R.23.474 LBS 1124930 043/227 BCA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA

SISTEMAS DINAMICOS EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

Visado en Sevilla,
Setiembre de 1975

EL CATEDRATICO DIRECTOR

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta Tomás Domínguez Benavides para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.
Sevilla, Setiembre de 1975

Fdo.
Tomás Domínguez Benavides

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA CIENCIAS
30-9-75
ENTRADA N.º 487

Quiero expresar mi agradecimiento a D.Antonio de Castro Brzezicki por sus valiosas sugerencias y acertada dirección, y al Dr. Arias de Reyna por su constante ayuda y sus provechosas aportaciones . Su entusiasmo y su incansable aliento han hecho posible la realización de este trabajo.

INDICE.

INTRODUCCION V

I. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO LOCALMENTE CONVEXO SOBRE EL ESPACIO DE EVOLUCION.

1. Introducción 1
2. Conceptos elementales 3
3. Estructura de espacio vectorial topológico sobre el espacio de evolución . . 4
4. Topología producto de $X \times R$ 6
5. Homeomorfismo entre $X \times \{0\}$ y X 10

II. ESTRUCTURA DUAL DEL ESPACIO DE EVOLUCION.

1. Introducción 12
2. El espacio cociente $(X \times R)/Ker(\pi)$ 13
3. Estructura del espacio dual 15
4. Propiedades de completitud 17

III. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS CONCEPTOS ELEMENTALES Y ESTABILIDAD-LYAPUNOV.

1. Introducción 19
2. Propiedades topológicas de los conceptos elementales 20
3. Aplicación proyección y estabilidad .. 25
4. Propiedades algebraicas del espacio producto 33
5. Aplicaciones a la estabilidad-Lyapunov 37

IV. MOCIONES ESTABLES Y CONTINUIDAD UNIFORME GENERALIZADA

1. Introducción 41
2. Caracterización de mociones estables . 42
3. Flujo equicontinuo 51

V. EJEMPLOS DE SISTEMAS DINAMICOS SOBRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

1. Introducción 56
2. El espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ 58
3. Sistema Dinámico Global para Ecuaciones Diferenciales Autónomas en Banach 60
4. Sistema Dinámico Local para Ecuaciones Diferenciales no Autonomas en Banach. 62

BIBLIOGRAFIA 73

INTRODUCCION.

Desde los trabajos precursores de Poincaré-Bendixson y la posterior fundamentación de la Teoría de Sistemas Dinámicos en 1927 por BIRKHOFF [3] se han hecho numerosas generalizaciones de este concepto teniendo en cuenta sus posibles aplicaciones. Birkhoff definía un sistema dinámico como la pareja (V_n, E) de una variedad V_n n-dimensional y de un campo de vectores E (ambos indefinidamente diferenciables); y a partir de ésta construía una teoría topológica de las trayectorias. Varias escuelas hicieron algunas generalizaciones de esta teoría topológica ,creándose lo que se llamó "Teoría de Sistemas Dinámicos Generales", la cual fue perfeccionada en 1956 por REEB [19] construyendo una generalización de los sistemas dinámicos de Birkhoff que englobaba las nociones de "Familia Regular de Caminos" de WHITNEY [27] y de Variedad Foliada.

Para sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales y a ecuaciones funcionales se hicieron generalizaciones por caminos distintos al anterior. Así, para ecuaciones diferenciales que no tengan la propiedad de existencia global se han definido los Sistemas Dinámicos Locales. Para ecuaciones diferenciales con argumento desviado o para ecuaciones en derivadas parciales de tipo evolución se definieron los Sistemas Semi-Dinámicos (Una teoría general de éstos puede encontrarse en [2]). Para ecuaciones diferenciales sin unicidad se desarrolló la teoría de Semigrupos de Funciones Multiformes [25] . El espacio fase considerado es también distinto en cada caso. En la Teoría de Sistemas dinámicos Generales, primeramente citada, se considera un espacio topológico al que se asocia una relación de equivalencia sujeta a

algunas específicas restricciones. Para las aplicaciones a ecuaciones diferenciales, sin embargo, teniendo en cuenta que la teoría clásica de éstas se ha desarrollado en R^n, se tomó como espacio fase R^n o un subconjunto abierto del mismo. Posteriormente, los avances en ecuaciones funcionales y la teoría de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach o de Hilbert trajeron como consecuencia el pasar a un espacio métrico como espacio fase. (BHATIA-SZEGO; NEMICKII-STEPANOV). En los últimos años, los trabajos realizados sobre ecuaciones diferenciales en espacios vectoriales topológicos y la construcción de sistemas dinámicos sobre espacios de funciones han hecho aconsejable la utilización de un espacio uniforme como espacio fase. Una teoría general en espacios uniformes está desarrollada por SELL. Al comparar ésta con las teorías clásicas puede observarse que, si bien gran parte de las demostraciones son directas generalizaciones de las análogas en espacios métricos, otras (como las propiedades de puntos estables-Poisson no periódicos) necesitan una cantidad de recursos mucho mayor.

En la mayor parte de las aplicaciones de la Teoría de Sistemas Dinámicos (espacios de funciones, ecuaciones diferenciales ordinarias, etc.) el espacio fase lleva aparejada, además de la estructura topológica, una estructura lineal compatible con esta topología. Esta no ha sido, sin embargo, utilizada nunca en la teoría clásica, que se limita a las propiedades topológicas del espacio fase. El desinterés de los autores hacia esta segunda estructura está justificado por la poca relación existente entre ella y la forma de las trayectorias del sistema. Así, en la aplicación a ecuaciones diferenciales autónomas, dados dos puntos x e y del espacio fase hay una muy dudosa relación entre las soluciones que pasan por x e y y las soluciones que pasan por $x+y$. Igual sucede para trayectorias generales de sistemas dinámicos debido a la no linealidad de la aplicación π que define el flujo. La situación puede, sin embargo, cambiar sustancialmente si se construye a partir de la estructura lineal del espacio fase otra estructura lineal sobre el espacio de evolución que linealice la aplicación π. La definición de

una suma y un producto externo en el espacio de evolución que haga lineal la aplicación π puede hacerse sin dificultad, construyéndose así un espacio vectorial sobre el espacio de evolución que hemos representado en el capítulo I por $X*R$. (En todo nuestro trabajo el grupo topológico T es R, aunque igualmente podría tomarse C). De todas las posibles topologías de que puede ser dotado el espacio de evolución, ocupará un papel relevante en este trabajo la topología τ menos fina que hace continua la aplicación π (topología inicial de π). Que esta topología es compatible con la estructura lineal y que puede ser definida por seminormas cuando lo es la del espacio fase está estudiado en la sección 3 del capítulo I. La primera dificultad importante que se plantea estriba en si la estructura lineal del espacio de evolución es compatible con su topología producto usual de X por R. La respuesta afirmativa a esta pregunta está estudiada en la sección 4 utilizando en la demostración las propiedades específicas que se derivan de definir π un flujo continuo. Algunas propiedades algebraicas y topológicas del subespacio $X\times\{0\}$ cierran el capítulo I.

La estructura lineal del espacio de evolución nos permite establecer el núcleo de π como subespacio del primero, y el espacio cociente $X*R/Ker(\pi)$, el cual demostramos en la sección 2 del capítulo II que es isomorfo algebraica y topológicamente al espacio fase X. El principal interés de la estructura lineal está, sin embargo, en la posibilidad de definir los espacios duales y, en consecuencia, las topologías débiles por dualidad de los espacios fases y de evolución. Particularmente, la estructura del espacio dual de $(X*R)_\tau$ tiene gran importancia por sus aplicaciones al estudio de soluciones débiles de una ecuación diferencial. El teorema 1 de la sección 3 da una información muy completa acerca del espacio dual de $(X*R)_\tau$. Algunos resultados relativos a la completitud del espacio de evolución en relación con la del espacio fase y algunas particularizaciones a espacios de Banach o Hilbert completan el capítulo II.

Los conceptos elementales de Dinámica Topológica, tales como trayectorias, puntos críticos o períodicos, conjuntos mínimos, etc., pueden ser reformulados al considerar la nueva estructura del espacio de evolución. Estas caracterizaciones las desarrollamos en la sección 2 del capítulo III. Los resultados más importantes de este capítulo surgen del estudio de las posibles relaciones entre estabilidad-Lyapunov y continuidad de una función tipo "proyección"; así el teorema III.3.6. establece una condición necesaria y suficiente para que un punto sea estable-Lyapunov mediante una función $P:(X*R)_{\tau} \longrightarrow X$. Para poder aplicar estos resultados a conjuntos compactos estables-Lyapunov hemos necesitado establecer un lema sobre la estructura de éstos. La última parte del capítulo estudia la aplicación de todos estos resultados, para lo cual ha sido necesario un conocimiento más profundo de la naturaleza del espacio $(X*R)_{\tau}$ buscando un espacio vectorial topológico isomorfo a él, pero cuya estructura sea la de producto ordinario de dos espacios vectoriales topológicos. El teorema fundamental de la sección 4 (teorema 4.6.) establece la estabilidad de un punto mediante la continuidad de una aplicación $\tilde{P}$ que ya no es tipo "proyección" como en la sección 3, pero que está definida en el espacio $X \times R$ con el producto usual y dotado de una topología homeomorfa a τ.

El estudio de otros conceptos clásicos, como mociones estables-Lyapunov, flujos equicontinuos, mociones casi-períodicas, con la estructura considerada en el espacio de evolución nos permite obtener en el capítulo IV nuevos resultados, que relacionan éstos con la continuidad de una aplicación tipo "proyección" definida ahora sobre el conjunto $X \times R \times R$. Para establecer esta relación necesitamos definir un tipo de continuidad uniforme más general que el usual, que llamamos continuidad uniforme generalizada. La categoría que se construye a partir de este concepto sugiere posibles aplicaciones de éste, fuera de este trabajo. Los teoremas constructivos más importantes de este capítulo permiten caracterizar una moción Lyapunov-estable o una moción positiva o negativamente Lyapunov-estable mediante la continuidad uniforme generalizada de una aplicación Q defini-

da en XxRxR (dotado en cada caso de la topología conveniente). El teorema 3.7 da una condición necesaria y suficiente para que el flujo π sea equicontinuo mediante la continuidad uniforme (usual) de Q en un cierto conjunto. Como resultados prácticos de este teorema se obtiene una nueva demostración para la relación entre moción uniformemente Lyapunov-estable respecto a la trayectoria y flujo equicontinuo sobre ésta, y una caracterización de conjunto casi-período mínimo.

En el capítulo V hacemos una exposición de ejemplos de sistemas dinámicos en los que es posible aplicar nuestros métodos por estar dotado el espacio fase de una estructura lineal. En la sección 2 mostramos que el espacio de funciones $\mathcal{L}\infty(R,R^n)$ [23] con la topología *-débil es un espacio vectorial topológico localmente convexo, con lo cual, teniendo en cuenta que las traslaciones generan un flujo continuo sobre este espacio se obtiene un primer ejemplo incluido en nuestras hipótesis.

Los teoremas clásicos de existencia global, unicidad y dependencia continua de los valores iniciales nos permiten construir en la sección 3 un flujo continuo con las soluciones de una ecuación diferencial autónoma en un espacio de Banach.

Mucho más difícil es, sin embargo, el problema de construir un sistema dinámico con las soluciones de una ecuación diferencial no autónoma, puesto que es necesario modificar la ecuación original. Así, en [1], [18] se aumenta en una dimensión el espacio fase, pero se obtienen pocos resultados prácticos. Tras la aplicación de técnicas de Dinámica Topológica por diversos autores para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, SELL introdujo la técnica de las "ecuaciones límites" para la construcción de sistemas dinámicos que permitieran sistematizar y ampliar los resultados obtenidos.

Hemos extendido nosotros en la sección 4 esta construcción desde R^n a un espacio de Banach. La principal dificultad la encontramos en la continuidad del flujo construido, para la cual se necesitaría un resultado similar en Banach al lema de KAMKE en R^n. Como los teoremas clásicos no son suficientes para asegurarnos este resultado hemos demostrado en el lema 4.5

un resultado más fuerte exigiendo condiciones de Lipschitz y de acotación al lado derecho de la ecuación diferencial. Este lema, que generaliza el lema de KAMKE a R^n, basándose en teoremas clásicos, pero construyendo a partir de éstos una demostración totalmente original, creemos que es el más importante de nuestro trabajo.

La importancia principal de esta construcción estriba en la posibilidad de generalizar los resultados de SELL en R^n sobre estabilidad de soluciones y existencia de soluciones periódicas y casi-periódicas a espacios de Banach, problema que está siendo profusamente estudiado en la actualidad. En un artículo reciente de ZIKOV [28], en el que se usan las ecuaciones límites en el mismo sentido que SELL, se evita el problema de la continuidad del flujo tomándolo como hipótesis en sus teoremas. Por esto, aplicando nuestros resultados a este trabajo pueden obtenerse varios teoremas de existencia de soluciones casi-periódicas de la ecuación $x'=f(x,t)$ a partir de un tipo de estabilidad más fuerte que la uniforme, imponiendo solamente condiciones a la función f que define la ecuación y no a sus soluciones como se hace en [28].

Los conceptos que usamos a lo largo de nuestro trabajo, están tomados de los textos clásicos de sistemas dinámicos, fundamentalmente de [1], [18]. Otros conceptos más modernos de Dinámica Topológica están tomados de [23]. Todos los resultados que se desarrollan son originales salvo si se hace mención expresa de lo contrario. Hemos enunciado las proposiciones específicas de Dinámica Topológica que necesitabamos utilizar y hemos supuestos conocidos, en cambio, los resultados de espacios vectoriales topológicos y de ecuaciones diferenciales que son tópicos en la literatura general sobre estos temas. Dedicamos una atención preferente en todo nuestro trabajo a los aspectos de Dinámica Topológica que se aplican en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Aceptando la división de esta teoría [12] en local, global y abstracta, situamos nuestra tesis en una línea apartada de la teoría global, y situada entre las teorías abstractas y local, buscando los

aspectos de aquélla que más aplicación tienen en ésta.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE

CAPITULO I

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO LOCALMENTE CONVEXO SOBRE EL ESPACIO DE EVOLUCION

1. INTRODUCCION

En la mayor parte de las aplicaciones de Dinámica Topológica, el espacio fase del sistema dinámico considerado está dotado de una estructura lineal compatible con su estructura topológica. La utilización de esta estructura algebraica nos va a permitir aplicar muchos resultados de Análisis Funcional al estudio de los sistemas dinámicos. Tomaremos como punto de partida en este trabajo un espacio fase dotado de estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo y buscaremos las consecuencias derivadas especialmente de la estructura lineal.

En la sección 2 recordaremos los conceptos más elementales de Dinámica Topológica y damos así mismo algunos resultados conocidos de esta teoría que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

La sección 3 está dedicada a la construcción de un espacio vectorial sobre el espacio de evolución que haga lineal la aplicación π y posteriormente a dotar a éste de una topología com-

patible con su estructura lineal. Los teoremas de esta sección son aplicaciones inmediatas de resultados de Análisis Funcional.

En la sección 4, el teorema 4.1 resuelve la primera cuestión de interés de este trabajo, consistente en estudiar la compatibilidad de la topología usual del espacio de evolución con la estructura lineal definida en la sección anterior. La demostración del teorema 4.1, aunque sigue un camino natural, llega a ser algo complicada por la cantidad de recursos que utiliza.

Se cierra el capítulo con la sección 5 probando que el subespacio $X \times \{0\}$ es isomorfo y homeomorfo al espacio fase y denso en el espacio de evolución cuando éste está dotado de la topología definida en la sección 3.

2. CONCEPTOS ELEMENTALES

Recordamos en esta sección los principales conceptos de Dinámica Topológica que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

<u>Definición 2.1.</u> Sea X un espacio uniforme y T un grupo topológico. Un sistema dinámico global sobre X es la terna (X,π,T) donde π es una aplicación de $X \times T$ en X que satisface los siguientes axiomas:

i) $\pi(x,0)=x$ para todo $x \in X$ (axioma de identidad)

ii) $\pi(\pi(x,t),s)=\pi(x,t+s)$ para todo $x \in X$ y $s,t \in T$ (axioma de grupo)

iii) π es continua (axioma de continuidad)

Cuando $T=R$ se le llama también un flujo continuo. Al conjunto X se le llama espacio fase, al conjunto $X \times T$ espacio de evolución.

<u>Definición 2.2.</u> Sea X un espacio uniforme y T un grupo topoló-

gico. Para cada punto $x \in X$ sea $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ un intervalo abierto en T que contiene a 0. Sea $D \subset X \times T$ definido por

$$D = \{(x,t) \in X \times T : t \in I_x\}$$

Se llama sistema dinámico local sobre X o flujo local continuo sobre X a la pareja (D, π) donde π es una aplicación de D en X que verifica las siguientes propiedades:

i) $\pi(x,0) = x$ para todo $x \in X$

ii) Si $t \in I_x$ y $s \in I_{\pi(x,t)}$ entonces $t+s \in I_x$ y $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$

iii) π es continua

iv) Cada intervalo I_x es maximal en el sentido que o bien $I_x = T$, o el conjunto

$$\{\pi(x,t) : 0 \leq t < \beta_x\}$$

no es relativamente compacto si $\beta_x < +\infty$, o el conjunto

$$\{\pi(x,t) : \alpha_x < t \leq 0\}$$

no es relativamente compacto si $-\infty < \alpha_x$.

v) Los intervalos I_x son semicontinuos inferiormente en x, esto es, si $x_n \to x$ entonces $I_x \subseteq \liminf I_{x_n}$.

<u>Definición 2.3.</u> Si $x \in X$ y π es un flujo sobre X se llama trayectoria a través de x al conjunto

$$\gamma(x) = \{\pi(x,t) : t \in I_x\}$$

Análogamente se definen la semitrayectoria $\gamma^+(x)$ positiva y la semitrayectoria negativa $\gamma^-(x)$ por

$$\gamma^+(x) = \{\pi(x,t) : 0 \leq t < \beta_x\}$$

y

$$\gamma^-(x) = \{\pi(x,t) : \alpha_x < t \leq 0\}$$

<u>Definición 2.4.</u> Un punto $x \in X$ es un punto crítico o de equilibrio para el flujo si $\pi(x,t) = x$ para todo $t \in T$.

Un punto $x \in X$ es un punto periódico para el flujo π si existe τ tal que $\pi(x, t+\tau) = \pi(x,t)$ para todo t.

<u>Definición 2.5.</u> Un conjunto $M \subset X$ es invariante si $\gamma(x) \subset M$ para todo $x \in M$. El conjunto M es positivamente invariante (resp.: Negativamente invariante) si $\gamma^+(x) \subset M$ (resp.: $\gamma^-(x) \subset M$) para todo $x \in M$.

Definición 2.6. Un conjunto $M \subset X$ es mínimo si es no vacío, cerrado e invariante y si no contiene ningún conjunto propio con esa propiedad.

Definición 2.7. Si π es un flujo continuo sobre X a la función $t \longrightarrow (x,t)$ se le llama moción o movimiento a través de x. Una moción $\pi(x,t)$ se llama compacta si $\gamma(x)$ es relativamente compacto.

3. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO SOBRE EL ESPACIO DE EVOLUCION

Suponemos en todo lo que sigue que el espacio fase X es un espacio vectorial topológico localmente convexo (e.v.t.l.c.) separado sobre el cuerpo R, que se tomará también como grupo topológico T. Podría emplearse también en lugar de R el cuerpo C sin hacer apenas variaciones.

En esta sección definiremos una estructura lineal sobre el conjunto XxR que linealice la aplicación π y posteriormente una topología compatible con esta estructura. Supondremos que (X,π,R) es un flujo continuo global, aunque con algunas variaciones podría extenderse a un flujo local, y utilizaremos en la construcción la siguiente propiedad conocida de sistemas dinámicos [1] :

Proposición 3.1. Para cada $t \in R$ la aplicación $\pi_t : X \longrightarrow X$ definida por $\pi_t(x)=\pi(x,t)$ es un homeomorfismo.

Proposición 3.2. El conjunto XxR con las leyes

$$(s) \quad (x,t) \oplus (x',t')=(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t)+\pi(x',t')],\ t+t')$$

$$(P.e.) \quad \lambda \odot (x,t)= (\pi^{-1}_{\lambda t}[\lambda\pi(x,t)],\ \lambda t)$$

tiene estructura de espacio vectorial. La aplicación $\pi : XxR \longrightarrow X$ es lineal.

Demostración. Se reduce a comprobar que estas leyes cumplen los axiomas de espacio vectorial:

1) Asociativa.

$(x,t) \oplus [(x',t') \oplus (x'',t'')] = (x,t) \oplus (\pi^{-1}_{t'+t''}[\pi(x',t')+\pi(x'',t'')], t+t'')$

$= (\pi^{-1}_{t+t'+t''}[\pi(x,t)+\pi(x',t')+\pi(x'',t'')], t+t'+t'') =$

$= [(x,t)\oplus(x',t')]\oplus(x'',t'')$.

2) Elemto neutro

$(x,t)\oplus(0,0) = (\pi^{-1}_{t}[\pi(x,t)], t) = (x,t)$

3) Elemento simétrico

$\ominus(x,t) = (\pi_{t}[-\pi(x,t)], -t)$

4) Conmutativa

$(x,t)\oplus(x',t') = (\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t)+\pi(x',t')], t+t') = (x',t')\oplus(x,t)$

5) Distributiva respecto a la suma de vectores

$\lambda\odot[(x,t)\oplus(x',t')] = \lambda\odot(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t)+\pi(x',t')], t+t') =$

$= (\pi^{-1}_{\lambda(t+t')}\{\lambda\pi(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t)+\pi(x',t')], t+t')\}, \lambda(t+t'))=$

$= (\pi^{-1}_{\lambda(t+t')}[\lambda\pi(x,t)+\lambda\pi(x',t')], \lambda(t+t'))=$

$= (\pi^{-1}_{\lambda t+\lambda t'}[\pi(\pi^{-1}_{\lambda t}\lambda\pi(x,t), \lambda t)+\pi(\pi^{-1}_{\lambda t'}\lambda\pi(x',t'), \lambda t')], \lambda t+\lambda t')=$

$= (\pi^{-1}_{\lambda t}\lambda\pi(x,t), \lambda t)+(\pi^{-1}_{\lambda t'}\lambda\pi(x',t'), \lambda t') = \lambda\odot(x,t)+\lambda\odot(x',t')$

Por procedimientos análogos se demuestran

6) Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(\lambda+\mu)\odot(x,t) = \lambda\odot(x,t)+\mu\odot(x,t)$$

7) Asociativa respecto al producto de escalares

$$\lambda\odot(\mu\odot(x,t)) = (\lambda\mu)\odot(x,t)$$

8) $1\odot(x,t) = (x,t)$

Además la aplicación π es lineal en este espacio. En efecto:

i) $\pi[(x,t)\oplus(x',t')] = \pi(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t)+\pi(x',t')], t+t') = \pi(x,t)+\pi(x',t')$

ii) $\pi[\lambda\odot(x,t)] = \pi(\pi^{-1}_{\lambda t}\lambda\pi(x,t), \lambda t) = \lambda\pi(x,t)$.

En adelante representaremos el espacio vectorial definido sobre el conjunto XxR por (s) y (p.e.) por $X\times R$ para distinguirlo del espacio vectorial XxR producto usual de los espacio vectoriales X y R definido por

(s') $(x,t)+(x',t') = (x+x', t+t')$

(p.e.) $\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda t)$

Una vez dotado XxR de una estructura de espacio vectorial para la cual es lineal la aplicación π puede considerarse la topología τ menos fina sobre XxR de las que hacen continua la aplicación π (topología inicial de π). Son resultados conocidos [5], [14] los siguientes:

Proposición 3.3. La topología τ menos fina que hace continua la aplicación π es compatible con la estructura vectorial (s), (p.e.) de $X \times R$. Representaremos este e.v.t. por $(X \times R)_\tau$.

Proposición 3.4. Si $\{p_i : i \in I\}$ es una familia de seminormas que define la topología de X, las funciones $\{\tilde{p}_i = p_i \circ \pi : i \in I\}$ son seminormas que definen la topología τ . Por tanto $(X \times R)_\tau$ es un e.v.t.l.c.

Nota . Estas proposiciones pueden demostrarse también directamente sin recurrir a propiedades de una topología inicial. Sabemos [26] que una aplicación lineal $\pi : Y \to X$ es continua si y sólo si para toda seminorma continua p de X existe q de Y tal que

$$p \circ \pi(y) \leq q(y) \quad \forall\, y \in Y \ .$$

Consideremos el espacio $Y = (X \times R)_\tau$ cuya topología está generada por la familia de seminormas $\{p_i \circ \pi \ \ i \in I\}$. Entonces para cada seminorma p de X existe $p \circ \pi$ de $(X \times R)_\tau$ tal que $p \circ \pi(x) = p \circ \pi(x)$, con lo cual π es continua. Además si $\{q_j\}$ engendra otra topología sobre $X \times R$ para la cual es π continua se tiene que para cada seminorma p de X existe q tal que $q \geq p \circ \pi$, o sea, la topología generada por la familia $\{q_j \ \ j \in J\}$ es más fina que la generada por la familia $\{p_i \circ \pi \ i \in I\}$.

Es también un resultado conocido de Análisis Funcional [14] que la topología τ de $X \times R$ es Hausdorff si y solo si π es inyectiva Como consecuencia se obtiene.

Proposición 3.5. La topología τ generada por la familia de seminormas $\{p_i \circ \pi \quad i \in I\}$ no es separada.

Demostración. Es suficiente ver que π no puede ser inyectiva. En efecto, si el punto 0 es de equilibrio quiere decir que para todo t se tiene $\pi(0,0) = \pi(0,t) = 0$ con lo cual π no es inyectiva. Si por el contrario el origen no es un punto de equilibrio existe $t \in R$ tal que $\pi(0,t) = y \neq 0$. En este caso $\pi(y,-t) = \pi(\pi(0,t),-t) = 0 = \pi(0,0)$ siendo $(y,-t) \neq (0,0)$.

4. TOPOLOGIA PRODUCTO DE XxR

Parece lógico preguntarse si la topología producto de XxR es compatible con la estructura lineal definida por (s) y (p,e.).

Demostraremos en este apartado que la respuesta a esta pregunta es afirmativa, obteniendose así otra topología sobre $X \times R$, en la cual π, por definición de sistema dinámico es continua. Por definición de τ esta topología producto es más fina que la generada por las seminormas $\{p_i \circ \pi : i \in I\}$ siendo además en cualquier caso distintas, pues el espacio topológico producto $X \times R$ es separado.

<u>Teorema 4.1.</u> Las aplicaciones $((x,t),(x',t')) \to (x,t) \oplus (x',t')$ de $(X \times R) \times (X \times R) \to X \times R$ y $(\lambda,(x,t)) \to \lambda \odot (x,t)$ de $R \times (X \times R) \to X \times R$ son continuas si $X \times R$ va dotado de la topología producto de X y R. El espacio vectorial $X \times R$ con esta topología es un espacio localmente convexo.

Demostración. Se probará en primer lugar que la suma es una aplicación continua; se hará a continuación lo mismo con el producto exterior y se dará, por último, una familia de seminormas que definan la topología producto. Una vez demostradas estas tres propiedades estará acabado el teorema.

1) Continuidad de la suma. Tenemos que demostrar que siendo (x,t) y $(x',t') \in X \times R$ y dado un entorno de 0 en $X \times R$, $V \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ con V entorno de 0 en X y $(-\varepsilon,\varepsilon)$ entorno de 0 en R, existe otro par de entornos de 0, W en X y $(-\delta,\delta)$ en R tales que para cualquier par de puntos $(z_1,s_1) \in (x,t) \oplus W \times (-\delta,\delta)$ y $(z_2,s_2) \in (x',t') \oplus W \times (-\delta,\delta)$ se verefique

$$(z_1,s_1) \oplus (z_2,s_2) \in (x,t) \oplus (x'.t') \oplus V \times (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Notemos ahora que la función $\pi_t : X \to X$ es continua uniformemente respecto de t en un entorno de 0 de R, esto es, dado un entorno V de 0 en X, existe W entorno de 0 en X y $\varepsilon > 0$ tal que, si $x \in W$ y $|t| < \varepsilon$, se tiene $\pi(x,t) = \pi_t(x) \in V$ por ser $\pi : X \times R \to X$ continua.

Aplicando ésto a la función $\pi^{-1}_{s_1+s_2-t-t'}$, dado V existe W' y $\varepsilon > 0$ tales que si $y \in W'$ y

$$|s_1+s_2-t-t'| < \varepsilon$$

entonces

$$\pi^{-1}_{s_1+s_2-t-t'}(y) \in V .$$

Tomando en particular $y = \pi(z_1,s_1) + \pi(z_2,s_2) - \pi(x,t) - \pi(x',t')$, pertenecerá a W' si $\pi(z_1,s_1) - \pi(x,t) \in W'/2$ y $\pi(z_2,s_2) - \pi(x',t') \in W'/2$. Por la continuidad de π existe W y $\delta < \varepsilon/2$ tal que si $x - z_1 \in W$

$x' - z_2 \in W$, $|s_1 - t| < \delta$ y $|s_2 - t| < \delta$ entonces

$$\pi(z_1, s_1) - \pi(x,t) \in W'/2$$
$$\pi(z_2, s_2) - \pi(x',t') \in W'/2$$

y

$$|s_1 + s_2 - t - t'| \leq |s_1 - t| + |s_2 - t'| < \varepsilon$$

con lo cual

$(z_1, s_1) \oplus (z_2, s_2) \ominus (x,t) \ominus (x',t') =$

$= (\pi^{-1}_{s_1+s_2-t-t'}[\pi(z_1,s_1) + \pi(z_2,s_2) - \pi(x,t) - \pi(x',t')],\ s_1+s_2-t-t')$

pertenece a $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

2. Continuidad del producto exterior. Demostraremos que siendo $(x,t) \in$ $\in X \times R$ y $\lambda \in R$ y dado un entorno cualquiera $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de 0 en $X \times R$ existe otro par de entornos de 0 $W \times (-\delta, \delta)$ en $X \times R$ y $(-\alpha, \alpha)$ en R con la propiedad de que todo λ' de R y todo (x',t') de $X \times R$ tales que $|\lambda - \lambda'| < \alpha$ y $(x',t') \ominus (x,t) \in W \times (-\delta, \delta)$ verifican

$$\lambda \odot (x,t) \ominus \lambda' \odot (x',t') \in V \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Como la aplicación $\pi^{-1}_{\lambda t - \lambda' t'}$ es continua existe $W', \varepsilon' < \varepsilon$ tales que

$$\pi^{-1}_{\lambda t - \lambda' t'}[\lambda \pi(x,t) - \lambda' \pi(x',t')] \in V$$

siempre que $\lambda \pi(x,t) - \lambda' \pi(x',t') \in W'$ $|\lambda t - \lambda' t'| < \varepsilon'$ lo que se verifica para $|\lambda - \lambda'| < \alpha' < \varepsilon'/2(|t| + \delta)$ y $|t - t'| < \delta' < \varepsilon'/2|\lambda|$.

Por ser además π una aplicación continua, por ser el producto exterior continuo para el e.v.t. X y por ser la suma continua para X, existen W, α'', δ'' tales que

$$\lambda \pi(x,t) - \lambda' \pi(x',t') \in W'$$

siempre que sean $|\lambda - \lambda'| < \alpha''$, $|t - t'| < \delta''$ y $x - x' \in W$.

Tomando ahora $\alpha = \min(\alpha', \alpha'')$, $\delta = \min(\delta', \delta'')$ se tiene el resultadp deseado, pues si $(x',t') \in (x,t) \oplus W \times (-\delta, \delta)$ entonces $\lambda' \odot (x',t') \ominus \lambda \odot (x,t) = (\pi^{-1}_{\lambda t - \lambda' t'}[\lambda \pi(x,t) - \lambda' \pi(x',t')], \lambda t - \lambda' t') \in V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

El siguiente lema finalizará la demostración de este teorema:

<u>lema 4.2.</u> La familia de funciones $\{\sigma_i : i \in I\}$ de $X \times R$ en X definidas por

$$\sigma_i(x,t) = p_i \circ \pi(x,t) + |t|$$

es una familia de seminormas en $X \times R$ que genera la topología producto de $X \times R$.

Demostración. Las funciones σ_i verifican las tres condiciones de seminormas:

i) $\sigma_i[(x,t) \oplus (x',t')] = \sigma_i(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t) + \pi(x',t')], t+t') =$

$= p_i \circ \pi(\pi^{-1}_{t+t'}[\pi(x,t) + \pi(x',t')], t+t') + |t+t'| =$

$= p_i[\pi(x,t) + \pi(x',t')] + |t+t'| \leq p_i \circ \pi(x',t') + |t'| + p_i \circ \pi(x,t) +$

$+ |t| = \sigma_i(x,t) + \sigma_i(x',t')$.

ii) $\sigma_i[\lambda \odot (x,t)] = \sigma_i(\pi^{-1}_{\lambda t} \lambda \pi(x,t), \lambda t) = p_i \circ \pi(\pi^{-1}_{\lambda t} \lambda \pi(x,t), \lambda t) +$

$+ |\lambda t| = p_i \lambda \pi(x,t) + |\lambda||t| = |\lambda| (p_i \circ \pi(x,t) + |t|) = |\lambda| \sigma_i(t)$.

iii) $\sigma_i(x,t) < \infty$.

Esta familia de seminormas genera una topología sobre $X \times R$. Será suficiente para que esta topología sea equivalente a la topología producto que para cada bola $B_i(\varepsilon)$ definida por

$$B_i(\varepsilon) = \{ (x,t) \in X \times R : \sigma_i(x,t) < \varepsilon \}$$

exista un entorno de 0 en X y un $\delta > 0$ tales que $W \times (-\delta,\delta) \subset B_i(\varepsilon)$, y recíprocamente que para cada seminorma p de la familia $\{p_i : i \in I\}$ cada $\varepsilon > 0$ y cada entorno $(-\delta,\delta)$ de 0 en R exista un entorno V de 0 en $X \times R$ con la topología generada por $\{\sigma_i : i \in I\}$ tal que

$$V \subset B'_i(\varepsilon) \times (-\delta,\delta)$$

donde $B'_i(\varepsilon) = \{ x \in X : p_i(x) \leq \varepsilon \}$.

Sea en primer lugar la bola $B_i(\varepsilon)$. Como la aplicación π es continua existen η, δ y un conjunto finito J tales que

$$p_i \circ \pi(x,t) < \varepsilon/2$$

si $p_j(x) \leq \eta$, $|t| < \delta$ y $j \in J$.

Tomando $W = \bigcap_{j \in J} B'_j(\eta)$ se tiene que

$$p_i \circ \pi(x,t) + |t| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

si $(x,t) \in W \times (-\delta,\delta)$ con $\delta < \varepsilon/2$. Así $W \times (-\delta,\delta) \subset B_i(\varepsilon)$ y se obtiene la primera parte.

En el otro caso sea $B'_i(\varepsilon)$ dada por la seminorma σ_i y $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$. Como la aplicación π_{-t} es continua y $\pi_{-t}\pi(x,t) = x$ existen $\eta', \delta' < \delta$ y un conjunto finito H tal que

$$p_i(x) \leq \varepsilon$$

si $p_h \circ \pi(x,t) < \eta'$, $h \in H$ y $|t| < \delta'$.

Tomando $\eta = \min(\eta', \delta')$ se tiene para todo $(x,t) \in \bigcap_{h \in H} B_h(\eta)$, que

$$p_h \circ \pi(x,t) \quad + |t| < \eta$$

de donde resulta

$$p_h \circ \pi(x,t) < \eta' \quad , |t| < \delta' < \delta$$

y así $p_i(x) < \varepsilon$ y $|t| < \delta$ con lo cual $(x,t) \in B_i'(\varepsilon) \times (-\delta, \delta)$ y se concluye la demostración del lema.

5. HOMEOMORFISMO ENTRE $X \times \{0\}$ Y X.

En lo sucesivo llamaremos τ a la topología generada por la familia de seminormas $\{p_i \circ \pi : i \in I\}$ y σ a la generada por la familia $\{\sigma_i : i \in I\}$. Demostraremos a continuación que ambas topologías son equivalentes en $X \times \{0\}$ induciendo en éste conjunto una topología homeomorfa a la de X.

<u>Teorema 5.1.</u> El conjunto $X \times \{0\}$ es un subespacio vectorial de $X \times R$. La aplicación $(x,0) \to x$ de $X \times \{0\}$ en X es un isomorfismo algebraico y topológico cuando está dotado $X \times \{0\}$ de la topología inducida por τ o σ.

Demostración. Para probar que $X \times \{0\}$ es un subespacio de $X \times R$ basta comprobar que para cualesquiera $(x,0)$ e $(y,0) \in X \times \{0\}$ y para cualesquiera $\lambda, \mu \in R$ se tiene

$$\lambda \odot (x,0) + \mu \odot (y,0) = (\pi_0^{-1}[\lambda \pi(x,0) + \mu \pi(y,0)], 0) = (\lambda x + \mu y, 0)$$

que pertenece a $X \times \{0\}$.

Llamando f a la aplicación $(x,0) \to x$, es lineal puesto que $f[\lambda \odot (x,0) + \mu \odot (y,0)] = f(\lambda x + \mu y, 0) = \lambda x + \mu y = \lambda f(x,0) + \mu f(y,0)$.

Esta aplicación es bicontinua pues teniendo en cuenta las igualdades

$$\sigma_i(x,0) = p_i \circ \pi(x,0) = p_i f(x,0)$$

$$p_i \circ \pi(x,0) = p_i \circ f(x,0)$$

se tiene f continua en $(X \times \{0\})_\tau$ o $(X \times \{0\})_\sigma$ y análogamente se razona para f^{-1}.

<u>Teorema 5.2.</u> El subespacio $X\times\{0\}$ es denso en $X\times R$ cuando éste va dotado de la topología τ .

Demostración. Bastará probar que dado un entorno V del origen en $(X\times R)_\tau$ y un punto $(x,t)\in X\times R$ arbitrario hay algún punto $(y,0)\in X\times\{0\}$ tal que $(y,0)\in(x,t)\oplus V$.

Sea entonces una seminorma $\tilde{p} = p\circ\pi$ y un número real $\varepsilon>0$. Tomando $(y,0) = (\pi(x,t),0)$ se verifica:

$\tilde{p}\left[(\pi(x,t),0)\ominus(x,t)\right] = p\circ\pi\left[(\pi(x,t),0)\ominus(x,t)\right] =$
$p\left[\pi(\pi(x,t),0) - \pi(x,t)\right] = p\left[\pi(x,t) - \pi(x,t)\right] = p(0) = 0 < \varepsilon$,
con lo cual $(x,t)\in\overline{X\times\{0\}}$.

CAPITULO II

ESTRUCTURA DUAL DEL ESPACIO DE EVOLUCION.

1. INTRODUCCION.

La consecuencia más importante de la estructura algebraica del espacio de evolución es la posibilidad de definir un espacio dual del primero y a partir de éste una topología débil por dualidad. En la resolución de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach o Hilbert se consideran a menudo las soluciones débiles de esta ecuación. En este capítulo hacemos un estudio de la estructura del espacio dual que nos permitirá en el capítulo III dar condiciones de estabilidad para estas soluciones débiles.

La sección 2 es una aplicación de resultados de Análisis Funcional sobre espacios cocientes al espacio de evolución para obtener un isomorfismo algebraico y topológico entre $(X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi)$, $(X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi)$ y X.

En la sección 3 se hace un estudio del espacio dual de $(X \times R)_\tau$. El teorema 3.2 fundamental de este capítulo dará paso a importantes consecuencias en el capítulo III.

Algunos resultados sobre completitud del espacio de evolu- en relación con el espacio fase y una particularización a espacios de Hilbert completan la sección 4 que cierra el capítulo.

2. EL ESPACIO COCIENTE $(X \times R)/KER(\pi)$.

Supondremos nuevamente que el conjunto X está dotado de estructura de e.v.t.l.c. y que su topología está definida por la familia filtrante de seminormas $\{p_i : i \in I\}$. Sabemos que, en tal caso, el espacio vectorial $X \times R$ puede ser dotado de unas estructuras topológicas τ y σ localmente convexas compatibles con la suma $\oplus$ y producto exterior $\odot$ mediante la familia filtrante de seminormas

$$\sigma_i(x,t) = p_i \circ \pi(x,t) + |t| \qquad i \in I$$

$$\tilde{p}_i(x,t) = p_i \circ \pi(x,t) \qquad i \in I$$

respectivamente.

Nota. En particular si X es normado la topología σ viene definida por la única seminorma

$$\sigma(x,t) = \|\pi(x,t)\| + |t| \ .$$

dónde $\|\cdot\|$ representa la norma en X. Como $(X \times R)_\tau$ es separado esta seminorma es norma y en consecuencia $(X \times R)_\tau$ es también un espacio normado.

La aplicación π: $(X \times R) \longrightarrow X$ lineal y continua es, por consiguiente, uniformemente continua en $(X \times R)_\sigma$. (No lo es sin embargo, en general, en $(X \times R)_\sigma$ que tiene la misma topología pero distinta uniformidad).

Es un resultado conocido [14], [26] que dado un e.v.t.l.c. X y un subespacio cerrado M, el espacio cociente X/M puede ser dotado de una topología de e.v.t.l.c. definida por la familia de seminormas

$$\mathring{q}(xM) = \inf_{y \in xM} q(y)$$

siendo q una seminorma en X. Esta topología es la más fina que hace continua la aplicación canónica $\varphi : X \to X/M$. Es también conocido que el espacio X/M es separado si y sólo si M es un subespacio cerrado de X.

Tomando en particular $\mathrm{Ker}(\pi)$ como subespacio cerrado de $(X \times R)_\tau$ o $(X \times R)_\sigma$ se puede construir $(X \times R)_\tau/\mathrm{Ker}(\pi)$ y $(X \times R)_\sigma/\mathrm{Ker}(\pi)$ que serán e.v.t.l.c. separados. La aplicación $\pi : (X \times R) \to X$ induce una aplicación $\pi^* : (X \times R)/\mathrm{Ker}(\pi) \to X$ que será inyectiva, y continua con las topologías τ y σ del espacio cociente. En este caso, además, la aplicación π^* es un isomorfismo algebraico y topológico como mostramos a continuación.

<u>Teorema 2.1.</u> La aplicación $\pi : X \times R \to X$ cuando $X \times R$ está dotado de las topologías τ o σ es un morfismo estricto. En consecuencia los espacios vectoriales topológicos $(X \times R)_\sigma/\mathrm{Ker}(\pi)$, $(X \times R)_\tau/\mathrm{Ker}(\pi)$ y X son isomorfos algebraica y topológicamente.

Demostración. Es condición necesaria y suficiente para que esto suceda [14] que π transforme cada entorno de 0 en $(X \times R)_\tau$ (resp.: En $(X \times R)_\sigma$) en un entorno de 0 en X.

Sea U entorno de 0 en $(X \times R)_\tau$ (resp.: En $(X \times R)_\sigma$). Existe un $\varepsilon > 0$ y una seminorma $p \in \{p_i : i \in I\}$ tales que

$$V_\varepsilon = \{ (x,t) : p \circ \pi(x,t) < \varepsilon \} \subset U$$

$$(\text{resp.: } V_\varepsilon = \{ (x,t) : p \circ \pi(x,t) + |t| < \varepsilon \} \subset U)$$

Bastará demostrar que $W_\varepsilon = \{ x \in X : p(x) < \varepsilon \}$ está contenido en $\pi(V_\varepsilon)$. En efecto, si $x \in W_\varepsilon$ entonces $p(x) = p \circ \pi(x,0) < \varepsilon$ con lo cual $(x,0) \in V_\varepsilon$ y $\pi(x,0) = x \in \pi(V_\varepsilon)$.

Así se tiene que π es un morfismo estricto y por consiguiente el espacio X es isomorfo y homeomorfo a $(X \times R)_\tau/\mathrm{Ker}(\pi)$ y $(X \times R)_\sigma/\mathrm{Ker}(\pi)$, por lo cual, estos deben ser a su vez espacios idénticos.

Nota. La definición de morfismo estricto es la que se utiliza en [14].

3. ESTRUCTURA DEL ESPACIO DUAL.

Vamos a considerar en esta sección los espacios de las formas lineales continuas en $(X \times R)_\tau$ y en $(X \times R)_\sigma$, o sea, los espacios duales de $(X \times R)_\tau$ y $(X \times R)_\sigma$ que representaremos por $(X \times R)'_\tau$ y $(X \times R)'_\sigma$ respectivamente. ES inmediato, por ser τ menos fina que σ, que el espacio $(X \times R)'_\sigma$ contiene algebraicamente a $(X \times R)'_\tau$. La dualidad entre $(X \times R)_\tau$ y $(X \times R)'_\tau$ nos permite definir una nueva topología sobre $X \times R$ llamada topología débil por dualidad, que representaremos en lo que sigue por τ^*. Esta topología será de gran importancia en el capítulo III para estudiar la estabilidad de soluciones débiles de una ecuación diferencial. Damos a continuación un teorema fundamental para esta aplicación, recordando antes algunos resultados conocidos sobre dualidad entre espacios vectoriales topológicos.

<u>Proposición 3.1.</u> (a) La familia de seminormas $q_{x'}(x)$ donde $x' \in (X \times R)'_\tau$ definidas por

$$q_{x'}(x) = x'(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X \times R$$

define una topología sobre $X \times R$ que llamaremos τ^*.
(b) Una red $\{x_\alpha\}$ converge a x en τ^* si y sólo si para todo $x' \in (X \times R)'_\tau$ se verifica

$$\{x'(x_\alpha)\} \longrightarrow x'(x)$$

(c) Si alguna topología sobre $X \times R$ verifica (b) es equivalente a τ^*.

En el siguiente teorema analizamos la estructura del espacio $(X \times R)'_\tau$.

<u>Teorema 3.2.</u> Una aplicación $f:(X \times R)_\tau \longrightarrow R$ es una forma lineal continua si y sólo si $f = x' \circ \pi$ donde $x' \in X'$, dual topológico de X.

Demostración. Como π y x' son lineales y continuas, también lo es $x' \circ \pi$ y así éstas son formas lineales continuas en $(X \times R)_\tau$.

Recíprocamente, sea una forma f lineal y continua. Como $\{0\}$ es cerrado en R se tiene $f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(f)$ cerrado en $(X \times R)_\tau$.

Sea ahora $(x,t) \in \mathrm{Ker}(\pi)$, entonces para todo entorno V de 0 en $(X \times R)_\tau$ se tiene $(x,t) \in V$. Por tanto

$$\mathrm{Ker}(\pi) \subset \overline{\{0\}} \subset \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$$

En tal caso f define una aplicación $\tilde{f}$ lineal y continua de $(X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi)$ en R de forma que es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X \times R)_\tau \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \\
(X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como vimos que eran isomorfos (algebraica y topológicamente) los espacios $(X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi)$ y X podemos expresar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \times R)_\tau \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\pi"'] & & R \\
& (X \times R)_\tau / \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[d, shift right, "\pi^*"'] & \\
& X \arrow[u, shift right, "\pi^* \circ \tau^{-1}"'] \arrow[uur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $f = \tilde{f} \circ (\pi^*)^{-1}$ y π^* es el isomorfismo de la sección 2. El anterior diagrama puede resumirse en el siguiente

$$\begin{tikzcd}
(X \times R)_\tau \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R \\
& X \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

con lo cual $f = \bar{f} \circ \pi$ donde $\bar{f}$ es una forma lineal y continua en el espacio X.

<u>Corolario 3.3.</u> El subespacio $X \times \{0\}$ de $(X \times R)_\tau^*$ es isomorfo algebraica y topológicamente al espacio X dotado de la topología débil por dualidad $\sigma(X,X')$.

Demostración. Se vió en 1.4.2. que ambos espacios vectoriales

eran isomorfos algebraicamente por la aplicación $f: X\times\{0\}\to X$ definida por $f(x,0)=x$. Para ver que esta aplicación es continua, sea $\{(x_\alpha,0)\}$ una red que converge a $(x,0)$ en $(X\times R)_\tau^*$. Entonces, para todo $x'\in X'$ se tiene $\{x'\circ\pi(x_\alpha,0)\}\to$ $\to x'\circ\pi(x,0)$, o sea, $\{x'(x_\alpha)\}\to x'(x)$ y por tanto $\{x_\alpha\}\to x$ en la topología débil por dualidad de X. Análogamente se demuestra el recíproco.

4. PROPIEDADES DE COMPLETITUD.

<u>Teorema 4.1.</u> Si X es un e.v.t.l.c. completo, el espacio $(X\times R)_\sigma$ es también un e.v.t.l.c. completo.

Demostración. Sea un conjunto dirigido A y una red $\{(x_\alpha,t_\alpha)\}$ $\alpha\in A$ de Cauchy en $(X\times R)_\sigma$. Entonces para cada $\varepsilon>0$ y cada $\sigma=p\circ\pi+|.|$ dónde $p\in\{p_i : i\in I\}$ existe un $\alpha_0\in A$ tal que si $\alpha,\beta>\alpha_0$ se tiene

$$\sigma\left[(x_\alpha,t_\alpha)\ominus(x_\beta,t_\beta)\right]<\varepsilon$$

con lo cual

$$p\left[\pi(x_\alpha,t_\alpha)-\pi(x_\beta,t_\beta)\right]<\varepsilon$$

y

$$|t_\alpha-t_\beta|<\varepsilon$$

Así $\{\pi(x_\alpha,t_\alpha)\}$, $\{t_\alpha\}$ son respectivamente redes de Cauchy en X y R y por tanto convergen a algún $y\in X$ y $t\in R$. Sea $x=\pi(y,-t)$, veremos que la red $\{(x_\alpha,t_\alpha)\}$ converge a (x,t). Dados $\varepsilon>0$ y una seminorma σ existe α_0 tal que si $\alpha>\alpha_0$ se tiene

$$\sigma\left[(x,t)\ominus(x_\alpha,t_\alpha)\right]=p\left[\pi(x,t)-\pi(x_\alpha,t_\alpha)\right]+|t-t_\alpha|<\varepsilon$$

si $|t-t_\alpha|<\varepsilon/2$ y $p[\pi(x,t)-\pi(x_\alpha,t_\alpha)]<\varepsilon/2$ lo cual se verifica por ser las $\{t_\alpha\}\to t$ y $\{\pi(x_\alpha,t_\alpha)\}\to\pi(x,t)$ y por ser p continua.

Nota. El teorema también es cierto para el espacio $(X\times R)_\tau$. Sin embargo, al no ser separado, el límite de una red de Cauchy no es único. En este caso la demostración del teorema ha-

bría que modificarla en la siguiente forma: Dada una red de Cauchy $\{(x_\alpha, t_\alpha)\}$ para cada $\varepsilon > 0$ y cada seminorma p existe $\alpha_0 \in A$ tal que

$$p\left[\pi(x_\alpha, t_\alpha) - \pi(x_\beta, t_\beta)\right] < \varepsilon$$

si $\beta, \alpha > \alpha_0$. Entonces $\{\pi(x_\alpha, t_\alpha)\}$ es de Cauchy y convergente a algún $y \in X$. Tomando ahora un par arbitrario (z,t) tal que $\pi(z,t) = y$ se ve fácilmente que $\{(x_\alpha, t_\alpha)\} \to (z,t)$ en $(X \times R)_\tau$.

<u>Corolario 4.2.</u> Si X es un espacio de Banach, igual sucede a $(X \times R)_\sigma$.

Demostración. Es consecuencia directa del teorema 4.1. y de la nota de la sección 1.

Enunciamos, por último, una proposición de muy fácil demostración.

<u>Proposición 4.3.</u> Si X es un espacio de Hilbert, también lo es $(X \times R)_\sigma$ con el producto escalar

$$((x,t)\cdot(x',t')) = (\pi(x,t)\cdot\pi(x',t')) + (t,t')$$

La norma que genera este producto escalar

$$\sigma'(x,t) = (\|\pi(x,t)\|^2 + |t|^2)^{1/2}$$

es equivalente a la norma σ de $(X \times R)$.

CAPITULO III

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS CONCEPTOS ELEMENTALES Y ESTABILIDAD LYAPUNOV

1. INTRODUCCION.

Los conceptos elementales de Dinámica Topológica definidos en el capítulo I pueden ser caracterizados por propiedades topológicas en el e.v.t. $(X*R)_\tau$ construido en el capitulo I . A esto dedicamos la sección 2 de este capítulo. Es particularmente interesante la proposición 2.4. en que se dan dos caracterizaciones topológicas y una algebraica de conjunto cerrado invariante.

En la sección 3 se hace un estudio de la relación existente entre estabilidad-Lyapunov de un punto x y la continuidad de una aplicación "proyección" de $X \times R$ en X . Para éste hemos necesitado investigar el comportamiento de una aplicación P "tipo proyección" para que sea continua en un punto, extendiendose posteriormente a las restricciones de ésta, a los subconjuntos $X \times R^+$ y $X \times R^-$ de $X \times R$. El teorema 3.6. expresa una condición necesaria y suficiente para que un punto sea estable-Lyapunov mediante la continuidad de la aplicación P . Pa-

ra extender esta caracterización a conjuntos compactos hemos necesitado el lema 3.8 en el que estudiamos la estructura de estos conjuntos. Con la extensión del teorema 3.6 a conjuntos compactos, hecho en el teorema 3.9, y la caracterización de puntos débilmente estables-Lyapunov en los teoremas 3.11 y 3.12 se cierra esta sección.

En la sección 4 se hace un estudio algebraico del espacio $(X \times R)$ construyendo un isomorfismo entre éste y el espacio vectorial $X \times R$. Este isomorfismo nos permite definir dos nuevas aplicaciones $\tilde{P}$ y $\tilde{\pi}$ de $X \times R$ en X que a su vez determinan el flujo.

La sección 5 está dedicada a aplicar los resultados de las dos secciones precedentes para caracterizar la estabilidad Lyapunov de un punto x mediante la función $\tilde{P}$ que no es una proyección como P pero que en cambio está definida en el e.v.t. $X \times R$ con el producto usual y una topología homeomorfa a la τ. La construcción de esta topología está hecha en el teorema 5.1 demostrando que es la topología inicial de la aplicación lineal $\tilde{\pi}$. En este mismo teorema se caracteriza los puntos estables-Lyapunov y se estudia el caso particualr en que 0 sea de equilibrio. El lema 5.3 expresa la forma del espacio dual de $X \times R$ dotado de la nueva topología de una manera similar a como se hacía en el teorma II.3.2. La extensión del teorema 5.1 a puntos débilmente estables completa la sección 5.

2. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS CONCEPTOS ELEMENTALES.

Gran parte de los conceptos definidos en la sección I.1 pueden ser caracterizados en base a la estructura del espacio $(X \times R)_\tau$ Supondremos en lo que sigue que π es un flujo global.

<u>Proposición 2.1</u> Si es $x \in X$, el cierre de $\{(x,0)\}$ es el conjunto

$$\overline{\{(x,0)\}} = \{ (y,t) \in X \times R : \pi(y,t) = x \}$$

Llamando $P: X \times R \to X$ a la proyección sobre X dada por $\pi(x,t)=x$ se tiene $P(\overline{\{(x,0)\}}) = \gamma(x)$

Demostración. Sea $(y,t) \in X \times R$ tal que $\pi(y,t)=x$. Para toda seminorma $P \in \{P_i \quad i \in I\}$ se tiene

$\tilde{p}\ [(y,t)\ominus(x,0)] = p\circ\pi\,[(y,t)\ominus(x,0)] = p[\pi(y,t)-\pi(x,0)] =$
$= p(\theta)=0$,

con lo cual para cada entorno V de 0 en $(X\times R)_\tau$ se tiene $(x,0)\ominus(y,t)\in V$ y por tanto $(y,t)\in\overline{\{(x,0)\}}$.

Recíprocamente, sea $(y,t)\in X\times R$ tal que $\pi(y,t)\neq x$. Como X es separado existe p seminorma de X tal que

$$p\ [\pi(y,t)-x]>1$$

con lo cual $\tilde{p}=p\circ\pi$ verifica

$$\tilde{p}\ [(y,t)\ominus(x,0)] = p[\pi(y,t)-x]>1$$

y así existe V entorno de 0 en $(X\times R)_\tau$ tal que $(x,o)\notin(y,t)\oplus V$ y en consecuencia $(y,t)\notin\overline{\{(x,0)\}}$.

La segunda parte de la definición es inmediata a la vista de la definición 1.2.3 de trayectoria.

<u>Proposición 2.2.</u> Si llamamos $(X\times R+)_\tau$ al subespacio topológico de $(X\times R)_\tau$ formado por los puntos (x,t) tales que $t\geq 0$, y $(X\times R-)_\tau$ al subespacio topológico de $(X\times R)_\tau$ formado por los (x,t) tales que $t\leq 0$ se verifica, para cualquier $(x,0)\in X\times R$:

a) El cierre de $\{(x,0)\}$ en $(X\times R^+)_\tau$ es el conjunto

$$\overline{\{(x,0)\}}\ (X\times R+)_\tau = \{(y,t)\in X\times R+ : \pi(y,t)=x\}$$

b) El cierre de $\{(x,0)\}$ en $(X\times R-)_\tau$ es el conjunto

$$\overline{\{(x,0)\}}\ (X\times R-)_\tau = \{(y,t)\in X\times R- : \pi(y,t)=x\}$$

c) Siendo P la proyección antes definida

$$P\ (\ \overline{\{(x,0)\}}\ (X\times R+)_\tau\ ) = \gamma^+(x)$$

y

$$P\ (\ \overline{\{(x,0)\}}\ (X\times R-)_\tau\ ) = \gamma^-(x)\ .$$

Demostración. Las partes (a) y (b) son inmediatas por la definición de topología inducida. Teniendo en cuenta la definición 1.2.3 de semitrayectoria negativa se ve que si $y\in\gamma^-(x)$ existe $t\leq 0$ tal que $y=\pi(x,t)$, pero así $x=\pi(y,-t)$ con $-t\geq 0$ y por tanto $(y-t)\in\overline{\{(x,0)\}}\ (X\times R^+)_\tau$.
Recíprocamente si $(y,t)\in\overline{\{(x,0)\}}$ en $(X\times R+)_\tau$ se tiene $\pi(y,t)=x$, así

$y=\pi(x,-t)$ con $-t\leq 0$ y por tanto $y\in\gamma^-(x)$. Un razonamiento análogo probaría la parte correspondiente a la semitrayectoria positiva.

Con algunas modificaciones estas dos últimas proposiciones pueden extenderse a trayectorias de un conjunto $M\subset X$.

Proposición 2.3. Si $M\subset X$, representamos por $M\times\{0\}$ el conjunto $\{(x,0)\in X\times R : x\in M\}$. Entonces el cierre $\overline{M\times\{0\}}_{(X\times R)_\tau}$ de $M\times\{0\}$ en $(X\times R)_\tau$ es el conjunto $\overline{M\times\{0\}}_{(X\times R)_\tau}=\{(x,t)\in X\times R : \pi(x,t)\in\bar{M}\}$ y análogamente se tiene para el cierre en $(X\times R^+)$ y $(X\times R^-)$

$$\overline{M\times\{0\}}_{(X\times R^+)}=\{(x,t)\in X\times R^+ : \pi(x,t)\in\bar{M}\}$$

$$\overline{M\times\{0\}}_{(X\times R^-)}=\{(x,t)\in X\times R^- : \pi(x,t)\in\bar{M}\}.$$

Demostración. Si $\pi(x,t)\in\bar{M}$, para toda seminorma P de X y $\varepsilon>0$ existe $y\in M$ tal que

$$P[\pi(x,t)-y]<\varepsilon$$

Dada una seminorma $\tilde{p}$ cualquiera de $(X\times R)_\tau$ y un $\varepsilon>0$ existe $y\in$ $\in M$ tal que

$$\tilde{P}[(x,t)\ominus(y,0)]=p\circ\pi[(x,t)\ominus(y,0)]=$$
$$=P[\pi(x,t)-y]\leq\varepsilon$$

con lo cual $(x,t)\in\overline{(M,0)}$ en $(X\times R)_\tau$.

Recíprocamente si $\pi(x,t)\notin\bar{M}$, existe alguna seminorma p de X y algún $\varepsilon>0$ tal que para cualquier $y\in M$ se tiene

$$P(\pi(x,t)-y)>\varepsilon$$

con lo cual

$$P\circ\pi[(x,t)\ominus(y,0)]>\varepsilon \text{ para todo } (y,0)\in M\times\{0\}$$

y por tanto $(x,t)\notin\overline{M\times\{0\}}_{(X\times R)_\tau}$.

De la definición de topología inducida se obtienen facilmente las otras dos igualdades de la proposición.

Teniendo en cuenta la proposición 2.3 y utilizando algunas propiedades algebraicas damos a continuación diversas condiciones que caracterizan los conjuntos invariantes cerrados.

Proposición 2.4 Si M es un subconjunto cerrado de X, las siguientes proposiciones son equivalentes

1) M es invariante

2) El cierre de $M\times\{0\}$ en $(X*R)_\tau$ es $M\times R$

3) $M\times R$ es cerrado en $(X*R)_\tau$

4) $M\times R \subset M\times\{0\} + \mathrm{Ker}\,(\pi)$

Demostración. Utilizaremos el esquema $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 1$, y aparte $1\Leftrightarrow 4$.

a) $1\Rightarrow 2$. Si M es invariante y cerrado, por la proposición 2.3 se tiene

$$\overline{M\times\{0\}} = \{(x,t)\in X\times R : \pi(x,t)\in \bar{M} = M\}$$

Sea $(x,t)\in \overline{M\times\{0\}}$ vemos que $\pi(x,t)\in M$ y por tanto $x=\pi(\pi(x,t),-t)\in M$ con lo cual $(x,t)\in M\times R$. Recíprocamente, si $(x,t)\in M\times R$ y M es invariante resulta

$\pi(x,t)\in M$ y por tanto $(x,t)\in\overline{M\times\{0\}}$. Así $\overline{M\times\{0\}}=M\times R$.

b) $2\Rightarrow 3$. Por la parte (2) $M\times R$ es cerrado en $(X*R)_\tau$.

c) $3\Rightarrow 1$. Si $M\times R$ es cerrado, como $M\times\{0\}\subset M\times R$ tomando las clausuras en $(X*R)_\tau$ se tiene

$$\overline{M\times\{0\}} \subset \overline{M\times R} = M\times R .$$

Sea ahora x de M y t de R, como $x=\pi(\pi(x,t),-t)$, por la proposición 2.3 $(\pi(x,t),-t)\in \overline{M\times\{0\}}\subset M\times R$, así $\pi(x,t)\in M$ y M es invariante.

d) $1\Leftrightarrow 4$. Si $M\times R\subset M\times\{0\}\oplus \mathrm{Ker}\,(\pi)$, M es invariante pues para todo x de M y t de R se tiene $(x,t)=(y,0)\oplus(z,t')$ con $y\in M$ y $\pi(z,t')=0$. Entonces $\pi(x,t)=\pi(y,0)=y\in M$. Recíprocamente si M es invariante y $(x,t)\in M\times R$ como $\pi(x,t)\in M$, se puede expresar.

$$(x,t)=(\pi(x,t),0)\oplus[(x,t)\ominus(\pi(x,t),0)]$$

donde $\pi(x,t)\in M$ y $\pi[(x,t)\ominus(\pi(x,t),0)]=0$ por lo que

$$M\times R\subset M\times\{0\}\oplus \mathrm{Ker}\,(\pi).$$

Nota. En la parte (d) de la demostración no usamos el hecho de ser M cerrado. Las proposiciones (1) y (4) son equivalentes por lo tanto sin esta hipótesis.

Una caracterización con algunas modificaciones puede ser conseguida para conjuntos positivamente y negativamente invarian-

tes.

Proposición 2.5. Para un conjunto M cerrado son equivalentes las siguientes proposiciones:

(1) M es positivamente invariante.

(2) La clausura de $M\times\{0\}$ en $(X\times R^-)_\tau$ está contenida en $M\times R$.

(3) $M\times R^+ \subset M\times\{0\} \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$.

Análogamente son equivalentes:

(1') M es negativamente invariante.

(2') La clausura de $M\times\{0\}$ en $(X\times R^-)$ está contenida en $M\times R$.

(3') $M\times R^- \subset M\times\{0\} \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$.

Demostración. $1\Rightarrow 2$. Sea M positivamente invariante. Si $(x,t)\in \overline{(M\times\{0\})}_{(X\times R^-)_\tau}$ según la proposición 2.3. $\pi(x,t)\in M=\bar{M}$ y por tanto $x=\pi(\pi(x,t),-t)\in M$ pues $-t\geq 0$ con lo cual $(x,t)\in M\times R$.

$2\Rightarrow 1$. Supongamos que $\overline{(M\times 0)}_{(X\times R^-)_\tau}\subset M\times R$ y sea $x\in M$ y $t\geq 0$. Como $x=\pi(\pi(x,t),-t)\in M$, por la proposición 2.3. $(\pi(x,t),-t)\in \overline{M\times\{0\}}$ y en consecuencia $\pi(x,t)\in M$ con lo cual M es invariante.

$1\Leftrightarrow 3$. Sea M positivamente invariante, si $x\in M$ y $t\geq 0$ se tiene $(x,t) = (\pi(x,t),0) \oplus [(x,t) \ominus (\pi(x,t),0)]$ donde $(\pi(x,t),0)\in M\times\{0\}$ y $\pi[(x,t) \ominus (\pi(x,t),0)] = 0$.

Recíprocamente, supongamos $M\times R^+\subset M\times\{0\} \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$. Si $x\in M$ y $t\in R^+$ existen $y\in M$ y $(z,t')\in \mathrm{Ker}(\pi)$ tales que

$$(x,t) = (y,0) \oplus (z,t')$$

de donde

$$\pi(x,t) = y\in M$$

y por tanto M es positivamente invariante.

En particular, para un punto de equilibrio se obtiene:

Corolario 2.6. Un punto x es de equilibrio sí y sólo sí el conjunto $\{x\}\times R$ es cerrado en $(X\times R)_\tau$.

Demostración. Es consecuencia de la proposición 2.4. y de ser

X un espacio separado.

3. APLICACION PROYECCION Y ESTABILIDAD.

En el espacio $X \times R$ hemos considerado la aplicación $P: X \times R \longrightarrow X$ definida por

$$P(x,t) = x \qquad (1)$$

a la que llamamos proyección de $X \times R$ en X. Hay que notar que, al no ser la estructura lineal de $X \times R$ la correspondiente al producto de espacios vectoriales, la aplicación proyección no es en este caso una aplicación lineal. Además, si dotamos a $X \times R$ de la topología τ, como ésta no es tampoco la topología producto de X y R no podemos pensar que la proyección sea, en general, una aplicación continua. El problema de determinar en cada punto la continuidad de la proyección puede ser aclarado con el siguiente teorema.

<u>Teorema 3.1</u>. La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $P: (X \times R)_\tau \longrightarrow X$ dada en (1) sea continua en el punto $(x,0)$ es que para todo entorno V de x, exista otro entorno W de x tal que $\pi(W,R) = \{\pi(x,t) : x \in W, t \in R\}$ esté contenido en V.

Demostración. Condición suficiente. Sea V un entorno arbitrario de x en X, demostraremos que existe $\tilde{W}$ entorno de $(x,0)$ en $(X \times R)_\tau$ tal que $P(\tilde{W}) \subset V$. Según la hipótesis, existe un entorno W de x en X tal que $\pi(W,R) \subset V$. Supondremos, sin perder generalidad, que V y W se obtienen de dos seminormas p y q de X, esto es

$$V = \{ y \in X : p(y-x) \leq \varepsilon \}$$

$$W = \{ y \in X : p(y-x) \leq \delta \} ,$$

Consideremos ahora el entorno $\tilde{W}$ de $(x,0)$ dado por la seminorma $\tilde{q} = q \circ \pi$ y por $\delta > 0$, o sea

$$\tilde{W} = \{ (z,t) \in X \times R : \tilde{q}[(z,t) \ominus (x,0)] \leq \delta$$

Este entorno será el que nos resuelva el problema. Sea (z,t) un punto arbitrario de $\tilde{W}$, si demostramos que $P(z,t)\in V$, se tendrá $P(\tilde{W})\subset V$ y por tanto acabada la condición suficiente.

Notemos que si $(z,t)\in\tilde{W}$, por la construcción de este conjunto, se tiene

$$q\left[\pi(z,t) - \pi(x,0)\right] \leq \delta$$

o sea

$$q\left[\pi(z,t)-x\right] \leq \delta$$

con lo cual $\pi(z,t)\in W$ según la construcción de éste, y así $z = \pi(\pi(z,t),-t)\in V$ con lo cual $P(z,t)\in V$ y así $P:(X\times R)_{\tau}\rightarrow X$ es continua.

Condición necesaria. Suponemos ahora que la aplicación P es continua, esto es, dado un entorno V de x, existe otro $\tilde{W}$ de $(x,0)$ en $(X\times R)_{\tau}$ tal que $P(\tilde{W})\subset V$. Igual que en el caso anterior, no se pierde generalidad si suponemos V y $\tilde{W}$ obtenidos a partir de seminormas p y $\tilde{q}$ de X y $(X\times R)_{\tau}$ respectivamente, o sea

$$V = \{ y\in X : p(y-x)\leq \varepsilon \}$$

$$W = \{ (z,t)\in X\times R : \tilde{q}\left[(z,t) \ominus (x,0)\right] \leq \delta \}$$

Además, puede suponerse $\tilde{q}$ de la forma $q\circ\pi$ con q seminorma de X. Sea ahora W el entorno de x correspondiente a la seminorma q y al número real δ, esto es

$$W = \{ y\in X : q(y-x)\leq \delta \} ,$$

demostraremos que $\pi(W,R)\subset V$ con lo cual se tendrá la condición necesaria.

Sea entonces $y\in W$ y $t\in R$, como $\pi(\pi(y,t),-t) = y$ por la construcción de W resulta

$$q\left[\pi(\pi(y,t),-t) - x\right] \leq \delta$$

Teniendo en cuenta que $x=\pi(x,0)$ y la definición de $\tilde{q}$ se obtiene ahora

$$\tilde{q}\left[(\pi(y,t),-t) \ominus (x,0)\right] \leq \delta$$

con lo cual $(\pi(y,t),-t)\in\tilde{W}$ y, según la hipótesis,

$$P(\pi(y,t),-t) = \pi(y,t) \in V$$

Con esto $\pi(W,R) \subset V$ y se concluye la demostración.

<u>Corotario 3.2.</u> Si $P:(X \times R)_{\tau} \longrightarrow X$ es continua en $(x,0)$ el punto x es de equilibrio del flujo π.

Demostración. Si x no fuera de equilibrio, existiría t tal que $\pi(x,t) \neq x$. Consideremos V entorno de x que no contenga a $\pi(x,t)$, que existe por ser X separado. Para cualquier entorno W de x se tiene $\pi(W,R) \not\subset V$ pues $\pi(x,t) \in \pi(W,R)$ y $\pi(x,t) \notin V$. En consecuencia la aplicación P por el teorema 3.1. no sería continua en el punto $(x,0)$.

Esta caracterización de la continuidad de la aplicación P toma una forma particular si restringimos la aplicación a los espacios $(X \times R^{+})$ y $(X \times R^{-})$ definidos anteriormente.

<u>Teorema 3.3.</u> Sea $(X \times R^{-})$ el subespacio topológico de $(X \times R)_{\tau}$ definido en 2.2. y $P^{-}:(X \times R^{-}) \longrightarrow X$ la restricción de P a este espacio. La condición necesaria y suficiente para que la aplicación P^{-} sea continua en un punto $(x,0)$ es que para todo entorno V de X exista otro entorno W de X tal que $\pi(W,R^{+}) \subset V$.

Demostración. Condición suficiente. Si V es un entorno arbitrario de x, demostraremos que existe $\tilde{W}$ entorno de $(x,0)$ en $(X \times R)_{\tau}$ tal que $P^{-}[\tilde{W} \cap (X \times R^{-})] \subset V$ con lo cual P^{-} será continua en $(x,0)$. Según la hipótesis existe W tal que $\pi(W,R^{+}) \subset V$. Suponemos como en el teorema 3.1. que V y W se obtienen a partir de seminormas p y q. Consideramos como en dicho teorema el entorno de $(x,0)$ en $(X \times R)_{\tau}$ dado por

$$\tilde{W} = \{ (z,t) \in X \times R : \tilde{q}[(z,t) \ominus (x,0)] \leq \delta \}$$

Para todo $(z,t) \in \tilde{W}$ con $t \in R^{-}$ se tiene

$$\tilde{q}[(z,t) \ominus (x,0)] \leq \delta$$

o sea, por definición de $\tilde{q}$

$$q[\pi(z,t) - \pi(x,0)] = q[\pi(z,t) - x] \leq \delta$$

con lo cual $\pi(z,t)\in W$. Entonces por hipótesis

$$z = \pi(\pi(z,t),-t)\in V$$

pues $-t\leq 0$ y $\pi(W,R^+)\subset V$. Así el entorno $\tilde{W}$ de $(x,0)$ verifica $P^-(\tilde{W}\cap(X\times R^-))\subset V$ pues si $(z,t)\in\tilde{W}$ y $t\in R^-$ vemos que $P(z,t)= =z\in V$.

Condición necesaria. Suponemos continua la aplicación P^-, esto es, dado un entorno V de x en X existe $\tilde{W}$ entorno de $(x,0)$ en $(X\times R)_\tau$ tal que

$$P^-(\tilde{W}\cap(X\times R^-)_\tau)\subset V .$$

Suponemos otra vez V y $\tilde{W}$ generados por seminormas p de X y $\tilde{q}$ de $(X\times R)_\tau$ respectivamente. Definimos ahora un entorno W de x de la siguiente forma

$$W = \{ y\in X \ : \ q(y-x)\leq\delta \}$$

y demostraremos $\pi(W,R^+)\subset V$ con lo que se tendrá la condición necesaria. Si $y\in W$ y $t\in R^+$ se tiene

$$y = \pi(\pi(y,t),-t) \ , \quad -t\in R^-$$

de donde según la construcción de W

$$q\left[\pi(\pi(y,t),-t) - x\right] \leq \delta$$

o lo que es igual

$$\tilde{q}\left[(\pi(y,t),-t) \ominus (x,0)\right] \leq \delta$$

y así $(\pi(y,t),-t)\in\tilde{W}$. Como además $-t\leq 0$ se tiene también que $(\pi(y,t),-t) \in \tilde{W}\cap(X\times R^-)$ y por tanto $P^-(\pi(y,t),-t) = =\pi(y,t)\in V$ con lo cual está demostrado que $\pi(W,R^+)\subset V$.

Un razonamiento análogo nos permite caracterizar la continuidad en $(x,0)$ de la función P^+ definida como la restricción de P a $(X\times R^+)_\tau$.

<u>Teorema 3.4.</u> Sea $(X\times R^+)_\tau$ el subespacio topológico de $(X\times R)_\tau$ definido en 2.2 y $P^+:(X\times R^+)_\tau\longrightarrow X$ la restricción de P a este espacio. La condición necesaria y suficiente para que P^+ sea continua en un punto $(x,0)$ es que para todo entorno V de x exista otro entorno W de x tal que $\pi(W,R^-)\subset V$.

El carácter continuo de las funciones P, P^+ y P^- en el punto $(x,0)$ va estrechamente ligado a la estabilidad del punto x. Para poner esto de manifiesto, damos en primer lugar la siguiente definición siguiendo a NEMYSTKII-STEPANOV [18].

Definición 3.5. Un punto $x \in X$ es positivamente estable-Lyapunov (o negativamente estable-Lyapunov, o estable en ambas direcciones) si para todo entorno V de x existe otro entorno W de x tal que $\pi(W,R^+) \subset V$ (o $\pi(W,R^-)$ V, o $\pi(W,R) \subset V$).

Los teoremas anteriores nos dan así condiciones equivalentes a la estabilidad-Lyapunov de un punto x. Expresamos los teoremas 3.1, 3.3., 3.4. en virtud de la definición 3.5. en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. Sea $P : (X \times R)_\tau \to X$ la aplicación $(x,t) \to x$ proyección sobre X, P^+ y P^- las restricciones de P a los subespacios topológicos $(X \times R^+)_\tau$ y $(X \times R^-)_\tau$ de $(X \times R)_\tau$ respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que P sea continua en un punto $(x,0)$ (Resp.: P^+ o P^- sean continuas) es que el punto x sea estable-Lyapunov en ambas direcciones (resp.: Negativamente estable-Lyapunov o positivamente estable-Lyapunov).

Hemos estudiado hasta ahora la continuidad de la proyección en un punto $(x,0)$. Los resultados obtenidos pueden generalizarse cuando en lugar de un punto x de X manejamos un subconjunto compacto $M \subset X$. Damos, en primer lugar, la definición de estabilidad para un conjunto y un lema que nos hará posible esta generalización.

Definición 3.7. Un conjunto $M \subset X$ es positivamente estable--Lyapunov (o negativamente estable-Lyapunov, o estable en ambas direcciones) si para todo entorno V de M existe otro entorno W de M tal que $\pi(W,R^+) \subset V$ (o $\pi(W,R^-) \subset V$, o $\pi(W,R) \subset V$).

Lema 3.8. Si X es un e.v.t.l.c. (no necesariamente separado)

M un subconjunto casicompacto de X y V un entorno de M existe una seminorma continua p y un número real $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$W = \{ y \in X : \exists x \in M \text{ que verifica } p(y-x) \leq \varepsilon \}$$

está contenido en V.

Demostración. Sea V un entorno abierto de M, entonces V^c será cerrado y $M \cap V^c = \emptyset$. Para cada x de M existe una seminorma p_x y un $\varepsilon > 0$ tal que para todo punto y de V^c se tiene

$$p_x(x-y) > \varepsilon_x$$

pues en caso contrario sería $x \in \overline{V^c} = V^c$ en contra de ser disjuntos V^c y M. Los conjuntos V_x definidos por

$$V_x = \{ y \in X : p_x(y-x) < \varepsilon_x/2 \}$$

forman un recubrimiento abierto de M, por lo que existen un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tales que

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}$$

Tomando ahora la seminorma

$$p = p_{x_1} + \ldots + p_{x_n}$$

y el número real

$$\varepsilon = \min (\varepsilon_{x_1}/2, \ldots, \varepsilon_{x_n}/2)$$

el conjunto

$$W = \{ y \in X : \exists x \in M \text{ que verifican } p(y-x) < \varepsilon \}$$

cumple la propiedad requerida, pues si $y \in W$ existe $x \in M$ tal que $p(y-x) < \varepsilon$ y existe algún k tal que $x \in V_{x_k}$, o sea

$$p_{x_k}(x-x_k) < \varepsilon_{x_k}/2$$

Entonces

$$p_{x_k}(y-x_k) \leq p_{x_k}(y-x) + p_{x_k}(x-x_k) \leq p(y-x) + p_{x_k}(x-x_k) < \varepsilon + \varepsilon_{x_k}/2 < \varepsilon_{x_k}$$

con lo cual $y \notin V^c$ y así $y \in V$ quedando demostrado que $W \subset V$.

Expresamos ahora el teorema 3.6 en una forma más general.

<u>Teorema 3.9.</u> Sean P, P^+ y P^- como en el teorema 3.6. y M un subconjunto compacto de X. La condición necesaria y suficiente para que el conjunto M sea estable-Lyapunov en ambas direcciones (resp.: Negativamente estable-Lyapunov, positivamente estable-Lyapunov) es que para cada entorno V de M exista un entorno $\tilde{W}$ de $M \times \{0\}$ tal que $P(\tilde{W}) \subset V$ (resp.: $P^+(\tilde{W} \cap (X \times R^+)) \subset V$ o $P^-(\tilde{W} \cap (X \times R^-)) \subset V$).

Demostración. Como M es compacto en X, $M \times \{0\}$ es casicompacto según el teorema de TYCHONOV [6] en $(X \times R)_\sigma$ y en consecuencia en la topología $(X \times R)_\tau$ que según 1.4. es menos fina que la anterior. Podemos aplicar ahora el lema 3.8. al espacio $(X \times R)_\tau$ y al conjunto casicompacto $M \times \{0\}$.

Si la aplicación P verifica que dado un entorno V de M existe un entorno $\tilde{W}$ de $M \times \{0\}$ tal que $P(\tilde{W}) \in V$, por el lema 3.8. podemos suponer el entorno $\tilde{W}$ de la forma

$$\tilde{W} = \{ (z,t) \in X \times R : \exists (y,0) \in M \times \{0\} \text{ tal que } \tilde{p}[(z,t) \ominus (y,0)] < \varepsilon \}.$$

Considerando el entorno W de M siguiente

$$W = \{ x \in X : \exists y \in M \text{ tal que } p(y-x) < \varepsilon \}$$

demostraremos que $\pi(W,R) \in V$. En efecto, si $x \in V$ existe $y \in M$ tal que

$$p(x-y) < \varepsilon$$

o lo que es igual

$$p \circ \pi \left[(\pi(x,t),-t) \ominus (y,0) \right] < \varepsilon$$

y así $(\pi(x,t),-t) \in \tilde{W}$ y por la hipótesis $P(\pi(x,t),-t) = \pi(x,t)$ que pertenece a V.

Recíprocamente, si M es estable para cada V entorno de M existe W tal que $\pi(W,R) \subset V$. Aplicando ahora el lema 2.8. al espacio X y al conjunto M podemos suponer el conjunto W de la forma

$$W = \{ x \in X : \exists y \in M \text{ tal que } p(x-y) < \varepsilon \}.$$

El conjunto $\tilde{W}$ definido por

$$\tilde{W} = \{(z,t) : \exists y \in M \text{ tal que } \tilde{p}[(z,t) \ominus (y,0)] < \varepsilon\}$$

es un entorno de $M \times \{0\}$ que verifica $P(\tilde{W}) \subset V$.

Un razonamiento análogo prueba el caso de las aplicaciones P^+ y P^-.

Teniendo en cuenta que la continuidad de P en M asegura la existencia del entorno $\tilde{W}$ de $M \times \{0\}$ para cada entorno V de M verificando $P(\tilde{W}) \subset V$ podemos obtener otra consecuencia del teorema 3.9.

<u>Corolario 3.10.</u> Si M es un subconjunto compacto de X y la aplicación P es continua en $M \times \{0\}$ (resp.: P^+ o P^- continua en $M \times \{0\}$) el conjunto M es estable-Lyapunov en ambas direcciones (resp.: Negativamente estable o positivamente estable).

En la sección 3 del capítulo II se vió que la topología débil por dualidad de $X \times R$ venía definida por las seminormas $\{x' \circ \pi : x' \in X'\}$. El paralelismo existente entre la familia de seminormas $\{p_i \circ \pi : i \in I\}$, formada a partir de las seminormas que definen la topología de X, y la familia $\{x' \circ \pi \; x' \in X'\}$ formada a partir de las seminormas que definen la topología débil $\sigma(X,X')$ nos permite formular todos los resultados anteriores para las topologías débiles de estos espacios. Diremos que un punto es débilmente estable (resp.: débilmente positivamente estable, débilmente negativamente estable) cuando es estable (resp.: positivamente estable, negativamente estable) para la topología débil. Análogamente diremos que una aplicación P es débilmente continua si es continua para la topología débil. Los siguientes teoremas se demostrarían de la misma forma que sus correspondientes en la topología τ utilizando para esta analogía el teorema II.3.2.

<u>Teorema 3.11.</u> Sea $P:(X \times R)_{\tau^*} \to X_{\sigma(X,X')}$ la aplicación $(x,t) \to x$ proyección sobre X; P^+ y P^- las restricciones de P a los subespacios topológicos $(X \times R^+)_{\tau^*}$ y $(X \times R^-)_{\tau^*}$ de $(X \times R)_{\tau^*}$

respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que P sea continua en un punto $(x,0)$ (resp.: P^+ o P^- sean continuas) es que el punto x sea débilmente estable-Lyapunov en ambas direcciones (resp.: Débilmente negativamente estable-Lyapunov, débilmente positivamente estable-Lyapunov).

Teorema 3.12. Sean P, P^+ y P^- como en el teorema 3.11. y sea M un subconjunto débilmente compacto de X. La condición necesaria y suficiente para que M sea débilmente estable-Lyapunov en ambas direcciones (resp.: Débilmente negativamente estable Lyapunov, débilmente positivamente estable-Lyapunov) es que para cada entorno V de M en $X_{\sigma(X,X')}$ exista un entorno $\tilde{W}$ de $M\times\{0\}$ en $(X\ast R)_{\tau^*}$ tal que $P(\tilde{W})\subset V$ (resp.: $P^+(\tilde{W}\cap(X\times R^+))\subset V$, $P^-(\tilde{W}\cap(X\times R^-))\subset V$).

4. PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL ESPACIO PRODUCTO.

Sobre el conjunto $X\times R$ hemos definido una estructura de espacio vectorial mediante las leyes (s) y (p.e.) en la sección 1.3. que representamos por $X\ast R$, y otra standard mediante las leyes (s') y (p'.e!) que representamos por $X\times R$. La principal diferencia algebraica entre ambos es que en $X\ast R$ no puede hacerse la descomposición

$$(x,t) = (x,0) + (0,t) = (x,\theta) + t(0,1)$$

válida para $X\times R$, y por tanto el vector x y el número real t no representan las componentes del vector $(x,t)\in X\ast R$. Nos interesa entonces conocer las componentes de (x,t) cuando se le considera vector de $X\ast R$. La siguiente proposición aclara este punto.

Proposición 4.1. El vector $(x,t)\in X\ast R$ admite una única descomposición en la forma $(\tilde{x},0)\oplus\tilde{t}\odot(0,1)$ siendo

$$\begin{aligned}\tilde{x}(x,t)&=\pi(x,t)-t\pi(0,1)\\ \tilde{t}(x,t)&=t\end{aligned}\qquad(1)$$

Demostración. Supuesta una descomposición de este tipo

$$(x,t) = (\tilde{x},0) + \tilde{t}\odot(0,1)$$

se tendrá

$$(x,t) = (\pi_t^{-1}[\pi(\tilde{x},0) + t\pi(0,1)],\tilde{t})$$

de donde $t=\tilde{t}$ y así $(x,t) = (\tilde{x},0) \oplus t\odot(0,1)$. Como π es lineal, debe ser

$$\pi(x,t) = \pi(x,0) + t\pi(0,1) = \tilde{x} + t\pi(0,1)$$

y de aquí

$$\tilde{x} = \pi(x,t) - t\pi(0,1) .$$

Además para $\tilde{t}=t$ y $\tilde{x}$ anterior es cierta la descomposición que se busca, con lo cual se tiene demostrada la proposición.

Vista la propiedad anterior puede establecerse ahora un isomorfismo entre $X\ast R$ y $X\times R$.

<u>Proposición 4.2.</u> La aplicación $f:X\ast R \longrightarrow X\times R$ definida por

$$f(x,t) = (\tilde{x}(x,t),t) = (\pi(x,t)-t\pi(0,1),t) \qquad (II)$$

es un isomorfismo entre $X\ast R$ y $X\times R$.

Demostración. Notaremos en primer lugar el carácter biyectivo de f. Si (x,t) y (x',t') pertenecen a $X\times R$ y $f(x,t)=$ $=f(x',t')$ se tiene $t=t'$ y

$$\pi(x,t) - t\pi(0,1) = \pi(x',t) - t\pi(0,1)$$

de donde $x=x'$ por ser $\pi_t(x)$ biyectiva.

Además, para cada $(y,t)\in X\times R$ se tiene

$$f(\pi_{-t}[y+t\pi(0,1)],t) = (\pi(\pi_{-t}[y+t\pi(0,1)],t) - t\pi(0,1),t) =$$

$$= (y + t\pi(0,1) - t\pi(0,1),t) = (y,t).$$

con lo cual f es sobreyectiva, inyectiva y

$$f^{-1}(x,t) = (\pi_{-t}(x + t\pi(0,1),t) \qquad (III) .$$

La linealidad de f es consecuencia de

$$f(\lambda\Theta(x,t)+\mu\Theta(x',t')) = f(\pi^{-1}_{\lambda t+\mu t'}[\lambda\pi(x,t)+\mu\pi(x',t')],\lambda t+\mu t')=$$

$$=(\lambda\pi(x,t)+\mu\pi(x',t') - (\lambda t+\mu t')\pi(0,1),\lambda t+\mu t') =$$

$$=(\lambda[\pi(x,t) - t\pi(0,1)] +\mu[\pi(x',t')-t'\pi(0,1)] ,\lambda t+\mu t') =$$

$$=\lambda f(x,t) +\mu f(x',t').$$

Notación 4.3. Llamaremos en adelante g a la aplicación $f^{-1}:X\times R\longrightarrow X\times R$. Considerada g como aplicación entre conjuntos, a partir de las aplicaciones $\pi:X\times R\longrightarrow X$ y $P:X\times R\longrightarrow X$ definimos las nuevas aplicaciones

$$\tilde{\pi}:X\times R\longrightarrow X$$
$$\tilde{P}:X\times R\longrightarrow X$$

por $\tilde{\pi}(x,t)=\pi g(x,t)$ y $\tilde{p}(x,t)=pg(x,t)$ según el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X\times R \arrow[ur, "\tilde{\pi}"] \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\tilde{P}"'] & & X\times R \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, "P"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Nótese que las aplicaciones $\tilde{\pi}$ y $\tilde{P}$ verifican

$$\tilde{\pi}(\tilde{x},t) =\pi g(\tilde{x},t) = \pi(x,t)$$

$$\tilde{P}(\tilde{x},t) = Pg(\tilde{x},t) = P(x,t)$$

y además según la definición de $\tilde{x}(x,t)$

$$\tilde{\pi}(\tilde{x}(x,t),t) = \pi g(\tilde{x}(x,t),t) = \pi(x,t) = \tilde{x}(x,t)+t\pi(0,1).$$

<u>Ejemplo 4.4.</u> Sea $X=R$ y la aplicación $\pi:R\times R\longrightarrow R$ dada por $\pi(x,t)=xe^t$. Las funciones $\tilde{x}(x,t)$, f, g, $\tilde{\pi}$, $\tilde{P}$ tienen la siguiente forma

$$\tilde{x}(x,t) = \pi(x,t) - t\pi(0,1) = xe^t$$

$$f(x,t) = (\tilde{x},t) = (xe^t,t)$$

$$g(x,t) = f^{-1}(x,t) = (xe^{-t},t)$$

$$\tilde{P}(x,t) = Pg(x,t) = P(xe^{-t},t) = xe^{-t}$$

$$\tilde{\pi}(x,t) =\pi g(x,t) =\pi(xe^{-t},t) = x$$

Nótese también que $\tilde{P}$ no es lineal y en cambio sí lo es en la estructura de RxR la función $\tilde{\pi}$,que coincide en este caso con la proyección sobre R.

Hemos visto cómo a partir de π pueden obtenerse las funciones $\tilde{\pi}$ y $\tilde{P}$. Igualmente, según mostramos a continuación, puede obtenerse π conocidas $\tilde{\pi}$ y $\tilde{P}$.

<u>Proposición 4.5.</u> Si $\tilde{\pi}$ y $\tilde{P}$ son las aplicaciones de XxR en X definidas por $\tilde{\pi}=\pi g$ y $\tilde{P}=P\circ g$ se verifica:

(1) Para cada $t\in R$ la aplicación $x\longrightarrow\tilde{P}(x,t)$ es biyectiva. Si $x=\tilde{P}(y,t)$ escribiremos $y=\tilde{P}^{-1}(x,t)$.

(2) Si $\tilde{\pi}$ y $\tilde{P}$ procedieran de un flujo π' se tendría $\pi\equiv\pi'$.

(3) El flujo π puede definirse a partir de $\tilde{P}$ y $\tilde{\pi}$ según la fórmula

$$\pi(x,t) = \tilde{\pi}(\tilde{P}^{-1}(x,t),t)$$

Demostración. Si $t\in R$, $x,x'\in X$ y se tiene $\tilde{P}(x,t) = \tilde{P}(x',t)$, por definición de $\tilde{P}$ resulta

$$\tilde{P}(x,t) = P\ g(x,t) = \Pi_t^{-1}(x+t\pi(0,1)) = \Pi_t^{-1}(x'+t\pi(0,1)) = \tilde{P}(x',t)$$

y como Π_t^{-1} es biyectiva resulta $x=x'$.

Además para cada $x\in X$ se tiene

$$\tilde{P}\left[(\pi(x,t) - t\pi(0,1),t\right] = x$$

con lo cual $P(x,t)$ es biyectiva para cada t y puede escribirse $x=\tilde{P}^{-1}(y,t)$ si $\tilde{P}(x,t)=y$. Como $\tilde{P}(\tilde{x},t) = P(x,t) = x$ se puede poner también

$$\tilde{P}^{-1}(x,t) = \tilde{x} = P\ f(x,t) .$$

Las partes (2) y (3) de la proposición se obtienen ahora notando que $\tilde{x} = \Pi(x,t) - t\pi(0,1)$ con lo cual

$$\pi(x,t) = \tilde{x} + t\pi(0,1)$$

y además

$$\tilde{\pi}(\tilde{x},t) = \tilde{x} + t\pi(0,1)$$

de donde

$$\pi(x,t) = \check{\pi}(\check{x},t) = \check{\pi}(\check{P}^{-1}(x,t),t)$$

o también

$$\pi(x,t) = \check{P}^{-1}(x,t) + t\pi(0,1).$$

Nota. Si el punto 0 fuera de equilibrio, sería $\pi(0,1) = 0$ y entonces $\pi(x,t) = \check{P}^{-1}(x,t)$. Es fácil ver en este caso que $\check{P}(x,t) = \pi(x,-t)$ y que $\check{P}$ y $\check{P}^{-1}$ cumplen los axiomas de identidad, grupo y continuidad al igual que la función π.

5. APLICACIONES A LA ESTABILIDAD-LYAPUNOV.

Las aplicaciones $f, \check{P}, \check{\pi}$ antes definidas nos van a permitir trasladar las propiedades de $(X \times R)_{\tau}$ a un espacio tipo $X \times R$.

<u>Teorema 5.1.</u> Sea $f: X \times R \longrightarrow X \times R$ el isomorfismo definido en 4.2, y $\check{\pi}$ y $\check{p}$ las aplicaciones definidas en 4.3. Se verifica:

(1) Existe una topología $f(\tau)$ sobre $X \times R$ tal que los espacios $(X \times R)_{\tau}$ y $(X \times R)_{f(\tau)}$ son homeomorfos.

(2) La topología $f(\tau)$ es la inicial de la aplicación $\check{\pi}: X \times R \longrightarrow X$, o sea, la menos fina que hace continua $\check{\pi}$.

(3) La función $p: (X \times R)_{\tau} \longrightarrow X$ es continua en un punto (x,t) si y sólo si $\check{p}: (X \times R)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ lo es en $f(x,t)$.

(4) El flujo π es estable en un punto x(resp.: Negativamente estable, positivamente estable) si y sólo si la aplicación $\check{p}: (X \times R)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ es continua en $(x,0)$(resp.: $\check{p}^+: (X \times R^+)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ es continua en $(x,0)$, $\check{p}^-: (X \times R^-)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ es continua en $(x,0)$).

(5) Si el flujo $\pi: X \times R \longrightarrow X$ verifica $\pi(0,1) = 0$, la condición necesaria y suficiente para que π sea estable(resp.: Negativamente estable, positivamente estable) es que π sea continua en $(X \times R)_{f(\tau)}$(resp.: $(X \times R^+)_{f(\tau)}$, $(X \times R^-)_{f(\tau)}$).

Demostración. La topología $f(\tau)$ se obtiene tomando como base de entornos del origen los conjuntos

$$f(V) = \{(y,t) : P \circ \pi \circ g(y,t) \leq \varepsilon\} = \{(y,t) : P \circ \check{\pi}(y,t) \leq \varepsilon\}$$

pues los V son de la forma

$$V = \{(x,t) : P\circ\pi(x,t) \leq \varepsilon\}$$

y si $(y,t) \in f(V)$, al ser $(y,t) = f\circ g(y,t)$, se tiene $g(y,t) \in V$. Con esto está demostrado (1) y (2).

La condición (3) es consecuencia de ser g biyectiva y bicontinua, pues como $\tilde{P} = P\circ g$, se tiene $\tilde{P}$ continua en un punto (x,t) si y sólo si P lo es en $g(x,t)$.

La condición (4) será equivalente al teorema 3.6 una vez que probemos que $(X\times R^+)_{f(\tau)}$ es homeomorfo a $(X\times R^+)_\tau$ y que $(X\times R^-)_{f(\tau)}$ lo es a $(X\times R^-)_\tau$. Notemos que, como f no modifica la segunda variable, se tiene

$$f(X\times R^+) = X\times R^+ \qquad y \qquad f(X\times R^-) = X\times R^- \quad .$$

Sea G un abierto de $(X\times R^+)_\tau$, existe H abierto de $(X\times R)_\tau$ tal que

$$G = H \cap (X\times R^+) \quad .$$

Se tiene ahora

$$f(G) = f(H) \cap f(X\times R^+) = f(H) \cap X\times R^+ .$$

Tenemos ahora, del teorema 3.6, que un punto x es estable (resp.: Negativamente estable, positivamente estable) si y sólo si la función $P:(X\times R)_\tau \longrightarrow X$ (resp.: $P^+:(X\times R^+)_\tau \longrightarrow X$, $P^-:(X\times R^-)_\tau \longrightarrow X$) es continua en $(x,0)$, lo cual es equivalente a que $\tilde{P}:(X\times R)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ sea continua en $f(x,0)=(x,0)$ (resp.: $\tilde{P}^+:(X\times R^+)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ sea continua en $(x,0)$, $\tilde{P}^-:(X\times R^-)_{f(\tau)} \longrightarrow X$ sea continua en $(x,0)$).

Por último, si $\pi(0,1)=0$, la aplicación $\tilde{\pi}$ toma la forma

$$\tilde{\pi}(x,t)=x$$

y así se tiene

$$\pi(x,t) = \tilde{P}^{-1}(x,t)$$

con lo cual

$$\tilde{P}(x,t) = \tilde{P}^{-1}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{P}(x,t),\ t),-t) = \tilde{P}^{-1}(x,-t).$$

Entonces $\tilde{P}(x,t) = \pi(x,-t)$ y por consiguiente $\tilde{P}$ será continua en $(x,0)$ en los espacios $(X\times R)_{f(\tau)}$, $(X\times R^+)_{f(\tau)}$ y

$(X\times R^-)_{f(\tau)}$ si y sólo si $\pi(x,t)$ lo es en los espacios $(X\times R)_{f(\tau)}$ $(X\times R^-)_{f(\tau)}$ y $(X\times R^+)_{f(\tau)}$ cuando demostremos que la aplicación $n:(x,t)\rightarrow(x,-t)$ es continua en $(X\times R)_{f(\tau)}$. Pero esto es consecuencia de la forma de los entornos del origen en el espacio $(X\times R)_{f(\tau)}$, pues como $\tilde{\pi}(x,t) = x$ se tiene una base de entornos con los conjuntos

$$V = \{(x,t)\in X\times R : p\circ\tilde{\pi}(x,t)=p(x)\leq\varepsilon\}$$

y es equivalente

$$p\circ\tilde{\pi}(x,t) = p(x)\leq\varepsilon$$

a

$$p\circ\tilde{\pi}(x,-t) = p(x)\leq\varepsilon$$

con lo cual $n:(x,t)\rightarrow(x,-t)$ es una aplicación continua, y análogamente su restricción a $(X\times R^+)_{f(\tau)}$ o $(X\times R^-)_{f(\tau)}$.

A continuación damos un sencillo ejemplo, en el que es seguido el método anterior.

<u>Ejemplo 5.2.</u> Sea $X=R$ y $\pi(x,t)$ el flujo sobre R dado por

$$\pi(x,t) = (x-a)e^t + a$$

La función f toma la forma

$$f(x,t)=(\pi(x,t)-t\pi(0,1),t)=[(x-a)e^t+a-ta(1-e),t]= (\tilde{x},t)$$

Se obtiene así

$$x = a + (\tilde{x}-a)e^{-t} + bte^{-t} = \tilde{P}(\tilde{x},t)$$

donde hemos llamado $b =\pi(0,1)=a(1-e)$.

La función $\tilde{\pi}$ es de la forma

$$(x,t) = \tilde{x} + bt$$

y por tanto la topología $f(\tau)$ sobre R^2 estará generada por bandas de pendiente $-b$, pues los entornos de 0 son de la forma

$$V = \{(x,t)\in R^2 : |x+bt|<\varepsilon\} ,$$

o sea, la región comprendida entre las rectas $x+bt=\varepsilon$ y $x+bt=-\varepsilon$.

La función $\tilde{P}$ es continua en $(a,0)$ en $(R\times R^+)_{f(\tau)}$ pues dado $\varepsilon>0$, existe δ tal que si (x,t) verifica

$$|(x-a) + bt| < \delta$$

entonces

$$|\tilde{P}(\tilde{x},t) - \tilde{P}(a,0)| = |a + (\tilde{x}-a)e^{-t} + bte^{-t} - a| = |(x-a)e^{-t} +$$

$$+ bte^{-t}| = |(x-a) + bt| e^{-t} < \delta e^{-t} < \delta \quad , \quad \text{si} \quad t>0.$$

Así el punto $x=a$ es negativamente estable. Igualmente puede verse que no es, en cambio, positivamente estable.

Vamos a extender los resultados anteriores a la estabilidad débil. Necesitaremos un lema previo sobre la estructura del dual de $(X\times R)_{f(\tau)}$ similar al teorema II.3.2.

<u>Lema 5.3.</u> Toda forma lineal sobre $(X\times R)_{f(\tau)}$ se puede expresar como $x'\circ\tilde{\pi}$ dónde x' pertenece al dual de X.

Demostración. Es obvio que si $x'\in X'$ dual de X entonces $x'\circ\tilde{\pi}$ es una forma lineal continua sobre $(X\times R)_{f(\tau)}$. Recíprocamente si h pertenece al dual de $(X\times R)_{f(\tau)}$ entonces $h\circ f$ pertenece al dual de $(X\times R)_{\tau}$ y por el teorema II.3.2. se puede escribir

$$h\circ f = x'\circ\pi$$

o lo que es lo mismo $h = x'\circ\pi\circ g = x'\circ\tilde{\pi}$.

<u>Teorema 5.4.</u> Sean $f(\tau)$, $\tilde{P}$, $\tilde{P}^+$ y $\tilde{P}^-$ definidos como en el teorema 5.1. Entonces el flujo π es débilmente estable en un punto x (resp.: Débilmente negativamente estable, débilmente positivamente estable) sí y sólo sí la aplicación $\tilde{P}:X\times R \longrightarrow X$ es débilmente continua—continua de $(X\times R)_{f(\tau)^*}$ en $X_{\sigma(X,X')}$— en $(x,0)$ (resp.: $\tilde{P}^+:X\times R^+\longrightarrow X$ débilmente continua en $(x,0)$, $P^-: X\times R^- \longrightarrow X$ débilmente continua en $(x,0)$).

Demostración. Es análoga a la del apartado (5) del teorema 5.1. reemplazando la topología τ por τ^*, la $f(\tau)$ por $f(\tau^*)$ y teniendo en cuenta que por el lema 5.3. se tiene $f(\tau^*)=f(\tau)^*$.

CAPITULO IV

MOCIONES ESTABLES Y CONTINUIDAD UNIFORME GENERALIZADA.

1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior vimos como era posible caracterizar los puntos y conjuntos compactos estables-Lyapunov mediante la continuidad de una función proyección definida en XxR. En este capítulo obtendremos importantes resultados aplicando esta técnica a otros conceptos de Dinámica Topológica.

En la sección 2 recordamos las definiciones de moción estable-Lyapunov y moción uniformemente estable-Lyapunov para dar posteriormente varias caracterizaciones de estos conceptos mediante la continuidad de una aplicación φ tipo proyección definida ahora en XxRxR. Para los teoremas constructivos de esta sección hemos necesitado definir un tipo de continuidad uniforme, generalización natural de la ordinaria, que se transforma posteriormente en continuidad uniforme ordinaria al caracterizar los conceptos que serán utilizados en la siguiente sección. Construimos en esta sección una categoría a partir de la continuidad uniforme generalizada como sugerencia de la po-

sible aplicación de este concepto fuera de nuestro trabajo.

En la sección 3 se hace, en primer lugar, una exposición de conceptos usuales en la teoría de mociones casi-períodicas. El teorema 3.7. caracteriza un flujo equicontinuo sobre un compacto E mediante la continuidad uniforme de la aplicación Q. Como aplicaciones de este teorema surgen una nueva demostración de la equivalencia entre moción uniformemente Lyapunov-estable respecto a $\gamma(x)$ y flujo equicontinuo sobre $\gamma(x)$, una caracterización de conjunto casi período mínimo mediante Q y una caracterización de moción casi período. Para esta última hemos necesitado generalizar a e.v.t., en el lema 3.10., un resultado de MARKOV para espacios métricos.

2. CARACTERIZACION DE MOCIONES ESTABLES

Damos en primer lugar las definiciones de moción estable-Lyapunov y moción uniformemente estable-Lyapunov tomadas de [23].

Definición 2.1. Sea un flujo continuo sobre un e.v.t.l.c. X. Se dice que una moción $\pi(x,\cdot)$ es estable-Lyapunov (resp.: Positivamente estable-Lyapunov, negativamente estable-Lyapunov) respecto a un conjunto D si $\pi(x,t)$ está definida para todo t, y para todo entorno V de 0 en X hay otro entorno W de 0 en X tal que $\pi(y,t) - \pi(x,t) \in V$ para todo $t \in R$ (resp.: $t \geq 0$, $t \leq 0$) si $y \in D \cap (x + W)$).

Definición 2.2. Una moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente estable-Lyapunov (resp.: Positivamente uniformemente estable-Lyapunov, negativamente uniformemente estable-Lyapunov) respecto a un conjunto D si para cada entorno V de 0 en X existe otro entorno W de 0 en X tal que

$$\pi(y,t) \in \pi(\hat{x},t) + V$$

si $y \in D$, $\hat{x} \in \gamma(x)$, $y \in \hat{x}+W$, $t \in R$ (resp.: $\hat{x} \in \gamma(x)$, $t \geq 0$, $\hat{x} \in \gamma(x)$, $t \leq 0$).

Nota. El sentido de estabilidad uniforme empleado por A. A. MARKOV y recogido en [1], [18] es más amplio que en la

definición 2.2. Según [16] una moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente Lyapunov-estable (resp: Positiva uniformemente Lyapunov-estable, negativa uniformemente Lyapunov-estable) en A respecto a un conjunto D si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$d(xt,yt) < \varepsilon$$

si $d(x,y)<\delta$, $t>0$, $x\in A$ e $y\in D$.

Si no se especifica el conjunto A se considera que es el mismo conjunto D. Sin embargo nosotros utilizaremos la uniformidad de la moción sólo en $\gamma(x)$ y por ésto utilizamos la definición 2.2.

En este capítulo necesitamos un tipo de continuidad uniforme más fuerte que el usual que llamaremos " continuidad uniforme generalizada". Definiremos en primer lugar esta continuidad y mostraremos posteriormente cómo a partir de este concepto puede construirse una categoría, lo cual sugiere la posibilidad de aplicación de este tipo de continuidad fuera de este trabajo.

<u>Definición 2.3</u> Sean X,Y espacios uniformes, $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación de X en Y y A,B subconjuntos de X. Decimos que f es " uniformemente (A,B)-continua" si para todo W "entourage" de Y existe V "entourage" de X tal que

$$(f(x),f(y)) \in W$$

si $(x,y)\in V$, $x\in A$, $y\in B$, o sea, si $(x,y) \in V \cap (A\times B)$.

Nota. En particular, si B coincide con A, f sería uniformemente continua sobre A≡B en el sentido usual, y la continuidad ordinaria en un punto x_0 de X es equivalente a la "(x_0,X)-continuidad uniforme".

<u>Proposición 2.4</u>. Llamamaremos objeto (X,A,B) a una terna formada por un espacio uniforme X y dos subconjuntos suyos A y B. Dados dos objetos (X,A,B) e (Y,C,D) llamamos morfismo de (X,A,B) en (Y,C,D) a una aplicación de X en Y "uniformemente (A,B)-continua" tal que $f(A)\subset C$ y $f(B)\subset D$. Entonces esta clase de objetos con estos morfismos y la composición ordinaria de aplicaciones forma una categoría.

Demostración. Es fácil ver que dados los objetos (X,A,B), (Y,C,D) (Z,E,F) y las aplicaciones $f: X \longrightarrow Y$ uniformemente (A,B)-continua con $f(A) \subset C$ y $f(B) \subset D$ y $g: Y \longrightarrow Z$ uniformemente (C,D)-continua con $g(C) \subset E$ y $g(D) \subset F$, la aplicación compuesta $h = g \circ f$ es uniformemente (A,B)-continua con $h(A) \subset E$ y $h(B) \subset F$, con lo cual la composición de dos morfismos es otro morfismo. La propiedad asociativa es inmediata y como aplicación identidad sobre el objeto (X,A,B) se puede tomar la aplicación idéntica en X.

Damos a continuación una caracterización de las mociones uniformemente estables-Lyapunov por medio de la continuidad uniforme generalizada de una función tipo proyección.

<u>Teorema 2.5.</u> Sea π un flujo continuo sobre un e.v.t.l.c. X, $\pi(x,\cdot)$ una moción compacta y D un subconjunto de X. Consideremos el espacio uniforme $(X \times R)_\tau \times R$ (producto del e.v.t. $(X \times R)_\tau$ por el e.v.t. R) y sean para $x \in X$ los conjuntos :

$$\hat{H} = \{(\hat{x},t,t) \quad \forall \hat{x} \in \delta(x) ; \ \forall t \in R\}$$
$$\hat{D} = \{(\pi(y,t),-t-t) \quad \forall y \in D ; \ \forall t \in R\} .$$

Entonces, la condición necesaria y suficiente para que la moción $\pi(x,\cdot)$ sea uniformemente estable-Lyapunov respecto a D es que la función $Q = (X \times R)_\tau \times R \longrightarrow X$ dada por

$$Q(x,t,t') = x$$

sea uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua.

Demostración. Supongamos Q uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua, entonces para todo entorno U de 0 en X, existe un entorno $\tilde{W}$ de 0 en $(X \times R)$ y un $\delta > 0$ tal que

$$x - \pi(y,t') \in U$$

si $\hat{x} \in \delta(x)$, $y \in D$, $(\hat{x},t) \ominus (\pi(y,t'),-t') \in \tilde{W}$ y $|t+t'| < \delta$;

puesto que entonces $(\hat{x},t,t) \in \hat{H}$ y $(\pi(y,t'),-t-t') \in D$.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\tilde{W}$ viene dado por una seminorma $\tilde{p} = p \circ \pi$ y un $\varepsilon > 0$ o sea

$$\tilde{W} = \{(x,t) : \quad p[\pi(x,t)] < \varepsilon\}$$

Sea ahora U entorno de 0 en X y W el entorno de 0 en X

dado por la seminorma p y por el número real ε. Demostraremos que para todo t de R

$$\pi(y,t) - \pi(\hat{x},t) \in U$$

si $\hat{x} \in \gamma(x)$, $y \in D$ e $y-\hat{x} \in W$.

En efecto, si $y-\hat{x} \in W$ podemos poner

$$p(y-\hat{x}) = p \circ \pi\left[(\pi(y,t),-t) \ominus (\pi(\hat{x},t),-t)\right] < \varepsilon ,$$

o sea,

$$(\pi(y,t),-t) \ominus (\pi(x,t),-t) \in \tilde{W} .$$

Por la continuidad de Q se tiene ahora

$$\pi(y,t) - \pi(\hat{x},t) \in U$$

y así $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente Lyapunov-estable.

Recíprocamente si la moción compacta $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente estable, dado un entorno U de 0 en X existe otro entorno W de 0 en X tal que

$$\pi(\hat{x},t) - \pi(y,t) \in U$$

si $y \in D$, $\hat{x} \in \gamma(x)$ y $\hat{x}-y \in W$.

Como antes, suponemos W dado por una seminorma p y un número real $\varepsilon > 0$. Consideramos ahora el entorno $\tilde{W}$ de 0 en $(X \times R)_\tau$ dado por $\varepsilon/2$ y $\tilde{p} = p \circ \pi$, o sea

$$\tilde{W} = \{ (x,t) \in X \times R : p \circ \pi(x,t) < \varepsilon/2 \} .$$

Como la moción $\pi(x,\cdot)$ es compacta, el conjunto $H(x) = \overline{\gamma(x)}$ es compacto, y por tanto también el conjunto $H(x) \times [-1,1]$. Entonces la aplicación π es uniformemente continua en $H(x) \times [-1,1]$ con lo cual dado $\varepsilon > 0$ y p seminorma de X existe $\delta > 0$ tal que

$$p\left[\pi(\hat{x},\tau) - \hat{x}\right] < \varepsilon/2 \qquad (1)$$

si $\hat{x} \in \gamma(x)$ y $|\tau| < \delta < 1$.

Sea ahora U entorno de 0 en X, demostraremos que

$$\hat{x} - \pi(y,t') \in U$$

si $\hat{x} \in \gamma(x)$, $y \in D$, $(\hat{x},-t) \ominus (\pi(y,t'),-t') \in \tilde{W}$ y $|t-t'| < \delta$ con lo cual, como $(\hat{x},-t,-t)$ y $(\pi(y,t'),-t',-t')$ son puntos

arbitrarios de $\hat{H}$ y $\hat{D}$, se tendrá que la aplicación Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua.

Si $(\hat{x},-t) \ominus (\pi(y,t')-t') \in \tilde{W}$ se tiene

$$p[\pi(\hat{x},-t) - y] < \varepsilon/2 \qquad (II)$$

Además $|t-t'| < \delta$ implica por (I)

$$p[\pi(\pi(\hat{x},-t),t-t') - \pi(\hat{x},-t)] < \varepsilon/2$$

y así

$$p[\pi(\hat{x},-t') - \pi(\hat{x},-t)] < \varepsilon/2 \qquad (III)$$

De (II) y (III) se concluye en

$$p[\pi(\hat{x},-t') - y] < \varepsilon$$

con lo cual $\pi(\hat{x},-t')-y \in W$. Como la moción es uniformemente estable-Lyapunov, resulta ahora

$$\pi(\pi(\hat{x},-t'),t') - \pi(y,t') = \hat{x} - \pi(y,t') \in U$$

y se concluye el teorema.

Nota 1. Si D es invariante, el conjunto $\hat{D}$ puede expresarse en la forma

$$\hat{D} = \{(y,t,t) : y \in D,\ t \in R\}.$$

Nota 2. Si $D = \gamma(x)$ entonces son idénticos $\hat{D}$ y $\hat{H}$, con lo cual Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua si y sólo si es uniformemente continua en $\hat{H}$. Resulta por lo tanto que la moción compacta $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente estable-Lyapunov respecto a $\gamma(x)$ si y sólo si Q es uniformemente continua en $\hat{H}$.

Una importante ventaja de la continuidad uniforme generalizada es que una misma función puede dar lugar a distintas caracterizaciones.

<u>Teorema 2.6</u>. Sea nuevamente $\pi(x,\cdot)$ una moción compacta para un flujo π sobre un e.v.t.l.c. X. Consideremos el conjunto $\hat{H}$ del teorema 2.5. y los conjuntos

$$\hat{D}^{+} = \{(\pi(y,t),-t,-t) : y \in D,\ t \geq 0\}$$

$$\hat{D}^- = \{ (\pi(y,t),-t,-t),\ \forall y\in D,\ t\leq 0 \}$$

La condición necesaria y suficiente para que la moción $\pi(x,\cdot)$ sea uniformemente positivamente estable-Lyapunov (resp: Uniformemente negativamente estable-Lyapunov) respecto a D es que la función Q del teorema 2.5. sea uniformemente $(\hat{H},\hat{D}^+)$--continua (resp.: Uniformemente $(H,\hat{D}^-)$-continua).

Desmostración. Siguiendo un proceso análogo al del teorema anterior, dado U entorno de 0 en X existe $\tilde{W}$ entorno de 0 en $(X\times R)_\tau$ tal que

$$\hat{x} - (y,t)\in U$$

si $t\geq 0$, $\hat{x}\in \mathcal{X}(x)$, $y\in D$, $(\hat{x},-t)\ominus(\pi(y,t),-t)\in W$ cuando Q es uniformemente $(H,\hat{D}^+)$-continua.

Tomando ahora W entorno de 0 en X como en el teorema 2.5. y supuesto que $\hat{x}-y\in W$, $y\in D$, $\hat{x}\in\mathcal{X}(x)$, $t\geq 0$ resulta

$$(\pi(\hat{x},t),-t)\ominus(\pi(y,t),-t)\in\tilde{W}$$

y por la continuidad de Q

$$\pi(\hat{x},t) - \pi(y,t)\in U$$

con lo cual la moción es positivamente uniformemente Lyapunov--estable.

Recíprocamente, si la moción $\pi(x,\cdot)$ verifica esta condición, dado un entorno U de 0 en X existe otro entorno W de 0 en X tal que

$$\pi(\hat{x},t) - \pi(y,t)\in U$$

si $\hat{x}\in\mathcal{X}(x)$, $y\in D$, $t\geq 0$ y $\hat{x}-y\in W$.

Sea entonces $\hat{x}\in\mathcal{X}(x)$, $y\in D$, $t'\geq 0$ tales que

$$(\hat{x},t)\ominus(\pi(y,t'),-t')\in\tilde{W}$$

con $|t-t'|<\delta$ donde W y δ se han tomado como en la demostración del teorema 5.2. Se vió que

$$\pi(\hat{x},-t')-y\in W$$

y en consecuencia si $t'>0$ se tiene

$$\hat{x} - \pi(y,t')\in U$$

con lo cual la aplicación Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D}^+)$-continua. Un razonamiento análogo prueba el teorema para una moción negativamente uniformemente Lyapunov-estable.

Nota 1. Si D es invariante, los conjuntos $\hat{D}^+$ y $\hat{D}^-$ pueden expresarse por

$$\hat{D}^+ = \{(y,t,t) : y\in D \ , \ t\leq 0\}$$

$$\hat{D}^- = \{(y,t,t) : y\in D \ , \ t\geq 0\}$$

Nota 2. Tomando los conjuntos

$$\hat{H}^+ = \{(\hat{x},t,t) : \hat{x}\in \gamma^+(x) \quad t\leq 0\}$$

$$\hat{H}^- = \{(\hat{x},t,t) : \hat{x}\in \gamma^-(x) \quad t\geq 0\}$$

el teorema es también válido si se considera Q uniformemente $(\hat{H}^+,\hat{D}^+)$-continua o respectivamente uniformemente $(\hat{H}^-,\hat{D}^-)$-continua.

Nota 3. Si $D=\gamma(x)$ se tiene $\hat{D}^+=\hat{H}^+$ y $\hat{D}^-=\hat{H}^-$ con lo cual se puede poner:

(1) La moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente positivamente estable-Lyapunov respecto a $\gamma(x)$ si y solo si Q es uniformemente continua en $\hat{H}^+$.

(2) La moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente negativamente estable-Lyapunov respecto a $\gamma(x)$ si y solo si Q es uniformemente continua en $\hat{H}^-$.

Si consideramos la métrica discreta $R_{\mathcal{D}}$ sobre R, en el espacio topológico $(X*R)_{\mathcal{C}}\times R_{\mathcal{D}}$ podemos prescindir de la compacidad de la moción.

<u>Teorema 2.7.</u> Sea $Q:(X*R)_{\mathcal{C}}\times R_{\mathcal{D}}\rightarrow X$, $\hat{H}$ y $\hat{D}$ como en el teorema 2.5., $\hat{D}^+$ y $\hat{D}^-$ como en el teorema 2.6. La moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente estable-Lyapunov (resp.: Uniformemente positivamente estable-Lyapunov, uniformemente negativamente estable--Lyapunov) respecto a D si y sólo si la aplicación Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua (resp.: Uniformemente $(\hat{H},\hat{D}^+)$-continua, uniformemente $(\hat{H},\hat{D}^-)$-continua).

Demostración. Notemos que, al considerar la topología discreta

$R_{\mathcal{D}}$, decir que Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua equivale a que dado un entorno U de 0 en X exista $\tilde{W}$ entorno de 0 en $(X\times R)_{\tau}$ tal que

$$\pi(y,t) - \hat{x} \in U$$

si $(\pi(y,t),-t) \ominus (\hat{x},-t) \in \tilde{W}$, $y \in D$ y $\hat{x} \in \gamma(x)$.

Siguiendo nuevamente un razonamianto análogo al del teorema 2.5., supuesta Q uniformemete $(\hat{H},\hat{D})$-cpntinua y dado U, existe W tal que

$$(\pi(y,t),-t) \ominus (\pi(\hat{x},t),-t) \in \tilde{W}$$

si $y-\hat{x} \in W$ y ahora $\pi(y,t) - \pi(\hat{x},t) \in U$ con lo cual $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente estable-Lyapunov respecto a D.

Recíprocamente, si la moción $\pi(x,\cdot)$ tiene esta propiedad, dado U existe W tal que

$$\pi(y,t) - \pi(\hat{x},t) \in U$$

si $y \in D$, $\hat{x} \in \gamma(x)$ y $\hat{x} - y \in W$. Considerando W definido por la seminorma p y el número reál $\varepsilon > 0$, y tomando el entorno $\tilde{W}$ de 0 en $(X\times R)_{\tau}$ dado por

$$\tilde{W} = \{ (x,t) \in X\times R : p\circ\pi(x,t) < \varepsilon \}$$

tenemos que

$$y - \pi(x,-t) \in W$$

si $(\pi(y,t),-t) \ominus (\hat{x},-t) \in \tilde{W}$. Por el carácter estable-Lyapunov uniforme de la moción resulta

$$\pi(y,t) - \hat{x} \in U$$

y así la aplicación Q es uniformemente $(\hat{H},\hat{D})$-continua.

Analogamente se prueba el teorema para una moción positivamante uniformemente estable-Lyapunov y para una moción negativamente uniformemente estable-Lyapunov.

Cabiando los conjuntos sobre los que se define la continuidad uniforme, pueden caracterizarse las mociones estables-Lyapunov no uniformemente en el espacio $(X\times R)_{\tau}\times R$. En este caso no hay que exigir la compacidad de la moción.

Teorema 2.8. Sean Q y $\hat{D}$ como en el teorema 2.5. y los conjuntos

$$\hat{J} = \{(\pi(x,t),-t,-t) : t\in R\}$$
$$\hat{J}^+ = \{(\pi(x,t),-t-t) : t\geq 0\}$$
$$\hat{J}^- = \{(\pi(x,t),-t,-t) : t\leq 0\}$$

La condición necesaria y suficiente para que la moción $\pi(x,\cdot)$ sea estable-Lyapunov (resp: Positivamente estable-LYapunov, negativamente estable-Lyapunov) respecto a D es que Q sea uniformemente $(\hat{J},\hat{D})$-continua (resp.: uniformemente $(\hat{J}^+,\hat{D})$-continua, uniformemente $(\hat{J}^-,\hat{D})$-continua)

Demostración. Supongamos la moción $\pi(x,\cdot)$ estable-Lyapunov. Entonces dado U existe W tal que

$$\pi(x,t) - \pi(y,t)\in U$$

si $y-x\in W$. Como en el teorema 2.7., consideramos W dado por la seminorma p y el número real $\varepsilon > 0$, y $\tilde{W}$ entorno de 0 en $(X\times R)_\tau$ dado por $p\circ\pi$ y ε. Consideramos entonces los entornos de 0, $\tilde{W}/2$ y $W/2$ en $(X\times R)_\tau$ y X respectivamente. Por la continuidad del flujo π en X existe $\delta > 0$ tal que

$$\pi(x,t) - x\in W/2$$

si $|t|<\delta$. Sea ahora $(\pi(x,t),-t) \ominus (\pi(y,t'),-t')\in \tilde{W}/2$ con $|t-t'|<\delta$. Se tiene entonces que $x-y\in W/2$ y que $\pi(x,t-t')-x\in$ $\in W/2$ con lo cual

$$\pi(x,t-t') - y\in W$$

y por consiguiente

$$\pi(x,t) - \pi(y,t')\in V$$

y por lo tanto Q es uniformemente $(\hat{J},\hat{D})$-continua.

Recíprocamente, si Q es uniformemente $(\hat{J},\hat{D})$-continua dado U existe $\tilde{W}$ tal que

$$\pi(x,t) - \pi(y,t)\in U$$

siempre que $(\pi(x,t),-t) \ominus (\pi(y,t),-t)$ pertenezca a $\tilde{W}$ con $y\in D$, lo cual sucede si $y-x\in W$ y así $\pi(x,\cdot)$ es estable-Lyapunov.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

De manera similar se demuestra el teorema para mociones positivamente estables-Lyapunov y para mociones negativamente estables-Lyapunov.

3. FLUJO EQUICONTINUO.

La aplicación Q de la sección anterior nos permite caracterizar aún algunos otros conceptos usuales en Dinámica Topológica. Antes de pasar a dar estos teoremas, recordamos algunas definiciones y proposiciones que posteriormente necesitaremos.

Definición 3.1. Si E es un conjunto invariante para un flujo π definido sobre un espacio uniforme X, decimos que π es equicontinuo sobre E (resp.: Positivamente equicontinuo, negativamente equicontinuo) si la familia de aplicaciones $\{\pi_t : t\in R\}$ (resp.: $\{\pi_t : t\geq 0\}$, $\{\pi_t : t\leq 0\}$) de E en E es uniformemente equicontinua sobre E .

Definición 3.2. Un conjunto $A\subset R$ es relativamente denso en R si existe un número real $l>0$ tal que

$$A\cap(t-l/2,t+l/2)\neq\emptyset$$

para todo t de R .

Una función f de R en un e.v.t. X es casi-periódica (a.p.) si para todo entorno V de 0 en X , el conjunto

$$\{\tau\in R : f(t+\tau) - f(t)\in V\}$$

es relativamente denso en R .

Definición 3.3. Una moción $\pi(x,\cdot)$ es casi-periódica (a.p.) si la aplicación $\pi(x,\cdot) : R\longrightarrow X$ es casi-periódica.

Un punto $x\in X$ es casi-periódico si la moción $\pi(x,\cdot)$ es casi-periódica.

Definición 3.4. Un conjunto E es casi periódico mínimo (a.p. mínimo) si es compacto mínimo y $E=H(x)=\overline{\gamma(x)}$ donde x es un punto casi-periódico.

Definición 3.5. Una moción $\pi(x,\cdot)$ es recurrente si está definida para todo t, y para todo entorno W de 0 el conjunto

$$\{\tau\in R : \pi(x,\tau)\in x+W\}$$

es relativamente denso en R.

La relación entre conjunto a.p. mínimo y flujo equicontinuo viene dada por la siguiente proposición cuya demostración puede encontrarse en ([25], pag. 96).

Proposición 3.6. Sea E un conjunto compacto mínimo. El conjunto E es a.p. mínimo si y sólo si el flujo π es equicontinuo sobre E.

Daremos a continuación una condición equivalente a la equicontinuidad de un flujo π sobre un conjunto invariante compacto E, lo cual nos permitirá caracterizar un conjunto casi-periódico mínimo mediante la continuidad de la aplicación Q.

Teorema 3.7. Sea E compacto e invariante para un flujo π. Formamos el conjunto

$$\hat{E} = \{(y,t,t) \quad \forall y\in E, \ \forall t\in R\}$$

y sus correspondientes para R^+ y R^-

$$\hat{E}^- = \{(y,t,t) \quad \forall y\in E, \ \forall t\in R^-\}$$
$$\hat{E}^+ = \{(y,t,t) \quad \forall y\in E, \ \forall t\in R^-\}.$$

Un flujo π es equicontinuo (resp.: Positivamente equicontinuo, negativamente equicontinuo) en E si y sólo si la aplicación $Q:(X\times R)_\tau \times R \longrightarrow X$ dada por

$$Q(x,t,t)=x \qquad (1)$$

es uniformemente continua en $\hat{E}$ (resp.: Uniformemente continua en $\hat{E}^+$, uniformemente continua en $\hat{E}^-$).

Demostración. Si Q es uniformemente continua en $\hat{E}$, dado V entorno de 0 en X existen $\tilde{V}$ entorno de 0 en $(X\times R)_\tau$ y $\delta>0$ tal que

$$x - y\in U$$

si $(x,t)\ominus(y,t')\in\tilde{V}$ y $|t-t'|<\delta$. Tomando entonces el entor-

no W correspondiente a $\tilde{W}$, si $x-y\in W$ se tiene

$$(\pi(x,t),-t)\ominus(\pi(y,t),-t)\in\tilde{W}$$

para todo $t\in R$. De la continuidad uniforme de Q se deduce

$$\pi(x,t)-\pi(y,t)\in U$$

y por tanto π es equicontinuo sobre E.

Recíprocamente, si π es equicontinuo sobre $\hat{E}$, dado U existe W tal que

$$\pi(x,t)-\pi(y,t)\in U$$

para todo $t\in R$ si $x-y\in W$. De ser E compacto y de ser π continua en E dado W existe $\delta\in[0,1]$ tal que

$$\pi(x,t-t')-x\in W/2$$

para todo x de E si $|t-t'|<\delta$ pues π es uniformemente continua en $E\times[-1,1]$. Considerando el entorno $\tilde{W}/2$ de 0 en $(X*R)_{\tau}$ correspondiente a $W/2$ y supuesto $(x,t)\ominus(y,t')\in\tilde{W}/2$ con $|t-t'|<\delta$ se tiene

$$\pi(x,t)-\pi(y,t')\in W/2$$

con lo cual $\pi(x,t-t+t')-\pi(y,t')\in W$ y así $x-y\in V$ por la equicontinuidad de π.

De manera similar se demuestra el teorema para el caso en que π sea positiva o negativamente equicontinuo.

Nota. Otra caracterización similar para E no compacto puede hacerse definiendo Q en el espacio $(X*R)_{\tau}\times R_{\mathcal{D}}$ como en el teorema 2.7.

Como aplicación práctica de este teorema se obtiene una nueva demostración para un resultado conocido de Dinámica Topológica.

<u>Corolario 3.8.</u> Una moción $\pi(x,\cdot)$ es uniformemente Lyapunov-estable respecto a $\gamma(x)$ si y sólo si el flujo es equicontinuo sobre $\gamma(x)$.

Demostración. Si $\pi(x,\cdot)$ es compacta el resultado puede obtenerse del teorema 3.7. y de la nota 2 del teorema 2.5. Si no es compacta se obtendría igualmente usando teoremas similares al 2.5. y al 3.7. con la topología $R_{\mathcal{D}}$.

A través del teorema 3.7. puede ser hecha también la caracterización de un conjunto a.p. mínimo.

Teorema 3.9. Sea E un conjunto compacto mínimo. El conjunto E es a.p. mínimo si y sólo si la aplicación Q es uniformemente continua en E.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición 3.6. y del teorema 3.7.

Para caracterizar una moción casi periódica vamos a necesitar el siguiente lema que relaciona moción casi periódica, moción recurrente y moción uniformemente positivamente estable- Lyapunov. Fue dado por A.A. MARKOV [16] para espacios métricos.

Lema 3.10. Una moción compacta $\pi(x,\cdot)$ es casi periódica si y solo si es recurrente y uniformemente positivamente Lyapunov--estable respecto a $\gamma(x)$.

Demostración. De la definición de moción recurrente y moción casi periódica se obtiene que toda moción casi periódica es recurrente. Por otra parte, de la proposición 3.6. se obtiene que el flujo π es equicontinuo sobre $H(x)=\overline{\gamma(x)}$, pues al ser $\pi(x,\cdot)$ compacta el conjunto $H(x)$ es a.p. mínimo. Entonces el flujo es equicontinuo sobre $\gamma(x)$ y por el corolario 3.8. es uniformemente Lyapunov-estable respecto a $\gamma(x)$.

Recíprocamente, sea W entorno de 0 en X. Por la estabilidad-Lyapunov positiva existe V tal que

$$\pi(x,t) - \pi(y,t) \in W/2$$

si $x-y \in V$, $y \in \gamma(x)$, $t \geq 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{ \tau \in R : \pi(x,\tau) - x \in V/2 \}$$

que por ser $\pi(x,\cdot)$ recurrente es relativamente denso. Demostraremos que si $\tau \in A$ se tiene

$$\pi(x,t+\tau) - \pi(x,t) \in W \qquad t \in R$$

con lo cual el conjunto

$$\{ \tau \in R : \pi(x,t+\tau) - \pi(x,t) \in W \}$$

es relativamente denso. Si $\tau \in A$, por la continuidad de π existe U tal que

$$\pi(x,\tau) - \pi(y,\tau) \in V/2$$

si $x-y \in U$. Sea $t \in R$, por la recurrencia de la moción existe $\sigma_0 < t$ tal que

$$\pi(x,\sigma_0) - x \in U \cap V \qquad (1)$$

con lo cual se obtiene

$$\pi(x,\sigma_0+\tau) - \pi(x,\tau) \in V/2$$

y por consiguiente

$$\pi(x,\sigma_0+\tau) - x \in V \qquad (2)$$

Aplicando la estabilidad-Lyapunov positiva de $\pi(x,\cdot)$ para $t-\sigma_0 > 0$ se obtiene de (1)

$$\pi(x,t) - \pi(x,t-\sigma_0) \in W/2$$

y de (2)

$$\pi(x,t+\tau) - \pi(x,t-\sigma_0) \in W/2$$

con lo cual $\pi(x,t) - \pi(x,t+\tau) \in W$ y termina la demostración.

<u>Teorema 3.11.</u> Una moción compacta $\pi(x,\cdot)$ es casi periódica si y sólo si es recurrente y la función $Q: (X*R)_\tau \times X \longrightarrow X$ es uniformemente continua en el conjunto $\hat{H}^+$ definido por

$$\hat{H}^+ = \{(y,t,t) : y \in \gamma(x) , t \geq 0\}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema 2.10, y de la nota 3 del teorema 2.6.

CAPITULO V

EJEMPLOS DE SISTEMAS DINAMICOS SOBRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

1. INTRODUCCION.

Hacemos en este capítulo una exposición de ejemplos de sistemas dinámicos en los que pueden aplicarse los resultados de los capítulos anteriores, por estar dotados los espacios fases de estructura de e.v.t.l.c.

En la sección 1 mostramos que las traslaciones en el espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ ([23] pág. 46) generan un flujo continuo sobre un e.v.t.l.c. La continuidad del flujo está estudiada en [23] y nuestra aportación consiste en demostrar que el espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ definido en [23] con la topología *-débil es e.v.t.l.c. mostrando que su topología es la inicial de una familia de aplicaciones lineales.

En la sección 3 se construye un sistema dinámico global a partir de una ecuación diferencial autónoma en un espacio de Banach. Diversas construcciones son posibles según las condiciones que exijamos a la ecuación. Damos en este caso una muestra de éstas para unas restricciones específicas. El teorema 3.3. en el cual

se construye el flujo es consecuencia inmediata de resultados clásicos de ecuaciones diferenciales en Banach.

Para una ecuación diferencial no autónoma en R^n el problema de construir un flujo continuo tiene unas características muy distintas. Se puede hacer tomando un espacio fase de una dimensión mayor a la de R^n. Así está hecho en [1], [18] con escasos resultados prácticos. Otra forma de abordar el problema fue dada por Sell [24] usando la técnica de las ecuaciones límites, obteniendo una sistematización y ampliación de los resultados existentes (de MILLER [17] y SEIFERT [22] por ejemplo) a los que se había llegado utilizando diversos métodos de Dinámica Topológica. En la sección 4 hemos construido un sistema dinámico local para ecuaciones diferenciales no autónomas en un Banach siguiendo la técnica de las ecuaciones límites indicada por SELL. El problema fundamental de esta sección consiste en obtener la continuidad del flujo imponiendo el mínimo de hipótesis restrictivas a la función f de la ecuación. El camino que se sigue en R^n es utilizar el lema de KAMKE que asegura dependencia continua de los valores iniciales y parámetros (Dependencia del lado derecho de la ecuación diferencial [15]). Sin embargo los teoremas clásicos en Banach no dan un resultado tan fuerte como este lema de KAMKE [4], [10], [20], [8]. Para resolver este problema hemos demostrado en el lema 4.5. un resultado similar en Banach al lema de KAMKE en R^n, procediendo directamente e imponiendo muy pocas condiciones restrictivas a f. Este resultado, apoyado en teoremas clásicos y elaborando a partir de ellos una demostración completamente original creemos que es el más importante de nuestra tesis. El teorema 4.3., consecuencia del lema 4.5. construye un flujo local sobre el Banach, con lo cual pueden extenderse a estos espacios resultados de estabilidad de soluciones y existencia de soluciones periódicas o casi periódicas, problemas de gran actualidad.

Hemos omitido en esta exposición de ejemplos el sistema dinámico local o global formado con las soluciones de una ecuación diferencial autónoma en R^n por ser tópico en todos los textos [18], [1] sobre el tema. Así mismo omitimos el siste-

ma dinámico formado a partir de una ecuación diferencial no autónoma en R^n que puede encontrarse en [23]. Otro ejemplo de sistema dinámico sobre un e.v.t.l.c. no normado lo constituye el "Sistema Dinámico de Pebutov Generalizado" presentado por nosotros a las I Jornadas Matemáticas de Teoría de Control [11].

2. EL ESPACIO $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$.

Mostramos un primer ejemplo de sistema dinámico sobre un e.v.t.l.c.. La definición del espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$, la definición de la topología *-débil y la construcción del flujo continuo están tomadas de [23]. Hemos demostrado nosotros que este espacio uniforme es un e.v.t.l.c..

<u>Definición 2.1.</u> Llamamos $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ al espacio vectorial formado por todas las funciones medibles f definidas sobre R con valores en R^n , tales que para todo compacto I de R pertenezcan al espacio de Lebesgue $L_\infty(I,R^n)$, esto es,

$$\text{sup. esencial } \{ f(\theta) : \theta \in I \} < +\infty .$$

Dotamos este conjunto de una topología de la siguiente forma : Una sucesión generalizada $\{f^\alpha\}$ ($\alpha \in A$, conjunto dirigido) converge a una función f en la topología *-débil si para todo intervalo compacto $I \subset R$ y todo $x(\cdot)$ en $L_1(I,R^n)$ se tiene

$$\int_I |f^\alpha(\theta)-f(\theta)|\, x(\theta)\, d\theta \longrightarrow 0 .$$

El siguiente teorema está demostrado en [23].

<u>Teorema 2.2.</u> El espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ con la topología *-débil es un espacio uniforme. La aplicación $\pi(f,t)=f_t$ de $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)\times R$ en $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ es un flujo continuo sobre este espacio.

Nota. Está justificado el tomar $x(\cdot)\in L_1(I,R^n)$ en la definición 2.2. por ser $L_\infty(I,R^n)$ el dual topológico de $L_1(I,R^n)$.

<u>Teorema 2.3.</u> El espacio $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ con la topología *-débil es un e.v.t.l.c.

Demostración. Bastará probar que la topología *-débil de $\mathcal{L}_\infty(R,R^n)$ es una topología inicial. Por la dualidad existente entre $L_1(I,R^n)$ y $L_\infty(I,R^n)$ se puede definir la topología siguiente: La sucesión $\{f^\alpha\}$ converge a f en $L_\infty(I,R^n)$ si para todo $x(\cdot)\in L_1(I,R^n)$ se verifica

$$\int_I |f^\alpha(\theta)-f(\theta)|\, x(\theta)\, d\theta \longrightarrow 0$$

Esta topología procedente de la paridad $(L_\infty(I,R^n),L_1(I,R^n))$ hace de $L_\infty(I,R^n)$ un e.v.t.l.c. ([14],pág.185) (Nótese que esta topología no es la débil por dualidad de $L_\infty(I,R^n)$, pues su dual no es $L_1(I,R^n)$). Sean entonces las aplicaciones

$$\pi_I : \mathcal{L}_\infty(R,R^n) \longrightarrow L_\infty(I,R^n)$$

definidas por

$$\pi_I(f) = f|_I$$

y sea ξ la topología menos fina que hace continuas las π_I. Entonces ξ es una topología de e.v.t.l.c. [14],[5].

Demostraremos en primer lugar que $f^\alpha \longrightarrow f$ en ξ si converge en la topología *-débil. Un entorno V arbitrario de ξ será la intersección finita de imágenes inversas por π_I de entornos de 0 en $L_\infty(I,R^n)$ dotado de la topología antes definida, o sea

$$V = \bigcap_{k=1}^{m} \pi_{I_k}^{-1}(V_k)$$

donde V_k son entornos de 0 en $L_\infty(I_k,R^n)$. Si $f^\alpha \longrightarrow f$ en la topología *-débil se verifica

$$\int_I |f^\alpha(\theta)-f(\theta)|\, x(\theta)\, d\theta \longrightarrow 0$$

para todo I intervalo compacto de R y $x(\cdot)\in L_1(I,R^n)$. Entonces

$$\{f^\alpha_{|_I}\} \longrightarrow f_{|_I}$$

en la topología $\sigma(L_\infty(I,R^n),L^1(I,R^n))$ y así

$$(f^\alpha - f)|_{I_k} \in V_k$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$ $(k=1,\ldots,m)$. De aquí $f^\alpha - f \in V$ y por tanto $f^\alpha \longrightarrow f$ en ξ. El recíproco es trivial pues si $\{f^\alpha\} \longrightarrow f$ en ξ entonces $\{\pi_i \circ f^\alpha\} \longrightarrow \{\pi_i \circ f\}$ en cualquier $L_\infty(I,R^n)$.

Nota. Puede demostrarse además que la topología *-débil es límite proyectivo ([14],pág.155) de las topologías $\sigma(L_\infty(I,R^n), ,L_1(I,R^n))$.

3.SISTEMA DINAMICO GLOBAL PARA ECUACIONES DIFERENCIALES AUTONOMAS EN BANACH.

Construimos en esta sección un flujo global sobre un espacio de Banach a partir de las soluciones de una ecuación diferencial autónoma utilizando teoremas clásicos de existencia, unicidad y dependencia continua para estas ecuaciones en espacios de Banach. Supondremos en esta sección que Ω es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X y $f \in C(\Omega,\Omega)$ (función continua de Ω en Ω). Consideraremos la ecuación diferencial autónoma

$$x' = f(x) \qquad (i) \quad .$$

Según las condiciones restrictivas que se impongan a la función f se pueden aplicar distintos teoremas clásicos para construir el flujo continuo. Damos una muestra de ello, utilizando resultados de [10],[4],[20] adaptados a la ecuación (i).

<u>Lema 3.1.</u> ([10],pág287). Sea f localmente lipschitziana en $\Omega \times R$. Entonces para cada punto $(a,b) \in \Omega \times R$ se verifica:

(1) Existe una bola abierta $J \subset R$ de centro a y una bola abierta $V \subset \Omega$ de centro b tal que para cada punto $(t_0,x_0) \in J \times V$ existe una única solución $t \longrightarrow \Phi(t,t_0,x_0)$ de (i) definida en J que toma sus valores en V y tal que $u(t_0,t_0,x_0)=x_0$.

(2) La aplicación $(t,t_0,x_0) \longrightarrow \Phi(t,t_0,x_0)$ es uniformemente continua en $J \times J \times V$.

<u>Lema 3.2.</u> ([20],pág.760) Consideremos la ecuación diferencial

(i) y supongamos que f tiene las dos propiedades siguientes:

(a) f está definida sobre $X \times [a,b]$ y se tiene la acotación:

$$\| f(x,t) \| = \mu \| x - A \| + \nu$$

dónde μ y ν son constantes mayores que 0 y A un origen elegido en X.

(b) Cualquiera que sea el número $\rho > 0$ existe un número $k = k(\rho)$ tal que cuando t varía en $[a,b]$ y cuando x_1, x_2 varían en la bola $B(A,\rho)$ se tiene la condición de Lipschitz

$$\| f(x_1,t) - f(x_2,t) \| \leq k \| x_1 - x_2 \| .$$

Entonces para toda condición inicial (x_o, y_o) la ecuación diferencial admite una única solución definida sobre todo el intervalo $[a,b]$.

Nota (de [20]). Como el intervalo $[a,b]$ es arbitrario el teorema puede extenderse al caso $(a,b) = R$.

A partir de estos lemas construimos a continuación un sistema dinámico global en Ω según el modelo tradicional [1] para R^n.

<u>Teorema 3.3.</u> Sea X un espacio de Banach, Ω un subconjunto abierto de X, f una función continua de Ω en Ω que verifica las condiciones (a) y (b). Entonces para cada $x \in \Omega$ existe una única solución $\Phi(0,t,x)$ de (i) tal que $\Phi(0,0,x) = x$ y la aplicación $\pi : \Omega \times R \longrightarrow \Omega$ dada por

$$\pi(x,t) = \Phi(o,t,x)$$

define un flujo global sobre Ω.

Demostración. Las propiedades de identidad y grupo se demuestran siguiendo un razonamiento standard. La existencia de solución y continuidad del flujo son consecuencias de los lemas 3.1 y 3.2 cuyas hipótesis se verifican por imponer a f las restricciones (a) y (b).

4. SISTEMA DINAMICO LOCAL PARA ECUACIONES DIFERENCIALES NO AUTONOMAS EN BANACH.

En lo que sigue X representará un espacio de Banach y Ω un subconjunto abierto de X. En esta sección desempeñará un papel muy importante el conjunto $\mathcal{A}$ de funciones continuas y acotadas de $\Omega \times R$ en Ω para las cuales la ecuación diferencial

$$x' = f(x,t) \qquad (i)$$

tiene solución única para el problema de valores iniciales $\Phi(0) = x$. Este conjunto puede ser dotado de varias topologías, de todas las cuales, la más importante cuando el estudio se desarrolla en R^n, es la de la convergencia uniforme en conjuntos compactos. Sin embargo, al pasar a espacios de Banach, por no ser éstos, en general, localmente compactos, esta topología pierde interés y debe ser reemplazada por la más fuerte de la convergencia uniforme en acotados. Las dificultades que surgirán al pretender que las soluciones dependan continuamente del lado derecho de la ecuación diferencial (i) son las que nos han obligado a restringirnos a las funciones de $\mathcal{A}$.

En este conjunto consideramos la topología de la convergencia uniforme sobre acotados. Aún cuando el espacio $C(\Omega \times R, \Omega)$ no es metrizable con esta topología, sí lo es, en cambio, el subespacio $\mathcal{A}$ como a continuación veremos. Para construir la métrica σ sobre $\mathcal{A}$ que genere la topología de la convergencia uniforme en acotados, consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos siguientes:

$$B_n = \{x \in \Omega : \|x\| > n\}$$

$$I_n = (-n,n)$$

y definimos entonces las siguientes funciones de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en R^+:

$$\sigma_n(f,g) = \sup_{(x,t) \in B_n \times I_n} \{\|f(x,t) - g(x,t)\|\}$$

$$\rho_n(f,g) = \min(\sigma_n(f,g),1)$$
$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(f,g)/2^n \qquad \text{(ii)}$$

<u>Teorema 4.1.</u> La función $\rho: \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to R^+$ definida en (ii) es una distancia y la topología métrica asociada es la de la convergencia uniforme en acotados de Ω.

Demostración. De la construcción de ρ se obtienen fácilmente las siguientes propiedades: Para todo $f,g,h\in\mathcal{A}$

(1) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ (simetría)
(2) $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$ (triangular)
(3) $\rho(f,f) = 0$

Así ρ es una seudométrica. Además si $\rho(f,g)=0$ se tiene para todo $n\in N$ que $\rho_n(f,g)=0$, o sea $\sigma_n(f,g)=0$ y tomando entonces x arbitrario de Ω y siendo $n>\|x\|$ se tiene $f(x)=g(x)$. Completamos de esta forma la primera parte del teorema.

Sea ahora $\{f^k\}$ una sucesión generalizada que converge uniformemente en acotados a f, entonces para cada $n\in N$ se tiene $f^k\to f$ uniformemente en $(\Omega\cap B_n)\times I_n$. Demostraremos que dado $\varepsilon>0$ existe K tal que si $k>K$ se tiene

$$\rho(f^k,f) < \varepsilon$$

con lo cual $f^k\to f$ en la métrica de ρ.

Dado $\varepsilon>0$ tomamos N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2 .$$

Para cada $n\leq N$ obtenemos de la convergencia uniforme de $\{f^k\}$ en $B_n\times I_n$ que existe K tal que si $k>K$ se tiene $\sigma_n(f^k,f)\leq \varepsilon/2$ $n=1,\dots,N$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N} \rho_n(f^k,f)/2^n = (\varepsilon/2)\sum_{n=1}^{N} 1/2^n < \varepsilon/2$$

y así para todo $k>K$ se tiene

$$\rho(f^k,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(f^k,f)/2^n = \sum_{n=1}^{N} \rho_n(f^k,f)/2^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho_n(f^k,f)/2^n <$$

$< \varepsilon$.

Recíprocamente, si $f^k \to f$ según la métrica ρ, sea $B \times I$ un acotado de $\Omega \times R$. Veamos que $f^k \to f$ uniformemente en $B \times I$. Como éste es acotado existe N tal que $B \times I \subset B_N \times I_N$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, existe K tal que

$$\rho(f^k, f) < \varepsilon / 2^N , \qquad \text{si} \quad k > K .$$

Se tiene ahora

$$\rho_N(f^k, f) < \rho(f^k, f) 2^N < \varepsilon$$

si $k > K$, y como $\varepsilon < 1$ entonces $\sigma_N(f^k, f) < \varepsilon$. En consecuencia

$$\sup_{(x,t) \in B \times I} \| f(x,t) - f^k(x,t) \| \leq \sup_{(x,t)\ B_N \times I_N} \| f(x,t) - f^k(x,t) \| =$$

$$= \sigma_N(f, f^k) < \varepsilon \quad .$$

Así ambas topologías son equivalentes y concluye la demostración del teorema.

Para obtener condiciones que nos garanticen la existencia de solución única, dependencia continua respecto a los valores iniciales y respecto al segundo miembro de (i) y para conseguir la continuidad del flujo en la topología que usamos, necesitamos imponer a las funciones de $\mathcal{A}$ algunas otras restricciones. Representaremos por $H(f)$ el cierre del conjunto

$$\{ f_\tau : \tau \in R \}$$

en la topología de $\mathcal{A}$, donde f_τ es la función de $\Omega \times R$ en Ω definida por

$$f_\tau(x,t) = f(x, t+\tau)$$

(Nótese que $f_\tau \in \mathcal{A}$ si $f \in \mathcal{A}$).

Tomamos entonces el subconjunto $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ formado por las funciones que verifican:

(A) Si $x \in \Omega$ existe un entorno V de x y una constante k que depende sólo de x , tal que para todo y de V y para todo t de R se tiene

$$\| f(x,t) - f(y,t) \| \leq k \| x-y \|$$

(B) Para toda $f \in \mathcal{A}'$ la aplicación $t \to g_t$ donde $g \in H(f)$ de R en $H(f)$ es continua.

Una condición suficiente para que f pertenezca a $\mathcal{A}'$ es que verifique (A) y la siguiente

(B') Si $t \in R$ existe un entorno $E(t)$ de t y una constante k que depende sólo de t, tal que para todo $y \in \Omega$ y para todo $t' \in E(t)$ se tiene

$$\| g(x,t) - g(x,t') \| \leq k|t-t'|$$

donde $g \in H(f)$.

Nota. Es obvio que si f verifica (A) y (B) igual sucede a cada función $g \in H(f)$, por tanto si $f \in \mathcal{A}'$ entonces $H(f) \subset \mathcal{A}'$.

A continuación demostraremos que toda función f que verifique (A) y (B') pertenece a $\mathcal{A}'$.

<u>Lema 4.2</u> Sea $\{\tau_n\}$ una sucesión de puntos de R que converge a τ y sea f verificando (A) y (B'). Entonces $f_{\tau_n} \to f_\tau$ uniformemente sobre acotados de $\Omega \times R$ y por tanto la aplicación $t \to f_t$ es continua de R en $H(f)$.

Demostración. Sea $A \times I$ un subconjunto acotado de $\Omega \times R$. Dado $\delta > 0$ existe n_o tal que $|\tau_n - \tau| < \delta$ para $n > n_o$, por lo tanto $\tau_n + t \in I + (\tau - \delta, \tau + \delta)$ siempre que t pertenezca a I y así $\tau_n + t$ está contenido en otro acotado I' de R que supondremos además compacto. Aplicando la condición (B') obtenemos ahora

$$\| f_{\tau_n}(x,t) - f_\tau(x,t) \| = \| f(x,t+\tau_n) - f(x,t+\tau) \| < k(t) |\tau_n - \tau|$$

para $t \in I$, $x \in A$.

Para que la constante k sea independiente de t, necesitamos utilizar la compacidad y ordenación de I'. Para cada $r \in I'$ hay un intervalo $I_r = (r-\alpha, r+\alpha)$ en el cual se verifica la condición (B'), o sea

$$\| f(x,r) - f(x,r') \| < k(r) \; |r-r'| \qquad \text{si } r' \in I_r$$

Al recorrer r el intervalo I' se obtiene un recubrimiento

abierto de éste que admite un subrecubrimiento finito $I_{r_1},\dots,I_{r_n}$ donde suponemos que $r_1\leq r_2\leq\dots\leq r_n$ y que no hay ningún subrecubrimiento de éste. Demostraremos que si es

$$k = (n+1)\text{máx.}(k(r_1),\dots,k(r_n))$$

entonces para cualesquiera $t,t'\in I'$ se verifica

$$\|f(x,t) - f(x,t')\| \leq k|t-t'| .$$

Supongamos $r_i\leq t<r_{i+1}$ y $r_j\leq t'<r_{j+1}$ con $i\leq j$, $t<t'$;eligiendo entonces $n-1$ puntos arbitrarios $h_1,\dots,h_{n-1}$ tales que $h_i\in \in I_{r_i}\cap I_{r_{i+1}}$ se puede hacer una partición de $[t,t']$ en los subintervalos $[t,h_{i-1}],[h_{i-1},h_i],\dots,[h_{j-2},h_{j-1}],[h_{j-1},t']$ supuesto $t\leq h_{i-1}$ y $h_{j-1}\leq t'$. Aplicando (B') en cada intervalo se obtiene ahora para cada $x\in\Omega$

$$\|f(x,t)-f(x,t')\| \leq (\sum_{k=i}^{j-1} \|f(x,h_k)-f(x,h_{k-1})\|) + \|f(x,h_{i-1})-f(x,t)\|+$$
$$+\|f(x,t')-f(x,h_{j-1})\| \leq k\left[\sum_{k=i}^{j-1} (h_k-h_{k-1}) + (t'-h_{j-1}) + (h_{i-1}-t)\right]=$$
$$= k|t-t'|$$

donde k solo depende de I' y no de t . Entonces dado $\varepsilon>0$ existe n_o tal que si $n>n_o$ se verifica

$$\|f_{\tau_n}(x,t)-f_\tau(x,t)\| < k|\tau_n-\tau|$$

para todo $(x,t)\in A\times I$,o sea , $f_{\tau_n}\longrightarrow f_\tau$ uniformemente en acotado y por tanto $t\to f_t$ es una función continua.

Una vez determinado el conjunto $\mathcal{A}'$ podemos construir un sistema dinámico a partir de las soluciones de la ecuación (i).

<u>Teorema 4.3.</u> Sea $f\in\mathcal{A}'$ .Definimos la aplicación $\pi:\Omega\times H(f)\to$ $\to\Omega$ de la siguiente forma:

$$\pi(x,g,t) = (\Phi(x,g,t),g_t) \qquad \text{(iii)}$$

donde $g\in H(f)$ y $\Phi(x,g,t)$ es la solución de (i) que verifica $\Phi(x,g,0)=x$. Entonces π define un flujo local en $\Omega\times H(f)$.

Demostración. La propiedad de identidad se demuestra fácilmente, la propiedad de grupo puede hacerse como en [23] ,[24] y la maximalidad del intervalo es consecuencia del siguiente lema tomado de [4] .

Lema 4.4. Sea $I \subset R$ un intervalo no reducido a un punto, de origen $t_o \in I$, Ω una parte abierta no vacía de X , g una función localmente lipschitciana en $I \times \Omega$. Entonces:

(a) Para todo $x_o \in \Omega$ existe un intervalo máximo $J \subset I$ de origen t_o en el cual existe una integral de la ecuación (i) tomando sus valores en Ω e igual a x_o en el punto t_o ; esta integral es única.

(b) Si $J \neq I$, J es un intervalo semiabierto $[t_o, \beta)$ de longitud finita ; además para toda parte compacta $K \subset \Omega$ $\Phi^{-1}(K)$ es una parte compacta de R .

Aplicando el lema 4.4. al caso $t_o = 0$, $I = [0, \infty)$ se tiene que si $J \neq I$ es de la forma $[t_o, \beta)$ y el conjunto

$$A = \{ \Phi(x,g,t) : t \in [0,\beta) \}$$

no es relativamente compacto, pues si lo fuera, el cierre de A en Ω sería un subconjunto compacto de Ω , pero entonces para $\bar{A}$ se tendría

$$\Phi^{-1}(\bar{A}) = [0,\beta)$$

ya que J es el intervalo máximo de definición, y éste no es compacto de R , en contradicción con el lema.

La aplicación $(x,g,t) \to (\Phi(x,g,t), g_t)$ es continua si lo son las dos aplicaciones $(x,g,t) \to \Phi(x,g,t)$ y $(x,g,t) \to g_t$. La segunda es continua por la construcción de $\mathcal{A}'$. Para demostrar la continuidad de la primera necesitamos generalizar a espacios de Banach un lema similar al de KAMKE .

Lema 4.5. Sea X un espacio de Banach, Ω un subconjunto abierto de X , $\mathcal{A}'$ y $H(f)$ los espacios métricos de funciones de $\Omega \times R$ en R definidos anteriormente. Sea $\{f^n\}$ una sucesión de funciones de $H(f)$ que converge a una función g de $H(f)$, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de Ω que converge a un pun-

to x de ,y $_n$ una sucesión puntos de R, que converge a un punto τ de $I_{(x,g)}$. Entonces, a partir de un cierto n se verifica

$$\tau_n \in I(x_n, f^n)$$

y la sucesión $\Phi(x_n, f^n, \tau_n)$ converge a $\Phi(x,g,\tau)$. En consecuencia, la función $(x,g,t) \longrightarrow \Phi(x,g,t)$ es continua en el subconjunto de $\Omega x H(f) x R$ en que está definida.

Utilizaremos en la demostración el siguiente resultado de ([20], pág770).

<u>Lema 4.6.</u> Sean $\{f^n\}$ una sucesión de funciones continuas sobre $\Omega x R$ con valores en Ω, convergente hacia un límite g <u>localmente uniformemente</u>, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de Ω convergente hacia un punto x_o de Ω, $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de R convergente hacia un punto t_o de R. Supongamos que todo punto de R posee un entorno en el cual las f^n son lipschitcianas en x, con una constante de Lipschitz independiente de n. Entoces existe un intervalo J, entorno de t_o en R, una bola B de centro x_o y un entero p tales que para $n \geq p$ se tiene $t_n \in J$, $x_n \in B$ y que la ecuación

$$x' = f^n(x,t)$$

tiene una única solución $\Phi(x_n, f^n, t_n, t)$ definida en J, tomando sus valores en B tal que

$$\Phi(x_n, f^n, t_n, t_n) = x_n$$

y que cuando $n \to \infty$ $\Phi(x_n, f^n, t_n, t)$ converge uniformemente en J hacia un límite $\Phi(x_o, g, t_o, t)$ única solución de la ecuación diferencial

$$x' = g(x,t)$$

que verifica $\Phi(x_o, g, t_o, t_o) = x_o$.

Demostración del lema 4.5. Vamos a comprobar, en primer lugar, que la sucesión $\{f^n\}$ está en las condiciones de la hipótesis del lema 4.6. Como X es localmente acotado, si $\{f^n\} \to g$ en $\mathfrak{A}'$, la convergencia es uniforme en algún entorno acotado

de un punto arbitrario $x \in \Omega$. La segunda condición exigida es una condición de Lipschitz para las funciones f^n independiente de n . Si se tiene en cuenta que $f^n \in H(f)$, resultará que, para cada n , existe una sucesión τ_k^n tal que

$$\lim_{k \to \infty} f_{\tau_k^n} = f^n .$$

Según (A) tenemos que dado $x \in \Omega$ existe V entorno de x y un número real $k(x)$ tal que

$$\| f(x,t+\tau_k^n) - f(y,t+\tau_k^n) \| < k\|x-y\|$$

si $y \in V$, y $n,k \in N$.

Se tiene entonces

$$\| f_{\tau_k^n}(x,t) - f_{\tau_k^n}(y,t) \| < k\|x-y\|$$

y tomando límites

$$\| f_n(x,t) - f_n(y,t) \| < k\|x-y\|$$

donde k solo depende de x , con lo cual se verifica la condición de Lipschitz requerida.

Aplicando ahora el lema 4.6. a las sucesiones $\{f^n\}$, $\{x_n\}$ $\{t_n=0\}$ de $H(f)$, Ω y R respectivamente existe $\Phi(x,g,t)$ y $\Phi(x_n,f^n,t)$ en un intervalo J entorno de 0 y además $\Phi(x_n,f^n,t) \longrightarrow \Phi(x,g,t)$ uniformemente en este intervalo J . Así si $\tau \in J$ ya se tiene el resultado. Si $\tau \notin J$ hacemos la siguiente construcción:

Sea S el conjunto de todos los $t_o \in R^+$ tales que $\Phi(x,g,t)$ y $\Phi(x_n,f^n,t)$ a partir de cierto $n_o(t_o)$ existen en $[0,t_o]$ y además $\Phi(x_n,f^n,t) \longrightarrow \Phi(x,g,t)$ uniformemente en $[o,t_o]$. Si llamamos σ al supremo de S demostraremos que $\sigma > \tau$ .Una vez hecho esto se tendrá por la construcción de S que tomando $\sigma' \in (\tau,\sigma)$ la sucesión $\Phi(x_n,f^n,t)$ converge a $\Phi(x,g,t)$ en $[0,\sigma']$ con lo que, en particular, $\Phi(x_n,f^n,\tau_n)$ existirá a partir de n_o yconvergerá a $\Phi(x,g,\tau)$ concluyendo la demostración.

Supongamos $\sigma \leq \tau$, tendremos garantizada entonces la existencia de $\Phi(x,g,\sigma)$. Consideremos la sucesión $\{t_n = \sigma-1/n\}$ y la sucesión $\{y_n\}$ definida de la siguiente forma:

Como $t_1 < \sigma$ existe $n(t_1)$ tal que para todo $n \geq n(t_1)$ está definida $\Phi(x_n, f^n, t_1)$. Sea entonces

$$y_1 = \Phi(x_{n(t_1)}, f^{n(t_1)}, t_1)$$

Análogamente, dado t_k existe $n(t_k)$ tal que para todo $n \geq n(t_k)$ está definida $\Phi(x_n, f^n, t_k)$. Ponemos entonces

$$y_k = \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, t_k)$$

donde suponemos además que $n(t_k) \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

Demostraremos, en primer lugar que $y_k \to \Phi(x,g,\sigma)$. Para esto escribimos tomando $\sigma' < \sigma$

$$\|\Phi(x,g,\sigma) - \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, t^k)\| = \|\Phi(x,g,\sigma) - \Phi(x,g,\sigma')\| +$$
$$+ \|\Phi(x,g,\sigma') - \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, \sigma')\| + \|\Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, \sigma') -$$
$$- \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, t_k)\| .$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\Phi(x,g,\sigma) - \Phi(x,g,\sigma')\| < \varepsilon/3$$

si $|\sigma - \sigma'| < \delta$ por la continuidad de $\Phi(x,g,t)$ en σ. Análogamente existe N tal que por la convergencia uniforme de $\Phi(x_n, f^n, t)$ en $[0, \sigma - \delta]$ se tiene

$$\|\Phi(x,g,\sigma') - \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, \sigma')\| < \varepsilon/3$$

para todo $k > N$.

Por último, el tercer sumando puede acotarse de la siguiente forma:

$$\|\Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, \sigma') - \Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, t_k)\| \leq$$

$$\leq \int_{\sigma'}^{t_k} \|f^{n(t_k)}(\Phi(x_{n(t_k)}, f^{n(t_k)}, s), s)\| \, ds \leq M|t_k - \sigma'| <$$
$$M|\sigma - \sigma'| < \varepsilon/3.$$

supuesto que $\delta < \varepsilon/3M$ donde M es la cota de f (y de cada $f^n \in H(f)$) en $\Omega \times R$.

Aplicando el lema 4.6. nuevamente a las sucesiones $\{t_n = \sigma - 1/n\}$

$\{y_n\}$ y $\{f^n\}$ donde $t_n \to \sigma$, $y_n \to \Phi(x,g,\sigma)$ se obtiene la existencia a partir de n_o de $\Phi(y_n,f^n,t)$ y $\Phi(x,g,t)$ en un intervalo $(\sigma-\varepsilon,\sigma+\varepsilon)$ así como la convergencia uniforme en el intervalo $[0,\sigma+\varepsilon]$ en contradicción con ser σ el supremo de S . Entonces debe ser $\sigma > \tau$ y se completa la demostración del lema 4.5..

También se tiene como consecuencia del lema 4.5. la semicontinuidad inferior de los intervalos maximales. Para esto, tomamos $\tau \in [0,\beta_{(x,g)})$ donde $\beta_{(x,g)}$ es el extremo superior de $I_{(x,g)}$. Por el lema 4.5. se tiene que existe n_o tal que para $n>n_o$ están definidas $\Phi(x_n,f^n,t)$ en $[0,\tau]$ y por lo tanto

$$\tau \leq \liminf \beta_{(x_n,f^n)} .$$

Como τ es arbitrario en $[0,\beta_{(x,g)})$ se tendrá

$$\beta(x,g) \leq \liminf \beta_{(x_n,f^n)} .$$

Por un razonamiento análogo para el extremo inferior se tendrá

$$\alpha_{(x,g)} \geq \liminf \alpha_{(x_n,f^n)}$$

y por tanto

$$I_{(x,g)} \subseteq \liminf I_{(x_n,f^n)} .$$

Con esto acaba la demostración del teorema 4.3.

Nota. El lema 4.5. de nuestro trabajo generaliza a espacios de Banach el teorema IV.2 de [23] al que el autor llama lema de KAMKE. Este teorema puede obtenerse efectivamente de un resultado de KAMKE [15] titulado "Sobre la dependencia de la integral del lado derecho de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales". Sin embargo, en la formulación del enunciado en [23] hay un error que a continuación ponemos de manifiesto. El teorema allí enunciado es el siguiente:

Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las funciones admisibles en $C(W\times R, R^n)$. Entonces la función solución $\Phi(x,f,t)$ es continua sobre el subconjunto de $W\times\mathcal{A}\times R$ para el cual está definida. Esto es, si $\{f^n\}$ es una sucesión de funciones admisibles en $C(W\times R, R)$ con límite f en $C(W\times R, R^n)$, donde f es admisible, si $\{x_n\}$ es una sucesión en W con límite x , y si $\{\tau_n\}$ es una sucesión en $I_{(x_n,f^n)}$ con límite τ , entonces $\tau\in I_{(x,f)}$ y $\Phi(x_n,f^n,\tau_n)\to\Phi(x,f,\tau)$.

Sirva como contraejemplo de este teorema el siguiente:

Sea $f\in\mathcal{A}$, $x\in W$ y supongamos que el extremo superior $\beta_{(x,f)}$ de $I_{(x,f)}$ es finito . Tomando entonces las sucesiones $\{f^n=f\}$ $\{x_n=x\}$ y $\{\tau_n\}$ arbitrario tal que $\tau_n\to\beta_{(x,f)}$ con $\tau_n<\beta_{(x,f)}$ se verifican las hipótesis del teorema, pero el límite $\beta_{(x,f)}$ de τ_n no pertenece al intervalo $I_{(x,f)}$.

La forma en que debía ser enunciado este teorema es la que hemos expuesto en el lema 4.5. , evitando la restricción de ser f acotada y verificar (A) y (B) . En este caso,se obtendría del teorema la continuidad del flujo $\pi(x,f,t)$ y la propiedad de semicontinuidad inferior de los intervalos maximales.

BIBLIOGRAFIA

1. BHATIA, N.P.; SZEGO, G.P. Stabilty Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag: Berlin 1970

2. BHATIA, N.P.; HAJEK, O. Local Semi-Dynamical Systems, (Lecture Notes in Mathematics, vol.90), Springer:Berlin 1969

3. BIRKHOFF, G.D. Dynamical Systems, American Math. Society Colloquium Public., vol.9 (1927).

4. BOURBAKI, N. Eléments de Mathématique. Fonctions d'une variable réelle, Hermann: París 1951.

5. BOURBAKI, N. Eléments de Mathématique. Espaces vectoriels topologiques, Hermann: París 1966.

6. BOURBAKI, N. Eléments de Mathématique. Topologie Générale, Hermann: París1971.

7. BOURBAKI, N. Eléments de Mathématique. Integration, Hermann: París 1959.

8. CARTAN, H. Cálculo Diferencial, Omega: Barcelona 1972.

9. CODDINGTON-LEVINSON. Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill Co. : Londres 1955.

10. DIEUDONNE, J. Fundamentos de Análisis Moderno, Reverté : Barcelona 1966.

11. DOMINGUEZ BENAVIDES, T. Sistema dinámico de funciones continuas, I Jornadas de Teoría Matemática de Control.(En prensa).

12. ELLIS, R. Lectures on Topological Dynamics, Benjamín: New York 1969.

13. HAJEK, O. Dynamical Systems in the Plane, Academic Press: Londres 1968.

14. HORVATH, J. Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley Co.: Londres 1966.

15. KAMKE, E. Differentialgleichungen I , Akademische Verlagsgesellschaft: Leipzig 1962.

16. MARKOV, A.A. Stabilitat im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizitat, Math. Z.36 (708-738) (1933).

17. MILLER, R.K. Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of a.p. solutions, Journal of Differential Equations 1, (337-345) (1965).

18. NEMISTKII, V.V.; STEPANOV, V.V. Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press:Princeton 1960.

19. REEB, G. Sur la théorie générale des systemes dynamiques, Annals Inst. Fourier 6 (89-115) (1955).

20. SCHWARTZ, L. Cours d'Analyse, Hermann: París 1967.

21. SCHWARTZ, L. Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann: París 1970.

22. SEIFERT, G. Almost periodic solution for almost periodic systems of ordinary differential equations, Journal of Differential Equations 2 (305-319) (1966).

23. SELL, G.R. Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations, Van Nostrand: Londres 1971.

24. SELL, G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics I y II, Trans. Amer. Math. Soc. , vol.127 (241-283) (1967).

25. SZEGO, G.P.; TRECCANI, G. Semigruppi di trasformazioni multivoche, (Lecture Notes in Mathematics, vol.101) Springer: Berlin 1969.

26. TREVES, F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press: Londres 1967.

27. WHITNEY. On regular families of curves, Bull. Amer. Math. Soc.47 (145-147) (1941).

28. ZIKOV, V.V. Almost periodic solutions of linear and nonlinear equations in a Banac space,Sov.Math.Dok.vol 11,N°6

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral TOMAS DOMINGUEZ BENAVIDES titulada "SISTEMAS DINAMICOS EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS".

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

Sevilla, 1 de Diciembre 1.975

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,
El Presidente,	El Secretario,	El Doctorando

UNIVERSIDAD DE SEVILLA · FACULTAD DE CIENCIAS ·