.4465
043
35
LBS 500 320 188
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

SOBRE LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DEBILES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS.

Memoria que presenta-
Carmen León Vela para --
optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Carmen León Vela

Fdo. Carmen León Vela.

Sevilla, Julio de 1979

VºBº CATEDRATICO
DIRECTOR

A. Castro

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

83-779
853

SOBRE LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DEBILES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS.

Carmen León Vela.

Quiero hacer constar mi agradecimiento a D. Antonio de Castro Brzezicki por la acertada dirección de esta Memoria y su constante incitación y estímulo al estudio y al trabajo.

A mis amigos y compañeros José Mª Alba Riesco profesor del Dto. de Estadística Matemática y a José Real Anguas profesor del Dto. de Ecuaciones Funcionales quiero expresarles mi mas profunda gratitud y admiración por la paciencia con que han sobrellevado las largas discusiones sobre la materia de este trabajo aportando puntos de vista, sugerencias y observaciones que han sido de suma importancia.

A MIS PADRES.

INDICE.

INTRODUCCION 1

PRELIMINARES 14

I: FORMULACIONES EQUIVALENTES 25

1. Formulación Exponencial. Propiedades. 26

2. Formulación Integral. Propiedades 45

3. Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Propiedades 52

4. Formulación mediante operadores en derivadas parciales. Propiedades 62

5. Equivalencia entre las cuatro Formulaciones y planteamiento de un caso particular 73

II: UN TEOREMA DE EXISTENCIA 76

Teorema de Existencia 79

BIBLIOGRAFIA 95

INTRODUCCION.

La presente Memoria tiene como objetivo iniciar el estudio de las soluciones débiles de las ecuaciones diferenciales estocásticas con respecto a martingalas continuas de cuadrado integrable.

En esta introducción vamos a dar un resumen de la evolución histórica de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo que nos permitirá exponer las diferencias existentes entre las situaciones actualmente conocidas y la que constituye el objeto de nuestro trabajo.

En 1.923, N. Wiener da a conocer una teoria matemática del movimiento browniano - movimiento caótico de los granos de polen suspendidos en un medio acuoso descubierto por el botánico inglés R. Brown en 1.828 - que es basicamente la aceptada en la actualidad.

La idea de N. Wiener es la siguiente: ya que las trayectorias del movimiento de los granos de polen son continuas, puede consideranrse cada trayectoria como una función continua $w: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ (movimiento unidimensional) de modo que $w(t)$ representa la posición en el instante t para dicha trayectoria w. Puesto que el caracter caótico del movimiento browniano puede ser caracterizado mediante leyes de probabilidad, considera que cada trayectoria w es resultado de un fenómeno aleatorio, y no hay inconvenientes en considerar sobre el espacio medible $(W, \mathbb{B})$ - siendo $W=C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ y $\mathbb{B}$ la mínima

σ-álgebra de Borel engendrada sobre W por los conjuntos de la forma: $\{w: w(t) \leq a\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ - una familia de variables aleatorias β_t, definidas por la relación $\beta_t(w)=w(t)$, que representa la posición de la partícula en movimiento en el instante t, siendo entonces β un proceso estocástico cuyas trayectorias son precisamente las del movimiento browniano.

N. Wiener caracteriza este proceso - tambien conocido en la actualidad como proceso de Wiener - mediante una familia de probabilidades P_x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$P_x\left[\beta_0=x\right] = 1$$

y

$$P_x\left[\beta_{t_1} \leq a_1, \beta_{t_2} \leq a_2, \ldots, \beta_{t_n} \leq a_n\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2) \ldots p(t_n-t_{n-1},x_n x_{n-1}) \cdot dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

siendo

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{- |x-y|^2/2t\right\}$$

La medida P_x asi definida se llama medida de Wiener en $x \in \mathbb{R}$.

Asi pues, para N. Wiener es movimiento browniano está caracterizado en realidad por una familia de medidas de probabilidad, y esta propiedad del movimiento browniano será la idea base de las soluciones débiles.

Entre las propiedades mas notables del movimiento brow-

niano destacamos:

- es una martingala continua de cuadrado integrable con proceso creciente asociado $\langle\beta\rangle_t = t$
- sus trayectorias son funciones de variación no acotada casi seguramente P_x para cada $x \in \mathbb{R}$.

En 1.951, K. Ito da un teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma:

$$(1) \qquad \begin{aligned} dx_t &= a(t,x_t)\, d\beta_t + b(t,x_t)\, dt \\ x_o &= x \end{aligned}$$

bajo las hipótesis de ser a: $\mathbb{R}_+ x \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, b: $\mathbb{R}_+ x \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, verificando la condición de Lipschitz y una condición de "crecimiento moderado" .

Esta ecuación es solo una expresión formal de la ecuación integral:

$$(2) \qquad x_t = x + \int_o^t a(s,x_s)\, d\beta_s + \int_o^t b(s,x_s)\, ds \qquad \text{c.s. } P_x$$

donde la primera integral que aparece no puede ser entendida en la forma usual, es decir integrando por trayectoria, ya que estas son de variación no acotada, sino en el sentido mas amplio de integral estocástica.

Desde entonces la integral estocástica con respecto a un proceso movimiento browniano se conoce con el nombre de integral de Ito, y la ecuación (1)ha pasado a ser llamada ecuación diferencial estocástica de Ito, y su solución proceso de Ito.

Para K. Ito la solución de (1) ó (2) se obtiene trayectorialmente, considerando un paso al límite sobre aproximaciones sucesivas, y aqui hace uso, para la existencia del límite de la hipótesis de Lipschitz sobre a y b. Esta circunstancia es notable puesto que en las ecuaciones diferenciales ordinarias la hipótesis de Lipschitz solo se exigen para garantizar la unicidad de la solución y no para su existencia.

En 1.969, D. Stroock y S.R.S. Varadhan exponen conjuntamente un importante trabajo en el que la ecuación (1) se considera desde otro punto de vista. Mientras que para K.Ito la ecuación (1) se entiende desde el punto de vista trayectorial, estos dos autores consideran la ley de probabilidad del proceso x_t que verifica (1) para dos coeficiente continuos, acotados a(t,x) y b(t,x) dados, siendo β_t no un dato de la ecuación sino una "incógnita". Precisamos ésto. Puesto que si a y b son funciones continuas, la solución de (1), desde el punto de vista trayectorial es un proceso de Ito con trayectorias continuas, podemos considerar el espacio de todas las funciones continuas W, igual que hizo N. Wiener para el movimiento browniano, y determinar en él un movimiento browniano β_t y una medida de probabilidad P_x de modo que

$$\text{c.s.}P_x: \quad w(t) = x_o + \int_o^t a(s,w(s))\, d\beta_s(w) + \int_o^t b(s,w(s))\, ds$$

De esta forma, para estos dos autores la solución de (1) es en realidad un conjunto de entes $(W, \mathbb{B}, \beta_t, P_x)$ que

verifica las condiciones anteriores.

Resolver este problema es equivalente a encontrar una medida de probabilidad P_x de modo que $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$

$$\exp\left\{ \theta(w(t)-x - \int_0^t b(s,w(s))ds\ ) - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t a(s,w(s))ds \right\}$$

sea P_x- martingala, y por ello el problema de encontrar soluciones débiles de (1) es equivalente a resolver un Problema Martingala.

Naturalmente, con esta interpretación de (1) su solución es mas débil que con la interpretación de Ito, ya que conocidas las trayectorias siempre puede determinarse la ley de probabilidad del proceso, pero la recíproca es falsa. Por ello desde ahora, distinguiremos entre soluciones trayectoriales ó fuertes en el sentido de Ito, y las soluciones en ley de probabilidad ó débiles en el sentido ya explicado. Además la existencia de solución fuerte implica la existencia de solución débil (la ley de probabilidad de la solución fuerte) y por ello estos autores debilitan las hipótesis necesarias para la existencia y unicidad de solución débil de (1) ya que no exigen las propiedades de Lipschitz ni la de crecimiento moderado para los coeficientes a y b. Naturalmente todo lo anterior es válido en $\mathbb{R}^n$ y haremos uso de esta validez sin mención especial.

La importancia de las soluciones débiles estriba en dos hechos muy concretos:

- Desde el punto de vista del desarrollo de la teoria de

procesos estocásticos, se identifica un proceso con una familia de probabilidades, recuperándose asi la idea de N. Wiener sobre el movimiento browniano.

- Desde un punto de vista operativo, las soluciones débiles permiten resolver problemas que no eran abordables probabilísticamente si no existian las soluciones fuertes. Asi, si consideramos el operador elíptico

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad ; \; a^2 = \sigma ,$$

donde $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ y $b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son dos funciones dadas, y planteamos el problema de Dirichlet:

$$(3) \qquad \begin{aligned} Lu &= o \quad \text{en } D \\ u &= f \quad \text{en } \partial D \end{aligned}$$

siendo D un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂D de clase C^2, y f una función continua dada sobre ∂D, la única solución de (3) está dada por la relación:

$$u(x) = P_x\left[f(x_\tau)\right] = \int_{\partial D} f(y)\, m_x(dy)$$

donde la medida armónica m_x sobre ∂D está determinada por la solución débil de (1) en la forma

$$m_x(dy) = P_x\left[\, x_\tau \in dy\right]$$

siendo τ el primer tiempo (aleatorio) en que el proceso x_t (solución de (1)) encuentra ∂D.

Esta y otras palicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Ito pueden ser consultadas en la extensa obra de A. Friedman (1.975), asi como L. Arnold (1.974),

y D. Stroock- S.R.S. Varadhan (1.971).

En lo referente a la ecuación estocástica de Ito, hemos de señalar que:

- Se utiliza una integración respecto al movimiento browniano.
- Hay dos tipos de soluciones: fuertes y débiles.

La extensión de la teoria de las ecuaciones diferenciales estocásticas se realiza en estos dos sentidos: considerar ecuaciones en las que la integral sea con respecto a un proceso mas general que el movimiento browniano, y además el estudio de soluciones fuertes y débiles de estas nuevas ecuaciones.

Gracias a los trabajos de Kunita-Watanabe (1.967), Ph. Courrege (1.962) y los probabilistas de la escuela de Estrasburgo encabezada por P.A. Meyer, se tiene una amplia teoria de integración estocástica que engloba a la de K. Ito, como puede verse en P.A. Meyer (1.976), y que ha permitido dar la primera extensión de las ecuaciones diferenciales estocásticas, considerando martingalas de cuadrado integrable y semimartingalas en lugar del movimiento browniano y la diferencial de procesos de variación acotada en lugar de dt.

Asi, en años recientes se ha podido iniciar el estudio de soluciones trayectoriales de estas ecuaciones diferenciales estocásticas mas generales que las consideradas por Ito: C. Doleans-Dade (1.976) considera ecuaciones en las que el movimiento browniano es sustituido por una semimartingala;

Ph. Protter (1.978) lo sustituye por martingala continua de cuadrado integrable, estudiando la explosión de la solución, y J. Jacod (1.979) situandose en el caso de Protter añade un término respecto a una medida aleatoria discreta que ya Skorokhod habia considerado en su texto de 1.972 con movimiento browniano. Todos, bajo condiciones de tipo Lipschitz sobre los coeficientes demuestran la existencia y unicidad de soluciones fuertes ó trayectoriales de estas ecuaciones.

La segunda extensión de la teoria de las ecuaciones diferenciales estocásticas tal como,apuntábamos antes es la obtensión de soluciones débiles de estas ecuaciones.

Para ello, damos una definición de solución débil de la ecuación diferencial estocástica

$$(4) \qquad dx_t = a(t,x_t)\, dM_t + b(t,x_t)\, dV_t \quad , \quad x_o=x$$

en la que los coeficientes a y b son dados y V_t es una función de variación acotada dada que verifica una condición de Lipschitz, M_t es una martingala continua de cuadrado integrable, que precisamos mas adelante.

Ya que la ecuación (4) solo tiene sentido si la entendemos en su forma integral, el proceso solución x_t es entonces, obviamente, un proceso con trayectorias casi seguramente continuas, por lo que a efectos de definir qué entendemos por solución débil de (4) podemos limitarnos al espacio muestral de las funciones continuas $W=C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, entonces una <u>solución débil</u> de (4) es, por definición un conjunto de ele-

mentos $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}_t, \bar{M}_t, \bar{P})$ donde:

1) $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}_t)$ es un espacio medible filtrado por una familia creciente y continua por la derecha de sub-σ-álgebras $\bar{\mathbb{B}}_t$ de $\bar{\mathbb{B}}$.

2) $\bar{P}$ es una medida de probabilidad sobre $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}})$.

3) $\bar{M}_t$ es una $(\bar{\mathbb{B}}_t, \bar{P})$-martingala continua de cuadrado integrable.

4) Se verifica c.s. $\bar{P}$

$$\bar{w}(t) = x + \int_0^t a(s,\bar{w}(s))d\bar{M}_s(\bar{w}) + \int_0^t b(s,\bar{w}(s))dV(s)$$

Desde el punto de vista de solución débil de (4) esta ecuación tiene sentido ya que la martingala $\bar{M}$ se construye, al ser un elemento de la solución, para ello, es necesario partir de un proceso creciente A sobre el espacio medible (W,P) y verificando las condiciones de A.V. Skorokhod. De este modo podemos construir una martingala a partir de un proceso creciente dado, problema éste que no tiene aún una solución completa y cuyos primeros pasos han sido dados por Ersov (1.974) y Skorokhod (1.975) independientemente.

Además, hemos dicho que V_t es una función y no un proceso. Esta restricción, necesaria para la demostración del teorema de existencia que damos en la Memoria merece un comentario adicional: por una parte observemos que el caso estudiado por Stroock-Varadhan tiene dt mientras que nosotros admitimos dV(t), y por otra parte, para las soluciones fuertes de Doleans-Dade, Protter, etc. se admite un proceso $dV_t(w)$.

La razón de esta limitación está en que al construir el espacio $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}_t)$ en la demostración del teorema de existencia nos ha sido necesario considerar una relación de equivalencia en el espacio muestral, y el proceso $V_t(w)$ no está univocamente definido en cada clase de equivalencia, por lo que, en nuestra demostración es necesario no considerar la dependencia del azar en V_t. Resolver el problema y quitar esta limitación es uno de los problemas que quedan aun por estudiar.

En cuanto a la técnica utilizada en el teorema de existencia es importante destacar que ésta se basa en encontrar una familia de medidas de probabilidad que sea relativamente débilmente compacta y cuyo límite es precisamente la solución buscada. Aquí aplicamos una condición suficiente dada por Priouret (1.974) del teorema de convergencia de medidas de Prokhorov, y para ello hemos buscado cuatro Formulaciones del mismo problema que nos ha permitido, utilizando propiedades de cada uno, en cada momento, establecer el teorema. Las cuatro Formulaciones mencionadas son:

<u>Formulacion Exponencial</u>: Encontrar una medida de probabilidad P sobre un espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta,\ x_t(w)-x-\int_0^t b(s,x_s(w)dV_s(w)) - \frac{1}{2}\ (\theta,\langle N\rangle_t\theta)\right\}$$

donde $\langle N\rangle_t$ es una matriz de elementos

$$\langle N\rangle_t^{ij}(w) = \sum_{kh=1}^{n} \int_0^t a_{ik}(s,x_s(w))a_{jh}(s,x_s(w))\ dA_s^{kh}(w)$$

A^{kh} es el elemento kh de una matriz nxn de procesos dada, siendo A^{kk} creciente y A^{kh} de variación integrable y continuos, sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$.

<u>Formulación Integral</u>: Encontrar una medida de probabilidad P sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$N_t(w) = x_t(w) - x - \int_0^t b(s,x_s(w))\, dV_s(w)$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con $N_t \otimes N_t$ matriz nxn dada por

$$\langle N\rangle_t^{ij}(w) = \sum_{kh=1}^{n} \int_0^t a_{ik}(s,x_s(w))a_{jh}(s,x_s(w))\, dA_s^{kh}(w)$$

A^{kh} dada igual que en la anterior formulación.

<u>Formulación en ecuaciones diferenciales estocásticas</u>: Encontrar una medida de probabilidad P y un proceso M_t sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que a) M_t sea $(P, \mathbb{F}_t)$ martingala continua de cuadrado integrable con $\langle M^k, M^h\rangle_t = A_t^{kh}$ dado como antes b) $dx_t = a(t,x_t(w))dM_t(w) + b(t,x_t(w))dV_t(w)$ con $x_t(o)=x$ c.s.P, $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Formulación mediante operadores en derivadas parciales</u>: Encontrar una medida de probabilidad P sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$:

$$H_t = f(x_t(w)) - f(x) - \int_0^t \sum_{j=1}^{n} L_1^j(f)(x_s(w))\, dV_s^j(w) -$$

$$- \int_0^t \sum_{kh=1}^{n} L_2^{kh}(f)(x_s(w))\, dA_s^{kh}(w)$$

donde

$$L_1^j(f) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad ; \quad L_2^{kh}(f) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} a_{ik}(t,x) a_{jh}(t,x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

con A^{kh} como antes, es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala.

En la primera parte de la memoris hacemos un estudio de estas formulaciones y no hacemos resticción alguna sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ y además consideramos a V_t como un proceso, no como una función. Estudiamos propiedades de cada formulación dando relaciones entre cada dos de ellas y establecemos condiciones en las que las cuatro formulaciones son equivalente entre si.

Estas cuatro formulaciones, como técnica de trabajo pueden tener importancia para el estudio de problemas con condiciones frontera en términos de estos operadores en derivadas parciales, siendo éste otro campo de investigación que queda abierto despues del resultado de existencia de solución débil que damos en esta memoria.

En la segunda y última parte, establecemos el teorema de existencia. Aquí utilizamos las formulaciones equivalentes en condiciones mas restictivas que en las que se han estudiado en la primera parte.

La unicidad de las soluciones débiles de (4) es un problema que merece un comentario adicional. En las ecuaciones diferenciales estocásticas de Ito, la unicidad de las soluciones se obtiene a partir de hipótesis de Lipschitz sobre los coeficientes para el caso de soluciones fuertes ó bien a partir de propiedades conocidas de los procesos de Ito para las

soluciones débiles. Para cada tipo de solución hay un criterio de unicidad adecuado: unicidad en ley para las soluciones débiles y, unicidad trayectorial para las soluciones fuertes, relacionados ambos criterios como se muestra en T.Yamada-Sh. Watanabe (1.971).

La demostración que dan D. Stroock y S.R.S. Varadhan (1.969) de la unicidad de soluciones débiles está basada en el conocimiento previo de propiedades probabilísticas de los procesos de Ito, concretamente la propiedad de ser procesos fuertemente markovianos, y ésta se obtiene a partir de propiedades del generador de estos procesos: un operador parabólico en derivadas parciales de segundo orden relacionado con el semigrupo de operadores de transición de estos procesos. Este generador determina las soluciones débiles de las ecuaciones de Ito.

Ahora bien, aunque actualmente no se conocen propiedades que determinen cualitativamente las soluciones de la ecuación (4), nosotros obtenemos en las formulaciones equivalentes dos operadores en derivadas parciales de primero y segundo orden que caracterizan dichas soluciones, y esto nos hace pensar que estas soluciones no sean markovianas, sino la composición (en algún sentido) de dos procesos markovianos. Desde este punto de vista pensamos que, podría obtenerse una propiedad de unicidad para las soluciones débiles.

PRELIMINARES.

Damos aquí algunas propiedades y definiciones que serán de utilidad para la comprensión y desarrollo de la presente memoria.

En cada cuestión se indican referencias bibliográficas donde pueden ser consultadas con mayor profundidad.

Cuando no se indique otra situación nos referiremos al espacio probabilístico $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ completo y dotado de una familia $(\mathbb{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sub-σ-álgebras de $\mathbb{F}$, crciente y continua a la derecha. Suponemos que $\mathbb{F}_o$ contiene todos los conjuntos nulos de $\mathbb{F}$.

<u>Definición de Proceso Previsible.</u>

Un proceso estocástico $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una familia de variables aleatorias reales sobre Ω. Se dice que es $\mathbb{F}_t$-adaptado si X_t es $\mathbb{F}_t$-medible para todo t. Un proceso estocástico adaptado X se dice que es previsible, si la función $(t,w) \longrightarrow X_t(w)$ es medible con respecto a la σ-álgebra sobre $\mathbb{R}_+ x \Omega$, generada por los procesos adaptados cuyas trayectorias son continuas a la izquierda.

Vease: P.A. MEYER (1.966)(1.967)(1.970)(1.976)

<u>Definición de Martingala.</u>

Sea $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso estocástico con valores reales, adaptado a la familia $(\mathbb{F}_t)$. Se dice que (X_t) es una martingala (resp. supermartingala, submartingala) con respecto a

la familia $(\mathbb{F}_t)$ si:

1) cada variable aleatoria X_t es integrable;

2) para cada par de elementos s,t de $\mathbb{R}_+$ tales que $s \leq t$ se tiene $E(X_t | \mathbb{F}_s) = X_s$ c.s. (resp. $\leq X_s$, $\geq X_s$).

Vease: P.A. MEYER (1.966) (1.967)

Variables aleatorias uniformemente integrables.

Las variables aleatorias que se consideran son reales y se definen sobre el mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

Definición:

Sea $\mathcal{H}$ una parte del espacio $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, P)$. Se dice que es un conjunto uniformemente integrable de variables aleatorias si la integral

$$\int_{\{|f| \geq c\}} |f(w)| \, dP(w) \qquad f \in \mathcal{H}$$

tiende a cero cuando el número positivo c tiende a infinito.

Teorema de convergencia:

Sea (X_t) una submartingala continua a la derecha.

a) Supongamos que se tiene $\sup_t E(X_t^-) < \infty$ (1), entonces las variables aleatorias X_t convergen c.s. P a una variable aleatoria integrable X_∞ cuando $t \longrightarrow \infty$.

b) Supongamos que las X_t son uniformemente integrables y el proceso (X_t) es una martingala, entonces se verifica (1) y el proceso $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}}$ es una martingala.

Vease: P.A.MEYER (1.966)

Desigualdad de Doob ó Inecuación Martingala.

Si X_t es una martingala separable, J es un subconjunto numerable del intervalo $I^s = [s, \infty)$ $\forall s \geq o$, y $t \in J$, entonces

$$P\left[\sup_{u \in J \cap I_t^s} |X(u)| \geq c\right] \leq \frac{1}{c} E\left[|X(t)|\right], \quad c>o, \quad I_t^s = [s,t]$$

Vease: P.A. MEYER (1.966) ; D.W. STROOCK - S.R.S. VARADHAN (1.969)

Definición de Proceso creciente.

El proceso (X_t) definido sobre es creciente si es $\mathbb{F}_t$ adaptado y sus trayectorias son funciones crecientes continuas a la derecha.

Vease: P.A. MEYER (1.967)(1.970)(1.976); Ph. COURREGE (1.962); H.KUNITA-Sh. WATANABE (1.967)

Proceso creciente asociado a una martingala de cuadrado integrable.

Sea M una martingala de cuadrado integrable. Entonces existe un único proceso creciente continuo a la derecha nulo en cero A, tal que el proceso $(M_t^2 - A_t)$ sea una martingala.

Vease: P.A. MEYER (1.967) (1.970)(.976); Ph. COURREGE (1.962); H.KUNITA-Sh.WATANABE (1.967)

Teorema de A.V. SKOROKHOD.

Sea $W=C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, dotamos a este espacio de funciones continuas de la topología de la convergencia uniforme sobre

los intervalos compactos de $\mathbb{R}_+$. Sea $\mathbb{B}$ la σ-álgebra de los conjuntos Borelianos sobre W. Consideramos sobre W la familia $(\mathbb{B}_t)_{t\geq o}$ creciente de sub-σ-álgebras de $\mathbb{B}$ generada por las funciones continuas x_s, $s \leq t$.

Sea $A: \mathbb{R}_+ \times W \longrightarrow R$ tal que:

1) para cada $t>o$ es $\mathbb{B}_t$-medible

2) cada $x(.) \in W$ es no negativa, no decreciente y continua como función de t

3) $A(t,x(.))$ es continua en $(t,x(.))$

4) existe una función no decreciente K_t, y $q < 9/16\sqrt{312}$ tales que

$$A(t,x(.)) \leq K_t \left(1+ \int_o^t x^2(s)ds \right) + q \, \|x\|_t^2$$

donde $\|x\|_t = \sup_{o\ s\ t} |x(s)|$

5) existe una función $\varepsilon(t,\delta)$ tal que $\forall t>o$ $\lim_{\delta \downarrow o} \varepsilon(t,\delta) = o$, y

$$\sum_{k=o}^{n} \left[A(s_{k+1},x(.)) - A(s_k,x(.)) \right]^2 \leq \varepsilon(t,\delta) \left(1+ \|x\|_t^4 \right)$$

donde $o=s_o < s_1 < \ldots < s_{n+1}=t$ y $\max(s_{k+1}-s_k) < \delta$

Entonces existe una martingala M de cuadrado integrable continua tal que $M_t^2 - A_t$ es martingala.

Vease: A.V. SKOROKHOD (1.975); M.P. ERSOV (1.974)

<u>Definición del corchete $\langle M,M \rangle$</u>.

Se denota por $\langle M,M \rangle$ al único proceso creciente previsible tal que $\langle M,M \rangle_o = M_o^2$ y que $M^2 - \langle M,M \rangle$ sea una martinga-

la.

Vease: P.A. MEYER (1.967)(1.970)(1.976); Ph. COURREGE (1.962); H.KUNITA-Sh.WATANABE (1.967)

Definición del corchete M,N .

Sean M y N martingalas de cuadrado integrable. Se define el corchete $\langle M,N\rangle$ como

$$\langle M,N\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle M+N,M+N\rangle - \langle M,M\rangle - \langle N,N\rangle\right)$$

Vease P.A. MEYER (1.970)(1.976)

Otra expresión del corchete $\langle M,N\rangle$.

Sean M y N martingalas de cuadrado integrable. Consideremos el intervalo $[o,t]$, y sea $t_i^n = it2^{-n}$ para $0 \leq i \leq 2^n$.

Catherine DOLEANS-DADE ha probado que se tiene, en el sentido de la convergencia de L^1

$$\langle M,N\rangle_t = \lim_n \sum_i E\left[(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n}) \,\middle|\, \mathbb{F}_{t_i^n}\right] + M_o N_o$$

Vease: P.A.MEYER (1.976)

Integración estocástica de procesos previsibles respecto a una martingala de cuadrado integrable.

Designemos por Λ al espacio de procesos previsibles acotados (H_t) escalonados sobre $\mathbb{R}_+$: existe una subdivisión (t_i) tal que $H_t = h_i$ para $t\ (t_i, t_{i+1}]$, las variables h_i son $\mathbb{F}_{t_i}$-medibles, acotadas y H_o es $\mathbb{F}_o$-medible y acotada. En

estas condiciones, sea M una martingala de cuadrado integrable. Entonces el proceso $H \bullet M = \int_0^t H_s dM_s$ es una martingala de cuadrado integrable y se tiene

$$E\left[(H\ M)_\infty^2\right] = E\left[\int_{0-}^{\infty} H_s^2\ d\langle M,M\rangle_s\right]$$

Teorema 1.

Sea $L^2(M)$ el espacio de procesos previsibles H tales que:

$$\|H\|_{L^2(M)} = \left(E\left[\int H_s^2\ d\langle M,M\rangle_s\right]\right)^{1/2} < \infty$$

Entonces la aplicación lineal $H \longrightarrow H \bullet M$ de Λ en el espacio de las martingalas de cuadrado integrable se prolonga de manera única a una aplicación lineal y continua (una isometria) de $L^2(M)$ en el espacio de las martingalas de cuadrado integrable. Para toda $H \in L^2(M)$ los procesos $\Delta(H\ M)_t$ y $H_t \Delta M_t$ son indistinguibles.

Teorema 2.

Sea $H \in L^2(M)$. Entonces, para toda martingala de cuadrado integrable N se tiene

$$E\left[\int_{0-}^{\infty} |H_s|\ |d\langle M,N\rangle_s|\right] < \infty.$$

La integral estocástica $L=H \bullet M$ esta caracterizada como la única martingala de cuadrado integrable tal que para cualquiera que sea N, martingala de cuadrado integrable,

$$E\left[L_\infty N_\infty\right] = E\left[\int_{0-}^{\infty} H_s\ d\langle M,N\rangle_s\right]$$

y entonces se tiene para todo N $\langle L,N\rangle = H \bullet \langle M,N\rangle$

Vease: P.A. MEYER (1.976)

Definición de Semimartingala.

Se dice que un proceso (X_t) es una semimartingala si admite una descomposición de la forma

$$X_t = X_o + M_t + A_t$$

donde M_t es una martingala de cuadrado integrable y A_t un proceso creciente.

Vease: P.A. MEYER (1.970)(1.976)

Fórmula de Cambio de Variables.

Sean n semimartingalas continuas

$$X^i = X_o^i + M^i + A^i \qquad i=1,\ldots,n$$

donde M^i es una martingala continua de cuadrado integrable y A^i un proceso creciente continuo. Sea Y^i $i=1,\ldots,n$ el un proceso con valores en $\mathbb{R}^n$. Sea F una función definida en $\mathbb{R}^n$, que admite derivadas parciales continuas de órdenes 1 y 2. El proceso $(F\circ Y_t)$ es, entonces una semimartingala continua que admite la descomposición

$$F\circ Y_t = F\circ Y_o + \sum_{i=1}^{n} \int_o^t D^i F\circ Y_s \, dM_s^i + \sum_{i=1}^{n} \int_o^t D^i F\circ Y_s \, dA_s^i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} \int_o^t D^i D^j F\circ Y_s \, d\langle M^i, M^j\rangle_s$$

(Tambien es conocida con el nombre de Fórmula de Ito, aunque es una generalización de ella).

Vease: P.A. MEYER (1.967)(1.970)(1.976)

Definición de Proceso de Variación Acotada.

Un proceso estocástico X_t se dice que es de variación acotada si sus trayectorias son funciones de variación acotada sobre todo intervalo finito, continuas a la derecha y nulo en el instante cero.

Vease: P.A. MEYER (1.970)

Integral estocástica respecto a un proceso de variación acotada.

Si V es un proceso de variación acotada, se puede definir la integral estocástica $\int_0^t X_s \, dV_s$ para todos aquellos procesos X para los que la integral de Stieltjes $\int_0^t X_s(w) dV_s(w)$ tiene sentido. En este caso, el proceso $\left(\int_0^t X_s dV_s\right)$ es tambien un proceso de variación acotada.

Vease: P.A. MEYER (1.970)

Fórmula de integración por partes.

Sea M una martingala de cuadrado integrable y sea V un proceso de variación acotada tal que

$$E\left[\int_0^t V_{s-}^2 \, d\langle M,M\rangle_s\right] < \infty \qquad \text{para todo } t.$$

El proceso

$$V_t M_t - \int_0^t M_s \, dV_s$$

es entonces, una martingala igual a la integral estocástica $\int_0^t V_{s-} \, dM_s$

Vease: P.A. MEYER (1.967)(1.970)

Definición de tiempo de parada.

Una variable aleatoria positiva T definida sobre Ω es un tiempo de parada relativo a la familia $(\mathbb{F}_t)$ si T verifica que $\{T \leq t\} \in \mathbb{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Vease: P.A. MEYER (1.966)

Definición de Martingala Local.

Se dice que el proceso M_t es una martingala local si es $\mathbb{F}_t$-adaptado, nulo en t=o y, si existe una sucesión de tiempos de parada $T_n \uparrow \infty$ tales que los procesos parados M_{T_n} son martingalas uniformemente integrables.

Vease: P.A. MEYER (1.970)(1.976)

Definición de proceso previsible localmente acotado.

Diremos que un proceso previsible X_t es localmente acotado, si existe una sucesión creciente $\{T_n\}$ de tiempos de parada, tal que $\lim_n T_n = \infty$ c.s. y los procesos $(X_{t \wedge T_n} I_{\{T_n > o\}})$ son acotados.

Vease: P.A. MEYER (1.970)(1.976)

Integral estcástica de un proceso previsible localmente acotado respecto de una martingala local.

Si M es una martingala local y X un proceso previsible localmente acotado, entonces la integral estocástica

$(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s \, dM_s$ es una martingala local.

Vease: P.A. MEYER (1.970)(1.976)

Criterio de PROKHOROV.

Sea $P(\Omega)$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathbb{F})$, lo dotamos de la topología de la convergencia estrella (topología de la convergencia simple para funciones continuas y acotadas sobre Ω) dotado de esta topología $P(\Omega)$ es un espacio polaco.

Sea $\mathcal{H}$ una parte de $P(\Omega)$. $\mathcal{H}$ es relativamente compacta si y solo si para todo $\varepsilon > o$ existe un compacto K_ε de Ω tal que para todo $\mu \in \mathcal{H}$ se tiene $\mu(\Omega - K_\varepsilon) < \varepsilon$

Vease: K.R. PARTHASARATHY (1.967).

P.A. MEYER (1.970).

Una condición suficiente del Criterio de PROKHOROV.

Sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}$ un conjunto de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathbb{F})$. V un proceso $\mathbb{F}_t$-adaptado de variación acotada con valores en $\mathbb{R}^n$, $V_o = o$. Se supone

1) $\forall P \in \mathcal{H}$, $P(X_o \in K) = 1$

2) $\forall P \in \mathcal{H}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $(\theta, X_t - V_t)$ es una martingala de proceso creciente A_t^θ, tal que $\forall \theta$: $|\theta| \leq 1$ $|A_t^\theta - A_s^\theta| \leq k|t-s|$

3) $\|V_t - V_s\| \leq k|t-s|$

entonces $\mathcal{H}$ es débilmente relativamente compacta. Donde X_t es un proceso y k una constante positiva.

Vease: P. PRIOURET (1.974)

<u>Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones integrales estocásticas.</u>

Sea M una martingala local respecto a $(\mathbb{F}_t)$, $\mathbb{F}_t$ adaptada, continua a la derecha, con límite a la izquierda. Sea A un proceso $\mathbb{F}_t$-adaptado con variación finita sobre cada intervalo finito. Sea H un proceso $\mathbb{F}_t$-adaptados continuo por la derecha con límite por la izquierda. Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}_+ x \Omega x \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se supone que verifican las siguientes propiedades:

1) $\forall\ w,s,x,y \quad |g(s,w,x)-g(s,w,y)| + |f(s,w,x)-f(s,w,y)| \leq k|x-y|$

2) $\forall w$, $\forall x$, las funciones f y g son continuas a la izquierda y tienen limite a la derecha en la variable t

3) $\forall\ (t,x)$ fijado, las funciones $f(t,.,x)$ y $g(t,.,x)$ son $\mathbb{F}_t$-medibles

Entonces existe uno y solo uno proceso $\mathbb{F}_t$-adaptado continuo a la derecha con limite por la izquierda que satisface la ecuación integral estocástica:

$$X_t = H_t + \int_0^t f(s,X_{s-})\, dM_s + \int_0^t g(s,X_{s-})dA_s$$

Vease: Catherine DOLEANS-DADE (1.976), Ph.E. PROTTER (1.977)

I: FORMULACIONES EQUIVALENTES.

En esta primera parte formulamos cuatro problemas, estudiamos sus propiedades y las relaciones que existen entre cada dos de ellos estableciendo tambien las condiciones en que los cuatro son equivalentes.

Antes de enunciarlos, vamos a dar las hipótesis que son comunes a las cuatro formulaciones.

Sea $(W, \mathbb{F})$ un espacio medible y, $(\mathbb{F}_t)_{t\geq o}$ una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\mathbb{F}$ continua por la derecha.

Sea $x: \mathbb{R}_+ x W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un proceso estocástico con trayectorias continuas, $\mathbb{F}_t$-adaptado, y su valor en $\mathbb{R}^n$ lo denotamos por $x(t,w)$. Si no hay lugar a confusión omitimos w y escribimos x_t ó $x(t)$.

Sea A una matriz simétrica dada de dimensión nxn, cuyos elementos A^{ij} definidos sobre $\mathbb{R}_+ x W$ con valores en $\mathbb{R}$ son procesos con trayectorias continuas, nulos en el origen, $\mathbb{F}_t$-adaptados y tales que: si $i\neq j$ las trayectorias de A^{ij} son funciones de variación finita, y si $i=j$ las trayectorias de A^{ii} son funciones crecientes.

Sean a y b funciones de $\mathbb{R}_+ x \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ continuas y, a es tal que $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$ verifica

$$o \leq \sum_{i,j=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_u^t \sum_{k,h=1}^{n} a_{ik}(s,x)\, a_{jh}(s,x)\, dA_s^{kh} \leq C|\theta|^2$$

donde C es una constante real positiva, $u \in [o,t]$, cualquiera.

Sea, por último, $V: \mathbb{R}_+ x W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un proceso estocástico $\mathbb{F}_t$-adaptado con trayectorias continuas y de variación acotada.

Bajo estas hipótesis establecemos las cuatro formulaciones.

1. Formulación Exponencial.

Encontrar una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$

$$X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta\ ,\ x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\ dV_s) - \frac{1}{2}\ (\theta,\ \langle N\rangle_t \theta\ )\right\}$$

es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, donde $\langle N\rangle_t$ es una matriz nxn de elementos

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}$$

Propiedades.

Suponiendo la existencia de una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ que resuelve el problema planteado, vamos a obtener propiedades de esta Formulación.

Teorema 1.1.-

Sea P una medida de probabilidad sobre $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$. Si para algún subconjunto numerable J de $[\alpha, \infty)$ siendo α no negativo cualquiera y, para algún $\theta \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$X_\theta^\alpha(t) = \exp\left\{(\theta,\ x_t - x_o - \int_\alpha^t b(s,x_s)\ dV_s) - \frac{1}{2}\ (\theta, \langle N^\alpha\rangle_t\ \theta\ )\right\}$$

es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala para $t \in J$, siendo $\langle N^\alpha\rangle_t$ una matriz nxn de elementos

$$\langle N^\alpha\rangle_t = \sum_{kh=1}^{n} \int_\alpha^t a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}$$

entonces:

1) $\forall \gamma \geqslant \alpha$, $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$: $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala.

Si adamás, J es denso en $[\alpha, \infty)$ $\forall \alpha \geqslant o$ y, para $t \in J$: $X_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala cuando $\theta \in O$, siendo O un subconjunto denso en $\mathbb{R}^n$, entonces:

2) $\forall \gamma \geqslant \alpha$ y $l > o$ se tiene

$$P\left[\sup_{\gamma \leqslant u \leqslant t} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\, dV_s \right| \geqslant l\right] \leqslant 2n \exp\left\{-\frac{l^2}{2C}\right\}$$

3) $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [\gamma, \infty)$: $X_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala.

Demostración.

1) Vamos a probar que $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala para todo $\gamma \geqslant \alpha$ y para $t \in J \cap [\gamma, \infty)$. Ya que $X_\theta^\gamma(t)$ es positiva para cualquier t de $\mathbb{R}_+$ puede expresarse como $X_\theta^\alpha(t)\, X_\theta^\gamma(t)\, [X_\theta^\alpha(t)]^{-1}$. Pero

$$X_\theta^\gamma(t)\left[X_\theta^\alpha(t)\right]^{-1} = \exp\Big\{(\theta,\ x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N^\gamma\rangle_t \theta) - \\ -(\theta, x_t - x_\alpha - \int_\alpha^t b(s,x_s)\, dV_s) + \frac{1}{2}(\theta, \langle N^\alpha\rangle_t \theta)\Big\}$$

operando y teniendo en cuenta que

$$(\theta, \langle N^\delta\rangle_t \theta) = \sum_{i,j=1}^n \theta_i \theta_j \int_\delta^t \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

para $\delta = \gamma \text{ ó } \alpha$, se tiene

$$X_\theta(t)\left[X_\theta(t)\right]^{-1} = \exp\Big\{-(\theta,\ x_\gamma - x_\alpha - \int_\alpha^\gamma b(s,x_s)\, dV_s) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i \theta_j \int_\alpha^\gamma \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}\Big\}$$

que es independiente de t, e igual a $-X_\theta^\alpha(\gamma)$.

Sean $t_1, t_2 \in J$ tales que $t_1 \leq t_2$ con $t_1 \geqslant \gamma$, entonces, como $\alpha \leq \gamma$

se tiene que $t_1, t_2 \in J \cap [\gamma, \infty)$, vamos a probar que

$$E^P\left[X_\theta^\gamma(t_2) \mid \mathbb{F}_{t_1}\right] = X_\theta^\gamma(t_1).$$

Por hipótesis $X_\theta^\alpha(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall t \in J$, entonces $-X_\theta^\alpha(t)$ tambien lo es $\forall t \in J$ y, por tanto lo es $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$. Por ser $-X_\theta^\alpha(t)$ $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, pues, para $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$ es $\mathbb{F}_t$-medible $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$, en particular, como $t_1 \in J \cap [\gamma, \infty)$ se tiene que $-X_\theta^\alpha(t)$ es $\mathbb{F}_{t_1}$-medible $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$, y como J es un subconjunto numerable de $[\alpha, \infty)$ y $\gamma \geqslant \alpha$ entonces se tiene que $\gamma \in J \cap [\gamma, \infty)$, por lo tanto $-X_\theta^\alpha(\gamma)$ es $\mathbb{F}_{t_1}$-medible. Utilizando el hecho de ser $X_\theta^\alpha(t)$ $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala y que $-X_\theta^\alpha(\gamma)$ es $\mathbb{F}_{t_1}$-medible se tiene:

$$E^P\left[X_\theta^\gamma(t_2) \mid \mathbb{F}_{t_1}\right] = E^P\left[X_\theta^\alpha(t_2)\left[-X_\theta^\alpha(\gamma)\right] \mid \mathbb{F}_{t_1}\right] =$$

$$= \left[-X_\theta^\alpha(\gamma)\right] E^P\left[X_\theta^\alpha(t_2) \mid \mathbb{F}_{t_1}\right] = -X_\theta^\alpha(\gamma)\, X_\theta^\alpha(t_1) = X_\theta^\gamma(t_1)$$

por lo tanto $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala $\forall \gamma \geqslant \alpha$ y $t \in J \cap [\gamma, \infty)$ como queriamos probar.

2) Vamos a probar que $\forall \gamma \geqslant \alpha$ y $l > 0$ se tiene

$$P\left[\sup_{\gamma \leq u \leq t} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s, x_s)\, dV_s \right| \geqslant l \right] \leq 2n \exp\left\{ -\frac{l^2}{2C} \right\}$$

De la definición de $X_\theta^\gamma(t)$ se tiene

$$\exp\left\{ (\theta,\ x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s, x_s)\, dV_s) \right\} =$$

$$= X_\theta^\gamma(t) \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \theta_i \theta_j \int_\gamma^t \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s, x_s) a_{jh}(s, x_s)\, dA_s^{kh} \right\}$$

entonces si

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t} (\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s) \geqslant 1|\theta|$$

se tiene, para la exponencial

$$\exp\left\{ \sup_{\gamma\leq u\leq t} (\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s)\right\} \geqslant \exp\{1|\theta|\}$$

ó bien

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t} \exp\left\{(\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s)\right\} \geqslant \exp\{1|\theta|\}$$

teniendo en cuenta el valor de la exponencial que se tiene

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t}\left[X_\theta^\gamma(u)\ \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i\theta_j \int_\gamma^u \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}\right\}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{1|\theta|\}$$

es decir

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta(u) \sup_{\gamma\leq u\leq t} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i\theta_j \int_\gamma^u \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{1|\theta|\}$$

ahora bien

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i\theta_j \int_\gamma^u \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sup_{\gamma\leq u\leq t} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i\theta_j \int_\gamma^u \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \theta_i\theta_j \int_\gamma^t \sum_{k,h=1}^n a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}\right\}$$

sustituyéndolo en la expresión anterior y despejando $\sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u)$ se tiene:

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta(u) \geqslant \exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i\theta_j\int_\gamma^t\sum_{k,h=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}\right\}\exp\{1|\theta|\}$$

Por hipótesis sabemos que

$$0 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\theta_i\theta_j\int_0^t\sum_{k,h=1}^{n} a_{ij}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh} \leqslant C|\theta|^2$$

entonces hemos probado que si

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t}\left(\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s\right) \geqslant 1|\theta|$$

entonces $\sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u) \geqslant \exp\left\{1|\theta| - \frac{1}{2}C|\theta|^2\right\}$

por lo tanto

$\left\{w: \sup_{\gamma\leq u\leq t}\left(\theta, x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s\right) \geqslant 1|\theta|\right\}$ está contenido en el

$\left\{w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u) \geqslant \exp\left\{1|\theta| - \frac{1}{2}C|\theta|^2\right\}\right\}$

tomando probabilidades se tiene que

$$P\left[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t}\left(\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\ dV_s\right) \geqslant 1|\theta|\right] \leqslant$$

$$\leqslant P\left[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u) \geqslant \exp\left\{1|\theta| - \frac{1}{2}C|\theta|^2\right\}\right]$$

Ahora bien, por hipótesis a y b son continuas y x es un proceso que tiene trayectorias continuas, luego $X_\theta^\gamma(t)$ es continua en $t\in\mathbb{R}_+$, entonces la $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $X_\theta^\gamma(u)$ para $u\in[\gamma,t]$ es continua, por tanto separable, y como por hipótesis J es denso en $[\alpha,\infty)$ es denso tambien en cualquier subconjunto de $[\alpha,\infty)$ en particular lo es en $[\gamma,\infty)$ $\forall\gamma\geqslant\alpha$ por esto se tiene

$$\sup_{u\in J\cap[\gamma,t]} X_\theta^\gamma(u) = \sup_{u\in[\gamma,t]} X_\theta^\gamma(u)$$

y podemos, pues, aplicar la desigualdad de Doob con lo que

$$P\Big[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u) \geqslant \exp\Big\{l|\theta| - \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big\{-l|\theta| + \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}\, E^P\big[X_\theta^\gamma(t)\big] \qquad \forall t\in J.$$

Por hipótesis $X_\theta^\alpha(t)$ $\forall t\in J$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, entonces por lo probado en 1) $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala para $t\in J\cap[\gamma, \infty)$, luego es $\mathbb{F}_t$-medible para $\forall t\in J\cap[\gamma, \infty)$, en particular para $t=\gamma$ es $\mathbb{F}_\gamma$-medible, por lo tanto $E^P\big[X_\theta^\gamma(t)\,|\,\mathbb{F}_\gamma\big] = X_\theta^\gamma(\gamma) = 1$ y $E^P\big[X_\theta^\gamma(t)\big] = E^P\Big[E^P\big[X_\theta^\gamma(t)\,|\,\mathbb{F}_\gamma\big]\Big] = E^P\big[X_\theta^\gamma(\gamma)\big] = 1$, luego obtenemos

$$P\Big[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} X_\theta^\gamma(u) \geqslant \exp\Big\{l|\theta| - \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}\Big] \leqslant \exp\Big\{-l|\theta| + \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}$$

$\forall t\in J$, $\forall\theta\in O$. Entonces se tiene

$$P\Big[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} \Big(\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\,dV_s\Big) \geqslant l|\theta| \leqslant \exp\Big\{-l|\theta| + \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}$$

$\forall t\in J$, $\forall\theta\in O$. Como O es denso en $\mathbb{R}^n$ y, por la forma en que está definida $X_\theta(t)$ se tiene que es continua en la variable θ, resulta que el anterior resultado es cierto $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$. Es decir $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$ tenemos:

$$P\Big[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} \Big(\frac{\theta}{|\theta|},\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\,dV_s\Big) \geqslant l\Big] \leqslant \exp\Big\{-l|\theta| + \frac{1}{2}C|\theta|^2\Big\}$$

llamando $\bar\theta$ a $\frac{\theta}{|\theta|}$ se tiene que $|\bar\theta|=1$, y tomando $\theta\in\mathbb{R}^n$ tal que $|\theta| = \frac{l}{C}$ queda

$$P\Big[w: \sup_{\gamma\leq u\leq t} \Big(\bar\theta,\ x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)\,dV_s\Big) \geqslant l\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big\{-\frac{l^2}{C} + \frac{l^2 C}{2C^2}\Big\} = \exp\Big\{-\frac{l^2}{2C}\Big\}$$

en particular, tomando primero $\bar{\theta} = (o,\ldots,1_{(i)},\ldots,o)$ y despues $\bar{\theta} = (o,\ldots,-1_{(i)},\ldots,o)$ se obtienen las relaciones

$$(1.1)\quad P\Big[w:\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ (x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\ ) \geqslant 1\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big\{-\frac{1^2}{2C}\Big\}$$

$$(1.2)\quad P\Big[w:\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ (-x_u^i + x_\gamma^i + \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j) \geqslant 1\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big\{-\frac{1^2}{2C}\Big\}$$

Por otra parte, utilizando en $\mathbb{R}^n$ la norma del supremo se tiene

$$\Big|x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)dV_s\Big| = \sup_{1\leq i\leq n}\Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big|$$

entonces

$$\Big\{w:\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \Big|x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)dV_s\Big| \geqslant 1\Big\} =$$

$$= \Big\{w:\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \sup_{1\leq i\leq n}\ \Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big| \geqslant 1\Big\} =$$

$$= \Big\{w:\ \sup_{1\leq i\leq n}\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big| \geqslant 1\Big\}$$

Sea $\quad A = \Big\{w:\ \sup_{1\leq i\leq n}\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big| \geqslant 1\Big\}$

Sea $\quad B_i = \Big\{w:\ \sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big| \geqslant 1\Big\}$

vamos a probar que $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Si $w \in A$, entonces existe, un i tal que

$$\sup_{\gamma\leq u\leq t}\ \Big|x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\Big| \geqslant 1$$

entonces $w \in B_i$ por tanto $w \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Si, por el contrario, $w \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, existe al menos un i tal que $w \in B_i$, tomando supremos

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{\gamma \leq u \leq t} \left| x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)dV_s^j \right| \geq$$

$$\geq \sup_{\gamma \leq u \leq t} \left| x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)dV_s^j \right| \geq 1$$ esto implica que $w \in A$.

Tomando probabilidades se tiene $P(A) \leq \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$ y teniendo en cuenta las relaciones (1.1) y (1.2) se obtiene:

$$P\left[w: \sup_{\gamma \leq u \leq t} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)dV_s \right| \geq 1\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left\{ P\left[w: \sup_{\gamma \leq u \leq t} (x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)dV_s^j) \geq 1\right] + \right.$$

$$\left. + P\left[w: \sup_{\gamma \leq u \leq t} (x_u^i - x_\gamma^i - \int_\gamma^u \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)dV_s^j) \leq -1\right] \right\} \leq$$

$$\leq 2n \exp\left\{ - \frac{l^2}{2C} \right\}$$

Por lo tanto $\forall \gamma \geq \alpha \geq o$ y $l > o$ se ha obtenido

$$(1.3) \quad P\left[\sup_{\gamma \leq u \leq t} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s,x_s)dV_s \right| \geq l\right] \leq 2n \exp\left\{ - \frac{l^2}{2C} \right\}$$

3) Queda, para concluir el teorema probar que $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall t$ $[\gamma, \infty)$ y $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, siendo $\gamma \geq \alpha \geq o$ cualquiera. Para ello vamos a hacer uso de un teorema de convergencia de P.A.Meyer para variables aleatorias uniformemente integrables, teorema que damos enunciado y referido en los Preliminares. Verifiquemos, pues sus hipótesis. En 1) probamos que $\forall t \in J \cap [\gamma, \infty)$ y $\forall \theta \in O$: $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala. Por otra parte J es un

subconjunto denso en $[\alpha, \infty)$, por tanto tambien lo es en $[\gamma, \infty)$ luego cualquier t de $[\gamma, \infty)$ es límite de una sucesión $\{t_n\}$: $\forall n$, $t_n \in J \cap [\gamma, \infty)$. Además, como O es un subconjunto denso en $\mathbb{R}^n$, cualquier θ de $\mathbb{R}^n$ es límite de una sucesión $\{\theta_n\}$: $\forall n$, $\theta_n \in O$, entonces se tiene que $X^{\gamma}_{\theta_n}(t_n)$ es $\forall n$ $(P, \mathbb{F}_{t_n})$-martingala siendo t_n cualquiera de $J \cap [\gamma, \infty)$. En virtud de la continuidad de $X^{\gamma}_{\theta_n}(t_n)$ como función de θ_n y t_n $\forall n$, y de la continuidad por la derecha de la familia creciente $(\mathbb{F}_{t_n})$ se tiene que la sicesión de variables aleatorias $X^{\gamma}_{\theta_n}(t_n)$ converge en probabilidad a la variable aleatoria $X^{\gamma}_{\theta}(t)$ donde $\theta = \lim_n \theta_n$, $t = \lim_n t_n$. Vamos a probar que $X^{\gamma}_{\theta}(t)$ es integrable, es decir probamos que $E^P\left[\sup_{\gamma \leq t \leq T} X^{\gamma}_{\theta}(t)\right] \leq \infty$.

Sabemos que $X^{\gamma}_{\theta}(t)$ es de la forma

$$\exp\Big\{\Big(\theta\,,\, x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s\Big) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j \int_\gamma^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}\Big\}$$

como $\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j \int_\gamma^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh} \geqslant 0$ se tiene que la exponencial, de esta expresión con el signo menos, es menor ó igual a uno. Por lo tanto

$$X_\theta(t) \leq \exp\Big\{\Big(\theta\,,\, x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s\Big)\Big\} \leq \\ \leq \exp\Big\{|\theta|\, \Big|x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s\Big|\Big\}$$

entonces, tomando supremo en $t \in [\gamma, T]$, intercambiando la exponencial con el supremo y llamando, por abreviar Y a la

expresión $|\theta| \sup_{\gamma \leq t \leq T} |x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s|$, vamos a probar que $E^P[\exp Y] < \infty$. Por definicion de esperanza matemática

$$E^P[\exp Y] = \int_0^\infty P(e^Y > u)\, du = \int_0^\infty P(e^Y > e^u)\, d(e^u) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty P(e^Y > e^u)\, e^u\, du .$$

Como e^Y es creciente e inyectiva $\{e^Y > e^u\} = \{Y > u\}$ por tanto

$$\int_{-\infty}^0 P(e^Y > e^u)\, e^u\, du = \int_{-\infty}^0 P(Y > u)\, e^u\, du = \int_{-\infty}^0 e^u\, du = 1$$

ya que, por ser $Y \geq 0$, y $u\ (-\infty, 0]$ se tiene $P(Y > u) = 1$,

entonces $E^P[e^Y] = 1 + \int_0^\infty P(e^Y > e^u)\, e^u\, du = 1 + \int_0^\infty P(Y > u) e^u du$

Vamos a calcular $P(Y > u)$:

$$P(Y > u) = P\left[\sup_{\gamma \leq t \leq T} |\theta|\, |x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s| > u\right] =$$

$$= P\left[\sup_{\gamma \leq t \leq T} |x_t - x_\gamma - \int_\gamma^t b(s,x_s)\, dV_s| > \frac{u}{|\theta|}\right] \leq$$

$$\leq 2n \exp\left\{-\frac{u^2}{2|\theta|^2 C}\right\}$$

para obtener la última desigualdad hamos aplicado (1.3).

Sea $p = |\theta|^2 C$, entonces:

$$\int_0^\infty P(Y > u)\, e^u\, du \leq \int_0^\infty 2n \exp(u - \frac{u^2}{2p})\, du = 2n \exp(\frac{p}{2}) \sqrt{2p} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz$$

donde $z = \frac{u}{\sqrt{2p}} - \frac{\sqrt{2p}}{2}$

luego $P(Y > u) \leq 2n \sqrt{2p}\ \exp(\frac{p}{2})$, sustituyendo en $E^P[e^Y]$ se obtiene $E^P[e^Y] \leq 1 + 2n \sqrt{2p\pi} \exp(\frac{p}{2}) \leq 5n\, e^p$.

Con esto hemos probado que $X_\theta^\gamma(t)$ es integrable. Entonces para concluir que $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala queda por probar que $\forall m$, $X_{\theta_m}^\gamma(t_m)$ es uniformemente integrable. Para ello, si U es el conjunto de w en el que $|X_{\theta_m}(t_m)| \geqslant M$ para cualquiera que sea m, entonces hay que probar que

$$\int_U |X_{\theta_m}(t_m)|\, dP(w) \longrightarrow 0 \ [\text{unif.}] \quad \text{cuando} \quad M \to \infty.$$

Es de fácil comprobación que

$$U \subseteq \{w: \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}(u)| \geqslant M\} \quad ; \quad |X_{\theta_m}^\gamma(t_m)| \leq \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}^\gamma(u)|$$

$$\sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}^\gamma(u)| \leqslant \exp\left\{ |\theta_m| \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s, x_s)\, dV_s \right| \right\}$$

y, por último

$$\{w: \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}^\gamma(u)| \geqslant M\} \subseteq \left\{w: \exp\left\{|\theta_m| \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s, x_s)\, dV_s \right|\right\} \geqslant M\right\} =$$

$$= \left\{w: \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} \left| x_u - x_\gamma \int_\gamma^u b(s, x_s)\, dV_s \right| \geqslant \frac{\ln M}{|\theta_m|}\right.$$

Denotamos por Y la expresión $|\theta_m| \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} \left| x_u - x_\gamma - \int_\gamma^u b(s, x_s)\, dV_s \right|$

entonces:

$$\int_{\{w: \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}(u)| \geqslant M\}} \sup_{\gamma \leq u \leq t_m} |X_{\theta_m}(u)|\, dP(w) \leqslant \int_{\{w:\ Y \geqslant \ln M\}} e^Y\, dP(w)$$

Sea r=ln M. Tenemos que probar que

$$\int_{\{w: Y \geqslant r\}} e^Y dP \longrightarrow 0 \ [\text{unif.}] \quad \text{cuando} \quad r \longrightarrow \infty.$$

Por definición de esperanza matemática $\int_{\{w: Y\ r\}} e^Y dP = E^P\left[e^Y I_{w: Y \geqslant r}\right]$

Pero, $E^P[e^Y I_{[w:Y\geqslant r]}] = \int_0^\infty P(e^Y I_{[w:Y\geqslant r]}>u)\,du =$

$$= \int_0^{e^r} P(e^Y I_{[w:Y\geqslant r]}>u)\,du + \int_{e^r}^\infty P(e^Y I_{[w:Y\geqslant r]}>u)\,du =$$

$$= \int_0^{e^r} P(w:Y\geqslant r)\,du + \int_{e^r}^\infty P(w:Y>u)\,du = e^r P(w:Y\geqslant r) + \int_r^\infty P(e^Y>e^u)\,d(e^u)$$

tomando limite cuando r tiene a ∞, e indicando, por abreviar, $[Y\geqslant r]$ al conjunto $[w:Y\geqslant r]$ queda

$$\lim_r \int_{[Y\geqslant r]} e^Y dP = \lim_r e^r P(Y\geqslant r) + \lim_r \int_r^\infty P(e^Y> e^u)\,d(e^u).$$

Vamos a probar que $\lim_r e^r P(Y\geqslant r)=o$, $r>o$.

Como $e^r P(Y\geqslant r) = \sum_{k=o}^\infty \frac{r^k}{k!} P(Y\geqslant r)$, tomando límite ahora se tiene

$\lim_r e^r P(Y\geqslant r) = \sum_{k=o}^\infty \frac{1}{k!} \lim_r r^k P(Y\geqslant r)$, entonces es suficiente ver que $\lim_r r^k P(Y\geqslant r) = o$.

Por una parte: $E^P[Y^k] = \int_0^\infty P(Y^k>r)\,dr = \int_0^\infty P(Y^k> r^k)\,d(r^k) =$

$= \int_0^\infty P(Y>r)\, kr^{k-1}dr$, por otra parte $E^P[Y^k] = \int_0^\infty r^k dP(Y\leqslant r)$

donde $P(Y\leqslant r) = 1- P(Y>r)$ luego $dP(Y\leqslant r) =-dP(Y>r)$ por tanto

$\int_0^\infty r^k\, dP(Y\leqslant r) = - \int_0^\infty r^k\, dP(Y>r)$ integrando por partes queda igual a $- r^k P(Y>r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty P(Y>r)\, kr^{k-1}dr$

Comparando las dos expresiones que hemos obtenido para $E^P[Y^k]$ se tiene que $\lim_r r^k P(Y>r) =o$, entonces $\lim_r r^k P(Y\geqslant r) =o$.

Teniendo en cuenta esta propiedad en el limite de partida se tiene que $\lim_r \int_{[Y\geqslant r]} e^Y dP = \lim_r \int_r^\infty P(Y>u)\, e^u du$. Aplicando (1.3) a la probabilidad que aparece en el integrando se tiene

$P(Y>u) \leqslant 2n \exp\left\{-\frac{u^2}{2p}\right\}$ entonces para el límite buscado se obtiene $\lim_r \int_{[Y\geqslant r]} e^Y dP \leqslant 2n \lim_r \int_r^\infty \exp(u-\frac{1}{2}\frac{u^2}{p})\, du$.

Veamos cuando ocurre que $\exp(u-\frac{1}{2}\frac{u^2}{p}) < \exp(-u)$. Para ello bastaría que $u-\frac{u^2}{2p} < -u$, es decir $4up-u^2 < o$, es decir $(4p-u)u<o$ como $u>r>o$ tendia que ser $4p-u<o$, por tanto seria suficiente que $4p<r<u$, pero vamos a hacer tender r a infinito entonces a partir de un r_o en adelante se tendra siempre que $4p < r \quad \forall r\geqslant r_o$ por lo tanto:

$$\lim_r \int_{[Y\geqslant r]} e^Y dP \leqslant 2n \lim_r \int_r^\infty e^{-u} du = 2n \lim_r e^{-r} = o$$

Con esto hemos probado que las variables aleatorias $X^\gamma_{\theta_m}(t_m)$ son uniformemente integrables para cualquiera que sea m. Como para cada m cualquiera que sea éste $X^\gamma_{\theta_m}(t_m)$ es $(P, \mathbb{F}_{t_m})$-martingala y al tender m a infinito $X^\gamma_{\theta_m}(t_m)$ converge en probabilidad a la variable aleatoria $X^\gamma_\theta(t)$ entonces, por el teorema de convergencia de variables aleatorias uniformemente integrables de P.A. Meyer que acabamos de probar se tiene que $X^\gamma_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall t\in[\gamma, \infty, \forall\theta\in\mathbb{R}^n$, donde γ es cualquiera mayor ó igual que α.

Por lo tanto queda probado el Teorema 1.1.

Considerada como función de θ

$$X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta, x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\right\}$$

es dos veces diferenciable con continuidad. Denotaremos por $D_\theta X_\theta(t)$ a la diferencial de orden uno de $X_\theta(t)$, ésta será un vector en $\mathbb{R}^n$, cuyas componentes son $D_{\theta_i} X_\theta(t)$, $i=1,\ldots,n$. Denotamos por $D_\theta^2 X_\theta(t)$ a la diferencial de orden dos de $X_\theta(t)$ que será una matriz nxn de elementos $D^2_{\theta_i\theta_j} X_\theta(t)$, $i,j=1,\ldots,n$. Vamos a calcular cada una de estas diferenciales.

Cálculo de $D_\theta X_\theta(t)$. Como $\langle N\rangle_t$ es una matriz nxn cuyos elementos vienen dados por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \int_o^t \sum_{kh=1}^n a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

no depende de θ, entonces

$$\begin{aligned}
D_{\theta_i} X_\theta(t) &= D_{\theta_i}\left[\exp\left\{(\theta, x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t\theta)\right\}\right] = \\
&= D_{\theta_i}\left[\exp\left\{\sum_{q=1}^n \theta_q (x_t^q - x_o^q - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{qp}(s,x_s)dV_s^p) - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{2}\sum_{pq=1}^n \theta_p\theta_q \langle N\rangle_t^{pq}\right\}\right] = \\
&= X_\theta(t)\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)dV_s^p - \frac{1}{2}\left(2\theta_i\langle N\rangle_t^{ii} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{p=1,p\neq i}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pi} + \sum_{q=1,q\neq i}^n \theta_q \langle N\rangle_t^{iq}\right)\right] = \\
&= X_\theta(t)\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b(s,x_s)dV_s^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pi}\right]
\end{aligned}$$

Cálculo de $D_\theta^2 X_\theta(t)$. Haciendo sobre $\langle N\rangle_t$ la misma observación, es decir, que no depende de θ, se tiene

$$D^2_{\theta_i\theta_j} X_\theta(t) = D_{\theta_j}\left[D_{\theta_i} X_\theta(t)\right] =$$

$$= D_{\theta_j}\Big[X_\theta(t)\big(x^i_t - x^i_o - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)dV^p_s -$$

$$- \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle^{pi}_t\big)\Big] = X_\theta(t)\Big[x^i_t - x^i_o - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)dV^p_s -$$

$$- \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle^{pi}_t\Big]\cdot\Big[x^j_t - x^j_o - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(s,x_s)dV^p_s -$$

$$- \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle^{pj}_t\Big] + X_\theta(t)\langle N\rangle^{ij}_t$$

Vamos ahora a dar un Teorema en el que usaremos las expresiones que acabamos de calcular.

<u>Teorema 1.2.-</u>

Bajo las hipótesis del Teorema 1.1 se verifica:

1) $E^P\left[D_\theta X_\theta(t)\right] < \infty$ 2) $E^P\left[D^2_\theta X_\theta(t)\right] < \infty$

Demostración.

1) Para probar que $E^P\left[D_\theta X_\theta(t)\right] < \infty$, es suficiente probar que $\forall\ i,\ 1 \leq i \leq n,\ E^P\left[D_{\theta_i} X_\theta(t)\right] < \infty$.

Sea $Y_\theta(t) = x^i_t - x^i_o - \int_o^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV^j_s - \sum_{j=1}^n \theta_j \langle N\rangle^{ij}_t$

entonces $D_{\theta_i} X_\theta(t) = X_\theta(t)\ Y_\theta(t)$. Para probar que $E^P\left[X_\theta(t)\ Y_\theta(t)\right]$ es finita es suficiente probar $E^P\left[X_\theta(t)\ Y_\theta(t)\right]^2 < \infty$. Pero $E^P\left[X_\theta(t)\ Y_\theta(t)\right]^2 \leq \left(E^P\left[X_\theta(t)\right]^2\right)\left(E^P\left[Y_\theta(t)\right]^2\right)$, vamos a probar pues que a) $E^P\left[X_\theta(t)\right]^2 < \infty$ y b) $E^P\left[Y_\theta(t)\right]^2 < \infty$.

a). Teniendo en cuenta que $X_\theta(t)$ es la exponencial de una expresión se tiene:

$$\left[X_\theta(t)\right]^2 = \exp\left\{(2\theta,\ x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - (\theta,\langle N\rangle_t\theta)\right\},$$

por otra parte

$$X_{2\theta}(t) = \exp\left\{(2\theta,\ x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - \frac{1}{2}\ (\ 2\theta,\ \langle N\rangle_t 2\theta)\right\}$$

entonces

$$\left[X_\theta(t)\right]^2 \left[X_{2\theta}(t)\right]^{-1} = \exp\left\{(\ \theta\ ,\ \langle N\rangle_t\theta\ )\right\}$$

operando y tomando esperanza se tiene

$$E^P\left[X_\theta(t)\right]^2 = E^P\left[X_{2\theta}(t)\ \exp\left\{(\theta,\langle N\rangle_t\theta)\right\}\right] \leq E^P\left[X_{2\theta}(t)\ \exp\left\{C\,|\theta|^2\right\}\right] =$$

$$= \exp(C\,|\theta|^2)\ E^P\left[X_{2\theta}(t)\right]$$

la desigualdad la hamos obtenido aplicanco la hipótesis de ser $o \leq (\theta,\langle N\rangle_t\theta) \leq C\,|\theta|^2$. Por otra parte, en el Teorema 1.1 probamos que $X_\theta^\gamma(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$ $\forall t\cap[\gamma,\infty)$ siendo $\gamma \geq \alpha \geq o$ cualquiera, en particular cuando $\gamma = o$ se tiene que $X_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$, entonces $X_{2\theta}(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala y por ello $E^P\left[X_{2\theta}(t)\right] < \infty$. Con esto queda probado a).

b) Vamos a probar que $E^P\left[Y_\theta(t)\right]^2 < \infty$.

$$\left[Y_\theta(t)\right]^2 = \left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s^j - \sum_{j=1}^n \theta_j\langle N\rangle_t^{ij}\right]^2 \leq$$

$$\leq 2\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x_s)dV_s\right]^2 +$$

$$+\ 2\left[\sum_{j=1}^n \theta_j\ \langle N\rangle_t^{ij}\right]^2 .$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j \langle N\rangle_t^{ij}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\langle N\rangle_t^{ij}\right)^2\right) = |\theta|^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\langle N\rangle_t^{ij}\right)^2$$

por hipótesis se tiene $o \leqslant \sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j\langle N\rangle_t^{ij} \leqslant C|\theta|^2$, en particu-

cular para $\theta=(o,\ldots,1_{(i)},\ldots,1_{(j)},\ldots,o)$ se tiene

$o \leqslant \langle N\rangle_t^{ij} \leqslant C\sqrt{2}$ entonces $\left(\langle N\rangle_t^{ij}\right)^2 \leqslant 2C^2$ por lo tanto

$$Y_\theta(t)^2 \quad 2\left(x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j \right)^2 + 4C^2\theta^2 n$$

tomando esperanzas

$$E^P\left[Y_\theta(t)\right]^2 \leqslant 2\, E^P\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j\right]^2 + 4C^2|\theta|^2 n$$

basta, pues probar que

$$E^P\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j\right]^2 < \infty.$$

Hacemos $Z(t) = x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j$, entonces proba-

remos que $E^P\left[Z^2(t)\right] < \infty$.

$$E^P\left[Z^2(t)\right] = \int_W Z^2(t)\, dP = \int_U Z^2(t)\, dP + \int_{U^c} Z^2(t)\, dP$$

donde $U = \left\{w: \sup_{0\leq t\leq T} Z(t) < p\right\}$, $U^c = \left\{w: \sup_{0\leq t\leq T} Z(t) \geqslant p\right\}$.

Si $P(U)=1$, entonces $Z^2(t)$ estaria uniformemente acotada, por tanto seria integrable, luego consideramos el caso en que $P(U)<1$, en este caso

$$E^P\left[Z^2(t)\right] \leqslant p^2\, P(U) + \int_{U^c} Z^2(t)\, dP < p^2 + \int_{U^c} Z^2(t)\, dP \leqslant \infty$$

ya que además $P(U^c) \leqslant P\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s\right| \geqslant p\right] \leqslant$

$\leq 2n \exp\left(-\frac{p^2}{2C}\right)$, hemos aplicado aquí (1.3), y esta expresión tiende a cero cuando p tiende a infinito. Por lo tanto hemos probado b) y con ello el apartado 1) del Teorema.

2) Vamos a probar que $E^P\left[D_\theta{}^2 X_\theta(t)\right] < \infty$, para ello es suficiente probar que $E^P\left[D_{\theta_i\theta_j} X_\theta(t)\right] < \infty$.

$$\text{Sea } Y_\theta(t) = \left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)dV_s^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pi}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(s,x_s)dV_s^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pj}\right] +$$
$$+ \langle N\rangle_t^{ij}$$

entonces, vamos a probar que $E^P\left[X_\theta(t)\ Y_\theta(t)\right] < \infty$, igual que en el apartado anterior bastaria ver que $E^P\left[X_\theta(t)\ Y_\theta(t)\right]^2 < \infty$, y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz seria suficiente probar que $E^P\left[X_\theta(t)\right]^2 < \infty$ y $E^P\left[Y_\theta(t)\right]^2 < \infty$. En el punto a) del apartado 1) ya vimos que $E^P\left[X_\theta(t)\right]^2 < \infty$, solo resta, pues, ver que $E^P\left[Y_\theta(t)\right] < \infty$. Aplicando que el cuadrado de una suma es menor ó igual que la suma de los cuadrados multiplicados por dos se tiene:

$$\left[Y_\theta(t)\right]^2 \leq 2\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)dV_s^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pi}\right]^2 \cdot$$
$$\cdot \left[x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(s,x_s)dV_s^j - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pj}\right]^2 +$$
$$+ 2\left(\langle N\rangle_t^{ij}\right)^2$$

aplicando de nuevo esta propiedad del cuadrado de una suma, y teniendo en cuenta que $\left(\sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{pk}\right)^2 \leq |\theta|^2 2nC^2$, k=i ó j queda

$$\left[Y_\theta(t)\right]^2 \leq 8\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)\, dV_s^p\right]^2 \cdot$$

$$\cdot\left[x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(s,x_s)\, dV_s^p\right]^2 +$$

$$+ 16\, nC^2|\theta|^2\left[(x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(s,x_s)\, dV_s^p)^2 + \right.$$

$$\left. + (x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(s,x_s)\, dV_s^p)^2\right] + 32n^2C^4|\theta|^4 + 4C^2$$

Tomando esperanza, y haciendo uso de $Z(t)$ definida como en el punto b) de 1) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz queda por probar que $E^P\left[Z^4(t)\right] < \infty$. De forma análoga al apatado anterior

$$E^P\left[Z^4(t)\right] = \int_W Z^4(t)\, dP = \int_U Z^4(t)dP + \int_{U^c} Z^4(t)dP$$

donde $U = \left\{w: \sup_{o\leq t\leq T} Z(t) < p\right\}$, $U^c = \left\{w: \sup_{o\leq t\leq T} Z(t) \geq p\right\}$

siguiendo el mismo razonamiento que hicimos en el apartado b) de 1) se tiene que $E^P\left[Z^4(t)\right] < \infty$. Con esto queda probado 2) y con ello el Teorema.

<u>Teorema 1.3</u>.-

Bajo las hipótesis del Teorema 1.1, si $X_\theta(t)$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$ martingala, entonces es además $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, sobre todo intervalo finito $[0,t]$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Demostración.

La continuidad es evidente.

Para ver que es de cuadrado integrable hay que probar $E^P\left[X_\theta^2(t)\right] < \infty$

En el Teorema 1.2 obtuvimos para $X_\theta^2(t)$ la expresión $X_{2\theta}(t)\exp(\theta, \langle N\rangle_t \theta)$, entonces tomando esperanza y teniendo en cuenta $(\theta, \langle N\rangle_t \theta) \leq C|\theta|^2$, y $E^P\left[X_{2\theta}(t)\right] < \infty$, queda probado el teorema.

2. Formulación Integral.

Encontrar una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s$$

sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con $\langle N\rangle_t$ matriz nxn de elementos dados por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

Propiedades.

Suponiendo que existe una medida de probabilidad que resueve el problema planteado, vamos a dar una propiedad de esta Formulación y la relación que tiene con la Formulación exponencial que acabamos de estudiar.

Teorema 2.1.-

Si $p \in \mathbb{R}_+$ entonces $P\left[w: \sup_{o\leq t\leq T} |N_t| \geq p\right] \leq 2n \exp\left\{-\frac{p^2}{2C}\right\}$

Demostración.

Consideramos $X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta, N_t) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\right\}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Aplicamos la Fórmula de Ito a la función $f(z)=\exp(\theta,z)$ y al proceso $Z_t = N_t - \frac{1}{2}\langle N\rangle_t \theta$ obteniendo:

$$f(Z_t)-f(Z_o) = \int_o^t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\, dZ_s^i + \frac{1}{2}\int_o^t \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\, d\langle N\rangle_t^{ij}$$

ahora bien: $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \theta_i f(z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \theta_i \theta_j\, f(z)$

$$dZ_s^i = dN_s^i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \theta_j\, d\langle N\rangle_t^{ij}$$

sustituyendo se obtiene

$$X_\theta(t) = 1 + \int_0^t X_\theta(s) \sum_{i=1}^n \theta_i dN_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t X_\theta(s) \sum_{i=1}^n \theta_i \sum_{j=1}^n \theta_j d\langle N\rangle_t^{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t X_\theta(s) \sum_{ij=1}^n \theta_i\theta_j \, d\langle N\rangle_t^{ij} =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n \theta_i \int_0^t X_\theta(s) \, dN_s^i .$$

Vamos a probar que $X_\theta(t)$ es una martingala local positiva, para ello es suficiente que lo sea $\int_0^t X_\theta(s)dN_s^i$. Como, por hipótesis N_s es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, tambien lo es N_s^i, luego, en particular es una martingala local, entonces para que la integral estocastica sea una martingala local es suficiente probar que $X_\theta(s)$ es un proceso previsible localmente acotado. En efecto, es previsible ya que es continuo, para ver que es localmente acotado consideremos la sucesión de tiempos de parada $T_n = \inf\{ s: |X_\theta(s)| \geq n\}$, entonces se tiene que $T_n \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$, y para $s \in [o, T_n]$ se tiene $|X_\theta(s)| \leq n$, luego es localmente acotada. Por lo tanto $X_\theta(t)$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local, continua y positiva entonces es además una supermartingala positiva, por lo tanto $E^P[X_\theta(t)] \leq$ $\leq E^P X_\theta(o) = 1$.

Por otra parte $X_\theta(t) = \exp\{(\theta, N_t) \exp - \frac{1}{2} (\theta, \langle N\rangle_t \theta)\}$ y teniendo en cuenta que

$$N_t = x_t - x_o - \int_0^t b(s, x_s) \, dV_s$$

y que para supermartingalas continuas positivas es tambien válida la desigualdad de Doob, puede, a partir de ahora se-

guirse el mismo razonamiento que en el Teorema 1.1 apartado 3) para el caso particular de ser $\gamma=o$, y $l=p$, obteniendose asi,

$$P\left[w: \sup_{o\leq t\leq T} |N_s| \geq p\right] \leq 2n \exp\left\{-\frac{p^2}{2C}\right\}$$

y el Teorema queda probado.

Teorema 2.2.-

La Formulación exponencial implica la Formulacion Integral.

Demostración.

Suponemos, pues, que existe una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta, x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\right\}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala donde $\langle N\rangle_t$ es la matriz nxn cuyos elementos estan dados por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}.$$

Entonces $\forall\, B\in\mathbb{F}_s$ se tiene que

$$\int_B X_\theta(t)\, dP = \int_B X_\theta(s)\, dP \qquad o\leq s\leq t\ , \quad \forall\theta\in\mathbb{R}^n$$

por otra parte, sabemos que $X_\theta(t)$ es difenciable, como función de θ, conocemos su diferencial de orden uno y sabemos por el Teorema 1.2 que $E^P\left[D_\theta\, X_\theta(t)\right] < \infty$ $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$, por tanto $\forall\, B\in\mathbb{F}_s$ se tiene

$$\int_B D_\theta\, X_\theta(t)\, dP = \int_B D_\theta\, X_\theta(s)\, dP \qquad \forall\theta\in\mathbb{R}^n,\ o\leq s\leq t$$

Es decir, para $o\leq s\leq t$, $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$, $\forall\, B\in\mathbb{F}_s$ se tiene

$$\int_B X_\theta(t)\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(u,x_u)\, dV_u^j - \sum_{j=1}^n \theta_j \langle N\rangle_t^{ij}\right] dP =$$

$$= \int_B X_\theta(s)\left[x_s^i - x_s^i - \int_o^s \sum_{j=1}^n b_{ij}(u,x_u)\, dV_u^j - \sum_{j=1}^n \theta_j \langle N\rangle_s^{ij}\right] dP$$

para cualquiera que sea $i=1,\ldots,n$.

En particular, tomando como θ el vector cero, se tiene para cada i:

$$\int_B \left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(u,x_u)\, dV_u^j\right] dP = \int_B \left[x_s^i - x_o^i - \int_o^s \sum_{j=1}^n b_{ij}(u,x_u)\, dV_u^j\right] dP$$

como esto ocurre para cualquiera que sea B de $\mathbb{F}_s$, se tiene pues, para cada i que N_t^i es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, y ésta es condición necesaria y suficiente para que N_t sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall t \in \mathbb{R}_+$, además continua en t por serlo los procesos x_t y V_t, y por serlo la matriz b. Vamos a probar que es de cuadrado integrable y $\langle N\rangle_t$ es de la forma deseada. Para ello vamos a utilizar la expresión de $D_\theta^2 X_\theta(t)$ y que $E^P\left[D_\theta^2 X_\theta(t)\right] < \infty$ que probamos en el Teorema 1.2.

Por ser la diferencial de orden dos, integrable y $X_\theta(s)$ $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala se tiene que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $o \leq s \leq t$

$$\int_B D_\theta^2 X_\theta(t)\, dP = \int_B D_\theta^2 X_\theta(s)\, dP \qquad \forall\, B \in \mathbb{F}_s,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}^n$$

entonces para cualquier elemento (ij) de la matriz $D_\theta^2 X_\theta(t)$ se tiene:

$$\int_B X_\theta(t)\Big\{\left[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(u,x_u)\, dV_u^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{ip}\right] \cdot$$

$$\cdot\left[x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(u,x_s)\, dV_u^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_t^{jp}\right] + \langle N\rangle_t^{ij}\Big\}\, dP =$$

$$= \int_B X_\theta(s)\Big\{\Big[x_s^i - x_o^i - \int_o^s \sum_{p=1}^n b_{ip}(u,x_u)dV_u^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_s^{ip}\Big] \cdot$$

$$\cdot\Big[x_s^j - x_o^j - \int_o^s \sum_{p=1}^n b_{jp}(u,x_u)dV_u^p - \sum_{p=1}^n \theta_p \langle N\rangle_s^{jp}\Big] + \langle N\rangle_s^{ij}\Big\}dP$$

$\forall\ B\in\mathbb{F}_s$ $\forall\ s\leq t$, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}^n$, entonces en particular para $\theta=o$ se obtiene

$$\int_B\Big\{\Big[x_t^i - x_o^i - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{ip}(u,x_u)dV_u^p\Big]\Big[x_t^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(u,x_u)dV_u^p\Big] - \langle N\rangle_t^{ij}\Big\}dP =$$

$$= \int_B\Big\{\Big[x_s^i - x_o^i - \int_o^s \sum_{p=1}^n b_{ip}(u,x_u)dV_u^p\Big]\Big[x_s^j - x_o^j - \int_o^t \sum_{p=1}^n b_{jp}(u,x_u)dV_u^p\Big] - \langle N\rangle_s^{ij}\Big\}dP$$

$\forall\ B\in\mathbb{F}_s$, $s\leq t$, por lo tanto

$$N_t \otimes N_t - \langle N\rangle_t$$

es $(P,\mathbb{F}_t)$-martingala, luego N_t es $(P,\mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y $\langle N\rangle_t$ es la matriz cuyos elementos son $\langle N\rangle_t^{ij}$ deseados. Entonces hemos probado el teorema.

<u>Teorema 2.3</u>.-

La Formulación Integral implica la Formulación Exponencial.

Demostración.

Suponemos aquí que existe una medida de probabilidad P sobre $(W,\mathbb{F},\mathbb{F}_t)$ tal que $N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s$ y $N_t \otimes N_t$ es una matriz cuyos elementos estan dados por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \int_o^t \sum_{kh=1}^n a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}\ .$$

En el Teorema 2.1 probamos que

$$X_\theta(t) = \exp\Big\{(\theta,N_t) - \frac{1}{2}(\theta,\langle N\rangle_t\theta)\Big\}$$

es una martingala local positiva y además se tiene la mayora-

ción $P\left[\sup_{o\leq t\leq T} |N_t| \geqslant p\right] \leq 2n \exp\left\{-\frac{p^2}{2C}\right\}$.

Vamos a probar que $X_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, para ello seria suficiente probar que $E^P\left[\int_o^t X_\theta^2(s)\, d\langle N\rangle_s^{ii}\right] < \infty$. Tambien en teoremas anteriores hemos obtenido para $X_\theta^2(t)$ la expresión $X_\theta^2(t) = X_{2\theta}(t) \exp\{(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\}$ y ademas, por hipótesis se tiene $(\theta, \langle N\rangle_t \theta) \leq C|\theta|^2$ por lo tanto:

$$E^P\left[\int_o^t X_\theta^2(s)\, d\langle N\rangle_s^{ii}\right] \leq E^P\left[\int_o^t X_{2\theta}(s) \exp(C|\theta|^2)\, d\langle N\rangle_s^{ii}\right] \leq$$

$$\leq \exp(C|\theta|^2)\, E^P\left[\int_o^t \sup_{o\ s\ t} X_{2\theta}(s)\, d\langle N\rangle_s^{ii}\right] \leq C\exp(C|\theta|^2)\, E^P\left[\sup_{o\leq s\leq t} X_{2\theta}(s)\right]$$

ya que $\langle N\rangle_t^{ii} \leqslant C$. Vamos a probar que $E^P\left[\sup_{o\leq s\leq t} X_{2\theta}(s)\right] < \infty$.

$X_{2\theta}(s) = \exp\{(2\theta, N_s)\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(2\theta, \langle N\rangle_s 2\theta)\right\}$, por hipótesis $(2\theta, \langle N\rangle_s 2\theta) \geqslant o$ entonces $\exp\left\{-\frac{1}{2}(2\theta, \langle N\rangle_s 2\theta)\right\} \leq 1$ por tanto

$$\sup_{o\leq s\leq t} X_{2\theta}(s) \leqslant \sup_{o\leq s\leq t} \exp\{(2\theta, N_s)\} = \exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} (2\theta, N_s)\right\}$$

teniendo en cuenta que $(2\theta, N_s) \leqslant |(2\theta, N_s)|$ y tomando esperanza

$$E^P\left[\sup_{o\leq s\leq t} X_{2\theta}(s)\right] \leqslant E^P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |(2\theta, N_s)|\right\}\right] \leq E^P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |2\theta||N_s|\right\}\right] =$$

$$= E^P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\}\right] \exp(|2\theta|).$$

Vamos a probar que es finita $E^P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\}\right]$.

$$E^P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\}\right] = \int_o^\infty P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\} > u\right] du =$$

$$= \int_o^\infty P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\} > \exp(u)\right] d(\exp u) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty P\left[\exp\left\{\sup_{o\leq s\leq t} |N_s|\right\} > e^u\right] e^u\, du.$$

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Ahora bien

$$\int_{-\infty}^{0} P(\exp\{\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|\}>e^u)\, e^u\, du = \int_{-\infty}^{0} P(\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|>u)\, e^u\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^u\, du = 1$$

Entonces, sustituyendo en la expresión de partida se tiene

$$E^P\left[\exp\{\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|\}\right] = 1 + \int_0^{\infty} P(\exp\{\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|\}>e^u)\, e^u\, du =$$

$$= 1 + \int_0^{\infty} P(\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|> u)\, e^u\, du$$

pero $P(\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|> u) \leq 2n \exp(-\frac{u^2}{2C})$ por lo tanto

$$\int_0^{\infty} P(\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|> u)\, e^u\, du \leq \int_0^{\infty} 2n \exp(u - \frac{u^2}{2C})\, du \leq$$

$$\leq 2n\sqrt{2C\pi}\, \exp(\frac{C}{2})$$

teniendo en cuenta además que $C < \exp(\frac{C-1}{2})$ se obtiene definitivamente la acotación

$$E^P\left[\exp\{\sup_{0\leq s\leq t} |N_s|\}\right] \leq 1 + 2n\sqrt{2C\pi}\, \exp(\frac{C}{2}) \leq 5n\, e^C.$$

Por lo tanto

$$E^P\left[\int_0^t X_\theta^2(s)\, d\langle N\rangle_s^{ii}\right] \leq 5n \exp(C|\theta|^2)$$

Con esto ya podemos afirmar que $X_\theta(t)$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, como queriamos probar.

3. Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Encontrar una medida de probabilidad P y un proceso M_t sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que:

a) M_t sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, con $\langle M^k, M^h \rangle_t = A_t^{kh}$ dado.

b) $dx_t = a(t,x_t)\, dM_t + b(t,x_t)\, dV_t$, $x_o = x$, $x \in \mathbb{R}^n$ c.s.P

Propiedades.

Estudiamos, aquí, las relaciones que existen entre la Formulación Integral y la Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Se suponen, igual que en los casos tratados anteriormente, las hipótesis generales dadas al comienzo de esta primera parte.

Teorema 3.1.-

La Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas implica la Formulación Integral.

Demostración.

Suponemos que existen una medida de probabilidad P y un proceso M_t sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ que verifican las condiciones a) y b) de la Formulación 3. Queremos probar que en este espacio medible filtrado y con esta medida de probabilidad se tiene que $N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua, de cuadrado integrable con $N_t \otimes N_t$ es una matriz nxn, que denotamos por $\langle N \rangle_t$, cuyos elementos vienen dados por $\langle N \rangle_t^{ij} = \int_o^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$.

Si la ecuación diferencial estocástica que se tiene por el apartado b) de la Formulación que estamos suponiendo cierta, la escribimos en forma integral se tiene c.s. P

$$x_t - x_o = \int_o^t a(s,x_s)\, dM_s + \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s$$

entonces, si llamamos N_t a la integral estocástica respecto a M_t es decir,

$$N_t = \int_o^t a(s,x_s)\, dM_s$$

entonces, para probar el teorema seria suficiente ver que N_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y calcular $N_t \otimes N_t$ comprobando que coincide con $\langle N \rangle_t$ dado en la Formulación integral.

1) Vamos a probar que $\int_o^t a(s,x_s)\, dM_s$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable. Como por hipótesis M_t es $(P, \mathbb{F}_t)$ martingala de cuadrado integrable, vamos a hacer uso de las propiedades de integrales estocásticas respecto a martingalas de cuadrado integrable estudiadas por P.A.Meyer y que damos y referenciamos en los Preliminares.

Como $\int_o^t a(s,x_s)\, dM_s$ es un elemnto de $\mathbb{R}^n$, para ver que es martingala continua de cuadrado integrable seria suficiente ver que lo es cada función componente. Estas vienen dadas para cada i, i=1,...,n por

$$\left(\int_o^t a(s,x_s)\, dM_s \right)_i = \int_o^t \sum_{k=1}^n a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k = \sum_{k=1}^n \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k$$

como puede observarse de la última relación seria suficiente, para nuestro propósito, probar que para cada k, k=1,...,n se tiene que $\int_0^t a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable. Para ello, teniendo en cuenta que M_t^k lo es para cada k, habria de ser

$$E^P\left[\int_0^t a_{ik}^2(s,x_s)\, d\langle M^k,M^k\rangle_t\right] < \infty$$

donde, por hipótesis, $\langle M^k,M^k\rangle_t = A_t^{kk}$ entonces $d\langle M^k,M^k\rangle_t = dA_t^{kk}$. Tambien por hipótesis se tiene $\forall\ \theta \in \mathbb{R}^n$:

$$o \leq \sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j \int_0^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh} \leq C|\theta|^2$$

donde C es una constante real positiva. En particular, haciendo k=h, i=j se tiene

$$o \leq \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2(s,x_s)\, dA_s^{kk} \leq C|\theta|^2$$

tomando θ tal que $\theta_i=1$ y $\theta_p=o$ $\forall p\neq i$ se tiene

$$o \leq \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2(s,x_s)\, dA_s^{kk} \leq C$$

por lo tanto

$$E^P\left[\int_0^t a_{ik}^2(s,x_s)\, d\langle M^k,M^k\rangle_s\right] \leq \sum_{k=1}^{n} E^P\left[\int_0^t a_{ik}^2(s,x_s)\, dA_s^{kk}\right] \leq E^P(C) = C$$

En estas condiciones, N_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, no hemos hablado de la continuidad, pero esta propiedad en N_t es evidente por la propia definición, ya que, por hipótesis los procesos x_t, V_t, M_t asi como las matrices a y b lo son.

2) Vamos a calcular $N_t \otimes N_t$. Esta es una matriz nxn cuyos elementos son los corchetes $\langle N^i, N^j \rangle_t$. Como N_t es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}^n$, N^i, $\forall i$, $i=1,\ldots,n$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$, entonces, por definición se tiene

$$2 \langle N^i, N^j \rangle_t = \langle N^i + N^j \rangle_t - \langle N^i \rangle_t - \langle N^j \rangle_t \qquad (3.1)$$

Ahora bien, para cualquiera que sea i, $i=1,\ldots,n$

$$N^i = \left(\int_0^t a(s,x_s)\, dM_s \right)_i = \int_0^t \sum_{k=1}^n a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k$$

entonces

$$\langle N^i, N^j \rangle_t = \left\langle \sum_{k=1}^n \int_0^t a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k \;,\; \sum_{k=1}^n \int_0^t a_{jk}(s,x_s)\, dM_s^k \right\rangle_t$$

por abreviar la notación llamamos

$$Q_k = \int_0^t a_{ik}(s,x_s)\, dM_s^k \quad , \quad R_k = \int_0^t a_{jk}(s,x_s)\, dM_s^k$$

así $\langle N^i, N^j \rangle_t = \left\langle \sum_{k=1}^n Q_k \;,\; \sum_{k=1}^n R_k \right\rangle_t$ donde Q_k y R_k son, para todo k, $k=1,\ldots,n$ $(P, \mathbb{F}_t)$-martingalas continuas de cuadrado integrable como probamos en 1). Con esta notación y teniendo en cuenta (3.1) se tiene

$$\left\langle \sum_{k=1}^n Q_k \,,\, \sum_{k=1}^n R_k \right\rangle_t = \frac{1}{2}\left[\left\langle \sum_{k=1}^n (Q_k + R_k) \right\rangle_t - \left\langle \sum_{k=1}^n Q_k \right\rangle_t - \left\langle \sum_{k=1}^n R_k \right\rangle_t \right].$$

Desarrollando, de nuevo por (3.1), cada sumando se obtiene

$$\langle \sum_{k=1}^{n} (Q_k + R_k) \rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \langle Q_k + R_k \rangle_t + \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle Q_k + R_k, Q_h + R_h \rangle_t$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} Q_k \rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \langle Q_k \rangle_t + \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle Q_k , Q_h \rangle_t$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} R_k \rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \langle R_k \rangle_t + \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle R_k , R_h \rangle_t$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{n} \langle Q_k + R_k \rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \left[\langle Q_k \rangle_t + \langle R_k \rangle_t + 2 \langle Q_k , R_k \rangle_t \right]$$

queda, sustituyendo las expresiones que hemos obtenido y operando

$$\langle \sum_{k=1}^{n} Q_k , \sum_{k=1}^{n} R_k \rangle_t = \frac{1}{2} \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle Q_k + R_k, Q_h + R_h \rangle_t -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq h \\ kh=1}}^{n} \langle Q_k, Q_h \rangle_t - \frac{1}{2} \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle R_k, R_h \rangle_t + \sum_{k=1}^{n} \langle Q_k, R_k \rangle_t$$

vamos a calcular el primer sumando de la derecha de esta última expresión:

$$\langle Q_k + R_k , Q_h + R_h \rangle_t = \frac{1}{2} \left[\langle Q_k + R_k + Q_h + R_h \rangle_t - \langle Q_k + R_k \rangle_t - \right.$$

$$\left. - \langle Q_h + R_h \rangle_t \right] =$$

$$= \langle Q_k, Q_h \rangle_t + \langle R_k, R_h \rangle_t + 2 \langle Q_k, R_h \rangle_t$$

aquí hemos tenido en cuenta que $\langle R_k, Q_h \rangle_t = \langle Q_h, R_k \rangle_t$.

Sustituyendo la última expresión ontenida y simplificando queda:

$$\langle \sum_{k=1}^{n} Q_k , \sum_{k=1}^{n} R_k \rangle_t = \sum_{\substack{kh=1 \\ k \neq h}}^{n} \langle Q_k , R_h \rangle_t + \sum_{k=1}^{n} \langle Q_k, R_k \rangle_t$$

Agrupando los dos sumando en uno solo se tiene de forma definitiva la expresión:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} Q_k \ , \ \sum_{k=1}^{n} R_k \right\rangle_t = \sum_{kh=1}^{n} \langle Q_k, R_h \rangle_t$$

solo nos queda, pues calcular el corchete $\langle Q_k \ , \ R_h \rangle_t$. Utilizaremos aquí la notación y caracterización dada por P.A.Meyer para integrales estocásticas respecto a martingalas continuas de cuadrado integrable referenciada e indicada en los Preliminares.

$$\begin{aligned}
\langle Q_k \ , \ R_h \rangle_t &= \left\langle \int_0^t a_{ik}(s,x_s)\ dM_s^k \ , \ \int_0^t a_{jh}(s,x_s)\ dM_s^h \right\rangle_t = \\
&= \langle a_{ik}(s,x_s) \bullet M_s^k \ , \ a_{jh}(s,x_s) \bullet M_s^h \rangle_t = \\
&= a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s) \bullet \langle M^k, M^h \rangle_t = \\
&= \int_0^t a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ d\langle M^k, M^h \rangle_s = \\
&= \int_0^t a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle N^i, N^j \rangle_t &= \sum_{kh=1}^{n} \langle Q_k \ , \ R_h \rangle_t = \\
&= \int_0^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\ a_{jh}(s,x_s)\ dA_s^{kh}
\end{aligned}$$

luego $N_t \otimes N_t$ es una matriz nxn cuyos elementos son $\langle N^i, N^j \rangle_t$ y son iguales al corchete $\langle N \rangle_t^{ij}$ que se tienen en la Formulación integral. Por tanto queda probado que la Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas implica la Integral.

Teorema 3.2.-

Si además de las hipótesis generales, suponemos que la matriz a es tal que existe su inversa y está uniformemente acotada, entonces, la Formulación Integral implica la Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Demostración.

Suponemos aquí que existe una medida de probabilidad P sobre un espacio medible fitrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con $\langle N\rangle_t$ matriz nxn dada por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

para A^{kh} dada.

Queremos encontrar un proceso, que llamamos M_t sobre este espacio filtrado tal que: a) M_t sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, con $\langle M^k, M^h\rangle_t = A_t^{kh}$ dado por la Formulación Integral, b) c.s. P se verifique

$$dx_t = a(t,x_t)\, dM_t + b(t,x_t)\, dV_t,\ x_o = x,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Como, por hipótesis, N_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y existe la inversa de la matriz a: a^{-1}, entonces podemos definir el proceso

$$M_t = \int_o^t a^{-1}(s,x_s)\, dN_s$$

vamos a probar que este es el proceso buscado.

1) Vamos a probar que M_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable. La continuidad se tiene por la propia definición de M_t. Como a^{-1} la suponemos uniformemente acotada y N_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, para probar que M_t lo es seria suficiente probar que

$$E^P\left[\int_0^t a^{-1}(s,x_s)\ d\langle N\rangle_s\right] < \infty.$$

Si llamamos a^*_{ij} al elemento (ij) de a^{-1} entonces bastaria probar que

$$E^P\left[\int_0^t a^{-1}(s,x_s)\ d\langle N\rangle_s\right]_{ij} < \infty$$

$\forall i,j,\ i,j=1,\ldots,n$, pero cada uno de estos elementos (ij) viene dado por

$$\left(\int_0^t a^{-1}(s,x_s)\ d\langle N\rangle_s\right)_{ij} = \int_0^t \left(a^{-1}(s,x_s)\ d\langle N\rangle_s\right)_{ij}$$

donde

$$\left(a^{-1}(s,x_s)d\langle N\rangle_s\right)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a^*_{ip}(s,x_s)\ d\langle N\rangle_s^{pj}$$

$$d\langle N\rangle_s^{pj} = \sum_{kh=1}^{n} a_{pk}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}$$

de aquí se deduce que seria suficiente probar

$$E^P\left[\int_0^t \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a^*_{ip}(s,x_s)a_{pk}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}\right] < \infty$$

como a^{-1} esta uniformemente acotada, entonces existe una constante positiva que denotamos por d tal que $\forall ip$ se tiene $a^*_{ip}(s,x_s)$ es menor o igual que d, entonces $\sum_{p=1}^{n} a^*_{ip}(s,x_s) \leq d\ n$. Por otra

parte $(\theta, \langle N\rangle_t \theta) \leq C|\theta|^2$ entonces

$$\int_0^t \sum_{kh=1}^{n} a_{pk}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh} \leq 2C.$$

Con esto

$$E^P\left[\int_0^t \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{ip}^*(s,x_s)\, a_{pk}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s) dA_s^{kh}\right] \leq 2Cdn < \infty$$

Por lo tanto M_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable.

2) Vamos a probar que $\langle M^k, M^h\rangle_t = A_t^{kh}$.

Por definición $M_t = \int_0^t a^{-1}(s,x_s)\, dN_s$, entonces la componente i-ésima viene dada por

$$M_t^i = \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*(s,x_s)\, dN_s^k$$

a) vamos a probar que $\langle M^i, M^i\rangle_t = A_t^{ii}$. $\langle M^i, M^i\rangle_t$ es por definición

$$\langle M^i, M^i\rangle_t = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \int_0^t a_{ik}^*(s,x_s) dN_s^k \,,\, \sum_{k=1}^{n} \int_0^t a_{ik}^*(s,x_s) dN_s^k \right\rangle_t$$

llamando

$$Q_k = \int_0^t a_{ik}^*(s,x_s) dN_s^k \quad , \quad R_k = \int_0^t a_{ik}^*(s,x_s) dN_s^k$$

y haciendo un razonamiento análogo al que hicimos en el Teorema 3.1 se obtiene

$$\langle M^i, M^i\rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \int_0^t a_{ik}^*(s,x_s)\, a_{ih}^*(s,x_s)\, d\langle N\rangle_s^{kh} =$$

sustituyendo el valor de $d\langle N\rangle_s^{kh}$ se obtiene

$$\langle M^i, M^i\rangle_t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \int_0^t a_{ik}(s,x_s) a_{ih}(s,x_s) a_{kp}(s,x_s) a_{hp}(s,x_s) dA_s^{pq}$$

teniendo en cuenta que $a^*_{ik}(s,x_s)=\frac{1}{\|a\|}S_{ki}$, $a^*_{ih}(s,x_s)=\frac{1}{\|a\|}S_{hi}$ donde $\|a\|$ indica el determinante de la matriz a, y $S_{\cdot i}$ el adjunto correspondiente, y llamando

$$E=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a^*_{ik}(s,x_s)a^*_{ih}(s,x_s)a_{kp}(s,x_s)a_{hq}(s,x_s)$$

se tiene:

si $p=q=i$ $\quad E=\frac{1}{\|a\|^2}\left(\sum_{k=1}^{n}S_{ki}a_{ki}(s,x_s)\right)\left(\sum_{h=1}^{n}S_{hi}a_{hi}(s,x_s)\right)=1$

si $p=q\neq i$ ó $p\neq q\neq i$ $\quad E=\frac{1}{\|a\|^2}\left(\sum_{k=1}^{n}S_{ki}a_{kp}(s,x_s)\right)^2=o$

si $p=i\neq q$ ó $p\neq i=q$ $\quad E=\frac{1}{\|a\|^2}\left(\sum_{k=1}^{n}S_{ki}a_{ki}(s,x_s)\right)\left(\sum_{h=1}^{n}S_{hi}a_{hq}(s,x_s)\right)=o$

entonces $\langle M^i,M^i\rangle_t=A^{ii}_t$.

b) Vamos a probar que $\langle M^i,M^j\rangle_t=A^{ij}_t$ $\quad i\neq j$.

$$\langle M^i,M^j\rangle_t=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\int_o^t a^*_{ik}(s,x_s)a^*_{jh}(s,x_s)\,d\langle N\rangle^{kh}_t=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_o^t a^*_{ik}(s,x_s)a^*_{jh}(s,x_s)a_{kp}(s,x_s)a_{hq}(s,x_s)dA^{pq}_s\ .$$

Llamando

$$E=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a^*_{ik}(s,x_s)a^*_{jh}(s,x_s)a_{kp}(s,x_s)a_{hq}(s,x_s)$$

y teniendo en cuenta que $a^*_{ik}(s,x_s)=\frac{1}{\|a\|}S_{ki}$, $a^*_{jh}(s,x_s)=\frac{1}{\|a\|}S_{hj}$

se obtiene:

si $p=i$, $q=j$ $\quad E=\frac{1}{\|a\|^2}\left(\sum_{k=1}^{n}S_{ki}a_{ki}(s,x_s)\right)\left(\sum_{h=1}^{n}S_{hj}a_{hj}(s,x_s)\right)=1$

si $p \neq i$ $\quad \sum_{k=1}^{n} S_{ki} a_{kp}(s,x_s) = o$ entonces $E=o$

si $q \neq j$ $\quad \sum_{h=1}^{n} S_{hj} a_{hq}(s,x_s) = o$ entonces $E=o$

por lo tanto si $i \neq j$ $\langle M^i, M^j \rangle_t = A_t^{ij}$ como queriamos probar.

Para concluir el Teorema queda por probar que c.s.P se verifica la ecuación diferencial estocástica. Por la definición de M_t se tiene que $N_t = \int_o^t a(s,x_s)\, dM_s$, y como N_t es, por hipótesis $N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s) dV_s$ se tiene c.s.P la ecuación integral

$$x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s) dV_s = \int_o^t a(s,x_s) dM_s$$

que escrita formalmente nos da la ecuación diferencial estocástica deseada.

Entonces queda probado el Teorema.

4. Formulación mediante operadores en derivadas parciales.

Encontrar una medida de probabilidad P sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$ siendo K un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, se verifique que

$$H_t = f(x_t) - f(x_o) - \int_o^t \sum_{j=1}^{n} L_1^j(f)(x_s) dV_s^j - \int_o^t \sum_{kh=1}^{n} L_2^{kh}(f)(x_s) dA_s^{kh}$$

sea $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala. Donde

$$L_1^j(f) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad L_2^{kh}(f) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} a_{ik}(t,x) a_{jh}(t,x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

y A_t^{kh} son los elementos de una matriz dada.

Propiedades.

Vamos a dar aquí dos teoremas que establecen la relación que hay entre la Formulacion mediante operadores en derivadas parciales con las Formulaciones exponencial e Integral.

Teorema 4.1.-

La Formulación Exponencial implica la Formulación mediante operadores en derivadas parciales.

Demostración.

Suponemos aquí que existe una medida de probabilidad sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que

$$X_\theta(t) = \exp\left\{(\theta, x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)dV_s) - \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\right\}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, siendo $\langle N\rangle_t$ la matriz nxn cuyos elementos vienen dados por

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

Definimos: $\forall\, \theta \in \mathbb{R}^n$

$$B_\theta(t) = \exp\left\{(\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s) + \frac{1}{2}(\theta, \langle N\rangle_t \theta)\right\}$$

Designamos por $\mathcal{V}$ al espacio de procesos cuyas trayectorias sean de variación acotada sobre todo intervalo finito de $\mathbb{R}_+$.

Por una parte,

$$(\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s) = \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \int_o^t b_{ij}(s,x_s)dV_s^j$$

como b es continua en (s,x), $\forall (s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, y $V_t \in \mathcal{V}$ entonces

$$\int_0^t b_{ij}(s,x_s)dV_s^j \in \mathcal{V} \quad \text{y además} \quad (\theta, \int_0^t b(s,x_s)dV_s) \in \mathcal{V} \quad .$$

Por otra parte, A_t^{kh} es para k=h un proceso creciente y para $k \neq h$ es diferencia de dos procesos crecientes, luego sobre todo intervalo finito de $\mathbb{R}_+$ $A^{kh} \in \mathcal{V}$, como a es continua en (s,x) $\forall$ $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ se tiene $\int_0^t a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh} \in \mathcal{V}$ por lo tanto $(\theta, \langle N\rangle_t \theta) \in \mathcal{V}$. La exponencial de una función real de variación acotada, sobre cada intervalo finito $[o,t]$ tambien es de variación acotada, entonces $B_\theta(t) \in \mathcal{V}$.

Por hipótesis, $X_\theta(t)$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, y por el Teorema 1.3 es además continua y de cuadrado integrable, por lo tanto es, en particular $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local continua.

Podemos aplicar, entonces la Fórmula de Integración por Partes a $B_\theta(t)$. Esta Formula la damos y referenciamos en los Preliminares. Podemos tambien aplicarla a $X_\theta(t)$. De esta manera obtenemos que el proceso

$$B_\theta(t)\, X_\theta(t) - \int_0^t X_\theta(s)\, dB_\theta(s) - 1$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local continua igual a $\int_0^t B_\theta(s)\, dX_\theta(s)$.

Calculamos ahora cada uno de los sumandos de la $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala local $B_\theta(t)\, X_\theta(t) - \int_0^t X_\theta(s)\, dB_\theta(s) - 1$:

$$B_\theta(t)\, X_\theta(t) = \exp\left\{ (\theta \, , \, x_t - x_o \,) \right\}$$

$$dB_\theta(t) = B_\theta(t)\, d\left[(\theta, \int_0^t b(s,x_s)\, dV_s) + \frac{1}{2} (\theta \, , \langle N\rangle_t \theta \,) \right] =$$

$$= B_\theta(t) \left[(\theta \, , \, b(t,x_t)\, dV_t) + \frac{1}{2} (\theta \, , \, d\langle N\rangle_t \, \theta \,) \right]$$

entonces

$$X_\theta(t)dB_\theta(t)= \exp\{(\theta,x_t-x_o)\}\left[(\theta,b(t,x_t)dV_t)+\frac{1}{2}(\theta,d\langle N\rangle_t\theta)\right]$$

sustituyendo las expresiones ontenidas se tiene

$$B_\theta(t)X_\theta(t)-\int_0^t X_\theta(s)dB_\theta(s) - 1 =$$

$$= \exp\{(\theta,x_t-x_o)\} - \int_0^t \exp\{(\theta,x_s-x_o)\}\left[(\theta,b(s,x_s)\ dV_s)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \exp\{(\theta,x_s-x_o)\}\left[(\theta,\ d\langle N\rangle_t\theta\ )\right] - 1$$

esta expresión es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local $\forall\ \theta\in\mathbb{R}^n$.

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)= \exp(\theta,x)\ \forall\ \theta\in\mathbb{R}^n$, esta función es de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos los siguientes operadores L_1 y L_2:

$$L_1^j(f) = \sum_{i=1}^n b_{ij}(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad j=1,\dots,n$$

$$L_2^{kh}(f) = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n a_{ik}(t,x)\ a_{jh}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$k,h=1,\dots,n$$

Teniendo en cuenta que $f(x)= \exp(\theta,x)$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \theta_i\exp(\theta,x) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \theta_i\theta_j\ \exp(\theta,x)$$

para esta funcion los operadores definidos son de la forma

$$L_1^j(f) = \exp\{(\theta,x)\}\sum_{i=1}^n b_{ij}(t,x)\theta_i \qquad j=1,\dots,n$$

$$L_2^{kh}(f)= \frac{1}{2}\exp\{(\theta,x)\}\sum_{ij=1}^n a_{ik}(t,x)a_{jh}(t,x)\theta_i\theta_j$$

$$k,h=1,\dots,n$$

Desarrollando cada sumando de la $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local que hemos obtenido a la luz de la forma que tiene los operadores L_1 y L_2 para la función f concreta que hemos dado se tiene

$$\exp\{(\theta,x_s-x_o)\}\ [(\theta,b(s,x_s)dV_s)] =$$

$$= \exp\{(\theta,x_s)\}\ \exp\{-(\theta,x_o)\}\ [(\theta,b(s,x_s)\ dV_s)] =$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\exp\{(\theta,x_s)\}\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i\ \sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s,x_s)dV_s^j\right] =$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\exp\{(\theta,x_s)\}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i b_{ij}(s,x_s)\right)dV_s^j\right] =$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\sum_{j=1}^{n}\left(\exp\{(\theta,x_s)\}\sum_{i=1}^{n}\theta_i b_{ij}(s,x_s)\right)dV_s^j =$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\ \sum_{j=1}^{n}L_1^j(f)(x_s)\ dV_s^j.$$

analogamente para el segundo sumando se tiene la expresión

$$\frac{1}{2}\exp\{(\theta,x_s-x_o)\}\ [(\theta,\ d\ N\ {}_t\theta\ )] =$$

$$= \frac{1}{2}\{\exp -(\theta,x_o)\}\ \exp\{(\theta,x_s)\}\sum_{ij=1}^{n}\theta_i\theta_j\ \sum_{kh=1}^{n}a_{ik}(s,x_s)a_{jh}dA_s^{kh}$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\sum_{kh=1}^{n}\frac{1}{2}\exp\ (\theta,x_s)\ \sum_{ij=1}^{n}\theta_i\theta_j a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}$$

$$= \exp\{-(\theta,x_o)\}\sum_{kh=1}^{n}L_2^{kh}(f)(x_s)\ dA_s^{kh}.$$

por lo tanto

$$\exp\{(\theta,x_t-x_o)\} - \int_o^t \exp\{-(\theta,x_o)\}\ \sum_{j=1}^{n}L_1^j(f)(x_s)\ dV_s^j\ -$$

$$- \int_o^t \exp\{-(\theta,x_o)\}\ \sum_{kh=1}^{n}L_2^{kh}(f)(x_s)\ dA_s^{kh}\ -\ 1$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local continua cuando $f(x)=\exp(\theta,x)$ $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$.

Multiplicando por la constante $\exp\{-(\theta,x_o)\}$ se sigue teniendo que

$$\exp(\theta,x_t) - \exp(\theta,x_o) - \int_o^t \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(x_s)dV_s^j - \\ - \int_o^t \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(x_s)\, dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala local continua cuando $f(x)=\exp(\theta,x)$.

Vemos, entonces que la Formulación mediante operadores en derivadas parciales se satisface cuando f es de la forma $\exp(\theta,x)$, entonces tambien se satisface cuando f es una combinación lineal de exponenciales de este tipo.

Por otra parte, como se trata de martingalas locales continuas, el conjunto de funciones f de $C_K^2(\mathbb{R}^n)$, K un compacto de $\mathbb{R}^n$, que verifican que H_t es martingala local continua es cerrado para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, con derivada de orden menor ó igual a dos (parando los procesos en los tiempos de salida de los compactos).

Además, L. Schwarz (19) probó que toda función de $C_K^2(\mathbb{R}^n)$ es límite de combinaciones lineales de exponenciales. Con este resultado queda probado que

$$H_t = f(x_t)-f(x_o)- \int_o^t \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(x_s)dV_s^j - \int_o^t \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(x_s)dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$. Y por ser f de soporte compacto, esta martingala local continua es acotada, por tanto es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala.

Teorema 4.2.-

La Formulación mediante operadores en derivadas parciales implica la Formulación Integral.

Demostración.

Suponemos aquí, que existe una medida de probabilidad P sobre un espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$ tal que $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$

$$H_t = f(x_t) - f(x_o) - \int_o^t \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(x_s)\,dV_s^j - \int_o^t \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(x_s)\,dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, donde

$$L_1^j(f) = \sum_{i=1}^n b_{ij}(t,x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad ; \quad L_2^{kh}(f) = \frac{1}{2}\sum_{kh=1}^n a_{ik}(t,x)a_{jh}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

y vamos a probar, que

$$N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\,dV_s$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala continua de cuadrado integrable con $N_t \otimes N_t$ matriz nxn cuyos elementos vienen dados por

$$\langle N \rangle_t^{ij} = \int_o^t \sum_{kh=1}^n a_{ik}(s,x_s)\; a_{jh}(s,x_s)\; dA_s^{kh}$$

Como H_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$ en particular lo será si hacemos:

1) $f(x) = (\theta, x)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$. En este caso

$$L_1^j(f)(x) = \sum_{i=1}^n b_{ij}(t,x)\;\theta_i \;;\quad L_2^{kh}(f)(x) = o$$

entonces

$$H_t = (\theta, x_t) - (\theta, x_o) - \int_o^t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij}(s,x_s)\;dV_s^j =$$

$$= (\theta, x_t - x_o) - \sum_{i=1}^{n} \theta_i \int_o^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j =$$

$$= \left(\theta \,,\, x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s \right)$$

entonces, si llamamos $Q_t = (\theta,\ x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s) dV_s)$ se tiene que Q_t es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala continua.

2) $f(x) = (\theta,x)^2$, $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$. En este caso

$$L_1^j(f)(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(t,x)(\theta,x)\theta_i \qquad j=1,\ldots,n$$

$$L_2^{kh}(f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} a_{ik}(t,x) a_{jh}(t,x)\ 2\ \theta_i \theta_j \ , \ k,h=1,\ldots,n$$

entonces

$$H_t = (\theta,x_t)^2 - (\theta,x_o)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \theta_i \int_o^t (\theta,x_s) \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s,x_s)\, dV_s^j -$$

$$- \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_o^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s) a_{jh}(s,x_s) dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua. Llamamos

$$R_t = (\theta,x_t)^2 - (\theta,x_o)^2 - 2 \int_o^t (\theta,x_s)(\theta, b(s,x_s) dV_s) \ .$$

Sea $B(t) = \int_o^t (\theta,\ b(s,x_s)\ dV_s)$. Si designamos por $\mathcal{V}$ el espacio de los procesos cuyas trayectorias sean funciones de variación acotada, como $V_t \in \mathcal{V}$ por hipótesis y b es continua en (t,x), $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ entonces $B(t) \in \mathcal{V}$.

Por otra parte, por ser Q_t $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua entonces $\int_o^t B(s) dQ_s$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local. Vamos a calcular su valor.

$$\int_0^t B(s)\ dQ_s = \int_0^t \int_0^s (\theta, b(u,x_u)dV_u)\ \ dQ_s$$

teniendo en cuenta la expresión de Q_t se tiene

$$\int_0^t B(s)dQ_s = \int_0^t \left(\int_0^s (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) (\theta,\ dx_s - b(s,x_s)dV_s) =$$

$$\int_0^t \left(\int_0^s (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) (\theta, dx_s) - \int_0^t \left(\int_0^s (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) (\theta, b(s,x_s)dV_s$$

integrando por partes el primer sumando

$$\int_0^t (\theta, b(u,x_u)dV_u)\ \ (\theta, x_t) - \int_0^t (\theta, x_s)\ (\theta, b(s,x_s)\ dV_s$$

integrando por partes el segundo sumando

$$\left(\int_0^t (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) \left(\int_0^t (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) -$$

$$- \int_0^t \left(\int_0^s (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right) (\theta, b(s,x_s)\ dV_s =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^t (\theta\ ,\ b(u,x_u)\ dV_u) \right)^2 .$$

Sustituyendo ambos sumando queda:

$$\int_0^t B(s)dQ_s = (\theta, x_t) \int_0^t (\theta, b(u,x_u)dV_u) - \int_0^t (\theta, x_s)(\theta, b(u,x_u)dV_u) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\int_0^t (\theta, b(u,x_u)dV_u) \right)^2 .$$

Por otra parte Q_t^2 viene dada por

$$Q_t^2 = \left[(\ \theta\ ,\ x_t - x_o - \int_0^t b(s,x_s)\ dV_s\ ) \right]^2 =$$

$$= (\theta,x_t)^2 + (\theta,x_o)^2 + \left((\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s)\right)^2 - 2(\theta,x_t)(\theta,x_o) -$$

$$- 2\,(\theta,x_t)\,(\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s) + 2\,(\theta,x_o)(\,\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s\,)$$

entonces $Q_t^2 - R_t$ está dado por:

$$Q_t^2 - R_t = 2\,(\theta,x_o)^2 + \left((\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s)\right)^2 - 2\,(\theta,x_t)(\theta,x_o) -$$

$$- 2\,(\theta,x_t-x_o)\,(\theta, \int_o^t b(s,x_s)dV_s) + 2\int_o^t (\theta,x_s)(\theta,b(s,x_s)dV_s)$$

comparando esta expresión de $Q_t^2 - R_t$ con la expresión que hemos obtenido para $\int_o^t B(s)dQ_s$ queda

$$Q_t^2 - R_t = -\,2\int_o^t B(s)dQ_s - 2\,Q_t\,(\theta,x_o) \qquad \forall\theta\in\mathbb{R}^n$$

como $\int_o^t B(s)dQ_s$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala local acotada por ser b acotada, entonces es martingala. Como Q_t tambien lo es resulta que $Q_t^2-R_t$ es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala, además continua.

Por otra parte, tambien hemos probado que

$$R_t - \sum_{ij=1}^n \theta_i\theta_j \int_o^t \sum_{kh=1}^n a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua, por ser la suma de dos martingalas tambien martingala se tiene que

$$Q_t^2-R_t+ R_t- \sum_{ij=1}^n \theta_i\theta_j \int_o^t \sum_{kh=1}^n a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)\,dA_s^{kh}$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala.

Vamos a probar que Q_t es además de cuadrado integrable.

Para ello hay que probar que $E^P[Q_t^2]<\infty$. Por definición de esperanza

$$E^P[Q_t^2] = \int_W Q_t^2\, dP = \int_U Q_t^2\, dP + \int_{U^c} Q_t^2\, dP$$

donde $U=\{w: \sup_{o\leq t\leq T} |Q_t| < p\}$, $U^c=\{w: \sup_{o\leq t\leq T} |Q_t| \geq p\}$, $p>o$. Si $P[w: \sup_{o\leq t\leq T} |Q_t|<p] = 1$ entonces Q_t^2 seria uniformemente acotada, por tanto seria integrable y $E^P[Q_t^2]<\infty$. Supongamos pues que $P[w: \sup_{o\leq t\leq T} |Q_t| < p]<1$ entonces en este conjunto seria $Q_t^2 \leq p^2$, es decir,

$$E^P[Q_t^2] \leq \int_{U^c} Q_t^2\, dP + p^2\, P[w: \sup_{o\leq t\leq T}|Q_t|<p] < p^2+ \int_{U^c}Q_t^2 dP \leq \infty$$

Por lo tanto Q_t es $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable real, entonces existe un único proceso creciente asociado a esta martingala, denotado por $\langle Q\rangle_t$ tal que $Q_t^2 - \langle Q\rangle_t$ es una $(P, \mathbb{F}_t)$-martingala. Por lo que hemos probado este proceso creciente $\langle Q\rangle_t$ es necesariamente

$$\sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j \int_o^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}.$$

Observemos que $Q_t = (\theta, N_t)$ y $\langle Q\rangle_t = (\theta, \langle N\rangle_t\theta)$, luego, como esto ocurre $\forall\ \theta\in\mathbb{R}^n$ se tiene

$$N_t = x_t - x_o - \int_o^t b(s,x_s)\, dV_s$$

es $(P, \mathbb{F}_t)$- martingala continua de cuadrado integrable con

$$\langle N\rangle_t^{ij} = \int_o^t \sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,x_s)\, a_{jh}(s,x_s)\, dA_s^{kh}$$

y el Teorema queda pues, probado.

5. Equivalencia entre las cuatro Formulaciones y planteamiento de un caso particular.

En los cuatro parágrafos anteriores hemos conseguido relacionar las cuatro Formulaciones planteadas dos a dos.

Bajo las hipótesis generales planteadas al comienzo de esta primera parte hemos probado que:

1) la Formulación Exponencial e Integral son equivalentes

2) la Formulación Exponencial implica la Formulación mediante operadores en derivadas parciales

3) la Formulación mediante operadores en derivadas parciales implica la Formulación Integral

y, la hipótesis suplementaria sobre la matriz a de poseer ésta una inversa uniformemente acotada hemos probado que la Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y la Formulación Integral son equivalentes.

Por lo tanto, si se suponen dados: un espacio medible filtrado $(W, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t)$, a, b, A, V y sobre ellos las hipótesis generales y la suplementaria a las que antes hemos aludido, entonces las cuatro Formulaciones son equivalentes, y una vez encontrada la medida de probabilidad sobre el espacio medible filtrado dado que resuelva una de ellas tendremos resuelta cualquiera de las cuatro Formulaciones pudiendo utilizarlas indistintamente.

En la segunda parte de este trabajo utilizaremos estas cuatro Formulaciones bajo las hipótesis en las que son equi-

valentes, pero nos situaremos en un espacio medible concreto: el espacio W de las funciones continuas de $\mathbb{R}_+$ con valores en $\mathbb{R}^n$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{R}_+$, y sobre este espacio consideramos la σ-álgebra de los conjuntos Borelianos que denotamos por $\mathbb{B}$, y la familia creciente $(\mathbb{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sub-σ-álgebras de $\mathbb{B}$, tal que para cada t de $\mathbb{R}_+$ $\mathbb{B}_t$ está generada por las funciones continuas x_s, $s \leq t$.

Tambien hemos de señalar que, a diferencia de la primera parte, partimos aquí de una aplicación $A: \mathbb{R}_+ x\, W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que cada componente de A verifica las hipótesis del Teorema de Skorokhod que permite a partir de A construir una $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala contina de cúadrado integrable, donde P_W es la medida de Wiener sobre $(W, \mathbb{B})$ y, a partir de esta martingala construimos los elementos de la matriz que, en la primera parte henos llamado A, haciendo $A_t^{ij} = \langle M^i, M^j\rangle_t$.

Entonces, sobre este espacio $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$ y denotando por w(t) el valor de la función $w\in W$ en el tiempo t las Formulaciones son:

<u>Formulación Exponencial</u>. Encontrar una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$ tal que $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$

$$X_\theta(t)= \exp\Big\{(\theta, w(t)-w(o)-\int_o^t b(s,w(s))dV(s))-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\int_o^t\sum_{kh=1}^{n} a_{ik}(s,w(s))a_{jh}(s,w(s))dA_s^{kh}(w)\Big\}$$

es $(P, \mathbb{B}_t)$-martingala.

Formulación integral. Encontrar una medida de probabilidad sobre $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$ tal que

$$N_t(w) = w(t)-w(o)-\int_o^t b(s,w(s))dV(s)$$

sea $(P, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con $N_t \otimes N_t$ matriz nxn cuyos elementos son

$$\langle N^i,N^j\rangle_t(w) = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_{ik}(s,w(s))a_{jh}(s,w(s))dA_s^{kh}(w)$$

Formulación en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Encontrar una medida de probabilidad P y un proceso M_t sobre el espacio $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$ tales que: a) M_t sea $(P, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y $\langle M^i,M^j\rangle_t(w)= A_t^{kh}(w)$.
b) $dw(t)=a(t,w(t))dM_t(w)+b(t,w(t))dV(t)$, $w(o)=x$, c.s. P

Formulación mediante operadores en derivadas parciales. Encontrar una medida de probabilidad P sobre $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$ tal que $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$, siendo K un compacto de $\mathbb{R}^n$ se tenga que

$$H_t = f(w(t))-f(x)-\int_o^t \sum_{j=1}^{n} L_1^j(f)(w(s))dV^j(s)-\int_o^t \sum_{kh=1}^{n} L_2^{kh}(f)w(s)dA_s^{kh}$$

sea $(P, \mathbb{B}_t)$-martingala. Donde L_1 y L_2 son como en el paragrafo 4.

Expresadas de esta manera es como utilizaremos estas Formulaciones en la segunda parte, donde V será una función de variación acotada y no un proceso como en esta primera parte.

II: UN TEOREMA DE EXISTENCIA.

Sea W el espacio de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}_+$ con valores en $\mathbb{R}^n$. El valor de la función $w \in W$ en el tiempo t lo denotamos por $x_t(w)$. Dotamos a W con la topología de la convergencia uniforme sobre los intervalos compactos de $\mathbb{R}_+$.

Si para todo $t>o$ designamos por W_t el conjunto de aplicaciones continuas de $[o,t]$ con valores en $\mathbb{R}^n$, dotado de la distancia de la convergencia uniforme, entonces W_t es un espacio métrico, separable y completo. La topología de W puede, entonces considerarse como la topología límite proyectivo de las topologias de W_n, n entero positivo y W es, por tanto un espacio polaco.

Entonces, con la topología de la convergencia uniforme sobre intervalos compactos W puede considerarse como un espacio métrico, separable y completo.

En este caso, la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}$ sobre W puede identificarse a la menor σ-álgebra definida sobre W para la cual $x_t(w)$ es medible para $o \leq t < \infty$.

Además, si C es la clase de los conjuntos de la forma

$$\{w: x_{t_1}(w) \in \Gamma_1, \ldots, x_{t_n}(w) \in \Gamma_n\}$$

para $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ y $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$ arbitrario, entonces C genera la σ-álgebra $\mathbb{B}$, y en muchos de los razonamientos posteriores, podremos limitarnos a los elementos de C como los generados de $\mathbb{B}$. Además si dos medi-

das de probabilidad coinciden sobre C coinciden tambien sobre $\mathbb{B}$.

Consideremos la familia creciente $(\mathbb{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sub-σ-álgebras de $\mathbb{B}$, donde $\mathbb{B}_t$ para cada $t\in\mathbb{R}_+$ es la σ-álgebra generada sobre W de modo que las funciones x_s, $s\leq t$ sean medibles.

Disponemos pues, de un espacio medible filtrado $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$.

Sea $A: \mathbb{R}_+ \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las condiciones del Teorema de A.V. Skorokhod. (Vease Preliminares).

Sea $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de variación acotada y verificando una condición de Lipschitz.

Sean $a: \mathbb{R}_+ x \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, $b: \mathbb{R}_+ x \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ dos funciones continuas en ambas variables (t,x), $\forall (t,x)\in \mathbb{R}_+ x \mathbb{R}^n$ y uniformemente acotada superiormente.

Si P es una medida de probabilidad sobre el espacio medible filtrado $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$, sea M_t la $(P, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable construida según la técnica del Teorema de A.V. Skorokhod de modo que $\langle M\rangle_t = A_t$ su proceso creciente asociado. Naturalmente entendido componente a componente. Designamos por $A_t^{kh} = \langle M^k, M^h\rangle_t$ el único proceso de variación integrable si $k\neq h$, y creciente si $k=h$, determinado por los proceso reales componentes de la martingala M, de modo que $M_t^k M_t^k - \langle M^k, M^k\rangle_t$ es martingala.

Podemos considerar entonces, la ecuación diferencial estocástica:

$$(1) \quad dx_t(w) = a(t,x_t(w))dM_t(w) + b(t,x_t(w))dV(t)$$

con la condición inicial de ser $x_o = x$ c.s.P.

En la forma integral (1) es

$$(2) \qquad x_t(w) = x + \int_o^t a(s,x_s(w))dM_s(w) + \int_o^t b(s,x_s(w))dV(s) \quad \text{c.s.P}$$

Sin embargo si no se suponen hipótesis de Lipschitz para las funciones a y b la ecuación (2) no tiene solución en el sentido de Catherine Doleans-Dade ó Ph. Protter, soluciones que son de tipo trayectorial. Nos proponemos aquí el considerar un nuevo tipo de soluciones de (2), que naturalmente al ser válida su existencia bajo condiciones mas generales que la de estos autores, será una solución mas débil.

Asi pues, desde ahora, las soluciones de tipo trayectorial consideradas por Ch. Doleans-Dade ó Ph. Protter las llamaremos soluciones fuertes, frente a las soluciones débiles que vamos a definir ahora.

Una <u>solución débil</u> de (2) (ó (1)) es un conjunto de elementos $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t, \tilde{M}_t, \tilde{P})$ tales que:

1) $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$ es un espacio medible filtrado, obtenido a partir de $(W, \mathbb{B}, \mathbb{B}_t)$.
2) $\tilde{P}$ es una medida de probabilidad sobre $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$.
3) $\tilde{M}_t$ es una $(\tilde{P}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con proceso creciente determinado a partir de A.
4) $\tilde{P}[\tilde{w}: \tilde{w}(o)=x] = 1$
5) Se verifica c.s. $\tilde{P}$ la relación

$$\tilde{w}(t) = x + \int_o^t a(s,\tilde{w}(s))d\tilde{M}_s(\tilde{w}) + \int_o^t b(s,\tilde{w}(s))dV(s)$$

Establecemos ahora las condiciones bajo las cuales pueden garantizarse la existencia de soluciones débiles de (2).

Teorema de Existencia.-

Supongamos que A, V, a y b estan definidas como antes. Si además la función a es tal que:

- está uniformemente acotada inferiormente por una constante positiva y existe su inversa a^{-1}
- $\forall\ \theta\in\mathbb{R}^n$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall w\in W$, $\forall\ u\in[o,t]$, se tiene

$$\text{(H1)}\qquad o\leq \sum_{ij=1}^{n}\theta_i\theta_j\int_u^t\sum_{kh=1}^{n}a_{ik}(s,x)a_{jh}(s,x)dA_s^{kh}\leq C|\theta|^2$$

- $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$: $|\theta|\leq 1$, $\forall s,t\in\mathbb{R}_+$, $s\leq t$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall w\in W$ se tiene

$$\text{(H2)}\qquad \left|\sum_{ij=1}^{n}\theta_i\theta_j\int_s^t\sum_{kh=1}^{n}a_{ik}(u,x)a_{jh}(u,x)dA_u^{kh}(w)\right|\leq r|t-s|$$

para alguna constante positiva r.

Entonces, existe solución débil de (1) ó (2).

Demostración.

Por hipótesis a y b son continuas y acotadas, entonces existen sucesiones de funciones (a_m), (b_m) que además de ser continuas y acotadas para cada m, verifican para cada m la condición de Lipschitz, y como sucesiones convergen uniformemente a las a y b respectivamente.

Sea P_W la medida de Wiener sobre $(W,\mathbb{B})$, podemos entonces considerar, para cada m la ecuación integral estocástica

$$\text{(I)}\qquad x_t^m(w)=x+\int_o^t a_m(s,x_s^m(w))dM_s(w)+\int_o^t b_m(s,x_s^m(w))dV(s)\quad \text{c.s.}P_W$$

siendo M_s la $(P, \mathbb{B}_s)$-martingala continua de cuadrado integrable construida a partir de A mediante el Teorema de A.V.Skorokhod.

En estas condiciones, C. Doleans-Dade ó Ph. Protter demuestran la existencia y unicidad trayectorial del proceso $x_t^m(w)$, con trayectorias continuas, $\mathbb{B}_t$-adaptado y tal que c.s. P_W se verifica la ecuación integral (I).

Este proceso tiene una ley de distribución que vamos a obtener a continuación.

Para ello, sea ϕ una aplicación del espacio W en si mismo, es decir: $\phi : W \longrightarrow \tilde{W}$ donde $\tilde{w}=\phi(w)$ está definida de modo que $\phi(w)(t)=x_t^m(w)$.

Esta aplicación transforma la σ-álgegra $\mathbb{B}$ y la familia $(\mathbb{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en si mismas, y la medida de Wiener P_W en la ley de distribución del proceso x^m. A esta ley la denotamos por P^m y vendrá dada por

$$P^m(\Gamma) = P_W(\phi^{-1}(\Gamma)) \quad \forall \Gamma \in \mathbb{B}.$$

A través de esta aplicación ϕ vamos a definir la siguiente relación de equivalencia en W: si w_1 y w_2 son dos elementos de W, decimos que w_1 y w_2 estan ϕ- relacionados si y solo si $\phi(w_1) = \phi(w_2)$.

Consideramos el espacio cociente W/ϕ que denotamos por $\bar{W}$, mientras que por $\bar{w}$ designamos la clase de equivalencia asi como un elemento representativo de ella; es decir, si $\bar{w}\in\bar{W}$ entonces $\bar{w} = \{w\ W$: w está ϕ-relacionado con $\bar{w}\}$, ó bien

$\phi(w)=\phi(\bar{w})$ $\forall w\in\bar{w}$. Mediante esta relación de equivalencia obtenemos el espacio probabilístico $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}_t, \bar{P}_W)$.

Definimos ahora la siguiente aplicación sobre $\bar{W}$: $\bar{\phi} : \bar{W} \to \tilde{W}$ tal que $\bar{\phi}(\bar{w})=\phi(w)$ $\forall\ w\in\bar{w}$, siendo ahora $\tilde{W}$ el transformado por $\bar{\phi}$ de $\bar{W}$. Entonces $\bar{\phi}$ es una aplicación inyectiva y se tiene

$$\bar{P}_W(\ \bar{\phi}^{-1}(\Gamma)\ ) = P_W(\ \phi^{-1}(\Gamma)\ ) \qquad \forall \Gamma \in \mathbb{B}.$$

Por otra parte, de (I) se tiene c.s. P_W

$$x_t^m(w)-x-\int_0^t b_m(s,x_s^m(w))\ dV(s) = \int_0^t a_m(s,x_s^m(w))\ dM_s(w)$$

llamamos $N_t(w)$ a la integral estocástica $\int_0^t a_m(s,x_s^m(w))dM_s(w)$. Vamos a probar que $N_t(w)$ es una $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable. Ahora bien, sabemos que M_t es una $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y llamamos $A_t^{ij}(w)$ a los corchetes $\langle M^i,M^j\rangle_t(w)$. Entonces para que $N_t(w)$ sea $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable es suficiente que $E^{P_W}\left[\langle N^i,N^j\rangle_t(w)\right] < \infty$. Pero $\langle N^i,N^j\rangle_t(w)$ viene dado por el corchete

$$\left\langle \int_0^t \sum_{k=1}^n a_m^{ik}(s,x_s^m(w))dM_s^k(w)\ ,\ \int_0^t \sum_{k=1}^n a_m^{jk}(s,x_s^m(w))dM_s^k(w)\right\rangle$$

y en el Teorema (3.1) de la primera parte vimos que estos corchetes vienen dados por

$$\int_0^t \sum_{kh=1}^n a_m^{ik}(s,x_s^m(w))\ a_m^{jh}(s,x_s^m(w))\ dA_s^{kh}(w)$$

entonces,

$$E^{P_W}[\langle N^i,N^j\rangle_t(w)]=E^{P_W}\left[\int_0^t \sum_{kh=1}^{n} a_m^{ik}(s,x_s^m(w))a_m^{jh}(s,x_s^m(w))dA_s^{kh}(w)\right]$$

teniendo en cuenta que a_m está uniformemente acotada superiormente, es decir existe un número real positivo p tal que $\forall i,j=1,\dots,n$: $a_m^{ij}\leq p$; y que $A_s^{kh}(w)=\langle M^k,M^h\rangle_t(w)$ donde, por ser M_t una $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable y por ello $E^{P_W}[\langle M^k,M^h\rangle_t(w)]<\infty$, se tiene que $E^{P_W}(A_s^{kh})<\infty$ entonces $E^{P_W}[\langle N^i,N^j\rangle_t(w)]<\infty$ y por consiguiente N_t es $(P_W, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable con $\langle N^i,N^j\rangle_t(w)$ conocido.

A partir de N_t vamos a definir $\bar{N}_t$: $\bar{N}_t$ es una aplicación de $\bar{W}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\forall\, w\in\bar{w}$ $\bar{N}_t(\bar{w}) = N_t(w)$.

Esta aplicación esta bien definida, pues si $w_1,w_2\in \phi^{-1}(\tilde{w})$ entonces $\phi(w_1)=\phi(w_2)$, y esto implica que $x_t^m(w_1) = x_t^m(w_2)$ para cualquiera que sea t de $\mathbb{R}_+$, entonces se tiene

$$x_t^m(w_1) -x- \int_0^t b_m(s,x_s^m(w_1))dV(s) =$$

$$= x_t^m(w_2)- x- \int_0^t b_m(s,x_s^m(w_2))\, dV(s) \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

por lo tanto $\forall t\in\mathbb{R}_+$ $N_t(w_1) = N_t(w_2)$.

Por último, definimos $\tilde{N}_t = \bar{N}_t\circ\bar{\phi}^{-1}$. Entonces, $\tilde{N}_t:\tilde{W}\longrightarrow\mathbb{R}^n$.

Vamos a probar ahora que:

1) $\bar{N}_t$ es $(\bar{P}_W, \bar{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable sobre $(\bar{W}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}_t)$.

2) $\tilde{N}_t$ es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable sobre $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$.

Demostración de 1). Si designamos por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-álgebra de los cojuntos Borelianos sobre $\mathbb{R}^n$ y por $B(\mathbb{R}^n)$ cualquier conjunto de ella, entonces

$$\bar{N}_t^{-1}(B(\mathbb{R}^n)) = \{\bar{w}\in\bar{W}:\ \bar{N}_t(\bar{w})\ B(\mathbb{R}^n)\} = \{\{w\in W:\ N_t(w)\in B(\mathbb{R}^n)\}\in\mathbb{B}_t\}$$

y este conjunto es de $\bar{\mathbb{B}}_t$, por lo tanto $\bar{N}_t$ es $\bar{\mathbb{B}}_t$-medible. Por otra parte, $\forall\ \bar{B}\in\bar{\mathbb{B}}_s$, $s\leq t$ se tiene

$$\int_{\bar{B}} \bar{N}_t(\bar{w})\ \bar{P}_W(d\bar{w}) = \int_B N_t(w)\ P_W(dw) \qquad \text{con } B\in\mathbb{B}_s$$

por ser N_t $(P_W, \mathbb{B})$-martingala $\int_B N_t(w)P_W(dw) = \int_B N_s(w)P_W(dw)$

y deshaciendo de nuevo el cambio queda $\int_{\bar{B}} \bar{N}_s(\bar{w})\bar{P}_W(d\bar{w})$, luego $\bar{N}_t$ es $(\bar{P}_W, \bar{\mathbb{B}}_t)$-martingala. Haciendo un razonamiento completamente análogo al anterior y teniendo en cuenta que N_t es ademas continua y de cuadrado integrable se tiene que $\bar{N}_t$ tambien lo es.

Demostración de 2). Sea $B(\mathbb{R}^n)$ igual que en 1). Entonces teniendo en cuenta cómo esta definido $\tilde{N}_t$ se tiene que $\tilde{N}_t^{-1}(B(\mathbb{R}^n))$ es igual a $\bar{\phi}\circ\bar{N}_t^{-1}(B(\mathbb{R}^n))$ este conjunto pertenece a $\bar{\phi}(\bar{B}_t)$ que es un elemento de $\tilde{\mathbb{B}}_t$. Por lo tanto $\tilde{N}_t$ es $\tilde{\mathbb{B}}_t$-medible.

Sea $\tilde{B}\in\tilde{\mathbb{B}}_s$, entonces $\bar{\phi}^{-1}(\tilde{B})\in\bar{\mathbb{B}}_s$ y se tiene

$$\int_{\tilde{B}} \tilde{N}_t(\tilde{w})P^m(d\tilde{w}) = \int_{\tilde{B}} \bar{N}_t(\bar{\phi}^{-1}(\tilde{w}))P^m(d\tilde{w})$$

teniendo en cuenta que $P^m(\Gamma) = P_W(\phi^{-1}(\Gamma)) = \bar{P}_W(\bar{\phi}^{-1}(\Gamma))$ y que $\bar{N}_t$ es $(\bar{P}_W, \bar{\mathbb{B}}_t)$ martingala se tiene

$$\int_{\tilde{B}} \bar{N}_t(\bar{\phi}^{-1}(\tilde{w}))P^m(d\tilde{w}) = \int_{\{\bar{w}:\bar{\phi}(\bar{w})\in\tilde{B}\}} \bar{N}_t(\bar{w})P^m\left[\tilde{w}:\ \bar{\phi}^{-1}(\tilde{w})\in d\bar{w}\right] =$$

$$= \int_{\bar{\phi}^{-1}(B)} \bar{N}_t(\bar{w})\bar{P}_W(d\bar{w}) = \int_{\bar{\phi}^{-1}(B)} \bar{N}_s(\bar{w})\bar{P}_W(d\bar{w}) = \int_{\tilde{B}} \tilde{N}_s(\tilde{w})P^m(d\tilde{w})$$

por lo tanto $\tilde{N}_t$ es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-maringala. Tniendo en cuenta que $\bar{N}_t$ es además continua y de cuadrado integrable, repitiendo un razonamiento análogo al anterior se prueba que $\tilde{N}_t$ es continua y de cuadrado integrable.

Vamos ahora a encontrar una expresión de $\tilde{N}_t$ mas conveniente para nuestros propósitos:

$$\tilde{N}_t(\tilde{w}) = \bar{N}_t\, \bar{\phi}^{-1}(\tilde{w}) = \bar{N}_t(\bar{w}) = \bar{x}_t^m(\bar{w}) - x - \int_0^t b_m(s, \bar{x}_s^m(\bar{w}))dV(s),$$

pero $\forall w \in \bar{w} \in \bar{W}$: $\bar{x}_t^m(\bar{w}) = x_t^m(w)$, y por otra parte $\tilde{w} = \bar{\phi}(\bar{w}) = \phi(\bar{w})$ que aplicado a $\forall t \in \mathbb{R}_+$ seria $\tilde{w}(t) = x_t^m(w) = \bar{x}_t^m(\bar{w})$, entonces

$$N_t(\tilde{w}) = \tilde{w}(t) - x - \int_0^t b_m(s, \tilde{w}(s))dV(s).$$

Como $\tilde{N}_t$ es $(P^m, \mathbb{B}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable sobre el espacio $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$ donde $\tilde{W}$ es el transformado de $\bar{W}$ por $\bar{\phi}$ tiene sentido hablar del proceso $\langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j \rangle_t$. Es más necesitamos calcularlo. Para ello vamos a buscar una $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable de manera que $\tilde{N}_t$ pueda expresarse como una integral estocástica respecto de dicha martingala, pues en este caso sabemos determinar el corchete correspondiente.

Por hipótesis, la matriz a esta uniformemente acotada superior e inferiormente, es decir existen constantes reales positivas p y q tales que $\forall i,j=1,\ldots,n$ $q \leq a_{ij} \leq p$. Por otra parte (a_m) converge uniformemente a la matriz a, entonces

a partir de un indice m_o en adelante se tiene que el determinante de la matriz a_m es distinto, de cero, por tanto existe la matriz inversa a_m^{-1} para todo m mayor ó igual que m_o, y además esta matiz inversa es tambien uniformemente acotada superior e inferiormente.

En estas condiciones, definimos

$$\tilde{M}_t(\tilde{w}) = \int_o^t a_m^{-1}(s,\tilde{w}(s))\, d\tilde{N}_s(\tilde{w}) \qquad \forall\, m \geqslant m_o$$

éste es un proceso con valores en $\mathbb{R}^n$. Cada componente viene dada por

$$\tilde{M}_t^i(\tilde{w}) = \sum_{j=1}^n \int_o^t (a_m^{-1})_{ij}(s,\tilde{w}(s))\, d\tilde{N}_s^j(\tilde{w}) \qquad \forall m \geqslant m_o$$

donde $\tilde{N}_t^j$ es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable por serlo $\tilde{N}_t$, además es real, entonces existe un único proceso, creciente integrable $\langle\tilde{N}^j\rangle_t$ asociado a $\tilde{N}_t^j$ tal que $\tilde{N}_t^j\,\tilde{N}_t^j - \langle\tilde{N}^j\rangle_t$ es $(P^m, \mathbb{B}_t)$-martingala. Luego si $\langle\tilde{N}^j\rangle_t$ es integrable se tiene $E^{P^m}\left[\langle\tilde{N}^j\rangle_t\right] < \infty$, $\forall j=1,\ldots,n$. Por otra parte $\forall i,j=1,\ldots,n$ $(a_m^{-1})_{ij} \leqslant p'$; p' constante real positiva. Entonces

$$E^{P^m}\left[\int_o^t (a_m^{-1})^2_{ij}(s,\tilde{w}(s))\, d\langle\tilde{N}^j\rangle_s \leqslant p'^2\, E^{P^m}\left[\langle\tilde{N}^j\rangle_t\right] < \infty$$

por lo tanto $\forall i=1,\ldots,n$, $\forall m \geqslant m_o$ $\tilde{M}_t^i$ es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, por tanto lo es $\tilde{M}_t$.

Por la definición de $\tilde{M}_t$ se tiene que

$$\tilde{N}_t(w) = \int_o^t a_m(s,\tilde{w}(s))\, d\tilde{M}_s(\tilde{w}) \qquad \forall m \geqslant m_o$$

Entonces $\langle N^i, N^j\rangle_t$ viene dado por el corchete

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \int_o^t a_m^{ik}(s,\tilde{w}(s))d\tilde{M}_s^k(\tilde{w}) \ , \ \sum_{k=1}^{n} \int_o^t a_m^{jk}(s,\tilde{w}(s))d\tilde{M}_s^k(\tilde{w})\right\rangle$$

$\forall m \geqslant m_o$. Aplicando la misma técnica que en el Teorema 3.1 de la primera parte se obtiene la siguiente expresión para este corchete:

$$\sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_m^{ik}(s,\tilde{w}(s))\ a_m^{jh}(s,\tilde{w}(s))\ d\langle \tilde{M}^k, \tilde{M}^h\rangle_s(\tilde{w}).$$

Si llamamos $\tilde{A}_t^{ij}(\tilde{w}) = \langle \tilde{M}^i, \tilde{M}^j\rangle_t(\tilde{w})$ $\forall i,j=1,\ldots,n$ entonces

$$\langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j\rangle_t(\tilde{w}) = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_m^{ik}(s,\tilde{w}(s))a_m^{jh}(s,\tilde{w}(s))d\tilde{A}_s^{kh}(\tilde{w})$$

$\forall m \geqslant m_o$.

Vamos a probar ahora que para todo θ vector de $\mathbb{R}^n$

$$o \leq \sum_{ij=1}^{n} \theta_i\theta_j \langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j\rangle_t(\tilde{w}) \leq C|\theta|^2.$$

Para ello necesitamos otra expresión de $\langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j\rangle_t(\tilde{w})$.

Sea un intervalo $[o,t]$, y sea $t_i^n = it2^{-n}$ para $o \leq i \leq 2^n$. C. Doleans-Dade ha demostrado que para dos martingalas continuas de cuadrado integrable, nosotros tomamos $\tilde{N}_t^i$, $\tilde{N}_t^j$, se tiene en el sentido de la convergencia L^1 :

$$\langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j\rangle_t(\tilde{w}) = \lim_n E^{P^m}\left[\left[(\tilde{N}^i_{t^n_{i+1}}(\tilde{w}) - \tilde{N}^i_{t^n_i}(\tilde{w}))\ (\tilde{N}^j_{t^n_{i+1}}(\tilde{w}) - \tilde{N}^j_{t^n_i}(\tilde{w}))\ \middle|\ \tilde{\mathbb{B}}_{t^n_i}\right] + \right.$$

$$\left. + N_o^i(w)\ N_o^j(w)\right]$$

ahora bien, de la propia definición de $\tilde{N}_t(\tilde{w})$ se tiene que para $t=o$ $\tilde{N}_o(\tilde{w})=o$, luego $\tilde{N}_o^i(\tilde{w})=\tilde{N}_t^j(\tilde{w})=o$.

Por otra parte, sea $\tilde{B}\in\tilde{\mathbb{B}}_{t_i^n}$ entonces:

$$\int_{\tilde{B}} E^{P^m}\left[\left(\tilde{N}^i_{t^n_{i+1}}(\tilde{w})-\tilde{N}^i_{t^n_i}(\tilde{w})\right)\left(\tilde{N}^j_{t^n_{i+1}}(\tilde{w})-\tilde{N}^j_{t^n_i}\right)\Big|\tilde{\mathbb{B}}_{t^n_i}\right] dP^m =$$

$$= \int_{\tilde{B}} \left(\tilde{N}^i_{t^n_{i+1}}(\tilde{w})-\tilde{N}^i_{t^n_i}(\tilde{w})\right)\left(\tilde{N}^j_{t^n_{i+1}}(\tilde{w})-\tilde{N}^j_{t^n_i}(\tilde{w})\right) dP^m =$$

$$= \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} \left(\bar{N}^i_{t^n_{i+1}}(\bar{w})-\bar{N}^i_{t^n_i}(\bar{w})\right)\left(\bar{N}^j_{t^n_{i+1}}(\bar{w})-\bar{N}^j_{t^n_i}(\bar{w})\right) d\bar{P}_W =$$

$$= \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} E^{\bar{P}_W}\left[\left(\bar{N}^i_{t^n_{i+1}}(\bar{w})-\bar{N}^i_{t^n_i}(\bar{w})\right)\left(\bar{N}^j_{t^n_{i+1}}(\bar{w})-\bar{N}^j_{t^n_i}(\bar{w})\right)\Big|\bar{\mathbb{B}}_{t^n_i}\right] d\bar{P}_W$$

tomando límite cuando n tiende a infinito se tiene

$$(3)\qquad \int_{\tilde{B}} \langle\tilde{N}^i,\tilde{N}^j\rangle_t(\tilde{w})\, dP^m = \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} \langle\bar{N}^i,\bar{N}^j\rangle_t(\bar{w})\, d\bar{P}_W$$

procediendo de forma análoga con el miembro de la derecha se obtiene

$$(4)\qquad \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} \langle\bar{N}^i,\bar{N}^j\rangle_t(\bar{w})\, d\bar{P}_W = \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} \langle N^i,N^j\rangle_t(w)\, dP_W .$$

Ya que, por hipótesis, la matriz a está uniformemente acotada inferiormente y verifica H1, se tiene, en virtud de la convergencia uniforme de (a_m) hacia a, a partir de un índice m_1 en adelante que $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$; $\forall u\in[0,t]$:

$$0 \leq \sum_{ij=1}^{n}\int_u^t \sum_{kh=1}^{n} \theta_i\theta_j\, a_m^{ik}(s,w(s))a_m^{jh}(s,w(s))dA_s^{kh} \leq c|\theta|^2$$

donde c es una constante real positiva.

Es decir, $\forall\theta\in\mathbb{R}^n$, $\forall m\geq m'$ siendo $m'=\max(m_o,m_1)$ se tiene

$$o \leq \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \langle N^i, N^j \rangle_t (w) \leq c|\theta|^2$$

donde c es una constante real positiva.

Entonces, $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, multiplicando en (3) y (4) por $\theta_i \theta_j$ y sumando en $i,j=1,\ldots,n$, se tiene $\forall m \geq m'$

$$(5) \qquad \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_{\tilde{B}} \langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j \rangle_t (\tilde{w}) dP^m = \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_{\phi^{-1}} \langle N^i, N^j \rangle_t (w) dP_W$$

es decir, $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, $\forall m \geq m'$ obtenemos:

$$\int_{\tilde{B}} \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j \rangle_t (\tilde{w}) \, dP^m \leq \int_{\phi^{-1}(\tilde{B})} C|\theta|^2 \, dP_W = \int_{\tilde{B}} C|\theta|^2 dP^m$$

por lo tanto c.s.P^m, $\forall m \geq m'$ se tiene

$$o \qquad \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j \rangle_t (\tilde{w}) \leq C|\theta|^2.$$

Tenemos entonces, $\forall m \geq m'$ una medida de probabilidad P^m sobre el espacio medible filtrado $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$ tal que

$$\tilde{N}_t(\tilde{w}) = \tilde{w}(t) - x - \int_o^t b_m(s, \tilde{w}(s)) \, dV(s)$$

es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable, con $\tilde{N}_t \otimes \tilde{N}_t$ matriz nxn cuyos elementos vienen dados por

$$\langle \tilde{N}^i, \tilde{N}^j \rangle_t (\tilde{w}) = \sum_{kh=1}^{n} \int_o^t a_m^{ik}(s, \tilde{w}(s)) \, a_m^{jh}(s, \tilde{w}(s)) \, d\tilde{A}_s^{kh}(\tilde{w})$$

donde $\tilde{A}_t^{kh}$ son los elementos de una matriz que hemos construido a partir de la $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable $\tilde{M}_t$.

Observese que para cada $m \geqslant m'$, hemos resuelto el problema planteado en la primera parte como Formulación Integral. Además se tienen sobre $\tilde{A}$, V, a_m, b_m las hipótesis que hacen equivalentes las cuatro Formulaciones. Luego, para cada m, $m \geqslant m'$ pueden usarse indistintamente cada una de la cuatro Formulaciones que planteamos en la primera parte de este trabajo.

Sea entonces $\mathcal{P}$ la familia de medidas de probabilidad $\{P^m\}_{m \geqslant m'}$ sobre $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}})$ que resuelve la Formulación integral que acabamos de dar. Vamos a probar que esta familia de medidas de probabilidad es relativamente débilmente compacta.

Para ello utilizamos una condición suficiente del Teorema de convergencia de Prohorov dada por P. Priouret. Vamos a verificar las hipótesis de este Teorema.

Sea K el compacto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al punto inicial x. En lo que sigue siempre que utilicemos un compacto de $\mathbb{R}^n$ nos estaremos refiriendo a éste. Entonces:

1) $\forall P^m \in \mathcal{P} \qquad P^m[x \in K] = 1$

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$, $\forall P^m \in \mathcal{P}$

$$\langle \theta, \tilde{N}_t(\tilde{w}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \, \tilde{N}_t^i(\tilde{w})$$

es $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable por serlo $\tilde{N}_t^i(w)$ $\forall i=1,\ldots,n$. Su proceso creciente asociado viene dado por

$$\langle\langle \theta, \tilde{N}_t \rangle, \langle \theta, \tilde{N}_t \rangle\rangle_t = \langle \sum_{i=1}^{n} \theta_i \tilde{N}^i, \sum_{j=1}^{n} \theta_j \tilde{N}^j \rangle_t =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \langle \theta_i \tilde{N}^i , \theta_j \tilde{N}^j \rangle_t = \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \langle N^i, N^j \rangle_t =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_0^t \sum_{kh=1}^{n} a_m^{ik}(s,\tilde{w}(s)) a_m^{jh}(s,\tilde{w}(s)) \, d\tilde{A}_s^{kh}(\tilde{w})$$

Ahora bien, por verificar a la hipótesis H2 y ser (a_m) uniformemente convergente hacia a, se tiene a partir de un índice m_2

$$\left| \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_s^t \sum_{kh=1}^{n} a_m^{ik}(u,w(u)) a_m^{jh}(u,w(u)) \, dA_s^{kh} \right| \leq r|t-s|$$

si $|\theta| \leq 1$ y r una constante positiva.

Teniendo en cuenta que en (5) los integrandos son positivos, queda c.s. P^m, $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$ $|\theta| \leq 1$, $\forall\, m \geq m''$ siendo $m''=\max(m_c, m_1, m_2)$

$$\left| \sum_{ij=1}^{n} \theta_i \theta_j \int_s^t \sum_{kh=1}^{n} a_m^{ik}(u,\tilde{w}(u)) a_m^{jh}(u,\tilde{w}(u)) d\tilde{A}_s^{kh}(\tilde{w}) \right| \leq r'|t-s|$$

donde r' es una constante real positiva y s t.

3) Por hipótesis V es una función lipscitciana de variación acotada, entonces $\int_0^t b_m(s,w(s))dV(s)$ tambien es de variación acotada, y además

$$\left| \int_0^t b_m(u,\tilde{w}(u))dV(u) - \int_0^t b_m(u,\tilde{w}(u))dV(u) \right| =$$

$$= \left| \int_s^t b_m(u,\tilde{w}(u))dV(u) \right| \leq d \, |V(t)-V(s)| \leq dk|t-s| \quad \text{donde}$$

d es la cota de b_m, $\forall m \geq m''$.

Entonces $\mathcal{P}$ es relativamente débilmente compacta, por lo tanto existe el límite de $\{P^m\}$ cuando m tiende a infinito. Denotamos por $\tilde{P}$ a este límite. Vamos a probar que $\tilde{P} \in \mathcal{P}$.

Evidentemente $\tilde{P}$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible filtrado $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$.

Por otra parte, hemos obtenido la Formulación integral y además en las condiciones que hacen equivalente las cuatro Formulaciones, entonces para ver que $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ bastaria probar que $\tilde{P}$ verifica una cualquiera de estas cuatro Formulaciones, vamos a probar que verifica la Formulación mediante operadores en derivadas parciales, es decir que $\forall\, f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$, H_t es $(\tilde{P}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala.

Ahora bien, $\forall m \geqslant m''$

$$H_t^m = f(\tilde{w}(t)) - f(x) - \int_0^t \sum_{j=1}^n L_{1,m}^j(f)(\tilde{w}(s))\,dV^j(s) -$$

$$- \int_0^t \sum_{kh=1}^n L_{2,m}^{kh}(f)(\tilde{w}(s))\,d\tilde{A}_s^{kh}(\tilde{w})$$

donde

$$L_{1,m}^j(f) = \sum_{i=1}^n b_m^{ij}(t,x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$L_{2,m}^{kh}(f) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n a_m^{ik}(t,x)\,a_m^{jh}(t,x)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

sabemos que es $\forall m \geqslant m''$ $(P^m, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala. Entonces $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathbb{B}}_s$, $s \leqslant t$ se verifica

$$\int_{\tilde{B}} H_t^m\, P^m(d\tilde{w}) = \int_{\tilde{B}} H_s^m\, P^m(d\tilde{w})$$

pero esto es equivalente a que $V\phi$ acotada, $\mathbb{B}_s$-medible y continua para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, se verifique

$$E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s))\ H_t^m\right] = E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s))\ H_s^m\right]$$

donde $s \leq t$ y $m \geq m''$.

Sustiruyendo H_t^m y H_s^m por sus expresiones se tiene

$$E^{P^m}\Big[\phi(\tilde{w}(s))(f(\tilde{w}(t))-f(x)-\int_0^t \sum_{j=1}^n L_{1,m}^j(f)(\tilde{w}(u))dV^j(u) -$$

$$(6) \qquad -\int_0^t \sum_{kh=1}^n L_{2,m}^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\ dA_u^{kh}(\tilde{w})\ )\Big] =$$

$$= E^{P^m}\Big[\phi(\tilde{w}(s))(f(\tilde{w}(s))-f(x)-\int_0^s \sum_{j=1}^n L_{1,m}^j(f)(\tilde{w}(u))dV^j(u) -$$

$$-\int_0^s \sum_{kh=1}^n L_{2,m}^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\ dA_u^{kh}(\tilde{w})\ )\Big]$$

como P^m converge débilmente, cuando m tiende a infinito, a $\tilde{P}$ se tiene

$$E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s))(f(\tilde{w}(t))-f(x))\right] \xrightarrow[m\to\infty]{} E^{\tilde{P}}\left[\phi(\tilde{w}(s))(f(\tilde{w}(t))-f(x))\right]$$

por otra parte, agupando en (6) convenientemente, bajo las integrales entre s y t, sumando y restando, en cada una de ellas $L_1^j(f)(\tilde{w}(u))$ y $L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u))$ se obtiene

$$E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s))\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n (\ L_{1,m}^j(f)(\tilde{w}(u))-L_1^j(f)(\tilde{w}(u))\ )\ dV^j(u)\right)\right] +$$

$$+ E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s))\int_s^t \sum_{kh=1}^n (L_{2,m}^{kh}(f)(\tilde{w}(u))-L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\ )\ dA_u^{kh}(\tilde{w})\right] +$$

$$+ \; E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s)) \int_s^t \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(\tilde{w}(u))\, dV^j(u)\right] \; +$$

$$+ \; E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s)) \int_s^t \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\, d\tilde{A}_u^{kh}(\tilde{w})\right].$$

Indicando por $\|.\|$ la morma en el espacio que en cada caso corresponde se tiene

$$\left|E^{P^m}\left[\phi(\tilde{w}(s)) \int_s^t \sum_{j=1}^n (L_{1,m}^j(f)(\tilde{w}(u))-L_1^j(f)(\tilde{w}(u)))dV^j(u)\right]\right| \leq$$

$$\leq E^{P^m}\left[\,|\phi(\tilde{w}(s))| \int_s^t \left|\left((L_{1,m}(f)-L_1(f))(\tilde{w}(u)) \;,\; dV(u) \right)\right|\right] \leq$$

$$\leq E^{P^m}\left[\,\|\phi\| \int_s^t \|L_{1,m}(f)-L_1(f)\| \; \|dV(u)\|\right. \leq$$

$$\leq \|\phi\| \; \|b_m-b\| \; \left\|\frac{f}{x_i}\right\| \int_s^t \|dV(u)\| \cdot$$

como ϕ es acotada, $f \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$, V es de variación acotada , y (b_m) converge uniformemente a b, entonces la expresión anterior tiende a cero cuando m tiende a infinito.

De forma completamente análoga se tiene que

$$E^{P^m}\left[\phi(w(s)) \int_s^t \sum_{kh=1}^n (L_{2,m}^{kh}(f)(\tilde{w}(u))-L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u)))\; d\tilde{A}_u^{kh}(\tilde{w})\right]$$

tiende a cero cuando m tiende a infinito.

Teniendo en cuenta este desarrollo y tomando límite en (6) cuando m tiende a infinito se tiene

$$E^{\tilde{P}}\left[\phi(\tilde{w}(s))\left(f(\tilde{w}(t))-f(x)-\int_0^t \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(\tilde{w}(u))dV^j(u) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^t \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\; d\tilde{A}_u^{kh}(\tilde{w})\right)\right] \quad =$$

$$= E^{\tilde{P}}\Big[\phi(\tilde{w}(s))\Big(f(\tilde{w}(s))-f(x)-\int_0^s \sum_{j=1}^n L_1^j(f)(\tilde{w}(u))dV^j(u) -$$

$$- \int_0^s \sum_{kh=1}^n L_2^{kh}(f)(\tilde{w}(u))\ d\tilde{A}_u^{kh}(\tilde{w})\Big)\Big]$$

es decir, $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathbb{B}}_s$, $s \leq t$

$$\int_{\tilde{B}} H_t\ d\tilde{P} = \int_{\tilde{B}} H_s\ d\tilde{P}$$

por lo tanto H_t es $(\tilde{P}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala, entonces $\tilde{P} \in \mathcal{P}$.

Pero este hecho quiere decir que P resuelve la Formulación mediante operadores en derivadas parciales, y como además se tienen las hipótesis que hacen equivalentes las cuatro Formulaciones podemos afirmar que P resuelve cualquiera de las cuatro Formulaciones, en particular la Formulacion en ecuaciones diferenciales estocásticas, es decir: hemos encontrado un espacio probabilístico $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{\mathbb{B}}_t, \tilde{P})$ y una $(\tilde{P}, \tilde{\mathbb{B}}_t)$-martingala continua de cuadrado integrable $\tilde{M}_t$ tal que $\langle M^i, M^j\rangle_t = A_t^{ij}$ y

$$w(t) - x = \int_0^t a(s,w(s))\ dM_s(w) + \int_0^t b(s,w(s))\ dV(s)$$

se verifica c.s. P.

Por lo tanto hemos probado la existencia de solución débil de esta ecuación diferencial estocástica.

BIBLIOGRAFIA

ARNOLD, L. (1.974): Stochastic differential equations. Wiley-Interscience.

BENSOUSSAN, A.-LIONS, J.L.-PAPANICOLAOU, G. (1.978): Asymptoic analysis for periodic structures. North-Holland.

COURREGE,Ph. (1.962): Décomposition des martingales de carré intégrable. Seminaire Brelot-Choquet-Deny, Théorie du Potentiel 7e année, Exp nº 6. M.R. 31 # 1702.

COURREGE, Ph. (1.962): Integrales stochastiques et martingales de carre integrable. Seminaire Brelot-Choquet-Deny, Theorie du Potentiel, 7e annee, Exp nº 7. M.R. 31 # 1686.

DOLEANS-DADE, C. (1.976): On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. Z. für Wahrscheinlichketstheorie Verw. Geviete 36, 93-101. M.R. 54 # 1387.

DOLEANS-DADE, C. - MEYER,P.A. (1.977): Equations differentielles stochastiques. Seminaire de Probabilites XI, 376-382. Lectures Notes in Math. 581. Spinger Verlag. M.R. 56 # 9689.

DOLEANS-DADE,C. (1.978): Stochastic processes and stochastic differential equations.
CIME: Stochastic differential equations.

ERSOV, M.P. (1.974): Existence of a martingale with a given diffusion functional. Teor. Vercj. i Primenen. 19, 665-688. M.R. 50 # 14918.

FRIEDMAN, A. (1.975): Stochastic differential equations and applications. Vol I. Academic Press.

FRIEDMAN, A. (1.978): Ito approach to stochastic differential equations and some connections to partial differential equations.
CIME: Stochastic differential equations.

GIHMAN, I.I.-SKOROKHOD, A.V. (1.972): Stochastic differential equations. Springer-Verlag.

ITO, K. (1.951): On a formula concerning stochastic differentiels. Nagoya Math. J. 3, 55-65.
M.R. 13 # 363.

ITO, K. (1.951): On stochastic differential equations.
Memoirs of the Am. Math. Soc. nº4.
M.R. 12 # 724.

ITO, K. (1.968): Lectures on stochastic proccesses. Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay.

JACOD, J. (1.979): Calcul Stochastique et problemes de martingales. Lectures Notes in Math. 714 Springer-Verlag.

KUNITA, H.-WATANABE,Sh. (1.967): On square integrable martingales. Nagoya Math. J. nº 30, 209-245.
M.R. 36 # 945.

MEYER, P.A. (1.966): Probabilites et Potentiel. Hermann-Paris.

MEYER, P.A. (1.967): Integrales stochastiques (I,II). Seminaire de Probabilites I. Lectures Notes in Math. 39, 72-117. M.R. 37 # 7000.

MEYER, P.A.- DOLEANS-DADE,C. (1.970): Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Seminaire de Probabilites IV Lectures Notes in Math. 124, 77-108, Springer-Verlag. M.R. 42 # 5313.

MEYER, P.A. (1.976) Un cours sur les integrales stochastiques. Seminaire de Probabilites X. Lectures Notes in Math. 511, 245-400. Springer-Verlag.

PARTHSARATHY, K.R. (1.967): Probability measures on metric spaces. Academic Press.

PRIOURET, P. (1.974): Processus de diffusion et equations differentielles stochastiques. Ecole d'Eté de Probabilites de Saint Fluor III. Lectures Notes in Math. 390, 37-113. Springer-Verlag. M.R. 56 # 3961.

PROTTER, Ph. E. (1.977): On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations. The annals of Probability Vol.5 nº2,243-261. M.R. 55 # 4380.

SKOROKHOD, A.V. (1.975): A remark on square integrable martingales. Theory of Probability and its applications nº20, 195-198. M.R. 51 # 1947.

SCHWARTZ, L.(1.959): Etude des sommes d'exponentielles. Hermann.

STROOCK,D.W.-VARADHAN, S.R.S. (1.969): Diffusion processes with continuous coeficients I. Communications on Pure and Applied Mathematics Vol. XXII, 345-400. M.R. 40 # 6641.

STROOCK, D.W.-VARADHAN, S.R.S. (1.969): Diffusion processes with continuous coeficients II. Communications on Pure and Applied Math. Vol. XXII, 479-530, M.R. 40 # 8130.

STROOCK, D.W.-VARADHAN, S.R.S. (1.971): Diffusion processes with boundary conditions. Communications on Pure and Applied Math. Vol. XXIV, 147-225. M.R. 43 # 2774.

STROOCK, D.W.-VARADHAN, S.R.S. (1.978): Diffusion theory via the martingale problem. CIME: Stochastic Differential Equations.

YAMADA,T.-WATANABE,Sh.(1.971): On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations I. J. Math. Kyoto Univ. 11, 155-167. M.R. 43 # 4150.

YAMADA, T.-WATANABE,Sh.(1.971): On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II. J. Math. Kyoto Univ. 11, 553-563. M.R.44 #6071.

" Diffusions a coefficients continus d'après D.W. STROOCK et S.R.S. VARADHAN."

DOLEANS-DADE, C. : Diffusions à coefficients continus: le problème.

DELLACHERIE, C. : Diffusions à coefficients continus: Resultats d'existence. Resultats d'unicité d'après M.G. LETTA.

MEYER, P.A. : Diffusions à coefficients continus: Resultats final.

Seminaire de Probabilités IV. Lectures Notes in Mathematics 124, 241-282. (1.970).

...DAD DE S...

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

...ó el Tribunal integrado por los aba...
la fecha, para juzgar la Tesis D...

...alificación de

...

...l Vocal. El Vocal.

...sidente. El Secretario. El Doctorado

...DAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes ...
...l día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral ...
Dª Carmen Leon Vela
...ada Sobre la existencia de soluciones debiles de Ecuaciones Diferenciales Estocasticas

...ó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

Sevilla, 23 de Octubre de 1979

...l Vocal. El Vocal. El Vocal

...esidente. El Secretario. El Doc...

Carmen León Vela