Análisis de las componentes de la demanda de seguro. Aplicación al seguro del automóvil

María del Carmen Melgar Hiraldo

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Economía Aplicada III

Análisis de las componentes de la demanda de seguro. Aplicación al seguro del automóvil

Tesis Doctoral realizada por Dña. María del Carmen Melgar Hiraldo y dirigida por la Doctora Dña. Flor María Guerrero Casas.

Sevilla, noviembre de 2003

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Directora Dña. Flor María Guerrero Casas, por su inestimable ayuda y dedicación en la realización de esta Tesis, así como a D. José Vallés Ferrer, Tutor de la misma, por su plena colaboración.

De igual modo, deseo manifestar mi gratitud a mis compañeros del Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía y Empresa de la Universidad Pablo de Olavide y al Departamento de Economía Aplicada III de la Universidad de Sevilla, por su estímulo y apoyo.

Asimismo, he de hacer referencia a la entidad aseguradora Previsión Española S.A.; en especial, a su Director General D. Íñigo Soto García-Junco y a D. Miguel P. Andreu O´Sullivan, Director del Ramo de Automóviles, y D. Manuel Catalina Serres, miembro del Comité de Dirección del Área Técnica de Responsabilidades Civil y Patrimoniales, por la total disposición mostrada a la hora de ceder los datos que se han utilizado en este trabajo y el continuo asesoramiento técnico prestado.

Índice

Introducción

La noción de *seguro* es tan antigua como la propia Humanidad. La defensa del patrimonio humano es inherente a la naturaleza del hombre que siempre ha intentado, no siempre con éxito, defender aquello que es suyo. El temor ante los acontecimientos desafortunados implica la necesidad de prevenirlos de algún modo. Sin embargo, media un abismo entre los primeros modos de entender dicha previsión y la manera actual de practicarla: el concepto de seguro se ha ido perfeccionando a medida que las civilizaciones han ido adquiriendo conocimiento y experiencia.

La búsqueda de la protección tenía en un principio como objetivo fundamental la supervivencia. Las prioridades eran defenderse de las adversidades de la climatología y de las actuaciones contrarias de otros seres, tanto de la propia como de otras especies. La convivencia con otros individuos de la misma especie y con las mismas necesidades era una forma de aunar esfuerzos para defenderse de los peligros externos.

En la Antigua Grecia aparecen las primeras asociaciones cuya principal finalidad era la de ayudar al socio necesitado en caso de enfermedad, defunción o invalidez para el trabajo, a través de un fondo común constituido por aportaciones periódicas de los miembros de la asociación. En Roma, las primeras entidades de este tipo fueron de carácter militar y pagaban a sus asociados indemnizaciones por gastos de viaje cuando eran trasladados de guarnición, retiro cuando llegaban a una edad determinada y cierto capital en caso de muerte en combate a sus herederos. Los artesanos fueron los siguientes en formar sus propias entidades de previsión, con el objeto de pagar a sus adheridos una sepultura y funerales apropiados.

Durante los siglos XIII y XIV, el comercio entre los pueblos de los estados italianos y el resto del Mediterráneo propició el desarrollo de la actividad aseguradora como medio de previsión ante la posible pérdida de las mercancías transportadas. En los primeros seguros marítimos, los aseguradores eran personas individuales que, a cambio de una cantidad pactada, indemnizarían al propietario de la embarcación en caso de pérdida.

Con la llegada del Renacimiento adquiere un gran auge el seguro marítimo en Inglaterra, donde se creó una de las compañías de seguro más importantes del mundo: la "Lloyd's of London".

La Revolución Industrial del siglo XVIII fue el detonante definitivo de la necesidad de asegurarse (la explosión y el incendio de las calderas de vapor eran los riesgos más temidos). Esto junto con la aplicación de principios matemáticos para la determinación de las primas, de los que antes se carecía, propició el nacimiento de la actividad del seguro en la forma en que la entendemos en la actualidad: practicada por entidades especialmente dedicadas a este fin, quienes ejercen su actividad basándose en técnicas más o menos empíricas que implican la observación de las cosas sometidas a garantía para llegar a su valoración.

Hoy día, el seguro ha llegado a convertirse en un importante sector de la economía, tanto a nivel español como internacional, por su volumen de primas, nivel y variedad de la oferta, lo que nos ha llevado a querer profundizar en su conocimiento a través de este trabajo.

Son muchos los puntos de vista desde los que se puede entender esta actividad. Así, mientras algunos autores destacan el principio de solidaridad humana y otros se centran en el principio de contraprestación, existen otras consideraciones desde el aspecto matemático, económico o financiero.

Las compañías aseguradoras pueden verse como instituciones que garantizan un sustitutivo al individuo afectado por un riesgo, mediante el reparto del daño entre un elevado número de personas amenazadas por el mismo peligro. Quienes apuestan por esta definición, apelan al aspecto social de la actividad del seguro y a la solidaridad humana, traducida en la asociación de masas para el apoyo de los intereses individuales.

También puede decirse que el seguro es una operación en virtud de la cual, mediante el pago de una remuneración -la prima-, una parte -el asegurado- se hace acreedor de una prestación que habrá de satisfacer la otra parte -el asegurador- en caso de que se produzca un siniestro. Es ahora el principio de contraprestación el que se destaca por encima de todo.

Algunos matemáticos consideran que la función de los aseguradores es facilitar la transformación de un valor eventual en un valor cierto. Desde el punto de vista económico, algunos ven en el seguro el medio más económico para satisfacer una necesidad eventual.

Una de las definiciones más completas del seguro es la que, desde un punto de vista más general, lo entiende como *una actividad económico-financiera que presta el servicio de transformación de los riesgos de diversa naturaleza a que están sometidos los patrimonios, en un gasto periódico presupuestable, que puede ser soportado fácilmente por una unidad patrimonial* (Guardiola, 2001).

Hay que señalar sin embargo que el seguro supone también otros servicios tan importantes como, por ejemplo, el de constituir una ayuda para el ahorro, particularmente mediante modalidades de seguro de vida, estimulando las inversiones familiares; asistencia técnica, especialmente en los riesgos de naturaleza industrial (protección y prevención de incendios); asistencia médica, clínica, quirúrgica o de rehabilitación funcional (accidentes de trabajo) o de servicio de asistencia judicial (defensa procesal, prestación de fianzas, etc.), especialmente en los riesgos de responsabilidad civil.

De acuerdo con la naturaleza de los riesgos, la clasificación más extendida de los seguros es la que distingue entre *seguros de personas*, *seguros de daños o patrimoniales* y *seguros de prestación de servicios*, aunque estas categorías no son totalmente excluyentes sino que algunas modalidades de seguro incluyen garantías que se ubican en clases distintas.

En este trabajo, nos centraremos fundamentalmente en los seguros de daños o patrimoniales, denominación bajo la que se recogen todos los seguros cuyo fin principal es reparar la pérdida sufrida, a causa de siniestro, en el patrimonio del tomador del seguro. Son esenciales en estos seguros dos hechos: en primer lugar, que el asegurado tenga algún interés directo en que el siniestro no se produzca; y, en segundo lugar, que la indemnización no pueda ser motivo de enriquecimiento para el contratante, sino limitarse a resarcirle del daño concreto y real sufrido en su patrimonio.

Los seguros de daños suelen incluir garantías de dos tipos: las que cubren las pérdidas materiales (conocidas como *seguros de cosas*) y las que garantizan al asegurado contra la responsabilidad civil en que pueda incurrir ante terceros por actos de los que sea responsable (*seguros de responsabilidad*).

Uno de los seguros patrimoniales más extendido entre la población es el seguro del automóvil, al que prestaremos especial atención a lo largo de nuestro estudio. Aunque se suele considerar como un ramo de los seguros de daños, el seguro del automóvil también incluye garantías que podrían clasificarse como *seguros de personas* y *seguros de prestación de servicios*.

La finalidad de este seguro es la prestación de indemnizaciones derivadas de accidentes producidos a consecuencia de la circulación de vehículos a motor. Se cubren tanto los daños materiales, incluyendo los producidos a consecuencia de colisión, incendio o robo del vehículo, como la responsabilidad civil en que pueda incurrir el conductor por los daños causados a terceros o con motivo de una infracción en la conducción, garantías todas ellas propias de un seguro patrimonial. En relación con la responsabilidad civil derivada de accidentes de circulación, es interesante resaltar que ésta suele tener un tratamiento diferenciado frente a la responsabilidad civil en general, por el peso que tiene el seguro del automóvil en el mundo de la actividad aseguradora. Se cubren con esta garantía el pago de las cantidades de las que el asegurado resulte civilmente responsable, de las fianzas que puedan ser exigidas al conductor asegurado y los gastos judiciales causados por la defensa de la responsabilidad civil del asegurado.

En el seguro del automóvil se aprecian otros tipos de coberturas típicas de los seguros de personas. Así, se producen indemnizaciones en caso de accidente que provoque la muerte o invalidez del asegurado o de cualquiera de las personas que viajen en el automóvil, así como la asistencia sanitaria precisa. Esta modalidad del seguro de accidentes, muy extendida, se conoce como *seguro de ocupantes de automóviles*. Destaca también, entre los seguros de accidentes, el *seguro obligatorio de viajeros* que garantiza a éstos las indemnizaciones correspondientes y la asistencia sanitaria que sea necesaria, cuando sufran daños físicos por accidente ocurrido en vehículo de transporte público colectivo.

Algunas garantías de los seguros de prestación de servicios son también frecuentes en el seguro del automóvil. La asistencia en viaje es sin duda la más difundida entre los conductores asegurados. A través de esta cobertura, se presta al asegurado una serie de servicios conducentes a resolver las incidencias de distinta índole que le hayan surgido al propio conductor o a quienes le acompañen durante el viaje.

Como hemos indicado, el contexto en el que se sitúa nuestra investigación es el de los seguros de daños. Los planteamientos que haremos para determinar el seguro óptimo para el consumidor en distintas situaciones son válidos, entre otros, para *seguros de incendio*, cuya finalidad principal es el resarcimiento de los daños sufridos en los objetos asegurados a causa de un fuego, incluyéndose asimismo los gastos que ocasione el salvamento de esos bienes o los daños que se produzcan en los mismos al intentar salvarlos; *seguros agrarios*, que tienen por objeto la cobertura de los riesgos que puedan afectar a las explotaciones agrícolas, ganaderas o forestales; *seguros de robo*, a través de los cuales el asegurador se compromete a indemnizar al asegurado por los daños sufridos a consecuencia de la desaparición, destrucción o deterioro de los objetos asegurados, a causa de robo o tentativa de robo; y *seguros de transporte*, en los que el pago de indemnizaciones es consecuencia de los daños sobrevenidos durante el transporte de mercancías, tanto si afectan al medio de transporte (se llama en este caso *seguro de casco*) como a las mercancías transportadas (*seguro de mercancías*).

Todos estos seguros tienen la característica común de tener como objeto la compensación de un perjuicio económico producido a consecuencia de un siniestro que puede acaecer aleatoriamente. No ocurre lo mismo sin embargo en los seguros de personas, que se caracterizan por ser la persona el "objeto" asegurado y en los que la prestación se hace depender de la existencia, salud o integridad de ésta. Algo similar sucede con los seguros de prestación de servicios, que consisten en que la actuación del asegurador frente al siniestro se traduce, en lugar de en el pago de una cantidad estipulada, en la prestación de un servicio que puede ser de diversa índole: asistencia médica, quirúrgica y hospitalaria, sepelio o repatriación de personas y vehículos, entre otros. El tratamiento de estos tipos de seguro es por tanto distinto al de los seguros de daños y no serán objeto de nuestro estudio.

Basándonos en el principio de contraprestación, consideraremos que la actividad aseguradora es una operación según la cual la parte contratante recibirá, a cambio del pago de una prima, una prestación por parte del asegurador, en caso de tener lugar el siniestro asegurado. Se busca con ello que se produzca una compensación de los riesgos.

La prima que debería pagar cada asegurado para que la compañía aseguradora cubriera el desembolso total realizado en concepto de indemnizaciones por los siniestros acontecidos se conoce como prima pura y representa el coste real del riesgo asumido por el asegurador, debiendo coincidir por tanto con el desembolso medio teórico que la compañía hace hacia cada asegurado.

Generalmente, la prima pura se ve incrementada por el cobro de gastos de administración (incluyen el cobro de primas, la tramitación de los siniestros, los haberes del personal de la empresa, etc.); gastos de producción (comisiones de agentes, principalmente); gastos de redistribución de riesgos (técnicas mediante las cuales las aseguradoras dispersan los riesgos para mantener un equilibrio y no verse afectadas por el pago de indemnizaciones superiores a los límites que podría soportar su capacidad económica; las más comunes son el reaseguro y el coaseguro); recargo comercial (para obtener un beneficio lógico por el capital que arriesga la empresa aseguradora y el trabajo que desarrolla) y otros gastos accesorios o fiscales.

Objetivos del estudio

Los principales objetivos del estudio que vamos a llevar a cabo son profundizar en el análisis teórico de la demanda de seguro y determinar, a partir de datos del seguro del automóvil, las variables que resulten significativas en la estimación del número de siniestros que sufren los asegurados.

Para contribuir a la consecución de estas metas, el trabajo que desarrollamos en los capítulos siguientes aborda, de forma más concreta y detallada, las siguientes tareas:

- Hacer una recopilación de los aspectos relativos a la actitud que adoptan los asegurados ante el riesgo y que se usarán en el estudio posterior, caracterizarlos en términos de la función de utilidad que representa las preferencias del individuo y demostrar las relaciones entre los distintos conceptos definidos así como sus propiedades más interesantes.
- Estudiar si el teorema de Mossin se sigue verificando al modificar las hipótesis

iniciales. Según dicho teorema (Mossin, 1968), considerado una de las aportaciones más importantes a la Teoría de la Demanda de Seguro, cuando el asegurado está expuesto a un único riesgo de siniestro cuya ocurrencia daría lugar a una pérdida concreta, la cobertura completa es óptima siempre que el asegurado tenga aversión al riesgo y la prima del seguro no lleve ningún recargo. Cuando la tasa de recargo es positiva, lo óptimo pasa a ser una cobertura parcial.

- Llevar a cabo un análisis de sensibilidad de la cobertura óptima obtenida en las situaciones analizadas en el punto anterior, con respecto a factores como la riqueza inicial del asegurado, la tasa de recargo de la prima y la aversión al riesgo.
- Estudiar la validez del importante resultado de Arrow (1963) acerca de la optimalidad del seguro con franquicia cuando se relaja la restricción de no negatividad de la indemnización y cuando se buscan contratos de seguro óptimos de Pareto.
- Analizar la repercusión en la indemnización óptima de la existencia de problemas de selección adversa entre asegurado y asegurador, tanto en un mercado competitivo como en un monopolio y con contratos de uno o varios periodos de duración.
- Determinar los tipos de seguros a los que dan lugar los problemas de riesgo moral.
- Comprobar, a partir de datos del seguro del automóvil y usando los modelos econométricos adecuados, si se cumplen las previsiones teóricas acerca de la cobertura adecuada para cada individuo según su tipo de riesgo.
- Determinar, a través de dichos modelos, las variables significativas en la estimación del número de siniestros que sufren los automovilistas.

Estructura del trabajo

El trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos, completados con esta introducción, las conclusiones finales que se deducen del estudio realizado y una selección de la bibliografía utilizada en la elaboración del mismo.

En el Capítulo 1 se presentan el criterio de elección según el cual los clientes se decantan por la compra de una determinada póliza de seguro y las posibles actitudes del consumidor ante el riesgo.

La metodología que adoptaremos será principalmente el enfoque tradicional en los estudios teóricos a este respecto, según el cual se suponen ordenadas las preferencias de un individuo en función de la utilidad que le aporta cada situación, con lo que el objetivo será la elección de aquella situación, entre todas las posibles, que dé lugar a la utilidad más elevada. A través de la función considerada, se podrá caracterizar la actitud hacia el riesgo de los individuos. Lo habitual es que las personas que temen sufrir pérdidas inciertas sean las que se aseguren. La disponibilidad a renunciar a una cantidad de dinero a cambio de sustituir el riesgo al que se está expuesto por el valor medio del daño esperado es lo que se conoce como aversión al riesgo. Los conceptos de prima de riesgo y de precaución nos permitirán definir la aversión al riesgo y la prudencia, actitudes que se observan fundamentales para el desarrollo de la actividad aseguradora.

Cuando no se conoce la función de utilidad, se hace necesario buscar otra ordenación de los sucesos aleatorios a los que está expuesto el posible asegurado para determinar así su preferencia. La dominancia estocástica entre las distribuciones de probabilidad de las variables que representan dichos sucesos es el método usado en este caso. Se demostrará que este planteamiento y el de la maximización de la utilidad que el cliente espera alcanzar son coherentes, de modo que coincide el criterio de elección cuando ambos pueden utilizarse.

La información que asegurado y asegurador tienen sobre la situación es de vital importancia para la obtención del seguro óptimo. Concretamente, distinguimos aquellas situaciones en las que la información es simétrica entre ambos (Capítulo 2) de aquellas otras en las que surgen problemas de información que dificultan la relación (Capítulo 3).

Los modelos clásicos de Mossin (1968) y Arrow (1963) propiciaron el desarrollo de la Teoría de la Demanda de Seguro para el caso de información simétrica. Encuadrados ambos en el marco de la utilidad esperada, discuten la optimalidad de coberturas totales o parciales y la optimalidad de las franquicias, respectivamente, según las primas fijadas sean puras o recargadas.

El Capítulo 2 se inicia con el estudio de la generalización de los resultados de

Mossin, basados en siniestros que darían lugar a una única pérdida de cuantía fija, a situaciones más complejas con pérdidas de cuantía variable, tanto si la indemnización que proporciona el asegurador es de tipo coaseguro (el asegurador solo paga una parte proporcional de la pérdida, corriendo el resto por cuenta del asegurado) como si se trata de una franquicia (el asegurado sufre la totalidad de la pérdida producida si su valor no alcanza la franquicia, mientras que el asegurador le indemnizará con una cantidad igual a lo que la pérdida sobrepasa la franquicia, si es el caso).

En cada una de las situaciones planteadas, se analiza la optimalidad de la cobertura completa y los efectos que tienen sobre la indemnización óptima algunas de las características del asegurado, principalmente su riqueza inicial y su aversión al riesgo.

Se aborda también en el mismo capítulo el estudio de situaciones en las que el individuo, además de estar sometido al riesgo de siniestro contra el que está asegurado, puede verse afectado por otras circunstancias aleatorias que, estando o no directamente relacionados con el daño asegurado, pueden influir en la elección de la cobertura. La posibilidad de impago de la indemnización por parte del asegurador, si llega el caso, es uno de los casos tratados. De nuevo se discute la optimalidad de la cobertura completa comparando el resultado obtenido con las situaciones anteriores.

El capítulo sigue con la búsqueda de condiciones suficientes para que sigan cumpliéndose los resultados demostrados por Arrow relativos a la optimalidad de las indemnizaciones con franquicias, en el caso en que la restricción de no negatividad que se impone generalmente sobre la cobertura se relaja.

Finalmente, teniendo en cuenta las preferencias del asegurador además de las del asegurado, se determinan los contratos óptimos en el sentido de Pareto y se deduce el resultado de Arrow como caso particular.

En el Capítulo 3, se estudia la demanda de seguro cuando asegurado y asegurador no disponen de la misma información sobre ciertas características importantes para la relación entre ambos.

Lo ideal sería que el asegurador pudiera distinguir entre sus clientes quién tiene una elevada probabilidad de siniestro y quién la tiene más baja, así como que el comportamiento del asegurado fuera visible en todo momento para el asegurador, evitándose de este modo la posibilidad de comportamientos indeseados que pudieran influir negativamente en la relación contractual.

Desafortunadamente, esto rara vez ocurre de esta manera y la información relativa a la actividad del seguro no es siempre perfecta. Suelen aparecer problemas de asimetría de información entre ambas partes que conllevan una dificultad a la hora de calcular la cobertura adecuada y su precio. Son dos los problemas a los que nos referimos: la selección adversa y el riesgo moral. El primero se da cuando, antes de la firma del contrato, el asegurado dispone de más información que el asegurador (generalmente sobre características del propio asegurado que influyen en la probabilidad de sufrir siniestro y por tanto en el seguro óptimo). Por contra, el riesgo moral surge cuando los participantes disponen de la misma información en el momento de establecer la relación, pero, una vez firmado el contrato, el asegurador no puede observar o verificar el comportamiento del asegurado.

Supuesta selección adversa, se estudia cómo afecta la existencia de grupos de individuos con distintas probabilidades de accidente al seguro óptimo para cada uno de ellos, con respecto a las situaciones en las que la información entre ambas partes es totalmente simétrica. Se lleva a cabo un análisis comparativo entre los dos casos para contratos cuya duración es de un periodo únicamente y tanto cuando el mercado del seguro es un monopolio como cuando es competitivo. Ampliamos el estudio con los contratos de larga duración, puesto que suele ser común que la relación contractual entre asegurado y asegurador se prolongue durante varios años.

En lo que se refiere al riesgo moral, determinamos el tipo de cobertura óptima en dos casos. En primer lugar, cuando el asegurado puede llevar a cabo medidas que reduzcan la probabilidad de accidente y que suelen denominarse de *autoprotección*. Nos referimos al segundo caso como de *reducción de daños* ya que se supone entonces que las acciones del asegurado influirán en una disminución de la cuantía de la pérdida consecuencia del siniestro. Estas dos situaciones diferenciadas conducen a distintos tipos de contratos de seguro.

El trabajo se completa con un último capítulo, el Capítulo 4, que, a diferencia de los anteriores, es aplicado. Empleamos en él datos procedentes del ramo del automóvil cedidos por la entidad aseguradora Previsión Española S.A. y su objetivo final es el de señalar los factores relevantes en la estimación de los siniestros que sufren los conductores asegurados en dicha compañía.

Los estudios empíricos que se han desarrollado en los últimos años en este sector, gran parte de ellos en Canadá y Francia, han tenido como objetivo fundamental la verificación de las previsiones teóricas que afirman que, cuando existe asimetría de información, algo habitual por otra parte en el seguro del automóvil, los individuos que sufren más siniestros son los que adquieren coberturas más elevadas.

En nuestro análisis, no solo prestamos atención a este extremo. Realizamos un estudio más completo, determinando todas las variables que resultan ser significativas cuando se estima el número de siniestros.

Otra característica diferenciadora de nuestro trabajo es que usamos en la estimación un modelo *binomial negativo "inflado de ceros"*, mucho más apropiado que los modelos de *Poisson* y/o *binomial negativo* que se suelen aplicar en este tipo de análisis.

Aunque los tres son modelos de tipo recuento o *count data*, adecuados en principio para estimar variables discretas con valores no negativos, el elevado número de ceros que presenta la variable *número de siniestros* desaconseja el empleo del modelo de *Poisson*. En el modelo *binomial negativo*, los valores de la variable dependiente se tratan, al igual que en el de *Poisson*, del mismo modo independientemente de que sean nulos o estrictamente positivos. Sin embargo, no debe ser así en el caso que nos ocupa, puesto que los asegurados que sufren siniestros suelen tener en general un comportamiento más descuidado que los que no los tienen. Estas diferencias cualitativas entre unos y otros justifica que nos decantemos finalmente por el enfoque del modelo *binomial negativo "inflado de ceros"*, que aborda esta nueva perspectiva en los desarrollos más recientes de los modelos *count data*.

A través de las estimaciones realizadas usando el paquete *Limdep v. 7.0*, confirmamos que efectivamente hemos elegido el modelo adecuado y determinamos a partir de él las variables estadísticamente significativas. Los resultados de este estudio econométrico se contrastan con las conclusiones obtenidas del análisis descriptivo de los datos llevado a cabo previamente para conocer algo más detalladamente la población objeto de nuestro estudio.

Capítulo 1
Utilidad y actitud frente al riesgo

Según se ha apuntado en la Introducción, el seguro puede considerarse como una operación mediante la cual una parte (el asegurado) se hace prometer, mediante una remuneración (prima), una prestación de la otra parte (el asegurador) en caso de ocurrir un siniestro, de forma que tenga lugar una compensación de los riesgos. Estudiaremos a lo largo de este trabajo la demanda de seguro óptimo en distintas situaciones, determinando y analizando la prima y la cobertura razonables para cubrir los futuros siniestros según el contrato acordado. Para ello es fundamental estimar con suficiente precisión la carga probable representada por las posibles pérdidas, así como conocer el criterio seguido por un potencial asegurado para decidirse o no por la compra de una póliza de seguro.

Describiremos a lo largo de este capítulo los enfoques más comunes de la relación asegurado-asegurador que nos ayuden a resolver las cuestiones antes planteadas.

Veremos que cuando las preferencias de un individuo pueden ordenarse a través de una función de utilidad, el objetivo es la elección, entre todas las situaciones posibles, de aquélla con la que obtenga la mayor utilidad. Dicha función además nos permite definir y caracterizar la actitud hacia el riesgo a través de las primas de riesgo y de precaución. Lo habitual será que los individuos que plantean comprar un seguro sientan aversión al riesgo y prudencia, conceptos que introduciremos también en este capítulo.

Cuando la función de utilidad no es conocida, la ordenación de los sucesos aleatorios a los que está expuesto un individuo se hará a través de la dominancia estocástica entre las distribuciones de probabilidad de las correspondientes variables. Se demostrará que ambos planteamientos son coherentes, coincidiendo en los casos en que puedan utilizarse los dos.

1.1. El enfoque de la utilidad esperada

Uno de los fundamentos de la actividad aseguradora, como se ha señalado, es el reparto del riesgo. De este hecho se deduce que si una compañía recibe de cada asegurado una prima igual al gasto medio que le supone a aquélla cada asegurado, esto cubriría, en total, las indemnizaciones dadas por el asegurador a los asegurados.

La Ley de los Grandes Números nos permite calcular y determinar las primas que deben aplicarse para la cobertura de riesgos, a través de la evaluación del coste medio asociado al conjunto de desembolsos futuros de la compañía. Esta ley establece que los fenómenos aleatorios que circunstancialmente se producen o manifiestan al examinar continuadamente un mismo acontecimiento, decrecen en su irregularidad hasta adquirir un valor constante a medida que aumenta el número de veces en que la observación es realizada o se extiende el conjunto de individuos al que se aplica dicha observación.

Así, si el número de asegurados es N y cada uno de ellos está sometido a un riesgo de siniestro que, en caso de ocurrir, supondrá una pérdida que denotamos a través de la variable aleatoria X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, entonces $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$ representa justamente el desembolso medio de la compañía hacia cada individuo, lo que estamos considerando como prima pura de la relación. Si el número de asegurados es elevado, esta prima pura coincidirá, casi seguro, con $E[X_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Este importante mecanismo del seguro, la compensación de riesgos, funciona siempre que no nos apartemos demasiado de las condiciones de validez de la Ley de los Grandes Números: los riesgos deben ser numerosos, homogéneos e independientes. Si los riesgos no son homogéneos, por ejemplo, será necesario que la compañía aseguradora disponga de la suficiente información estadística para poder clasificarlos en subgrupos relativamente homogéneos y poder establecer así primas diferenciadas para los distintos subgrupos de riesgo.

Cuando no se cumplen las hipótesis mencionadas, el criterio del valor probable para evaluar el coste asociado a pérdidas aleatorias no es suficiente. Una de las ilustraciones más famosas de la insuficiencia del criterio de la esperanza matemática es la *Paradoja de San Petersburgo*.

En su planteamiento más conocido, se trata de determinar el precio máximo que un individuo racional estaría dispuesto a pagar para participar en el siguiente juego:

Se lanza una moneda sucesivamente al aire, hasta que salga *cruz*; el jugador recibe entonces 2^N unidades monetarias, siendo N el número de veces que se ha debido lanzar la moneda.

La esperanza matemática de la ganancia y, por tanto, la cantidad que el individuo debería estar dispuesto a pagar por participar en el juego sería la suma $\sum_{N=1}^{+\infty} 2^N \left(\frac{1}{2}\right)^N$, cuyo valor es $+\infty$, ya que para obtener 2^N unidades monetarias deben obtenerse $N-1$ caras y 1 cruz en el N-ésimo lanzamiento, lo que se tiene con probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)^N$. El resultado obtenido es totalmente irreal: ningún individuo racional pagaría una cantidad infinita por participar en un juego que le daría una ganancia finita.

Han sido múltiples las soluciones propuestas con objeto de intentar resolver esta paradoja. Destacamos a continuación algunas de las más importantes:

La solución propuesta por Poisson y Condorcet consiste en introducir como restricción la riqueza del organizador del juego, lo que supondría una cota superior para la ganancia máxima que se puede obtener en el juego. Si la riqueza del organizador es R, se podrá ganar entonces con el juego:

$$\begin{cases} 2^N & \text{si } 2^N \leq R \\ R & \text{si } 2^N > R \end{cases}$$

con lo que si $M = \text{máx}\{N \in \mathbb{N} \mid 2^N \leq R\}$, el precio que un individuo racional estaría dispuesto a pagar por participar en esta lotería sería

$$\sum_{N=1}^{M} 2^N \left(\frac{1}{2}\right)^N + \sum_{N=M+1}^{+\infty} R \left(\frac{1}{2}\right)^N = M + R(1/2)^M.$$

Puesto que, por definición de M, se cumple que $2^M \leq R$ y $2^{M+1} > R$, el precio del juego estaría acotado superiormente por $log_2 R + 2$, que es ya una cantidad finita.

Una segunda solución propuesta a la Paradoja de San Petersburgo se debe a Buffon y consiste en considerar imposibles todos los acontecimientos cuyas probabilidades sean inferiores a una cantidad fijada K. Puesto que la probabilidad de que ocurra cada suceso es $\left(\frac{1}{2}\right)^N$, siendo N el número de veces que se lanza la moneda hasta conseguir que salga *cruz*, el suceso será imposible siempre que $\left(\frac{1}{2}\right)^N < K$, es decir $N > log_2 \frac{1}{K}$. Con esto, el precio del juego queda determinado por la elección de esa cantidad arbitraria.

Una tercera solución a la paradoja es la conocida como *Principio de Bernoulli.* Bernoulli afirma que la utilidad marginal de los individuos hacia el dinero es decreciente, y que evalúan el juego a través de la utilidad esperada de las posibles consecuencias del mismo. De entre distintas situaciones arriesgadas, Bernoulli supone que un agente económico elegirá aquélla que maximice la esperanza matemática de una cierta función de utilidad de la riqueza. Propuso en primer lugar una función logarítmica. Así, el precio que se obtiene para el juego es una cantidad más razonable:

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{2^N} \, log\, 2^N = log\, 4.$$

Aunque esta idea no resuelve por sí sola la Paradoja de San Petersburgo (ya que, en el caso de que la función de utilidad considerada no estuviese acotada, se llegaría de nuevo a precios ilimitados por participar en el juego), es cierto sin embargo que esta primera aproximación supuso un paso importante para llegar a la solución del problema. Aceptado el Principio de Bernoulli, se trata ahora de encontrar la función de utilidad adecuada para cada caso que se plantee.

La justificación axiomática de este principio fue hecha en 1944 por von Neumann y Morgenstern, motivo por el que dichas funciones de utilidad se suelen denominar de von Neumann-Morgenstern.

Si se pudieran prever las consecuencias de las decisiones, éstas se tomarían basándose en las preferencias respecto a consecuencias ciertas. Sin embargo en la práctica no se dispone de esas previsiones sino que, a lo más, se pueden ordenar las decisiones con relación a la incertidumbre asociada a las expectativas futuras. Para ello, es preciso disponer de una teoría que establezca criterios de elección que permitan tener en cuenta el riesgo y ello implica establecer un conjunto de axiomas de comportamiento de los decisores que caractericen sus actitudes frente a recursos aleatorios. Basándose en esto, se podrán desarrollar modelos explicativos del comportamiento de los agentes económicos.

Supondremos que todos los individuos toman siempre decisiones completamente racionales y que son capaces de hacerlo entre un gran número de alternativas. Si añadimos la hipótesis de que los decisores prefieren *tener más que menos*, denominada por algunos autores como *axioma de no-saciedad*, se puede fundamentar la utilización de la esperanza matemática de la utilidad o *utilidad esperada* como criterio de elección en un entorno aleatorio.

A partir de la Teoría del Consumidor para el caso de incertidumbre, considerando el conjunto X formado por las posibles situaciones entre las que puede elegir el individuo así como un preorden total y continuo, R, sobre X, se deduce la existencia de una función U definida sobre X y con valores reales que representa a R en el sentido siguiente: $\forall\, x, y \in X,\ x\, R\, y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$. La función U proporciona así las preferencias del individuo entre dos productos a consumir y el problema de elección se reduce por tanto a un problema de maximización para U.

Si la elección de una situación x da lugar a distintos resultados económicos, w_i, cada uno con probabilidad p_i, von Neumann y Morgenstern probaron que U puede expresarse como una función lineal de dichas probabilidades:

$$\forall x \in X,\ U(x) = \sum_i p_i u(w_i).$$

La función u se conoce como función de utilidad de von Neumann-Morgenstern y la expresión anterior no es más que la esperanza de dicha utilidad, por lo que podemos decir que u representa a R en el sentido del principio de Bernoulli. En efecto,

$$\forall\, x,\, y \in X,\ x\, R\, y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow \sum_i p_i u(w_i) \geq \sum_i p'_i u(w'_i) \Leftrightarrow E_p u \geq E_{p'} u$$

siendo w'_i los resultados de la elección y, p'_i las probabilidades con que se dan y $E_p u$ y $E_{p'} u$ los valores esperados de u para los acontecimientos x e y, respectivamente.

El problema se reduce por tanto a la maximización de la utilidad esperada. Según este enfoque, gran parte de los estudios que intentan determinar la prima y la cobertura óptima en diversas situaciones se basan en que el asegurado se asegurará si su utilidad esperada aumenta con ello y que elegirá aquel contrato que maximice su utilidad esperada, teniendo en cuenta las restricciones del problema según el caso planteado. Es decir,

$$\max\ Eu(w) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(w_i)$$

para el caso de una función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuando hay n posibles estados de riqueza w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ que se dan con probabilidades p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectivamente, y

$$\max\ Eu(w) = \int_0^W u(w)dF(w)$$

cuando los estados de riqueza vienen dados por una variable aleatoria continua con valores en $[0, W]$ y función de distribución $F : [0, W] \to [0, 1]$.

El planteamiento de la maximización de la utilidad esperada nos permite además introducir una serie de conceptos que son de extrema importancia para la resolución de nuestro problema y están relacionados con la actitud hacia el riesgo de los individuos: prima de riesgo, aversión al riesgo, prima de precaución y prudencia, fundamentalmente.

Pero no siempre va a ser posible conocer con exactitud la función que representa las utilidades que le aportan a un individuo distintas situaciones. Habrá por tanto que buscar otro método para ordenar sus preferencias.

Abordamos todo esto en los apartados siguientes.

1.2. Aversión al riesgo y prima de riesgo

El axioma de no-saciedad al que hemos hecho referencia en el apartado anterior implica que las funciones de utilidad deben ser estrictamente crecientes, lo que da lugar, cuando hablamos de funciones derivables, a que la utilidad marginal sea siempre positiva $u'(w) > 0$, $\forall\, w$. Esta utilidad marginal será creciente, decreciente o constante, con respecto a los recursos, dependiendo de que la función de utilidad crezca más que proporcionalmente, menos o proporcionalmente, respectivamente. En el primer caso, u es convexa, y por tanto la utilidad marginal es creciente $u''(w) > 0$, $\forall\, w$; en el segundo caso, u es cóncava y la utilidad marginal es decreciente, $u''(w) < 0$, $\forall\, w$; mientras que en el último caso, la función de utilidad será una recta y la utilidad marginal constante, $u''(w) = 0$, $\forall w$. Todo ello, siempre que las funciones con las que tratamos sean al menos de clase dos.

El comportamiento de la utilidad marginal es fundamental a la hora de explicar la actitud frente al riesgo de los individuos, como se verá a lo largo de este apartado, en el que definiremos y caracterizaremos distintos conceptos que serán usados más adelante.

Supongamos que un individuo tiene la posibilidad de tomar distintas decisiones que llevan asociadas una serie de riesgos que modificarían su nivel final de riqueza. Denotaremos u a la función de utilidad del individuo, W a su riqueza inicial y $\tilde{x}$ a una variable aleatoria que indica los distintos estados posibles de ganancias. El individuo tomará una decisión arriesgada siempre que espere que su utilidad aumente con ello, es decir $u(W) < Eu(W + \tilde{x})$. Del hecho de que u es continua y estrictamente creciente, se deduce que existirá un único número real C tal que $u(W + C) = Eu(W + \tilde{x})$. Esta cantidad C se conoce como *equivalente cierto.*

Un individuo racional se arriesgará por tanto a tomar una decisión si se verifica $u(W) < Eu(W + \tilde{x}) = u(W + C)$, que, debido al crecimiento de u, equivale a $W < W + C$, y por tanto el equivalente cierto es una cantidad estrictamente positiva $C > 0$.

A partir del equivalente cierto se puede definir la prima de riesgo:

Definición 1.2.1 *Se llama prima de riesgo a la cantidad* $\pi(W, \tilde{x}) = E\tilde{x} - C$.

La prima de riesgo verifica por tanto que

$$u(W + E\tilde{x} - \pi(W, \tilde{x})) = Eu(W + \tilde{x}) \tag{1.1}$$

lo que indica que es la cantidad máxima de dinero a la que un individuo estaría dispuesto a renunciar para cambiar el riesgo al que está sometido por su valor esperado. Puede decirse también que es la cantidad precisa para inducir al decisor a participar en un juego de azar.

Según el signo que tenga esta cantidad, se definen diferentes actitudes hacia el riesgo de los individuos.

Definición 1.2.2 *Consideremos un individuo con riqueza inicial W.*

1. *Se dice que tiene un comportamiento de aversión al riesgo si, para cualquier variable aleatoria $\tilde{x}$, la prima de riesgo es positiva, es decir $\pi(W, \tilde{x}) > 0$, $\forall \tilde{x}$.*

2. *Se dice que tiene un comportamiento de atracción por el riesgo si, para cualquier variable aleatoria $\tilde{x}$, la prima de riesgo es negativa, es decir $\pi(W, \tilde{x}) < 0$, $\forall \tilde{x}$.*

3. *Se dice que tiene un comportamiento de neutralidad hacia el riesgo si, para cualquier variable aleatoria $\tilde{x}$, la prima de riesgo es nula, es decir $\pi(W, \tilde{x}) =$ $= 0$, $\forall \tilde{x}$.*

De la definición se deduce que un individuo adverso al riesgo es aquél que pagaría por asegurarse el valor esperado del riesgo en lugar de someterse a él, pudiéndose tomar ésta como definición de la aversión al riesgo cuando no se disponga de información suficiente sobre la función de utilidad del individuo. La actitud de aversión al riesgo es la que suele considerarse más habitual en los compradores de seguro, ya que en caso de ser indiferentes o sentir atracción por el riesgo, preferirían someterse al riesgo y por tanto no se asegurarían. Justificaremos más adelante esta afirmación.

Los comportamientos frente al riesgo quedan perfectamente definidos en función de la utilidad marginal, como detallamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3 *Sea u, de clase dos, la función de utilidad de un individuo. Se verifica que:*

1. *u corresponde a un comportamiento de aversión al riesgo si y solo si la utilidad marginal es estrictamente decreciente (u es estrictamente cóncava).*

2. u corresponde a un comportamiento de atracción por el riesgo si y solo si la utilidad marginal es estrictamente creciente (u es estrictamente convexa).

3. u corresponde a un comportamiento de neutralidad hacia el riesgo si y solo si la utilidad marginal es constante (u es lineal).

Demostración

1. Para demostrar este apartado, usaremos la desigualdad de Jensen, según la cual la concavidad estricta de u equivale a que, para toda variable aleatoria $\tilde{x}$, se tenga $u(E(W+\tilde{x})) > Eu(W+\tilde{x})$. En consecuencia, haciendo uso de la Ecuación 1.1, se tiene que $u(W+E\tilde{x}) > Eu(W+\tilde{x}) = u(W+E\tilde{x}-\pi(W,\tilde{x}))$. Al ser la función u estrictamente creciente, se deduce inmediatamente que $W + E\tilde{x} > W + E\tilde{x} - \pi(W,\tilde{x})$, lo que equivale a que $\pi(W,\tilde{x}) > 0$ y, por tanto, estamos ante una situación de aversión al riesgo.

2. El razonamiento que utilizamos para demostrar el segundo apartado es similar al anterior. Sabemos que u es estrictamente convexa si y solo si $-u$ es estrictamente cóncava. Por tanto, $-u(W+E\tilde{x}) > -u(W+E\tilde{x}-\pi(W,\tilde{x})) \Leftrightarrow u(W + E\tilde{x}) < u(W + E\tilde{x} - \pi(W,\tilde{x})) \Leftrightarrow W + E\tilde{x} < W + E\tilde{x} - \pi(W,\tilde{x}) \Leftrightarrow \pi(W,\tilde{x}) < 0$ y el comportamiento del individuo es, así, de atracción por el riesgo.

3. u es lineal $\Leftrightarrow u(W + E\tilde{x}) = Eu(W + E\tilde{x}) = u(W + E\tilde{x} - \pi(W,\tilde{x})) \Leftrightarrow W + E\tilde{x} = W + E\tilde{x} - \pi(W,\tilde{x}) \Leftrightarrow \pi(W,\tilde{x}) = 0$, lo que indica neutralidad hacia el riesgo, como queríamos demostrar. □

Una vez definidos los distintos comportamientos ante el riesgo y vista la relación con la función de utilidad u del individuo, justificamos a continuación cuál es la actitud más común de los individuos asegurados.

Consideremos que una persona posee un bien que corre el riesgo de ser destruido en el futuro; asociamos una variable aleatoria $\tilde{x}$ al montante de la posible pérdida relativa al bien, con función de distribución conocida. Entonces, a la esperanza matemática $E\tilde{x}$ se la puede interpretar como pérdida media a largo plazo si el experimento de exponer el bien al riesgo pudiera observarse un gran número de veces en las mismas condiciones.

Por otra parte, supongamos que un asegurador, con el fin de colaborar en la reducción de las consecuencias financieras del riesgo o destrucción del bien, emite pólizas por las que se compromete a pagar al propietario del bien una cantidad igual o menor que la pérdida financiera si el bien considerado se viera dañado o destruido durante el periodo de vigencia de la póliza.

En estas circunstancias, si suponemos que el propietario del bien tiene una función de utilidad $u(w)$ y se enfrenta a las posibles pérdidas aleatorias $\tilde{x}$, se mostrará indiferente entre pagar una prima P al asegurador para que éste cubra las pérdidas y asumir el riesgo, lo cual se expresa $u(W-P) = Eu(W-\tilde{x})$, donde el primer miembro representa la utilidad de pagar la prima P por la protección financiera completa y el segundo miembro representa la utilidad esperada cuando no se compra seguro.

En el caso particular de que la función de utilidad del propietario del bien fuera lineal y con pendiente positiva, $u(w) = aw + b$, lo que se corresponde con neutralidad hacia el riesgo, la expresión anterior se convertiría en

$$u(W-P) = a(W-P) + b = Eu(W-\tilde{x}) = E(a(W-\tilde{x}) + b)$$

de donde $P = E\tilde{x}$.

Sea ahora $u_a(w)$ la función de utilidad del asegurador y W_a su riqueza inicial. Entonces la prima mínima Π que aceptará para cubrir la pérdida aleatoria $\tilde{x}$ vendrá dada por la igualdad siguiente $u_a(W_a) = Eu_a(W_a + \Pi - \tilde{x})$, donde el primer miembro es la utilidad asociada a la situación actual del asegurador y el segundo miembro es su utilidad esperada si cobra una prima Π y se hace cargo de la pérdida $\tilde{x}$. Es decir, el asegurador se mostraría indiferente entre su situación inicial y cubrir las pérdidas del asegurado a cambio de la prima Π.

Si el asegurador tiene aversión por el riesgo, se llega a que:

$$u_a(W_a) = Eu_a(W_a + \Pi - \tilde{x}) \leq u_a(W_a + \Pi - E\tilde{x}),$$

de donde se deduce que $\Pi \geq E\tilde{x}$.

Sabemos que lo común es que el asegurador, para cubrir los gastos, de administración, producción e impuestos, y tener cierta seguridad frente a posibles pérdidas y algún margen de beneficio, incremente la prima pura con los recargos correspondientes. Si el asegurado es neutral al riesgo y paga solo la prima pura, se cubrirían solamente las pérdidas esperadas, lo que podría llevar al asegurador a arruinarse, si tiene que hacerse cargo de montantes superiores a las pérdidas esperadas. Por tanto, el asegurado no puede caracterizarse por tener una función de utilidad lineal y procede entonces suponer que será la de un adverso al riesgo: $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, lo que equivale a que $Eu(\tilde{x}) \leq u(E(\tilde{x}))$ y, así, el asegurado pagará una cantidad por el seguro superior a su pérdida esperada. La descrita es, por ello, la actitud considerada más común entre los asegurados y la que tomaremos como hipótesis en la mayoría de los casos que tratemos en lo sucesivo.

1.3. Medidas de la aversión al riesgo

La actitud de aversión al riesgo será, como acabamos de ver, una hipótesis básica del comportamiento de los asegurados. Resulta interesante no solo saber si un individuo siente o no aversión al riesgo, sino también conocer, de alguna forma, cuánta aversión tiene, para poder comparar así las actitudes de distintos individuos. Teniendo en cuenta la definición de la prima de riesgo, parece evidente que un mayor valor de ésta se corresponderá con una mayor aversión al riesgo. Esta prima es, por tanto, una buena medida para lo que pretendemos. Sin embargo, calcularla puede resultar un poco complejo, por lo que hemos de buscar otra forma equivalente de cuantificar la aversión al riesgo.

Hemos demostrado que el concepto de aversión está directamente ligado a la concavidad de la función de utilidad del individuo. Puede parecer entonces lógico medir la mayor o menor aversión a través de la derivada segunda de esta función, siempre que exista. Esto presenta el problema de que esta medida se vería afectada por transformaciones afines de la función de utilidad, lo cual no sería lógico, puesto que todas estas funciones representan las mismas preferencias.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se introduce el índice de aversión absoluta al riesgo, definido como sigue:

Definición 1.3.1 *Dada la función de utilidad $u(w)$ de un individuo, de clase dos, se define el índice de aversión absoluta al riesgo como* $r(u,w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$.

Como puede observarse, este índice es una función que depende de la utilidad y de la riqueza del individuo. Cuando no haya lugar a confusión por estar refiriéndonos a una función de utilidad concreta, lo denotaremos simplemente por $r(w)$. Diremos entonces que una función de utilidad presenta aversión absoluta al riesgo decreciente si $r(w)$ es decreciente con respecto al nivel de riqueza; diremos que la utilidad presenta aversión absoluta al riesgo constante si el índice es constante; y, finalmente, que presenta aversión absoluta al riesgo creciente cuando el índice sea creciente.

El inconveniente que veíamos antes, en relación con la derivada segunda de la función de utilidad y las transformaciones afines de ésta, desaparece al introducir el índice de aversión al riesgo. Veamos que, efectivamente, el índice es invariante ante estas transformaciones.

Lema 1.3.2 *Sea u una función de utilidad de clase dos y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se verifica entonces que $r(au + b, w) = r(u, w)$, $\forall w$.*

Demostración

$$r(au + b, w) = -\frac{(au + b)''(w)}{(au + b)'(w)} = -\frac{au''(w)}{au'(w)} = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = r(u, w).$$

□

Se confirma así el hecho fundamental de que el índice definido está realmente asociado a las preferencias del individuo y no a la función de utilidad particular elegida para representarlas.

El índice de aversión absoluta al riesgo está también muy relacionado con la prima de riesgo, que es la medida natural de dicha aversión. La siguiente proposición establece una relación aproximada entre ambos términos.

Proposición 1.3.3 *Sea u una función de utilidad de clase dos, estrictamente creciente y cóncava, y $\tilde{\varepsilon}$ una variable aleatoria de media nula, varianza pequeña y momentos de orden superior despreciables con respecto a la varianza. Se verifica que:*

$$r(u, W) \simeq \frac{2\pi(W, \tilde{\varepsilon})}{\sigma_{\varepsilon}^2}.$$

Demostración

Definimos la variable aleatoria $\tilde{x} = W + \tilde{\varepsilon}$, siendo W la riqueza inicial de un individuo. Para cada valor ε que tome $\tilde{\varepsilon}$, el desarrollo de Taylor de orden dos de $u(\tilde{x})$ en el punto W viene dado por

$$u(W + \varepsilon) \simeq u(W) + \varepsilon u'(W) + \frac{\varepsilon^2}{2} u''(W)$$

por lo que

$$Eu(W + \varepsilon) \simeq u(W) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} u''(W).$$

Por otro lado, si la prima de riesgo se denota por $\pi(W, \tilde{\varepsilon})$ y tenemos en cuenta que $E\tilde{\varepsilon} = 0$, se cumple que $u(W - \pi(W, \tilde{\varepsilon})) = Eu(W + \tilde{\varepsilon}) = Eu(\tilde{x})$, a partir de la Ecuación 1.1. Haciendo uso también del polinomio de Taylor de orden uno, en el punto W, de la función del miembro izquierdo:

$$u(W - \pi(W, \tilde{\varepsilon})) \simeq u(W) - \pi(W, \tilde{\varepsilon}) \cdot u'(W),$$

deducimos que:

$$\pi(W, \tilde{\varepsilon}) \simeq -\frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 \frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 \, r(u, W)$$

con lo cual el índice de aversión absoluta al riesgo es el doble de la prima de riesgo por unidad de varianza, para riesgos pequeños:

$$r(u, W) \simeq \frac{2\pi(W, \tilde{\varepsilon})}{\sigma_\varepsilon^2}.$$

$\square$

Los comportamientos de la prima de riesgo y del índice de aversión absoluta al riesgo son por tanto coincidentes. En particular, el decrecimiento de la aversión al riesgo equivale al decrecimiento de la prima de riesgo, consideradas ambas como funciones de la riqueza. Demostraremos formalmente este resultado como consecuencia del teorema que enunciamos a continuación y que establece relaciones entre los índices de aversión absoluta al riesgo y las primas de riesgo, a nivel global.

Teorema 1.3.4 *Sean u_1 y u_2 dos funciones de utilidad estrictamente crecientes, cóncavas y de clase dos. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $r(u_1, w) > r(u_2, w)\ \forall\, w$.

2. $\pi_1(w, \tilde{\varepsilon}) > \pi_2(w, \tilde{\varepsilon})\ \forall\, w, \forall\, \tilde{\varepsilon}$ *pequeño.*

3. *Existe una función real g estrictamente creciente y estrictamente cóncava tal que $u_1 = g \circ u_2$.*

En estas condiciones, se dice que un individuo cuyas preferencias están representadas por la función de utilidad u_1 tiene mayor aversión al riesgo que aquél cuya función de utilidad es u_2, o simplemente que u_1 presenta mayor aversión al riesgo que u_2, o que la primera función es más cóncava que la segunda.

Demostración

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$

Sea g la función dada por $g(w) = u_1 \circ u_2^{-1}(w)$. Por ser u_2 estrictamente monótona, g está bien definida. Se tiene entonces que $u_1 = g \circ u_2$. Si probamos que g es estrictamente creciente y cóncava, tendremos demostrada esta implicación del teorema.

$$g'(w) = u_1'(u_2^{-1}(w)) \frac{1}{u_2'(u_2^{-1}(w))} > 0$$

ya que tanto u_1 como u_2 son estrictamente crecientes. Estamos así ante una función estrictamente creciente.

$$g''(w) = u_1''(u_2^{-1}(w)) \frac{1}{(u_2(u_2^{-1}(w)))^2} + u'(u_2^{-1}(w)) \frac{-u_2''(u_2^{-1}(w))}{(u_2(u_2^{-1}(w)))^2} =$$

$$= \frac{u_1'(u_2^{-1}(w))}{(u_2'(u_2^{-1}(w)))^2} \left(r(u_2, w) - r(u_1, w) \right).$$

El crecimiento estricto de u_1 e u_2 y la condición 1 nos llevan a que la derivada segunda de g es negativa y por tanto g es estrictamente cóncava.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$

$$u_1(w - \pi_1(w, \tilde{\varepsilon})) = Eu_1(w + \tilde{\varepsilon}) = Eg(u_2(w + \tilde{\varepsilon})) <$$

$$< g(Eu_2(w + \tilde{\varepsilon})) = g \circ u_2(w - \pi_2(w, \tilde{\varepsilon})) = u_1(w - \pi_2(w, \tilde{\varepsilon}))$$

de donde se deduce, debido al crecimiento estricto de u_1, que $\pi_1(w, \tilde{\varepsilon}) > \pi_2(w, \tilde{\varepsilon})$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Sea $\tilde{\varepsilon}$ un riesgo pequeño que toma los valores ε y $-\varepsilon$ con ambas probabilidades iguales a $1/2$ y que tiene, por tanto, media nula y varianza $\sigma_{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2$. Sabemos que

$$\pi_1(w, \tilde{\varepsilon}) \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{u_1''(w)}{u_1'(w)} \text{ y } \pi_2(w, \tilde{\varepsilon}) \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{u_2''(w)}{u_2'(w)}.$$

Se tiene entonces que

$$r(u_1, w) \simeq \frac{2\pi_1(w, \tilde{\varepsilon})}{\varepsilon^2} > \frac{2\pi_2(w, \tilde{\varepsilon})}{\varepsilon^2} \simeq r(u_2, w),$$

haciendo uso de la condición 2. Queda así demostrada también esta implicación.

$\square$

Este teorema nos a va permitir comparar, a partir de ahora, las aversiones al riesgo de diferentes individuos sin más que comparar sus índices de aversión absoluta al riesgo. Como indicamos anteriormente, también muestra la equivalencia entre los comportamientos del índice de aversión absoluta al riesgo de un individuo y la prima de riesgo, según vemos en la proposición siguiente.

Proposición 1.3.5 *Sea u una función de utilidad de clase dos, $r(u, w)$ el índice de aversión absoluta al riesgo asociado a u y $\pi(w)$ la prima de riesgo. Se verifica:*

1. *$r(u, w)$ es decreciente, como función de w, si y solo si $\pi(w)$ es decreciente.*
2. *$r(u, w)$ es constante, como función de w, si y solo si $\pi(w)$ es constante.*
3. *$r(u, w)$ es creciente, como función de w, si y solo si $\pi(w)$ es creciente.*

Demostración

Aplicamos el Teorema 1.3.4 a las funciones $u(w)$ y $u_1(w) = u(w + k)$, siendo $k > 0$. Los índices de aversión absoluta al riesgo correspondientes a ambas funciones son $r(u, w)$ y $r(u_1, w) = \dfrac{-u''(x + k)}{u'(x + k)} = r(u, w + k)$.

1. $r(u, w)$ decreciente $\Leftrightarrow$ $r(u, w) > r(u_1, w)$ lo que, según el Teorema 1.3.4, equivale a $\pi(w) > \pi_1(w) = \pi(w+k)$, quedando demostrado el decrecimiento de la prima de riesgo.

2. Igualmente, $r(u,w)$ constante $\Leftrightarrow r(u,w) = r(u_1,w)$ y, según el Teorema 1.3.4, $\pi(w) = \pi_1(w) = \pi(w+k)$, demostrándose así que la prima de riesgo es también constante como función de la riqueza w.

3. Por último, repetimos el razonamiento para $r(u,w)$ creciente. En tal caso, $r(u,w) < r(u_1,w) \Leftrightarrow \pi(w) < \pi_1(w) = \pi(w+k)$. $\square$

Otro resultado importante que relaciona propiedades de funciones de utilidad con distintos grados de aversión al riesgo y que usaremos más adelante es el que probamos en la Proposición 1.3.6.

Proposición 1.3.6 *Sean u_1 y u_2 dos funciones de utilidad estrictamente crecientes, cóncavas y de clase dos. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $r(u_1,w) > r(u_2,w)\ \forall\, w$.

2. $\dfrac{u_1'(x)}{u_1'(w)} < \dfrac{u_2'(x)}{u_2'(w)}$ *siempre que* $w < x$.

Demostración

$$r(u_1,w) > r(u_2,w)\ \forall\, w \Leftrightarrow \frac{-u_1''(x)}{u_1'(x)} > \frac{-u_2''(x)}{u_2'(x)}.$$

Si $w < x$ e integramos la desigualdad anterior entre w y x, se llega a:

$$\int_w^x \frac{-u_1''(x)}{u_1'(x)}\,dx > \int_w^x \frac{-u_2''(x)}{u_2'(x)}\,dx \Leftrightarrow -log\, u_1'(x) + log\, u_1'(w) > -log\, u_2'(x) + log\, u_2'(w)$$

lo que equivale a

$$-log\,\frac{u_1'(x)}{u_1'(w)} > -log\,\frac{u_2'(x)}{u_2'(w)} \Leftrightarrow \frac{u_1'(x)}{u_1'(w)} < \frac{u_2'(x)}{u_2'(w)}.$$

$\square$

Otra utilidad importante del índice de aversión absoluta al riesgo es que proporciona, después de una serie de transformaciones, una expresión aproximada de la función de utilidad. Basta para ello tener en cuenta que el índice puede reescribirse de la forma

$$r(u,w) = -\frac{d}{dw}\,log\, u'(w)$$

y despejar de esta igualdad la función u:

$$-\int r(u,w)dw = log\, u'(w) + c_1 \Rightarrow e^{-\int r(u,w)dw} = u'(w)e^{c_1} \Rightarrow$$

$$\int e^{-\int r(u,w)dw}dw = e^{c_1}\int u'(w)dw = e^{c_1}u(w) + c_2$$

siendo c_1 y c_2 constantes de integración reales. Puesto que $e^{c_1} > 0$, las funciones de utilidad u y $e^{c_1}u+c_2$ representan las mismas preferencias, con lo que obtenemos así una expresión equivalente a la utilidad del individuo:

$$u(w) \sim \int e^{-\int r(u,w)dw}dw. \tag{1.2}$$

Dicha expresión implica que las funciones de utilidad suelen presentar aversión absoluta al riesgo decreciente, puesto que para que u sea una función creciente, debe serlo el integrando anterior ($e^{-\int r(u,w)dw}$) y lo será siempre que $\int r(u,w)dw$ sea decreciente, o equivalentemente su integrando, $r(u,w)$.

Otro índice que puede resultar útil en la evaluación de la aversión al riesgo es el índice de aversión relativa al riesgo, que viene dado según la siguiente definición:

Definición 1.3.7 *Dada la función de utilidad $u(w)$ de un individuo, se define el índice de aversión relativa al riesgo como $r_r(u,w) = -\dfrac{w\,u''(w)}{u'(w)}$.*

Del mismo modo que lo era $r(u,w)$, el índice de aversión relativa al riesgo es también invariante ante transformaciones afines de la función de utilidad. Efectivamente, se cumple:

Lema 1.3.8 *Sea u una función de utilidad de clase dos y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se verifica entonces que $r_r(au+b,w) = r_r(u,w)$, $\forall w$.*

Demostración

$$r_r(au+b,w) = -\frac{w(au+b)''(w)}{(au+b)'(w)} = -\frac{awu''(w)}{au'(w)} = -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = r_r(u,w).$$

□

De nuevo se trata de un índice asociado a las preferencias del individuo y no a una función de utilidad concreta que las represente.

Definimos en el apartado siguiente otros conceptos relacionados con la actitud de un individuo ante el riesgo. En este caso, definiremos concretamente la prima de precaución y la prudencia.

1.4. Prudencia y prima de precaución

Ya se ha comentado que la actitud hacia el riesgo es fundamental a la hora de determinar la cobertura óptima para un asegurado expuesto a posibles pérdidas derivadas de un siniestro. El índice de aversión absoluta que hemos introducido en el apartado anterior resulta de gran importancia para nuestro propósito, pero no es útil para responder a cuestiones que dependan del efecto del riesgo sobre la utilidad marginal en lugar de sobre la utilidad en sí. Para tener en cuenta estos posibles efectos, se introducen la prima de precaución y la noción de prudencia, partiendo de la función de utilidad marginal, de modo similar a como se introdujeron la prima de riesgo y la aversión al riesgo a partir de la función de utilidad.

Ambos conceptos resultan de extrema importancia cuando se introducen múltiples fuentes de incertidumbre en el análisis de la demanda de seguro. En este sentido, se tratará más adelante cómo afecta al nivel óptimo de cobertura la existencia de un segundo riesgo, además de aquél para el que se contrata el seguro, contra el que no es posible asegurarse, pero que puede influir en la situación, tanto si el riesgo no asegurable es dependiente como independiente del asegurable.

Definición 1.4.1 *Sean u la función de utilidad de un individuo, W su riqueza inicial y $\tilde{x}$ la variable aleatoria que representa las posibles pérdidas. Se define la prima de precaución $\psi(W, \tilde{x})$ como la cantidad que verifica*

$$u'(W + E\tilde{x} - \psi(W, \tilde{x})) = Eu'(W + \tilde{x}).$$

Definición 1.4.2 *Se dice que la actitud de un individuo es de prudencia si, para cualquier variable aleatoria $\tilde{x}$, la prima de precaución es positiva.*

Del mismo modo que la aversión al riesgo está relacionada con el signo de la derivada segunda de la función de utilidad, la prudencia está ligada al signo de la derivada tercera de dicha función. En concreto, se verifica la siguiente relación:

Proposición 1.4.3 *Una función de utilidad u corresponde a un comportamiento de prudencia si y solo si la utilidad marginal es estrictamente decreciente y estrictamente convexa, es decir $u'' < 0$ y $u''' > 0$.*

Demostración

Que la utilidad marginal sea estrictamente convexa equivale a que $-u'$ es estrictamente cóncava. Aplicando entonces la Desigualdad de Jensen a $-u'$, se tiene que $-u'(E(W+\tilde{x})) > E(-u'(W+\tilde{x}))$, es decir $-u'(W+E\tilde{x}) > -Eu'(W+\tilde{x})$, que, teniendo en cuenta la definición de prima de precaución, puede reescribirse de la forma $u'(W + E\tilde{x}) < u'(W + E\tilde{x} - \psi(W, \tilde{x}))$. Usando el decrecimiento de la utilidad marginal, la desigualdad anterior se tendrá si y solo si se cumple $W+E\tilde{x} > W+E\tilde{x}-\psi(W, \tilde{x})$, es decir $\psi(W, \tilde{x}) > 0$, lo que indica comportamiento de prudencia.

$\square$

La prudencia es por tanto un concepto más restrictivo que la aversión al riesgo. Si se tiene prudencia, se tiene aversión al riesgo, pero la relación inversa no se da necesariamente.

1.5. Medidas de prudencia

Definimos ahora una medida de la prudencia, de forma análoga a como se definió el índice de aversión absoluta al riesgo. Deduciremos después qué relación guarda este nuevo índice con la prima de precaución ya introducida.

Definición 1.5.1 *Dada la función de utilidad $u(w)$ de un individuo, se define el Índice de Prudencia Absoluta como $\eta(u, w) = -\dfrac{u'''(w)}{u''(w)}$.*

Aunque se trata de una medida que depende de la utilidad y de la riqueza, cuando no exista posibilidad de confusión la denotaremos simplemente por $\eta(w)$.

Se trata de un índice con valores positivos en caso de prudencia y es invariante ante transformaciones afines de la utilidad, como demuestra el siguiente lema.

Lema 1.5.2 *Sea u una función de utilidad de clase dos y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se verifica entonces que $\eta(au + b, w) = \eta(u, w)$, $\forall w$.*

Demostración

$$\eta(au + b, w) = -\frac{(au + b)'''(w)}{(au + b)''(w)} = -\frac{au'''(w)}{au''(w)} = -\frac{u'''(w)}{u''(w)} = \eta(u, w).$$

□

El índice de prudencia absoluta está por tanto ligado a las preferencias del individuo, como ocurría con el índice de aversión absoluta al riesgo, y no a una función que las representa.

Veamos también qué relación existe entre la prima de precaución y la prudencia absoluta.

Proposición 1.5.3 *Sea u una función de utilidad de clase dos, estrictamente creciente y cóncava, y $\tilde{\varepsilon}$ una variable aleatoria de media nula, varianza pequeña y momentos de orden superior despreciables con respecto a la varianza. Se verifica que:*

$$\eta(u, W) \simeq \frac{2\psi(W, \tilde{\varepsilon})}{\sigma_{\varepsilon}^2}.$$

Demostración

Si se define $\tilde{x} = W + \tilde{\varepsilon}$, a través del Desarrollo de Taylor de orden 2 para la riqueza inicial W se obtiene la aproximación:

$$u'(W + \varepsilon) \simeq u'(W) + \varepsilon u''(W) + \frac{\varepsilon^2}{2} u'''(W)$$

y, por tanto,

$$Eu'(W + \varepsilon) \simeq u'(W) + \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2} u'''(W).$$

De la misma forma, el Desarrollo de Taylor de orden 1 de $u'(W - \psi(W, \tilde{\varepsilon}))$ nos lleva a

$$u'(W - \psi(W, \tilde{\varepsilon})) \simeq u'(W) - \psi(W, \tilde{\varepsilon}) \cdot u''(W).$$

La definición de la prima de precaución, $u'(W - \psi(W, \tilde{\varepsilon})) = Eu'(W + \tilde{\varepsilon})$, siempre que $E\tilde{\varepsilon} = 0$, y las aproximaciones anteriores nos permiten deducir que

$$\psi(W, \tilde{\varepsilon}) \simeq -\frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon}^2 \frac{u'''(W)}{u''(W)} = \frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon}^2 \, \eta(u, W),$$

con lo cual el índice de prudencia absoluta es el doble de la prima de precaución por unidad de varianza, para riesgos pequeños:

$$\eta(u, W) \simeq \frac{2\psi(W, \tilde{\varepsilon})}{\sigma_{\varepsilon}^2}.$$

□

1.6. Relaciones entre actitudes

Los conceptos que hemos definido en los apartados anteriores tienen múltiples propiedades que son útiles en algunos planteamientos de la Teoría de la Demanda de Seguro. Demostramos a continuación las que usaremos más adelante.

Proposición 1.6.1 *Sean $r(w)$ y $\eta(w)$ los índices de aversión absoluta al riesgo y de prudencia absoluta, respectivamente, asociados a la función de utilidad u. Se verifica:*

1. $r(w) < \eta(w) \Leftrightarrow u$ *presenta aversión absoluta al riesgo decreciente.*
2. $r(w) = \eta(w) \Leftrightarrow u$ *presenta aversión absoluta al riesgo constante.*
3. $r(w) > \eta(w) \Leftrightarrow u$ *presenta aversión absoluta al riesgo creciente.*

Demostración

Tomando logaritmo en la Definición 1.3.1 y derivando respecto de la riqueza w, se tienen las equivalencias: $r(w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)} \Leftrightarrow ln\, r(w) = ln\,(-u''(w)) - ln\, u'(w) \Leftrightarrow \dfrac{1}{r(w)} \cdot \dfrac{dr(w)}{dw} = \dfrac{u'''(w)}{u''(w)} - \dfrac{u''(w)}{u'(w)} = r(w) - \eta(w)$. Dado que $r(w) > 0$, el signo de la diferencia $r(w) - \eta(w)$ coincide con el de la derivada $\dfrac{dr(w)}{dw}$. Se deducen entonces inmediatamente los resultados dados en la proposición:

1. $r(w) < \eta(w) \Leftrightarrow r(w) - \eta(w) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{dr(w)}{dw} < 0 \Leftrightarrow u$ presenta aversión absoluta al riesgo decreciente.

2. $r(w) = \eta(w) \Leftrightarrow r(w) - \eta(w) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dr(w)}{dw} = 0 \Leftrightarrow u$ presenta aversión absoluta al riesgo constante.

3. $r(w) > \eta(w) \Leftrightarrow r(w) - \eta(w) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{dr(w)}{dw} > 0 \Leftrightarrow u$ presenta aversión absoluta al riesgo creciente. $\square$

Dado que el índice de aversión absoluta al riesgo está directamente relacionado con la prima de riesgo según se ha visto en la Proposición 1.3.3 y el índice de prudencia absoluta con la prima de precaución como indica la Proposición 1.5.3, parece muy intuitivo deducir de la Proposición 1.6.1 relaciones entre ambas primas, dependiendo de que la aversión al riesgo sea decreciente, constante o creciente. De un modo más formal, podemos demostrar el siguiente resultado:

Proposición 1.6.2 *Sean $\pi(w)$ y $\psi(w)$ las primas de riesgo y precaución, respectivamente, asociadas a una función de utilidad u. Se verifica:*

1. *u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente $\Leftrightarrow \pi(w) < \psi(w)$.*

2. *u presenta aversión absoluta al riesgo constante $\Leftrightarrow \pi(w) = \psi(w)$.*

3. *u presenta aversión absoluta al riesgo creciente $\Leftrightarrow \pi(w) > \psi(w)$.*

Demostracion

A partir de la Definición 1.1 sabemos que, dada una variable aleatoria cualquiera $\tilde{x}$, se verifica:

$$Eu(w + \tilde{x}) = u(w + E\tilde{x} - \pi(w, \tilde{x})).$$

Derivando respecto de w, se obtiene la expresión:

$$Eu'(w + \tilde{x}) = u'(w + E\tilde{x} - \pi(w, \tilde{x}))(1 - \frac{d\pi(w, \tilde{x})}{dw})$$

que, comparada con la Definición 1.4.1, nos conduce a la igualdad:

$$u'(w + E\tilde{x} - \pi(w, \tilde{x}))(1 - \frac{d\pi(w, \tilde{x})}{dw}) = u'(w + E\tilde{x} - \psi(w, \tilde{x})). \tag{1.3}$$

A partir de ella, podemos ya demostrar los resultados enunciados:

1. Según la Proposición 1.3.5, u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente si y solo si π es decreciente, con lo que $\dfrac{d\pi}{dw} < 0$. Así, la Ecuación 1.3 se traduce en $u'(w + E\tilde{x} - \pi(w, \tilde{x})) < u'(w + E\tilde{x} - \psi(w, \tilde{x}))$, llevando el decrecimiento de la utilidad marginal a la desigualdad $\pi(w) < \psi(w)$.

2. Cuando la aversión absoluta al riesgo es constante, π también lo es y la Ecuación 1.3 se reduce a $u'(w + E\tilde{x} - \pi(w, \tilde{x})) = u'(w + E\tilde{x} - \psi(w, \tilde{x}))$, siendo por tanto $\pi(w) = \psi(w)$.

3. En cambio, que u presente aversión absoluta al riesgo creciente es equivalente a que π sea creciente. Así $u'(w+E\tilde{x}-\pi(w, \tilde{x})) > u'(w+E\tilde{x}-\psi(w, \tilde{x}))$, obteniéndose finalmente $\pi(w) > \psi(w)$ como consecuencia del decrecimiento de la utilidad marginal. $\square$

Proposición 1.6.3 *La aversión absoluta al riesgo decreciente implica prudencia.*

Demostración

Como se ha deducido en la demostración de la proposición anterior, se tiene $\dfrac{1}{r(w)} \cdot \dfrac{dr(w)}{dw} = \dfrac{u'''(w)}{u''(w)} - \dfrac{u''(w)}{u'(w)}$. Si suponemos aversión absoluta al riesgo decreciente, entonces $\dfrac{u'''(w)}{u''(w)} < \dfrac{u''(w)}{u'(w)}$. La concavidad de u equivale a que $u'' < 0$ y, por tanto, $u'''(w) > \dfrac{(u''(w))^2}{u'(w)} > 0$, siendo así el comportamiento de prudencia. $\square$

Proposición 1.6.4 *Sea u una función de utilidad. Se verifica:*

1. *Si la aversión absoluta al riesgo es decreciente, entonces $-u'$ tiene más aversión al riesgo que u.*

2. *Si la aversión absoluta al riesgo es constante, entonces $-u'$ y u tienen la misma aversión al riesgo.*

3. *Si la aversión absoluta al riesgo es creciente, entonces $-u'$ tiene menos aversión al riesgo que u.*

Demostración

Para comparar la aversión al riesgo de las funciones u y $-u'$, hacemos lo propio con sus índices de aversión absoluta correspondientes. De este modo, $r(-u',w) = -\frac{(-u')''(w)}{(-u')'(w)} = -\frac{u'''(w)}{u''(w)} = \eta(u,w)$. La Proposición 1.6.1 nos permite relacionar esta cantidad con el índice de aversión absoluta al riesgo de u, deduciéndose que será mayor, igual o menor, respectivamente, que $r(u,w)$ si se tiene aversión absoluta decreciente, constante o creciente, respectivamente. Queda así demostrada esta proposición. $\square$

Proposición 1.6.5 *Si u es una función de utilidad que presenta un índice de prudencia absoluta decreciente, entonces:*

1. $u^{iv}(w) < 0$.

2. u'' *es una función de utilidad con más aversión al riesgo que* $-u'$.

Demostración

1. Tomando logaritmo en la igualdad $\eta(w) = -\frac{u'''(w)}{u''(w)}$ y derivando posteriormente respecto de w, se tiene que $ln\,\eta(w) = ln\,(-u'''(w)) - ln\,u''(w) \Leftrightarrow \frac{1}{\eta(w)} \cdot \frac{d\eta(w)}{dw} = \frac{u^{iv}(w)}{u'''(w)} - \frac{u'''(w)}{u''(w)}$. Si la prudencia absoluta es decreciente, esta cantidad será negativa y por tanto $\frac{u^{iv}(w)}{u'''(w)} < \frac{u'''(w)}{u''(w)}$, lo que equivale a $u^{iv}(w) < \frac{(u'''(w))^2}{u''(w)} < 0$ debido a la prudencia ($u'' < 0, u''' > 0$).

2. Comparemos los índices de aversión absoluta al riesgo para determinar cuál de las dos funciones presenta mayor aversión al riesgo:

   $r(u'',w) = -\frac{u^{iv}(w)}{u'''(w)} > -\frac{u'''(w)}{u''(w)} = r(-u',w)$, teniéndose la desigualdad según lo demostrado en el Apartado 1 de esta proposición. Se obtiene así que la aversión al riesgo de u'' es mayor que la de $-u'$. $\square$

1.7. Dominancia estocástica

Hemos tratado hasta ahora el planteamiento general y sobre el que se ha desarrollado casi siempre la Teoría de la Demanda de Seguro. Nos referimos a la hipótesis de la maximización de la utilidad esperada. Sin embargo, es frecuente en muchas situaciones tanto teóricas como prácticas, la necesidad de hacer predicciones sobre las preferencias del decisor entre distintas alternativas de consecuencias inciertas, sin tener conocimiento de su función de utilidad. Se hace por tanto necesario ordenar de algún modo las situaciones a las que están expuestos los agentes, a partir de diversas características de las funciones de densidad y/o distribución de las variables aleatorias que representan las situaciones, de forma que, cuando sea conocida la función de utilidad, ambos criterios den lugar a la misma ordenación de preferencias.

De entre las diferentes formas de abordar esta cuestión, destacan por su amplio uso desde hace años aquéllas que se basan en la comparación de las medias y varianzas de las distribuciones consideradas: suponiendo que dos situaciones de riesgo dan lugar a la misma riqueza media, se elegirá aquélla cuya varianza sea más pequeña; cuando las varianzas son las que coinciden, la situación preferida será la que proporciona una mayor media.

Resulta sin embargo que la utilidad esperada es, en general, función de todos los momentos de la variable aleatoria y no solo de los de orden uno y dos, por lo que este planteamiento no siempre será coincidente con el de la utilidad esperada. Si la utilidad viene dada por una función cuadrática, entonces sí es cierto que solo la media y la varianza intervienen en el cálculo de la utilidad esperada. En otro caso, habrá que considerar también otros momentos de la distribución.

Proponemos en este apartado otras reglas más potentes que la de los momentos, según las cuales las distribuciones pueden ordenarse de acuerdo con las preferencias, siendo además coincidente este orden con el que se obtendría con el método de la utilidad esperada, dada cualquier función de utilidad con utilidad marginal decreciente.

El planteamiento que hacemos aquí tiene por tanto la misma base inicial que el modelo de la utilidad esperada (la ordenación de preferencias) aunque es más general que éste. Se suele llamar a modelos como éste de *utilidad no esperada*, pero hay que señalar que no se trata de un planteamiento alternativo a la hipótesis de la utilidad esperada, sino más bien de una generalización de ella, como haremos ver con las distintas definiciones que iremos dando.

Los conceptos que vamos a introducir son los de dominancia estocástica de distintos órdenes. Aunque se pueden definir para cualquier grado positivo y entero, solo nos interesan las de primer, segundo y tercer orden porque son las que se relacionan fácilmente con el planteamiento de la utilidad esperada siempre que la función de utilidad sea del tipo habitual: con aversión al riesgo y prudencia en algunos casos.

Definición 1.7.1 *Sean F y G las funciones de distribución de dos variables aleatorias $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ que toman valores en el intervalo $[0, D]$. Se dice que F tiene dominancia estocástica de primer orden sobre G si $F(x) \leq G(x)$ $\forall x \in [0, D]$.*

Definición 1.7.2 *Se dice que F tiene dominancia estocástica de segundo orden sobre G si $\int_0^y (F(x) - G(x))dx \leq 0$ $\forall y \in [0, D]$.*

Definición 1.7.3 *Sean F y G las funciones de distribución de dos variables aleatorias $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ que toman valores en el intervalo $[0, D]$. Se dice que F tiene dominancia estocástica de tercer orden sobre G si:*

$$\int_0^D (F(x) - G(x))dx \leq 0 \ \text{ y } \int_0^z \int_0^y (F(x) - G(x))\, dx\, dy \leq 0 \ \forall y, z \in [0, D].$$

Es inmediato demostrar que la dominancia estocástica de primer orden es más restrictiva que la de segundo orden y ésta que la de tercer orden. Lo hacemos en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7.4 *Si la función de distribución F tiene dominancia estocástica de primer orden sobre la función de distribución G, entonces también tiene dominancia estocástica de segundo orden sobre G.*

Demostración

La dominancia estocástica de primer orden de F sobre G indica que $F(x) \leq G(x)$ $\forall x \in [0, D]$, lo que implica que $F(x) - G(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, y]$ y $\forall y \in [0, D]$. Por tanto integrando en el intervalo $[0, y]$ se tiene $\int_0^y (F(x) - G(x))dx \leq 0 \; \forall y \in [0, D]$, es decir, F tiene dominancia estocástica de segundo orden sobre G. □

Proposición 1.7.5 *Si la función de distribución F tiene dominancia estocástica de segundo orden sobre la función de distribución G, entonces también tiene dominancia estocástica de tercer orden sobre G.*

Demostración

Según la Definición 1.7.2,

$$\int_0^y (F(x) - G(x))dx \leq 0 \;\; \forall y \in [0, D]. \tag{1.4}$$

En particular para $y = D$ se tiene que $\int_0^D (F(x) - G(x))dx \leq 0$, cumpliéndose la primera condición para la dominancia estocástica de tercer orden.

Además, integrando la expresión 1.4 entre 0 y z, siendo $z \in [0, D]$, se mantendrá la desigualdad y $\int_0^z \int_0^y (F(x) - G(x))\, dx\, dy \leq 0 \; \forall y, z \in [0, D]$, teniendo así F dominancia estocástica de tercer orden sobre G. □

Demostraremos a continuación tres resultados fundamentales para confirmar que las Definiciones 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3 generalizan la ordenación de preferencias del caso en que se maximiza la utilidad esperada. No son sin embargo válidas las tres proposiciones siguientes para cualquier función de utilidad, sino solamente para aquéllas que sean crecientes, en el primer caso, con utilidad marginal decreciente además, en el segundo y con utilidad marginal convexa en el tercero. No supone esto ningún contratiempo, ya que según hemos visto anteriormente es habitual que el asegurado sienta aversión hacia el riesgo y prudencia, lo que equivale a las condiciones enunciadas para su función de utilidad.

Proposición 1.7.6 *Sean $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ dos variables aleatorias con funciones de distribución respectivas F y G y u la función de utilidad, creciente, de un individuo. Se verifica entonces que la dominancia estocástica de primer orden de F sobre G implica que $\tilde{x}_1$ es preferida a $\tilde{x}_2$ según el criterio de la utilidad esperada.*

Demostración

Este resultado se demuestra viendo que la utilidad esperada de la variable $\tilde{x}_1$ es superior a la que se obtiene con $\tilde{x}_2$:

$$Eu(\tilde{x}_1)-Eu(\tilde{x}_2) = \int_0^D u(x)dF(x)-\int_0^D u(x)dG(x) = \int_0^D u(x)(dF(x)-dG(x)) =$$
$$= -\int_0^D u'(x)(F(x)-G(x))dx \geq 0$$

donde se ha aplicado la integración por partes, la dominancia estocástica de primer orden supuesta según la cual $F(x) \leq G(x)\ \forall x \in [0, D]$ y el crecimiento de u que equivale al signo positivo de u', dando lugar así a la desigualdad anterior.

Se demuestra por tanto que $Eu(\tilde{x}_1) \geq Eu(\tilde{x}_2)$ con lo que $\tilde{x}_1$ es preferida a $\tilde{x}_2$ cuando se maximiza la utilidad esperada. □

En el caso de la dominancia estocástica de segundo grado, debemos imponer más restricciones sobre la función de utilidad para que aquélla implique preferencia según el planteamiento de la utilidad esperada. En concreto, se cumple la siguiente proposición:

Proposición 1.7.7 *Sean $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ dos variables aleatorias con funciones de distribución respectivas F y G y u la función de utilidad, creciente y cóncava, de un individuo. Se verifica entonces que la dominancia estocástica de segundo orden de F sobre G implica que $\tilde{x}_1$ es preferida a $\tilde{x}_2$ según el criterio de la utilidad esperada.*

Demostración

Calcularemos como antes la diferencia $Eu(\tilde{x}_1) - Eu(\tilde{x}_2)$ con el objeto de comparar ambas utilidades.

$$Eu(\tilde{x}_1) - Eu(\tilde{x}_2) = \int_0^D u(x)(dF(x)-dG(x)) = -\int_0^D u'(x)(F(x)-G(x))dx =$$
$$= -u'(D)\int_0^D (F(x)-G(x))dx + \int_0^D u''(x)\left(\int_0^x (F(y)-G(y))dy\right)dx \geq 0,$$

ya que $u' > 0$, $u'' < 0$, $\int_0^D (F(x)-G(x))dx \leq 0$ y $\int_0^x (F(y)-G(y))dy \leq 0$ $\forall x \in [0, D]$, estas dos últimas desigualdades según la Definición 1.7.2[1].

[1] Intercambiando los papeles de x e y.

$\tilde{x}_1$ es entonces preferida a $\tilde{x}_2$ cuando se trata de maximizar la utilidad esperada, puesto que hemos demostrado que $Eu(\tilde{x}_1) \geq Eu(\tilde{x}_2)$. □

Proposición 1.7.8 *Sean $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ dos variables aleatorias con funciones de distribución respectivas F y G y u la función de utilidad, creciente, cóncava y con derivada tercera positiva, de un individuo. Se verifica entonces que la dominancia estocástica de tercer orden de F sobre G implica que $\tilde{x}_1$ es preferida a $\tilde{x}_2$ según el criterio de la utilidad esperada.*

Demostración

De nuevo nos interesa conocer el signo de $Eu(\tilde{x}_1) - Eu(\tilde{x}_2)$. Partiendo del valor obtenido en la demostración de la Proposición 1.7.7 y volviendo a integrar por partes, se obtiene:

$$Eu(\tilde{x}_1) - Eu(\tilde{x}_2) =$$

$$= -u'(D)\int_0^D (F(x) - G(x))dx + u''(D)\int_0^D \left(\int_0^x (F(y) - G(y))dy\right) dx -$$

$$- \int_0^D u'''(x)\int_0^x \int_0^y (F(z) - G(z))\, dzdx \geq 0,$$

debido a las hipótesis sobre u ($u' > 0$, $u'' < 0$, $u''' > 0$) y a la dominancia estocástica de tercer orden de F sobre G definida en 1.7.3.

La desigualdad obtenida indica que $\tilde{x}_1$ es preferida a $\tilde{x}_2$ para un individuo que maximiza su utilidad esperada. □

Según las proposiciones que acabamos de probar, la ordenación de los sucesos aleatorios que puede hacer un individuo basándose tanto en la dominancia estocástica de primer como de segundo y tercer orden es la misma que se obtiene cuando su objetivo es maximizar su utilidad esperada. Podremos entonces usar estos conceptos cuando la función de utilidad no esté disponible sin caer en contradicciones entre ambos planteamientos.

Concluimos así este capítulo en el que hemos introducido los conceptos fundamentales que vamos a usar en lo que sigue en el análisis de la demanda de seguro en diversas situaciones y en la determinación de las características de los contratos de seguro óptimos, tanto en lo que se refiere a la prima pagada por el asegurado como a la cobertura que el asegurador se compromete a realizar en caso de siniestro.

Capítulo 2
La demanda de seguro con información simétrica

Nos centramos ya en este capítulo en el estudio de la demanda de seguro, en su aspecto teórico. Tratamos de forma sistemática múltiples situaciones en las que la información de la que disponen asegurador y asegurado es siempre simétrica; comenzando por modelos sencillos, en los que un individuo se supone expuesto a un único riesgo de siniestro, que le ocasionaría un daño de cuantía fija u otros en los que el valor de la pérdida puede variar entre cantidades conocidas; hasta modelos más complejos en los que intervienen riesgos adicionales contra los que no es posible asegurarse y que pueden influir en la cantidad de seguro contratada para amortiguar los efectos del siniestro asegurado.

Se obtienen resultados tanto sobre la cantidad óptima de cobertura (parcial o total) cuando la función de indemnización adopta una forma concreta (coaseguro proporcional o franquicia, fundamentalmente), como, precisamente, sobre la forma óptima del contrato de seguro.

Se consideran además distintas hipótesis en lo que se refiere a la forma de la prima, observándose que la situación cambia según sea pura o incluya una tasa de recargo, y/o a la actitud hacia el riesgo del asegurado y del asegurador.

Trabajaremos en el marco de la utilidad esperada en el que, como ya hemos señalado, se trata de elegir aquella situación que proporciona una mayor utilidad, aunque también abordaremos algunas situaciones a partir de preferencias más generales basadas en dominancia estocástica de distintos órdenes entre las distribuciones de las variables aleatorias consideradas.

Más concretamente, empezamos haciendo un repaso de las primeras aportaciones sobre Teoría de la Demanda de Seguro, las de Mossin (1968) y Arrow (1963), consideradas como punto de partida para un aumento creciente a partir de entonces de investigaciones al respecto. Ambos trabajos se sitúan en el marco de la utilidad esperada, pero se basan en formas distintas para la pérdida económica a que da lugar el siniestro asegurado.

Tras introducir estos modelos clásicos, analizaremos modelos de riesgo único, aquéllos en los que, durante el periodo de validez del contrato, el asegurado está expuesto al acontecimiento de un único siniestro, igual que en el modelo de Mossin, pero con la diferencia de que no consideramos ahora pérdidas de cuantía fija, sino variable, aunque acotada entre valores conocidos. Se estudian las indemnizaciones con coaseguro de las pérdidas entre asegurado y asegurador y las que vienen dadas a partir de un nivel de franquicia. No solo determinaremos si la cobertura completa es óptima en función del recargo que lleve la prima, sino que también caracterizaremos dicha cobertura óptima en cada caso, haciendo un análisis de la sensibilidad para observar los efectos que producen sobre ella algunas de las variables tenidas en cuenta, como pueden ser la riqueza inicial del asegurado o su aversión al riesgo.

Seguidamente abordamos el estudio de situaciones en las que, además del riesgo para el que el individuo compra un seguro, existen otros riesgos contra los que no es posible asegurarse pero que de un modo u otro pueden influir en la elección de cobertura que hace el asegurado. Tratamos la posibilidad de impago por parte del asegurador y la presencia de otros riesgos secundarios, ya puedan estar o no relacionados con el acontecimiento del riesgo asegurado. Al igual que para el modelo de riesgo único, determinamos la optimalidad o no de la cobertura completa en las distintas situaciones y comparamos la cobertura óptima obtenida con la que se tendría en ausencia de estos riesgos añadidos.

Después de comprobar que los resultados obtenidos no dependen en general de la restricción de no negatividad impuesta normalmente sobre las indemnizaciones a pagar, terminamos el capítulo teniendo en cuenta además las preferencias del asegurador y no solo las del asegurado, como se venía haciendo fundamentalmente en lo anterior. Esto nos lleva a la determinación de los contratos de seguro óptimos en el sentido de Pareto para riesgo único y también cuando pueden ocurrir distintas pérdidas durante el periodo asegurado.

2.1. Los modelos clásicos de demanda de seguro

Como se ha señalado, los artículos de Mossin (1968) y Arrow (1963) han resultado ser fundamentales en el desarrollo de la Teoría de la Demanda de Seguro. Repasamos brevemente a continuación las principales contribuciones de ambos, con el objeto de variar posteriormente las hipótesis iniciales de las que parten, planteando así nuevas situaciones, más complejas, que podremos comparar con las más básicas.

2.1.1. El modelo de Mossin

El artículo de Mossin (1968) es el que verdaderamente se considera gérmen de la Teoría de la Demanda de Seguro, aunque algunos resultados de los que aporta ya estaban implícitos en Arrow (1963) y explícitos en Smith (1968), artículo éste sobre demanda de seguro publicado, meses antes, en la misma revista.

El modelo expuesto por Mossin en 1968 es el más simple de los que pueden considerarse en el seguro de daños. Se plantea en él el problema de la adquisición de un seguro que cubra un siniestro causado por un único riesgo aislado, sin tener en cuenta el consumo e inversiones efectuadas por el consumidor en cualquier otro contexto. La situación se aborda bajo el enfoque de la maximización de la esperanza matemática de la utilidad del consumidor. Esta utilidad se supone representada por una función que depende solamente de la riqueza del individuo.

Mossin hace referencia a dos cuestiones principales: la optimalidad de la cobertura total o parcial según la prima sea pura o no; y el hecho de que el seguro sea un bien inferior cuando el individuo asegurado tiene aversión absoluta al riesgo decreciente. Los resultados que mostraremos tienen sin embargo la restricción de estar basados en la hipótesis de cuantía fija para el daño, además, como ya se ha indicado, de ser único el riesgo que afronta el asegurado.

Con el enfoque de la utilidad esperada, un consumidor aceptará asegurarse siempre que su utilidad esperada no disminuya con ello. Teniendo en cuenta que la función de utilidad es una función estrictamente creciente de la riqueza y que ésta es menor cuanto mayor es la prima pagada, se deduce que ésta no podrá exceder una cantidad máxima P_{max} definida implícitamente por el hecho de que la utilidad a que da lugar no sea menor que la que tendría el individuo sin asegurarse. Si así fuera, no habría evidentemente operación de seguro ninguna.

Mossin, en lo que se refiere a la elección de cobertura completa, demuestra que: la actividad del seguro solo es viable y beneficiosa para el asegurador si los hogares tienen aversión al riesgo[2]; la prima máxima que los consumidores estarían dispuestos a pagar es una función creciente de la probabilidad de siniestro y de su cuantía; y, bajo la hipótesis común de decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo, la prima máxima aceptable para un daño fijado es una función decreciente de la renta del consumidor.

La siguiente proposición resume estos resultados.

Proposición 2.1.1 *Sean p la probabilidad de siniestro, D el daño que se produce como consecuencia de él y P_{max} la prima máxima que un asegurado aceptaría pagar a cambio de cobertura completa. Se verifica entonces:*

1. *Si el asegurado tiene aversión al riesgo (respectivamente, neutralidad hacia el riesgo), entonces P_{max} es estrictamente superior (respectivamente, igual) a la prima pura.*

2. *P_{max} es una función creciente de p y de D.*

3. *Si la aversión absoluta al riesgo del asegurado es decreciente, entonces P_{max} es una función decreciente de W.* $\square$

Otra de las cuestiones que plantea Mossin, y que ha dado lugar a uno de los resultados más importantes de la Teoría de Demanda de Seguro, es la discusión de la optimalidad de indemnizaciones completas o parciales para el asegurado cuando la prima que paga está fijada *a priori*, pudiendo ser pura o incluir algún

[2] Es el único caso en que la prima máxima que el asegurado pagaría es superior a la prima pura.

recargo positivo[3] que permita cubrir gastos de distinta índole y no únicamente la indemnización vertida.

Del teorema de Mossin (Teorema 2.1.2) se deduce que un consumidor neutral hacia el riesgo nunca se asegurará si la prima está recargada. Solo lo harán los consumidores con aversión estricta hacia el riesgo y además elegirán una cobertura total solo en el caso en que la prima sea pura. Contrariamente a lo que pueda dictar la realidad, no es óptimo para los asegurados con aversión al riesgo elegir una cobertura completa cuando la prima tiene recargo. En este resultado sorprendente, influye el hecho de que Mossin solo considere un riesgo de siniestro para el individuo. Volveremos a este asunto más adelante y veremos cómo la existencia de múltiples riesgos puede cambiar esta afirmación sobre la no optimalidad de una indemnización total.

Teorema 2.1.2 (Mossin) *Sean $\lambda \geq 0$ la tasa de recargo de la prima e I^* la indemnización óptima. Se verifica:*

1. *Si el asegurado tiene neutralidad hacia el riesgo y $\lambda > 0$, entonces $I^* = 0$.*
2. *Si el asegurado tiene aversión al riesgo y $\lambda = 0$, entonces $I^* = D$.*
3. *Si el asegurado tiene aversión al riesgo y $\lambda > 0$, entonces $I^* < D$.* □

El trabajo de este autor se completa con un estudio del comportamiento de la cobertura óptima cuando se modifican las principales variables consideradas en el problema: la probabilidad de accidente, la cuantía del daño, la riqueza inicial y la tasa de recargo de la prima.

Mossin demuestra que a medida que aumenta la probabilidad de que ocurra el siniestro asegurado, también lo hará la cobertura que un asegurado con aversión al riesgo desea tener.[4] Lo mismo ocurre con la cuantía del daño: cuanto mayor sea la pérdida esperada por el asegurado, mayor será la cobertura que quiera tener. En lo que se refiere a la influencia de la riqueza en el nivel óptimo para

[3] El recargo de la prima, conocido como recargo técnico o de seguridad, se toma generalmente como una proporción del valor actuarial del contrato de seguro.

[4] Trata únicamente el caso de aversión al riesgo, puesto que, según el Teorema 2.1.2 con neutralidad y recargo, el individuo no se aseguraría.

la indemnización, se observa que, si a mayor riqueza menor es la preocupación por el riesgo que se corre, entonces la cobertura deseada también disminuirá al aumentar la riqueza del asegurado. Por último, la prima recargada no puede crecer indefinidamente, ya que si lo hace la cobertura óptima deberá disminuir.

Se resumen estos resultados en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.3 *Sea u la función de utilidad de un asegurado con aversión al riesgo. Se verifica:*

1. *La cobertura óptima I^* es una función creciente de p y de D.*
2. *La cobertura óptima I^* es una función decreciente de la riqueza inicial W si y solo si la aversión absoluta al riesgo es decreciente.*
3. *Si la aversión relativa al riesgo es inferior a 1, entonces la cobertura óptima I^* es una función decreciente de λ.* □

Los importantes resultados que aporta Mossin tienen el inconveniente ya señalado de estar basados en la existencia de un único riesgo y en una pérdida de cuantía fija. Generalizaciones sobre estas hipótesis serán introducidas en apartados posteriores con el objeto de estudiar situaciones más acordes con la realidad.

2.1.2. El modelo de Arrow

Arrow (1963) aporta dos contribuciones fundamentales. Deduce, en primer lugar, uno de los resultados más famosos de la Teoría de la Demanda de Seguro, en relación con la forma óptima del contrato de seguro cuando la prima pura se incrementa con una tasa de recargo: se trata de una indemnización en forma de franquicia y coaseguro del riesgo por encima de ella. Deduce de este hecho la no optimalidad de la cobertura completa con una prima de ese tipo. Y en segundo lugar, hay que destacar que Arrow fue pionero al introducir información asimétrica en el estudio del seguro óptimo, señalándola como uno de los posibles causantes de la cobertura parcial en forma de franquicia, al darse cuenta de los obstáculos que suponen para una transferencia total del riesgo los problemas de selección adversa y riesgo moral. Atrajo de esta forma la atención de muchos economistas hacia estos problemas de información, surgiendo a partir de entonces una gran cantidad de artículos sobre estos temas.

En el modelo que plantea, Arrow considera un daño más general que el que tomaba Mossin. Supone que la pérdida sufrida a consecuencia del siniestro puede tomar distintos valores, dentro de un intervalo acotado. Es entonces una variable aleatoria continua la que representa el daño: $\tilde{x}$, con valores $x \in [0, D]$ siendo D la pérdida máxima sufrida.

El montante de la indemnización recibida por el asegurado debe depender en cada momento de la magnitud del daño sufrido. La indemnización es por tanto otra variable aleatoria $I(\tilde{x})$, que debe tomar valores no negativos y no superiores al daño sufrido. Es decir, $0 \leq I(x) \leq x, \forall x \in [0, D]$.

Con estas hipótesis y considerando una prima recargada, demuestra la siguiente proposición:

Proposición 2.1.4 *Si el asegurado tiene aversión al riesgo, la indemnización óptima puede expresarse según:*

$$I(x) = \begin{cases} x - L & \textit{si } x \geq L \\ 0 & \textit{si } x < L \end{cases}$$

siendo la cantidad $L > 0$ conocida como franquicia. □

Es importante resaltar que, implícitamente, Arrow demuestra al igual que Mossin que cuando existe recargo positivo en la prima la cobertura completa no es en ningún caso óptima, puesto que la franquicia es siempre soportada por el asegurado.

En el seguro del automóvil es muy frecuente este tipo de seguros. Si el conductor sufre un accidente cuyo coste es superior a la franquicia fijada, la compañía aseguradora pagará la parte del daño que sobrepase dicha cantidad. Sin embargo, si las consecuencias del siniestro no alcanzan monetariamente la franquicia acordada, será el propio propietario del vehículo quién tenga que pagar la reparación. De este modo se consiguen primas más económicas que cuando el seguro es sin franquicia. El único inconveniente es el de tener que pagar siempre una parte de los siniestros (o la totalidad si son de pequeña cuantía). Por contra, se tiene la seguridad de no tener que soportar económicamente accidentes de mayor envergadura.

Una vez repasados los resultados básicos relativos a la demanda óptima de seguro, pasamos en los apartados que siguen a introducir variantes en los modelos planteados por Mossin y Arrow, con el objeto de estudiar situaciones más acordes a las habituales de la vida cotidiana.

2.2. Modelos con riesgo único de cuantía variable

No resulta realista en general suponer que el daño que se produce como consecuencia de un siniestro es una cantidad fija. Cuando tiene lugar un accidente de circulación, la repercusión económica puede ser de distintas magnitudes. Desde cantidades pequeñas que puedan suponer por ejemplo la sustitución de un espejo retrovisor dañado o la rotura de una luna, hasta cantidades elevadas en caso de siniestro total o atropellos que conlleven responsabilidad civil para el conductor.

Por ese motivo, caracterizaremos en este apartado la cobertura óptima en el caso en que el siniestro pueda dar lugar a pérdidas de distintas cuantías en lugar de ser fija, como suponía Mossin según hemos expuesto en el Apartado 2.1. Lo haremos con simetría en la información, tanto cuando la indemnización adquiere la forma de coaseguro proporcional y por tanto el asegurador solo paga como indemnización un valor proporcional al daño sufrido, como cuando se trata de una franquicia, con lo que la compañía aseguradora únicamente reembolsa el exceso sobre la cantidad acordada en el contrato.

Generalizamos así el modelo de Mossin en el que la existencia de solo dos posibles estados (ninguna pérdida o pérdida total) no permite distinguir estas dos modalidades de indemnización, que son coincidentes en esas condiciones[5].

En ambos casos, usaremos la notación e hipótesis que se exponen a continuación.

[5] Una tasa de coaseguro α supone que la indemnización es αD y el asegurado soporta entonces una pérdida neta de $(1-\alpha)D$, con lo que este seguro equivale, desde el punto de vista del asegurado, a un seguro con nivel de franquicia $L=(1-\alpha)D$.

2.2.1. Hipótesis iniciales

Consideramos un individuo con una riqueza inicial $W > 0$ que está expuesto a un riesgo de siniestro que le ocasionaría, caso de tener lugar, una pérdida que representaremos por la variable aleatoria continua $\tilde{x}$, que toma valores en el intervalo $[0, D]$, siendo $D \leq W$, y cuyas funciones de distribución y densidad son, respectivamente, $F(x)$ y $f(x)$.

Para hacer frente a esta potencial pérdida, se asegura pagando una prima P a cambio de la cual el asegurador le concede una indemnización $I(\tilde{x})$ que depende de la cuantía exacta de la pérdida. Suele ser habitual suponer que:

- a mayor pérdida mayor será la indemnización asociada,
- no son posibles indemnizaciones negativas; en caso contrario, el asegurado pagaría a la compañía además de haber padecido los efectos del siniestro,
- no son posibles las indemnizaciones superiores al valor de la pérdida sufrida, ya que sería un caso de sobreseguro y podría producirse un enriquecimiento injusto del asegurado, que incluso llegaría a tener interés en que se produjese el accidente.

Estas hipótesis se traducen en que la función $I(x)$ es estrictamente creciente en x, y $0 \leq I(x) \leq x$, $\forall x \in [0, D]$, aunque estas últimas condiciones no son necesarias para desarrollar una teoría de demanda del seguro[6]. La simetría de información en la que nos movemos nos lleva a la suposición de que ambas partes (asegurado y asegurador) están de acuerdo con la distribución de la variable aleatoria $\tilde{x}$ y que la realización de $\tilde{x}$ es poco costosa de observar.

Consideramos, como se ha justificado en el capítulo anterior, que el asegurado es adverso al riesgo y que tiene una función de utilidad u de von Neumann-Morgenstern dependiente únicamente de la riqueza final, dos veces diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava[7].

Como ya se ha comentado, planteamos este modelo en el marco de la utilidad esperada, pretendiendo por tanto maximizar la utilidad que el asegurado

[6]Tratamos en el Apartado 2.4 la demanda óptima de seguro cuando no se imponen estas restricciones sobre la indemnización.

[7]Esta condición es equivalente a la aversión al riesgo del individuo.

espera tener, dependiendo del acontecimiento o no del siniestro. Estudiamos dos formas distintas para la indemnización que el asegurador debe pagar en caso de siniestro: un coaseguro proporcional y una cobertura completa por encima de una franquicia. Tratamos ambas situaciones en lo que sigue, caracterizando la cobertura óptima y determinando el efecto que producen sobre ella posibles cambios en las variables que intervienen en el problema.

2.2.2. Indemnización de tipo coaseguro proporcional

Abordamos en primer lugar un tipo de indemnización según la cual el asegurador paga únicamente una proporción fija de la pérdida, teniendo así que soportar el asegurado la parte restante. En el seguro del automóvil, cuando se produce un siniestro total, la compañía no paga al conductor el valor del vehículo en su totalidad, sino únicamente un porcentaje del valor de nuevo, determinado generalmente en función de la antigüedad del modelo.

Este tipo de seguro se conoce como coaseguro, puesto que asegurador y asegurado se reparten la pérdida habida: el primero paga una proporción α de la misma[8], mientras que el segundo retiene (o coasegura) la fracción $1-\alpha$ restante de la pérdida. La función de indemnización tiene así la forma $I(x) = \alpha x$, siendo $0 \leq \alpha \leq 1$.[9] Los casos extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ se corresponden, respectivamente, con coberturas nula y completa del daño.

En cuanto a la prima que el individuo debe pagar una vez tomada la decisión de asegurarse, supondremos que coincide con el valor esperado del gasto que le supone al asegurador el desembolso a realizar en caso de ocurrir el siniestro. Este gasto incluye dos términos: por una parte la indemnización en sí y por otra los gastos de administración y recargos que impone la compañía. Expresaremos entonces la prima de la forma general

$$P(I) = E(I(\tilde{x}) + c(I(\tilde{x}))) \tag{2.1}$$

donde c es una función de coste y $c(I(x))$ incluye tanto los gastos que supone

[8] α se conoce como tasa de coaseguro.

[9] Esta restricción para los valores de α es consecuencia de la hipótesis $0 \leq I(x) \leq x$; $\alpha > 1$ se correspondería con el sobreseguro ($I(x) > x$), mientras $\alpha < 0$ daría lugar a una indemnización negativa ($I(x) < 0$).

para la compañía pagar la indemnización $I(x)$ como los recargos necesarios para asumir el riesgo.

El caso más simple que puede considerarse es aquél en que no hay gastos de ningún tipo para el asegurador, o al menos no se consideran en la determinación de la prima: $c(I(x)) = 0$, $\forall x$. La prima es pura y cubre únicamente la indemnización, por lo que el beneficio esperado es nulo para los aseguradores. Este caso se da con competencia perfecta en el mercado del seguro, como veremos más adelante.

No pretendemos plantear aquí un modelo tan simple como el que no tiene en cuenta ningún gasto para la compañía. La simplificación que proponemos en este apartado, en cambio, consiste en considerar que el coste que soporta el asegurador al pagar la indemnización es proporcional a ésta. Es decir, $c(I(x)) = \lambda I(x)$, siendo $\lambda \geq 0$ el llamado factor o tasa de recargo.

Expresaremos todos los elementos que intervienen en el problema en función de la tasa de coaseguro y, así, determinando el valor de α que maximiza la utilidad esperada del asegurado, tendremos las cuantías de la prima y de la cobertura óptimas.

Sustituyendo en la igualdad 2.1 las funciones de indemnización y de coste, se tiene:

$$P(\alpha) = E(\alpha\tilde{x} + \lambda\alpha\tilde{x}) = \alpha(1+\lambda)E\tilde{x}. \tag{2.2}$$

En cuanto a la riqueza final del individuo, puede considerarse también como una variable aleatoria dependiente de la prima pagada, del nivel de cobertura y de la posible pérdida, además de la riqueza inicial, con el siguiente valor en función de α:

$$Y(\alpha) = W - \alpha(1+\lambda)E\tilde{x} - \tilde{x} + \alpha\tilde{x}.$$

El objetivo del individuo al asegurarse es elegir la tasa de coaseguro α con la que consiga una utilidad esperada de su riqueza final lo más elevada posible. El problema se plantea simplemente como

$$\max_{0\leq\alpha\leq 1} \quad Eu\left(W - \alpha(1+\lambda)E\tilde{x} - \tilde{x} + \alpha\tilde{x}\right) \tag{2.3}$$

Para resolver este problema de optimización, bastará obtener los puntos críticos de la función objetivo y determinar el signo de la derivada segunda en dichos puntos para deducir si se corresponden realmente con máximos de la función.

La condición necesaria de primer orden, $\dfrac{dEu}{d\alpha} = 0$, que nos permitiría calcular los posibles óptimos (interiores), es la siguiente:

$$\frac{dEu}{d\alpha} = E[u'(Y(\alpha)) \cdot \frac{dY}{d\alpha}] = E[u'(Y(\alpha)) \cdot (\tilde{x} - (1+\lambda)E\tilde{x})] =$$

$$= \int_0^D u'(Y(\alpha)) \cdot (x - (1-\lambda)E\tilde{x}) f(x)\, dx = 0 \tag{2.4}$$

La derivada de segundo orden viene dada por:

$$\frac{d^2Eu}{d\alpha^2} = E[u''(Y(\alpha)) \cdot (\tilde{x} - (1+\lambda)E\tilde{x})^2] = \int_0^D u''(Y(\alpha)) \cdot (x - (1-\lambda)E\tilde{x})^2 f(x)\, dx$$

que es trivialmente menor que cero en cualquier punto debido a la hipótesis de concavidad estricta de la función de utilidad, traducida en el signo negativo de su derivada segunda, si se supone aversión al riesgo por parte del asegurado. En caso de neutralidad hacia el riesgo y linealidad entonces de la función u, la derivada segunda es nula.

Se deduce de esto que, si suponemos como hipótesis inicial la aversión hacia el riesgo, la función $Eu(Y(\alpha))$ es estrictamente cóncava, lo que conlleva que cualquier valor α^* que satisfaga la condición necesaria de primer orden será un máximo global único para el problema planteado en 2.3, obviando la restricción. Si $0 < \alpha^* < 1$, será también la solución del problema 2.3. En caso contrario, la tasa de coaseguro óptima buscada sería $\alpha^* = 0$ si $\dfrac{dEu}{d\alpha}(0) \leq 0$ ó $\alpha^* = 1$ si $\dfrac{dEu}{d\alpha}(1) \geq 0$.

Con neutralidad al riesgo por parte del asegurado, no hay óptimo interior, sino que se alcanzará en aquél de los extremos ($\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$) en el que la utilidad alcanzada sea superior.

Nos planteamos a continuación si el teorema de Mossin enunciado en el Apartado 2.1.2 para el caso simple en que la pérdida $\tilde{x}$ es una variable aleatoria discreta con solo dos valores posibles (pérdida nula o pérdida máxima) sigue siendo válido en el caso más complejo planteado ahora. Se trata concretamente de determinar, cuando la pérdida viene dada por una variable aleatoria continua, la optimalidad del seguro completo o parcial, según la tasa de recargo fijada por la compañía sea nula o no y dependiendo también de la actitud hacia el riesgo del asegurado.

En el siguiente teorema se resumen las distintas situaciones.

Teorema 2.2.1 *Sea $\lambda \geq 0$ la tasa de recargo de la prima pagada por un asegurado. Se verifica que:*

1. *Con neutralidad hacia el riesgo y $\lambda > 0$, la cobertura óptima es $\alpha^* = 0$.*
2. *Con aversión al riesgo y $\lambda = 0$, la cobertura completa, $\alpha^* = 1$, es óptima.*
3. *Con aversión al riesgo y $\lambda > 0$, el óptimo es una cobertura parcial, $\alpha^* < 1$.*

Demostración

1. Si el asegurado tiene una actitud de neutralidad hacia el riesgo, la función de utilidad u es lineal y el óptimo se alcanza, consecuentemente, en el valor extremo de α que se corresponda con una mayor utilidad esperada. Calculamos ambos valores y los comparamos:

$$Eu(Y(0)) = Eu(W - \tilde{x}) = u(W) - u(E\tilde{x});$$

$$Eu(Y(1)) = Eu(W - (1+\lambda)E\tilde{x}) = u(W) - (1+\lambda)u(E\tilde{x}).$$

   Si la tasa de recargo de la prima es positiva, entonces $1 + \lambda > 1$, con lo que $Eu(Y(0)) > Eu(Y(1))$, resultando que lo óptimo es no recibir ninguna indemnización.

2. Ya se ha demostrado que la función $Eu(Y(\alpha))$ es cóncava, con lo cual para demostrar que $\alpha^* = 1$ es el óptimo buscado en el caso en que la prima pagada es pura, bastará con comprobar que verifica la condición necesaria de primer orden. Será entonces el máximo global único del problema sin restricciones y por tanto también con la restricción $0 \leq \alpha \leq 1$.

En efecto, si $\lambda = 0$, se tendrá que $Y(\alpha) = W - \alpha E\tilde{x} - \tilde{x} + \alpha\tilde{x}$, con lo que la derivada de $Eu(Y(\alpha))$ respecto de α dada en la Ecuación 2.4 se reduce a

$$\frac{dEu}{d\alpha} = E[u'(Y(\alpha)) \cdot (\tilde{x} - E\tilde{x})].$$

Evaluando esta expresión en $\alpha = 1$, se obtiene

$$\left.\frac{dEu}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = E[u'(Y(1)) \cdot (\tilde{x} - E\tilde{x})] = u'(Y(1))E(\tilde{x} - E\tilde{x}) = 0$$

puesto que $\tilde{Y}(1) = W - E\tilde{x}$ es constante. Queda así demostrado que $\alpha^* = 1$ es solución del problema, lo que se corresponde con una cobertura completa.

3. En el caso en que la tasa de recargo sea positiva, comprobaremos que la tasa $\alpha = 1$ no verifica la condición necesaria de primer orden y no será por tanto óptimo, debiendo entonces alcanzarse éste para algún valor $\alpha^* < 1$, lo que se corresponde con una cobertura parcial. Sustituyendo de nuevo α por 1 en la Ecuación 2.4, y teniendo en cuenta que $Y(1) = W - (1+\lambda)E\tilde{x}$ es de nuevo constante, se llega a:

$$\left.\frac{dEu}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = E[u'(Y(1)) \cdot (\tilde{x} - (1+\lambda)E\tilde{x})] = -\lambda u'(Y(1))E\tilde{x}$$

que toma un valor negativo, al ser la función de utilidad u estrictamente creciente. Queda por tanto demostrado también este apartado del teorema.

□

Está claro, por tanto, que el teorema de Mossin sigue siendo válido en esta nueva situación. Con esta estructura de las posibles pérdidas, se observa también que un individuo neutral al riesgo solo se asegurará si la prima que debe pagar es pura; con aversión al riesgo, elegirá entonces cobertura completa, mientras que si la prima está recargada, su elección pasa a ser una cobertura parcial. En este último caso, hay que destacar que el óptimo podría ser no asegurarse, si la tasa de recargo de la prima es elevada. En efecto, si evaluamos $\frac{dEu}{d\alpha}$ en $\alpha = 0$, se obtiene:

$$\left.\frac{dEu}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = E\left[u'(Y(0)) \cdot (\tilde{x} - (1+\lambda)E\tilde{x})\right] = cov\left(u'(Y(0)), \tilde{x}\right) - \lambda E\left[u'(Y(0))\right] \cdot E\tilde{x}$$

que se anula si $\lambda = \dfrac{cov\,(u'(Y(0)), \tilde{x})}{E\,[u'(Y(0))] \cdot E\tilde{x}}$. Esta tasa de recargo lleva a $\alpha = 0$ a ser un punto crítico y por tanto la situación óptima consiste en no asegurarse.

Siguiendo con este modelo, vamos a realizar a continuación un análisis de sensibilidad para determinar el efecto que tienen sobre el seguro óptimo los cambios que se producen en las restantes variables que intervienen en la operación.

2.2.3. Análisis de sensibilidad para el coaseguro proporcional

Las variables cuyo efecto sobre la indemnización óptima vamos a tratar son el nivel de riqueza inicial, la tasa de recargo de la prima y la aversión al riesgo. Nos planteamos ver si la cantidad de seguro sigue un comportamiento determinado cuando dichas variables sufren modificaciones. Para indemnizaciones de tipo coaseguro proporcional como las que nos ocupan, el valor de la tasa α es el que nos indica la mayor o menor magnitud de la cobertura. Será entonces el comportamiento de dicho parámetro el que nos interese especialmente.

Efecto de un cambio en la riqueza inicial

Nos planteamos y contestamos en este apartado preguntas como: ¿qué ocurre cuando se estudian individuos con diferentes niveles iniciales de riqueza, siendo la misma la exposición a la pérdida? en ese caso, ¿un asegurado comprará más o menos seguro?

La siguiente proposición estudia el comportamiento del valor óptimo α^* contestando así a las preguntas planteadas.

Proposición 2.2.2 *Sea $\lambda > 0$ la tasa de recargo del seguro. Entonces, si se produce un incremento en el nivel de riqueza inicial W del individuo, que suponemos adverso al riesgo, α^* tiene el siguiente comportamiento:*

1. *α^* decrece cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente.*
2. *α^* es invariante cuando la aversión absoluta al riesgo es constante.*
3. *α^* crece cuando la aversión absoluta al riesgo es creciente.*

No estudiamos el caso $\lambda = 0$, ya que, según el Teorema 2.2.1, cuando la prima es pura el óptimo es siempre la cobertura total.

Demostración

Para determinar el efecto que produce un incremento en la riqueza sobre el seguro óptimo, debemos estudiar el signo de la derivada $\frac{d\alpha^*}{dW}$.

El nivel óptimo de seguro α^* viene dado implícitamente por la ecuación $\frac{dEu}{d\alpha} = 0$, que podemos considerar función de W y α. Derivando implícitamente esta ecuación respecto de W, se tiene que

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial\alpha} + \frac{d^2 Eu}{d\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dW} = 0$$

con lo que

$$\frac{d\alpha}{dW} = -\frac{\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}}{\frac{d^2 Eu}{d\alpha^2}}. \tag{2.5}$$

Haciendo uso de la ya demostrada concavidad de Eu como función de α, el denominador de la Expresión 2.5 es negativo[10], con lo que el signo de $\frac{d\alpha}{dW}$ coincide con el de $\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}$. Calculamos por tanto esta derivada de segundo orden:

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}\right|_{\alpha^*} = \int_0^D u''(Y(\alpha^*)) \cdot \frac{dY(\alpha^*)}{dW} \cdot (x - (1+\lambda)E\tilde{x}) f(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta que $u''(Y(\alpha^*)) = -r(Y(\alpha^*)) \cdot u'(Y(\alpha^*))$, que $\frac{dY(\alpha^*)}{dW} = 1$ y llamando $x_0 = (1+\lambda)E\tilde{x}$, la expresión anterior puede escribirse como:

$$-\int_0^{x_0} r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x-x_0)f(x)\, dx - \int_{x_0}^{D} r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x-x_0)f(x)\, dx.$$

Estudiemos ahora el signo de esta derivada según sea la aversión al riesgo del asegurado:

[10]Esta condición y el hecho de que α^* cumple la condición necesaria de primer orden para ser óptimo son las condiciones que se necesitan para poder aplicar aquí el teorema de la Función Implícita.

1. Sabemos que $Y(\alpha^*) = W - \alpha^*(1+\lambda)E\tilde{x} - x + \alpha^* x$ y tomamos el valor $y_0 = W - \alpha^*(1+\lambda)E\tilde{x} - x_0 + \alpha^* x_0$.

   Si $0 \leq x \leq x_0$, como ocurre en la primera integral, $Y(\alpha^*) \geq y_0$, puesto que, según el Teorema 2.2.1, con tasa de recargo positiva y aversión al riesgo la cobertura óptima es parcial, con lo que $\alpha^* < 1$. Suponiendo aversión absoluta al riesgo decreciente, se verifica $r(Y(\alpha^*)) \leq r(y_0)$ y, en consecuencia, $r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x) \geq r(y_0)u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)$. Así,

   $$-\int_0^{x_0} r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)\,dx \leq -\int_0^{x_0} r(y_0)u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)\,dx.$$

   Si $x_0 \leq x \leq D$, como en la segunda integral, entonces $Y(\alpha^*) \leq y_0$ y $r(Y(\alpha^*)) \geq r(y_0)$. Se obtiene ahora $r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x) \geq r(y_0)u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)$ y, consecuentemente,

   $$-\int_0^{x_0} r(Y(\alpha^*))u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)\,dx \leq -\int_0^{x_0} r(y_0)u'(Y(\alpha^*))(x - x_0)f(x)\,dx.$$

   Con todo esto, la Ecuación 2.6 puede acotarse del modo siguiente:

   $$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}\right|_{\alpha^*} \leq -r(y_0)\int_0^D u'(Y(\alpha^*))(x - (1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx = 0.$$

   La integral anterior no es más que la de la condición necesaria de primer orden de óptimo, 2.4, y por eso se anula. La derivada de segundo orden tiene entonces signo negativo, lo que nos permite deducir que $\frac{d\alpha}{dW} \leq 0$, demostrándose así que un incremento de la riqueza inicial hace disminuir la tasa de coaseguro óptima α^*.

2. Cuando la aversión absoluta al riesgo es constante, $r(y) = c\ \forall y$, con lo que:

   $$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}\right|_{\alpha^*} = \int_0^D u''(Y(\alpha^*)) \cdot \frac{dY(\alpha^*)}{dW} \cdot (x - (1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx =$$

   $$= -\int_0^D r(Y(\alpha^*)u'(Y(\alpha^*))(x - (1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx =$$

   $$= -c\int_0^D u'(Y(\alpha^*))(x - (1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx = 0$$

   lo que demuestra que la tasa de coaseguro óptima no varía con la riqueza, al ser $\frac{d\alpha}{dW} = 0$.

3. Para el caso de aversión absoluta al riesgo creciente, el razonamiento es similar a la demostración del primer apartado.

   Se tiene ahora $r(Y(\alpha^*)) \geq r(y_0)$ si $0 \leq x \leq x_0$ y $r(Y(\alpha^*)) \leq r(y_0)$ cuando $x_0 \leq x \leq D$; la derivada se acota de la forma:

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial \alpha}\right|_{\alpha^*} \geq -r(y_0) \int_0^D u'(Y(\alpha^*))(x - (1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx = 0.$$

   El signo positivo indica que $\frac{d\alpha}{dW} \geq 0$, de lo que se deduce que un incremento de la riqueza inicial provoca un aumento de α^*. $\square$

Hay que resaltar que, tal como se ha demostrado en la proposición anterior, las situaciones de aversión absoluta al riesgo decreciente, constante o creciente son solo condiciones suficientes para que el seguro óptimo decrezca, permanezca invariante o crezca, respectivamente, no siendo necesaria ninguna de ellas, debido a que estas actitudes ante el riesgo no forman una partición del conjunto de individuos con aversión al riesgo, sino que puede haber funciones de utilidad que no se comportan de ninguno de estos modos.

El caso de aversión absoluta al riesgo constante se usa a menudo como básico, puesto que, como acabamos de ver, tales preferencias eliminan cualquier efecto de la riqueza. Sin embargo, no es la hipótesis más común, ya que para la mayoría de los autores es más realista una aversión absoluta al riesgo decreciente, como se deducía de la Ecuación 1.2, lo que implica, según esta proposición, que el seguro es un bien inferior.

Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que este resultado es válido para pérdidas $\tilde{x}$ que no dependen de la riqueza del individuo. Pero en el mundo cotidiano es, a veces, habitual observar que las pérdidas se incrementan al hacerlo la riqueza, por lo que no se espera necesariamente ver a los individuos más ricos gastar menos en seguro. Sí podemos esperar, sin embargo, como se deduce de la Proposición 2.2.2, que compren menos seguro si la pérdida a la que están expuestos es independiente de su riqueza.

Efecto de un cambio en el precio del seguro

De manera similar a como lo hemos hecho para la riqueza inicial, podemos examinar el efecto que causaría un incremento en el precio del seguro, a consecuencia de un aumento en la tasa de recargo λ, sobre el nivel de cobertura óptima del seguro.

La siguiente proposición resume las situaciones que pueden darse.

Proposición 2.2.3 *Sea* $\lambda > 0$ *la tasa de recargo del seguro, con* $0 < \alpha^* < 1$. *Si suponemos aversión al riesgo por parte del asegurado, entonces el seguro no puede ser un bien Giffen si la aversión absoluta al riesgo es constante o creciente, pero sí puede serlo en el caso en que la aversión absoluta al riesgo sea decreciente.*

Demostración

Necesitamos en este caso determinar el signo de la derivada $\dfrac{d\alpha^*}{d\lambda}$.

Al igual que en la proposición anterior, derivamos implícitamente la condición necesaria de primer orden de óptimo, $\dfrac{dEu}{d\alpha} = 0$, pero lo hacemos ahora respecto de λ, considerándola función de λ y α. Se llega a

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial\lambda\partial\alpha} + \frac{d^2 Eu}{d\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{d\lambda} = 0$$

con lo que

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\lambda\partial\alpha}}{\dfrac{d^2 Eu}{d\alpha^2}}.$$

De nuevo la concavidad de Eu indica que el denominador de esta expresión es negativo[11], con lo que el signo de $\dfrac{d\alpha}{d\lambda}$ coincide con el de $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\lambda\partial\alpha}$, que calcularemos a continuación.

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial\lambda}\right|_{\alpha^*} = -E\tilde{x} \cdot E[u'(Y(\alpha^*))] - \alpha^* E\tilde{x} \cdot E[u''(Y(\alpha^*))(\tilde{x} - (1+\lambda)E\tilde{x})] =$$

[11]Se cumplen así las hipótesis del teorema de la Función Implícita que asegura que α puede expresarse en función de λ, en un entorno del punto crítico.

$$= -E\tilde{x} \cdot E[u'(Y(\alpha^*))] - \alpha^* E\tilde{x} \cdot \frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W} \tag{2.7}$$

Mientras el primer sumando de la Expresión 2.7 es siempre negativo, debido al crecimiento de la función de utilidad u, el segundo término, en el que influye el efecto de la renta, puede tener cualquier signo. Para un nivel positivo de α, como el que suponemos, este sumando tendrá el signo opuesto al de $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W}$.

Usando la Proposición 2.2.3, en la que se demostró que esta derivada de segundo orden es negativa cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente, deducimos que el segundo sumando de la Expresión 2.7 es positivo en ese caso. Si este efecto *pesa* más que el efecto negativo del primer sumando, entonces $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial\lambda}$ será positivo y $\dfrac{d\alpha}{d\lambda}$ también, con lo que el seguro podría considerarse un bien Giffen.

Con aversión absoluta al riesgo constante o decreciente, sin embargo, $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W}$ es nulo o positivo y, por tanto, el segundo término de la Expresión 2.7 es negativo, así como $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial\lambda}$ y, consecuentemente, $\dfrac{d\alpha}{d\lambda} < 0$. Así, en estos dos casos el seguro no será nunca un bien Giffen. □

Efecto de un cambio en la aversión al riesgo

Como en los casos anteriores, observamos que, cuando la prima del seguro es pura, cualquier individuo elegirá una póliza de seguro con cobertura completa, $\alpha^* = 1$, independientemente del grado de aversión al riesgo que presente. Por tanto nos centramos en la proposición siguiente en primas que incluyen factores de recargo positivos, para determinar cómo influye en el seguro óptimo un incremento de la aversión al riesgo.

Proposición 2.2.4 *Sea $\lambda > 0$ el recargo del seguro y $0 < \alpha^* < 1$.*[12] *Un incremento en el grado de aversión al riesgo del individuo en todos los niveles de riqueza conduce a un crecimiento del nivel óptimo de cobertura.*

[12] Sabemos por el Teorema 2.1.2 que la cobertura completa no es óptima en este caso. Suponemos además que la tasa de recargo de la prima no es demasiado elevada, para permitir que el individuo opte por asegurarse, según se ha visto en el Teorema 2.2.1.

Demostración

Sean u y v dos funciones de utilidad, la segunda con mayor grado de aversión al riesgo que la primera, y sean α_u^* y α_v^* los niveles óptimos de cobertura para u y v, respectivamente. Debemos demostrar que $\alpha_v^* \geq \alpha_u^*$.

Por ser la aversión al riesgo de v mayor que la de u, sabemos, según el Teorema 1.3.4, que existe una función real g estrictamente creciente y cóncava, tal que $v = g \circ u$, es decir $v(w) = g(u(w))$, $\forall w$.

Calculemos $\left.\dfrac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*}$:

$$\left.\frac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*} = \left.\frac{dE(g \circ u)}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*} = \int_0^D g'\left(u(Y(\alpha_u^*))\right) u'(Y(\alpha_u^*))(x-(1+\lambda)E\tilde{x})f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{x_0} g'\left(u(Y(\alpha_u^*))\right) u'(Y(\alpha_u^*))(x-x_0)f(x)dx + \int_{x_0}^D g'\left(u(Y(\alpha_u^*))\right) u'(Y(\alpha_u^*))(x-x_0)f(x)dx$$

siendo $x_0 = (1+\lambda)E\tilde{x}$.

Si definimos $y_0 = W - \alpha_u^*(1+\lambda)E\tilde{x} - x_0 + \alpha_u^* x_0$, tenemos en cuenta el decrecimiento de g', a consecuencia de la concavidad de g, y hacemos un razonamiento similar al que se hizo en la demostración de la Proposición 2.2.2, podemos acotar $\left.\dfrac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*}$:

$$\left.\frac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*} \geq g'\left(u(y_0)\right)\left[\int_0^{x_0} u'(Y(\alpha_u^*))(x-x_0)f(x)\,dx + \int_{x_0}^D u'(Y(\alpha_u^*))(x-x_0)f(x)\,dx\right].$$

La última expresión se anula por ser la condición necesaria de óptimo para α_u^*.

Si tenemos en cuenta que $\left.\dfrac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*} \geq 0$, como acabamos de obtener, que $\left.\dfrac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_v^*} = 0$ por la condición necesaria de óptimo y que $\dfrac{dEv}{d\alpha}$ es decreciente debido a la concavidad de $Ev(\tilde{Y}(\alpha))$ respecto de α, se deduce, como queríamos demostrar, que $\alpha_v^* \geq \alpha_u^*$. □

Terminamos con esto el estudio de la demanda óptima de seguro en el caso en que la pérdida a la que está expuesto el asegurado viene representada por una variable aleatoria continua con valores en un intervalo conocido y la indemnización que recibe por parte del asegurador en caso de siniestro es del tipo coaseguro.

Hemos demostrado que el teorema de Mossin sigue siendo válido en esta situación, algo más compleja que la planteada por dicho autor. Hemos determinado también los efectos que producen sobre la cantidad óptima de cobertura los cambios en variables como la riqueza inicial del individuo, el precio del seguro, a través de la tasa de recargo de la prima, y la aversión al riesgo del asegurado.[13] En concreto, hemos visto que el seguro es un bien inferior únicamente cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente, situación considerada empíricamente como la más habitual. Cuando dicha aversión es constante, los cambios en la riqueza inicial no influyen en la cantidad óptima de seguro que se contrata.

En cuanto al análisis del efecto que produce un aumento de la tasa de recargo de la prima, se observa que, bajo la hipótesis de aversión absoluta al riesgo decreciente, la cobertura óptima podría aumentar, siendo éste el único caso en que podríamos decir que el seguro es un bien Giffen.

Por último, se ha demostrado también que el incremento en la aversión al riesgo supone la necesidad de contratar una indemnización más elevada, como podía pensarse.

En el apartado siguiente, haremos un análisis similar al que se ha llevado a cabo en éste, pero aplicado a indemnizaciones de tipo franquicia, que suelen ser bastante habituales en determinados ramos del seguro.

2.2.4. Indemnización de tipo franquicia

El coaseguro proporcional que hemos estudiado en el Apartado 2.2.2 es el modelo más simple de demanda de seguro, considerando posibles daños con valores en un intervalo fijado. Sin embargo, los contratos de seguro incluyen a menudo otras formas de reparto de la pérdida entre asegurador y asegurado. Suelen ser frecuentes los seguros de tipo franquicia, que de hecho son los óptimos bajo hipótesis bastante amplias, y bajo hipótesis de precios bastante simples pero realistas. Tienen la ventaja para el asegurado de estar asociados a primas más bajas y para el asegurador de reducir los gastos que supone cubrir pérdidas de pequeña cuantía.

[13] Solo se han considerado para ello seguros con primas recargadas, ya que se ha demostrado que, con primas puras, lo óptimo es siempre una cobertura total, no teniendo entonces sentido alguno estudiar su comportamiento.

En el ramo del automóvil, los seguros con franquicia son un eslabón intermedio entre las pólizas que incluyen solo las garantías más básicas y las conocidas como *seguro a todo riesgo*. Se fija una cantidad más o menos elevada según costumbre de la compañía y la preferencia del conductor, por debajo de la cual los daños que sufra el vehículo asegurado serán por cuenta del propietario, mientras que si la consecuencia del accidente se refleja en un coste más alto, la compañía pagará lo que sobrepase la franquicia fijada.

En este apartado, examinaremos algunos aspectos de la demanda de seguro cuando éste es de tipo franquicia. Si denotamos a ésta por L, se verifica que $L \in [0, D]$ y la indemnización que el asegurador paga al asegurado en caso de siniestro viene dada por $I(x) = \text{máx } \{0, x - L\}$, o lo que es lo mismo,

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq L \\ x - L & \text{si } x > L \end{cases} .$$

El asegurador pagará, como se ha dicho, una cantidad igual a lo que la pérdida supera a la cuantía L, si es el caso, mientras que si la pérdida es inferior a L, correrá totalmente por cuenta del asegurado, que no recibirá cobertura alguna del asegurador. En particular, el caso $L = 0$ corresponde a cobertura completa para el individuo, mientras que si la franquicia es $L = D$ la cobertura será nula.

En lo sucesivo, tratamos de caracterizar el nivel óptimo de franquicia y analizar su comportamiento frente a las variables que pueden influir en él. Para ello, debemos tener en cuenta que la prima general dada en la Ecuación 2.1 ya no puede ser escrita como función de la pérdida esperada del modo en que se hacía en la Ecuación 2.2.

Supondremos de nuevo que los costes del seguro son proporcionales a la indemnización esperada, $c(I(\tilde{x})) = \lambda I(\tilde{x})$, con lo que la prima, para un nivel de franquicia L, se calcula como:

$$P(L) = E[I(\tilde{x}) + \lambda I(\tilde{x})] = (1+\lambda)E[I(\tilde{x})] = (1+\lambda)\int_L^D (x-L)f(x)\,dx =$$

$$= (1+\lambda)\left[(x-L)\cdot F(x)]_L^D - \int_L^D F(x)\,dx\right] = (1+\lambda)\left[(D-L) - \int_L^D F(x)\,dx\right] =$$

$$= (1+\lambda)\int_L^D (1-F(x))dx.$$

Aplicando la Regla de Leibnitz para derivar bajo el signo integral, se puede calcular la prima marginal cuando se incrementa el nivel de franquicia:

$$P'(L) = -(1+\lambda)(1-F(L)). \tag{2.8}$$

Este resultado indica que un incremento infinitesimal en el nivel de franquicia conlleva un pago más bajo para el asegurado en todos los estados en los que la pérdida excede la franquicia. La probabilidad de esos estados es

$$\text{Pr }[\tilde{x} > L] = 1 - \text{Pr }[\tilde{x} \leq L] = 1 - F(L).^{14}$$

Con la elección de un nivel de franquicia L, la riqueza final puede escribirse de cualquiera de las formas siguientes:

$$Y(L) = W - P(L) - \tilde{x} + \text{máx }\{0, \tilde{x} - L\} = W - P(L) - \text{mín }\{\tilde{x}, L\};$$

$$Y(L) = \begin{cases} W - P(L) - x & \text{si } x < L \\ W - P(L) - L & \text{si } x \geq L. \end{cases}$$

El objetivo del individuo es elegir la franquicia que le proporcione la mayor utilidad esperada; por eso, se pretende resolver el problema:

$$\underset{0 \leq L \leq D}{\text{Max}} \quad \int_0^L u(W - P(L) - x) f(x)\, dx + \int_L^D u(W - P(L) - L) f(x)\, dx \tag{2.9}$$

La condición de primer orden para la maximización, $\dfrac{dEu}{dL} = 0$, es:

$$\begin{aligned} &-P' \int_0^L u'(W - P - x) f(x)\, dx + (-P' - 1) \int_L^D u'(W - P - L) f(x)\, dx = \\ &= -P' \int_0^L u'(W - P - x) f(x)\, dx + (-P' - 1)(1 - F(L)) u'(W - P - L) = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

El primer sumando de la Ecuación 2.10 representa la utilidad neta marginal del beneficio al incrementarse L, condicionada a que la pérdida no excede el nivel de franquicia. El segundo término es menos el coste de la utilidad marginal neta de una franquicia más alta, dado que las pérdidas exceden de la franquicia. Así, la

[14] Aunque la probabilidad también cambia al hacerlo L, este efecto es de importancia secundaria y, debido a la continuidad de la distribución de pérdida, desaparece en el límite.

interpretación de la condición de primer orden es la estándar de elegir L^* tal que el beneficio marginal coincida con el coste marginal.

La derivada de segundo orden de la función objetivo puede escribirse como sigue:

$$\frac{d^2Eu}{dL^2} = (1+\lambda)(-f(L))\int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + (-P')u'(W-P-L)f(L)+$$

$$+(-P')^2\int_0^L u''(W-P-x)f(x)\,dx + (1+\lambda)(-f(L))(1-F(L))u'(W-P-L)+$$

$$+(-P'-1)(-f(L))u'(W-P-L) + (-P'-1)^2(1-F(L))u''(W-P-L)$$

Multiplicando todos los términos que contienen $f(L)$ por $(1-F(L))/(1-F(L))$ y simplificando, se tiene que $\dfrac{d^2Eu}{dL^2}$ se puede expresar como:

$$\frac{-f(L)}{1-F(L)}\left[-P'\int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + (-P'-1)(1-F(L))u'(W-P-L)\right]+$$

$$+\left[(-P')^2\int_0^L u''(W-P-x)f(x)\,dx + (-P'-1)^2(1-F(L))u''(W-P-L)\right] < 0.$$

El primer término de esta expresión es nulo por la condición de primer orden, mientras que el segundo es negativo debido a la concavidad de u. De esta desigualdad se deduce que todo punto crítico será un máximo global único.

Una vez caracterizado el nivel de franquicia óptimo a partir de las condiciones necesaria de primer orden y suficiente de segundo orden, nos planteamos a continuación si el teorema de Mossin puede extenderse al caso de seguros de este tipo. Esta cuestión queda aclarada con la siguiente proposición:

Proposición 2.2.5 *Considérese un individuo que siente aversión al riesgo, que contrata un seguro de tipo franquicia y con tasa de recargo de la prima positiva. Entonces la cobertura completa no es óptima, aunque sí lo sería, en cambio, para una tasa de recargo nula.*

Demostración

Llamando $m = \text{mín } \{\tilde{x}, L\}$, reescribimos la derivada de Eu, obtenida en la Ecuación 2.10, del modo siguiente:

$$\frac{dEu}{dL} = (1+\lambda)(1-F(L)) \int_0^D u'(W-P(L)-m)dF - \int_L^D u'(W-P(L)-L)dF =$$

$$= (1+\lambda)(1-F(L)) \int_0^D u'(W-P(L)-m)dF - u'(W-P(L)-L)(1-F(L)) =$$

$$= (1-F(L)) \left[(1+\lambda) \int_0^D u'(W-P(L)-m)dF - \int_0^D u'(W-P(L)-L)dF \right].$$

Si $\lambda = 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$\left.\frac{dEu}{dL}\right|_{\lambda=0} = (1-F(L)) \left[\int_0^D \left(u'(W-P(L)-m) - u'(W-P(L)-L)\right) dF \right].$$

$\left.\frac{dEu}{dL}\right|_{\lambda=0}$ se anula para $L = 0$, que sería por tanto un punto crítico y la única solución del problema. Así, una franquicia nula equivale a cobertura completa por parte del asegurador.

Sin embargo, cuando el recargo de la prima es positivo, $\lambda > 0$:

$$\left.\frac{dEu}{dL}\right|_{L=0} =$$

$$= (1+\lambda) \int_0^D u'(W-P(L))dF - \int_0^D u'(W-P(L))dF = \lambda \int_0^D u'(W-P(L))dF > 0$$

debido al crecimiento de u, con lo que el óptimo no es en este caso una franquicia nula sino positiva y, por tanto, la cobertura completa no es el óptimo, como indica la proposición. □

Se puede también analizar el comportamiento de la franquicia óptima frente a cambios en la riqueza inicial del asegurado, la tasa de recargo de la prima y la aversión al riesgo del individuo, como se hizo para el coaseguro proporcional. Veremos que los resultados que se obtienen son idénticos para las indemnizaciones de ambos tipos.

2.2.5. Análisis de sensibilidad para la franquicia

Efecto de un cambio en la riqueza inicial

Empezamos estudiando cómo afecta la riqueza inicial del asegurado a la franquicia óptima para él. La siguiente proposición resume los distintos casos posibles, según el tipo de monotonía que presente la aversión absoluta al riesgo del individuo.

Proposición 2.2.6 *Sea $\lambda > 0$ la tasa de recargo del seguro. Entonces, si se produce un incremento en el nivel de riqueza inicial W de un individuo adverso al riesgo, la franquicia óptima L^* tiene el siguiente comportamiento:*

1. *L^* crece cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente.*
2. *L^* no varía cuando la aversión absoluta al riesgo es constante.*
3. *L^* decrece cuando la aversión absoluta al riesgo es creciente.*

Demostración

Estudiando el signo de la derivada $\dfrac{dL^*}{dW}$, podremos determinar el efecto que produce en el nivel óptimo de franquicia un incremento en la riqueza inicial del individuo asegurado.

L^* verifica la condición necesaria de primer orden dada en la Ecuación 2.10. Si la consideramos como función de W y de L y la derivamos implícitamente respecto de W, se tiene que

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L} + \frac{d^2 Eu}{dL^2} \cdot \frac{dL}{dW} = 0$$

con lo que

$$\frac{dL}{dW} = -\frac{\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}}{\dfrac{d^2 Eu}{dL^2}}. \tag{2.11}$$

El signo negativo del denominador implica que $\dfrac{dL}{dW}$ será positivo, negativo o nulo cuando lo sea $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}$. Obtenemos entonces esta derivada de segundo orden:

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}\right|_{L^*} = -P' \int_0^L u''(W-P-x)f(x)\,dx + (-P'-1)\int_L^D u''(W-P-L)f(x)\,dx$$

pudiéndose expresar también en función del índice de aversión absoluta al riesgo del modo:

$$P' \int_0^L r(W-P-x)u'(W-P-x)f(x)\,dx + (P'+1)\int_L^D r(W-P-L)u'(W-P-L)f(x)\,dx.$$

Esta expresión se acota de forma distinta según el tipo de aversión al riesgo que presente el asegurado:

1. Si $0 \leq x \leq L$, entonces $W-P-x \geq W-P-L$ y el decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo implica que $r(W-P-x) \leq r(W-P-L)$. Esta última desigualdad y el signo negativo de P', que se deduce de la Ecuación 2.8, determinan el signo no negativo para la derivada que nos interesa. En efecto:

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}\right|_{L^*} \geq r(W-P-L)\left(P' \int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + (P'+1)\int_L^D u'(W-P-L)f(x)\,dx\right) = 0,$$

anulándose esta expresión por tratarse de la condición necesaria de primer orden de óptimo dada en la Ecuación 2.10, aunque cambiada de signo.

Se demuestra así que el nivel de franquicia crecería y, por tanto, la cobertura disminuiría, con un aumento de la riqueza inicial del individuo asegurado.

2. Cuando la aversión absoluta al riesgo es constante, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $r(W-P-x) = r(W-P-L) = c$. Entonces,

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}\right|_{L^*} = c \cdot r(W-P-L)\left(P' \int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + (P'+1)\int_L^D u'(W-P-L)f(x)\,dx\right) = 0,$$

lo que indica que la riqueza inicial no influye en el nivel de franquicia.

3. Si estudiamos el caso de aversión absoluta al riesgo creciente, se obtiene la desigualdad contraria a la del primer apartado de esta proposición, es decir: $r(W-P-x) \leq r(W-P-L)$ cuando $0 \leq x \leq L$, y así

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial W \partial L}\right|_{L^*} \leq 0$$

de lo que se deduce que un aumento en la riqueza inicial conduce a una menor franquicia o, lo que es lo mismo, a un mayor nivel de cobertura. □

Efecto de un cambio en el precio del seguro

Planteamos ahora cambios en el precio del seguro a través de un aumento en la tasa de recargo de la prima. La proposición que enunciamos a continuación vuelve a decir, como para el coaseguro proporcional, que el seguro podría ser un bien Giffen, aunque no tiene por qué serlo forzosamente, pero únicamente existe tal posibilidad cuando la aversión absoluta al riesgo sea decreciente. En las demás situaciones, el seguro no sería nunca un bien Giffen.

Proposición 2.2.7 *Sea $\lambda > 0$ la tasa de recargo del seguro. Si suponemos aversión al riesgo por parte del asegurado, entonces el seguro con indemnización de tipo franquicia no puede ser un bien Giffen si la aversión absoluta al riesgo es constante o creciente, pero sí puede serlo en el caso en que la aversión absoluta al riesgo sea decreciente.*

Demostración

El seguro será un bien Giffen si el nivel de cobertura contratada aumenta con el precio; es decir, si la franquicia disminuye. Basta por tanto obtener el signo de $\dfrac{dL^*}{d\lambda}$ para determinar si el seguro es un bien Giffen.

Siguiendo un razonamiento similar al de proposiciones anteriores, este signo vendrá determinado por el de $\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial \lambda \partial L}$.

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial \lambda \partial L} = -(1-F(L))\left[\int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + \int_L^D u'(W-P-L)f(x)\,dx\right] -$$

$$-\int_L^D (1-F(x))\,dx \left[-P'\int_0^L u''(W-P-x)f(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+(-P'-1)\int_L^D u''(W-P-L)f(x)\,dx\right]$$

El primer sumando es siempre positivo, por el crecimiento de la utilidad, mientras que el segundo coincide con

$$-\int_L^D (1-F(x))dx \cdot \frac{\partial^2 Eu}{\partial\lambda\partial L}$$

que, según lo demostrado en la Proposición 2.2.6, será positivo o nulo con aversión absoluta al riesgo creciente o constante, respectivamente, y negativo con aversión absoluta decreciente. Consecuentemente, solo en este último caso podría obtenerse un signo negativo para $\dfrac{dL^*}{d\lambda}$ y sería negativo si el segundo sumando del que hemos hablado dominara al primero. En los otros dos casos, $\dfrac{dL^*}{d\lambda}$ será siempre positivo con lo que la cobertura disminuye al aumentar el precio. Así pues, no estaríamos hablando de un bien Giffen. $\square$

Efecto de un cambio en la aversión al riesgo

Tratamos por último la influencia que tiene, sobre el nivel óptimo de franquicia en el seguro, un incremento de la aversión al riesgo del asegurado. Demostraremos en la siguiente proposición que el efecto que esto produce es una bajada de la franquicia, lo que trae consigo un aumento de la cobertura óptima para el individuo considerado.

Proposición 2.2.8 *Sea $\lambda > 0$ el recargo del seguro. Un incremento en el grado de aversión al riesgo del individuo en todos los niveles de riqueza conduce a un decremento en el nivel óptimo de franquicia.*

Demostración

Denotaremos por u y v a dos funciones de utilidad, siendo el grado de aversión al riesgo que presenta la segunda mayor que el de la primera; L_u^* y L_v^* serán los niveles óptimos de franquicia correspondientes a las funciones u y v, respectivamente. La tesis de la proposición nos indica que $L_v^* \leq \text{Ł}_u^*$.

Según el Teorema 1.3.4, debe existir una función g real, estrictamente creciente y cóncava, que cumpla que $v = g \circ u$, es decir $v(w) = g(u(w))$, $\forall w$.

Seguiremos un razonamiento similar al de otras ocasiones:

Sabemos que $\left.\dfrac{dEv}{dL}\right|_{L_v^*} = 0$, cumpliéndose así la condición necesaria de óptimo para L_v^*; evaluaremos esta derivada en el óptimo para u, L_u^*, observándose que tiene signo negativo; concluimos por último, gracias a la concavidad de Ev traducida en el decrecimiento de $\dfrac{dEv}{dL}$, que $L_v^* \leq \text{Ł}_u^*$. Lo vemos seguidamente:

$$\left.\frac{dEv}{dL}\right|_{L_u^*} = -P' \int_0^{L_u^*} g'\left(u(W-P-x)\right) \cdot u'(W-P-x)f(x)dx +$$

$$+(-P'-1)\int_{L_u^*}^{D} g'\left(u(W-P-L_u^*)\right)) \cdot u'(W-P-L)f(x)dx.$$

Teniendo en cuenta que se verifica que $W-P-x \geq W-P-L_u^*$ cuando $0 \leq x \leq L_u^*$, el crecimiento de u supone además que $u(W-P-x) \geq u(W-P-L_u^*)$; g es una función cóncava y, así:

$$\int_0^L g'\left(u(W-P-x)\right) \cdot u'(W-P-x)f(x)\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^L g'\left(u(W-P-L_u^*)\right) \cdot u'(W-P-x)f(x)\,dx.$$

Por tanto,

$$\left.\frac{dEv}{dL}\right|_{L_u^*} \leq g'(u(W-P-L_u^*))\left[-P'\int_0^L u'(W-P-x)f(x)\,dx + \right.$$

$$\left.(-P'-1)\int_L^D u'(W-P-L_u^*)f(x)\,dx\right) = 0.$$

Este signo negativo demuestra el resultado que buscábamos: la franquicia óptima disminuye cuando aumenta la aversión al riesgo y, consecuentemente, la cobertura también aumenta. □

Queda así analizada la demanda de seguro óptima para asegurados que se enfrentan a pérdidas aleatorias acotadas entre dos valores conocidos cuando la indemnización que paga la compañía aseguradora consiste en la cobertura total del daño por encima de una franquicia.

Se ha visto que la franquicia es siempre una cantidad positiva cuando el individuo que compra el seguro tiene aversión hacia el riesgo y paga una prima recargada. Si la prima fuera pura, no habría franquicia y la cobertura sería total. Se demuestra así que el teorema de Mossin se verifica también en la situación planteada en este apartado.

Siguiendo el mismo esquema que para el coaseguro proporcional, se ha caracterizado en primer lugar la franquicia óptima y se han determinado también los efectos que producen sobre ella, y consecuentemente sobre la cantidad óptima de seguro, cambios en la riqueza inicial del individuo, en el precio del seguro y en la aversión al riesgo del asegurado. De nuevo se han vuelto a considerar solo los seguros con primas recargadas, puesto que con primas puras, el óptimo es la cobertura total.

Los resultados obtenidos han sido similares al caso del coaseguro. Concretamente, se ha probado: que el seguro es un bien inferior solo cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente; que, bajo esta misma hipótesis, la franquicia puede disminuir al aumentar la tasa de recargo de la prima, con lo que el seguro podría considerarse un bien Giffen; por último, que un incremento en el grado de aversión al riesgo se traduce en la contratación de una franquicia más baja, para tener derecho así a una mayor cobertura en caso de siniestro.

Hemos estudiado hasta ahora situaciones en las que la riqueza final del individuo considerado se ve modificada por el acontecimiento aleatorio de un único riesgo. No obstante, no es éste el modelo más acorde a la realidad, puesto que, en general, suelen existir otras incertidumbres que afectan a la riqueza final, pero contra las que no es posible asegurarse. Plantearemos, en el apartado siguiente, situaciones más generales y determinaremos cómo influyen estos riesgos en la decisión del individuo de asegurarse contra otro riesgo al que afectan, así como, caso de hacerlo, en la elección de la cobertura más adecuada para ello.

2.3. Modelos con múltiples riesgos

La contratación de un seguro para protegerse de pérdidas que afecten al patrimonio de un individuo puede estar influenciada por otras situaciones que, aunque no intervengan directamente en el acontecimiento del siniestro, sí afectan a la riqueza del asegurado en cualquier momento. Esta incertidumbre puede provocar en el cliente la elección de una mayor cobertura para protegerse así indirectamente.

Mayers y Smith (1983) y Doherty y Schlesinger (1983) fueron los primeros que trataron este tipo de cuestiones. Posteriormente Schlesinger y Schulenburg (1987), Doherty y Schlesinger (1990), Meyer y Meyer (1998) y Mahul (2000), entre otros, abordan también situaciones similares.

Vamos a dedicar este apartado a tratar varios tipos de riesgos adicionales a aquél contra el que el individuo se asegura. Trataremos en primer lugar la incertidumbre que produce en el asegurado la posibilidad de que el asegurador no cumpla con el pago de la indemnización acordada en caso de siniestro. Abordaremos luego otros riesgos secundarios, dependientes o no del riesgo asegurado, pero que afectan igualmente a la riqueza final del individuo y pueden intervenir en la elección óptima de cobertura.

2.3.1. Riesgo de impago

El riesgo de impago está presente en casi todas las situaciones de seguro, aunque es a menudo ignorado en la mayoría de los modelos planteados en la Teoría de Demanda de Seguro. Estamos hablando de la posibilidad de que el asegurador no llegue a pagar la indemnización a la que se comprometió con el asegurado en caso de acontecer el siniestro que da lugar al daño asegurado. Uno de los motivos más obvio para el impago es que el asegurador puede ser insolvente o no ser capaz financieramente de hacer frente a la totalidad de las reclamaciones de sus clientes. Sin embargo, ésta no es la única explicación para el impago. Éste puede deberse también, por ejemplo, a acontecimientos que anulen la cobertura del seguro (como la inclusión de un periodo de prueba para ciertos peligros) o, incluso, la exclusión de cobertura en situaciones extraordinarias de disturbios civiles o guerra.[15]

Plantearemos el modelo de una forma simple, suponiendo solo el caso de impago total de una reclamación de un asegurado para el que la pérdida que puede producirse es de cuantía fija D y sucede con probabilidad p, siendo $0 < p < 1$. La indemnización que debe pagar el asegurador es proporcional a la pérdida[16], en este caso αD, pero solo hay una probabilidad $0 < q < 1$ de que pueda pagar esta reclamación, que será por tanto impagada con probabilidad $1 - q$.

Con estas hipótesis, la prima pura del seguro viene dada por $P(\alpha) = \alpha pqD$. Pretendemos ver cómo afectan los siniestros no-indemnizados a la demanda de seguro. Consideramos por ello únicamente el caso básico en que la prima es pura, sin introducir recargo de ningún tipo.

En la situación planteada, son tres los estados independientes que pueden darse:

- que no ocurra pérdida,
- que ocurra pérdida y el asegurador pague la indemnización acordada,
- que ocurra pérdida pero el asegurador no pague ninguna indemnización.

Se manifiestan con probabilidades respectivas $1 - p$, pq y $p(1 - q)$.

La riqueza final del asegurado es entonces la variable aleatoria $Y(\alpha)$ dada por

$$Y(\alpha) = \begin{cases} Y_1 = W - P(\alpha) & \text{con probabilidad } 1 - p; \\ Y_2 = W - P(\alpha) - D + \alpha D & \text{con probabilidad } pq; \\ Y_3 = W - P(\alpha) - D & \text{con probabilidad } p(1 - q) \end{cases}.$$

El objetivo del individuo vuelve a ser la maximización de la utilidad que

[15] Podríamos considerar incluso el caso en que el asegurador decidiera investigar la reclamación del asegurado, provocando un aplazamiento en el pago de la indemnización, lo que reduce su valor actual y produce el mismo efecto que si pagara algo menos de la cantidad pactada. Eeckhoudt *et al.* (1988) tratan este asunto.

[16] En un modelo como éste no hay distinción entre coaseguro y franquicia. Una tasa de coaseguro α supone que la indemnización es αD y el asegurado soporta entonces una pérdida neta de $(1 - \alpha)D$, siendo este seguro equivalente a otro con nivel de franquicia $L = (1 - \alpha)D$.

espera conseguir, que se expresa como:

$$\max_{0\leq\alpha\leq 1} \quad Eu(\alpha) = (1-p)u(Y_1) + pqu(Y_2) + p(1-q)u(Y_3).$$

La condición de primer orden para el problema de maximización planteado es

$$\frac{dEu}{d\alpha} = -(1-p)pqDu'(Y_1) + pq(1-pq)Du'(Y_2) - p(1-q)pqDu'(Y_3) = 0 \quad (2.12)$$

Dividiendo por D y reordenando, podemos reescribir esta expresión como

$$u'(Y_2) = \frac{1-p}{1-pq}u'(Y_1) + \frac{p(1-q)}{1-pq}u'(Y_3)$$

y, llamando $\beta = \dfrac{1-p}{1-pq}$, se tiene

$$u'(Y_2) = \beta u'(Y_1) + (1-\beta)u'(Y_3)$$

con $0 < \beta < 1$. Es decir, $u'(Y_2)$ es una media ponderada de $u'(Y_1)$ y $u'(Y_3)$.

Lema 2.3.1 *Se verifica que* $Y_1 > Y_2 > Y_3$.

Demostración

Evidentemente, $Y_1 \geq Y_2 \geq Y_3$. Si fuera $Y_1 = Y_2$, entonces

$$u'(Y_2) = \beta u'(Y_2) + (1-\beta)u'(Y_3) \Leftrightarrow u'(Y_2) = u'(Y_3)$$

y la concavidad estricta de u (equivalente al crecimiento estricto de u') nos llevaría a que $Y_2 = Y_3$, lo cual es una contradicción, ya que se tendría por un lado $Y_2 = Y_1 + (\alpha - 1)D$, con lo que $\alpha = 1$, y por otro lado $Y_3 = Y_2 - \alpha D$, que implica $\alpha = 0$. Por tanto $Y_1 \neq Y_2$ y de la misma forma se demuestra que $Y_2 \neq Y_3$. En consecuencia, $Y_1 > Y_2 > Y_3$, con lo que $\alpha^* < 1$. □

Vemos así que si un individuo se enfrenta un riesgo de impago por parte del asegurador y lo tiene en cuenta en la elección de un contrato de seguro, no se cumplirá el teorema de Mossin ya que, sin tasa de recargo en la prima, la situación óptima no consiste en contratar una cobertura completa.

Hay que resaltar además que, independientemente de que sea óptimo o no, el hecho de tener derecho a una indemnización total del siniestro no asegura totalmente al individuo cuando existe posibilidad de impago. Si el asegurador no puede cumplir con su obligación y deja de pagar la reclamación, el asegurado estará en peor situación que si no tuviera seguro, puesto que habrá desembolsado una prima. Cuanto más elevada sea la cuantía asegurada, más alta entonces será la pérdida potencial de la prima. No es por tanto sorprendente que $\alpha^* = 1$ no sea óptimo.

Siguiendo un esquema similar al planteado en las situaciones analizadas con anterioridad, estudiamos ahora, a efectos comparativos sobre todo, qué tipo de variación se produce en la cobertura óptima contratada cuando aumenta la riqueza inicial o la aversión al riesgo del asegurado[17] e incluimos también la influencia de un cambio en la probabilidad de solvencia del asegurador.

Observaremos que la introducción en el modelo de un riesgo secundario modifica notablemente los resultados obtenidos en presencia de un único riesgo.

Efecto de un cambio en la riqueza inicial

Se trata aquí de ver cuál es el comportamiento de la cobertura óptima, reflejada por la tasa de coaseguro α^*, cuando se considera un asegurado con mayor riqueza inicial. Como se ha hecho ya en otros análisis de este tipo en apartados anteriores, consideramos la condición necesaria de óptimo, 2.12, como función de las dos variables que nos interesan ahora: la riqueza inicial y la tasa de coaseguro. A partir de ella, calculamos $\frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W}$ cuyo signo coincide con el de $\frac{d\alpha}{dW}$, dándonos éste respuesta a la cuestión planteada.

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W} = -(1-p)pqDu''(Y_1) + pq(1-pq)Du''(Y_2) - p(1-q)pqDu''(Y_3)$$

y en función del índice de aversión absoluta al riesgo:

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial W} = (1-p)pqDr(Y_1)u'(Y_1) - pq(1-pq)Dr(Y_2)u'(Y_2) + p(1-q)pqDr(Y_3)u'(Y_3).$$

[17]No tratamos ahora el efecto de un cambio en el precio del seguro, ya que estamos considerando una tasa de recargo nula.

Dado que suponemos aversión absoluta al riesgo, $r(Y_2) > 0$, y el signo de esta expresión será el mismo si la dividimos por $r(Y_2)$:

$$(1-p)pqD\frac{r(Y_1)}{r(Y_2)}u'(Y_1) - pq(1-pq)Du'(Y_2) + p(1-q)pqD\frac{r(Y_3)}{r(Y_2)}u'(Y_3). \qquad (2.13)$$

Debemos ahora tener en cuenta los distintos tipos de aversión absoluta al riesgo para ver qué ocurre en cada uno de ellos:

Si la aversión al riesgo es decreciente, se verifica que $r(Y_1) \leq r(Y_2) \leq r(Y_3)$, puesto que $Y_1 \geq Y_2 \geq Y_3$ según se ha demostrado. Comparando las expresiones 2.12 y 2.13, se puede ver que el segundo sumando coincide en ambas (en valor absoluto); en cuanto a los otros dos, tienen un comportamiento opuesto: mientras el primero es menor en la expresión 2.13, con el segundo ocurre justo lo contrario, como consecuencia de la relación entre los índices de aversión absoluta al riesgo para las riquezas Y_1, Y_2 e Y_3. No se puede determinar en general cuál de los dos efectos domina, siendo imposible entonces conocer el signo de $\frac{d\alpha}{dW}$. A diferencia, entonces, del caso de riesgo único sin considerar el riesgo de impago, el seguro no es ahora necesariamente un bien inferior.

Lo mismo ocurre cuando la aversión absoluta al riesgo es creciente. Se cumple ahora que $r(Y_1) \geq r(Y_2) \geq r(Y_3)$, con lo que el primer sumando de 2.13 es mayor que el de 2.12, dándose lo contrario en el tercer sumando. De cualquier modo, seguimos sin poder prever el signo de la derivada que nos ocupa.

Sin embargo, si suponemos que la aversión absoluta al riesgo es constante, sí se llega al mismo resultado que en ausencia del riesgo de impago. La Expresión 2.13 se convierte en esta ocasión en la condición necesaria de óptimo, 2.12, aunque cambiada de signo. De todos modos, se anula igualmente y así se deduce que un cambio en el nivel de riqueza inicial del asegurado no afecta a la elección de la tasa de coaseguro óptima.

Efecto de un cambio en la aversión al riesgo

En lo que se refiere al efecto que puede producir sobre la cobertura óptima un incremento en la aversión al riesgo del asegurado, se puede demostrar que, en contraste con el caso de riesgo único tratado en apartados anteriores, un incremento en aquél no llevará necesariamente a un incremento en el nivel de cobertura del seguro. Aunque un individuo con más aversión al riesgo apreciaría la cobertura de seguro adicional cuando no hay riesgo de impago, una mayor aversión al riesgo también hace que se tema aún más el resultado del peor caso: pérdida y asegurador insolvente. Lo comprobamos analíticamente a continuación:

Sea v una función de utilidad que presenta mayor aversión al riesgo que u. Según el Teorema 1.3.4, existe una función g estrictamente creciente y cóncava, tal que $v = g \circ u$, es decir $v(w) = g(u(w))$ para todo w. La función a optimizar es ahora

$$Ev(\alpha) = (1-p)v(Y_1) + pqv(Y_2) + p(1-q)v(Y_3),$$

siendo como antes

$$\begin{aligned} Y_1 &= W - P(\alpha); \\ Y_2 &= W - P(\alpha) - D + \alpha D; \\ Y_3 &= W - P(\alpha) - D. \end{aligned}$$

La condición de primer orden evaluada en el óptimo del problema para u, α_u^*, es:

$$\left.\frac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*} =$$

$$-g'[u(Y_1)](1-p)pqDu'(Y_1)+g'[u(Y_2)]pq(1-pq)Du'(Y_2)-g'[u(Y_3)]p(1-q)pqDu'(Y_3).$$

Dividiendo por $g'[u(Y_2)]$, que es positivo debido al crecimiento de g, se tiene que el signo de $\left.\frac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*}$ coincide con el de

$$\frac{-g'[u(Y_1)]}{g'[u(Y_2)]}(1-p)pqDu'(Y_1) + pq(1-pq)Du'(Y_2) - \frac{g'[u(Y_3)]}{g'[u(Y_2)]}p(1-q)pqDu'(Y_3).$$

Se observa que el primer sumando de esta expresión es menor que el correspondiente de la Ecuación 2.12, ambos en valor absoluto, mientras que con el tercer sumando ocurre lo contrario: el de la última ecuación obtenida es mayor que el de 2.12, en valor absoluto. Esto es debido a que

$$Y_1 > Y_2 > Y_3 \Rightarrow g'[u(Y_1)] < g'[u(Y_2)] < g'[u(Y_3)] \Rightarrow \frac{g'[u(Y_1)]}{g'[u(Y_2)]} < 1 < \frac{g'[u(Y_3)]}{g'[u(Y_2)]}.$$

Sin embargo, no es posible predeterminar cuál de esos dos efectos dominará, a priori, por lo que, teniendo en cuenta que el segundo sumando es el mismo en ambas ecuaciones, el signo de $\left.\frac{dEv}{d\alpha}\right|_{\alpha_u^*}$ no está determinado. Puede ser tanto positivo como negativo, con lo que no se puede predecir si α_u^* será mayor o menor que α_v^*.

Efecto de un cambio en la probabilidad de solvencia

Con respecto a lo que ocurre con la cantidad óptima de cobertura cuando cambia la probabilidad de que el asegurador pague totalmente la indemnización prevista, resulta sorprendente que, con primas puras, un incremento en dicha probabilidad no lleva necesariamente a un mayor nivel de cobertura. Para demostrarlo, usamos de nuevo la concavidad de $Eu(Y(\alpha))$ y el hecho de que

$$\frac{d\alpha}{dq} = -\frac{\dfrac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial q}}{\dfrac{d^2 Eu}{d\alpha^2}}.$$

El signo de $\frac{d\alpha}{dq}$ coincidirá con el de

$$\left.\frac{\partial^2 Eu}{\partial\alpha\partial q}\right|_{\alpha^*} = p\alpha DH(\alpha^*) + p^2 qD[u'(Y_3) - u'(Y_2)], \tag{2.14}$$

donde $H(\alpha)$ se define como la condición de primer orden de la Ecuación 2.12, pero calculada para $-u'$ en lugar de para u:

$$H(\alpha) = (1-p)pqDu''(Y_1) - pq(1-pq)Du''(Y_2) + p(1-q)pqDu''(Y_3)$$

El nivel de cobertura del seguro crecerá debido a un incremento en q si y solo si la derivada dada en la Ecuación 2.14 es positiva.

Aunque el segundo término del miembro de la derecha de 2.14 es positivo al ser $Y_2 > Y_3$ y u' decreciente, el primer término puede ser positivo o negativo.

Si u presenta, por ejemplo, aversión absoluta al riesgo decreciente, sabemos que $-u'$ es una función de utilidad con más aversión al riesgo que u.[18] Hemos

[18] Ver la Proposición 1.6.4 del Capítulo 1.

visto que el efecto de la aversión al riesgo sobre la cantidad óptima de seguro es indefinida, por lo que el signo de $H(\alpha^*)$ puede ser tanto positivo como negativo. Por tanto, en general, no podemos deducir que se produzca un incremento de la cobertura óptima.

Existen, sin embargo, dos formas particulares de la función de utilidad que hacen que $\dfrac{d\alpha^*}{dq} > 0$ a pesar de los otros parámetros del modelo:

La primera sucede cuando u es cuadrática, con lo que $H(\alpha) = 0$ para todo α. En efecto, en este caso u'' es una constante K, con lo cual $H(\alpha)$ toma el valor

$$(1-p)pqDK - pq(1-pq)DK + p(1-q)pqDK = KDpq(1-p-1+pq+p-pq) = 0.$$

La segunda situación es cuando u presenta aversión absoluta al riesgo constante, en cuyo caso $-u'$ y u representan la misma aversión al riesgo[19]. En efecto, si el índice de aversión absoluta toma el valor K, podemos escribir la igualdad $u''(Y) = -Ku'(Y)$, con lo que:

$$H(\alpha^*) = (1-p)pqDu''(Y_1) - pq(1-pq)Du''(Y_2) + p(1-q)pqDu''(Y_3) =$$

$$= K\left(-(1-p)pqDu'(Y_1) + pq(1-pq)Du'(Y_2) - p(1-q)pqDu'(Y_3)\right) = 0,$$

por la condición necesaria de primer orden de óptimo, 2.12.

Para estas dos clases de funciones de utilidad, la derivada dada en la Ecuación 2.14 se reduce al segundo sumando, que es positivo. En estos casos particulares, se deduce entonces que la cobertura óptima aumenta al hacerlo la probabilidad de solvencia.

Queda así analizada la demanda de cobertura óptima cuando existe riesgo de impago por parte del asegurador. Se ha comprobado que, a diferencia de lo que ocurre cuando dicho riesgo no existe, no se cumple el teorema de Mossin, al no ser óptima la cobertura total cuando la prima pagada no lleva recargo de ningún tipo.

También es distinto el comportamiento de la indemnización óptima cuando se hacen variar la riqueza inicial del asegurado y su grado de aversión al riesgo. Mientras en presencia de un único riesgo aislado, se vio que el seguro podía

[19] Véase la Proposición 1.6.4.

considerarse un bien inferior cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente, no ocurre lo mismo cuando el riesgo de impago aparece. No es posible determinar en general el crecimiento o decrecimiento de la cobertura óptima. Solo podemos deducir, al igual que con riesgo único, que la riqueza no influye en el óptimo cuando la aversión absoluta al riesgo es constante. Algo similar ocurre con el efecto de la aversión al riesgo. Un mayor grado de ésta no implica necesariamente que se desee tener una cobertura más elevada. Es probable que el individuo sienta más temor por pagar una prima más alta a cambio de más cobertura y que luego ésta no sea pagada realmente por la compañía aseguradora.

Finalmente, se ha estudiado también cómo afectaría una mayor probabilidad de solvencia del asegurador a la elección óptima de cobertura. En contra de lo que podría pensarse *a priori*, el efecto no es siempre positivo. Solo cuando la utilidad del asegurado viene representada por una función cuadrática o por una función con aversión absoluta al riesgo constante, se demuestra que una mayor probabilidad de solvencia lleva a una mayor cobertura. Otras funciones de utilidad tienen un comportamiento impredecible con respecto a la solvencia del asegurador.

Nos planteamos, en los apartados siguientes, la existencia de otros tipos de riesgos para los que no se puede contratar un seguro y que pueden depender o no del acontecimiento del riesgo para el que el individuo se asegura, pero que sí intervienen en la riqueza final del mismo. En estos casos, estudiamos tanto la optimalidad de una cobertura total o parcial como si la indemnización óptima aumenta en presencia de estos otros riesgos.

2.3.2. Riesgo secundario no asegurable e independiente

Nos situamos ahora en el caso en que el asegurador paga todas las indemnizaciones contratadas, pero existen otras situaciones, independientes del siniestro asegurado, que no influyen en su realización y contra las que además no se puede contratar ningún seguro, que pueden afectar a la riqueza final del asegurado. Queremos determinar si estos riesgos secundarios tienen algún efecto sobre la cantidad de seguro contratada para el riesgo asegurado.

La riqueza final del individuo, si no se asegura, vendría dada en este caso por $W + \tilde{\varepsilon} - \tilde{x}$, donde la variable aleatoria $\tilde{x}$ representa una vez más la pérdida asegurable, con funciones de distribución y densidad respectivas F y f, y donde $\tilde{\varepsilon}$ es otra variable aleatoria que representa un riesgo secundario de media cero[20] e independiente de $\tilde{x}$. Suponemos que $\tilde{\varepsilon}$ no puede ser asegurado directamente, que no toma siempre valor cero y que $W + \tilde{\varepsilon} - \tilde{x} > 0$. Se trata, como hemos indicado, de determinar el efecto que produce $\tilde{\varepsilon}$ en la elección del nivel de coaseguro óptimo α^{**}.

Introducimos para ello la *función de utilidad derivada*, que se define como

$$v(w) = Eu(w + \tilde{\varepsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(w + \varepsilon)\, dG(\varepsilon)$$

siendo G la función de distribución de $\tilde{\varepsilon}$. Se tiene que:

$$Eu(Y(\alpha) + \tilde{\varepsilon}) =$$

$$= \int_0^D \int_{-\infty}^{\infty} u(Y(\alpha) + \varepsilon)\, dG(\varepsilon) dF(x) = \int_0^D v(Y(\alpha))\, dF(x) = Ev(\tilde{Y}(\alpha)).$$

Hallar, por tanto, el nivel de seguro óptimo para la utilidad u en presencia de un riesgo secundario $\tilde{\varepsilon}$, es idéntico a hallar el nivel de seguro óptimo para la utilidad v cuando no hay ningún riesgo secundario.

En general, se ha demostrado que, en presencia de un único riesgo, al aumentar la aversión al riesgo, la compra de seguro aumenta. Si comprobamos entonces que la función de utilidad derivada v presenta un mayor índice de aversión al riesgo que u, podremos deducir que la indemnización óptima en caso de existir un riesgo secundario (que se corresponde con la maximización de $Ev(\tilde{Y}(\alpha))$) será mayor que aquélla que se contrata al no existir tal riesgo secundario añadido (que se corresponde con la maximización de $Eu(\tilde{Y}(\alpha))$).

Para probar la mayor aversión al riesgo de v, necesitamos imponer ciertas restricciones sobre u. En concreto, u debe presentar aversión absoluta al riesgo decreciente y prudencia absoluta decreciente[21]. En estas condiciones, las Proposiciones 1.6.3, 1.6.4 y 1.6.5 indican que se tiene prudencia ($u''' > 0$), que $-u'$ tiene

[20] Se hace esta hipótesis para simplificar el planteamiento. Se obtendrían los mismos resultados en el caso general.

[21] Una función de utilidad con estas características se dice que tiene *aversión al riesgo estándar* [Kimball, 1993]. Está empíricamente comprobado que la aversión al riesgo estándar es un comportamiento habitual.

más aversión al riesgo que u y que u'' es una función de utilidad con más aversión al riesgo que $-u'$.

Si denotamos entonces por π, π_1 y π_2 a las primas de riesgo correspondientes a u, $-u'$ y u'', respectivamente, se cumplen[22], según la Definición 1.2.1, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Eu(w+\tilde{\varepsilon}) &= u(w-\pi(w)), \\ -Eu'(w+\tilde{\varepsilon}) &= -u'(w-\pi_1(w)), \\ Eu''(w+\tilde{\varepsilon}) &= u''(w-\pi_2(w)). \end{aligned}$$

Además, las relaciones de aversión al riesgo entre las tres funciones indican que $\pi_2 > \pi_1 > \pi > 0$, según la Proposición 1.3.4.

Deducimos entonces las siguientes desigualdades:

$$-\frac{v''(w)}{v'(w)} = \frac{-Eu''(w+\tilde{\varepsilon})}{Eu'(w+\tilde{\varepsilon})} = \frac{-u''(w-\pi_2)}{u'(w-\pi_1)} > \frac{-u''(w-\pi_1)}{u'(w-\pi_1)} > \frac{-u''(w)}{u'(w)}.$$

Las primeras igualdades se tienen sin más que sustituir las expresiones ya presentadas antes; la primera desigualdad se debe a que la aversión absoluta al riesgo decreciente implica prudencia y, por tanto, u'' es creciente, con lo que $\pi_2 > \pi_1 \Rightarrow u''(w-\pi_2) < u''(w-\pi_1) \Rightarrow -u''(w-\pi_2) > -u''(w-\pi_1)$, desigualdad que se mantiene dividiendo por $u'(w-\pi_1)$, que es positivo; la última desigualdad es consecuencia directa del decrecimiento de la aversión al riesgo y del hecho de que $\pi > 0$.

Consecuentemente, la función de utilidad derivada, v, es más adversa al riesgo que u, con lo que se comprará más seguro que sin el riesgo secundario.

Se demuestra con esto la siguiente proposición:

Proposición 2.3.2 *Si existe un riesgo secundario independiente del riesgo asegurable, se verifican:*

1. *Si la tasa de recargo de la prima es nula, $\lambda = 0$, entonces el óptimo es la cobertura completa.*

[22] Por ser $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$.

2. *Si la tasa de recargo de la prima es positiva, $\lambda > 0$, entonces el óptimo es la cobertura parcial.*

3. *Si la tasa de recargo de la prima es positiva, $\lambda > 0$, y la utilidad presenta aversión al riesgo estándar, entonces la cantidad óptima de cobertura es mayor que cuando el riesgo asegurable está aislado.* □

Los dos primeros apartados son aplicaciones directas del teorema de Mossin a la utilidad v. El tercer apartado se aplica tanto a coaseguros como a franquicias, puesto que solo depende de que v sea más adversa al riesgo que u.

2.3.3. Riesgo secundario no asegurable y dependiente

Se ha visto en el apartado anterior que, si existe un riesgo secundario independiente del riesgo contra el que se ha comprado un seguro, pero que puede influir en la riqueza final del individuo, éste lo combate de alguna forma incrementando la cobertura contratada. Intuitivamente, parece entonces lógico que si el acontecimiento de uno de los riesgos está relacionado con el del otro, debería reforzarse esa tendencia. Sin embargo, en general no se puede predecir cuáles son los efectos sobre la compra de seguro o, al menos, no existe una medida general de dependencia que lleve a efectos inequívocos sobre la demanda de seguro.

Planteamos a continuación, en el marco del Modelo de Mossin, una situación en la que los riesgos asegurable y no asegurable se suponen correlacionados positivamente, y se trata la optimalidad de la cobertura completa. Sin embargo, no puede determinarse, a partir de este modelo, si la indemnización óptima aumenta o no con la existencia del riesgo secundario dependiente.

Correlación entre riesgos

Suponemos, como es habitual, que el individuo tiene función de utilidad u, dispone de una riqueza inicial W, está expuesto a un riesgo de pérdida D contra el que puede asegurarse y a un riesgo no asegurable de cuantía N. Denotaremos p_A a la probabilidad de que ocurra el daño asegurable, p_N la del daño no asegurable, $p_{N|A}$ la probabilidad del riesgo no asegurable condicionado al acontecimiento del asegurable y $P = (1 + \lambda)p_A I$ la prima pagada a cambio de una indemnización I, siendo $\lambda \geq 0$ la tasa de recargo de la prima. En esta situación, pueden establecerse cuatro posibles escenarios:

1. Ningún siniestro: en este caso, la riqueza será W sin seguro y $W - P$ con seguro. Este estado se da con probabilidad $p_1 = 1 - p_N - p_A + p_A p_{N|A}$.

2. Siniestro para el riesgo asegurable: la riqueza es $W - D$ ó $W - D - P + I$, sin seguro y con seguro, respectivamente. La probabilidad de esta situación es $p_2 = p_A(1 - p_{N|A})$.

3. Siniestro para el riesgo no asegurable: sin asegurarse, el individuo dispondrá de $W - N$ mientras que si se asegura su riqueza final es $W - N - P$. La probabilidad de este estado es $p_3 = p_N - p_A p_{N|A}$.

4. Siniestro para ambos riesgos: en este cuarto estado, si el individuo no se asegura su riqueza final será de $W - D - N$ y $W - D - N - P + I$ si lo hace. Este caso se da con probabilidad $p_4 = p_A p_{N|A}$.

En el marco de la utilidad esperada, el nivel óptimo de cobertura vendrá dado por el valor de I solución del problema

$$\max_{0 \leq I \leq D} \quad E(I) = p_1 u_1(I) + p_2 u_2(I) + p_3 u_3(I) + p_4 u_4(I) \tag{2.15}$$

donde, para simplificar la notación, hemos denotado por $u_i(I)$ a las utilidades respectivas para los estados $i = 1, 2, 3, 4$ en caso de seguro; es decir,

$$\begin{aligned} u_1(I) &= u(W - P) \\ u_2(I) &= u(W - D - P + I) \\ u_3(I) &= u(W - N - P) \\ u_4(I) &= u(W - D - N - P + I) \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema de Mossin que, en caso de existir un único riesgo aislado, la cobertura total no sería óptima cuando existe una tasa de recargo en la prima. Sin embargo, vamos a ver que sí lo es en la situación que estudiamos, aunque no para cualquier tasa de recargo posible:

Para que la cobertura completa $I = D$ sea la solución del Problema 2.15, debe ser $E'(D) \geq 0$, debido a la concavidad de E. Puesto que

$$E'(I) = -(1+\lambda)p_A p_1 u_1'(I) + (1-(1+\lambda)p_A)\, p_2 u_2'(I) - (1+\lambda)p_A p_3 u_3'(I) +$$

$$+ (1-(1+\lambda)p_A)\, p_4 u_4'(I)$$

y dado que $u_1'(D) = u_2'(D)$ y $u_3'(D) = u_4'(D)$, se tiene:

$$E'(D) = [p_2 - (1+\lambda)p_A(p_1+p_2)]\, u_1'(D) + [p_4 - (1+\lambda)p_A(p_3+p_4)]\, u_3'(D) =$$

$$= p_A \left[(p_N - p_{N|A})(u_1'(D) - u_3'(D)) - \lambda\left((1-p_N)u_1'(D) + p_N u_3'(D)\right)\right].$$

Así, la condición necesaria y suficiente para que el asegurado elija una cobertura completa, $E'(D) \geq 0$, puede escribirse como

$$\lambda \leq \frac{(p_{N|A} - p_N)(u_3'(D) - u_1'(D))}{(1-p_N)u_1'(D) + p_N u_3'(D)} \tag{2.16}$$

Si ambos riesgos están correlacionados positivamente, $p_{N|A} > p_N$. Teniendo en cuenta además que $u_1'(D) = u'(W-P) < u_3'(D) = u'(W-N-P)$, por la concavidad estricta de u, la cota superior calculada para la tasa de recargo de la prima λ es positiva. Se demuestra así que la cobertura total es óptima siempre que la tasa de recargo no sea demasiado elevada.

Consecuentemente, se cumple la parte del teorema de Mossin que indica que cuando la prima es pura ($\lambda = 0$), el óptimo es la cobertura total, aunque no se cumple el hecho de que, con tasa de recargo positiva, el óptimo no es nunca la cobertura completa. Vemos sin embargo que, al igual que ocurre cuando existe un riesgo secundario que influye en la riqueza final del individuo aunque no relacionado con el acontecimiento del riesgo contra el que se asegura, el modo de combatir la pérdida añadida es contratar una cobertura más elevada con el objeto de compensar la disminución de la riqueza final.

En el caso en que los riesgos no estén correlacionados ($p_{N|A} = p_N$), la cobertura total será óptima entonces solo si $\lambda = 0$, obteniéndose así el mismo resultado que el dado en el Apartado 1 de la Proposición 2.3.2 de la sección anterior.

Señalamos por último que, si la correlación entre ambos riesgos es negativa, la cota de λ dada en la Ecuación 2.16 es negativa, no cumpliéndose nunca dicha desigualdad, con lo que el óptimo sería de nuevo la cobertura parcial.

No obstante lo anterior, el planteamiento seguido en este apartado tiene el inconveniente de no permitir comparar las coberturas óptimas para los casos de riesgo aislado y presencia de un riesgo no asegurable, como se hacía en el Apartado 3 de la Proposición 2.3.2. Planteamos a continuación una situación más compleja, con riesgos representados a través de variables aleatorias continuas. Haremos uso también del concepto de prudencia y la dependencia entre ambos riesgos no se determina mediante correlación, sino a través de la dominancia estocástica entre sus distribuciones.

Dominancia estocástica entre las distribuciones de riesgo

La dependencia entre los riesgos asegurable y no asegurable se considera en este apartado en función de la dominancia estocástica de tercer orden. En concreto, supondremos que la distribución del riesgo secundario condicionada a un valor dado de la pérdida asegurada empeora en el sentido de la dominancia estocástica de dicho grado cuando crece la pérdida consecuencia del siniestro. Formalmente, si $\tilde{\varepsilon}(x)$ representa la distribución del riesgo secundario condicionado al nivel de pérdida x para el riesgo asegurable, suponemos que si se tienen dos niveles de pérdida $x_2 > x_1$ entonces $\tilde{\varepsilon}(x_1)$ domina a $\tilde{\varepsilon}(x_2)$ según la dominancia estocástica de tercer orden.

En ese caso, la prima de riesgo de $\tilde{\varepsilon}(x_2)$ es mayor que la de $\tilde{\varepsilon}(x_1)$; es decir, $\pi(w, \tilde{\varepsilon}(x_2)) \geq \pi(w, \tilde{\varepsilon}(x_1))$ para cualquier riqueza final y cualquier función de utilidad creciente con aversión absoluta al riesgo positiva y decreciente, condición suficiente según la Proposición 1.6.3 para que se tenga prudencia ($u' > 0$, $u'' < 0$ y $u''' > 0$), siendo ésta realmente la condición que implica la relación dada entre las primas de riesgo. Igualmente están relacionadas las primas de precaución: $\psi(w, \tilde{\varepsilon}(x_2)) \geq \psi(w, \tilde{\varepsilon}(x_1))$ para cualquier nivel de riqueza y cualquier función de utilidad que presente aversión al riesgo y prudencia absoluta positiva y decreciente, características que implican, según se probó en la Proposición 1.6.5, que $u' > 0$, $u'' < 0$, $u''' > 0$ y $u^{iv} < 0$ y éstas a su vez la relación dada entre las primas de precaución.

La introducción de una variable aleatoria continua para representar los posibles valores de la pérdida en caso de siniestro nos lleva de nuevo a considerar dos tipos de indemnizaciones: el coaseguro proporcional y la franquicia. Estudiaremos cómo influye en la cobertura óptima, en cada uno de estos casos, la existencia de un riesgo secundario dependiente del riesgo asegurado.

Indemnización tipo coaseguro proporcional

En este caso, la determinación de la cobertura óptima equivale, como siempre, a la obtención de la tasa de coaseguro para la cual la utilidad esperada del asegurado es lo más elevada posible. El problema a resolver es entonces:

$$\max_{0\leq\alpha\leq 1} \int_0^D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(W+\varepsilon-(1-\alpha)x-\alpha(1+\lambda)E\tilde{x})dG(\varepsilon \mid x)\right) dF(x) \tag{2.17}$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de $\tilde{x}$ y $G(\varepsilon \mid x)$ es la distribución condicionada de $\tilde{\varepsilon}$ dado x (con la notación que estamos usando, la distribución de la variable $\tilde{\varepsilon}(x)$).

La condición necesaria de primer orden para el óptimo α^{**} es:

$$\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x}) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u'(W+\varepsilon-(1-\alpha^{**})x-\alpha^{**}(1+\lambda)E\tilde{x})dG(\varepsilon \mid x)\right) dF(x) = 0.$$

Si hacemos $W_1 = W-(1-\alpha^{**})x-\alpha^{**}(1+\lambda)E\tilde{x}$ y usamos la Definición 1.4.1 de la prima de precaución correspondiente a la variable aleatoria $\tilde{\varepsilon}$, que verifica $E\tilde{\varepsilon}=0$, y al nivel de riqueza W_1, la expresión anterior se reduce a:

$$\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x})u'(W_1-\psi(W_1,\tilde{\varepsilon}(z))dF(x) = 0.$$

En cuanto al óptimo en ausencia de riesgo secundario, α^*, la condición necesaria de primer orden que debe cumplir no es más que:

$$\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x})u'(W-(1-\alpha^*)x-\alpha^*(1+\lambda)E\tilde{x})dF(x) = 0. \tag{2.18}$$

Queremos demostrar que la presencia de un riesgo secundario se traduce en un aumento del nivel de cobertura óptimo; es decir, α^{**} debe ser mayor que α^*. Debido a la concavidad de la función u, basta comprobar para ello que, si tomamos $W_2 = w-(1-\alpha^*)x-\alpha^*(1+\lambda)E\tilde{x}$, la condición necesaria de primer orden del Problema 2.17 evaluada en α^* es estrictamente positiva:

$$\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x})u'(W_2-\psi(W_2,\tilde{\varepsilon}(x)))dF(x) > 0$$

o, equivalentemente, por la Ecuación 2.18, que

$$\frac{\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x})u'(W_2-\psi(W_2,\tilde{\varepsilon}(x))dF(x)}{u'(W-(1+\lambda)E\tilde{x}-\psi(W-(1+\lambda)E\tilde{x},\tilde{\varepsilon}((1+\lambda)E\tilde{x})))} > \tag{2.19}$$

$$> \frac{\int_0^D (x-(1+\lambda)E\tilde{x})u'(W_2)dF(x)}{u'(W-(1+\lambda)E\tilde{x})} = 0.$$

Para demostrar esta relación, haremos uso del siguiente lema:

Lema 2.3.3 *Sean u una función de utilidad monótona creciente con aversión absoluta al riesgo decreciente y positiva, h una función que verifica $h'(z) \leq 0$ y $z_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $h(z_0) > 0$. Entonces:*

$$\frac{u'(z-h(z))}{u'(z_0-h(z_0))} < \frac{u'(z)}{u'(z_0)} \text{ cuando } z > z_0 \text{ y } \frac{u'(z-h(z))}{u'(z_0-h(z_0))} > \frac{u'(z)}{u'(z_0)} \text{ cuando } z < z_0.$$

Demostración del Lema 2.3.3

Puesto que $h'(z) \leq 0$, h es una función decreciente; así, cuando $z > z_0$, se cumplirá que $h(z) \leq h(z_0)$ y $z - h(z) \geq z - h(z_0)$. Por lo tanto:

$$\frac{u'(z-h(z))}{u'(z_0-h(z_0))} \leq \frac{u'(z-h(z_0))}{u'(z_0-h(z_0))} < \frac{u'(z)}{u'(z_0)}.$$

La primera desigualdad es consecuencia del decrecimiento de la utilidad marginal debida a la aversión al riesgo.

La segunda desigualdad se obtiene aplicando el Teorema 1.3.4 a las funciones $u_1(x) = u(x)$ y $u_2(x) = u(x+h(z_0))$. Los índices de aversión absoluta al riesgo de estas funciones son $r_1(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ y $r_2(x) = -\dfrac{u''(x+h(z_0))}{u'(x+h(z_0))} = r_1(x+h(z_0))$, respectivamente. Puesto que $h(z_0) > 0$ y que suponemos decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo, se deduce que $r_1(x) > r_2(x)$. Según el Teorema 1.3.4, esto equivale a que $\dfrac{u_1'(x)}{u_1'(w)} < \dfrac{u_2'(x)}{u_2'(w)}$ siempre que $w < x$. Tomando $w = z_0 - h(z_0)$ y $x = z - h(z_0)$, se demuestra la desigualdad:

$$\frac{u'(z-h(z_0))}{u'(z_0-h(z_0))} = \frac{u_1'(z-h(z_0))}{u_1'(z_0-h(z_0))} < u_2'(z-h(z_0))u_2'(z_0-h(z_0)) = \frac{u'(z)}{u'(z_0)}.$$

De modo similar, cuando $z < z_0$, se tendrá que $h(z) \geq h(z_0)$ y, en consecuencia, $z - h(z) \leq z - h(z_0)$. En este caso:

$$\frac{u'(z - h(z))}{u'(z_0 - h(z_0))} \geq \frac{u'(z - h(z_0))}{u'(z_0 - h(z_0))} > \frac{u'(z)}{u'(z_0)},$$

usando de nuevo la aversión al riesgo en la primera desigualdad y el Teorema 1.3.4 en la segunda. Se tiene ahora $x < w$, con lo que:

$$\frac{u'(z - h(z_0))}{u'(z_0 - h(z_0))} = \frac{u_1'(z - h(z_0))}{u_1'(z_0 - h(z_0))} > u_2'(z - h(z_0))u_2'(z_0 - h(z_0)) = \frac{u'(z)}{u'(z_0)}. \qquad \square$$

Volvemos a la Ecuación 2.19 que debemos demostrar. Aplicamos el Lema 2.3.3 con

$$z = w - (1 - \alpha^*)x - \alpha^*(1 + \lambda)E\tilde{x} \text{ para } x \in [0, D],$$

$$h(z) = \psi(z, \tilde{\varepsilon}(x)) = \psi\left(z, \tilde{\varepsilon}\left(\frac{w - \alpha^*(1 + \lambda)E\tilde{x} - z}{1 - \alpha^*}\right)\right)$$

y

$$z_0 = w - (1 + \lambda)E\tilde{x}.$$

$h(z)$ es una función decreciente porque la prima de precaución ψ lo es tanto en el primer como en el segundo argumentos:

- en el primero porque el decrecimiento de la prudencia absoluta equivale al de la prima de precaución, como se demostró en la Proposición 1.5.3
- y en el segundo debido a que un aumento de z provoca una disminución de la pérdida x y, entonces, la dominancia estocástica de tercer orden que estamos suponiendo implica el decrecimiento de la prima de precaución, como se ha visto anteriormente.

Además,

$$h(z_0) = \psi(w - (1 + \lambda)E\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}((1 + \lambda)E\tilde{x})) > \pi(w - (1 + \lambda)E\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}((1 + \lambda)E\tilde{x})) \geq 0,$$

debiéndose la relación entre las primas de precaución y riesgo al decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo, según se vio en la Proposición 1.6.2.

Se cumplen por tanto las hipótesis del Lema 2.3.3, del que deducimos:

$$\frac{u'(W_2 - \psi(z, \tilde{\varepsilon}(x)))}{u'(W - (1+\lambda)E\tilde{x} - \psi(W - (1+\lambda)E\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}((1+\lambda)E\tilde{x})))} < \frac{u'(W_2)}{u'(W - (1+\lambda)E\tilde{x})}$$

siempre que $z > z_0$, lo que en este caso equivale a $x - (1+\lambda)E\tilde{x} < 0$. Multiplicando la desigualdad anterior por esta cantidad cambiaría la desigualdad e integrando en $[0, D]$ se cumple la Ecuación 2.19.

Si $z < z_0$, entonces

$$\frac{u'(W_2 - \psi(z, \tilde{\varepsilon}(x)))}{u'(W - (1+\lambda)E\tilde{x} - \psi(W - (1+\lambda)E\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}((1+\lambda)E\tilde{x})))} > \frac{u'(W_2)}{u'(W - (1+\lambda)E\tilde{x})},$$

desigualdad que se mantiene al multiplicar por $x - (1+\lambda)E\tilde{x}$, que es ahora positivo. Integrando en $[0, D]$ de nuevo, se obtiene la Ecuación 2.19.

Queda así demostrada la idea intuitiva de que la existencia de un riesgo secundario dependiente del riesgo asegurado aumenta la tasa de coaseguro y consecuentemente la cobertura óptima.

Veamos que ocurre lo mismo cuando la indemnización consiste en el pago por el asegurador de la cuantía de la pérdida que sobrepasa a un nivel de franquicia dado.

Indemnización tipo franquicia

El efecto negativo de un riesgo secundario independiente sobre la franquicia óptima, mostrado en la Apartado 2.3.2, se extiende también al caso de una relación positiva entre ambos riesgos, como tratamos a continuación. La consecuencia de este efecto sería un aumento de la cobertura óptima, de un modo similar al que se ha visto para los seguros cuyas indemnizaciones consisten en coaseguros proporcionales.

La indemnización $I(x)$ viene determinada a partir del nivel de franquicia L como $I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq L \\ x - L & \text{si } x > L \end{cases}$, con lo que la prima pura es:

$$EI(\tilde{x}) = \int_L^D (x - L)\, dF(x).$$

Consideramos que, si $P(L) = (1+\lambda)EI(\tilde{x})$ es el precio del seguro para una franquicia L y L^* es el nivel óptimo de franquicia en ausencia de riesgo secundario,

$\pi(W - L^* - P(L^*), \tilde{\varepsilon}(L^*)) \geq 0$, lo que indica que el riesgo secundario es indeseable cuando el resultado del riesgo asegurable es exactamente igual a la franquicia elegida en ausencia de riesgo secundario.

Estas hipótesis, junto con las ya habituales sobre la función de utilidad, implican que $L^{**} \leq L^*$, siendo L^{**} la franquicia óptima cuando aparece un riesgo secundario. La presencia de este riesgo supone una disminución del nivel de franquicia y, por tanto, un aumento de la cobertura. Lo demostramos a continuación.

L^{**} es la solución del problema $\max_{L} v(L)$, donde

$$v(L) = \int_0^L \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(W + \varepsilon - P(L) - x) dG(\varepsilon \mid x) \right) dF(x) +$$

$$+ \int_L^D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(W + \varepsilon - P(L) - L) dG(\varepsilon \mid x) \right) dF(x).$$

Derivando bajo el signo integral y teniendo en cuenta que el valor de $P'(L)$ es

$(1 + \lambda)(F(L) - 1)$, podemos calcular $v'(L)$:

$$v'(L) = (1 + \lambda)(1 - F(L)) \int_0^L \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u'(W + \varepsilon - P(L) - x) dG(\varepsilon \mid x) \right) dF(x) +$$

$$+ [(1 + \lambda)(1 - F(L)) - 1] \int_L^D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u'(W + \varepsilon - P(L) - L) dG(\varepsilon \mid x) \right) dF(x).$$

Si llamamos $A = W - P(L) - x$, $B = W - P(L) - L$ y hacemos uso de la prima de precaución, podemos reescribir dicha derivada como:

$$v'(L) = (1 + \lambda)(1 - F(L)) \textstyle\int_0^L u'(A - \psi(A, \tilde{\varepsilon}(x))\, dF(x) +$$

$$+ ((1 + \lambda)(1 - F(L)) - 1) \int_L^D u'(B - \psi(B, \tilde{\varepsilon}(x))\, dF(x) \tag{2.20}$$

La condición de primer orden para la franquicia óptima en presencia de riesgo secundario es $v'(L^{**}) = 0$. Si demostramos entonces que $v'(L^*) < 0$ cuando L^* es una solución interior, la concavidad de la función de utilidad, equivalente al decrecimiento de $v'(L)$, demostrará el resultado buscado: $L^{**} < L^*$ y, por tanto, el aumento de la cobertura óptima.

$$v'(L^*) = (1 + \lambda)(1 - F(L^*)) \int_0^{L^*} u'(A^* - \psi(A^*, \tilde{\varepsilon}(x)) dF(x) +$$

$$+[(1+\lambda)(1-F(L^*))-1]\int_{L^*}^{D} u'(B^*-\psi(B^*,\tilde{\varepsilon}(x))dF(x),$$

siendo $A^* = W - P(L^*) - x$ y $B^* = W - P(L^*) - L^*$.

Demostrar que $v'(L^*) < 0$ es equivalente a demostrar las desigualdades:

$$\frac{(1+\lambda)(1-F(L^*))\displaystyle\int_0^{L^*} u'(A^*-\psi(A^*,\tilde{\varepsilon}(x))dF(x)}{u'(B^*-\psi(B^*,\varepsilon(L^*)))} <$$

$$< \frac{(1+\lambda)(1-F(L^*))\displaystyle\int_0^{L^*} u'(A^*)dF(x)}{u'(B^*)} \tag{2.21}$$

y

$$\frac{[(1+\lambda)(1-F(L^*))-1]\displaystyle\int_{L^*}^{D} u'(B^*-\psi(B^*,\tilde{\varepsilon}(x)))dF(x)}{u'(B^*-\psi(B^*,\varepsilon(L^*)))} <$$

$$< \frac{[(1+\lambda)(1-F(L^*))-1]\displaystyle\int_{L^*}^{D} u'(B^*)}{u'(B^*)}. \tag{2.22}$$

En efecto, la suma de ambas desigualdades lleva a que el numerador de la expresión de la izquierda, que es $v'(L^*)$, sea negativo, al ser el denominador positivo (por el crecimiento de la función de utilidad), y el numerador del miembro de la derecha debe ser nulo, por ser la condición necesaria de primer orden para el óptimo sin riesgo secundario, L^*:

$$(1+\lambda)(1-F(L^*))\int_0^{L^*} u'(A^*)dF(x)+[(1+\lambda)(1-F(L^*))-1]\int_{L^*}^{D} u'(B^*)dF(x) = 0.$$

En esta última expresión, si $L^* > 0$ el primer término es positivo; para que se satisfaga la igualdad, el factor $(1+\lambda)(1-F(L^*))-1$ debe ser negativo.

Aplicamos el Lema 2.3.3 con:

$$z = \begin{cases} A^* & \text{para } x < L^* \\ B^* & \text{para } x \geq L^* \end{cases}, \; h(z) = \psi(z,\tilde{\varepsilon}(x)) \text{ y } z_0 = B^*.$$

Las hipótesis del Lema 2.3.3 (h decreciente y $h(z_0) > 0$) se cumplen al igual que en el apartado anterior como consecuencia del decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo y de la prudencia absoluta, así como de la dominancia estocástica de tercer orden de la distribución del riesgo secundario cuando las pérdidas del riesgo asegurado disminuyen.

Con las definiciones consideradas, $x < L^*$ equivale a $z > z_0$, en cuyo caso $\psi(w, \widetilde{\varepsilon(x)}) < \psi(w, \widetilde{\varepsilon(L^*)})$, para todo w. El decrecimiento de u y la conclusión del Lema 2.3.3 para $z > z_0$ implican las siguientes relaciones:

$$\frac{u'(A^* - \psi(A^*, \tilde{\varepsilon}(x))}{u'(B^* - \psi(B^*, \widetilde{\varepsilon(L^*)}))} < \frac{u'(A^* - \psi(A^*, \tilde{\varepsilon}(x))}{u'(B^* - \psi(B^*, \widetilde{\varepsilon(x)}))} < \frac{u'(A^*)}{u'(B^*)}.$$

Integrando entre 0 y L^* y multiplicando por $(1+\lambda)(1-F(L^*)) > 0$, se mantiene la desigualdad y se demuestra la desigualdad 2.21.

Ahora solo queda demostrar la Expresión 2.22:

Cuando $x \geq L^*$, $\psi(w, \widetilde{\varepsilon(x)}) > \psi(w, \widetilde{\varepsilon(L^*)})$, para todo w, cumpliéndose en concreto para $w = B^*$. El decrecimiento de u' implica entonces que

$$\frac{u'(B^* - \psi(B^*, \tilde{\varepsilon}(x)))}{u'(B^* - \psi(B^*, \tilde{\varepsilon}(L^*)))} > 1.$$

Integrando en $[L^*, D]$, se mantiene la desigualdad y cambia al multiplicar por $(1+\lambda)(1-F(L^*)) - 1$, que es negativo. Se concluye así que:

$$\frac{[(1+\lambda)(1-F(L^*)) - 1] \int_{L^*}^{D} u'(B^* - \psi(B^*, \tilde{\varepsilon}(x)))dF(x)}{u'(B^* - \psi(B^*, \widetilde{\varepsilon(L^*)}))} <$$

$$< [(1+\lambda)(1-F(L^*)) - 1] \int_{L^*}^{D} dF(x) = \frac{[(1+\lambda)(1-F(L^*)) - 1] \int_{L^*}^{D} u'(B^*)dF(x)}{u'(B^*)}.$$

Se demuestra así también la Expresión 2.22 y por tanto $v'(L^*) < 0$ y $L^* > L^{**}$.

Queda por tratar la posibilidad de que L^* sea una solución de la frontera. De hecho, cuando $L^* = D$, es evidente que $L^{**} \leq L^*$. De forma similar, sabemos por el Teorema 2.1.2 que $L^* = 0$ solo cuando el factor $\lambda = 0$. En ese caso, $v'(0) = 0$ y por tanto $L^{**} = L^* = 0$.

Queda así probado que la existencia de un riesgo secundario dependiente del riesgo asegurado a través de la dominancia estocástica de tercer orden y con prudencia y aversión absoluta al riesgo decreciente, conlleva un menor nivel de franquicia, lo que redunda en una cobertura óptima más elevada, del mismo modo que ocurría para el coaseguro proporcional.

Concluimos con esto el estudio de los modelos en los que se incluyen, además del riesgo asegurado, otros posibles riesgos que pueden influir o no en el acontecimiento del primero. Se ha demostrado, en todos los casos, que su mera existencia provoca un aumento de la cobertura óptima contratada para cubrir el riesgo asegurado.

Tanto en este último apartado como en los anteriores, hemos impuesto siempre como condición, a la hora de determinar la cobertura óptima, que la indemnización pagada por el asegurador sea no negativa. Parece una hipótesis lógica, puesto que otra cosa implicaría que el propio asegurado, en caso de siniestro, debería desembolsar alguna cantidad de dinero, hecho que no parece razonable.

Es importante tener en cuenta sin embargo que, según muchos autores, la optimalidad de las franquicias se debe a los costes del seguro y también a la existencia de esta restricción de no negatividad de las indemnizaciones. En el apartado siguiente, tratamos de determinar si realmente la no negatividad tiene relación con la forma óptima de los contratos de seguro.

2.4. Relajación de la restricción de no negatividad de las indemnizaciones

En el análisis de la demanda de seguro, es habitual, como ya señalamos, imponer a la indemnización que el asegurador está obligado a pagar al asegurado en caso de siniestro dos restricciones básicas: que no tome valores negativos y que no supere el daño sufrido. Gollier (1987) propone un modelo en el que no tiene en cuenta la primera de las restricciones, relajando así las hipótesis iniciales. El planteamiento que hace, en el marco de la utilidad esperada, solo tiene en cuenta dos restricciones: la prima es función solamente del valor esperado de la indemnización y ésta no supera el valor del daño habido.

En estas condiciones, el problema que resuelve se plantea como:

$$\begin{aligned}
&\max_{I(x),P} \quad \int_0^D u(W - x + I(x) - P) f(x)\, dx \\
&\text{sujeto a } \begin{cases} P = EI(x) + c(E\,|I(x)|) \\ I(x) \leq x \ \ \forall x \in [0, D] \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

La prima pura está aumentada con un recargo que depende del valor esperado de la transacción entre asegurado y asegurador, que en este caso viene dada por el valor absoluto de la indemnización.

La solución obtenida por Gollier se refleja en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1 *La función $I^*(x)$ solución del Problema 2.23 es la que se define del modo siguiente:*

$$I^*(x) = \begin{cases} x - x_- & \text{si } 0 \leq x < x_- \\ 0 & \text{si } x_- \leq x \leq x_+ \\ x - x_+ & \text{si } x_+ < x \leq D \end{cases} \tag{2.24}$$

donde $0 \leq x_- \leq x_+$. □

Este resultado establece que la póliza de seguro óptima consta de una franquicia x_+ junto con un reembolso negativo en caso de pérdida inferior a x_-. De hecho, se definen dos niveles de pérdidas críticos: uno máximo (x_+), por encima del cual la cobertura es completa y uno mínimo (x_-) por debajo del cual el asegurado deberá pagar al asegurador la diferencia entre x_- y la pérdida que tenga lugar. Entre ambos niveles, el asegurado soporta totalmente la pérdida, es decir $I^*(x) = 0$.

Con una indemnización como la que se define en el Teorema 2.4.1, la riqueza final del asegurado, $W - x + I^*(x) - P$, es una función decreciente con la peculiaridad de que, no solo está acotada inferiormente como es habitual por ser el objetivo fundamental del seguro, sino que en este caso está también acotada superiormente, debido a la posibilidad de existencia de pagos negativos. Concretamente, las cotas de la riqueza son $W - x_- - P$ y $W - x_+ - P$.

Los seguros con franquicias tradicionales serían un caso particular del resultado general obtenido aquí, con $x_- = 0$. A continuación, encontramos una serie de hipótesis con las que se llega a ese valor.

Empezamos determinando los valores óptimos de los niveles x_- y x_+. Para ello, el asegurado deberá maximizar su utilidad esperada teniendo como restricciones la forma de la prima, de la indemnización (Ecuación 2.24) y la no negatividad de x_- (la condición $x_- \leq x_+$ se satisface automáticamente).

Si la restricción $0 \leq x_-$ no se satura, los valores óptimos de x_- y x_+ vienen dados por algunas de las condiciones siguientes, obtenidas a partir de las condiciones necesarias de óptimo del problema 2.23:

$$u(W - x_- - P) = \lambda - \eta$$
$$u(W - x_+ - P) = \lambda + \eta$$
$$Eu'(W - x + I(x) - P) = \lambda = \frac{\eta}{c'} \text{ siendo } c' = C' \int_o^D |I^*(x)| \, f(x)dx = C'(C^{-1}(P_2))$$

A partir de estas relaciones, se deduce lo siguiente:

$$\lambda = \frac{\eta}{c'} \Leftrightarrow c' = \frac{\eta}{\lambda} \Leftrightarrow 1 - c' = \frac{\lambda - \eta}{\lambda} \text{ y } 1 + c' = \frac{\lambda + \eta}{\lambda}$$

de donde

$$\lambda = \frac{\lambda - \eta}{1 - c'} = \frac{u'(W - x_- - P)}{1 - c'} \text{ y } \lambda = \frac{\lambda + \eta}{1 + c'} = \frac{u'(W - x_+ - P)}{1 + c'}.$$

Los valores x_- y x_+ vienen entonces dados por las ecuaciones:

$$Eu'(W - x + I^*(x) - P) = \frac{u'(W - x_- - P)}{1 - c'} = \frac{U'(W - x_+ - P)}{1 + c'} \qquad (2.25)$$

no siendo posible encontrar solución analítica general para este sistema debido a su no linealidad (I^*, P y c' dependen de x_- y x_+).

Si la restricción $0 \leq x_-$ se satura, el valor óptimo de x_- es evidentemente 0 y x_+ viene dado por la ecuación

$$Eu'(W - x + I^*(x) - P) = \frac{U'(W - x_+ - P)}{1 + c'}. \qquad (2.26)$$

Una importante consecuencia de este análisis es que, a pesar de la relajación de la restricción de no negatividad de las indemnizaciones, la optimalidad de los seguros con franquicia sigue verificándose, siempre que la solución obtenida para x_- en el sistema 2.25 sea nula. Para terminar el estudio de la situación planteada, establecemos a continuación una condición suficiente para dicha optimalidad. Para llegar a ella, necesitamos demostrar previamente que la mediana de la variable aleatoria que representa las pérdidas está comprendida entre x_- y x_+, siempre que el coste marginal sea positivo.

Lema 2.4.2 *Si $c' > 0$, la solución óptima del sistema de ecuaciones 2.25 cumple $x_- \leq$ mediana $(\tilde{x}) \leq x_+$.*

Demostración

Usando la forma de la función de indemnización dada en 2.24 y la primera ecuación de 2.25, el valor esperado de la utilidad marginal del asegurado se expresa según:

$$Eu'(W-x+I^*(x)-P) = \int_0^{x_-} u'(W-x_- -P)f(x)dx + \int_{x_-}^{x_+} u'(W-x-P)f(x)dx +$$

$$+ \int_{x_+}^{D} u'(W-x_+-P)f(x)dx = \frac{u'(W-x_- -P)}{1-c'}.$$

Multiplicando por $\dfrac{1-c'}{u'(W-x_- -P)}$ se llega a:

$$(1-c')\left[F(x_-) + \int_{x_-}^{x_+} \frac{u'(W-x-P)}{u'(W-x_- -P)}f(x)dx + (1-F(x_+))\frac{u'(W-x_+-P)}{u'(W-x_- -P)}\right] = 1,$$

de donde, teniendo en cuenta que $\dfrac{u'(W-x_+-P)}{u'(W-x_- -P)} = \dfrac{1+c'}{1-c'}$ según la segunda igualdad de la Ecuación 2.25, se puede escribir:

$$(1-c')\int_{x_-}^{x_+} \frac{u'(W-x-P)}{u'(W-x_- -P)}f(x)dx =$$

$$= 1-(1-c')F(x_-) - (1+c')(1-F(x_+)). \tag{2.27}$$

En la integral, $x \geq x_-$ por lo que el decrecimiento de la utilidad marginal implica que $\dfrac{u'(W-x-P)}{u'(W-x_- -P)} \geq 1$ y la igualdad anterior se convierte en la desigualdad:

$$(1-c')\left[F(x_+) - F(x_-)\right] \leq 1-(1-c')F(x_-) - (1+c')(1-F(x_+))$$

a partir de la que se llega a:

$$(1-c')F(x_+) \leq 1-(1+c')+(1+c')F(x_+) \Leftrightarrow -2c'F(x_+) \leq -c' \Leftrightarrow F(x_+) \geq \frac{1}{2}$$

debido a la hipótesis $c' > 0$. Así, la solución x_+ debe ser mayor o igual que la mediana de $\tilde{x}$.

Para demostrar que la mediana de $\tilde{x}$ es una cota superior de x_-, usamos de nuevo la Ecuación 2.25, según la cual $u'(W-x_- - P) = \dfrac{1-c'}{1+c'}u'(W-x_+ - P)$, igualdad que sustituida en la Ecuación 2.27 da lugar a:

$$(1+c')\int_{x_-}^{x_+} \frac{u'(W-x-P)}{u'(W-x_+-P)} f(x)dx = 1-(1-c')F(x_-)-(1+c')(1-F(x_+)).$$

Ahora, si $x \leq x_+$, como ocurre en la integral, el integrando será menor o igual que 1 y se llega así a que:

$$(1+c')\left[F(x_+)-F(x_-)\right] \geq 1-(1-c')F(x_-)-(1+c')(1-F(x_+)).$$

Simplificando esta desigualdad como antes, se obtiene finalmente que:

$$-2c'F(x_-) \geq -c' \Leftrightarrow F(x_-) \leq \frac{1}{2}.$$

Se demuestra así que, cuando el coste marginal es positivo, x_- es menor o igual que la mediana de $\tilde{x}$. □

Como ya señalamos, el Lema 2.4.2 nos permite deducir una condición suficiente para que el valor óptimo de x_- sea nulo, lo que se traduce en la optimalidad del seguro en forma de franquicia a la que hemos llegado en varios apartados de este trabajo. Enunciamos esta condición en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.3 *Si la probabilidad de no incurrir en una pérdida es mayor que* $\frac{1}{2}$*, entonces el valor óptimo de* x_- *es cero.*

Demostración

Este resultado es consecuencia inmediata del Lema 2.4.2, ya que si se cumple $Pr(\tilde{x}=0) > \frac{1}{2}$, entonces la mediana de $\tilde{x}$ es 0 y por tanto $x_- \leq 0$. Pero x_- debía satisfacer la restricción de no negatividad $x_- \geq 0$, con lo que la única solución posible es $x_- = 0$, demostrándose finalmente el corolario. $\square$

Con este último resultado se cubre una gran diversidad de sectores del seguro. Seguros de incendio, de responsabilidad de automóviles y otros sectores donde las probabilidades de pérdidas son bajas, son ejemplos en los que no hay pólizas de seguro con reembolsos negativos que sean mejores que las que incluyen franquicias puras.

Se completa de esta manera el estudio de la cobertura óptima cuando se relaja la hipótesis de no negatividad para la indemnización que el asegurador paga al asegurado en caso de siniestro. Hemos visto que existen dos niveles positivos de pérdidas a partir de los cuales queda totalmente definida la función de indemnización. Cuando la pérdida es más pequeña que el menor de dichos niveles, el reembolso de la compañía aseguradora es negativo; si la pérdida supera el mayor de ambos niveles, la indemnización dada será igual a la cantidad en que la pérdida supera a la franquicia. En cambio, cuando la pérdida está comprendida entre esas dos cantidades, el asegurado no tendrá derecho a indemnización alguna.

Cuando la probabilidad de pérdida no es muy elevada, el menor de los dos niveles determinados es nulo y este seguro óptimo consistirá exclusivamente en el pago como indemnización de la cantidad en que la pérdida supera a la franquicia. Se ve así que la eliminación de la restricción de no negatividad en las indemnizaciones no influye, en general, en el tipo de seguro óptimo.

Los planteamientos que hemos hecho hasta ahora perseguían el objetivo de caracterizar tanto la función de indemnización de un seguro de un tipo concreto como, precisamente, la forma óptima del contrato. Se han basado en la maximización de la utilidad esperada del asegurado. Nos proponemos a continuación tener en cuenta también las preferencias del asegurador de un modo más pleno a como se ha hecho hasta ahora. Trataremos de conseguir que la utilidad esperada del asegurador alcance también un nivel aceptable, obteniendo de esta forma *contratos de seguro óptimos de Pareto.*

2.5. Contratos de seguro óptimos de Pareto

Tomando como punto de referencia el modelo de Raviv (1979), y siguiendo la misma estructura que en otros apartados, vamos a caracterizar en primer lugar la cobertura de seguro óptima cuando se fija la prima para, a continuación, determinar la póliza de seguro Pareto-óptima hallando la prima más adecuada. Se discutirá la forma que adopta la indemnización dependiendo de la actitud hacia el riesgo del asegurador y del tipo de coste que éste soporta, extendiendo por último los resultados obtenidos al caso de múltiples pérdidas durante el periodo asegurado.

Denotaremos por W_0 a la riqueza inicial del asegurador, que tendrá una riqueza final igual a $W_0 + P - I(x) - c(I(X))$ después de vender la póliza de seguro al precio dado por la prima P, siendo x el valor de la pérdida; $I(x)$ la indemnización que paga al asegurado y $c(I(x))$ el coste que soporta. Si la función de utilidad del asegurador es v, éste, al participar en la operación de seguro, cambiará su utilidad inicial conocida $v(W_0)$ por la utilidad esperada $Ev(W_0 + P - I(x) - c(I(x)))$. Una condición necesaria para que el asegurador ofrezca una póliza con las características dadas es que su utilidad no disminuya con ello, es decir $Ev(W_0 + P - I(x) - c(I(x))) \geq v(W_0)$.

Por parte del asegurado, las condiciones que suponemos son similares a las que hemos estado teniendo en cuenta hasta el momento.

Para encontrar la forma del contrato de seguro Pareto-óptimo, deberemos buscar la prima P y la función de indemnización $I(x)$ que maximicen la utilidad esperada de la riqueza final del asegurado sujeto a la restricción de que la utilidad esperada del asegurador es una constante no inferior a su utilidad inicial. Formalmente, el problema se plantea como sigue:

$$\begin{array}{l} \underset{P,\,I(x)}{max}\ Eu(P,I) = \displaystyle\int_0^D u(W - P - x + I(x))f(x)\,dx \\ \text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} Ev(P,I) = \displaystyle\int_0^D v(W_0 + P - I(x) - c(I(x)))f(x)dx = k \\ 0 \leq I(x) \leq x \end{array} \right. \end{array} \tag{2.28}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $k \geq v(W_0)$.

Raviv (1979) caracterizó la solución del Problema 2.28 cuando la prima P se supone conocida. Según el Teorema 2.5.1 que enunciamos a continuación, las pólizas de seguro óptimas tienen dos formas posibles: una franquicia con coaseguro de las pérdidas por encima de la franquicia, o una cobertura completa de las pérdidas hasta un límite y coaseguro de las pérdidas por encima de ese límite.

Teorema 2.5.1 *Si asegurado y asegurador tienen ambos aversión al riesgo, existen $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 \geq 0$ tales que la solución $I^*(x)$ del problema anterior toma una de las dos formas siguientes:*

$$\begin{cases} I^*(x) = 0 & si\ x \leq \bar{x}_1; \\ 0 < I^*(x) < x & si\ x > \bar{x}_1. \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} I^*(x) = x & si\ x \leq \bar{x}_2; \\ 0 < I^*(x) < x & si\ x > \bar{x}_2. \end{cases} \tag{2.30}$$

En ambos casos, cuando $0 < I^*(x) < x$, la cobertura marginal, que puede interpretarse como la proporción de la pérdida cubierta por el seguro o tasa de coaseguro, viene determinada por:

$$I^{*'}(x) = \frac{r(u, A^*)}{r(u, A^*) + r(v, B^*)(1 + c') + \dfrac{c''}{1 + c'}} \tag{2.31}$$

donde $A^* = W - P - x + I^*(x)$, $B^* = W_0 + P - I^*(x) - c(I^*(x))$, r es el índice de aversión absoluta al riesgo y c' y c'' están evaluadas en $I^*(x)$.

Así, si la indemnización óptima $I^*(x)$ toma la forma dada en la Ecuación 2.29, el valor $\bar{x}_1$ representa el nivel de franquicia, o sea la mayor pérdida no cubierta por el seguro. En cambio, el límite superior $\bar{x}_2$ de las indemnizaciones del tipo de la Ecuación 2.30 es la pérdida más grande que es totalmente cubierta por el seguro.

Además, el teorema indica que, cuando ambas partes tienen aversión al riesgo, el reparto del riesgo viene dado de acuerdo con 2.31. Resolviendo esta ecuación diferencial con la condición de contorno apropiada, se podría obtener la función de cobertura. Que la póliza óptima venga dada por una franquicia o un límite superior para las indemnizaciones depende de la condición de contorno establecida.

Fijada la prima P, si $I_P(x)$ es la función de indemnización solución de la ecuación diferencial planteada en 2.31 con la condición de contorno $I_P(0) = 0$, se distinguen tres posibles situaciones:

1. Si $Ev(P, I_P) = k$, se satisface la restricción para la utilidad del asegurador; $I_P(0) = 0$ es la condición de contorno apropiada e I_P es la función de cobertura óptima.

2. Si $Ev(P, I_P) < k$, I_P no es la función de indemnización óptima, ya que no verifica la restricción para la utilidad del asegurador. Para llegar al óptimo, hay que incrementar esta utilidad hasta el nivel requerido, lo que se consigue modificando la indemnización mediante la reducción del pago para algunas pérdidas. En concreto, la condición de contorno apropiada en este caso es $I(x) = 0 \ \forall x \leq \bar{x}_1$, con lo que se obtiene la optimalidad de una póliza con franquicia.

3. Si $Ev(P, I_P) > k$, la cobertura puede ser modificada para algunos valores de la pérdida, incrementando la utilidad esperada del asegurado mientras la restricción de la utilidad del asegurador no se incumpla. La condición de contorno apropiada es $I^*(0) > 0$ lo que, junto con la restricción $I(x) \leq x$, lleva a que $I^*(x) = x$ para $x \leq \bar{x_2}$. En este caso, la póliza con un límite superior es la óptima.

Si definimos los conjuntos $S_1 = \{P \mid Ev(P, I_P) < k\}$ y $S_2 = \{P \mid Ev(P, I_P) > k\}$, la proposición siguiente resume la discusión de los casos anteriores, estableciendo que la cobertura óptima conlleva una franquicia no trivial si $P \in S_1$ y un límite superior no trivial si $P \in S_2$. La prima P_0 y su función I_0 asociada, correspondientes al primer caso tratado, verifican que $Ev(P_0, I_0) = k$, tratándose de una póliza sin franquicia ni límite superior, es decir $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$.

Proposición 2.5.2 *Para $P \in S_i$, $i = 1$ ó 2, la función de indemnización óptima $I^*(x)$ viene dada por las Ecuaciones 2.29 y 2.31 ó por las Ecuaciones 2.30 y 2.31, respectivamente, con $\bar{x}_i > 0$, $i = 1$ ó 2.* □

Es posible determinar también el efecto sobre la cobertura óptima de un cambio en el nivel de franquicia o en el límite superior, según la prima fijada pertenezca a S_1 ó S_2. Según se enuncia en la siguiente proposición, en el primer caso la función de indemnización decrece al aumentar el nivel de franquicia, mientras que, si partimos de una prima del conjunto S_2, la función de cobertura se incrementa al hacerlo el límite superior.

Proposición 2.5.3 *Consideremos la prima P y la función de indemnización óptima $I^*(x)$ que se obtiene según el Teorema 2.5.1. Se verifica:*

1. *Si $P \in S_1$, entonces* $\dfrac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1} < 0$ *para* $x > \bar{x}_1$.
2. *Si $P \in S_2$ entonces* $\dfrac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_2} > 0$ *para* $x > \bar{x}_2$.

□

2.5.1. Pólizas con franquicia

En el apartado anterior, la prima se ha supuesto fija y se han determinado en función de ella la indemnización óptima $I^*(x)$ y los niveles $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$. Procedemos ahora a determinar el valor óptimo de la prima P^*, completando así la elección de la póliza de seguro Pareto-óptima. El Teorema 2.5.4 probará que la búsqueda de la prima óptima puede restringirse al subconjunto S_1 de primas que generan pólizas con franquicia. En este subconjunto, el Teorema 2.5.5 caracterizará las condiciones necesarias y suficientes para que la franquicia no sea trivial. Estos dos resultados completan la obtención de pólizas Pareto-óptimas y nos permiten distinguir claramente los casos bajo los cuales deberíamos esperar la observación de franquicias y coaseguros en los contratos de seguro. El resultado obtenido por Arrow (1971) se trata como caso especial, lo que nos permite centrarnos en las hipótesis específicas que generan estos resultados.

El siguiente teorema establece que cualquier póliza de seguro con un límite superior es dominada por la póliza (P_0, I_0), con límite superior nulo. Podemos decir así que el reparto puro domina a cualquier póliza con un límite superior.

Teorema 2.5.4 $Eu(P_0, I_0) \geq Eu(P, I^*)$ *para todo* $P \in S_2$.

Demostración

Para llegar a este resultado, demostraremos que un incremento infinitesimal en el límite superior $\bar{x}_2$ supone un incremento en la prima que el asegurado está dispuesto a pagar menor de lo que el asegurador requeriría. Veremos que únicamente cuando dicho límite superior es nulo coinciden asegurado y asegurador, por lo que la póliza que se obtiene a partir de la prima P_0 será mejor que cualquier otra con límite superior positivo.

En el óptimo, $Ev(P, I^*)$ y $Eu(P, I^*)$ toman valores constantes que denotaremos k y k' respectivamente. Vamos a derivar ambas expresiones respecto de $\bar{x}_2$ para llegar a los valores que queremos comparar: cada una de las dos $\dfrac{dP}{d\bar{x}_2}$ cuando Ev y Eu son constantes.

Teniendo en cuenta que $P \in S_2$, la indemnización es del tipo "límite superior" y por tanto $Ev(P, I^*)$ tomará el valor:

$$\int_0^{\bar{x}_2} v(W_0 + P - x + c(x))f(x)dx + \int_{\bar{x}_2}^{D} v(W_0 + P - I^*(x) - c(I^*(x)))f(x)dx = k.$$

Llamando $A^* = W - P - x + I^*(x)$ y $B^* = W_0 + P - I^*(x) - c(I^*(x))$ y derivando respecto de $\bar{x}_2$, se tiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{x}_2} v'(W_0 + P - x - c(x)) \frac{dP}{d\bar{x}_2}\bigg|_{Ev=k} f(x)dx + \\ &+ \int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B^*) \left(\frac{dP}{d\bar{x}_2}\bigg|_{Ev=k} - \frac{dI^*}{d\bar{x}_2}(1 + c') \right) f(x)dx = 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$\frac{dP}{d\bar{x}_2}\bigg|_{Ev=k} = \frac{\displaystyle\int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B^*)(1 + c')\frac{dI^*}{d\bar{x}_2} f(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\bar{x}_2} v'(W_0 + P - x - c(x))f(x)dx + \int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B)f(x)dx} \tag{2.32}$$

Igualmente, en el óptimo, $Eu(P, I^*)$ alcanza el valor k':

$$Eu(P, I^*) = \int_0^{\bar{x}_2} u(W - P)f(x)dx + \int_{\bar{x}_2}^{D} u(A^*)f(x)dx = k'.$$

Derivando esta igualdad respecto de $\bar{x}_2$, obtendremos $\left.\dfrac{dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Eu=k'}$.

$$\int_0^{\bar{x}_2} u'(W-P) \left.\frac{-dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Eu=k'} f(x)dx + \int_{\bar{x}_2}^{D} u'(A^*) \left(\left.\frac{-dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Eu=k'} + \frac{dI^*}{d\bar{x}_2}\right) f(x)dx = 0$$

de donde

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Eu=k'} = \frac{\displaystyle\int_{\bar{x}_2}^{D} u'(A^*)\frac{dI^*}{d\bar{x}_2} f(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\bar{x}_2} u'(W-P)f(x)dx + \int_{\bar{x}_2}^{D} u'(A)f(x)dx} \tag{2.33}$$

Como hemos señalado, debemos comparar ambas derivadas parciales, que nos indican la cantidad adicional que el asegurado pagaría si se produce un incremento en $\bar{x}_2$ y la cantidad adicional que el asegurado aceptaría.

Usando las condiciones necesarias del problema de optimización 2.28, se llega a que, para $x \geq \bar{x}_2$:

$$\frac{u'(A^*)}{u'(W-P)} = \frac{v'(B)(1+c')}{v'(C)(1+c'(\bar{x}_2))}, \tag{2.34}$$

siendo $C = W_0 + P - \bar{x}_2 - c(\bar{x}_2)$.

Integrando la Ecuación 2.34 en el intervalo $[\bar{x}_2, D]$ y teniendo en cuenta que $c' \geq 0$, se tiene:

$$\frac{1}{u'(w-P)} \int_{\bar{x}_2}^{D} u'(A^*)f(x)dx = \frac{1}{v'(C)(1+c'(\bar{x}_2))} \int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B^*)(1+c')f(x)dx \tag{2.35}$$

$$\geq \frac{1}{v'(C))(1+c'(\bar{x}_2))} \int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B^*)f(x)dx \tag{2.36}$$

Si multiplicamos previamente ambos miembros de la Ecuación 2.34 por $\dfrac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_2}$ y luego integramos entre $\bar{x}_2$ y D:

$$\frac{1}{u'(w-P)} \int_{\bar{x}_2}^{D} u'(A^*)\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_2} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{v'(C)(1+c'(\bar{x}_2))} \int_{\bar{x}_2}^{D} v'(B^*)\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_2}(1+c')f(x)dx \tag{2.37}$$

Por otra parte, si $0 \leq x \leq \bar{x}_2$, el decrecimiento de la utilidad marginal debido a la aversión al riesgo implica que $\dfrac{v'(W_0 + P - x - c(x))}{v'(C)} \leq 1$ y también, puesto que el coste marginal es positivo, $\dfrac{v'(W_0 + P - x - c(x))}{v'(C)(1 + c'(\bar{x}_2))} \leq 1$, con lo que:

$$\frac{1}{v'(C)(1 + c'(\bar{x}_2))} \int_0^{\bar{x}_2} v'(W_0 + P - x - c(x)) f(x) dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{u'(W - P)} \int_0^{\bar{x}_2} u'(W - P) f(x) dx. \tag{2.38}$$

A partir de 2.35 y 2.38, se obtiene la desigualdad:

$$\frac{1}{u'(W - P)} \left[\int_0^{\bar{x}_2} u'(W - P) f(x) dx + \int_{\bar{x}_2}^D u'(A^*) f(x) dx \right] \geq$$

$$\frac{1}{v'(C)(1 + c'(\bar{x}_2))} \left(\int_0^{\bar{x}_2} v'(W_0 + P - x - c(x)) f(x) dx + \int_{\bar{x}_2}^D v'(B^*) f(x) dx \right) \tag{2.39}$$

Dividiendo, finalmente, la Ecuación 2.37 por la Ecuación 2.39, se tiene que

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Eu=k'} \leq \left.\frac{dP}{d\bar{x}_2}\right|_{Ev=k},$$

debiéndose la desigualdad al signo positivo de $\dfrac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_2}$, dado por la Proposición 2.5.3.

Esta relación señala que un incremento marginal en el nivel del límite superior conlleva un incremento de la prima que el asegurado está dispuesto a pagar por el seguro menor o igual que el requerido por el asegurador. Solo coinciden ambas cantidades cuando $\dfrac{v'(W_0 + P - x - c(x))}{v'(C)} = 1$, lo que tiene lugar solo si $x = \bar{x}_2$ para todo $x \in [0, \bar{x}_2]$, siendo necesario para que esto se dé que $\bar{x}_2 = 0$. Así, la mejor póliza de seguro es la que no tiene límite superior para la cobertura, debiéndose buscar entonces el óptimo a partir de primas $P \in S_1$ que den lugar a pólizas con franquicias. □

Investigamos ahora las condiciones bajo las cuales la póliza óptima de Pareto incluye o no una franquicia. El siguiente teorema especifica que se obtiene una franquicia no trivial si y solo si el coste del seguro depende de la cantidad pagada como cobertura del seguro.

Teorema 2.5.5 *Una condición necesaria y suficiente para que la franquicia óptima de Pareto sea nula es que el coste marginal del seguro sea nulo (es decir, el coste no depende de la indemnización: $c(I(x)) = a$ para todo x).*

Demostración

Para demostrar este resultado, empezamos calculando una serie de elementos que vamos a utilizar.

La restricción del problema de optimización relativa a la utilidad del asegurador debe cumplirse en el óptimo. Teniendo en cuenta que la indemnización es nula cuando la pérdida es inferior al nivel de franquicia $\bar{x}_1$, se obtiene:

$$Ev(P,I^*) = \int_0^{\bar{x}_1} v(W_0+P-a)f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} v(W_0+P-I^*(x)-c(I^*(x)))f(x)dx = k.$$

Si llamamos, como antes, $A^* = W-P-x+I^*(x)$ y $B^* = W_0+P-I^*(x)-c(I^*(x))$ y derivamos $Ev(P,I^*)$ respecto de $\bar{x}_1$, obtenemos una expresión para $\dfrac{dP}{d\bar{x}_1}$ cuando Ev es constante:

$$\int_0^{\bar{x}_1} v'(W_0+P-a) \left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Ev=k} f(x)dx +$$

$$+\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*) \left(\left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Ev=k} - \frac{dI^*}{d\bar{x}_1} - c'(I^*(x))\frac{dI^*}{d\bar{x}_1} \right) f(x)dx = 0$$

de donde:

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Ev=k} = \frac{\displaystyle\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)(1+c')\frac{dI^*}{d\bar{x}_1} f(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\bar{x}_1} v'(W_0+P-a)f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)f(x)dx} \tag{2.40}$$

Igualmente, en el óptimo, $Eu(P,I^*)$ alcanzará un valor k' constante:

$$Eu(P,I^*) = \int_0^{\bar{x}_1} u(W-P-x)f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} u(B^*)f(x)dx = k'.$$

Derivando esta igualdad respecto de $\bar{x}_1$, obtendremos $\left.\dfrac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'}$.

$$\int_0^{\bar{x}_1} u'(W-P-x) \left.\frac{-dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'} f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*) \left(\left.\frac{-dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'} + \frac{dI^*}{d\bar{x}_1} \right) f(x)dx = 0$$

de donde:

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'} = \frac{\displaystyle\int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)\frac{dI^*}{d\bar{x}_1}f(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\bar{x}_1} u'(W-P-x)f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)f(x)dx} \tag{2.41}$$

Además de estas derivadas, vamos a usar la igualdad 2.42 que damos a continuación y que se obtiene a partir de las condiciones necesarias del Problema 2.28; se llega a que, para $x \geq \bar{x_1}$:

$$\frac{u'(A^*)}{u'(W-P-\bar{x}_1)} = \frac{v'(B)(1+c')}{v'(W_0+P-a)(1+c'(0))} \tag{2.42}$$

Abordamos ya la prueba de la condición suficiente, suponiendo para ello que $c' \equiv 0$.

En ese caso, integrando la Ecuación 2.42 en el intervalo $[\bar{x}_1, D]$, se tiene:

$$\frac{1}{u'(w-P-\bar{x}_1)}\int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)f(x)dx = \frac{1}{v'(W_0+P-a)}\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)f(x)dx \tag{2.43}$$

Del mismo modo, si multiplicamos ambos miembros de la Ecuación 2.42 por $\dfrac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}$ e integramos luego entre $\bar{x}_1$ y D:

$$\frac{1}{u'(w-P-\bar{x}_1)}\int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}f(x)dx = \frac{1}{v'(W_0+P-a)}\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}f(x) \tag{2.44}$$

Por otro lado, si $0 \leq x \leq \bar{x}_1$, el decrecimiento de la utilidad marginal debido a la aversión al riesgo del asegurado implica que $\dfrac{u'(W-P-x)}{u'(W-P-\bar{x}_1)} \leq 1$. Por tanto:

$$\frac{1}{u'(W-P-\bar{x}_1)}\int_0^{\bar{x}_1} u'(W-P-x)f(x)dx \leq \int_0^{\bar{x}_1} f(x)dx = \tag{2.45}$$

$$= \frac{1}{v'(W_0+P-a)}\int_0^{\bar{x}_1} v'(W_0+P-a)f(x)dx \tag{2.46}$$

Sumando las Ecuaciones 2.43 y 2.45, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{u'(W-P-\bar{x}_1)}\left(\int_0^{\bar{x}_1} u'(W-P-x)f(x)dx + \int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A)f(x)dx\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{v'(W_0+P-a)}\left(\int_0^{\bar{x}_1} v'(W_0+P-a)f(x)dx+\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B)f(x)dx\right) \quad (2.47)$$

Dividiendo finalmente la Ecuación 2.44 por la Ecuación 2.47, se tiene que

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'} \leq \left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Ev=k},$$

debiéndose la desigualdad al signo negativo de $\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}$, dado por la Proposición 2.5.3.

Esta relación entre ambas derivadas muestra que un incremento marginal en la franquicia implica que la cantidad adicional que el asegurado está dispuesto a pagar por el seguro es menor o igual que la requerida por el asegurador. La operación de seguro solo tendrá sentido cuando coincidan dichas cantidades, lo que ocurrirá solo cuando se tenga la igualdad $\frac{u'(W-P-x)}{u'(W-P-\bar{x}_1)} = 1$, es decir, cuando $x = \bar{x}_1$ para todo $x \in [0, \bar{x}_1]$. Para que esto se dé, debe ser $\bar{x}_1 = 0$. Así, cuando el coste marginal es nulo, la póliza óptima se corresponde con una franquicia nula, quedando probada la condición suficiente.

Para probar la condición necesaria suponemos que $c'(0) > 0$. Procediendo como antes, obtenemos ahora, a partir de la Ecuación 2.42, las relaciones siguientes:

$$\frac{1}{u'(w-P-\bar{x}_1)}\int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{v'(W_0+P-a)(1+c'(0))}\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)(1+c')f(x)dx >$$

$$> \frac{1}{v'(W_0+P-a)(1+c'(0))}\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)f(x)dx \quad (2.48)$$

y

$$\frac{1}{u'(w-P-\bar{x}_1)}\int_{\bar{x}_1}^{D} u'(A^*)\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{v'(W_0+P-a)(1+c'(0))}\int_{\bar{x}_1}^{D} v'(B^*)(1+c')\frac{\partial I^*}{\partial \bar{x}_1}f(x)dx \quad (2.49)$$

Dado que $c'(0) > 0$, existe $y > 0$ tal que $\frac{u'(w-P)}{u'(w-P-y)} = \frac{1}{1+c'(0)}$. Podemos deducir entonces que:

$$\frac{1}{v'(W_0+P-a)(1+c'(0))}\int_0^{\bar{x}_1} v'(W_0+P-a)f(x)dx = \frac{1}{1+c'(0)}\int_0^{\bar{x}_1} f(x)dx =$$

$$= \frac{U'(w-P)}{U'(w-P-y)}\int_0^{\bar{x}_1} f(x)dx < \int_0^{\bar{x}_1} \frac{u'(W-P-x)}{u'(W-P-y)}f(x)dx <$$

$$< \frac{1}{u'(W-P-\bar{x}_1)}\int_0^{\bar{x}_1} u'(W-P-x)f(x)dx,$$

usando el decrecimiento de la utilidad marginal y siempre que $y > \bar{x}_1$.

Dividiendo la Ecuación 2.49 por la suma de esta última con 2.48, se obtiene finalmente que

$$\left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Eu=k'} > \left.\frac{dP}{d\bar{x}_1}\right|_{Ev=k},$$

usando de nuevo el resultado de la Proposición 2.5.3 según el cual $\dfrac{dI^*}{d\bar{x}_1} < 0$.

En esta situación, el asegurado está dispuesto a pagar más de lo que requiere el asegurador. Por lo tanto, el nivel de franquicia óptimo en este caso es diferente de cero, como se argumentaba. □

Los Teoremas 2.5.4 y 2.5.5 han caracterizado los contratos de seguro óptimos de Pareto. Ha quedado demostrado que si el coste del seguro depende de la cobertura, entonces se obtiene una franquicia no trivial. Este resultado es independiente de las actitudes que tengan asegurado y asegurador hacia el riesgo. El resultado sobre la optimalidad de las franquicias obtenido por Arrow (1971) y que hemos reproducido en el Apartado 2.1.2, no era por tanto consecuencia de la hipótesis de neutralidad al riesgo del asegurador; se debe, en cambio, a la hipótesis de que el coste del seguro es proporcional a la cobertura. El resultado de Arrow se puede deducir como caso especial del tratamiento general que hemos hecho aquí.[23] Lo vemos en el siguiente corolario.

[23] Hablando estrictamente, hay que señalar que Arrow no discutió la optimalidad de las pólizas en el sentido de Pareto, sino que se limitó a caracterizar la función de cobertura óptima para una prima dada.

Corolario 2.5.6 *Si $c(I(x)) = \lambda I(x)$ y el asegurador es neutral al riesgo, la póliza óptima de Pareto viene dada por:*

$$I^*(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq \bar{x}_1 \\ x - \bar{x}_1 & si\ x > \bar{x}_1 \end{cases} \tag{2.50}$$

donde $\bar{x}_1 > 0$ si y solo si $\lambda > 0$.

Demostración

Por el Teorema 2.5.5, sabemos que la póliza Pareto-óptima implica que $\bar{x}_1 > 0$ si y solo si $c' > 0$. En este caso, $c' = \lambda$ con lo cual queda demostrada una parte del corolario. Quedaría por determinar la forma exacta de la función de cobertura.

Sabemos que la cobertura marginal cumple la Ecuación 2.31:

$$I^{*'}(x) = \frac{r(u, A^*)}{r(u, A^*) + r(v, B^*)(1 + c') + c''/(1 + c')}.$$

Puesto que suponemos neutralidad al riesgo del asegurador, el índice de aversión absoluta al riesgo se anula, $r(v) = 0$, y la forma de la función de coste implica que $c'' = 0$, con lo que $I^{*'} = 1$ para $x > \bar{x_1}$. Así, $I^*(x) = x + k$, siendo la constante $k = -\bar{x}_1$, para que se cumpla que $I^*(\bar{x}_1) = 0$. La función de indemnización viene dada entonces por la Ecuación 2.50. □

Según se ha visto en la demostración anterior, la franquicia no trivial es consecuencia únicamente de la presencia de un coste proporcional a la cobertura. Dicha franquicia positiva se obtiene tanto con aversión al riesgo como si se supone neutralidad al riesgo.

La forma exacta que adquiere la cobertura, sin embargo, sí está relacionada con la actitud hacia el riesgo. Acabamos de ver qué ocurre con neutralidad por parte del asegurador. Si éste siente aversión al riesgo, la cobertura consistirá en un coaseguro para las pérdidas superiores a la franquicia. El nivel de coaseguro lo da el valor de 2.31 que, con las hipótesis que hacemos ahora, es:

$$I^{*'}(x) = \frac{r(u, A)}{r(u, A) + r(v, B)(1 + \lambda)} < 1.$$

Se generaliza así el resultado de Arrow para el caso de un asegurador adverso al riesgo, siendo el coste proporcional a la cobertura. La aversión al riesgo del asegurador causa el coaseguro de pérdidas por encima de la franquicia, que sigue siendo positiva por los costes del seguro. Si no existiera coste alguno, la franquicia sería nula y la indemnización óptima sería un coaseguro. Resumiendo:

Corolario 2.5.7 *Si el asegurador es adverso al riesgo, entonces la póliza de seguro óptima de Pareto incluye coaseguro de las pérdidas por encima de la franquicia.* □

La aversión al riesgo, sin embargo, no es la única explicación para el coaseguro. Incluso si el asegurador es neutral al riesgo, el coaseguro podría darse, si la función de coste del seguro es una función estrictamente convexa de la cobertura. La no linealidad de la función de utilidad cuando se supone aversión al riesgo es sustituida ahora por la no linealidad de la función de coste. En esta situación, el óptimo de Pareto vuelve a consistir en un coaseguro por encima de una franquicia positiva.

Corolario 2.5.8 *Con la notación anterior, si el asegurador es neutral al riesgo y $c'' > 0$, la póliza óptima de Pareto incluye una franquicia $\bar{x}_1 > 0$ y un coaseguro de las pérdidas por encima de la franquicia.*

Demostración

Puesto que $c' > 0$, sabemos que $\bar{x}_1 > 0$ por el Teorema 2.5.5. De 2.31 se tiene que, para $x > \bar{x}_1$, $I^{*'}(x) = \dfrac{r(u,A)}{r(u,A) + \dfrac{c''}{1+c'}} < 1$. □

Hemos explicado en este apartado cuál es el origen de la aparición de las franquicias y del coaseguro en las operaciones de seguro, así como la causa de que las pólizas de seguro óptimas de Pareto no conllevan un límite superior en la cobertura. En la sección siguiente, intentamos justificar las coberturas con límite superior que se incorporan frecuentemente sobre todo en seguros médicos y de responsabilidad.

2.5.2. Pólizas con límite superior para la cobertura

El límite superior en la cobertura de un seguro se debe a menudo al hecho de que las compañías deben operar según ciertas restricciones de reglamento. Este límite aparece como consecuencia de la obligación del vendedor de ofrecer pólizas con valores actuariales fijados, para una prima dada. Dicho valor actuarial podría ser más pequeño que la pérdida monetaria esperada y entonces la póliza no cubriría totalmente todas las pérdidas potenciales. Siendo adverso al riesgo, el asegurador prefiere asignar este valor actuarial de la póliza a la cobertura completa de pequeñas pérdidas y cobertura limitada de grandes pérdidas, mejor que cualquier otra forma característica de cobertura. Las grandes pérdidas por encima de cierto límite no serán cubiertas con este contrato.

El asegurador ofrecerá contratos que hagan máxima la utilidad esperada de su riqueza final, con la restricción de que la prima es una función del valor actuarial de la póliza y la ya habitual de que la indemnización es no negativa y no sobrepasa el valor de la pérdida. Así, el problema que se plantea en este caso es:

$$\begin{aligned} &\max_{P,I(x)} \; Ev(P,I) = \int_0^D V(W_0 + P - I(x) - c(I(x)))f(x)dx \\ &\text{sujeto a } \begin{cases} P = P\left(\int_0^D I(x)f(x)dx\right) \\ 0 \le I(x) \le x \end{cases} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Si suponemos aversión al riesgo por parte del asegurador, la solución del problema se caracteriza por ser una póliza que cubre totalmente las pérdidas hasta un límite superior, no cubriendo ninguna pérdida que sobrepase dicho límite. Veámoslo:

Teorema 2.5.9 *La solución del Problema 2.51 consiste en una prima P^* y una función de indemnización $I^*(x)$ tales que:*

$$I^*(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \le \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 & \text{para } x > \bar{x}_2 \end{cases} \tag{2.52}$$

siendo $0 \le \bar{x}_2 \le D$ y $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(P^*)$.

Demostración

El problema que hemos planteado aquí es equivalente al resuelto en el Teorema 2.5.1, intercambiando los papeles de asegurado y asegurador. Debemos maximizar ahora la utilidad esperada de la riqueza final del asegurador sujeto a la restricción $0 \leq I(x) \leq x$ y a una restricción sobre la utilidad esperada de la riqueza final del asegurado: $Eu(w-P-x+I(x)) = c_1$, donde c_1 es una constante. Si el asegurado es neutral al riesgo, su función de utilidad u es lineal y, dado P, esta restricción puede reescribirse como $EI(x) = c_2$, que es equivalente a la primera restricción del Problema 2.51. Así, la solución se obtiene directamente del Teorema 2.5.1, con $r(u,.) = 0$. Esto hace que $I^{*'}(x) = 0$ para $x > \bar{x}_i$ y, por tanto, $I^*(x) = K$, para $x > \bar{x}_i$ siendo $K \in \mathbb{R}$.

Si la indemnización fuera del tipo franquicia, $I^*(x) = 0$ para $x \leq \bar{x}_1$ y, por lo tanto, $I^*(x) = 0$ para todo x, con lo cual no habría realmente operación de seguro.

Según lo anterior debe tratarse de una indemnización con límite superior, siendo entonces $I^*(x) = x$ para $x \leq \bar{x}_2$ y, por lo tanto, $I^*(x) = \bar{x}_2$ para $x > \bar{x}_2$, probando así que la forma óptima de contrato es la dada en la Ecuación 2.52.

La constante $\bar{x}_2$ se determina a partir de la prima óptima P^*, que depende de la aversión absoluta al riesgo y del coste del seguro. Si éste es muy alto, debería obtenerse la cobertura completa de todas las pérdidas (es decir, $\bar{x}_2 = D$). Por otra parte, el recargo podría ser lo suficientemente bajo para que ningún seguro fuera ofrecido ($\bar{x}_2 = 0$). En general, por tanto, $0 \leq \bar{x}_2 \leq D$. $\square$

Los seguros que se han analizado hasta el momento para determinar la cobertura óptima en el sentido de Pareto están basados en una hipótesis que simplifica bastante la situación: nos referimos al hecho de que, durante el periodo de vigencia del seguro, el siniestro que da lugar a la pérdida monetaria solo tiene lugar una vez. Esta hipótesis puede ser demasiado restrictiva en ocasiones. Las compañías de negocios y los individuos pueden enfrentarse a riesgos que den lugar a más de una pérdida durante el periodo de duración del seguro. Planteamos estas nuevas situaciones en el apartado siguiente, estudiando la posible extensión de los resultados previos.

2.5.3. Seguro óptimo con múltiples pérdidas

Tratamos a continuación aquellas situaciones en las que el asegurado hace frente a varias pérdidas potenciales. Para simplificar, suponemos que, durante el periodo de cobertura del seguro, el comprador se enfrenta únicamente a dos posibles pérdidas dadas por las variables aleatorias x_i, $i = 1, 2$, con valores en $[0, D_i]$. Denotaremos $f(x_1, x_2)$ a la función de densidad conjunta de la pérdida total, $x_1 + x_2$.

La póliza del seguro se caracteriza por la indemnización $I(x_1, x_2)$ pagada por el asegurador al asegurado si se dan las pérdidas x_1 y x_2. De modo similar a la condición $0 \leq I(x) \leq x$ que teníamos antes, se impone también una restricción para la función de indemnización; en este caso: $0 \leq I(x_1, x_2) \leq x_1 + x_2$, cualesquiera que sean x_1 y x_2.

Siguiendo el planteamiento de los apartados anteriores, la cobertura óptima de Pareto se obtiene maximizando la utilidad esperada del asegurado, sujeta a la restricción de que la utilidad esperada del asegurador excede la que tendría si no interviniera en la operación de seguro. El problema se plantea entonces como:

$$\max_{P,I} \int_0^{D_2} \int_0^{D_1} u(W - P - x_1 - x_2 + I(x_1, x_2)) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{D_2} \int_0^{D_1} v(W_0 + P - I(x_1, x_2) - c(I(x_1, x_2))) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = k \\ 0 \leq I(x_1, x_2) \leq x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

siendo $k \in \mathbb{R}$, $k \geq v(W_0)$.

Probamos en primer lugar que la función de indemnización óptima depende solo de la suma de las dos pérdidas sufridas por el asegurado. Esto permitirá considerarla como función de una única variable, la pérdida conjunta, y aplicarle todos los resultados previos obtenidos.

Teorema 2.5.10 *Sea $I^*(x_1, x_2)$ la solución del problema planteado. Entonces $I^*(x_1, x_2)$ depende solo de la suma $x_1 + x_2$. Es decir, $I^*(x_1, x_2) = \bar{I}^*(x_1 + x_2)$.*

Demostración

El resultado se prueba mostrando que cualquier función $I(x_1, x_2)$ que no dependa únicamente de la suma de las pérdidas no proporciona la cobertura óptima, al existir otra función $I^*(x_1 + x_2)$ que incrementa el objetivo del problema, es factible y depende solo de la suma. Damos a continuación una idea intuitiva de la demostración.

Para simplificar, suponemos que las pérdidas x_1 y x_2 (respectivamente, x'_1 y x'_2) se dan con probabilidad p (respectivamente, p'). Es decir, la pérdida total es x_1+x_2 (ó $x'_1+x'_2$) con probabilidad p (y p', respectivamente). Supongamos que la pérdida conjunta coincide en ambos casos: $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2 = y$. Consideremos una función de cobertura I que no depende solo de la suma; $I(x_1, x_2) \neq I(x'_1, x'_2)$. Un individuo con aversión al riesgo prefiere cambiar cualquier incertidumbre por un resultado cierto. La utilidad esperada del asegurado para estos dos estados puede incrementarse mediante una función de cobertura que depende solo de y:

$$pu(W - P - y + I(x_1, x_2)) + p'u(W - P - y + I(x'_1, x'_2)) \leq U(w - P - y + I^*(y))$$

donde $I^*(y) = pI(x_1, x_2) + p'I(x'_1, x'_2)$. Así, la función I es dominada por la función I^*. I^* es el valor esperado de las coberturas de pérdidas totales iguales. Mediante un argumento similar, se puede demostrar que el asegurador también prefiere la cobertura I^*. □

Nuestro objetivo en este apartado sigue siendo encontrar la póliza de seguro óptima cuando el asegurado se enfrenta a dos pérdidas durante el periodo asegurado. Acabamos de probar en el Teorema 2.5.10 que cualquier función de cobertura que sea un óptimo de Pareto depende únicamente de la pérdida agregada durante el periodo. Si la denotamos $y = x_1 + x_2$, como en la demostración anterior, y llamamos $g(y)$ a su función de densidad, podemos reescribir el problema que nos ocupa como el de encontrar una función de cobertura $I(y)$ solución de:

$$\max_{P,I} \quad \int_0^{D_1+D_2} u(W - P - y + I(y))g(y)dy$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} \displaystyle\int_0^{D_1+D_2} v(W_0 + P - I - c(I(y)))g(y)dy = k \\ 0 \leq I(y) \leq y \end{cases}$$

siendo $k \in \mathbb{R}$, $k \geq v(W_0)$.

Este problema tiene la misma estructura que el considerado en la Ecuación 2.28 del Apartado 2.5, usando la variable y en lugar de la x. Así, todos los resultados concernientes a las pólizas de seguro óptimas siguen siendo válidos cuando el asegurado se enfrenta a dos riesgos, siempre que la pérdida considerada sea la pérdida agregada de todos los riesgos durante el periodo de vigencia del seguro.

Se deduce por tanto que hay que buscar el óptimo partiendo de una prima que da lugar a una indemnización con franquicia, en cuyo caso una condición necesaria y suficiente para que ésta sea estrictamente positiva es que el coste marginal sea nulo. Como consecuencia, si el asegurador es neutral al riesgo y el coste del seguro que ofrece es lineal, la póliza óptima de Pareto conlleva una cobertura completa de las pérdidas por encima de la franquicia. Si, en cambio, el coste es una función convexa de la indemnización o el asegurador tiene aversión al riesgo, entonces aparece el coaseguro como la forma óptima de cobertura por encima siempre de la franquicia. Enunciamos, a continuación, estos resultados que acabamos de deducir.

Teorema 2.5.11 *Una condición necesaria y suficiente para que la franquicia óptima de Pareto sea nula es que el coste marginal del seguro sea nulo.* □

Corolario 2.5.12 *Si el coste del seguro es una función lineal de la indemnización, $c(I) = \lambda I$ y el asegurado es neutral al riesgo, entonces la póliza óptima de Pareto viene dada por*

$$I^*(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x_1 + x_2 \leq \bar{x} \\ x_1 + x_2 - \bar{x} & \textit{si } x_1 + x_2 > \bar{x} \end{cases}$$

donde $\bar{x} > 0$ si y solo si $\lambda > 0$. □

Corolario 2.5.13 *Si el asegurador es adverso al riesgo, entonces la póliza de seguro óptima de Pareto incluye coaseguro de las pérdidas por encima de la franquicia.* □

Corolario 2.5.14 *Si el asegurador es neutral al riesgo y $c'' > 0$, la póliza óptima de Pareto incluye una franquicia $\bar{x} > 0$ y un coaseguro de las pérdidas por encima de la franquicia.* □

Hay que señalar que los resultados obtenidos cuando se producen dos pérdidas a lo largo del periodo asegurado son generalizables para cuando se produce otro número cualquiera de pérdidas durante dicho periodo.

Cerramos así el estudio de los contratos óptimos en el sentido de Pareto. De entre las posibles indemnizaciones, hemos determinado aquélla que proporciona una mayor utilidad al asegurado sin que la del asegurador baje de un nivel fijado. Hemos visto que, dependiendo de la prima de la que se parte, son dos las formas que pueden darse para el seguro óptimo: una franquicia con coaseguro por encima de ella o una cobertura completa de las pérdidas hasta un límite superior y coaseguro a partir de él.

La determinación de la prima adecuada nos lleva a la optimalidad del primer tipo de cobertura. Las actitudes de asegurado y asegurador hacia el riesgo no influyen en la existencia de la franquicia, siendo ésta consecuencia únicamente de un coste marginal positivo. Sí interviene la actitud del asegurador en el tipo de cobertura por encima de la franquicia, tratándose de coaseguro cuando existe aversión al riesgo. Con neutralidad, la cobertura es total a partir del nivel determinado por la franquicia, excepto para costes convexos en cuyo caso vuelve a ser más adecuado el coaseguro.

Finalmente, hemos generalizado estos resultados a situaciones en las que se producen múltiples pérdidas durante el periodo asegurado, concluyendo de este modo el Capítulo 2 dedicado a la determinación y análisis de los seguros óptimos en múltiples situaciones: riesgo único de cuantía fija, riesgo único de cuantía variable, múltiples riesgos, posibilidad de indemnizaciones negativas y optimalidad de Pareto, con la característica común, en todas ellas, de la existencia de información simétrica entre las dos partes que intervienen en la relación: asegurado y asegurador.

En el capítulo siguiente, abordamos otras situaciones más conflictivas en las que una de las partes no dispone de toda la información sobre la otra, existiendo por tanto asimetría de información. En concreto, trataremos la selección adversa y el riesgo moral como problemas de información más habituales en el mundo del seguro.

Capítulo 3
La demanda de seguro con problemas de información

En el capítulo anterior hemos estudiado la demanda óptima de seguro bajo distintos puntos de vista, pero todos con la característica común de estar en situaciones de *información simétrica* entre el asegurado y el asegurador. En el capítulo que iniciamos ahora, nos centraremos en otras situaciones más generales y quizás más realistas y comunes en el mundo que nos rodea. Nos referimos a aquéllas en las que las partes (asegurado y asegurador) no disponen ambas de la misma información sobre las características del asegurado o sobre su posible comportamiento durante la relación contractual. La determinación tanto de la prima como de la cobertura adecuadas para los intereses de ambos resulta, bajo estas circunstancias, más compleja. Valorar el objeto asegurado es asequible, pero si se desconoce la probabilidad que tiene un individuo de sufrir el siniestro asegurado o no se puede predecir su comportamiento durante el periodo de vigencia del seguro, se producirán posiblemente situaciones indeseadas que afecten negativamente a la relación contractual. No olvidemos que los objetivos de asegurado y asegurador son contrapuestos de alguna manera: el primero desea obtener la mayor protección al mínimo precio mientras que el segundo pretende alcanzar el beneficio más alto posible.

Estas asimetrías de información son las que trataremos en las páginas siguientes. Veremos qué consecuencias trae consigo que alguno de los participantes en la relación disponga de una ventaja informativa sobre el otro. En concreto, abordaremos dos tipos de problemas: la selección adversa y el riesgo moral.

3.1. Introducción

A grandes rasgos, se puede decir que la selección adversa aparece cuando, antes de la firma del contrato, el asegurado dispone de más información que el asegurador, fundamentalmente en lo que se refiere a su propensión a sufrir siniestros. Para resolver este problema, el asegurador deberá ofrecer distintas alternativas contractuales que conduzcan a una revelación del tipo de riesgo al que está expuesto su cliente.

En cambio, el riesgo moral surge de una asimetría de información que se produce tras la firma del contrato y está relacionada generalmente con la imposibilidad que tiene el asegurador de controlar el comportamiento del asegurado. En este caso, el contrato deberá transmitir incentivos para que el asegurado que tenga un “buen comportamiento” se sienta recompensado por ello.

Arrow (1963) ya apuntó que la cobertura completa no siempre es óptima en los mercados de seguro, destacando entre los posibles motivos de ello las asimetrías de información. Akerlof (1970) demostró que si todos los aseguradores tuvieran información imperfecta sobre los riesgos que corren los individuos, el mercado del seguro podría no existir o, en caso de existir, podría no ser eficiente. A raíz de estas dos aportaciones, los problemas de información empezaron a ser ampliamente tratados en la literatura económica en sus dos vertientes ya señaladas: selección adversa y riesgo moral.

Especialmente importantes son las aportaciones de Spence (1973) y Rothschild y Stiglitz (1976). El primero demuestra que los clientes pueden usar señales para contrarrestar los efectos de la falta de información. Tales señales se refieren a acciones observables de una de las partes para convencer a la otra parte del valor o calidad de sus productos. En cuanto al modelo de Rothschild y Stiglitz, ha sido tomado como punto de referencia a partir de entonces por muchos investigadores en su estudio de la selección adversa. En el modelo que proponen estos autores, se supone que la población está constituida por distintos grupos de individuos diferenciados únicamente por la probabilidad que tienen de sufrir el siniestro asegurado. El problema que tiene la compañía aseguradora a la hora de diseñar los contratos que ofrecerá a cada cliente es el desconocimiento del tipo de riesgo al que pertenece cada uno. Wilson (1977), Spence (1978) y Riley (1979) publican extensiones interesantes del modelo de Rothschild-Stiglitz, como las más recientes de Doherty y Jung (1993), Doherty y Schlesinger (1995), Landsberger y Meilijson (1996) y Young y Browne (1997), en las que se considera que el individuo se enfrenta a una distribución de pérdidas aleatoria, o la de Fluet y Pannequin (1997) donde se consideran múltiples fuentes de riesgo.

Las soluciones propuestas para reducir la ineficiencia asociada a la selección adversa son de varios tipos: mecanismos de autoselección (Rothschild y Stiglitz (1976), Stiglitz (1977), Wilson (1977), Miyazaki (1977) y Spence (1978)); categorización de riesgos (como por ejemplo Hoy (1982) y Crocker y Snow (1985, 1986, 2000)); y contratos de larga duración (destacamos Dionne (1983), Dionne y Lasserre (1985, 1987), Cooper y Hayes (1987), Hosios y Peters (1989), Dionne y Doherty (1994) y Fombaron (1997, 2000)). Discutiremos todas estas cuestiones en el Apartado 3.2.

A diferencia de los estudios teóricos sobre selección adversa que han sido abundantes a lo largo de las dos últimas décadas, los estudios empíricos se están desarrollando en mayor medida en los últimos años. A excepción de Dahlby (1983, 1992) y de Puelz y Snow (1994) que hicieron aplicaciones al mercado del seguro del automóvil en Canadá y Georgia respectivamente, la mayor parte de las aportaciones de este tipo que se han conseguido son mucho más recientes. Volveremos a ello más detenidamente en el capítulo siguiente.

La selección adversa es un problema muy importante dentro del mundo del seguro, pero su tratamiento ha contribuido también al estudio de otros mercados. Destacan, como pioneros, Miyazaki (1997) que hace una aplicación al mercado laboral y Stiglitz y Weiss (1981) con una aplicación al mercado de crédito.

En cuanto al riesgo moral, es también un fenómeno extendido que se ha convertido en un tema muy popular en la literatura económica. En lo que se refiere a esta cuestión, los avances de la economía del seguro están muy relacionados con los avances de la Teoría Económica en general. Winter (1992) define el riesgo moral como un conflicto de intereses entre un individuo (que se comporta racionalmente) y el provecho o beneficio de una organización. El mercado del seguro es quizá la mejor ilustración para el efecto del riesgo moral, pero éste también se encuentra en relaciones laborales, contratos financieros y, de forma general, en todas aquellas circunstancias en las que la riqueza final de un *principal* es incierta y depende parcialmente del comportamiento de un *agente* cuyas acciones no son observables. Todas estas situaciones se conocen en Economía como relaciones *principal-agente* y son estudiadas por la *Teoría de la Agencia*. Uno de los objetivos de esta teoría es definir un contrato óptimo que incluya incentivos para el agente que mitiguen el efecto de la información asimétrica[24].

En Economía se suele distinguir dos tipos de riesgo moral, dependiendo del momento en que la acción del asegurado tenga lugar. Si ésta tiene lugar antes del acontecimiento del siniestro asegurado, se habla de riesgo moral *ex-ante*, mientras que el riesgo moral *ex-post* se da cuando la acción tiene lugar después de producirse el siniestro[25].

El riesgo moral *ex-ante* ha sido estudiado por Pauly (1974), Marshall (1976), Holmstrom (1979) y Shavell (1979), entre otros. Demostraron que el seguro reduce el estímulo que se pueda tener para la precaución cuando el asegurador es incapaz de controlar la acción del asegurado. Dionne (1982) apuntó que el riesgo moral está también presente cuando el resultado del siniestro asegurado no es una pérdida monetaria, sino cuando por ejemplo se trata de la pérdida de una mercancía irreemplazable. Y Shavell (1982, 1986) extendió el estudio del riesgo moral al seguro de responsabilidad.

El riesgo moral *ex-post* fue introducido por primera vez por Spence y Zeckhauser (1971) y estudiado más tarde por Townsend (1979) y Dionne (1984). En este caso, el siniestro no es observado totalmente por el asegurador, que tiene que confiar en el informe del asegurado o adentrarse en costosas comprobaciones. Mookerjee y Png (1989) demostraron que las auditorías hechas al azar son la mejor respuesta del asegurador ante esta situación. Picard (1996) considera que, en el límite, el problema del riesgo moral se convierte en un problema de fraude en el mercado del seguro.

Otros estudios relacionados con el riesgo moral son los que tratan la eficiencia

[24]Ver Radner (1981) y Grossman y Hart (1983).

[25]El riesgo moral *ex-post* es especialmente importante en seguros de enfermedad, en los que los gastos reclamados dependen de las decisiones tomadas por el paciente y el médico una vez ocurrida la enfermedad.

del mercado. Una de las primeras contribuciones a este respecto es la de Helpman y Laffont (1975), seguida más tarde de Stiglitz (1983), Arnott y Stiglitz (1990) y Arnott (1992), entre otras. En el Apartado 3.3 estudiaremos este segundo problema de información.

Antes, empezaremos en el Apartado 3.2 planteando modelos en los que hay selección adversa, tanto en el caso de un mercado de seguro monopolista como en el de un mercado competitivo. Con el objeto de poder comparar los resultados obtenidos con los que se tienen cuando la información es simétrica entre asegurado y asegurador, se repasarán anteriormente las características de los contratos óptimos con información simétrica en los distintos casos planteados. Ampliaremos este análisis con la consideración de contratos de varios periodos de duración que generalicen el planteamiento del modelo de un periodo.

Como decíamos, completaremos el capítulo con el estudio del riesgo moral en el Apartado 3.3. Lo analizaremos en sus dos formas más habituales: autoprotección y reducción de daños. Esta distinción se debe a que el individuo asegurado puede, a través de determinadas actividades, influir en la probabilidad con que se produce el suceso asegurado (autoprotección) o en la cuantía de la pérdida que soportaría en dicho caso (reducción de daños). Nuestro objetivo será estudiar la forma concreta de la indemnización en que se traduce, en cada una de estas situaciones, la cobertura óptima parcial resultante.

3.2. Selección adversa

Según se ha visto en el capítulo anterior, cuando no existe ningún tipo de problema de información, y bajo determinadas hipótesis con las que seguiremos trabajando en este apartado, los contratos de seguro óptimos consisten en cobertura completa para todos los individuos. Hemos llegado a esta solución a través de la maximización de la utilidad esperada del cliente. En este apartado pretendemos comparar los contratos de seguro óptimos que se obtienen en las situaciones de selección adversa y en aquéllas otras en las que no se presenta.

La clave de los problemas de selección adversa estriba fundamentalmente en la incapacidad por parte del asegurador de distinguir entre los diferentes grupos que componen la población, homogénea desde el punto de vista de las características observables y heterogénea en lo que se refiere a la exposición al riesgo y por tanto a la probabilidad de sufrir un siniestro. Ante la imposibilidad de determinar objetivamente el tipo de riesgo de cada cliente, la compañía aseguradora no puede proponer a cada individuo un contrato de seguro acorde a ello, sino que se ve obligada a proponer un conjunto de pólizas y esperar que cada cliente elija la que le resulte más adecuada, según su tipo de riesgo. El cuidado que debe tener la compañía es el de poner a disposición de sus clientes seguros tales que los individuos, según su tipo de riesgo, se decanten por uno en concreto (el pensado por el asegurador) sin conducir a pérdidas para la compañía.

Para simplificar el estudio, consideramos aquí solo dos tipos distintos de individuos, diferenciados únicamente por la probabilidad de sufrir el siniestro asegurado. Nos referiremos a ellos como individuos de alto riesgo (A) e individuos de bajo riesgo (B), siendo la probabilidad de siniestro p_i, $i = A, B$, y cumpliéndose por tanto $p_A > p_B$.

En lo que concierne a las demás características que afectan a nuestro estudio, todos los individuos se considerarán similares: función de utilidad idéntica, lo que conlleva que la actitud hacia el riesgo y el grado de aversión sea el mismo; exposición a un único posible siniestro que en caso de ocurrir da lugar a la misma pérdida para todos; y misma riqueza inicial.

Supondremos, como viene siendo también habitual, que los asegurados pretenden maximizar la utilidad esperada, que sienten aversión al riesgo y que no tienen capacidad de influir ni en la probabilidad de accidente ni en la cuantía del daño, para evitar de este modo la aparición de problemas adicionales de riesgo moral.

En cuanto al asegurador, consideraremos que es neutral al riesgo y que pretende obtener el mayor beneficio posible de la relación con su cliente.

En este apartado, pretendemos determinar cómo afecta la existencia de individuos de dos tipos de riesgo distintos al seguro óptimo para ellos, en el caso en que la información entre asegurado y asegurador deja de ser simétrica y aparece un problema de selección adversa. Vamos a estudiar dos situaciones diferenciadas: aquélla en la que el mercado del seguro es un monopolio y otra en la que el mercado es competitivo. En ambos casos empezaremos determinando las características de los contratos óptimos cuando la información sobre los futuros asegurados es conocida por el asegurador, usando el mismo planteamiento y las mismas hipótesis con que lo haremos después al introducir la selección adversa, con el fin de poder comparar, como se ha indicado, ambas situaciones.

Antes de meternos de lleno en el análisis pretendido, vamos a analizar diversos aspectos geométricos tales como la forma de las curvas de indiferencia de los asegurados y las de beneficios constantes para la compañía, así como el sentido de su crecimiento y las posiciones relativas de todas ellas, con el objeto de hacer después representaciones gráficas de las distintas situaciones que ayuden a aclarar los problemas planteados.

Denotaremos en general por $C = (P, \beta)$ al contrato de seguro por el que un asegurado paga una prima P a cambio de recibir la indemnización acordada con el asegurador y donde β representa la cobertura neta, diferencia entre la cobertura que proporciona el asegurador y la prima pagada por el asegurado. Si elige este seguro, el individuo de tipo i obtendrá la utilidad esperada $E_i(P, \beta)$ dada por:

$$E_i(P, \beta) = (1 - p_i)u(W_1) + p_i u(W_2), \quad i = A, B,$$

donde $W_1 = W - P$ es la riqueza final del individuo cuando no tiene lugar siniestro ninguno y $W_2 = W - D + \beta$ es su riqueza final cuando sí ocurre el siniestro.

En función de estas variables, el punto E de coordenadas $(W, W - D)$ señalado en la Figura 3.1 representa un individuo no asegurado (prima y cobertura nulas). Sobre la bisectriz del cuadrante se sitúan los individuos que reciben una cobertura total, ya que su riqueza es independiente de que ocurra o no el siniestro asegurado $(W_1 = W_2)$. El resto de los asegurados se sitúa por debajo de la bisectriz y al noroeste de E (zona sombreada de la Figura 3.1), donde la riqueza sin siniestro no es mayor que con siniestro y la prima pagada y la cobertura neta son no negativas.

Las curvas de indiferencia asociadas a la utilidad de los distintos individuos son funciones estrictamente decrecientes y convexas, como se deduce derivando implícitamente la expresión $E_i(P, \beta) = K$ respecto de W_1, siendo $K \in \mathbb{R}$ e $i = A, B$. Se obtiene:

$$(1 - p_i)u'(W_1) + p_i u'(W_2) \cdot \frac{dW_2}{dW_1} = 0 \tag{3.1}$$

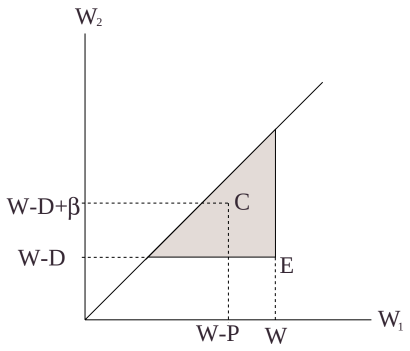

Figura 3.1: Representación gráfica de los asegurados

de donde

$$\frac{dW_2}{dW_1} = -\frac{(1-p_i)u'(W_1)}{p_i u'(W_2)} < 0, \tag{3.2}$$

por ser la función de utilidad estrictamente creciente. Esto demuestra el decrecimiento estricto de las curvas de indiferencia.

En cuanto a su convexidad, derivamos de nuevo la Expresión 3.1 respecto de W_1 para determinar el valor de la derivada segunda de W_2, llegando a:

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2} = -\frac{(1-p_i)u''(W_1) + p_i u''(W_2)\left(\frac{dW_2}{dW_1}\right)^2}{p_i u'(W_2)} > 0$$

debido al crecimiento de la utilidad de nuevo y al decrecimiento de la utilidad marginal. Las curvas de indiferencia son así funciones estrictamente convexas.

Es interesante además destacar que la utilidad crece a medida que nos alejamos del origen. Efectivamente, $u(W_2) = \dfrac{K-(1-p_i)u(W_1)}{p_i}$. Para un valor determinado de W_1, a medida que aumenta la constante K lo hará también $u(W_2)$ y consecuentemente W_2, al ser la utilidad creciente.

Estudiamos por último la posición relativa de las curvas de indiferencia asociadas a ambos tipos de riesgo. La pendiente de dichas curvas viene dada por la Expresión 3.2. En el punto de corte de ambas, se verifica

$$\frac{dW_2}{dW_1}(A) = \frac{1-p_A}{p_A}\frac{p_B}{1-p_B}\frac{dW_2}{dW_1}(B).$$

La relación $p_A > p_B$ lleva a que

$$\frac{1-p_A}{p_A}\frac{p_B}{1-p_B} = \frac{p_B - p_A p_B}{p_A - p_A p_B} < 1,$$

lo que trae como consecuencia, al ser ambas pendientes negativas, que la posición de las curvas sea la que aparece reflejada en la Figura 3.2. Las utilidades esperadas crecen a medida que nos alejamos del origen.

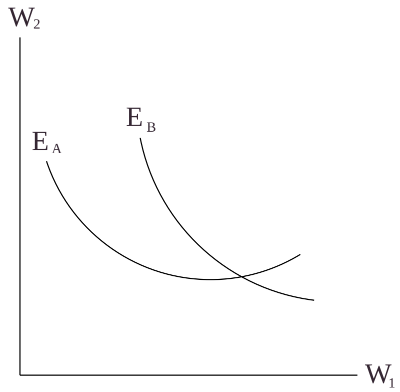

Figura 3.2: Curvas de indiferencia de ambos tipos de riesgo

En lo que concierne al beneficio del asegurador, podemos decir que, por cada contrato que vende a un individuo de tipo i, obtiene $(1-p_i)P_i - p_i\beta_i$ unidades monetarias. Expresando la curva de nivel K en función de las riquezas sin y con siniestro, tenemos que

$$W_2 = \frac{p_i - 1}{p_i}W_1 + \frac{W - p_i D - K}{p_i} \tag{3.3}$$

que no es más que la ecuación de una recta de pendiente $\dfrac{p_i-1}{p_i}$.

Las rectas de beneficios nulos juegan un papel importante cuando el mercado considerado es un mercado competitivo, como veremos más adelante. Estas rectas pasan por el punto E (un individuo no asegurado no aporta ningún beneficio a la compañía) y la correspondiente a los individuos de alto riesgo tiene menor pendiente, en valor absoluto, que la de los individuos de bajo riesgo, lo que lleva a la posición indicada en la Figura 3.3, al ser ambas pendientes además negativas. El beneficio aumenta conforme nos acercamos al origen, dado que $W_2 = \frac{p_i - 1}{p_i} W_1 + K$ y por tanto para un valor constante de W_1, a medida que aumente K disminuye W_2.

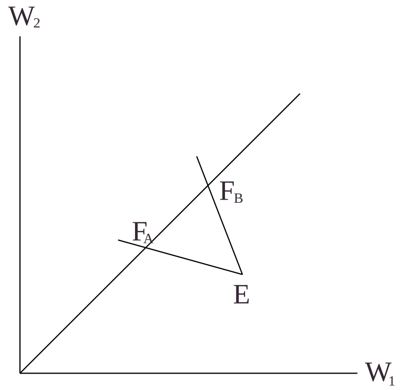

Figura 3.3: Rectas de beneficios nulos

Una vez aclaradas estas características de las curvas de nivel de asegurados y asegurador, pasamos ya a estudiar los contratos de seguro óptimos en monopolios y mercados competitivos, con información simétrica y asimétrica, para determinar así cómo afecta a dichos óptimos la presencia de dos tipos de riesgo entre los individuos asegurados.

3.2.1. Selección adversa en un monopolio

El planteamiento que hacemos cuando el mercado del seguro es un monopolio es distinto al que se hacía en el capítulo anterior. En este tipo de mercado, al no tener el consumidor la oportunidad de elegir entre compañías, el objetivo principal es que el asegurador pretende maximizar su beneficio. Este beneficio tendrá, lógicamente, un límite que vendrá impuesto por la condición de que el individuo se asegure, siendo necesario para ello que el contrato elegido por el individuo de tipo i, con $i = A, B$, no conlleve un descenso de la utilidad con respecto a la que obtendría si no se asegurara[26]. Al surgir un problema de información, se hará necesario añadir nuevas restricciones que reflejen las variaciones producidas.

[26]Esta restricción se conoce como *restricción de racionalidad* o de *participación* en el seguro.

Información simétrica

Analizamos en primer lugar el mercado monopolista cuando existe un conocimiento perfecto de la situación por ambas partes. Suponemos, pues, que el cliente conoce su tipo de riesgo y el asegurador puede distinguir también de manera exacta entre individuos de alto y bajo riesgo. Conoce, por tanto, la proporción λ_i de individuos del tipo i, con $i = A, B$. Si el individuo de tipo i compra un seguro $C_i = (P_i, \beta_i)$, el beneficio total que la compañía aseguradora obtiene de la venta de los contratos a sus clientes de ese tipo será $\lambda_i((1 - p_i)P_i - p_i\beta_i)$.

El problema a resolver es entonces:

$$\begin{cases} \max\limits_{P_i,\beta_i} \quad \sum\limits_{i=A,B} \lambda_i((1-p_i)P_i - p_i\beta_i) \\ \text{sujeto a } E_i(P_i,\beta_i) \geq E_i(0,0), \quad i = A, B \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $E_i(P_i, \beta_i)$ es la utilidad que espera alcanzar el asegurado con el contrato C_i, $i = A, B$ y $E_i(0, 0)$ se corresponde con la situación en que el individuo no compra seguro[27].

Al ser conocido por la compañía el tipo de riesgo de cada cliente, el Problema 3.4 se reduce a la maximización del beneficio obtenido con la venta de un contrato de cada uno de los tipos. Tendremos así que resolver los dos problemas independientes que se formulan a continuación (según sea el valor de i):

$$\begin{cases} \max\limits_{P_i,\beta_i} \quad (1-p_i)P_i - p_i\beta_i \\ \text{sujeto a } E_i(P_i,\beta_i) \geq E_i(0,0) \end{cases} \qquad i = A, B \tag{3.5}$$

El contrato óptimo para cada tipo de riesgo, C_A^*, C_B^*, solución del problema anterior, viene caracterizado en la proposición siguiente y representado en la Figura 3.4:

Proposición 3.2.1 *Conocido el tipo de riesgo de cada asegurado, el contrato óptimo entre un monopolista y un individuo de tipo i, $i = A, B$, se caracteriza por:*

[27]Su utilidad esperada es, en ese caso, $E_i(0, 0) = p_i u(W - D) + (1 - p_i)u(W)$ y se conoce como *utilidad de reserva*.

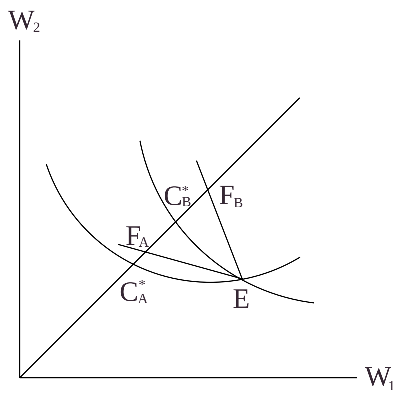

Figura 3.4: Contratos óptimos en monopolio con información simétrica

1. *Cobertura completa:* $\beta_i^* = D - P_i^*$, $i = A, B$;

2. *La utilidad óptima de cada asegurado es la de reserva:* $E_i(P_i^*, \beta_i^*) = E_i(0, 0)$, $i = A, B$.

Demostración

Daremos únicamente una idea de la demostración, basándonos en razonamientos geométricos. El beneficio aumenta en las rectas paralelas a las de beneficios nulos (EF_i) y situadas por debajo de éstas. La solución debe buscarse por tanto en la recta lo más cercana al origen. Por otro lado, la utilidad esperada del cliente no puede ser menor al asegurarse que cuando no contrata ningún tipo de seguro, lo que nos lleva a buscar la solución sobre una curva de indiferencia que no pase por debajo de E. Si conjugamos ambas condiciones, se obtienen los óptimos señalados en la Figura 3.4.

Al estar situados los contratos óptimos sobre la bisectriz del primer cuadrante, la cobertura es completa para los individuos de ambos tipos de riesgo. Además, las restricciones se saturan, lo que significa que la utilidad esperada de cada individuo es la misma en el óptimo a la que alcanzaría en caso de no asegurarse. Gráficamente, se observa que las curvas de indiferencia que contienen los óptimos pasan por el punto E.

En cuanto al asegurador, el beneficio total que obtiene es positivo, como se deduce del hecho de que los contratos óptimos estén por debajo de las líneas de beneficio nulo. Así: $(1-p_i)P_i - p_i\beta_i > 0$ y al ser las coberturas totales $\beta_i = D - P_i$, con lo que se llega a $P_i > p_i D$, lo que indica que la prima pagada por el asegurado a cambio de la cobertura completa es mayor que la prima pura y viene dada implícitamente por la ecuación siguiente, consecuencia de la saturación de la restricción del problema planteado:

$$u(W - P_i) = (1 - p_i)u(W) + p_i u(W - D), \ i = A, B.$$

Información asimétrica

Una vez determinadas las características de los contratos de seguro óptimos para individuos de tipos de riesgo distintos cuando la información es simétrica, estudiaremos en este apartado la situación en la que el asegurador monopolista no es capaz de distinguir el tipo de riesgo al que pertenece cada uno de los individuos. Deberá introducir entonces mecanismos para intentar que los clientes revelen esta característica antes de adquirir el seguro. En principio, lo hará ofreciendo contratos adecuados para que cada cliente se decante obligatoriamente por el que la compañía considera que debería hacerlo, para así poder maximizar sus beneficios.

La primera cuestión que se plantea es si sería bueno para la compañía ofrecer un único contrato a todos los posibles clientes. Un contrato único para todos, para que proporcionara beneficios positivos a la compañía, debería situarse por debajo de la recta de beneficios nulos correspondiente a la probabilidad media de accidente, cuya pendiente depende por tanto de la proporción de individuos de cada tipo. Puesto que estamos en una situación de desconocimiento de dicha proporción por parte de la compañía, sería difícil que lograra ofrecer un contrato que garantizara beneficios. Siempre correría el riesgo de tener pérdidas si hiciera una estimación equivocada. La compañía ofrecerá entonces dos contratos distintos, pensados cada uno de ellos para un tipo de individuo. La elección correcta del cliente será un modo de revelar su tipo de riesgo.

Para plantear formalmente la situación, se deben añadir dos restricciones, que llamaremos *de autoselección*, que garantizan que el individuo i preferirá el contrato C_i al C_j, al conseguir una utilidad esperada más elevada con el primero que con el segundo. Estas restricciones hacen que los problemas a resolver para cada tipo de individuo sean ahora dependientes el uno del otro. La formulación es la siguiente:

$$\begin{cases} \max\limits_{P_i,\beta_i} \quad (1-p_i)P_i - p_i\beta_i & i = A, B. \\ \text{sujeto a} \begin{cases} E_i(P_i,\beta_i) \geq E_i(P_j,\beta_j); \;\; j = A, B; \;\; j \neq i; \\ E_i(P_i,\beta_i) \geq E_i(0,0) \end{cases} & \end{cases} \tag{3.6}$$

La proposición siguiente caracteriza la solución óptima que representamos en la figura 3.5:

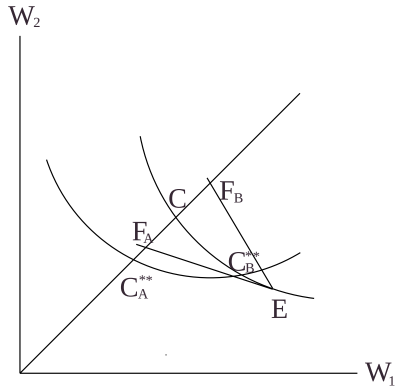

Figura 3.5: Solución óptima en un monopolio con información asimétrica

Proposición 3.2.2 *Con información asimétrica, los contratos de seguro óptimos C_A^{**} y C_B^{**} entre un monopolio e individuos de tipos A y B tienen las siguientes características:*

1. *Cobertura completa para el alto riesgo: $\beta_A^{**} = D - P_A^{**}$ y cobertura parcial para el bajo riesgo: $\beta_B^{**} < D - P_B^{**}$.*
2. *Aumento de la utilidad para el alto riesgo al asegurarse: $E_A(P_A^{**}, \beta_A^{**}) > E_A(0,0)$; y misma utilidad para el bajo riesgo que sin asegurarse: $E_B(P_B^{**}, \beta_B^{**}) = E_B(0,0)$.*
3. *Los individuos de alto riesgo obtendrían la misma utilidad con el contrato del bajo riesgo: $E_A(P_A^{**}, \beta_A^{**}) = E_A(P_B^{**}, \beta_B^{**})$; mientras que los individuos de bajo riesgo obtendrían una utilidad menor si compraran el seguro del alto riesgo: $E_B(P_B^{**}, \beta_B^{**}) > E_B(P_A^{**}, \beta_A^{**})$.*

Demostración

De nuevo damos únicamente una idea de la demostración. Si no existiera la restricción de autoselección, la solución óptima para el tipo B, como se ha visto antes, sería el contrato C de la Figura 3.5. En tal caso, los individuos del tipo A elegirían ese mismo contrato, lo que hemos visto no es conveniente para la compañía. Por tanto no debe ofrecer este contrato, pasando a ser el óptimo el representado por C_B^{**}. Para garantizar que A no elige este contrato, el óptimo para A debe pertenecer a una curva de nivel que no esté situada más baja que C_B^{**}. Como se trata de maximizar el beneficio y éste aumenta en el sentido descendente, el óptimo para los asegurados de alto riesgo es el contrato C_A^{**}.

Se llega así a la conclusión indicada en la proposición anterior. El contrato óptimo para el alto riesgo consiste en cobertura completa, puesto que está situado sobre la bisectriz, no ocurriendo lo mismo con el bajo riesgo, cuyo contrato de seguro óptimo, al no estar situado sobre la bisectriz, equivale entonces a cobertura parcial.

La situación de ambos óptimos indica además que los individuos de bajo riesgo mantienen la misma utilidad esperada se aseguren o no, mientras que en el caso de los individuos de alto riesgo sí aumenta la utilidad al asegurarse: la restricción de racionalidad se satura para los primeros pero no para los segundos. Podemos concluir que los individuos de alto riesgo se ven beneficiados de alguna manera por la existencia de individuos de bajo riesgo.

Por otro lado, en lo que se refiere a la restricción de autoselección, solo se satura para los individuos de alto riesgo, que obtendrían así la misma utilidad si compraran el seguro "pensado" para los bajos riesgos, mientras que éstos disminuirían su utilidad si compraran el seguro de los altos riesgos.

En conclusión, los contratos de un periodo de duración y con un mecanismo de autoselección incrementan el beneficio del monopolio cuando la información es asimétrica, si comparamos la situación con aquélla en la que no hay ningún mecanismo de revelación.

Contratos de larga duración

Suele ser bastante habitual en el mundo del seguro que los contratos entre asegurado y asegurador no se limiten a un periodo de duración sino que con frecuencia se emplean contratos más largos. En el seguro del automóvil, por ejemplo, es normal que los conductores permanezcan con el mismo asegurador durante muchos años. Los aseguradores usan la experiencia que ya tienen con el asegurado para determinar de la forma más correcta posible las primas según el tipo de cobertura acordada y según el tipo de riesgo al que apunte pertenecer el asegurado en vista de su historial. Estos contratos de larga duración pueden considerarse como complemento o sustituto de los mecanismos de autoselección y se introducen para combatir de algún modo la falta de información del asegurador acerca del tipo de riesgo de cada cliente. La información relacionada con los siniestros pasados del asegurado se usa como una forma de clasificar a los individuos y motivarlos así para que revelen su tipo de riesgo al inicio de la relación.

En este sentido, Lemaire (1985), Henriet y Rochet (1986), Hey (1985) y Dionne y Vanasse (1992, 1997) usan sistemas bonus-malus con el fin de relacionar las primas con la experiencia pasada de los individuos. Los asegurados que no sufren siniestros se ven recompensados con bonificaciones de la prima, mientras que los que sí los sufren verán aumentada su prima en el periodo siguiente.

Dionne (1983) y Dionne y Lasserre (1985, 1987) hacen un planteamiento algo distinto. El asegurador ofrece un contrato en el que el individuo tiene que seleccionar, al principio de la relación, una prima inicial haciendo un anuncio de su riesgo. En el segundo periodo, un cliente que haya dicho ser de bajo riesgo seguirá pagando la correspondiente prima baja si se comprueba que la pérdida media sufrida en el periodo anterior resulta ser menor que la pérdida esperada en función del tipo de riesgo al que dijo pertenecer, incluyendo un margen de error. Esto indicaría que efectivamente el asegurado pertenecía al tipo de riesgo declarado y seguiría pagando la misma prima. Por el contrario, si la pérdida media obtenida supera a la esperada, el asegurado sufrirá una penalización y tendrá que pagar una prima más elevada, obteniendo además una menor utilidad que en caso de no asegurarse. El margen estadístico de error se introduce para evitar que las desviaciones con respecto a la pérdida media produzcan demasiado a menudo penalizaciones para quienes han revelado su verdadero tipo de riesgo aunque su pérdida haya superado a la esperada. Al mismo tiempo se toma lo suficientemente pequeño como para detectar a los que intentan incrementar su utilidad anunciando un tipo de riesgo inferior al verdadero.

En el siguiente periodo, el asegurador puede volver a ofrecer una prima más baja a la vista de la frecuencia de los siniestros sufridos y siempre que dicha frecuencia vuelva a estar dentro de unos límites razonables.

Nosotros presentaremos aquí una generalización a dos periodos de duración de los modelos de un periodo tratados en las secciones anteriores[28]. Para intentar incrementar sus beneficios, el monopolista ofrece contratos en los que las primas y coberturas en el segundo periodo son funciones del historial de siniestros del primer periodo. Este modelo se caracteriza por el hecho de que las primas y coberturas a pagar por el asegurado y el asegurador, respectivamente, en cada uno de los dos periodos, se fijan al principio de la relación y no al principio de cada uno de los periodos de duración del contrato.

Denotaremos por C_i^2 al contrato de dos periodos $C_i^2 = \{P_i, \beta_i, P_{ia}, \beta_{ia}, P_{in}, \beta_{in}\}$, donde P_i y β_i son la prima y la cobertura neta correspondientes al primer periodo y P_{il} y β_{il} $(l = a, n)$ las que se pagarán en el segundo, dependiendo de si hay o no accidente durante el primer periodo ($l = a$ y $l = n$ respectivamente). Así, las características del seguro para el segundo periodo van a depender de si en el primer periodo ocurre o no el siniestro asegurado, pero se deciden las cantidades a pagar por asegurado y asegurador al principio de la relación; no existe posibilidad de renegociación del contrato al finalizar el primer periodo y antes de iniciarse el segundo[29].

Formalmente, la solución óptima de este problema se obtiene maximizando los beneficios esperados de la compañía a lo largo de los dos periodos, cumpliéndose la restricción de racionalidad para cada tipo de asegurado (la utilidad no empeora al asegurarse), así como restricciones de autoselección, que obliguen en cierta forma a cada individuo a elegir el contrato más adecuado según su tipo de riesgo (la utilidad alcanzada no es mayor con el contrato correspondiente al otro tipo de riesgo).

---

[28]Los resultados que se obtienen son válidos también para el caso de n periodos.

[29]Dionne y Doherty (1994), Rey y Salanié (1996) y Fombaron (1997a) tratan la posibilidad de renegociación del contrato al principio de cada periodo.

La formulación del problema es como sigue:

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{P_i,\beta_i,P_{il},\beta_{il}} & (1-p_i)P_i - p_i\beta_i + p_i\left[(1-p_i)P_{ia} - p_i\beta_{ia}\right] + \\ & (1-p_i)\left[(1-p_i)P_{in} - p_i\beta_{in}\right] \qquad\qquad i = A, B. \\ \text{sujeto a} & \left\{\begin{array}{l} 2E_i(0,0) \leq E_i^{(2)}(C_i^2); \\ E_i^{(2)}(C_j^2) \leq E_i^{(2)}(C_i^2);\ j = A, B;\ j \neq i \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

donde $E_i^{(2)}(C_j^2)$ representa la utilidad esperada que obtiene el asegurado i a lo largo de los dos periodos de duración del contrato C_j^2. Su valor es, para $i, j = A, B$:

$$E_i^{(2)}(C_j^2) = p_i u(W - D + \beta_j) + (1-p_i)u(W - P_j) + p_i\left[p_i u(W - D + \beta_{ja}) + \right.$$
$$\left.(1-p_i)u(W - P_{ja})\right] + (1-p_i)\left[p_i u(W - D + \beta_{jn}) + (1-p_i)u(W - P_{jn})\right]$$

La solución de este problema viene reflejada en la proposición que enunciamos a continuación:

Proposición 3.2.3 *En un monopolio con información asimétrica, los contratos de dos periodos óptimos, $\hat{C}_A^2$ y $\hat{C}_B^2$, tienen las siguientes características:*

1. *Los individuos de alto riesgo obtienen cobertura completa a cambio de la misma prima en cada periodo, independientemente de la experiencia del primer periodo, es decir: $\hat{P}_A = \hat{P}_{Aa} = \hat{P}_{An}$, $\hat{\beta}_A = \hat{\beta}_{Aa} = \hat{\beta}_{An}$ y $\hat{\beta}_A = D - \hat{P}_A$.*

2. *Los individuos de bajo riesgo obtienen cobertura parcial, dándose la siguiente relación entre las primas y coberturas según las distintas situaciones: $\hat{P}_{Bn} < \hat{P}_B < \hat{P}_{Ba}$, $\hat{\beta}_{Ba} < \hat{\beta}_B < \hat{\beta}_{Bn}$.*

3. *Los individuos de bajo riesgo no ven aumentada su utilidad de reserva, esto es: $E_B^{(2)}(\hat{C}_B^2) = 2E_B(0,0)$.*

4. *Los individuos de alto riesgo obtendrían la misma utilidad con ambos contratos, o, lo que es lo mismo, $E_A^{(2)}(\hat{C}_A^2) = E_A^{(2)}(\hat{C}_B^2)$.*

Demostración

Denotaremos por λ_1 y λ_2 a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de racionalidad de los individuos A y B, respectivamente, y λ_3, λ_4

a los asociados a las restricciones de autoselección de A y B; todos ellos son no negativos.

λ_3 y λ_4 no pueden ser ambos positivos ya que, en ese caso, se saturarían las dos restricciones de autoselección y todos los individuos serían indiferentes entre ambos contratos. Si fuera solo $\lambda_4 > 0$, se incumpliría la restricción de racionalidad para los individuos de bajo riesgo. Debe ser, por tanto, $\lambda_4 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. Se deduce así inmediatamente la saturación de la restricción de autoselección para los individuos de alto riesgo enunciada en la proposición (Apartado 4).

Al ser $\lambda_3 > 0$, la condición necesaria de primer orden implica que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. Se demuestra así el Apartado 3: la restricción de racionalidad de los individuos de bajo riesgo se satura.

Para probar los apartados restantes, usaremos las condiciones necesarias de primer orden que se obtienen al derivar la función de Lagrange respecto de las variables P_i, β_i, P_{il} y β_{il}, $i = A, B$, $l = a, n$, teniendo en cuenta solo los multiplicadores no nulos. Las condiciones resultantes son las siguientes:

$$1 - \lambda_3 u'(W - \hat{P}_A) = 0 \tag{3.8}$$
$$1 - \lambda_3 u'(W - D + \hat{\beta}_A) = 0 \tag{3.9}$$
$$1 - \lambda_3 u'(W - \hat{P}_{Aa}) = 0 \tag{3.10}$$
$$1 - \lambda_3 u'(W - D + \hat{\beta}_{Aa}) = 0 \tag{3.11}$$
$$1 - \lambda_3 u'(W - \hat{P}_{An}) = 0 \tag{3.12}$$
$$1 - \lambda_3 u'(W - D + \hat{\beta}_{An}) = 0 \tag{3.13}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{1 - p_A}{1 - p_B}\right) u'(W - \hat{P}_B) = 0 \tag{3.14}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{p_A}{p_B}\right) u'(W - D + \hat{\beta}_B) = 0 \tag{3.15}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{p_A(1 - p_A)}{p_B(1 - p_B)}\right) u'(W - \hat{P}_{Ba}) = 0 \tag{3.16}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{p_A^2}{p_B^2}\right) u'(W - D + \hat{\beta}_{Ba}) = 0 \tag{3.17}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{(1 - p_A)^2}{(1 - p_B)^2}\right) u'(W - \hat{P}_{Bn}) = 0 \tag{3.18}$$
$$1 - \left(\lambda_2 - \lambda_3 \cdot \frac{(1 - p_A)p_A}{(1 - p_B)p_B}\right) u'(W - D + \hat{\beta}_{Bn}) = 0 \tag{3.19}$$

A partir de estas condiciones se deducen fácilmente los Apartados 1 y 2.

Comparando las Ecuaciones 3.8, 3.10 y 3.12 se obtiene la relación entre las primas que deben pagar los individuos de alto riesgo en las distintas situaciones: $\hat{P}_A = \hat{P}_{Aa} = \hat{P}_{An}$. Vemos que coinciden en todos los casos.

De las Ecuaciones 3.9, 3.11 y 3.13 se deduce que la cobertura neta es siempre la misma para los individuos de alto riesgo, independientemente de lo que ocurra en el primer periodo: $\hat{\beta}_A = \hat{\beta}_{Aa} = \hat{\beta}_{An}$.

A partir de 3.8 y 3.9 se demuestra que la cobertura para los individuos de alto riesgo es completa: $\hat{\beta}_A = D - \hat{P}_A$.

De un modo similar se llega a las características del contrato para los individuos de bajo riesgo.

En lo que se refiere a las primas, las Ecuaciones 3.14, 3.16 y 3.18 llevan a la relación $\hat{P}_{Bn} < \hat{P}_B < \hat{P}_{Ba}$. Es decir, la prima a pagar en el segundo periodo será superior a la del primero si ha ocurrido un siniestro en este periodo e inferior si no ha tenido lugar.

Igualmente, las Ecuaciones 3.15, 3.17 y 3.19 prueban que, en comparación con la del primer periodo, la cobertura neta será más pequeña en el segundo periodo si durante el primero ha habido siniestro, mientras que será mayor en caso contrario: $\hat{\beta}_{Ba} < \hat{\beta}_B < \hat{\beta}_{Bn}$. □

Sintetizando los resultados que hemos obtenido sobre la forma del contrato óptimo de seguro cuando el mercado es un monopolio, podemos sacar varias conclusiones. En primer lugar, los individuos de alto riesgo parecen beneficiarse de la existencia de información asimétrica, ya que no solo siguen recibiendo la misma cobertura completa que cuando la información es totalmente simétrica, sino que además ven cómo aumenta su utilidad con respecto a esta última situación, tanto cuando los contratos se reducen a un periodo como cuando se hacen para una duración más larga. Los individuos de bajo riesgo, sin embargo, sí se ven afectados por la asimetría de información, viéndose influidos negativamente por la presencia de individuos de alto riesgo. Los de bajo riesgo pasan de recibir cobertura completa, cuando no existe ningún problema de información, a recibir solo cobertura parcial cuando surge la asimetría; además, en cualquiera de los casos estudiados mantienen siempre la utilidad de reserva.

3.2.2. Selección adversa en un mercado competitivo

Una vez analizada la situación de los mercados de seguro monopolistas, nos adentramos en un contexto competitivo. Al igual que hemos hecho para el monopolio, vamos a tratar en primer lugar el caso en que la información asimétrica no afecta al mercado, para introducir luego la selección adversa; tanto en los contratos de un periodo de duración primero, como de varios periodos después, tratando de encontrar remedios para evitar los efectos que produce.

En general, podemos indicar que el planteamiento no va a ser ahora similar al que se hacía en el monopolio. En un mercado competitivo, el cliente tiene la posibilidad de elegir entre distintas compañías, por lo que éstas no podrán pretender maximizar su beneficio, sino que será el individuo el que quiera hacerlo con su utilidad esperada, eligiendo para ello el contrato más adecuado de entre los ofertados por las distintas compañías. Por tanto, el problema de optimización a resolver será ahora la maximización de la utilidad del asegurado, con la restricción de beneficios nulos para el asegurador, ya que, de no considerar dicha restricción, otra compañía podría ofrecer un contrato más beneficioso para el cliente, reportándole a ella un beneficio menor. En cada uno de los casos que estudiemos posteriormente se añadirán las restricciones oportunas para representar las situaciones concretas que iremos señalando.

Información simétrica

Cuando no existe ningún problema de información en el mercado del seguro y, por tanto, las compañías son capaces de discriminar entre los consumidores de acuerdo con su tipo de riesgo, éstas deberán ofrecer a cada individuo el contrato que haga máxima la utilidad esperada del asegurado, con la restricción de beneficio nulo para la compañía. Formalmente, el problema se plantea del modo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{P_i,\beta_i} \ (1-p_i)u(W-P_i)+p_iu(W-D+\beta_i) \\ \text{sujeto a } (1-p_i)P_i - p_i\beta_i = 0 \end{array} \right. \qquad i=A,B.$$

Se puede comprobar que, efectivamente, la solución consiste en cobertura completa para cada tipo de riesgo. Sin embargo, el nivel de riqueza que alcanzan los consumidores no es el mismo que en el caso del monopolio, sino que se cumplen los resultados que indica la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4 *En un mercado de seguros competitivo con información simétrica sobre el tipo de riesgo de los asegurados, un contrato óptimo* C_i^**,* $i = A, B$*, entre cualquier compañía y un individuo de tipo* i*,* $i = A, B$*, se caracteriza por:*

1. *Cobertura completa:* $\beta_i^* = D - P_i^*$*.*
2. *La utilidad de reserva de los consumidores se supera al asegurarse:* $E_i(P_i^*, \beta_i^*) > E_i(0, 0)$*.*

□

Representamos la solución en la figura 3.6. La restricción del problema nos lleva a buscar el óptimo sobre la recta EF_i; el sentido de crecimiento de la utilidad y el hecho de que la utilidad debe ser lo más alta posible hacen que el óptimo sea aquel punto que pertenezca a una curva de indiferencia tangente a la recta de beneficios nulos. Comparando las expresiones 3.2 y 3.3 que nos dan las pendientes de ambas curvas, se deduce que el punto de tangencia, donde coinciden las pendientes, será aquél que verifique $\dfrac{u'(W_1)}{u'(W_2)} = 1$. Aplicando la concavidad estricta de la función de utilidad, esto se cumple cuando $W_1 = W_2$. El contrato C_i^* debe por tanto estar situado sobre la bisectriz. Ya hemos visto anteriormente que estos contratos suponen cobertura completa. Además, la prima que paga el asegurado a cambio es una prima pura: $(1 - p_i)P_i - p_i\beta_i = 0$ y $\beta_i = D - P_i$ implican que $P_i = p_i D$.

Las curvas de indiferencia sobre las que se sitúan las soluciones, al ser convexas, quedan por encima de la recta tangente EF_i y por tanto pasan más arriba del punto E, lo que indica que los individuos ven cómo aumenta su utilidad con respecto a la situación en la que estarían sin asegurarse.

Información asimétrica

Cuando aparece la selección adversa, las compañías no pueden diferenciar a los individuos según su tipo de riesgo. Esta incapacidad de distinguir entre tipos de

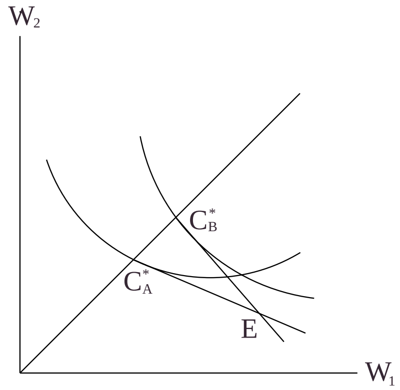

Figura 3.6: Solución en un mercado competitivo con información simétrica

riesgo diferentes modifica la situación con respecto a lo estudiado en el apartado anterior. La compañía de seguros no conocerá a priori el seguro óptimo de un determinado cliente y, por tanto, no podrá ofrecérselo, sino que deberá esperar que cada asegurado elija su óptimo de entre todos los seguros disponibles. El problema del asegurador radica en determinar qué contratos debe poner a disposición de los posibles asegurados para que la elección de uno u otro seguro revele el tipo de riesgo y evitar que dicha elección produzca pérdidas en la compañía.

Ofreciendo el conjunto de contratos obtenidos anteriormente como óptimos en el caso de información completa (C_A^* y C_B^*), las compañías perderían dinero, puesto que ambos tipos elegirían C_B^*, que lleva asociada una prima más baja que C_A^* y proporciona sin embargo también cobertura completa. Por tanto, con información asimétrica, estos contratos no son adecuados.

Tampoco sería bueno que la compañía de seguros ofreciera un único contrato (P, β) a todos los tipos de riesgo. Si así lo hiciera, su beneficio total, al tratarse de un mercado competitivo, debería ser nulo. Dicho beneficio es, como ya vimos, $\sum_{i=A,B} \lambda_i((1-p_i)P-p_i\beta)$, siendo λ_i la proporción de individuos del tipo i con lo que $\lambda_A+\lambda_B = 1$. En función de la probabilidad media de siniestro $p = \lambda_A p_A+\lambda_B p_B$, la expresión anterior se convierte en $(1-p)P-\beta$. Los beneficios serán entonces nulos si el contrato (P, β) pertenece a la recta EF con pendiente $\dfrac{p-1}{p}$, comprendida entre las de EF_A y EF_B. El primer problema que se plantea es que la compañía no conoce la proporción de individuos de cada tipo y, por tanto, difícilmente podrá proponer un contrato situado sobre la recta EF. Además, una compañía que ofreciera un contrato único perdería clientela en favor de otra compañía que ofreciera dos contratos, por ejemplo, los mostrados en la Figura 3.7, puesto que la utilidad del contrato C' para un individuo del tipo A es mayor que la del contrato C. Ofreciendo un único contrato, no se consigue maximizar a la vez la utilidad esperada de los dos tipos de consumidores.

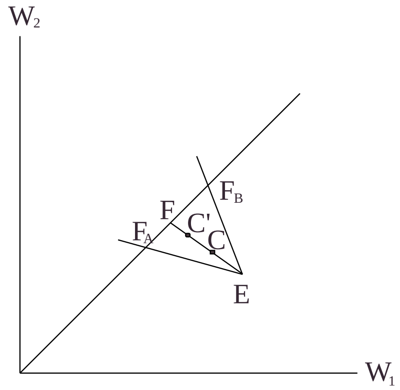

Figura 3.7: Posibles contratos en un mercado competitivo con información asimétrica

Así, supondremos a partir de ahora que el asegurador no va a ofrecer un único seguro o, equivalentemente, que los individuos pertenecientes a tipos de riesgo distintos tienen preferencia por distintos tipos de contratos. Como en el caso del monopolio, deberemos tener en cuenta una restricción de autoselección que garantice que el individuo i prefiere C_i a C_j, siempre que $i \neq j$. El desconocimiento de la proporción λ_i de cada tipo de individuos conlleva además que los beneficios de la compañía deban ser nulos tanto en lo que corresponde a los individuos de alto riesgo como a los de bajo riesgo, y no en conjunto. Según esto, los contratos óptimos deberán entonces estar situados sobre las rectas EF_i.

Los problemas de optimización a resolver, dependientes el uno del otro, serán ahora los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{P_i,\beta_i} \;\; (1-p_i)u(W-P_i) + p_i u(W-D+\beta_i) \\ \text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{l} (1-p_i)P_i - p_i\beta_i = 0; \\ E_i(P_i,\beta_i) \geq E_i(P_j,\beta_j), \;\; j = A,B;\; j \neq i \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad i = A, B.$$

siendo la primera la restricción de beneficios nulos para la compañía y la segunda la restricción de autoselección de los asegurados.

La proposición siguiente resuelve ambos problemas:

Proposición 3.2.5 *Con información asimétrica en un mercado competitivo, los contratos de seguro óptimos C_A^{**} y C_B^{**} tienen las siguientes características:*

1. *Cobertura completa para el alto riesgo: $\beta_A^{**} = D - P_A^{**}$; y cobertura parcial para el bajo riesgo: $\beta_B^{**} < D - P_B^{**}$.*

2. *Aumento de la utilidad al asegurarse para ambos tipos de riesgo:*

   $E_i(P_i^{**}, \beta_i^{**}) > E_i(0,0)$, *con* $i = A, B$.

3. *Ambos seguros proporcionan la misma utilidad a los individuos de alto riesgo: $E_A(P_A^{**}, \beta_A^{**}) = E_A(P_B^{**}, \beta_B^{**})$, pero no a los de bajo riesgo:*

   $E_B(P_B^{**}, \beta_B) > E_B(P_A^{**}, \beta_A^{**})$.

La restricción de beneficios nulos implica de nuevo que los contratos óptimos estén sobre las rectas EF_i. Para ambos tipos de riesgo, la cobertura para la cual se maximiza la utilidad esperada es una cobertura total. Ya hemos indicado que si estos dos contratos (solución cuando no hay problema de información) fueran ofrecidos conjuntamente, el correspondiente a los individuos de bajo riesgo sería preferido también por los de alto riesgo, al proporcionarles cobertura completa y una mayor utilidad. Se incumpliría de este modo la restricción de autoselección. Lo mismo ocurriría si el contrato diseñado para los individuos de bajo riesgo fuera cualquier otro de la recta EF_B (Figura 3.8) situado por encima del punto de corte de la curva de indiferencia de los individuos de alto riesgo que pasa por C_A^{**} con la recta EF_B. Los contratos situados por debajo de C_B^{**} dan a los individuos de bajo riesgo una utilidad menor que C_B^{**}. Así, éste será el óptimo para el bajo riesgo. Ese punto se traduce en cobertura parcial, al estar situado fuera de la bisectriz. En cuanto a los individuos de alto riesgo, cualquier contrato de la recta de beneficios nulos EF_A situado a la derecha de C_A^{**} les daría una menor utilidad, siendo así ese el óptimo, con cobertura completa asociada.

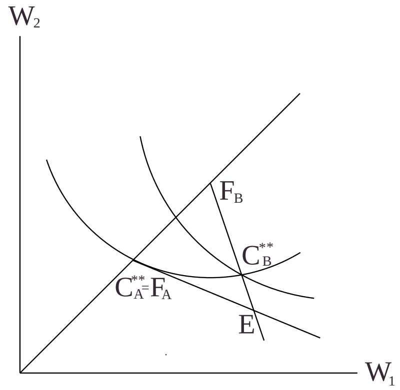

Figura 3.8: Contratos óptimos en un mercado competitivo con información asimétrica

Contratos de larga duración

Completamos el estudio de los contratos de seguro óptimos con selección adversa en un mercado competitivo introduciendo contratos de varios periodos de duración. Al igual que hicimos en el caso del monopolio y con el objetivo de simplificar la notación, consideraremos solo dos periodos. De nuevo se tendrá en cuenta la experiencia del asegurado en el primer periodo para determinar su seguro para el segundo, e intentar así suplir de algún modo la falta de información sobre el tipo de riesgo al que pertenece el individuo.

Al tratarse ahora de un mercado competitivo, quienes se aseguren con una determinada compañía tendrán la oportunidad, si así lo consideran oportuno, de cambiar de compañía en el segundo periodo si le ofrecen un contrato más ventajoso. Si la nueva compañía dispone de la misma información sobre sus posibles clientes que la compañía inicial, es evidente que ofrecerá a individuos de ambos tipos de riesgo los contratos óptimos para un periodo, C_A^{**} y C_B^{**}, obtenidos en el apartado anterior y consistentes básicamente en cobertura completa para los individuos de alto riesgo y solo parcial para los de bajo riesgo.

Los individuos de bajo riesgo, al no recibir cobertura completa y sentirse castigados por sus posibles accidentes, serán los más atraídos por un posible cambio de compañía en el segundo periodo. Los individuos de alto riesgo, sin embargo, al disponer de cobertura completa, no cambiarán de compañía salvo que consideren que el contrato que se oferta a los bajo riesgo es mejor para ellos.

La situación es entonces la siguiente: los individuos de alto riesgo reciben de la compañía cobertura completa en los dos periodos de duración del contrato. La nueva compañía intentará atraer a los individuos de bajo riesgo ofreciendo el contrato C_B^{**}. La primera compañía deberá entonces determinar qué seguro ofrece al individuo de bajo riesgo de modo que éste prefiera este contrato a C_B^{**} y no cambie de compañía; no podrá tampoco tener preferencia por el contrato de los de alto riesgo; y, además, estos últimos deben seguir eligiendo C_A^{**} frente a cualquier otro contrato que pueda ofrecer tanto su compañía como la que entra en el mercado en el segundo periodo. Todo esto sin olvidar que, al tratarse de un mercado competitivo, el beneficio de la compañía deberá ser nulo.

En definitiva, siguiendo el mismo planteamiento que en otros casos, el contrato óptimo para el individuo de bajo riesgo será aquél que maximice su utilidad esperada a lo largo de los dos periodos, incluyendo restricciones de racionalidad y de autoselección así como que la compañía obtenga unos beneficios medios nulos.

Definimos $C_B^2 = (C_B, C_{Ba}, C_{Bn})$ donde: $C_B = (P_B, \beta_B)$ es el seguro para el primer periodo; $C_{Ba} = (P_{Ba}, \beta_{Ba})$ es el contrato para el segundo periodo si durante el primero el asegurado ha sufrido el siniestro asegurado; y $C_{Bn} = (P_{Bn}, \beta_{Bn})$ el seguro para el segundo periodo si no ha habido accidente en el primero. El problema a resolver se puede formular del modo siguiente:

$$\max_{P_B^1, \beta_B^1, P_{Bl}, \beta_{Bl}} \; E_B^{(2)}(C_B^2)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} &E_A(C_B^1) + p_A max\,\{E_A(C_{Ba}), E_A(C_B^{**})\} + \\ &\quad (1-p_A) max\,\{E_A(C_{Bn}), E_A(C_B^{**})\} \leq 2\,E_A(C_A^{**}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$2E_B(C_A^{**}) \leq E_B^{(2)}(C_B^2) \tag{3.21}$$

$$E_B(C_B^{**}) \leq E_B(C_{Ba}) \tag{3.22}$$

$$E_B(C_B^{**}) \leq E_B(C_{Bn}) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} &(1-p_B)P_B - p_B\beta_B + p_B\left[(1-p_B)P_{Ba} - p_B\beta_{Ba}\right] + \\ &\quad +(1-p_B)\left[(1-p_B)P_{Bn} - p_B\beta_{Bn}\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Las condiciones 3.20 y 3.21 son las restricciones de autoselección para individuos de alto y bajo riesgo, respectivamente. Las restricciones 3.22 y 3.23 nos indican que los de bajo riesgo van a seguir en el segundo periodo con la misma compañía, ya que el contrato ofrecida por ésta les proporciona una utilidad no menor que la que ofrece la nueva. La última restricción es la de beneficios nulos para la compañía.

Vemos a continuación algunas de las características de la solución del problema planteado.

En primer lugar, demostraremos que los máximos que aparecen en la restricción 3.20 se alcanzan en $E_A(C_{Ba})$ y $E_A(C_{Bn})$; es decir, los individuos de alto riesgo obtendrían siempre una mayor utilidad en el segundo periodo con el seguro ofrecido a los de bajo riesgo por la propia compañía que con el ofrecido por otra competidora.

Proposición 3.2.6 *En las condiciones anteriores, se verifica*

1. $max\ \{E_A(C_{Ba}), E_A(C_B^{**})\} = E_A(C_{Ba})$.
2. $max\ \{E_A(C_{Bn}), E_A(C_B^{**})\} = E_A(C_{Bn})$.

Demostración

Para demostrar que los individuos de alto riesgo obtienen mayores utilidades con C_{Ba} y C_{Bn} que con C_B^{**}, consideraremos las otras tres alternativas posibles y veremos que nos conducen a alguna contradicción con las hipótesis o restricciones del problema.

1. Suponemos en primer lugar que $E_A(C_{Bn}) \geq E_A(C_B^{**})$ y $E_A(C_B^{**}) > E_A(C_{Ba})$. La función de Lagrange es entonces[30]:

$$E_B^{(2)}(C_B^2) - \lambda_1 \left(E_A(C_B^1) + p_A E_A(C_B^{**}) + (1-p_A) E_A(C_{Bn}) - 2\, E_A(C_A^{**}) \right) -$$
$$-\lambda_2 \left(E_B(C_B^{**}) - E_B(C_{Ba}) \right) - \lambda_3 \left((1-p_B)P_B - p_B\beta_B + \right.$$
$$\left. +p_B \left[(1-p_B)P_{Ba} - p_B\beta_{Ba} \right] + (1-p_B) \left[(1-p_B)P_{Bn} - p_B\beta_{Bn} \right] \right).$$

[30]No se tienen en cuenta las restricciones 3.21 y 3.23. Se verá después que la solución obtenida de esta forma verifica ambas restricciones.

Las condiciones de primer orden respecto de P_{Ba} y β_{Ba} son:

$$u'(W - P_{Ba})\left(-1 + \frac{\lambda_2}{p_B}\right) = \lambda_3;$$

$$u'(W - D + \beta_{Ba})\left(-1 + \frac{\lambda_2}{p_B}\right) = \lambda_3.$$

Comparando ambas ecuaciones, se deduce que $\beta_{Ba} = D - P_{Ba}$, lo que indica que los individuos de bajo riesgo reciben cobertura completa en el periodo 2 si han sufrido un accidente en el periodo 1. En ese caso, como $E_B(C_{Ba}) \geq E_B(C_B^{**})$ según la restricción 3.22, se llegaría a que $E_A(C_{Ba}) > E_A(C_B^{**})$, lo que contradice la hipótesis, no pudiéndose dar entonces este caso.

2. En segundo lugar, estudiamos qué ocurre cuando $E_A(C_B^{**}) > E_A(C_{Bn})$ y $E_A(C_{Ba}) \geq E_A(C_B^{**})$. La función de Lagrange es ahora:

$$E_B^{(2)}(C_B^2) - \lambda_1\left(E_A(C_B^1) + p_A E_A(C_{Ba}) + (1-p_A)E_A(C_B^{**}) - 2\,E_A(C_A^{**})\right)$$

$$-\lambda_2\left(E_B(C_B^{**}) - E_B(C_{Ba})\right) - \lambda_3\left((1-p_B)P_B - p_B\beta_B + \right.$$

$$\left. + p_B\left[(1-p_B)P_{Ba} - p_B\beta_{Ba}\right] + (1-p_B)\left[(1-p_B)P_{Bn} - p_B\beta_{Bn}\right]\right)$$

y las condiciones de primer orden respecto de P_{Bn} y β_{Bn}:

$$u'(W - P_{Bn}) = -\lambda_2;$$

$$u'(W - D + \beta_{Bn}) = -\lambda_2.$$

Comparando de nuevo ambas condiciones, se llega a que $\beta_{Bn} = D - P_{Bn}$, con lo que los individuos de bajo riesgo recibirían cobertura completa en el periodo 2 si no han sufrido accidente en el periodo 1. La contradicción es ahora con la restricción 3.23.

3. El tercer caso que planteamos es $E_A(C_B^{**}) > E_A(C_{Bn})$ y $E_A(C_B^{**}) > E_A(C_{Ba})$. En esta situación vuelve a cambiar la función de Lagrange que se expresa ahora como:

$$E_B^{(2)}(C_B^2) - \lambda_1\left(E_A(C_B^1) + E_A(C_B^{**}) - 2\,E_A(C_A^{**})\right) -$$

$$-\lambda_2\left(E_B(C_B^{**}) - E_B(C_{Ba})\right) - \lambda_3\left((1-p_B)P_B - p_B\beta_B + \right.$$

$$+p_B\left[(1-p_B)P_{Ba}-p_B\beta_{Ba}\right]+(1-p_B)\left[(1-p_B)P_{Bn}-p_B\beta_{Bn}\right]).$$

Derivando respecto de P_{Ba}, β_{Ba}, P_{Bn} y β_{Bn}, se obtienen las cuatro condiciones de los dos casos anteriores, implicando esto, como ya se ha visto, cobertura completa para los individuos de bajo riesgo en el segundo periodo, tanto si ha ocurrido el siniestro asegurado en el primer periodo como si no. Las restricciones 3.22 y 3.23 son las que conducen ahora a una contradicción con la hipótesis $E_A(C_B^{**}) > E_A(C_{Bl})$, siendo $l = a, n$.

Excluidos los tres casos expuestos, solo queda la posibilidad enunciada en la proposición. □

El último resultado que hemos obtenido nos permite conocer ya con exactitud las restricciones así como la función de Lagrange asociada al problema de maximización con lo que podemos describir mejor la solución. Cuando el asegurado de bajo riesgo no ha sufrido siniestro durante el primer periodo de duración del contrato, se verá recompensado en el segundo con una prima menor y una mayor cobertura. Así lo demostramos a continuación.

Proposición 3.2.7 *La prima y cobertura óptimas para el individuo de bajo riesgo en el segundo periodo en caso de no haber sufrido accidente en el primero verifican* $\beta_{Bn} > \beta_B$ *y* $P_{Bn} < P_B$.

Demostración

A partir de las condiciones necesarias de primer orden es fácil demostrar ambas propiedades. Recordemos que las variables son P_B, β_B, P_{Ba}, β_{Ba}, P_{Bn} y β_{Bn}. Derivando la función de Lagrange con respecto a cada una de ellas, se tiene:

$$u'(W-P_B)\left(1-\lambda_1\cdot\frac{1-p_A}{1-p_B}\right)=-\lambda_3 \tag{3.25}$$

$$u'(W-D+\beta_B)\left(1-\lambda_1\cdot\frac{p_A}{p_B}\right)=-\lambda_3 \tag{3.26}$$

$$u'(W-P_{Ba})\left(1-\lambda_1\cdot\frac{(1-p_A)p_A}{(1-p_B)p_B}+\frac{\lambda_2}{p_B}\right)=-\lambda_3 \tag{3.27}$$

$$u'(W-D+\beta_{Ba})\left(1-\lambda_1\cdot\frac{p_A^2}{p_B^2}+\frac{\lambda_2}{p_B}\right)=-\lambda_3 \tag{3.28}$$

$$u'(W-P_{Bn})\left(1-\lambda_1\cdot\frac{(1-p_A)^2}{(1-p_B)^2}\right)=-\lambda_3 \tag{3.29}$$

$$u'(W - D + \beta_{Bn}) \left(1 - \lambda_1 \cdot \frac{p_A(1-p_A)}{p_B(1-p_B)}\right) = -\lambda_3 \tag{3.30}$$

Comparando las ecuaciones 3.26 y 3.30 y teniendo en cuenta que $p_A > p_B$, se deduce fácilmente que $\beta_{Bn} > \beta_B$. Del mismo modo, las condiciones 3.25 y 3.29 nos llevan a que $P_{Bn} < P_B$, con lo cual queda demostrada la proposición. $\square$.

Otras características de este contrato de dos periodos para un individuo de bajo riesgo es que el pago, por parte del asegurador, de una indemnización en el segundo periodo, cuando se ha producido también un siniestro en el primero (β_{Ba}), proporciona a la compañía beneficios positivos, mientras que el pago en caso de no haberse producido siniestro en el primer periodo (β_{Bn}) le daría beneficios negativos. En media, existe una compensación y los beneficios esperados del asegurador son nulos, como hemos impuesto en el mercado competitivo. Vemos así que una buena experiencia anterior del asegurado resulta positivo para él, como era de esperar.

La situación es muy similar a la que se observaba cuando el mercado del seguro era un monopolio. Los asegurados que tienen una mayor probabilidad de sufrir siniestros van a tener siempre cobertura completa, independientemente de la situación. En cambio, para los individuos de bajo riesgo, el óptimo consiste solo en cobertura parcial cuando surgen los problemas de asimetría en la información. El hecho de que la compañía no sea capaz de distinguir por sí misma ante qué tipo de riesgo se encuentra perjudica en ese sentido a aquellos clientes con menor probabilidad de accidente. Sin embargo, cuando los contratos son de mayor duración, una buena experiencia anterior juega a favor de éstos, consiguiendo pagar en periodos posteriores primas más bajas si no sufren ningún siniestro en el periodo anterior.

Comparando ambos tipos de mercados, la principal conclusión que puede sacarse es que todos los asegurados, tanto de alto como de bajo riesgo, disfrutan en el mercado competitivo de un aumento en su utilidad con respecto al mercado monopolista en el que únicamente llegaban a tener la utilidad de reserva. Quedan así analizadas algunas situaciones en las que aparecen problemas de selección adversa en el seguro. En lo que sigue de este capítulo, abordaremos el riesgo moral, otro importante problema de información.

3.3. El riesgo moral

Nuestro objetivo es ahora el análisis de la demanda de seguro óptimo cuando surge el segundo problema de información descrito al inicio del capítulo: el riesgo moral.

Veremos que conduce a coberturas parciales, lo que debería suponer para el asegurado un incentivo para procurar influir en el siniestro que pueda tener lugar. Lo que no está claro *a priori* es la forma que toma dicho contrato de seguro parcial. Podría tratarse, en principio, tanto de un contrato con franquicia, con coaseguro o con límite superior en la cobertura.

Partimos de la idea de que el asegurado lleva a cabo ciertas actividades que pueden conducir tanto a una reducción de la probabilidad de accidente como a una reducción de la cuantía de la pérdida que tenga lugar. Nos referiremos al primer caso como *autoprotección*, siguiendo la terminología de Ehrlich y Becker (1972), y como *reducción de pérdidas* al segundo[31].

Un ejemplo: los gastos en sistemas contra incendios reducen el tamaño de una pérdida, pero generalmente no influyen en la probabilidad de que tenga lugar un incendio. Por el contrario, el gasto en alarmas reduce la probabilidad de un robo, mientras que la decisión de no exponer objetos valiosos en lugares visibles reduce la pérdida si se produce un robo. Otro tipo de actividad como conducir un automóvil más lenta y atentamente reduce la probabilidad de un accidente y también los costes que lleva asociados.

Aunque muchas otras actividades pueden suponer reducciones simultáneas en la probabilidad y el coste del accidente, resulta interesante estudiar separadamente las consecuencias del riesgo moral en cada caso. Plantear el problema de la forma más general posible lleva a la obtención de pocas predicciones específicas. Por lo general, se alcanza un mejor conocimiento analizando e investigando separadamente ambos tipos de riesgo moral y sus consecuencias para los contratos de seguro.

Las consecuencias de cada tipo de riesgo moral para los contratos de seguro son bastante diferentes. Veremos que, bajo hipótesis razonables, el riesgo moral

[31] Ehrlich y Becker lo llaman *autoseguro*; nosotros no usaremos este término porque tiene más de un significado en la literatura del seguro y podría llevar a confusión.

con autoprotección lleva a la imposición de franquicias en los seguros. En cuanto al riesgo moral con reducción de pérdidas, la característica que otorga al seguro óptimo es muy distinta: el individuo está totalmente cubierto hasta algún límite, correspondiendo la pérdida marginal enteramente al asegurador para niveles de pérdidas bajos.

En general, es razonable asumir que los pagos que efectúa el asegurador no pueden exceder las pérdidas. Con esta restricción y la restricción contra pagos negativos, deducimos que los dos tipos de riesgo moral dan lugar, cada uno, a un contrato de seguro simple: una franquicia en un caso y cobertura completa con un límite superior, con coaseguro después, en el otro caso.

Según todo lo anterior, se podría pensar en especificar en el contrato de seguro los niveles de precaución que debe tomar el asegurado (por ejemplo, el nº de extintores de incendio de los que debe disponer o la frecuencia de inspecciones de equipamiento). Si el contrato fuera completo, en el sentido de que especifica las medidas a tomar y el gasto que debe hacer el individuo en cualquiera de las circunstancias posibles previas al accidente, entonces todo estaría controlado y el riesgo moral no sería un tema problemático. Sin embargo, si el contrato de seguro es incompleto, la decisión de tomar medidas de precaución puede verse distorsionada después de la firma del contrato. El seguro óptimo debe diseñarse, por tanto, dentro de las restricciones existentes, como anticipación al problema de riesgo moral.

En el siguiente apartado determinaremos las consecuencias del riesgo moral sobre la forma que adoptan los contratos de seguro óptimos. Empezaremos estudiando el caso en el que un individuo adverso al riesgo se enfrenta a una pérdida incierta que ocurre con una probabilidad más o menos elevada, dependiendo del empeño que ponga el asegurado en tomar medidas de precaución (Apartado 3.3.1). A continuación (Apartado 3.3.2) consideraremos la situación en la que el esfuerzo del individuo afecta a la magnitud de la pérdida aleatoria sufrida a consecuencia del siniestro y no a la probabilidad de tener esa pérdida.

3.3.1. Autoprotección

En el contexto que nos ocupa en este apartado, el riesgo moral se refiere al impacto del seguro sobre los incentivos para reducir los riesgos, como hemos definido antes. Un individuo que se enfrenta a la posible pérdida de una casa, de un coche, o a posibles gastos médicos, generalmente puede emprender acciones para reducir el riesgo de sufrir dichas pérdidas.

Plantearemos un modelo en el que se supone, como hasta ahora, que el individuo dispone de una riqueza inicial W y de una función de utilidad $u(W)$ y que se enfrenta a un riesgo de siniestro que le supondría una pérdida dada por la variable aleatoria $\tilde{D}$ con valores $0 \leq d \leq D$ y con funciones de distribución y de densidad G y g, respectivamente. El asegurado puede influir en la probabilidad de sufrir esta pérdida realizando determinadas actividades de precaución. Si el coste de éstas para el asegurado es x, la probabilidad de pérdida será una función de x que denotaremos por $p(x)$. Dicha función se supone decreciente y convexa. Cuanto mayor es el cuidado puesto, menor será la probabilidad de sufrir alguna pérdida.

En ausencia de seguro, después de invertir la cantidad x, la riqueza final del individuo es $W - x$ si no hay accidente y $W - d - x$ si sufre un accidente con pérdida asociada d.

Si, en cambio, el individuo se asegura y paga una prima P para tener derecho a una indemnización $I(d) \geq 0$ (la cobertura depende de la pérdida sufrida en cada caso), sus riquezas finales en caso de no accidente y accidente, respectivamente, serán $W - x - P$ y $W - x - P - d + I(d)$. En el marco del riesgo moral, se supone que el asegurador no puede observar la precaución o cuidado puesto por el asegurado.

Para analizar el problema del seguro óptimo bajo estas hipótesis, es importante destacar algunas cuestiones que no se han introducido en este modelo:

En primer lugar, la precaución se representa como un gasto monetario. Ejemplos que encajan con estas hipótesis son los sistemas de seguridad, cerraduras o sistemas de extinción. Las medidas de autoprotección podrían, sin embargo, incluir la concentración de un conductor o cualquier otro esfuerzo de intensidad no medible en términos monetarios.

En segundo lugar, hemos adoptado un modelo en el que la acción del asegurado es desconocida, pero la información es simétrica en el momento de firmar el contrato, lo que significa que nos olvidamos de que pueda aparecer al mismo tiempo un problema de selección adversa. Como veremos, algunas de las consecuencias contractuales de la selección adversa y del riesgo moral son idénticas. En ambos casos y al menos para algunos grupos de individuos, el óptimo es la cobertura parcial. Otras consecuencias, por contra, como por ejemplo la autoselección de los individuos de bajo riesgo en contratos con menores coberturas, distinguen las situaciones de selección adversa de las de riesgo moral. La simultaneidad de ambos problemas es un tema que puede resultar interesante de tratar, pero no lo haremos aquí para obtener una mayor claridad en los resultados.

Volviendo al modelo planteado, hay que destacar que el nivel de cuidado x no puede ser incluido en el contrato como obligación, ya que es imposible de observar para el asegurador. En lugar de omitirlo, puede ser introducido como un parámetro contractual que permite restringir el conjunto de posibles contratos a través de una restricción de compatibilidad de incentivos: solo se permiten aquellos contratos en los que el cuidado que el asegurado dice que va a tener es creíble, en el sentido de que este nivel de cuidado le va a proporcionar al individuo una utilidad lo más elevada posible, objetivo que pretende conseguir.

El contrato óptimo se obtendrá maximizando la utilidad esperada del asegurado, sujeta a lo que llamaremos restricción de participación del asegurador, según la cual la prima que pide por el seguro cubre, al menos, el valor esperado del siniestro y a la restricción de compatibilidad de incentivos del asegurado, cuyo significado acabamos de comentar. Formulamos el problema de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \max\limits_{P,I(d),x} \ (1-p(x))u(W-P-x)+p(x)\displaystyle\int u(W-P-x-d+I(d))g(d)dd \\ \text{sujeto a} \begin{cases} P \geq p(x)\displaystyle\int I(d)g(d)dd \\ x = argmax_z(1-p(z))u(W-P-z)+ \\ +p(z)\displaystyle\int u(W-P-z-d+I(d))\,g(d)dd \\ I(d) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Al caracterizar la solución de este problema, surge una importante cuestión. Se trata de ver si la restricción de compatibilidad de incentivos puede sustituirse por la condición de primer orden del problema de maximización correspondiente, como es habitual hacerlo en el tratamiento de los problemas de agencia. Puesto que la utilidad esperada no tiene por qué ser cóncava como función de la precaución, el conjunto de niveles de precaución que satisfacen la condición de primer orden será diferente en general del conjunto que satisface la restricción de compatibilidad de incentivos. Puede haber puntos de silla que no sean máximos globales y, por otra parte, las condiciones de primer orden no se satisfacen en soluciones que estén sobre la frontera. En nuestro problema, sin embargo, la hipótesis de convexidad de $p(x)$ es suficiente para que se cumplan las condiciones suficientes de segundo orden para la restricción de compatibilidad de incentivos. En efecto, derivando la función objetivo dos veces respecto de z se obtiene:

$$p''(z)\left[\int (u(W-P-z-d+I(d))-u(W-P-z))\, g(d)dd\right]+$$
$$+\,2p'(z)\left[\int (u'(W-P-z)-u'(W-P-z-d+I(d)))\, g(d)dd\right]+$$
$$+\,(1-p(z))u''(W-P-z)+p(z)\int u''(W-P-z-d+I(d))g(d)dd.$$

Se puede demostrar que esta expresión toma valores menores o iguales que cero, usando el crecimiento y convexidad de $p(z)$ y el crecimiento y la concavidad de la función de utilidad u que hace que los distintos integrandos sean negativos o nulos. La función objetivo del problema de optimización que aparece en la condición de compatibilidad de incentivos es, por tanto, cóncava, pudiéndose afirmar que todos los puntos críticos serán máximos globales. Por este motivo, la sustituiremos por la correspondiente condición de primer orden[32], que no es más que:

$$-(1-p(x))u'(W-P-x)-p(x)\int u'(W-P-x-d+I(d))g(d)dd-$$
$$p'(x)\left(u(W-P-x)-\int u(W-P-x-d+I(d))g(d)dd\right)=0.$$

Con esta sustitución, el problema anterior se convierte en un problema con función de Lagrange asociada:

$$(1-p(x))u(W_0)+p(x)\int u(W_d)g(d)dd-\lambda_1\left(P-p(x)\int I(d)g(d)dd\right)+$$
$$\lambda_2\left[(1-p(x))u'(W_0)+p(x)\int u'(W_d)g(d)dd+p'(x)u(W_0)-p'(x)\int u(W_d)g(d)dd\right]+$$
$$\lambda_3 I(d)$$

donde hemos denotado W_0 y W_d a los niveles de riqueza sin accidente y cuando tiene lugar una pérdida d, respectivamente ($W_0=W-P-x$; $W_d=W-P-x-d+I(d)$) y λ_i, con $i=1,2,3$, a los multiplicadores de Lagrange asociados a

[32]Suponiendo un nivel de cuidado interior al conjunto factible.

cada una de las restricciones.

Las soluciones interiores deben satisfacer la siguiente condición de primer orden:[33]

$$p(x)u'(W_d) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 p(x)u''(W_d) - \lambda_2 p'(x)u'(W_d) + \lambda_3 = 0. \tag{3.31}$$

Para cada valor d, debe cumplirse que $I(d) = 0$ ó $\lambda_3 = 0$. En este último caso, dividiendo la igualdad 3.31 por $p(x)$ y reagrupando los términos, se obtiene:

$$\lambda_2 \, u''(W_d) + \left[1 - \lambda_2 \cdot \frac{p'(x)}{p(x)}\right] u'(W_d) - \lambda_1 = 0.$$

Si esta última ecuación se verifica para una determinada pérdida $\hat{d}$ con un nivel de riqueza asociado $\hat{W}$, entonces $\hat{W}$ también verifica la ecuación para cualquier otro valor de la pérdida. Esto implica que, en el óptimo, W_d es independiente de d, es decir, $-d + I(d) = -F$ o equivalentemente $I(d) = d - F$, siendo F una constante positiva, puesto que la cobertura no puede ser mayor que la pérdida. Como además $I(d) > 0$ en el caso que estamos considerando, la cobertura será $I(d) = d - F$ cuando la pérdida es mayor que F y será nula en otro caso. En resumen, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 3.3.1 *La cobertura óptima I^* que soluciona el problema satisface, para alguna constante $F > 0$, $I^*(d) = max(0, d - F)$.*

□

Es decir, el contrato óptimo es una cobertura completa por encima de una franquicia positiva y, por tanto, las grandes pérdidas serán cubiertas parcialmente pero no así las pequeñas. Se observa de este modo que el riesgo moral con autoprotección supone que los individuos se enfrenten a una penalización consistente en una reducción de la riqueza siempre que ocurra una pérdida, aunque dicha reducción solo coincidirá con la pérdida en su totalidad cuando ésta es pequeña, mientras que será parcial si la pérdida es mayor que el nivel determinado por la franquicia.

[33]Derivando la función de Lagrange respecto de la cobertura $I(d)$.

3.3.2. Reducción de pérdidas

Nos centramos a continuación en el estudio de las situaciones en las que las actividades que lleva a cabo el asegurado influyen en una reducción de las pérdidas que se producen al sufrir el siniestro asegurado y no en la probabilidad de que éste se produzca.

Suponemos que las distintas medidas de precaución que puede llevar a cabo el asegurado tienen como consecuencia que la pérdida sufrida en caso de siniestro tome un número finito de valores $l_1 < l_2 < \ldots < l_n$. La probabilidad de que un gasto en precaución x dé lugar a la pérdida l_i se denotará $p_i(x)$, cuando $i = 1, 2, \ldots, n$. Como ya se comentó anteriormente, cuando hablamos de reducción de pérdidas no contemplamos ningún cambio adicional en la probabilidad de accidente, que denotaremos en este caso como p. En cada uno de los n posibles estados de pérdida, la cobertura que el asegurador pagará al asegurado será $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Procediendo como en otras ocasiones, el contrato de seguro óptimo para el asegurado será el que le proporcione una mayor utilidad con las restricciones de participación del asegurador, de compatibilidad de incentivos y que la cobertura no puede superar la pérdida habida en cualquier momento, puesto que lo contrario podría llevar, como ya hemos comentado en varias ocasiones, a que el individuo causara voluntariamente el siniestro asegurado.

El óptimo $(P^*; I_1^*, I_2^*, \ldots, I_n^*)$ es, por tanto, la solución del problema:

$$\begin{cases} \max\limits_{P;I_i;x} \quad (1-p)u(W-P-x) + p\sum\limits_{1=1}^{n} p_i(x)u(W-P-x-l_i+I_i) \\ \\ \text{sujeto a} \begin{cases} p\sum\limits_{1=1}^{n} p_i(x)I_i - P \leq 0 \\ x = argmax_z (1-p)u(W-P-z) + p\sum\limits_{1=1}^{n} p_i(z)u(W-P-z-l_i+I_i) \\ I_i - l_i \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \end{cases}$$

Para continuar nuestro estudio, en la siguiente proposición caracterizamos la solución del problema de riesgo moral con actividades de reducción de pérdidas.

Proposición 3.3.2 *Supongamos que $p_i(x^*) > 0$ para cada i; que la condición de compatibilidad de incentivos puede ser representada por su condición necesaria* *de primer orden; que la función de utilidad u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente; y que la distribución de pérdidas tiene la propiedad de que* $\dfrac{p_i'}{p_i}$ *es decreciente en* i.

Bajo estas condiciones, la solución del problema verifica las siguientes propiedades:

1. $(l_i - I_i)$ *es creciente en* i.
2. *Existe algún* m *que cumple que para* $i \leq m$, $I_i = l_i$ *y para para* $i > m$, $I_i < l_i$.

La interpretación de este resultado es, por un lado, que la parte de pérdida no cubierta con el seguro aumenta a medida que lo hace el valor de dicha pérdida; por otro lado, esto solo se verifica para pérdidas grandes mientras que para las más pequeñas la cobertura es total. Por tanto, el contrato de seguro óptimo cuando existe riesgo moral y el asegurado puede llevar a cabo actividades que reduzcan el valor de la pérdida consiste en cobertura completa con límite superior. Demostramos a continuación el resultado dado en la Proposición 3.3.2.

Demostración

Por hipótesis podemos sustituir la restricción de compatibilidad de incentivos por la condición necesaria de primer orden asociada al problema de maximización. La segunda restricción del problema se convierte así en esta otra:

$$(1-p)u'(W-P-x) + p\sum_{i=1}^{n}\left(p_i(x)u'(W-P-x-l_i+I_i)-\right.$$

$$\left.-p_i'(x)u(W-P-x-l_i+I_i)\right) = 0.$$

Llamaremos $W_i = W - P - x - l_i + I_i$ a la riqueza del individuo en el estado i y λ_1, λ_2, λ_{3i} con $i = 1, 2, \ldots, n$ a los multiplicadores de Lagrange asociados a las distintas restricciones. Así, la condición necesaria de óptimo de primer orden vendrá dada por las siguientes ecuaciones:[34]

$$p\,p_i\,u'(W_i) - \lambda_1\,p\,p_i - \lambda_2\,p\,p_i\,u''(W_i) + \lambda_2\,p\,p_i'\,u'(W_i) - \lambda_{3i} = 0,\ \forall i \qquad (3.32)$$

[34]Derivadas de la función objetivo respecto de las variables I_i, P y x.

$$-(1-p)u'(W_0) - p\sum_i p_i\, u'(W_i) + \lambda_1 +$$

$$+\lambda_2 \left[(1-p)u''(W_0) + p\sum_i \left(p_i\, u''(W_i) - p_i'\, u'(W_i) \right) \right] = 0,\ \forall i \tag{3.33}$$

$$-(1-p)u'(W_0) - p\sum_i p_i\, u'(W_i) + p\sum_i p_i' u(W_i) - \lambda_1 p \sum_i p_i'\, I_i - \lambda_2 \left[-(1-p)u''(W_0) - \right.$$

$$\left. +p\sum_i \left(p_i u''(W_i) - p_i' u'(W_i) - p_i' u'(W_i) + p_i'' u(W_i) \right) \right] = 0$$

1. Demostrar la parte 1 de la proposición equivale a demostrar que $W_{j+1} \leq W_j$, para $j = 1, \cdots, n-1$. Si la tercera restricción del problema se satura para j, esto es trivial, puesto que $I_j - l_j = 0 \geq I_{j+1} - l_{j+1}$, tanto si la restricción también se satura para $j+1$ como si no. Consideremos entonces el caso en que dicha restricción no se satura para j ni para $j+1$. En ese caso deben ser $\lambda_j = \lambda_{j+1} = 0$, con lo que dividiendo la Ecuación 3.32 (escrita en j) por $pp_j u'(W_j)$ se llega a:

$$1 - \frac{\lambda_1}{u'(W_j)} + \lambda_2 \cdot \frac{-u''(W_j)}{u'(W_j)} = -\lambda_2 \cdot \frac{p_j'}{p_j}. \tag{3.34}$$

   Como función de W_j, el miembro de la izquierda de 3.34 es estrictamente decreciente (el segundo término es estrictamente decreciente por la concavidad de u y el signo positivo de λ_1 y el tercero es decreciente por la hipótesis de decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo). Por otro lado, la hipótesis sobre el decrecimiento de $\dfrac{p_j'}{p_j}$ y el signo positivo de λ_2 implican que el miembro de la derecha de la Ecuación 3.34 es creciente en j. Se deduce, por tanto, que W_j debe ser decreciente en j.

2. Para probar el segundo apartado, supongamos que la restricción $I_i - l_i$ no se satura para ningún i, lo que trae como consecuencia la nulidad de todos los precios sombra correspondientes: $\lambda_{3i} = 0\ \forall i$. Entonces, multiplicando la Ecuación 3.34 por $u'(W_i)$ se obtiene, para cada i:

$$u'(W_i) - \lambda_1 - \lambda_2 u''(W_i) + \lambda_2 \cdot \frac{p_i'}{p_i} u'(W_i) = 0. \tag{3.35}$$

Sumando las n restricciones por la Ecuación 3.32 con la Ecuación 3.33, se tiene:

$$u'(W_0) - \lambda_1 - \lambda_2 u''(W_0) = 0. \tag{3.36}$$

Por otro lado, el hecho de que $\sum_i p_i = 1$ implica que $\sum_i p'i = 0$. Como no todos los p'_i son nulos, tampoco pueden ser todos negativos ni todos positivos. El decrecimiento en i de $\frac{p'_i}{p_i}$ implica entonces que existe $j > 1$ tal que el último término del primer miembro de 3.35 es negativo para todo $i \leq j$ y positivo para todo $i > j$. Comparando con la Ecuación 3.36 y usando el hecho de que el miembro de la izquierda es decreciente en W_0 debido a que $u''' > 0$ por el decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo de la función de utilidad, se demuestra que $W_i > W_0$ para $i \leq j$. Si tenemos en cuenta las definiciones de W_0 y W_i, llegamos a una contradicción, puesto que en algún estado de pérdida la riqueza será mayor que sin siniestro, lo que implica un grado de cobertura superior a la pérdida, no verificándose entonces la última restricción del problema 3.3.2. Consecuentemente, la hipótesis que hicimos inicialmente, $\lambda_{3i} = 0 \ \forall i$, no puede ser cierta. Debe haber algún precio sombra no nulo, lo que conlleva la saturación de la restricción correspondiente para algún i al menos. De la parte 1 de la proposición se deduce que para todos los valores menores que éste se satura también la restricción, quedando así demostrado el resultado. □

Las dos últimas proposiciones demostradas nos han permitido determinar el tipo de contrato óptimo cuando el mercado del seguro se ve afectado por problemas de riesgo moral a consecuencia de la incapacidad por parte del asegurador de predecir y comprobar el comportamiento del asegurado durante la relación contractual entre ambos. Hemos visto que dependiendo de que las actividades de precaución influyan sobre la probabilidad del siniestro o sobre el tamaño de la pérdida sufrida, el óptimo consiste en un seguro con franquicia o en la cobertura completa hasta un límite superior, respectivamente. Aparecen, por tanto, las coberturas parciales como óptimas en muchas situaciones, al igual que ocurría con selección adversa, según se ha visto también en este capítulo. En la práctica es difícil determinar a cuál de los dos problemas de información se debe la aparición de un contrato con cobertura parcial, o si están los dos presentes simultáneamente.

En el capítulo siguiente, haremos un estudio empírico utilizando datos del seguro del automóvil en España. Comprobaremos, en particular, si efectivamente se cumplen las previsiones de la teoría respecto a la relación entre el tipo de riesgo de un asegurado y la cobertura que elige o si, por el contrario, no se detectan en la práctica.

Capítulo 4
Información asimétrica en el seguro del automóvil

En este capítulo, pretendemos en principio comprobar las predicciones de los modelos teóricos en los casos en que existe información asimétrica entre el asegurado y el asegurador. Cuando los asegurados tienen una información sobre su tipo de riesgo que desconoce el asegurador, la teoría predice que los individuos de alto riesgo contratarán mayores coberturas que los de bajo riesgo. Nuestro objetivo principal es verificar esta afirmación. Utilizaremos para ello datos del mercado del seguro de automóviles proporcionados por una aseguradora privada.

Empezaremos repasando brevemente algunos estudios empíricos de este tipo que se encuentran en la literatura especializada. A continuación describiremos la base de datos de la que disponemos y haremos un análisis descriptivo de los datos. Finalmente utilizaremos los modelos adecuados para estimar el número de siniestros de los asegurados y evidenciar la existencia de información asimétrica. A diferencia de los trabajos anteriores, no nos limitaremos a determinar si las coberturas más altas están asociadas a un mayor número de siniestros, sino que encontraremos otras variables explicativas para la siniestralidad. Lo haremos además desde una perspectiva reciente y hasta ahora poco explotada en el seguro del automóvil de los modelos adecuados para variables dependientes discretas que, como la nuestra, encierran matices diferentes dependiendo de si toman el valor cero u otro.

4.1. Trabajos empíricos anteriores

El análisis teórico de los contratos con información asimétrica empezó su desarrollo en los años 70. Sin embargo, la estimación empírica de los modelos de seguro con selección adversa o riesgo moral es mucho más reciente. Uno de los principales objetivos en el tratamiento empírico de la asimetría de información ha sido la comprobación de que mayores coberturas están correlacionadas con un mayor número de accidentes. El mercado del seguro del automóvil ha sido uno de los más propicios para la realización de estos estudios, aunque también se pueden encontrar análisis similares en otros mercados, como el de los seguros de salud, por ejemplo (Cutler y Zeckhauser (2000)).

Entre las primeras aportaciones podemos mencionar a Dahlby (1983) y Boyer y Dionne (1989), ambos centrados en el mercado del seguro del automóvil. En estos dos trabajos, se obtienen resultados que no permiten descartar la presencia de información asimétrica. Sin embargo, los datos que usa Dahlby son datos agregados y no está claro que con la consideración de datos individuales se siguieran dando los mismos resultados. Dahlby (1992) también trabaja con datos agregados del seguro del automóvil de Canadá.

Puelz y Snow (1994) fueron los primeros en utilizar datos individuales; en este caso, de un asegurador de Georgia. Se puede considerar que a partir de entonces empezó a desarrollarse este campo de investigación. Puelz y Snow construyen un modelo de dos ecuaciones. La primera representa la política de precios de la compañía aseguradora. Mediante la estimación de la prima como función de la franquicia elegida y otras variables específicas del individuo, comprueban que las primas más elevadas están asociadas a franquicias más bajas. En la segunda ecuación, describen la franquicia elegida a partir de la prima, de las características individuales del asegurado y de una variable ficticia que toma el valor 1 si el individuo ha sufrido accidentes y 0 en caso contrario. Se obtiene un coeficiente negativo para esta variable *dummy*, lo que muestra que quienes sufren siniestros eligen franquicias más bajas y, por tanto, coberturas más elevadas.

Las principales críticas al trabajo de Puelz y Snow hacen referencia al uso de modelos lineales en la estimación de las ecuaciones y a la no inclusión de variables que afectan al riesgo, concretamente los años de conducción del asegurado, posiblemente por no disponer del dato.

Chiappori y Salanié (1997) proponen una aproximación muy general que, potencialmente, podría ser aplicable a cualquier situación con información asimétrica. La idea consiste en estimar simultáneamente dos ecuaciones no lineales: una sobre la elección de la franquicia en función únicamente de las variables exógenas específicas del individuo, sin incluir, a diferencia de Puelz y Snow, la ficticia sobre los siniestros ni la prima, y una segunda en la que la variable artificial que indica si ocurre o no siniestro se toma como variable dependiente. Estimando ambas ecuaciones simultáneamente, se determina si la siniestralidad conlleva una mayor cobertura.

En relación con esto, Richaudeau (1997) hace una importante aportación, estimando en la segunda ecuación el número de siniestros a través de un modelo tipo recuento o *count data* (concretamente un modelo *binomial negativo*) en lugar de considerar únicamente si hay siniestro o no.

Los trabajos de Chiappori y Salanié (1997, 2000) y Richaudeau (1997), todos ellos con datos de Francia, no muestran correlación entre siniestros y cobertura, por lo que no puede asegurarse la existencia de información asimétrica a partir de ellos.

Chiappori y Salanié basan su estudio únicamente en individuos con menos de dos años de experiencia conductora. La no existencia de correlación cobertura-accidentes entre estos conductores, que no han tenido por tanto mucha oportunidad de adquirir una ventaja informativa respecto al asegurador sobre su tipo de riesgo, no implica necesariamente que dicha correlación no exista en otros conductores.

Cohen (2002) dispone de una gran cantidad de datos de un asegurador de Israel, entre los que se encuentran asegurados con experiencia diversa en la conducción. Confirma la conclusión de Chiappori y Salanié en referencia a la no existencia de correlación cobertura-accidentes en conductores noveles, pero sí encuentra que dicha correlación existe para los asegurados con más de dos años de experiencia conductora. Al ser éstos mayoría de la muestra, la correlación se da también en el conjunto de todas las pólizas.

Cohen hace un estudio mucho más completo que Chiappori y Salanié, teniendo en cuenta además el aprendizaje por parte del asegurador en cuanto al tipo de riesgo del asegurado conseguido a través de una relación duradera entre ambos. Este estudio es de los pocos que comprueban la existencia de la correlación cobertura-accidentes en función de la experiencia del asegurador con el asegurado. Cohen demuestra que cuantos más años existan de relación contractual entre ambas partes menor es la correlación entre una cobertura elevada y un mayor número de siniestros. Para nuevos clientes o para los que llevan poco tiempo con el asegurador, la correlación es especialmente fuerte. Sin embargo, Cohen aplica un modelo de *Poisson* que, como veremos más adelante, no es el más adecuado por el elevado porcentaje de asegurados que no sufren siniestros.

Es importante tener en cuenta que la correlación cobertura-accidentes no solo puede significar existencia de selección adversa sino también riesgo moral. En una situación de este último tipo, es lógico que exista dicha correlación puesto que los asegurados con mayor cobertura tendrán menos incentivos para tomar precaución y, por tanto, pueden sufrir más siniestros. Distinguir ambos fenómenos en la práctica es muy difícil, más aún si aparecen simultáneamente. El de Abbring *et al.* (2003) es de los escasos estudios que se encuentran aún al respecto.

4.2. Los datos

4.2.1. Descripción de la base de datos

Los datos que se van a utilizar para la aplicación empírica que haremos en este capítulo proceden de una base de datos que nos ha sido facilitada por el ramo del automóvil de la aseguradora Previsión Española, S.A. Son 63.900 los registros de los que dispone dicha base de datos, relativos a otras tantas pólizas de vehículos asegurados. La información, proporcionada en soporte Microsoft Access, incluye para cada póliza información que, como Dionne, Gouriéroux y Vanasse (2001) y Cohen (2002) entre otros, clasificamos en cuatro categorías diferenciadas: características del vehículo asegurado, características del asegurado, características de la póliza de seguro y características de los siniestros acontecidos. Es importante señalar sin embargo que la información que las compañías españolas, en general, y la que nos ha proporcionado los datos, en particular, solicitan a sus clientes suele ser menos extensa que la que tienen las aseguradoras de otros países.

La relación de siniestros con la que contamos incluye todos los ocurridos a los asegurados actuales de la compañía entre el 1 de enero de 2001 y el 15 de junio de 2003, siempre que estuvieran en ese momento ligados a la compañía. La prima y cobertura elegida, sin embargo, hacen referencia al último contrato entre ambas partes, en vigor el 15 de junio de 2003. Para que exista una total correspondencia entre todos los datos, tomaremos como periodo de estudio el comprendido entre el 16 de junio de 2002 y el 15 de junio de 2003.

Comentaremos a continuación el contenido, en la base de datos original, de cada una de las categorías en que hemos clasificado la información así como las variables que se han definido a partir de esos datos.

Características del vehículo asegurado

Para cada póliza se conoce la marca, el modelo del vehículo y su valor, así como su uso y la clase a la que pertenece. Dependiendo de la clase, la compañía fija la prima en función, entre otros factores, de detalles técnicos como la potencia (turismos y furgonetas), el peso (camiones, vehículos industriales, tractores y maquinaria agrícola), la cilindrada (ciclomotores y motos) o el número de plazas (autocares). Aunque estos datos también aparecen en la base facilitada, nos hemos quedado únicamente, en este apartado, con el uso y la clase del vehículo asegurado. No hemos considerado importante distinguir exactamente la marca, modelo y valor del vehículo; en cuanto a las demás características, puesto que la compañía nos ha proporcionado también la prima correspondiente a cada póliza, como veremos después, no nos resultan de utilidad para el trabajo posterior.

En lo que se refiere a la clase del vehículo, es grande la variedad que considera la compañía. Teniendo en cuenta el tipo de vehículo, su potencia, cilindrada, toneladas de peso, número de plazas y otros factores, distingue más de 30 grupos distintos. Es posible también clasificar los vehículos según únicamente tres categorías básicas: turismos y furgonetas; camiones, remolques, autocares, tractores, maquinaria agrícola y vehículos industriales; y ciclomotores y motos. Nos ha parecido demasiado desagregado considerar los 30 grupos comentados, pero también consideramos que algunas de las categorías básicas (la segunda fundamentalmente) está formada por vehículos lo suficientemente distintos como para que tengan un comportamiento diferenciado. Por eso hemos optado por tener en cuenta las 7 categorías que aparecen en la Tabla 4.1 para definir la variable

CATEGOR.

En cuanto al uso del vehículo, la compañía distingue una gran variedad de tipos que nosotros hemos agrupado en los 11 que refleja la Tabla 4.2 y que definen la variable USO.

1	Turismo y furgoneta
2	Camión
3	Remolque
4	Autocar
5	Tractor y maquinaria agrícola
6	Vehículo Industrial
7	Ciclomotor y moto

Tabla 4.1: Categoría de los vehículos

1	Particular
2	Servicio público
3	Alquiler
4	Escuela de conductores
5	Compra-venta
6	Industrial
7	Transporte de mercancías
8	Transporte escolar
9	Transporte general de viajeros
10	Agrícola propio
11	Retirada de permiso de conducir

Tabla 4.2: Uso de los vehículos

Destacamos que dentro del uso *servicio público* hemos incluido ambulancias, vehículos dedicados a la extinción de incendios, a la recogida de basuras, taxis, etc. En el *transporte de mercancías* hay tanto transportes propios como públicos, nacionales e internacionales y de materiales peligrosos, independientemente del número de toneladas permitidas. En el *transporte general de viajeros* se han agrupado vehículos con trayectos urbanos e interurbanos, sin diferenciarlos según las distancias recorridas. En el uso *retirada de permiso de conducir* no hay vehículo concreto asegurado sino que la persona contrata una garantía según la cual la aseguradora le pagará un subsidio mensual en la cuantía límite y condiciones acordadas al conductor, en caso de retirada temporal del permiso de conducir decretado por sentencia judicial firme de un tribunal español a consecuencia de accidente de circulación, originado exclusivamente por imprudencia, culpa o negligencia del asegurado o cuando sea por decisión gubernativa de una autoridad española.

Para su tratamiento posterior, estas dos variables nos llevan a definir variables ficticias para cada una de sus categorías, según describimos en la Tabla 4.5.

Características del asegurado

Con respecto a las características personales del asegurado, disponemos entre los datos proporcionados por la compañía de la fecha de nacimiento, la fecha en que obtuvo el carnet de conducir, el sexo, la profesión y el código postal del lugar de residencia (considerado también por la aseguradora como lugar de circulación habitual). La profesión no es una circunstancia que parezca importante en nuestro análisis. A partir de los demás datos hemos definido una serie de variables que sí consideramos necesarias y fundamentales por su importancia en la determinación de la prima.

A partir de la fecha de nacimiento, se obtiene la variable numérica EDAD. La fecha tomada como referencia es el 16 de diciembre de 2002, punto central del periodo en estudio. En la categoría *turismos y furgonetas*, las tarifas de los seguros son distintas según el asegurado tenga más o menos de 25 años. En *ciclomotores y motos*, el tratamiento es diferente para los menores de 25 años, los que tienen 25 o más pero menos de 30 años y aquéllos con 30 años al menos. Por ese motivo, se han definido una variable adicional ED_TRAMO con valores 1, 2, 3, que nos indican en cual de los tres intervalos de edad se encuentra el asegurado y las variables artificiales correspondientes a cada modalidad (Tabla 4.5).

Igualmente, con la misma fecha de referencia, se han calculado los años que hace desde que el asegurado sacó el carnet de conducir, definiéndose con ello la variable ANTIG. Del mismo modo que ocurre con la edad, también tienen un tratamiento especial los conductores de turismos y furgonetas con menos de 2 años de antigüedad en el permiso de conducir. Para identificarlos, definimos la variable ANTIG_2A, que tomará el valor 1 para estos asegurados y 0 para quienes sacaron el carnet hace 2 años o más.

La variable SEXO viene dada sin ningún cálculo adicional. Se trata de una variable cualitativa con valores V si el asegurado es hombre y H si es mujer. La hemos "convertido" en numérica a través de la variable MUJER con valor 1 cuando el asegurado es mujer y 0 cuando es hombre.

En cuanto al código postal, nos ha servido para determinar la provincia de residencia del asegurado (PROVINCI). Las provincias se han agrupado luego en zonas a partir de la clasificación por zonas de tarifas usadas por la aseguradora. Según esto, a los turismos y furgonetas se le aplican tarifas distintas, en lo que se refiere a la garantía de responsabilidad civil, según la "peligrosidad" contrastada de la provincia en la que se mueven; para las garantías de daños propios, robo y rotura de lunas también existen zonas de tarifas diferenciadas, pero únicamente para los turismos. Para el resto de vehículos y garantías se supone una zona única. En relación con la responsabilidad civil, son 18 las zonas consideradas para los turismos y 26 para las furgonetas. En lo que respecta a los daños propios, robo y rotura de lunas, la clasificación que usan las aseguradoras es de 3 ó 4 zonas. Nosotros hemos considerado oportuno reducir el número de zonas y dejarlo en 3, haciendo los cortes en función del salto observado en la prima entre las distintas provincias y eligiendo para cada una la peor zona de cada garantía, cuando es el caso. Se define así la variable ZONA con valores de 1 a 3, correspondiendo el 1 a la zona más barata y el 3 a la más cara. A los vehículos y garantías de la *zona única* se les ha asignado el valor intermedio 2. Las variables artificiales asociadas a cada categoría de la variable ZONA se han denominado ZONA_1, ZONA_2 y ZONA_3.

Características de la póliza

Una póliza de seguro queda perfectamente determinada conociendo la prima que debe pagarse y las garantías o coberturas a las que el asegurado tendrá derecho a cambio. A partir de los datos de los que disponemos en la base de datos, podemos obtener ambas cosas. Se nos facilita en ella la prima anual teórica y las bonificaciones, debidas a la no siniestralidad (tanto en responsabilidad civil como en daños) de las que disfruta cada asegurado, así como la relación de garantías contratadas en cada póliza.

La variable PATEOR es la prima anual teórica del asegurado. Definimos también la variable BONIF (bonificación total) como suma de las bonificaciones por responsabilidad civil y por daños. Finalmente, hemos calculado la prima anual real PAREAL como diferencia de la prima anual teórica y la bonificación total: $PAREAL = PATEOR - BONIF$. Debido a la diversidad de valores que toma, hemos optado por agruparlos en intervalos obteniendo la variable PAREALAG (prima anual real agrupada). En concreto hemos clasificado las primas: de hasta 200 €, de 200 a 300 €, de 300 a 400 €, de 400 a 500 €, de 500 a 750 € y de más de 750 € (los intervalos son abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha), con las consiguientes variables ficticias asociadas a cada tramo.

En cuanto a la cobertura, las garantías que pueden contratarse son la responsabilidad civil obligatoria (RCO), la responsabilidad civil suplementaria (RCS), la defensa y reclamación de daños, los daños propios, incendio, daños por colisión (en éstos es necesario identificar al vehículo contrario), pérdida total, robo, roturas, muerte y/o invalidez del conductor, asistencia en viaje y retirada del permiso de conducir. Hemos introducido la variable GRAD_COB en función de las garantías contratadas en cada póliza, con cuatro posibles grados de cobertura: bajo, medio-bajo, medio-alto y alto, que hemos numerado de 1 a 4. Las variables artificiales aparecen reflejadas en la Tabla 4.5.

Cada tipo de vehículo se ve obligado a contratar una serie de garantías básicas, que hemos tomado como grado de cobertura bajo. Según las garantías adicionales que se vayan eligiendo el grado de cobertura va subiendo de nivel.

Así, en lo que se refiere a los *turismos y furgonetas*, el seguro obligatorio incluye responsabilidad civil obligatoria, responsabilidad civil suplementaria, defensa y reclamaciones, muerte, invalidez del conductor y asistencia en viaje. Es el que hemos tomado como grado 1. El grado 2 lo tienen aquellos vehículos que además contratan la garantía de incendio y/o rotura de lunas. Se han incluido en el grado 3 quienes, además del mínimo obligatorio, disfrutan de la garantía de robo y/o retirada de permiso de conducir. Por último, en el grado 4 están los turismos y furgonetas que tienen cubiertos los daños de su vehículo en alguna de las distintas facetas existentes: daños propios, daños por colisión o pérdida total. Esta clasificación puede apreciarse en la Tabla 4.3.

En cuanto al resto de vehículos, el seguro mínimo obligatorio solo incluye responsabilidad civil obligatoria, responsabilidad civil suplementaria y defensa y reclamaciones, por lo que se ha considerado el conjunto de estas garantías como grado de cobertura 1. El grado de cobertura 2 lo disfrutarán quienes tengan también contratada alguna de las garantías obligatorias para turismos: muerte del conductor, invalidez del conductor y/o asistencia en viaje. El grado 3 es para aquellos vehículos que además del mínimo disfruten de las garantías de incendio, robo, rotura de lunas y/o retirada del permiso de conducir y el grado 4 quienes añaden al seguro obligatorio daños propios, daños por colisión o pérdida total (Tabla 4.4).

Grado de cobertura	Garantías
bajo (1)	RCO, RCS, defensa y reclamaciones, muerte, invalidez, asistencia
medio-bajo (2)	grado 1 + incendio y/o rotura de lunas
medio-alto (3)	grado 1+ robo y/o retirada permiso de conducir
alto (4)	grado 1 + daños propios, daños por colisión o pérdida total

Tabla 4.3: Grados de cobertura para turismos y furgonetas

Grado de cobertura	Garantías
bajo (1)	RCO, RCS, defensa y reclamaciones
medio-bajo (2)	grado 1 + muerte, invalidez y/o asistencia en viaje
medio-alto (3)	grado 1+ robo, roturas, incendio y/o retirada permiso de conducir
alto (4)	grado 1 + daños propios, daños por colisión o pérdida total

Tabla 4.4: Grado de cobertura para el resto de categorías

Características de los siniestros

Las 63.900 pólizas que actualmente están en vigor en la compañía supusieron, entre el 1 de enero de 2001 y el 15 de junio de 2003, un total de 41.537 siniestros. En cada uno de ellos están identificados el asegurado, la fecha de ocurrencia del siniestro, la descripción del mismo, la culpabilidad o inocencia del asegurado, el valor del siniestro para la compañía, la reserva, los pagos realizados y el recobro obtenido de otra compañía cuando es el caso.

Para nuestro estudio, nos interesa conocer únicamente si el asegurado ha sufrido o no algún siniestro durante el periodo de referencia, el número, en su caso, así como el coste total que suponen. Definimos la variable SIN para reflejar la primera circunstancia. Haciendo un recuento de los siniestros asociados a una misma póliza obtenemos la variable NUMSIN que recoge el número de siniestros sufridos por un asegurado entre el 16 de junio de 2002 y el 15 de junio de 2003. Como veremos, aunque hay vehículos que tienen hasta 9 siniestros son pocos los que sufren 3 ó más por lo que los agruparemos a estos últimos cuando sea conveniente.

El resultado que obtiene la compañía de los siniestros no es nuestro objetivo. Por eso, en la determinación del coste no utilizaremos el valor ni el recobro, sino únicamente la reserva y los pagos ya realizados, de cuya suma se llega a la variable CTOTAL que representa el coste total de los siniestros sufridos por el asegurado en el periodo estudiado. La dispersión de esta variable nos hace agrupar sus valores en varios intervalos (incluyendo el extremo superior pero no el inferior): hasta 70 € de coste, de 70 a 200 €, de 200 a 500 €, de 500 a 700 €, de 700 a 1500 € y más de 1500 €. Los valores de 1 a 6 de la variable CTOTALAG nos indican en cuál de los tramos se sitúa un determinado asegurado según los siniestros sufridos.

También nos parece interesante comparar el coste unitario de un siniestro para cada asegurado. Lo definimos en la variable CUNIT como $CUNIT = \frac{CTOTAL}{NUMSIN}$. Sus valores aconsejan de nuevo agruparla por intervalos y así lo hemos hecho, dándole a la variable CUNITAG los valores 1 a 5 con el mismo criterio seguido con el coste total, aunque agrupando los dos últimos tramos.

Ya definidas las variables iniciales y depurados los datos, nos quedamos finalmente con 60.000 pólizas de las que conocemos básicamente la categoría y el uso del vehículo, la edad y el sexo del asegurado, los años que lleva con carnet de conducir, la provincia y zona de circulación habitual, las primas anuales teórica y real, la bonificación total, el grado de cobertura, el número de siniestros sufridos y su coste total y unitario. Estas variables y todas las que se han derivado de ellas se resumen en la Tabla 4.5.

USO	Uso del vehículo asegurado
USO_PART	Variable artificial. 1 si el uso es particular
USO_SP	Variable artificial. 1 si el uso es de servicio público
USO_ALQU	Variable artificial. 1 si el uso es de alquiler
USO_ESCU	Variable artificial. 1 si el uso es escuela de conductores
USO_COMP	Variable artificial. 1 si el uso es de compra-venta
USO_INDU	Variable artificial. 1 si el uso es industrial
USO_TMER	Variable artificial. 1 si el uso es el transporte de mercancías
USO_TESC	Variable artificial. 1 si el uso es el transporte escolar
USO_TGV	Variable artificial. 1 si el uso es el transporte general de viajeros
USO_AGRI	Variable artificial. 1 si el uso es agrícola
USO_RPC	Variable artificial. 1 si el uso es retirada de permiso de conducir
CATEG	Categoría del vehículo asegurado
TUR_FUR	Variable artificial. 1 si es un turismo o furgoneta
CAMION	Variable artificial. 1 si es un camión
REMOLQUE	Variable artificial. 1 si es un remolque
AUTOCAR	Variable artificial. 1 si es un autocar
TRACT_MA	Variable artificial. 1 si es un tractor o maquinaria agrícola
VEH_IND	Variable artificial. 1 si es un vehículo industrial
CICL_MOT	Variable artificial. 1 si es un ciclomotor o moto
EDAD	Edad del asegurado a fecha 15-12-2002
ED_TRAMO	Edad del asegurado agrupada por tramos
ED_25	Variable artificial. 1 si es menor de 25 años
ED25_30	Variable artificial. 1 si la edad está en [25,30)
ED30_	Variable artificial. 1 si tiene al menos 30 años
ANTIG	Años del asegurado con carnet de conducir a fecha 15-12-2002
ANTIG_2A	Variable artificial. 1 si tiene menos de 2 años de carnet
SEXO	Sexo del asegurado
MUJER	Variable artificial. 1 si es mujer
PROVINCI	Provincia de residencia y circulación habitual del asegurado
ZONA	Zona de residencia y circulación habitual del asegurado
ZONA_1	Variable artificial. 1 si pertenece a la zona 1
ZONA_2	Variable artificial. 1 si pertenece a la zona 2
ZONA_3	Variable artificial. 1 si pertenece a la zona 3

Tabla 4.5: Definición de las variables

PATEOR	Prima anual teórica en euros
BONIF	Bonificación total en euros
PAREAL	Prima anual real en euros
PAREALAG	Prima anual real por intervalos
P0_200	Variable artificial. 1 si la prima está en (0,200]
P200_300	Variable artificial. 1 si la prima está en (200,300]
P300_400	Variable artificial. 1 si la prima está en (300,400]
P400_500	Variable artificial. 1 si la prima está en (400,500]
P500_750	Variable artificial. 1 si la prima está en (500,750]
P750_	Variable artificial. 1 si la prima es superior a 750
GRAD_COB	Grado de cobertura
GR_BAJA	Variable artificial. 1 si la cobertura es baja
GR_MBAJA	Variable artificial. 1 si la cobertura es medio-baja
GR_MALTA	Variable artificial. 1 si la cobertura es medio-alta
GR_ALTA	Variable artificial. 1 si la cobertura es alta
NUMSIN	Número de siniestros sufridos por el asegurado
SIN	1 si el asegurado ha sufrido algún siniestro
CTOTAL	Coste total de los siniestros sufridos por el asegurado en euros
CTOTALAG	Coste total de los siniestros por intervalos
CT0_70	Variable artificial. 1 si el coste total está en (0,70]
CT70_200	Variable artificial. 1 si el coste total está en (70,200]
CT200500	Variable artificial. 1 si el coste total está en (200,500]
CT500700	Variable artificial. 1 si el coste total está en (500,700]
CT700150	Variable artificial. 1 si el coste total está en (700,1.500]
CT1500_	Variable artificial. 1 si el coste total es superior a 1.500
CUNIT	Coste unitario de un siniestro por asegurado en euros
CUNITAG	Coste unitario de un siniestro por intervalos
CU0_70	Variable artificial. 1 si el coste unitario está en (0,70]
CU70_200	Variable artificial. 1 si el coste unitario está en (70,200]
CU200500	Variable artificial. 1 si el coste unitario está en (200,500]
CT500700	Variable artificial. 1 si el coste unitario está en (500,700]
CT700_	Variable artificial. 1 si el coste unitario es superior a 700

Tabla 4.5: Definición de las variables (continuación)

4.2.2. Análisis descriptivo de los datos

Una vez definidas las variables que nos interesan para el estudio posterior, haremos en este apartado un análisis descriptivo de los datos para determinar la composición de la población y sus principales características. Usaremos para llevar a cabo el análisis el paquete estadístico *SPSS 11.0 para Windows*.

Siguiendo la estructura anterior, estudiaremos en primer lugar las variables relacionadas con las características del vehículo, a continuación las del asegurado, para seguir con los detalles de las pólizas y finalmente con los siniestros.

Características del vehículo asegurado

Del vehículo asegurado interesan principalmente la categoría a la que pertenece y el uso al que se destina. Las Tablas 4.6 y 4.7 resumen los datos referidos a estas variables.

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	turismo o furgoneta	48.481	80,80
	camión	836	1,39
	remolque	602	1,00
	autocar	85	0,14
	tractor o maquinaria agrícola	4.054	6,76
	vehículo industrial	1.550	2,58
	ciclomotor o moto	4.392	7,32
	Total	60.000	100,00

Tabla 4.6: Categoría de los vehículos asegurados

Más del 80 % de los vehículos asegurados, 48.481 de los 60.000, son turismos o furgonetas. En relación con los demás, también aparecen en mayor proporción los ciclomotores y motos, con un 7,32 %, y los tractores y maquinaria agrícola, con un 6,36 %. El resto de categorías suponen entre todas poco más del 5 % del total de vehículos (Tabla 4.6).

Algo similar ocurre con el uso de los vehículos: solo tres tipos de usos son significativos, mientras que los ocho restantes agrupan solo el 2,5 % de los asegurados. Destacan, como puede apreciarse en la Tabla 4.7, el uso particular al que se destina casi el 80 % de los vehículos, el transporte de mercancías con un 10 % aproximadamente y el uso agrícola que tienen el 8 % de los vehículos asegurados.

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	uso particular	47.734	79,56
	uso servicio público	685	1,14
	uso alquiler	16	0,03
	uso escuela de conductores	27	0,05
	uso compra-venta	104	0,17
	uso industrial	450	0,75
	uso transporte de mercancías	5.897	9,83
	uso transporte escolar	74	0,12
	uso transporte general de viajeros	8	0,01
	uso agrícola	4.798	8,00
	uso retirada de permiso de conducir	207	0,35
	Total	60.000	100,00

Tabla 4.7: Uso de los vehículos asegurados

Existe una relación bastante estrecha entre la categoría a la que pertenece un vehículo y el uso al que se destina, siendo posible asociar de forma casi exacta cada categoría con un uso concreto o dos a lo sumo. Así, la categoría *turismo o furgoneta* tiene un uso particular en el 89 % de los casos y se usa para transporte de mercancías en un 10 %. Con casi toda seguridad, la gran mayoría de los turismos estarían en el primer caso y las furgonetas en el segundo. En cuanto a los camiones (categoría 2) su destino fundamental es, obviamente, el transporte de mercancías. Solo un 1,3 % no tiene ese uso. En lo que respecta a los autocares, el transporte escolar es lo que predomina (87 %) aunque también es destacable evidentemente el transporte general de viajeros frente a otros usos, con cerca del 10 %. La siguiente categoría, tractores y maquinaria agrícola, tiene por supuesto un uso agrícola casi al 100 % y los ciclomotores y motos un uso particular. Los vehículos de la categoría 3 (remolques) no siguen la tendencia general: se reparten casi al 50 % entre el transporte de mercancías y el uso agrícola. También tiene un comportamiento distinto la categoría de los vehículos industriales, con usos más diversos: destaca el uso agrícola con algo más del 30 %, pero seguido muy de cerca por el uso industrial (28,3 %) y el servicio público (23,2 %). Hay que reseñar también el uso particular que tiene el 17,9 % de los vehículos industriales.

Si hacemos el análisis en el otro sentido, el 90 % del uso particular es de turismos y furgonetas y el resto prácticamente de ciclomotores y motos; el servicio público se centra en turismos y furgonetas y vehículos industriales casi a partes iguales; al alquiler se destinan los turismos, furgonetas, ciclomotores y motos, en mayor proporción los primeros; la compra-venta es uso exclusivo de los vehículos de la primera categoría al igual que la retirada de permiso de conducir; lo mismo ocurre con el transporte escolar y general de viajeros en relación con los autocares; al transporte de mercancías se dedican principalmente furgonetas y camiones (80 y 14 % respectivamente); por último, el uso agrícola es fundamentalmente de los tractores y maquinaria agrícola, aunque casi un 10 % se debe a los vehículos industriales.

Características de los asegurados

Comentaremos aquí los principales aspectos relativos a edad, sexo, antigüedad en el carnet de conducir, provincia y zona habitual de circulación del asegurado (Tablas 4.8 a 4.19).

La edad oscila entre los 14 y 97 años, siendo la media de 48,04 y la edad más frecuente de 47 años, como puede verse en la Tabla 4.8. El valor mínimo indica que entre los vehículos asegurados encontraremos ciclomotores conducidos por menores de edad, aunque éstos solo representan el 0,30 % del total (181). La muestra se caracteriza por estar formada por personas de edad media-avanzada, puesto que la mitad de los asegurados tienen edades comprendidas entre los 38 y 57 años, estando el otro 50 % repartido por igual entre los menores de 38 y los mayores de 57 años.

Si tenemos en cuenta además la categoría a la que pertenece el vehículo asegurado, lo más destacable es que en la categoría de tractores y maquinaria agrícola la edad media es ligeramente superior (54,74 años) y en la categoría de ciclomotores y motos un poco menor (42,17) que la cifra obtenida en el estudio global.

En función del uso del vehículo, la edad media del asegurado llega hasta los 53,85 años para el uso agrícola mientras que es solo de 42,25 para el uso retirada de permiso de conducir. En lo que se refiere a los demás, no hay excesivas diferencias con respecto a la media global.

N	Válidos	60.000
	Perdidos	0
Media		48,04
Moda		47
Desv. típ.		13,121
Mínimo		14
Máximo		97
Percentiles	25	38
	50	47
	75	57

Tabla 4.8: Edad de los asegurados

Si consideramos los tramos de edad formados por menores de 25 años, por los que tienen entre 25 (inclusive) y 30 años y los de 30 años en adelante, podemos ver en la Tabla 4.9 la distribución de frecuencias de dichos tramos. La gran mayoría son asegurados de más de 30 años (más del 90 %); poco más de un 2 % son menores de 25 y algo menos del 6 % está en el tramo intermedio.

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	menos de 25 años	1.353	2,26	2,26
	entre 25 y 30 años	3.355	5,59	7,85
	de 30 años en adelante	55.292	92,15	100,00
	Total	60.000	100,00	

Tabla 4.9: Edad de los asegurados por tramos

Como ya dijimos, estos tramos son especialmente importantes para las categorías de turismos y furgonetas y para ciclomotores y motos. En el primer caso, observamos que la mayoría de asegurados mayores de 25 años es todavía más aplastante: el 98,75 % frente a solo el 1,25 % de menores de 25 años, como vemos en la Tabla 4.10. Sin embargo, entre los conductores de ciclomotores y motos la Tabla 4.11 nos muestra, como era de esperar, una distribución bastante distinta de la edad de los asegurados. Más de la cuarta parte no llega a los 30 años. En concreto, casi el 17 % es menor de 25 y cerca del 9 % supera dicha edad pero no alcanza los 30.

En lo que se refiere al sexo, el 85 % son hombres y solo alrededor del 15 %

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	25 años o más	47.876	98,75	98,75
	menos de 25 años	605	1,25	100,00
	Total	48.481	100,00	

Tabla 4.10: Edad de los asegurados por tramos: Turismos y furgonetas

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	menos de 25 años	732	16,67	16,67
	entre 25 y 30 años	383	8,72	25,39
	de 30 años en adelante	3.277	74,61	100,00
	Total	4.392	100,00	

Tabla 4.11: Edad de los asegurados por tramos: Ciclomotores y motos

mujeres (Tabla 4.12). Excepto en las categorías de turismos y furgonetas y en la de ciclomotores y motos que siguen aproximadamente esa distribución, en las categorías restantes la práctica totalidad de asegurados son hombres. Algo similar ocurre con respecto al uso: el particular y el de escuela de conductores son los que siguen la tendencia global, mientras que el resto de usos es casi exclusivo de hombres.

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	mujer	8.800	14,67
	hombre	51.200	85,33
	Total	60.000	100,00

Tabla 4.12: Sexo de los asegurados

En general, en los grupos de menor edad el porcentaje de mujeres es algo más elevado, llegando casi al 25 % en los dos tramos más bajos. En los mayores de 30 años, el comportamiento es similar al global. Sobre el total, predominan los hombres mayores de 30 años (cerca del 80 %) siendo las mujeres menores de 25, con un 0,5 %, las que menos abundan entre los asegurados. Todos estos datos aparecen reflejados en la Tabla 4.13.

Otro aspecto importante de los asegurados es la experiencia que tienen como

			Tramos de edad			
			menos de 25	25-30	30 o más	Total
Sexo	Mujer	Recuento	312	819	7.669	8.800
		% de Tramos de edad	23,06	24,41	13,87	14,67
	Hombre	Recuento	1.041	2.536	47.623	51.200
		% de Tramos de edad	76,94	75,59	86,13	85,33
Total		Recuento	1.353	3.355	55.202	60.000
		% de Tramos de edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.13: Sexo de los asegurados según tramos de edad

conductores. Las aseguradoras "castigan" a los que sacaron el permiso de conducir hace menos de dos años, si el vehículo que aseguran es un turismo o una furgoneta. Aunque estudiaremos más concretamente este último grupo más adelante, analizamos ahora en las Tablas 4.14 y 4.15 la antigüedad en la conducción de los integrantes de la población.

En general, se observa una gran antigüedad en el permiso de conducir de los asegurados de la población. En término medio, son 23,43 los años que hace que sacaron el carnet (Tabla 4.14). Por categorías, solo los tractores y maquinaria agrícola, donde la media es de 28,08 años, y los ciclomotores y motos, con una media de 18,89 años de antigüedad, difieren algo de los demás. El alquiler y la retirada de permiso de conducir son los usos con menor antigüedad en el carnet: 14,50 y 18,74 años, respectivamente. En cambio, el uso agrícola y el de escuela de conductores, con 27,50 años, son los de más antigüedad. Globalmente, aunque hay asegurados con el carnet recién sacado, solo 489 llevan menos de 2 años con posibilidad de conducir, representando el 0,8 % del total, como muestra la Tabla 4.15.

Teniendo en cuenta el sexo, la situación no cambia, aunque, como puede verse en la Tabla 4.16, es ligeramente inferior el porcentaje de mujeres que tiene más de 2 años de carnet con respecto al de hombres en la misma situación. Dentro de los que llevan menos tiempo conduciendo, sí destaca que la cuarta parte son mujeres, a pesar de que representa solo el 0,21 % del total de la población. El gran peso de los asegurados lo soportan los hombres que llevan más de 2 años con carnet, siendo cerca del 85 % de la población.

Nos centramos ahora en la Categoría 1 para la que, como dijimos, cobra una

N	Válidos	60.000
	Perdidos	0
Media		23,43
Moda		25
Desv. típ.		10,323
Mínimo		0
Máximo		77
Percentiles	25	15
	50	24
	75	31

Tabla 4.14: Antigüedad en el permiso de conducir de los asegurados

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	2 ó más años	59.511	99,19
	menos de 2 años	489	0,82
	Total	60.000	100,00

Tabla 4.15: Asegurados según años de carnet

mayor importancia, a la hora de determinar la prima del seguro, el hecho de que el conductor tenga al menos dos años de carnet. La Tabla 4.17 muestra que prácticamente la totalidad de los asegurados con turismos y furgonetas tienen suficiente experiencia conductora. Únicamente el 0,54 % sacó el permiso de conducir hace menos de 2 años.

Si conjugamos esta característica con la edad, se ratifica que el grueso de los asegurados de la Categoría 1 está en condiciones de disfrutar de un "buen precio", puesto que el 98,56 % son mayores de 25 años con al menos 2 años de carnet (nos referiremos a ellos como asegurados o conductores con experiencia). Es prácticamente insignificante la proporción de conductores que no tiene estas cualidades (Tabla 4.18).

Pasamos ahora a analizar la zona habitual de residencia de los asegurados. Todas las provincias españolas están representadas, aunque en mayor medida Sevilla y Córdoba, con un 12,1 % y un 10,2 % respectivamente, seguidas de Murcia, La Coruña y Badajoz, con algo más de un 6 % sobre el total cada una. Destacan por su menor presencia Teruel y Soria (10 y 20 pólizas únicamente sobre las 60.000 que forman la población) así como Segovia, Palencia, Ceuta, Lérida, Huesca y

			Sexo		
			mujer	hombre	Total
Años de carnet	2 ó más	Recuento	8.675	50.836	59.511
		% de Años de carnet	14,58	85,42	100,00
		% de Sexo	98,58	99,29	99,19
		% del total	14,46	84,73	99,19
	menos de 2	Recuento	125	364	489
		% de Años de carnet	25,56	74,44	100,00
		% de Sexo	1,42	0,71	0,82
		% del total	0,21	0,61	0,82
Total		Recuento	8.800	51.200	60.000
		% de Años de carnet	14,67	85,33	100,00
		% de Sexo	100,00	100,00	100,00
		% del total	14,67	85,33	100,00

Tabla 4.16: Asegurados según años de carnet y sexo

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	2 o más	48.217	99,46
	menos de 2	264	0,54
	Total	48.481	100,00

Tabla 4.17: Asegurados según años de carnet: turismos y furgonetas

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Más de 25 años o menos de 2 de carnet	699	1,44
	Al menos 25 años y 2 de carnet	47.782	98,56
	Total	48.481	100,00

Tabla 4.18: Asegurados con experiencia: turismos y furgonetas

Cuenca, suponiendo cada una de ellas poco más de un 1 % del total.

Si nos fijamos en las zonas de tarifas que se han definido, vemos en la Tabla 4.19 que predomina la Zona 2 a la que pertenecen el 43 % de los asegurados. Algo más del 30 % de los vehículos son de la zona más barata, mientras que la cuarta parte restante la forman pólizas localizadas en la zona más cara. Es lógico este resultado puesto que las zonas solo se diferencian para turismos y furgonetas, como indicamos anteriormente. El resto de vehículos pertenecen a la zona media. A la vista de esta observación, resultará interesante estudiar la distribución de pólizas por zonas en la Categoría 1; lo hacemos en la Tabla 4.20. Más del 38 % de las pólizas se han contratado en la zona más barata; el 32 % en la zona más cara y la zona intermedia es la menos frecuente, aunque con poca diferencia sobre las demás (30 %).

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	1	18.644	31,07	31,07
	2	25.806	43,01	74,08
	3	15.550	25,92	100,00
	Total	60.000	100,00	

Tabla 4.19: Zona habitual de circulación de los asegurados

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	1	18.644	38,46	38,46
	2	14.287	29,47	67,93
	3	15.550	32,07	100,00
	Total	48.481	100,00	

Tabla 4.20: Zona habitual de circulación de los asegurados: turismos y furgonetas

La distribución por zonas es muy dispar si atendemos al uso del vehículo. El transporte escolar, el transporte general de viajeros y el agrícola están al 100 % en la Zona 2, así como prácticamente también el uso industrial. Es lógico este resultado si tenemos en cuenta que entre estos usos es difícil encontrar turismos y furgonetas. El uso particular se distribuye casi por igual entre las 3 zonas; el servicio público sin embargo se da con más frecuencia en las Zonas 2 y 3, con más de un 87 % de las pólizas; muy parecida es la situación para los vehículos destinados a escuela de conductores, aunque el porcentaje no llega al 88 % en este caso; el uso de alquiler corresponde al 50 % a las dos zonas más baratas; en el transporte de mercancías, solo el 15 % de las pólizas se contratan en la zona más cara, y el resto por igual en las otras dos; los casos más extremos son la compraventa donde casi las tres cuartas partes son de la Zona 1 y el uso de retirada de permiso de conducir donde la situación es diametralmente opuesta: casi el 65 % de este uso corresponde a la zona más cara.

Características de las pólizas

Como ya se ha dicho, las variables que determinan las pólizas son básicamente dos: la prima que paga el asegurado y la cobertura que recibirá si llega el caso. Además de estos aspectos, analizaremos brevemente también la prima teórica y las bonificaciones disfrutadas por nuestros asegurados.

Debido a la diversidad de vehículos y al historial de cada uno, observamos una gran variedad de primas y bonificaciones. La prima teórica media es de 720 € frente a los 456 € de la prima real. Ambas coinciden prácticamente en sus valores mínimos y máximos. Oscilan entre los 24 y más de 10.000 €. En el caso de la prima teórica, este máximo no queda excesivamente alejado del tercer cuartil, mientras que para la prima real existe una mayor diferencia. En este último caso, solo el 25 % de los asegurados pagan primas mayores de 500 €, mientras que teóricamente la cuarta parte pagaría más de 800 €. En cuanto a las bonificaciones, muchos asegurados no las disfrutan, pero hay quien llega a tener más de 3.000 € de rebaja en el precio de su seguro. La media es de algo más de 250 €; la mitad tienen bonificaciones entre 120 y 350 € y el resto se encuentra a partes iguales en los tramos restantes (Tabla 4.21).

La variable que más nos interesa de estas tres últimas es la prima real anual pagada por el asegurado. Hemos agrupado los valores que toma en seis intervalos cuya distribución de frecuencia se presenta en la Tabla 4.22. Cerca de la mitad de las primas están comprendidas entre los 200 y 400 €, siendo un 5 % más las que superan los 300 € que las que no llegan a esa cantidad. Del otro 50 % de las primas, la mayor parte supera los 400 €. Solo un 10 % aproximadamente paga primas inferiores a los 200 €.

		Prima teórica	Bonificación	Prima real
N	Válidos	60.000	60.000	60.000
	Perdidos	0	0	0
Media		720,25	264,11	456,14
Moda		480,02	0,00	220,42
Desv. típ.		490,20	212,95	355,86
Mínimo		24,96	0,00	24,44
Máximo		10.776,84	3.189,96	10.776,84
Percentiles	25	481,14	122,86	277,94
	50	617,90	245,51	364,30
	75	814,72	345,89	509,65

Tabla 4.21: Primas y bonificaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	0-200	5.877	9,80	9,80
	200-300	13.076	21,79	31,59
	300-400	16.106	26,84	58,43
	400-500	9.352	15,59	74,02
	500-750	8.238	13,73	87,75
	750 o +	7.351	12,25	100,00
	Total	60.000	100,00	

Tabla 4.22: Prima real según tramos

Podemos sacar conclusiones más interesantes si analizamos la prima en función de alguna otra variable. Si tenemos en cuenta la categoría y observamos la Tabla 4.23, comprobaremos que, como es sabido, las primas tienen distintos niveles dependiendo del tipo de vehículo asegurado. Así, los camiones y autocares pagan prácticamente todos más de 750 € de prima; también el 54 % de los vehículos industriales están en esa situación. Los tractores y maquinaria agrícola, sin embargo, son los que menos pagan. Más del 60 % de los remolques paga las primas más baratas, aunque también destaca cerca de un 20 % que pagan entre 500 y 750 €. Los ciclomotores y motos están entre los 200 y 400 €, mientras que los turismos y furgonetas están más repartidos entre todas las tarifas y siguen un comportamiento acorde al global.

Prima por tramos		Categoría						
		1	2	3	4	5	6	7
0-200	Recuento	976	2	370		4.051	56	422
	% de Categoría	2,01	0,24	61,46		99,93	3,61	9,61
200-300	Recuento	10.533	1	11		2	159	2.370
	% de Categoría	21,73	0,12	1,83		0,05	10,26	53,96
300-400	Recuento	14.862		46		1	169	1.028
	% de Categoría	30,66		7,64		0,02	10,90	23,41
400-500	Recuento	8.851	1	30			147	323
	% de Categoría	18,26	0,12	4,98			9,48	7,35
500-750	Recuento	7.721	21	107	1		182	206
	% de Categoría	15,93	2,51	17,77	1,18		11,74	4,69
750 +	Recuento	5.538	811	38	84		837	43
	% de Categoría	11,42	97,01	6,31	98,82		54,00	0,98
Total	Recuento	48.481	836	602	85	4.054	1.550	4.392
	% de Categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.23: Prima según categoría

		Prima media
Categoría	turismo-furgoneta	472,59
	camión	1.603,60
	remolque	243,45
	autocar	2.598,11
	tractor y maquinaria agrícola	87,04
	vehículo industrial	694,30
	ciclomotor-moto	300
	Total	456,14

Tabla 4.24: Prima media según categoría

La Tabla 4.24 incluye los valores medios de la prima real anual que se paga en cada categoría.

Teniendo en cuenta el uso del vehículo asegurado, la prima media es la que se refleja en la Tabla 4.25. Destacan por las elevadas primas el transporte general de viajeros (más de 5.000 € de media) y el transporte escolar (más de 2.000 €). En ambos casos el 100 % de las primas son superiores a 1.500 €. El uso industrial, con una media bastante más baja (839,54 €) también tiene primas del tramo más elevado en más del 90 % de los casos. Para el servicio público este porcentaje es superior al 70 % y otro 15 % paga primas entre 500 y 750 €. Entre las primas medias más bajas destacan el uso agrícola y el de retirada de permiso de conducir. En ambos casos más del 90 % tiene primas menores de 200 €.

Con respecto a los tramos de edad, observamos que los mayores de 30 años, que son la parte mayoritaria de nuestra población, se comportan en los términos que acabamos de referir sobre la prima. Sin embargo, en los otros dos tramos el comportamiento es muy diferente. El 25 % de los menores de 25 años supera los 750 € de prima y más del 45 % los 500, frente al 12 y 24 % respectivamente que se da en los mayores de 30 años. También son elevados estos porcentajes para el tramo medio, aunque algo menos: el 16 % paga las primas más caras y algo más del 40 % supera la cifra de 500 €. Las primas que menos pagan los más jóvenes son las inferiores a 300 € (menos del 15 % en los dos tramos más bajos). Es también de destacar la diferencia que se da en las primas de 400 a 500 €. Frente al 15,6 % de primas de ese tipo de forma global, el porcentaje de asegurados entre 25 y 30 años que las pagan es de casi el 22 %. Todas estas cifras se pueden ver en la Tabla 4.26. La prima media aumenta a medida que disminuye la edad. Sube de 448 € para los mayores de 30 años a 600 € prácticamente para los menores de 25 años, pasando por la cantidad de 531 € en el segundo tramo.

Con respecto a la antigüedad en el carnet de conducir, vemos en la Tabla 4.27 que los que sacaron el carnet hace menos de 2 años pagan primas mucho más caras. El 75 % paga más de 400 € cuando globalmente esa cifra solo era superada por el 40 % de los asegurados. La prima media para los menos expertos es de más de 670 € mientras que para los demás está sobre 450 €.

Parecen lógicos estos últimos resultados, teniendo en cuenta que la edad y la antigüedad de carnet son dos factores que la aseguradora considera al fijar las

		Prima media
Uso	particular	454,79
	servicio público	945,15
	alquiler	576,07
	escuela de conductores	416,71
	compra-venta	669,15
	industrial	839,54
	transporte de mercancías	634,96
	transporte escolar	2.210,16
	transporte general de viajeros	5.297,67
	agrícola	118,73
	retirada de permiso de conducir	115,69
	Total	456,14

Tabla 4.25: Prima media según uso

			Tramos de edad			Total
			-25	25-30	30 +	
Prima por tramos	0-200	Recuento	21	95	5.761	5.877
		% de Tramos de edad	1,55	2,83	10,42	9,80
	200-300	Recuento	171	403	12.502	13.076
		% de Tramos de edad	12,64	12,01	22,61	21,79
	300-400	Recuento	309	776	15.021	16.106
		% de Tramos de edad	22,84	23,13	27,17	26,84
	400-500	Recuento	241	722	8.389	9.352
		% de Tramos de edad	17,81	21,52	15,17	15,59
	500-750	Recuento	273	827	7.138	8.238
		% de Tramos de edad	20,18	24,65	12,91	13,73
	750 +	Recuento	338	532	6.481	7.351
		% de Tramos de edad	24,98	15,86	11,72	12,25
Total		Recuento	1.353	3.355	55.292	60.000
		% de Tramos edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.26: Prima según tramos de edad

			Años de carnet		Total
			2 o más	menos de 2	
Prima por tramos	0-200	Recuento	5.869	8	5.877
		% de años de carnet	9,86	1,64	9,80
	200-300	Recuento	13.055	21	13.076
		% de años de carnet	21,94	4,29	21,79
	300-400	Recuento	16.015	91	16.106
		% de años de carnet	26,91	18,61	26,84
	400-500	Recuento	9.245	107	9.352
		% de años de carnet	15,53	21,88	15,59
	500-750	Recuento	8.128	110	8.238
		% de años de carnet	13,66	22,49	13,73
	750 +	Recuento	7.199	152	7.351
		% de años de carnet	12,10	31,08	12,25
Total		Recuento	59.511	489	60.000
		% de años de carnet	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.27: Prima según antigüedad de carnet

primas, al menos en algunos tipos de vehículos. En la categoría de turismos, los conductores expertos (al menos 25 años y 2 de carnet) pagan como media una prima anual de 467,42 €, muy cercana a la media de la categoría (472,59 €). Para los que no cumplen alguna de estas condiciones, la media se eleva hasta los 826,41 €. En cuanto a las primas que se pagan en la categoría de ciclomotores y motos según los distintos tramos de edad son de 395,58; 310,94 y 277,87 € (disminuye a medida que avanza la edad) frente a los 300 € de media en el global de la categoría.

Por el contrario, el sexo no es una circunstancia que se tenga en cuenta en la determinación de la prima por esta aseguradora y los resultados de la Tabla 4.28 así parecen atestiguarlo. Únicamente se aprecia alguna diferencia destacable en las primas más baratas. Muy pocas mujeres pagan primas menores de 200 €; a cambio, son más frecuentes que entre los hombres, aunque solo un 5 % más, las primas comprendidas entre 300 y 400 €. Las medias son muy parecidas: 456,73€ para las mujeres y 457,75 € para los hombres.

Confirmamos con los datos que aparecen en la Tabla 4.29 que la Zona 1 tiene en general tarifas más baratas que el resto: casi el 75 % de las pólizas de esta

			Sexo		
			mujer	hombre	Total
Prima por tramos	0-200	Recuento	305	5.572	5.877
		% de Sexo	3,47	10,88	9,80
	200-300	Recuento	2.056	11.020	13.076
		% de Sexo	23,36	21,52	21,79
	300-400	Recuento	2.755	13.351	16.106
		% de Sexo	31,31	26,08	26,84
	400-500	Recuento	1.546	7.806	9.352
		% de Sexo	17,57	15,25	15,59
	500-750	Recuento	1.225	7.013	8.238
		% de Sexo	13,92	13,70	13,73
	750 +	Recuento	913	6.438	7.351
		% de Sexo	10,38	12,57	12,25
Total		Recuento	8.800	51.200	60.000
		% de Sexo	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.28: Prima según sexo

zona son de menos de 400 €, cuando no asciende siquiera al 60 % en general y en la Zona 2. En cambio, la Zona 3 es la más cara: más del 60 % paga más de 400€, frente al 40 % aproximadamente que se da en la Zona 2 y en total. Entre las primas medias que se obtienen en cada zona hay diferencias notables: 374,62€ en la Zona 1; 459,14 en la Zona 2 y 548,90 € en la Zona 3.

Pasamos a analizar a continuación otra característica básica de las pólizas de seguro: la cobertura elegida por los asegurados. Como ya señalamos, se han considerado cuatro grados distintos de cobertura dependiendo de las garantías contratadas. Los hemos denominado: bajo, medio-bajo, medio-alto y alto. Vemos en la Tabla 4.30 que a media que sube el nivel de cobertura disminuye la proporción de pólizas que la eligen. La más frecuente es la cobertura mínima, dándose en más de la mitad de los casos; el siguiente grado lo tienen el 27,55 % de los asegurados, mientras que solo algo más del 10 % incluyen en su cobertura todas las garantías que no sean de daños y únicamente un 7,71 % los daños propios del vehículo, en alguna de sus distintas facetas.

Según la categoría del vehículo asegurado, se ve que los remolques, tractores y maquinaria agrícola y ciclomotores y motos se decantan casi exclusivamente por

			Zona			
			1	2	3	Total
Prima por tramos	0-200	Recuento	689	5.006	182	5.877
		% de Zona	3,70	19,40	1,17	9,80
	200-300	Recuento	7.205	4.538	1.333	13.076
		% de Zona	38,65	17,59	8,57	21,79
	300-400	Recuento	5.737	6.136	4.233	16.106
		% de Zona	30,77	23,78	27,22	26,84
	400-500	Recuento	2.321	3.321	3.710	9.352
		% de Zona	12,45	12,87	23,86	15,59
	500-750	Recuento	1.776	2.954	3.508	8.238
		% de Zona	9,53	11,45	22,56	13,73
	750 +	Recuento	916	3.851	2.584	7.351
		% de Zona	4,91	14,92	16,62	12,25
Total		Recuento	18.644	25.806	15.550	60.000
		% de Zona	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.29: Prima según zona

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	cobertura baja	32.335	53,89	53,89
	cobertura media-baja	16.532	27,55	81,45
	cobertura media-alta	6.508	10,85	92,29
	cobertura alta	4.625	7,71	100,00
	Total	60.000	100,00	

Tabla 4.30: Grado de cobertura

la cobertura mínima (99,5 %, 99,6 % y 97,5 %, respectivamente). El 70 % de los vehículos industriales también tienen cobertura mínima y cerca de un 20 % cobertura media-baja. En las cuatro categorías mencionadas, los grados de cobertura más altos son nulos o insignificantes. La siguiente categoría que se decanta por la cobertura mínima son los autocares, aunque solo lo hacen la mitad de ellos. Muy cerca también están los turismos y furgonetas, de los que el 46 % tiene el seguro mínimo. Sin embargo, es distinto el comportamiento del resto si comparamos ambas categorías. Mientras que el otro 50 % de autocares prácticamente se decide por una cobertura media-alta, los turismos están más repartidos: aproximadamente el 30 % contrata cobertura medio-baja, el 13 % medio-alta y el resto, algo menos del 10 %, elige la cobertura más alta. En la categoría de camiones, la tendencia es totalmente distinta. La cobertura mínima casi no se da, aunque tampoco la alta. Casi el 80 % tiene cobertura medio-baja y el 14 % cobertura medio-alta.

Los usos de alquiler, compra-venta, industrial y agrícola se decantan básicamente por las coberturas más bajas: mínima y medio-baja. Solo un 2 % no lo hace en el uso compra-venta. Escuela de conductores y transporte de mercancías están en situación parecida, aunque en estos casos son el 7,5 % y el 10,3 % los que eligen coberturas medio-altas o altas. El transporte escolar y el general de viajeros se dividen entre los que contratan cobertura mínima y los que lo hacen con cobertura medio-alta. En el uso particular se observa cómo decrece el porcentaje de asegurados a medida que aumenta el grado de cobertura. Casi el 50 % tiene cobertura mínima, el 30 % medio-baja, el 12 % medio-alta y solo el 9 % alta. En el servicio público, están más igualadas las coberturas más bajas (40 % en ambas) y es mucho menor la cobertura alta: solo un 3,2 %. El resto, casi un 17 %, se decanta por la cobertura medio-alta.

Con respecto a los tramos de edad y en lo que se refiere a la disminución del número de asegurados conforme se eleva el grado de cobertura, ocurre lo mismo que en general. Podemos hacer, sin embargo, algunas matizaciones a la vista de la Tabla 4.31. Debido a la composición de la población, formada mayoritariamente por mayores de 30 años, este tramo de edad sigue exactamente el comportamiento global, con unos porcentajes de elección de cada grado de cobertura prácticamente coincidentes. Los conductores más jóvenes eligen, sin embargo, la cobertura mínima casi en un 15 % más que el conjunto, en lugar

			Tramos de edad			
			-25	25-30	30 +	Total
Grado de cobertura	bajo	Recuento	934	1.387	30.014	32.335
		% de Tramos de edad	69,03	41,34	54,28	53,89
	medio-bajo	Recuento	210	1.040	15.282	16.532
		% de Tramos de edad	15,52	31,00	27,64	27,55
	medio-alto	Recuento	131	493	5.884	6.508
		% de Tramos de edad	9,68	14,69	10,64	10,85
	alto	Recuento	78	435	4.112	4.625
		% de Tramos de edad	5,76	12,97	7,44	7,71
Total		Recuento	1.353	3.355	55.292	60.000
		% de Tramos de edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.31: Grado de cobertura según tramos de edad

de contratar la cobertura media-baja. En lo que se refiere a los dos grados más elevados, la tónica es bastante similar a la global. En el tramo intermedio, de 25 a 30 años, se elige menos la cobertura mínima: solo el 41 % lo hace frente al 54 y 69 % de los mayores de 30 y menores de 25, respectivamente. Esta disminución se ve reflejada en este caso en un aumento de la elección de los tres grados de cobertura restantes, a diferencia de lo que ocurría con los conductores más jóvenes. Las coberturas media-baja y media-alta se dan en un 4 % más que en el conjunto de la población, mientras que el porcentaje de elección de la cobertura alta supera en 6 puntos a la media.

En función del sexo, de nuevo debemos resaltar que, al ser mayoría los hombres en la población estudiada, su comportamiento es prácticamente igual que el de ésta. En cambio, se observan algunas variaciones en el caso de las mujeres. Éstas eligen en menor proporción cobertura mínima y a cambio contratan coberturas media-alta y alta, a partes iguales. Como se ve en la Tabla 4.32, no se producen cambios en lo que respecta a la cobertura media-baja.

Según la antigüedad en el carnet de conducir, se observa que la pequeña proporción de conductores con menos de dos años de experiencia tiene un comportamiento bastante diferenciado del resto (Tabla 4.33); es más elevada la elección de cobertura mínima (un 13 % más) en detrimento de la cobertura media-baja. La cobertura media-alta experimenta también un ascenso aunque muy ligero en este caso: solo un 2 % más que en la población. Este comportamiento global tiene

			Sexo		
			mujer	hombre	Total
Grado de cobertura	bajo	Recuento	4.084	28.251	32.335
		% de Sexo	46,41	55,18	53,89
	medio-bajo	Recuento	2.438	14.094	16.532
		% de Sexo	27,70	27,53	27,55
	medio-alto	Recuento	1.266	5.242	6.508
		% de Sexo	14,39	10,24	10,85
	alto	Recuento	1.012	3.613	4.625
		% de Sexo	11,50	7,06	7,71
Total		Recuento	8.800	51.200	60.000
		% de Sexo	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.32: Grado de cobertura según sexo

variaciones si tenemos en cuenta la categoría del vehículo asegurado. Entre los turismos y furgonetas, son menos frecuentes los grados más bajos de cobertura (ambos se reducen sobre un 7 %); en cambio, crece sobre todo la contratación de coberturas medio-altas (10 %) y en menor medida la de coberturas altas (3 %). Pueden verse todos estos datos en la Tabla 4.34. Entre los conductores menos experimentados de esta misma categoría de vehículos, la elección de cobertura mínima y media-baja se iguala, siendo ambas de un 33 % aproximadamente, no produciéndose variaciones en los restantes grados de cobertura con respecto a lo visto para asegurados de menos de 2 años de carnet (Tabla 4.35).

Estudiamos por último si existe alguna relación entre el grado de cobertura y la zona de residencia habitual del asegurado, considerando las zonas de tarifa definidas. Se observa efectivamente un comportamiento diferenciado entre zonas (Tabla 4.36). En la zona más barata, predomina la cobertura mínima: más del 88 % la contratan. En la zona intermedia, es más frecuente también el grado de cobertura mínimo, aunque elegido en este caso solo por la mitad de los asegurados. Se elige también en gran medida la cobertura medio-baja (más del 30 %), mientras que el resto se distribuye casi por igual entre los dos tipos de cobertura más elevadas. En cuanto a la zona más cara, el comportamiento es totalmente distinto. Aquí predomina la cobertura medio-baja con un 43,4 %, seguida de la cobertura medio-alta con cerca del 30 %, quedando un 13,5 % tanto para la cobertura más baja permitida como para la más completa. Se observa aquí que la “peligrosidad”

			Años de carnet		
			2 ó más	menos de 2	Total
Grado de cobertura	bajo	Recuento	32.011	324	32.335
		% de Años de carnet	53,79	66,26	53,89
	medio-bajo	Recuento	16.462	70	16.532
		% de Años de carnet	27,66	14,31	27,55
	medio-alto	Recuento	6.448	60	6.508
		% de Años de carnet	10,83	12,27	10,85
	alto	Recuento	4.590	35	4.625
		% de Años de carnet	7,71	7,16	7,71
Total		Recuento	59.511	489	60.000
		% de Años de carnet	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.33: Grado de cobertura según años de carnet

			Años de carnet		
			2 ó más	menos de 2	Total
Grado de cobertura	bajo	Recuento	22.135	102	22.237
		% de Años de carnet	45,91	38,64	45,87
	medio-bajo	Recuento	15.356	68	15.424
		% de Años de carnet	31,85	25,76	31,81
	medio-alto	Recuento	6.164	60	6.224
		% de Años de carnet	12,78	22,73	12,84
	alto	Recuento	4.562	34	4.596
		% de Años de carnet	9,46	12,88	9,48
Total		Recuento	48.217	264	48.481
		% de Años de carnet	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.34: Grado de cobertura según años de carnet: turismos y furgonetas

			Experiencia		Total
			No	Sí	
Grado de cobertura	bajo	Recuento	230	22.007	22.237
		% de experiencia	32,90	46,06	45,87
	medio-bajo	Recuento	230	15.194	15.424
		% de experiencia	32,90	31,80	31,81
	medio-alto	Recuento	149	6.075	6.224
		% de experiencia	21,32	12,71	12,84
	alto	Recuento	90	4.506	4.596
		% de experiencia	12,88	9,43	9,48
Total		Recuento	699	47.782	48.481
		% de experiencia	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.35: Grado de cobertura según experiencia: turismos y furgonetas

de la zona de tarifa más cara se traduce de algún modo en la elección de coberturas algo más elevadas que en las zonas más "tranquilas". Aunque no llega a ser la cobertura completa la preferida por los asegurados de la Zona 3, sí es cierto que son los que la eligen en mayor proporción (45,4 %) y sobre todo la cobertura medio-alta, en la que esta zona representa más del 70 % de las pólizas.

Evidentemente, las garantías que el asegurado elige deben ser uno de los principales determinantes de la prima del seguro. La Tabla 4.37 nos describe la situación para cada grado de cobertura. Los resultados son los que efectivamente se esperaban. En términos porcentuales, casi el 80 % de los pólizas con cobertura mínima paga menos de 400 €; el 75 % de los que tienen coberturas medio-bajas pagan entre 200 y 500 €; las coberturas medio-altas se concentran entre 300 y 750 € en casi un 80 % mientras que más del 90 % de quienes contratan coberturas altas pagan a cambio primas superiores a 750 €. Las primas medias para cada grado de cobertura se dan en la Tabla 4.38. Destaca sobre todo que, en términos medios, los que eligen cobertura alta pagan casi el doble que los que contratan cobertura medio-alta (casi 1.100 € frente a 575). No es tanta la diferencia entre los tres grados inferiores; entre la cobertura mínima y la medio-alta no llega a 250 € el incremento.

			Zona			
			1	2	3	Total
Grado de cobertura	bajo	Recuento	16.496	13.720	2.119	32.335
		% de Grado cobertura	51,02	42,43	6,55	100,00
		% de Zona	88,48	53,17	13,63	53,89
	medio-bajo	Recuento	982	8.809	6.741	16.532
		% de Grado cobertura	5,94	53,28	40,78	100,00
		% de Zona	5,27	34,14	43,35	27,55
	medio-alto	Recuento	458	1.462	4.588	6.508
		% de Grado cobertura	7,04	22,46	70,50	100,00
		% de Zona	2,46	5,67	29,50	10,85
	alto	Recuento	708	1.815	2.102	4.625
		% de Grado cobertura	15,31	39,24	45,45	100,00
		% de Zona	3,80	7,03	13,52	7,71
Total		Recuento	18.644	25.806	15.550	60.000
		% de Grado cobertura	31,07	43,01	25,92	100,00
		% de Zona	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.36: Grado de cobertura según zona

			Grado cobertura			
			bajo	medio-bajo	medio-alto	alto
Prima por tramos	0-200	Recuento	5.590	49	230	8
		% de Grado cobertura	17,29	0,30	3,53	0,17
	200-300	Recuento	10.691	2.256	112	17
		% de Grado cobertura	33,06	13,65	1,72	0,37
	300-400	Recuento	8.831	6.040	1.114	121
		% de Grado cobertura	27,31	36,54	17,12	2,62
	400-500	Recuento	3.506	3.858	1.793	195
		% de Grado cobertura	10,84	23,34	27,55	4,22
	500-750	Recuento	2.525	2.707	2.214	792
		% de Grado cobertura	7,81	16,37	34,02	17,12
	750 +	Recuento	1.192	1.622	1.045	3.492
		% de Grado cobertura	3,69	9,81	16,06	75,50
Total		Recuento	32.335	16.532	6.508	4.625
		% de Grado cobertura	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.37: Prima según grado de cobertura

		Prima media
Grado de cobertura	cobertura mínima	326,54
	cobertura medio-baja	484,49
	cobertura medio-alta	574,90
	cobertura alta	1.093,71
	Total	456,14

Tabla 4.38: Prima media según grado de cobertura

Características de los siniestros

Este conjunto de características es, junto al de las de la póliza, el de mayor interés para nuestro análisis. Como ya hemos indicado, tratamos de determinar la relación entre la siniestralidad y el grado de cobertura elegido por el asegurado, con el objetivo de comprobar si la previsión teórica según la cual la cobertura más alta, con asimetría de información, se corresponde con los individuos que soportan un mayor riesgo, se cumple para nuestros datos.

Analizaremos así en este apartado los siniestros que han tenido lugar durante el periodo en estudio (del 16 de junio de 2002 al 15 de junio de 2003). Nos interesa tanto el número de siniestros ocurridos como el coste que llevan asociado.

Según muestra la Tabla 4.39, casi el 77 % de los asegurados no ha sufrido ningún siniestro durante el último año mientras que el 23 % sí los ha tenido. En total han sido 19.841 los siniestros sufridos por 13.909 conductores, lo que supone una media de 1,43 por persona, como se aprecia en la Tabla 4.40. Aunque hay quien ha sufrido hasta 9 siniestros a lo largo del periodo analizado, lo más frecuente entre los asegurados con siniestros es haber sufrido únicamente 1, hecho que se da en el 70 % de los casos (algo más del 16 % del total de la población). Menos elevado, pero también digno de tenerse en cuenta, es el porcentaje de conductores con 2 siniestros: más del 20 % de los que han sufrido algún accidente (casi el 5 % del total). El 10 % restante engloba pólizas en las que se han declarado de 3 a 9 siniestros, suponiendo únicamente alrededor de un 2 % de los asegurados. La Tabla 4.41 contiene estos datos.

Nos fijaremos a continuación (Tabla 4.42) en las diferencias que puedan existir entre las distintas categorías de vehículos en lo que se refiere a sufrir o no siniestro. Los remolques, tractores y maquinaria agrícola sufren pocos siniestros; menos de

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	No ha sufrido siniestro	46.091	76,82
	Ha sufrido algún siniestro	13.909	23,18
	Total	60.000	100,00

Tabla 4.39: Siniestros

N	Válidos	13.909
	Perdidos	0
Media		1,43
Moda		1
Desv. típ.		0,80
Mínimo		1
Máximo		9
Percentiles	25	1
	50	1
	75	2

Tabla 4.40: Número de siniestros

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	1	9.797	70,44	70,44
	2	2.874	20,66	91,10
	3	859	6,18	97,28
	4	250	1,80	99,07
	5	81	0,58	99,65
	6	30	0,22	99,87
	7	12	0,09	99,96
	8	4	0,03	99,99
	9	2	0,01	100,00
	Total	13.909	100,00	

Tabla 4.41: Distribución del número de siniestros

			Siniestros		
			No	Sí	Total
Categoría	turismo o furgoneta	Recuento	35.595	12.886	48.481
		% de Categoría	73,42	26,58	100,00
	camión	Recuento	627	209	836
		% de Categoría	75,00	25,00	100,00
	remolque	Recuento	585	17	602
		% de Categoría	97,18	2,82	100,00
	autocar	Recuento	44	41	85
		% de Categoría	51,76	48,24	100,00
	tractor o maq. agrícola	Recuento	3.946	108	4.054
		% de Categoría	97,34	2,66	100,00
	vehículo industrial	Recuento	1.218	332	1.550
		% de Categoría	78,58	21,42	100,00
	ciclomotor o moto	Recuento	4.076	316	4.392
		% de Categoría	92,81	7,19	100,00
Total		Recuento	46.091	13.909	60.000
		% de Categoría	76,82	23,18	100,00

Tabla 4.42: Siniestros según categoría

un 3 % los tienen. Algo similar ocurre con los ciclomotores y motos, aunque en este caso cerca de un 8 % han sufrido algún siniestro a lo largo del periodo considerado. En torno al 25 % de los turismos y furgonetas, camiones y vehículos industriales han tenido algún siniestro; el porcentaje es algo más elevado en los primeros que en los últimos. La categoría de vehículos que se diferencia más del resto es la de autocares, que se divide casi a partes iguales entre los que han tenido algún accidente y los que no. Parece, además, a la vista del número medio de siniestros por categoría reflejado en la Tabla 4.43, que los vehículos que sufren siniestros en mayor proporción también sufren más siniestros. Los autocares alcanzan una media de 1,95 mientras que los tractores y maquinaria agrícola solo 1,04.

Con respecto al uso (Tabla 4.44), el particular, compra-venta, industrial y transporte de mercancías no difieren del comportamiento global. Entre el 75 y el 79 % no sufren siniestros y el resto sí. La media, además, entre quienes tienen siniestros, es similar a la global (Tabla 4.45). El uso agrícola y la retirada de permiso de conducir tienen pocos siniestros, aunque este último, cuando los tiene, dobla la media. Hay que destacar, sin embargo, que son solo 2 los siniestros para

		Nº medio de siniestros
Categoría	turismo-furgoneta	1,44
	camión	1,37
	remolque	1,18
	autocar	1,95
	tractor y maquinaria agrícola	1,04
	vehículo industrial	1,32
	ciclomotor-moto	1,12
	Total	1,43

Tabla 4.43: Número medio de siniestros según categoría

el uso RPC, lo que parece *a priori* poco significativo. Lo mismo ocurre con el uso alquiler, en el que los 2 siniestros representan el 12,5 % de los vehículos con dicho uso. En el otro extremo encontramos el transporte general de viajeros, con siniestros en un 75 % de los casos (aunque son solo 6 los siniestros). Son también más frecuentes que en el resto los accidentes en los vehículos con usos de servicio público, escuela de conductores y transporte escolar, aunque en ningún caso se llega porcentualmente al extremo del transporte general de viajeros. Destaca el hecho de que tanto este último como el transporte escolar, cuando sufren siniestros, lo hacen además en mayor medida que el resto de usos. Las medias son 2,33 y 1,91, respectivamente.

Si tenemos en cuenta quienes han sufrido siniestros y quienes no, no se encuentran diferencias en ninguno de los dos casos entre los porcentajes de individuos por tramos de edad y la composición de la población según dichos tramos. También son similares las proporciones de asegurados que sufren o no siniestros si comparamos los tramos de edad: las 3/4 partes no tienen siniestros mientras que el cuarto restante sí (Tabla 4.46). Estas cifras coinciden evidentemente con las cifras globales. El número medio de siniestros sufridos tampoco difiere entre los distintos tramos.

Al introducir la variable sexo observamos que entre las mujeres la proporción de las que no sufren siniestros es ligeramente inferior a la que se da en los hombres. Frente al 77,4 % de hombres que no tienen siniestros, las mujeres en esa misma situación son algo menos: el 73,3 %. Lo podemos apreciar en la Tabla 4.47. Esta diferencia no se refleja en el número medio de siniestros sufridos por ambos sexos.

			Siniestros No	Siniestros Sí	Total
Uso	particular	Recuento	35.843	11.891	47.734
		% de Uso	75,09	24,91	100,00
	servicio público	Recuento	454	231	685
		% de Uso	66,28	33,72	100,00
	alquiler	Recuento	14	2	16
		% de Uso	87,50	12,50	100,00
	escuela de conductores	Recuento	17	10	27
		% de Uso	62,96	37,04	100,00
	compra-venta	Recuento	81	23	104
		% de Uso	77,88	22,12	100,00
	industrial	Recuento	356	94	450
		% de Uso	79,11	20,89	100,00
	transporte de mercancías	Recuento	4.443	1.454	5.897
		% de Uso	75,34	24,66	100,00
	transporte escolar	Recuento	41	33	74
		% de Uso	55,41	44,59	100,00
	transporte general de viajeros	Recuento	2	6	8
		% de Uso	25,00	75,00	100,00
	agrícola	Recuento	4.635	163	4.798
		% de Uso	96,60	3,40	100,00
	retirada de permiso de conducir	Recuento	205	2	207
		% de Uso	99,03	0,97	100,00
Total		Recuento	46.091	13.909	60.000
		% de Uso	76,82	23,18	100,00

Tabla 4.44: Siniestros según uso

		Nº medio de siniestros
Uso	particular	1,44
	servicio público	1,44
	alquiler	1,00
	escuela de conductores	1,10
	compra-venta	1,43
	industrial	1,26
	transporte de mercancías	1,38
	transporte escolar	1,91
	transporte general de viajeros	2,33
	agrícola	1,06
	retirada de permiso de conducir	3,00
	Total	1,43

Tabla 4.45: Número medio de siniestros según uso

			Tramos de edad			
			14-24	25-30	30 +	Total
Siniestros	No	Recuento	1.041	2.451	42.599	46.091
		% de Tramos de edad	76,94	73,06	77,04	76,82
	Sí	Recuento	312	904	12.693	13.909
		% de Tramos de edad	23,06	26,94	22,96	23,18
Total		Recuento	1.353	3.355	55.292	60.000
		% de Tramos de edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.46: Siniestros según tramos de edad

			Sexo		
			mujer	hombre	Total
Siniestros	No	Recuento	6.451	39.640	46.091
		% de Sexo	73,31	77,42	76,82
	Sí	Recuento	2.349	11.560	13.909
		% de Sexo	26,69	22,58	23,18
Total		Recuento	8.800	51.200	60.000
		% de Sexo	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.47: Siniestros según sexo

Si tenemos en cuenta la experiencia en la conducción vemos, como muestra la Tabla 4.48, que entre los que llevan menos de dos años con carnet el porcentaje de los que han sufrido siniestros es casi 4 puntos más alto que el de aquéllos que sacaron el permiso de conducir hace más de 2 años (27 % frente al 23 %). Aunque con poco margen de diferencia, podemos afirmar, a la vista de los datos, que una menor experiencia en la conducción se traduce en mayor siniestralidad.

			Años de carnet		
			2 ó más	menos de 2	Total
Siniestros	No	Recuento	45.734	357	46.091
		% de Años de carnet	76,85	73,01	76,82
	Sí	Recuento	13.777	132	13.909
		% de Años de carnet	23,15	26,99	23,18
Total		Recuento	59.511	489	60.000
		% de Años de carnet	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.48: Siniestros según experiencia

Parece interesante *a priori* estudiar de un modo especial los grupos de conductores con tratamiento distinto por parte de la aseguradora según su edad y antigüedad en la obtención del permiso de conducir. Las Tablas 4.49 y 4.50 muestran la característica de haber tenido o no algún siniestro durante el periodo en estudio para los vehículos de la Categoría 1 según si sus conductores tienen al menos 25 años y 2 con el carnet y para los vehículos de la Categoría 7 según sus conductores tengan menos de 25 años, entre 25 y 30 ó más de 30, respectivamente.

En lo que se refiere a los turismos y furgonetas, se puede deducir a la vista de la Tabla 4.49 que los conductores con menos experiencia (menores de 25 años y/o con menos de 2 años de carnet) han sufrido algún siniestro en mayor proporción que los experimentados siendo la diferencia de 5 puntos. Estos últimos, que representan más del 98 % de los conductores de la Categoría 1, siguen, por tanto, exactamente la misma tendencia que observamos más arriba en la categoría de turismos y furgonetas. Los conductores más expertos han sufrido 1,44 siniestros como término medio, mientras que para los menos expertos la media sube hasta 1,58 siniestros.

En cuanto a la categoría de ciclomotores y motos, ya se ha visto que tienen un comportamiento bastante positivo puesto que solo el 7,19 % había sufrido

			Experiencia		Total
			No	Sí	
Siniestros	No	Recuento	480	35.115	35.595
		% de Experiencia	68,67	73,49	73,42
	Sí	Recuento	219	12.667	12.886
		% de Experiencia	31,33	26,51	26,58
Total		Recuento	699	47.782	48.481
		% de Experiencia	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.49: Siniestros en la Categoría 1 según experiencia

			Tramos de edad			Total
			14-25	25-30	30 +	
Siniestro	No	Recuento	613	357	3.106	4.076
		% de Tramos de edad	83,74	93,21	94,78	92,81
	Sí	Recuento	119	26	171	316
		% de Tramos de edad	16,26	6,79	5,22	7,19
Total		Recuento	732	383	3.277	4.392
		% de Tramos de edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.50: Siniestros en la Categoría 7 según tramos de edad

algún siniestro. Este comportamiento global se mantiene en el tramo de edad intermedio, mientras que empeora bastante para los conductores de menor edad y mejora algo para los que tienen más de 30 años. Los menores de 25 años que han tenido algún siniestro superan el 16 %. Por contra, solo el 5,2 % de los que pertenecen al tramo de mayor edad han sufrido algún accidente durante el periodo considerado (Tabla 4.50). En ningún caso se han tenido más de 3 siniestros en esta categoría y el número medio de siniestros es curiosamente superior en el tramo de 25 a 30 años: 1,27 por tan solo 1,15 en los menores de 25 y 1,08 en los mayores de 30 años.

En lo que respecta a las zonas de tarifa, se observa en la Tabla 4.51 que en la zona más cara hay una mayor proporción de asegurados que han declarado haber sufrido algún siniestro, lo que reafirma la idea de que es la zona más peligrosa y por eso se le asignan precios más elevados. Aunque en la zona más barata hay menos asegurados que sufren siniestros que en la zona media, no es grande la diferencia, sino que el comportamiento de ambas zonas es muy similar: el 78,37 y

			Zona			Total
			1	2	3	
Siniestros	No	Recuento	14.611	20.654	10.826	46.091
		% de Zona	78,37	80,04	69,62	76,82
	Sí	Recuento	4.033	5.152	4.724	13.909
		% de Zona	21,63	19,96	30,38	23,18
Total		Recuento	18.644	25.806	15.550	60.000
		% de Zona	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.51: Siniestros según zona

el 80,04 %, respectivamente, no ha sufrido siniestros durante el periodo asegurado. El número medio crece ligeramente entre las distintas zonas: 1,37 en la Zona 1, 1,43 en la Zona 2 y 1,47 en la Zona 3.

Estudiemos ahora si la ocurrencia o no de siniestros es una variable que está relacionada con la prima que se paga por la póliza. No existe prácticamente diferencia entre la distribución de primas de quienes no han sufrido y la global estudiada en la Tabla 4.22. Sí se aprecia en la Tabla 4.52 que hay poco más de un 5 % de primas menores de 300 € entre los que no han sufrido siniestros que en el total. Sin embargo, la diferencia sube a un 20 % si comparamos con la parte de la población que sí ha sufrido algún siniestro. A partir de los 400 € se ve también que hay un 35 % más de primas entre quienes han tenido algún siniestro que entre los que no. Como sabíamos, la ocurrencia de siniestros es un hecho que eleva el nivel de la prima y ha quedado ratificado con estos datos, así como con las medias que damos en la Tabla 4.53. La prima media pagada por los asegurados que han sufrido algún siniestro es mayor que la que pagan los que no han tenido accidente. Además, también aumenta dicha media con el número de siniestros sufridos.

Veremos por último de qué manera está relacionada la ocurrencia de siniestros con el grado de cobertura elegido por el asegurado. Este hecho es, como ya se ha resaltado varias veces, uno de nuestros principales objetivos. La Tabla 4.54 nos muestra los resultados. Es interesante ver cómo a medida que aumenta el número de garantías contratadas aumenta también la proporción de asegurados que han sufrido algún siniestro: de solo el 16 % entre los que tienen la mínima cobertura se pasa a cerca de un 40 % de asegurados con siniestro entre los que disfrutan de la máxima cobertura. Las coberturas intermedias también presentan porcentajes de

			Siniestros No	Siniestros Sí	Total
Prima por intervalos	0-200	Recuento	5.659	218	5.877
		% de Siniestros	12,28	1,57	9,80
	200-300	Recuento	11.030	2.046	13.076
		% de Siniestros	23,93	14,71	21,79
	300-400	Recuento	12.505	3.601	16.106
		% de Siniestros	27,13	25,89	26,84
	400-500	Recuento	6.643	2.709	9.352
		% de Siniestros	14,41	19,48	15,59
	500-750	Recuento	5.581	2.657	8.238
		% de Siniestros	12,11	19,10	13,73
	750 +	Recuento	4.673	2.678	7.351
		% de Siniestros	10,14	19,25	12,25
Total		Recuento	46.091	13.909	60.000
		% de Siniestros	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.52: Prima según siniestro

		Prima media
No ha sufrido siniestro		422,40
Ha sufrido algún siniestro		567,92
	1 siniestro	534,86
	2 siniestros	613,01
	3 siniestros o más	724,78
Total		456,14

Tabla 4.53: Prima media según siniestros

		Grado de cobertura				
		bajo	medio-bajo	medio-alto	alto	Total
No siniestro	Recuento	27.157	11.625	4.451	2.858	46.091
	% de Grado cob.	83,99	70,32	68,39	61,79	76,82
Siniestro	Recuento	5.178	4.907	2.057	1.767	13.909
	% de Grado cob.	16,01	29,68	31,61	38,21	23,18
Total	Recuento	32.335	16.532	6.508	4.625	60.000
	% de Grado cob.	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.54: Siniestros según grado de cobertura

siniestros más elevados que la media. Recordemos que ésta era de poco más del 23 %, siendo 29,7 y 31,6 los porcentajes de siniestros entre las coberturas medio-baja y medio-alta, respectivamente. Es importante destacar que no solo aumenta con el grado de cobertura el porcentaje de asegurados que han sufrido algún siniestro, sino que también crece el número medio de siniestros. Así, se obtienen 1,32; 1,43; 1,49 y 1,64 siniestros de media cuando la cobertura es mínima, medio-baja, medio-alta y alta, respectivamente. Estos resultados parecen mostrar una elevada correlación entre número de siniestros y grado de cobertura alto, como debe ocurrir cuando la información entre asegurado y asegurador es asimétrica.

Estos resultados relativos a la ocurrencia o no de siniestros en función del grado de cobertura pueden variar según la categoría del vehículo. Siguen la tendencia general los turismos y furgonetas, autocares, vehículos industriales y ciclomotores y motos. Los remolques y tractores apenas tienen siniestros y no resultan relevantes en este análisis. Los camiones son los que están en una situación ligeramente distinta. Son pocos los que tienen coberturas altas y podemos despreciarlos. El resto de grados están muy parejos en cuanto a ocurrencia de siniestros. Sin embargo, la cobertura mínima supera a la medio-baja en un 4 % aproximadamente.

Otra variable importante es la que pasamos a continuación a analizar: el coste asociado a los siniestros. Estudiaremos fundamentalmente el coste total para cada asegurado de los siniestros que ha sufrido, aunque en casos puntuales nos referiremos también al coste unitario de un siniestro para el asegurado. Son muchos quienes únicamente tuvieron un accidente durante el periodo estudiado, por lo que en muchas ocasiones ambas variables coinciden y tienen características comunes. Como puede verse en la Tabla 4.55, las dos tienen la misma moda

		Coste total	Coste unitario
N	Válidos	13.909	13.909
	Perdidos	0	0
Media		1.238,47	834,39
Moda		600,00	600,00
Desv.típ.		5.060,89	3.457,49
Mínimo		10,21	10,21
Máximo		163.806,71	153.735,00
Percentiles	25	118,60	89,10
	50	512,94	354,48
	75	773,96	678,00

Tabla 4.55: Coste de los siniestros

(600€), el mismo mínimo (10,21) y el máximo varía en 10.000 €, cantidad poco significativa a la vista de las cantidades de las que se trata. La media del coste total de los siniestros por persona es 400 € superior al coste unitario medio por persona de un siniestro. Supera los 1.200 € en el primer caso mientras que en el segundo es algo mayor de 800 €. Se han agrupado los valores de estas variables en intervalos, obteniéndose los resultados indicados en las Tablas 4.56 y 4.57.

Se observa, lógicamente, una mayor concentración del coste unitario por siniestro y persona. Para cantidades de hasta 200 € la distribución es prácticamente la misma. Sin embargo, mientras el 50 % de los asegurados con siniestros tienen un coste total de 500 € como mucho, sube hasta el 60 % el porcentaje de aquéllos cuyo coste por siniestro no alcanza esa cifra. Esa diferencia de 10 puntos se mantiene para cuantías de hasta 700 €. Casi el 30 % de las pólizas con siniestros superan un coste total de 700 € mientras que algo menos del 20 % es el que supera esa cantidad si hablamos de coste unitario de un siniestro.

El coste de los siniestros depende en gran medida de la categoría del vehículo asegurado. Los turismos y furgonetas siguen la tendencia general ya señalada en la Tabla 4.55 según la cual hay costes prácticamente de todas las cuantías y en porcentajes no demasiado disparejos. En las demás categorías, las cifras son en general más elevadas. Así, entre los camiones, más del 80 % supera los 500 € de coste total. Para los autocares ocurre algo similar: casi el 85 % supera los 500 €, aunque son mucho más los que superan los 1.500 € que entre los camiones (el 36,6 % frente al 18,7 %). El 70 % de los remolques tienen siniestros cuyas cuantías

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	0-70	2.034	14,62	14,62
	70-200	2.570	18,48	33,10
	200-500	2.299	16,53	49,63
	500-700	2.916	20,96	70,59
	700-1500	2.392	17,20	87,79
	1500 +	1.698	12,21	100,00
	Total	13.909	100,00	

Tabla 4.56: Coste total de los siniestros por persona

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	0-70	2.464	17,72	17,72
	70-200	2.660	19,12	36,84
	200-500	3.134	22,53	59,37
	500-700	3.099	22,28	81,65
	700 +	2.552	18,35	100,00
	Total	13.909	100,00	

Tabla 4.57: Coste unitario de un siniestro por persona

totales oscilan entre 500 y 1.500 €. Entre los tractores, son más del 80 % los que tienen estos costes; concretamente, un 70 % se sitúa entre 500 y 700 € y para un 12 % más los siniestros están entre los 700 y 1.500 €. En los vehículos industriales se dan también cifras elevadas: el 70 % entre 500 y 1.500 € y para casi un 20 % más suponen más de 1.500 € en total. Por último, los ciclomotores y motos superan los 1.500 € de coste en el 30 % de los casos y no lo alcanzan pero están por encima de 500 € para casi un 50 % de ellos. Todos estos datos pueden verse en la Tabla 4.58. En cuanto a la media en cada categoría, viene recogida en la Tabla 4.59. Los autocares son los que tienen siniestros de mayor valor (más de 3.000 €) seguidos por los camiones (aproximadamente 2.000 € de media). Ciclomotores y motos y vehículos industriales están muy parejos: alrededor de 1.800 € de media en el coste total de los siniestros sufridos en ambos tipos de vehículos. Los siniestros menos costosos son los que sufren los remolques, superando escasamente los 700€ de media. En cuanto a los turismos y furgonetas y tractores y maquinaria agrícola, están cerca de la media global.

Coste total		Categoría						
		1	2	3	4	5	6	7
0-70	Recuento	1.998	10		1	2	12	11
	% de Categ.	15,51	4,78		2,44	1,85	3,61	3,48
70-200	Recuento	2.533	6	1	1	3	5	21
	% de Categ.	19,66	2,87	5,88	2,44	2,78	1,51	6,65
200-500	Recuento	2.189	23	3	4	8	24	48
	% de Categ.	16,99	11,00	17,65	9,76	7,41	7,23	15,19
500-700	Recuento	2.508	80	7	14	76	155	76
	% de Categ.	19,46	38,28	41,18	34,15	70,37	46,69	24,05
700-1500	Recuento	2.178	51	5	6	13	74	65
	% de Categ.	16,90	24,40	29,41	14,63	12,04	22,29	20,57
1500 +	Recuento	1.480	39	1	15	6	62	95
	% de Categ.	11,49	18,66	5,88	36,59	5,56	18,67	30,06
Total	Recuento	12.886	209	17	41	108	332	316
	% de Categ.	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.58: Coste total de siniestros según categoría

En función del uso, destacan los elevados costes correspondientes al transporte general de viajeros, con más de 9.000 €, y el uso *retirada de permiso de conducir* con siniestros costosos también (Tabla 4.60).

Si nos centramos en el coste total de los siniestros por persona y analizamos

		Coste total medio
Categoría	turismo-furgoneta	1.190,85
	camión	2.081,22
	remolque	726,41
	autocar	3.273,21
	tractor y maquinaria agrícola	1.311,76
	vehículo industrial	1.718,40
	ciclomotor-moto	1.856,96
	Total	1.238,47

Tabla 4.59: Coste total medio por persona de los siniestros según categoría

		Coste total medio
Uso	particular	1.220,00
	servicio público	2.197,10
	alquiler	854,50
	escuela de conductores	820,44
	compra-venta	2.647,20
	industrial	1.096,42
	transporte de mercancías	1.156,76
	transporte escolar	2.292,65
	transporte general de viajeros	9.070,29
	agrícola	1.337,69
	retirada de permiso de conducir	3.689,56
	Total	1.238,47

Tabla 4.60: Coste total medio por persona de los siniestros según uso

lo que ocurre en los distintos tramos de edad que estamos considerando, destaca fundamentalmente que entre los menores de 25 años hay una mayor proporción de costes elevados que compensa la menor de costes bajos. Según vemos en la Tabla 4.61, cerca de la cuarta parte de los asegurados de dicha edad superan los 1.500€ en el total de sus siniestros frente al 12 % global. En el otro extremo, menos del 20 % de los asegurados del primer tramo de edad no alcanza la cantidad de 200 €, cuando, globalmente, este porcentaje se sitúa en más del 33 %. La media del coste total disminuye conforme va avanzando la edad, aunque no hay mucha diferencia entre el tramo de 25 a 30 años y de 30 años en adelante, con valores de 1.300,65 € en el primer caso y 1.214,67 en el segundo. Es mucho más elevado el coste total

			Tramos de edad			
			14-24	25-30	30 +	Total
Coste total	0-70	Recuento	19	120	1.895	2.034
		% de Tramos de edad	6,09	13,27	14,93	14,62
	70-200	Recuento	40	190	2.340	2.570
		% de Tramos de edad	12,82	21,02	18,44	18,48
	200-500	Recuento	51	149	2.099	2.299
		% de Tramos de edad	16,35	16,48	16,54	16,53
	500-700	Recuento	74	148	2.694	2.916
		% de Tramos de edad	23,72	16,37	21,22	20,96
	700-1500	Recuento	54	171	2.167	2.392
		% de Tramos de edad	17,31	18,92	17,07	17,20
	1500 +	Recuento	74	126	1.498	1.698
		% de Tramos de edad	23,72	13,94	11,80	12,21
Total		Recuento	312	904	12.693	13.909
		% de Tramos de edad	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.61: Coste total de siniestros por persona según tramos de edad

medio en el primer tramo: 2.026,54 €.

También se observa que el coste de los siniestros es mayor entre los asegurados que tienen menos de dos años de carnet. La media en este caso es de casi 2.500€ frente a los 1.226,47 € que se dan entre los conductores con al menos dos años de antigüedad en el carnet de conducir. Los siniestros de más del 26,5 % de ellos superan los 1.500 € de coste, duplicando el porcentaje de asegurados en general con dichos costes. Se produce a cambio un descenso en todos los intervalos tenidos en cuenta, en general de un 2 %, y más notable si hablamos de siniestros entre 70 y 200 € de coste: más del 6 % de disminución en este caso (Tabla 4.62).

Entre los conductores con experiencia de la categoría de turismos y furgonetas, es mucho menor el coste total por los siniestros sufridos que se alcanza como media. Esta cifra es de 1.177,27 € mientras que para los conductores con menos experiencia sube hasta 1.976,38 €. Lo más destacable, según la Tabla 4.63, es que entre estos últimos solo el 9,6 % tiene un coste total menor de 70 € frente al 15,6 % de los conductores con experiencia en la misma situación. Por contra, más del 16 % tiene costes superiores a 1.500 € por únicamente el 11 % en los conductores con más de 25 años y al menos 2 de carnet.

			Años de carnet		
			2 ó más	menos de 2	Total
Coste total	0-70	Recuento	2.019	15	2.034
		% de Años de carnet	14,65	11,36	14,62
	70-200	Recuento	2.554	16	2.570
		% de Años de carnet	18,54	12,12	18,48
	200-500	Recuento	2.279	20	2.299
		% de Años de carnet	16,54	15,15	16,53
	500-700	Recuento	2.890	26	2.916
		% de Años de carnet	20,98	19,70	20,96
	700-1.500	Recuento	2.372	20	2.392
		% de Años de carnet	17,22	15,15	17,20
	1.500 +	Recuento	1.663	35	1.698
		% de Años de carnet	12,07	26,52	12,21
Total		Recuento	13.777	132	13.909
		% de Años de carnet	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.62: Coste total de siniestros por persona según antigüedad en el carnet

			Experiencia		
			No	Sí	Total
Coste total	0-70	Recuento	21	1.977	1.998
		% de Experiencia	9,59	15,61	15,51
	70-200	Recuento	41	2.492	2.533
		% de Experiencia	18,72	19,67	19,66
	200-500	Recuento	42	2.147	2.189
		% de Experiencia	19,18	16,95	16,99
	500-700	Recuento	45	2.463	2.508
		% de Experiencia	20,55	19,44	19,46
	700-1.500	Recuento	34	2.144	2.178
		% de Experiencia	15,53	16,93	16,90
	1.500 +	Recuento	36	1.444	1.480
		% de Experiencia	16,44	11,40	11,49
Total		Recuento	219	12.667	12.886
		% de Experiencia	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.63: Coste total por tramos según experiencia: turismos y furgonetas

En lo que respecta al sexo (Tabla 4.64), hay una ligera variación entre hombres y mujeres en dos intervalos de costes. En los menores de 200 € encontramos aproximadamente el 18 % de las mujeres y solo el 14 % de los hombres. En la cuarta zona de más coste (entre 500 y 700 €) abundan más los hombres: casi el 22 % de ellos tienen siniestros con estos costes mientras que las mujeres cuyos siniestros tienen ese valor apenas superan el 18 %. Hemos calculado también el coste total medio para ambos sexos, obteniéndose, en consonancia con los resultados anteriores, que es bastante menor entre las mujeres que entre los hombres. De 957,10 € para las primeras se pasa a 1.295,64 para los segundos.

			Sexo		
			mujer	hombre	Total
Coste total	0-70	Recuento	424	1.610	2.034
		% de Sexo	18,05	13,93	14,62
	70-200	Recuento	460	2.110	2.570
		% de Sexo	19,58	18,25	18,48
	200-500	Recuento	389	1.910	2.299
		% de Sexo	16,56	16,52	16,53
	500-700	Recuento	424	2.492	2.916
		% de Sexo	18,05	21,56	20,96
	700-1.500	Recuento	401	1.991	2.392
		% de Sexo	17,07	17,22	17,20
	1.500 +	Recuento	251	1.447	1.698
		% de Sexo	10,69	12,52	12,21
Total		Recuento	2.349	11.560	13.909
		% de Sexo	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.64: Coste total de siniestros por persona según sexo

Si distinguimos la zona en la que se formaliza la póliza, podemos deducir según muestra la Tabla 4.65 que la Zona 2 es la que tiene una menor proporción de costes inferiores a 200 €: solo el 29 % frente al 35 % o más en las otras dos zonas. En lo que se refiere a costes intermedios (entre 200 y 700 €) las tres zonas se comportan prácticamente igual, siendo algo más de la tercera parte de las pólizas en cada caso las que dan lugar a siniestros de estas cuantías. Por último, si nos fijamos en los siniestros más costosos, estos se dan en la Zona 2 en un 32 % de los casos, mientras que en la Zona 1 apenas superan el 26 %. La Zona 3 está en un término medio entre ambas, con un 29 % aproximadamente. Aunque

			Zona			
			1	2	3	Total
Coste total	0-70	Recuento	680	641	713	2.034
		% de Zona	16,86	12,44	15,09	14,62
	70-200	Recuento	800	846	924	2.570
		% de Zona	19,84	16,42	19,56	18,48
	200-500	Recuento	566	827	906	2.299
		% de Zona	14,03	16,05	19,18	16,53
	500-700	Recuento	917	1189	810	2.916
		% de Zona	22,74	23,08	17,15	20,96
	700-1500	Recuento	696	862	834	2.392
		% de Zona	17,26	16,73	17,65	17,20
	1500 +	Recuento	374	787	537	1.698
		% de Zona	9,27	15,28	11,37	12,21
Total		Recuento	4.033	5.152	4.724	13.909
		% de Zona	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.65: Coste total de siniestros por persona según zona

no se puede decir que existan grandes diferencias entre zonas, tampoco se puede deducir que la zona de tarifas más elevadas se corresponda con aquélla en la que los costes totales de los siniestros son más elevados. Es más, en términos medios, esto no se verifica. Es en cambio la Zona 2 la que tiene un coste total medio más elevado (1.436,78 €) estando las otras dos zonas separadas únicamente por 100€ (la media es de 1.069,43 en la Zona 1 y 1.166,50 en la Zona 3).

En lo que se refiere al coste total de los siniestros en función de la prima pagada por el asegurado, lo más destacable es quizá que quienes pagan las primas más económicas se sitúan en el intervalo de costes de 500 a 700 € en más del 45 %, más del doble de lo que ocurre globalmente (21 %). Esta cifra no repercute en un único intervalo, sino que en todos prácticamente se produce un descenso, aunque algo más acusado en los siniestros de entre 70 y 200 €, donde se pasa de más del 18 % global a menos del 8 % para las primas más bajas. También hay que resaltar lo que ocurre con las primas más elevadas. Casi el 23 % de ellas sufren siniestros cuyos costes superan los 1.500 €. En este caso se reducen considerablemente las pólizas con costes de siniestros más bajos. Solo el 19 % frente al 33 % que se tenía en el conjunto de todas las pólizas. Por lo demás, no existen comportamientos demasiado dispares en los tramos de primas con respecto a la distribución del coste ya comentada, según queda reflejado en la Tabla 4.66. En cuanto al coste total medio según la cuantía de la prima pagada, lo hemos resumido en la Tabla 4.67. Lo más llamativo es la diferencia entre los dos últimos tramos considerados para la prima. Son 470 € más costosos los siniestros totales sufridos por quienes pagan primas superiores a 750 € que por aquéllos que gastan entre 500 y 750 € en su póliza de seguros.

Coste Total		Prima por intervalos 0-200	200-300	300-400	400-500	500-750	750 +
0-70	Recuento	29	389	623	435	327	231
	% de Prima	13,30	19,01	17,30	16,06	12,31	8,63
70-200	Recuento	17	438	781	535	518	281
	% de Prima	7,80	21,41	21,69	19,75	19,50	10,49
200-500	Recuento	24	348	617	455	439	416
	% de Prima	11,01	17,01	17,13	16,80	16,52	15,53
500-700	Recuento	100	413	695	550	581	577
	% de Prima	45,87	20,19	19,30	20,30	21,87	21,55
700-1.500	Recuento	32	287	571	468	468	566
	% de Prima	14,68	14,03	15,86	17,28	17,61	21,14
1.500 +	Recuento	16	171	314	266	324	607
	% de Prima	7,34	8,36	8,72	9,82	12,19	22,67
Total	Recuento	218	2.046	3.601	2.709	2.657	2.678
	% de Prima	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.66: Coste total de siniestros por persona según la prima

		Coste total medio
Prima por tramos	0-200	1.032,94
	200-300	989,43
	300-400	1.111,79
	400-500	1.111,07
	500-750	1.256,68
	750 +	1.726,60
	Total	1.238,47

Tabla 4.67: Coste total medio por persona de los siniestros según prima

En función del grado de cobertura, podemos observar (según indica la Tabla 4.68) que lo más llamativo es el elevado coste que se observa para los siniestros en las pólizas que tienen contratada la cobertura más alta. Para cerca del 50 %, el

Coste total		Grado de cobertura			
		mínima	media-baja	media-alta	alta
0-70	Recuento	825	735	300	174
	% de Grado cobertura	15,93	14,98	14,58	9,85
70-200	Recuento	965	983	403	219
	% de Grado cobertura	18,64	20,03	19,59	12,39
200-500	Recuento	639	938	427	295
	% de Grado cobertura	12,34	19,12	20,76	16,69
500-700	Recuento	1310	978	383	245
	% de Grado cobertura	25,30	19,93	18,62	13,87
700-1.500	Recuento	872	778	350	392
	% de Grado cobertura	16,84	15,85	17,02	22,18
1.500 +	Recuento	567	495	194	442
	% de Grado cobertura	10,95	10,09	9,43	25,01
Total	Recuento	5178	4907	2057	1767
	% de Grado cobertura	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.68: Coste de siniestros por persona según grado de cobertura

		Coste total medio
Grado de cobertura	cobertura mínima	1.189,01
	cobertura medio-baja	1.219,30
	cobertura medio-alta	1.095,57
	cobertura alta	1.602,95
	Total	1.238,47

Tabla 4.69: Coste total medio por persona de los siniestros según grado de cobertura

coste de los siniestros sufridos supera los 700 €, cuando en general este porcentaje era escasamente el 30 %. Los siniestros de menos de 200 € se corresponden con algo más del 30 % globalmente, mientras que para quienes tienen cobertura alta apenas supera el 20 %.

No es cierto que el coste total de los siniestros aumente a medida que lo hace el grado de cobertura elegido. En media, la cobertura medio-alta está por debajo, en lo que al coste total se refiere, de la cobertura mínima y también de la medio-baja. Sí es cierto que la cobertura alta es la que lleva asociado un mayor coste total medio de siniestros, alrededor de 1.600 €, bastante por encima de la media global y de los demás grados de cobertura (Tabla 4.69).

Si, en lugar de considerar el coste total que suponen los siniestros sufridos por cada asegurado, nos fijamos en el coste medio por siniestro y por asegurado, los resultados que se obtienen son cualitativamente similares a los que acabamos de ver en las Tablas 4.61 a 4.68 con relación a los tramos de edad, antigüedad en el carnet de conducir, sexo, zona, categoría del vehículo, prima y grado de cobertura, aunque los porcentajes de los que hemos estado hablando variarán en algunos casos.

Analizaremos por último el coste según el número de siniestros que ha sufrido el asegurado. Si consideramos el coste total de los siniestros, está claro que cuanto mayor sea este número más alto será el coste total asociado. En media se llega a los 3.425,88 € de coste para quienes han sufrido 3 ó más siniestros, casi el doble de la cifra obtenida para los que han tenido 2 accidentes (1.818,53). Los que solo han sufrido 1 siniestro tienen asociado un coste medio de 791,89 € únicamente. Se observa también que aproximadamente el 58 % de los asegurados que han tenido únicamente un siniestro tienen costes asociados inferiores a los 500 € y solo un 16 % supera los 700 € de coste. Entre las pólizas con 2 siniestros, sin embargo, este porcentaje asciende al 54 %, teniendo más del 20 % del total siniestros por más de 1.500 €. En cuanto a los que más siniestros sufren, casi el 75 % conlleva un coste total mayor de 700 € y, lo que es más significativo aún, un 42,6 % supera los 1.500 € de coste.

Pero, como hemos indicado, entra dentro de la lógica que a medida que crece el número de siniestros aumente también el coste total de los mismos. Este análisis resulta, por tanto, más interesante si lo hacemos con el coste unitario por siniestro en lugar de con el coste total. Así lo mostramos en la Tabla 4.70.

El coste del siniestro para los asegurados que únicamente han sufrido uno está repartido bastante uniformemente entre los intervalos que se han tenido en cuenta. Es menor de 70 € en el 20 % de los casos y para ese mismo porcentaje el siniestro ha tenido un coste entre 70 y 200 €; sube al 25 % si consideramos el tramo de 500 a 700 € de coste y se sitúa sobre el 17 % en los dos casos restantes (entre 200 y 500 € y más de 700 € por siniestro). Para los que sufren más de un siniestro, resulta además que sus siniestros son más caros. Tienen un coste inferior a 200 € solo para algo menos del 30 % de los que han tenido dos siniestros y para el 25 % de los que han sufrido tres o más, cuando era el coste medio para más del 40 % de los asegurados con un siniestro. Por contra, el 37,6 % de los que más

			Número de siniestros			
			1	2	3 ó más	Total
Coste medio	0-70	Recuento	1.986	362	116	2.464
		% de Número de siniestros	20,27	12,60	9,37	17,72
	70-200	Recuento	1.996	468	196	2.660
		% de Número de siniestros	20,37	16,28	15,83	19,12
	200-500	Recuento	1.713	955	466	3.134
		% de Número de siniestros	17,48	33,23	37,64	22,53
	500-700	Recuento	2.495	448	156	3.099
		% de Número de siniestros	25,47	15,59	12,60	22,28
	700 +	Recuento	1.607	641	304	2.552
		% de Número de siniestros	16,40	22,30	24,56	18,35
Total		Recuento	9.797	2.874	1.238	13.909
		% de Número de siniestros	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla 4.70: Coste medio de siniestros según el número de siniestros

siniestros sufren se sitúan en el tramo de coste de 200 a 500 € y también el 33 % de los que han tenido dos siniestros (recordemos que el coste era de esa cuantía solo para el 17,5 % de los asegurados con un siniestro). Los siniestros de más de 500 € de coste se reparten de forma muy parecida en los tres grupos considerados en función del número de siniestros sufridos: entre el 42 % de los que solo han tenido un siniestro al 37 % de los que han sufrido tres o más. Sí se observa una mayor proporción de los asegurados con más siniestros con coste medio asociado de más de 700 €: casi el 25 %, frente al 16,5 % de los que solo tiene un siniestro, superan ese coste medio. Además, resulta que para los asegurados con un único siniestro su coste medio es de 791,89 €, siendo los siniestros más costosos cuando se tiene más de uno. Los que han sufrido dos llegan a 909,27 € de coste medio por siniestro y los que tienen 3 ó más casi a 1.000 € por siniestro de media.

Resumiendo el estudio descriptivo llevado a cabo, podemos destacar que el perfil que predomina entre los asegurados es el de hombre con más de 30 años y más de 2 con carnet de conducir, con turismo o furgoneta destinado a uso particular, que paga una media de entre 400 y 500 € a cambio de cobertura baja o medio-baja y que sufre algún siniestro aproximadamente en el 25 % de los casos, suponiéndole un coste asociado de unos 1.200 €. Pero no podemos olvidarnos de quienes no tienen este perfil, ya que los comportamientos diferenciados son justamente los que introducen incertidumbre en cualquier actividad y, en particular, en el seguro del automóvil.

Una vez hecho el análisis descriptivo y conocida más en profundidad la población, pasamos en el apartado siguiente a determinar cuáles de todas las variables definidas están directamente relacionadas con el número de siniestros sufridos, así como las diferencias estadísticamente significativas entre las que las presenten.

4.3. Estimación del número de siniestros

Pretendemos estimar el número de siniestros que sufre un asegurado en función de las variables que hemos descrito en la primera parte de este capítulo, determinando cuáles son las más relevantes y en qué medida. Nos interesa especialmente ver si se cumple la predicción teórica de los mercados con información asimétrica, es decir, comprobar si el número de siniestros está correlacionado positivamente con el grado de cobertura elegido por el asegurado. Según la terminología usada en el capítulo anterior, vamos a determinar si los individuos de alto riesgo son los que eligen coberturas más elevadas. Los análisis descriptivos así parecen atestiguarlo, así como la relación de la siniestralidad con otras variables. Abordamos ahora esta cuestión a través de los modelos econométricos apropiados, sin limitarnos al análisis de la influencia del grado de cobertura, sino extendiendo el estudio a todas aquellas variables que resulten ser significativas en la estimación del número de siniestros.

La variable que tomaremos como dependiente, NUMSIN, es una variable discreta con valores no negativos. Para variables de este tipo los modelos más adecuados son los de tipo recuento o *count data*. Estos modelos se suelen emplear para variables que representan un número de sucesos, en nuestro caso el número de siniestros sufridos por los asegurados entre el 16 de junio de 2002 y el 15 de junio de 2003.

El modelo de *Poisson* y el *binomial negativo* son los más utilizados en estas situaciones. A continuación, los describiremos brevemente para el caso en que una variable aleatoria discreta Y se estima para cada uno de los individuos de la muestra ($i = 1, 2, \cdots, N$) en función de K variables explicativas (incluido el término independiente) que denominaremos X_k, $k = 1, 2, \cdots, K$, a través de una función:

$$\hat{Y}_i = F(X_i\hat{\beta})$$

donde X_i representa el vector de regresores de Y_i y $\hat{\beta}$ es el vector de parámetros que se desean estimar.

4.3.1. Modelo de Poisson

Este modelo estima la probabilidad de que la variable aleatoria Y_i tome el valor y_i de modo que:

$$P(Y_i = y_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \cdot \lambda_i^{y_i}}{y_i!},$$

donde $y_i = 0, 1, 2, \ldots$ para los i individuos y λ, que recibe el nombre de *intensidad del proceso*, es para cada individuo i: $\lambda_i = E\left[Y_i|X_i\right] = exp(X_i\beta)$.

El supuesto implícito de igualdad entre la media y la varianza de la variable Y_i es la característica principal del modelo de *Poisson*. Es un supuesto fuerte y supone una restricción para la aplicación del método, pero en caso de que se cumpla permite la estimación del modelo por el método de máxima verosimilitud[35].

El estimador de máxima verosimilitud para el vector de parámetros β se obtiene maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud:

$$ln(L) = \sum_{i=1}^{N} y_i ln\lambda_i - \lambda_i - ln(y_i!).$$

Si la distribución condicional de Y es Poisson, el estimador de máxima verosimilitud de β es consistente, eficiente y sigue una distribución asintóticamente normal. Además su matriz de varianzas viene estimada por:

$$var(\hat{\beta}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\hat{\lambda}_i}{\partial\beta} \cdot \frac{\partial\hat{\lambda}_i}{\partial\beta'}}{\hat{\lambda}} \right)^{-1}.$$

[35]También se puede estimar el modelo por el método generalizado de los momentos.

A diferencia de lo que ocurre en un modelo lineal de regresión, en el modelo de *Poisson* los parámetros estimados no representan el efecto marginal de las variaciones de las variables explicativas sobre la variable dependiente. Sí podemos conocer directamente a través del signo y de la magnitud de dichos parámetros el sentido y la importancia de esas variaciones.

Cuando la variable explicativa X_k es cuantitativa, su efecto marginal sobre la variable endógena Y_i puede medirse a través de la expresión:

$$\frac{\partial E\left[Y_i|X_{ki}\right]}{\partial X_{ki}} = \beta_k \cdot exp(X_i\beta),$$

mientras que si se trata de una variable ficticia, su efecto marginal es:

$$E\left[Y_i|X_{ki}=1\right] - E\left[Y_i|X_{ki}=0\right] = exp\left[X_i\beta|X_{ki}=1\right] - exp\left[X_i\beta|X_{ki}=0\right].$$

Los efectos marginales de cada variable dependen del valor de todas ellas, por lo que en la práctica, para que el efecto marginal resultante sea representativo, se suele evaluar en el valor medio de los regresores.

El principal inconveniente que presenta este modelo es el incumplimiento del supuesto de equi-dispersión que realiza. Es muy normal que se dé dicho incumplimiento en el tipo de variable que estamos considerando; en concreto, suele tenerse sobre-dispersión, es decir, el valor de la media de la variable endógena es menor que el de su varianza. El elevado número de valores cero que presentan los datos suele ser motivo de ello. Este hecho provoca sesgos similares al problema de la heteroscedasticidad en el caso del modelo lineal general, por lo que es preciso comprobar si dicha hipótesis es aceptable. Si la hipótesis nula se rechaza, entonces es preciso emplear una distribución de probabilidad más flexible. En este caso, se recurre habitualmente a la binomial negativa que relaja la restricción de equi-dispersión del modelo de *Poisson*.

4.3.2. Modelo binomial negativo

Una alternativa común al modelo de *Poisson* consiste en estimar los parámetros del modelo usando máxima verosimilitud de una especificación binomial negativa. Con este modelo se pueden abordar situaciones de recuento de datos cuando éstos muestran una gran heterogeneidad, pudiendo presentar, en particular, un elevado número de ceros, como es el caso de la variable NUMSIN que queremos estimar.

Una posible explicación de que exista sobre-dispersión y exceso de valores cero en determinadas variables dependientes es lo que Mullahy (1997), en el ámbito de la Economía de la Salud, denomina *heterogeneidad inobservable.* La heterogeneidad adicional entre los individuos, que no reflejan las diferencias en las variables explicativas, conducen a una mayor dispersión en la distribución. El modelo *binomial negativo* contempla esta heterogeneidad inobservable y por ello se convierte en el más apropiado para estos casos.

Se supone, en este modelo, que la perturbación de cada observación sigue una distribución gamma, de modo que se puede expresar la probabilidad de la siguiente forma:

$$P(Y_i = y_i) = \frac{\Gamma(y_i + \nu_i)}{\Gamma(y_i + 1) \cdot \Gamma(\nu_i)} \cdot \left(\frac{\nu_i}{\nu_i + \lambda_i}\right)^{\nu_i} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\nu_i + \lambda_i}\right)^{y_i} \tag{4.1}$$

donde $\Gamma(.)$ es la función de distribución gamma y $\nu_i = \frac{1}{\alpha}$, con $\alpha > 0$, es el llamado parámetro de precisión[36].

Con respecto al comportamiento de la media y de la varianza de la variable dependiente, observamos como el modelo *binomial negativo* lleva implícito el supuesto de que la varianza es una función cuadrática de la media. En efecto,

$$E(Y) = \lambda$$

y

$$Var(Y) = \lambda + \alpha\lambda^2.$$

El logaritmo de la función de verosimilitud para la distribución binomial negativa viene dado por:

$$ln(L) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i ln(\lambda_i \alpha) - (y_i + \alpha) ln(1 + \lambda_i \alpha) + ln\Gamma(y_i + \frac{1}{\alpha}) - ln(y_i!) - ln\Gamma(\frac{1}{\alpha}) \right),$$

donde, recordemos, $\lambda_i = exp(X_i\beta)$.

[36]Ver Jones (2001).

Según la terminología de Cameron y Trivedi (1986) este modelo es el *binomial negativo II* y es un caso particular del modelo binomial más general que se obtiene tomando, en la Expresión 4.1, $\nu_i = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot (exp(X_i\beta))^k$, siendo k una constante. El modelo que estamos considerando se corresponde con el valor $k = 0$. Para $k = 1$, se tiene el modelo *binomial negativo I*, en el que se supone proporcionalidad entre la media y la varianza de Y.

Teniendo en cuenta que α es una medida del grado de sobre-dispersión que presentan los datos, es interesante el detalle adicional de que cuando $\alpha = 0$, entonces se obtiene el modelo de *Poisson*. De esta forma, contrastando la significatividad individual de este parámetro a través del estadístico *t-Student* habitual, se puede contrastar la validez del modelo de *Poisson*, o bien tomar como alternativa el modelo *binomial negativo*.

Tanto en el modelo de *Poisson* como en el *binomial negativo* los valores de la variable dependiente se tratan del mismo modo independientemente de que sean nulos o estrictamente positivos. Algunos desarrollos más recientes de los modelos *count data* se basan en la idea de que hay algo especial que implica una necesaria distinción de los valores nulos. Se puede decir que, de algún modo, subyace una decisión inicial de participación o no, que se refleja en un valor positivo o nulo, respectivamente, de la variable endógena.

Uno de los enfoques según los cuales se aborda esta nueva perspectiva es el de los modelos "*inflados de ceros*". Se trata de modelos mixtos que, partiendo de un modelo *count data* estándar (el *binomial negativo* generalmente), asignan una ponderación adicional a la probabilidad de observar un valor nulo. Esta probabilidad puede interpretarse como un mecanismo para establecer una distinción cualitativa entre no participantes (a los que se les asigna una probabilidad q) y participantes (con probabilidad 1-q).

Otro enfoque es el de los modelos de *dos etapas*. En éstos, se supone que la decisión de participación del individuo y los valores positivos de los datos cuyo recuento se estudia, son generados por dos funciones de probabilidad separadas. Hay una primera etapa en la que se estudia la decisión entre las dos opciones; esto se hace mediante un modelo de elección discreta binaria (logit o probit, generalmente). La segunda etapa es de recuento de datos propiamente dicha, a través de un modelo de *Poisson* o *binomial negativo* (este último en la mayoría de los casos), donde se toma la submuestra de participantes (individuos con valores no nulos), con lo que se convierte en un modelo de recuento de datos truncado en el cero.

No hemos encontrado aplicaciones de estos modelos en el seguro del automóvil. Sin embargo, los modelos binomiales negativos inflados de cero (*zero inflated NegBin* o ZINegbin) son los que parecen más apropiados para la estimación que queremos realizar. El valor cero de la variable que tomamos como dependiente representa a los conductores asegurados que no sufren ningún siniestro. Este grupo muestra por lo general un comportamiento más cuidadoso que el resto, lo que nos lleva a distinguirlos a través del valor nulo de la variable a estimar. Esto, junto con el alto porcentaje de ceros que presenta, como veremos, nos lleva a la aplicación de este modelo. Su distribución de probabilidades se expresa de la forma siguiente:

$$P(Y_i = 0) = q + (1 - q)P_{BN}(Y_i = 0)$$
$$P(Y_i = j > 0) = (1 - q)P_{BN}(Y_i = j)$$

siendo $P_{BN}(Y_i = y)$, con $y \geq 0$, la probabilidad según el modelo *binomial negativo* dada en la Ecuación 4.1.

4.3.3. Estimación del modelo y significatividad

En la estimación del modelo se utiliza el método de máxima verosimilitud, que proporciona estimadores consistentes y asintóticamente eficientes.

La significatividad de cada variable explicativa se contrasta a través del estadístico z, que sigue una distribución normal tipificada, de modo que:

$$P(-N_{\alpha/2} < z < N_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

siendo $z = \dfrac{\hat{\beta}_k}{\hat{S}_{\hat{\beta}_k}}$ y α el nivel de significatividad elegido.

4.3.4. Aplicación del modelo y resultados

Vamos a estimar el número de siniestros que sufren los vehículos asegurados en función de las demás variables. A través del análisis descriptivo que hemos desarrollado en el Apartado 4.2.2, ya hemos puesto en evidencia algunas de las características de la variable NUMSIN en nuestra población. Veremos cuales de las variables tienen un comportamiento estadísticamente significativo para explicar el número de siniestros. Nos interesa especialmente ver si el disfrutar de un grado de cobertura más elevado se traduce en un aumento del número de siniestros sufridos. En caso afirmativo, quedaría ratificada la previsión de que en un mercado de seguros con información asimétrica los individuos con un alto riesgo de sufrir accidentes son los que eligen las coberturas más altas.

Para hacer la estimación, tomaremos por motivos computacionales una muestra de 15.000 asegurados en lugar de la población en su totalidad, número más que suficiente para que la muestra sea representativa. Para la modelización hemos utilizado el paquete *Limdep v. 7.0*.

El modelo que estima la probabilidad del número de siniestros se plantea del modo:

$$NUMSIN = F(X\beta) + u$$

donde X es el vector de variables explicativas (incluido el término independiente) y β el vector de coeficientes a estimar.

Puesto que la variable dependiente NUMSIN toma valores discretos, lo más apropiado según hemos visto es utilizar un modelo de tipo recuento de datos. Emplearemos en primer lugar un modelo Poisson.

Hemos incluido en principio todas las variables como posibles variables explicativas, a excepción de la prima teórica y las bonificaciones, que ya están implícitamente en la prima real, ni tampoco las relacionadas con el coste de los siniestros, ya que es algo que viene *a posteriori* y como consecuencia de los siniestros, por lo que no es lógico determinar el número de éstos en función de ello. En el caso de las variables categóricas, hemos utilizado las variables ficticias asociadas a cada una de las modalidades, a excepción de la categoría base en cada caso.[37] Tras realizar una serie de simulaciones en la que se han ido eliminando sucesivamente las variables menos significativas, se ha llegado finalmente al resultado reflejado en la Tabla 4.71.

A la vista de dicha tabla, podemos sacar una serie de conclusiones. En primer

[37] Se ha tomado la primera categoría como base para cada variable categórica, según la lista de variables dada en la Tabla 4.5

Poisson Regression	
Maximum Likelihood Estimates	
Dependent variable	NUMSIN
Number of observations	15000
Iterations completed	10
Log likelihood function	-10973.33
Restricted log likelihood	-11862.83
Ch-squared	1779.015
Degrees of freedom	17
Significance level	0.0000000

Variable	Coefficient	Std. Error	b/St.Er.	$P[\|Z\| > z]$
Constant	-2.33127436	0.17527834	-13.300	0.0000
CAMION	-0.49949408	0.13726493	-3.639	0.0003
REMOLQUE	-1.80638561	0.45029189	-4.012	0.0001
CICL_MOT	-1.19935614	0.10862541	-11.041	0.0000
USO_INDU	-0.83617377	0.20595820	-4.060	0.0000
USO_TMER	-0.10496445	0.05219151	-2.011	0.0443
USO_TESC	0.60669179	0.22316673	2.719	0.0066
USO_AGRI	-1.24551861	0.20275007	-6.143	0.0000
EDAD	-0.00267000	0.00116218	-2.297	0.0216
ANTIG_2A	0.29777208	0.14289907	2.084	0.0372
P200_300	0.98445545	0.16797545	5.861	0.0000
P300_400	1.25972240	0.16617719	7.581	0.0000
P400_500	1.43526194	0.16726723	8.581	0.0000
P500_750	1.65187678	0.16717462	9.881	0.0000
P750_	1.82762518	0.17037010	10.727	0.0000
GR_MBAJA	0.20942255	0.03613823	5.795	0.0000
GR_MALTA	0.19182233	0.04773765	4.018	0.0001
GR_ALTA	0.25043874	0.58894399	4.252	0.0000

Tabla 4.71: Estimación a través del modelo de *Poisson*

lugar, vemos que son 18 (incluyendo el término independiente) las variables que resultarían ser estadísticamente significativas con un nivel de confianza del 95 % al ser los *p-valores* correspondientes menores de 0,05. Las repasamos a continuación.

En lo que se refiere a la categoría del vehículo asegurado, observamos cómo únicamente los camiones, remolques, ciclomotores y motos tienen un comportamiento significativamente distinto al de la categoría base (turismos y furgonetas). En los tres casos la correlación con el número de siniestros es negativa. Es decir, puede afirmarse que las tres categorías mencionadas tienen menos siniestralidad que los turismos y furgonetas. Además, la magnitud del coeficiente estimado nos indica que los que más se diferencian de los turismos y furgonetas son los remolques, seguidos por los ciclomotores y motos y finalmente por los camiones.

En cuanto a los posibles usos de los vehículos, el industrial, transporte de mercancías, transporte escolar y el uso agrícola presentan diferencias estadísticamente significativas al nivel de confianza del 95 % con respecto al uso particular, el más frecuente y el que tomamos como base para la variable USO. Los vehículos destinados a transporte escolar sufren más siniestros que los de uso particular (el coeficiente es positivo). Por contra, el uso agrícola tiene menos siniestros que el uso base, al igual que el uso industrial, aunque el primero en bastante menor medida que este último. El transporte de mercancías, aunque también tiene un coeficiente negativo que indica menor siniestralidad que el uso particular, está más cerca de cero que los otros usos comentados, por lo que no se diferencia tanto de la categoría base como los usos agrícola e industrial. Es de todas las variables incluidas en el modelo la de menor significatividad (*p-valor*= 0,0443).

En lo que hace referencia a la edad, se observa una correlación negativa con el número de siniestros. A medida que aumenta la edad, decrece el número de siniestros estimados.

La antigüedad en el carnet de conducir no es una variable con un comportamiento estadísticamente significativo a la hora de estimar el número de siniestros. Sí es importante, sin embargo, el hecho de llevar más o menos de 2 años con carnet. En concreto, al ser la variable ANTIG_2A la que aparece en el modelo definitivo, podríamos concluir que aquellos asegurados que sacaron el permiso de conducir hace menos de 2 años tendrán más siniestros que la categoría base, en este caso los conductores con 2 o más años de experiencia.

La prima real pagada por el asegurado es otra de las variables explicativas estadísticamente significativa. En este caso, no la hemos introducido como tal, sino que hemos utilizado los tramos definidos en la variable PAREALAG a través de las variables artificiales asociadas a cada intervalo, a excepción del primero que se ha tomado como base. Podemos decir, con un nivel de confianza pleno (*p-valor*=0,0000) que con la cuantía de la prima aumenta el número de siniestros posibles. Los que pagan más de 750 € tienen casi el doble de siniestros más que los que pagan primas entre 200 y 300 €, con respecto a los que tienen las primas más bajas, de 200 € como máximo.

Por último, se deduce de la Tabla 4.71 que para la variable GR_COB se observan también diferencias estadísticamente significativas de aquellos conductores que contratan algo más que la cobertura mínima exigida, con respecto a los que solo tienen cubiertas las garantías básicas. En los tres casos, el coeficiente estimado es positivo, lo que indica que todos estos asegurados sufrirán más accidentes que los que solo eligen la cobertura obligatoria. Es cierto que aquellos que disfrutan de la cobertura más alta son también los que más siniestros van a sufrir, aunque entre las coberturas medias, el orden que parece natural se rompe. Es mayor el peso de la cobertura medio-baja que el de la medio-alta, aunque es cierto que presentan poca diferencia. El coeficiente de GR_MBAJA es 0,20942255 frente a 0,19182233 para GR_MALTA.

Sin embargo, la teoría nos dice que el modelo de *Poisson* no es el más adecuado en nuestro caso, puesto que no se cumple el supuesto de equi-dispersión. El número elevado de ceros que presenta la variable NUMSIN hace más aconsejable, como ya se comentó, el modelo *binomial negativo*. En efecto, la distribución del número de siniestros sufridos por los asegurados puede apreciarse en la Tabla 4.72. Más del 77 % de los asegurados que conforman la muestra no han sufrido ningún siniestro.

Más aún, si consideramos que existen diferencias cualitativas entre los asegurados que tienen siniestros y los que no, la teoría nos indica que el modelo que debemos utilizar para una correcta estimación es un modelo "inflado de ceros". Nos inclinamos por la idea de que, en general, los conductores que sufren siniestros suelen tener una actitud más descuidada en la conducción, en el mantenimiento

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	0	11.558	77,05	77,05
	1	2.365	15,77	92,82
	2	743	4,95	97,77
	3	223	1,49	99,26
	4	78	0,52	99,78
	5	19	0,13	99,91
	6	10	0,07	99,97
	7	4	0,03	100,00
	Total	15.000	100,00	

Tabla 4.72: Distribución de siniestros en la muestra

del vehículo y/o en la elección del lugar de aparcamiento, por ejemplo, actitud que conlleva una mayor siniestralidad. Parece entonces que estaría así justificada la elección de un modelo *binomial negativo "inflado de ceros"* para estimar la variable dependiente.

Hemos aplicado este modelo a las variables que han resultado ser significativas con el modelo de *Poisson*, para comprobar que, efectivamente, ésta no era la mejor estimación. La Tabla 4.73 refleja los resultados.

Efectivamente, vemos que las conclusiones son distintas. La variable USOTMER ya no es significativa con el modelo "inflado de ceros". Observamos un *p-valor* de 0,1358. Algo parecido ocurre con la variable EDAD, aunque en menor proporción. En este caso, el *p-valor* es solo de 0,0510.

El elevado nivel de significatividad del parámetro estimado Alpha es una señal de que debe rechazarse la hipótesis nula $H_0 : \alpha = 0$ y con ello el modelo de *Poisson*, como ya preveíamos. La significatividad de Tau, por contra, nos indica que se rechaza también el modelo *binomial negativo* al no poderse aceptar la hipótesis nula $H_0 : \tau = 0$.

Así pues, ninguna de las dos estimaciones hechas por el momento son válidas. La primera porque hemos visto, como ya nos indicaba la teoría, que no es el modelo adecuado por la sobredispersión y el número de ceros que presenta la variable NUMSIN y la segunda porque las variables con las que nos hemos quedado no son estadísticamente significativas.

Zero Altered Neg.Binomial Regression Model				
Logistic distribution used for splitting model.				
Comparison of estimated models				
	Pr[0 means]	Number of zeros		Log-likelihood
Poisson	0.77623	Act.= 11558 Prd.= 11643.5		-10973.32526
Neg. Bin.	0.80151	Act.= 11558 Prd.= 12022.6		-10565.10916
Z.I.Neg_Bin	0.80908	Act.= 11558 Prd.= 12136.3		-10601.49222
Note, the ZIP log-likelihood is not directly comparable.				
Variable	Coefficient	Std. Error	b/St.Er.	$P[\|Z\| > z]$
Constant	-1.28533597	0.17701911	-7.261	0.0000
CAMION	-0.37812913	0.13750326	-2.750	0.0060
REMOLQUE	-1.39316310	0.40636361	-3.428	0.0006
CICL_MOT	-0.97636709	0.12148197	-8.037	0.0000
USO_INDU	-0.64943971	0.23341384	-2.782	0.0054
USO_TMER	-0.08121900	0.05445395	-1.492	0.1358
USO_TESC	0.54228631	0.21119493	2.568	0.0102
USO_AGRI	-0.98503468	0.19344365	-5.092	0.0000
EDAD	-0.00231479	0.00118610	-1.952	0.0510
ANTIG_2A	0.34177260	0.15480468	2.208	0.0273
P200_300	0.75763203	0.15266490	4.963	0.0000
P300_400	0.98441864	0.15792662	6.233	0.0000
P400_500	1.11930165	0.16405893	6.823	0.0000
P500_750	1.29586131	0.16824272	7.702	0.0000
P750_	1.41502434	0.17399477	8.133	0.0000
GR_MBAJA	0.16029958	0.03653966	4.387	0.0000
GR_MALTA	0.16148205	0.04682778	3.448	0.0006
GR_ALTA	0.20924259	0.06200734	3.374	0.0007
Overdispersion parameter				
Alpha	0.05174836	0.02214580	2.337	0.0195
Zero inflation model				
Tau	-0.42814785	0.14389875	-2.975	0.0029

Tabla 4.73: Estimación a través del modelo *binomial negativo "inflado de ceros"* usando las variables significativas para el modelo de *Poisson*

Aplicamos entonces el modelo ZINegBin incluyendo de nuevo todas las posibles variables explicativas para, tras varias simulaciones, llegar al resultado que se ve en la Tabla 4.74.

Al hacer la estimación con el modelo *binomial negativo "inflado de ceros"*, *Limdep* también hace automáticamente las estimaciones según los modelos de *Poisson* y *binomial negativo.* Mostramos los resultados en las Tablas 4.75 y 4.76.

Las variables resultan ser significativas con los tres modelos y presentan coeficientes con los mismos signos y de magnitudes no muy disparejas. Sin embargo, podemos corroborar que el más adecuado es el modelo ZIP por la alta significatividad de los coeficientes Alpha y Tau que aparecen en la Tabla 4.74 y que permiten rechazar, respectivamente, las hipótesis nulas $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \tau = 0$, y por tanto los modelos de *Poisson* y *binomial negativo.* Los *p-valores* para dichos parámetros son 0,0188 y 0,0025, respectivamente.

Son así 17 (incluido el término independiente) las variables explicativas que se muestran significativas en la estimación del número de siniestros. Con respecto al modelo de *Poisson*, sale el uso *transporte de mercancías* (USO_TMER), como parecía que iba a ocurrir por la escasa significatividad que presentaba en la Tabla 4.73. No ocurre la mismo con la variable EDAD, que sigue siendo significativa, aunque es cierto que la que menos (*p-valor*=0,0472).

Los camiones, remolques y ciclomotores y motos tienen un comportamiento significativamente distinto al de los turismos y furgonetas. En todos los casos el número de siniestros que se estima es menor que en la categoría base. En el caso de remolques y ciclomotores y motos, este resultado concuerda con lo observado en el estudio descriptivo de los datos. Era mucho menor la proporción de siniestros en estas categorías que en la de turismos y furgonetas y además el número medio de siniestros entre quienes lo sufren también era bastante inferior. Sin embargo no ocurre lo mismo con los camiones. Mientras los datos parecen decir que su comportamiento es similar al de los turismos y furgonetas, la estimación que hemos realizado nos dice, con un *p-valor* de 0,0006, que es significativamente distinto. Otras categorías que el descriptivo anunciaba también diferentes no lo son desde el punto de vista estadístico.

En cuanto a los usos, el coeficiente asociado al uso agrícola (-0,96731043) indica un menor número de siniestros que en el uso base (el particular) y que en

Zero Altered Neg.Binomial Regression Model
Logistic distribution used for splitting model.
Comparison of estimated models

	Pr[0 means]	Number of zeros	Log-likelihood
Poisson	.77621	Act.= 11558 Prd.= 11643.2	-10975.40389
Neg. Bin.	.80153	Act.= 11558 Prd.= 12023.0	-10566.32717
Z.I.Neg_Bin	.80914	Act.= 11558 Prd.= 12137.1	-10602.78682

Note, the ZIP log-likelihood is not directly comparable.

Variable	Coefficient	Std. Error	b/St.Er.	P[$\|Z\| > z$]
Constant	-1.28440599	0.17655471	-7.275	0.0000
CAMION	-0.44590356	0.12996288	-3.431	0.0006
REMOLQUE	-1.44735847	0.40273782	-3.594	0.0003
CICL_MOT	-0.96146994	0.12097544	-7.948	0.0000
USO_INDU	-0.62899615	0.23138352	-2.718	0.0066
USO_TESC	0.54887892	0.21092137	2.602	0.0093
USO_AGRI	-0.96731043	0.19198964	-5.038	0.0000
EDAD	-0.00234278	0.00118028	-1.985	0.0472
ANTIG_2A	0.34755214	0.15420227	2.254	0.0242
P200_300	0.75314203	0.15211197	4.951	0.0000
P300_400	0.97798477	0.15747760	6.210	0.0000
P400_500	1.10971377	0.16368736	6.779	0.0000
P500_750	1.28133158	0.16793417	7.630	0.0000
P750_	1.40035194	0.17378581	8.058	0.0000
GR_MBAJA	0.16411052	0.03634207	4.516	0.0000
GR_MALTA	0.17065633	0.04626868	3.688	0.0002
GR_ALTA	0.21886105	0.06141913	3.563	0.0004
Overdispersion parameter				
Alpha	0.05179639	0.02204607	2.349	0.0188
Zero inflation model				
Tau	-0.44048315	0.14566054	-3.024	0.0025

Tabla 4.74: Estimación a través del modelo *binomial negativo "inflado de ceros"*

Poisson Regression	
Maximum Likelihood Estimates	
Dependent variable	NUMSIN
Number of observations	15000
Iterations completed	10
Log likelihood function	-10975.40
Restricted log likelihood	-11862.83
Chi-squared	1774.857
Degrees of freedom	16
Significance level	0.0000000

Variable	Coefficient	Std. Error	b/St.Er.	$P[\|Z\| > z]$
Constant	-2.34060977	0.17527994	-13.354	0.0000
CAMION	-0.58894789	0.12974745	-4.539	0.0000
REMOLQUE	-1.89047090	0.44831313	-4.217	0.0000
CICL_MOT	-1.18853031	0.10851798	-10.952	0.0000
USO_INDU	-0.81506881	0.20570185	-3.962	0.0001
USO_TESC	0.61890180	0.22308873	2.774	0.0055
USO_AGRI	-1.23265840	0.20270351	-6.081	0.0000
EDAD	-0.00271162	0.00116347	-2.331	0.0198
ANTIG_2A	0.30808374	0.14282029	2.157	0.0310
P200_300	0.98539014	0.16800910	5.865	0.0000
P300_400	1.25974477	0.16621220	7.579	0.0000
P400_500	1.43205081	0.16729387	8.560	0.0000
P500_750	1.64335308	0.16715904	9.831	0.0000
P750_	1.81826795	0.17032744	10.675	0.0000
GR_MBAJA	0.21430752	0.03605693	5.944	0.0000
GR_MALTA	0.20410888	0.04735630	4.310	0.0000
GR_ALTA	0.26487302	0.05841112	4.535	0.0000

Tabla 4.75: Estimación a través del modelo de *Poisson* usando las variables significativas para el *binomial negativo "inflado de ceros"*

Negative Binomial Regression	
Maximum Likelihood Estimates	
Dependent variable	NUMSIN
Number of observations	15000
Iterations completed	22
Log likelihood function	-10566.33
Restricted log likelihood	-10975.40
Chi-squared	818.1534
Degrees of freedom	17
Significance level	0.0000000

Variable	Coefficient	Std. Error	b/St.Er.	$P[\|Z\| > z]$
Constant	-2.31584338	0.17992026	-12.871	0.0000
CAMION	-0.57777101	0.15795218	-3.658	0.0003
REMOLQUE	-1.87356260	0.48327542	-3.877	0.0001
CICL_MOT	-1.21862752	0.11665724	-10.446	0.0000
USO_INDU	-0.79716627	0.26784411	-2.976	0.0029
USO_TESC	0.60696965	0.34099012	1.780	0.0751
USO_AGRI	-1.24220453	0.20898600	-5.944	0.0000
EDAD	-0.00298426	0.00145403	-2.052	0.0401
ANTIG_2A	0.47929029	0.19904325	2.408	0.0160
P200_300	0.97043487	0.16780202	5.783	0.0000
P300_400	1.24825551	0.16598139	7.520	0.0000
P400_500	1.41927613	0.16891995	8.402	0.0000
P500_750	1.63023541	0.16832853	9.685	0.0000
P750_	1.79738711	0.17498359	10.272	0.0000
GR_MBAJA	0.21479447	0.04303912	4.991	0.0000
GR_MALTA	0.20570897	0.05736423	3.586	0.0003
GR_ALTA	0.27503233	0.07761573	3.544	0.0004
Overdispersion parameter for negative binomial model				
Alpha	1.18724261	0.06562621	18.091	0.0000

Tabla 4.76: Estimación a través del *binomial negativo* usando las variables significativas para el *binomial negativo "inflado de ceros"*

el uso industrial donde se observa un coeficiente también negativo pero menor en valor absoluto: -0,62899615. Lo relativo al uso agrícola ya se esperaba tras el descriptivo. Se vio que los vehículos con este uso sufrían muy pocos siniestros frente al uso particular y una media más baja también. El uso de transporte escolar es el único con un comportamiento opuesto. El modelo indica que hay una mayor siniestralidad en este uso que en el base.

La edad, aunque es la variable que presenta una menor significatividad (*p-valor*=0,0472) vuelve a ser beneficiosa en el sentido de que es menor el número de siniestros a medida que aquélla avanza, como indica el coeficiente negativo que muestra la Tabla 4.74.

También se atisbaba ya en el análisis descriptivo que la antigüedad en el permiso de conducir podía estar fuertemente relacionado con el número de siniestros sufridos. Se observa ahora que la variable ANTIG_2A es altamente significativa (*p-valor*=0,0242). Los asegurados con menos de 2 años de carnet tendrán un comportamiento significativamente distinto del de los que llevan más años conduciendo, traducido en un mayor número de siniestros al ser el coeficiente en la estimación positivo.

En relación con la prima, se corrobora lo apuntado en el análisis de los datos. Vimos entonces que quiénes habían sufrido siniestros pagan, en término medio, primas más elevadas y también crecen éstas con el número de siniestros (Tabla 4.52). La Tabla 4.74 nos muestra ahora la plena significatividad de todas las categorías de la prima con coeficientes positivos y crecientes que nos indican un mayor número de siniestros a medida que aumenta la prima en relación con la categoría base: casi el doble para las primas superiores a 750 € con respecto a las primas entre 200 y 300 €; entre tramos consecutivos, el incremento se sitúa entre el 10 y el 20 %, aproximadamente.

Los coeficientes asociados a los grados de cobertura siguen ahora un orden creciente. Es decir, cuanto mayor es la cobertura elegida, mayor es la siniestralidad con respecto a la cobertura mínima. Este hecho no ocurre exactamente en el modelo de *Poisson* ni tampoco en el *binomial negativo*. En el modelo *"inflado de ceros"* las variables asociadas a los grados medio-bajo, medio-alto y alto aparecen con coeficientes estimados de 0,16411052, 0,17065633 y 0,21886105, respectivamente. Concluimos así que cada uno de estos grados tiene un comportamiento significativamente distinto al grado de cobertura bajo, que conlleva en todos los casos un mayor número de siniestros. Los grados intermedios están bastante parejos pero el coeficiente del grado alto de cobertura es más grande. Esto significa que, con respecto a la cobertura baja, la cobertura alta es la que presenta una mayor diferencia, un mayor número de siniestros en nuestro caso.

Queda así comprobada el reflejo de una posible existencia de información asimétrica en nuestros datos. La predicción de que las coberturas más altas deben ser para quiénes tienen un tipo de riesgo más elevado queda comprobada con este estudio. Como ya se ha comentado, Chiappori y Salanié (1997, 2000) no encontraron en sus datos esta evidencia. Los asegurados cuyos datos conocían tenían todos menos de 3 años de carnet. Cohen (2002), que sí encuentra selección adversa en sus datos, hace el estudio también separando los asegurados según los años de carnet y llega a la misma conclusión que Chiappori y Salanié. Para los conductores con más experiencia sin embargo, sí se encuentra correlación positiva entre el número de siniestros y el grado de cobertura.

Puesto que disponíamos del dato referente a la antigüedad del carnet de conducir, hemos hecho simulaciones en ese sentido para ver si, efectivamente, el comportamiento para los conductores noveles era diferente, como mostraron Chiappori, Salanié y Cohen con sus datos. No hemos podido llegar sin embargo a ningún resultado significativo, debido al escaso número de asegurados con menos de 2 años de carnet en la población (solo 489) lo que no permite la aplicación de los modelos econométricos con la obtención de resultados aceptables.

Conclusiones

Dos eran los objetivos fundamentales marcados al inicio de este trabajo: uno hacía referencia a cuestiones teóricas acerca de la demanda de seguro y otro a características prácticas de la misma. Concretamente, los Capítulos 1 a 3 se han dedicado a la profundización en el análisis teórico de la demanda de seguro y el Capítulo 4 a una aplicación al ramo del automóvil en la que se han caracterizado los factores determinantes del número de siniestros sufridos por los conductores asegurados en la entidad considerada.

Repasaremos las principales conclusiones obtenidas en cada uno de los capítulos que componen el trabajo.

Un primer conjunto de resultados, los que se incluyen en el Capítulo 1, hace referencia al criterio de decisión que lleva a un asegurado a decantarse por un contrato de seguro u otro y a la caracterización de su actitud hacia el riesgo. Hemos hecho una recopilación de las características más interesantes acerca de ello.

Así, cuando las preferencias de un individuo pueden ordenarse a través de la evaluación de cierta función de utilidad, el enfoque tradicional de los estudios de este tipo lleva al asegurado a elegir aquella situación, de entre todas las posibles, que le aporte la utilidad más elevada. La póliza de seguros óptima se obtendrá, según este criterio, maximizando la utilidad esperada por el consumidor.

La función de utilidad que representa las preferencias del asegurado nos ha permitido definir y caracterizar su actitud hacia el riesgo. Hemos visto que los individuos que se plantean comprar un seguro son, generalmente, los que sienten aversión al riesgo. Esta actitud se traduce en la predisposición a pagar cierta cantidad, la prima de riesgo, para sustituir el valor incierto de un acontecimiento por su valor medio esperado. Se ha demostrado la equivalencia de este concepto con el decrecimiento de la utilidad marginal del asegurado. La aversión al riesgo no permite, sin embargo, tener en cuenta los efectos del riesgo sobre la utilidad marginal, lo que sí es posible a través de la prudencia, aspecto más restrictivo que la aversión y equivalente al decrecimiento y convexidad estrictos de la utilidad marginal.

Un enfoque que en principio puede parecer alternativo al de la utilidad esperada es aquél según el cual la ordenación de los sucesos aleatorios a los que está expuesto un individuo se realiza a través de la dominancia estocástica, de primer, segundo y/o tercer orden, entre las distribuciones de probabilidad de las correspondientes variables. Los modelos de este tipo, conocidos habitualmente como *modelos de utilidad no esperada*, no son en realidad un planteamiento alternativo al de la utilidad esperada, sino una generalización de ella. Presenta la ventaja de poderse aplicar cuando no es conocida la función de utilidad del individuo y además, según demostramos, es coherente con el enfoque de la utilidad esperada con comportamientos de prudencia o aversión al riesgo. En esta situación, siempre que pueden utilizarse ambos planteamiento, la ordenación de sucesos aleatorios que hace un individuo basándose en la dominancia estocástica de primer, segundo y/o tercer orden entre las funciones de distribución asociadas a las distintas situaciones es la misma que cuando su objetivo es el de maximizar la utilidad. Podemos estar seguros entonces de no caer en contradicciones cuando usemos el concepto de dominancia estocástica, si la función de utilidad no está disponible.

En el Capítulo 2, hemos tenido como meta principal el estudio de la demanda de seguro en presencia de información simétrica entre asegurado y asegurador. En coherencia con el enfoque de la utilidad esperada, dejamos claro que un individuo se asegurará siempre que su utilidad esperada aumente con ello y además elegirá aquel contrato que maximice su utilidad esperada.

En esta situación, una de las aportaciones considerada más importante entre los estudiosos de este tema es la de Mossin (1968) que afirma que un individuo con neutralidad al riesgo solo se asegura si la prima que paga a cambio es pura y que, con prima pura y aversión al riesgo, la indemnización completa es la óptima; en cambio, con aversión al riesgo y prima recargada, la cobertura óptima pasa a ser una cobertura parcial. Este resultado, al que nos referiremos como teorema de Mossin, se basa en un modelo simple con un único riesgo que da lugar, en caso de ocurrir, a una pérdida de cuantía fija.

Hemos estudiado en este segundo capítulo la generalización de estos resultados a situaciones más complejas que la tratada por Mossin.

En primer lugar, hemos demostrado que cuando el asegurado está expuesto a un siniestro que conlleva pérdidas con valores que oscilan entre cantidades conocidas, se cumple el teorema de Mossin, para dos posibles formas diferenciadas de la indemnización: una en la que la entidad aseguradora paga una proporción de la pérdida, corriendo la parte restante por parte del asegurado, y otra en la que se fija un nivel de franquicia por debajo del cual no se cubre ningún daño.

Seguidamente, se han abordado otras situaciones en las que existe incertidumbre sobre la riqueza del asegurado debida, no solo al riesgo para el que contrata el seguro, sino también a la interacción de otros factores adicionales que, si bien no son susceptibles de ser asegurados, influyen igualmente en la riqueza del asegurado y podrían afectar a la elección de cobertura que hace el asegurado como medida para contrarrestar los efectos negativos del riesgo secundario.

El riesgo de impago por parte del asegurador es uno de los casos estudiados. A diferencia de lo que ocurre cuando no existe este riesgo secundario, no se cumple el teorema de Mossin, al no ser óptima la cobertura total cuando la prima pagada no lleva recargo de ningún tipo. Resaltamos además que, independientemente de que resulte ser óptimo o no, el derecho a una indemnización total del siniestro no asegura totalmente al individuo cuando existe posibilidad de impago. Si el asegurador no puede cumplir con su obligación y deja de pagar la indemnización, la situación del asegurado será peor que si no hubiera comprado seguro alguno, puesto que el valor de la prima ya ha sido desembolsado.

Se han planteado otros modelos con múltiples riesgos en los que el riesgo de impago no existe.

Considerando un riesgo adicional independiente del riesgo asegurado, no solo se demuestra que se cumple el teorema de Mossin, sino que además se prueba que la indemnización óptima para el consumidor se ve afectada, de modo que se observa una mayor cobertura que cuando no existe tal riesgo secundario añadido. La posible influencia negativa de este riesgo en la riqueza del asegurado se combate de alguna forma incrementando la cobertura contratada.

Si los riesgos se suponen dependientes y con correlación positiva entre ellos, entonces, en contra de lo que sucede cuando existe un único riesgo, el óptimo puede ser una cobertura completa, siempre que la tasa de recargo no sea demasiado elevada. No se cumple el teorema de Mossin en este punto, aunque sí cuando la prima es pura, en cuyo caso se obtiene la optimalidad de la cobertura total. Si la correlación entre los riesgos es negativa, el óptimo sería de nuevo la cobertura parcial cuando la prima está recargada.

Otra de las tareas que llevamos a cabo en el Capítulo 2 es un análisis de sensibilidad de la cobertura óptima, para identificar el efecto que producen sobre ella factores *a priori* relevantes como el nivel de riqueza inicial del asegurado, la aversión al riesgo del individuo, la tasa de recargo de la prima o la probabilidad de solvencia del asegurador, cuando sea el caso.

Cuando los valores de la pérdida están acotados en un intervalo y tanto si la indemnización es de tipo franquicia como de tipo coaseguro, la influencia del nivel de riqueza inicial del asegurado es nula, siempre que la aversión absoluta al riesgo es constante. Lo mismo ocurre cuando existe riesgo de impago. Se encuentran diferencias sin embargo entre ambos modelos si la aversión al riesgo es decreciente. Con un riesgo único, el efecto de la riqueza es negativo, con lo que el seguro sería entonces un bien inferior, pero no ocurre lo mismo cuando aparece el riesgo de impago. En este caso, en general, no resulta factible determinar el crecimiento o decrecimiento de la indemnización óptima.

La aversión al riesgo es otra de las variables cuyo efecto sobre la cobertura óptima hemos determinado. Con riesgo único, la tasa de coaseguro óptima aumenta cuando lo hace la aversión al riesgo, ocurriendo lo contrario con la franquicia. En cualquiera de los dos casos, esto se traduce en un incremento de la indemnización, resultado que concuerda con la idea intuitiva que todos tenemos al respecto. En el modelo con riesgo de impago, no ocurre lo mismo: un mayor grado de aversión al riesgo no implica necesariamente que se desee tener una cobertura más elevada. Es muy probable que el temor que siente el individuo se vea acrecentado por el riesgo de pagar una prima más elevada para tener derecho a una mayor indemnización y que luego ésta no sea finalmente satisfecha por la compañía aseguradora.

Hemos demostrado también que la hipótesis de decrecimiento de la aversión absoluta al riesgo es la única que puede llevar a que el seguro sea un bien Giffen. Solo en esas condiciones un aumento del precio del seguro, medido a través de un incremento en la tasa de recargo, puede provocar un aumento de la cobertura óptima, aunque no siempre lo hace.

Para el modelo de impago, hemos estudiado cómo afecta una mayor probabilidad de solvencia del asegurador a la elección óptima de cobertura. Curiosamente, y en contra de lo que podría pensarse *a priori*, el efecto no es siempre positivo. Solo lo es cuando la función de utilidad que representa las preferencias del asegurado adopta formas particulares. En concreto, hemos probado que si se trata de una función cuadrática o de una función con aversión absoluta al riesgo constante, entonces una alta probabilidad de solvencia conduce a la elección de una mayor cobertura. Las funciones de utilidad más generales no tienen un comportamiento predecible en este sentido.

Por último, destacamos aquí que la existencia de un riesgo secundario que influye en la riqueza final del individuo se combate de alguna forma con la contratación de una cobertura más elevada con el objeto de compensar la disminución de la riqueza final.

La parte final del capítulo se ha dedicado a contrastar el importante resultado demostrado por Arrow (1963) acerca de la forma óptima de la indemnización cuando la prima tiene recargo y el asegurado presenta aversión al riesgo: se trata de una cobertura completa por encima de una franquicia.

Es habitual, al tratar de determinar la función de indemnización óptima, imponer como restricción que ésta sea no negativa. Lo contrario significaría que el asegurado, además de sufrir un siniestro, debería desembolsar una cantidad de dinero, extremo poco razonable. Muchos autores piensan, sin embargo, que la optimalidad de las franquicias se debe, no solo a los costes del seguro, sino también a la existencia de esta restricción de no negatividad de las indemnizaciones. Hemos completado el estudio de Gollier (1987) demostrando que, si se relaja dicha condición, el resultado de Arrow sigue siendo válido, siempre que el coste marginal del seguro sea positivo y la probabilidad de siniestro no supere el 50 %. En una gran diversidad de ramos del seguro los siniestros se producen con bajas probabilidades, siendo así aceptable la franquicia como óptima para la función de indemnización.

Tratamos también esta cuestión en el caso de los contratos de seguro óptimos de Pareto. Basándonos en el modelo de Raviv (1979), demostramos que la existencia de una franquicia es consecuencia únicamente de un coste marginal del seguro positivo y no tiene relación ninguna con la actitud del asegurador hacia el riesgo. Por contra, sí interviene esta actitud en el tipo de cobertura por encima de la franquicia, tratándose de coaseguro cuando existe aversión al riesgo. Con neutralidad, la cobertura es total a partir del nivel determinado por la franquicia si el coste es lineal, mientras que las funciones de coste convexas, por ejemplo, se traducen en coaseguro por encima de la franquicia. Hemos generalizado por último estos resultados a situaciones en las que se producen múltiples pérdidas durante el periodo asegurado.

Hasta aquí, hemos aportado las principales conclusiones observadas en el estudio de la demanda de seguro en situaciones diversas pero con la característica común de simetría de información. En el Capítulo 3, hemos incluido los problemas de información entre asegurado y asegurador. Es habitual que alguna de las partes, generalmente el asegurador, no disponga de la información completa sobre determinadas características del asegurado o sobre su comportamiento durante la relación contractual, que el asegurado, sin embargo, sí conoce. Al desconocer la compañía aseguradora la probabilidad que tiene un individuo de sufrir el siniestro asegurado o no poder predecir su comportamiento durante el periodo de vigencia del seguro, es posible que se produzcan situaciones indeseadas que pueden afectar negativamente a la relación contractual, al ser contrapuestos, de alguna manera, los objetivos de ambas partes.

Cuando el problema que surge es de selección adversa, el planteamiento del que hemos partido es el tradicional desde Rosthschild y Stiglitz (1976), según el cual se supone que existen dos grupos de clientes diferenciados únicamente por su probabilidad de accidente. Hemos comparado los seguros óptimos con los que se obtienen con simetría en la información, tanto cuando el mercado del seguro es un monopolio como cuando es competitivo.

En el primer caso, vemos cómo los individuos de alto riesgo parecen beneficiarse de la existencia de información asimétrica, ya que no solo siguen recibiendo la misma cobertura completa que cuando la información es simétrica (sin recargo en la prima), sino que además aumenta su utilidad con respecto a esta última situación. Los individuos de bajo riesgo, sin embargo, sí se ven afectados por la asimetría de información, viéndose influidos negativamente por la presencia de individuos de alto riesgo. Pasan de recibir cobertura completa a recibir solo cobertura parcial cuando surge la asimetría; además, en cualquiera de los casos estudiados mantienen siempre la utilidad de reserva.

Cuando el mercado es competitivo, la situación es muy similar. Los asegurados con probabilidad más grandes de sufrir siniestros disfrutan siempre de cobertura completa. En cambio, los individuos con menor riesgo consiguen un óptimo que consiste solo en cobertura parcial, cuando aparece la selección adversa. La imposibilidad para la compañía de distinguir el tipo de riesgo de cada cliente perjudica a los clientes con menor probabilidad de accidente. Todos los asegurados disfrutan en este tipo de mercado de un aumento en su utilidad con respecto al mercado monopolista en el que únicamente llegaban a tener la utilidad de reserva.

Hemos creído conveniente ampliar este estudio de la selección adversa introduciendo contratos de larga duración, puesto que es muy común que la relación entre una compañía aseguradora y su cliente se vaya renovando periódicamente. Las conclusiones no se diferencian en lo básico de lo obtenido en contratos de un periodo de duración. Volvemos a resaltar la cobertura completa que reciben en cualquier caso los individuos con mayores probabilidades de accidentes y la cobertura parcial para aquellos cuyas probabilidades son menores. Lo más destacable es que, cuando los contratos tienen una mayor duración, una buena experiencia anterior juega a favor de estos últimos, viéndose así beneficiados con el pago de primas más bajas en periodos posteriores siempre que no hayan tenido siniestro en el periodo anterior.

El otro gran problema de información que puede aparecer en la relación contractual es el riesgo moral, que surge de la incapacidad por parte del asegurador de predecir y comprobar el comportamiento del asegurado a lo largo de la relación entre ambos. Partiendo de la idea de que el asegurado puede llevar a cabo ciertas actividades, no fácilmente observables por el asegurador, que conducirían bien a una reducción de la probabilidad de accidente, bien a una reducción de la cuantía de la pérdida, si se produce el siniestro, hemos determinado la forma óptima de la cobertura.

En el primer caso, que hemos llamado *autoprotección*, el contrato óptimo resulta ser una cobertura completa por encima de una franquicia positiva, con lo que las grandes pérdidas serán cubiertas parcialmente pero no así las más pequeñas. Los individuos se enfrentan a una penalización consistente en una reducción de la riqueza siempre que ocurra una pérdida, aunque dicha reducción solo coincide con la pérdida en su totalidad cuando ésta es pequeña, mientras que será parcial si la pérdida sufrida es mayor que el nivel determinado por la franquicia.

Si las actividades que realiza el asegurado llevan a una reducción de la posible pérdida, el óptimo consiste en una cobertura completa hasta un límite superior. Se observa así de nuevo que la cobertura será parcial o no dependiendo de la magnitud de la pérdida.

Es importante resaltar que las coberturas parciales aparecen como óptimas en muchas situaciones, tanto si existe riesgo moral como selección adversa, al menos para algunos grupos de asegurados.

El análisis teórico realizado en los primeros capítulos se completa con la aplicación que se lleva a cabo en el Capítulo 4. Utilizamos en ella datos procedentes del ramo del automóvil, cedidos por Previsión Española S.A. Nuestro objetivo inicial era el de comprobar si se cumplía o no en ellos la predicción teórica de que los individuos expuestos a mayores riesgos de siniestros eran los que elegían mayores coberturas. En este sentido se han desarrollado los trabajos empíricos existentes en otros países. La existencia de correlación entre siniestralidad y coberturas elevadas es lo que han tratado de determinar muchos autores a través de distintas estimaciones. La mayoría usan como variable dependiente la existencia o no de siniestros y pocos estiman el número de siniestros ocurridos. Nosotros nos hemos decantado por esta última opción, presentando además los resultados de forma más completa, ya que no solo nos hemos interesado por la relación entre el número de siniestros y la cobertura elegida por el conductor asegurado, sino que hemos determinado todas las variables explicativas del número de siniestros. Evidentemente, puede existir algún factor relacionado con ello que no hayamos podido determinar debido a que la información que las aseguradoras españolas, en general, y la que nos ha facilitado los datos, en particular, solicitan a sus clientes es mucho menos extensa que la que tienen las aseguradoras de otros países. El problema de disponibilidad de información constituye siempre una dificultad añadida en este tipo de estudios.

Como paso previo a la estimación, hemos realizado un análisis descriptivo de los datos, destacando aspectos relevantes sobre las características del vehículo asegurado (uso y categoría), del conductor (edad, antigüedad en el carnet de conducir, sexo, zona de residencia y circulación habitual), de las pólizas (prima y tipo de cobertura) y de los siniestros (número y coste). El paquete estadístico que se ha usado es *SPSS 11.0 para Windows*.

Han sido 60.000 las pólizas que hemos incluido finalmente en el estudio, correspondientes a otros tantos asegurados por la compañía entre el 16 de junio de 2002 y el 15 de junio de 2003. La población se ha caracterizado por estar formada mayoritariamente por hombres, de más de 30 años de edad y más de 2 años de antigüedad en el carnet de conducir. El vehículo que conducen pertenece en una elevada proporción a la categoría de turismo y furgoneta y el uso al que se destina es, sobre todo, particular. La prima media se sitúa entre los 400 y 500€ y las coberturas más contratadas son la mínima obligatoria y la que tiene alguna garantía adicional como incendio y/o rotura de lunas. El coste medio de los siniestros por persona es de 1.200 €.

En lo que se refiere a los siniestros, aspecto que más nos interesa, observamos que las 3/4 partes de asegurados no ha sufrido ninguno durante el periodo de referencia. La gran mayoría de ellos además ha tenido únicamente un accidente, aunque hay quien ha sufrido hasta 9 en un año. Entre los autocares la proporción de vehículos con algún siniestro es elevada; la mayor de todas las categorías de vehículos. En cambio, los tractores, maquinaria agrícola, ciclomotores, motos y remolques están en la situación contraria. En función de los usos, el agrícola es el que tiene menos siniestros y el transporte general de viajeros el que más, en proporción. A la vista de los datos, la edad y el sexo no parecen ser especialmente decisivos. Sí se observa en cambio una mayor siniestralidad entre quienes tienen menos experiencia en la conducción. Las primas muestran estar directamente relacionadas con los siniestros. Son más elevadas las de aquellos que sufren siniestros que las de los que no tienen accidentes. También se observa en los datos una relación entre siniestralidad y grado de cobertura. Cuanto más alto es el grado de cobertura elegido, mayor la proporción de asegurados que han sufrido siniestros.

El análisis descriptivo de los datos se ha contrastado finalmente con los resultados de la estimación del número de siniestros destinada a determinar las variables explicativas estadísticamente significativas. Debemos usar un modelo de tipo recuento o *count data* puesto que la variable que tomamos como dependiente es discreta, con valores no negativos. Lo hacemos, por motivos computacionales, sobre una muestra de 15.000 asegurados y utilizando el paquete *Limdep v. 7.0.* El nivel de significatividad elegido es el 5 %.

El elevado número de ceros que presenta la variable (más del 75 %) desaconseja el modelo de *Poisson*, a pesar de que suele observarse con frecuencia en este tipo de análisis. El *binomial negativo* es el otro modelo común en estudios similares a éste. Sin embargo, tampoco hemos optado por él. Tanto este modelo como el de *Poisson* tratan de igual forma todos los valores de la variable dependiente, sean nulos o no. Consideramos que no debe ser así puesto que existen diferencias cualitativas entre los asegurados que sufren siniestros y los que no: los primeros tienen en general un comportamiento más descuidado que los segundos y esto debe reflejarse de alguna forma en la distinción de los valores nulos de los que no lo son.

Esta nueva perspectiva se aborda a través del modelo *binomial negativo "inflado de ceros"* que es el que finalmente usamos. Se trata de un modelo mixto que, partiendo de un *binomial negativo* asigna una ponderación adicional a la probabilidad de observar un valor nulo.

El resultado de la estimación confirma que ésta es mejor que la que se habría obtenido con los modelos de *Poisson* y *binomial negativo.*

Son 17 las variables explicativas (incluido el término independiente) que finalmente muestran significatividad en la estimación del número de siniestros.

Las categorías formadas por camiones, remolques y ciclomotores y motos son las que presentan un comportamiento significativamente distinto al de los turismos y furgonetas. El número de siniestros estimados es menor que en esta categoría en todos los casos. En cuanto a los usos, el agrícola y el industrial reflejan menos siniestralidad que el uso particular, ocurriendo lo contrario con el uso de transporte escolar.

La edad es la variable que tiene una menor significatividad de todas las incluidas en el modelo. Resulta que a medida que aumenta, menor es el número de siniestros. La antigüedad en el carnet de conducir, en consonancia con el análisis descriptivo, está relacionado con el número de siniestros. En concreto, los asegurados con menos de 2 años de carnet sufren un mayor número de siniestros que los que llevan más de 2 conduciendo.

Todos los tramos considerados para la prima tienen coeficientes positivos en la estimación siendo además crecientes, lo que indica un mayor número de siniestros a medida que aumenta la cuantía de la prima en relación con la categoría base (menos de 200 €).

Finalmente, en lo que respecta al grado de cobertura, vemos que, efectivamente, los niveles medio-bajo, medio-alto y alto tienen un comportamiento significativamente distinto al de la categoría base (el grado de cobertura bajo) al nivel de confianza elegido. Se observa que a medida que aumenta la cobertura más grande es la diferencia con la categoría base, siendo además mayor la proporción en cualquier categoría que en la base.

Bibliografía

Abbring, J.H.; Chiappori, P.A.; Heckman, J.J.y Pinquet, J. (2003): Adverse Selection and Moral Hazard in Insurance: Can Dynamic Data Help to Distinguish?, *Journal of the European Economic Association*, 1 (Papers and Proceedings), 512-521.

Akerlof, G. (1970): The Market for "Lemons": Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism, *Quarterly Journal of Economics*, 89, 488-500.

Arnott, R. (1992): Moral Hazard and Competitive Insurance Markets, en *Contributions to Insurance Economics* editado por Dionne, G., Kluwer Academic Publishers, 325-358.

Arnott, R. y Stiglitz, J.E. (1990): The Welfare Economics of Moral Hazard, en *Risk, Information and Insurance: Essays in the Memory of Karl Borch* editado por Loubergé, H., Kluwer Academic Publishers, 91-121.

Arrow, K.J. (1963): Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care, *American Economic Review*, 53, 941-969.

Borch, K. (1962): Equilibrium in Reinsurance Markets, *Econometrica*, 30, 424-444.

Boyer, M. y Dionne, G. (1989): An Empirical Analysis of Moral Hazard and Experience Rating, *Review of Economics and Statistics*, 71, 128-134.

Cardon, J.H. y Hendel, I. (2001): Asymmetric Information in Health Insurance: Evidence from the National Medical Expenditure Survey, *Rand Journal of Economics*, 32, nº3, 408-427.

CAMERON, A. Y TRIVEDI, P. (1986): Econometric Models Based on Count Data: Comparison and Applications of Some Stimators and Tests, *Journal of Applied Econometrics*, 1, 29-54.

CHIAPPORI, P.A. (1999): Asymmetric Information in Automobile Insurance: an Overview, en en *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation* editado por Dionne, G. y Laberge-Nadeau, C., 1-11.

CHIAPPORI, P.A. (2000): Econometric Models of Insurance under Asymmetric Information, en *Handbook of Insurance*, editado por Dionne, G., 365-393.

CHIAPPORI, P.A. Y SALANIÉ, B. (1997): Empirical Contract Theory: The Case of Insurance Data, *European Economic Review*, 41, 943-950.

CHIAPPORI, P.A. Y SALANIÉ, B. (2000): Testing Contract Theory: a Survey of Some Recent Work, *World Congress of the Econometric Society*, Seattle.

CHIAPPORI, P.A. Y SALANIÉ, B. (2000): Testing for Asymmetric Information in Insurance Markets, *Journal of Political Economy*, 108, nº 1, 56-78

CHITGOPEKAR, S. (2001): Relationship Between Deductibles and Expected Payouts for Insurance Policies, *35º Western Risk and Insurance Annual Meeting*, Santa Barbara.

COHEN, A. (2002): Asymmetric Information and Learning: Evidence from the Automobile Insurance Market, *Discussion Paper* nº371, Harvard Law School, Cambridge.

COOPER, R. Y HAYES, B. (1987): Multi-period Insurance Contracts, *International Journal of Industrial Organization*, 5, 211-231.

COURBAGE, D. (2001): Self-Insurance, Self-Protection and Market Insurance within the Dual Theory of Choice, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 26, 43-56.

CROCKER, D.J. Y SNOW, A. (1985): The Efficiency of Competitive Equilibria in Insurance Markets with Adverse Selection, *Journal of Public Economics*, 26, 207-219.

Crocker, D.J. y Snow, A. (1986): The Efficiency Effects of Categorical Discrimination in the Insurance Industry, *Journal of Political Economy*, 94, 321-344.

Crocker, D.J. y Snow, A. (2000): The Theory of Risk Classification, en *Handbook of Insurance* editado por Dionne, G.,Kluwer Academic Publishers, 245-276.

Dahlby, B. (1983): Adverse Selection and Statistical Discrimination: An Analysis of Canadian Automobile Insurance Market, *Journal of Public Economics*, 20, 121-131.

Dahlby, B. (1992): Testing for Asymetric Information in Canadian Automobile Insurance, *Contributions to Insurance Economics*, editado por Dionne, G., Kluwer Academic Publishers, 423-443.

D'Arcy, S. y Doherty, N. (1990): Adverse Selection, Private Information and Lowballing in Insurance Markets, *Journal of Business*, 63, 145-164.

Destinobles, A.G. (2001): ´´Los Mercados con Información Asimétrica", tema tratado por los Premio Nobel de Economía 2001, *Aportes: Revista de la Facultad de Economía-BUAP*, año VII, nº19, 173-176.

Dionne, G. (1982): Moral hazard and State-Dependent Utility Function, *Journal of Risk and Insurance*, 49, 405-423.

Dionne, G. (1983): Adverse Selection and Repeated Insurance Contracts, *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 8, 316-333.

Dionne, G. (1984): Search and Insurance, *International Economic Review*, 25, 357-367.

Dionne, G. (1992): *Contributions to Insurance Economics*, editado por Dionne, G., Kluwer Academic Publishers.

Dionne, G. (1992): Moral Hazard and State-Dependent Utility Function, *Journal of Risk and Insurance*, 405-422.

Dionne, G. (1998): La Mesure Empirique des Problèmes d'Information, *Cahier de recherche*, nº 9833, U.F.R. de Science Économiques, Gestion, Mathématiques et Informatique, Paris.

DIONNE, G. (2000): The Empirical Measure of Information Problems with Emphasis on Insurance Fraud, *Cahier de recherche*, nº 00-04, École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

DIONNE, G. (2000): *Handbook of Insurance*, editado por Dionne, G., Kluwer Academic Publishers.

DIONNE, G. Y DOHERTY, N. (1994): Adverse Selection, Commitment and Renegotiation with Application to Insurance Markets, *Journal of Political Economy*, 209-235.

DIONNE, G.; DOHERTY, N. Y FOMBARON, N. (2000): Adverse Selection in Insurance Markets, *Cahier de recherche*, nº 00-05, École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

DIONNE, G. Y EECKHOUDT, L. (1988): Increasing Risk and Self-Protection Activities, *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 13, 132-136.

DIONNE, G.; GOURIÉROUX, C. Y VANASSE, C. (1999): Evidence of Adverse Selection in Automobile Insurance Markets, en *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation* editado por Dionne, G. y Laberge-Nadeau, C., 13-46.

DIONNE, G. Y LASSERRE, P. (1985): Adverse Selection, Repeated Insurance Contracts and Announcement Strategy, *Review of Economic Studies*, 52, 719-723.

DIONNE, G. Y LASSERRE, P. (1987): Adverse Selection and Finite-Horizon Insurance Contracts, *European Economic Review*, 31, nº4, 843-862.

DOHERTY, N. Y JUNG, H.J. (1993): Adverse Selection when Loss Severities Differ: First-Best and Costly Equilibria, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 18, 173-182.

DOHERTY, N.A. Y SCHLESINGER, H. (1983): Optimal Insurance in Incomplete Markets, *Journal of Political Economy*, 91, nº6, 1045-1054.

DOHERTY, N.A. Y SCHLESINGER, H. (1983): The Optimal Deductible for an Insurance Policy when Initial Wealth is Random, *Journal of Business*, 56, 555-565.

Doherty, N.A. y Schlesinger, H. (1990): Rational Insurance Purchasing: Consideration of Contract Nonperformance, *Quarterly Journal of Economics*, 105, 143-153.

Doherty, N. y Schlesinger, H. (1995): Severity Risk and the Adverse Selection of Frequency Risk, *Journal of Risk and Insurance*, 62, 649-665.

Eeckhoudt, L.; Outreville, J.F.; Lauwers, M. y Calcoen, F. (1988): The Impact of a Probationary Period on the Demand for Insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 55, 217-228.

Ehrlich, J. y Becker, G. (1972): Market Insurance, Self Insurance and Self Protection, *Journal of Political Economy*, 80, 623-648.

Fluet, C. y Pannequin, F. (1997): Complete versus Incomplete Insurance Contracts under Adverse Selection with Multiple Risk, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 22, 81-101.

Fombaron, N. (1997): No-Commitment and Dynamic Contracts in Competitive Insurance Markets with Adverse Selection, *Working Paper*, Centre de Documentation en Sciences de la Gestion, Montréal.

Fombaron, N. (2000): Renegotiation-proof Contracts in Insurance Markets with Asymmetric Information, *Working Paper*, Centre de Documentation en Sciences de la Gestion, Montréal.

García, J. (1997): *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas*. Editorial Pirámide.

Guardiola, A. (2001): *Manual de Introducción al Seguro*. Fundación Mapfre Estudios. Instituto de Ciencias del Seguro.

Gollier, C. (1987): The Design of Optimal Insurance Contracts Without the Nonnegativity Constraint on Claims, *Journal of Risk and Insurance*, 54, 314-324.

Gollier, C. (1996): Optimun Insurance of Approximate Losses, *Journal of Risk and Insurance*, 63, nº 3, 369-380.

Gollier, C. y Schlesinger, H. (1996): Arrow's Theorem on the Optimality of Deductibles: a Stochastic Dominance Approach, *Economic Theory*, 7, 359-363.

Gouriéroux, C. (1999): The Econometrics of Risk Classification in Insurance, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 119-137.

Greene, W.H. (1995): *Limdep Version 7.0: User's Manual*. Bellport, NY: Econometric Software.

Grossman, S. y Hart, O.D. (1983): An Analysis of the Principal-Agent Problem, *Econometrica*, 51, 7-45.

Hadar, J. y Russell, W. (1969): Rules for Ordering Uncertain Prospects, *American Economic Review*, 49, 25-34.

Helpman, E. y Laffont, J.J. (1975): On Moral Hazard in General Equilibrium, *Journal of Economic Theory*, 10, 8-23.

Holmstrom, B. (1979): Moral hazard and Observability, *Bell Journal of Economics*, 10, 74-91.

Holmstrom, B. (1982): Moral Hazard in Teams, *Bell Journal of Economics*, 324-340.

Hosios, A.J. y Peters, M. (1989): Repeated Insurance Contracts with Adverse Selection and Limited Commitment, *Quarterly Journal of Economics*, CIV, nº2, 229-253.

Hossack, I.B.; Pollard, J.H. y Zehnwirth, B. (2001): *Introducción a la Estadística con Aplicaciones a los Seguros Generales*. Fundación Mapfre Estudios. Instituto de Ciencias del Seguro.

Hoy, M. (1982): Categorizing Risks in the Insurance Industry, *Quarterly Journal of Economics*, 97, 321-336.

Huberman, G.; Mayers, D. y Smith, C.W. (1983): Optimal Insurance Policy Indemnity Schedules, *Bell Journal of Economics*, 415-426.

Jones, A.M. (2001): *Applied Econometrics for Health Economists - A Practical Guide*. Office of Health Economics. London.

JOSKOW, P.J. (1973): Cartels, Competition and Regulation in the Property-Liability Insurance Industry, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 327-427.

KIMBALL, M. (1993): Standard Risk Aversion, *Econometrica*, 61, nº3, 589-611.

LAFFONT, J.J. (1987): Le Risque Moral dans la Relation de Mandat, *Revue Économique*, 5-23.

LAFFONT, J.J. (1991): *Économie de l'Incertain et de l'Information.* Ed. Économica. Paris.

LANDSBERGER, M. Y MEILIJSON, I. (1996): Extraction of Surplus under Adverse Selection: The case of Insurance Markets, *Journal of Economic Theory*, 69, 234-239.

MACHINA, M.J. (1982): "Expected Utility" Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, 50, nº2, 277-323.

MACHO, I. Y PÉREZ, D. (1994): *Introducción a la Economía de la Información.* Ariel Economía. Ed. Ariel, S.A.

MAHUL, O. (1999): The Design of an Optimal Area Yield Crop Insurance Contract, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 159-171.

MAHUL, O. (2000): Optimal Insurance Design with Random Initial Wealth, *Economics letters* 69, 353-358.

MARSHALL, J.M. (1976): Moral Hazard, *American Economic Review*, 66, 880-890.

MAYERS, D. Y SMITH, C.W. (1983): The Interdependence of Individual Portfolio Decisions and the Demand for Insurance, *Journal of Political Economy*, 91, 304-311.

MEYER, J. (1987): Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization, *American Economic Review*, 421-430.

MEYER, D.J Y MEYER, J. (1998): Changes in Background Risk and the Demand for Insurance, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 23; 29-40.

MIYAZAKI, H. (1977): The Rat Race and Internal Labor Markets, *Bell Journal of Economics*, 8, 384-418.

MOOKHERJEE, D. Y PNG, I. (1989): Optimal Auditing, Insurance and Redistributions, *Quarterly Journal of Economics*, 104, 205-228.

MOSSIN, J. (1968): Aspects of Rational Insurance Purchasing, *Journal of Political Economy*, 79, 553-568.

MULLAHY, J. (1997): Heterogeneity, excess Zeros, and the Structure of Count Data Models, *Journal of Applied Econometrics*, 12, 337-350.

PASHIGIAN, B.P; SCHKADE, L. Y MENEFEE, G. The Selection of an Optimal Deductible for a given Insurance Policy, *Journal of Business*, 35-44.

PAULY, M. (1974): Oversinsurance and Public Provision of Insurance: The Role of Moral Hazard and Averse Selection, *Quarterly Journal of Economics*, 88, 44-62.

PICARD, P. (1996): Auditing Claims in Insurance Markets with Fraud: The credibility issue, *Journal of Public Economics*, 63, 27-56.

POLBORN, M. K. (1998): A Model of an Oligopoly in an Insurance Market, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 23, 41-48.

PRATT, J.W. (1964): Risk Aversión in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32, 122-136.

PUELZ, R. Y SNOW, A. (1994): Evidence on Adverse Selection: Equilibrium Signaling and Cross-Subsidization in the Insurance Market, *Journal of Political Economy*, 102, nº 2, 236-257.

RADNER, R. (1981): Monitoring Cooperative Agreements in a Repeated Principal-Agent Relationship, *Econometrica*, 49, 1127-1148.

RAVIV, A. (1979): The Design of an Optimal Insurance Policy, *American Economic Review*, 69, nº 1, 84-96.

RICHAUDEAU, D. (1999): Automobile Insurance Contracts and Risk of Accident: An Empirical Test Using French Individual Data, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 97-114.

RILEY, J.G. (1979): Informational Equilibrium, *Econometrica*, 47, 331-359.

ROGER, P. Y SPAETER, S. (1997): The Design of Optimal Insurance Contracts: A Topological Approach, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 22; 5-19.

ROGERSON, W.P. (1985): The First-Order Approach to Principal-Agent Problems, *Econometrica*, 53, nº 6, 1357-1367

ROTHSCHILD, M. Y STIGLITZ, J. (1976): Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An essay on the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics*, 90, 629-650.

ROTHSCHILD, M. Y STIGLITZ, J. (1997): Competition and Insurance Twenty Years Later, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 22, 73-79.

RUBINSTEIN, A. Y YAARI, M.E. (1983): Repeated Insurance Contracts and Moral Hazard, *Journal of Economic Theory*, 30, 74-97.

SCHLESINGER, H. (1981): The Optimal Level of Deductibility in Insurance Contracts, *Journal of Risk and Insurance*, 465-481.

SCHLESINGER, H. (1997): Insurance Demand Without the Expected-Utility Paradigm, *Journal of Risk and Insurance*, 64, nº 1, 19-39.

SCHLESINGER, H. Y SCHULENBURG, J.M. (1987): Risk Aversion and the Purchase of Risky Insurance, *Journal of Economics*, 47, 309-314.

SEGUROS MULTIRRIESGOS . Fundación Mapfre estudios. Instituto de Ciencias del Seguro. 2001.

SHAVELL, S. (1979): On Moral Hazard and Insurance, *Quarterly Journal of Economics*, 541-562.

SHAVELL, S. (1982): On Liability and Insurance, *Bell Journal of Economics*, 13, 120-132.

SHAVELL, S. (1986): The Judgement Proof Problem, *International Review of Law and Economics*, 6, 45-58.

SMITH, V. (1968): Optimal Insurance Coverage, *Journal of Political Economy*, 76, 1, 68-77.

SPAETER, S. (1998): Réflexion sur l'Optimalité des Contrats d'Assurance, *Cahier de recherche*, nº 98-10, École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

SPENCE, M. (1973): Job Market Signalling, *Quarterly Journal of Economics*, 87, 355-374.

SPENCE, M. (1978): Product Differentiation and Performance in Insurance Markets, *Journal of Public Economics*, 10, 427-447.

SPENCE, M. y ZECKHAUSER, R. (1971): Insurance, Information and Individual Action, *American Economic Review*, 380-387.

STIGLITZ, J. (1977): Monopoly, Nonlinear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market, *Review of Economic Studies*, 44, 407-430.

STIGLITZ, J. y WEISS, A. (1981): Credit Rationing in Markets with Imperfect Information, *American Economic Review*, 71 (3), 393-410.

STIGLITZ, J. (1983): Risk, Incentives and Insurance: The Pure Theory of Moral Hazard, *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 8, 4-33.

TOWNSEND, R. (1979): Optimal Contracts and Competitive Contracts with Costly State Verification, *Journal of Economic Theory*, 22, 265-293.

USATEGUI, J.M. (2000): *Economía de la Información*. Servicio Editorial. Universidad del País Vasco.

VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press.

WHITMORE, G.A. (1970): Third-Degree Stochastic Dominance, *American Economic Review*, 457-459.

WILSON, C. (1977): A Model of Insurance Markets with Incomplete Information, *Journal of Economic Theory*, 12, 167-207.

WINTER, R.A. (1992): Moral hazard and insurance contracts, en *Contributions to Insurance Economics*, editado por Dionne, G., Kluwer Academic Publishers, 61-96.

YOUNG, V.R. Y BROWNE, M.J. (1997): Explaining Insurance Policy Provisions via Adverse Selection, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 22, 121-134.

YOUNG, V.R. Y BROWNE, M.J. (2000): Equilibrium in Competitive Insurance Markets Under Adverse Selection and Yaari's Dual Theory of Risk, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 25, 141-157.