}{A}} \quad (1.83)$$

luego

$$S = \frac{1}{2} \pi ab = \frac{\sqrt{6} L A - 1}{2 \pi A} \quad (1.84)$$

que llevado a 1.79 da:

$$T = \frac{2\pi A^3}{\sqrt{6} L K C (A - 1)} \quad (1.85)$$

El mínimo de T se encuentra para $A = 1.5$ que proporciona el valor del criterio no lineal de estabilidad T_f :

$$T_f C = \frac{27\pi}{2\sqrt{6} K L} \quad (1.866)$$

o, de acuerdo con el apartado 1.4:

$$\frac{T_f}{T_c C} = 1.08 \quad (1.87)$$

En cuanto al comportamiento asintótico, esto es, la ley que liga la amplitud de la velocidad con el parámetro de estabilidad para valores altos de éste, se obtiene al hacer tender en 1.79 S a L , ya que en el límite de amplitudes grandes la separatriz tiende a ocupar todo el dominio. Entonces se tiene:

$$A^2 = K T C L \quad (1.88)$$

De este análisis simplificado podemos extraer de nuevo varias conclusiones. En primer lugar, el hecho de que el criterio no lineal se encuentre por debajo del lineal lleva asociado un ciclo de histéresis: si aumentamos el potencial eléctrico poco a poco el movimiento no se establece hasta superar la tensión crítica asociada a T_c . Una vez iniciado el movimiento este se realiza con amplitud A mayor que la unidad. Si entonces bajamos el potencial poco a poco, el movimiento no cesa hasta alcanzar un valor V_f (correspondiente a T_f) inferior a V_c .

De otra parte vemos que aparece una zona vacía de carga. El estudio detallado de esta zona lo haremos en el capítulo dedicado a la difusión.

Atten y Lacroix [17] han estudiado el problema de la estabilidad no lineal a partir de un desarrollo modal de las magnitudes que aparecen. Expresan dichas magnitudes en la forma $A(x, y, z) = \sum_m F(z) f_m(x, y)$ donde las f_m cumplen $\nabla^2 f_m = a_m f_m$ y las condiciones de contorno adecuadas. Las ecuaciones completas proporcionan ecuaciones ordinarias para la $F(z)$ dada una elección particular de las f_m . El modelo anteriormente descrito corresponde a elegir un solo modo para una estructura convectiva en forma de rollos (la f sólo es función de x). Atten y Lacroix extienden el estudio al caso de inyección fuerte a moderada, tomando en cuenta una estructura convectiva formada por hexágonos o rollos y considerando hasta 8 modos. En cualquier caso encuentran que el criterio no lineal está por debajo del lineal:

- $C \gg 1$:

$$T_f = 110 \text{ (hexágonos)} \quad (1.89)$$

$$T_c = 160 \quad (1.90)$$

- $C = 1$:

$$T_f = 244 \text{ (hexágonos)} \quad (1.91)$$

$$T_c = 511 \quad (1.92)$$

Aunque el criterio lineal es independiente de la estructura convectiva, ya que viene determinado por la solución estacionaria, los criterios no lineales son diferentes según se trate de rollos o de hexágonos. Se encuentra que la estructura más favorecida son hexágonos en los que el líquido va del electrodo inyector al colector por el borde exterior de cada hexágono, y vuelve por el centro. De esta forma la zona vacía de carga corresponde al centro de cada celda. La estabilidad de los hexágonos frente a los rollos está relacionada con el carácter asimétrico de la solución hidrostática. En efecto, mientras que los rollos representan soluciones simétricas frente al cambio de A por $-A$, los hexágonos no. La aparición de una estructura convectiva de mayor simetría (los rollos) que la solución sin movimiento (recuérdese que q_s y \mathbf{E}_s no son simétricos respecto del plano $z = 1/2$) se ve así relegada por una estructura que presenta la misma asimetría inicial.

Atten y Lacroix, o.c., hacen el estudio experimental de la inestabilidad. El estudio lo realizan en diferentes líquidos, recubriendo los electrodos con

membranas electrodiálíticas para asegurar una inyección fuerte, utilizando un circuito de purificación para mantener la conductividad al nivel más bajo posible ($\sigma \sim 10^{-13} \Omega^{-1} m^{-1}$) y utilizando varias distancias de separación entre electrodos, pero siempre menores a 0.5 mm, con el fin de evitar efectos de conductividad residual. El patrón de convección se visualiza utilizando electrodos semitransparentes. La magnitud elegida para poner de manifiesto la inestabilidad es la corriente eléctrica que atraviesa la celda. En la figura 1.6 se muestra el comportamiento de la corriente frente a la tensión eléctrica aplicada. Se aprecian dos ramas diferentes, que corresponden a dos mecanismos diferentes de transporte. La rama 1 corresponde a una variación de I proporcional a V^2 y la visualización por estrioscopia no muestra evidencias de movimiento. Se concluye pues que dicha rama corresponde a un transporte de carga por arrastre iónico, sin movimiento y en condiciones de corriente limitada por la presencia de carga en el volumen. La rama 2 se alcanza siempre que la tensión sobrepasa un cierto valor V_c . Una vez sobre la rama 2 la rama 1 no vuelve a recuperarse hasta que la tensión no desciende por debajo de cierto valor V_f menor que V_c . Las observaciones estrioscópicas muestran que a la rama 2 corresponde un estado de movimiento organizado en celdas hexagonales muy estables una vez que se ha alcanzado el estado estacionario. El número de onda de esta red es del orden de 5, un poco inferior al dado por el criterio lineal, pero en buen acuerdo con el dado por el análisis no lineal.

Los valores de V_c y V_f , que claramente se corresponden con los criterios lineal y no lineal de estabilidad, son los mismos independientemente de la distancia utilizada y dan lugar al mismo tipo de ciclo de histéresis independientemente del líquido utilizado. Sin embargo conducen a criterios de estabilidad bastante por debajo de los teóricos, así se encuentra que:

$$(T_c)_{ex} = 100 \text{ y } (T_f)_{ex} = 90 \quad (1.93)$$

Este desacuerdo persiste todavía y puede ser atribuido, en principio, a la simplicidad con la que los mecanismos de inyección son tratados en el modelo.

Malraison et al. [21,22] han estudiado la dinámica de la convección por encima de la tensión crítica, en inyección fuerte, con vistas a analizar la ruta hacia la turbulencia en electrohidrodinámica. Estudian una celda cilíndrica utilizando varios valores del aspecto ($\Gamma = \text{radio/altura}$) de forma que se tiene una sola celda de convección cuando es $\Gamma \sim 1$. Como las condiciones experimentales impiden hacer medidas locales de velocidad o densidad de

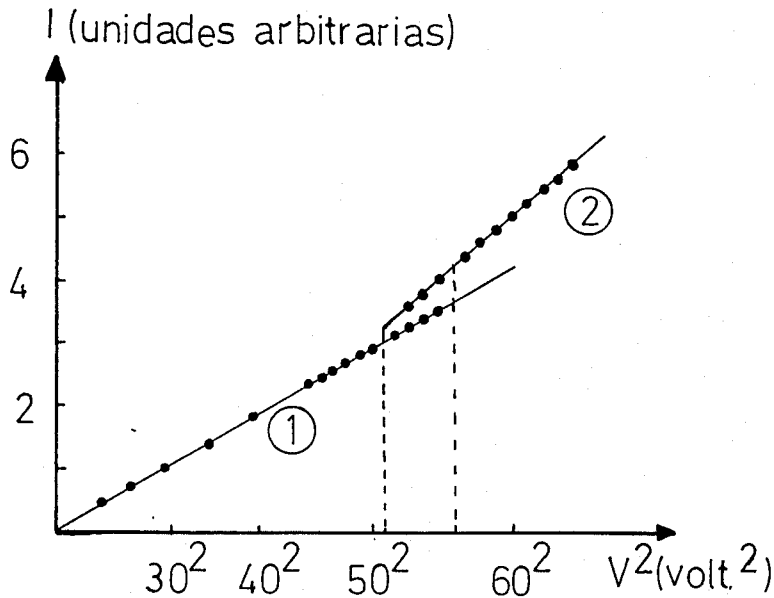


Figura 1.6: Característica tensión corriente experimental según Atten y Lacroix.

corriente, la corriente total (una magnitud global) es la magnitud analizada para caracterizar el comportamiento temporal del sistema. En definitiva las oscilaciones en la corriente, supuesto que la inyección está controlada, provienen de las oscilaciones de la velocidad y, por tanto, las características temporales de una están en relación directa con la otra. Un análisis en orden de magnitud (ver capítulo 6) muestra que hay dos regímenes diferenciados de convección: para tensiones cercanas a la crítica la velocidad cuadrática media (w') varía como el cuadrado de la tensión aplicada y la corriente con la $5/2$ potencia de la misma, este régimen está dominado por los efectos viscosos. Para tensiones suficientemente grandes los términos inerciales son dominantes y w' varía proporcionalmente a la tensión aplicada, haciéndolo la corriente como el cuadrado.

El primer resultado importante del análisis de los espectros en frecuencia de las fluctuaciones de corriente encontradas por Malraison et al. es que nada más sobrepasar el umbral de inestabilidad se tiene un movimiento dependiente del tiempo (la corriente sufre pequeñas oscilaciones alrededor de su valor medio). Este comportamiento contrasta notablemente con el que

se tiene en el problema de Rayleigh-Benard, donde, por encima del valor crítico del parámetro de inestabilidad, un régimen de convección rigurosamente estacionario es posible en cierto intervalo de dicho parámetro.

Para $\Gamma > 2$ los espectros de potencia de las fluctuaciones de corriente son continuos pero se identifica un pico a una frecuencia f_1 bien definida. En este caso se pasa directamente a un régimen caótico nada más sobrepasar el criterio de inestabilidad. Al aumentar la tensión el pico se alarga y aumenta el ruido a baja frecuencia.

Para $\Gamma = 1$ las paredes de la celda ejercen un efecto estabilizante y los espectros son discretos, poniéndose en evidencia varios regímenes: se observa, cerca de la inestabilidad, un régimen periódico a la frecuencia f_1 que para tensiones más elevadas deviene biperiódico. Finalmente, y para valores relativamente bajos del parámetro de estabilidad, se alcanza un régimen caótico.

El pico de corriente f_1 varía con la tensión aplicada, de forma que va como V^2 para $V < 10^3 V$ y como V para tensiones superiores, poniéndose de manifiesto los dos regímenes antes mencionados. La frecuencia característica corresponde, pues, al tiempo de rotación del líquido lo que induce a pensar en un mecanismo esencial de oscilación del sistema, provocado por la entrada de carga dentro de la zona vacía. Este mecanismo será analizado en detalle más adelante, a la luz de las simulaciones numéricas que presentamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Simulación numérica

De ahí que la casualidad no se explique aquí por la necesidad, sino que más bien la necesidad se degrada hasta la producción de lo que es apenas accidental.

Federico Engels

La complejidad de las ecuaciones electrohidrodinámicas que gobiernan el movimiento de una capa líquida sometida a inyección de iones es tal que no es posible abordar completamente el problema de forma analítica. En este capítulo presentamos las diferentes simulaciones numéricas que hemos realizado para abordar tanto el problema de la estabilidad como el de la convección de amplitud finita. Incluso en el caso del cálculo numérico estas ecuaciones no son solubles de forma trivial. Al desprestigiar la difusión, la ecuación de conservación de la carga es una ecuación en derivadas parciales en primer orden y su resolución numérica presenta problemas específicos que vamos a poner de manifiesto a lo largo de este capítulo.

En primer lugar presentamos un algoritmo en diferencias finitas (SIMPLER) que ha dado buenos resultados en problemas relacionados con el transporte de masa y de calor. Como veremos, la difusión numérica hace que SIMPLER no sea un buen algoritmo en nuestro caso y, aunque reproduce algunos comportamientos cualitativos, los resultados con él conseguidos los podemos calificar de mediocres.

Un segundo algoritmo en diferencias finitas (FCT) supera esencialmente el problema de la difusión numérica. Con dicho algoritmo hemos obtenido resultados aceptables para una buena parte de las características esenciales de la electroconvección (nos referimos al ciclo de histéresis y al cálculo de estabilidad).

La imposibilidad de abordar con los algoritmos en diferencias finitas la simulación del comportamiento no estacionario de las variables dinámicas en la electroconvección de amplitud finita nos ha llevado, por último, a implementar un último algoritmo (método de las características) que presenta como gran inconveniente un tiempo de cálculo muy alto. Con este método hemos abordado la simulación del comportamiento dinámico y con él cerramos este capítulo.

2.1 Algoritmo SIMPLER

Para abordar el problema de forma completa hemos aplicado en primer lugar un algoritmo en diferencias finitas desarrollado por Patankar [23]. Este algoritmo ha sido adaptado por nosotros al problema de la inyección unipolar. Aquí repasaremos los detalles fundamentales de su implementación y los resultados con él obtenidos.

Tomamos como dominio de cálculo la mitad de una celda convectiva de altura unidad y anchura $L = 0.66$ que corresponde al valor dado por el análisis lineal para el modo más inestable [14]. Al reducir el dominio de integración al rectángulo $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$ hay que introducir condiciones de contorno en las fronteras verticales de Ω . Si queremos que Ω corresponda a la mitad de una celda convectiva, estas condiciones son:

$$u = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

en ambas fronteras verticales. El dominio se discretiza mediante un conjunto de líneas ortogonales tal y como se muestra en la figura 2.1. Los valores de q , Φ y p se calculan en el centro de cada *celda de control* mientras que los valores de u , w , E_x y E_z se calculan en las posiciones desplazadas que se indican también en dicha figura. Este corrimiento de las mallas asociadas a u y w respecto de la malla principal evita la aparición de oscilaciones espúreas en el campo de presiones y es ampliamente utilizado [24].

2.1.1 Discretizado

Nuestro objeto es pasar del sistema de ecuaciones 1.21-1.25 a un conjunto de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas sean los valores de q , Φ , p y \mathbf{v} en los puntos de la red. Cada una de las ecuaciones 1.21-1.25 da lugar a un conjunto de tantas ecuaciones como nudos tiene la red. Consideraremos cada uno de estos sistemas de ecuaciones por separado y resolveremos simultáneamente todo el conjunto mediante un procedimiento iterativo en el que se toma en cuenta el papel que juega cada ecuación.

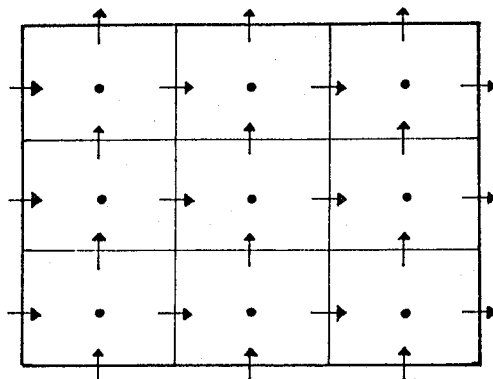


Figura 2.1: Discretización del dominio.

2.1.2 Ecuaciones de transporte

Tanto la ecuación 1.23 como la ecuación 1.25 son ecuaciones de transporte y se pueden expresar en la forma:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = S \quad (2.6)$$

donde g es la magnitud a considerar (q , u o w) \mathbf{f} el flujo de g y S un término fuente. Para obtener a partir de 2.6 una ecuación algebraica consideremos una celda de control como la de la figura 2.2 . Integramos 2.6 en dicha celda:

$$\iint \frac{\partial g}{\partial t} dx dz + \iint \nabla \cdot \mathbf{f} dx dz = \iint S dx dz \quad (2.7)$$

El primer término del miembro de la izquierda se aproxima:

$$\iint \frac{\partial g}{\partial t} dx dz = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \Delta x \Delta z \quad (2.8)$$

lo que equivale a asociar a g_{ij} el valor medio de g en la celda.

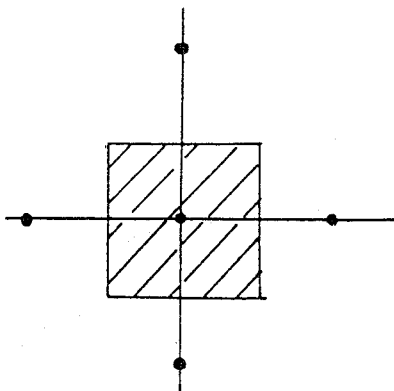


Figura 2.2: Celda de control.

El segundo término se transforma utilizando el teorema de la divergencia:

$$\iint \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dz = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (2.9)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal en cada frontera de la celda. Ahora aproximamos:

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dl = (\tilde{f}_{xi+1/2,j} - \tilde{f}_{xi-1/2,j})\Delta z + (\tilde{f}_{zi,j+1/2} - \tilde{f}_{zi,j-1/2})\Delta x \quad (2.10)$$

Los flujos \mathbf{f} tienen, en general, dos términos, uno de convección y otro de difusión:

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}g - D\nabla g \quad (2.11)$$

donde \mathbf{u} es una velocidad generalizada (la misma \mathbf{v} en la ecuación de Navier Stokes, $\mathbf{v} + \mathbf{E}$ en la ecuación de la carga) y D cierto coeficiente (M^2/T para la velocidad, α para la carga).

Para los flujos discretos $\tilde{\mathbf{f}}$, se pueden adoptar varias expresiones consistentes y que conducen a diferentes grados de aproximación. Para la parte convectiva hemos adoptado la forma conocida como *upwind differencing* que toma en cuenta el hecho de que si la velocidad \mathbf{u} en el nudo $i+1/2, j$ está dirigida hacia la derecha nada puede llegar, por convección, a ij que provenga de su derecha, y viceversa. Admitimos entonces:

$$\tilde{f}_{ci+1/2,j} = \begin{cases} g_{ij}u_{i+1/2,j} & \text{si } u_{i+1/2,j} > 0 \\ g_{i+1,j}u_{i+1/2,j} & \text{si } u_{i+1/2,j} < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

donde el subíndice c se refiere a convectivo. Expresado en forma compacta:

$$\tilde{f}_{ci+1/2,j} = \max[u_{i+1/2,j}, 0]g_{ij} - \max[-u_{i+1/2,j}, 0]g_{i+1,j} \quad (2.13)$$

donde $\max[A, B]$ es el mayor entre A y B .

En cuanto al flujo difusivo lo aproximamos en primer orden haciendo:

$$\tilde{f}_{Di+1/2,j} = D \frac{g_{ij} - g_{i+1,j}}{\Delta x} \quad (2.14)$$

y con ello

$$\tilde{f} = \tilde{f}_D + \tilde{f}_c \quad (2.15)$$

Análogamente se procede con las demás fronteras de la celda de control.

El término fuente se trata de manera idéntica al primer término del miembro izquierdo de 2.6:

$$\iint S dx dz = S_{ij} \Delta x \Delta z \quad (2.16)$$

Necesitamos también discretizar en el tiempo. El problema discreto consiste en, dado g en todos los puntos de la red en un instante de tiempo t , calcular los valores de g en un instante $t + \Delta t$. Podemos emplear cualquiera de los métodos numéricos existentes para resolver sistemas de ecuaciones ordinarias, pero evidentemente el coste en tiempo de computación representa ya una restricción y nos obliga a tomar una forma de discretización temporal lo más sencilla posible. Empleamos un método de un solo paso de primer orden (método de Euler) haciendo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{g_{ij} - g_{ij}^0}{\Delta t} \quad (2.17)$$

Hay dos formas posibles de expresar los flujos. En una elegido un paso de tiempo Δt finito y, conocido el valor de g en un tiempo t , g_{ij}^t , se construye la solución g_{ij} en $t + \Delta t$, suponiendo que durante el intervalo Δt los valores de g en los nudos vecinos permanecen muy próximos a los que tenían en el paso de tiempo anterior g_{ij}^t y se considera sólo el nudo central en $t + \Delta t$. La otra es considerar el valor de todos los nudos en $t + \Delta t$. La primera elección, conocida como esquema explícito, nos conduce a ecuaciones de la forma $g_{ij}^{t+\Delta t} = F(g_{ij}^t, g_{i-1,j}^t, \dots)$ En el segundo caso, esquema implícito, resulta un sistema de ecuaciones algebraicas con incógnitas en todos los nudos en el instante $t + \Delta t$. Aunque puede parecer más ventajoso un esquema

explícito, que conlleva un menor esfuerzo de computación, en realidad obliga a imponer ciertas restricciones sobre la cantidad Δt para obtener soluciones físicamente aceptables y numéricamente estables. En concreto, el uso de *up-wind differences* da un criterio de estabilidad numérica que puede expresarse por la condición de Friederich-Lewis [25]:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{u} \quad (2.18)$$

Asímismo, si existe coeficiente de difusión, aparece otra condición:

$$\Delta t < \frac{\Delta^2 x}{D} \quad (2.19)$$

con u alguna norma de $u(x, z)$ en el dominio considerado. El que se aplique una condición u otra depende del número de *Peclet generalizado* $u\Delta x/D$, cuyo valor determina cuál de las dos condiciones es la más restrictiva. Para Δt mayores que el valor indicado por el criterio más restrictivo el método es inestable y los errores numéricos se amplifican en cada iteración. Aunque un esquema implícito salve, en principio, esta dificultad, el hecho de que la condición 2.18 no se cumpla conlleva la pérdida de ciertas propiedades del sistema de ecuaciones resultante lo que puede obligar a cambiar el método de resolución de dicho sistema.

Elegimos un esquema implícito con lo cual la ecuación resulta ser de la forma:

$$\begin{aligned} (g_{ij}^{t+\Delta t} - g_{ij}^t) \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + (\tilde{f}_{z,i,j+1} - \tilde{f}_{z,i,j-1}) \Delta x \\ + (\tilde{f}_{x,i+1,j} - \tilde{f}_{x,i-1,j}) \Delta z = S_{ij} \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ecuaciones para la carga

De forma explícita estas ecuaciones son, en el caso de la carga y sin considerar el término de difusión:

$$A_{ij} q_{ij} = B_{ij} q_{i+1,j} + C_{ij} q_{i-1,j} + D_{ij} q_{i,j+1} + E_{ij} q_{i,j-1} + F_{i,j} \quad (2.21)$$

con:

$$A_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} +$$

$$\begin{aligned} & \left((u + E_x)_{i+1/2,j} - (u + E_x)_{i-1/2,j} \right) \Delta z + \\ & \left((w + E_z)_{i,j+1/2} - (w + E_z)_{i,j-1/2} \right) \Delta x \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$B_{ij} = \max[-(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] \Delta z \quad (2.23)$$

$$C_{ij} = \max[(u + E_x)_{i-1/2,j}, 0] \Delta z \quad (2.24)$$

$$D_{ij} = \max[-(w + E_z)_{i,j+1/2}, 0] \Delta x \quad (2.25)$$

$$E_{ij} = \max[(w + E_z)_{i,j-1/2}, 0] \Delta x \quad (2.26)$$

$$F_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} q_{ij}^0 \quad (2.27)$$

El sistema de ecuaciones resultante es dominante diagonal, esto es:

$$A_{ij} > B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} \quad (2.28)$$

Esta propiedad permite utilizar algoritmos de resolución más rápidos que en el caso de sistemas generales. Para que esta propiedad quede de manifiesto en la forma de los coeficientes basta considerar la ecuación de continuidad 1.24 y la de Poisson 1.22 en la celda de control. Integrándolas, de forma similar a lo hecho con la ecuación de la carga, se obtiene:

$$(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}) \Delta z + (w_{i,j+1/2} - w_{i,j-1/2}) \Delta x = 0 \quad (2.29)$$

y

$$(E_{x,i+1/2,j} - E_{x,i-1/2,j}) \Delta z + (E_{z,i,j+1/2} - E_{z,i,j-1/2}) \Delta x = q_{ij} \Delta x \Delta z \quad (2.30)$$

que sustituido en el coeficiente A da:

$$A_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} + q_{ij} \Delta x \Delta z \quad (2.31)$$

Para cerrar el sistema de ecuaciones es preciso reflejar en él las condiciones de contorno. Tenemos cuatro contornos:

1. Contorno inferior: la condición sobre el electrodo inyector es $q = C$. Para celdas de control sobre este electrodo basta sustituir en la ecuación 2.12 directamente el valor de $q_{i,j-1/2}$ por C . Se obtiene así

para estos nudos

$$A_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + q_{ij} \Delta x \Delta z \quad (2.32)$$

$$B_{ij} = \max[-(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] \Delta z \quad (2.33)$$

$$C_{ij} = \max[(u + E_x)_{i-1/2,j}, 0] \Delta z \quad (2.34)$$

$$D_{ij} = \max[-(w + E_z)_{i,j+1/2}, 0] \Delta x \quad (2.35)$$

$$E_{ij} = 0 \quad (2.36)$$

$$F_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} q_{ij}^0 + E_z(z=0) C \Delta x \quad (2.37)$$

2. Contorno superior: como el electrodo superior absorbe toda carga que llega a él, nada puede venir de él y hacemos en este caso $D_{ij} = 0$ quedando igual los demás coeficientes.
3. Contorno lateral derecho: se tiene una distribución de carga simétrica respecto de la frontera, debido al carácter celular del movimiento. Introducimos entonces un nudo ficticio (ver figura 2.3) de forma que $q_{i+1,j} = q_{ij}$.
4. Contorno lateral izquierdo: es en todo análogo al anterior.

En definitiva tenemos $(m-1) \times (n-1)$ ecuaciones (una por cada nudo) con $(m-1) \times (n-1)$ incógnitas: la carga en cada uno de los nudos de la red, supuestos conocidos los campos eléctrico y de velocidades.

La velocidad

De forma análoga a como se ha derivado el sistema de ecuaciones para la carga, es posible derivar a partir de la ecuación 1.25 un sistema de ecuaciones algebraicas para la velocidad. Sin embargo, varias consideraciones son necesarias debido a la naturaleza de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En las ecuaciones de Navier-Stokes aparece la presión como incógnita. Una forma usual de eliminarla explícitamente de las ecuaciones consiste en definir una función corriente como: $u = \partial\Psi/\partial z$ y $w = -\partial\Psi/\partial x$ de forma que el campo de velocidades satisfaga automáticamente la ecuación de continuidad. Tomando el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes y teniendo

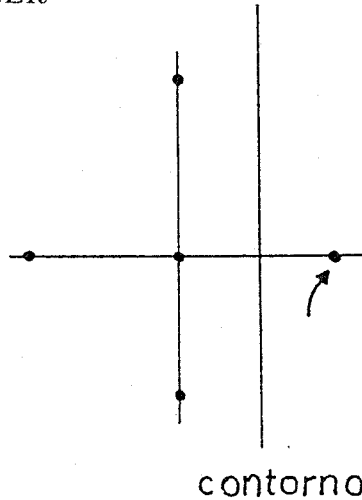


Figura 2.3: Nudo ficticio.

en cuenta que la vorticidad se define como: $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ se obtienen dos ecuaciones con incógnitas en ω y Ψ . El algoritmo SIMPLER no sigue este camino sino que calcula simultáneamente el campo de presiones y el de velocidad. La idea base es que la presión compensa a las fuerzas existentes de modo que la velocidad cumpla la ecuación de continuidad. En nuestro problema el líquido es impulsado en la dirección del campo con una fuerza qE , pero ni puede atravesar el electrodo superior ni puede tampoco comprimirse, luego se ve obligado a retornar por el otro lado de la celda empujado por las fuerzas de presión, las únicas que pueden impelirlo en ese sentido.

En el algoritmo se construye, pues, una primera velocidad sin contar el campo de presiones y se encuentra una ecuación para éste suponiendo que aquella se debe ajustar a la ecuación de continuidad.

El término de presión es de primer orden en sus derivadas. Esto introduce otra dificultad. Supongamos la situación descrita en la figura 2.4: a la velocidad u en el punto i contribuirá un término de la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.38)$$

y a la velocidad en el punto $i + 1$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{p_{i+2} - p_i}{\Delta x} \quad (2.39)$$

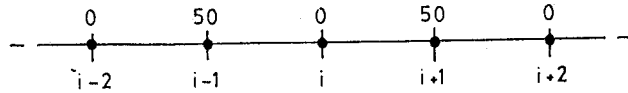


Figura 2.4: Campo oscilante de presiones.

Se ve que un campo de presiones oscilante que tomara valores alternativos (por ejemplo: 0, 50, 0, 50, ...) no produciría fuerza neta alguna sobre la velocidad, y pasaría por un campo uniforme. Para eliminar este problema es conveniente usar una malla desplazada para calcular la velocidad. Como puede verse en la figura 2.1, los puntos de velocidad se encuentran en la frontera de las celdas de control de la presión. Esto nos aporta la ventaja adicional de que en los coeficientes de la carga (ver ecuaciones 2.22-2.27) la velocidad aparece en los puntos en donde precisamente vamos a calcularla, salvando así la necesidad, que de otra forma habría, de utilizar algún tipo de interpolación.

Otro problema a resolver es la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes. Ella aparece porque la magnitud cuya conservación define la ecuación (la cantidad de movimiento) es transportada por la velocidad (proporcional a ella misma). Para manejar esta no linealidad, el algoritmo es iterativo. Al construir el sistema algebraico de ecuaciones, se considera que el campo de velocidades es conocido (usando los valores de la iteración anterior) y obtenemos un sistema de ecuaciones para la cantidad de movimiento, igual que hicimos con la carga.

Volviendo a la ecuación 2.20 y sustituyendo para la velocidad resulta ser para u:

$$A_{ij}u_{ij} = B_{ij}u_{i+1,j} + C_{ij}u_{i-1,j} + D_{ij}u_{i,j+1} + E_{ij}u_{i,j-1} + F_{ij} + \frac{T}{M^2}(p_{i-1/2,j} - p_{i+1/2,j})\Delta z \quad (2.40)$$

con:

$$A_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} +$$

$$\frac{T}{M^2} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} \quad (2.41)$$

$$B_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[-(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] \Delta z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (2.42)$$

$$C_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[(u + E_x)_{i-1/2,j}, 0] \Delta z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (2.43)$$

$$D_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[-(w + E_z)_{i,j+1/2}, 0] \Delta x + \frac{\Delta x}{\Delta z} \quad (2.44)$$

$$E_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[(w + E_z)_{i,j-1/2}, 0] \Delta x + \frac{\Delta x}{\Delta z} \quad (2.45)$$

$$F_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} u_{ij}^0 + T q_{ij} E_{x,ij} \quad (2.46)$$

Vemos que los términos penúltimo y antepenúltimo del coeficiente central suman cero de acuerdo con la ecuación de continuidad integrada en la celda de control.

Para poder obtener $u_{i+1/2,j}$, $u_{i-1/2,j}$, etcétera, de los valores anteriormente calculados hay que realizar algún tipo de interpolación, ya que estos valores no están definidos en los puntos donde conocemos u y w . Hemos comprobado que no hay diferencias notables en la precisión final de todo el algoritmo entre usar una interpolación lineal entre los valores próximos e interpolaciones más sofisticadas (hemos probado *splines* cúbicos a este efecto).

De nuevo hay que discutir la forma de las ecuaciones en el caso especial en que los nudos estén próximos a alguno de los contornos:

1. Contorno superior: en la ecuación podemos sustituir $w_{i,j+1/2}$ por su valor real conocido ($w = 0$) de donde se obtiene, siguiendo igual los demás pasos:

$$A_{ij} u_{ij} = B_{ij} u_{i+1,j} + C_{ij} u_{i-1,j} + D_{ij} u_{i,j+1} + E_{ij} u_{i,j-1} + F_{i,j} + \frac{T}{M^2} (p_{i-1/2,j} - p_{i+1/2,j}) \Delta z \quad (2.47)$$

con:

$$A_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} + B_{ij} + C_{ij} + E_{ij} + \frac{T}{M^2} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} \quad (2.48)$$

$$B_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[-(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] \Delta z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (2.49)$$

$$C_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[(u + E_x)_{i-1/2,j}, 0] \Delta z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (2.50)$$

$$D_{ij} = 0 \quad (2.51)$$

$$E_{ij} = \frac{T}{M^2} \max[(w + E_z)_{i,j-1/2}, 0] \Delta x + \frac{\Delta x}{\Delta z} \quad (2.52)$$

$$F_{ij} = \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} u_{ij}^0 + T q_{ij} E_{x,ij} \quad (2.53)$$

2. Contorno inferior: es en todo análogo al anterior.
3. Contorno vertical izquierdo: en este caso conocemos directamente el valor $u_{i-1/2,j}$ (de nuevo es cero), luego basta sustituirlo en la ecuación para u_{ij} .
4. Contorno vertical derecho: ahora es $u_{i+1/2,j}$ el valor que queda anulado, quedando igual todo lo demás.

Con todo ello tenemos un sistema de ecuaciones algebraicas con $(m - 2) \times (n - 1)$ ecuaciones con igual número de incógnitas.

Para la componente w de la velocidad, la deducción de las ecuaciones es totalmente análoga.

2.1.3 Obtención de la presión

Para obtener la presión seguimos la idea, ya comentada, de exigirle a la velocidad que cumpla la ecuación de continuidad. Considerando una celda de control principal como la de la figura 2.2, tendremos las velocidades en los puntos $i + 1/2, j$, $i - 1/2, j$, etcétera, expresadas de la forma:

$$u_{i+1/2,j} = \hat{u}_{i+1/2,j} + \frac{T}{M^2} \Delta z \frac{p_{ij} - p_{i+1,j}}{A_{i+1/2,j}} \quad (2.54)$$

$$u_{i-1/2,j} = \hat{u}_{i-1/2,j} + \frac{T}{M^2} \Delta z \frac{p_{i-1,j} - p_{i,j}}{A_{i-1/2,j}} \quad (2.55)$$

$$w_{i,j+1/2} = \hat{w}_{i,j+1/2} + \frac{T}{M^2} \Delta x \frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{A_{i,j+1/2}} \quad (2.56)$$

$$w_{i,j-1/2} = \hat{w}_{i,j-1/2} + \frac{T}{M^2} \Delta x \frac{p_{i,j-1} - p_{i,j}}{A_{i,j-1/2}} \quad (2.57)$$

donde hemos separado explícitamente la contribución de la presión. La ecuación de continuidad se escribe ahora:

$$(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})\Delta z + (w_{i,j+1/2} - w_{i,j-1/2})\Delta x = 0 \quad (2.58)$$

y sustituyendo los valores anteriores en ella obtenemos una ecuación para la presión:

$$A_{ij}p_{ij} = B_{ij}p_{i+1,j} + C_{ij}p_{i-1,j} + D_{ij}p_{i,j+1} + E_{ij}p_{i,j-1} + F_{ij} \quad (2.59)$$

con

$$B_{ij} = \frac{T}{M^2} \frac{\Delta z^2}{A_{i+1/2,j}^u} \quad (2.60)$$

$$C_{ij} = \frac{T}{M^2} \frac{\Delta z^2}{A_{i-1/2,j}^u} \quad (2.61)$$

$$D_{ij} = \frac{T}{M^2} \frac{\Delta x^2}{A_{i,j+1/2}^w} \quad (2.62)$$

$$E_{ij} = \frac{T}{M^2} \frac{\Delta x^2}{A_{i,j-1/2}^w} \quad (2.63)$$

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} \quad (2.64)$$

$$F_{ij} = (\hat{u}_{i+1/2,j} - \hat{u}_{i-1/2,j})\Delta z + (\hat{w}_{i,j+1/2} - \hat{w}_{i,j-1/2})\Delta x \quad (2.65)$$

Hay que observar que el coeficiente central A_{ij} es exactamente la suma de los restantes coeficientes. Esto expresa el hecho de que la presión no está determinada absolutamente: si determinado conjunto de valores satisface el sistema de ecuaciones, también lo satisface cualquier otro conjunto obtenido de áquel sumando una cantidad constante a cada uno de los valores. Queda así de manifiesto que lo que importa a la dinámica del sistema son las diferencias de presión.

El sistema de ecuaciones es por tanto singular e irresoluble por métodos directos a menos que se fije arbitrariamente el valor de la presión en un punto. Hemos optado por obtener la solución por un método iterativo (ver sección 2.1.5), que obvia este problema, por haberse mostrado más rápido y eficaz. De esta forma la solución obtenida es la más cercana a los valores iniciales y no es necesario fijar arbitrariamente el nivel.

2.1.4 Potencial eléctrico

El potencial eléctrico viene determinado por la ecuación de Poisson 1.22, dada la distribución de carga, y las condiciones de contorno mixtas 1.26-1.27 y 2.3. Al ser una ecuación elíptica, pasar a un sistema de ecuaciones en diferencias no ofrece mayor dificultad y las derivadas se pueden reemplazar directamente por diferencias centrales [26]. Así la ecuación $\nabla^2\Phi = -q^2$ la escribimos, para el nudo ij :

$$\frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{ij}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{ij}}{(\Delta z)^2} = -q_{ij} \quad (2.66)$$

De donde resulta de nuevo un sistema de $(m-1) \times (n-1)$ ecuaciones con igual número de incógnitas. El campo eléctrico se obtiene por derivación del potencial:

$$E_{x,i+1/2,j} = -\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.67)$$

Hay abundantes métodos en la literatura para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones de este tipo. Hemos elegido un método directo [26] que describiremos a continuación.

Definiendo $\Phi_i = (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{i,n-1})$ con $1 \leq i \leq m-1$ el sistema de ecuaciones 2.66 se expresa como

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

con

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -4I & I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ I & -4I & I & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & I & -4I & I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & I & -4I \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

y $\mathbf{f}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{i,n-1}) \Delta x \Delta z$.

Seguindo a Isaacson y Keller descomponemos: $\mathcal{A} = \mathcal{L}\mathcal{U}$ con

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ I & A_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & I & A_i & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & I & A_{m-1} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

y

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & T_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & I & T_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 & I & T_i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

siendo

$$\begin{aligned} T_1 &= I & A_1 &= -4I \\ A_i &= -4I - T_{i-1} & i &= 2, 3, \dots, m-1 \\ T_i &= A_i^{-1} & i &= 2, 3, \dots, m-2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

El sistema es ahora equivalente a:

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathbf{f} \text{ y } \mathcal{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2.73)$$

y la solución se obtiene a partir de la siguiente secuencia:

$$\mathbf{y}_1 = A_1^{-1}\mathbf{f}_1 \quad (2.74)$$

$$\mathbf{y}_i = A_1^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{y}_{i-1}) \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.75)$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \quad (2.76)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i - T_i\mathbf{x}_{i+1} \quad i = n-1, \dots, 1 \quad (2.77)$$

Aquí hemos desarrollado la descomposición para una malla regular. En el caso de malla irregular, que hemos utilizado en el programa definitivo, la descomposición se realiza de manera análoga sólo que más engorrosa.

2.1.5 Solución del sistema de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones que hay que resolver son de la forma

$$A_{ij}x_{ij} = B_{i,j}x_{i+1,j} + C_{ij}x_{i-1,j} + D_{ij}x_{ij+1} + E_{ij}x_{ij-1} + F_{ij} \quad (2.78)$$

Empleamos para ello el algoritmo línea por línea [23]. Partiendo de un conjunto de valores iniciales x_{ij}^* fijamos una línea, por ejemplo j fijo (i fijo) y construimos el sistema:

$$A_{ij}x_{ij} = B_{i,j}x_{i+1,j} + C_{ij}x_{i-1,j} + D_{ij}x_{ij+1}^* + E_{ij}x_{ij-1}^* + F_{ij} \quad (2.79)$$

con lo que tenemos para cada j (i) un sistema de $m - 1$ ($n - 1$) ecuaciones tridiagonal. Este sistema lo resolvemos por el algoritmo para matrices tridiagonales TDMA [23] y pasamos a considerar la línea $j + 1$ ($i + 1$) tomando ahora como valores iniciales para la línea j los encontrados anteriormente. El proceso se repite hasta lograr la convergencia deseada.

Para evitar variaciones demasiado bruscas en los valores de x_{ij} que provoquen comportamientos oscilatorios que nos alejen de la convergencia, se hace necesario usar subrelajación, esto es introducir un parámetro que haga que los valores computados en una iteración no difieran mucho de los anteriores. Este parámetro lo introducimos de la siguiente forma:

$$x_{ij} = x_{ij}^* + \gamma \left[\frac{B_{i,j}x_{i+1,j} + C_{ij}x_{i-1,j} + D_{ij}x_{ij+1}^* + E_{ij}x_{ij-1}^* + F_{ij}}{A_{ij}} - x_{ij}^* \right] \quad (2.80)$$

dando a γ valores inferiores a 1, conseguimos que x_{ij} no difiera mucho de x_{ij}^* en cada iteración, y como se ve, el valor de x_{ij} encontrado una vez alcanzada la convergencia cumple el sistema de ecuaciones original.

2.1.6 Algoritmo

Tenemos ya todos los elementos para construir la solución de nuestro problema. Supongamos conocidas todas las magnitudes en un valor dado del tiempo: q_{ij}^0 , Φ_{ij}^0 , u_{ij}^0 , w_{ij}^0 y p_{ij}^0 . Seguimos entonces los pasos siguientes:

1. Obtenemos la carga solucionando el sistema de ecuaciones correspondiente con los valores dados de \mathbf{E} y \mathbf{v} .

2. Con dicho valor de la carga solucionamos la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico y obtenemos el campo eléctrico por derivación.
3. Calculamos los coeficientes de la velocidad y con ellos las velocidades intermedias, prescindiendo del término de la presión, según las fórmulas:

$$\hat{u}_{ij} = (B_{ij}u_{i+1,j} + C_{ij}u_{i-1,j} + D_{ij}u_{i,j+1} + E_{ij}u_{i,j-1} + F_{ij})/A_{ij} \quad (2.81)$$

$$\hat{w}_{ij} = (B_{ij}w_{i+1,j} + C_{ij}w_{i-1,j} + D_{ij}w_{i,j+1} + E_{ij}w_{i,j-1} + F_{ij})/A_{ij} \quad (2.82)$$

4. Se calculan los coeficientes de la presión y se obtiene ésta resolviendo el sistema de ecuaciones tomando como término independiente:

$$F_{ij} = (\hat{u}_{i+1,j} - \hat{u}_{i-1,j}) \Delta z + (\hat{w}_{i,j+1} - \hat{w}_{i,j-1}) \Delta x \quad (2.83)$$

5. Con el término de presión incluido se resuelven las ecuaciones para u y w obteniéndose u^* y w^* .
6. Usando como término independiente:

$$F_{ij} = (u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*) \Delta z + (w_{i,j+1}^* - w_{i,j-1}^*) \Delta x \quad (2.84)$$

se obtiene, resolviendo el sistema de ecuaciones para la presión, una corrección a ésta p' .

7. Se corrige entonces la velocidad:

$$u_{ij} = u_{ij}^* + \frac{T}{M^2} \frac{(p'_{i-1,j} - p'_{i+1,j}) \Delta z}{A_{ij}} \quad (2.85)$$

$$w_{ij} = w_{ij}^* + \frac{T}{M^2} \frac{(p'_{i,j-1} - p'_{i,j+1}) \Delta x}{A_{ij}} \quad (2.86)$$

8. Se vuelve al paso 1 repitiendo el ciclo hasta obtener la convergencia deseada.
9. Con los valores obtenidos se recomienza el ciclo para avanzar en el tiempo.

2.1.7 Comentarios sobre el algoritmo

Algunos de los pasos de la secuencia que compone el algoritmo pueden, a primera vista, parecer innecesarios o injustificados. Hagamos un breve comentario al respecto.

Los pasos 6 y 7 se realizan puesto que las velocidades u^* y w^* satisfacen las ecuaciones de momento, pero con un término de presión que es sólo aproximado y, por tanto, no cumplen la ecuación de continuidad. Para ajustar la velocidad a la ecuación de continuidad es para lo que se introduce el factor de corrección p' . Realizando la misma operación sucesivamente se llega a una solución que cumple ambos requisitos (la ecuación de continuidad y las ecuaciones de momento).

Como criterio de convergencia se puede usar precisamente el hecho de que p' sea más pequeño que cierto valor dado, puesto que cuando esto ocurra el campo de velocidades y el de presión obtenidos cumplirán todos los requisitos.

2.1.8 Resultados y discusión

El algoritmo SIMPLER ha sido implementado en un programa FORTRAN. En casi todos los cálculos se ha exigido una precisión de tres cifras significativas, tanto para la convergencia en el cálculo en cada paso de tiempo como para considerar que se ha llegado al estado estacionario.

Para testear el programa hemos resuelto un problema puramente hidrodinámico ampliamente estudiado en la literatura: el flujo inducido en una cavidad por el movimiento de una de las paredes (ver figura 2.5). En esta situación se origina un vórtice central asimétrico. Nuestro programa ha dado resultados comparables con los existentes (ver por ejemplo [27] y [28]) hasta valores de $Re = 500$, tanto en el estado estacionario como en el transitorio.

Desde el punto de vista eléctrico hemos reproducido el estado sin movimiento, para valores de T suficientemente bajos, obteniendo un acuerdo perfecto con la solución analítica.

Hemos calculado el ciclo de histéresis para diferentes niveles de inyección, obteniendo cada vez los valores de los criterios de estabilidad lineal y no lineal. En todos los casos se alcanza, tras un transitorio consistente en una serie de oscilaciones de la amplitud del movimiento, un estado estacionario. Los cálculos se han realizado con una malla de 7×11 nudos ($\Delta x = \Delta z = 0.1$) y un paso de tiempo de 0.1 a 0.2. Se precisa subrelajación para resolver los

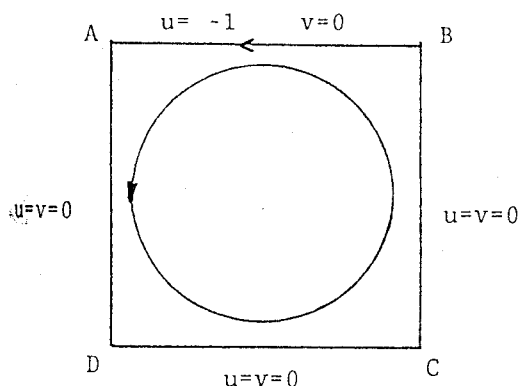


Figura 2.5: Flujo inducido en una cavidad por el movimiento de una de sus paredes.

sistemas de ecuaciones de la velocidad (0.5-0.7) y la presión (0.8).

Para $C = 0.1$ (inyección débil) el ciclo obtenido se reproduce en la figura 2.6. así como el campo de velocidades para un valor típico de T y la distribución de carga para ese mismo valor. Los criterios son $T_c = 25000$ y $T_f = 11000$. El valor del criterio lineal está suficientemente cerca del valor 22075 obtenido por Atten y Moreau [14] por una aproximación lineal. El criterio no lineal está muy sobreestimado con respecto a los valores obtenidos por Atten y Lacroix [17] $T_f = T_c C$. Es interesante notar que el campo de velocidades obtenido es prácticamente autosimilar en el rango de valores de T explorado.

En la figura 2.7 se presenta el ciclo obtenido para $C = 1$ (inyección moderada) y, de nuevo, la distribución de carga. El campo de velocidades tiene, esencialmente, el mismo aspecto que para $C = 0, 1$. El criterio lineal está por debajo de $T = 700$, y el no-lineal es $T_f = 380$. Ambos están muy por encima de los valores 510 y 244, respectivamente, encontrados por Atten y Lacroix [17] por un método del tipo Galerkin.

En los cálculos para $C = 10$ (inyección fuerte) se presenta una nueva

2.1 Algoritmo SIMPLER

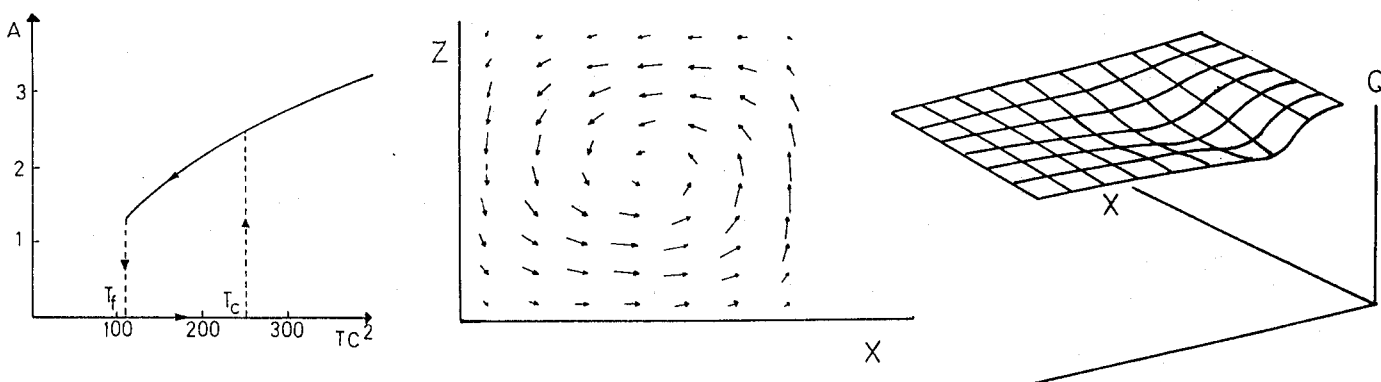


Figura 2.6: Ciclo de histéresis, campo de velocidades y distribución de carga ($T = 30000$) para $C = 0.1$.

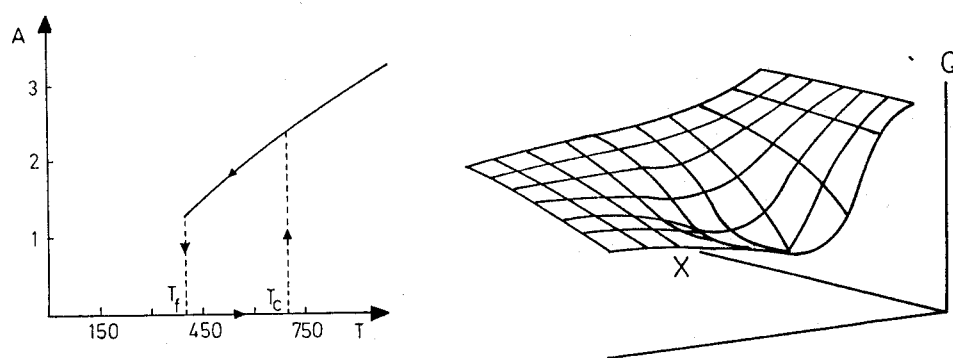


Figura 2.7: Ciclo de histéresis y distribución de carga ($T = 500$, $C = 1$).

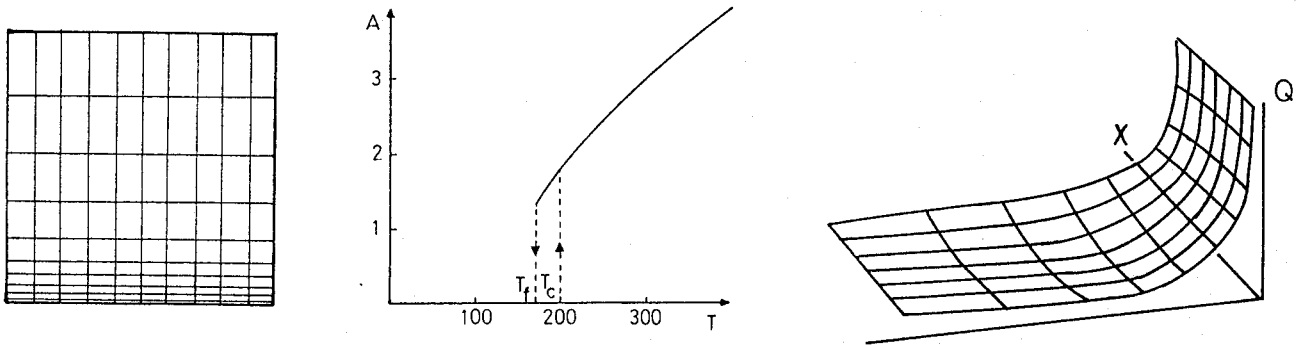


Figura 2.8: Malla, ciclo de histéresis y distribución de carga ($T = 200$) para $C = 10$.

dificultad: el gradiente de carga es muy pronunciado cerca del electrodo inyector. Ello obliga a utilizar una malla variable (más densa cerca de dicho electrodo) para poder resolver los detalles de la variación de la carga. La malla utilizada es tal que la separación entre nudo y nudo en la dirección z varía como el cuadrado de la distancia, asegurando un incremento constante, entre un nudo y el siguiente, del valor de la carga en esa dirección para la solución hidrostática (en ésta, la carga varía como z^{-2}).

Esta malla se muestra en la figura 2.8. Los resultados obtenidos (ciclo de histéresis y distribución de la carga) se representan en dicha figura. El criterio lineal está por debajo de $T = 200$ y el no lineal es $T_f = 170$. Atten y Lacroix obtienen 164 y 111, respectivamente. Estos valores pueden ser comparados con los experimentales puesto que el valor de $C = 10$ representa esencialmente el caso de corriente limitada por la densidad de carga ($C \rightarrow \infty$). Los valores experimentales obtenidos por Atten y Lacroix son 100 para el criterio lineal y 90 para el no lineal, por debajo de los valores teóricamente predichos.

2.1.9 Difusión numérica en SIMPLER

Los resultados obtenidos en la simulación numérica con el algoritmo SIMPLER son francamente malos. El criterio no-lineal aparece muy sobreestimado y la relación $A(T)$ obtenida toma valores de A , para un T dado, muy por debajo de los valores obtenidos tanto por modelos simples como el expuesto en la sección 1.5, como por métodos tipo Galerkin, etcétera. La razón de esta disparidad hay que buscarla en lo mal que el algoritmo reproduce la distribución de carga. En el capítulo 1 vimos como, en ausencia de difusión molecular, la distribución de carga posee un hueco en el que el valor de la densidad de carga se anula. En las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 se ve que en la distribución calculada por SIMPLER aparece efectivamente una depresión en la región que corresponde a la zona de retorno del líquido hacia el electrodo inyector. La densidad de carga en esta depresión, lejos de anularse, toma valores bastante cercanos a C . Ello ocurre porque la forma en que la ecuación de conservación de la carga se discretiza (*upwind differencing*) conlleva lo que se conoce como *difusión numérica*, fenómeno que aparece en todos los métodos en diferencias finitas.

Para ver como surge la difusión numérica consideremos el caso más simple de una ecuación de transporte unidimensional [25]:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial ug}{\partial x} = 0 \quad (2.87)$$

Si $u(x) > 0$ la forma discretizada (*upwind differencing*) de esta ecuación en una malla $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$ es:

$$g_i^{t+\Delta t} = g_i^t - \frac{u \Delta t}{\Delta x} (g_i^t - g_{i-1}^t) \quad (2.88)$$

donde para simplificar la discusión hemos considerado que u es constante y hemos admitido una discretización explícita en el tiempo.

Desarrollando $g_i^{t+\Delta t}$ y g_{i-1}^t en serie de potencias, es:

$$g_i^{t+\Delta t} = g_i^t + \frac{\partial g_i}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta^3 t) \quad (2.89)$$

$$g_{i-1}^t = g_i^t - \frac{\partial g_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + O(\Delta^3 x) \quad (2.90)$$

De la ecuación 2.87, derivando respecto del tiempo y utilizándola de nuevo para expresar $\partial g/\partial t$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (2.91)$$

Sustituyendo en 2.88 los desarrollos obtenidos y haciendo uso de esta última ecuación, se obtiene:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial u g}{\partial x} + \alpha_N \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + O(\Delta^2 t, \Delta^2 x) \quad (2.92)$$

con

$$\alpha_N = \frac{1}{2} u \Delta x \left(1 - \frac{u \Delta t}{\Delta x}\right) \quad (2.93)$$

A $c = u \Delta t / \Delta x$ se le conoce como el número de Courant. Vemos que, desarrollando hasta segundo orden, aparece un término que tiene la forma típica de un término de difusión. El coeficiente α_N se denomina coeficiente de difusión numérica y, como vemos, depende de las variables del discretizado Δx y Δt . Cuando es $c = 1$ la sucesión 2.88 nos proporciona la solución exacta de la ecuación 2.87. Para $c < 1$ la difusión está siempre presente y es tanto mayor cuanto menor sea el paso de tiempo elegido para un distanciado de la red dado. El valor $c > 1$ nos da un coeficiente de difusión negativo, esto no indica otra cosa que el *criterio de estabilidad numérica* del método, ya que entonces cualquier perturbación numérica, y estas se introducen gracias a los errores de truncamiento siempre presentes, se verá amplificada iteración tras iteración, provocando la divergencia de la sucesión 2.88.

Para ilustrar un poco más el fenómeno de la difusión numérica en los métodos en diferencias finitas consideremos el análisis de estabilidad tipo Von Neumann [25] de la ecuación 2.88. Para ello consideremos una solución de número de onda k de la misma:

$$g_j^t = A^n e^{ikj \Delta x} \quad (2.94)$$

con $x = j \Delta x$ y $t = n \Delta t$. Como los A^n serán en general complejos, se puede expresar $A^{n+1} = A^n T e^{i\delta}$. Sustituyendo en 2.88 se obtiene:

$$T = (1 - c)^2 + c^2 + 2(1 - c)c \cos k \Delta x \quad (2.95)$$

y

$$\tan \delta = \frac{c \operatorname{sen} k \Delta x}{1 - c + \cos k \Delta x} \quad (2.96)$$

A partir de 2.95 se ve que para $c > 1$ es $\Gamma > 1$ y de nuevo $c = 1$ aparece como el límite de estabilidad. Cuanto menor es c mayor es el amortiguamiento, de la solución, de acuerdo con la idea de que mayor es la difusión numérica del método.

A la difusión numérica corresponde también un *error de fase* expresado por 2.96. Cuando $k \Delta x \ll 1$ (el espaciado de la malla es muy pequeño comparado con la distancia típica de variación de la solución $1/k$) el error de fase tiende a cero: la malla es capaz de resolver los detalles del problema. En el límite contrario el error de fase puede ser cualquiera, y el algoritmo es totalmente ineficiente para reproducir fuertes gradientes, si éstos existen, en la solución.

Volviendo a la ecuación 1.25 y tomando su rotacional, tenemos:

$$\frac{T}{M^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial w \omega}{\partial z} \right) = \nabla^2 \omega + T(\nabla \times q\mathbf{E})_y \quad (2.97)$$

donde $\omega = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$ es la componente y de la vorticidad. El término fuente de vorticidad en esta ecuación es $T(\nabla \times q\mathbf{E}) = T\nabla q \times \mathbf{E}$ donde se ha utilizado $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Vemos así que los gradientes de carga perpendiculares a la dirección del campo son los responsables esenciales del movimiento. Al estar éstos suavizados por la difusión numérica en SIMPLER, el método subestima el par neto que la fuerza eléctrica ejerce sobre cada celda convectiva y, por tanto, reduce apreciablemente los valores de la amplitud encontrados para un valor dado de T . A continuación presentamos un algoritmo alternativo en diferencias finitas, que mejora sustancialmente el tratamiento del problema de la difusión numérica.

2.2 Algoritmo FCT

Dados los problemas que existen con los algoritmos en diferencias finitas para resolver ecuaciones de transporte en primer orden, problemas que han quedado de manifiesto en los resultados obtenidos con el algoritmo SIMPLER, se hace preciso acudir a métodos más sofisticados. Hemos utilizado para ello uno de los algoritmos antidifusivos conocidos como "Flux Corrected Transport" (FCT) y que pasamos a describir.

2.2.1 Discretización

Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (2.98)$$

con $\mathbf{f} = (\mathbf{u} + \mathbf{E})q$ definida sobre el dominio rectangular $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$.

Como ya hemos visto, este tipo de ecuación admite soluciones discontinuas. Los métodos numéricos en primer orden, como el *upwind differencing* usado en SIMPLER, suavizan dichas discontinuidades y son incapaces de reproducirlas correctamente, pero poseen una propiedad que los métodos de orden superior no tienen: son más estables y no aparecen oscilaciones espúreas en la función buscada. Los métodos de orden superior, aunque más eficaces, en principio, para reproducir discontinuidades de salto y situar correctamente dichas discontinuidades padecen, por efecto de los errores de fase, estas oscilaciones, que desestabilizan el esquema numérico.

La idea clave de los métodos FCT es la de utilizar un método de orden bajo para computar, asegurando la estabilidad numérica, una primera solución y descontar, de alguna forma, lo que en esa primera solución ha sido transportado por difusión con la ayuda de un método de orden superior.

Desde que apareció el primero de ellos [29,30,31] se han desarrollado varios algoritmos FCT, cada uno con ciertas ventajas e inconvenientes [32,33,34,35]. Nosotros hemos elegido el desarrollado por Zalesak en [36] por dos razones fundamentales: porque es directamente aplicable a problemas bidimensionales y por la claridad de sus pasos desde el punto de vista conceptual. A continuación vamos a describir en detalle dicho algoritmo.

Consideremos el dominio Ω partido en una malla regular $\{x_i, z_j\}$ con $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta z = z_{j+1} - z_j$ y consideremos los instantes de tiempo t^n, t^{n+1}, \dots con $\Delta t = t^n - t^{n-1}$. Conocida la distribución de carga q_i^n en todos

los puntos de la red $\{x_i, z_j\}$ en un instante de tiempo t^n , la ecuación 2.98 se aproxima, en diferencias finitas de la forma:

$$q_{ij}^{n+1} = q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z} [F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}] \quad (2.99)$$

Los F y G son los flujos transportivos y dependen del valor de f en varios puntos de la red en el instante de tiempo t^n y/o instantes anteriores. La dependencia de F y G respecto de f define el método de integración y, en cuanto a la dependencia temporal, el método es implícito, como ya dijimos al hablar del SIMPLER si en F y G , q aparece en el instante t^{n+1} , o explícito si aparece en t^n e instantes anteriores.

Los pasos a seguir son:

1. Calcular $F_{i+1/2,j}^L$ y $G_{i,j+1/2}^L$, los flujos transportivos por un método de bajo orden. Hemos usado aquí *upwind differencing* junto a un término de difusión cuya misión es estabilizar el esquema:

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j}^L &= \left(\max[(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] q_{ij}^n \right. \\ &\quad \left. - \max[-(u + E_x)_{i+1/2,j}, 0] q_{i+1,j}^n \right) \Delta z \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} (q_{i+1,j}^n - q_{ij}^n) \end{aligned} \quad (2.100)$$

2. Calcular $F_{i+1/2,j}^H$ y $G_{i,j+1/2}^H$ por un método de orden superior. Hemos usado un método de segundo orden:

$$F_{i+1/2,j}^H = (u + E_x)_{i+1/2,j} (q_{ij} + q_{i+1,j}) \frac{\Delta z}{2} \quad (2.101)$$

3. Se definen entonces los flujos antidifusivos:

$$A_{i+1/2,j} = F_{i+1/2,j}^H - F_{i+1/2,j}^L \quad (2.102)$$

$$A_{i,j+1/2} = G_{i,j+1/2}^H - G_{i,j+1/2}^L \quad (2.103)$$

4. Se calcula una primera solución con el método de primer orden:

$$q_{ij}^{td} = q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z} [F_{i+1/2,j}^L - F_{i-1/2,j}^L + G_{i,j+1/2}^L - G_{i,j-1/2}^L] \quad (2.104)$$

5. Se limitan los flujos antidifusivos:

$$A_{i+1/2,j}^c = C_{i+1/2,j} A_{i+1/2,j}, \quad 0 \leq C_{i+1/2,j} \leq 1 \quad (2.105)$$

6. Y se aplica la antidifusión:

$$q_{ij}^{n+1} = q_{ij}^{td} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z} [A_{i+1/2,j}^c - A_{i-1/2,j}^c + A_{i,j+1/2}^c - A_{i,j-1/2}^c] \quad (2.106)$$

2.2.2 Limitación de flujos

Si elimináramos el paso cinco tendríamos simplemente un método de segundo orden, con las consiguientes oscilaciones espúreas que le son propias cerca de los gradientes pronunciados. La aplicación de los correctores de flujo tiene como misión que la solución final no sufra dichas oscilaciones. Para ello los flujos antidifusivos se corrigen de manera que los valores finalmente obtenidos de q_{ij}^{n+1} no excedan cierto valor q_{ij}^{\max} ni estén por debajo de cierto valor q_{ij}^{\min} . Vamos a describir cómo se construyen los $C_{i+1/2,j}$ con estas condiciones.

Sea P_{ij}^+ la suma de todos los flujos antidifusivos que confluyen sobre el punto (x_i, z_j) , esto es, ver figura 2.9:

$$P_{ij}^+ = \max[0, A_{i-1/2,j}] - \min[0, A_{i+1/2,j}] \\ + \max[0, A_{i,j-1/2}] - \min[0, A_{i,j+1/2}] \quad (2.107)$$

y sea $Q_{ij}^+ = (q_{ij}^{\max} - q_{ij}^{td}) \Delta x \Delta z / \Delta t$ Definimos entonces:

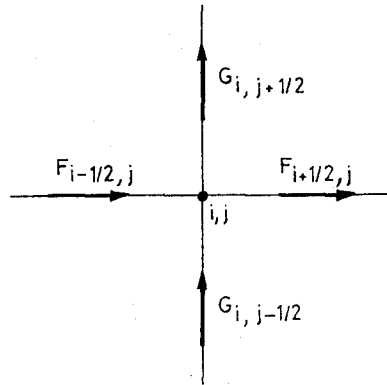
$$R_{ij}^+ = \begin{cases} \min(1, Q_{ij}^+ / P_{ij}^+) & \text{si } P_{ij}^+ > 0 \\ 0 & \text{si } P_{ij}^+ = 0 \end{cases} \quad (2.108)$$

De forma análoga definimos P_{ij}^- como la suma de todos los flujos que parten del nudo ij :

$$P_{ij}^- = \max[0, A_{i+1/2,j}] - \min[0, A_{i-1/2,j}] \\ + \max[0, A_{i,j+1/2}] - \min[0, A_{i,j-1/2}] \quad (2.109)$$

y $Q_{ij}^- = (q_{ij}^{td} - q_{ij}^{\min}) \Delta x \Delta z / \Delta t$ y también:

$$R_{ij}^- = \begin{cases} \min(1, Q_{ij}^- / P_{ij}^-) & \text{si } P_{ij}^- > 0 \\ 0 & \text{si } P_{ij}^- = 0 \end{cases} \quad (2.110)$$

Figura 2.9: Flujos confluente en (x_i, z_j) .

Con todo ello los correctores de flujo quedan definidos por:

$$C_{i+1/2,j} = \begin{cases} \min(R_{i+1,j}^+, R_{ij}^-) & \text{si } A_{i+1/2,j} \geq 0 \\ \min(R_{ij}^+, R_{i+1,j}^-) & \text{si } A_{i+1/2,j} < 0 \end{cases} \quad (2.111)$$

y

$$C_{i,j+1/2} = \begin{cases} \min(R_{ij}^+, R_{i,j+1}^-) & \text{si } A_{i+1/2,j} \geq 0 \\ \min(R_{ij}^+, R_{i,j+1}^-) & \text{si } A_{i+1/2,j} < 0 \end{cases} \quad (2.112)$$

Para entender cómo actúan los correctores tomemos una situación concreta como la descrita en la figura 2.10. El flujo $A_{i+1/2,j}$ tiende a acrecentar el gradiente, corregir el efecto de la difusión, subiendo el valor de $q_{i+1,j}$ y disminuyendo el valor de q_{ij} . Si lo aplicásemos entero, el valor resultante de $q_{i+1,j}$ podría ser mayor que el $q_{i+1,j}$ máximo permitido y q_{ij} menor que el mínimo permitido, este es el mecanismo esencial por el que se producen las sobreoscilaciones y, en última instancia, la solución pueda desestabilizarse. Por ello $C_{i+1/2,j}$ es el valor más pequeño de los $R_{i+1,j}^+$ o R_{ij}^- donde, por su definición R_{ij}^+ es la fracción de flujo que podemos añadir a $q_{i+1,j}$ sin que este valor sobrepase $q_{i+1,j}^{\max}$ y R_{ij}^- es la fracción de flujo que podemos descontar de q_{ij} sin que se obtenga un valor inferior a q_{ij}^{\min} .

Para completar el algoritmo faltan por definir los valores mínimos y máximos admisibles de q en cada nudo de la red. Estos valores se pueden definir en base a ciertas consideraciones prácticas y las características específicas del problema que se considere. Claramente, si se desea poder reproducir ondas de choque y discontinuidades que son transportadas a medida

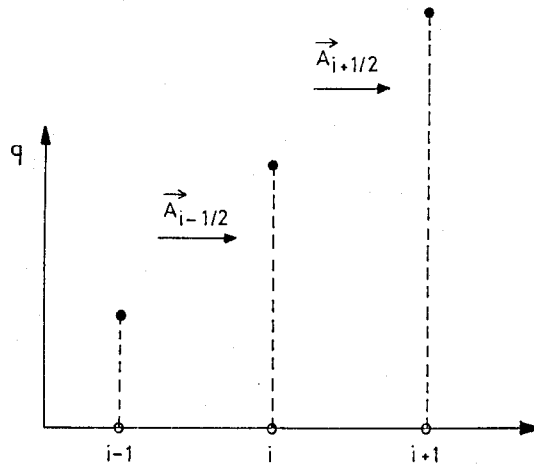


Figura 2.10: Flujos antidifusivos.

que avanza el tiempo, los valores máximos y mínimos admisibles han de ser, de entrada, los que había en pasos de tiempo anteriores tanto en el nudo considerado como en los adyacentes. Dicho de otra manera el algoritmo no debe introducir, en el nuevo paso de tiempo, valores superiores o inferiores a los que ya se tenían en pasos anteriores. Estas condiciones se pueden expresar como:

$$q_{ij}^a = \max(q_{ij}^n, q_{ij}^{td}) \quad (2.113)$$

$$q_{ij}^{\max} = \max(q_{i-1,j}^a, q_{ij}^a, q_{i+1,j}^a, q_{i,j-1}^a, q_{i,j+1}^a) \quad (2.114)$$

$$q_{ij}^b = \min(q_{ij}^n, q_{ij}^{td}) \quad (2.115)$$

$$q_{ij}^{\min} = \min(q_{i-1,j}^b, q_{ij}^b, q_{i+1,j}^b, q_{i,j-1}^b, q_{i,j+1}^b) \quad (2.116)$$

En nuestro problema hay además dos límites obvios que se deben introducir para la densidad de carga en dichas ecuaciones: C , el nivel de inyección y 0, ya que la densidad de carga es siempre definida positiva.

2.2.3 Tests sobre el algoritmo FCT

Una vez implementado el algoritmo FCT hemos realizado diferentes tests para comprobar su buen funcionamiento y su adecuación al problema que nos ocupa. A parte del propio test que describe Zalesak (o. c.) de hacer girar

un sólido rígido sobre sí mismo (test del cilindro) hemos realizado una serie de comprobaciones más específicas del problema de la inyección unipolar.

El primer test realizado atañe al comportamiento del algoritmo frente a la evolución dinámica de una onda de choque clásica. Consiste en encontrar la solución transitoria de la ecuación de conservación de la carga en una dimensión:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (2.117)$$

para las condiciones iniciales $q = 0$ en $t = 0$ sobre Ω y $q = C$ en $z = 0$ para todo t . Esta ecuación corresponde a suponer que la velocidad del líquido es cero en todo el volumen y que el campo eléctrico es igual a la unidad. La solución de esta ecuación es, obviamente, $q = C$ si $z < t$ y $q = 0$ si $z > t$. El algoritmo se ha mostrado capaz de reproducir este tipo de solución para $t < 1$ usando una malla unidimensional de 20 puntos. Aún así hay cierta difusión numérica presente lo que hace que la solución no sea exactamente una discontinuidad sino que aparece como se muestra en la figura 2.11. La anchura del perfil, que teóricamente es una línea vertical, nos sirve para estimar el coeficiente numérico de difusión. En efecto, podemos suponer que la solución representada en la figura no corresponde a la ecuación 2.117 sino a una ecuación del tipo:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = \alpha_N \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad (2.118)$$

donde α_N es el coeficiente de difusión numérica. Esta ecuación tiene soluciones de la forma $q(z, t) = f((z - t)^2 / \alpha_N t)$ donde f es una función que depende de las condiciones iniciales (en nuestro caso está relacionada con la función error). Comparando la semianchura de los perfiles de la densidad de carga para dos o tres tiempos consecutivos se estima fácilmente el valor de α_N . Hemos obtenido de esta forma que es $\alpha_N \sim 10^{-3}$. Los otros tests realizados los expondremos en el próximo capítulo, donde introduciremos la difusión molecular en el algoritmo.

2.2.4 Ciclo de histéresis

Para obtener el ciclo de histéresis con el algoritmo FCT hemos realizado las mismas aproximaciones que hicimos en el capítulo anterior para el estudio semianalítico del caso no lineal. Hemos supuesto que la velocidad varía de forma autosimilar $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_0(x, z)$ donde $\mathbf{v}_0(x, z)$ es una función dada

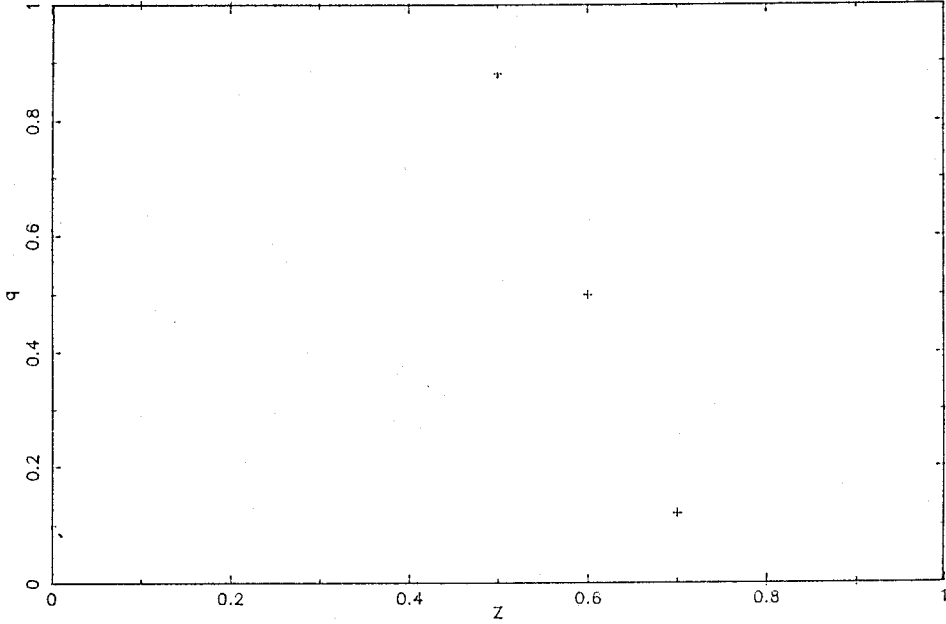


Figura 2.11: Perfil de la densidad de carga obtenida por FCT para un problema unidimensional.

(la hemos derivado de la misma función corriente $\Psi_0(x, z) = (L/2\pi)(1 - \cos 2\pi z)\sin \pi x/L$ introducida en el capítulo 1). Esta aproximación es adecuada como ya quedó de manifiesto en los cálculos realizados con SIMPLER en los que el campo de velocidades era autosimilar en un rango muy amplio de valores de T .

Con la forma de la velocidad conocida, la amplitud se puede calcular a partir de la ecuación 1.25 en la siguiente forma. Tomando en dicha ecuación el límite $M \rightarrow \infty$, multiplicando por \mathbf{v}_0 e integrando en el dominio Ω se tiene:

$$A = -\frac{T \iint_{\Omega} q \mathbf{E} \mathbf{v}_0 dx dz}{\iint_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}_0 dx dz} \quad (2.119)$$

El cálculo de la amplitud a partir de esta expresión se realiza en cada paso de tiempo del algoritmo con los valores conocidos de q y \mathbf{E} . Para realizar la integración que aparece en el numerador de 2.119 hemos usado una interpolación por *splines* bicúbicos.

La ecuación 1.22 se ha resuelto de la misma forma que se hizo en SIMPLER, pero dado que el campo eléctrico no es muy sensible a las variaciones

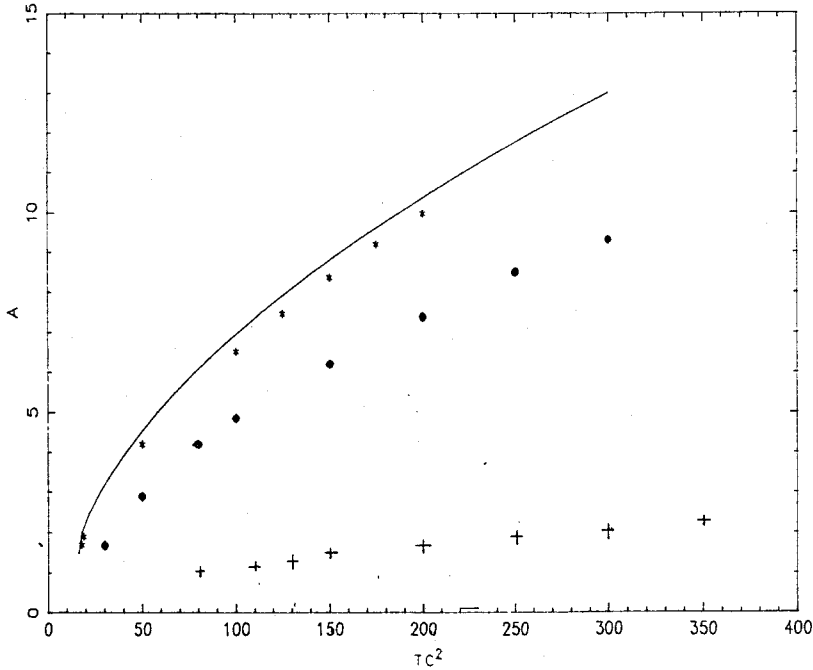


Figura 2.12: Ciclo de histéresis obtenido por FCT (●) comparado con el obtenido por Castellanos et al. por el método de las partículas (*) ($C = 0.1$) y por SIMPLER (+). La línea continua corresponde al cálculo semianalítico.

detalladas de la distribución de carga y que, al ser el algoritmo FCT utilizado un algoritmo explícito el paso de tiempo que se ha de usar es mucho más pequeño que en SIMPLER, el cálculo del campo eléctrico se ha realizado solamente uno de cada diez pasos de tiempo del FCT.

El ciclo de histéresis obtenido se muestra en la figura 2.12 y se compara con el obtenido en [37] por el método de las partículas, mucho más costoso en cuanto a tiempo de CPU se refiere. Vemos que el resultado es bastante aceptable en lo que se refiere tanto a la amplitud del movimiento como al criterio no lineal. Aún así persiste cierta difusión numérica que hace que la amplitud encontrada esté un poco por debajo de la dada por el método de las partículas. La separación entre los dos cálculos es mayor cuanto mayor es la amplitud del movimiento, este hecho está relacionado con que la difusión numérica es una función creciente de la norma de v en Ω y, por tanto, su efecto es más notable cuanto más nos alejamos de la inestabilidad.

2.3 Método de las características

De la simulación en diferencias finitas hemos aprendido que las dificultades mayores en la simulación del problema de la inyección unipolar están en la resolución de la ecuación de transporte de la carga. Aunque el FCT parece superar los problemas de difusión numérica presentes en SIMPLER hay aún otro aspecto de la simulación que es irreproducible con diferencias finitas. Los experimentos de Malraison et al. [21,22], que ya comentamos en el primer capítulo muestran que el movimiento que aparece por encima del valor crítico de T es no estacionario y muestra un comportamiento caótico de la amplitud alrededor de un valor medio bien definido. La *vacilación* de la amplitud es atribuible a la entrada de carga dentro de la zona delimitada por la separatriz: si, fijado un valor de la amplitud, suponemos que ésta se incrementa un poco, la separatriz instantánea se instalará en la zona cargada y el par neto sobre la celda disminuirá dando lugar a que la amplitud decrezca. Los detalles de la distribución de carga determinan el comportamiento transitorio, y estos quedan enmascarados en los métodos en diferencias finitas por la difusión numérica que suaviza el comportamiento de la carga precisamente cerca de la separatriz, que es donde resulta más determinante.

Hemos implementado un algoritmo especialmente adaptado a la resolución numérica de ecuaciones hiperbólicas de primer orden que, bajo las hipótesis restrictivas de la anterior sección, permite seguir en detalle la evolución temporal de la distribución de carga, al eliminar completamente la difusión numérica. Las simplificaciones que admitimos son: que la inyección es débil; que la velocidad tiene una forma dada, es decir, admitimos $\mathbf{v} = A(t)\mathbf{v}_0(x, z)$ con $\mathbf{v}_0(x, z)$ conocido; tomamos además el límite $M \rightarrow \infty$ lo que implica que despreciamos los términos inerciales en la ecuación de Navier-Stokes y nos situamos, por tanto, en un régimen de convección dominado por viscosidad.

La ecuación 1.25 promediada en el volumen de una celda nos permite obtener una ecuación para $A(t)$ conocida la distribución de carga en el instante t . Multiplicando la ecuación por \mathbf{v}_0 e integrando en el dominio Ω obtenemos:

$$A = TK \iint_{\Omega} qw_0 dx dz \quad (2.120)$$

donde hemos eliminado los términos inerciales y hecho $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z$. La constante

K queda definida como

$$K^{-1} = - \iint_{\Omega} \mathbf{v}_0 \nabla^2 \mathbf{v}_0 dx dz \quad (2.121)$$

El problema consiste ahora en encontrar $q(x, z)$ en cada instante de tiempo. La ecuación de conservación de la carga es ahora:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (A \mathbf{v}_0 + \mathbf{e}_z) \cdot \nabla q + q^2 = 0 \quad (2.122)$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dq}{dt} = -q^2 \quad (2.123)$$

$$\frac{dx}{dt} = Au_0 \quad (2.124)$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 + Aw_0 \quad (2.125)$$

La primera ecuación se integra para dar:

$$q = \frac{q_0}{1 + q_0 t} \quad (2.126)$$

que será válida a lo largo de las líneas solución de las otras dos ecuaciones.

Supongamos que en un instante t conocemos el valor de q en un conjunto de puntos $\{x_i, z_i\}_t$ distribuidos por todo el volumen de la celda de convección. Conocido A , la integración de 2.124 y 2.125 nos proporciona los puntos $\{x_i, z_i\}_{t+\Delta t}$ con Δt dado. Dado que $\{x_i, z_i\}_{t+\Delta t}$ y $\{x_i, z_i\}_t$ están en una misma característica será:

$$q^{t+\Delta t}(x_i(t+\Delta t), z_i(t+\Delta t)) = \frac{q^t(x_i(t), z_i(t))}{1 + q^t(x_i(t), z_i(t)) \Delta t} \quad (2.127)$$

y conoceremos así el valor de q en otro conjunto de puntos $\{x_i, y_i\}_{t+\Delta t}$ desplazados respecto de los iniciales. Conocido $q(x, z)$ en $t + \Delta t$ la integración 2.120 nos proporciona el nuevo valor de A . Con este nuevo valor volvemos a las ecuaciones 2.124-2.125 y repetimos el proceso.

2.3.1 Implementación

Un método de Runge-Kuta de quinto orden nos permite integrar sin problemas las ecuaciones 2.124-2.125. Las dificultades técnicas del método aparecen en la evaluación de la integral 2.120 y en la fase de *arranque* del mismo.

Primero, y a modo de test de todo el método, hemos determinado el valor del criterio lineal de estabilidad. Para ello basta determinar el valor de A obtenido en 2.120 a partir de la distribución de carga estacionaria para un valor pequeño de la amplitud. Partimos de una línea de puntos (20 en casi todos los cálculos) en el inyector ($z = 0$). Estos puntos se avanzan en cada paso de tiempo Δt con un valor fijo y pequeño de la amplitud de la velocidad A_0 . A cada paso se computa q sobre cada punto y se vuelven a introducir otros 20 puntos en $z = 0$. Para $t \sim 1$ tenemos así todo el dominio lleno de puntos que forman una red casi regular, ya que $A_0 \ll 1$. Una vez que un punto alcanza la línea $z = 1$ se suprime. Cuando se ha obtenido una red estacionaria evaluamos A a partir de 2.120 poniendo en la fórmula $T = 1$. El valor del criterio lineal corresponde a aquel valor de T que hace iguales A y A_0 . Como $A_0 \ll 1$ el valor de la integral es proporcional a A_0 y una sola evaluación proporciona ya una estimación de T_c . En efecto, será:

$$A = K \iint q w_0 dx dz = K A_0 f \quad (2.128)$$

como T_c es el valor que hace $A = A_0$ debe ser $T_c K f = 1$ y por tanto:

$$T_c = \frac{A_0}{A} \quad (2.129)$$

Hemos obtenido $T_c C^2 = 217$ como valor límite por extrapolación haciendo el cálculo arriba indicado para A_0 cada vez más pequeño ($10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$), C tendiendo a cero ($10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$) y el número de puntos introducidos en el inyector cada vez más grande (10, 15, 20).

Como los puntos $\{x_i, z_i\}$ no formarán, en general, una malla regular ninguno de los métodos clásicos de integración es utilizable. Dos formas de integración hemos utilizado. El primero consiste en suponer que cada punto lleva asociado un volumen $\Delta x \Delta t$ donde Δx es la distancia entre los puntos al introducirlos en $z = 0$ y Δt es la distancia (en primer orden) a la que se encuentra un punto dado de $z = 0$ cuando se avanza por primera vez (la velocidad de cada punto en $z = 0$ es exactamente 1 en dirección z). Con

ello la integral en 2.120 se aproxima por la suma:

$$\iint_{\Omega} qw_0 dx dz = \sum_{i=1}^k q_i w_0(x_i, z_i) \Delta x \Delta t \quad (2.130)$$

donde k es el número total de puntos en el dominio.

Este método es válido sólo en el cálculo del criterio lineal, ya que sólo entonces los puntos avanzan en una red casi regular y el volumen asociado a cada punto se deforma poco. Para cálculos de amplitud finita cuando A varía los volúmenes asociados a cada punto (aunque seguirán valiendo $\Delta x \Delta t$) se deforman enormemente (por ejemplo, para un punto que vaya cerca de la separatriz los puntos que en un instante dado se encuentran cercanos a él se separan rápidamente si una oscilación de la amplitud los introduce dentro de la nueva separatriz dejando fuera a áquel) y el valor $q_i w_0(x, z)$ no es ya un buen valor medio en el volumen $\Delta x \Delta t$ asociado.

Hemos empleado para cálculos de amplitud finita otro método de integración. Consiste en dividir el dominio en $m \times n$ cajas. Contamos los puntos que hay dentro de cada caja y hacemos el promedio del integrando en dicha caja, así :

$$\iint_{\Omega} qw_0 dx dz = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=1}^{h(i,j)} \frac{1}{h(i,j)} q_l w_0(x_l, z_l) \right] \Delta x \Delta z \quad (2.131)$$

con $h(i, j)$ el número de puntos en la caja i, j y $\Delta x \Delta z$ el área de cada caja. Como test de este método de integración hemos calculado con él el criterio lineal por un proceso idéntico al anterior habiendo obtenido un valor que difiere en menos de 1% del valor obtenido mediante el primer método.

2.3.2 Resultados

Ciclo de histéresis

Hemos ejecutado el programa partiendo de diferentes condiciones iniciales. Inicialmente se fija una amplitud A_0 y se integra la ecuación de conservación de la carga para este valor de la amplitud durante un tiempo de orden unidad, hasta tener el dominio Ω lleno de puntos de integración. A partir de entonces se calcula la amplitud en cada paso de tiempo y se deja evolucionar el sistema. El comportamiento típico obtenido se muestra en la figura 2.13 utilizando 20

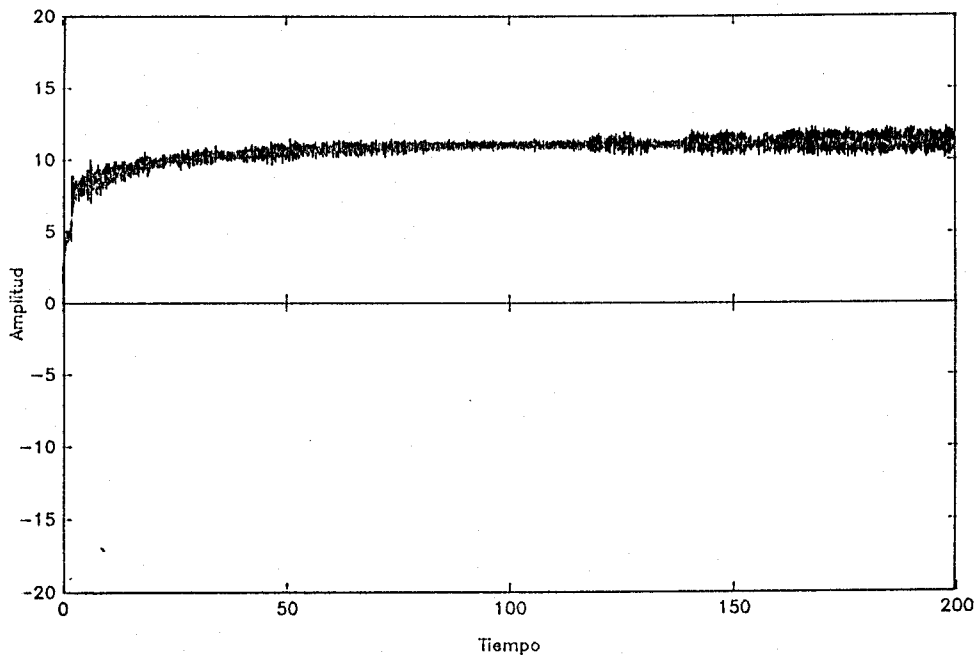


Figura 2.13: Amplitud de la velocidad en función del tiempo obtenida con el método de las características. $T = 30000$, $C = 0.1$.

lugares de inyección, una amplitud inicial $A_0 = 0.1$ que se ha mantenido fija hasta $t = 1.0$ y con un paso de integración en el tiempo $\Delta t = 0.01$. Se observa un valor medio de la amplitud que crece con el tiempo hasta estabilizarse para $t \sim 20$. Alrededor de este valor medio se produce una pequeña fluctuación. Hasta donde hemos observado ($t \sim 200$) dicha fluctuación no desaparece, es decir: no se alcanza un estado estacionario. Este tipo de comportamiento se ha obtenido siempre que, por encima de T_c , se ha ejecutado el programa partiendo de una amplitud pequeña ($A < 1$). El valor medio de A para cada T se sitúa sobre el ciclo de histéresis semianalítico (ver capítulo 1) difiriendo muy poco de él.

Para valores de T menores que T_c la amplitud media final se acerca a cero (partiendo de $A_0 < 1$) o a la rama superior del ciclo de histéresis si $A_0 > 1$, como cabe esperar dada la naturaleza del ciclo de histéresis. Dado que el tiempo de computación es muy grande (incluso utilizando un computador vectorial, como ha sido el caso) no hemos reproducido completamente el ciclo de histéresis ni obtenido una estimación precisa del criterio de estabilidad no-lineal. No obstante, podemos afirmar que este método permite determi-

T	A	f
1500	2.46	0.78
2000	3.12	0.98
2500	3.63	1.07
6000	6.41	1.86

Tabla 2.1: Parámetro eléctrico, amplitud media de la velocidad y frecuencia del pico principal para $C = 0.2$.

nar el valor medio de la amplitud de la velocidad, en función de T y, en consecuencia, reproducir correctamente el ciclo de histéresis.

“Vacilación” de la amplitud

Para obtener una mayor información sobre el carácter de la señal y poder compararla con los datos experimentales de Malraison et al. hemos calculado el espectro de potencias en cada caso. Esto se ha realizado por el método de Welch utilizando la transformada rápida de Fourier [38,39].

A partir de $t \sim 20$ los espectros se muestran bastante estables. Un espectro típico se muestra en la figura 2.14. Se aprecia la existencia de un pico a una frecuencia determinada. La frecuencia de dicho pico es proporcional a la amplitud de la velocidad en el rango de valores de T que hemos explorado. En la tabla 2.1 se muestran estos valores.

Aunque el hecho de que el pico de frecuencia sea proporcional a la velocidad del líquido ha sido puesto de manifiesto por Malraison et al. los espectros experimentales obtenidos por ellos difieren de los nuestros. Existen numerosas razones para esta divergencia. De entrada ellos trabajan en condiciones de inyección fuerte mientras que nuestra simulación se realiza en la aproximación de inyección débil. En segundo lugar nosotros hemos podido obtener otro tipo de espectros cambiando las condiciones de arranque de la simulación. Por ejemplo, en la figura 2.15 se muestra un espectro periódico obtenido para $T = 30000$ a partir de un valor de A_0 bastante alejado del A medio e introduciendo desde $t = 0$ el valor de la amplitud calculado. La señal temporal así obtenida presenta grandes oscilaciones de amplitud, del orden de la media, y el valor medio de A se ha mostrado bastante insensible

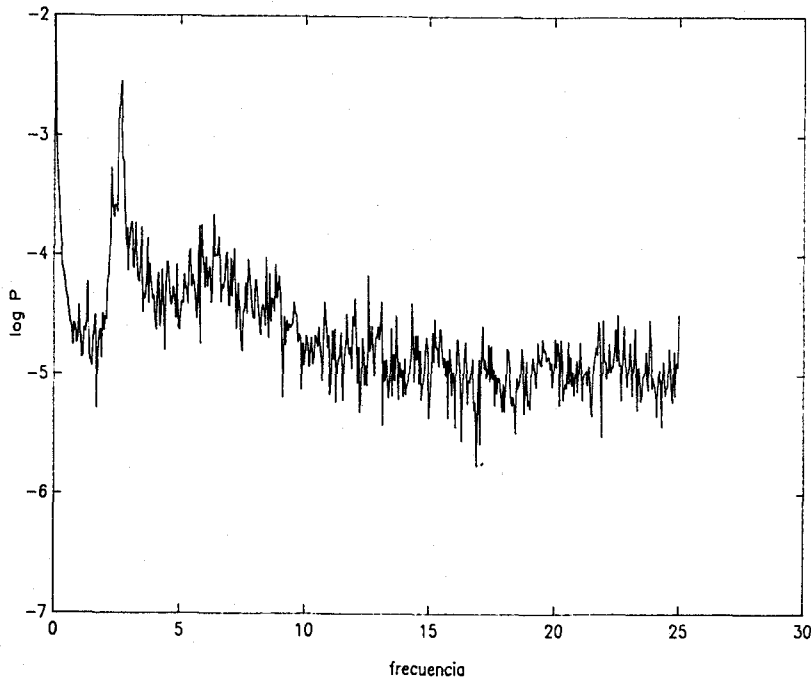


Figura 2.14: Espectro de potencias típico. ($T = 30000$, $C = 0.1$, $A = 10.5$).

al T fijado.

Aunque el espectro de la figura 2.14 hace suponer que estamos ante una señal caótica, un tratamiento más elaborado de la misma se hace preciso para poder concluir algo en este sentido. Esto es, se hace necesario calcular exponentes de Liapunov, mapas de Poincaré, funciones de autocorrelación y la dimensión del atractor para poder discernir el tipo de régimen en el que estamos y compararlo con el que ha sido caracterizado experimentalmente.

Una cosa sí queremos resaltar y es la importancia del término q^2 en la ecuación 2.123. En el método de las partículas desarrollado por Castellanos y Atten [37] este término es despreciado y el resultado es que, al cabo de un transitorio muy largo, la fluctuación desaparece llegándose finalmente a un estado estacionario. En nuestro método dicho término sí es tomado en cuenta, pero con el inconveniente de que no hemos podido realizar cálculos prescindiendo de él. Aunque no podamos enunciar una conclusión definitiva intuimos que dicho término es de una importancia capital en cuanto a la existencia de una solución caótica de las ecuaciones electrohidrodinámicas se refiere.

El estudio realizado de la vacilación no estacionaria de la amplitud dista

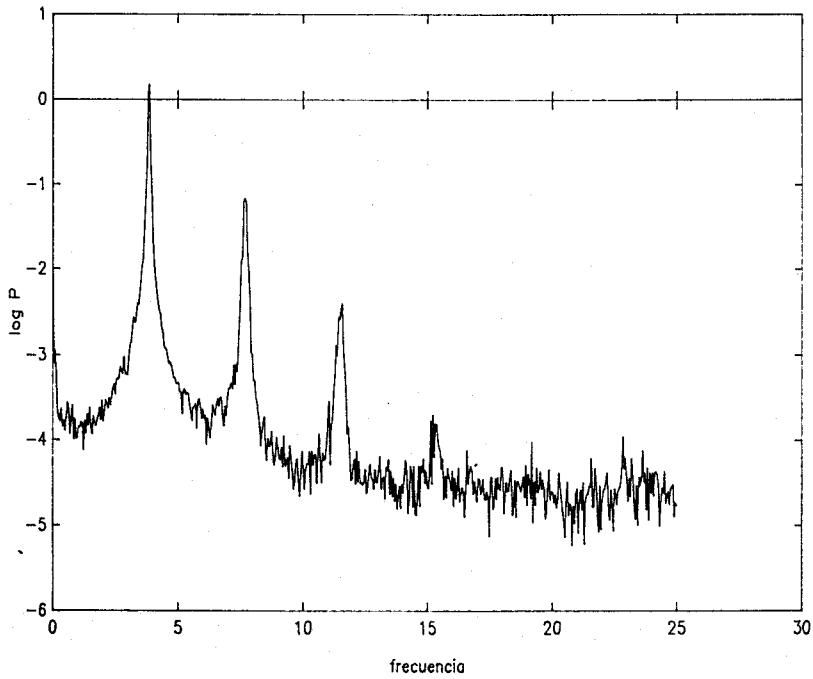


Figura 2.15: Espectro de potencias periódico ($T = 24000$, $C = 0.1$, $A = 6.13$).

de ser completo. Pensamos que el método de las características implementado es el adecuado para realizar en detalle dicho estudio, pero, en cualquier caso, un mayor esfuerzo es todavía preciso en este sentido.

Capítulo 3

Difusión

Había entendido entonces la lentitud del tiempo en los lugares cerrados donde no entra nadie, la tenacidad del óxido que tarda siglos en desfigurar un cuadro o volver polvo una estatua de piedra.

Antonio Muñoz Molina

Dado lo pequeño que es el coeficiente de difusión molecular en la ecuación de conservación de la carga eléctrica, el término de difusión ha sido despreciado, en el volumen del líquido, en todos los estudios frente a los otros mecanismos de transporte de carga presentes: convección y arrastre de los iones por el campo eléctrico. Al despreciar el término de difusión en dicha ecuación ésta pasa de ser de segundo orden a ser de primer orden. Las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden admiten como solución un conjunto más amplio de funciones: el conjunto de funciones continuas a trozos en el dominio considerado. Ello permite que aparezcan, dentro del dominio, regiones inconexas con discontinuidades en la densidad de carga en sus fronteras. En general, la difusión convierte estas discontinuidades en capas límite, regiones de fuertes gradientes pero muy estrechas, pero sin cambiar apreciablemente la solución en el interior de cada región.

Un ejemplo clásico de este tipo de comportamiento es el de las ondas de choque en un fluido compresible (ver por ejemplo [40]). Cuando se desprecia la viscosidad, la onda de choque aparece como una superficie que separa dos regiones con valores diferentes de las variables termodinámicas: presión, densidad y temperatura. La onda de choque implica un salto en los valores de estas magnitudes y la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la entalpía proporcionan relaciones definidas entre las magnitudes termodinámicas a uno y otro lado del choque (relaciones de Hugoniot). La inclusión de la viscosidad en las ecuaciones no cambia esencialmente este panorama, sólo que convierte la superficie singular en una región muy estrecha en la que las magnitudes termodinámicas varían muy fuertemente pero de manera continua. Las relaciones de Hugoniot no determinan totalmente el valor de la presión, temperatura y densidad aguas arriba del choque, aunque sí es posible, gracias a ellas, expresar todas en función de un solo parámetro. El estudio de la estructura del choque, con la inclusión de la viscosidad, determina unívocamente este parámetro. Aún así el estudio del choque sin tener en cuenta la viscosidad permite responder a casi todas las cuestiones físicas de interés.

Volviendo a nuestro problema, cuando el movimiento del líquido es rigurosamente estacionario y tiene lugar en regiones confinadas, es posible que surjan trayectorias cerradas de los portadores de carga en ausencia de difusión. En estas situaciones, la inclusión de la difusión puede alterar de forma sustancial la distribución final de carga, debido a que actúa durante un tiempo ilimitado. Como consecuencia, los gradientes de carga en las fronteras

comunes de estas regiones tienden a suavizarse y desaparecer para tiempos grandes, a menos que la repulsión coulombiana contrarreste este proceso. Una situación similar es analizada por Batchelor [41] en hidrodinámica. El considera la difusión de vorticidad en flujos laminares estacionarios con líneas de corriente cerradas y números de Reynolds altos. Llega a la conclusión de que, cuando el movimiento es rigurosamente estacionario, el flujo neto por difusión viscosa de vorticidad a través de una línea de corriente debe ser exactamente cero, y ello sólo es posible si la vorticidad es uniforme en toda la región conexa donde las fuerzas viscosas son pequeñas. La diferencia entre esta situación y la de las ondas de choque estriba en la existencia de ese dominio cerrado, de ahí que, en este caso, a diferencia de lo que ocurre con los choques, donde los dos dominios en que se separa el problema son ilimitados, la inclusión de la viscosidad altere sustancialmente la solución en todo el volumen.

Como hemos visto en el capítulo anterior, la difusión numérica presente en el algoritmo SIMPLER falseaba la solución ya que, aunque pequeña, la difusión numérica actuaba durante un tiempo muy largo. Como consecuencia, el criterio no lineal y el ciclo de histéresis no eran correctamente calculados. Vamos a ver en este capítulo que la difusión molecular es responsable de un efecto totalmente análogo y que, en determinadas condiciones, puede cambiar sensiblemente tanto el criterio no lineal como el ciclo de histéresis.

3.1 Ecuaciones y condiciones de contorno

Para analizar en detalle el papel de la difusión en la electroconvección de amplitud finita nos vamos a centrar en el análisis de la ecuación de conservación de la carga, dando por conocida la velocidad.

La ecuación de conservación de la carga se escribe en forma adimensional (ecuación 1.23):

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} + \mathbf{E})q] - \alpha \nabla^2 q = 0 \quad (3.1)$$

Además, para el campo eléctrico, es:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q \quad (3.2)$$

El parámetro α es normalmente del orden de 10^{-3} . Para tener un problema bien definido es preciso fijar condiciones de contorno tanto en $z = 0$

como en $z = 1$, ya que la ecuación 3.1 es de segundo orden. En $z = 0$ seguimos admitiendo la hipótesis de inyección autónoma: $q = C$. En $z = 1$ admitimos que tenemos un electrodo abierto. Matemáticamente esto lo podemos expresar de dos formas: imponiendo que la pendiente de q sea nula en $z = 1$ o imponiendo simplemente que sea continua. Esto es:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (3.3)$$

o, en el segundo caso

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \text{continua en } z = 1 \quad (3.4)$$

Adoptaremos, por simplicidad, la primera de las dos condiciones. En cualquier caso fijar una ley de eyección en el electrodo colector tendría como resultado la aparición de una capa límite de carga cerca del electrodo, que no cambiaría sensiblemente la solución en el volumen.

Supondremos, una vez más, que el movimiento es bidimensional y que tiene lugar en forma de un rollo de amplitud dada: $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_0$. Introducimos la función corriente $\Psi_0(x, z) = (L/2\pi)(1 - \cos 2\pi z)\sin(\pi x/L)$ y de nuevo será $u_0 = \partial\Psi_0/\partial z$ y $w_0 = -\partial\Psi_0/\partial x$. Para L admitiremos el valor obtenido en el criterio lineal en ausencia de difusión (ver capítulo 1) $L = 0.66$.

En las cercanías de la inestabilidad, para T próximo a T_c , el campo de velocidades admitido es básicamente correcto. Nos centraremos así en la solución de las ecuaciones 3.1 y 3.2 para un valor dado de A en el dominio $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$.

3.2 Discusión cualitativa

Introduciendo 3.2 en 3.1 y teniendo en cuenta que es $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_0$ es:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E}) \cdot \nabla q + q^2 - \alpha \nabla^2 q = 0 \quad (3.5)$$

o también

$$\frac{dq}{dt} + q^2 - \alpha \nabla^2 q = 0 \quad (3.6)$$

donde $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E}) \cdot \nabla$ es la derivada total a lo largo de una trayectoria iónica. Esta ecuación nos muestra que los dos procesos que hacen variar la densidad de carga son la repulsión coulombiana (término en q^2) y la difusión.

Vamos a examinar qué tipo de soluciones encontramos cuando no tenemos en cuenta ninguno de estos dos mecanismos, cuando consideramos cada uno de ellos por separado y, finalmente, cuando actúan ambos a la vez.

3.2.1 Densidad de carga en ausencia de repulsión coulombiana y de difusión

Cuando despreciamos ambos mecanismos, la densidad de carga viene determinada por la ecuación:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E}) \cdot \nabla q = 0 \quad (3.7)$$

junto con la condición de contorno $q(x, z = 0, t) = C$ y la condición inicial $q(x, z, t = 0) = 0$. Como la ecuación es de primer orden no hace falta ninguna condición sobre $z = 1$.

La ecuación 3.7 es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y de primer orden. Su resolución es equivalente a la del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{dx}{dt} = Au_0 \quad (3.9)$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 + Aw_0 \quad (3.10)$$

donde hemos despreciado la repulsión coulombiana también en cuanto al campo eléctrico se refiere y hemos puesto, por tanto, $\mathbf{E} = e_z$, con e_z el vector unitario en dirección z .

De la primera de estas ecuaciones vemos que es $q = C$ a lo largo de las trayectorias que nacen en el inyector si es $t > \int_0^{\mathbf{r}} \frac{dr}{|e_z + A\mathbf{v}_0|}$ (\mathbf{r} vector de posición del punto considerado) y $q = 0$ para t menor que este valor. Por tanto, transcurrido un transitorio, del orden $t \sim 1$ tendremos que la distribución de carga vendrá dada por $q = C$ en estas trayectorias. Las ecuaciones 3.9 y 3.10

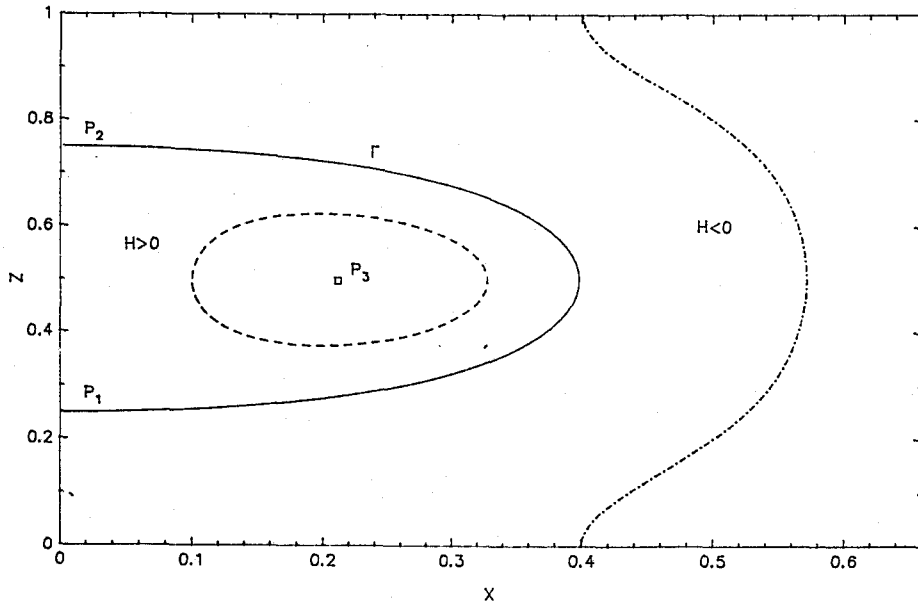


Figura 3.1: Puntos de equilibrio, separatriz y trayectorias típicas del sistema 3.11-3.12.

determinan las curvas $q = C$ en el estado estacionario. Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (3.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.12)$$

donde H es una función *hamiltoniana* definida como $H(x, z) = -x + A\Psi_0(x, z)$. Para $A > 1$ el sistema 3.11-3.12 posee tres puntos de equilibrio P_1 , P_2 y P_3 (ver figura 3.1). Linealizando el sistema de ecuaciones alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio se ve fácilmente que P_1 y P_2 son puntos de silla, mientras que P_3 es un centro. P_1 y P_2 están conectados por dos trayectorias. A estas curvas se les llama heteroclinas y, en nuestro caso, ambas son solución de la ecuación $H = 0$. La curva Γ que separa la región $H > 0$ de la región $H < 0$ se conoce como *separatriz*.

El *retrato de fases*, conjunto de trayectorias solución del sistema de ecuaciones, se obtiene de manera inmediata, ya que las curvas solución coinciden con las curvas de nivel de H . Las trayectorias físicas de los iones inyectados

son las que corresponden a $H < 0$, ya que la región $H > 0$, caracterizada por curvas cerradas, es inaccesible desde el inyector. En definitiva, la solución estacionaria del sistema 3.8-3.10 es $q = C$ en la región $H(x, z) < 0$ y $q = 0$ en la región $H(x, z) > 0$. En la separatriz Γ la densidad de carga sufre una discontinuidad de salto.

3.2.2 Repulsión coulombiana sin difusión

Volvamos a la ecuación 3.5. Si retenemos ahora el término q^2 pero seguimos despreciando la difusión, la ecuación de conservación de la carga sigue siendo equivalente al sistema de ecuaciones 3.8-3.10 pero, ahora, la ecuación 3.8 pasa a ser:

$$\frac{dq}{dt} = -q^2 \quad (3.13)$$

Esta ecuación se integra sin más, para dar:

$$q(t) = \frac{C}{1 + Ct} \quad (3.14)$$

donde C es la densidad de carga sobre el inyector. Como la velocidad total de los iones tiende a cero a medida que nos acercamos al punto de remanso P_1 , el tiempo que un ión necesita para alcanzar P_1 partiendo del inyector en $x = 0$ tiende a infinito. Así la densidad de carga tiende a cero logarítmicamente. En efecto, situándonos en la línea $x = 0$ las ecuaciones 3.9-3.10 pasan a ser:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 + Aw_0(x = 0, z) \quad (3.16)$$

En P_1 es $1 + Aw_0(0, z) = 0$ luego desarrollando esta expresión en torno a P_1 será:

$$1 + Aw_0(0, z) = a(z - z_1) + O((z - z_1)^2) \quad (3.17)$$

con lo cual $dz/dt \cong a(z - z_1)$ que, integrada da: $t = (1/a) \ln a(z - z_1)$, luego la caída a cero de la densidad de carga q cerca de P_1 se produce de forma logarítmica. Este comportamiento de la densidad de carga es convectado a lo largo de la separatriz.

En conclusión, el efecto de incluir la repulsión coulombiana es, fundamentalmente, reemplazar la discontinuidad existente en la separatriz por un

fuerte gradiente de carga perpendicular a ella. Además de ello la densidad de carga cambia también ligeramente en la región $H < 0$. En esta zona ya no es $q = C$ estrictamente, sino que hay que aplicar 3.14 en cada punto. Como el tiempo de vuelo de $z = 0$ a $z = 1$ en esta región es del orden de $1/A$, la corrección es de segundo orden, ya que $q(t) \sim C/(1 + C/A) \simeq C(1 - C/A + \dots)$. Este efecto es crucial, como ya vimos en el primer capítulo, en el estudio de la estabilidad lineal.

3.2.3 Solución con difusión sin repulsión coulombiana

Supongamos ahora que retenemos el término de difusión pero despreciamos el de repulsión coulombiana. La ecuación 3.5 es ahora:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E}) \cdot \nabla q - \alpha \nabla^2 q = 0 \quad (3.18)$$

con las condiciones de contorno $q = C$ en $z = 0$ y $\partial q/\partial z = 0$ en $z = 1$. Esta ecuación es una ecuación lineal, de segundo orden, elíptica y con coeficientes variables. Para resolverla en el dominio $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$ hay que imponer condiciones de contorno adicionales en las fronteras $x = 0$ y $x = L$. Puesto que el dominio considerado representa un rollo de convección, está claro que la solución debe ser simétrica respecto de ambas fronteras, y en consecuencia imponemos $\partial q/\partial x = 0$ en ambos contornos.

En el estado estacionario, esto es, prescindiendo de la derivada temporal, la solución de la ecuación 3.18 es única para las condiciones de contorno impuestas. Por simple sustitución es obvio que esta solución es $q = C$ en todo el dominio Ω . Vemos cómo la inclusión de la difusión, por pequeño que sea el coeficiente, cambia drásticamente la solución de la ecuación, lo que pone de manifiesto que estamos ante un problema de perturbaciones singulares.

En la ecuación 3.18 vemos, que desde el punto de vista de la evolución temporal de la densidad de carga, hay dos tiempos característicos, que corresponden a escalas muy diferentes. De un lado el término de advección va asociado a un tiempo $t_a = 1/(1+A) \leq 1$ (recordemos que la unidad de tiempo corresponde al tiempo de vuelo de un ión entre los electrodos sometido a la sola acción del campo eléctrico). Al término de difusión le corresponde un tiempo típico de $t_d = 1/\alpha \gg 1$. Por tanto, inicialmente, la distribución de carga será esencialmente la descrita anteriormente (cuando despreciamos

repulsión y difusión) y sólo par $t \geq t_d$ el término de difusión empezará a contar. Tendremos así inicialmente un hueco de carga que poco a poco se irá llenando. Esto queda puesto de manifiesto por la simulación numérica que presentamos más adelante.

3.2.4 Difusión y repulsión

La solución de la ecuación 3.5 cuando no despreciamos ni la difusión ni la repulsión coulombiana no es conocida en forma analítica. Sin embargo es posible encontrar una relación entre los dos parámetros C y α para tomar en cuenta sistemáticamente la importancia relativa de ambos términos y encontrar aproximaciones válidas según las condiciones.

Como la ecuación no es ya de primer orden, no es posible, en principio, pasar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias equivalente. Las trayectorias solución del sistema de ecuaciones que tendríamos si el término de segundo orden no estuviera presente, a las que se conoce por *subcaracterísticas*, juegan, sin embargo, un papel relevante en la discusión del tipo de solución posible. Definimos la región externa Ω_2 como la región cubierta por las subcaracterísticas que parten del inyector, y a las que corresponde un tiempo de vuelo típico de los iones del orden de $1/(1+A)$. Al complementario de Ω_2 en Ω le llamaremos región interna y lo denotaremos por Ω_1 . Ambas regiones corresponden aproximadamente a las regiones $H < 0$ y $H > 0$ arriba mencionadas. Como los tiempos típicos necesarios para que la repulsión coulombiana y la difusión tengan efecto sobre la densidad de carga son $1/C$ y $1/\alpha$ respectivamente, está claro que en la región externa ambos mecanismos serán despreciables y en ella $q = C$ seguirá siendo una buena aproximación hasta el primer orden en C .

De otra parte la presencia de la difusión impide que $q = 0$ siga siendo la solución válida en Ω_1 y una cierta cantidad de carga aparecerá en dicha región. La presencia de esta densidad de carga modifica el valor del campo eléctrico y, por tanto, modificará las subcaracterísticas respecto de aquellas que teníamos inicialmente. Vamos a estudiar a continuación el comportamiento del sistema 1.67-1.68 cuando el campo eléctrico perturbado, $\delta\mathbf{E}$, es tomado en cuenta.

Bifurcación global del retrato de fases

En este apartado vamos a aplicar algunos conceptos y teoremas de la teoría de *bifurcación de sistemas dinámicos* a nuestro problema [42,43,44]. Introduciremos primero algunos conceptos fundamentales.

Un sistema dinámico se define como una aplicación biyectiva de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^n definida para cada valor de $t > 0$:

$$\begin{aligned} F_t : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x_0 &\longmapsto x = F_t(x_0) \end{aligned}$$

$F_t(x)$ es diferenciable en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ y el sistema viene caracterizado por un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad f(x) \in \mathbf{R}^n \quad (3.19)$$

$f(x)$ es continua y diferenciable. En estas condiciones $F_t(x_0)$ existe y es única para cada t . La curva descrita en \mathbf{R}^n por $F_t(x_0)$ al variar t es una órbita del sistema.

Un sistema dinámico paramétrico es el que depende de un parámetro o familia de parámetros $\nu \in \mathbf{R}^m$ de forma que:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \nu) \quad (3.20)$$

Así el sistema 3.11-3.12 constituye un sistema dinámico en \mathbf{R}^2 parametrizado por A :

$$\frac{dx}{dt} = AL \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} 2\pi z \quad (3.21)$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{A}{2} \cos \pi x L (\cos 2\pi z - 1) \quad (3.22)$$

Los puntos fijos o de equilibrio de un sistema son aquellos $x_0 \in \mathbf{R}^n$ en que $f(x_0) = 0$. En 3.21-3.22 con $A > 1$ los puntos de equilibrio son (ver apartado 1.5):

$$P_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{A-2}{A} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{A-2}{A} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$P_3 : \begin{cases} x = \frac{L}{\pi} \arccos \frac{1}{A} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Dado un punto de equilibrio x_0 , el sistema linealizado en torno a dicho punto es:

$$\frac{dy}{dt} = Df(x_0)y \quad (3.26)$$

con $y = x - x_0$ y $Df(x_0)$ la matriz jacobiana (de orden $n \times n$). Los autovalores de $Df(x_0)$ determinan el comportamiento del sistema lineal. Si denotamos por $\{\lambda_i\}_{i=1,n}$ a dichos autovalores las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales 3.26 son combinación lineal de funciones de la forma $e^{\lambda_i t}$.

Por ejemplo, alrededor de P_3 es

$$Df(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi L\sqrt{A^2 - 1} \\ \frac{\pi}{2L}\sqrt{A^2 - 1} & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$ con $\omega = \pi\sqrt{A^2 - 1}$. Alrededor de P_3 el movimiento tiene carácter periódico, con período $2\pi/\omega$.

Para P_1 y P_2 es

$$Df(x_{1,2}) = \begin{pmatrix} 2\pi\sqrt{A-1} & 0 \\ 0 & -2\pi\sqrt{A-1} \end{pmatrix}$$

con lo que es $\lambda = \pm 2\pi\sqrt{A-1}$ y tenemos dos puntos de silla.

Por definición un punto de equilibrio se dice hiperbólico si ninguno de los autovalores de la matriz de linealización en dicho punto están en el eje imaginario. En nuestro sistema P_1 y P_2 son puntos hiperbólicos, mientras que P_3 es no hiperbólico.

El teorema de Hartman-Grobman [42] establece que alrededor de un punto hiperbólico los sistemas $dx/dt = f(x)$ y $dy/dt = Df(x_0)y$ son localmente equivalentes o, más técnicamente, que existe una aplicación continua (homeomorfismo) que transforma las órbitas de un sistema en las del otro.

Del teorema de Hartman-Grobman se desprende una consecuencia crucial: que cuando perturbamos infinitesimalmente un sistema dinámico sus puntos de equilibrio hiperbólicos se mantienen, y mantienen su carácter: si eran

puntos de silla lo seguirán siendo, si focos estables, seguirán siendo focos estables, etcétera.

Nada podemos asegurar, no obstante, de los puntos no hiperbólicos. En ellos el retrato de fases local del sistema completo no tiene por qué ser equivalente al del sistema linealizado. Por ende cualquier perturbación infinitesimal de un sistema dinámico puede cambiarnos el carácter de sus puntos de equilibrio no hiperbólicos, e incluso su número.

Una *bifurcación* es un cambio cualitativo en un sistema dinámico paramétrico que se produce al variar el parámetro. De lo antes dicho, vemos que si el sistema posee algún punto de equilibrio no hiperbólico, para un valor $\nu = \nu_0$ del parámetro que lo controla, dicho punto puede no existir para $\nu \neq \nu_0$ o cambiar su carácter.

Para ilustrar esto último volvamos al sistema 3.21-3.22. Para $A = 1$ existe un sólo punto de equilibrio: $(0, 1/2)$. En él la matriz Df es idénticamente nula, y por tanto, $\lambda = 0$ es un autovalor doble. Dicho punto constituye un punto de equilibrio no hiperbólico lo cual permite la posibilidad de que en $A = 1$ el sistema 3.21-3.22 sufra una bifurcación. En efecto, para $A < 1$ no hay puntos de equilibrio en tanto que para $A > 1$ aparecen los tres puntos arriba mencionados.

Se denominan propiedades robustas a aquellas que posee un sistema dinámico y que se conservan frente a perturbaciones. Así, tener un equilibrio hiperbólico es, gracias al teorema de Hartman-Grobman, una propiedad robusta. Una propiedad que posee nuestro sistema, y cuya robustez nos va a interesar, es la de tener lo que se conoce como órbitas heteroclinas. Estas son órbitas que unen equilibrios y en nuestro sistema tenemos dos de ellas, ambas unen P_1 y P_2 , siendo una de ellas la que hemos denominado separatriz. En los sistemas de dos dimensiones las heteroclinas no son, en general, robustas y hay que acudir a ciertos teoremas específicos para dilucidar su comportamiento de bifurcación.

Estamos interesados en conocer cómo se altera el retrato de fases del sistema 3.21-3.22 cuando introducimos el campo eléctrico perturbado por la presencia de cierta densidad de carga en el interior de la separatriz. Como q es de la forma $q = Cg(x, z)$, C parámetro de inyección, y $\nabla \cdot \mathbf{E} = q$, podemos expresar $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z + C\delta\mathbf{E}$ siendo $\nabla \cdot \delta\mathbf{E} = g$. Con ello el sistema 3.11-3.12 es ahora:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z} + C\delta E_x \quad (3.27)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + C\delta E_z \quad (3.28)$$

De este nuevo sistema, y con C pequeño, sabemos ya que tiene dos equilibrios hiperbólicos cercanos a P_1 y P_2 . Es más, como la simetría de nuestro problema impone $\delta E_x(x=0, z) = 0$, para mantener la individualidad de las celdas de convección, los puntos seguirán estando en la recta $x=0$ con cotas que diferirán en términos de orden C de las de los equilibrios del sistema hamiltoniano.

Nos interesa ver qué ocurre con las propiedades no robustas de nuestro sistema: el punto de equilibrio no hiperbólico P_3 y las curvas heteroclinas. El sistema 3.27–3.28 tiene en el espacio de parámetros (A, C) un punto doblemente degenerado, $(A=1, C=0)$: para $C=0, A=1$ sabemos ya que es un punto de bifurcación y para $C=0, A>1$ el sistema posee un punto de equilibrio no hiperbólico y dos órbitas heteroclinas. Vamos a hacer un estudio local del sistema para dichos valores de los parámetros. Para $(A=1, C=0)$ el único punto de equilibrio es el $(x=0, z=1/2)$, desarrollando en torno a este punto el campo eléctrico perturbado será:

$$\delta E_x = ax \quad (3.29)$$

$$\delta E_z = b + e(z - 1/2) \quad (3.30)$$

donde se ha tenido en cuenta que es $\delta E_x|_{x=0} = 0$ y que, por el teorema de Schwartz, $\partial E_x/\partial z = \partial E_z/\partial x$. Haciendo $\eta = \pi^2 x/L\sqrt{2}$, $\xi = \pi^2(z - 1/2) + Ce/\pi^2$, $\mu = (A-1)\pi^2 - Cb$ y $\epsilon = CL\sqrt{2}a/\pi^2$ y desarrollando 3.27–3.28 en torno a $\eta=0, \xi=0, \mu=0$ y $\epsilon=0$ se tiene:

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\eta\xi + \epsilon\eta \quad (3.31)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu + (\eta^2 + \xi^2) + e'\epsilon\xi \quad (3.32)$$

Donde hemos retenido hasta los términos de grado 2 en η, ξ, μ y ϵ y hemos hecho $e' = e/aL\sqrt{2}$. El teorema de las formas normales [42, página 138] establece cuál de los términos no lineales, en cada grado, son esenciales, es decir, cuáles determinan el aspecto del retrato de fases. Aplicando las técnicas de dicho teorema se ve que el término en $\epsilon\xi$ no es esencial. Dicho término corresponde, en realidad, a un simple cambio de variables: $\xi \rightarrow (\xi + e'\epsilon/2)$, con lo que quedaría absorbido en el término ξ^2 .

En definitiva el estudio de nuestro sistema se reduce, localmente, al del sistema:

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\eta\xi + \epsilon\eta \quad (3.33)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu + (\eta^2 + \xi^2) \quad (3.34)$$

Al punto de equilibrio del sistema hamiltoniano P_3 le corresponde ahora $P_3 \equiv (\sqrt{\mu - (\epsilon/2)^2}, \epsilon/2)$ y la linealización de 3.34 alrededor de P_3 nos muestra que es un foco, inestable para $\epsilon > 0$ y estable para $\epsilon < 0$. Como ϵ es C reescalado, debe ser siempre mayor que cero y la conclusión es que el centro se transforma, al considerar la repulsión coulombiana, en un foco inestable.

En cuanto a las heteroclinas, una de ellas, la que va de P_2 a P_1 en el eje $x = 0$ ha de permanecer, puesto que las perturbaciones admisibles son sólo aquellas que mantienen la simetría respecto de $x = 0$. De hecho, basta hacer $\eta = 0$ en las ecuaciones 3.34 y comprobar que la trayectoria $\eta = 0$ es solución de las ecuaciones con singularidades en los puntos $\xi = \pm\sqrt{\mu}$.

Para ver qué ocurre con la separatriz debemos de acudir a la teoría de Melnikov [pg. 84 y ss.] Partamos de un sistema hamiltoniano perturbado:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_\epsilon(x) \quad (3.35)$$

siendo $g_{\epsilon=0} = 0$. Supongamos que para $\epsilon = 0$ existe un lazo heteroclino (u homoclino). Se construye, entonces, la función de Melnikov como

$$M(\epsilon) = \int_{\text{int } \Gamma} \text{Tr } Dg_\epsilon(x) dx \quad (3.36)$$

donde la integración se extiende al interior del lazo heteroclino en el sistema sin perturbar.

El resultado fundamental es que si $M(\epsilon)$ tiene un cero simple en $\epsilon = 0$ el lazo heteroclino no existe para $\epsilon \neq 0$.

Volviendo a nuestro sistema 3.27–3.28 la función de Melnikov es

$$\begin{aligned} M(C) &= \iint_{H>0} \text{Tr } D(C \delta \mathbf{E}(x, z)) dx dz \\ &= C \iint_{H>0} \nabla \cdot \delta \mathbf{E} dx dz \\ &= C \iint_{H>0} g dx dz \end{aligned} \quad (3.37)$$

y como g es una función definida positiva, $M(C)$ se anula para $C = 0$ y además $M'(C) \neq 0$ con lo que el cero es simple y el lazo heteroclinico se rompe. La inclusión de la repulsión coulombiana rompe, por tanto, la separatriz.

Con toda la información adquirida es posible ya dibujar el diagrama de bifurcación del retrato de fases de nuestro sistema (figura 3.2).

Este comportamiento de bifurcación lo hemos reproducido numéricamente. Para ello hemos resuelto el sistema 3.27–3.28 por un método de Runge-Kuta. El campo eléctrico se ha calculado previamente de la siguiente manera: a partir de $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ admitimos que Φ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$\Phi = 1 - z + \sum_{m,n} a_{nm} \operatorname{sen} n\pi z \cos m \frac{\pi x}{L} \quad (3.38)$$

La ecuación de Poisson queda entonces:

$$\sum_{m,n} a_{nm} [(n\pi)^2 + (\frac{m\pi}{L})^2] \operatorname{sen} n\pi z \cos m \frac{\pi x}{L} = q \quad (3.39)$$

y los coeficientes a_{nm} se obtienen de la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno y coseno:

$$a_{nm} = \frac{4}{L\pi^2[(\frac{m}{L})^2 + n^2]} \int_0^1 dz \int_0^L dx q(x, z) \operatorname{sen} n\pi z \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (3.40)$$

Aunque no conocemos en detalle $q(x, z)$, toda la discusión anterior nos hace ver que q no diferirá mucho de C en la región Ω_2 . En la región Ω_1 podemos tomar para $q(x, z)$ un valor constante βC con $0 \leq \beta \leq 1$ que corresponderá al promedio de q sobre Ω_1 . Como \mathbf{E} proviene de la integración de q es de esperar que no sea muy sensible a los detalles de la distribución. Es más, para simplificar el cálculo hemos admitido que $q(x, z)$ es como se muestra en la figura 3.3.

Las trayectorias obtenidas fijando $A = 2$ se muestran en la figura 3.4. Vemos cómo en Ω_1 toman la forma de espirales alrededor del foco inestable P_3 . En la figura 3.5 hemos realizado, para obtener bien la curva que llega a P_2 , la integración de las ecuaciones invirtiendo el transcurso del tiempo y partiendo de P_2 . La separatriz queda rota de forma que la región Ω_1 queda conectada con el colector.

Desde un punto de vista físico la ruptura de la separatriz proporciona un camino físico a los iones para abandonar la región interna.

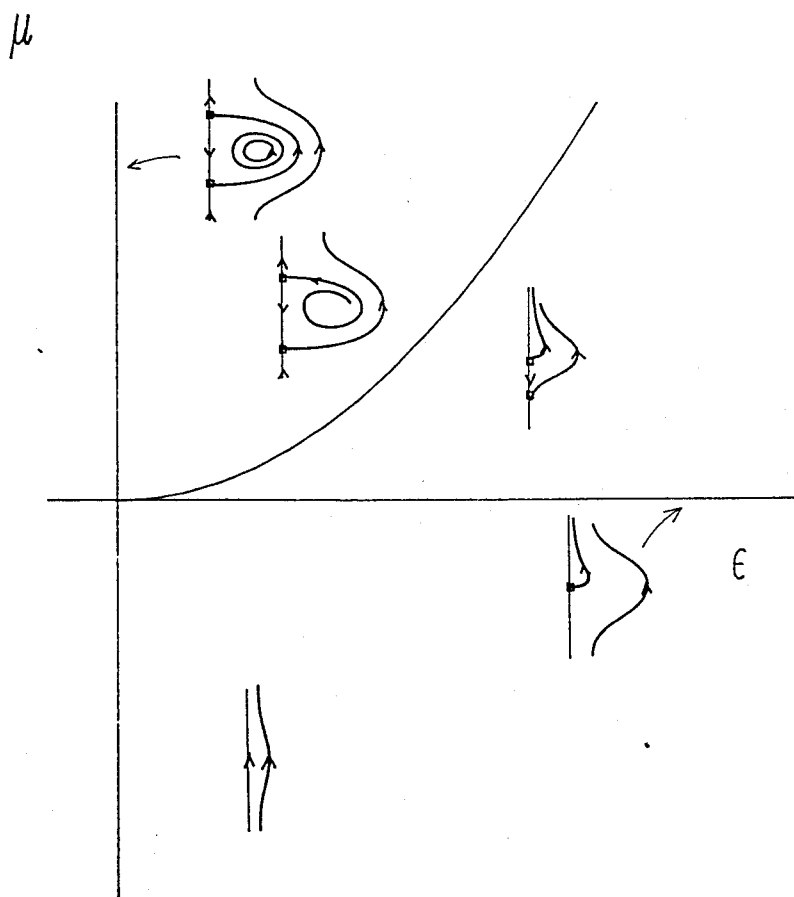


Figura 3.2: Bifurcación del retrato de fases.

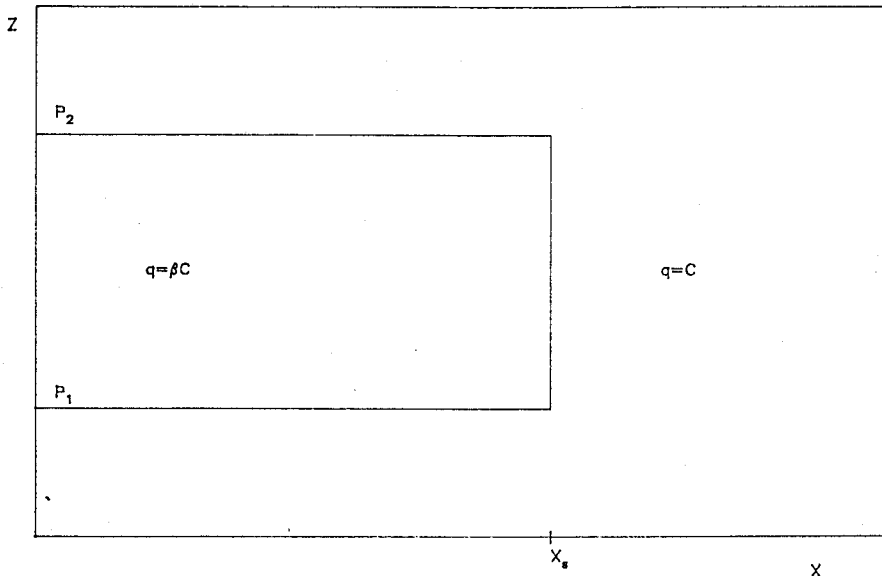


Figura 3.3: Densidad de carga simplificada.

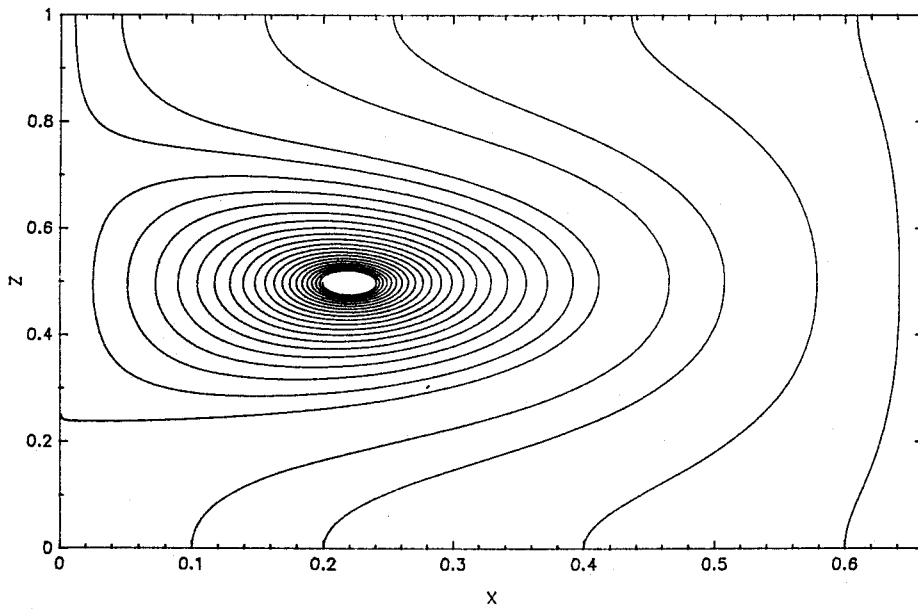


Figura 3.4: Retrato de fases cuando se toma en cuenta la repulsión coulombiana.

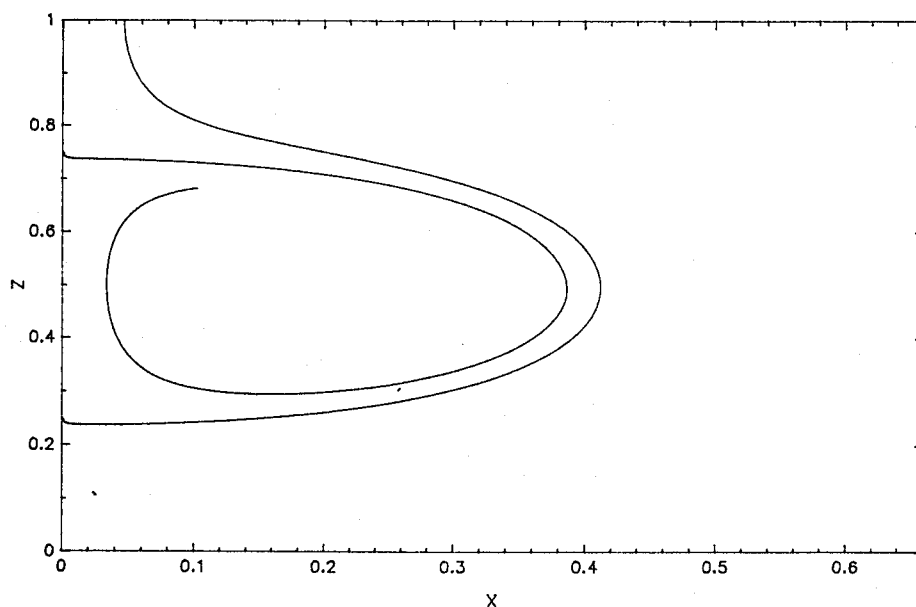


Figura 3.5: Ruptura de la separatriz por efecto de la repulsión coulombiana.

Estimación de la carga media en la región interna

Un análisis de los órdenes de magnitud de los términos que aparecen en la ecuación 3.5 nos va a permitir obtener ciertas relaciones importantes.

El término de difusión será despreciable excepto en la frontera entre las regiones Ω_1 y Ω_2 , donde el gradiente de q puede tomar valores grandes. Consideremos la ecuación 3.5 en la línea $x = 0$ y cerca del punto P_1 . En el estado estacionario es:

$$(w + E_z) \frac{\partial q}{\partial z} + q^2 - \alpha \nabla^2 q = 0 \quad (3.41)$$

Como la velocidad total de los iones se anula en el punto de remanso P_1 podemos aproximar $(w + E_z)$ cerca de dicho punto por el primer término de un desarrollo en serie de Taylor, esto es:

$$(w + E_z) \cong a(z - z_1) \quad \text{con } a < 0 \quad (3.42)$$

como la densidad de carga varía fundamentalmente en dirección z podemos

despreciar las derivadas en dirección x , con lo cual la ecuación 3.41 queda:

$$a(z - z_1) \frac{\partial q}{\partial z} + q^2 - \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0 \quad (3.43)$$

La difusión será importante sólo en una zona cercana a z_1 de anchura δ . El orden de magnitud de δ lo obtenemos haciendo comparables los términos de advección y difusión, esto es:

$$a(z - z_1) \frac{q}{z - z_1} \sim \alpha \frac{q}{\delta^2} \quad (3.44)$$

o

$$\delta \sim \alpha^{1/2} \quad (3.45)$$

El perfil de la densidad de carga cerca de P_1 es convectado a lo largo de la frontera de Ω_1 con lo que tendremos una banda de anchura δ a lo largo de dicha frontera, en la cual la difusión ha de ser tomada en cuenta. Dicho de otra forma, la difusión sólo será importante en esta *capa límite interna*.

Para estimar el valor medio de la densidad de carga en la región interna (que denotaremos como antes por βC) tenemos en cuenta que, en el estado estacionario, la carga que entra en Ω_1 por acción de la difusión está contrarrestada exactamente por la que abandona dicha región por acción de la repulsión coulombiana. Suponiendo que en Ω_2 es $q = C$ y en Ω_1 es $q = \beta C$ podemos integrar 3.1 en Ω_1 (ver figura 3.6) y se tiene:

$$\iint_{\Omega_1} \nabla \cdot [(A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E})q] dx dz = \alpha \iint_{\Omega_1} \nabla \cdot (\nabla q) dx dz \quad (3.46)$$

aplicando el teorema de la divergencia a ambos miembros de la ecuación resulta:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} \nabla \cdot (A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E})q dx dz &= \int_{\partial\Omega_1} q(A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dl \\ &= \int_{\text{colector}} q\mathbf{E}e_z dl \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde esta última igualdad proviene de que $(A\mathbf{v}_0 + \mathbf{E})$ es perpendicular a \mathbf{n} excepto en el colector, y

$$\begin{aligned} \alpha \iint_{\Omega_1} \nabla \cdot (\nabla q) dx dz &= \alpha \int_{\partial\Omega_1} \nabla q \cdot \mathbf{n} dl \\ &\sim \alpha \frac{C - \beta C}{\delta} L \end{aligned} \quad (3.48)$$

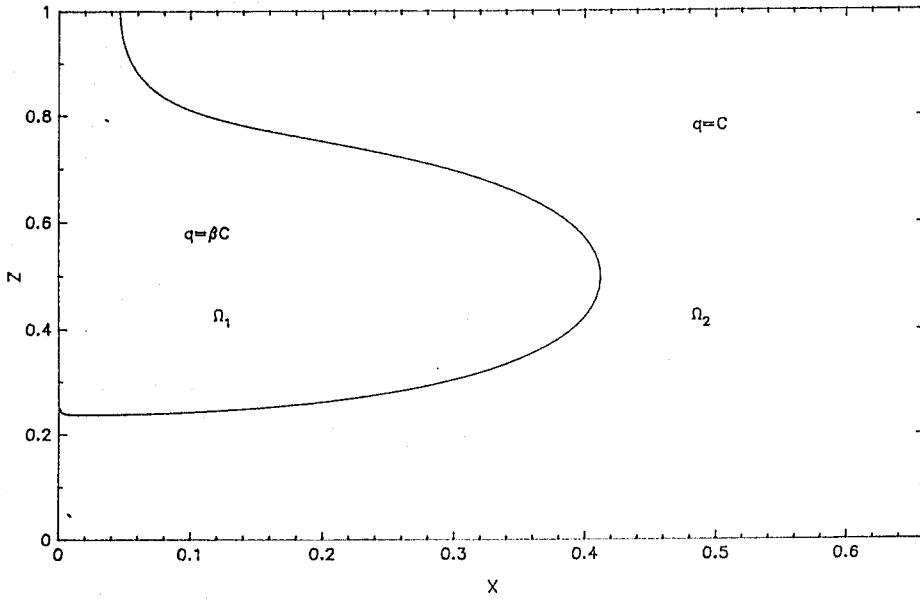


Figura 3.6: Densidad de carga aproximada.

donde hemos incluido L como el orden de magnitud de la longitud de la frontera de Ω_1 .

El flujo de carga que atraviesa el colector proveniente de la región Ω_1 es esencialmente βC , ya que el campo es prácticamente 1, y ese flujo atraviesa una anchura ϵ , luego:

$$\int_{\text{colector}} q \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z dl \sim \beta C \epsilon \quad (3.49)$$

Como para $\beta = 0$ la separatriz existe como línea que une los dos puntos de equilibrio, y, por tanto, es entonces $\epsilon = 0$, y βC aparece como una medida de la divergencia de las líneas, parece razonable suponer que es $\epsilon \sim \beta C$ para $\beta C \ll 1$. Igualando ambos términos y teniendo en cuenta que $\delta = \alpha^{1/2}$ obtenemos la relación:

$$\frac{1 - \beta}{\beta^2} \simeq \frac{C}{\alpha^{1/2}} \quad (3.50)$$

El parámetro $C/\alpha^{1/2}$ juega un papel esencial en el problema y, como veremos, esta relación se cumple en los resultados numéricos que hemos obtenido. Tenemos dos límites importantes:

- $C/\alpha^{1/2} \rightarrow 0$ entonces $\beta \rightarrow 1$ y la difusión altera drásticamente la

solución del problema. La difusión es, entonces, una perturbación singular.

- $C/\alpha^{1/2} \rightarrow \infty$ entonces $\beta \rightarrow 0$ y despreciar la difusión es del todo correcto.

3.3 Modelo unidimensional

Alrededor del punto P_3 las subcaracterísticas de la ecuación de conservación de la carga cuando la repulsión coulombiana y la difusión son tenidas en cuenta son espirales muy lentamente divergentes y poseen casi una simetría radial. Esta característica la vamos a utilizar para proponer un modelo unidimensional que permita obtener la forma de la distribución de carga en la región interna. Consideremos la semirecta \mathcal{R} originada en el foco. Definimos entonces las funciones $d(r)$ y $\tau(r)$, con r la coordenada radial medida sobre \mathcal{R} con origen en el foco, de la siguiente forma: $d(r)$ asocia a cada $r \in \mathcal{R}$ la distancia $d = r^* - r$ donde r^* es la coordenada radial en la cual la trayectoria que pasa por r vuelve a cortar la recta \mathcal{R} y $\tau(r)$ asocia a r el tiempo invertido entre ambos cortes sucesivos. Ambas funciones definen un *mapa de Poincaré* generalizado. El cálculo de $d(r)$ a partir de la integración numérica de las ecuaciones 3.27–3.28, supuesto para ello la misma distribución de carga de la figura 3.3, muestra que $d(r)$ es de la forma $d(r) = \beta C d^*(r)$ con $d^*(r)$ una función independiente de βC . Este hecho confirma la hipótesis admitida al derivar 3.50 de que la divergencia de las líneas va como βC .

Por otro lado $\tau(r)$ es, cuando $\beta = 0$ el período de las órbitas cerradas en la región $H > 0$ del sistema hamiltoniano. Estas curvas vienen definidas por $H(x, z) = K$ con $H_{\max} > K > 0$. Así será $z = F(K, x)$, y de la ecuación 3.11 se tiene:

$$\tau(r) = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{\partial H(x, F(K, x))}{\partial z} \right]^{-1} dx \quad (3.51)$$

donde x_{\max} y x_{\min} son las raíces de la ecuación $H(x, z = 1/2) = K$ y $r = x_{\min}$. Esta función se puede expresar en términos de integrales elípticas para $A \sim 1$, como se muestra en el apéndice B. Para $A = 1.1$ y $\beta C = 0.05$ el valor de $\tau(0)$ obtenido numéricamente de la integración por Runge-Kuta de las ecuaciones 3.27–3.28 es 3.09 y el dado por la expresión 3.51 es de 3.02. Ello prueba que β supone una corrección menor a $\tau(r)$ y esto es así porque

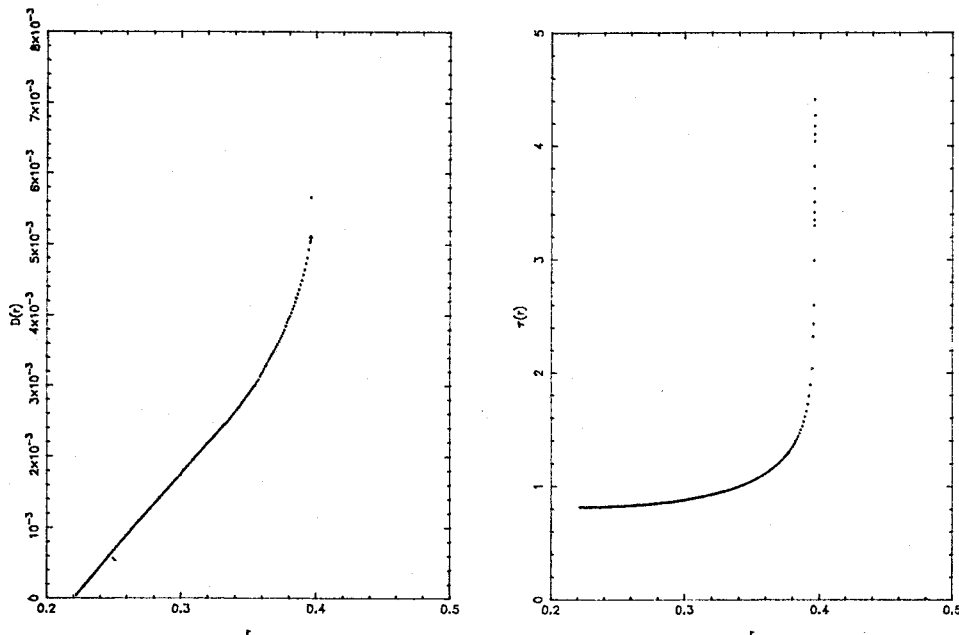


Figura 3.7: Funciones $d(r)$ y $\tau(r)$ para $A = 2.0$.

$\tau(r)$ viene determinado fundamentalmente por el término de advección. A partir de 3.34 se puede también obtener el valor de $\tau(0)$ de los autovalores del sistema de ecuaciones linealizadas alrededor de P_3 , se obtiene allí que

$$\omega = \pi\sqrt{A^2 - 1} + O(\beta C) \quad (3.52)$$

lo que da $\tau(0)_{\beta C} = \tau(0)_{\beta=0} + O(\beta C)$. La función $\tau(r)$ calculada en $\beta = 0$ resulta ser, por tanto, una buena aproximación al caso en que $\beta \neq 0$. Las funciones $d(r)$ y $\tau(r)$, obtenidas numéricamente se muestran en la figura 3.7 para $A = 2$.

Podemos ahora determinar la densidad de carga $q(r)$ sobre la recta \mathcal{R} . Consideremos una red de puntos $\{r_i, i = 1, \dots, m\}$ definida sobre \mathcal{R} . La conservación de la carga eléctrica se puede expresar sobre una celda de control como la de la figura 3.8 por:

$$e_i^{t+\Delta t} = e_i^* + 2\pi[r_{i-1/2}f_{i-1/2} - r_{i+1/2}f_{i+1/2}] \Delta t \quad (3.53)$$

donde $e_i^{t+\Delta t}$ es la carga total en la celda en $t + \Delta t$, $f_{i-1/2}$ y $f_{i+1/2}$ son los flujos de carga a través de los contornos de la celda y $r_{i\pm 1/2} = (r_i + r_{i\pm 1})/2$.

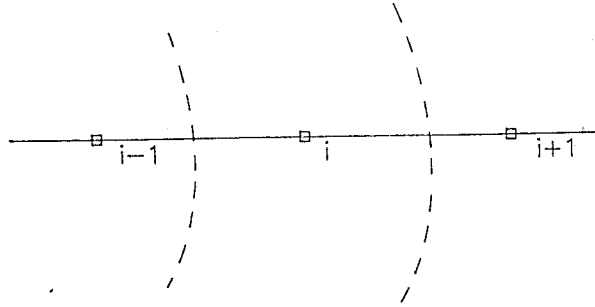


Figura 3.8: Celda de control para el modelo unidimensional.

A los flujos f contribuyen dos mecanismos:

$$f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^A + f_{i+1/2}^D \quad (3.54)$$

donde $f_{i+1/2}^A$ representa el flujo debido a la advección de carga y $f_{i+1/2}^D$ es el flujo difusivo.

El flujo $f_{i+1/2}^A$ representa la cantidad de carga por unidad de tiempo y área que llega a la celda por la acción de la velocidad de advección $\mathbf{v} + \mathbf{E}$. Para poder proyectar en una dimensión este mecanismo esencialmente bidimensional, vamos a hacer uso de las funciones $d(r)$ y $\tau(r)$. Como $\tau(r)$ es el tiempo invertido en completar una vuelta y $d(r)$ es la distancia neta recorrida sobre \mathcal{R} en la misma vuelta, la velocidad a la que la carga es advectada radialmente es $d(r)/\tau(r)$. Ahora bien, durante el viaje de i a $i+1$ la densidad de carga va disminuyendo sobre la misma línea, de forma que a r_i no llega una densidad q_{i-1} sino, de acuerdo con la ecuación 3.14, $q_{i-1}/(1 + q_{i-1}\tau(r_{i-1}))$. Por tanto, el flujo que llega por la frontera izquierda de la celda será:

$$f_{i-1/2}^A = \frac{q_{i-1}^t}{1 + q_{i-1}^t \tau(r_{i-1})} \frac{d(r_{i-1})}{\tau(r_{i-1})} \quad (3.55)$$

En cuanto al flujo saliente por la frontera derecha la repulsión coulombiana todavía no ha tenido tiempo de actuar y dicho flujo será simplemente:

$$f_{i+1/2}^A = q_i^t \frac{d(r_i)}{\tau(r_i)} \quad (3.56)$$

Para los flujos difusivos admitimos una expresión en diferencias finitas de segundo orden, esto es:

$$f_{i-1/2}^D = \alpha \frac{q_{i-1} - q_i}{r_i - r_{i-1}} \quad (3.57)$$

$$f_{i+1/2}^D = \alpha \frac{q_{i+1} - q_i}{r_i - r_{i+1}} \quad (3.58)$$

Finalmente hay que tener en cuenta que la carga en la celda durante el tiempo Δt queda afectada por la acción de la repulsión coulombiana durante dicho intervalo de tiempo y se tiene:

$$e_i^* = \pi(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \frac{q_i^t}{1 + \Delta t q_i^t} \quad (3.59)$$

junto con

$$e_i^{t+\Delta t} = \pi(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) q_i^{t+\Delta t} \quad (3.60)$$

Las ecuaciones 3.53–3.60 definen un sistema de ecuaciones explícito para $q_i^{t+\Delta t}$ conocidos q_i^t .

Para que el sistema sea cerrado necesitamos imponer condiciones en el foco ($i = 1$) y en algún punto fuera de la separatriz ($i = m$.)

La condición sobre el foco se consigue considerando un círculo de radio r_1 alrededor de él. Entonces sólo aparece un término de advección (hacia fuera) y uno de difusión. Se tiene:

$$e_1^{t+\Delta t} = e_1^* - 2\pi r_{1+1/2} f_{1+1/2} \Delta t \quad (3.61)$$

$$f_{1+1/2}^A = q_1^t \frac{d(r_c)}{\tau(r_c)} \quad f_{1+1/2}^D = \alpha \frac{q_1 - q_2}{r_2 - r_1} \quad (3.62)$$

$$e_1^* = \pi r_{1+1/2}^2 \frac{q_1^t}{1 + \Delta t q_1^t} \quad e_1^{t+\Delta t} = \pi r_{1+1/2}^2 q_1^{t+\Delta t} \quad (3.63)$$

El último punto sobre la red se elige como $r_m = r_{m-1} + d(r_{m-1})$ de forma que esté sobre la región Ω_2 . Este hecho lo hemos comprobado integrando las ecuaciones 3.27–3.28 hacia atrás desde r_m y comprobando que se llega al inyector ($z = 0$). En este punto la condición es $q_m = C$.

Hay que hacer notar que este modelo no es válido para obtener el transitorio ya que en la expresión de $f_{i-1/2}^A$ admitimos que en r_{i-1} en el instante de tiempo $t - \tau(r_{i-1})$ la densidad de carga tenía el mismo valor que en $t - \Delta t$. La introducción de un paso temporal ha de verse, más bien, como un tipo de subrelajación introducida en el modelo para obtener convergencia.

Con este modelo podemos calcular: i) El valor de α que corresponde a cada valor de β y C . ii) La densidad de carga en la región Ω_2 . Para ello seguimos los siguientes pasos: dado β obtenemos $d(r) = \beta C d^*(r)$. Fijado Δt

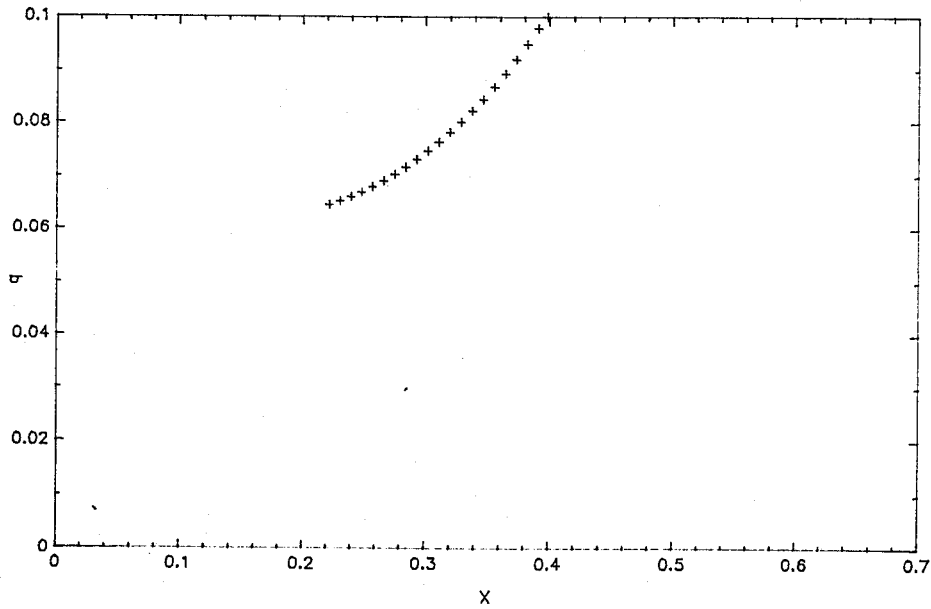


Figura 3.9: Densidad de carga obtenida por el modelo unidimensional para $A = 2$, $C = 0.1$ y $\beta = 0.08$ (la línea de proyección es $z = 1/2$).

y un valor inicial de α iteramos 3.53 hasta obtener la convergencia deseada. Con la densidad de carga obtenida calculamos un valor nuevo de β

$$\hat{\beta} = \frac{1}{C\pi(r_m^2 - r_1^2)} \int q(r)r dr \quad (3.64)$$

Se trata entonces de buscar el valor de α que haga $\hat{\beta} = \beta$.

En la figura 3.9 se representa $q(r)$ para $\beta = 0.8$ y $C = 0.1$. La recta \mathcal{R} es la línea $z = 1/2$ y la densidad de carga de $x = 0$ a x_s debe considerarse, por coherencia con el modelo, simétrica respecto de x_f (la abscisa del foco).

En la figura 3.10 se muestra β como una función de $C/\alpha^{1/2}$. La relación 3.50 corresponde, en la gráfica, a la diagonal. Como luego veremos, los resultados numéricos confirman la validez de 3.50 lo que quiere decir que nuestro modelo unidimensional, aunque reproduce aceptablemente la forma de $q(r)$ y da valores de α que, en orden de magnitud, se encuentran en la misma zona, no da del todo correctamente la relación de β con $C/\alpha^{1/2}$. Estas diferencias se pueden atribuir a las simplificaciones envueltas en el modelo unidimensional y sobre todo a la hipótesis de simetría radial en torno al foco

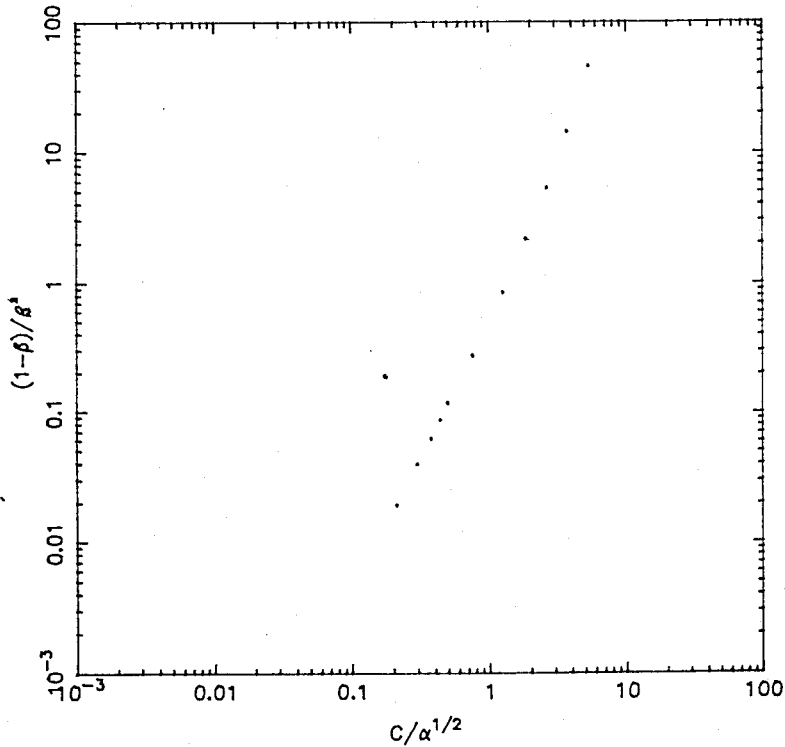


Figura 3.10: Dependencia de β con $C/\alpha^{1/2}$ obtenida con el modelo unidimensional.

de la densidad de carga.

3.4 Resultados numéricos

Aunque hemos introducido la difusión en la ecuación de conservación de la carga la pequeñez del parámetro α hace que, desde el punto de vista numérico, nos encontremos con los mismos problemas que en el capítulo anterior. Si queremos obtener resultados aceptables desde el punto de vista físico hemos de asegurarnos que el esquema numérico que empleemos tenga una difusión numérica despreciable frente al valor de la difusión real. Como ya vimos en el capítulo anterior el *upwind differencing* es totalmente inoperante en este sentido y este método sólo nos daría resultados aceptables en el caso de una ecuación parabólica regular. La ecuación de conservación de la carga tal y

como aparece en 3.1 es, en cierto límite del parámetro $C/\alpha^{1/2}$, un problema de perturbación singular y, en cualquier caso, pueden aparecer gradientes fuertes de la densidad de carga aún cuando incluyamos la difusión. Por todo ello hemos recurrido de nuevo al algoritmo FCT expuesto en la sección 2.2 para estudiar numéricamente la competencia entre difusión y repulsión coulombiana que en las secciones precedentes hemos puesto de manifiesto. En esta simulación numérica hemos querido obtener dos aspectos del problema. En primer lugar nos hemos restringido a la ecuación de conservación 3.1 junto con la ecuación de Poisson 1.22 con un valor fijo de la velocidad del líquido en la región Ω_1 para analizar la dependencia del valor de la densidad de carga en Ω_1 con C y α y analizar la validez de la relación 3.50. En segundo lugar hemos dejado variar la velocidad de acuerdo con una relación integral obtenida a partir de la ecuación de Navier-Stokes, con lo cual hemos reproducido el ciclo de histéresis para diferentes valores de α .

3.4.1 Cálculo de la densidad de carga

Hemos usado, como ya se ha dicho, el algoritmo FCT tal y como se ha expuesto en el capítulo anterior. La característica adicional que encontramos ahora es la del término de difusión real que aparece en 3.1. Este término ha sido incluido en el algoritmo introduciendo al final de cada paso de tiempo un nuevo flujo difusivo usando diferencias centrales en la forma:

$$F_{i+1/2}^D = \alpha \frac{q_{i+1,j} - q_{ij}}{\Delta x} \quad (3.65)$$

Hemos realizado dos nuevos tests para estimar el valor del coeficiente de difusión numérico α_N que ya introducimos en el capítulo anterior. Fijando $E_z = 1$ y $A = 2$ hemos comparado los transitorios obtenidos para valores diferentes de α . La solución estacionaria en este caso es como sabemos $q = C$ en todo el dominio, ya que el campo eléctrico es de divergencia nula. Comparando el tiempo que se tarda en alcanzar dicha solución para cada valor de α y, finalmente, para $\alpha = 0$ hemos obtenido que α_N no es mayor que 10^{-3} . El segundo test ha consistido en integrar cada 10 pasos de tiempo la ecuación de Poisson 1.22 para obtener el campo eléctrico y comparar los diferentes valores estacionarios del valor mínimo de la densidad de carga en la región Ω_1 para diferentes valores de α y para $\alpha = 0$. Es para valores de $\alpha \simeq 10^{-4}$ cuando los valores obtenidos de la densidad de carga mínima

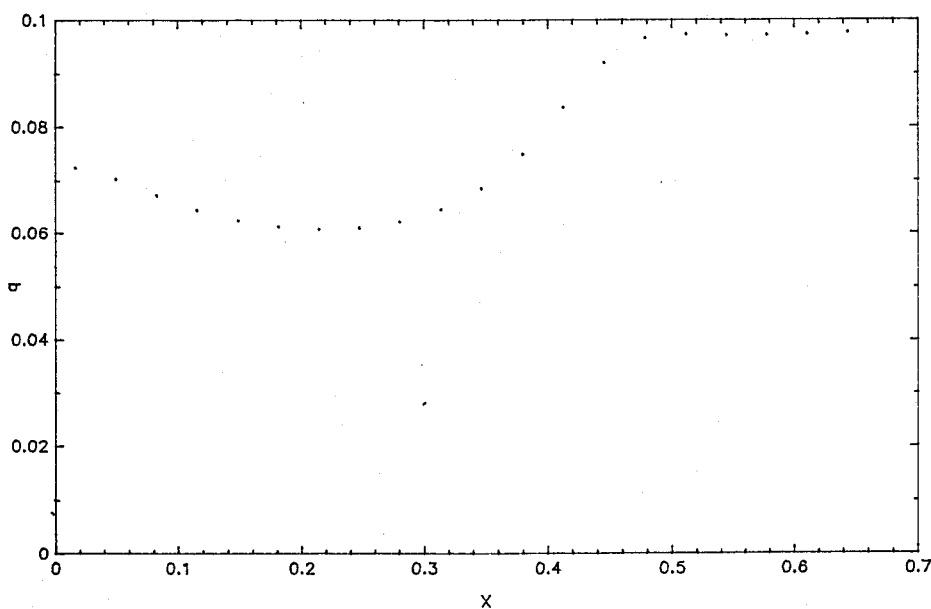


Figura 3.11: Densidad de carga obtenida con FCT para $A = 2$, $C = 0.1$, y $\alpha = 8.0 \times 10^{-3}$. Se presenta un corte con la recta $z = 1/2$.

empiezan a ser comparables, con lo cual de este último test obtenemos una cota para α_N de 10^{-4} . En todos nuestros cálculos nos hemos restringido a valores de α superiores a 10^{-3} .

Hemos ejecutado el código en un computador para diferentes valores de α y C hasta obtener un estado estacionario con un campo de velocidades en forma de rollo definido igual que en 2.2 para un valor fijo de $A = 2$. En la figura 3.11 se muestra un corte típico de la densidad de carga en la línea $z = 1/2$ para $\alpha = 8.0 \times 10^{-3}$ y $C = 0.1$. A la derecha del foco, el resultado obtenido es muy similar al obtenido por el modelo unidimensional.

Para cada par de valores de α y C hemos calculado, en la distribución de carga estacionaria, el valor de $\beta = q_{\min}/C$ donde q_{\min} es el valor mínimo de q en Ω . En la figura 3.12 se muestra la correlación $\beta - \alpha - C$ obtenida. Como vemos la relación 3.50 se cumple bien para $C/\alpha^{1/2} < 1$. Las discrepancias entre los resultados obtenidos con el FCT y los obtenidos por el modelo unidimensional se pueden atribuir a que la simetría radial, que se adopta como hipótesis en el modelo unidimensional, no es perfecta.

En las figuras 3.13, 3.14 y 3.15 hemos representado las líneas de nivel de la

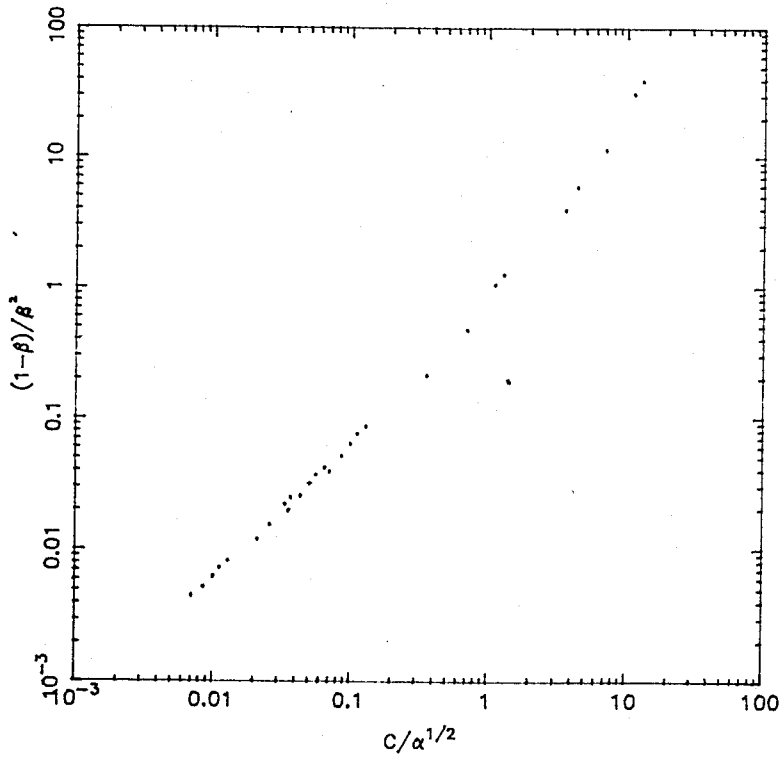


Figura 3.12: Correlación β frente a $C/\alpha^{1/2}$ obtenida con FCT.

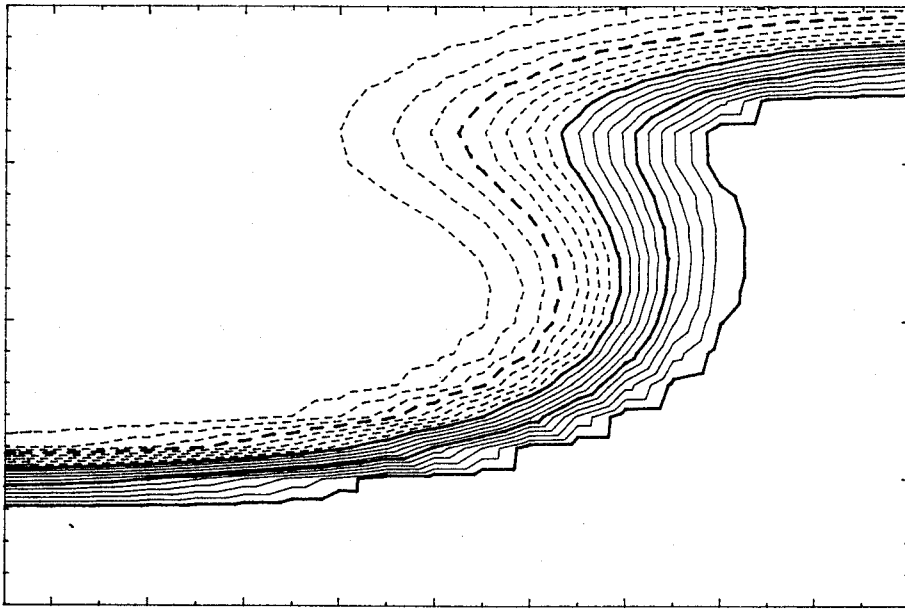


Figura 3.13: Líneas de nivel para la densidad de carga durante el transitorio $t = 0.5$. Resultado obtenido con FCT.

densidad de carga durante el transitorio para el caso $C = 0.1$, $\alpha = 8 \times 10^{-3}$. Vemos perfectamente como en los primeros pasos de tiempo la distribución viene determinada por los términos de convección. La densidad de carga toma, para $t \sim 1$, un aspecto no muy diferente del que tendría en el estado estacionario sin difusión. Se forma pronto un hueco de carga encerrado por la separatriz. Este hueco irá después rellenándose poco a poco a medida que transcurre el tiempo para que, en el estado estacionario, aparezca medio lleno de carga.

3.4.2 Ciclo de histéresis y criterio no lineal

Por último hemos abordado el cálculo del ciclo de histéresis cuando incluimos la difusión. El cálculo ha sido realizado obteniendo la amplitud de la velocidad para una forma dada de la misma por idéntico procedimiento al utilizado en el capítulo anterior para obtener el ciclo de histéresis con $\alpha = 0.0$. Aquí hemos incluido además el término de difusión real. Hemos obtenido así el ciclo de histéresis para un solo valor de $C = 0.1$ y tres valores diferentes de

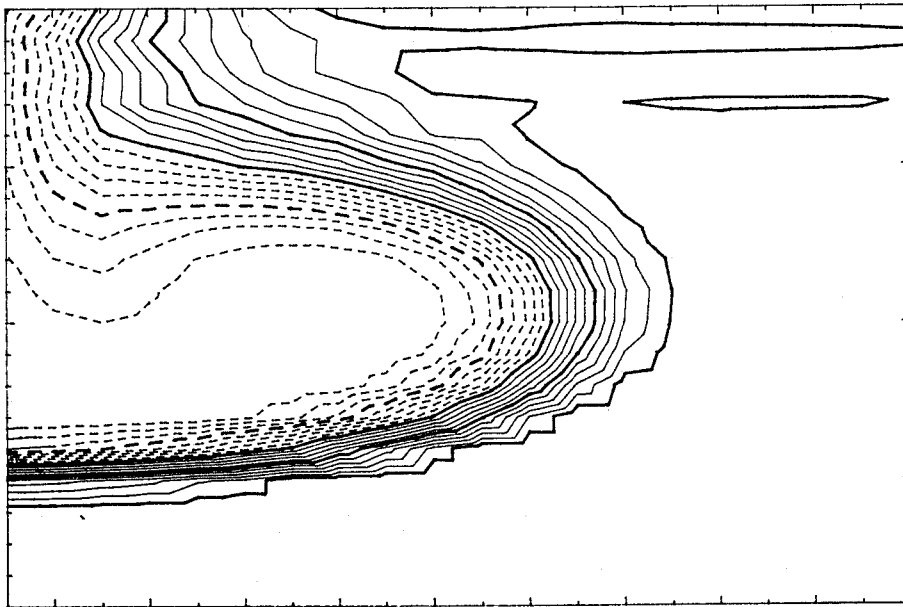


Figura 3.14: Líneas de nivel para la densidad de carga durante el transitorio $t = 1.0$. Resultado obtenido con FCT.

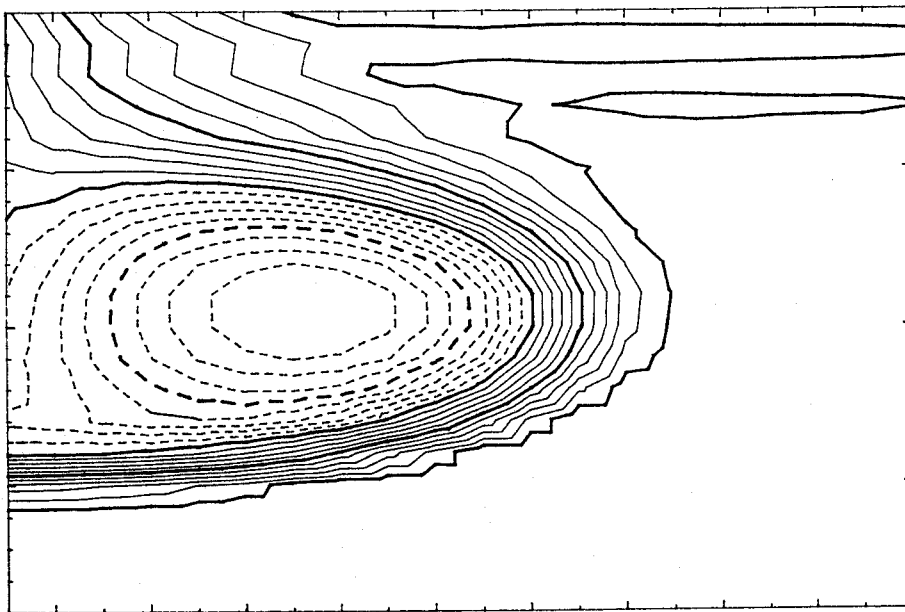


Figura 3.15: Líneas de nivel para la densidad de carga durante el transitorio $t = 2.5$. Resultado obtenido con FCT.

α : $\alpha = 0.0$, $\alpha = 6.0 \times 10^{-3}$ y $\alpha = 2.0 \times 10^{-2}$.

Los resultados se muestran en la figura 3.16 y se comparan con los obtenidos por los otros métodos utilizados. Vemos que la difusión estabiliza el sistema aumentando el valor del criterio no-lineal y reduciendo la amplitud de la electroconvección. Cualitativamente cabía esperar este resultado, ya que la difusión tiende a aumentar la carga presente en Ω_1 y reduce, por tanto, el par aplicado por la fuerza de Coulomb sobre la celda. En todo caso la amplitud de la velocidad es siempre superior a uno. Cuanto mayor es α más se aproxima el criterio no lineal al lineal y es de suponer que a partir de cierto valor de α el ciclo de histéresis desaparezca. En ese caso nuestro análisis deja de ser válido porque el valor de α no será entonces despreciable en el análisis lineal ya que debe influir sobre la distribución hidrostática de carga y, por tanto, en el valor del criterio lineal de inestabilidad. Es de esperar que, en cierto límite y cuando la difusión determine fundamentalmente la solución sin movimiento, se produzca una forma de transición al movimiento más parecida a la del problema de Rayleigh-Benard y con un parámetro de estabilidad que no será ya T .

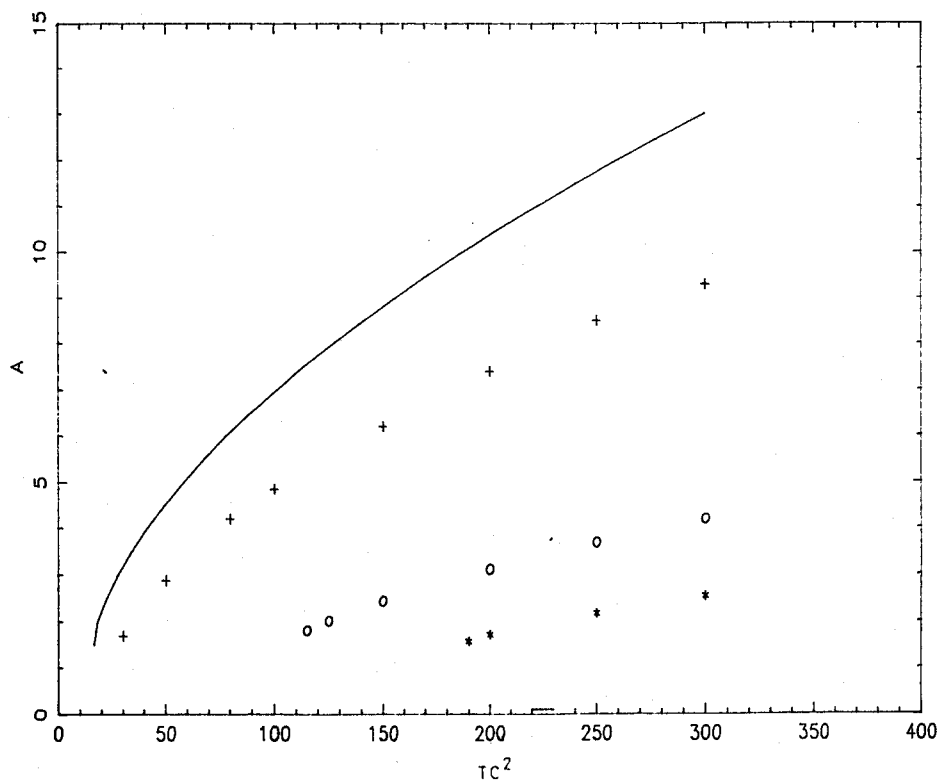


Figura 3.16: Ciclo de histéresis para $C = 0.1$ y varios valores de α obtenidos con FCT: (+) $\alpha = 0.0$, (o) $\alpha = 6.0 \times 10^{-3}$, (*) $\alpha = 2.0 \times 10^{-2}$. La línea continua corresponde al cálculo semianalítico.

Parte II

**Estudio experimental del aumento de
transferencia de calor por electroconvección**

Capítulo 4

Experiencias en geometría plano-paralela

Un amigo mío definía al científico práctico como aquel que no entiende nada de teoría y al teórico como un entusiasta que no entiende nada de nada; también queremos oponernos a este agudo punto de vista.

Ludwig Boltzmann

4.1 Introducción

La convección natural es aquella producida por las fuerzas de flotación. Cuando en un fluido se introducen diferencias de temperatura, manteniendo, por ejemplo, las paredes del recipiente que lo contienen a diferente temperatura, se producen diferencias de densidad másica. Estas diferencias pueden, en general, provocar el movimiento.

Del análisis dimensional de las ecuaciones que rigen la convección natural dos parámetros adimensionales aparecen como determinantes de la misma: $Ra = g\alpha \Delta T d^3 / \nu\chi$, (g aceleración de la gravedad, α coeficiente de dilatación, ΔT diferencia de temperatura típica¹, d distancia típica, ν viscosidad cinemática y χ difusividad térmica) conocido como número de Rayleigh y $Pr = \nu/\chi$, conocido como el número de Prandtl. El número de Rayleigh representa el cociente entre la potencia introducida en el líquido por las fuerzas de flotación y la potencia disipada por las fuerzas viscosas. El número de Prandtl es el cociente entre los tiempos de relajación de las perturbaciones térmicas y de vorticidad en el seno del fluido.

En un líquido confinado entre dos placas plano-paralelas separadas una distancia d mantenidas a una diferencia de temperatura ΔT , el número de Rayleigh juega el papel de parámetro de estabilidad. Por debajo de cierto valor de Ra ($Ra_c = 1708$) la solución sin movimiento del sistema de ecuaciones que rigen la dinámica del líquido es estable. Por encima de este valor el líquido entra en movimiento. Aparecen regiones en las que el líquido caliente sube (por efecto de su menor densidad) y otras en las que el líquido frío (más pesado) baja. El líquido caliente pierde su exceso de temperatura por conducción cuando se aproxima a la placa fría y entonces inicia el movimiento de retorno. Cuando se alcanza un régimen estacionario (en la vecindad del valor crítico del número de Rayleigh el líquido se organiza en celdas de convección en forma de rollos) se establece un balance entre la energía potencial introducida en el sistema por el calentamiento en la frontera inferior y el enfriamiento en la superior y la energía cinética disipada por la acción de la viscosidad. Este balance viene representado, como ya se ha dicho, por el número de Rayleigh.

Aunque Ra es el parámetro de estabilidad y el que determina, por tanto,

¹En esta segunda parte denotaremos por T a la temperatura absoluta ya que no hay posibilidad de confusión con el parámetro eléctrico.

cuándo se inicia el movimiento, los distintos regímenes de convección que aparecen a medida que aumentamos Ra dependen del número de Prandtl [45]. En general, dependen también de las condiciones iniciales y de la geometría concreta que se trate (cajas grandes o pequeñas) así como de las condiciones de calentamiento. Teóricamente, y siempre tratando de planos indefinidos y calentamiento uniforme, se encuentra que para $Pr \sim 100$ por encima de Ra_c aparece en primer lugar un movimiento bidimensional estacionario (en forma de rollos), después ($Ra \simeq 2 \times 10^4$) aparece un movimiento tridimensional pero también estacionario, más tarde ($Ra \simeq 6 \times 10^4$), diferentes tipos de movimiento no estacionarios incluidos regímenes caóticos y, para valores muy grandes de Ra ($Ra \sim 10^5 - 10^6$), la turbulencia (para valores muy altos de Ra las fuerzas viscosas no son capaces de disipar por sí solas la energía inyectada por las fuerzas de flotación, la turbulencia aparece entonces por su mayor eficacia disipadora). Para $Pr < 1$ el movimiento tridimensional estacionario no es observable y para valores poco por encima de Ra_c se llega muy rápidamente a regímenes no estacionarios y al caos. En este caso, las perturbaciones de vorticidad provocadas por pequeñas diferencias de temperatura locales sobreviven a éstas y un régimen no estacionario de movimiento se ve así muy favorecido.

En lo que aquí nos interesa el efecto más notable de la convección es el aumento de la transferencia de calor. Este aumento queda caracterizado por otro número adimensional, el número de Nusselt. Este se define como el cociente entre el flujo de calor real (conducción más convección) y el que habría para la misma diferencia de temperaturas entre las placas si no hubiera movimiento: $Nu = Hd/\kappa \Delta T$ (κ es la conductividad del térmica del líquido y H el flujo de calor neto que lo atraviesa). Cuando no hay movimiento es $Nu = 1$ y cuando el movimiento se establece es $Nu > 1$ y crece con Ra .

Por lo dicho sobre las diferentes formas de convección que se pueden establecer según los valores de Ra y Pr queda claro que el valor del número de Nusselt depende de ambos parámetros.

Las medidas experimentales se suelen presentar en forma de dependencia potencial $Nu = aRa^b$ donde las constantes a y b varían para cada rango de números de Prandtl considerado (en casi todos los experimentos existentes $b < 0.3$). Para un mismo líquido existen valores de Ra en los que a y b cambian y que coinciden con diversas transiciones en los regímenes de convección. Así para líquidos con Prandtl alto aparecen transiciones de este tipo en torno a $Ra = 2 \times 10^4$ y $Ra = 6 \times 10^4$. Para valores muy altos de

Ra aparecen transiciones en el comportamiento de Nu frente a Ra que no coinciden en los valores según los experimentos y que se asocian a diferentes tipos de turbulencia que todavía no están del todo dilucidados.

En cualquier caso, el propio mecanismo de convección natural se revela como poco eficaz para la transferencia de calor, ya que la velocidad típica de la convección depende de la misma diferencia de temperaturas y, aunque Nu aumenta continuamente con Ra , los valores de Nu que podemos obtener quedan siempre limitados por las condiciones experimentales en cuanto al aspecto térmico de las mismas se refiere. Para conseguir números de Nusselt grandes hacen falta números de Rayleigh gigantescos y esto sólo se consigue con diferencias de temperatura muy altas, lo que hace intervenir otros parámetros no considerados hasta ahora, o distancias muy grandes. Por ejemplo citemos que Castaing et al. [46] obtienen números de Nusselt superiores a 100, pero para ello necesitan llegar a $Ra \sim 10^{12}$ lo que en el laboratorio sólo es realizable en condiciones especiales (ellos usan helio líquido en sus experiencias).

La idea de utilizar campos eléctricos para aumentar la transferencia de calor no es nueva. Ya en los años treinta Sentleben [47] experimentó esta posibilidad con gases y Kronig y Ashman en 1950 [48] lo hicieron con líquidos. En los últimos treinta y cinco años se han realizado muchos trabajos sobre el tema principalmente de cara a su aplicación práctica en intercambiadores de calor, condensación, fusión, etcétera. Una buena cantidad de trabajos de este tipo y una discusión crítica de ellos puede encontrarse en Jones [49].

Cuando una diferencia de tensión eléctrica se aplica sobre una capa de fluido aparecen tres términos de fuerza: la fuerza de Coulomb qE donde q es la densidad espacial de carga y E el campo eléctrico; la fuerza dieléctrica $-(E^2/2)\nabla\epsilon$ con ϵ la permitividad del líquido; y la fuerza de electrostricción $\nabla[(E^2/2)(\delta\epsilon/\delta\rho)]$ con ρ la densidad másica. El segundo término aparece como consecuencia del gradiente de temperaturas, que implica un gradiente de permitividad. Sin embargo, cuando la tensión aplicada es continua este término es, en general, despreciable frente a la fuerza de Coulomb. El término de electrostricción se puede incluir en la presión, ya que representa un gradiente, y no tiene efectos dinámicos ni afecta a la estabilidad en líquidos confinados. Por lo tanto, en condiciones de tensión continua (DC) el término dominante es qE . En la mayoría de los trabajos existentes hasta ahora la densidad volumínica de carga q proviene de los gradientes de conductividad térmicamente inducidos pero este mecanismo de creación de carga es apre-

ciable solamente en líquidos en los que la corriente es de naturaleza óhmica. Efectivamente, de la ecuación de Poisson:

$$q = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon \nabla \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \mathbf{E} \cdot \nabla \sigma \quad (4.1)$$

En líquidos dieléctricos sometidos a campos intensos la principal fuente de carga en volumen es el proceso de inyección que, en condiciones adecuadas, se produce en uno o ambos electrodos. Se han realizado pocos trabajos sobre la transferencia de calor por electroconvección en líquidos utilizando la inyección como principal mecanismo de generación de carga. En gases Franke [50] entre otros muestra que existe un aumento de la transferencia de calor causado por el viento iónico que produce el efecto corona. Lazarenko [51] ha realizado también un análisis tanto experimental como teórico del problema, deduciendo alguno de los parámetros relevantes. Fernández y Poulter [52] han realizado experimentos en líquidos sometidos a inyección unipolar en geometría cilíndrica con flujos forzados, aunque en condiciones electroquímicamente poco controladas. Un estudio más detallado de este tipo de sistema está siendo llevado a cabo actualmente por el equipo de Grenoble, alguno de cuyos resultados preliminares se encuentran en [53]. Mizushina et al. han realizado recientemente un análisis sobre esta misma configuración con algunos resultados interesantes. El análisis de estabilidad del caso electroaerodinámico ha sido realizado por Hoburg [54] que también muestra experimentalmente un incremento del número de Nusselt en presencia de inyección. Por último, Bologna et al. [55] han examinado el aumento de la transferencia de calor que produce un campo eléctrico aplicado a un flujo de una suspensión de sólido en gas. Examinan, en este trabajo, tanto el caso en el que las partículas en suspensión son conductoras como el caso en que son aislantes. Bajo ciertas condiciones, este tipo de fenómeno puede ser simulado en suspensiones líquidas.

El problema del que nos hemos ocupado es el de caracterizar el aumento de transferencia de calor en una capa de líquido confinada entre dos electrodos plano-paralelos sometida simultáneamente a un gradiente térmico y a un campo eléctrico.

4.2 Dispositivo experimental

Se ha elegido la geometría particular de una capa horizontal de líquido porque permite una comparación significativa con el problema de Rayleigh-Benard. Las experiencias se han realizado a flujo de calor constante.

El dispositivo experimental se esquematiza en la figura 4.1. La celda de estudio comprende dos placas de cobre paralelas (de 2.48 kg la más pesada) separadas y cerradas por un marco de plexiglás. Cambiando éste último se hace variar la distancia entre las placas. Las experiencias se han hecho para 3, 5 y 7 mm de distancia entre electrodos. La superficie activa de la celda es de $15.75 \times 10.40 \text{ cm}^2$. La placa de 2.48 kg está en contacto con una resistencia eléctrica capaz de suministrar una potencia calorífica de hasta 30 watios. La otra placa se mantiene a una temperatura constante (20° C en casi todas las experiencias realizadas) con la ayuda de un baño termostatado (Huber Unistat), y va conectada a una fuente de alta tensión (DC) que proporciona hasta 20 KV en las dos polaridades (fabricada por Spellman). El líquido de refrigeración es aceite de silicona (Rhodorsil 47 V 1) suministrado por Rhone-Poulenc. Se ha elegido un líquido aislante para evitar toda pérdida eléctrica importante cuando el electrodo termostatado se pone a alta tensión. El gasto máximo circulante en el interior de la placa es del orden de 15 l/min. y el tiempo de un ciclo completo de unos 5 s. Dándole la vuelta a la celda se consiguen dos configuraciones: calentamiento por arriba y por debajo.

La temperatura de las placas se mide con dos sondas de platino y un termómetro de alta precisión (tipo PN5207, fabricado por A. O. I. P.). Una de las sondas está en contacto directo con la placa calefactora. La otra no es posible ponerla en contacto directo con la placa termostatada ya que ésta va conectada a alta tensión. Es necesario aislar eléctricamente la sonda de la placa y al mismo tiempo asegurar un contacto térmico lo más eficaz posible. Esto se consigue interponiendo entre sonda y placa una barra de zafiro (ver figura 4.1), material que tiene una resistencia eléctrica muy alta y es un buen conductor del calor.

Las pérdidas térmicas se minimizan rodeando la sonda con dos campanas de cobre que van soldadas a la placa. Tanto la placa como las campanas están recubiertas de poliuretano. Las conexiones eléctricas entre la sonda y el termómetro pasan por dentro de un tubo de araldita que atraviesa todo el aislante.

Para evitar la descarga eléctrica entre las campanas de cobre (a alta

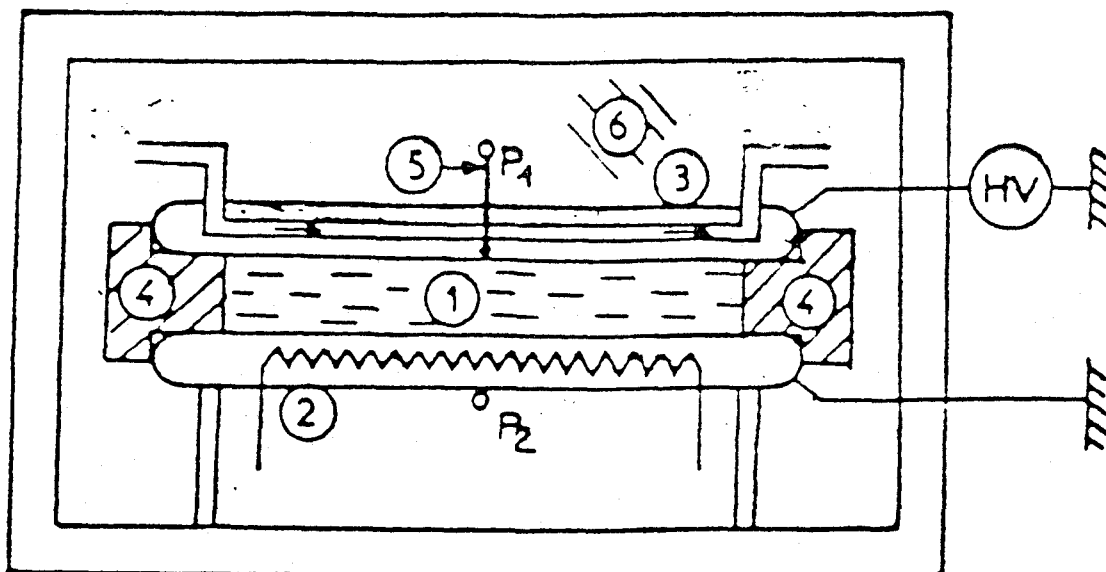


Figura 4.1: Esquema de la celda experimental: 1. capa de líquido; 2. resistencia calefactora; 3. electrodo a alto voltaje; 4. marco de plexiglás; 5. barra de zafiro; 6. poliuretano. P_1 y P_2 , sondas de temperatura.

tensión) y la sonda, hemos rodeado ésta de una caja de cobre conectada a masa.

El sistema se aísla de las fluctuaciones de la temperatura ambiente encerrándolo en una caja (madera, poliuretano, cobre) termostatada por otro baño. El interior se mantiene permanentemente a la misma temperatura que la placa calefactora a fin de evitar las pérdidas de calor hacia el exterior. De esta manera se asegura que la potencia calorífica suministrada a la placa pase enteramente a través de la celda.

Para tener en cuenta las pérdidas residuales, a pesar de la interposición de los diversos aislantes térmicos, hemos efectuado una calibración de la sonda superior, en ausencia de tensión, con la ayuda de una tercera sonda colocada sobre la superficie interna de la placa. A partir de las temperaturas medidas por las sondas se obtiene, después de la corrección según la curva de calibrado, la diferencia de temperatura sobre la capa líquida con un error que no excede el 3% (para diferencias de temperatura por encima de 1° C este error es más pequeño).

El termómetro permite tanto una medida independiente de las dos temperaturas como una medida diferencial (obteniendo automáticamente la diferencia de temperatura). Se obtiene así la diferencia de temperatura con una precisión de hasta 0.01 °C. Se ha registrado en las experiencias, además del valor estacionario final, la evolución de ΔT con el tiempo para analizar el comportamiento transitorio.

El líquido utilizado es aceite de silicona (Rhodorsil 47 V 10, suministrado por Rhone-Poulenc). Sus propiedades a 22 °C se muestran en la tabla 4.1. En este tipo de líquido, de baja conductividad, es posible provocar una inyección unipolar de iones dopándolo con una sal adecuada como el TIAP (Picrato de Triisoamidamonio) [7].

4.3 Característica tensión-corriente isoterma

Hemos verificado que con nuestra celda de estudio se obtiene una inyección de iones negativos de intensidad lentamente creciente con el campo: por encima de cierto valor del potencial aplicado la corriente de conducción volumínica es despreciable frente a la corriente de inyección (ver figura 4.2). Observamos dos regímenes: por debajo de V_s corriente y voltaje son proporcionales (régimen óhmico) mientras que por encima la corriente crece más que pro-

	aceite de silicona	plexiglás	zafiro	cobre
ϵ	2.63	4.0	10.5	---
ν (m ² /s)	10 ⁻⁵	---	---	---
ρ (Kg/m ³)	9.3 × 10 ²	1.2 × 10 ³	3.9 × 10 ³	8.9 × 10 ³
c_p (J/kg K)	1.6 × 10 ³	1.5 × 10 ³	---	3.9 × 10 ²
κ (J/mKs)	0.13	0.13	34.0	3.8 × 10 ²

Tabla 4.1: Algunas propiedades físicas del aceite de silicona y otros materiales usados en el experimento

porcionalmente (como V^b con $3/2 < b < 5/2$). Este segundo régimen se corresponde con una corriente provocada por la inyección de iones negativos desde el electrodo polarizado negativamente.

4.4 Medidas en condiciones estacionarias

El flujo de calor viene dado por

$$\mathbf{H} = \rho c_p \mathbf{v} - \kappa \nabla T \quad (4.2)$$

siendo ρ la densidad del líquido, c_p su capacidad calorífica, \mathbf{v} su velocidad, T la temperatura y κ la conductividad térmica. Promediando esta ecuación en todo el volumen ocupado por el líquido se tiene:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \langle H_z \rangle dz = -\kappa \frac{\Delta T}{d} + \rho c_p \frac{1}{d} \int_0^d \langle wT \rangle dz \quad (4.3)$$

donde el eje z se ha tomado perpendicular a la capa de líquido, $\langle \rangle$ significa promedio respecto de un plano horizontal y w es la componente z de la velocidad. El número de Nusselt toma entonces la expresión:

$$Nu = 1 + \frac{\rho c_p}{\kappa \Delta T} \int_0^d \langle wT \rangle dz \quad (4.4)$$

Vemos que el efecto de la convección es el de aumentar el valor de Nu por encima de la unidad. Hay que remarcar que este aumento no depende sólo de

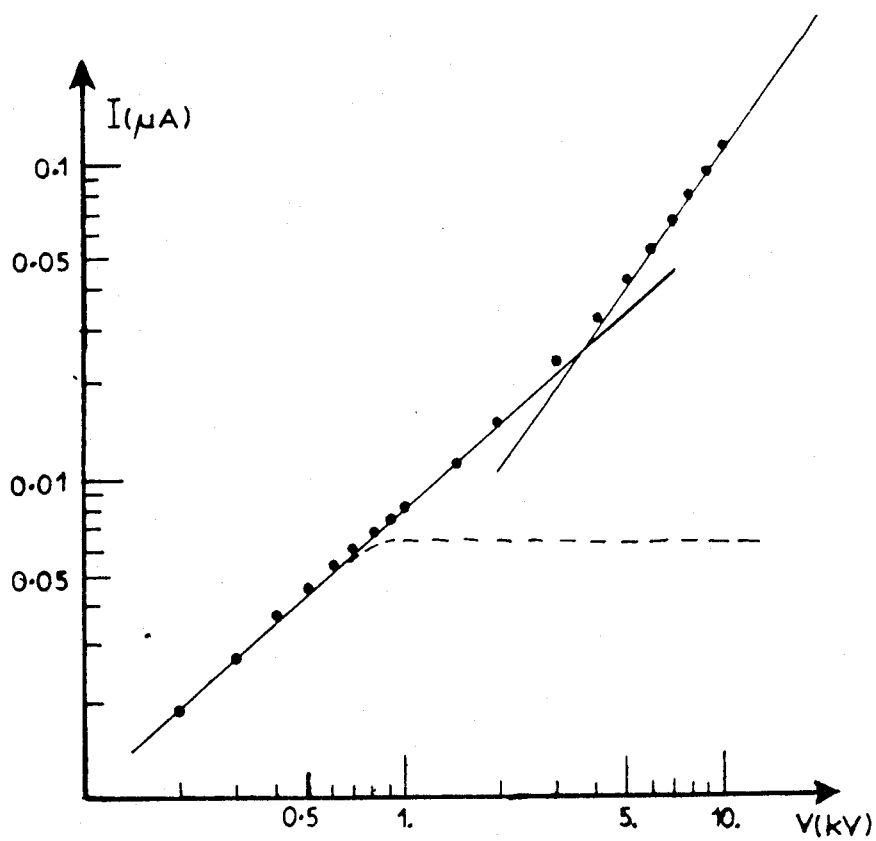


Figura 4.2: Característica tensión-corriente del aceite de silicona saturado con TIAP.

la magnitud de la velocidad del líquido, sino de la correlación entre el campo de velocidades y el de temperaturas.

Se puede definir una conductividad aparente de forma que:

$$H = \kappa_{ap} \frac{\Delta T}{d} \quad (4.5)$$

(donde H se refiere al flujo de calor según el eje z) y el número de Nusselt se escribe entonces como:

$$Nu = \frac{\kappa_{ap}}{\kappa} \quad (4.6)$$

Para determinar κ_{ap} hay que tener en cuenta los flujos de calor a través del plexiglás. Si llamamos H_l al flujo a través del líquido, H_p al del plexiglás y S_l y S_p a las respectivas superficies será:

$$Q = S_l H_l + S_p H_p \quad (4.7)$$

donde Q es la potencia calorífica total que atraviesa la celda.

Dada la compleja geometría de la celda, que hace muy complicado un análisis pormenorizado del campo de temperaturas en el marco de plexiglás (debido a los atornillamientos, pegamentos, etcétera) hemos aceptado la hipótesis de que la cantidad de calor que lo atraviesa es proporcional a la diferencia de temperatura, esto es:

$$S_p H_p = \text{const} \times \Delta T \quad (4.8)$$

donde la constante se ha determinado midiendo la diferencia de temperatura para varios valores de Q , asegurándonos que no existía movimiento en el líquido (ver figura 4.3). Una vez determinada la constante y de las expresiones 4.5, 4.7 y 4.8 se tiene

$$\kappa_{ap} = \frac{d}{S_l \Delta T} (Q - \text{const} \times \Delta T) \quad (4.9)$$

Sin tensión aplicada ($V = 0$) hemos reproducido la curva clásica de Nu en función de Rayleigh.

El buen acuerdo con los resultados clásicos [56] (ver figura 4.4) es una comprobación del buen funcionamiento de todo el dispositivo. Para cada valor de la distancia entre los electrodos hemos obtenido el valor correspondiente del Ra_c correspondiente al establecimiento de la convección.

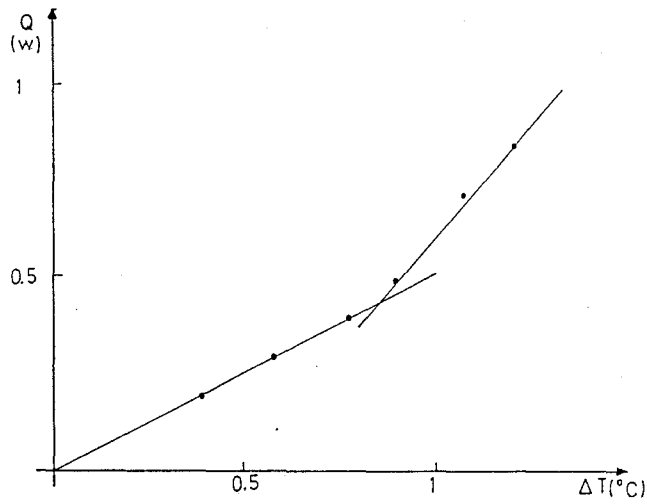


Figura 4.3: Valores de Q frente a ΔT sin tensión aplicada. El cambio de pendiente refleja la inestabilidad de Rayleigh-Benard. La recta correspondiente a la situación hidrostática se ha usado para calibrar el sistema.

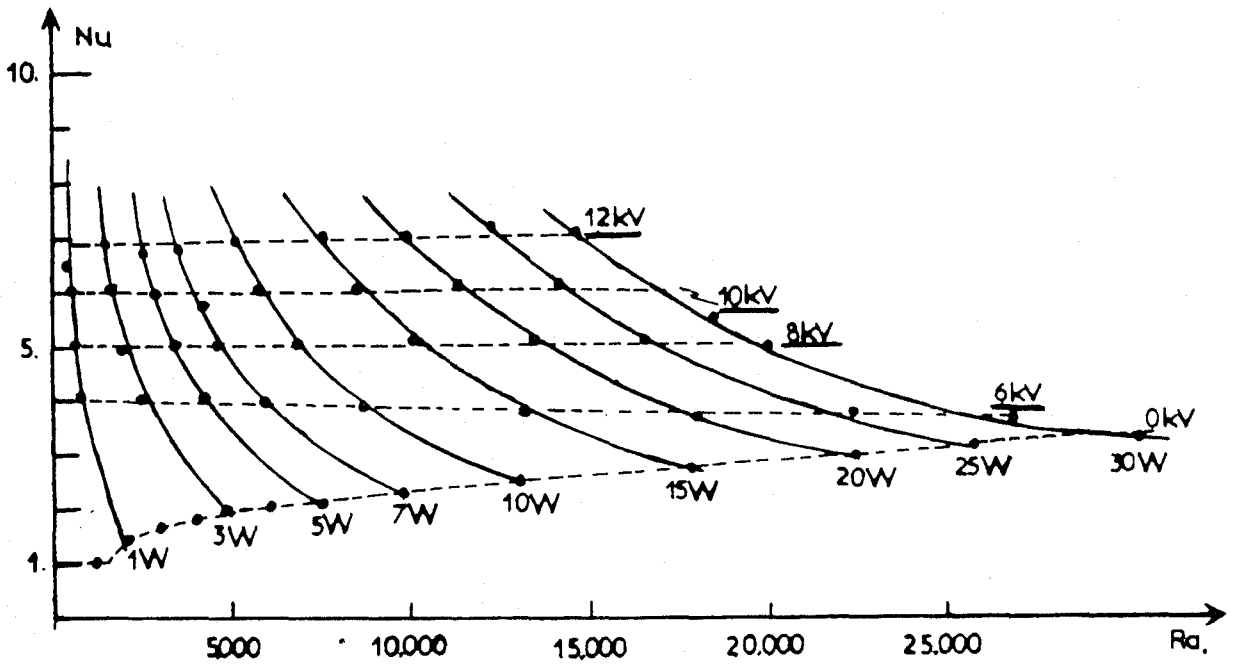


Figura 4.4: Curvas $Q = cte$. La curva horizontal inferior corresponde a $V = 0$.

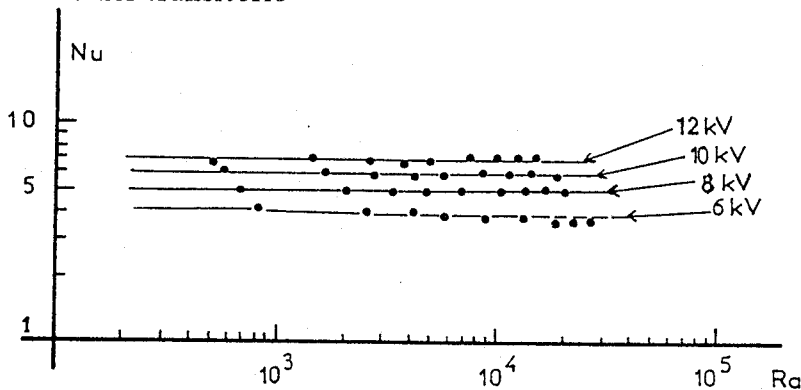


Figura 4.5: Nu frente a Ra para diferentes valores de Q y V . Resultados para $d = 5\text{mm}$, inyección y calentamiento por debajo. Representación log-log de las curvas $V = \text{cte}$.

Se han realizado medidas para rangos de $0 < V < 18\text{ kV}$, $0 < Q < 30\text{ W}$, $d = 3, 5$ y 7 mm con polaridad positiva y negativa (inyección desde el electrodo frío o el caliente) y calentamiento por arriba y por abajo.

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran los resultados obtenidos para una serie completa. En este caso es $d = 5\text{ mm}$, inyección de iones negativos por debajo, calentamiento por debajo y los puntos se han obtenido variando cada vez la potencia de calefacción manteniendo fijo el potencial aplicado. Como se ve, Nu es prácticamente independiente de la diferencia de temperatura, siendo el potencial aplicado el que determina su valor. Esto muestra que son las fuerzas eléctricas las que determinan el comportamiento del sistema, jugando las fuerzas de flotación un papel despreciable. Resultados similares se obtienen para todas las configuraciones posibles: inyección por arriba, calentamiento por arriba e inyección por abajo y por arriba; así como para las tres distancias. Lo que varía en cada caso es el valor del número de Nusselt para un potencial dado. El número de Nusselt máximo se obtiene así para $d = 7\text{mm}$.

4.5 Análisis del transitorio

El hecho de que la conductividad térmica efectiva sea prácticamente independiente de la diferencia de temperatura (ver figura 4.5) implica que el transporte por convección y la agitación del líquido son, en primera aproximación, independientes de ΔT . Esta conclusión debe poder extraerse también

del análisis del comportamiento transitorio. En efecto, consideremos una perturbación pequeña del régimen estacionario por modificación ya sea de la tensión aplicada, ya de la potencia calefactora de la placa. Podemos establecer, entonces, una analogía con un circuito eléctrico: en el primer caso (modificación de V) la conductividad térmica efectiva (la resistencia) es modificada rápidamente, siendo el tiempo de tránsito de los iones (del orden de décimas de segundo) el tiempo característico de este proceso. En el segundo caso, la resistencia no cambia pero sí la cantidad de calor suministrado (la corriente para un circuito eléctrico). La relajación hacia un nuevo estado estacionario se hará bien por enfriamiento o calentamiento de la placa de cobre que juega el papel de un condensador. Tenemos, por tanto, el equivalente a un circuito RC y podemos esperar que la relajación al estado estacionario se hará de forma exponencial, con un tiempo característico $\tau \sim RC$ con R y C la resistencia y capacidad térmica del sistema, respectivamente.

Y eso es lo que se obtiene, efectivamente, manteniendo la tensión aplicada y variando la potencia de calentamiento (ver figura 4.6,a): se comprueba que para un valor dado de la tensión la constante de tiempo es la misma para cualquier potencia. De estas medidas debe ser posible, por tanto, encontrar la resistencia térmica y la conductividad aparente para ese valor de V .

Vamos a obtener mediante un cálculo aproximado una expresión para κ_{ap} en función de τ . Supongamos que la placa de cobre empieza a suministrar calor en el instante $t = 0$. El calor es transportado a través del plexiglás y del líquido hacia la otra placa que se mantiene a temperatura constante. Para cada uno de los tres medios se cumple la ecuación del calor:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.10)$$

Admitimos que el gradiente de temperatura es vertical en los tres medios, con lo que la ecuación 4.10 la consideramos unidimensional. En la placa de cobre inferior, $0 < z < d_1$, el gradiente de temperatura es muy pequeño y admitiremos que la placa es isoterma (la conductividad del cobre es mil veces mayor que las otras). La ecuación 4.10 conduce entonces a:

$$H_l = H_0 - \rho_c c_c d_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (4.11)$$

donde H_0 es el flujo de calor suministrado a la placa y H_l es el flujo de calor que pasa de la placa al líquido y al plexiglás.

Integrando de nuevo la ecuación 4.10 para el líquido y para el plexiglás:

$$\rho_l c_l \int \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz + (H_{l_2} - H_{l_1}) S_l = 0 \quad (4.12)$$

$$\rho_p c_p \int \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz + (H_{p_2} - H_{p_1}) S_p = 0 \quad (4.13)$$

donde los índices l y p se refieren al líquido y el plexiglás y los 1 y 2 a las placas inferior y superior, respectivamente. Para el primer término de ambas ecuaciones podemos tomar la temperatura media sobre todo el volumen:

$$\rho c \int \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = M c \frac{\partial T_1 + T_2}{2} \quad (4.14)$$

donde M es la masa correspondiente a cada medio.

Sumando las ecuaciones 4.12 y 4.13, se obtiene:

$$(c_l M_l + c_p M_p) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) + S_l H_{l_2} + S_p H_{p_2} - S_l H_{l_1} - S_p H_{p_1} = 0 \quad (4.15)$$

teniendo en cuenta que no hay acumulación de energía en la interfase se tiene $S_l H_{l_1} + S_p H_{p_1} = S_c H_l$ y de la ecuación 4.11:

$$S_l H_{l_1} + S_p H_{p_1} = S_c H_l = S_c H_c - M_c c_c \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (4.16)$$

Si admitimos ahora que el flujo a nivel de la placa superior es igual al producto de la conductividad térmica (que puede tomarse κ_{ap} para el líquido) por el gradiente medio de temperatura, se obtiene:

$$(c_l M_l + c_p M_p) \frac{\partial}{\partial t} \frac{T_1 + T_2}{2} - S_l H_l \frac{T_2 - T_1}{d_2 - d_1} - S_p \kappa_p \frac{T_2 - T_1}{d_2 - d_1} - S_c H_c + M_c c_c \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

La solución de esta ecuación es:

$$T_1(t) = T_2 + \frac{Q}{\frac{S_l \kappa_l}{d_2 - d_1} + \frac{S_p \kappa_p}{d_2 - d_1}} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (4.18)$$

donde Q es $S_c H_0$, la potencia disipada, y:

$$\tau = \frac{\frac{M_l c_l + M_p c_p}{2} + M_c c_c}{\frac{S_l \kappa_l}{d_2 - d_1} + \frac{S_p \kappa_p}{d_2 - d_1}} \quad (4.19)$$

En esta expresión, los términos del numerador representan las capacidades caloríficas del líquido, del cobre y del plexiglás y los del denominador las conductancias térmicas.

Se ha supuesto implícitamente que, en régimen transitorio, la conducción en el plexiglás es análoga a la del régimen estacionario. Para pequeñas perturbaciones de aquél, hemos verificado que esta hipótesis es razonable. Para ello hemos registrado el comportamiento de ΔT con el tiempo calentando por arriba con $d = 5\text{mm}$ (situación estable en la que no se produce movimiento en el líquido y por tanto todo el calor es transportado por conducción). La relajación es de tipo exponencial y el tiempo característico es de 45 min., lo que coincide con la previsión si se introduce para el factor geométrico el obtenido de las medidas estacionarias sin voltaje.

En la figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos para la evolución de $\Delta T(t)$ correspondientes a las medidas estacionarias de la figura 4.5. Se representa la función $F(t) = [T_1(t) - T_1(\infty)]/[T_1(0) - T_1(\infty)]$ y las gráficas corresponden a: (a) $V = 6\text{KV}$, (b) $V = 8\text{KV}$, (c) $V = 10\text{KV}$, (d) $V = 12\text{KV}$. La correspondencia de los símbolos es: (+) 1 W, (•) 3 W, (Δ) 5 W, (\square) 7 W, (\circ) 10 W, (x) 15 W, (∇) 20 W, (\diamond) 25 W, (L) 30 W. La variación es de tipo exponencial y del tiempo de relajación se encuentran los valores de Nu que coinciden aceptablemente con los obtenidos de las medidas estacionarias. En la tabla 4.2 se muestran y comparan estos valores. Los valores estacionarios son más precisos que los obtenidos del transitorio.

4.6 *Discusión y conclusión*

A la vista de los resultados tanto estacionarios como transitorios se puede concluir que la transferencia de calor en nuestras condiciones viene determinada por las fuerzas de origen eléctrico. Esto nos lleva a buscar una correlación entre el número de Nusselt y las magnitudes de tipo eléctrico, independientemente de la diferencia de temperatura.

En contra de lo que sugiere la figura 4.5 y a pesar de que para todas las demás configuraciones las figuras obtenidas son del mismo tipo no se puede encontrar una correlación directa entre Nu y V . En efecto, para diferentes series de experiencias se observa que el número de Nusselt no es el mismo para un potencial dado. Ello es debido a las diferencias de conductividad que se aprecian en el líquido entre una y otra serie de medidas, debido al es-

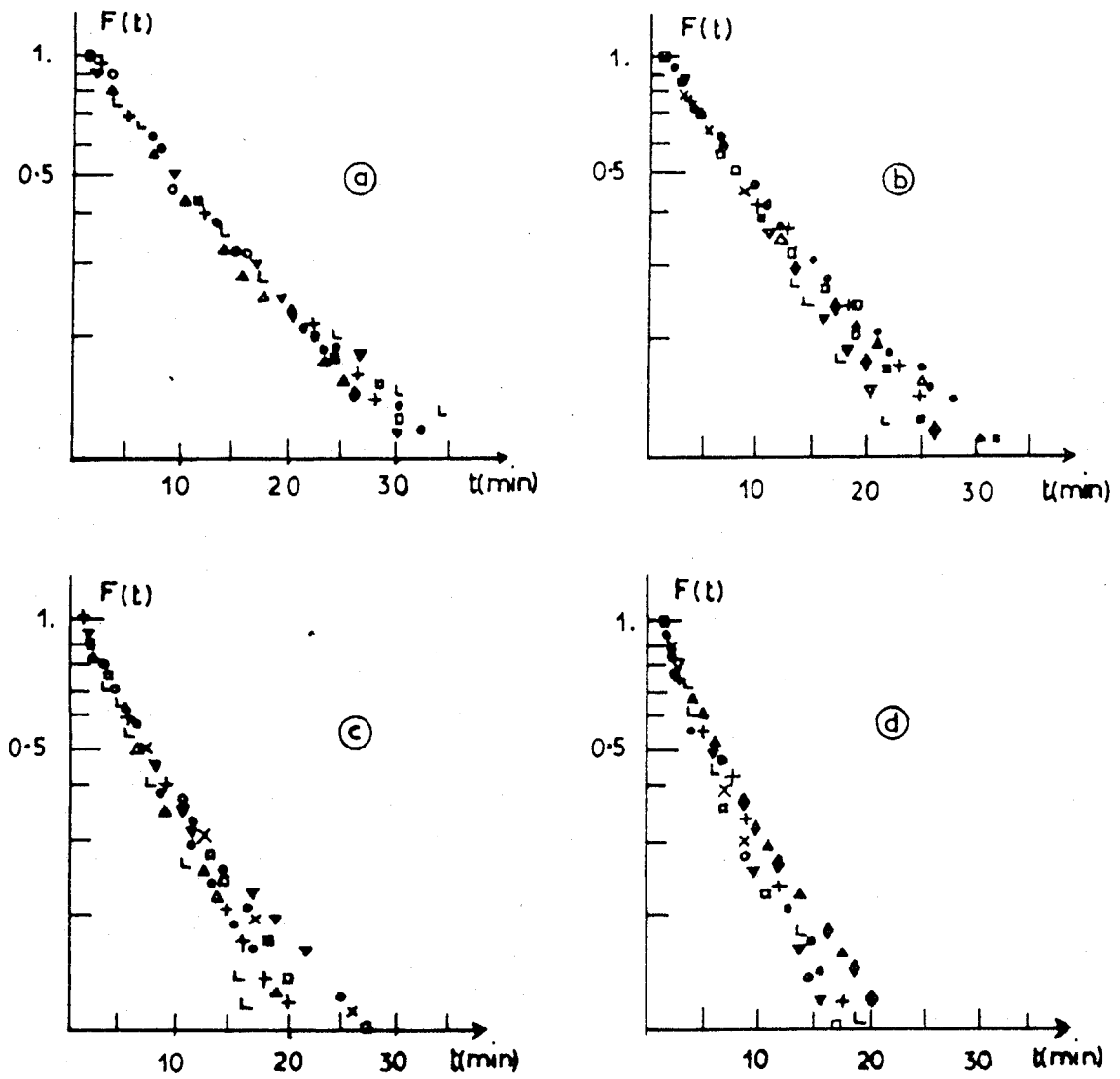


Figura 4.6: Comportamiento transitorio de la diferencia de temperatura (ver texto).

KV	W	30	25	20	15	10	7	5	3	1
6	I	3.99	4.02	3.99	4.1	4.14	4.26	4.3	4.32	4.43
	II	3.71	3.76	3.64	3.72	3.83	3.82	4.1	3.95	4.35
8	I	5.39	5.4	5.4	5.39	5.31	5.3	5.25	5.25	5.38
	II	5.96	5.35	5.13	4.86	5.35	5.23	5.01	4.63	4.43
10	I	5.84	6.42	6.37	6.4	6.33	6.0	6.23	6.44	6.44
	II	7.4	6.1	6.54	5.34	5.41	5.25	5.82	5.89	6.26
12	I	7.4	7.5	7.33	7.33	7.23	7.12	7.12	7.33	6.82
	II	6.26	6.97	7.08	7.22	7.38	7.59	6.58	7.03	6.98

Tabla 4.2: Número de Nusselt en función de la potencia disipada (en vatios) y de la tensión aplicada (en kilovoltios). (I) En condiciones estacionarias, (II) a partir del transitorio.

tado de mayor o menor depuración del líquido, a reacciones líquido-electrodo, etcétera. Ello hace que para las mismas condiciones, Nu pueda variar apreciablemente para un mismo valor de V de una serie de experiencias a otras.

Tampoco la corriente total que atraviesa la celda puede tomarse como la magnitud determinante, ya que ésta está compuesta de una corriente de conducción residual, que normalmente juega un papel estabilizante sobre la capa líquida, y la corriente de inyección, auténtica responsable del movimiento. Descontando la corriente de conducción, que en la mayoría de los casos corresponde a la corriente de saturación (ver apéndice C), de la corriente total, hemos buscado una correlación entre Nu e I_{inj} .

Se observa además que el Nu aumenta con la distancia para un mismo valor de la corriente. Así hemos obtenido valores de hasta 15 para el Nusselt, lo que significa un aumento notable de la transferencia térmica debido a la presencia del campo eléctrico. La correlación final encontrada se muestra en la figura 4.7 donde se ha representado Nu frente a $I_{inj}d^3$. Se presentan resultados de las siguientes configuraciones a) calentamiento por abajo: (o) $d = 5\text{mm}$, inyección por arriba; (•) $d = 5\text{mm}$, inyección por abajo; (x) $d = 3\text{mm}$, inyección por arriba. b) calentamiento por arriba: (□) $d = 3\text{mm}$, inyección por arriba; (+) $d = 7\text{mm}$, inyección por arriba; (△) $d = 7\text{mm}$, inyección por abajo. Como puede verse no hay diferencias apreciables entre

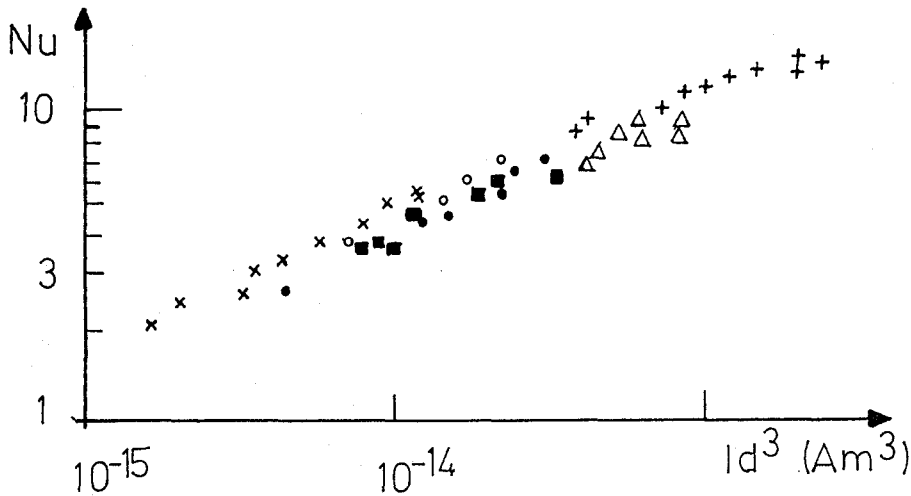


Figura 4.7: Nu frente a Id^3 para diferentes configuraciones (ver texto).

calentar por arriba o por abajo o inyectar por arriba o por abajo. Se sigue una ley de tipo potencial de la forma $Nu \propto (I_{inj}d^3)^a$ con a , algún valor entre 0.3 y 0.5.

Los puntos experimentales que quedan por debajo de $Id^3 = 10^{-14} \text{Am}^3$ parece que pudieran ajustarse mejor a otro exponente más próximo a 1/2. Este hecho puede estar relacionado con una transición entre regímenes viscoso e inercial, aunque la falta de información local sobre el estado del líquido aconsejan cierta prudencia en nuestras conclusiones.

Esta primera serie de experiencias pone de manifiesto la posibilidad de utilizar campos eléctricos para aumentar la transferencia de calor en líquidos aislantes. Aunque se ha podido caracterizar de forma global la fenomenología presente, un estudio experimental más detallado, incluyendo algún tipo de medición local, se hace preciso si se desea caracterizar el estado de movimiento del líquido y discernir la posible existencia de diferentes regímenes de convección. En el próximo capítulo abordamos un estudio experimental más sofisticado sobre el problema. En el último capítulo presentamos una discusión, desde un punto de vista más teórico, de los resultados experimentales obtenidos.

Capítulo 5

Experiencias con láminas

Être la flèche
son but et sa trajectoire
Parfois l'éclair.

Anne Philipe

Para poder discernir los diferentes regímenes de convección y, por tanto, las diferentes leyes de correlación es preciso visualizar el movimiento así como obtener información más o menos local de la distribución de temperatura y/o de la velocidad. Hemos por ello concebido otro montaje experimental en el que poder realizar diferentes sistemas de visualización así como una sencilla forma de interferometría. Para ello es preciso un sistema de regulación de temperatura que controle las pérdidas sin tener que encerrar la celda. Por otro lado, hemos querido fijar la estructura convectiva para lo que se han utilizado 5 láminas equidistantes en las que, debido al reforzamiento del campo eléctrico en los bordes se produce inyección de carga sin necesidad de añadir sal alguna al líquido. El que la inyección se produzca de forma localizada fija una estructura periódica aún cuando el movimiento sea turbulento.

5.1 Celda de estudio

La celda de estudio (ver figura 5.1) está formada por dos electrodos en cobre separados 18 mm. y encerrados por un marco de metacrilato especialmente pulido para las observaciones ópticas. El electrodo superior (50×150 mm.) tiene 5 láminas de acero que sobresalen 5 mm. perpendicularmente al electrodo hacia el interior de la celda y colocadas a 30 mm. una de otra. El electrodo inferior está dividido en dos partes: la interior (a la que llamaremos propiamente electrodo) de una superficie de 29.13 cm^2 lleva una resistencia calefactora de 4.7Ω que, alimentada por una fuente de potencia, proporciona el flujo de calor deseado; la parte exterior del electrodo (que llamaremos anillo de guarda) rodea completamente al interior excepto por donde éste está en contacto con el líquido. Ambas partes están aisladas eléctricamente y sostenida la interior sobre la exterior por medio de calzos pegados. El anillo de guarda lleva también una resistencia calefactora (7Ω). La intensidad que se proporciona a esta resistencia viene determinada por un sistema de regulación, que detallaremos más adelante, y es tal que el anillo de guarda está siempre a la misma temperatura que el electrodo.

El electrodo superior está conectado a una fuente de alta tensión y termostatado con el mismo sistema utilizado en el montaje descrito en el capítulo 4. La temperatura del electrodo superior se mide por medio de una sonda de platino y un termómetro de alta precisión. Tanto la sonda como el termómetro están aislados eléctricamente de tierra gracias a un transfor-

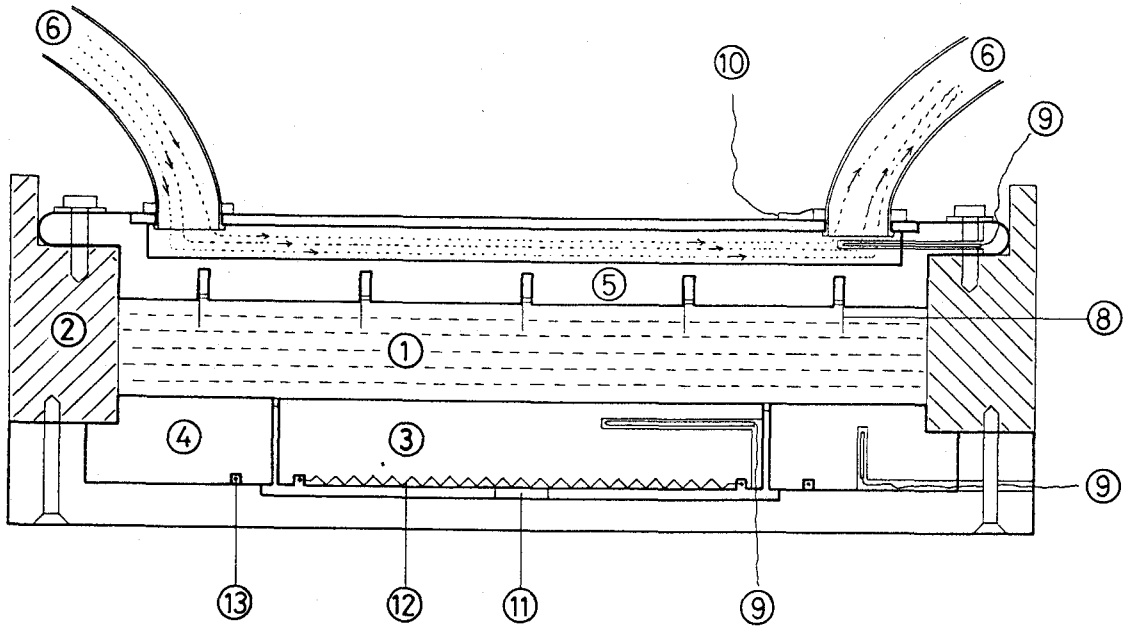


Figura 5.1: Celda de estudio: 1- líquido, 2- plexiglás, 3-electrodo inferior, 4- anillo de guarda, 5- electrodo superior, 6- aceite refrigerante, 8- láminas, 9- sondas de temperatura, 10- toma de alta tensión, 11-resistencia calefactora.

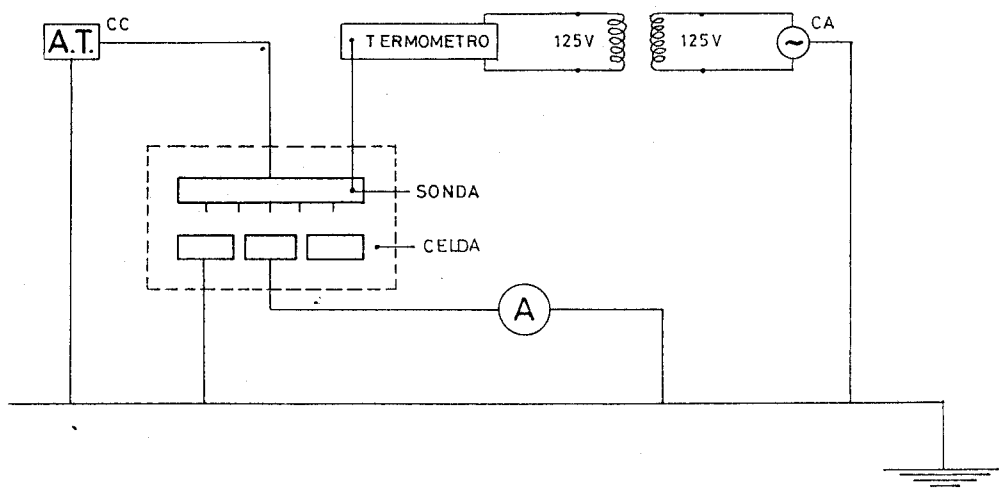


Figura 5.2: Esquema del montaje eléctrico.

mador que puede soportar hasta 100 kV de tensión entre sus dos devanados. Este sistema es más preciso que el utilizado en el montaje anterior (con la barra de zafiro) aunque es más arriesgado, ya que si se produce una descarga en la celda puede haber derivación de corriente a través de la sonda hacia el termómetro. De hecho, en el transcurso de las experiencias el termómetro se quemó una vez como consecuencia de una descarga parcial en la celda.

El electrodo inferior está conectado a tierra a través de un electrómetro Keithley que puede medir hasta 10^{-14} A. El esquema eléctrico se muestra en la figura 5.2.

Tanto el anillo de guarda como el electrodo inferior tienen dos sondas de platino cada uno. Dos de ellas, una de cada sitio, forman parte del sistema de regulación térmico y las otras dos van directamente a otro termómetro de alta precisión del mismo tipo que el anterior.

Hemos usado en las experiencias tres aceites de silicona diferentes: V1, V50, y V350, suministrados por Rhone-Poulenc. Sus propiedades físicas se muestran en la tabla 5.1.

	ν (mm ² /s)	ρ (kg/m ³)	β	c (J/gK)	κ (W/mK)	ϵ
V1	1	820	0.00135	–	0.10	2.3
V50	50	960	0.00105	1.46	0.16	2.8
V350	350	970	0.000945	1.46	0.16	2.8

Tabla 5.1: Propiedades físicas de los aceites de silicona utilizados.

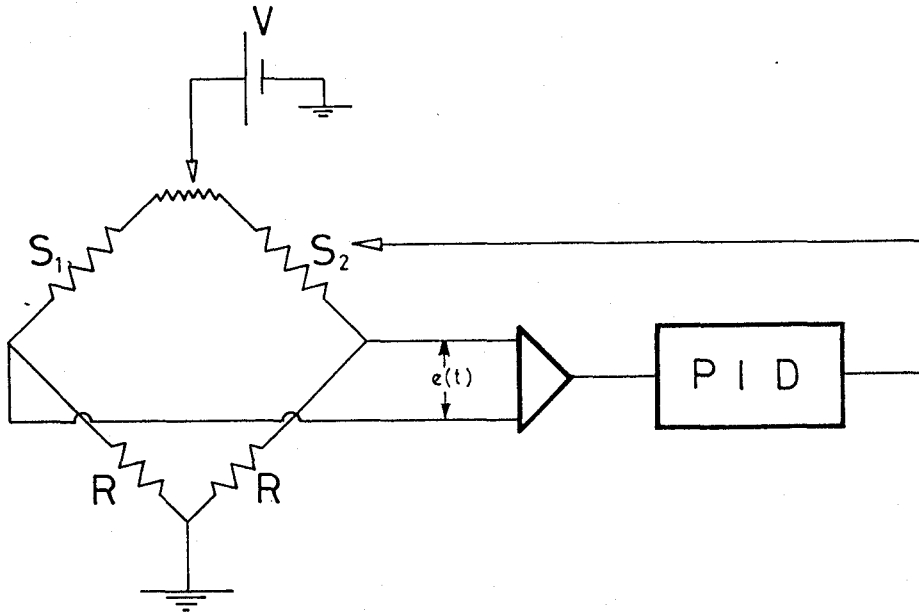


Figura 5.3: Sistema de regulación de la temperatura.

5.2 Sistema de regulación térmica

Para evitar pérdidas y asegurarse de que toda la potencia suministrada a la parte inferior contribuye al flujo de calor a través del líquido es preciso que el electrodo y el anillo de guarda estén a igual temperatura en todo momento. Para ello hemos utilizado un sistema de regulación retroalimentado que consta de: un puente de resistencias, un sistema de preamplificación y un P. I. D. (circuito amplificador, integrador y derivador). El sistema se esquematiza en la figura 5.3.

El desequilibrio del puente es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el electrodo y el anillo de guarda. El error del puente es amplificado y

la señal proporcionada por el P. I. D. alimenta la resistencia calefactora del anillo de guarda. Vamos a describir a continuación cada una de las partes.

5.2.1 El puente

Las resistencias $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ se eligen suficientemente grandes de forma que la tensión medida sea proporcional a la diferencia de las otras dos resistencias. Forman así los dos brazos pasivos del puente y están instaladas en el espacio comprendido entre el bloque que forman electrodo y anillo de guarda y la caja exterior que los contiene. Los otros dos brazos del puente lo forman las dos sondas, una instalada en el electrodo y otra en el anillo de guarda. Ambas reposan en sendos orificios taladrados en el cobre y rellenos de grasa, para asegurar un buen contacto térmico. Aunque las sondas son en principio idénticas ($\sim 100\Omega$ a 20°C) hay una pequeña diferencia de resistencia entre ellas. El puente está alimentado por una pila alcalina de 1.5 V de deriva despreciable. Una resistencia variable permite ajustar el puente de forma que la tensión de salida sea nula cuando las temperaturas del electrodo y el anillo de guarda son estrictamente iguales. Tras asegurarse que ambos elementos están a igual temperatura, metiendo el bloque entero (anillo y electrodo) en un baño termostatado y esperando un tiempo suficiente, se miden ambas resistencias y se ajusta la resistencia variable de forma que la tensión de salida del puente, medida con un voltímetro digital, sea nula (menor que 0.1 mV). La diferencia entre las temperaturas de las dos partes, medidas con el termómetro y las otras dos sondas (calibradas previamente de forma independiente) es entonces menor que 5 mK.

En definitiva un ajuste del puente dentro de la precisión de los aparatos de medida asegura que $T_1 - T_2 < 5\text{mK}$ siendo T_1 la temperatura del electrodo y T_2 la del anillo.

Tanto la pila de alimentación como los dos brazos pasivos del puente y el primer amplificador de la tensión de salida del puente se encuentran debajo del anillo de guarda. Todo ello está cerrado por abajo por la caja antes mencionada, cuyas paredes contienen un serpentín por el que circula agua proveniente de un baño termostatado, que permite controlar la temperatura del recinto.

5.2.2 Amplificación

Dos amplificadores en serie, uno de ganancia fija 400 (el que está en el interior) y otro de ganancia variable (situado en la mesa de control) amplifican la tensión error del puente antes de que ésta vaya al P. I. D. .

5.2.3 El P. I. D.

Dada una tensión de entrada $V_e(t)$ función del tiempo, el P. I. D. proporciona una tensión a la salida $V_s(t)$ función de aquella. El P. I. D. contiene, además de un amplificador interno, un circuito de derivación analógica y un circuito de integración. Con ello se obtiene una señal $V_s(t) = K_p V_e(t) + K_d(dV_e(t)/dt) + K_i \int V_e(t) dt$. La señal de salida alimenta la resistencia calefactora del anillo de guarda. Tenemos así un sistema de regulación retroalimentado.

Para entender el funcionamiento del sistema y la necesidad del P. I. D. vamos a introducir algunos conceptos fundamentales de la teoría de *sistemas de autocontrol*.

5.2.4 Sistemas de regulación retroalimentados [57]

Consideremos el bucle de retroalimentación de la figura 5.4. $r(t)$ es la señal de entrada, por ejemplo una diferencia de potencial eléctrico. A es un dispositivo que actúa sobre la señal $e(t)$ y proporciona $c(t)$. B es el dispositivo de retroalimentación y $b(t)$, la señal a la salida de B se resta a la señal de entrada. El objetivo de un sistema así dispuesto es el de que $b(t)$ siga continuamente $r(t)$ (en nuestro sistema $r(t)$ corresponde a la resistencia de la sonda introducida en la placa y $b(t)$ a la del anillo de guarda). Sobre A y B imponemos como única restricción el que sean elementos lineales, esto es, que los operadores que transforman $e(t)$ en $c(t)$ y $c(t)$ en $b(t)$ sean lineales.

Se define la *función de transferencia* de un elemento como el cociente entre las transformadas de Laplace de la señal que produce a su salida y la de la entrada. Para el dispositivo A esto es: $G(s) = C(s)/E(s)$ donde $C(s)$ y $E(s)$ son, respectivamente, las transformadas de Laplace de $c(t)$ y $e(t)$. Para B es, análogamente: $H(s) = B(s)/C(s)$. Referido al bucle de la figura, $G(s)$ se denomina función de transferencia en bucle abierto y $H(s)$ función de transferencia de retroalimentación.

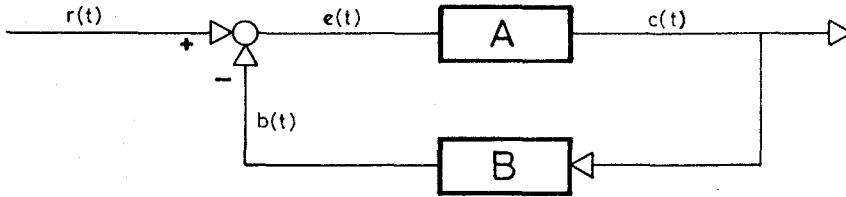


Figura 5.4: Bucle de retroalimentación.

Cuando el bucle está cerrado es $e(t) = r(t) - b(t)$ y, por tanto, $E(s) = R(s) - B(s)$, la función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (5.1)$$

Se puede demostrar que los polos de la función de transferencia determinan el comportamiento dinámico del sistema, ya que la evolución temporal de las variables del mismo ($e(t)$, $c(t)$, etcétera) se expresa, dado que el sistema es lineal, como combinación lineal de exponenciales de la forma $e^{s_i t}$ donde las s_i son las raíces de la ecuación característica $1 + H(s)G(s) = 0$. De entrada, para que el sistema sea estable, todas las raíces de dicha ecuación deben estar, en el plano complejo, a la izquierda del eje imaginario. El carácter real o complejo de dichas raíces determina cuándo el sistema sufrirá sobreoscilaciones, cuando estará en condiciones de amortiguamiento crítico, etcétera.

El error $e(t)$ se puede descomponer en dos partes: $e(t) = e_t(t) + e_s(t)$ de forma que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_t(t) = 0$, es decir, $e_t(t)$ da cuenta del comportamiento transitorio del error. El *error estático* se define así como $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$. Como $E(s) = R(s)/(1 + G(s)H(s))$ se tiene que si la función de entrada es una función salto:

$$r(t) = \begin{cases} R & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

entonces $R(s) = R/s$ y $e_{ss} = R/(1 + K)$ con $K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$. Si K es un valor finito el sistema es de *tipo 0*. Si K tiende a infinito como s^{-n} el sistema es de *tipo n*. Cuanto mayor sea n mejor es el comportamiento del sistema en cuanto al error estático se refiere. Así un sistema de tipo 1

tiene error estático nulo frente a una señal de entrada tipo salto, pero tiene un error finito si la función de entrada crece linealmente con el tiempo. Un sistema tipo 2 tiene error cero para funciones de entrada lineales en t pero el error es finito si la función de entrada es parabólica, etcétera. Pasamos ahora a analizar nuestro sistema en concreto.

5.2.5 Análisis del sistema de regulación

De los elementos del sistema completo, el efecto de dos de ellos es inmediato. De un lado, la tensión error del puente es función de la diferencia entre las resistencias de las sondas en el electrodo y en el anillo de guarda. Llamando $e(t)$ a esta tensión se tiene:

$$e(t) = VR \left(\frac{1}{R + S_1} - \frac{1}{R + S_2} \right) \quad (5.2)$$

donde V es la tensión constante que alimenta el puente, R la resistencia de los brazos pasivos del mismo, y S_1 y S_2 son las resistencias de las dos sondas. Teniendo en cuenta que R es mucho mayor que las resistencias de las sondas se puede hacer:

$$e(t) \simeq \frac{V}{R}(S_2 - S_1) \quad (5.3)$$

Para las dos sondas se tiene que $S_i = S_0(1 + \alpha(T_i - T_0))$ con S_i la resistencia de la sonda a la temperatura T_i , S_0 la resistencia a la temperatura de referencia T_0 (para simplificar el análisis hemos supuesto que las dos resistencias coinciden en $T = T_0$) y α el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura para el platino. Con ello:

$$e(t) = \frac{VS_0\alpha}{R}(T_2 - T_1) \quad (5.4)$$

Si llamamos $c(t)$ a la tensión a la salida del P. I. D. se tiene

$$c(t) = k_p e(t) + k_d \frac{de}{dt} + k_i \int^t e(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

donde k_p da cuenta de la amplificación de la señal tanto en el P. I. D. como en los amplificadores previos.

La tensión de salida $c(t)$ se aplica a una resistencia R_2 inmersa en el anillo de guarda, a fin de calentar éste para que iguale su temperatura con la del

electrodo. Si aceptamos la hipótesis de que la potencia calorífica perdida por el anillo de guarda es proporcional a la diferencia de temperatura entre éste y el exterior se tendrá:

$$C \frac{dT_2}{dt} = \frac{c^2}{R_2} - \beta(T_2 - T_0) \quad (5.6)$$

donde C es la capacidad calorífica de todo el anillo de guarda y β una constante que da cuenta de los tres mecanismos de transmisión del calor presentes: conducción, convección y radiación. La hipótesis de que el calor transmitido es proporcional a la diferencia de temperatura entre el anillo y el exterior es válida para los dos primeros mecanismos. En el caso de la radiación hay que hacer la hipótesis adicional de que las temperaturas no son muy diferentes (para que se pueda linealizar la ley de Stefan-Boltzman), condición que se cumple en nuestro caso.

Las ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.6 describen el comportamiento de todo el sistema. La ecuación 5.6 es no lineal, lo que hace que los conceptos generales sobre sistemas de autocontrol que antes expusimos no sean directamente aplicables. La existencia de elementos no lineales en un sistema de autocontrol tiene consecuencias drásticas. En primer lugar, la respuesta del sistema no se puede analizar de forma general para cualquier función de entrada (en nuestro caso para cualquier función $T_1(t)$), ya que no se cumple el principio de superposición y la respuesta puede ser muy diferente según el tipo de excitación. Además son sistemas que pueden presentar, para una misma configuración, varios equilibrios. Sí podemos, sin embargo, analizar la situación con un par de restricciones: supondremos que la señal de entrada es constante y linealizaremos el sistema en torno a la situación de equilibrio deseada.

Supongamos que $T_1(t)$ tiene un valor constante e independiente de t . La situación de equilibrio corresponde a que, tanto $T_2(t)$ como $c(t)$ no dependan del tiempo. Ambas condiciones se traducen, a partir de 5.4-5.6 en que ha de ser:

$$c^2 = R_2\beta(T_2 - T_0) \quad (5.7)$$

y

$$e(t) = 0 \quad (5.8)$$

La primera de estas dos condiciones nos dice que las pérdidas caloríficas del anillo deben compensarse con la potencia suministrada por el P. I. D. La segunda condición exige que T_2 ha de ser T_1 . A partir de 5.5 se ve con

claridad que esta condición aparece sólo cuando es $k_i \neq 0$, ya que si es $k_i = 0$ podemos tener $dc/dt = 0$ con tal que se tenga $de/dt = 0$. Esto pone ya de manifiesto la necesidad una componente integrada de la señal error en la función $c(t)$, ya que si no, la situación alcanzada no correspondería a la de $T_2 = T_1$ y aparecería un error estático.

Podemos linealizar ahora las ecuaciones 5.4-5.6 haciendo: $c(t) = c_e + \delta c$ y $T_2 = T_1 + \delta T$, con $c_e = R_2\beta(T_2 - T_0)$. Se tiene sustituyendo en las ecuaciones anteriores y despreciando los términos en $(\delta c)^2$:

$$e(t) = \frac{V}{R} \delta T \quad (5.9)$$

$$\frac{d\delta c}{dt} = k_p \frac{de(t)}{dt} + k_d \frac{d^2e(t)}{dt^2} + k_i e(t) \quad (5.10)$$

$$C \frac{d\delta T}{dt} = \frac{2c_e}{R_2} \delta c - \beta \delta T \quad (5.11)$$

Tenemos ya un sistema lineal al que sí podemos aplicar los conceptos de función de transferencia, error estático, etcétera. Para la función de transferencia en bucle abierto tenemos, de la segunda de las ecuaciones anteriores:

$$G(s) = \frac{\delta c(s)}{e(s)} = k_p + sk_d + \frac{1}{s}k_i \quad (5.12)$$

y para la función de retroalimentación es

$$H(s) = \frac{e(s)}{\delta c(s)} = \frac{2c_e R}{V S_0 \alpha (Cs + \beta)} \quad (5.13)$$

El polinomio característico es entonces $1 + G(s)H(s)$ que proporciona, en nuestro caso, la ecuación:

$$(R_2 C + 2c_e k_d)s^2 + (R - 2\beta + 2c_e k_p)s + 2c_e k_i = 0 \quad (5.14)$$

donde hemos renombrado las constantes k_p , k_d y k_i multiplicándolas por el factor $V S_0 \alpha / R$.

Las raíces de esta ecuación son:

$$s = \frac{-(R_2\beta + c_e k_p) \pm (R_2\beta + 2c_e k_p)^2 - 8c_e k_i (R_2 C + 2c_e k_d)^{1/2}}{2R_2 C + 4c_e k_d} \quad (5.15)$$

El funcionamiento óptimo del sistema se consigue en condiciones de amortiguamiento crítico. Esto equivale a anular el discriminante de la ecuación característica, con lo que las dos raíces son reales e iguales entre sí, en nuestro caso se tiene:

$$(R_2\beta + 2c_e k_p)^2 = 8c_e k_i (R_2 C + 2c_e k_d) \quad (5.16)$$

y es $s = -(R_2\beta + 2c_e k_p)/(2R_2 C + 4c_e k_d)$. Cuanto mayor sea este valor de s tanto más corto será el tiempo de relajación al equilibrio. Vemos que, en principio, es por ello mejor trabajar con una ganancia (k_p) cuanto más alta mejor. Como k_i es imprescindible si se quiere eliminar el error estático, la inclusión de k_d permite una mayor libertad en la elección de los otros parámetros para obtener un comportamiento óptimo.

Los parámetros utilizados en la práctica se han determinado experimentalmente, bajo la base de que es necesario utilizar el integrador para obtener un error estático nulo y utilizar una amplificación cuanto mayor mejor, siempre que no saquemos al sistema del rango de parámetros que nos interesa. Una vez determinados los valores óptimos, estos se han utilizado durante toda la serie de medidas realizadas.

5.3 Métodos de visualización

Al objeto de tener una idea cualitativa del régimen de convección establecido en el líquido hemos usado dos métodos bien establecidos de visualización, basados los dos en la dependencia del índice de refracción con la densidad másica y, por tanto, con la temperatura.

El índice de refracción de un medio transparente verifica la relación de Lorenz-Lorentz [58]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N_A \alpha}{3M \epsilon_0} \quad (5.17)$$

siendo n el índice de refracción del medio, ρ su densidad, N_A el número de Avogadro, α la polarizabilidad molecular y M la masa molecular. La densidad en los líquidos es una función sólo de la temperatura y, a temperatura ambiente, esta dependencia se puede expresar como $\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$ con ρ_0 la densidad a la temperatura de referencia T_0 y β el coeficiente volumínico de dilatación. A partir de 5.17 y de esta última relación se obtiene la siguiente

expresión para la dependencia de n con T :

$$\frac{dn}{dT} = -\beta \frac{(n^2 + 2)(n^2 - 1)}{6n} \quad (5.18)$$

Aunque en nuestras experiencias hemos usado varios aceites de silicona con viscosidad muy diferente, tanto el índice de refracción como el coeficiente volumétrico de dilatación son prácticamente constantes para todos ellos, siendo $\beta \sim 10^{-3}$ y $n = 1.4$ lo cual da $dn/dT \sim -5 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$.

A continuación describiremos brevemente los dos métodos utilizados: el método de Schlieren y el de sombras.

5.3.1 Método de Schlieren

El método de Schlieren se basa en la desviación angular que sufre un rayo al atravesar un medio de índice de refracción variable. La fenomenología queda, por tanto, bien descrita en el marco de la óptica geométrica.

Consideremos un rayo de luz que incide sobre un medio cuyo índice varía con la posición. Sea y la dirección inicial del rayo y supongamos, para simplificar el análisis, que el índice de refracción es sólo función de z . A partir del principio de Fermat se deduce que la ecuación que describe la trayectoria de un rayo luminoso en un medio no homogéneo es [9]:

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N} \frac{\nabla n}{n} \quad (5.19)$$

con R el radio de curvatura de la trayectoria y \mathbf{N} el vector normal principal a la misma. Si suponemos que la desviación que sufre el rayo luminoso es pequeña (n varía muy poco como ya hemos visto) podemos aproximar en todo momento \mathbf{N} por \mathbf{e}_z , el vector unitario en dirección z y expresar el radio de curvatura como $R = dy/d\alpha$ siendo α el ángulo que se desvía el rayo de la dirección y . Tomando en 5.19 estas aproximaciones se tiene:

$$d\alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} dy \quad (5.20)$$

Integrando esta ecuación sobre la longitud total recorrida por el rayo en el medio (L) obtenemos el ángulo respecto de la dirección y con que el rayo emerge del medio:

$$\alpha = \int_0^L \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} dy = \int_0^L \frac{\partial \ln n}{\partial z} dy \quad (5.21)$$

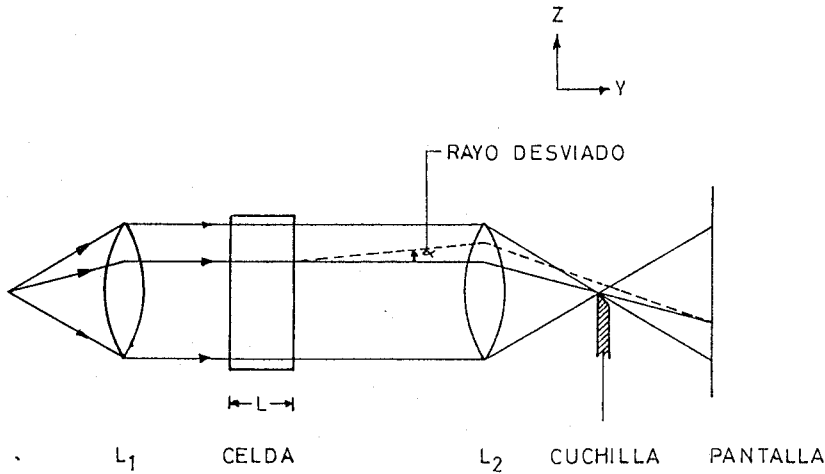


Figura 5.5: Sistema de Schlieren.

Si n aumenta con z , α es positivo y a la inversa. El rayo es, pues, desviado hacia las zonas de mayor índice de refracción (las más frías). Este hecho provoca, como es sabido, los espejismos en el desierto.

Un sistema de Schlieren se esquematiza en la figura 5.5. Una fuente de luz (en nuestro sistema una lámpara de mercurio de alta presión) de dimensiones a_f y b_f se sitúa en el plano focal de una lente L_1 . Al pasar por la lente se obtiene un haz paralelo que, tras atravesar la celda donde está encerrado el líquido, pasa por una segunda lente L_2 en cuyo plano focal se coloca, perpendicularmente a la dirección del haz, una cuchilla de afeitador. La pantalla de visualización se coloca en el plano imagen, por L_2 , de algún plano interior a la celda.

Si no hay gradientes de temperatura en el líquido el haz paralelo se focaliza produciendo en el plano focal de L_2 una imagen de la fuente de dimensiones $a_i = a_f f_2 / f_1$ y $b_i = b_f f_2 / f_1$ con f_2 y f_1 las focales de las lentes respectivas (en nuestro sistema era $f_2 = f_1 = 20\text{cm}$). Sobre la pantalla se ve entonces una iluminación uniforme. Cuando la imagen de la fuente en el plano focal se corta parcialmente con la cuchilla, la imagen sobre la pantalla se oscurece uniformemente, más cuanto mayor es la zona imagen en el plano focal ocultada por la cuchilla.

Si en la celda existen gradientes de temperatura, a la salida de la misma,

a cada posición (x, z) sobre el plano perpendicular al haz corresponderá un ángulo de desviación α . Este será positivo si el gradiente vertical de n lo es, y viceversa. Cuando α es positivo el rayo refractado por la lente pasará, en el plano focal, por encima de la cuchilla (si la zona imagen que está oculta es la inferior), y no será cortado, mientras que si α es negativo el rayo será interrumpido por la cuchilla. De esta forma, los puntos en el plano XZ en los que α es positivo (gradiente positivo de n) aparecen más iluminados en la pantalla y los de α negativo (gradiente negativo de n) aparecen oscurecidos. Si giramos la cuchilla de forma que su borde sea paralelo al eje z obtenemos una imagen análoga de los gradientes en la dirección x .

El contraste en la imagen (definido como la diferencia entre las intensidades máxima y mínima observadas en la pantalla) es mejor cuanto mayor sea f_2 y mayor sea la superficie del haz cortada por la cuchilla.

El método de Schlieren nos ha servido para poner de manifiesto el movimiento del líquido así como para tener una idea del grado de agitación del mismo.

5.3.2 Método de sombras

En el método de sombras se hace uso de un haz paralelo, obtenido de la misma forma que en el método de Schlieren, que se recoge en una pantalla directamente a la salida de la celda. La diferencia de iluminación entre las diferentes zonas de la pantalla depende ahora de las diferencias en los ángulos de desviación de los rayos a la salida de la celda (ver figura 5.6). La intensidad luminosa en cada zona de la pantalla depende ahora (al depender de la diferencia entre los ángulos) de la derivada segunda de la temperatura. Este efecto es el mismo por el que el movimiento de las masas de aire se aprecia en las blancas paredes de Triana en las calurosas tardes de verano.

5.4 Interferometría

Así como los métodos de visualización descritos anteriormente hacen uso de la desviación de la trayectoria recorrida por la luz causada por la variación del índice de refracción y son bien descritos en términos de la óptica geométrica, los métodos interferométricos hacen uso de las diferencias de fase introducidas por esta misma variación y se describen en el contexto de

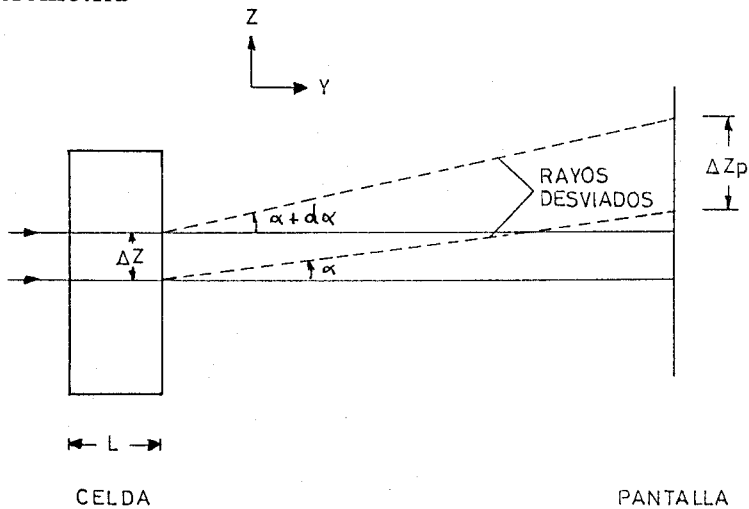


Figura 5.6: Método de sombras.

la óptica física. La ventaja de los métodos interferométricos es que permiten más fácilmente hacer medidas cuantitativas de la distribución de temperatura en el líquido. Los interferómetros utilizados se pueden clasificar básicamente en dos grandes grupos: interferómetros por división del frente de onda e interferómetros por división de amplitud. Los más utilizados en mecánica de fluidos corresponden a este último grupo y entre ellos se encuentra el de Mach-Zendher (uno de los más ampliamente utilizados). Un interferómetro de este tipo permite obtener casi directamente las líneas isotermas en el seno de un líquido pero su puesta a punto es relativamente costosa y muy delicada.

Nosotros hemos escogido un sistema muy sencillo de ininterferometría expuesto por Bergé y Dubois [59] y que esquematizamos en la figura 5.7. Un haz láser (5mW) se expande hasta tener un diámetro del orden de la distancia entre electrodos. El haz se hace pasar por la celda y es reflejado sobre las dos caras de una lámina de vidrio plano-paralela de espesor e (2mm) cuya normal forma un ángulo ϕ (~ 45 grados) con la dirección de los rayos. La luz reflejada se recoge sobre una pantalla en la que se observa un patrón de interferencias. Para interpretar el patrón consideremos (ver figura) un rayo que proviene de una altura z en la celda y supongamos que el índice de refracción sólo depende de z . Este rayo se superpondrá, tras reflejarse en la segunda cara de la lámina con uno que pasa por $z + \Delta z$ en su primera reflexión. Si L es la distancia recorrida dentro del líquido, la diferencia de

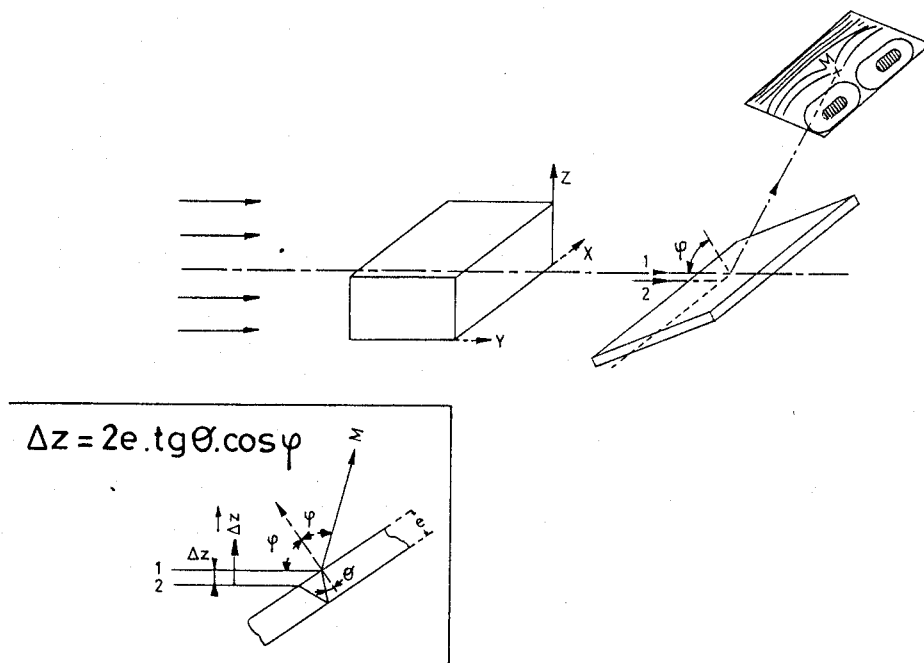


Figura 5.7: Montaje de interferometría.

camino óptico entre ambos rayos será:

$$\delta L = n_l(z + \Delta z)L + \frac{2en}{\cos \theta} \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\tan \theta} - 1 \right) - n_l(z)L \quad (5.22)$$

donde n_l se refiere al índice de refracción del líquido y n al del vidrio. El segundo sumando corresponde al camino óptico recorrido por el primer rayo en el vidrio y se obtiene de sencillas consideraciones geométricas. La distancia entre los dos rayos que interfieren es, de la figura:

$$\Delta z = 2en \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \quad (5.23)$$

Hay que hacer notar que, puesto que los dos rayos que interfieren recorren distancias diferentes, la luz utilizada debe tener una *longitud de coherencia espacial* superior al menos a la diferencia de distancias recorridas, ya que en otro caso las interferencias no serán visibles (haríamos interferir haces incoherentes). Esta distancia es del orden del espesor de la lámina, que en

nuestro caso es de 2mm, Esto supone que la luz utilizada debe tener una longitud de coherencia superior a 2mm., lo cual se puede conseguir o con lámparas de mercurio de baja presión (bastante caras) o con luz láser. Esta es la razón de que hayamos utilizado luz láser en el montaje.

La condición para que los dos rayos al interferir den un máximo de luz en el patrón de interferencia es:

$$\frac{2\pi \delta\mathcal{L}}{\lambda} = (2K + 1)\pi, \quad K \in N \quad (5.24)$$

Si $\Delta z \ll d$, podemos hacer un desarrollo de 5.22 en potencias para obtener:

$$\delta L = \frac{2en}{\cos \theta} \left[\left(L \frac{dn_l}{dz} + \frac{1}{\tan \phi} \right) \text{sen}^2 \theta - 1 \right] \quad (5.25)$$

con ello tenemos que entre dos franjas consecutivas se cumple:

$$\frac{dn_l}{dz} \Big|_{z_i} - \frac{dn_l}{dz} \Big|_{z_{i-1}} = \frac{\lambda \cos \theta}{2eL \text{sen}^2 \theta} \quad (5.26)$$

donde z_i y z_{i-1} son las posiciones de dos franjas consecutivas. Las franjas corresponden entonces a líneas de igual gradiente de temperatura.

En nuestro montaje es $\Delta z = 1.5\text{mm}$ y $d = 18\text{mm}$, luego $\Delta z/d = 0.08$, lo que supone que cualitativamente podemos considerar que las franjas son líneas de igual gradiente pero no de cara a obtener perfiles de temperatura. Volviendo a 5.22 vemos que, si prescindimos de tomar este límite, se tiene entre dos franjas consecutivas:

$$(n_l(z + \Delta z)|_{z_i} - n_l(z)|_{z_i}) - (n_l(z + \Delta z)|_{z_{i-1}} - n_l(z)|_{z_{i-1}}) = \frac{\lambda}{L} \quad (5.27)$$

o, definiendo $\gamma = |dn/dT|$:

$$(T(z + \Delta z)|_{z_i} - T(z)|_{z_i}) - (T(z + \Delta z)|_{z_{i-1}} - T(z)|_{z_{i-1}}) = \frac{\lambda}{L\gamma} \quad (5.28)$$

A partir de las distancias z_i obtenidas del interferograma se puede reproducir la función $f(z) = T(z + \Delta z) - T(z)$ sin más que hacer $f(z_{i+1}) = f(z_i) + \lambda/L\gamma$. $f(z)$ queda así definida salvo una constante. Haciendo uso de argumentos de simetría o argumentos cualitativos se puede determinar qué franja corresponde a $f(z) = 0$ y determinar con ello la constante. Por

ejemplo, en la foto 1, vemos que las franjas centrales que se cierra sobre sí mismas tendrán en su centro un máximo o un mínimo de $n(z)$ y, por tanto, un cero de $f(z)$. Una vez determinada $f(z)$ se obtiene $T(z)$ haciendo $T(z + \Delta z) = T(z) + f(z)$. La nueva constante se fija conocida la temperatura de los electrodos. En el apéndice C se detallan los cálculos.

Inclinando la lámina respecto de la dirección x el interferograma nos proporciona información sobre los gradientes laterales de temperatura. El procedimiento para obtener los perfiles es, entonces, totalmente análogo al ya expuesto.

5.5 Características tensión-corriente

La conducción eléctrica en líquidos dieléctricos en geometría lámina-plano es bien conocida [60,61]. Se distinguen tres regímenes en las curvas I-V: un régimen de conducción óhmica (I proporcional a V), un segundo régimen de corriente ligeramente superior a la óhmica pero en el que I y V siguen siendo aproximadamente proporcionales, y otro régimen en el cual $I \propto V^\alpha$, con $\alpha > 3$. Tanto en el segundo como en el tercer régimen se puede concluir que la densidad de carga existente en el líquido tiene su origen en procesos de inyección de carga en la lámina por efecto del reforzamiento del campo eléctrico en las puntas.

En la figura 5.8 se muestran las curvas I-V obtenidas por nosotros para los tres aceites de silicona utilizados. La tensión, proporcionada por una fuente DC Spellman, se ha comprobado con una sonda de alta tensión aplicada a un multímetro digital. La precisión con que se conoce la tensión impuesta es de 100 V. La intensidad se mide con un amperímetro Keithley (aunque la sensibilidad teórica del aparato es superior, en la práctica es de 10^{-11} A). En las curvas obtenidas se aprecian claramente los dos regímenes a tensiones elevadas antes mencionados: un primer régimen en que la intensidad aumenta con la tensión con una pendiente próxima a la unidad y otro de crecimiento fuerte en el que el exponente es siempre superior a 3. Todas las curvas tomadas durante la realización de las experiencias presentan ese mismo aspecto, variando el valor de los exponentes (aunque siempre manteniéndose en el rango 1-2 para el régimen pseudoóhmico y entre 3 y 6 para el de inyección) y el nivel de corriente para una tensión dada de unas experiencias a otras. Esta relativa irreproducibilidad de las curvas I-V es notada también

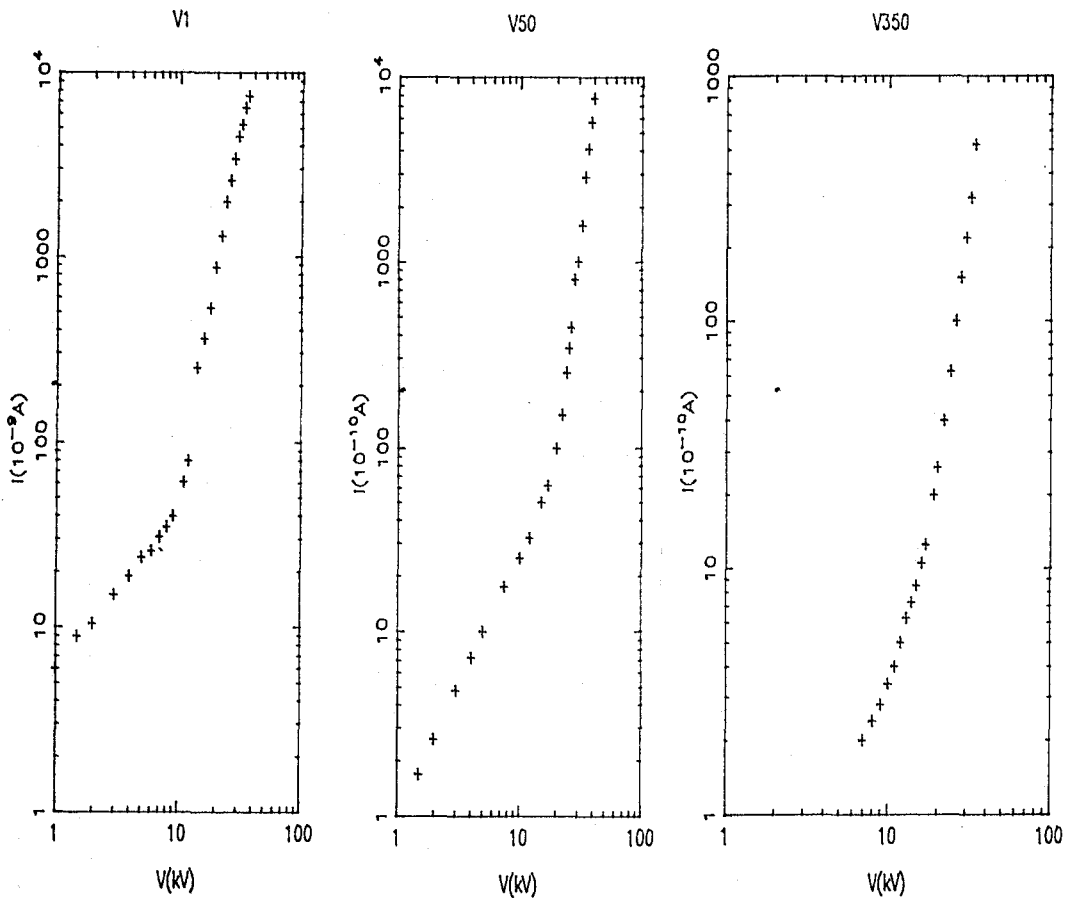


Figura 5.8: Característica tensión corriente para los tres aceites.

por Haidara y puede tener su origen en la intensidad del campo eléctrico en las cercanías de la arista de la lámina. Al ser el campo, en esa zona, muy sensible a la curvatura del conductor, pequeñas alteraciones en su superficie pueden provocar variaciones apreciables del mismo, con la consiguiente modificación del nivel de inyección. Las posibles modificaciones químicas de la superficie metálica pueden contribuir a esta irreproducibilidad de las curvas I-V (una cierta degradación del metal se puede apreciar tras varios días de experiencias continuadas).

En ambos regímenes el campo eléctrico aplicado provoca el movimiento del líquido. Este movimiento se produce en forma de un chorro que va de la lámina hacia el electrodo plano. Este hecho lo hemos podido apreciar gracias a las técnicas de visualización. Haidara ha medido la velocidad del

líquido y ha encontrado una correlación clara entre la dependencia de la corriente y la de la velocidad con la tensión eléctrica aplicada. En el régimen pseudoóhmico la velocidad varía linealmente con la tensión aplicada mientras que en el régimen de crecimiento rápido de la corriente lo hace de la forma $w \propto V^\alpha$ con β un exponente que, aunque variable de una experiencia a otra, varía correlativamente con el exponente de la intensidad.

Las curvas I-V son muy similares para los aceites de silicona de 50 y 350 centistokes y las intensidades de corriente obtenidas están en el mismo rango de valores. La corriente es apreciablemente mayor para el aceite de 1 cst. Ello está relacionado con el hecho de que el producto ηK , η la viscosidad y K la movilidad de los iones en el líquido, es constante (ley de Walden), por lo que la movilidad es mucho mayor en el aceite de 1 cst.

5.6 Medidas en régimen estacionario

Dada una potencia calefactora (disipada en el electrodo inferior) la evolución de la temperatura en los dos electrodos, superior e inferior, se registra hasta comprobar que se ha alcanzado el estado estacionario. Conocida la diferencia de temperatura se calcula el Nusselt:

$$Nu = \frac{Q/S}{\kappa \Delta T} d \quad (5.29)$$

Q viene dado por el producto IV de la corriente disipada en la resistencia adherida al electrodo y la tensión aplicada a la misma (medidas ambas con multímetros). El sistema de regulación de la temperatura del anillo de guarda asegura que $T_1 - T_2 \leq 10^{-2} \text{K}$ (T_1 temperatura del anillo, T_2 temperatura del electrodo). Las pérdidas de potencia del electrodo hacia el anillo a través del aire y de la cola que sostiene a uno en el otro vienen dadas aproximadamente por:

$$Q_{per} \simeq \left(\frac{L_c h_c \kappa_c}{e_c} + \frac{L_a h_a \kappa_a}{e_a} + \frac{S_b \kappa_a}{e_b} \right) (T_1 - T_2) \quad (5.30)$$

donde $L_c h_c$ es la superficie de cola que entra en contacto con ambos bloques y e_c el espesor de la cola, $L_a h_a$ es la superficie lateral libre del electrodo, en contacto con el aire, y e_a su espesor, el último sumando da cuenta de las pérdidas por abajo, κ_a y κ_c son las conductividades térmicas del aire y de la

cola, respectivamente. A partir de esta expresión obtenemos una cota de la potencia perdida: $Q_{per} \leq 10^{-3} \text{ W}$.

La temperatura de cada electrodo se mide con una precisión de 10^{-2} K lo que da una precisión para ΔT de $2 \times 10^{-2} \text{ K}$. La distancia entre electrodos se conoce del diseño ($1.8 \text{ cm} \pm 0.05$). En definitiva el error cometido en la determinación del número de Nusselt es:

$$\frac{\delta Nu}{Nu} \simeq 0.06 + \frac{2 \times 10^{-2}}{\Delta T} + \frac{10^{-3}}{Q} \quad (5.31)$$

con ΔT medido en kelvin y Q en vatios.

En cuanto al número de Rayleigh es $Ra = g\alpha d^3 \Delta T / \chi \nu$ y se tiene $\delta Ra / Ra \simeq 0.06 + 2 \times 10^{-2} / \Delta T$. El 6 % da cuenta de la imprecisión en d y en las constantes físicas de los aceites (tomadas de las especificaciones de fábrica).

5.6.1 Medidas sin tensión

En la figura 5.9 se muestran algunos puntos de la dependencia de Nu frente a Ra , sin tensión aplicada, para los tres aceites usados. Aunque nuestro interés no se centra en la convección natural sola, de ahí que no hallamos estudiado sistemáticamente esta dependencia, los puntos obtenidos nos han servido de referencia y merecen algún comentario.

En primer lugar estos resultados no son directamente comparables con el problema de Rayleigh puro. La diferencia estriba en la presencia de las láminas en el electrodo superior que, teóricamente, hacen que no exista una solución estrictamente hidrostática de las ecuaciones fluidodinámicas. En efecto, la presencia de láminas (que imponen como condición de contorno que la isoterma que pasa por el electrodo superior se vea prolongada en ellas) hace que existan gradientes horizontales de temperatura en la parte superior de la capa fluida. Estos gradientes originan diferencias en la fuerza de flotación entre diferentes puntos de un plano horizontal cualquiera, que no pueden ser neutralizadas por una presión que dependa sólo de la coordenada vertical. De todas formas, para Ra muy pequeños el movimiento va a estar confinado a las cercanías de las láminas y Nu permanece prácticamente constante e igual a la unidad (indistinguible de ella por los errores experimentales, que son mayores cuanto menor es la diferencia de temperatura) hasta valores

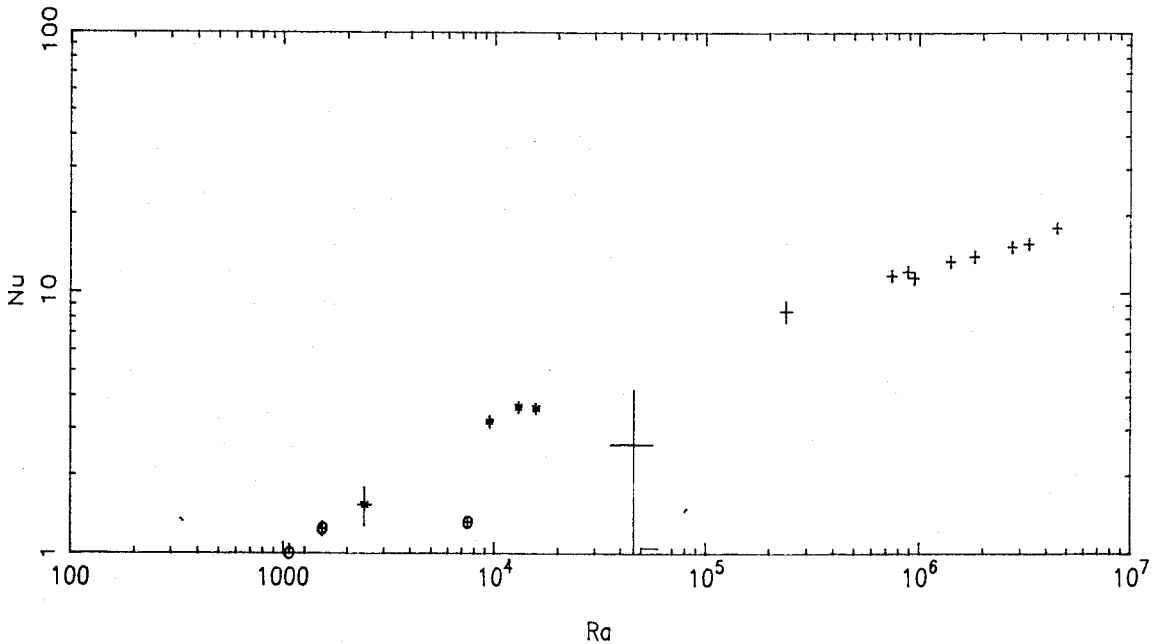


Figura 5.9: Nusselt frente a Rayleigh sin tensión.

cercanos al Ra_c . La transición de $Nu = 1$ a $Nu > 1$ no se produce aquí de forma brusca, sino de forma continua.

De otra parte, para comparar la curva Nu/Ra con la obtenida en los experimentos sobre el problema de Rayleigh puro habría quizá que definir una distancia efectiva d_f que diera cuenta del efecto distorsionador de las láminas. En cualquier caso, los resultados que obtenemos están cercanos a los valores existentes (ver, por ejemplo [46]).

5.6.2 Resultados con V50 y V350

Los resultados obtenidos con los aceites V50 y V350 presentan un mismo comportamiento. La visualización muestra cómo al aumentar la tensión aumenta el grado de agitación del líquido pero, en cualquier caso, se observa cómo un chorro fino nace de cada lámina y provoca un movimiento de rotación en todo el líquido bastante estable (ver figura 5.10). Los interferogramas obtenidos para ambos aceites muestran una distribución de temperatura prácticamente estacionaria (las franjas de interferencia no cambian en el tiempo). Todo ello nos hace concluir que en ambos aceites nos encontramos en un régimen de

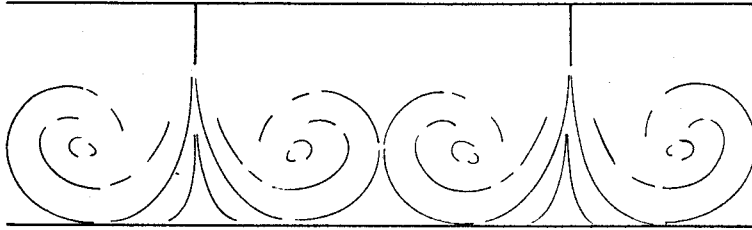


Figura 5.10: Esquema del movimiento del líquido dentro de la celda.

convección viscoso. Los números de Rayleigh para ambos líquidos son relativamente bajos en el rango de diferencias de temperatura estudiado (del orden de 10^3 para el V350 y de 10^4 para el V50) y en ambos líquidos queda de manifiesto que las fuerzas de flotación no juegan papel alguno en la convección establecida, viniendo ésta determinada por el campo eléctrico impuesto, ya que las correlaciones encontradas ligan Nu con la intensidad de corriente y el campo aplicado, independientemente de la diferencia de temperatura.

Las figura 5.11 muestra la dependencia obtenida de Nu frente a IV . Para hacer que los puntos correspondientes a los dos aceites caigan sobre la misma recta hay que incluir la viscosidad junto a las magnitudes eléctricas. Esto es así porque, como veremos en el capítulo siguiente, el Nusselt depende esencialmente de la velocidad típica del líquido y ésta viene determinada, en régimen viscoso, por el balance entre las fuerzas eléctricas y las de resistencia viscosa. El que ν aparezca como parámetro relevante en esta serie de medidas es una prueba adicional de que estamos ante un régimen de convección dominado por las fuerzas de viscosidad.

5.7 Efecto del campo eléctrico sobre la distribución de temperatura

En las fotografías 1-4 se muestran alguno de los interferogramas obtenidos con el aceite V50. La zona fotografiada corresponde a cada lado de la lámina (zona negra en forma de punta arriba de la foto) a la mitad de la distancia entre láminas, con lo cual la foto representa una unidad que se repite periódicamente a lo largo de la celda (ver figura 5.12).

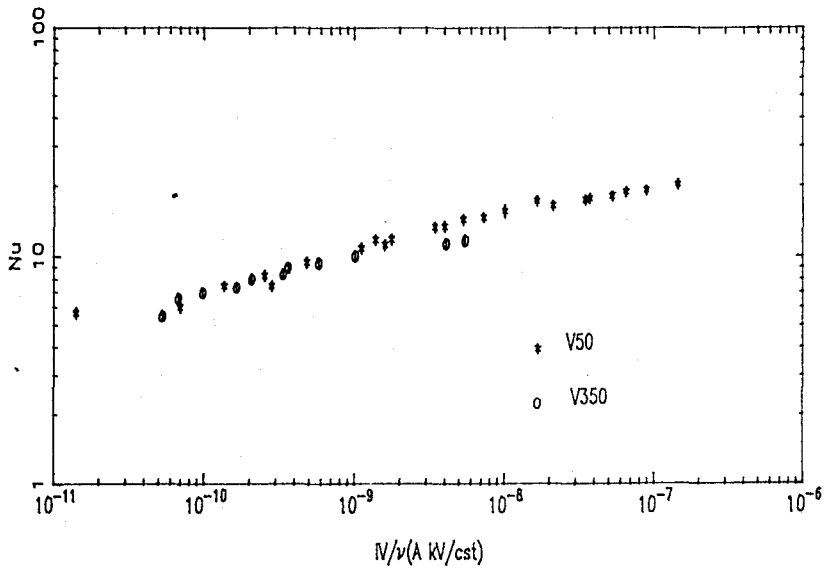


Figura 5.11: Nu frente a IV para V50 y V350.

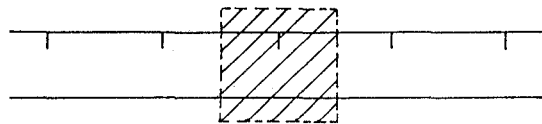


Figura 5.12: Estructura periódica y zona fotografiada.

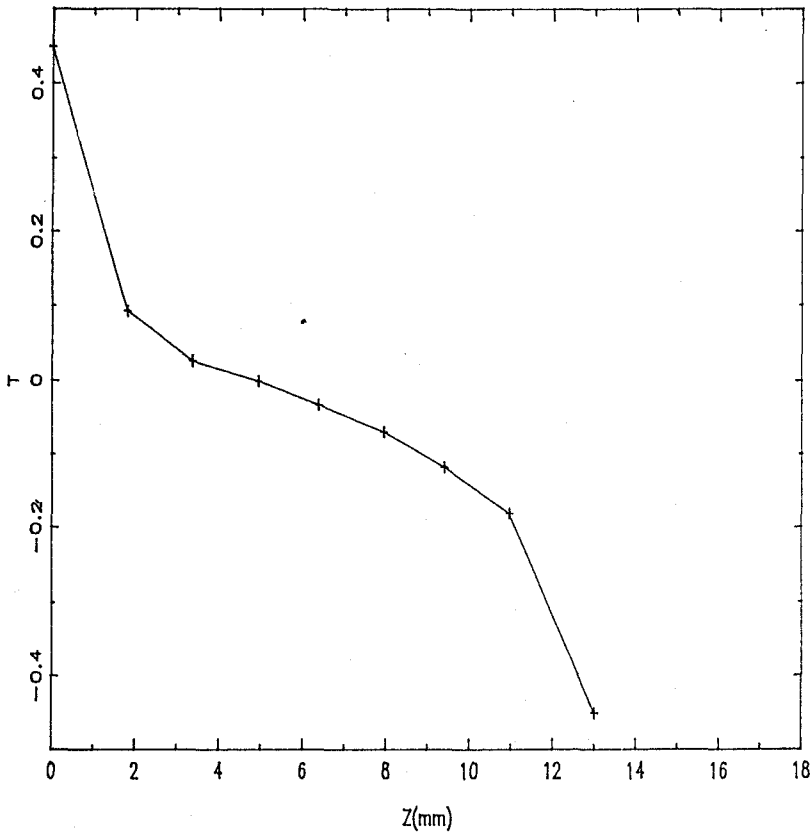


Figura 5.13: Perfil de temperatura vertical para $V = 0$ sobre la lámina.

Las fotos 1 y 2 representan las *líneas iso-gradiente* de temperatura (con las restricciones que ya comentamos sobre el uso del término *iso-gradiente* en la sección 5.4) vertical y horizontal, respectivamente, para el caso en que no hay tensión eléctrica aplicada. Es $\Delta T = 0.90\text{K}$, lo que representa $Ra = 9459$. El número de Nusselt es (determinado de las medidas de flujo de calor y temperatura) 3.2. Los perfiles de temperatura obtenidos se encuentran en las figuras 5.13–5.16. La forma detallada en la que se calculan estos perfiles está en el apéndice D.

En la foto 1 las zonas centrales a izquierda y derecha de la lámina son prácticamente isotermas y tanto alrededor de la lámina como enfrente de ella (abajo en la foto) se aprecian las capas límite térmicas: en estas zonas hay una mayor densidad de líneas, lo que supone un fuerte gradiente de temperatura

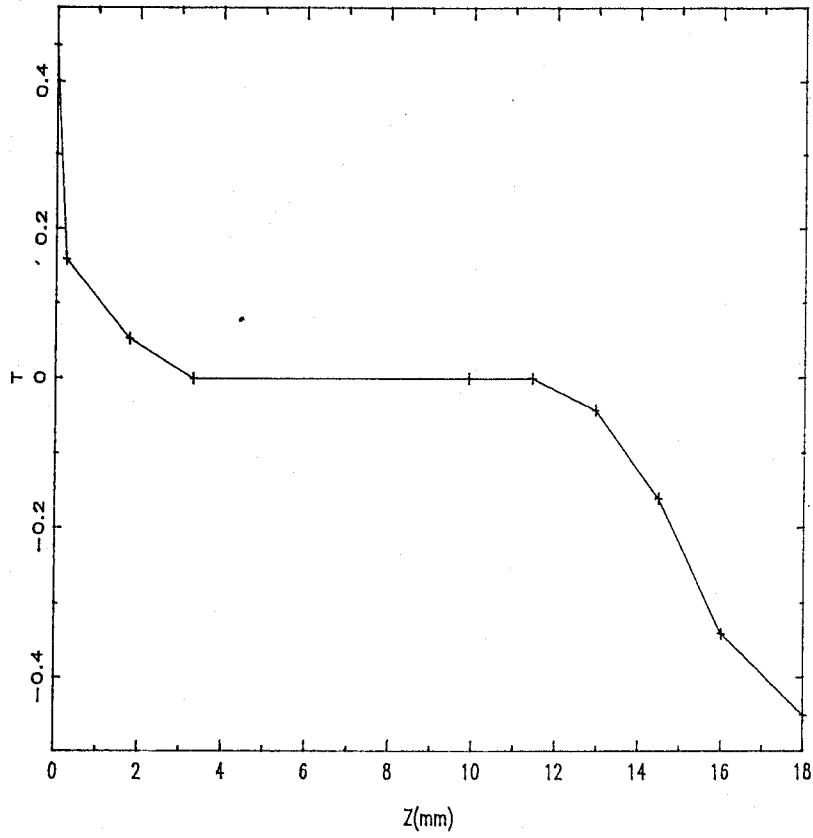


Figura 5.14: Perfil de temperatura vertical para $V = 0$ entre dos láminas.

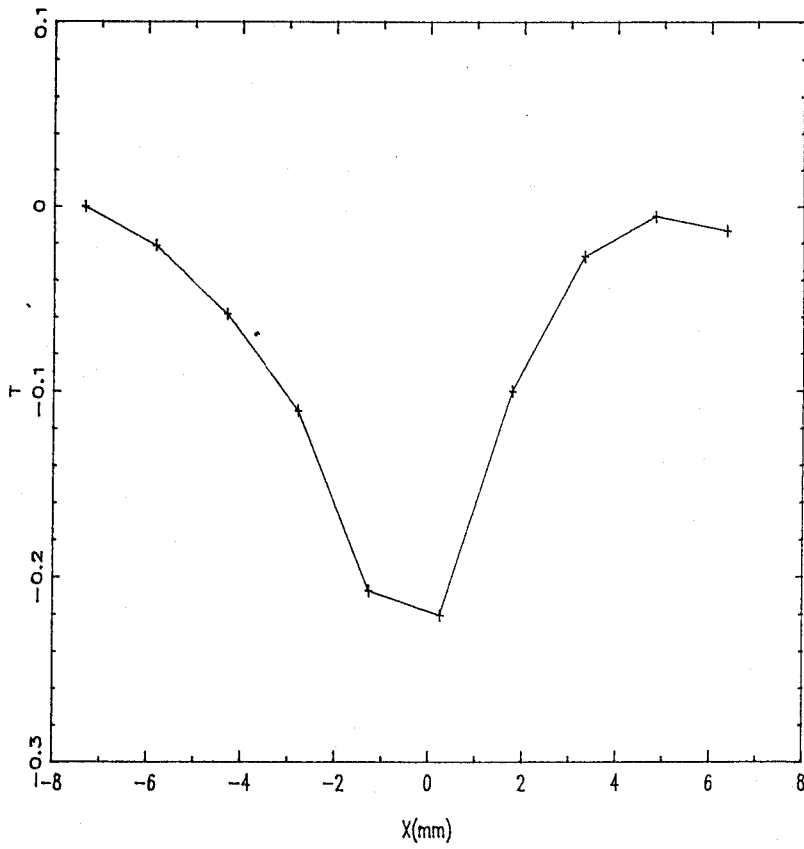


Figura 5.15: Perfil de temperatura horizontal para $V = 0$ cerca de la lámina.

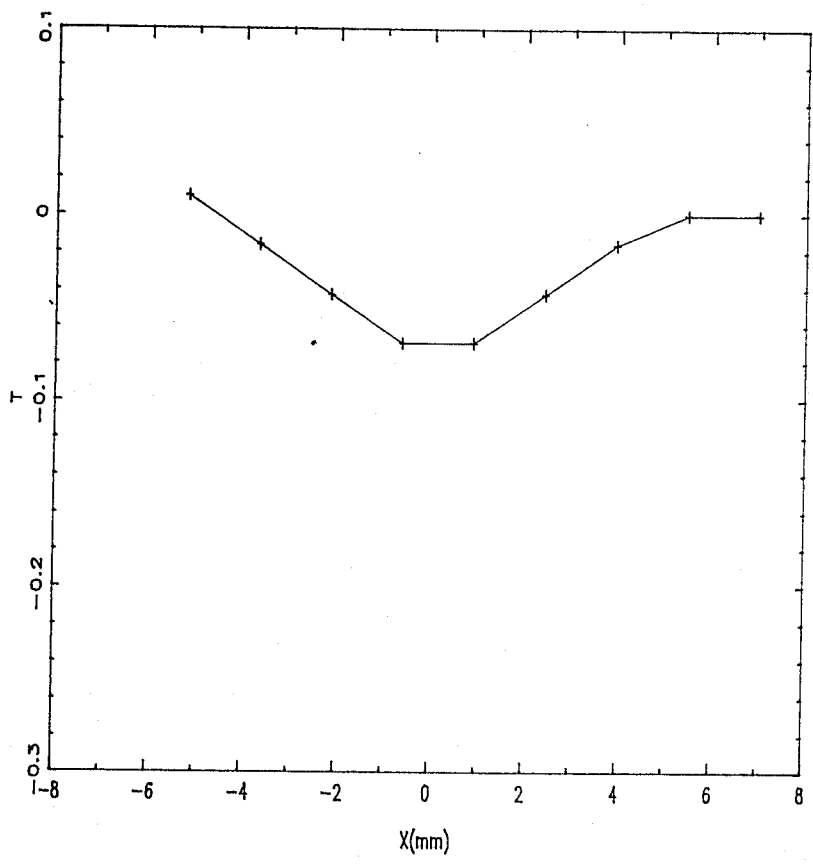


Figura 5.16: Perfil de temperatura horizontal para $V = 0$ en medio de la celda.

(figuras 5.13 y 5.14). En estas capas límite es donde se encuentra la mayor parte del gradiente térmico, de forma que el flujo de calor a través de la celda se puede estimar como $H \sim \kappa \Delta T / 2\delta$ con δ la anchura de la capa. De esta forma el número de Nusselt queda expresado como:

$$Nu = \frac{H}{\kappa \Delta T / d} \simeq \frac{d}{2\delta} \quad (5.32)$$

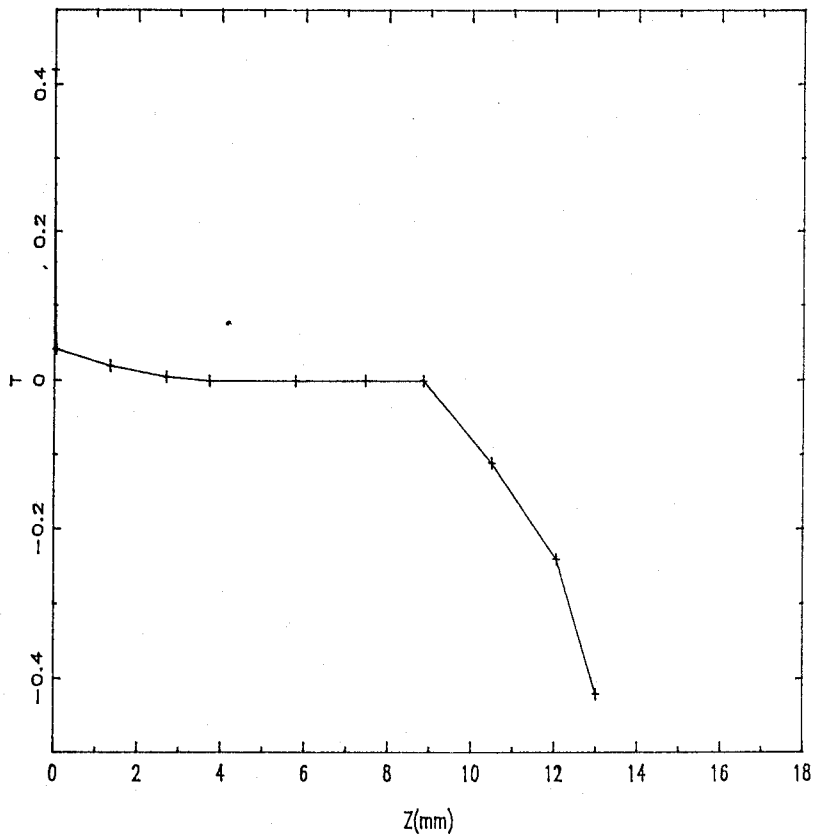
Vemos que la anchura de la capa límite, estimable del interferograma, es una medida del Nusselt.

Las fotografías 3 y 4 representan las mismas tomas pero con -10 kV de tensión aplicados a la lámina. Los perfiles obtenidos están representados en las figuras 5.17–5.20. El Nusselt medido en esta situación es 7.48. Se aprecia en la fotografía 3 la contracción que sufren las líneas de igual gradiente cerca del electrodo. En otras palabras: la capa límite se contrae y el Nusselt aumenta. A partir de las fotos 1 y 3 hemos realizado una estimación de δ en cada caso. Hemos promediado la anchura medida sobre la fotografía en doce puntos a lo largo del electrodo, las δ promedio encontradas son 2.9 mm, para $V = 0$ y 1.7 mm para $V = -10kV$. De esta forma resulta $\delta_{10kV} / \delta_{0kV} = 0.6$, a comparar con el cociente entre los números de Nusselt medidos 0.43. La comparación es aceptable, sobre todo si se toma en cuenta la distorsión que la presencia de la lámina introduce en la capa límite térmica superior.

La comparación de las fotografías 2 y 4 nos lleva a otro aspecto interesante. Mientras que la fotografía 2 nos indica un gradiente horizontal que llena toda la capa líquida (algo así como que la mitad del líquido sube caliente y la otra mitad baja frío de forma casi simétrica) la fotografía 4 nos muestra como el gradiente horizontal se concentra en una zona estrecha (figura 5.19). Esta zona estrecha se revela en la visualización como un chorro de líquido que sale de la lámina hacia el electrodo inferior, chorro que es tanto más fino cuanto mayor es la tensión. En definitiva, la presencia de una inyección localizada no sólo aumenta la transferencia de calor sino que cambia radicalmente la estructura del movimiento.

5.8 Resultados para V1

Los resultados obtenidos con el aceite V1 ($Pr = 12$) son, en principio, menos concluyentes. Los valores de Ra están ahora entre 10^5 y 10^7 , lo que hace

Figura 5.17: Perfil de temperatura vertical para $V = -10kV$ sobre la lámina.

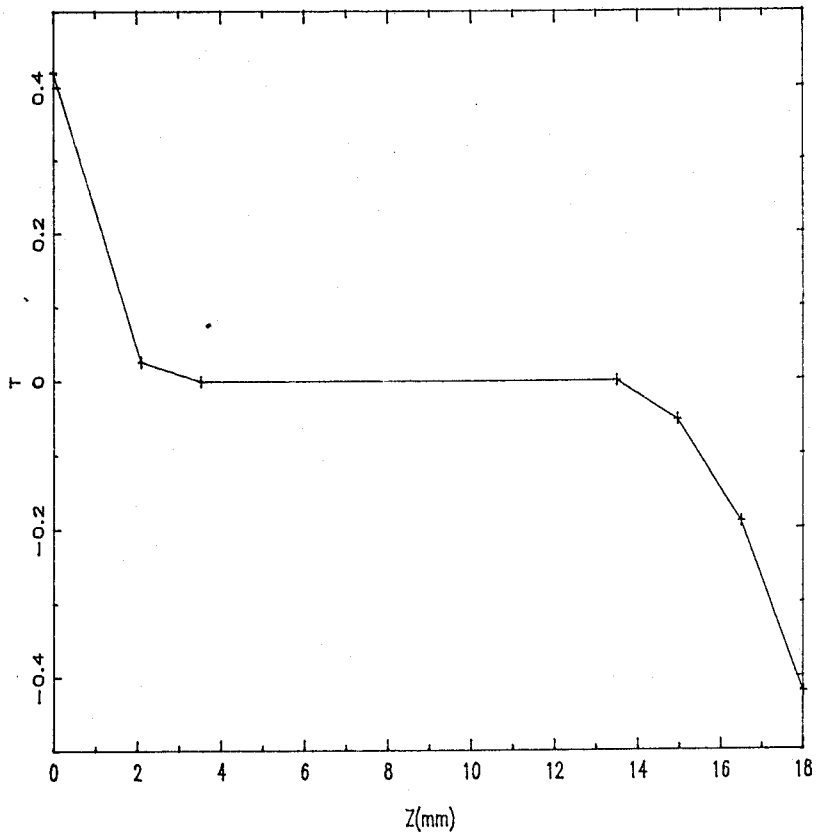


Figura 5.18: Perfil de temperatura vertical para $V = -10kV$ entre dos láminas.

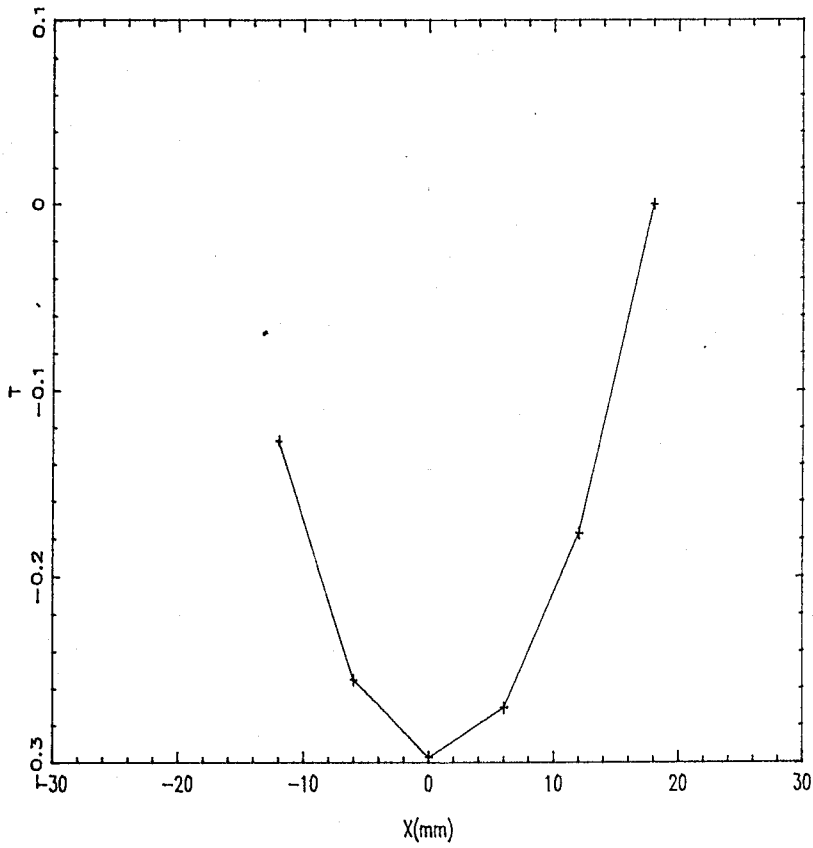


Figura 5.19: Perfil de temperatura horizontal para $V = -10\text{kV}$ cerca de la lámina.

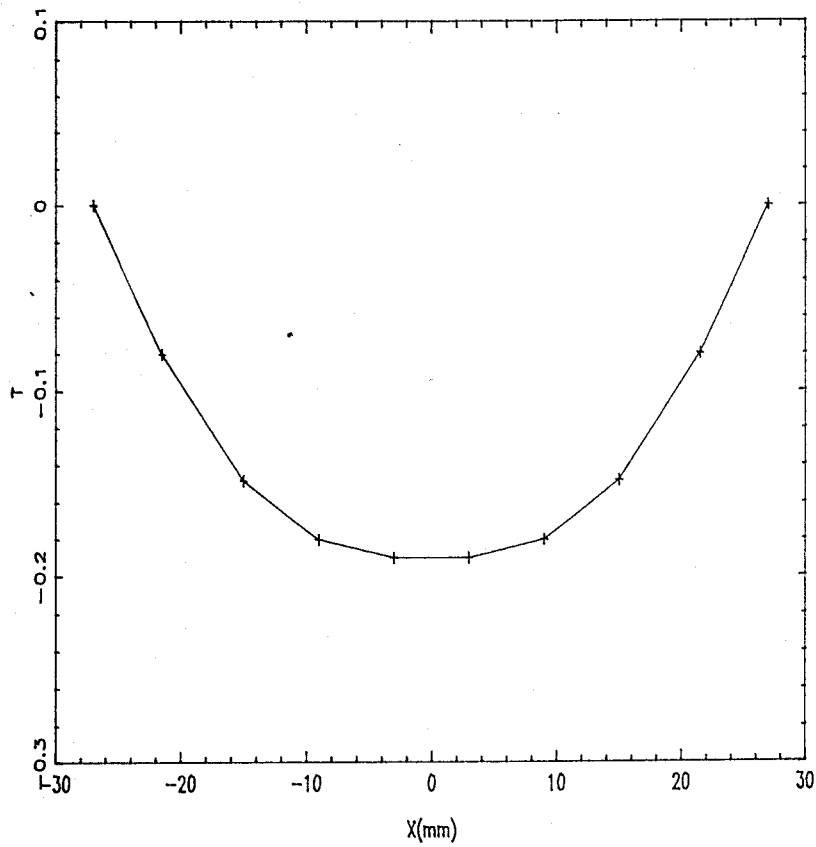


Figura 5.20: Perfil de temperatura horizontal para $V = -10\text{kV}$ em medio de la celda.

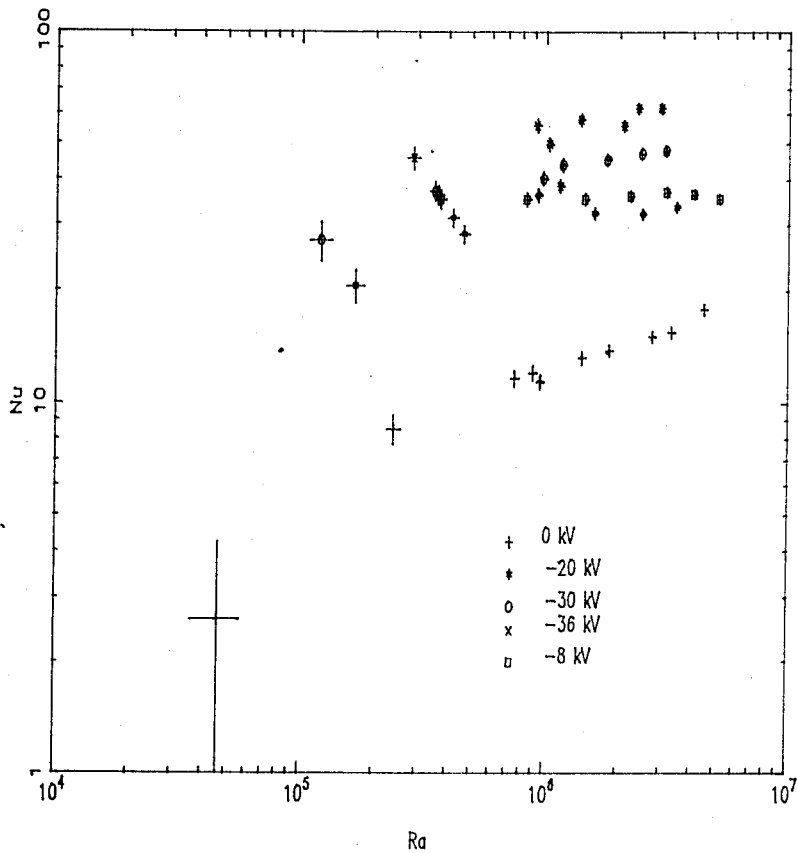


Figura 5.21: Nusselt frente a Rayleigh para varias tensiones aplicadas.

que, de por sí, la velocidad típica introducida por las fuerzas de flotación sea bastante alta, con lo cual la electroconvección no es siempre dominante. En la figura 5.21 se muestran los valores obtenidos de Nu frente a Ra para diferentes tensiones aplicadas. Vemos cómo Nusselt no depende sólo de los parámetros eléctricos, sino también del valor de Ra.

El comportamiento para una diferencia de temperatura fija tampoco muestra una ley clara de dependencia de Nu con los parámetros eléctricos, como se muestra en la figura 5.22. En ésta todos los puntos corresponden a una diferencia de temperatura entre los electrodos comprendida entre 0.99 y 1.1 °C. Aunque Nu aumenta inicialmente con I (y, por tanto, con V) aparece después una zona en la que Nu no cambia prácticamente con I, para, finalmente, crecer de nuevo. Aunque la visualización y la interferometría no han

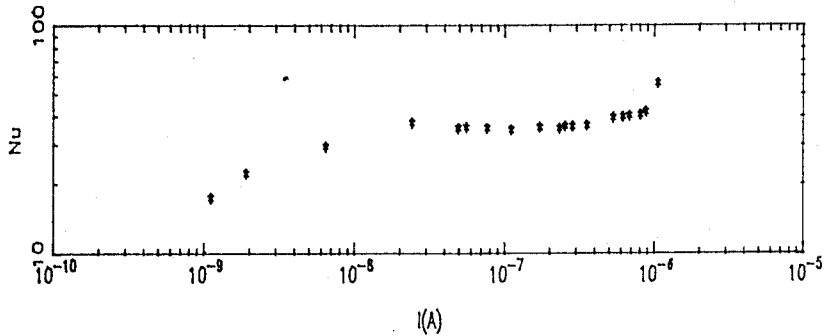


Figura 5.22: Nusselt frente a I para $\Delta T = 1.0$ °C.

sido muy reveladoras en este caso, sí hemos podido constatar que los puntos a la izquierda de la región $Nu \simeq \text{constante}$ ($V \leq 9\text{kV}$) en la figura 5.22 y a la derecha de dicha región corresponden a diferentes regímenes, teniéndose en este último caso ($V \geq 30\text{kV}$) un régimen claramente turbulento.

En las fotos 5 y 6 se muestran los interferogramas obtenidos para $\Delta T = 1.53$ °C ($Ra = 1.4 \times 10^6$), sin tensión aplicada. Aquí se observa como el movimiento es ya no estacionario, incluso sin tensión. Las dos fotos son instantáneas tomadas sucesivamente y se observa cómo no coinciden las franjas de una a otra, lo que pone de manifiesto que la velocidad no es estacionaria.

Las fotos 7 y 8 corresponden a 30 kV de tensión y a una diferencia de temperatura de 0.38 °C. La agitación es mucho mayor y la temperatura aparece más homogeneizada en el interior de la celda.

Así como para los aceites V50 y V350 los resultados son bastante concluyentes, el estudio para V1, es decir, para líquidos de Prandtl moderado, queda mucho más abierto. La dependencia de Nusselt con la intensidad para una diferencia de temperatura aproximadamente fija es bastante sorprendente y, en un principio, no encontramos argumentos que la expliquen. Un estudio más exhaustivo parece necesario en este caso.



Foto 1. Interferograma sin tensión eléctrica aplicada para el aceite V50.
Toma vertical.



Foto 2. Interferograma sin tensión eléctrica aplicada para el aceite V50.
Toma horizontal.

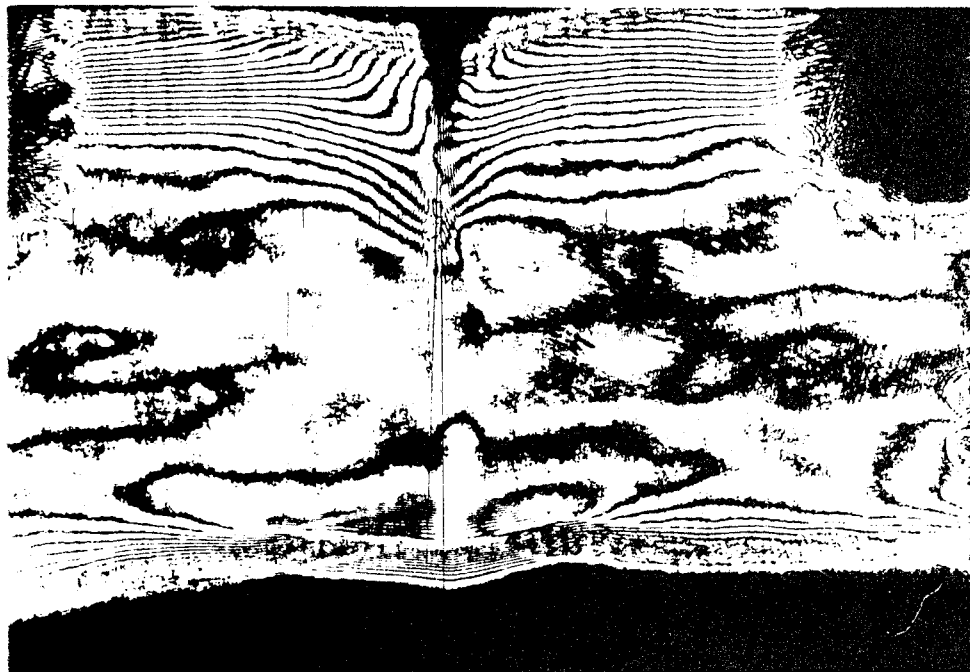


Foto 3. Interferograma para el aceite V50. $V = -10$ kV. Toma vertical.

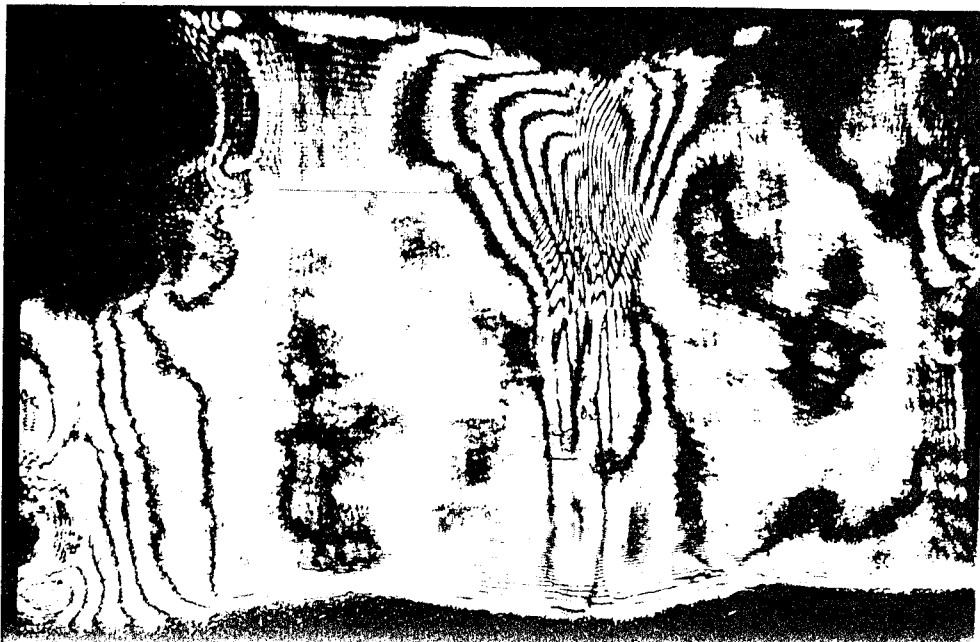
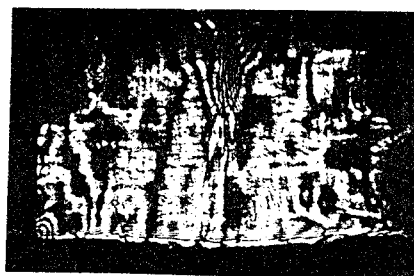
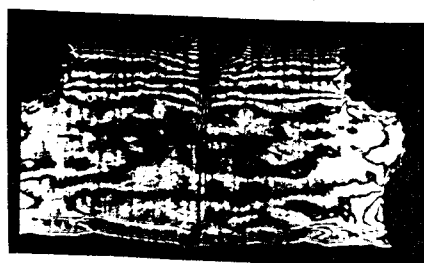


Foto 4. Interferograma para el aceite V50. $V = -10$ kV. Toma horizontal.



Fotos 5 y 6. Interferogramas sin tensión para el aceite V1. Ambas fotos están tomadas consecutivamente.



Fotos 7 y 8. Interferogramas para el aceite V1. $V = -30$ kV.

Capítulo 6

Discusión sobre las experiencias

I am an old man now, and when I die and go to Heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am really rather optimistic.

Horace Lamb, 1932

En este capítulo vamos a analizar a la luz de una serie de estimaciones más o menos groseras los resultados experimentales presentados en los dos capítulos precedentes. Dada la complejidad de los fenómenos turbulentos, que incluso en problemas clásicos son aún sólo parcialmente comprendidos, no pretendemos aquí hacer una formulación detallada de la turbulencia en electrohidrodinámica sino que nos limitaremos a tratar de poner de manifiesto algunas claves que se desprenden de los resultados experimentales.

Antes de entrar directamente en el análisis de nuestras experiencias (realizadas en inyección débil con transporte de calor) vamos a repasar el análisis de Lacroix et al. [62] en el caso de inyección fuerte en condiciones isothermas.

6.1 Geometría plano-plano

6.1.1 Inyección fuerte en condiciones isothermas

Lacroix et al. realizan un análisis de la electroconvección isoterma inducida por una inyección unipolar en condiciones de corriente limitada por la densidad espacial de carga apoyándose en hipótesis del tipo *longitud de mezcla*. Un análisis similar para el problema de Rayleigh-Benard había sido realizado con anterioridad por Kraichnan [63].

Se distinguen dos regímenes de convección según el valor de T/M (recordemos que $T = \epsilon V / K \eta$ y $M = (\epsilon / \rho)^{1/2} / K$). Para $T/M < 30$ (valor experimental) la electroconvección está dominada por las fuerzas viscosas (régimen viscoso) mientras que para $T/M > 30$ dominan los términos inerciales (régimen inercial). T/M juega así el papel del número de Reynolds.

Régimen viscoso

El término dominante en las ecuaciones de Navier-Stokes es el de viscosidad, y domina en todo el volumen del líquido. Aún así se pueden distinguir tres regiones en el líquido, atendiendo al tipo de mecanismo de transporte de carga dominante:

1. $z < z_K$ capa en la que la carga es fundamentalmente transportada por el arrastre de los iones por el campo.
2. $z_K < z < z_g$ la carga es transportada por convección y existe un fuerte gradiente de carga media.

3. $z_g < z < d/2$ la carga es transportada por convección pero el gradiente de carga media es muy pequeño.

Con estas hipótesis y manipulando las ecuaciones se encuentra que la velocidad cuadrática media es de la forma:

$$w' \sim \frac{\epsilon V^2}{d\eta} \quad (6.1)$$

Se puede definir un número de Nusselt eléctrico (Ne), por analogía al térmico, como la densidad de corriente eléctrica total que atraviesa la celda dividida por la que la atravesaría en condiciones hidrostáticas (en el caso de inyección fuerte a que nos estamos refiriendo es: $J_{SCL} = (9/8)K\epsilon V^2/d^3$). En el régimen viscoso se tiene para Ne :

$$Ne \sim \left(\frac{\epsilon V}{k\eta}\right)^{1/2} \quad (6.2)$$

Régimen inercial

En el régimen inercial los términos inerciales son los dominantes en todo el volumen del líquido. En cuanto al transporte de carga sólo se distinguen dos regiones:

1. $z < z_g$ región en la que existe un fuerte gradiente de carga media.
2. $z_g < z < d/2$ región en la que la densidad de carga media es prácticamente constante.

El transporte de carga por arrastre iónico se ve confinado ahora a una capa muy delgada de anchura mucho menor que z_g .

En este caso las estimaciones dan:

$$w' \sim \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/2} E \quad (6.3)$$

$$Ne \simeq \frac{4}{9}(1 + \beta M^{1/2}) \quad (6.4)$$

siendo β un factor numérico de orden unidad.

Los resultados experimentales confirman estas relaciones, sobre todo en lo que a Ne se refiere, encontrándose la saturación a partir de cierta tensión que representa 6.4. La curva Ne frente a V sirve para discernir los dos regímenes de convección y de ella se puede obtener el valor $T/M = 30$ para la transición que antes hemos mencionado.

6.1.2 Inyección débil en condiciones isotermas

En el caso de inyección débil no existen experimentos detallados ni modelos simples, excepto los trabajos numéricos que hemos presentado en la primera parte de este trabajo, para determinar las características relevantes de la convección. Vamos a dar a continuación una estimación en orden de magnitud de la velocidad y la densidad de corriente en los dos casos de régimen viscoso e inercial.

La densidad de corriente media j debida al arrastre iónico y a la convección es:

$$j = KqE + \overline{qw} \quad (6.5)$$

donde \overline{qw} es la correlación entre las fluctuaciones de velocidad y densidad de carga. En el electrodo inyector esta expresión se reduce a:

$$j = Kq_0E(0) \quad (6.6)$$

donde q_0 es la densidad de carga inyectada y $E(0)$ el campo eléctrico en el inyector. Como la corriente está limitada por la capacidad del electrodo de proporcionar iones, el movimiento no tiene apenas influencia en la transferencia de carga y el campo eléctrico se verá poco modificado respecto a su valor en ausencia de movimiento. En primer orden en C el campo tiene la expresión (ver capítulo 1):

$$E(z) = \frac{V}{d} \left(1 - \frac{C}{2} + Cz \right) \quad (6.7)$$

Como el movimiento hace decrecer la densidad de carga media en el volumen, $E(0)$ tendrá un valor, en movimiento, algo mayor que $(V/d)(1 - C/2)$, pero menor, en cualquier caso, que V/d . Suponiendo que q_0 no se ve afectado por el movimiento el número de Nusselt eléctrico será:

$$1 \leq Ne < \frac{1}{1 - C/2} \simeq 1 + \frac{C}{2} \quad (6.8)$$

Cuando $C \ll 1$ Ne se mantiene prácticamente igual a la unidad. En definitiva, el movimiento no tiene apenas influencia en el transporte de carga lo que hace que, en este caso, sea muy difícil poner de manifiesto los diferentes regímenes de convección a partir de las curvas I/V , al contrario de lo que ocurre en el caso de inyección fuerte. En la figura 4.2 no podemos distinguir

otra transición que la del régimen óhmico al de inyección, mientras que en las curvas experimentales para el caso de inyección fuerte [62] se ve claramente una segunda ruptura de la pendiente una vez superado el régimen óhmico.

Régimen viscoso

Para pequeños valores del número de Reynolds los términos inerciales de la ecuación de Navier-Stokes son despreciables. Se produce entonces un balance entre el término de viscosidad y la fuerza de Coulomb. En orden de magnitud:

$$\frac{\eta w'}{d^2} \sim qE \quad (6.9)$$

Multiplicando a ambos lados por w' y suponiendo que, en el volumen, el transporte de carga se realiza por convección se tiene:

$$\frac{\eta w'^2}{d^2} \sim qw'E \sim jE \quad (6.10)$$

que establece el balance entre la potencia eléctrica suministrada y la potencia disipada por acción de la viscosidad. Despejando w' resulta:

$$w' \sim \left(\frac{jVd}{\eta}\right)^{1/2} \quad (6.11)$$

Poniendo $j = Kq_0E$ e introduciendo los parámetros adimensionales T y C comprobamos que esta estimación concuerda con el resultado obtenido en el primer capítulo: $w'/KE \propto (TC)^{1/2}$.

Régimen turbulento

Para $Re \gg 1$ los términos inerciales dominan a los viscosos en la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{w'^2}{d} \sim qE \quad (6.12)$$

Introduciendo $j = Kq_0E(0) \simeq Kq_0V/d$ se obtiene

$$w' \sim \left(\frac{jd}{\rho K}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{q_0V}{\rho}\right)^{1/2} = KEMC^{1/2} \quad (6.13)$$

6.1.3 Transferencia de calor

Como vimos en el capítulo 4 las fuerzas de flotación no juegan papel alguno en las experiencias en geometría plano-plano que hemos realizado. El número de Nusselt no depende del número de Rayleigh y sólo intervienen en él las magnitudes eléctricas. Podemos con ello dar una forma general de dependencia del Nusselt aprovechando las estimaciones anteriores. La situación es similar al caso de convección forzada. Así Nu viene determinado por dos cantidades adimensionales [64]: $Pe = w'd/\chi$, conocido como número de Peclet, y el número de Reynolds $Re = w'd/\nu$. En los dos límites de $Re \ll 1$ y $Re \gg 1$ sólo el número de Peclet aparecerá en la expresión de Nusselt.

Régimen viscoso

Para obtener una expresión para el número de Peclet basta introducir la velocidad cuadrática media obtenida en 6.11:

$$Pe = \frac{w'd}{\chi} = \left(\frac{IVd}{\eta}\right)^{1/2} \frac{d}{\chi} = \left(\frac{IVd^3}{\eta\chi^2}\right)^{1/2} \quad (6.14)$$

de donde:

$$Nu = f\left(\frac{IVd^3}{\eta\chi^2}\right) \quad (6.15)$$

de donde aparece IVd^3 como el parámetro eléctrico relevante.

Régimen inercial

De nuevo introducimos el valor de w' estimado para este caso 6.13 en el número de Peclet:

$$Pe = \frac{w'd}{\chi} \sim \left(\frac{Id}{\rho K}\right)^{1/2} \frac{d}{\chi} = \left(\frac{Id^3}{\rho K\chi^2}\right)^{1/2} \quad (6.16)$$

y se tiene

$$Nu = f\left(\frac{Id^3}{\rho K\chi^2}\right) \quad (6.17)$$

El que los valores experimentales parecen ajustarse mejor a este parámetro (Id^3) (figura 4.7) que a IVd^3 nos induce a pensar que estamos más

próximos a un régimen inercial que viscoso. Es de notar que, puestos los resultados experimentales en función de Id^3 se consigue que caigan sobre una misma curva los resultados de todas las configuraciones posibles. Las estimaciones que hemos realizado no nos proporcionan un valor para el exponente de la dependencia potencial de Nu con Id^3 . Para obtener una predicción teórica de dicho exponente es necesario hacer un modelo de la estructura de la convección ya que Nu depende de la correlación entre las fluctuaciones de velocidad y de temperatura.

El número de Reynolds $Re = w'd/\nu$ se puede estimar a partir de $w' = (jd/\rho K)^{1/2}$. Para $Id^3 = 10^{-14} \text{ Am}^2$ e introduciendo las constantes del aceite V10 ($\rho \simeq 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $K \simeq 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{Vs}$, $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$) se obtiene $w' \sim 12 \text{ cm/s}$ y $Re \sim 60$. Teniendo en cuenta que en el límite de inyección fuerte el valor de Re para la transición entre el régimen viscoso y el inercial es 30 [62] y que nuestra estimación es muy grosera parece lógico pensar que nos encontramos en una zona intermedia, en la que no tenemos un régimen claramente establecido.

6.2 Experiencias con láminas

Tanto la estrioscopía como la interferometría muestran que, en las experiencias realizadas en geometría lámina-plano expuestas en el capítulo 5, cuando se aplica un campo eléctrico, el movimiento viene determinado por la formación de chorros de líquido que salen de cada lámina hacia el electrodo plano. De otro lado, el que para los aceites V50 y V350 la dependencia de Nu con los parámetros eléctricos venga representada por una sola ley (ver figura 5.11) nos lleva a presumir que en ambos aceites nos encontramos frente al mismo régimen de convección. El que en dicha ley haya que introducir la viscosidad para que los puntos experimentales de ambos aceites coincidan sobre una misma curva nos indica que dicho régimen es de tipo viscoso. En cuanto al aceite V1, los puntos para el obtenidos no caen sobre la misma curva que los de V50 y V350. La estrioscopía nos ha mostrado en este caso un movimiento mucho más agitado, lo que nos induce a pensar que se trata de un régimen inercial.

Para analizar la situación hemos recurrido al estudio de los chorros libres cargados tanto laminares como turbulentos. Aunque la reducción implicada es muy drástica, pues vamos a tratar con chorros libres, podemos obtener así

una estimación de velocidades y escalas típicas involucradas.

6.2.1 Chorro cargado laminar

El chorro cargado laminar bidimensional ha sido resuelto por McCluskey [65] de forma aproximada y por Castellanos [66] de forma exacta. Su resolución es en todo análoga a la del penacho térmico en el caso de $Pr \rightarrow \infty$ [67]. Suponemos que bajo la acción de un campo eléctrico uniforme E , en una línea indefinida se inyecta carga en un líquido dieléctrico. Las ecuaciones electrohidrodinámicas admiten entonces una solución de semejanza bajo las hipótesis siguientes:

- aproximación de capa límite
- transporte de carga dominado por convección ($w \gg KE$). Esta hipótesis es la análoga a $Pr \gg 1$ en el caso térmico.
- la densidad de carga no es transportada lateralmente y queda confinada a la línea central del chorro.

En estas condiciones, la velocidad del líquido en la dirección del chorro y en el centro del mismo viene dada por:

$$w_0 = A(IE/\rho\nu)^{2/5} z^{1/5} \quad (6.18)$$

con z la coordenada longitudinal, I la corriente eléctrica por unidad de longitud de la línea inyectora y A un factor numérico próximo a 1. La anchura del chorro, distancia a la que la velocidad decae a $1/e$ de su valor en el centro del chorro, sigue la ley:

$$\delta(z) = B(\rho\nu^3/IE)^{1/5} z^{2/5} \quad (6.19)$$

6.2.2 Chorro cargado turbulento

En el caso del chorro cargado turbulento no disponemos todavía de una solución de semejanza. La velocidad y la anchura del chorro se pueden obtener, sin embargo, de leyes integrales similares a las que se usan en el estudio de los penachos térmicos [68]. Bajo las hipótesis de que la densidad de carga se reparte por todo el chorro y que el líquido exterior es succionado

por el chorro a un ritmo proporcional a la velocidad típica de éste se encuentra para la velocidad:

$$w(z) = (IE/2\alpha\rho)^{1/3} \quad (6.20)$$

y para la anchura

$$\delta(z) = 2\alpha z \quad (6.21)$$

donde α es un factor numérico a determinar experimentalmente. Como es característico de los chorros turbulentos, la anchura crece rápidamente.

6.2.3 Electroconvección en geometría lámina-plano

Hay dos condiciones fundamentales del chorro libre que no se cumplen en nuestra celda de estudio. De un lado la presencia del electrodo plano que, evidentemente, frena el chorro. La presencia del plano induce un campo de presiones externo al chorro no uniforme que habría que considerar en el cálculo. En cualquier caso nuestro chorro tiene una anchura típica de 1 mm que, frente a los 15 mm de distancia entre la punta de cada lámina y el plano, hace suponer que, al menos durante cierto rango de distancias, la aproximación de chorro libre es adecuada.

La segunda condición se refiere a que en el chorro libre el líquido exterior se encuentra en reposo y en nuestro caso está en continua agitación por efecto del retorno del líquido y de la presencia de los chorros colindantes. La velocidad media típica de esta agitación ha de ser, sin embargo, notablemente inferior a la del chorro y, de nuevo, el chorro libre se presenta como una primera aproximación. A continuación vamos a considerar las expresiones 6.18, 6.19, 6.20, 6.21 como estimaciones de los valores típicos de nuestro sistema.

Caso laminar

Teniendo en cuenta que la corriente total medida se reparte entre la longitud de las cinco láminas y que I en la ecuación 6.18 representa la intensidad por unidad de longitud, podemos estimar la velocidad típica (tomando $z \sim d/2 = 9$ mm) en el rango de valores con los que hemos experimentado con los aceites V50 y V350. Los dos casos extremos (ver figura 5.11) corresponden a $IV/\nu = 10^{-10}$ AkV/cst y 10^{-7} AkV/cst. Introducidos estos valores, junto con las propiedades de los aceites, en 6.18 obtenemos 1 cm/s y 18 cm/s como valores entre los que varía la velocidad típica del líquido. A partir de 6.19

podemos estimar la anchura en ambos casos y se obtiene que δ varía entre 1 y 9 mm. Con estos valores para w' y δ podemos estimar el número de Reynolds del chorro $Re = w'\delta/\nu$ que varía así entre 2 y 5. Esta estimación nos confirma en la hipótesis de que se trata de un chorro laminar.

El número de Nusselt se expresa de nuevo en función del número de Peclet: $Nu = f(w'd/\chi)$. La complejidad de la estructura nos impide, por ahora, dar una expresión para f . Vemos, sin embargo, que w' crece más lentamente con los parámetros eléctricos ($w' \sim (IV)^{2/5}$) que en el caso plano-plano (ver ecuación 6.11). Esta puede ser la razón por la que en las experiencias con láminas Nu aumenta con una pendiente sensiblemente inferior a como lo hace en el caso plano (comparar figuras 5.11 y 4.7).

Caso turbulento

Para el caso del aceite V1 podemos estimar w' a partir de la expresión 6.20. Se obtiene que w' varía entre 7 y 14 cm/s. La anchura típica, estimada de la expresión 6.21, es del orden 10^{-3} m, si tomamos para α el valor 0.1 del caso térmico [68]. El número de Reynolds varía ahora entre 70 y 140.

Queda explicar la aparente saturación del número de Nusselt en función de la intensidad en un rango de valores de I (ver figura 5.22) en este caso del aceite V1. Aunque Ra es bastante grande, una estimación de la velocidad típica inducida por las fuerzas de flotación nos da valores 1 o 2 órdenes de magnitud inferiores a los inducidos por las fuerzas eléctricas, lo que en principio nos hace descartar que las fuerzas de flotación intervengan realmente. Claro está que no disponemos de valores experimentales de la velocidad sino sólo de ciertas estimaciones más o menos adecuadas.

La determinación de la velocidad debe ser la base sobre la que se puede caracterizar experimentalmente de forma clara la electroconvección. No queremos cerrar este capítulo sin hacer mención de esta problemática. A pesar de que la velocimetría láser ha funcionado en estudios de electrohidrodinámica con flujos forzados, y, por tanto, con celdas abiertas [69,70], no nos ha sido posible efectuar medidas de velocidad en nuestro montaje. Ello es debido fundamentalmente al problema del dopado del líquido. Al estar el aceite de silicona lo suficientemente limpio de impurezas como para no contener en su interior partículas del tamaño adecuado ($\sim 1\mu m$) para difractar la luz y proporcionar una señal Doppler utilizable, hace falta doparlo. Hasta ahora se vienen utilizando tanto polvo de vidrio como micropartículas de silicona.

Estas partículas, a parte de las posibles modificaciones de las propiedades eléctricas del líquido, aparecen siempre cargadas y migran hacia los electrodos en un tiempo típico que es inferior al necesario para tomar un número suficiente de medidas particulares. Una vez en el electrodo quedan adheridas a él imposibilitando la medición. Este es, sin duda, un problema técnico a resolver en el campo de la experimentación en electrohidrodinámica.

Conclusiones

Se ha realizado el estudio teórico del comportamiento de una capa de líquido dieléctrico sometida a inyección unipolar de iones:

1) Un algoritmo en diferencias finitas convencional (SIMPLER) calcula el valor del criterio de estabilidad lineal. El valor del criterio de estabilidad no lineal y la amplitud de la velocidad en el ciclo de histéresis asociado no son correctamente reproducidos por este algoritmo debido a la fuerte difusión numérica que presenta, que impide obtener correctamente la densidad de carga en el líquido y, por tanto, el par motriz.

2) Un algoritmo en diferencias finitas antidifusivo (FCT) mejora sustancialmente los resultados encontrados con SIMPLER, obteniendo valores aceptables para el ciclo de histéresis así como para el criterio no lineal de estabilidad. Ambos algoritmos en diferencias finitas son incapaces de reproducir la vacilación no estacionaria de la amplitud de la velocidad en torno al valor medio que se encuentra experimentalmente.

3) Un tercer algoritmo mucho más costoso en tiempo de cálculo, método de las características, puede reproducir perfectamente el ciclo de histéresis. Con él se obtiene una amplitud de la velocidad que sufre cierta vacilación en torno a su valor medio. El análisis de esta señal no queda completo y, aunque un algoritmo de este tipo parece ser el más adecuado para un estudio de las soluciones caóticas de las ecuaciones electrohidrodinámicas, el tema queda abierto.

4) Se ha analizado la influencia de la difusión molecular en la distribución de carga para la electroconvección de amplitud finita en el caso de inyección débil. Se demuestra que a priori la difusión no es despreciable cuando se tienen regiones encerradas por las líneas características de la ecuación de conservación de la carga. En ese caso la densidad de carga depende de la competición entre la difusión y la repulsión coulombiana entre iones. El parámetro $C/\alpha^{1/2}$ aparece como una medida relativa de ambos mecanismos en el sentido de que si $C/\alpha^{1/2} \rightarrow 0$ la difusión domina y si $C/\alpha^{1/2} \rightarrow \infty$ la difusión es despreciable. El estudio de la estructura geométrica de las trayectorias iónicas modificadas por el campo eléctrico perturbado por la densidad de carga permite obtener un modelo unidimensional que da cuenta de la densidad de carga en el líquido. El algoritmo FCT permite calcular el ciclo de histéresis para diferentes valores del coeficiente de difusión. La

inclusión de éste reduce el ciclo de histéresis, disminuyendo la amplitud de la velocidad y aumentando el valor del criterio de estabilidad no lineal.

Se ha estudiado experimentalmente la transferencia de calor en líquidos dieléctricos en presencia de campo eléctrico.

1) Las experiencias en geometría plano-plano y con inyección controlada por dopado del aceite de silicona con TIAP muestran que las fuerzas de flotación juegan un papel despreciable en la determinación del flujo de calor a través de la celda. El número de Nusselt depende exclusivamente de los parámetros eléctricos. La dependencia del número de Nusselt frente a Id^3 es única para las tres distancias utilizadas y para las diferentes configuraciones posibles. Las estimaciones realizadas muestran que este parámetro es el determinante en el caso en el que se tiene un régimen de convección inercial.

2) Las experiencias en geometría lámina-plano realizadas con tres líquidos diferentes confirman que son las fuerzas eléctricas las dominantes. Se han puesto de manifiesto dos tipos de régimen. Para los dos aceites más viscosos se tiene un régimen de convección viscoso. El número de Nusselt presenta un mismo comportamiento para estos dos aceites cuando se representa frente a IV/ν . Este parámetro se obtiene en el análisis teórico del chorro cargado laminar. Los interferogramas obtenidos permiten calcular los perfiles de temperatura en cada caso. En el aceite V1 (de 1 cst) la agitación del líquido es mucho mayor, como lo revelan las visualizaciones realizadas. El análisis del chorro cargado turbulento revela que I es el parámetro relevante pero el comportamiento de Nu con la intensidad de corriente presenta aspectos que no quedan explicados.

Apéndice A

Ecuación de Landau para la inyección unipolar

En este apéndice damos en detalle el cálculo de los coeficientes a , b y c de la ecuación 1.58:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{M^2}{T} A(a + TC^2(b + cA^2) + \dots) \quad (\text{A.1})$$

obtenida en la sección 1.5.

Supongamos que la velocidad se obtiene a partir de una función corriente polinómica (esta elección simplifica las integraciones que hemos de realizar):

$$\Psi_0(x, z) = -16Lz^2(1 - z)^2 \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \quad (\text{A.2})$$

Se tiene entonces:

$$u_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -32L(z - 3z^2 + 2z^3) \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \quad (\text{A.3})$$

$$w_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = 16L(z^2 - 2z^3 + z^4) \left(2\frac{x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \quad (\text{A.4})$$

La vorticidad se obtiene de $\omega_0 = \partial u_0 / \partial z - \partial w_0 / \partial x$. El coeficiente b_1 de la ecuación 1.53 es entonces:

$$\int_0^L \int_0^1 \omega_0 dx dz = -\frac{16}{15L} \quad (\text{A.5})$$

negativo como allí se dijo, y el coeficiente b_2 de la misma ecuación resulta ser:

$$\int_0^L \int_0^1 \omega_0 \nabla^2 \omega_0 dx dz = 64L^2 \quad (\text{A.6})$$

que es positivo.

Desarrollamos ahora $t(z)$ (ecuación 1.57) en potencias de A :

$$\begin{aligned} t_{\pm}(z) &= \int_0^z \frac{d\xi}{1 \pm Aw_0(\xi)} = \int_0^z \frac{d\xi}{1 \mp 16A(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)} \\ &= z \pm 16Af_1(z) + (16A)^2 f_2(z) \pm (16A)^3 f_3(z) + O(A^4) \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

donde el signo $+$ en $t(z)$ se refiere a la línea $x = 0$ y el signo $-$ a la línea $x = L$.

Podemos desarrollar $q(z)$ en potencias de C , con lo cual:

$$q_{\pm}(z) = \frac{C}{1 + Ct_{\pm}(z)} = C(1 - Ct_{\pm}(z) + O(C^2)) \quad (\text{A.8})$$

Con todo ello, el par aplicado a la celda 1.54 es:

$$\begin{aligned} \oint q\mathbf{E} d\mathbf{l} &= \int_0^1 q(x=0, z) dz - \int_0^1 q(x=L, z) dz \\ &= \int_0^1 (q_-(z) - q_+(z)) dz = -C^2 \int_0^1 (t_+(z) - t_-(z)) dz \\ &= -C^2(32A \int_0^1 f_1(z) dz + 2(16A)^3 \int_0^1 f_2(z) dz) \\ &= -\left(\frac{8}{15}A + \frac{1024}{3003}A^3\right)C^2 \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Introduciendo A.5, A.6 y A.9 en 1.53 se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{M^2}{T}A\left(-60L^3 + TC^2\left(\frac{L}{2} + \frac{320}{1001}A^3\right)\right) \quad (\text{A.10})$$

que es la ecuación buscada.

Apéndice B

Obtención de la función $\tau(r)$

En la sección 3.3 se obtuvo para el período de las órbitas cerradas del sistema 3.11-3.12 la expresión 3.51:

$$\tau(r) = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\frac{\partial H(x, F(K, x))}{\partial z} \right]^{-1} dx \quad (\text{B.1})$$

En este apéndice evaluamos esta expresión en el límite $A \rightarrow 1$. Partimos de la expresión de la hamiltoniana:

$$H = -x + \frac{AL}{2\pi}(1 - \cos 2\pi z) \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B.2})$$

Cuando $A \rightarrow 1$ los puntos de equilibrio tienden a $x = 0$, $z = 1/2$ con lo que podemos desarrollar H en torno a este punto. Introduciendo las nuevas variables $\eta = x/L$, $\xi = z - 1/2$, $J = H/L\pi^2 A$ y $\lambda = (A - 1)/(\pi^2 A)$ el desarrollo es:

$$J = \eta \left[\lambda - \left(\xi^2 + \frac{\eta^2}{6} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

El nuevo sistema es ahora

$$\dot{\eta} = \frac{\partial J}{\partial \xi} = -2\eta\xi \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial J}{\partial \eta} = -\lambda + \frac{\eta^2}{2} + \xi^2 \quad (\text{B.5})$$

y sus puntos de equilibrio son: $(\eta = 0, \xi = \pm\sqrt{\lambda})$ y $(\eta = \sqrt{2\lambda}, \xi = 0)$. La región donde existen órbitas cerradas es la región $J \geq 0$ y el valor máximo

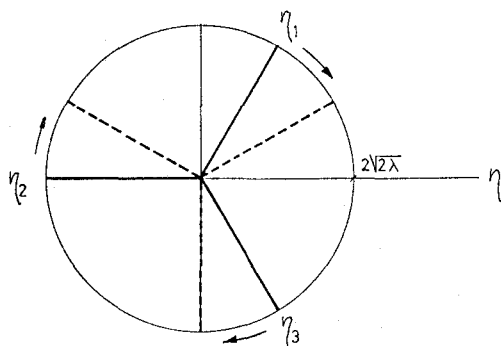


Figura B.1: Puntos de corte de las órbitas con el eje $\xi = 0$.

de J se alcanza en el centro ($\eta = \sqrt{2\lambda}$, $\xi = 0$) siendo $J_{max} = 2\sqrt{2}\lambda^{3/2}/3$. La separatriz se encuentra en $J = 0$ y su abcisa es, de B.3: $\eta_s = \sqrt{6\lambda}$.

Los puntos de corte de una órbita determinada por un valor dado de J son las raíces de la ecuación:

$$\eta^3 - 6\lambda\eta + 6J = 0 \quad (\text{B.6})$$

Estas raíces se pueden expresar como:

$$\eta_1 = 2\sqrt{2\lambda} \cos \frac{\theta}{3} \quad (\text{B.7})$$

$$\eta_2 = 2\sqrt{2\lambda} \cos\left(\frac{\theta + \pi}{3}\right) \quad (\text{B.8})$$

$$\eta_3 = 2\sqrt{2\lambda} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \quad (\text{B.9})$$

siendo $\cos \theta = -3J/2\sqrt{2}\lambda^{3/2}$. Como es $0 \leq J \leq 2\sqrt{2}\lambda^{3/2}/3$ ha de ser $0 \leq \cos \theta \leq -1$ y, por tanto, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. En la figura B.1 se representan dichas raíces. Se tiene siempre $\eta_2 < 0 \leq \eta_3 \leq \eta_1 \leq \eta_s$.

Para obtener el período sustituimos en B.4 el valor de ξ despejado de B.3, se tiene:

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\eta\left[\lambda - \frac{\eta^2}{6} - \frac{J}{\eta}\right]^{1/2} \quad (\text{B.10})$$

o

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\sqrt{-\frac{1}{6}\eta(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3)} \quad (\text{B.11})$$

donde η_1 , η_2 y η_3 son los calculados arriba.

El período de la órbita correspondiente al valor J es, por tanto:

$$T = -\sqrt{6} \int_{\eta_3}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3)}} \quad (\text{B.12})$$

Esta integral se puede expresar en términos de integrales elípticas ([71, página 242-7]):

$$T = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}} F(\pi/2, r) \quad (\text{B.13})$$

con $r = \sqrt{(\eta_1 - \eta_3)\eta_2/(\eta_1(\eta_2 - \eta_3))}$ y

$$F(\nu, r) = \int_0^\nu \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - r^2 \text{sen}^2 \zeta}} \quad (\text{B.14})$$

Calculemos, como ejemplo, el valor de T en el centro. Tenemos $J = 2\sqrt{2}\lambda^{3/2}/3$ y, por tanto, $\cos \theta = -1$, $\eta_1 = \eta_3 = \sqrt{2\lambda}$ y $\eta_2 = -2\sqrt{2\lambda}$. Con ello es $r = 0$ y $F(\pi/2, 0) = \pi/2$. Sustituyendo se tiene $T = \pi/\sqrt{\lambda}$.

El cambio de escala de H a J implica un cambio en la escala de tiempos. En términos de la escala primitiva es $\tau = T/\pi^2 A$, haciendo el cambio e introduciendo en el valor de T la expresión de λ se obtiene finalmente: $\tau = 1/\sqrt{A(A-1)}$. Para $A = 1.1$ tenemos el valor 3.02 dado en la sección 3.3.

Se comprueba fácilmente que el período diverge en la separatriz.

Apéndice C

Cálculo de la corriente de inyección en las experiencias plano-plano

La corriente eléctrica medida en las experiencias del capítulo 4 se debe a dos procesos: la conductividad residual del líquido y el arrastre por el campo de los iones inyectados. En este apéndice exponemos cómo hemos extraído de la corriente total la corriente inyectada, que es la que se ha empleado en la dependencia del Nusselt con los parámetros eléctricos presentada en dicho capítulo.

La densidad de corriente eléctrica en la celda viene dada por:

$$J = eE(p_i K_i + p K_p + n K_n) \quad (C.1)$$

siendo e la carga de cada ión (supuestos monovalentes), p_i la densidad de iones inyectados, p la densidad de iones positivos provenientes de un proceso de disociación, n la densidad de iones negativos debidos a ese mismo proceso y K_i , K_p y K_n las movilidades respectivas de cada tipo de ión.

Podemos expresar la densidad de corriente como suma de dos contribuciones:

$$J = J_i + J_c \quad (C.2)$$

y nuestro interés se centra en discernirlas de la corriente total medida j .

La ecuación de Poisson en una dimensión es:

$$\frac{dE}{dx} = (P_i + p - n) \frac{e}{\epsilon} \quad (C.3)$$

Las ecuaciones de conservación de cada especie son:

$$\frac{dp K_p E}{dx} = k_D \zeta - k_R p n \quad (C.4)$$

$$-\frac{dnK_n E}{dx} = k_D \zeta - k_R p n \quad (\text{C.5})$$

donde k_D es la constante de disociación, ζ la densidad molecular de la especie que se disocia y k_R la constante de recombinación. En el equilibrio termodinámico se cumple:

$$k_D \zeta = k_R p_o n_o \quad (\text{C.6})$$

donde p_o y n_o son las concentraciones de equilibrio de los iones positivos y negativos.

Denat [7] ha resuelto numéricamente estas ecuaciones bajo las siguientes condiciones de contorno:

$$eP_i|_{x=0} = q \quad (\text{C.7})$$

$$p|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$n|_{x=d} = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\int_0^d E dx = V \quad (\text{C.10})$$

Así el electrodo inyector se supone en $x = 0$ y su polaridad se considera positiva. Los resultados proporcionan las densidades de corriente de inyección y de conducción adimensionalizadas ($j_i = J_i/J_{SCL}$, $j_c = J_c/J_{SCL}$ con $J_{SCL} = 9\epsilon KV^2/8d^3$) en función de los parámetros C_i ($q_i d^2/\epsilon V$) y C_0 ($\sigma d^2/2\epsilon KV$). Si $C_0 < 1/2$ la corriente de conducción es despreciable y, en ese caso, hemos tomado la corriente total como corriente de inyección. El nivel de inyección C_i puede ser entonces obtenido de $J_i = C_i \epsilon KV^2/d^3$.

Si $C_i > 1/2$ procedemos de la siguiente forma: a partir de la conductividad σ obtenemos C_0 . De las curvas adimensionales de Denat obtenemos el valor de j_c . Sustrayendo j_c a la corriente total adimensionalizada obtenemos j_i . Los valores de j_i y C_0 proporcionan, de nuevo sobre las curvas de Denat el valor de C_i (y, por tanto, q_i).

Aunque los cálculos de Denat son válidos sólo bajo condiciones hidrostáticas, son una buena aproximación en nuestro caso. Ello se debe a que en inyección débil el movimiento del líquido no influye apreciablemente sobre el transporte de carga, ya que la corriente está limitada por el ritmo al cual el electrodo produce iones y que es independiente del estado dinámico del sistema. Así, la carga transportada es casi la misma con o sin movimiento.

Apéndice D

Obtención del perfil de temperatura

La base teórica de la determinación de la distribución de temperatura en el interior del líquido a partir de las franjas de interferencia obtenidas con la lámina plano-paralela queda explicada en la sección 5.4). En este apéndice vamos a detallar el cálculo en sus aspectos prácticos. Consideremos para ello la fotografía 1 y tracemos una línea perpendicular a ambos electrodos (regiones totalmente ennegrecidas) a 30 mm, medidos sobre la foto, a la izquierda de la lámina (pico en negro en la parte superior). Vamos a determinar el perfil de temperatura sobre esta línea. A partir de 5.28 se tiene:

$$|f(z_i) - f(z_{i-1})| = \frac{\lambda}{L\gamma} \quad (D.1)$$

donde $f(z) = T(z) - T(z - \Delta z)$. Como es $\gamma = 4.58 \times 10^{-4} K^{-1}$, $\lambda = 6.33 \times 10^{-7} m$, y $L = 5 \times 10^{-2}$, se tiene que $|f(z_i) - f(z_{i-1})| = 2.65 \times 10^{-2} K$.

Contando a partir de la parte superior de la foto, las franjas se encuentran a las siguientes distancias en mm (tomadas sobre la foto): 7, 10, 13.5, 17, 19, 21, 22.5, 25, 27.5, 32, 58, 62, 64.5, 67.5, 70.5. Llamaremos η a la coordenada horizontal sobre la foto, con origen en la parte superior y creciente hacia abajo. El electrodo inferior se encuentra a $\eta = 71 mm$ y, en la realidad, la distancia entre ambos es 18 mm. luego el factor de escala es $71/18 = 3.94$. Como es $\Delta z = 2 \text{ensen}^2 \theta / \cos \theta = 1.5 mm$, sobre la foto corresponde a $\Delta \eta = 5.96 mm$.

Con todo ello, la determinación de $f(\eta)$ sólo requiere dos hipótesis: que $f(\eta)$ es siempre positiva (la temperatura crece monótonamente del electrodo superior al inferior) y que la zona central es isoterma, o, dicho de otra forma, que entre $\eta_{10} = 32 mm$ y $\eta_{11} = 58 mm$ es $f(\eta) = 0$.

Se tiene entonces:

$$f(\eta_i) = 0.0265(i - 1) \quad i > 11 \quad (\text{D.2})$$

$$f(\eta_i) = 0.0265(10 - i) \quad i < 10 \quad (\text{D.3})$$

Para obtener $T(\eta)$ basta hacer $T(\eta) = f(\eta) + T(\eta - \Delta\eta)$ habiendo fijado antes alguna referencia. Por ejemplo, si tomamos el cero de temperaturas en el centro, partiendo de $\eta_{11} = 58\text{mm}$ y tomando $T(\eta_{11}) = 0$ obtenemos T en los puntos sucesivos $\eta_{11} + \Delta\eta$, $\eta_{11} + 2\Delta\eta$, etcétera, que corresponden a $\eta \simeq 58, 64, 70, \dots$. Igualmente, partiendo de $\eta_{10} = 32$ se obtiene T en los puntos $\eta_{10} - \Delta\eta$, $\eta_{10} - 2\Delta\eta$, etcétera, que corresponden a $\eta \simeq 32, 26, 20, \dots$. Puesto que $f(\eta)$ lo conocemos sólo en los puntos η_i correspondientes a las franjas, hace falta interpolar para obtener los valores de f en los puntos en los que vamos obteniendo la temperatura. En la figura D.1 se ilustra el proceso y se muestran tanto f como T en función de η .

Por último, los perfiles en la escala real z se obtienen reescalando los obtenidos en función de η . En este ejemplo basta hacer $z = 18(71 - \eta)/71$ para obtener el perfil $T(z)$ tal como está presentado en la figura 5.13.

La determinación, así realizada, de los perfiles de temperatura está sujeta a muchas fuentes de error, algunas de ellas difícilmente cuantificables. Revisaremos a continuación algunas de ellas:

- La primera de las fuentes de error es la distorsión con la que la celda aparece en la fotografía. Esta distorsión está causada porque la no uniformidad del índice de refracción dentro de la celda curva los rayos. Esta curvatura de los rayos que es aprovechada precisamente en los dos métodos de visualización utilizados y descritos en la sección 5.3 resulta nociva en los métodos interferométricos. La mejor forma de evitar el efecto de la curvatura de los rayos es la de situar la lámina planoparalela tan cerca de la salida de la celda como sea posible. En nuestro caso el problema principal es que, durante la realización de los experimentos, el electrodo superior está a alta tensión, lo que imposibilita acercarse a la lámina y el aparato de fotografía todo lo que se quiera, ya que se pueden producir descargas del electrodo a la cámara e, incluso, algún accidente al manipular ésta. El efecto fundamental de la distorsión es que la escala sobre la foto no es uniforme. Ello introduce un error en las distancias que, en las fotos analizadas, podemos situar en torno al 4%.

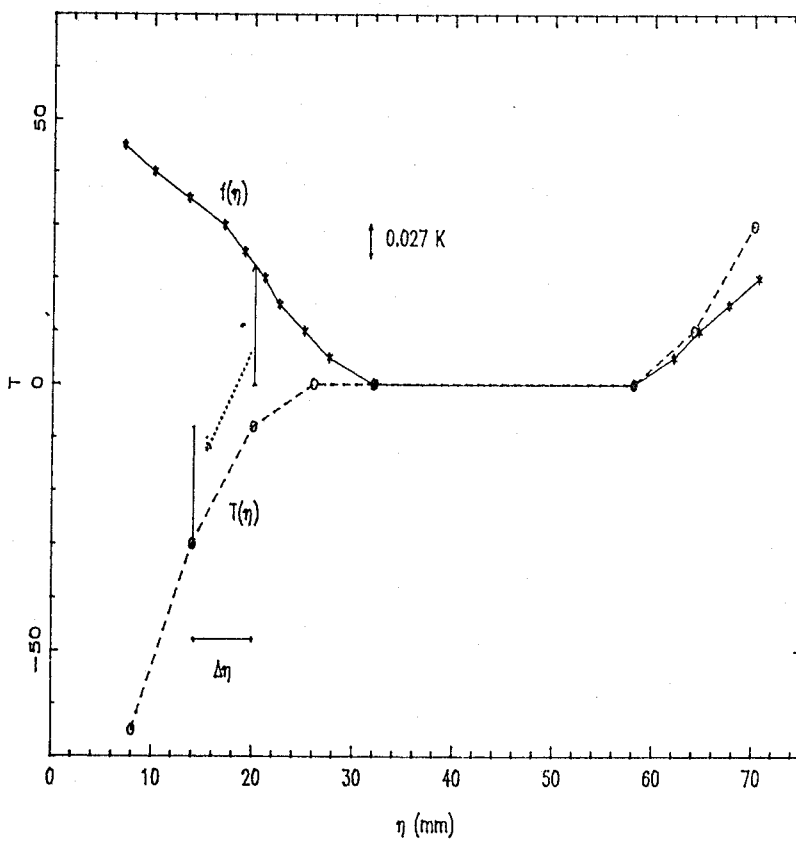


Figura D.1: Obtención del perfil de temperatura.

- La segunda fuente de error viene de la determinación del valor de Δz , la distancia entre los rayos que interfieren. Este error proviene, fundamentalmente del ángulo de inclinación de la lámina. Lo estimamos en torno a un 12 %.
- Una fuente de error de difícil cuantificación es la que proviene de la falta de paralelismo del haz incidente. Aunque se ha usado un haz láser ha sido necesario utilizar un ensanchador del haz formado por dos lentes convergentes, debido a su pequeño diámetro inicial. Si un haz paralelo incide sobre una lámina inclinada cuyas dos caras no son perfectamente paralelas, se obtienen franjas de interferencia de igual inclinación. Igual ocurre si un haz no paralelo incide sobre una lámina cuyas dos caras son perfectamente paralelas. El ajuste óptico ha sido realizado utilizando el principio de que, con la lámina plano-paralela situada a la salida del haz del ensanchador, se obtuviera el número mínimo de franjas posibles. Normalmente hemos conseguido obtener un solo máximo con una sola franja negra en los bordes del haz. Dado que la lámina tiene, según especificaciones de fábrica, una divergencia menor que λ (esto es que la diferencia máxima de la distancia entre las dos caras de la lámina es menor que $\lambda \sim 6000\text{\AA}$) este ajuste lo hemos considerado como prueba del paralelismo del haz.
- La medida de las distancias sobre la foto se ha realizado con una regla convencional, es decir, con una precisión de medio milímetro.
- Por último, y dado el valor de γ , sólo se pueden medir diferencias de temperatura superiores a 0.0265 K.

Todo lo dicho nos lleva a la conclusión de que los perfiles están determinados con un error bastante importante, del orden del 30% incluso, para algunos puntos.

Bibliografía

- [1] W. F. Pickard. *Progress in Dielectrics*. Vol. 6, 1 (1965)
- [2] J. O'M. Bockris, A. K. N. Reddy. *Electroquímica moderna*. Editorial Reverté (1978)
- [3] J. J. Thomson, G. P. Thomson. *Conduction of electricity through gases*. Cambridge Univ. Press (1928)
- [4] L. Onsager. Deviations from Ohm's law in weak electrolytes. *J. Chem. Phys.* Vol. 2, 599-615 (1934)
- [5] A. Denat, B. Gosse, J. P. Gosse. Ion injections in hydrocarbons. *J. Electrostatics*. Vol. 7, 220-225 (1979)
- [6] A. Denat, B. Gosse, J. P. Gosse. Highfield DC and AC conductivity of electrolyte solutions in hydrocarbons. *J. Electrostatics*. Vol. 11, 179 (1982)
- [7] A. Denat. Etude de la conduction électrique dans les solvants non polaires. Tesis de estado. Grenoble 1982.
- [8] N. J. Felici, R. E. Tobazeon. Charge carrier elimination and production by electroalytic polymers in contact with dielectric liquids. *J. of Electrostatics*. Vol. 11, 135-161 (1981)
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Electrodinámica de los medios continuos*. Ed. Reverté (1966)
- [10] N. Félici. Phénomènes hydro-et aérodynamiques dans la conduction des diélectriques fluides. *Rev. Gén. Electr.* Vol. 78, 717-734 (1969)

- [11] S. Oliveri, P. Atten, A. Castellanos. The stability of a planar layer of insulating liquid subjected to charge injection and rotation. *Phys. Fluids*. Vol. 30(7), 1948-1954 (1987)
- [12] A. Many, S. Z. Weisz, M. Simhony. Space-Charge-Limited currents in iodine single crystals. *Phys. Rev.* Vol. 126-6, 1989-1995 (1962)
- [13] W. Shockley, R. C. Prim. Space-Charge-Limited emission in semiconductors. *Phys. Rev.* Vol. 90, 753-758 (1953)
- [14] P. Atten, R. Moreau. Stabilité électrohydrodynamique des liquides isolants soumis à une injection unipolaire. *J. Mécanique*. Vol. 11, 471-520 (1972)
- [15] J. M. Schneider, P. K. Watson, H. R. Till. Electrohydrodynamic stability of space charged limited currents in dielectric liquids. *Phys. Fluids*. Vol. 13, 1948-1965 (1970)
- [16] J. Filippini, J. P. Gosse, J. C. Lacroix, R. Tobazeon. Mise en oeuvre et application de la strioscopie à l'étude des phénomènes électrohydrodynamiques dans les liquides diélectriques. *C. R. Acad. Sc. Paris*. Vol. 269, 167 (1969)
- [17] P. Atten, J. C. Lacroix. Non-Linear hydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection. *Journal de Mécanique*. Vol. 18(3), 469-511 (1979)
- [18] P. Atten. Rôle de la diffusion dans le problème de la stabilité hydrodynamique d'un liquide soumis à une injection unipolaire forte. *C. R. Acad. Sc. Paris*. Vol. 283 B (1976)
- [19] P. Atten. Comunicación privada
- [20] P. G. Drazin, W. H. Reid. Hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press. (1981)
- [21] B. Malraison, P. Atten. Chaotic behaviour of instability due to unipolar injection in dielectric liquids. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 49, 723 (1982)

- [22] P. Atten, J. C. Lacroix, B. Malraison. Chaotic motion in a Coulomb force driven instability: large aspect ratio experiments. *Phys. Lett.* Vol. 79 A, 255 (1980)
- [23] S. V. Patankar. Numerical Heat Transfer. McGraw-Hill (1980)
- [24] R. Peyret, T. D. Taylor. Computational methods for fluid flow. Springer-Verlag. New York (1983)
- [25] P. J. Roache. Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers. Albuquerque (1972)
- [26] E. Isaacson, H. B. Keller. Analysis of numerical methods. John Wiley. New York (1966)
- [27] R. Schreiber, H. B. Keller. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comp. Phys.* Vol. 49, 310-333 (1983)
- [28] D. Greenspan. Discret numerical methods in physics and engineering. Academic Press. New York (1974)
- [29] J. P. Boris, D. L. Book. Flux corrected transport I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comp. Phys.* Vol. 11, 38-69 (1973)
- [30] D. L. Book, J. P. Boris, K. Hain. Flux corrected transport II. Generalizations of the method. *J. Comp. Phys.* Vol. 18, 248-283 (1975)
- [31] J. P. Boris, D. L. Book. Flux corrected transport III. Minimal-error FCT algorithms. *J. Comp. Phys.* Vol. 20, 397-431 (1976)
- [32] P. Steinle, R. Morrow. An implicit flux corrected transport algorithm. *J. Comp. Phys.* Vol. 80, 61-71 (1989)
- [33] E. E. Kunhardt, C. Wu. Towards a more accurate flux corrected transport algorithm. *J. Comp. Phys.* Vol. 68, 127-150 (1987)
- [34] B. E. McDonald, J. Ambrosiano. High-order upwind flux correction methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* Vol. 56, 448-460 (1984)

- [35] G. Patnaik, R. H. Guirguis, J. P. Boris, E. S. Oran. A barely implicit correction for flux corrected transport. *J. Comp. Phys.* Vol. 71, 1-20 (1987)
- [36] S. T. Zalesak. Fully multidimensional flux corrected transport algorithm for fluids. *J. Comp. Phys.* Vol. 31, 335-362 (1979)
- [37] A. Castellanos, P. Atten. Numerical modeling of finite amplitude convection of liquids subjected to unipolar injection. *IEEE-IAS Transact.* IA-23, 825-830 (1987)
- [38] A. Antoniou. Digital filters analysis and design. McGraw-Hill. New Delhi (1979)
- [39] E. O. Brigham. The fast Fourier transform. Prentice-Hall. New Jersey.
- [40] G. Whitman. Linear and non-linear waves. John Wiley. New York (1974)
- [41] G. K. Batchelor. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.* Vol. I, 177-191 (1956)
- [42] J. Guckenheimer, P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag. New York (1983)
- [43] S. N. Chow, J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag. New York (1982)
- [44] J. Kevorkian, J. D. Cole. Perturbation methods in applied mathematics. Springer-Verlag. New York (1981)
- [45] F. H. Busse. Non-linear properties of thermal convection. *em Rep. Prog. Phys.* Vol. 41, 1930-1967 (1978)
- [46] B. Castaing, G. Gunaratue, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X. Z. Wu, S. Zaleski, G. Zanetti. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Benard convection.
- [47] H. Senftleben, W. Braun. Der Einfluss elektrischer auf den warmestram in gasen. *Z. Phys.* Vol. 102, 480-500 (1936)

- [48] G. Ahsmann, R. Kronig. The influence of electric fields on the convective heat transfer in liquids. *Appl. Sci. Res.* Vol. A2, 235-244 (1950)
- [49] T. B. Jones. Electrohydrodynamically enhanced heat transfer in liquids - A review. *Adv. Heat Transf.* Vol. 14, 107-148 (1978)
- [50] M. E. Franke. Effect of vortices induced by corona discharge on free convection heat transfer from a vertical plate. *em Trans. ASMEC J. Heat Transfer.* Vol. 91, 427-433 (1969)
- [51] B. R. Lazarenko, P. Grosuf, M. K. Bologa. Convective heat transfer enhancement by electric fields. *Int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 18, 1433-1441 (1975)
- [52] J. L. Fernández, R. Poulter. Radial mass flow in electrohydrodynamically-enhanced forced heat transfer in tubes. *Int. J. Heat Mass Transfer.*
- [53] A. T. Pérez, P. Atten, B. Malraison, L. Elouadie, F. M. J. McCluskey. Heat transfer augmentation induced by electrically generated convection in liquids *en* Experimental heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics. Editado por R. Shah, E. N. Ganić y K. T. Yang. Elsevier. Dubrovnik (1988)
- [54] J. F. Hoburg, J. R. Melcher. Internal electrohydrodynamic instability and mixing of fluids with orthogonal field and conductivity gradients. *J. Fluid Mech.* Vol.73, 333-351 (1976)
- [55] M. K. Bologa, V. V. Pushkov, A. B. Berkov. Electric field induced heat transfer enhancement in a gas-solid suspension heat exchanger. *Int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 28, 1245-1255 (1985)
- [56] S. Chandrashekar. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford (1961)
- [57] B. C. Kuo. Automatic control system. Prentice-Hall Internat. INC. New Jersey (1987)
- [58] R. J. Goldstein. Fluid Mechanics Measurements. Hemisphere Publishing Co. Washington (1983)

- [59] P. Bergé, M. Dubois. Study of unsteady convection through simultaneous velocity and interferometric measurements. em *Journal de Physique-Lettres* Vol. 19L, 505-509 (1979)
- [60] M. Haidara. Etude de la conduction des liquides diélectriques en champ divergent. Thèse. Grenoble (1984)
- [61] P. Atten, M. Haidara. Electrical conduction and EHD motion of dielectric liquids in a knife-plane electrode assembly. *IEEE Trans. Elec. Insul.* Vol. EI-20,2, 187-197 (1985)
- [62] J. C. Lacroix, P. Atten, E. J. Hopfinger. Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection. *J. Fluid Mech.* Vol. 69, 3, 539-563 (1975)
- [63] R. H. Kraichnan. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids.* Vol. 5, 1374-1389 (1962)
- [64] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics.* Van Nostrand Reinhold (1977)
- [65] F. M. J. McCluskey. Comunicación privada.
- [66] A. Castellanos. Comunicación privada.
- [67] Y. Jaluria. *Natural convection heat and mass transfer.* Pergamon Press (1980)
- [68] J. S. Turner. *Buoyancy effects in fluids.* Cambridge University Press (1973)
- [69] A. C. Lahjomri. Simulation électrohydrodynamique du fonctionnement aérodynamique des précipitateurs électrostatiques. Tesis doctoral. Grenoble (1987)
- [70] F. M. J. McCluskey, P. Atten. Velocity profiles in the injection zone of an EHD generator and efficiency considerations. *IEEE Trans. Elect. Insul.* Vol. EI-20, 2, 405-412 (1985)
- [71] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products.* Academic Press. London (1965)



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. Alberto Tomás Pérez Izquierdo
Contribución al estudio de la electrohidratación
convección inducida por inyección unipolar en presencia o no de
gradiente térmico

acordó otorgarle la calificación de APTO cum laude

Sevilla, 17 de octubre 1989

El Vocal,

P. ATTEN
El Presidente

El Vocal,
A.T. Richardson
A.T. RICHARDSON
El Secretario,

J. Fdez de la Haza

El Vocal,

A. Barroso
El Doctorado,

Juan R. Sammartín
Juan R. Sammartín