CRECIMIENTO RELATIVO DE FUNCIONES ENTERAS. APORTACIONES AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ENTERAS CON INDICE EXPONENCIAL FINITO.

por

Luis Bernal González

UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

FACULTAD DE MATEMATICAS.

CRECIMIENTO RELATIVO DE FUNCIONES ENTERAS. APORTACIONES AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ENTERAS CON INDICE EXPONENCIAL FINITO.

por

Luis Bernal González

Tesis revisada y conforme.
Sevilla, agosto de 1984.

Vº Bº
El Catedrático Director

A. Castro

Memoria realizada bajo la dirección del Catedrático D. Antonio de Castro Brzezicki para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

El doctorando

Luis Bernal

Autorizo la consulta de este trabajo.

Luis Bernal

Deseo expresar mi agradecimiento al profesor D. Antonio de Castro por su constante ayuda, a todo el Departamento de Teoría de Funciones en general y a los profesores D. J. Arias de Reyna y D. F. J. Freniche en particular, por sus valiosas sugerencias, así como a los profesores D. A. Quintero y D. R. Ayala, del Departamento de Geometría y Topología, por la atención prestada a este trabajo y el ánimo que supieron inculcarme.

A Juana.

INTRODUCCION

Clásicamente, en el estudio del crecimiento de una función entera f, se la compara con la función exponencial e^z, y se definen diversos parámetros que especifican tal crecimiento relativo, como son el orden ρ y el tipo τ. Sin embargo, la función exponencial no es suficiente para diferenciar el crecimiento de diversas funciones enteras, tales como p. ej. e^{e^z} y $e^{e^{e^z}}$: $\rho = \infty$ en ambas, pero la 2ª crece mucho más deprisa que la 1ª.

Con el motivo de efectuar este discernimiento, D. Sato (1963) y A. R. Reddy (1967) compararon el crecimiento del módulo de una función entera con la escala de las funciones exponenciales $\{\exp_n z\}_{n\geq 1}$, donde $\exp_1 z = e^z$, $\exp_{n+1} z = e^{\exp_n z}$, estableciendo los conceptos de orden k-ésimo ρ_k y tipo k-ésimo τ_k, para cada $k \in \{1,2,\ldots\}$.

Para funciones de crecimiento lento –funciones trascendentes con $\rho = 0$– se definen los conceptos de orden logarítmico ρ_1 y tipo logarítmico τ_1, especificados en la presente memoria.

No obstante, la escala exponencial no basta tampoco para describir el crecimiento de todas las funciones enteras, como demostramos en la Prop. I. 1, en el sentido de que existe alguna f con $\rho_k(f) = \infty$ $\forall k \in \{1,2,\ldots\}$. En esta línea de investigación,

G. P. Kapoor y S. K. Bajpai (1976) establecieron las definiciones de (p,q)-orden y (p,q)-tipo de f (pág. 6), donde (p,q) es un par de enteros positivos tales que $p \geq q \geq 1$. De todas formas, aun en estos conceptos se sigue tomando como base la función exponencial.

M. N. Seremeta (1970) y S. M. Shah (1977) intentaron salvar esta restricción con la introducción de un orden generalizado $\rho(\alpha,\beta;f)$, que engloba como casos particulares a todos los anteriores, siendo α y β dos funciones reales no acotadas y estrictamente crecientes que verifican ciertas condiciones de límite ($\alpha\in\Lambda$, $\beta\in L^0$; pág. 6). De todas formas, seguimos teniendo una comparación indirecta.

En la presente memoria proponemos una forma de comparación directa entre dos funciones f y g, que no se basa en tomar funciones auxiliares. Definimos el orden $\rho = \rho_g(f)$ y el tipo $\tau = \tau_g(f)$ de f respecto de g como: $\rho = \inf\{\mu>0:\ \exists r_0(\mu)>0$ tal que $F(r) < G(r^{\mu})\ \forall r > r_0\}$, $\tau = \inf\{\mu>0:\ \exists r_0(\mu)>0$ tal que $F(r) < G(\mu r^{\rho})\ \forall r > r_0\}$ (si ρ es finito), donde F y G son las funciones módulo máximo respectivas de f y g.

Hemos dividido nuestro trabajo en tres capítulos. En el capítulo I estudiamos las propiedades algebráicas del crecimiento, es decir, las que nos definen, entre otros, el crecimiento de la suma, producto y composición de dos funciones f_1 y f_2

a partir del de f_1 y f_2 por separado. Del lema de Schwarz, de la estimación de Cartan del módulo mínimo, del teorema de las 3 circunferencias de Hadamard y de un teorema de Pólya relativo a composición obtenemos propiedades del módulo máximo útiles para la demostración de nuestros resultados. Entre ellos, tenemos los siguientes:

1). El orden $\rho_g(f)$ no varía si se componen a derecha o a izquierda f y g con cualesquiera funciones enteras lineales afines no constantes.

2) El orden $\rho_g(f)$ es inalterable por composición a izquierda de f y g por una función fija T no constante. El mismo teorema siendo la composición a la derecha no es cierto en general.

3) El orden de la suma no supera el máximo de los órdenes relativos de los sumandos. Si estos son distintos, es exactamente igual, y en tal caso el tipo de la suma es el de la función sumando de mayor orden.

4) Bajo ciertas condiciones sobre la función comparativa g, el orden del producto no supera el máximo de los órdenes relativos de los factores, dándose la igualdad si estos son distintos. Anotemos que este teorema no es cierto en general, y damos un contraejemplo explícito en la Proposición I. 16.

En el capítulo II investigamos las propiedades analíticas del crecimiento, generalizando diversos resultados válidos para el orden clásico y el orden k-ésimo y aportando otros nuevos. Seleccionamos los más importantes entre los que hemos obtenido:

1) El orden relativo de una función trascendente coincide siempre con el de su derivada respecto de cualquier otra función entera.

2) Las partes real e imaginaria, por separado, de f y g caracterizan el crecimiento relativo de f y g, y damos un resultado en tal sentido en el Teorema II. 2.

3) Se sabe que si $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ es la expansión de f en serie de Taylor, entonces

$$\rho = \limsup_n n\cdot\log n / \log(|a_n|^{-1}).$$

Reddy obtuvo:

$$\rho_k = \limsup_n n\cdot\log_k n / \log(|a_n|^{-1})$$

para el orden k-ésimo y Seremeta demostró una igualdad para $\rho(\alpha,\beta;f)$ en función de los coeficientes de Taylor (pág. 51). Si $\mu_h(r) = \max_{n\geq 0} |c_n| r^n$ y $\nu_h(r) = \max\{n\geq 0: \mu_h(r) = |c_n| r^n\}$ son respectivamente las funciones término máximo y rango de $h(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$, se prueba en este trabajo que μ_f y μ_g caracterizan completamente el orden $\rho_g(f)$, de lo que se deduce que el orden sólo depende del módulo de los coeficientes. Damos también algunas desigualdades e igualdades en que interviene la función rango. Bajo ciertas condiciones, probamos que

$$\rho_g(f) = \limsup_n \; n\cdot\log G^{-1}(e^n) \;/\; \log(|a_n|^{-1}).$$

En el teorema II. 5 demostramos con algunas hipótesis adicionales la acotación:

$$\rho_g(f) \leqslant \limsup_k \; \log|b_{n_k}| / \; \log|a_{n_k}|,$$

siendo $\{n_k\}_1^\infty$ la sucesión estrictamente creciente de números naturales m con $|a_m|+|b_m|>0$ (b_n = coeficientes de Taylor de g). En la pág. 63 ofrecemos un ejemplo explícito de cálculo del orden relativo empleando la última acotación.

4) Existe cierta relación entre el orden de una función entera y su <u>aproximación polinómica</u> óptima en un intervalo real compacto. En nuestra memoria damos, bajo ciertas condiciones, una fórmula explícita del orden $\rho_g(f)$ en función de las mejores aproximaciones a f y g por polinomios de grado n $(n = 0,1,2,\ldots)$.

5) En el parágrafo 6 iniciamos el estudio del crecimiento de familias de funciones enteras. Para ello introducimos el concepto de accesibilidad que definimos así: Diremos que una familia $\mathcal{A}$ de funciones enteras es <u>accesible</u> cuando existe una f entera con $\rho_g(f) = \infty \; \forall g \in \mathcal{A}$. Se demuestra en este parágrafo que las familias numerables y las compactas son accesibles, que las familias accesibles constituyen un σ-ideal y que la cápsula lineal $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

es accesible si lo es $\mathcal{A}$. Este tema está sólo iniciado y lo pensamos desarrollar en el futuro.

El capítulo III es esencialmente distinto a los anteriores y en él nos restringimos a considerar funciones f de índice exponencial finito, es decir, $\rho_k(f) < \infty$ para algún k. Nuestro objetivo es generalizar la expresión de f en producto infinito (Weierstrass) a través de conceptos convenientes de <u>exponente de convergencia</u> k-ésimo de una sucesión $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$ (p. 81), <u>género k-ésimo</u> de una sucesión (p. 97) y <u>producto canónico</u> W_k <u>de índice k</u> (p. 99). De entre los resultados obtenidos más relevantes, extraemos:

1) $\chi_k = \limsup\limits_{n} \dfrac{\log_k n}{\log |a_n|} = \limsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log_k n(r)}{\log r} = \inf \left\{ \mu > 0 : \displaystyle\int_a^\infty \frac{\log_{k-1} n(t)}{t^{\mu+1}}\, dt < \infty \right\}$, donde $n(r)$ es la función enumerativa de α y $a > 0$ es tal que $n(a) > \exp_{k-2} 1$.

2) $\chi_k \leq \rho_k$.

3) Bajo ciertas hipótesis, el orden k-ésimo de W_k coincide con el exponente χ_k de la sucesión de ceros que lo define.

4) Suponiendo algunas condiciones, extendemos los <u>teoremas de Hadamard y Borel</u> de factorización de una función de orden finito.

Concluímos con dos anotaciones relativas al teorema clásico de Hadamard y al posible desarrollo de f en escala de productos canónicos y de exponenciales.

I N D I C E

CAPITULO I: ORDEN Y TIPO RELATIVOS DE UNA FUNCION ENTERA. PROPIEDADES ALGEBRAICAS.

(I.1) DEFINICIONES. ORDEN Y TIPO RELATIVOS. REGULARIDAD.

Convengamos en primer lugar en denotar por $\mathfrak{E}$ el conjunto de las funciones enteras complejas, esto es, el conjunto de todas las funciones $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ analíticas en el plano complejo $\mathbb{C}$. Denotemos asimismo por $M(r)$ -o también $F(r)$ cuando exista peligro de confusión- el número $M(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$. Sabemos que $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ por el Principio del Módulo Máximo (|1| ;p.134). Se demuestra (|8| ;p.127) que M es una función creciente y continua de r en $[0,\infty)$, estrictamente creciente si y sólo si f no es constante. En general, M no es analítica, como lo prueba la función $z^2 + 2iz + 1$, cfr. (|21|;p. 86).

Clásicamente, se define el orden de crecimiento o simplemente orden de una función entera $f(z)$ (|25|;p. 253) como el número no negativo, finito o no, siguiente:

$$\rho = \inf\{\mu>0: \exists r_0(\mu)>0 \text{ tal que } M(r)<e^{r^\mu} \ \forall r>r_0\} \quad (1).$$

Si ρ es finito, se define el <u>tipo de crecimiento</u> o simplemente tipo de la función $f(z)$ como:

$$\tau = \inf\{\mu>0: \exists r_0(\mu)>0 \text{ tal que } M(r)<e^{\mu r^\rho} \ \forall r>r_0\} \quad (2).$$

De modo alternativo, tenemos las fórmulas:

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \qquad (3)$$

$$\tau = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \quad (\text{si } \rho<\infty) \qquad (4).$$

Se definen asimismo el <u>orden inferior</u> λ y el <u>tipo inferior</u> t (|6|;p.8) por las fórmulas:

$$\lambda = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \qquad (5)$$

$$t = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \quad (\text{si } \rho<\infty) \qquad (6).$$

De entre todos ellos, el orden ρ es el indicador de crecimiento más importante. En su definición clásica anterior se compara el crecimiento de $f(z)$ con la función $\exp z$. P. ej., si $f(z) = z^n$, $\exp(z^3)$, sen(cos z)), $\exp(\exp(z^2))$, $\exp(\exp(\exp z)))$ entonces $\rho = 0,3,\infty,\infty,\infty$, respectivamente. Se observa que el orden ρ no distingue el crecimiento de las tres últimas funciones, a pesar de que tienen un comportamiento muy distinto. De hecho, $\exp(\exp(z^2))$ crece más rápidamente que sen(cos z)), y $\exp(\exp(\exp z)))$ crece aun mucho más deprisa con $r = |z|$ que $\exp(\exp(z^2))$.

Surge entonces ([27], [32]) la idea de comparar una función $f \in \mathcal{E}$ con la escala de las funciones exponenciales $\{\exp_n z : n \geq 1\}$, siendo $\exp_1 z = \exp z$, $\exp_{n+1} z = \exp(\exp_n z)$, estableciéndose el concepto de orden k-ésimo superior $\rho_k(f)$ e inferior $\lambda_k(f)$:

$$\begin{matrix} \rho_k(f) \\ \lambda_k(f) \end{matrix} = \begin{matrix} \limsup_{r \to \infty} \\ \liminf_{r \to \infty} \end{matrix} \frac{\log_{k+1} M(r)}{\log r} \qquad (7),$$

y de tipo k-ésimo superior $\tau_k(f)$ e inferior $t_k(f)$:

$$\begin{matrix} \tau_k(f) \\ t_k(f) \end{matrix} = \begin{matrix} \limsup_{r \to \infty} \\ \liminf_{r \to \infty} \end{matrix} \frac{\log_k M(r)}{r^\rho} \qquad (\text{si } \rho = \rho_k(f) < \infty)\ (8).$$

Entendemos en las expresiones (7) y (8) que $\log_1 x = \log x$, $\log_{k+1} x = \log(\log_k x)$ $(k \in \mathbb{N})$. Para $k = 1$ reencontramos las definiciones dadas al principio.

El índice de $f(z)$, o más concretamente, el índice de crecimiento exponencial, se define como $i(f) = \min\{k \geq 1 : \rho_k(f) < \infty\}$. P. ej., la función $f(z) = \exp_3(4z^5)$ verifica $i(f) = 3$, $\rho_3 = 5$, $\tau_3 = 4$. Es obvio que si $k > i(f)$, $\rho_k(f) = 0$, y si $k < i(f)$, entonces $\rho_{k(f)} = \infty$. No obstante, la escala $\{\exp_n z : n \geq 1\}$ no es suficiente para describir el crecimiento de todas las funciones enteras, como demostramos en la siguiente

PROPOSICION 1.- "$\exists f_0 \in \mathcal{E}$ tal que $i(f_0) = \infty$, es decir, $\rho_k(f_0) = \infty\ \forall k \geq 1$".

Antes de dar la prueba, precisamos del siguiente lema, cuya demostración, esbozada en (|25| ;p. 85), detallamos aquí en su totalidad.

<u>LEMA 1</u>.- "Existe una función entera que toma valores dados $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ en puntos dados $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ siempre que estos no tengan puntos de acumulación finitos".

<u>Demostración</u>: Por el Teorema del Producto de Weierstrass, existe una función entera $W(z)$ que tiene un cero simple en cada z_n; en concreto,

$$W(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot \exp\left\{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{z_n}\right)^n\right\},$$

donde se ha supuesto, sin pérdida de generalidad, que $|z_n| \uparrow \infty$. Se habría de añadir el factor "z" si alguno de los z_i es cero. Entonces $W'(z_n) \neq 0 \ \forall n \geq 1$. Sea $G(z)$ una función, construída de acuerdo con el Teorema de Mittag-Leffler, que tiene un polo simple en cada z_n con residuo $w_n/W'(z_n)$; específicamente,

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{w_n/W'(z_n)}{z - z_n} - P_n(z)\right\},$$

donde los $P_n(z)$ son polinomios adecuados. Construímos entonces $f(z) = W(z) \cdot G(z)$, que será entera y verifica $f(z_n) =$

$$= \lim_{z \to z_n} \frac{W(z) - W(z_n)}{z - z_n} \cdot (z - z_n) \cdot G(z) = W'(z_n) \cdot \operatorname{Res}_{z_n} G(z) = w_n \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar la proposición. Según el lema, $\exists f_0 \in \mathcal{E}$ que toma los valores $\exp 1, \exp_2 2, \dots, \exp_n n, \dots$ en los puntos $1, 2, \dots, n, \dots$ Luego $M(n) \geq$

$\geq \exp_n n \Rightarrow$ Para cualquier $k \geq 1$, $M(n) \geq \exp_n n \geq \exp_{k+1} n$, siempre que $n \geq k+1 \Rightarrow$ Dado $k \geq 1$, tenemos una sucesión de números complejos $\{z_i = k + i: i \in \mathbb{N}\} \to \infty$. Luego $r_i = |z_i| = z_i \to +\infty$ y $M(r_i) \geq f_o(k+i) = \exp_{k+i}(k+i) \geq \exp_{k+1} r_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log_{k+1} M(r_i)}{\log r_i} \geq \frac{r_i}{\log r_i} \xrightarrow[(i\to\infty)]{} +\infty \Rightarrow \rho_k(f_o) = \infty \quad \forall k \geq 1 \blacksquare$$

Si consideramos ahora la función f_o obtenida y $g_o = \exp(f_o)$, éstas tienen un comportamiento muy diferente, pues la segunda crece mucho más rápidamente que la primera. Sin embargo, también se cumple $\rho_k(g_o) = \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$: si $G_o(r) = \max_{|z|=r} |g_o(z)|$

$$\Rightarrow G_o(n) \geq g_o(n) = \exp_{n+1} n > \exp_n n \geq \exp_{k+1} n \quad \forall n \geq k+1 \ (k \in \mathbb{N});$$

se aplica a continuación el mismo razonamiento anterior y se llega a la conclusión.

El orden logarítmico superior ρ_ℓ e inferior λ_ℓ de f (|29|) se introduce para estudiar el comportamiento de funciones enteras de crecimiento muy lento (orden cero), no polinómicas:

$$\begin{matrix}\rho_\ell \\ \lambda_\ell\end{matrix} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log \log M(r)}{\log \log r} \qquad (9).$$

Si $\rho < \infty$, se define el tipo logarítmico superior τ_ℓ e inferior t_ℓ por:

$$\begin{matrix}\tau_\ell \\ t_\ell\end{matrix} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log M(r)}{(\log r)^{\rho_\ell}} \qquad (10).$$

Generalizando aún más estas ideas, G.P. Kapoor y S.K. Bajpai (|18|y|19|) dieron las definiciones de (p,q)-orden superior

ρ e inferior λ y (p,q)-tipo superior τ e inferior t de una función entera, donde (p,q) es un par de enteros positivos tales que $p \geq q \geq 1$:

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{\limsup\limits_{r\to\infty}}{\liminf\limits_{r\to\infty}} \frac{\log_p M(r)}{\log_q r} \qquad (11),$$

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\limsup\limits_{r\to\infty}}{\liminf\limits_{r\to\infty}} \frac{\log_{p-1} M(r)}{(\log_{q-1})^{\rho}} \quad (\text{si } \rho < \infty) \qquad (12).$$

Entonces el orden y el tipo ordinarios se dan para $p = 2$, $q = 1$. De todas formas, aun en estas definiciones se sigue tomando como base la función exponencial.

Un paso más lo dan M.N. Seremeta (|33|) y S.M. Shah (|35|), que generalizan la definición de orden del modo siguiente. Sea L^0 la clase de las funciones $h(x)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) h está definida sobre $[a,\infty)$, es positiva, creciente estrictamente, y $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, diferenciable.

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h[x(1+g(x))]}{h(x)} = 1$ para toda función g tal que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Sea Λ la clase de las funciones $h(x)$ satisfaciendo (i) e (iii), donde

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \quad \forall c \in (0,\infty)$.

Si $f \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in L^0$, definimos el orden generalizado de f (superior ρ ; inferior λ) mediante la expresión siguiente:

$$\begin{matrix} \rho = \rho(\alpha,\beta;f) \\ \lambda = \lambda(\alpha,\beta;f) \end{matrix} = \begin{matrix} \limsup\limits_{r\to\infty} \\ \liminf\limits_{r\to\infty} \end{matrix} \frac{\alpha[\log M(r)]}{\beta(\log r)} \qquad (13),$$

la cual engloba todos los casos anteriores. De todas formas, nos parece algo un tanto artificial fijar dos funciones α, β y comparar el crecimiento de dos funciones $f,g \in \mathcal{E}$ mediante $\rho(\alpha,\beta;f)$ y $\lambda(\alpha,\beta;g)$.

Nosotros proponemos la siguiente manera de comparación, que no se basa en tomar funciones auxiliares.

<u>DEFINICION 1</u>.- "Si $f,g \in \mathcal{E}$, el <u>orden de crecimiento de f respecto de g</u> es el número, finito o no, siguiente:

$$\rho = \rho_g(f) = \inf\{\lambda > 0 : \exists r_o = r_o(\lambda) > 0 \text{ tal que } F(r) < G(r^\lambda) \ \forall r > r_o\} \quad (14)".$$

<u>DEFINICION 2</u>.- "Si $f,g \in \mathcal{E}$ y $\rho = \rho_g(f) < \infty$, el <u>tipo de crecimiento de f respecto de g</u> es el número, finito o no, siguiente:

$$\tau = \tau_g(f) = \inf\{\lambda > 0 : \exists r_o = r_o(\lambda) > 0 \text{ tal que } F(r) < G(\lambda r^\rho) \ \forall r > r_o\} \quad (15).$$

Respecto de g, f se dirá de tipo <u>minimal</u>, <u>normal</u> o <u>maximal</u>, según sea $\tau = 0$, $0 < \tau < \infty$ o $\tau = \infty$, respectivamente".

<u>PROPOSICION 2</u>.- "Consideremos $f,g \in \mathcal{E}$, g no constante. Se verifica:

$$a)\ \rho_g(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r} \quad (16)$$

$$b)\ \text{Si } \rho = \rho_g(f) < \infty,\ \rho_g(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{G^{-1}[F(r)]}{r^{\rho}} \quad (17)"$$

Demostración: Al ser g no constante, la función $G: r \in (0,\infty) \mapsto G(r) \in (|g(0)|,\infty)$ es continua, estrictamente creciente y no acotada $\Longrightarrow \exists G^{-1}:(|g(0)|,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ también continua y estrictamente creciente, y $\lim_{s\to\infty} G^{-1}(s) = +\infty$.

a) Supongamos en primer lugar que ρ es finito. Dado $\varepsilon>0$, $\exists r_0 = r_0(\varepsilon) > 0 / F(r) < G(r^{\rho+\varepsilon})\ \forall r > r_0$. Por otra parte, existen valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ que satisfacen $F(r_n) \geq G(r_n^{\rho-\varepsilon}) \Rightarrow \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r} < \rho+\varepsilon$ y $\frac{\log G^{-1}[F(r_n)]}{\log r_n} \geq \rho-\varepsilon$, con $r_n \to \infty \Longrightarrow \rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r}$.

Si $\rho = \infty$, significa que cualquier $\lambda>0$ cumple que $\exists r_n \to \infty$ tal que $F(r_n) \geq G(r_n^{\lambda}) \Longrightarrow G^{-1}[F(r_n)] \geq r_n^{\lambda} \Longrightarrow \frac{\log G^{-1}[F(r_n)]}{\log r_n} \geq \lambda$.

Luego para cada $\lambda>0$ $\exists r_n \to \infty$ de modo que el cociente es $\geq \lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r} \geq \lambda\ \ \forall \lambda \Rightarrow$ es igual a $\infty = \rho$.

b) El razonamiento es análogo al de la parte (a) ∎

Anotemos que, según esta proposición, $\rho_{\exp_k z}(f) = \rho_k(f)$ y $\tau_{\exp_k z}(f) = \tau_k(f)$. Es pues, nuestra definición, una generalización del orden y tipo k-ésimos. Siguiendo en esta línea, introducimos los siguientes conceptos.

DEFINICION 3.- "Sean $f, g \in \mathcal{E}$, g no constante. El orden inferior de crecimiento de f respecto de g es

$$\lambda_g(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r} .$$

Si $\rho = \rho_g(f)$ es finito, se define el <u>tipo inferior de crecimiento de f respecto de g</u> como

$$t_g(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{G^{-1}[F(r)]}{r^\rho} ".$$

Es inmediato verificar que $\lambda_g(f) = \sup\{\mu>0: \exists r_0 = r_0(\mu)>0$ tal que $F(r)>G(r^\mu)$ $\forall r>r_0\}$ y $t_g(f) = \sup\{\mu>0: \exists r_0 = r_0(\mu)>0$ tal que $F(r)>G(\mu r^\rho)$ $\forall r>r_0\}$. Es obvio que $\lambda_g(f)\leq \rho_g(f)$ y $t_g(f)\leq \tau_g(f)$. Como se hace en el estudio clásico del crecimiento, resulta natural definir la regularidad relativa de dos funciones enteras.

<u>DEFINICION 4</u>.- "Sean $f,g\in \mathcal{E}$, g no constante. Diremos que <u>f es regular respecto de g</u> o que tiene un crecimiento regular respecto de g cuando $\lambda_g(f) = \rho_g(f)$, es decir, cuando existe el límite $\lim_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r}$, finito o no. Diremos que <u>f es completamente regular respecto de g</u> cuando f es regular respecto de g y además, caso de ser $\rho = \rho_g(f)<\infty$, se cumple $t_g(f) = \tau_g(f)$, es decir, existe el límite $\lim_{r\to\infty} \frac{G^{-1}[F(r)]}{r^\rho}$, finito o no".

Es claro que cuando $g=\exp$, estos conceptos coinciden con las definiciones conocidas de regularidad y regularidad comple ta (|38|; p. 41 y 45).

Denotemos por $\dot{\mathcal{E}}$ el conjunto de todas las funciones enteras no constantes.

PROPOSICION 3.- "Sean $f,g \in \dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

a) $\lambda_f(g) = [\rho_g(f)]^{-1}$.

b) $\rho_g(f) \cdot \rho_f(g) \geqslant 1$ si ambos órdenes son no nulos.

c) Si $\rho_g(f) = 0$, $\rho_f(g) = \infty$".

Demostración: a) $\lambda_f(g) = \liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log F^{-1}[G(r)]}{\log r}$ = (hacer $s = F^{-1}[G(r)]$; entonces $r\to\infty$ sii $s\to\infty$) =

$$= \liminf_{s\to\infty} \frac{\log s}{\log G^{-1}[F(s)]} = 1/\limsup_{s\to\infty} \frac{\log G^{-1}[F(s)]}{\log s} = [\rho_g(f)]^{-1}.$$

b) $\rho_f(g) \geqslant \lambda_f(g) = [\rho_g(f)]^{-1}$ por (a). Luego $\rho_g(f)\cdot \rho_f(g) \geqslant 1$.

c) Si $\rho_g(f) = 0$, $\lambda_f(g) = +\infty$ por (a). Pero entonces también $\rho_f(g) = +\infty$ ■

Hemos de decir que del hecho $\rho_f(g) = \infty$ no se deduce $\rho_g(f) = 0$, pues se sabe, haciendo $g \equiv \exp$, que existen funciones f con $\lambda(f) = 0 < \rho(f)$. Escribiremos $f \sim g$ para simbolizar que el crecimiento de f respecto de g es regular; $f \overset{c}{\sim} g$ significará que es completamente regular.

PROPOSICION 4.- "Sean $f,g \in \dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

a) La relación $f\sim g$ es reflexiva y simétrica en $\dot{\mathcal{E}}$.

b) $f \sim g$ sii $\rho_f(g) = [\rho_g(f)]^{-1}$.

c) La relación $f \overset{c}{\sim} g$ en $\dot{\mathcal{E}}$ es reflexiva y simétrica, y más fina que la anterior.

d) Si $f \sim g$ y $0 < \rho_g(f) < \infty$, $t_f(g) = [\tau_g(f)]^{-1/\rho_g(f)}$.

e) Si $f \sim g$ y $0 < \rho_g(f) < \infty$, entonces $f \overset{c}{\sim} g$ sii $\tau_f(g) = [\tau_g(f)]^{-1/\rho_g(f)}$".

Demostración: Es obvio que $f \sim f$. Tenemos: $f \sim g$ sii $\lambda_g(f) = \rho_g(f) \Leftrightarrow [\rho_f(g)]^{-1} = \rho_g(f) \Leftrightarrow \rho_f(g) = [\rho_g(f)]^{-1} = \lambda_f(g)$ sii $g \sim f$. Tenemos pues (a) y (b). Por definición, $f \overset{c}{\sim} g$ implica $f \sim g$.

Es evidente que $f \overset{c}{\sim} f$. Sea $f \overset{c}{\sim} g$; si $\rho_g(f) = 0$, no hay nada que probar, pues entonces $\rho_f(g) = \infty$ y $g \overset{c}{\sim} f$; si $\rho_g(f) = \infty$ $\Rightarrow \rho_f(g) = 0 = \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log F^{-1}[G(r)]}{\log r} \Rightarrow$ al ser $F^{-1} \cdot G$ estrictamente creciente hacia $+\infty$, $\exists \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{F^{-1}[G(r)]}{r^0} = \lim\limits_{r \to \infty} F^{-1}[G(r)] = \infty \Rightarrow$ $\Rightarrow g \overset{c}{\sim} f$. Por último, sea $0 < \rho = \rho_g(f) < \infty$; ya que $g \sim f$, $\rho_1 = \rho_f(g) = \rho^{-1} \in (0, \infty)$. Tenemos: $t_f(g) = \liminf\limits_{r \to \infty} \dfrac{F^{-1}[G(r)]}{r^{1/\rho}} = 1/ \limsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{r^{1/\rho}}{F^{-1}[G(r)]} = 1/\left\{\limsup\limits_{s \to \infty} \dfrac{G^{-1}[F(s)]}{s^{\rho}}\right\}^{1/\rho} = [\tau_g(f)]^{-1/\rho}$.
Queda ahora claro que $f \overset{c}{\sim} g$ sii $t_f(g) = \tau_f(g)$ sii $\tau_f(g) = [\tau_g(f)]^{-1/\rho}$. Pero entonces $\tau_g(f) = [\tau_f(g)]^{-1/\rho_1}$; así pues $g \overset{c}{\sim} f$ en cualquier caso, y tenemos (c),(d) y (e) ■

Anotemos que $f \sim g$ no es transitiva, pues haciendo $g \equiv \exp$, se sabe que $\exists h \in \mathcal{E}$ de orden finito de crecimiento irregular respecto de $\exp z$. Pero entonces $f(z) = \exp_2 z$ es regular respecto de g y h. Análogamente, la relación $f \overset{c}{\sim} g$ tampoco es transitiva.

Las funciones enteras más sencillas, los polinomios, crecen de modo completamente regular respecto de cualquier otra función entera.

TEOREMA 1.- "Sea P un polinomio no constante y $f \in \dot{\mathcal{E}}$. Entonces $f \overset{c}{\sim} P$. Si P y Q son dos polinomios no constantes y a_0, b_0 son sus respectivos coeficientes líderes y m,n sus respectivos grados, entonces $\rho_P(Q) = \frac{n}{m}$ y $\tau_P(Q) = \left|\frac{b_0}{a_0}\right|^{1/m}$".

Demostración: Si $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$, $\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{|a_0| r^m} = 1$. Si f no es un polinomio, $F(r) > M(r^k)$ $\forall r > r_0(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow M^{-1}[F(r)] > r^k \Rightarrow \dfrac{\log M^{-1}[F(r)]}{\log r} > k \Rightarrow \exists \lim_{r\to\infty} \dfrac{\log M^{-1}[F(r)]}{\log r} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f \overset{c}{\sim} P$. Si $f = Q$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficiente líder b_0, $\lim_{r\to\infty} \frac{F(r)}{|b_0| r^n} = 1$, y un simple cálculo muestra que $\exists \lim_{r\to\infty} \dfrac{\log M^{-1}[F(r)]}{\log r} = \frac{n}{m} = \rho_P(Q)$ y que $\exists \lim_{r\to\infty} \dfrac{M^{-1}[F(r)]}{r^{n/m}} = \tau_P(Q) =$

$= \left|\frac{b_0}{a_0}\right|^{1/m} \Rightarrow f \overset{c}{\sim} P$ en todo caso ■

Dos consecuencias inmediatas resultan de este sencillo teorema, pero marcan ya el muy diferente comportamiento que, en cuanto al crecimiento relativo, poseen los polinomios frente a las funciones trascendentes.

COROLARIO 1.- "Si $f,g \in \mathcal{E}$ son tales que $\lambda_g(f)$ o $\rho_g(f)$ es un número irracional, entonces f y g son trascendentes".

COROLARIO 2.- "Si P es un polinomio y q es un número racional no negativo, entonces existe un polinomio Q tal que $\rho_P(Q) = q$ si y sólo si $q \cdot \text{grado}(P)$ es un entero".

Demostración: Es inmediata. Si $\exists Q$ tal que $\rho_P(Q) = q$, entonces $q \cdot \text{grado}(P) = \text{grado}(Q)$ por el Teorema 1. Recíprocamente, si $q \cdot \text{grado}(P) =$ nº entero $= k$, es suficiente escoger $Q(z) = z^k$ ■

(I. 2) RESULTADOS PREVIOS.

Para estudiar las propiedades algebráicas del orden y tipo relativos nos será útil el siguiente resultado, conocido como "lema de Schwarz". Para su demostración, cfr. p. ej. (|16|; p. 52). Existen muchas versiones del mismo, pero para nuestros objetivos bastará con la que damos a continuación.

LEMA 2.- "Si $f(z)$ es analítica en el disco $|z| < R$, continua para $|z| \leq R$, y $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z| \cdot M/R$ para $|z| \leq R$, donde $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$.

Además, se verifica que la igualdad sólo se da cuando $f(z) = zMe^{i\gamma}/R$, siendo γ una constante real. En cualquier situación, $|f'(0)| \leq M/R$, dándose la igualdad también solamente en el caso especificado, donde ocurre que $f'(0) = Me^{i\gamma}/R$, con γ la constante anterior".

Podemos obtener ahora una propiedad que usaremos más adelante.

PROPOSICION 5.- "Sea $f \in \dot{\mathcal{E}}$, $\alpha > 1$ y $0 < \beta < \alpha$. Si $M(r)$ es su módulo máximo, $\exists r_0 = r_0(\alpha,\beta) > 0 /\ \forall r > r_0$, es $M(\alpha r) > \beta \cdot M(r)$".

Demostración: Apliquemos el lema de Schwarz a la función entera $g(z) = f(z) - f(0)$, con $R = \alpha r$. Se tiene: $|g(z)| \leq (r/\alpha r) \cdot G(\alpha r)$ $\forall z$ con $|z| = r$, siendo $G(s) = \max_{|z|=s} |g(z)|$. Luego $|f(z)| - |f(0)| \leq |f(z) - f(0)| \leq \alpha^{-1} \max_{|z|=\alpha r} |f(z) - f(0)| \Rightarrow$ $\Rightarrow M(r) - |f(0)| \leq \alpha^{-1}(M(\alpha r) + |f(0)|)$. Dado $\varepsilon_0 \in (0,1), \exists r_0(\varepsilon_0) > 0 / |f(0)| < M(r) \cdot \varepsilon_0$, ya que $M(r) \nearrow +\infty$ con r. Así pues, $(1-\varepsilon_0) M(r) \leq \alpha^{-1}[M(\alpha r) + |f(0)|] \leq \alpha^{-1}[M(\alpha r) + \varepsilon_0 M(\alpha r)] \Rightarrow M(\alpha r) \geq \frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \alpha M(r)$. Dado $\beta \in (0,\alpha)$, $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha,\beta) \in (0,1) / \frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\alpha > \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow M(\alpha r) > \beta M(r)$ $\forall r > r_0(\alpha,\beta) > 0$ ■

También será usado el siguiente teorema, conocido como "lema de las tres circunferencias", debido a Hadamard. Véase el modo de obtenerlo, p. ej. en (|25|; p. 208 y ss.).

LEMA 3.- "El logaritmo del módulo máximo de una función analítica en un anillo circular D, es una función convexa del logaritmo del radio de la circunferencia, sobre la cual se toma el máximo".

En particular, se aplica al módulo máximo $M(r)$ de una función entera $f(z)$. Si $\alpha\in[0,1]$ y $r_1,r_2>0$, tenemos

$$M(r_1^{\alpha}\cdot r_2^{1-\alpha}) \leq M(r_1)^{\alpha}\cdot M(r_2)^{1-\alpha} \qquad (18).$$

Podemos obtener ahora una propiedad que usaremos más adelante.

<u>PROPOSICION 6</u>.- "Sea $f\in\mathcal{E}$ y $M(r)$ su módulo máximo. Se verifica:

a) Si $s>1$, $\exists K>0$ tal que $[M(r)]^{s}\leq KM(r^{s})$ $\forall r>0$.

b) Si $s>1$, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{M(r^{s})}{M(r)}=\infty$.

c) Si $\lambda>\mu>0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{M(r^{\lambda})}{M(r^{\mu})}=\infty$".

<u>Demostración</u>: a) Sea $s>1$. En la expresión (18), hacemos $r_1=1$, $r_2=r^{s}$, $\alpha=1-s^{-1}$; entonces $M(r)\leq$ $\leq[M(1)]^{1-s^{-1}}\cdot[M(r^{s})]^{s^{-1}} \Rightarrow [M(r)]^{s}\leq K\cdot M(r^{s})$ $\forall r>0$, donde $K=$ $=[M(1)]^{s-1}$.

b) Según (a), $\dfrac{M(r^{s})}{M(r)}\geq\dfrac{[M(r)]^{s}}{K\cdot M(r)}=\dfrac{1}{K}\cdot[M(r)]^{s-1}$ para algún $K>0$ y $\forall r>0$. Como $s-1>0$ y $M(r)\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{M(r^{s})}{M(r)}=\infty$.

c) Si $\lambda>\mu>0$, entonces $s=\lambda/\mu>1\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{M(t^{s})}{M(t)}=\infty$. Haciendo $t=r^{\mu}$, se deduce el resultado ■

(I.3) COMPOSICION CON APLICACIONES AFINES.

Empecemos con resultados esperados de mayoración de módulos, y de traslaciones, rotaciones y homotecias.

PROPOSICION 7.- "Supongamos que $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

a) Si $\exists r_o > 0 /\ F_1(r) \leq F_2(r)\quad \forall r > r_o$, $\rho_g(f_1) \leq \rho_g(f_2)$ y $\lambda_g(f_1) \leq \lambda_g(f_2)$.

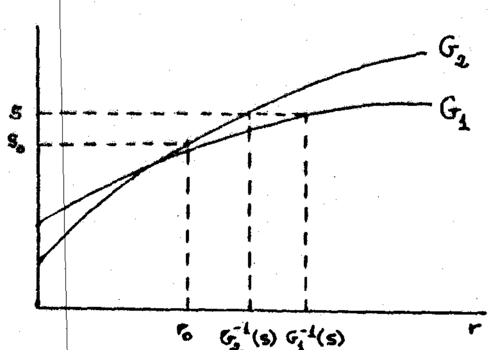
b) Si $\exists r_o > 0 /\ G_1(r) \leq G_2(r)\quad \forall r > r_o$, $\rho_{g_1}(f) \geq \rho_{g_2}(f)$ y $\lambda_{g_1}(f) \geq \lambda_{g_2}(f)$.

c) Si, en la hipótesis de (a), es $\rho_g(f_1) = \rho_g(f_2) < \infty$, entonces $\tau_g(f_1) \leq \tau_g(f_2)$ y $t_g(f_1) \leq t_g(f_2)$.

d) Si, en la hipótesis de (b), es $\rho_{g_1}(f) = \rho_{g_2}(f) < \infty$, entonces $\tau_{g_1}(f) \geq \tau_{g_2}(f)$ y $t_{g_1}(f) \geq t_{g_2}(f)$".

Demostración: Por la hipótesis, todas las funciones módulo F_1, F_2, F, G_1, G_2, G son estrictamente crecientes hacia $+\infty$.

Si es $F_1(r) \leq F_2(r)\quad \forall r > r_o$, $G^{-1}[F_1(r)] \leq G^{-1}[F_2(r)]$ por ser G^{-1} creciente. Tomando logaritmos, dividiendo por $\log r$ y tomando por último límites superiores e inferiores en ambos miembros, tenemos la desigualdad deseada; (c) es entonces evidente.



Si se da la hipótesis de (b), se deduce fácilmente por continuidad (v. fig.) que $G_1^{-1}(s) \geq G_2^{-1}(s)\quad \forall s > s_o =$

$\geq G_2(r_0) \Rightarrow G_1^{-1}[F(r)] \geq G_2^{-1}[F(r)] \quad \forall r > r_1$, donde $r_1 = F^{-1}[G_2(r_0)]$. Se aplica ahora el mismo razonamiento de (a), resultando asimismo (d) como obvio ■

TEOREMA 2.- "Consideremos $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$ y L_i $(i=1,2,3,4)$ funciones enteras lineales afines no constantes. Se cumple entonces:

i) $\rho_{L_4 \circ g \circ L_3}(L_2 \circ f \circ L_1) = \rho_g(f)$, $\lambda_{L_4 \circ g \circ L_3}(L_2 \circ f \circ L_1) = \lambda_g(f)$.

ii) Si $\rho = \rho_g(f) < \infty$, $\tau_{L_4 \circ g \circ L_3}(L_2 \circ f \circ L_1) = \frac{R_1^{\rho}}{R_3} \cdot \tau_g(f)$, $t_{L_4 \circ g \circ L_3}(L_2 \circ f \circ L_1) = \frac{R_1^{\rho}}{R_3} \cdot t_g(f)$, donde los R_i son los factores de dilatación de las L_i, suponiendo que L_2 y L_4 son rotaciones de centro el origen de coordenadas".

Demostración: Sólo la haremos para el orden superior y el tipo superior, siendo para los inferiores completamente análoga.

i) Denotamos $\rho = \rho_g(f)$. Es evidente que esta parte queda probada siguiendo los 8 pasos que vienen a continuación, los cuales son casos particulares de la misma.

a) Si $\beta \in \mathbb{C}$ y $f_1(z) = f(z) + \beta$, entonces $\rho = \rho_1$, donde $\rho_1 = \rho_g(f_1)$: $|f_1(z)| \leq |f(z)| + |\beta| \leq F(r) + |\beta| \leq 2F(r) \quad \forall r > r_1$. De la Prop. 6(b), si $s > 1$, $\exists r_2 = r_2(s) > 0 / \; 2F(r) \leq F(r^s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1(r) \leq F(r^s) \Rightarrow \frac{\log G^{-1}[F_1(r)]}{\log r} \leq \frac{\log G^{-1}[F(r^s)]}{\log r} =$$

$= s \cdot \dfrac{\log G^{-1}[F(r^s)]}{\log r^s}$. Pero $r^s = t \to \infty$ sii $r \to \infty \Rightarrow$ tomando lí-mites superiores, $\rho_1 \leq s \cdot \rho \quad \forall s > 1 \Rightarrow \rho_1 \leq \rho$. Efectuando el mismo argumento para $f(z) = f_1(z) - \beta$ resulta $\rho \leq \rho_1$. Luego $\rho = \rho_1$.

b) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f_2(z) = \alpha f(z)$, entonces $\rho = \rho_2$, donde $\rho_2 = \rho_g(f_2)$: $|f_2(z)| = |\alpha| \cdot |f(z)| \Rightarrow F_2(r) = |\alpha| F(r) \quad \forall r > 0$; usar Prop. 6(b) y queda $\rho_2 \leq \rho$. En vista de que $f = \alpha^{-1} \cdot f_2$, tenemos $\rho \leq \rho_2$. Así que $\rho = \rho_2$.

c) Si $b \in \mathbb{C}$ y $f_3(z) = f(z+b)$, entonces $\rho = \rho_3$, donde $\rho_3 = \rho_g(f_3)$: $|f_3(z)| \leq F(|z+b|) \leq F(|z|+|b|) \Rightarrow \forall r > 0$, $F_3(r) \leq F(r+|b|) \Rightarrow \forall r > 0$, $\dfrac{\log G^{-1}[F_3(r)]}{\log r} \leq \dfrac{\log(r+|b|)}{\log r} \cdot \dfrac{\log G^{-1}[F(r+|b|)]}{\log(r+|b|)}$. El primer factor del segundo miembro converge a 1 cuando $r \to \infty \Rightarrow$ tomando límites superiores, $\rho_3 \leq \rho$. Al ser $f(z) = f_3(z-b)$, $\rho \leq \rho_3$. Luego $\rho = \rho_3$.

d) Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f_4(z) = f(az)$, entonces $\rho = \rho_4$, donde $\rho_4 = \rho_g(f_4)$: $|f_4(z)| \leq F(|a||z|) \Rightarrow \forall r > 0$, $F_4(r) \leq F(|a|r) \Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}[F_4(r)]}{\log r} \leq \dfrac{\log(|a|r)}{\log r} \cdot \dfrac{\log G^{-1}[F(|a|r)]}{\log(|a|r)}$. El primer factor del segundo miembro converge a 1 cuando $r \to \infty$; tomando límites superiores, $\rho_4 \leq \rho$. Al ser $f(z) = f_4(za^{-1})$, $\rho \leq \rho_4$. Luego $\rho = \rho_4$.

e) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $g_1(z) = \alpha g(z)$, entonces $\rho = \rho_1$, donde $\rho_1 = \rho_{g_1}(f)$: $|g_1(z)| = |\alpha| \cdot |g(z)| \Rightarrow G_1(r) = |\alpha| G(r) \Rightarrow \forall t > t_0$, $G_1^{-1}(t) = G^{-1}(t/|\alpha|) \Rightarrow \dfrac{\log G_1^{-1}[F(r)]}{\log r} = \dfrac{\log G^{-1}[\frac{1}{|\alpha|} F(r)]}{\log r}$. Por Prop. 6 (b), dado $s > 1$, $|\alpha| \cdot F(r) \leq F(r^s) \quad \forall r > r_0(s) > 0$. El cociente es menor o igual que $\frac{\log G^{-1}[F(r^s)]}{\log r^s}\cdot\frac{\log r^s}{\log r}$, y pasando a límites superiores, $\rho_1 \leq s\rho \ \forall s>1 \Rightarrow \rho_1 \leq \rho$. Al ser $g = \alpha^{-1}\cdot g_1$, $\rho \leq \rho_1$. Luego $\rho = \rho_1$.

f) Si $\beta \in \mathbb{C}$ y $g_2(z) = g(z) + \beta$, entonces $\rho_2 = \rho$, donde $\rho_2 = \rho_{g_2}(f)$: $|g_2(z)| \geq |g(z)| - |\beta| \Rightarrow \forall r > r_0$, $G_2(r) \geq G(r) - |\beta| \geq \frac{G(r)}{2}$; llamando $t = G(r)/2$ resulta $G_2^{-1}(t) \leq G^{-1}(2t) \ \forall t > t_0$. Hacer $t = F(r)$ y aplicar el mismo razonamiento de (e).

g) Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $g_3(z) = g(az)$, entonces $\rho_3 = \rho$, donde $\rho_3 = \rho_{g_3}(f)$: $G_3(r) = G(|a|r) \Rightarrow G_3^{-1}(t) = |a|^{-1}\cdot G^{-1}(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\log G_3^{-1}[F(r)]}{\log r} = \frac{\log |a|^{-1}}{\log r} + \frac{\log G^{-1}[F(r)]}{\log r}$; y ahora es suficiente tomar límites superiores.

h) Si $b \in \mathbb{C}$ y $g_4(z) = g(z+b)$, entonces $\rho_4 = \rho$, donde $\rho_4 = \rho_{g_4}(f)$: $G_4(r) \leq G(|b|+r) \leq G(2r) \quad \forall r > r_0 \Rightarrow G^{-1}(t) \leq$ $\leq 2G_4^{-1}(t) \ \forall t > t_0$. Haciendo $t = F(r)$ tenemos, con el mismo argumento de (g), $\rho \leq \rho_4$. Pero $g(z) = g_4(z-b) \Rightarrow \rho = \rho_4$.

ii) De la misma forma, esta parte quedará probada efectuando los 8 pasos que vienen a continuación, los cuales son casos particulares de la misma. Denotamos $\tau = \tau_g(f)$. Consideramos $\alpha, a, \beta, b \in \mathbb{C}$, α, a distintos de cero.

a) Si $f_1(z) = \alpha f(z)$ con $|\alpha| = 1$ y $\tau_1 = \tau_g(f_1)$, entonces $\tau = \tau_1$: Obvio, pues $F_1(r) = F(r)$.

b) Si $f_2(z) = f(z) + \beta$ y $\tau_2 = \tau_g(f_2)$, entonces $\tau = \tau_2$: $F_2(r) \leq F(r) + |\beta|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\beta| < \frac{1}{n}\cdot F(r) \ \forall r > r_0(n) > 0$. Aplicando Prop. 5, $(1 + 1/n)F(r) < F((1 + 2/n)r) \quad \forall r > r_1(n) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{G^{-1}[F_2(r)]}{r^\rho} \leq \frac{G^{-1}[F((1+2/n)r)]}{[(1+2/n)r]^\rho} \cdot (1+2/n)^\rho \Rightarrow \tau_2 \leq$$

$\leq \tau\,(1+2/n)^\rho\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tau_2 \leq \tau$. Al ser $f = f_2 - \beta$, $\tau_2 = \tau$.

c) Si $f_3(z) = f(az)$ y $\tau_3 = \tau_g(f_3)$, entonces $\tau_3 = |a|^\rho\tau$:

$F_3(r) = F(|a|r) \Rightarrow \dfrac{G^{-1}[F_3(r)]}{r^\rho} = \dfrac{G^{-1}[F(|a|r)]}{(|a|r)^\rho}\cdot|a|^\rho \Rightarrow \tau_3 = |a|^\rho\tau.$

d) Si $f_4(z) = f(z+b)$ y $\tau_4 = \tau_g(f_4)$, entonces $\tau = \tau_4$: $F_4(r) \leq$

$\leq F(r+|b|)$ y por tanto $\dfrac{G^{-1}[F_4(r)]}{r^\rho} \leq \dfrac{G^{-1}[F(r+|b|)]}{(r+|b|)^\rho}\cdot(1+\frac{|b|}{r})^\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_4 \leq \tau$. Pero $f(z) = f_4(z-b) \Rightarrow \tau = \tau_4$.

e) Si $g_1(z) = \alpha g(z)$ con $|\alpha| = 1$ y $\tau_1 = \tau_{g_1}(f)$, entonces $\tau =$

$= \tau_1$: Obvio, pues $G_1^{-1} \equiv G^{-1}$.

f) Si $g_2(z) = g(z) + \beta$ y $\tau_2 = \tau_{g_2}(f)$, entonces $\tau = \tau_2$: $G_2(r) \leq$

$G(r) + |\beta| < \sigma G(r)$ para cada $\sigma > 1$ y $\forall r > r_0(\sigma) > 0$. Usando

la proposición 5, elegimos $\sigma' > \sigma$ y tenemos $\sigma G(r) < G(\sigma' r) \Rightarrow$

$\Rightarrow G^{-1}(t) < \sigma' G_2^{-1}(t)\quad \forall t > t_0(\sigma') > 0 \Rightarrow \dfrac{G^{-1}[F(r)]}{r^\rho} < \sigma' \dfrac{G^{-1}[F_2(r)]}{r^\rho} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau \leq \tau_2$. Pero $g(z) = g_2(z) - \beta \Rightarrow \tau_2 = \tau$.

g) Si $g_3(z) = g(az)$ y $\tau_3 = \tau_{g_3}(f)$, entonces $\tau_3 = \tau/|a|$:

$G_3^{-1}(t) = |a|^{-1}G(t)\quad \forall t > t_0 \Rightarrow \dfrac{G_3^{-1}[F(r)]}{r^\rho} = \dfrac{1}{|a|}\dfrac{G^{-1}[F(r)]}{r^\rho} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_3 = \tau/|a|$.

h) Si $g_4(z) = g(z+b)$ y $\tau_4 = \tau_{g_4}(f)$, entonces $\tau_4 = \tau$:

$G_4(r) \leq G(r+|b|) \leq G(\sigma r)\quad \forall r > r_0(\sigma) > 0$, para cada $\sigma > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow G^{-1}(t) \leq \sigma G_4^{-1}(t) \Rightarrow$ haciendo $t = F(r)$, resulta $\tau \leq \sigma\tau_4\ \forall \sigma > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau \leq \tau_4$. Al ser $g(z) = g_4(z-b)$, $\tau = \tau_4$ ∎

(I. 4) CRECIMIENTO DE LA COMPOSICION.

Pasemos a un resultado relativo a composición de funciones, en un sentido más general que el del parágrafo anterior. Necesitaremos previamente un resultado debido a G. Pólya (|16|;p. 80), que enunciamos en forma de lema.

LEMA 4.- "Supongamos que $f,g,h \in \mathcal{E}$ y son tales que $h(z) = g(f(z))$ $\forall z$. Se supone además que $f(0) = 0$. Con las notaciones usuales, existe un número $c \in (0,1)$, independiente de f y g, de modo que

$$H(r) \geq G\left[c \cdot F(\tfrac{1}{2} \cdot r)\right] \quad \forall r > 0 \qquad (19)".$$

Anotemos que se puede sustituir $1/2$ por cualquier $\alpha \in (0,1)$ siempre que c sea reemplazado por alguna otra constante apropiada.

TEOREMA 3.- "Sean $f_1, f_2, g \in \dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

$$\rho_{g \circ f_2}(g \circ f_1) = \rho_{f_2}(f_1) \quad y \quad \lambda_{g \cdot f_2}(g \cdot f_1) = \lambda_{f_2}(f_1).$$

En particular, $f_1 \sim f_2$ sii $g \cdot f_1 \sim g \cdot f_2$".

Demostración: Llamemos $h_1 = g \circ f_1$, $h_2 = g \circ f_2$. Entonces h_1, $h_2 \in \dot{\mathcal{E}}$. Podemos suponer que $f_1(0) = f_2(0) = 0$. En otro caso, definiríamos $\tilde{f}_1(z) = f_1(z) - f_1(0)$, $\tilde{f}_2(z) = f_2(z) - f_2(0)$, $g_1(z) = g(z + f_1(0))$, $g_2(z) = g(z + f_2(0))$, y tendríamos $h_1 = g_1 \circ f_1$, $h_2 = g_2 \circ f_2$. Aplicando el Teorema 2, $\rho_{\tilde{f}_2}(\tilde{f}_1) = \rho_{f_2}(f_1)$ y $\lambda_{\tilde{f}_2}(\tilde{f}_1) = \lambda_{f_2}(f_1)$, con lo cual probamos nuestro resultado.

Bajo tal suposición, con las notaciones usuales, $H_1(r) \geq G[cF_1(r/2)]$ y $H_2(r) \geq G[cF_2(r/2)]$ $\forall r > 0$, por (19). Usan do Prop. 5, $F_1(r/2) > \frac{1}{c} F_1(dr/2)$ y $F_2(r/2) > \frac{1}{c} F_2(dr/2)$ para cada $d \in (0,c)$, $\forall r > r_0(d) > 0 \Rightarrow$ se tiene, asintóticamente,

$$H_1(r) > G[F_1(dr/2)] \geq H_1(dr/2) \qquad (20), \text{ y}$$

$$H_2(r) > G[F_2(dr/2)] \geq H_2(dr/2) \qquad (21),$$

donde las desigualdades últimas resultan de $H_i(s) \leq G[F_i(s)]$ $\forall s > 0$ $(i=1,2)$, lo cual es consecuencia de la definición. Entonces $H_2^{-1}[H_1(r)] > H_2^{-1}\{G[F_1(dr/2)]\}$. Pero $H_2^{-1}\{G(t)\} \geq F_2^{-1}(t)$ por lo anterior; luego $H_2^{-1}[H_1(r)] > F_2^{-1}[F_1(dr/2)]$, según (20). Si $t = H_2(r)$ en (21), resulta de la primera desigualdad que $t > G[F_2(\frac{d}{2} \cdot H_2^{-1}(t))] \Rightarrow H_2^{-1}(t) < \frac{2}{d} F_2^{-1}[G^{-1}(t)]$. Si $t = H_1(r)$, $H_2^{-1}[H_1(r)] < \frac{2}{d} F_2^{-1}\{G^{-1}(H_1(r))\}$, y el término entre llaves es menor o igual a $F_1^{-1}(r) \Rightarrow F_2^{-1}[F_1(dr/2)] < H_2^{-1}[H_1(r)] < \frac{2}{d} F_2^{-1}[F_1(r)]$ $\forall r > r_0(d) > 0 \Rightarrow \frac{\log F_2^{-1}[F_1(dr/2)]}{\log(dr/2)} \cdot \frac{\log r + \log(d/2)}{\log r} <$ $< \frac{\log H_2^{-1}[H_1(r)]}{\log r} < \frac{\log(2/d) + \log F_2^{-1}[F_1(r)]}{\log r} \Rightarrow$ tomando límites superiores e inferiores en los tres miembros, resulta

$$\rho_{h_2}(h_1) = \rho_{f_2}(f_1) \text{ y } \lambda_{h_2}(h_1) = \lambda_{f_2}(f_1) \blacksquare$$

A la vista del teorema, podría esperarse que $\rho_{f_2 \circ g}(f_1 \circ g) = \rho_{f_2}(f_1)$, y lo mismo para el orden inferior. Esto es, no obstante, falso, sin más que elegir p. ej. las funciones $g(z) = \exp z$, $f_1(z) = z^2$, $f_2(z) = z$; entonces el primer miembro tiene el valor 1, mientras el segundo vale 2.

<u>COROLARIO 1</u>.- "Si $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$, entonces $g \circ f \sim g$".

<u>Demostración</u>: En el teorema 3, hacemos $f_1 = f$, $f_2(z) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ al ser $f \sim id(z) = z$ por el Teorema 1, resulta $g \circ f \sim g$ ∎

Antes de proseguir, advirtamos que muchos de los resultados que se prueban son igualmente válidos para funciones constantes, los cuales no se demuestran porque alargarían las argumentaciones al haberse de distinguir casos particulares. Asímismo, en cuanto a indicadores de crecimiento ρ, λ, τ, t, nos centraremos en el orden ρ, el más importante.

Es conocido (cfr. |16| ;p.81-82) un resultado que afirma que si f y g son dos funciones enteras y $g \circ f$ es una función entera de orden finito, entonces sólo son posibles dos casos: a) o bien f es un polinomio y la función g es de orden finito, b) o bien f no es un polinomio sino una función de orden finito, y la función externa g es de orden cero. No existe ninguna dificultad en generalizar este teorema para nuestra definición de orden relativo.

<u>TEOREMA 4</u>.- "Si $f, g, T \in \mathcal{E}$ y $\rho_T(h) < \infty$, donde $h = g \circ f$, entonces o bien f es un polinomio y $\rho_T(g) < \infty$, o bien f no es un polinomio, siendo en tal caso $\rho_T(f) < \infty$ y $\rho_T(g) = 0$".

<u>Demostración</u>: Para poder aplicar el lema 4, podemos suponer como en el Teorema 3 que $f(0) = 0$. Por hipótesis, $H(r) < \Upsilon(r^a)$ asintóticamente para cualquier $a \in (\rho_T(h), +\infty)$, donde $\Upsilon(s) = \max_{|z|=s} |T(z)|$. Expresando f según su serie de Tay

lor, $f(z) = \sum_{m\geq 1} a_m z^m$. Si $|a_m|>0$, $F(r) \geq |a_m| r^m$ por la desigualdad de Cauchy; entonces $G(c|a_m| 2^{-m} r^m) \leq G[c \cdot F(\frac{1}{2}r)] \leq H(r) < T(r^a)$ $\forall r > r_o \Rightarrow G(s) \leq T(Ks^{a/m})$, siendo $K = \dfrac{2^a}{c^{a/m}|a_m|^{a/m}} \Rightarrow G(s) \leq T(s^{b/m})$ $\forall s > s_o$ $(b > a) \Rightarrow \rho_T(g) \leq b/m < \infty$. Si f es un polinomio de grado m, $\rho_T(g) \leq b/m$ $\forall a,b$ tales que $b > a > \rho_T(h) \Rightarrow \rho_T(g) \leq$ $\leq \rho_T(h)/\text{grado}(f)$. Si f no es un polinomio, m puede ser elegido arbitrariamente grande, en cuyo caso $\rho_T(g) = 0$. En cualquier situación, al ser g no constante, $G(r) \geq \alpha r$ para alguna constante $\alpha > 0$, $\forall r > r_o \Rightarrow \alpha F(\frac{1}{2}r) \leq G[cF(\frac{1}{2} r)] \leq H(r) < T(r^a)$. Aplicando la Prop. 5, si $\sigma \in (0,1)$, $F(r^\sigma) < T(r^a)$ $\forall r > r_1(\sigma) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow F(r) < T(r^{a/\sigma}) \Rightarrow \rho_T(f) \leq a\sigma^{-1}$ $\forall\sigma \Rightarrow \rho_T(f)$ es menor o igual que a, $\forall a > \rho_T(h) \Rightarrow \rho_T(f)$ es finito, y es de hecho menor o igual que $\rho_T(h)$ ■

La desigualdad $\rho_T(f) \leq \rho_T(h)$ se cumple siempre, sea $\rho_T(h)$ finito o no. Más generalmente, la composición a derecha o a izquierda de una función entera aumenta su orden de crecimiento respecto de cualquier otra función.

PROPOSICION 8.- "Si $f,g,T \in \mathcal{E}$ y $h = g \circ f$, entonces

$$\max\left[\rho_T(f), \rho_T(g)\right] \leq \rho_T(h) \qquad (22) \quad \text{y}$$

$$\max\left[\lambda_T(f), \lambda_T(g)\right] \leq \lambda_T(h) \qquad (23)".$$

Demostración: Hacemos $f_1 = f - f(0)$, $g_1(z) = g(z + f(0)) \Rightarrow$ $\Rightarrow h = g_1 \circ f_1$, y usando el Teorema 2 podemos convenir que $f(0) = 0$. Como ni f ni g son constantes, $\exists \alpha > 0/$

$F(r)>\alpha\cdot r$, $G(r)>\alpha\cdot r$ para r suficientemente grande. Aplicamos (19) y queda $H(r)\geq G\left[c\cdot F(\frac{1}{2}r)\right]>G(\frac{c\alpha}{2}\cdot r)>G(r^{\sigma})$ $\forall r>r_0(\sigma)>0$ por Prop. 6(c), para cada $\sigma\in(0,1)$, y análogamente $H(r)>\alpha cF(\frac{1}{2}\cdot r)>F(r^{\sigma})$ $\forall r>r_1(\sigma)>0$. Entonces $T^{-1}[G(r^{\sigma})]<T^{-1}[H(r)] \Rightarrow \rho_T(g)\leq\frac{1}{\sigma}\cdot\rho_T(h)$ y $\lambda_T(g)\leq\frac{1}{\sigma}\lambda_T(h)$ $\forall\sigma\in(0,1)$

De la misma forma, $T^{-1}(F(r^{\sigma}))<T^{-1}(H(r)) \Rightarrow \rho_T(f)\leq\frac{1}{\sigma}\cdot\rho_T(h)$ y $\lambda_T(f)\leq\frac{1}{\sigma}\cdot\lambda_T(h)$ $\forall\sigma\in(0,1)$, de donde obtenemos (22) y (23)■

La siguiente Proposición complementa el Teorema 4 y especifica más la relación entre el crecimiento de g y el de $g\circ f$.

PROPOSICION 9.- "Sean $f,g,T\in\dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

a) Si f es un polinomio,

$$\rho_T(g\circ f) = \rho_T(g)\cdot \text{grado}(f) \quad (24),$$

$$\lambda_T(g\circ f) = \lambda_T(g)\cdot \text{grado}(f) \quad (25) \text{ y}$$

$$\rho_g(g\circ f) = \lambda_g(g\circ f) = \text{grado}(f) \quad (26).$$

b) Si f no es un polinomio y $\rho_T(g)>0$ ($\lambda_T(g)>0$), entonces $\rho_T(g\circ f) = +\infty$ ($\lambda_T(g\circ f) = +\infty$ resp.).

c) Si f no es un polinomio, $\rho_g(g\circ f) = \lambda_g(g\circ f) = +\infty$".

Demostración: La igualdad (26) es consecuencia de las 2 anteriores, sin más que hacer $T\equiv g$, o bien del teorema 3. Llamamos $h = g\circ f$, y suponemos que $\text{grado}(f) = m$ para cierto entero positivo m. Sea $\mathcal{T}$ la función módulo máximo de T. Dados α y β tales que $\alpha < m < \beta$, se verifica $H(r) \leq G(F(r)) \leq G(r^{\beta})$ $\forall r > r_0(\beta) > 0$. Por otra parte, utilizando (19) junto con la Prop.6(b), tenemos que $H(r) \geq G[c\cdot F(r/2)] \geq G[F(dr)] \geq G(r^{\alpha})$ $\forall r > r_1(\alpha) > 0$, donde se ha elegido $d \in (0,c)$ fijo y se ha usado la Prop. 5. Entonces $\frac{\log \mathcal{T}^{-1}(H(r))}{\log r} \leq$ $\leq \frac{\log \mathcal{T}^{-1}(G(r^{\beta}))}{\log(r^{\beta})}\cdot\beta$ y $\frac{\log \mathcal{T}^{-1}(H(r))}{\log r} \geq \frac{\log \mathcal{T}^{-1}(G(r^{\alpha}))}{\log(r^{\alpha})}\cdot\alpha$ asintóticamente para cada α y β tales que $\alpha < m < \beta$. Luego $\alpha\cdot\rho_T(g) \leq \rho_T(h) \leq \beta\cdot\rho_T(g)$ $\forall \alpha,\beta \Rightarrow \rho_T(h) = m\cdot\rho_T(g)$, y lo mismo para el orden inferior. Así pues, hemos obtenido (24) y (25) y (a) queda probado.

Si se demuestra (b), (c) es una consecuencia inmediata sin más que hacer $T \equiv g$. Sea pues $\rho_T(g) > 0$ (si es $\lambda_T(g) > 0$ el razonamiento es análogo). Al ser f trascendente, $F(dr) > r^{\alpha}$ $\forall r > r_0(\alpha) > 0$ y para cada $\alpha > 0$; por tanto, $H(r) > G(r^{\alpha}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho_T(h) \geq \rho_T(g)\cdot\alpha$ $\forall \alpha > 0 \Rightarrow \rho_T(h) = +\infty$ ■

Observemos que el Teorema 4, obtenido independientemente, es un corolario trivial de la Prop. 9; así pues, hemos generalizado y mejorado el resultado de (|16|;p.81-82). Incluso la Prop. 9 se puede obtener a su vez como corolario de las igualdades expresadas en la proposición que, de modo independiente de aquélla y del Teorema 4, demostramos a continuación.

<u>PROPOSICION 10</u>.- "Sean f, g y $T \in \dot{\mathcal{E}}$, de manera que o bien $g \sim$

$\sim h$ o bien $g \sim T$. Entonces:

$$\begin{aligned} \rho_T(h) &= \rho_g(h) \cdot \rho_T(g) \\ \lambda_T(h) &= \lambda_g(h) \cdot \lambda_T(g) \end{aligned} \qquad (27),$$

siempre que en cada uno de los segundos miembros no se dé el caso de que un factor sea nulo y el otro infinito".

Demostración: Llamando Υ a la función módulo máximo de T, se verifica la igualdad $\dfrac{\log \Upsilon^{-1}(H(r))}{\log r} =$

$$= \frac{\log \Upsilon^{-1}(H(r))}{\log G^{-1}(H(r))} \cdot \frac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} = \frac{\log \Upsilon^{-1}(G(S(r)))}{\log S(r)} \cdot \frac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r},$$

donde S es la función $S(r) = G^{-1}(H(r))$. Notemos que $S \to \infty$ sii $r \to \infty$. En el último miembro de la igualdad anterior, existe el límite, finito o no, de al menos uno de los factores, según la hipótesis de regularidad. Puesto que no se puede dar el caso de indeterminación $0 \cdot \infty$, se obtienen las fórmulas (27), sin más que tomar límites superiores e inferiores∎

Si hacemos ahora $h = g \circ f$ en (27), entonces $g \sim h$ por el corolario al Teorema 3. Si f es un polinomio de grado m, se cumple por dicho teorema que $\rho_g(h) = \lambda_g(h) = \rho_{id}(f) = m$, y si f es trascendente, $\rho_g(h) = \lambda_g(h) = \rho_{id}(f) = +\infty$, de lo cual se deducen todas las igualdades de la Prop. 9.

(I. 5) CRECIMIENTO DE LA SUMA.

El hecho de que el orden de una suma finita de funciones enteras sea a lo más igual al máximo de los órdenes de los suman dos (cfr. |23|, p.22 y |40|, p.127) sigue siendo válido en nuestra teoría. Observemos sin embargo que el resultado correspondiente para el tipo de sumandos con igual orden es falso en general. Considérese, p. ej., $f_1(z) = g(z) = z$, $f_2(z) = 2z$. Entonces $\rho_g(f_1 + f_2) = \rho_g(f_1) = \rho_g(f_2) = 1$, pero $\tau_g(f_1 + f_2) = 3 > 2 = \text{máx}[\tau_g(f_1), \tau_g(f_2)]$.

<u>TEOREMA 5</u>.- "Sean $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

i) $\rho_g(f_1 + f_2) \leq \text{máx}[\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)]$. Si $\rho_g(f_1) \neq \rho_g(f_2)$, se da la igualdad.

ii) $\lambda_{g_1+g_2}(f) \geq \text{mín}[\lambda_{g_1}(f), \lambda_{g_2}(f)]$. Si $\lambda_{g_1}(f) \neq \lambda_{g_2}(f)$, se da la igualdad.

iii) Si $\rho_g(f_1) \neq \rho_g(f_2)$ y son finitos, entonces $\tau_g(f_1 + f_2)$ coincide con el tipo de la función sumando que tenga mayor orden".

<u>Demostración</u>: i) Llamamos $h = f_1 + f_2$, $\rho_1 = \rho_g(f_1)$, $\rho_2 = \rho_g(f_2)$, $\rho = \rho_g(h)$. Si h es constante, es trivial. Sea pues $h \in \dot{\mathcal{E}}$. Sea $\rho_1 \leq \rho_2$. Dado $\varepsilon > 0$, $F_1(r) \leq G(r^{\rho_1+\varepsilon}) \leq G(r^{\rho_2+\varepsilon})$ y $F_2(r) \leq G(r^{\rho_2+\varepsilon})$ $\forall r > r_o(\varepsilon) > 0 \Rightarrow H(r) \leq F_1(r) + F_2(r) \leq 2G(r^{\rho_2+\varepsilon}) \leq G(3r^{\rho_2+\varepsilon})$ $\forall r > r_1$ $(r_1 > r_o)$, por la Prop. 5 $\Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} \leq \dfrac{\log 3 + (\rho_2 + \varepsilon)\log r}{\log r} \Rightarrow \rho \leq \rho_2 + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \rho \leq \rho_2 = \text{máx}(\rho_1, \rho_2)$. Hemos considerado $\rho_2 < \infty$; en otro caso es trivial.

Supongamos ahora la desigualdad estricta $\rho_1 < \rho_2$. Tenemos:

$|h(z)| \geqslant |f_2(z)| - |f_1(z)| \geqslant |f_2(z)| - F_1(r)$ si $|z| = r \Rightarrow H(r) \geqslant F_2(r) - F_1(r)$. Consideremos $\lambda \in (\rho_1, \rho_2)$ y $\lambda' \in (\rho_1, \lambda)$. Entonces $\forall r > r_0(\lambda') > 0$ es $F_1(r) < G(r^{\lambda'})$ y $\exists r_n \to \infty / \; G(r_n^{\lambda}) < F_2(r_n)$. Pero $G(r^{\lambda}) = G(r^{\lambda'} \cdot r^{\lambda - \lambda'}) \geqslant G(r^{\lambda'} \cdot \alpha) > \beta G(r^{\lambda'})$ para $r > r_1(\alpha, \beta) > 0$, con $\alpha > \beta > 1$, según la Prop. 5 $\Rightarrow \beta F_1(r_n) < F_2(r_n) \Rightarrow H(r_n) \geqslant F_2(r_n) \cdot (1 - \beta^{-1})$. Usando de nuevo la Prop. 5 –suprimiendo, si fuera preciso, algunos términos iniciales de $\{r_n\}$– obtenemos que para cada $\lambda \in (\rho_1, \rho_2)$ y cada $\gamma > 1$, $H(\gamma \cdot r_n) > F_2(r_n) > G(r_n^{\lambda})$ para cierta sucesión $\{r_n\} \nearrow +\infty \Rightarrow \rho \geqslant \limsup_n \dfrac{\log G^{-1}(H(\gamma \cdot r_n))}{\log(\gamma r_n)} \geqslant$

$$\geqslant \limsup_n \frac{\log G^{-1}(F_2(r_n))}{\log r_n} \cdot \frac{\log r_n}{\log(\gamma r_n)} \geqslant \lambda \Rightarrow \rho = \rho_2 =$$

$= \max(\rho_1, \rho_2)$.

ii) Es consecuencia de (i) junto con la Prop. 3(a).

iii) Llamamos $\tau_1 = \tau_g(f_1)$, $\tau_2 = \tau_g(f_2)$, $\tau = \tau_g(h)$. Entonces, siguiendo las mismas notaciones de (i), suponemos $\rho_1 < \rho_2$, con lo cual $\rho = \rho_2$. Al ser $\rho_1 < \rho_2$, dado cualquier $\mu > \tau_1$, $F_1(r) < G(\mu r^{\rho_1}) < G(\alpha r^{\rho_2})$ $\forall \alpha > 0$ $\forall r > r_0(\alpha) > 0$. Por Prop. 5, si $\beta > \alpha$, $G(\alpha \cdot r^{\rho_2}) < \beta G(r^{\rho_2})$ asintóticamente. Dado $\varepsilon > 0$, $F_2(r) < G((\tau_2 + \varepsilon) r^{\rho_2}) < (\tau_2 + 2\varepsilon) G(r^{\rho_2})$ asintóticamente $\Rightarrow$ de nuevo usando la Prop. 5, resulta $H(r) \leqslant F_1(r) + F_2(r) \leqslant (\beta + \tau_2 + 2\varepsilon) \cdot G(r^{\rho_2}) \leqslant G((\beta + \tau_2 + 3\varepsilon) r^{\rho_2})$ asintóticamente. Luego dado $\lambda > \tau_2$, $\exists r_1(\lambda) > 0 /$ si $r > r_1$, $H(r) \leqslant G(\lambda r^{\rho_2}) \Rightarrow \tau \leqslant \lambda \Rightarrow \tau \leqslant \tau_2$. Hemos supuesto τ_1, τ_2 finitos. Si $\tau_1 = +\infty$, se tendrá de todos modos $F_1(r) < G(r^{\sigma})$ asintóticamente $\forall \sigma \in (\rho_1, \rho_2) \Rightarrow F_1(r) <$

$< G(\alpha\cdot r^{\rho_2})$ y se continúa el mismo razonamiento; si $\tau_2 = +\infty$, $\tau < \tau_2$ es trivial.

Para probar la igualdad, consideremos $\rho_1 < \sigma < \rho_2$, $\alpha' > \alpha > 0$ y $\lambda' < \lambda < \tau_2 \Rightarrow F_1(r) < G(r^{\sigma}) < G(\alpha\cdot r^{\rho_2 - \sigma}.r^{\sigma}) < \alpha' G(r^{\rho_2})$ para $r > r_0$ suficientemente grande, y $\exists r_n \nearrow +\infty$ tal que $G(\lambda\cdot r_n^{\rho_2}) < F_2(r_n)$; además $\lambda' G(r^{\rho_2}) < G(\lambda\cdot r^{\rho_2})$ asintóticamente por Prop. 5 $\Rightarrow H(r_n) \geq$ $\geq F_2(r_n) - F_1(r_n) > (\lambda' - \alpha')G(r_n^{\rho_2}) > G((\lambda' - \alpha' - \varepsilon)\cdot r_n^{\rho_2})$ para $\varepsilon > 0$ pequeño y $\forall n \geq n_0$. En resumen, para cada $\gamma < \tau_2$ hemos encontrado una sucesión $r_n \nearrow +\infty$ / $H(r_n) > G(\gamma\cdot r_n^{\rho_2}) \Rightarrow \dfrac{G^{-1}(H(r_n))}{r_n^{\rho_2}} > \gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau \geq \limsup_n \frac{G^{-1}(H(r_n))}{r_n^{\rho_2}} \geq \gamma \Rightarrow \tau \geq \gamma \quad \forall \gamma < \tau_2 \Rightarrow \tau = \tau_2 \blacksquare$$

(I. 6) CRECIMIENTO DEL PRODUCTO.

En cuanto al producto de dos funciones enteras, no podemos esperar un teorema tan general para el orden, como lo prueban las funciones $f_1(z) = z = g(z) = f_2(z)$: $\rho_g(f_1\cdot f_2) = 2 > 1 =$ $= \text{máx}[\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)]$. Recordemos que también el orden –en sentido clásico– del producto era a lo más igual al mayor de los órdenes de los factores; cfr. p. ej. (|23|; p. 22 y ss.).

Haremos uso de un teorema que da una cota inferior suficientemente fina para el módulo de una función holomorfa. Lo enunciaremos en forma de lema. Para su demostración, cfr. (|23|; p. 21-22).

LEMA 5.- "Sea $f(z)$ holomorfa en el disco $|z| \leq 2eR$ $(R > 0)$

con $f(0) = 1$ y sea η un número positivo arbitrario que no exceda $3e/2$. Entonces en el círculo $|z|\leq R$, salvo quizá excluyendo una familia de círculos la suma de cuyos radios no supera $4\eta R$, tenemos

$$\log|f(z)| > - H(\eta)\cdot\log M(2eR) \qquad (28),$$

donde $M(t) = \max\limits_{|z|=t}|f(z)|$ y $H(\eta) = 2 + \log \frac{3e}{2\eta}$".

Antes de dar el Teorema general, precisamos de un caso particular, el cual es interesante por sí mismo, y además no necesita la hipótesis del Teorema 6. En primer lugar, podemos afinar la Prop. 6.

<u>PROPOSICION 11</u>.- "Sea f entera trascendente y n cualquier entero positivo. Se verifica:

a) Si $s>1$, $r^n.M(r) = o(M(r^s))$ $(r\to\infty)$.

b) Si $\lambda>\mu>0$, $r^n.M(r^\mu) = o(M(r^\lambda))$ $(r\to\infty)$".

<u>Demostración</u>: a) Por Prop. 6(a), $M(r^s) \geq k\cdot(M(r))^s$ $\forall r>0$ $(k>0)$ $\Rightarrow M(r^s)\geq k\cdot M(r)\cdot(M(r))^{s-1}$. Pero $\forall p>0$, $\frac{M(r)}{r^p} \xrightarrow[(r\to\infty)]{} \infty \Rightarrow$ escogiendo $p>\frac{n}{s-1}$, queda $M(r^s)\geq k\cdot M(r)r^n\cdot\theta(r)$, donde $\lim\limits_{r\to\infty}\theta(r)=\infty$.

b) Se deduce de (a), haciendo $r^\mu = t$, $s = \lambda/\mu > 1$ ■

<u>PROPOSICION 12</u>.- "Sea f entera trascendente y P un polinomio no idénticamente nulo. Entonces $\forall g\in\dot{\mathcal{E}}$ es $\rho_g(P\cdot f) = \rho_g(f)$ y $\lambda_g(P\cdot f) = \lambda_g(f)$.

Si $f\in\dot{\mathcal{E}}$ y g es entera trascendente,

$$\rho_{Pg}(f) = \rho_g(f) \quad y \quad \lambda_{Pg}(f) = \lambda_g(f)".$$

Demostración: La 2ª parte es consecuencia de la 1ª junto con la Prop. 3(a).

Probemos la 1ª parte. Llamamos $\rho, \lambda, \rho_1, \lambda_1$ respectivamente a $\rho_g(f), \lambda_g(f), \rho_g(h), \lambda_g(h)$, donde $h = P\cdot f$. Podemos suponer que P no es constante (aplicar el Teorema 2 en otro caso). Entonces existe un entero positivo n y un $r_0 > 0/ \quad 1 < |P(z)| < r^n$ si $|z| = r \quad \forall r > r_0$. Luego $F(r) < H(r) < r^n F(r) \Rightarrow \rho \leq \rho_1$, $\lambda \leq \lambda_1$. Por la Prop. 11(a), $\exists r_1 > r_0 / \forall r > r_1$ es $r^n \cdot F(r) < F(r^s)$ $(s > 1) \Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} < s \cdot \dfrac{\log G^{-1}(F(r^s))}{\log r^s} \quad \forall s > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho_1 \leq \rho, \ \lambda_1 \leq \lambda$ ■

LEMA 6.- "Sea $g(z)$ entera. Son equivalentes:

a) $\forall \sigma > 1, \ (G(r))^2 \leq G(r^\sigma) \quad \forall r > r_0(\sigma) > 0.$

b) Para cada n entero positivo y cada $\sigma > 1$, (29)

$\exists r_0(\sigma, n) > 0 / \ \forall r > r_0$ es $(G(r))^n \leq G(r^\sigma)$".

Demostración: $(b) \Rightarrow (a)$ es trivial. Para $(a) \Rightarrow (b)$, dados $\sigma > 1$ y $n \geq 2$, $\exists m$ natural$/ \ 2^m > n$. Entonces $\sigma^{2^{-m}} > 1 \Rightarrow G(r^{\sigma^{2^{-m}}}) \geq (G(r))^2$ asintóticamente $\Rightarrow G(r^\sigma) = G((r^{\sqrt{\sigma}})^{\sqrt{\sigma}}) \geq$ $\geq (G(r^{\sqrt{\sigma}}))^2 \geq (G(r^{\sqrt[4]{\sigma}}))^4 \geq \ldots \geq (G(r^{\sigma^{2^{-m}}}))^{2^m} \geq (G(r))^n$ asintóticamente ■

A título de ejemplo, demostraremos que la condición (29) se cumple para funciones con índice de crecimiento exponencial $i(g) = k$ finito, de crecimiento regular, tales que $\rho_k(g) > 0$.

PROPOSICION 13.- "Sea g de índice exponencial finito k, $g \in \mathcal{E}$, de crecimiento regular, cuyo orden k-ésimo ρ verifica $0 < \rho < +\infty$. Entonces g cumple (29)".

Demostración: Se tendría que $0 < \lambda_k(g) = \rho = \rho_k(g) < +\infty$. Entonces $\lim_{r\to\infty} \frac{\log_{k+1} G(r)}{\log r} = \rho \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \rho - \varepsilon < \frac{\log_{k+1} G(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon$ para $r > r_o(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \exp_k(r^{\rho-\varepsilon}) < G(r) < \exp_k(r^{\rho+\varepsilon})$ asintóticamente. Sea $\sigma > 1$, y escogemos $0 < \varepsilon < \rho \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \Rightarrow \sigma\rho - \sigma\varepsilon > \rho + \varepsilon \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{\exp_{k-1}(r^{\sigma\rho - \sigma\varepsilon})}{\exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon})} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \exp_{k-1}(r^{\sigma\rho - \sigma\varepsilon}) > 2\cdot\exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon})$ si $r > r_o(\sigma) > 0 \Rightarrow$ para tales valores de r, $G(r^\sigma) > \exp_k(r^{\sigma\rho-\sigma\varepsilon}) = \exp(\exp_{k-1}(r^{\sigma\rho-\sigma\varepsilon})) >$
$> \exp(2\cdot\exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon})) = (\exp_k(r^{\rho+\varepsilon}))^2 > (G(r))^2$ ■

No obstante, existen funciones no polinómicas que no verifican la condición del lema. Para ello, consideremos alguna función de crecimiento lento, g, de modo que coincidan sus órdenes logarítmicos superior e inferior y sean iguales a 2: $1 < \lambda_\ell(g) = \rho = 2 = \rho_\ell(g) < +\infty$ (cfr. |28| ;p. 98), de manera que g tenga un crecimiento aproximadamente igual al de la función $\exp((\log r)^2) = r^{\log r}$, es decir, $\lim_{r\to\infty} \frac{G(r)}{r^{\log r}} = 1$. Si escogemos $\sigma \in (1, \sqrt{2})$, se comprobará sin dificultad que $(G(r))^2 > G(r^\sigma)$ para r suficientemente grande, es decir, g no verifica (29). Proporcionaremos seguidamente otra condición sufi ciente para tal propiedad, así como ejemplos más explícitos de funciones que no la verifican.

PROPOSICION 14.- "Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos tales que la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, siendo

$$b_n = \left\{\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}}{a_n}\right\}^{1/n}.$$

Entonces $g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ cumple (29), suponiendo que $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = 0$".

Demostración: La función g es entera por la hipótesis $\sqrt[n]{a_n} \to 0$. Se tiene que $\exists K > 0 /\ b_n \leqslant K$, es decir, $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \leqslant K^n \cdot a_n \quad \forall n \geqslant 0$, lo cual tiene también sentido si ciertos a_n son nulos. Sea $\sigma > 1$. Si $r > K^{\frac{1}{\sigma-1}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \leqslant$ $\leqslant a_n \cdot r^{n(\sigma-1)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}) r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{\sigma n}$. Observemos que $G(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ pues $a_n \geqslant 0$. Entonces $(G(r))^2$ es el producto de Cauchy de la serie que define $G(r)$ por sí misma, es decir, $(G(r))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (G(r))^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{\sigma n} = G(r^{\sigma}) \quad \forall r > r_0 = K^{1/\sigma-1} \blacksquare$$

COROLARIO.- "Sean $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales no negativos tales que $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = 0$ y $a_k \leqslant \theta_n \cdot a_n \quad \forall k,n \geqslant 0 \quad (k \leqslant n)$. Si la sucesión $\{(\theta_n^2 \cdot a_n)^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, la función entera $g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ cumple (29)".

Demostración: Llamamos como antes $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}$. Tenemos:

$$c_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \theta_n^2 \cdot a_n^2 = (n+1)\theta_n^2 \cdot a_n^2 \Rightarrow c_n^{1/n} \leqslant (n+1)^{1/n} \cdot$$

$\cdot(\theta_n^2 \cdot a_n)^{1/n} \cdot a_n^{1/n}$. Pero $(\theta_n^2 \cdot a_n)^{1/n} \leqslant K \quad \forall n \geqslant 0$ y $(n+1)^{1/n} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_n^{1/n} \leqslant L \cdot a_n^{1/n}$ para cierto $L > 0 \Rightarrow$ la sucesión $b_n =$

$= \left\{\dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}}{a_n}\right\}^{1/n}$ es acotada $\Rightarrow$ g cumple (29) por Prop. 14∎

PROPOSICION 15.- "Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos con $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$, tales que $a_n \leqslant c_{2n} \quad \forall n \geqslant 0$, siendo $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. En tal situación, la función entera $g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ no cumple (29)".

Demostración: Al ser $a_n \geqslant 0$, $G(r) = \sum_{0}^{\infty} a_n r^n$. Escogemos un $\sigma \in (1,2)$. Tenemos: $\forall n \geqslant 0$, $a_n r^{\sigma n} \leqslant c_{2n} r^{2n}$ si

$$r > 1 \Rightarrow G(r^{\sigma}) = \sum_{0}^{\infty} a_n r^{n\sigma} \leqslant \sum_{0}^{\infty} c_{2n} r^{2n} \leqslant \sum_{0}^{\infty} c_n r^n = (G(r))^2 \quad \forall r > 1,$$

siendo lícita la última desigualdad en la cadena anterior por la propiedad asociativa de los términos de una serie convergente de números reales no negativos. Así que g no verifica (29)∎

EJEMPLOS.- 1) Sabemos que para $g(z) = \exp z$ es válida (29) por Prop. 13, pero lo comprobaremos aplicando Prop. 14. En efecto: $a_n = 1/n! \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$

$= (1/n!) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!(k-n)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n/n!$. Entonces $b_n =$

$= \left(\dfrac{2^n/n!}{1/n!}\right)^{1/n} = 2$, sucesión constante, luego acotada.

2) Construyamos una función entera $g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n > 0$ tal

que $c_{2n} = a_n \ \forall n \geq 0$, y por tanto no verifica (29). Imponemos: $c_0 = a_0 \Rightarrow a_0^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1$. Ahora, $c_2 = 2a_0a_1 + a_1^2 = a_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2a_2 + a_1^2 = a_1$. Elegimos $a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = 3/8$. Entonces $c_4 =$ $= 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = a_2 \Rightarrow 2a_4 + a_3 = \gamma_2$, donde $\gamma_2 = a_2 - a_2^2 =$ $= 15/64$. Hacemos $a_4 = a_3^4 \Rightarrow 2a_3^4 + a_3 = \gamma_2$, de donde resultan a_3 y a_4, buscando la raíz positiva de esta ecuación. Por recurrencia, supongamos que hemos obtenido por este proceso a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-3}, a_{2n-2}$ $(n\geq 3)$ verificando $a_k>0$ $(0\leq k\leq 2n-2)$, $c_{2k} =$ $= a_k$ $(k=0,\ldots,n-1)$, $a_{2k-1}^{2^k} = a_{2k}$ y $a_{2k-1}<\gamma_k$ $(2\leq k\leq n-1)$, siendo $\gamma_k = a_k - \sum_{j=2}^{2k-2} a_j a_{2k-j}$, lo cual es válido para los 5 primeros términos calculados explícitamente. Calculamos de 2 en 2 los coeficientes buscados. Imponemos $c_{2n}=a_n \Rightarrow 2a_0a_{2n}+2a_1a_{2n-1}=\gamma_n \Rightarrow$ $\Rightarrow 2a_{2n}+a_{2n-1}=\gamma_n$, con $\gamma_n=a_n - \sum_{k=2}^{2n-2} a_k a_{2n-k}$=valor conocido. Hacemos $a_{2n} = a_{2n-1}^{2^n} \Rightarrow 2a_{2n-1}^{2^n}+a_{2n-1}=\gamma_n$. Por inducción, se prueba que $0<\gamma_n < 1/2 = a_1 \ \forall n\geq 2$. Además $\gamma_n<a_n$. La función $\varphi(x) =$ $=2x^{2^n}+x$ es estrictamente creciente y continua sobre $[0,+\infty)$; $\varphi(0)=0$ luego existe un único valor $x_0=a_{2n-1}$ que cumple la ecuación anterior. Así que también hemos obtenido $a_{2n}=\left[\frac{\gamma_n-a_{2n-1}}{2}\right]^{2^{-n}}$, $\gamma_n>$ $>a_{2n-1}$. Tenemos así $a_j>0$ $j\geq 0$. Además: si $j=2n$, $a_j = a_{2n-1}^{2^n}<$ $<\gamma_n^{2^n}<(\frac{1}{2})^{2^n} =(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}^j}$; si $j = 2n+1$, $a_j \leq \gamma_{n+1}< a_{n+1} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} (n \text{ impar})<(1/2)^{\sqrt{2}^{n+1}} = (1/2)^{(\sqrt{2})^{\frac{j+1}{2}}}. \\ (n \text{ par}) = a_{n+2}^{2^{\frac{n+2}{2}}} <\left[(1/2)^{\sqrt{2}^{n+2}}\right]^{2^{\frac{n+2}{2}}} = (1/2)^{2^{\frac{j+3}{2}}} < (1/2)^{(\sqrt{2})^{\frac{j+1}{2}}}. \end{cases}$$

Pero $\lim_j \left\{(1/2)^{(\sqrt{2})^{\frac{j+1}{2}}}\right\}^{1/j} = 0 \Rightarrow \lim_j \sqrt[j]{a_j} = 0 \Rightarrow g$ es entera y verifica $a_n = c_{2n}> 0 \ \forall n \geq 0$.

TEOREMA 6.- "Sean $f_1, f_2, g \in \dot{\mathcal{E}}$, de modo que g cumple la condición (29) expresada en el lema anterior. Se verifica:

i) $\rho_g(f_1 \cdot f_2) \leq \max[\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)]$. Si $\rho_g(f_1) \neq \rho_g(f_2)$, se da la igualdad.

ii) $\lambda_{f_1 f_2}(g) \geq \min[\lambda_{f_1}(g), \lambda_{f_2}(g)]$. Si $\lambda_{f_1}(g) \neq \lambda_{f_2}(g)$, se da la igualdad".

Demostración: La parte (ii) se deduce de (i) junto con Prop. 3(a). Demostremos (i).

Llamamos $h = f_1 \cdot f_2$, $\rho_1 = \rho_g(f_1)$, $\rho_2 = \rho_g(f_2)$, $\rho = \rho_g(h)$. Suponemos que $\rho_1 \leq \rho_2$. Sabemos que $H(r) \leq F_1(r) \cdot F_2(r)$. Dado $\varepsilon > 0$, $F_j(r) \leq G(r^{\rho_2 + \frac{\varepsilon}{2}})$ $(j=1,2)$ $\forall r > r_0(\varepsilon) > 0 \Rightarrow H(r) \leq (G(r^{\rho_2 + \frac{\varepsilon}{2}}))^2$, asintóticamente. Ahora aplicamos (29) con $\sigma = \dfrac{\rho_2 + \varepsilon}{\rho_2 + \varepsilon/2} > 1$: $(G(t))^2 \leq G(t^\sigma)$, donde $t = r^{\rho_2 + \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow (G(r^{\rho_2 + \frac{\varepsilon}{2}}))^2 \leq G(r^{\rho_2 + \varepsilon})$ para $r > r_1(\varepsilon) > 0 \Rightarrow H(r) \leq G(r^{\rho_2 + \varepsilon}) \Rightarrow \rho \leq \rho_2 = \max(\rho_1, \rho_2)$. Hemos supuesto que ρ_2 es finito. En otro caso es trivial.

Probemos que si $\rho_1 < \rho_2$, se da la igualdad $\rho = \rho_2$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_1(0) = 1$, ya que la multiplicación de $f_1(z)$ por cz^{-n} no altera el orden de la función (Prop. 12). Sea pues $\rho_1 < \lambda' < \lambda < \rho_2$. Existe entonces una sucesión $R_n \nearrow +\infty$ tal que $F_2(R_n) > G(R_n^\lambda)$; para $R > 0$ suficientemente grande, $F_1(R) < G(R^{\lambda'})$. Suponemos que $0 < \delta < 1$. Escogemos $\eta = \delta/8$ y consideramos el disco $|z| \leq R_n'$ $(R_n' =$

$= R_n \cdot (1 - \delta)^{-1})$. La suma de los diámetros de los círculos excluídos según el lema 5 dentro del disco anterior es menor que $\delta \cdot R_n$. Por tanto, en el intervalo (R_n, R_n') existe r_n tal que la circunferencia $|z| = r_n$ no corta ninguno de los círculos excluídos. Por el lema 5, tenemos

$$\log|f_1(z)| > - H(\eta) \cdot \log F_1(2eR_n') \qquad (30).$$

Ya que $R_n < r_n < R_n \cdot (1 - \delta)^{-1}$, tenemos $F_2(r_n) > F_2(R_n) > > G(r_n^{\lambda}) > G(r_n^{\lambda} \cdot (1 - \delta)^{\lambda})$. Si z_r es un punto de $|z| = r$ tal que $F_2(r) = |f_2(z_r)|$, es fácil ver que $H(r) \geqslant |f_1(z_r)| \cdot F_2(r) \Rightarrow \Rightarrow H(r_n) > G(r_n^{\lambda} \cdot (1 - \delta)^{\lambda}) \cdot F_1(2eR_n')^{-H(\eta)}$. Por otra parte, $F_1(2eR_n') < G((2e)^{\lambda'} \cdot R_n'^{\lambda'}) < G((2e)^{\lambda'} \cdot r_n^{\lambda'} \cdot (1 - \delta)^{-\lambda'}) \Rightarrow F_1(2eR_n')^{-H(\eta)} > > G((2e)^{\lambda'} \cdot r_n^{\lambda'} \cdot (1 - \delta)^{-\lambda'})^{-H(\eta)}$. Empleando (30), $H(r_n) > > G(r_n^{\lambda} \cdot (1 - \delta)^{\lambda}) \cdot G((2e)^{\lambda'} \cdot r_n^{\lambda'} \cdot (1 - \delta)^{-\lambda'})^{- H(\eta)}$. Fijemos un $\delta_o > > 0$ tan pequeño que $2e(1 - \delta_o)^{-1} < 3e$. Entonces hemos fijado $H(\eta) = 2 + \log \frac{12e}{\delta_o}$, y escogemos un natural $m > H(\eta) \Rightarrow \Rightarrow H(r_n) > G(r_n^{\lambda} (1 - \delta_o)^{\lambda}) \cdot G((3e)^{\lambda'} \cdot r_n^{\lambda'})^{-m}$. Consideramos $\lambda'' \in \in (\lambda', \lambda) \Rightarrow r_n^{\lambda} \cdot (1 - \delta_o)^{\lambda} > (3er_n)^{\lambda''}$ para n suficientemente grande, y haciendo $\sigma = \lambda''/\lambda' > 1$ en la condición (29)(b) obtenemos:

$$G((3er_n)^{\lambda''}) \geqslant G((3er_n)^{\lambda'})^{m+1} \Rightarrow H(r_n) > G((3er_n)^{\lambda'}) >$$
$$> G(r_n^{\lambda'}) \Rightarrow \rho \geqslant \lambda' \quad \forall \lambda' < \rho_2 \Rightarrow \rho = \rho_2 \blacksquare$$

<u>COROLARIO 1</u>.- "Sean $f_1, f_2, g \in \dot{\mathcal{E}}$ tales que $h = f_1/f_2$ sigue siendo entera y g cumple la condición (29).

Entonces:

i) $\rho_g(h) \leq \max\,[\rho_g(f_1),\ \rho_g(f_2)]$. Si estos órdenes son distintos, se da la igualdad.

ii) $\lambda_h(g) \geq \min[\lambda_{f_1}(g),\ \lambda_{f_2}(g)]$. Si estos órdenes inferiores son distintos, se da la igualdad".

Demostración: Debido a Prop. 3(a), es suficiente probar (i).

Llamamos ρ, ρ_1, ρ_2 respectivamente a $\rho_g(h)$, $\rho_g(f_1)$, $\rho_g(f_2)$. Se tiene que $f_1 = h \cdot f_2 \Rightarrow$ si fuese $\rho \leq \rho_2 \Rightarrow \Rightarrow \rho \leq \max(\rho_1, \rho_2)$; si fuese $\rho > \rho_2 \Rightarrow \rho_1 = \rho = \max(\rho_1, \rho_2)$. Supongamos que $\rho_1 > \rho_2 \Rightarrow$ si fuese $\rho < \rho_1$, $\max(\rho, \rho_2) < \rho_1$, contradiciendo el teorema; si fuese $\rho > \rho_1$, $\max(\rho, \rho_2) = \rho > \rho_1$, contradiciendo también el teorema. Queda el caso $\rho_1 < \rho_2$; si fuese $\rho > \rho_2 \Rightarrow \rho_1 = \rho$, y si por el contrario, $\rho < \rho_2 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2$, y tenemos contradicción en ambos casos. Luego $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ si $\rho_1 \neq \rho_2$ ■

COROLARIO 2.- "Si $f, g \in \mathcal{E}$ y g cumple la condición (29), entonces $\rho_g(f^n) = \rho_g(f)$ y $\lambda_{f^n}(g) = \lambda_f(g)$ para cada n entero positivo".

Demostración: Como $\lambda_f(g) = [\rho_g(f)]^{-1}$, es suficiente demostrar la 1ª igualdad. Ahora bien, según el teorema, $\rho_g(f^n) \leq \max\{\rho_g(f), \ldots, \rho_g(f)\}$, por recurrencia sobre n. Luego $\rho_g(f^n) \leq \rho_g(f)$. Pero al ser f no constante, $(F(r))^n =$

$= \max_{|z|=r} |f^n(z)| \geq F(r) \quad \forall r > r_o(n) > 0 \Rightarrow \rho_g(f^n) \geq \rho_g(f)$ en todo caso, y se deduce la igualdad ■

<u>COROLARIO 3</u>.- "Sean $f_1, f_2 \in \dot{\mathcal{E}}$ y k un entero positivo. Se verifica entonces que $\rho_k(f_1 \cdot f_2) \leq \max[\rho_k(f_1), \rho_k(f_2)]$, siendo ρ_k el orden k-ésimo definido por (7). Si $\rho_k(f_1) \neq \rho_k(f_2)$, se da la igualdad".

<u>Demostración</u>: El enunciado es consecuencia inmediata del último teorema, ya que la función $g(z) = \exp_k z$ cumple evidentemente la condición (29), y además $\rho_g(h) = \rho_k(h)$ ■

Por último, proporcionamos un ejemplo de una función que no verifica la tesis del teorema 6.

<u>LEMA 7</u>.- "Sea $f \in \dot{\mathcal{E}}$ y n un entero positivo. Entonces $\rho_f(f^n) \leq n$".

<u>Demostración</u>: Sea $\widetilde{F}(r)$ la función módulo máximo de $f^n \Rightarrow \widetilde{F}(r) = (F(r))^n$. Por Prop. 6(a), $K \cdot (F(r))^n \leq F(r^n)$ $\forall r > 0$ para cierta cte. $K > 0$. Luego $\widetilde{F}(r) < F((Lr)^n)$ $\forall r > r_o > 0$ con $L > K^{-1/n}$ (v. Prop. 5) $\Rightarrow \frac{\log \widetilde{F}^{-1}(F(Lr)^n)}{\log((Lr)^n)} \cdot \frac{n\log L + n\log r}{\log r} > 1 \Rightarrow \lambda_{f^n}(f) \geq 1/n \Rightarrow \rho_f(f^n) \leq n$ ■

<u>PROPOSICION 16</u>.- "Existe una función entera trascendente g tal que $g \sim g^2$ y $\rho_g(g^2) = 2$".

<u>Demostración</u>: Basándonos en el lema anterior, basta encontrar

una g con $\lambda_g(g^2) \geq 2$. Sea g la función entera construída en el ejemplo 2 de la pág. 35. Teníamos: $\forall r > 1$, $G(r^\sigma) \leq [G(r)]^2$ $\forall r > 1$ $\forall \sigma \in (1,2)$. Entonces $\tilde{G}(r) = \max\limits_{|z|=r} |g^2(z)| = (G(r))^2 \geq G(r^\sigma) \Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}(\tilde{G}(r))}{\log r} \geq \sigma$ $\forall r > 1 \Rightarrow$ tomando límites inferiores, $\lambda_g(g^2) \geq \sigma$ $\forall \sigma \in (1,2) \Rightarrow \lambda_g(g^2) \geq 2$ ∎

NOTA.- En el estudio de la condición (29) habíamos impuesto en algunas proposiciones que $a_n \geq 0$, y las desigualdades exigidas a estos coeficientes habían de verificarse $\forall n \geq 0$. Esto no es restricción ninguna en el estudio del orden relativo de crecimiento pues, como se verá en el Capítulo II, aquél sólo depende del módulo de los coeficientes a_n de f y b_n de g, funciones a comparar, y las desigualdades se pueden suponer $\forall n \geq n_0$ (si alguna de las funciones f o g es trascendente), ya que no varía el orden al sumar o restar un polinomio a una función trascendente.

CAPITULO II: P R O P I E D A D E S A N A L I T I C A S D E L O R D E N R E L A T I V O D E C R E C I M I E N T O.

(II. 1) ORDEN Y TIPO DE LA DERIVADA.

Comenzamos este capítulo con un estudio comparativo del crecimiento de una función entera y su derivada. En relación con el orden ρ y el tipo τ clásicos dados por (1;1) y (1;2), se demuestra (|16|; p.95-96) que la derivada de una función entera tiene el mismo orden y el mismo tipo que la función primitiva; en consecuencia, lo mismo ocurre para todas las derivadas. Obsérvese que este resultado no es cierto en general, pues si $f(z) = g(z) = z \Rightarrow \rho_g(f) = 1 \neq 0 = \rho_g(f')$. Pues bien, simplemente exigiendo que g no sea un polinomio, tendrá validez el teorema. En cuanto al tipo, exigiremos una condición -no demasiado restrictiva- para que se dé la igualdad. Puesto que el crecimiento relativo de dos polinomios y de una función trascendente con un polinomio es perfectamente conocido (teorema I.1), el problema del orden de la derivada queda completamente resuelto.

TEOREMA 1.- "Si f es entera, denotamos por $f^{(k)}$ $(k\in \mathbb{Z})$ las siguientes funciones: $f^{(o)}\equiv f$; $f^{(k)}\equiv$ derivada de $f^{(k-1)}$ si $k\geqslant 1$; $f^{(k)}\equiv$ cualquier primitiva de $f^{(k+1)}$ si $k\leqslant -1$. Entonces:

a) Si $f,g\in \dot{\mathcal{E}}$ son tales que o bien f o bien g es trascendente, entonces $\forall k\in \mathbb{Z}$ es $\rho_g(f^{(k)}) = \rho_{g^{(k)}}(f) = \rho_g(f)$ y $\lambda_g(f^{(k)}) = \lambda_{g^{(k)}}(f) = \lambda_g(f)$. Además, si el orden común ρ anterior es finito, $\tau_g(f')\leqslant \tau_g(f)$ y $t_g(f')\leqslant t_g(f)$.

b) Si $f,g\in \dot{\mathcal{E}}$ y f cumple para su módulo máximo la condición:

$$\forall \alpha>1,\quad \liminf_{r\to\infty} \frac{F(\alpha\cdot r)}{r\cdot F(r)} \geqslant 1 \qquad (1),$$

entonces $\tau_g(f^{(k)}) = \tau_g(f)$ y $t_g(f^{(k)}) = t_g(f)$ $\forall k\in \mathbb{Z}$, si el orden expresado en (a) es finito".

Demostración: a) Aplicando la Prop. I.3(a), es suficiente probar que $\rho_g(f^{(k)}) = \rho_g(f)$ y $\lambda_g(f^{(k)}) = \lambda_g(f)$.

Nótese que una función h entera es trascendente si y sólo si $h^{(k)}$ lo es $(\forall k\in \mathbb{Z})$. Podemos suponer que f es trascendente (en otro caso sería trivial: los 4 números anteriores serían nulos). Entonces basta demostrar que $\rho_g(f') = \rho_g(f)$ y $\lambda_g(f') = \lambda_g(f)$. Denotaremos $\widetilde{F}(r) = \max_{|z|=r} |f'(z)|$.

Sabemos que $f(z) = \int_0^z f'(t)\, dt + f(0)$, y tomando la integral a lo largo del segmento rectilíneo $[0,z]$ tenemos $F(r) \leqslant \int_0^{|z|} |f'(t)|\, dt + |f(0)| \leqslant r\cdot\widetilde{F}(r)$, pues podemos suponer $f(0) = 0$ (Teorema I.2). Además, por la fórmula de la integral de Cauchy, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$, donde C es la circunferencia $|\xi - z| = R - r$ $(|z| = r < R)$, y escogiendo z tal que $|f'(z)| = \widetilde{F}(r)$, es $\widetilde{F}(r) \leqslant \frac{F(R)}{R - r}$. Hacemos $R = sr$ $(s > 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{F(R)}{R - r} = \frac{F(sr)}{(s-1)r} < \frac{1}{r}\cdot F(\frac{s+1}{s-1}\cdot r)$ para $r > 0$ suficientemente grande, por Prop. I.5. Hemos obtenido:

$$\frac{F(r)}{r} \leqslant \widetilde{F}(r) < F(\frac{s+1}{s-1}\cdot r) \quad \forall r > r_0 \qquad (2).$$

Llamamos $c(s) = \frac{s+1}{s-1}$; usamos la Prop. I.11(b) y resulta que, dado $\sigma \in (0,1)$, $r\cdot F(r^\sigma) < F(r)$ asintóticamente. En resumen, $F(r^\sigma) < \widetilde{F}(r) < F(c(s)r) \Rightarrow \sigma\cdot\frac{\log G^{-1}(F(r^\sigma))}{\log r} < \frac{\log G^{-1}(\widetilde{F}(r))}{\log r} < \frac{\log G^{-1}(F(c(s)r))}{\log(c(s)r)}\cdot\frac{\log c(s) + \log r}{\log r}$ $\forall \sigma \in (0,1)$ y $\forall r > r_0(\sigma) > 0 \Rightarrow$ tomando límites superiores e inferiores, tenemos las 2 igualdades.

Sea ahora el orden ρ finito. En tal caso, $\frac{G^{-1}(\widetilde{F}(r))}{r^\rho} < \frac{G^{-1}(F(c(s)r))}{(c(s)r)^\rho}\cdot c(s)^\rho$. Haciendo $s \to \infty$, $c(s) \longrightarrow 1$ y, de la desigualdad anterior, $\tau_g(f') \leqslant c(s)^\rho \cdot \tau_g(f)$, $t_g(f') \leqslant c(s)^\rho t_g(f)$, con lo que se acaba la prueba.

b) Observemos que f debe ser trascendente, y se mantienen por tanto las conclusiones de la parte (a). Es fácil verificar que (1) equivale a:

$$\forall \alpha > 1, \quad F(\alpha r) \geq r \cdot F(r) \quad \forall\, r > r_0(\alpha) > 0 \qquad (3).$$

Notemos que f' cumple una condición análoga. En efecto: Suponiendo como antes $f(0) = 0$, $\widetilde{F}(r) \geq \frac{F(r)}{r} > \frac{F(r/2)}{2} \geq \frac{r}{8} \cdot F(\frac{r}{4}) >$ $> (rk) \cdot \widetilde{F}(kr)$ $(0 < k < 1)$ asintóticamente, empleando (3) y la 2ª desigualdad de (2) con un $c(s)$ adecuado, y usando también la Prop. I.5; es decir, $\widetilde{F}(Kt) > t \cdot F(t)$ $(K > 1, \; t > t_0(K) > 0)$. Cualquier primitiva h de f cumple asimismo una condición similar, pues por ser f trascendente se puede admitir que $h(0) = 0$ (2 primitivas se diferenciarían en un $c \cdot z$, que no influiría en el tipo, según el Teorema I. 5(iii)) $\Longrightarrow$ de (2), haciendo pasos análogos a los anteriores se obtendría, para r suficientemente grande y cierto $k \in (0,1)$, $H(c(s)r) > F(r) >$ $> F(kr)(kr)^2 > H(kr) \cdot (kr)$ $\Longrightarrow$ si $\alpha = \frac{c(s)}{k} > 1$ (existen tales s,k para un $\alpha > 1$ prefijado), $H(\alpha t) > t \cdot H(t)$ asintóticamente.

Luego resta probar que $\tau_1 \geq \tau$, $t_1 \geq t$, donde $\tau_1 = \tau_g(f')$, $\tau =$ $= \tau_g(f)$, $t_1 = t_g(f')$ y $t = t_g(f)$. De (3), $\widetilde{F}(r) \geq \frac{F(r)}{r} >$ $> F(\sigma r)$ $\forall r > r_0(\sigma) > 0$ $\forall \sigma \in (0,1)$ $\Longrightarrow$ $\frac{G^{-1}(\widetilde{F}(r))}{r^\rho} > \frac{G^{-1}(F(r\sigma))}{(r\sigma)^\rho} \cdot \sigma^\rho$ $\forall \sigma \in (0,1)$ $\Longrightarrow$ tomando límites superiores e inferiores, $\tau_1 \geq \sigma\tau$, $t_1 \geq \sigma \cdot t$ $\Longrightarrow$ $\tau_1 \geq \tau$, $t_1 \geq t$ ■

<u>COROLARIO</u>.- "Sean $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$. Entonces, para cualquier k entero, $f \sim g$ sii $f^{(k)} \sim g$. Si f cumple (1),

$$f \overset{c}{\sim} g \quad \text{sii} \quad f^{(k)} \overset{c}{\sim} g".$$

(II.2) EXPRESION DEL CRECIMIENTO EN FUNCION DE LAS PARTES REAL E IMAGINARIA.

El crecimiento de una función entera $f = u + iv$ queda completamente determinado por sus partes real e imaginaria, por separado. Este es el contenido del Teorema 2 de este capítulo. Por el Principio del Máximo para funciones armónicas, si denotamos por $A(r)$ el $\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z) = \max\limits_{|z|=r} u(z)$, $A(r)$ es una función creciente de r, estrictamente salvo si f es constante, de modo que $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = +\infty$ ($|8|$;p. 128) salvo en el último caso.

Previamente al teorema fundamental, mencionamos el siguiente resultado, debido a Borel y Carathéodory, que nos capacita para deducir una cota superior para el módulo de una función en un círculo, a partir de cotas para sus partes real o imaginaria sobre un círculo concéntrico mayor $|z| = R$. Su demostración puede encontrarse, p. ej., en ($|16|$;p. 53-54) y ($|23|$; p. 17).

<u>LEMA 1</u>.- "Sea $f(z)$ analítica para $|z| \leq R$ y sean $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$. Entonces, para $0 < r < R$,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R - r} \cdot A(R) + \frac{R + r}{R - r} \cdot |f(0)| < \frac{R + r}{R - r} \cdot (A(R) + |f(0)|)$$

Puesto que $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re}(-if)$, el mismo resultado se mantiene sustituyendo en (4) $A(R)$ por $B(R) = \max_{|z|=R} \operatorname{Im} f(z)$. Notemos que $A(r) > 0$ para r bastante grande. El siguiente corolario del lema anterior facilitará la demostración de nuestro teorema.

COROLARIO.- "Con las mismas notaciones anteriores, si $f \in \dot{\mathcal{E}}$, se verifica: Para cada $\alpha > 1$, $\exists \sigma = \sigma(\alpha) > 1$ y $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ tales que

$$M(r) < \alpha \cdot A(\sigma r) \quad \forall r > r_0 \qquad (5)".$$

Demostración: Al ser $f \in \dot{\mathcal{E}}$, es $|f(0)| < \varepsilon A(s)$ para $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos y $s > s_0(\varepsilon) > 0$. De (4) se obtiene entonces, haciendo $R = \sigma r$ $(\sigma > 1)$, que $M(r) <$ $< \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot A(\sigma r)$. Puesto que $\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \longrightarrow 1$ cuando $\sigma \to \infty$, para cada $\alpha > 1$ $\exists \sigma > 1$ tal que $\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \cdot (1 + \varepsilon) = \alpha$, para un ε conveniente, de donde obtenemos (5) ■

TEOREMA 2.- "Sean $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$. Denotamos $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$, $B(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Im} f(z)$, $C(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z)$, $D(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Im} g(z)$. Se verifica:

$$\rho_g(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(A(r))}{\log r} =$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(B(r))}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log C^{-1}(F(r))}{\log r} =$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log C^{-1}(A(r))}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log C^{-1}(B(r))}{\log r} =$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log D^{-1}(F(r))}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log D^{-1}(A(r))}{\log r} =$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log D^{-1}(B(r))}{\log r}.$$

Las mismas identidades sustituyendo "lim sup" por "lim inf" son válidas para $\lambda_g(f)$".

Demostración: Es claro que A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1} están bien definidas pues A,B,C,D son continuas y estrictamente crecientes. Llamamos respectivamente $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_8$; $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8$ a los valores mencionados en el enunciado. Puesto que $A(r), B(r) \leq F(r)$ y $C(r), D(r) \leq G(r)$, se tiene que $F^{-1} \leq A^{-1}, B^{-1}$ y $G^{-1} \leq C^{-1}, D^{-1}$ $\forall r > r_o$.

Por lo antes dicho, y teniendo en cuenta la Prop. I.7, es suficiente probar $\rho_3 \leq \rho_1$, $\lambda_3 \leq \lambda_1$, pues las desigualdades correspondientes a las partes imaginarias son análogas. Por (5), para cada $\alpha > 1$ $\exists \sigma > 1$ / $F(r) < \alpha \cdot A(\sigma r)$ y $G(s) < \alpha\, C(\sigma s)$ asintóticamente. Si llamamos $t = G(s)$, resulta $C^{-1}(t \cdot \alpha^{-1}) < \sigma \cdot G^{-1}(t)$; haciendo $t\alpha^{-1} = F(r)$, queda $C^{-1}(F(r)) < \sigma G^{-1}(\alpha \cdot F(r))$. Por Prop. I.5, $G^{-1}(\alpha \xi) < \alpha' \cdot G^{-1}(\xi)$ $\forall \xi > \xi_o(\alpha') > 0$, donde α' es cualquier número mayor que $\alpha \Longrightarrow C^{-1}(F(r)) < \sigma \cdot \alpha' G^{-1}(F(r)) < \sigma \cdot \alpha' G^{-1}(\alpha \cdot A(\sigma r)) < \sigma \alpha'^2 \cdot G^{-1}(A(\sigma r))$ asintóticamente $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{\log C^{-1}(F(r))}{\log r} < \frac{\log(\sigma \alpha'^2) + \log G^{-1}(A(\sigma r))}{\log (\sigma r)} \cdot \frac{\log (\sigma r)}{\log r}.$$

Ahora basta tomar límites superiores e inferiores en ambos miembros cuando $r \longrightarrow \infty$ ■

(II. 3) RELACION ENTRE EL CRECIMIENTO Y LOS COEFICIENTES DE TAYLOR.

Consideremos una función entera no constante $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, donde los $a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0)$ son sus coeficientes de Taylor, unívocamente determinados, verificando $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Es conocida la relación existente entre el crecimiento de $f(z)$ y la velocidad de decrecimiento de sus coeficientes a_n. A saber, si ρ y τ están definidos por (I;1) y (I;2), se verifica (|25|;p. 255 y ss.):

$$\rho = \limsup_n \frac{n \cdot \log n}{\log |a_n|^{-1}} \qquad (6),$$

$$(\tau e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \limsup_n n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{si } \rho > 0 \text{ es finito}) \qquad (7).$$

Se define el <u>máximo término</u> de $f(z)$ como $\mu(r) = \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ $(r > 0)$, y la función <u>rango del término máximo</u> como $\nu(r) = \max \{n \geqslant 0 : \mu(r) = |a_n| r^n\}$. Se demuestra que es una función continua y creciente de r, estrictamente salvo si f es constante, y salvo en este caso, $\lim_{r \to \infty} \mu(r) = +\infty$. La función rango toma valores enteros no negativos, es creciente y -salvo si f es un polinomio- $\lim_{r \to \infty} \nu(r) = +\infty$. Estas dos funciones también determinan el crecimiento de $f(z)$, como veremos después.

S. M. Shah (|34|) y A. R. Reddy (|29|) generalizaron la expresión (6) para el orden k-ésimo definido en (I;7): Para f de índice exponencial igual a k, tenemos

$$\liminf_{n} \frac{\log_k n}{\log|a_n/a_{n+1}|} \leqslant \liminf_{n} \frac{n\cdot\log_k n}{\log|1/a_n|} \leqslant \lambda_k \leqslant$$
$$\leqslant \rho_k = \limsup_{n} \frac{n\cdot\log_k n}{\log|1/a_n|} \leqslant \limsup_{n} \frac{\log_k n}{\log|a_n/a_{n+1}|} \qquad (8),$$

verificándose en los 2 extremos la igualdad si $|a_n/a_{n+1}|$ es no decreciente para $n \geqslant n_o$. En cuanto al tipo k-ésimo dado por (I;8), Reddy demostró:

$$\limsup_{n} (\log_{k-1} n)\cdot|a_n|^{\rho_k/n} = \tau_k \quad (k \geqslant 2) \qquad (9),$$

si $\rho_k > 0$, con f de índice k; y, en las mismas condiciones,

$$\liminf_{n} \frac{n}{\rho\cdot e}\cdot|a_n|^{\rho/n} \leqslant t \quad (k = 1), \text{ y}$$
$$\liminf_{n} (\log_{k-1} n)\,|a_n|^{\rho_k/n} \leqslant t_k \quad (k \geqslant 2), \qquad (10)$$

dándose en (10) la igualdad si $|a_n/a_{n+1}|$ es no decreciente para $n \geqslant n_o$.

M. N. Seremeta (|33|) y Shah (|35|) establecieron nuevos resultados para el orden generalizado dado en (I;13), para $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in L^o$. A saber:

$$\liminf_{n} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{1}{n}\cdot\log\frac{1}{|a_n|}\right)} \leqslant \lambda(\alpha,\beta;f) \qquad (11),$$

y la igualdad es cierta si se supone $|a_n/a_{n+1}|$ no decreciente para $n \geqslant n_o$ y se dan además las condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty} \beta(x\cdot\psi(x))/\beta(e^x) = 0 \qquad (12)$$

$$d\,F(x)/d\,(\log x) = O(1) \quad (x \to +\infty) \qquad (13),$$

siendo $F(x,c) = \beta^{-1}(c\cdot\alpha(x))$, $F(x,1) = F(x)$ y $\psi(x)$ alguna función que tienda a $+\infty$ cuando $x \longrightarrow +\infty$. Por otra parte, si se da

$$\frac{d\ F(x,c)}{d\ (\log x)} = O(1) \quad (x \longrightarrow \infty) \quad \text{para cada} \quad c > 0 \qquad (14),$$

entonces

$$\rho(\alpha,\beta;f) = \limsup_{n} \alpha(n) / \beta\left(\frac{1}{n}\cdot \log \frac{1}{|a_n|}\right) \qquad (15).$$

Se conoce (|6|;p. 13.|38| ;p. 32) que el orden clásico puede ser expresado mediante las fórmulas:

$$\begin{matrix}\rho \\ \lambda\end{matrix} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log \log \mu(r)}{\log r} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log \nu(r)}{\log r} \qquad (16),$$

que fueron generalizadas por Reddy (|28|) y O. P. Juneja (|17|):

$$\begin{matrix}\rho_k \\ \lambda_k\end{matrix} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log_{k+1} \mu(r)}{\log r} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log_k \nu(r)}{\log r} \qquad (17).$$

Ambas expresiones quedan englobadas dentro de los teoremas demostrados por Shah (|35|), a saber: Si f cumple (12) y (13), entonces

$$\begin{matrix}\rho(\alpha,\beta;f) \\ \lambda(\alpha,\beta;f)\end{matrix} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\alpha(\log \mu(r))}{\beta(\log r)} = \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\alpha(\nu(r))}{\beta(\log r)} \qquad (18).$$

En la presente memoria nos centraremos fundamentalmente en el orden $\rho_g(f)$ generalizado para establecer expresiones del mismo en función del término máximo, del rango y de los coeficientes de Taylor.

Es claro que $\mu(r) \leq M(r)$. Necesitamos otras desigualdades que conecten M, μ y ν antes de dar nuestros resultados. Tales desigualdades pueden encontrarse en (|38| ;p. 28-32) y (|6|; p. 12-13):

$$M(r) \leq 3\,\mu(r)\cdot \nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right) \qquad (r > r_0) \qquad (19),$$

$$\log \mu(er) > \nu(r) \tag{20}$$

De ellas se deduce:

$$\log \nu(r) = o(1)\cdot \log \mu(er) \tag{21}$$

$$\log M(r) \leq \log 3 + \log \mu(r) + \log \nu(2r) \leq$$
$$\leq (1 + o(1))\cdot \log \mu(2er) \tag{22}$$

<u>TEOREMA 3</u>.- "Sean $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$ y μ_f, μ_g sus respectivos términos máximos. Entonces:

$$\rho_g(f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log G^{-1}(\mu_f(r))}{\log r} =$$
$$= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \mu_g^{-1}(F(r))}{\log r} = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \mu_g^{-1}(\mu_f(r))}{\log r}.$$

Las mismas igualdades son válidas para $\lambda_g(f)$ sustituyendo «lim sup» por «lim inf»".

<u>Demostración</u>: Obsérvese en primer lugar que μ_g^{-1} está bien definido por ser g no constante. Llamamos respectivamente $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$; $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a los números -finitos o no- que aparecen en el enunciado. Es evidente que $G^{-1}(s) \leq \mu_g^{-1}(s)$ $(s > s_0)$. Entonces las desigualdades $\rho_1 \leq \overset{\rho}{\rho_3} \leq \rho_2$, $\lambda_1 \leq \overset{\lambda}{\lambda_3} \leq \lambda_2$ son obvias. Llamamos $\rho_1^* = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log F^{-1}(\mu_g(r))}{\log r}$ y $\rho_2^* = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \mu_f^{-1}(G(r))}{\log r} \Rightarrow \lambda_1 = 1/\rho_2^*$ y $\lambda_2 = 1/\rho_1^*$. Luego si probamos $\rho_1 \geq \rho_2$, tendremos análogamente $\rho_1^* \geq \rho_2^*$, y así $\lambda_1 \geq \lambda_2$; en consecuencia $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Veámoslo: De (22) deducimos que $\log F(r) \leq (1 + \varphi(r))\cdot \log \mu_f(2er)$ y $\log G(s) \leq (1 + \psi(s))\cdot \log \mu_g(2es)$

siendo $\lim_{r\to\infty}\varphi(r) = 0 = \lim_{s\to\infty}\psi(s)$. Por tanto, para cada $\varepsilon,\varepsilon' > 0$ $\exists r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$, $s_0 = s_0(\varepsilon') > 0$ / $\log F(r) \leq (1+\varepsilon)\cdot \log \mu_f(2er)$ $(r > r_0)$ y $\log G(s) \leq (1+\varepsilon')\cdot\log \mu_g(2es)$ $(s > s_0)$. Si denotamos $G(s) = t \Rightarrow t^{1/1+\varepsilon'} \leq \mu_g(2eG^{-1}(t)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{2e}\cdot\mu_g^{-1}(t^{1/1+\varepsilon'}) \leq G^{-1}(t)$ asintóticamente. Si hacemos $F(r) = t^{1/1+\varepsilon'} \Rightarrow \frac{1}{2e}\cdot\mu_g^{-1}(F(r)) \leq G^{-1}[(F(r))^{1+\varepsilon'}] \leq G^{-1}(F(r^{1+2\varepsilon'}))$ por Prop. I.6. Pero, según hemos obtenido, $F(r^{1+2\varepsilon'}) \leq \{\mu_f(2er^{1+2\varepsilon'})\}^{1+\varepsilon}$. Ahora bien, de nuevo por Prop. I.6, $G^{-1}(\xi^{1+\varepsilon}) \leq (G^{-1}(\xi))^{1+2\varepsilon}$ si $\xi > \xi_0 \Rightarrow$ agrupando todas las desigualdades, tenemos, para $r > r_0(\varepsilon,\varepsilon') > 0$, $\frac{1}{2e}\cdot\mu_g^{-1}(F(r)) \leq$ $\leq [G^{-1}(\mu_f(2er^{1+2\varepsilon'}))]^{1+2\varepsilon} \Rightarrow \frac{\log(2e)^{-1}}{\log r} + \frac{\log\mu_g^{-1}(F(r))}{\log r} \leq$ $\leq (1+2\varepsilon)\cdot\frac{\log G^{-1}(\mu_f(2er^{1+2\varepsilon'}))}{\log(2er^{1+2\varepsilon'})}\cdot\frac{\log(2e)+(1+2\varepsilon')\log r}{\log r} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ tomando límites superiores en ambos miembros, $\rho_2 \leq (1+2\varepsilon)\cdot(1+2\varepsilon')\rho_1$ $\forall\varepsilon,\varepsilon' > 0 \Rightarrow \rho_2 \leq \rho_1$ ∎

<u>COROLARIO 1</u>.- "Las mismas expresiones del teorema anterior continúan siendo válidas cuando se sustituyen f y g por dos funciones f_1 y g_1 respectivamente, tales que los módulos de cada uno de los coeficientes de Taylor de $f(g)$ coincidan con los de los coeficientes de Taylor del mismo orden de f_1 (g_1, resp.). Más generalmente, basta para ello que $\exists z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ y $N \in \mathbb{N}$/ $|f^{(n)}(z_0)| = |f_1^{(n)}(z_0)|$, $|g^{(n)}(z_1)| =$

$= \left|g_1^{(n)}(z_1)\right| \quad \forall n \geq N$, siempre que al menos una de las dos funciones f o g sea trascendente; ello es válido también para f y g polinómicas si $N = 1$. En particular, si $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ y $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$, entonces $\rho_g(f) = \rho_{g^*}(f^*) = \rho_g(f^*) = \rho_{g^*}(f)$, y análogamente para el orden inferior, siendo $f^*(z) = \sum_0^\infty |a_n| z^n$ y $g^*(z) = \sum_0^\infty |b_n| z^n$".

Demostración: La primera parte del corolario es inmediata, ya que μ_f y μ_g sólo dependen de los módulos de los coeficientes de Taylor de f y g. En cuanto a la segunda parte, no es preciso que se tomen las derivadas en el origen, pues una función $T(z)$ tiene el mismo orden que $T(z+a)$ $\forall a \in \mathbb{C}$ por el Teorema I.2. Si f no es un polinomio, tiene el mismo orden superior e inferior que $f(z) - \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^i$ respecto de cualquier función h, pues el orden respecto de h de $\pm \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^i$ no supera el de f, y se aplica entonces dos veces el teorema I.5(i). El resultado se extrae ahora de la 1ª parte. Lo mismo ocurre con g, si es trascendente, respecto de $g(z) - \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^i$; luego llegamos al mismo resultado, teniendo en cuenta la Prop. I.3(a) ■

COROLARIO 2.- "Si $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$ y ν denota la función rango del término máximo de f, se cumple:

$$\begin{matrix}\rho_g(f) \\ \lambda_g(f)\end{matrix} \geqslant \begin{matrix}\limsup_{r\to\infty} \\ \liminf_{r\to\infty}\end{matrix} \frac{\log G^{-1}(\exp \nu(r))}{\log r} \qquad (23),$$

y la igualdad es válida siempre que se verifiquen las dos condiciones:

$$\forall c>0, \lim_{t\to\infty} \frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} = 1 \qquad (24),$$

$$\exists M>0/ \ \forall t > t_o, \quad G^*(t)\cdot\log G^*(t) \leqslant$$

$$\leqslant Mt\cdot G^{*\prime}(t) \quad \text{para algún} \quad t_o > 0 \qquad (25),$$

siendo G^* la función módulo máximo de g^*".

Demostración: Por (20), $\exp \nu(r) < \mu_f(er) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log G^{-1}(\exp \nu(r))}{\log r} < \frac{\log G^{-1}(\mu_f(er))}{\log (er)}\cdot\frac{1+\log r}{\log r},$$

y basta ahora tomar límites superiores e inferiores para obtener (23), teniendo en cuenta el teorema. Supongamos ahora que se cumplen las condiciones (24) y (25). Observemos en primer lugar que $G^*(t) = \sum_0^\infty |b_n| t^n$ es diferenciable -incluso analítica- para $t>0$. Consideremos las funciones $\alpha(t) = \log G^{*-1}(\exp t)$ y $\beta(t) = t$ $(t>0)$. Es claro que $\beta \in L^o$. Si probamos que $\alpha \in \Lambda$ y se dan (12) y (13) tendremos, según (18), $\rho_g(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{*-1}(\exp \nu(r))}{\log r}$, y lo propio para $\lambda_g(f)$. Pero $G(t) = \max_{|z|=t} \left|\sum_0^\infty b_n z^n\right| \leqslant \sum_0^\infty |b_n| t^n = G^*(t) \Rightarrow \log G^{*-1}(\exp t) \leqslant \log G^{-1}(\exp t)$. Haciendo $t = \nu(r)$, dividiendo por $\log r$ y tomando límites superiores e inferiores, resulta la igualdad en (23).

La condición (12) se cumple evidentemente, sin más que tomar

$\psi(x) \equiv x$; α es creciente estrictamente, diferenciable y

$\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = +\infty$; que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(cx)}{\alpha(x)} = 1 \quad \forall c>0$ se deduce de la

hipótesis (24): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(cx)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log G^{*-1}(\exp\,(cr))}{\log G^{*-1}(\exp\,r)} =$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}(\exp(cr))}{\log G^{-1}(\exp\,r)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} = 1$, donde en

la 2ª igualdad se ha usado que $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\log G^{*-1}(s)}{\log G^{-1}(s)} = \rho_{g^*}(g) = 1$

según el corolario 1 al Teorema 3. Y por último (13) resulta

de la hipótesis (25); en efecto:

$$F(x) = \alpha(x) \Rightarrow \frac{d\,F(x)}{d(\log x)} = \frac{d(\log G^{*-1}(e^x))}{dx} \cdot \frac{dx}{d(\log x)} =$$

$$= \frac{e^x/G^{*\prime}(G^{*-1}(e^x))}{G^{*-1}(e^x)} \cdot x = \frac{xe^x}{G^{*-1}(e^x)\cdot G^{*\prime}(G^{*-1}(e^x))} \Rightarrow \text{si } t =$$

$= G^{*-1}(e^x)$, resulta $\dfrac{G^*(t)\cdot\log G^*(t)}{t\cdot G^{*\prime}(t)} \leq M$ para $t > t_0$, luego

$\dfrac{d\,F(x)}{d(\log x)} = O(1) \quad (x\to+\infty)$ ■

Observemos que se da (25) si $K\cdot G^{*\prime}(r) \geq G^*(r) \quad \forall r > r_0$.

<u>TEOREMA 4</u>.- "Consideremos $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$, $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n z^n$, de modo que g verifica la condición (24). Entonces

$$\liminf_n \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})} \leq \lambda_g(f) \qquad (26).$$

Si además se da (25), tenemos

$$\rho_g(f) = \limsup_n \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})} \qquad (27).$$

Si se cumplen (24) y (25) y $|a_n/a_{n+1}|$ es no decreciente para $n \geq n_0$, tiene lugar en tal caso la igualdad en (26). Si se cumplen (24) y (25) y existe el límite $\lim_{n} \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})}$, finito o infinito, entonces $f\sim g$ y tal límite es el valor común de $\rho_g(f)$ y $\lambda_g(f)$".

Demostración: El teorema es una consecuencia inmediata de (11) y (15), teniendo presente que, en nuestro caso, $\beta(x) = x$, $F(x) = \alpha(x)$, $F(x,c) = c\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x) = \log G^{*-1}(\exp t)$.

El cociente correspondiente es $\frac{\log G^{*-1}(e^n)}{\frac{1}{n}\cdot\log\frac{1}{|a_n|}}$, pero se puede sustituir el numerador por $\log G^{-1}(e^n)$, pues $\lim_{n} \frac{\log G^{*-1}(e^n)}{\log G^{-1}(e^n)} = 1$, ya que $\lim_{r\to\infty} \frac{\log G^{*-1}(r)}{\log G^{-1}(r)} = 1$■

La igualdad (27) del Teorema anterior se asegura con (24) y (25). Damos seguidamente condiciones suficientes más prácticas para que tengan lugar tales propiedades.

PROPOSICION 1.- "Si $g\in\mathcal{E}$ verifica (I;29), también verifica (24)".

Demostración: Es suficiente probar (24) $\forall c>1$. Si $c>1$,

$$\frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} \geq \frac{\log G^{-1}(G(e^t))}{t} = 1 \quad \forall t>t_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} \geq 1$. De darse (I;29), elegido $\sigma>1$, $\exists r_0(\sigma)>0/\ \forall r>r_0$, $(G(r))^c \leq G(r^\sigma) \Rightarrow (G(e^t))^c \leq G(e^{t\sigma})$ asintóticamente $\Rightarrow \frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} \leq \sigma \Rightarrow$ el límite superior del cociente no supera σ $\forall\sigma>1 \Rightarrow \exists\lim_{t\to\infty} \frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} = 1$■

DEFINICION 1.- "Sea $K>0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales se dirá K-monótona no decreciente

(<u>esencialmente</u>) cuando $x_n \leq Kx_{n+1}$ $\forall n \geq 0$ ($\forall n \geq n_0$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, resp.)".

<u>PROPOSICION 2.-</u> "Si $g \in \dot{\mathcal{E}}$ es tal que la sucesión $\{|g^{(n)}(0)|\}_{n=0}^{\infty}$ es K-monótona no decreciente para algún $K > 0$, entonces g verifica (25)".

<u>Demostración:</u> Sea $g(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$, $b_n = g^{(n)}(0)/n! \Rightarrow |b_n| \leq K|b_{n+1}|\cdot(n+1)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Tenemos:
$G^{*\prime}(t) = \sum_1^{\infty} n|b_n|t^{n-1} \Rightarrow K\cdot G^{*\prime}(t) = K|b_1| + K\cdot 2|b_2|t + K\cdot 3|b_3|t^2 + \ldots \geq |b_0| + |b_1|t + |b_2|t^2 + \ldots = G^*(t) \Rightarrow KtG^{*\prime}(t) \geq tG^*(t) > G^*(t)\cdot\log t$ $\forall t > 0$■

<u>COROLARIO 1.-</u> "Sean $f,g \in \dot{\mathcal{E}}$ de modo que g cumple (24) y $\exists a \in \mathbb{C}$ tal que la sucesión $\{|g^{(n)}(a)|\}_{n=0}^{\infty}$ sea K-monótona no decreciente esencialmente, para algún $K > 0$. Entonces

$$\rho_g(f) = \lim_n \sup \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})}".$$

<u>Demostración:</u> Por el Teorema I.2, puede suponerse que $a = 0$, pues $g(z)$ y $g(z+a) = \sum_0^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\cdot(z-a)^n$ tienen el mismo orden inferior respecto de cualquier $h \in \dot{\mathcal{E}}$, y se aplica la Prop. I.3(a). Es fácil comprobar que g es necesariamente trascendente, pues si fuera un polinomio, $\lim_{t\to\infty} \frac{\log G^{-1}[(G(e^t))^c]}{t} = c$ $\forall c > 0$, y no se cumpliría (24). Podemos suprimir por tanto sin que varíe el orden los suficien-

tes términos del desarrollo en serie de Taylor de g como para que $\{|g^{(n)}(0)|\}_{n=0}^{\infty}$ cumpla, sin pérdida de generalidad, $|g^{(n)}(0)| \leq K|g^{(n+1)}(0)| \quad \forall n \geq 0$. Aplicar ahora la Prop. 2 y el Teorema 4■

<u>COROLARIO 2</u>.- "Sean $f,g \in \dot{\mathcal{E}}$ y $K>0$. Si $\exists a \in \mathbb{C}$ tal que la sucesión $\{|g^{(n)}(a)|\}_{n=0}^{\infty}$ sea K-monótona no decreciente y $\{n\,|g^{(n)}(a)|^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, tendremos

$$\rho_g(f) = \limsup_n \frac{n \cdot \log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})}\text{''}.$$

<u>Demostración</u>: Como antes, podemos suponer $a = 0$ y $|b_n| \leq K(n+1)|b_{n+1}| \quad \forall n \geq 0$, donde $b_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

Por otra parte, $|b_k| \leq K^{n-k} \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot |b_n| \leq K^n \cdot n!\,|b_n|$ $\forall n,k \geq 0$ $(k \leq n)$ ya que se puede considerar $K>1$. Sea $\sigma_n = K^n \cdot n! \Rightarrow (\sigma_n^2 |b_n|)^{1/n} = K^2 (n!)^2 \cdot |g^{(n)}(0)/n!|^{1/n} = K^2 |g^{(n)}(0)|^{1/n} \cdot (n!)^{1/n}$. Según la Fórmula de Stirling, $(\sigma_n^2 |b_n|)^{1/n} \sim K^2 |g^{(n)}(0)|^{1/n} \cdot \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/2n} \sim (K^2/e) \cdot |g^{(n)}(0)|^{1/n} \cdot n \quad (n \to \infty)$ pues $(2\pi n)^{1/n} \to 1$.

Pero la sucesión $\{n\,|g^{(n)}(0)|^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada $\Rightarrow \{(\sigma_n^2 |b_n|)^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada $\Rightarrow g^*$ verifica (I;29) (Prop. I.14 y su corolario) $\Rightarrow g^*$ verifica (24) por Prop. 1 $\Rightarrow g$ también cumple (24), como se probó en la demostración del corolario 2 al Teorema 3. Usese ahora el corolario anterior■

<u>PROPOSICION 3</u>.- "Sean $f,g \in \dot{\mathcal{E}}$, $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$, tales que:

a) f y g verifican (24) y (25).

b) $\exists \lim_n \dfrac{n\cdot\log F^{-1}(e^n)}{\log(|b_n|^{-1})} = \alpha\in(0,+\infty)$.

c) $\exists n_0\in\{0,1,2,\dots\}/\ a_n \neq 0 \neq b_n \quad \forall n\geq n_0$.

Entonces $\rho_g(f) = \limsup_n \dfrac{\log|b_n|}{\log|a_n|}$ (28)".

Demostración: Puesto que $a_n, b_n \longrightarrow 0$, $\exists n_1\geq n_0/\ 0<|a_n|, |b_n|< <1 \quad \forall n\geq n_1$, y tiene sentido el cociente de sus logaritmos. Por (a) y (b), $f\sim g$ y $\alpha = \rho_f(g) = \dfrac{1}{\rho_g(f)}\in(0,+\infty)$. Tenemos: $\dfrac{\log|b_n|}{\log|a_n|} = A_n\cdot B_n\cdot C_n$, siendo $A_n = \dfrac{\log(|b_n|^{-1})}{n\cdot\log F^{-1}(e^n)}$, $B_n = \dfrac{\log F^{-1}(e^n)}{\log G^{-1}(e^n)}$ y $C_n = \dfrac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(|a_n|^{-1})}$. Pero $A_n\longrightarrow\rho_g(f)$, $B_n\longrightarrow\rho_f(g)\in(0,+\infty)$ pues $\exists\lim_{T\to\infty}\dfrac{\log F^{-1}(T)}{\log G^{-1}(T)} = \rho_f(g)$ y $\limsup_n C_n = \rho_g(f)$ por el Teorema 4. Luego se da (28), pues dos de los factores A_n, B_n, C_n tienden a límites finitos∎

Sin imponer tantas condiciones, es posible conseguir un resultado parcial importante sobre acotación del orden relativo.

TEOREMA 5.- "Sean $f,g\in\mathcal{E}$ trascendentes, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$. Llamamos $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ a la sucesión estrictamente creciente constituída por los elementos de $S = \{m\geq 0:\ a_m\neq 0 \text{ o } b_m\neq 0\}$. Sea $\varphi(k) = \dfrac{\log|b_{n_k}|}{\log|a_{n_k}|}$, interpretándose su valor como 0 si $a_{n_k} = 0$, y como ∞ si $b_{n_k} = 0$. Llamamos $\alpha = \limsup_k \varphi(k)$, $\beta = \liminf_k \varphi(k)$. Entonces:

a) Si o bien $\alpha \geq 1$, o bien g cumple (I;29) para su módulo máximo y $\alpha > 0$, se verifica

$$\rho_g(f) \leq \alpha .$$

b) Si o bien $\beta \leq 1$, o bien f cumple (I;29) para su módulo máximo y $\beta < \infty$, se verifica

$$\lambda_g(f) \geq \beta .$$

c) Si f y g cumplen la condición (I;29) para sus módulos máximos y $\exists \lim_k \varphi(k) = \gamma \in (0,+\infty)$, entonces $f \sim g$ y $\rho_g(f) = \gamma$. Si $\gamma = 1$, se verifica lo mismo sin necesidad de imponer (I;29)".

<u>Demostración</u>: Observemos en primer lugar que $\{a_{n_k}\}$ y $\{b_{n_k}\}$ convergen a $0 \Rightarrow \varphi(k) = \log(|b_{n_k}|^{-1})/\log(|a_{n_k}|^{-1}) > 0$ desde cierto k_o en adelante. Podemos suponer $k_o = 1$ pues, por ser f y g trascendentes, no varía el orden al sumar o restar un polinomio. Notemos que (c) es consecuencia de la aplicación simultánea de (a) y (b), y éste a su vez se desprende de (a) y de la relación $[\rho_f(g)]^{-1} = \lambda_g(f)$. Luego es suficiente demostrar (a).

Si $b_{n_k} = 0$ para infinitos $k \Rightarrow \varphi(k) = \infty$ para esos $k \Rightarrow \alpha = \infty$ y sería trivial. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se puede partir de que $\forall k \in \mathbb{N}$ es $0 < |b_{n_k}| < 1$ y $|a_{n_k}| < 1$, donde se ha aplicado la convergencia a 0, y además el hecho $\alpha<\infty$. Tenemos: $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$, $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} z^{n_k}$.

Llamamos $L=\alpha^{-1}=\liminf_{k} \frac{\log(|a_{n_k}|^{-1})}{\log(|b_{n_k}|^{-1})} \Rightarrow 0<L<+\infty$ pues $0<\alpha<+\infty$. Entonces para $k>k_1$ es $\log(1/|a_{n_k}|)>(L-\varepsilon)\cdot$ $\cdot\log(1/|b_{n_k}|)$, con $\varepsilon>0$ previamente fijado $\Rightarrow |a_{n_k}|<|b_{n_k}|^{L-\varepsilon}$ $(k>k_1) \Rightarrow |f(z)|<Ar^{n_{k_1}}+\sum_{k=k_1+1}^{\infty}|b_{n_k}|^{L-\varepsilon}\cdot r^{n_k}$ $(r>r_o)$. Consideremos $L'\in(\varepsilon,L) \Rightarrow |f(z)|<A^{n_{k_1}}+\sum_{k=k_1+1}^{\infty}(|b_{n_k}|^{L'-\varepsilon}\cdot r^{n_k})|b_{n_k}|^{L-L'}$ si $|z|=r$. Por las desigualdades de Cauchy, $|b_{n_k}|\cdot(r^{1/L'-\varepsilon})^{n_k}\leq$ $\leq G(r^{1/L'-\varepsilon})$. Para $r>r_1$ $(r_1>r_o)$, $Ar^{n_{k_1}}<G(r^{1/L'-\varepsilon})^{L'-\varepsilon}$. La serie de términos no negativos $\sum_{k=1}^{\infty}|b_{n_k}|^{L-L'}=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{L-L'}$ converge, sin más que aplicar el criterio de la raíz: $\lim_n |b_n|^{\frac{L-L'}{n}}=(\lim_n \sqrt[n]{|b_n|})^{L-L'}=0$, pues $f\in\mathcal{E}$. Si la suma es B, $|f(z)|<(1+B)\cdot(G(r^{\frac{1}{L'-\varepsilon}}))^{L'-\varepsilon}$. Dado $s>1$, $(1+B)\cdot$ $\cdot G(r^{1/L'-\varepsilon})^{L'-\varepsilon}<(G(r^{s/L'-\varepsilon}))^{L'-\varepsilon}$ asintóticamente.

Distinguimos ahora dos casos:

- Si $\alpha\geq 1 \Rightarrow L\leq 1 \Rightarrow L'-\varepsilon<1 \Rightarrow (G(r^{s/L'-\varepsilon}))^{L'-\varepsilon}<G(r^{s/L'-\varepsilon})$.
- Si $\alpha>0$ es arbitrario y g cumple (I;29) $\Rightarrow$ fijado $\sigma>1$, $(G(r^{s/L'-\varepsilon}))^{L'-\varepsilon}<G(r^{\sigma s/L'-\varepsilon})$ para r suficientemente grande.

En ambos casos podemos decir que $F(r)<G(r^{\sigma s/L'-\varepsilon})$ $\forall r>$ $>R=R(\varepsilon,L,L',s,\sigma)>0 \Rightarrow \frac{\log G^{-1}(F(r))}{\log r}<\frac{\sigma s}{L'-\varepsilon} \Rightarrow \rho_g(f)\leq$ $\leq\frac{\sigma s}{L'-\varepsilon}$ $\forall\sigma,s>1$, $\forall\varepsilon>0$ suficientemente pequeño y $\forall L'\in(\varepsilon,L)\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_g(f) \leq L^{-1} = \alpha$ ■

EJEMPLO.- Consideremos las funciones enteras $f(z) = \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(n \cdot \log n)^{n^3}}$ y $g(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{5n+2}}{n^{n^3} \cdot (1+\log n)^n}$. Para evaluar el orden $\rho = \rho_g(f)$ consideramos $f_1(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n \cdot \log n)^{n^3}}$ y $g_1(z) = \frac{g(z)}{z^2}$, lo cual no varía el resultado, según el corolario 1 al teorema 3 y la Prop. I.12. Definimos $f_2(z) = \sum_{2}^{\infty} \frac{z^n}{(n \cdot \log n)^{n^3}}$ y $g_2(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n^3} \cdot (1+\log n)^n}$. Entonces $f_1(z) = f_2(z^2)$ y $g_1(z) = g_2(z^5)$. Todos los coeficientes de f_2 y g_2 son no nulos. Tenemos: $\varphi(n) = \frac{\log[n^{n^3} \cdot (1+\log n)^n]}{\log(n \cdot \log n)^{n^3}} = \frac{1 + (1/n^2) \cdot \log(1+\log n)}{1 + \frac{\log \log n}{\log n}}$. Así que $\lim_n \varphi(n) = 1$.

Luego, según el Teorema 5(c), $f_2 \sim g_2$ y $\rho_{g_2}(f_2) = 1$. Aplicando la Prop. I.9, $\rho = \rho_{g_1}(f_1) = \rho_{g_2 \circ Q}(f_2 \circ P)$ con $P(z) = z^2$ y $Q(z) = z^5$. Entonces $\rho = \rho_{g_2 \circ Q}(g_2) \cdot \rho_{g_2}(f_2) \cdot \rho_{g_2}(f_2 \circ P) = \frac{1}{\text{grado}(Q)} \cdot 1 \cdot \text{grado}(P) = 2/5$ y $f \sim g$.

Para terminar este parágrafo mencionaremos dos resultados más. El primero de ellos fue probado por S.M. Shah (|35|) y establece: Sea $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ entera trascendente y E el conjunto de las sucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos $\{n_k\}_1^{\infty}$ tales que $\text{máx}\{|a_{n_{k-1}}|, |a_{n_k}|\} > 0 \ \forall k \geq 2$. Entonces:

$$\lambda(\alpha, \beta; f) = \sup_{\{n_k\}} \left[\liminf_k \alpha(n_{k-1}) / \beta\left(\frac{1}{n_k} \cdot \log \frac{1}{|a_{n_k}|}\right) \right] \quad (29),$$

$$\lambda(\alpha,\beta;f) = \sup_{\{n_k\}\in E}\left[\liminf_k \alpha(n_{k-1})/\beta\left(\frac{1}{n_k-n_{k-1}}\cdot\log\frac{|a_{n_{k-1}}|}{|a_{n_k}|}\right)\right] \quad (30),$$

donde el supremo en (29) se toma sobre todas las $\{n_k\}$ estrictamente crecientes, y en (30) se toma sobre todas las $\{n_k\}\in E$.

En cuanto al segundo, S. K. Bajpai, S. K. Singh Gautan y S. S. Bajpai obtuvieron en 1.980 el siguiente teorema: Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}$ una función entera, donde $a_n \neq 0 \;\; \forall n \geq 0$ y $\{\lambda_n\}_0^\infty$ es una sucesión estrictamente creciente de números enteros no negativos. Supongamos que $\alpha\in\Lambda$, $\beta\in L^0$, de modo que se cumple la condición (14). Si $\psi(k) = (\log|a_{k-1}/a_k|)/\lambda_k-\lambda_{k-1}$ es una función no decreciente de k, entonces

$$\varrho(\alpha,\beta;f) = \limsup_k \alpha(\lambda_k)/\beta(\psi(k)) \qquad (|4|) \qquad (31).$$

De ellos podemos deducir otros dos teoremas de expresión del orden relativo en función de los coeficientes de Taylor. No damos las demostraciones de tales teoremas ni del corolario, pues siguen los mismos pasos del corolario 2 al Teorema 3 y de la Prop. 3.

<u>TEOREMA 6</u>.- "Sean f y g trascendentes, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ y E el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos $\{n_k\}_1^\infty$ tales que $\max\{|a_{n_{k-1}}|,|a_{n_k}|\}>0 \;\; \forall k\geq 2$. Si g verifica (24), se tiene:

$$\lambda_g(f) = \sup_{\{n_k\}}\left[\liminf_k \log G^{-1}(e^{n_{k-1}})/\frac{1}{n_k}\cdot\log\frac{1}{|a_{n_k}|}\right.$$

$$= \sup_{\{n_k\}\in E} \left[\liminf_k \frac{\log G^{-1}(e^{n_{k-1}})}{\frac{1}{n_k - n_{k-1}} \cdot \log |a_{n_{k-1}}/a_{n_k}|} \right] \qquad (32)$$

<u>TEOREMA 7</u>.- "Sean $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}$, $g(z) \in \mathcal{E}$, donde $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 0$, $\{\lambda_n\}_0^\infty$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros no negativos, y sea $\psi(k) = \frac{\log |a_{k-1}/a_k|}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$ $(k \geq 1)$. Si g cumple (24) y (25) y ψ es una función no decreciente de k, se verifica:

$$\rho_g(f) = \limsup_k \frac{\log G^{-1}(e^{\lambda_k})}{\psi(k)} \qquad (33)".$$

<u>COROLARIO</u>.- "Sean $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$, $a_n \neq 0 \neq b_n$ $\forall n \geq n_0$. Bajo las hipótesis:

a) f y g cumplen (24) y (25),

b) las sucesiones $|a_{n-1}/a_n|$, $|b_{n-1}/b_n|$ son no decrecientes esencialmente,

c) $f \sim g$, y

d) $\exists \lim_n \dfrac{\log F^{-1}(e^n)}{\log \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|} \in (0, +\infty)$,

se verifica:

$$\rho_g(f) = \limsup_n \frac{\log |b_{n-1}/b_n|}{\log |a_{n-1}/a_n|} \qquad (34)".$$

(II. 4) ORDEN RELATIVO Y APROXIMACION POLINOMICA.

Estableceremos en este parágrafo cierto número de resultados que relacionan el crecimiento de una función entera con su aproximación polinómica en un intervalo real compacto. Sea $f(x)$ una función continua a valores reales o complejos definida sobre $[-1,1]$, y sea

$$E_n(f) = \inf_{p\in\pi_n} \| f - p\| \quad (n = 0,1,2,\dots) \qquad (35),$$

donde la norma es la del supremo sobre $[-1,1]$ y π_n denota el conjunto de todos los polinomios p de grado a lo más n. Se demuestra (|26|;p. 16) que para cada n existe un único $q\in\pi_n$ tal que $E_n(f) = \|f - q\|$. S. Bernstein (|5|;p. 118) probó que

$$\lim_n [E_n(f)]^{1/n} = 0 \qquad (36)$$

si y sólo si $f(x)$ es la restricción a $[-1,1]$ de una función entera. R. S. Varga (|39|) obtiene resultados dando el orden y el tipo de esta función entera. Reddy (|29| y |30|) estudió el orden exponencial k-ésimo superior e inferior, y los diferentes tipos, y Juneja (|17|) estudió el orden inferior. En las referencias mencionadas se demuestran las aserciones que resumimos en el siguiente

TEOREMA 8.- "A) Sea $f(x)$ una función real continua sobre $[-1,1]$ y k un entero positivo. Entonces

$$\limsup_n \frac{n\cdot\log_k n}{\log(1/E_n(f))} = \sigma$$

satisface $0\leqslant\sigma<\infty$ si y sólo si $f(x)$ es la restricción a $[-1,1]$ de una función entera de índice a lo más k, con $\rho(k) = \sigma$. En tal caso,

$$\limsup_n \frac{\log_k n}{\log(E_n(f)/E_{n+1}(f))} \geq \rho(k) \geq \lambda(k) \geq$$

$$\geq \liminf_n \frac{n\cdot\log_k n}{\log(1/E_n(f))} \geq \liminf_n \frac{\log_k n}{\log(E_n(f)/E_{n+1}(f))}$$

Si $E_n(f)/E_{n+1}(f)$ es no decreciente para $n \geq n_o$, las desigualdades 1^a, 3^a y 4^a son de hecho igualdades.

B) Sea $f(x)$ una función real continua que es la restricción a $[-1,1]$ de una función entera de índice k. Entonces $f(z)$ es de orden k-ésimo inferior $\lambda(k)$ si y sólo si

$$\lambda(k) = \max_{\{n_h\}} \liminf_h \frac{n_h\cdot\log_k n_{h-1}}{\log(1/E_{n_h}(f))},$$

donde el máximo se toma sobre todas las sucesiones estrictamente crecientes $\{n_h\}$ de números naturales. Además, la igualdad anterior equivale a la siguiente:

$$\lambda(k) = \max_{\{n_h\}} \liminf_h \frac{(n_h - n_{h-1})\cdot\log_k n_{h-1}}{\log(E_{n_{h-1}}(f)/E_{n_h}(f))}\text{''}.$$

Shah (|35|) efectuó una generalización de este teorema para los órdenes $\rho(\alpha,\beta;f)$ y $\lambda(\alpha,\beta;f)$, siendo $\alpha\in\Lambda$ y $\beta\in L^o$:

<u>TEOREMA 9</u>.- "Sea $f(x)$ real y continua sobre $[-1,1]$ no polinómica y supongamos que (36) es cierto. Entonces $f(x)$ es la restricción a $[-1,1]$ de una función entera $f(z)$ y se tiene:

i) $\lambda(\alpha,\beta;f) \geqslant \liminf\limits_{n} \alpha(n)/\beta\left(\frac{1}{n}\cdot\log \frac{1}{E_n(f)}\right)$ (37).

ii) Supongamos también (12) y (14). Entonces

$$\rho(\alpha,\beta;f) = \limsup_{n} \alpha(n)/\beta\left(\frac{1}{n}\cdot\log \frac{1}{E_n(f)}\right) \quad (38).$$

iii) Supongamos además que $E_n(f)/E_{n+1}(f)$ es una función no decreciente de n para $n \geqslant n_0$.

En tal caso vale el signo de igualdad en (37).

iv) $$\lambda(\alpha,\beta;f) = \sup_{\{n_k\}} \left[\liminf_{k} \frac{\alpha(n_{k-1})}{\beta\left(\frac{1}{n_k}\cdot\log\frac{1}{E_{n_k}(f)}\right)} \right] =$$

$$= \sup_{\{n_k\}} \left[\liminf_{k} \frac{\alpha(n_{k-1})}{\beta\left(\frac{1}{n_k - n_{k-1}}\cdot\log(E_{n_{k-1}}(f)/E_{n_k}(f))\right)} \right] \quad (3$$

donde $\{n_k\}$ es cualquier sucesión estrictamente creciente de números naturales".

Haciendo en nuestro caso, como siempre, $\alpha(t) = \log G^{*-1}(e^t)$ y $\beta(t) = t$ $(t>0)$, no resulta difícil deducir nuestro próximo teorema, cuya prueba omitimos.

<u>TEOREMA 10</u>.- "Sean $f,g \in \mathcal{E}$ trascendentes, $d_n = E_n(f^*)$, $e_n = E_n(g^*)$. Se verifica:

a) Si g cumple (24),

$$\lambda_g(f) \geqslant \liminf_{n} \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(1/d_n)} \quad (40).$$

b) Si g cumple (24) y (25),

$$\rho_g(f) = \limsup_{n} \frac{n\cdot\log G^{-1}(e^n)}{\log(1/d_n)} \quad (41).$$

c) Si g cumple (24) y (25), y d_n/d_{n+1} es no decreciente para $n \geqslant n_0$, se da la igualdad en (40).

d) $\lambda_g(f) = \sup_{\{n_k\}} \left[\liminf_k \dfrac{n_k \cdot \log G^{-1}(e^{n_{k-1}})}{\log(1/d_{n_k})}\right] =$

$$= \sup_{\{n_k\}} \left[\liminf_k \frac{(n_k - n_{k-1}) \cdot \log G^{-1}(e^{n_{k-1}})}{\log(d_{n_{k-1}}/d_{n_k})}\right] \quad (42$$

donde $\{n_k\}$ es cualquier sucesión estrictamente creciente de números naturales, si g verifica (24).

e) Si f y g cumplen (24) y (25) y existe el $\lim_n \dfrac{n \cdot \log F^{-1}(e^n)}{\log(1/e_n)} \in (0,+\infty)$, entonces

$$f \sim g \quad \text{y} \quad \rho_g(f) = \limsup_n \frac{\log e_n}{\log d_n} \qquad (43)".$$

(II. 5) FUNCIONES ENTERAS EQUIVALENTES CON RESPECTO AL CRECIMIENTO.

Vamos a dar un concepto, entre funciones enteras, que expresa cuándo dos de ellas crecen aproximadamente igual comparativamente a cualquier función entera.

<u>DEFINICION 2</u>.- "Si $f, g \in \mathcal{E}$, diremos que f es <u>ρ-equivalente</u> a g, o equivalente a g con respecto al crecimiento, cuando $\forall h \in \mathcal{E}$, $\rho_h(f) = \rho_h(g)$".

Pretendemos dar una definición alternativa de ρ-equivalencia en la cual no intervengan nada más que las dos funciones f y g a comparar. Es claro en primer lugar que la relación anterior, que simbolizaremos por $f \approx g$, es efectivamente de equivalencia. Si $f \equiv$ cte., la única función ρ-equivalente es ella misma; luego este caso carece de interés y podemos restringirnos a la relación $\approx$ inducida en $\dot{\mathcal{E}}$. El conjunto cociente $\hat{\dot{\mathcal{E}}} = \dot{\mathcal{E}}/_{\approx}$ consta de las clases de ρ-equivalencia $\langle f\rangle = \{g \in \dot{\mathcal{E}} : \rho_h(f) = \rho_h(g) \ \forall h \in \dot{\mathcal{E}}\}$ $(f \in \dot{\mathcal{E}})$. El resultado de la siguiente proposición se ha usado de hecho anteriormente.

PROPOSICION 4.- "Si $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$, $f \approx g$ si y sólo si

$$\log F^{-1}(r) \sim \log G^{-1}(r) \quad (r \to \infty)".$$

Demostración: Si $f \approx g$, en particular $\rho_f(f) = 1 = \rho_f(g)$ y $\rho_g(g) = 1 = \rho_g(f) \Rightarrow \lambda_g(f) = [\rho_f(g)]^{-1} = 1 = \rho_g(f) \Rightarrow \exists \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}(F(r))}{\log r} = 1$. Haciendo $F(r) = s$, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}(s)}{\log F^{-1}(s)} = 1$. Recíprocamente, si se da este límite, $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log F^{-1}(H(r))}{\log r} \Rightarrow \lambda_g(h) = \lambda_f(h)$ $\forall h \in \dot{\mathcal{E}}$, y tomando inversos, $\rho_h(g) = \rho_h(f)$ $\forall h \in \dot{\mathcal{E}}$ ∎

COROLARIO.- "La relación $f \approx g$ en $\dot{\mathcal{E}}$ es más fina que $f \sim g$".

PROPOSICION 5.- "En $\dot{\mathcal{E}}$, $f \approx g$ si y sólo si $\forall g \in \dot{\mathcal{E}}$, $\lambda_h(f) = \lambda_h(g)$".

Demostración: Si se da $\lambda_h(f) = \lambda_h(g)$ $\forall h \in \dot{\mathcal{E}}$, en particular haciendo sucesivamente $h = f, g$, resulta $\lambda_f(f) = 1 = \lambda_f(g)$, $\lambda_g(f) = 1 = \lambda_g(g) \Rightarrow \rho_g(f) = [\lambda_f(g)]^{-1} = 1 = \lambda_g(f) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\log G^{-1}(F(s))}{\log s} = 1$, y basta poner $F(s) = r$ y aplicar la Prop. 4. Inversamente, si $f \approx g$, el hecho $\lambda_h(f) = \lambda_h(g)$

sigue de una argumentación similar a la de la Prop. 4 ■

De los resultados obtenidos en los parágrafos anteriores y en el primer capítulo, podemos deducir:

PROPOSICION 6.- "a) Si $f \in \dot{\mathcal{E}}$ y L es una función lineal afín no constante, entonces $L \circ f$, $f \circ L \in \langle f \rangle$.

b) Si f es trascendente $\Rightarrow f^{(k)} \in \langle f \rangle \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) Para cada entero positivo n, el conjunto $\mathcal{P}_n$ de las funciones polinómicas de grado n, constituye una clase de ρ-equivalencia.

d) Si f es trascendente y satisface (I;29), entonces $f^n \approx f$ para cada n entero positivo.

e) Si $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$ son tales que $\exists z_0 \in \mathbb{C} / |f^{(n)}(z_0)| = |g^{(n)}(z_0)| \ \forall n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$ si f es trascendente), se tiene $f \approx g$.

f) Si f es trascendente y P es un polinomio no idénticamente nulo, es $P \cdot f \approx f$.

g) Si $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ y $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ son trascendentes y $S = \{n_k\}_1^\infty$ es la sucesión de números naturales tales que $a_m \neq 0$ o $b_m \neq 0$ si $m \in S$, de modo que $\log |a_{n_k}| \sim \log |b_{n_k}|$ $(k \to \infty)$, entonces $f \approx g$.

h) Si $f,g,T\in\dot{\mathcal{E}}$ y $f\approx g \Rightarrow T\circ f\approx T\circ g$".

Demostración: a) Consecuencia del Teorema I.2.

b) Consecuencia del Teorema 1.

c) Consecuencia del Teorema I.1.

d) Consecuencia del corolario 2 al Teorema I.6.

e) Consecuencia del corolario 1 al Teorema 3.

f) Consecuencia de la Prop. I. 12.

g) Consecuencia del Teorema 5.

h) Consecuencia del Teorema I. 3■

(II. 6) ACCESIBILIDAD DE FAMILIAS DE FUNCIONES ENTERAS.

Ya vimos en el Capítulo I (Prop. I. 1) cómo la escala de las funciones exponenciales $\{\exp_n z\}_{n\geq 1}$ no basta para describir el crecimiento de todas las funciones enteras. Esto es aun más general, en el sentido de que ninguna escala numerable es suficiente para ello. Demostraremos el hecho en la Prop. 7.

DEFINICION 3.- "Sea $\mathcal{A}$ una familia de funciones enteras y $f\in\mathcal{E}$. Se dirá que f es accesible mediante $\mathcal{A}$ cuando $\exists g\in\mathcal{A}$ tal que $\rho_g(f)<+\infty$. En caso contrario, f se dirá inaccesible mediante $\mathcal{A}$".

Si $f,g\in\mathcal{E}$, diremos que f es accesible (inaccesible) median te g cuando lo es mediante $\mathcal{A} = \{g\}$.

PROPOSICION 7.- "Dada cualquier familia numerable $\mathcal{A} = \{g_n(z)\}_{n\geq 1}$, de funciones enteras, existe siempre $f \in \mathcal{E}$ inaccesible mediante $\mathcal{A}$".

Demostración: Se puede suponer que toda g_n es no cte., pues si $g =$ cte. y f no lo es $\Rightarrow \rho_g(f) = \infty$. Según el lema I.1, $\exists f \in \mathcal{E}$ tal que en los puntos $z_n = n$ tome los valores $w_n = \max\limits_{1\leq j\leq n} G_j(e^n)$. Entonces la sucesión $r_n = |z_n| = = n \to +\infty$ verifica: Dado $k \geq 1$, $\log G_k^{-1}(F(r_n)) = \log G_k^{-1}(F(n)) \geq$ $\geq \log G_k^{-1}(|f(n)|) \geq n$ si $n \geq k$ (en otro caso, $G_k^{-1}(|f(n)|) < e^n \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(n)| = \max\limits_{1\leq j\leq n} G_j(e^n) < G_k(e^n)$: contradicción). Luego

$$\frac{\log G_k^{-1}(F(r_n))}{\log r_n} \geq (\text{si } n \geq k) \geq \frac{n}{\log n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \infty \Rightarrow \forall k \geq 1,\ \rho_{g_k}(f) = +\infty \blacksquare$$

Hemos definido la accesibilidad de funciones enteras mediante familias. Seguidamente, definiremos de modo dual la accesibilidad de familias de funciones enteras.

DEFINICION 4.- "Una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ se dirá que posee la propiedad de accesibilidad cuando $\nexists f \in \mathcal{E}$ la cual es inaccesible mediante $\mathcal{A}$. En caso contrario, diremos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de inaccesibilidad".

De manera que hemos dividido el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ de partes de $\mathcal{E}$ en dos clases complementarias, a saber, $AC(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \nexists f =$

$= f_{\mathcal{A}} \in \mathcal{E}$ tal que $\rho_g(f) = +\infty \ \forall g \in \mathcal{A}\}$ e $\text{INAC}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}):$ $\forall f \in \mathcal{E}, \exists g = g_f \in \mathcal{A}$ tal que $\rho_g(f) < +\infty\}$. Es claro que ambas clases son no vacías: $\mathcal{A} \in \text{AC}(\mathcal{E})$ si $\mathcal{A}$ es numerable (Prop. 7) y $\mathcal{E} \in \text{INAC}(\mathcal{E})$. A lo largo de las siguientes proposiciones, proporcionaremos ejemplos y construcciones de familias accesibles e inaccesibles.

La 1ª de ellas generaliza la Prop. 7, aunque nos basamos en la construcción dada en la demostración de ésta.

<u>PROPOSICION 8</u>.- "$\text{AC}(\mathcal{E})$ es un σ-ideal de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, es decir:

i) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \in \text{AC}(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B} \in \text{AC}(\mathcal{A})$.

ii) Si $\mathcal{A}_n \in \text{AC}(\mathcal{E})$ $(n=1,2,\ldots) \Rightarrow \bigcup_1^\infty \mathcal{A}_n \in \text{AC}(\mathcal{E})$".

<u>Demostración</u>: i) Trivial, pues si $\exists f \in \mathcal{E}$ con $\rho_g(f) = +\infty \ \forall g \in \mathcal{A}$, también será cierto $\forall g \in \mathcal{B}$.

ii) Por hipótesis, para cada $n = 1,2,\ldots \ \exists \varphi_n \in \mathcal{E} / \ \rho_g(\varphi_n) = \infty$ $\forall g \in \mathcal{A}_n$. Para la sucesión $\{\varphi_n\}$, se sabe que $\exists f \in \mathcal{E} / \ f(n) =$ $= \max_{1 \leq j \leq n} \Phi_j(n)$, donde Φ_j es la función módulo máximo de φ_j. Por tanto, $F(n) \geq \Phi_j(n) \ \ \forall j = 1,\ldots,n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $g \in \bigcup \mathcal{A}_n \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists n_o \in \mathbb{N} / \ \ g \in \mathcal{A}_{n_o} \Rightarrow \rho_g(\varphi_{n_o}) = \infty \Rightarrow$ existe una sucesión $r_k \to \infty$ de números reales positivos tales que $\lim_k \dfrac{\log G^{-1}(\Phi_{n_o}(r_k))}{\log r_k} =$ $= \infty \Rightarrow$ si $s_k = [r_k] + 1$, donde $[x]$ denota la parte entera de x, se tiene: $F(s_k) \underset{(k>n_o)}{\geq} \Phi_{n_o}(s_k) \geq \Phi_{n_o}(r_k) \Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}(F(s_k))}{\log s_k} \geq$ $\geq \dfrac{\log G^{-1}(\Phi_{n_o}(r_k))}{\log r_k} \cdot \dfrac{\log r_k}{\log s_k}$, y el 2º factor del 2º miembro converge a 1 cuando $k \to \infty \Rightarrow$ hemos llegado a que $\exists s_k \to +\infty$ tal que $\lim_k \frac{\log G^{-1}(F(s_k))}{\log s_k} = \infty \Rightarrow \rho_g(f) = \infty \quad \forall g \in \bigcup \mathcal{A}_n \Rightarrow \bigcup \mathcal{A}_n$ es accesible∎

La Prop. 7 resulta ahora como corolario, pues cada conjunto unitario $\{g\}$ es inaccesible: escójase para verlo $f = g \circ h$, con h trascendente (Prop. I. 9(c)).

Cada familia accesible proporciona otra inaccesible:

<u>PROPOSICION 9</u>.- "Si $\mathcal{A} \in AC(\mathcal{E})$, entonces $\mathcal{A}^c \in INAC(\mathcal{E})$".

<u>Demostración</u>: Si fuese $\mathcal{A}^c \in AC(\mathcal{E})$, tendríamos $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \mathcal{E} \in AC(\mathcal{E})$, lo cual es falso∎

El recíproco no es cierto en general. P. ej., si $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{E} : f(0) = 0\}$, entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^c$ son inaccesibles, como es inmediato comprobar. Es claro que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ es inaccesible, también lo es $\mathcal{B}$.

La siguiente aserción es evidente a partir de las definiciones del parágrafo anterior.

<u>PROPOSICION 10</u>.- "Si $\mathcal{A} \in AC(\mathcal{E})$ $(INAC(\mathcal{E}))$, entonces $\mathcal{A}' = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} \langle f \rangle \in AC(\mathcal{E})$ $(\in INAC(\mathcal{E})$, resp.)".

En particular, se puede definir el concepto de clase $\langle f \rangle \in \hat{\mathcal{E}}$ accesible y de familia $\hat{\mathcal{A}} = \{\langle f \rangle : f \in \mathcal{A}\}$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{E})$ accesible en $\hat{\mathcal{E}}$ por elección de representantes arbitrarios de las clases de ρ-equivalencia correspondientes.

PROPOSICION 11.- "Toda familia compacta de funciones enteras es accesible".

Demostración: Si Ω es una región del plano complejo, una familia $\mathcal{A}$ de funciones analíticas sobre Ω se llama compacta cuando de cada sucesión $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ puede extraerse una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_1^\infty$ que converja uniformemente a cierta función analítica en cada compacto interior a Ω. Se demuestra (|8|; p.192) que $\mathcal{A}$ es compacta en Ω si y sólo si para cada K compacto$\subset \Omega$ $\exists A = A_K > 0/ \ |g(z)| \leq A \quad \forall g \in \mathcal{A} \ \forall z \in K$. En nuestro caso, $\Omega = \mathbb{C}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists A_n > 0/ \ |g(z)| \leq A_n \quad \forall g \in \mathcal{A} \ \forall z \in B_n =$ $= \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq e^n\}$, que es compacto. Por el lema I.1, $\exists f \in \mathcal{E}/$ $f(n) = A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ si $g \in \mathcal{A}$, $F(n) \geq A_n \geq G(e^n) \Rightarrow \dfrac{\log G^{-1}(F(n))}{\log n} \geq$ $\geq \dfrac{n}{\log n} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} +\infty \Rightarrow \rho_g(f) = \infty \quad \forall g \in \mathcal{A}$ ∎

PROPOSICION 12.- "Sea $\mathcal{A}$ una familia contenida en $\mathcal{E}$. Entonces su envoltura lineal $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ es accesible, si lo es $\mathcal{A}$".

Demostración: A cada función $g = \sum_0^\infty a_n z^n$ asociamos la función $g^* = \sum_0^\infty |a_n| z^n$ ya definida en el corolario 2 al Teorema 3. Podemos suponer que ninguna $g \in \mathcal{A}$ es constante. Sea J una parte finita fija de $\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_J = \left\{ \sum_{j \in J} g_j^* : j \in J, \ g_j \in \mathcal{A} \right\}$. Por hipótesis, $\exists f \in \mathcal{E}$ inaccesible mediante $\mathcal{A}$. Probemos que $\mathcal{A}_J$ es accesible. Es obvio, por inducción, que puede suponerse $J = \{1,2\}$. Sea pues $h = g_1^* + g_2^* \in \mathcal{A}_J \Rightarrow \rho_{g_1^*}(f) = \infty =$

$= \rho_{g_2^*}(f) \Rightarrow \exists r_1 > 1$ y $\exists s_1 > r_1 + 1 /$ $F(r_1) > G_1^*(r_1)$, $F(s_1) >$ $> G_2^*(s_1)$. Entonces $\exists r_2 > s_1 + 1$ y $\exists s_2 > r_2 + 1 /$ $F(r_2) > G_1^*(r_2^2)$, $F(s_2) > G_2^*(s_2^2)$. Continuando por recurrencia este proceso, podemos conseguir dos sucesiones $r_n, s_n \to \infty$ de números reales positivos tales que $F(r_n) > G_1^*(r_n^n)$, $F(s_n) > G_2^*(s_n^n)$. Aplicando el lema I.1, $\exists f_1 \in \mathcal{E} /$ $f_1(r_n) = 2F(s_n)$. Puesto que $r_n < s_n$, tenemos: $F_1(r_n) \geq |f_1(r_n)| = 2F(s_n) > F(r_n) + F(s_n) > G_1^*(r_n^n) + G_2^*(r_n^n) \geq$ $\geq (G_1^* + G_2^*)(r_n^n)$. Pero $H(r) = G_1^*(r) + G_2^*(r)$, pues en $|g_i^*(z)|$ $(i = 1,2)$ se alcanza el máximo en $z=r$ (para $|z| = r$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho_h(f_1) \geq \lim_n \frac{\log (G_1^* + G_2^*)^{-1}[F_1(r_n)]}{\log r_n} \geq \lim_n n = \infty \Rightarrow \rho_h(f_1) = \infty$$

y $\mathcal{A}_J$ es accesible. Entonces es evidente que $\mathcal{A}_{J,k} = \{k \cdot h\}_{h \in \mathcal{A}_J}$ es accesible, para cada $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{J \in \mathcal{P}_{ftas}(\mathbb{N})} \mathcal{A}_{J,k} \in$ $\in AC(\mathcal{E})$ por Prop. 8(ii) $\Rightarrow \exists T \in \mathcal{E}$ inaccesible mediante $\mathcal{B}$.

Consideremos por último $h \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \exists g_1, \ldots$ $\ldots, g_n \in \mathcal{A} /$ $h = \sum_1^n \alpha_j g_j$. Sea k un natural con $\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j| \leq k \Rightarrow$ $\Rightarrow h_1 = k \sum_1^n g_j^* \in \mathcal{B}$ y cumple $|h(z)| \leq \sum_1^n |\alpha_j| |g_j(z)| \leq k \sum_1^n |g_j^*(z)| \leq$ $\leq k \sum_1^n G_j^*(r) = H_1(r)$ $\forall z$ con $|z| = r \Rightarrow H(r) \leq H_1(r)$ y de ser $\rho_{h_1}(T) = \infty$ se deduce $\rho_h(T) = \infty$, utilizando la Prop. I.7■

Por último observemos que, si bien existe una familia accesible mínima ($\emptyset$) y una familia inaccesible máxima ($\mathcal{E}$), no existen familias accesibles <u>maximales</u> ni familias inaccesibles <u>minimales</u>. En efecto: Si $\mathcal{A} \in AC(\mathcal{E})$ fuese maximal $\Rightarrow$ dada $f \in \mathcal{A}^c$ (que existe, pues $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$), $\mathcal{A} \cup \{f\}$ sería inaccesible, lo que es imposible por Prop. 8. Dualmente, si $\mathcal{A} \in \mathrm{INAC}(\mathfrak{E})$ fuese minimal $\Longrightarrow$ dada $f \in \mathcal{A}$ (que existe, pues $\mathcal{A} \neq \emptyset$), $\mathcal{A} \setminus \{f\} \in \mathrm{AC}(\mathfrak{E}) \Longrightarrow \mathcal{A} = (\mathcal{A} \setminus \{f\}) \cup \{f\} \in \mathrm{AC}(\mathfrak{E})$, de nuevo por Prop. 8, lo cual es contradictorio. La aplicación del lema de Zorn falla en el hecho de que la unión arbitraria de familias de $\mathrm{AC}(\mathfrak{E})$ no tiene por qué estar en $\mathrm{AC}(\mathfrak{E})$. P. ej., cada $\{g\} \in \mathrm{AC}(\mathfrak{E})$, pero $\mathfrak{E} = \bigcup_{g \in \mathfrak{E}} \{g\} \in \mathrm{INAC}(\mathfrak{E})$.

CAPITULO III: FUNCIONES ENTERAS DE INDICE EXPONENCIAL FINITO. TEOREMA DEL PRODUCTO.

(III. 1) RESULTADOS CONOCIDOS.

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_1^{+\infty}$ de números complejos cualesquiera. En estas condiciones, el teorema del producto de Weierstrass (|31|; p.325) garantiza la existencia de una función entera con estos únicos ceros, W(z), con una multiplicidad igual al número de veces que se encuentra cada cero en la sucesión $\{a_n\}_1^{\infty}$. Tal función puede escribirse en forma de producto infinito:

$$W(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}\right\} \quad (1),$$

donde el producto se extiende a todos los $a_n \neq 0$, y los m_n son ciertos enteros no negativos.

Del hecho de que una función $h \in \mathcal{E}$ que no se anule nunca se escriba en la forma $h(z) = e^{g(z)}$, donde $g \in \mathcal{E}$, se deduce que toda función entera $f(z)$ no idénticamente nula cuyos ceros sean justamente los de la sucesión $\{a_n\}_1^\infty$ es expresable en la forma:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot W(z) \qquad (2),$$

donde $W(z)$ es la función de (1).

En realidad, los polinomios $P_n(z)$ que figuran bajo el signo exponencial pueden elegirse de modo que $m_n = n$, de manera que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n) \cdot \exp\left\{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right\}$ es uniformemente convergente en compactos en el plano (|25|;p.283) y representa por tanto una función entera.

La expresión de una función entera en producto infinito ha sido objeto de intenso estudio en el caso en que el orden clásico ρ es finito. En tal situación, $g(z)$ puede elegirse como un polinomio cuyo grado no supera a ρ y todos los polinomios P_n pueden escogerse del mismo grado α, y además $\alpha = \text{grado}(P_n) \leqslant \rho$.

Con relación a este estudio, se definen diversos parámetros, tales como el exponente de convergencia de una sucesión y de una función entera, y el género de una sucesión y de una función entera. Nuestro objetivo en este capítulo de la presente memoria es generalizar los resultados más importantes relativos a la expansión en producto infinito -entre los que caben destacar los teoremas de Borel y de Hadamard- al caso de funciones enteras con índice exponencial finito, tal como se definió en el capítulo I, pág. 3.

Estrechamente relacionado con la investigación de la expansión en producto infinito está el estudio de la rapidez de crecimiento de los ceros y de los A-puntos de la función en cuestión, que será asimismo tratado en este capítulo.

(III. 2) EXPONENTE K-ESIMO DE CONVERGENCIA.

Sea $\{\alpha_n\}_1^\infty$ una sucesión de números complejos distintos de cero y no decrecientes en módulo. Se define su exponente de convergencia (|15|;p.188) como el extremo inferior de los $\mu > 0$ que verifican que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^\mu}$ es convergente. Observemos que si $\{\alpha_n\}_1^\infty$ no tiene puntos de acumulación finitos en el plano, puede suponerse tras una reordenación que $|\alpha_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$ y $|\alpha_n| \nearrow +\infty$. Si algunos términos iniciales son nulos, se considerará como exponente de convergencia el de la sucesión restante.

<u>DEFINICION 1</u>.- "Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números complejos distintos de cero y no decrecientes en módulo, con límite ∞, y $\varphi \geqslant 0$ una función real estrictamente creciente y continua, definida sobre todos los reales positivos y tal que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Se llama <u>exponente de convergencia de $\{\alpha_n\}$ respecto de</u> φ al número no

negativo, finito o no, siguiente:

$$\chi_\varphi = \inf\left\{\mu>0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(|\alpha_n|^\mu)} < +\infty\right\} \qquad (3)".$$

Por comodidad de escritura, denotaremos por S_∞ el conjunto de las sucesiones $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \ \alpha_n \neq 0$ y $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con $\lim_n \alpha_n = \infty$. Asimismo, simbolizaremos por M_∞ el conjunto de todas las funciones $\varphi \geqslant 0$ continuas y estrictamente crecientes, definidas sobre todos los reales positivos y tales que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.

<u>DEFINICION 2</u>.- "Si $\alpha \in S_\infty$ y $k \geqslant 1$ es un entero, llamaremos <u>exponente k-ésimo de convergencia de</u> α a $\chi_k = \chi_\varphi$, donde $\varphi(x) = \exp_{k-1} x$, es decir,

$$\chi_k = \inf\left\{\mu>0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_{k-1}(|\alpha_n|^\mu)} < +\infty\right\} \quad (4)".$$

Observemos que este concepto nuestro coincide con el clásico de exponente de convergencia haciendo $k = 1$. Salvo para este caso, la def. 2 es aplicable incluso si ciertos α_n son nulos. Hacemos notar que puede darse $\chi_k = 0$ y $\chi_k = \infty$. Es obvio que si la serie de (3) o (4) converge para cierto $\mu_0 > 0$ finito, también lo hace para $\mu > \mu_0$, y si diverge para μ_0, también diverge para $\mu < \mu_0$.

<u>DEFINICION 3</u>.- "Si $\alpha \in S_0$, se define el <u>índice exponencial</u> de α como

$$i_e(\alpha) = \min\left\{k \in \mathbb{N}: \chi_k < +\infty\right\} \qquad (5)".$$

Puede ocurrir que $i_e(\alpha) = \infty$, es decir, $\chi_k = \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

PROPOSICION 1.- "Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in S_o$. Se verifica:

a) Si $k > i_e(\alpha) \Rightarrow \chi_k = 0$.

b) Si $k < i_e(\alpha) \Rightarrow \chi_k = \infty$".

Demostración: a) Sea $k_o = i_e(\alpha)$ y $k > k_o$. Entonces k_o es finito y $\exists \mu > 0$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_{k_o-1}(|\alpha_n|^{\mu})}$ es convergente. Dado $\varepsilon > 0$, $\exp_{k-1}(|\alpha_n|^{\varepsilon}) = \exp_{k_o-1}(\exp_{k-k_o}(|\alpha_n|^{\varepsilon})) > \exp_{k_o-1}(|\alpha_n|^{\mu})$ para $n \geq n_o$, pues $\exp_{k-k_o}\xi > \xi^{\mu/\varepsilon}$ si ξ es suficientemente grande. Luego $\frac{1}{\exp_{k-1}(|\alpha_n|^{\varepsilon})} < \frac{1}{\exp_{k_o-1}(|\alpha_n|^{\mu})}$ $(n \geq n_o) \Rightarrow$ la serie cuyo término general es el 1^er^ miembro de la última desigualdad es convergente $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \chi_k = 0$.

b) Es consecuencia de la definición∎

EJEMPLOS.- 1) Sea $k \in \{1,2,\dots\}$ fijo y $\delta > 0$. Entonces las sucesiones α, β y γ dadas por $\alpha_n = \log_{k-2} n$, $\beta_n = (\log_{k-1} n)^{1/\delta}$ y $\gamma_n = \log_k n$ (si $k = 1$, $\log_{k-2}\xi \equiv e^{\xi}$) para n suficientemente grande, verifican $\chi_k = 0, \delta, \infty$ respectivamente.

2) $i_e(\alpha) = k$ si $\alpha_n = \log_{k-1} n$ $(n > \exp_{k-1} 1)$.

Demos un ejemplo de una sucesión $\alpha \in S_{\infty}$ con $i_e(\alpha) = \infty$. Lo haremos como consecuencia de un resultado más general, que hemos obtenido, relativo a series numéricas.

LEMA 1.- "Consideremos una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_1^{\infty} \subset M_{\infty}$, cumpliendo: Para cada $x_o > 0$, la sucesión $\{\varphi_n(x_o)\}_1^{\infty}$

es no decreciente. Entonces existe una sucesión $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \in S_\infty$ de términos reales y positivos tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_k(\alpha_n)}$ diverge".

<u>Demostración</u>: Denotemos por $[\xi]$ la parte entera de ξ $(\xi \in \mathbb{R})$.

Por ser cada φ_k continua y estrictamente creciente, cada función inversa φ_k^{-1} existe y está definida al menos en $[e_k, +\infty)$, donde $e_k = [\varphi_k(0^+)] + 1$. Además $\lim_{y \to \infty} \varphi_k^{-1}(y) = \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\varphi_2^{-1}(y) \uparrow \infty$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \ e_2 + n_1 > e_1$ y $\varphi_2^{-1}(e_2 + n_1) > 1 + \varphi_1^{-1}(e_1)$. Definimos entonces $\alpha_n = \varphi_1^{-1}(e_1)$ si $1 \leq n \leq e_2 + n_1 - 1$. Al ser $\varphi_3^{-1}(y) \nearrow \infty$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \ e_3 + n_2 > e_2 + n_1$ y $\varphi_3^{-1}(e_3 + n_2) > 1 + \varphi_2^{-1}(e_2 + n_1)$. Definimos ahora $\alpha_n = \varphi_2^{-1}(e_2 + n_1)$ si $e_2 + n_1 \leq n \leq e_3 + n_2 - 1$. De esta forma, por un proceso recurrente, si se ha definido α_n para $1 \leq n \leq e_i + n_{i-1} - 1$, de modo que $\alpha_n = \varphi_{i-1}^{-1}(e_{i-1} + n_{i-2})$ si $e_{i-1} + n_{i-2} \leq n \leq e_i + n_{i-1} - 1$, aplicando que $\varphi_{i+1}^{-1}(y) \nearrow \infty$, $\exists n_i \in \mathbb{N} /$ $e_{i+1} + n_i > e_i + n_{i-1}$ y $\varphi_{i+1}^{-1}(e_{i+1} + n_i) > 1 + \varphi_i^{-1}(e_i + n_{i-1})$. Se define entonces $\alpha_n = \varphi_i^{-1}(e_i + n_{i-1})$ si $e_i + n_{i-1} \leq n \leq e_{i+1} + n_i - 1$. Es obvio que $\alpha_n > 0$, es no decreciente y $\alpha_n \to \infty$. Fijemos ahora un $k \in \mathbb{N}$. Si $n \geq e_k + n_{k-1}$ $(n_0 = 0)$, entonces $\alpha_n = \varphi_j^{-1}(e_j + n_{j-1})$ donde j $(\geq k)$ es el entero tal que $e_j + n_{j-1} \leq n \leq e_{j+1} + n_j - 1$. Pero para cada $x_0 > 0$, $\{\varphi_m(x_0)\}_1^\infty$ es una sucesión no decreciente $\Rightarrow$ lo contrario ocurrirá con $\{\varphi_m^{-1}(y_0)\}$ para cada $y_0 > 0$ suficientemente grande $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_j^{-1}(e_j + n_{j-1}) \leq \varphi_j^{-1}(n) \leq \varphi_k^{-1}(n)$, donde se ha aplicado que cada función φ_j es creciente. Resumiendo, para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists N = N(k) = e_k + n_{k-1} \in \mathbb{N} / \forall n \geq N$ es $\alpha_n \leq \varphi_k^{-1}(n) \Rightarrow \varphi_k(\alpha_n) \leq n \Rightarrow$
$\Rightarrow 1/\varphi_k(\alpha_n) \geq 1/n$.

Empleando ahora el criterio de comparación, se obtiene la divergencia de $\sum_1^{\infty} 1/\varphi_k(\alpha_n)$, ya que la serie armónica $\sum 1/n$ diverge∎

Apliquemos el lema 1 a $\varphi_k(x) = \exp_k x$. Resulta que $\exists \alpha = \{\alpha_n\}_1^{\infty} \in S_{\infty}$, $\alpha_n > 0 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_k \alpha_n} = +\infty, \forall K$. Pero entonces es evidente que $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall \mu > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_{k-1}(|\alpha_n|^{\mu})} = +\infty$. Luego $i_e(\alpha) = \infty$.

Para una amplia clase de funciones monótonas, la siguiente proposición contiene una expresión explícita del valor del exponente de convergencia.

<u>PROPOSICION 2</u>.- "Sea $\alpha = \{\alpha_n\}_1^{\infty} \in S_{\infty}$. Se verifica:

a) Si $\varphi \in M_{\infty}$ es tal que dado $\sigma > 1$ $\exists K = K(\sigma) > 0$ y $x_0 = x_0(\sigma) > 0 / \forall x \geq x_0$,

$$(\varphi(x))^{\sigma} \leq K \cdot \varphi(x^{\sigma}) \qquad (6),$$

entonces:

$$\chi_{\varphi} = \limsup_n \frac{\log \varphi^{-1}(n)}{\log |\alpha_n|} \qquad (7).$$

b) $\forall k \geq 1$,

$$\chi_k = \limsup_n \frac{\log_k n}{\log |\alpha_n|} \qquad (8)".$$

<u>Demostración</u>: a) Llamamos γ al valor del límite superior que aparece en el 2º miembro de (7). Supongamos

que $\gamma<\infty \Rightarrow \dfrac{\log \varphi^{-1}(n)}{\log|\alpha_n|}<\gamma+\varepsilon \quad (n\geqslant n_o(\varepsilon),\ \varepsilon>0) \Rightarrow \log\varphi^{-1}(n)<$
$<\log(|\alpha_n|^{\gamma+\varepsilon}) \Rightarrow n<\varphi(|\alpha_n|^{\gamma+\varepsilon}) \Rightarrow$ si $\sigma>1$, $n^{\sigma}<(\varphi(|\alpha_n|^{\gamma+\varepsilon}))^{\sigma}$.
Por (6), este 2º miembro es menor o igual que $K\cdot\varphi(|\alpha_n|^{\sigma(\gamma+\varepsilon)})$
para $n\geqslant n_1$ $(n_1\geqslant n_o) \Rightarrow \dfrac{1}{\varphi(|\alpha_n|^{\sigma(\gamma+\varepsilon)})}<\dfrac{K}{n^{\sigma}}$ $(n\geqslant n_1)$, y la serie de término general $n^{-\sigma}$ es convergente $\Rightarrow \sum_1^{\infty}\dfrac{1}{\varphi(|\alpha_n|^{\sigma(\gamma+\varepsilon)})}<\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(\gamma+\varepsilon)\geqslant \chi_\varphi \ \forall\varepsilon>0 \ \forall\sigma>1 \Rightarrow \chi_\varphi\leqslant\gamma$, y además, resulta que si γ es finito, también lo es χ_φ. Supongamos ahora que χ_φ es finito $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{\varphi(|\alpha_n|^{\chi_\varphi+\varepsilon})}<\infty$. Si tenemos una serie convergente $\sum_1^{\infty}\beta_n$ de términos positivos y no crecientes, entonces $\lim_n n\cdot\beta_n=0$. Luego $\lim_n \dfrac{n}{\varphi(|\alpha_n|^{\chi_\varphi+\varepsilon})}=0 \Rightarrow$ para n suficientemente grande, $n/\varphi(|\alpha_n|^{\chi_\varphi+\varepsilon})\leqslant 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(n)\leqslant|\alpha_n|^{\chi_\varphi+\varepsilon} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\log\varphi^{-1}(n)}{\log|\alpha_n|}\leqslant\chi_\varphi+\varepsilon \Rightarrow \gamma\leqslant\chi_\varphi+\varepsilon \ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \gamma\leqslant\chi_\varphi$, y además, resulta que si χ_φ es finito, también lo es γ.

En conclusión, $\gamma=\chi_\varphi$, igualdad válida incluso para valores infinitos, pues γ y χ_φ son finitos simultáneamente.

b) Es consecuencia de (a), pues si $\varphi(x)=\exp_{k-1}x \Rightarrow \log\varphi^{-1}(n) = \log_k n$, y $\exp_{k-1}x$ $(k\geqslant 1)$ cumple (6) para $K=1$ ∎

<u>EJEMPLO</u>.- Si $\alpha_n=(\log_2(en+\frac{1}{n}))^4$, $\chi_3=1/4$, pues $\log_2 n\sim$
$$\sim\log_2(en+\frac{1}{n}) = \log(\log n+\log(e+\frac{1}{n^2})).$$

En el parágrafo 4 daremos una definición adecuada de género k-ésimo de una sucesión de S_∞, para que tengamos una generalización natural de la expansión de una $f\in\mathcal{E}$ con $i_e(f)=k$

en producto infinito.

(III. 3) LA FUNCION ENUMERATIVA $n(r)$. ORDEN K-ESIMO E INDICE EXPONENCIAL.

En el estudio del crecimiento de una función entera desempeña un papel muy importante el número de ceros que se encuentran en cierta bola de centro el origen. Definiremos tal número en este apartado dentro de un contexto más general.

<u>DEFINICION 4</u>.- "Si $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \in S_\infty$, su <u>función enumerativa</u> $n(r)$ se define como el número de valores α_n cuyo módulo no excede r, contando la cantidad de veces que cada uno se repite en la sucesión:

$$n(r) = \max \{n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| \leq r\}."$$

Usando este concepto, es fácil dar otra expresión del valor del exponente de convergencia, en la que intervienen funciones en vez de sucesiones.

PROPOSICION 3.- "Sea $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \in S_\infty$. Se verifica:

a) Si $\varphi \in M_\infty$ y cumple (6), entonces:

$$= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \varphi^{-1}(n(r))}{\log r} \qquad (9).$$

b) $\forall k \geq 1$, $\chi_k = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_k n(r)}{\log r}$ (10)".

Demostración: La parte (b) se deduce de (a) poniendo $\varphi(x) = \exp_{k-1} x$. En cuanto a (a), por la fórmula (7), hay que probar que $\limsup_n \frac{\log \varphi^{-1}(n)}{\log|\alpha_n|} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \varphi^{-1}(n(r))}{\log r}$.

Llamemos L a este 2º miembro. Es evidente que $n \leq n(|\alpha_n|) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ si $r_n = |\alpha_n| \nearrow +\infty$, tenemos que $\frac{\log \varphi^{-1}(n)}{\log|\alpha_n|} \leq \frac{\log \varphi^{-1}(n(r_n))}{\log r_n}$.

El límite superior del 2º miembro no es mayor que $L \Rightarrow \chi_\varphi \leq L$, obteniéndose además que χ_φ es finito si lo es L. Sea ahora $\chi_\varphi < \infty$. Entonces existe una sucesión de enteros positivos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots /$ $\lim_k \frac{\log \varphi^{-1}(n_k)}{\log|\alpha_{n_k}|} = \chi_\varphi$. Dado n_k, sea $n_{k'}$ el 1^er^ entero de la sucesión anterior tal que $|\alpha_{n_{k'}}| > |\alpha_{n_k}|$. Entonces $\log|\alpha_{n_{k'}-1}| = \log|\alpha_{n_k}| \Rightarrow$ si $k' = k'(k)$ está definido de esa forma, se tiene $\frac{\log \varphi^{-1}(n_{k'} - 1)}{\log|\alpha_{n_{k'}-1}|} \xrightarrow[k']{} \chi_\varphi$. Dado $r > 0$, si $|\alpha_{n_k}| \leq r < |\alpha_{n_{k'}}|$, $n(r) = n_{k'} - 1 \Rightarrow \frac{\log \varphi^{-1}(n(r))}{\log r} <$ $< \frac{\log \varphi^{-1}(n_{k'} - 1)}{\log|\alpha_{n_k}|}$ pues log y φ^{-1} son estrictamente crecientes, y todo $r > r_0$ se encuentra comprendido entre dos $|\alpha_i|$ bien definidos en la forma anterior $\Rightarrow$ el límite superior del 1^er^ cociente no superará χ_φ: $L \leq \chi_\varphi \Rightarrow L = \chi_\varphi$, sean ambos fini tos o no ■

Consideremos ahora una función $f \in \dot{\mathcal{E}}$. Entonces tiene una cantidad finita o infinita numerable de ceros, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Podemos considerar que están ordenados de forma que $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$. Si hay una cantidad infinita de ceros, $\{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$, pues no tienen puntos de acumulación finitos.

DEFINICION 5.- "Si $f \in \dot{\mathcal{E}}$, llamaremos función enumerativa de f a la de la sucesión de sus ceros $\{a_n\}$. Denominaremos, si $k \geqslant 1$ es un entero, exponente késimo de convergencia de f, $\chi_k = \chi_k(f)$, al correspondiente a la sucesión de ceros $\{a_n\}$, e índice exponencial de convergencia de f, $i_e'(f)$, al de $\{a_n\}$".

TEOREMA 1.- "Si $f \in \dot{\mathcal{E}}$ es de orden k-ésimo ρ_k y exponente k-ésimo de convergencia χ_k, entonces $\chi_k \leqslant \rho_k$".

Demostración: Si el número de ceros de f es finito $\Rightarrow \chi_k = 0$ y la desigualdad es trivial. En otro caso, $\{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$ y, según (10), $\chi_k = \limsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log_k n(r)}{\log r}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\rho_k < \infty$, pues en otro caso es trivial, y que $f(0) = 1$. Aplicando la fórmula de Jensen ([31]; p. 330) resulta $\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$. Por definición de orden k-ésimo se tiene que, dado $\varepsilon > 0$, $|f(e^{i\theta}r)| \leqslant F(r) \leqslant \exp_k(r^{\rho+\varepsilon})$ para $r > 0$ suficientemente grande y $\forall\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \log|f(re^{i\theta})| \leqslant \exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{er} \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant \exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon})$. La función enumerativa es no decreciente $\Rightarrow \int_0^{re} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqslant n(r)\cdot\int_r^{er} \frac{dt}{t} = n(r)\cdot\log e = n(r) \Rightarrow$

$\Rightarrow n(r) \leqslant \exp_{k-1}(r^{\rho+\varepsilon})$ $\forall r > r_0(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \frac{\log_k n(r)}{\log r} \leqslant \rho + \varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ $\forall r > r_0(\varepsilon) \Rightarrow \chi_k \leqslant \rho_k + \varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ tomando límites superiores $\Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_k \leqslant \rho_k$ ∎

Tenemos inmediatamente una relación entre el índice de f y su índice de convergencia.

<u>COROLARIO 1</u>.- "Si $f\in\dot{\mathcal{E}}$, $i_e'(f) \leqslant i_e(f)$".

Puesto que el orden de f y el de $f - A$ -donde A es cualquier valor complejo- coinciden, y los ceros de $f - A$ son los A-puntos de f, se puede aplicar todo lo anterior a la función $f - A$. Se extraen entonces las siguientes consecuencias:

<u>COROLARIO 2</u>.- "Sean $A\in\mathbb{C}$ y $f\in\dot{\mathcal{E}}$. Entonces:

a) El exponente de convergencia k-ésimo de sus A-puntos $\{a_n\}$ no supera su orden k-ésimo.

b) $i_e(\{a_n\}) \leqslant i_e(f)$.

c) Si la sucesión $\{a_n\}$ de A-puntos es tal que $\forall k\in\mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_k(|a_n|)}$ diverge, entonces $i_e(f) = \infty$.

d) Si $\rho_k < \infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_{k-1}(|a_n|^{\rho_k+\varepsilon})}$ converge".

Demostración: (a) y (b) son triviales y (d) sigue instantánea mente de (a). Por último, (c) es consecuencia del lema 1, pues se tendría que $\chi_k(\{a_n\}) = \infty \; \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow i_e(\{a_n\}) = \infty \Rightarrow i_e(f) = \infty$, aplicando (b) ■

Para terminar este parágrafo daremos dos caracterizaciones del exponente de convergencia a través de integrales reales, así como otras dos para el orden k-ésimo, una de ellas también por integrales reales, y la otra mediante la característica de Nevanlinna.

PROPOSICION 4.- "Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha = \{\alpha_n\} \in S_\infty$. Definimos las funciones de dos variables:

$$\pi_k(t,\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ \prod_{i=0}^{k-2} \exp_i(t^\mu) & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \quad (\forall t, \mu > 0$$

Entonces la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{\exp_{k-1}(|\alpha_n|^\mu)}$ converge si y sólo si converge la integral $\int_0^\infty \frac{\pi_k(t,\mu)\cdot n(t)}{t\cdot \exp_{k-1}(t^\mu)}\, dt$, donde $n(t)$ es la función enumerativa de α. En particular,

$$\chi_k = \inf\left\{\mu > 0 : \int_0^\infty \frac{\pi_k(t,\mu)\, n(t)}{t\cdot \exp_{k-1}(t^\mu)}\, dt < \infty\right\} \quad (11)$$

Demostración: Sea $\mu > 0$. Supongamos en 1^{er} lugar que la serie del enunciado es convergente. Utilizando la integración según Riemann-Stieltjes ($n(r)$ es una función no decreciente, y por tanto de variación acotada en cada intervalo compacto de $[0,+\infty)$), se observa fácilmente que una suma parcial de dicha serie es $\int_0^N \frac{1}{\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dn(t) =$

$$= \frac{n(N)}{\exp_{k-1}(t^\mu)} + \mu\int_0^N \frac{\exp_{k-1}(t^\mu)\exp_{k-2}(t^\mu)\cdots\exp(t^\mu)\,t^{\mu-1}n(t)}{(\exp_{k-1}(t^\mu))^2}\,dt \quad (12)$$

$(N\in\mathbb{N})$, donde se ha usado la integración por partes. Si $k=1$, el producto que figura en el numerador de la integral del 2º miembro de (12) debe sustituirse por $t^{\mu-1}$. Resumiendo, tenemos:

$$\forall N\in\mathbb{N} \text{ y } \forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^N \frac{1}{\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dn(t) = \frac{n(N)}{\exp_{k-1}(N^\mu)} + \mu\int_0^N \frac{\pi_k(t,\mu)\cdot n(t)}{t\cdot\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dt \quad (13).$$

Puesto que $n(N)/\exp_{k-1}(N^\mu)\geq 0$ y la integral del 1er miembro de (13) está acotada por un valor independiente de N, lo mismo ocurrirá con la que figura en el 2º miembro $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\pi_k(t,\mu)n(t)}{\exp_{k-1}(t^\mu)\cdot t}\,dt<\infty.$$

Se supone ahora que para cierto $\mu>0$, esta integral converge a cierto valor A finito. Si probamos que $\frac{n(N)}{\exp_{k-1}(N^\mu)}$ está acotado, también lo estará según (13) cada suma parcial $\int_0^N \frac{1}{\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dn(t)$, y por tanto nuestra serie tendrá una suma finita. Tenemos:

$$A\geq \int_0^{2N} \frac{\pi_k(t,\mu)n(t)}{t\cdot\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dt \geq \int_N^{2N} \frac{\pi_k(t,\mu)n(t)}{t\cdot\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dt \quad (n(t) \text{ es no decreciente}) \geq n(N)\cdot\int_N^{2N}\frac{\pi_k(t,\mu)}{t\exp_{k-1}(t^\mu)}\,dt = n(N)\cdot\left(-\frac{1}{\mu}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_N^{2N}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\exp_{k-1}(t^\mu)}\right)dt = n(N)\cdot\left(-\frac{1}{\mu}\right)\cdot\left\{\frac{1}{\exp_{k-1}(N^\mu)}-\frac{1}{\exp_{k-1}(2^\mu N^\mu)}\right\}=$$

$$= \frac{1}{\exp_{k-1}(N^\mu)}\cdot\frac{n(N)}{\mu}\cdot\left\{1-\frac{\exp_{k-1}(N^\mu)}{\exp_{k-1}(2^\mu N^\mu)}\right\}.$$ Es fácil probar que $\forall i\in$

$\in\{0,1,2,\ldots\}$ y $\forall\sigma>1$ es $\exp_i(\sigma x)\geqslant\sigma\exp_i x$ $\forall x>x_0(\sigma,i)>0\Rightarrow$ $\Rightarrow$ el valor de la expresión entre llaves es al menos $1-2^{-\mu}>$ >0 a partir de cierto N en adelante $\Rightarrow n(N)/\exp_{k-1}(N^{\mu})\leqslant$ $\leqslant\mu A/1-2^{-\mu}$ $\forall N\geqslant N_0$ ■

<u>PROPOSICION 5</u>.- "Sea $\alpha\in S_\infty$, $i_e(\alpha)=k$, $n(r)$ la función enumerativa de α, y $a>0$ arbitrario tal que $n(a)>\exp_{k-2}1$. Si $\mu>0$, se verifica que la integral $\int_a^\infty \frac{\log_{k-1}n(t)}{t^{\mu+1}}\,dt$ converge si $\mu>$ $>\chi_k$ y diverge si $\mu<\chi_k$. En particular,

$$\chi_k=\inf\left\{\mu>0:\ \int_a^\infty\frac{\log_{k-1}n(t)}{t^{\mu+1}}\,dt<\infty\right\}\ (12)".$$

<u>Demostración</u>: Consideremos un $\mu>0$ con $\mu>\chi_k$. Escogemos $\varepsilon>$ $>0/\mu>\chi_k+\varepsilon$. Puesto que $\chi_k=\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log_k n(r)}{\log r}$ $<\infty\Rightarrow\forall r>r_0(\varepsilon)>a$, $0<\log_{k-1}n(r)<r^{\chi_k+\varepsilon}\Rightarrow 0<$ $<\frac{\log_{k-1}n(t)}{t^{\mu+1}}<t^{\chi_k+\varepsilon-\mu-1}$ asintóticamente, siendo $\chi_k+\varepsilon-\mu-1<$ $<-1\Rightarrow\int_a^\infty\frac{\log_{k-1}n(t)}{t^{\mu+1}}\,dt<\infty$.

Sea ahora $\mu>0$ con $\mu<\chi_k$. Escogemos $\delta\in(\mu,\chi_k)\Rightarrow\exists r_i\nearrow+\infty/$ $\log_k n(r_i)>\delta\cdot\log r_i$. Tenemos: si $s>r_i\cdot 2^{1/\mu}$, $\int_{r_i}^s\frac{\log_{k-1}n(t)}{t^{\mu+1}}\,dt$ $\geqslant r_i^\delta\cdot\int_{r_i}^s t^{-1-\mu}\,dt\geqslant\frac{1}{2}\mu^{-1}\cdot r_i^{\delta-\mu}\xrightarrow[(i\to\infty)]{}+\infty\Rightarrow$ la integral del enunciado diverge ■

Si α es la sucesión de A-puntos de una $f\in\dot{\xi}$, y si estos son infinitos, la expresión (12) es válida, y la (11) lo es sustituyendo $n(t)$ por $n(t)-n(0)$, o bien cambiando el límite inferior de integración 0 por cualquier $b>0$. Aplicando el

Teorema 1, obtenemos:

<u>COROLARIO</u>.- "Sean $f \in \dot{\mathcal{E}}$ tal que $i_e(f) = k$, A un valor complejo arbitrario, $n(r)$ la función enumerativa de los A-puntos de f, $a > 0$ cualquiera con $n(a) > \exp_{k-2} 1$, y $b, \varepsilon > 0$. Si π_k es la función definida en la Prop. 4, se verifica que las 3 integrales impropias:

$$\int_b^\infty \frac{\pi_k(t,\rho_k+\varepsilon)\, n(t)}{t \exp_{k-1}(t^{\rho_k+\varepsilon})}\, dt, \quad \int_a^\infty \frac{\log_{k-1} n(t)}{t^{\rho_k+1+\varepsilon}}\, dt \quad \text{y}$$

$$\int_0^\infty \frac{\pi_k(t,\rho_k+\varepsilon)(n(t)-n(0))}{t\cdot \exp_{k-1}(t^{\rho_k+\varepsilon})}\, dt$$

son convergentes".

<u>PROPOSICION 6</u>.- "Sean $k \in \mathbb{N}$ y $f, g \in \dot{\mathcal{E}}$. Entonces:

1) Si $a > 0$ es tal que $F(a) > G(1)$,

$$\rho_g(f) = \inf\left\{\mu > 0:\ \int_a^\infty \frac{\log G^{-1}(F(t))}{t^{\mu+1}}\, dt < \infty\right\} \quad (13)$$

2) Si $a > 0$ es tal que $F(a) > \exp_{k-1} 1$,

$$\rho_k(f) = \inf\left\{\mu > 0:\ \int_a^\infty \frac{\log_k F(t)}{t^{\mu+1}}\, dt < \infty\right\} \quad (14)"$$

<u>Demostración</u>: (14) es un caso particular de (13), el cual es a su vez un caso particular de la siguiente propiedad (cfr. |11|, p. 30): Si $a > 0$ y $\phi(r)$ es positiva y no decreciente sobre (a, ∞), entonces $\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \phi(r)}{\log r} = \lambda$ es equivalente a que la integral $\int_a^\infty \frac{\phi(t)}{t^{\mu+1}}\, dt$ sea convergente para $\mu > \lambda$ y divergente para $\mu < \lambda$ ∎

Si $f \in \mathcal{E}$, se define su <u>característica de Nevanlinna</u> (|37|) como la función no negativa $T(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \ (r > 0)$.

T es no decreciente, y es convexa como función de $\log r$.

PROPOSICION 7.- "Sean $k\in\mathbb{N}$ y $f\in\dot{\mathcal{E}}$. Se verifica:

$$\rho_k(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_k T(r)}{\log r} \qquad (15)".$$

Demostración: En (|16|, p. 174) se prueba que $T(r)\leqslant \log^+ F(r)\leqslant \leqslant \frac{R+r}{R-r}\cdot T(R)$ $(0<r<R)$. Pero $F(r)>\exp_{k-1}1$ para $r>r_0 \Rightarrow$ si $R=2r$ y $r>r_0$, $T(r)\leqslant \log F(r)\leqslant 3T(2r) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log_k T(r)}{\log r}\leqslant \frac{\log_{k+1} F(r)}{\log r}\leqslant \frac{\log_{k-1}(\log 3 + \log T(2r))}{\log_k T(2r)}\cdot\frac{\log_k T(2r)}{\log(2r)}\cdot \frac{\log 2 + \log r}{\log r}$$

$(r>r_0)$. Tomando límites superiores se obtiene (15)■

(III. 4) PRODUCTO CANONICO DE INDICE k.

Es sabido (|25|, p. 289 y ss.) que si una función entera tiene la sucesión de ceros $\{a_n\}$ con exponente de convergencia finito, en su producto canónico asociado pueden escogerse todos los polinomios P_n iguales en grado, concretamente, $P_n(z) = P(z/a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, donde $P(u) = u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}$, siendo p el género de la sucesión de ceros. Vamos a generalizar esta afirmación al caso de una función entera de índice superior al primero.

LEMA 2.- "Sea $k\in\{2,3,\dots\}$. La función $\phi_k(x) = \frac{\log x}{\log_k x}$ $(x>\exp_k 1)$ es estrictamente creciente".

Demostración: Llamamos $\varphi_k(x) = \log_k x \Rightarrow \varphi_k'(x) = (x\log x\dots\log_{k-}$

$\Longrightarrow \operatorname{sgn} \phi_k'(x) = \operatorname{sgn}(\frac{\log_k x}{x} - \log x \cdot \varphi_k'(x)) = \operatorname{sgn}(\log_k x - \frac{1}{\log_2 x \cdot \ldots \cdot \log_k}$

Si $x > \exp_k 1 \Longrightarrow \log_k x \cdot \ldots \cdot \log_2 x > 1 \cdot e \cdot \ldots \cdot \exp_{k-2} 1 \geqslant 1 \Longrightarrow \phi_k'(x) > 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \phi_k$ es estrictamente creciente■

PROPOSICION 8.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$ con $i_e(\alpha) = k$. Denotemos por $[x]$ la parte entera de x $(x \in \mathbb{R})$ y $A_k = 1 + [\exp_k 1]$. Para cada $\mu, r > 0$, escribimos $u_n(\mu,r) = (r/|a_n|)^{\mu \cdot \frac{\log n}{\log_k n}}$, $v_n(\mu,r) = (r/|a_n|)^{\mu \cdot \left[\frac{\log n}{\log_k n}\right]}$, $u_n(\mu) = u_n(\mu,1)$, $v_n(\mu) = v_n(\mu,1)$ $(n \geqslant A_k)$. Tenemos: si $\mu > \chi_k$, las series $\sum_{n \geqslant A_k} u_n(\mu,r)$ y $\sum_{n \geqslant A_k} v_n(\mu,r)$ convergen $\forall r > 0$, y si $\mu < \chi_k$, esas mismas series divergen $\forall r > 0$. En particular,

$$\chi_k = \inf\{\mu > 0: \sum_{n \geqslant A_k} u_n(\mu,r) < \infty \quad \forall r > 0\} = \inf\{\mu > 0: \sum_{n \geqslant A_k} u_n(\mu) < \infty\} = \inf\{\mu > 0: \sum_{n \geqslant A_k} v_n(\mu,r) < \infty \quad \forall r > 0\} = \inf\{\mu > 0: \sum_{n \geqslant A_k} v_n(\mu) < \infty\} \qquad (16)".$$

Demostración: Por las argumentaciones que vamos a emplear y teniendo en cuenta que $\log(|a_n|/r) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \log|a_n|$ $\forall r > 0$ y $[x] \underset{(x\to\infty)}{\sim} x$, es suficiente demostrar que si $\mu > \chi_k$, $\sum u_n(\mu) < \infty$, y si $\mu < \chi_k$, $\sum u_n(\mu) = \infty$.

Sabemos que $\chi_k = \limsup_n \frac{\log_k n}{\log|a_n|} < \infty$. Sea $\mu > \chi_k$ y $\mu' \in (\chi_k, \mu) \Rightarrow \frac{\log_k n}{\log|a_n|} < \mu'$ $\forall n \geqslant n_0(\mu')$. Usamos el criterio logarítmico de convergencia de series de términos positivos:

$$\liminf_n \frac{\log(1/u_n(\mu))}{\log n} = \mu\cdot\liminf_n \frac{\log|a_n|}{\log n} > \mu/\mu' > 1 \Longrightarrow \sum u_n(\mu) < \infty.$$

Si es $\mu < \chi_k$ y si la serie anterior converge, tendríamos

$\lim_n n\cdot u_n(\mu) = 0$ (cfr. |20|, p. 61), ya que la sucesión $u_n(\mu)$ decrece (aplicar $|a_n|\nearrow\infty$ y lema 2) $\Longrightarrow \forall\, n \geq n_0,\ n\cdot u_n(\mu) < 1 \Longrightarrow n < |a_n|^{\mu\cdot\frac{\log n}{\log_k n}} \Rightarrow 1 < \mu\cdot\log|a_n|/\log_k n \Rightarrow \frac{\log_k n}{\log a_n} < \mu\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_k \leq \mu$: contradicción. Luego $\sum u_n(\mu)$ diverge∎

DEFINICION 6.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$ con $i_e(\alpha) = k$. Con las mismas notaciones de la Prop. 8, definimos el <u>género k-ésimo</u> p_k como el número entero no negativo:

$$p_k = \min\left\{p\in\{0,1,\ldots\} : \sum_{n\geq A_k} u_n(p+1) < \infty\right\} \quad (17)$$

Es claro que $p_k = \min\left\{p\in\{0,1,\ldots\} : \sum_{n\geq A_k} u_n(p+1,r) < \infty\ \forall r>0\right\} = \min\left\{p\in\{0,1,\ldots\} : \sum_{n\geq A_k} v_n(p+1) < \infty\right\} = \min\left\{p\in\{0,1,\ldots\} : \sum_{n\geq A_k} v_n(p+1,r) < \infty\ \forall r>0\right\}$, y que $p_k \leq \chi_k \leq p_k + 1$. En particular, $p_k = [\chi_k]$ si χ_k no es entero. La def. 6 puede aplicarse, prescindiendo si es necesario de un número finito de términos, a la sucesión α de A-puntos de una función entera, si están en cantidad infinita (si hay un número finito, se definiría $\chi_k = 0$). Entonces $p_k \leq [\rho_k]$ y $\chi_k \leq \min(\rho_k, p_k+1)$.

Nos será útil el siguiente lema (|31|, p. 324). Convengamos en escribir $E(u,0) = 1 - u$ y $E(u,p) = (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p})$ $(p = 1,2,\ldots)$, que se llaman los <u>factores primarios de Weierstrass</u>.

LEMA 3.- "Sea $\{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$. Si $\{h_n\}_1^\infty$ es una sucesión de enteros no negativos tales que $\sum_{n=1}^\infty (r/|a_n|)^{1+h_n} < \infty$ $\forall r > 0$, entonces el producto infinito $W(z) = \prod_{n=1}^\infty E(\frac{z}{a_n}, h_n)$ define una función entera, de forma que tiene exactamente un cero de orden m en $\underline{a}$ si y sólo si $\underline{a}$ aparece m veces en la sucesión dada".

PROPOSICION 9.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$, $i_e(\alpha) = k$, con género k-ésimo p_k. Entonces el producto infinito $W_k(z;\alpha) = \prod_{n=1}^\infty E(\frac{z}{a_n}, h_n)$, siendo

$$h_n = \begin{cases} 0 & n < A_k \\ (1+p_k)\cdot\left[\frac{\log n}{\log_k n}\right] - 1 & n \geqslant A_k \end{cases} \qquad (18),$$

define una función entera, de modo que W_k posee exactamente un cero de orden m en $\underline{a}$ si y sólo si $\underline{a}$ aparece m veces en la sucesión α".

Demostración: Aplíquense conjuntamente el lema 3 junto con la Prop. 8, teniendo en cuenta que un número finito de factores polinómicos no alteran la convergencia uniforme en compactos∎

Observemos que este resultado se conoce para $k = 1$: $h_n = p_1$ = género de la sucesión α. A la vista de ello queda justificada la siguiente

DEFINICION 7.- "En las mismas condiciones de la proposición anterior, llamaremos a $W_k(z;\alpha)$ <u>producto canónico de índice k</u> relativo a la sucesión α".

(III. 5) DESARROLLO EN PRODUCTO INFINITO.

Vamos a dar en primer lugar el Teorema de factorización de Weierstrass para funciones con índice exponencial finito. Más generalmente, podemos enunciarlo para funciones con índice exponencial de convergencia finito.

<u>TEOREMA 2</u>.- "Sea $f \in \dot{\mathcal{E}}$ e $i_e'(f) = k$. Si f tiene un cero de orden m en el origen $(m \geq 0)$ y $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$ es la sucesión de ceros no nulos de f, existe una función $g \in \mathcal{E}$ tal que

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot W_k(z;\alpha) \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad (19)".$$

<u>Demostración</u>: Los ceros de $\varphi(z) = f(z)/z^m$ son los términos de α. Según la Prop. 9, φ/W_k es una función entera sin ceros $\Rightarrow$ $\varphi/W_k = e^g$ para alguna $g \in \mathcal{E}$ (|36|, p. 248) ∎

Se sabe que, para $k = 1$, el orden del producto canónico coincide con el exponente de convergencia de la sucesión de ceros que lo define (|36|, p. 251). Bajo algunas condiciones sobre la sucesión, generalizaremos la aserción para $k \geq 2$. Antes necesitamos el siguiente lema, cuya prueba puede hallarse en (|23|, p. 11).

LEMA 4.- "Para $p \geq 1$ entero y todos los números complejos u,

$$\log|E(u,p)| < A_p \cdot |u|^{p+1}/1 + |u| \qquad (20),$$

donde $A_p = 3e(2 + \log p)$. Para $p = 0$,

$$\log|E(u,0)| \leq \log(1 + |u|) \qquad (21)".$$

DEFINICION 8.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$, $i_e(\alpha) = k$. Definimos su exponente inferior de convergencia k-ésimo, x_k, como el número real no negativo:

$$x_k = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log_k n(r)}{\log r} \text{ "}.$$

La def. 8 queda justificada a la vista de Prop. 3(b). Es obvio que $x_k \leq \chi_k$.

DEFINICION 9.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$, $i_e(\alpha) = k$. Diremos que α tiene crecimiento exponencial regular cuando $\chi_k = x_k$, es decir, cuando existe el límite $\lim_{r\to\infty} \frac{\log_k n(r)}{\log r}$. Expresaremos que α es de clase H para significar que $\chi_k > 0$, es de crecimiento exponencial regular y verifica la siguiente propiedad:

Para cada $a \in (0,1)$ y cada $\lambda > 1$, existen $\sigma \in (a,1)$, $\mu > 0$ y $r_o > 0$ / $\sum_{r < |a_n|^\sigma} (r/|a_n|)^{j_n} <$
$< (n(r^\lambda))^\mu \quad \forall r > r_o \qquad (22),$

donde $j_n = 1 + h_n$. Una $f \in \mathcal{E}$ con $i_e'(f) = k$ se dirá de crecimiento exponencial regular (de clase H, resp.) cuando lo sea la sucesión de sus ceros no nulos".

TEOREMA 3.- "Sea $\alpha = \{a_n\}_1^\infty \in S_\infty$, $i_e(\alpha) = k \geq 2$, de clase H y exponente k-ésimo χ. Entonces el k-orden ρ del producto canónico $W_k(z;\alpha)$ es igual a χ".

Demostración: Tenemos: $W_k(z;\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n}, h_n)$, donde los h_n están dados por (18). Llamamos p al género k-ésimo. Se comprueba sin dificultad que si $n \geq A_k$, $h_n \geq 1$, ya que $\log x \geq 2\log_k x$ para $x \geq \exp_{k-1} 1$. Apliquemos el lema 4: $\log W_k(z;\alpha) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \log\left|E(\frac{z}{a_n}, h_n)\right| = \sum_{n=1}^{A_k-1} + \sum_{n=A_k}^{\infty}$, y la 1ª suma es $\sum_{n=1}^{A_k-1} \log\left|E(\frac{z}{a_n}, 0)\right| \leq \sum_{n=1}^{A_k-1} \log(1 + |z/a_n|) \leq (\sum_{n=1}^{A_k-1} 1/r_n)r = O(r) = O(\exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon}))$ para $\varepsilon > 0$ prefijado y $r > r_0(\varepsilon) > 0$, donde $r = |z|$, $r_n = |a_n|$, habiéndose usado que $\log(1 + |u|) \leq |u|$ $\forall u \in \mathbb{C}$. La 2ª suma puede acotarse por $\sum_{n \geq A_k} 3e(2 + \log h_n) \cdot (r/r_n)^{j_n}$, con $j_n = (p + 1)\left[\frac{\log n}{\log_k n}\right]$. Si $\beta > 1$ y r es suficientemente grande, $3e(2 + \log h_n) r^{j_n} < r^{\beta j_n}$ $\forall n \geq A_k$. Entonces, si se tiene $\sum_{n \geq A_k} (r/r_n)^{j_n} < \exp_{k-1}(r^\mu)$ asintóticamente para cada $\mu > \chi$, tendremos la 2ª suma acotada por $\exp_{k-1}(r^{\beta\mu}) < \exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon})$, donde $\varepsilon > 0$ es prefijado y se han elegido $\beta > 1$, $\mu > \chi$ / $\chi < \beta\mu < \chi + \varepsilon$.

Descomponemos $\sum_{n \geq A_k} (r/r_n)^{j_n} = \sum_{r_n^\sigma \leq r} + \sum_{r_n^\sigma > r} = \sum_1 + \sum_2$ con $0 < \sigma < 1$, que se escogerá dependiendo de un $\varepsilon > 0$ arbitrario. En $\sum_1$, $n \leq n(r^{1/\sigma}) \Rightarrow \sum_1 = \sum_{r_n^\sigma \leq r} r^{j_n} . r_n^{k_n - j_n} . r_n^{-k_n}$ ($k_n = (\chi+\varepsilon) \cdot \left[\frac{\log n}{\log_k n}\right]$). Así que $\sum_1 \leq \sum_{r_n^\sigma \leq r} r^{\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma} + (p+1)(1-\frac{1}{\sigma})\right)\left[\frac{\log n}{\log_k n}\right]}$.

$\cdot r_n^{-k_n}$. Podemos elegir $\sigma \in (0,1)$ tan próximo a 1 que $0 < \frac{\chi+\varepsilon}{\sigma} + (p+1)(1-\sigma^{-1}) < \chi + 2\varepsilon$ (recordemos que $p \leq \chi \leq p+1$). Las funciones $[x]$ y $\frac{\log x}{\log_k x}$ son no decrecientes (lema 2) $\Rightarrow \left[\frac{\log n}{\log_k n}\right] \leq$

$\leq \left[\frac{\log n(r^{1/\sigma})}{\log_k n(r^{1/\sigma})}\right] \leq \frac{\log n(r^{1/\sigma})}{\log_k n(r^{1/\sigma})} = T(r)$. Por Prop. 8, $\sum r_n^{-k_n} = A < \infty$

$\Longrightarrow \sum_1 \leq A r^{(\chi+2\varepsilon)T(r)}$. Tomando logaritmos resulta que

$(\chi + 2\varepsilon)T(r)\log r = \sigma(\chi + 2\varepsilon) \cdot \frac{\log r^{1/\sigma}}{\log_k n(r^{1/\sigma})}$. Por las hipótesis de $\chi > 0$ y de crecimiento exponencial regular, podemos afirmar que el cociente que figura como 2º factor supera $\frac{1}{\chi - \varepsilon}$ si r es suficientemente grande $\Longrightarrow (\chi + 2\varepsilon)T(r)\log r < \frac{\sigma(\chi + 2\varepsilon)}{\chi - \varepsilon} \cdot$

$\cdot \log n(r^{1/\sigma}) \Longrightarrow \sum_1 < A \cdot (n(r^{1/\sigma}))^{\frac{\sigma(\chi+2\varepsilon)}{\chi-\varepsilon}}$. Pero $n(r) <$

$< \exp_{k-1}(r^{\sigma(\chi+\varepsilon)})$ asintóticamente si se elige σ cercano a 1, de modo que $\sigma(\chi + \varepsilon) > \chi \Longrightarrow n(r^{1/\sigma}) < \exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon}) \Longrightarrow \sum_1 <$

$< A \cdot (\exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon}))^{\frac{\sigma(\chi+2\varepsilon)}{\chi-\varepsilon}} < \exp_{k-1}(r^{\chi+2\varepsilon})$ si $\varepsilon > 0$ es pequeño, asintóticamente.

Existe una sucesión $\sigma_i \nearrow 1$ que cumple (22). Si se da un $\varepsilon > 0$, elegimos $\lambda > 1$ con $\frac{\chi+\varepsilon}{\lambda} > \chi \Longrightarrow n(t) < \exp_{k-1}(t^{\frac{\chi+\varepsilon}{\lambda}})$ asintóticamente $\Longrightarrow n(t^\lambda) < \exp_{k-1}(t^{\chi+\varepsilon}) \Longrightarrow (n(t^\lambda))^\mu < \exp_{k-1}(t^{\chi+2\varepsilon})$ para valores grandes de t. Antes hemos escogido un $\sigma > 0$ dependiendo de ε, luego dependerá de λ y podemos suponer que es un σ_i (elíjase si no otro $\sigma_i > \sigma$). $\forall r > r_0$, $\sum_2 < (n(r^\lambda))^\mu <$

$< \exp_{k-1}(r^{\chi+2\varepsilon})$. Resumiendo, $\sum_{n \geq A_k} (r/r_n)^{j_n} = O(\exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon}))$

$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \log|W_k(z;\alpha)| = O(\exp_{k-1}(r^{\chi+\varepsilon}))$ $\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow |W_k(z;\alpha)| =$

$= O(\exp_k(r^{\chi+\varepsilon}))$ $\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \rho \leq \chi$, pero $\rho \geq \chi$ (Teorema 1) $\Rightarrow \rho = \chi$ ■

Completemos el Teorema 2 con un resultado que, bajo ciertas hipótesis, generaliza el Teorema de factorización de Hadamard--Borel.

<u>TEOREMA 4</u> .- "Sea $f \in \dot{\mathcal{E}}$ de clase H, $i_e(f) = k \geq 2$, $i'_e(f) = k'$, con orden k-ésimo ρ y exponente k'-ésimo de convergencia χ, y un cero de orden m en el origen ($m \geq 0$). Entonces, si α es la sucesión de sus ceros no nulos, existe $g \in \mathcal{E}$ tal que

$$f(z) = e^{g(z)} z^m . W_{k'}(z;\alpha) \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad (23)$$

de modo que $i_e(g) \leq k - 1$ y

$$\rho = \text{máx}(\chi, \rho_{k-1}(g)); \text{ si } k' < k, \rho = \rho_{k-1}(g) \quad (24).$$

Recíprocamente, si f se factoriza en la forma (23) para cierta $g \in \mathcal{E}$ y cierta sucesión $\alpha \in S_\infty$ de clase H con $i_e(\alpha) = k'$ y exponente k'-ésimo de convergencia χ, entonces f es una función entera con un cero de orden m en el origen y un cero en cada término de α, de modo que $i_e(f) = k$ y se verifica (24) para su orden k-ésimo ρ, siendo $k = \text{máx}(k', 1 + i_e(g))$".

<u>Demostración</u>: El teorema 2 da el desarrollo (23). Pero, según el teorema 3, $\rho_{k'}(W_{k'}) = \chi$ (lo cual es también válido si $k' = 1$) $\Longrightarrow \rho_{k'}(z^m W_{k'}) = \chi < \infty$. De ser $k' \leq k$ resulta $\rho_k(z^m W_{k'}) \leq \chi \leq \rho$ (teorema 1) $\Longrightarrow \rho_k(e^g) \leq \text{máx}(\rho_k(z^m W_{k'}), \rho_k(f)) = \rho$

(corolario 1 al teorema I.6 y Prop. I.13). Aplicamos el teorema I.3 y queda $\rho_{k-1}(g) = \rho_k(e^g) \leq \rho < \infty \Rightarrow i_e(g) < \infty$ y $\rho \geq \chi$, $\rho \geq \rho_{k-1}(g)$, es decir, $\rho \geq \text{máx}(\chi, \rho_{k-1}(g))$. Ahora no hay más que emplear el corolario 3 al teorema I.6 para deducir $\rho \leq \text{máx}(\chi, \rho_{k-1}(g$

Si $k' < k \Rightarrow \rho_k(z^m W_{k'}) = \rho_k(W_{k'}) = 0 \Longrightarrow \rho = \rho_{k-1}(g)$. La 2ª parte del enunciado es evidente, usando una técnica parecida∎

<u>NOTAS</u>.- 1) Observemos que tenemos otra forma de demostración del teorema clásico de Hadamard: Si $k = 1$, $f(z) = e^{g(z)} \cdot z^m \cdot W(z)$ por el Teorema de Weierstrass. Pero $\rho(W) = \chi$ en este caso y aplicando el teorema I.3 como antes resulta $\rho_{id}(g) = \rho(e^g) \leq \rho < \infty$, donde ρ es el orden de f. Del teorema I.1, g es un polinomio y $\rho_{id}(g) = \text{grado}(g) \Longrightarrow \text{grado}(g) \leq [\rho]$.

2) La función g de (19) queda determinada salvo adición de un múltiplo entero de $2\pi i$. Fijemos aquella $g = g_0$ tal que $|g(0)|$ es mínimo (si $\text{Im}\, g_r(0) = \pi$ para alguna g_r, entonces hay 2 funciones con $|g(0)|$ mínimo, a saber, g_r y $g_r - 2\pi i$, y éste es el único caso en que hay más de una; fijamos entonces $g_0 = g_r$).

Si se verifican las hipótesis del teorema 5, $i_1 = i_e(g) \leq k-1$. Ordenamos en una sucesión todas las g posibles: $G_1 = g_0$, $G_2 = g_0 + 2\pi i$, $G_3 = g_0 - 2\pi i$, $G_4 = g_0 + 4\pi i$, $G_5 = g_0 - 4\pi i, \ldots$ $\ldots, G_{2m} = g_0 + 2m\pi i$, $G_{2m+1} = g_0 - 2m\pi i, \ldots$ Si alguna de tales funciones G_n es de clase H, fijamos aquella $G = G_n$ con menor n. Entonces a G se le puede aplicar el teorema 5, y resulta:

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot z^s \cdot W_{k''}(z;\beta) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con $s \geqslant 0$ entero, $\beta = \{b_n\}_1^{\infty}$ = sucesión de ceros no nulos de G, $k'' \leq i_e(G) \leqslant k - 1$, $i_e(h) \leqslant i_1 - 1 \leqslant k - 2$, $\rho_{i_1}(G) = \text{máx}(\tau, \rho_{i_1 - 1}(h)$ siendo τ el exponente k''-ésimo de convergencia de β. Si alguna de las funciones h posibles fuese de clase H, se podría repetir el proceso, el cual tendría necesariamente un número finito de pasos, pues los índices de las funciones que van apareciendo como exponentes disminuyen en una unidad al menos respecto de las inmediatas anteriores. En tales hipótesis tendríamos un desarrollo unívocamente definido en escala de productos canónicos y exponenciales:

$$f(z) = P_1 z^{m_1} \exp(P_2 z^{m_2} \exp(P_3 z^{m_3} \exp(\ldots \exp(P_l z^{m_l} e^{Q(z)}) \ldots))),$$

donde $l \leqslant k$, $m_1, \ldots, m_l \geqslant 0$, Q es un polinomio y los P_j son productos canónicos tales que $i_e(P_j) \leqslant k + 1 - j$. Llamamos $\chi_1, \ldots$ $\ldots, \chi_l$, $p_1, \ldots, p_l$ a sus respectivos exponentes de convergencia y géneros. Denominamos <u>exponente de convergencia absoluto</u> de f a $\chi = \text{máx}(\chi_1, \ldots, \chi_l)$ y <u>género</u> de f a $q = \text{máx}(p_1, \ldots, p_l, gr(Q)$.

En esta situación, es fácil probar:

a) $\rho = \text{máx}(gr(Q), \chi)$,

b) $q \leqslant \rho \leqslant q + 1$,

c) si ρ no es entero, $\rho = \chi$ y $q = [\rho]$. Si ρ es entero, $q = \rho$ o $\rho - 1$, y si además χ no es entero, $\rho = gr(Q)$.

B I B L I O G R A F I A

|1| AHLFORS, L. V.: "Complex Analysis". McGraw-Hill. 1979.

|2| ABI-KHUZAM, F. F.: "The order of entire functions with radially distributed zeros". Proc. Amer. Math. Soc. 82, nº 1, pp. 71-75. 1981.

|3| AZPEITIA, A. G.: "A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series". Proc. Amer. Math. Soc. 12, pp. 722-723. 1961.

|4| BAJPAI, S. K.; GAUTAN, S.; BAJPAI, S. S.: "Generalizations of growth constants, I". Ann. Pol. Math. 37, pp. 13-24. 1980. (*).

|5| BERNSTEIN, S. N.: "Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle". Gauthier-Villars. 1926.

|6| BOAS, R. P.: "Entire functions". Academic Press. 1954.

|7| BURCKELL, R. B.: "An introduction to classical complex analysis" (vol. I). Academic Press. 1979.

|8| CARTAN, H.: "Teoría elemental de funciones analíticas de una y varias variables complejas". Selecciones científicas. 1968.

|9| EVGRAFOV, M. A.: "Asymptotic estimates and entire functions". Gordon and Breach. 1961.

|10| FORSYTH, A. R.: "Theory of functions of a complex variable". Dover. 1965.

|11| GRIFFITHS, P. A.: "Entire holomorphic mappings in one and several complex variables. Princeton Un. Press. 1976.

|12| HARDY, G. H.: "Orders of infinity". Hafner. 1971.

|13| HAYMAN, W. K.: "Meromorphic functions". Oxford Un. Press. 1964.

|14| HAYMAN, W. K.; KENNEDY, P. B.: "Subarmonic functions" (vol. I) Academic Press. 1976.

|15| HILLE, E.: "Analytic function theory" (vol. II). Chelsea. 1962.

|16| HOLLAND, A. S. B.: "Introduction to the theory of entire functions". Academic Press. 1973.

|17| JUNEJA, O. P.: "Approximation of an Entire Function". J. Approx. Theory 11, pp. 343-349. 1974.

|18| KAPOOR, G. P.; BAJPAI, S. K.: "On the (p,q)-order and lower (p,q)-order of an entire function, I". J. Reine Angew. Math. 282, pp. 53-67. 1976. (*).

|19| ________________: "On the (p,q)-order and lower (p,q)-order of an entire function, II". J. Reine Angew. Math. 290, pp. 180-190. 1977. (*).

|20| KNOPP, K.: "Infinite sequences and series". Dover. 1956.

|21| ________: "Problem book in the theory of functions" (vol. II Dover. 1952.

|22| KRZYŻ, J. G.: "Problems in complex variable theory". Elsevier. 1971.

|23| LEVIN, B. Ja.: "Distributions of zeros of entire functions". Amer. Math. Soc. 1980.

|24| LEVINSON, N.; REDHEFER, R. M.: "Curso de variable compleja". Reverté. 1975.

|25| MARKUSCHEVICH, A. I.: "Teoría de las funciones analíticas" (vol. II). Mir. 1970.

|26| MEINARDUS, G.: "Approximation of functions: theory and numerical methods". Springer-Verlag. 1967.

|27| REDDY, A. R.: "On entire Dirichlet series of infinite order". (I). Rev. Mat. Hisp.-Amer. 27, nº 2, pp. 120-131. 1967.

|28| __________: "On entire Dirichlet series of infinite order". (II). Rev. Mat. Hisp.-Amer. 29, nº 5, pp. 215-231. 1969.

|29| __________: "Approximation of a Entire Function". J. Approx. Theory 3, pp. 128-137. 1970.

|30| __________: "Best polinomial approximation to certain entire functions". J. Approx. Theory 5, pp. 97-112. 1972.

|31| RUDIN, W.: "Real and complex analysis". Tata McGraw-Hill. 1974.

|32| SATO, D.: "On the rate of growth of entire functions of fast growth". Bull. Amer. Math. Soc. 69, pp. 410-414. 1963. (*).

|33| SEREMETA, M. N.: "On the conection between the growth of the maximum modulus and the moduli of the coefficients of its power series expansion". Amer. Math. Soc. Transl. (2) 88, pp. 291-301. 1970. (*).

|34| SHAH, S. M.: "On the lower order of integral functions". Bull. Amer. Math. Soc. 52, pp. 1046-1052. 1946. (*).

|35| ___________: "Polynomial approximation of an entire function and generalized orders". J. Approx. Theory 19, pp. 315-324.197

|36| TITCHMARSH, E. C.: "The theory of functions". Oxford Un. Press. 1975.

|37| TOPPILA, S.: "An introduction to Nevanlinna Theory". L. Notes in Math. 981, pp. 1-12. 1983.

|38| VALIRON, G.: "General theory of integral functions". Chelsea 1949.

|39| VARGA, R. S.: "On a extension of a result of S. N. Bernstein" J. Approx. Theory 1, pp. 176-179. 1968.

|40| VOLKOVYSKI, L. I.; LUNTS, G. L.; ARAMANOVICH, I. G.: "Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja". Mir. 1972.

(*) Conocido por referencias.

CRECIMIENTO RELATIVO DE FUNCIONES ENTERAS. APORTACIONES AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ENTERAS CON INDICE EXPONENCIAL FINITO.

Luis Bernal Gonzále

CORRECCION

El ejemplo dado en la pág. 36 es incorrecto, debido a que una función entera $g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ que cumpla $a_n = c_{2n}$ $\forall n \geq 0$ -donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$- debe ser necesariamente un polinomio. En efecto, tal función verificaría $2g(z^2) = g^2(z) + g^2(-z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, como fácilmente se comprueba. Tomando módulos máximos sobre $|z| = r$, resulta $G(r^2) \leq G(r)^2$ $\forall r > 0$ (1). Demostremos que una función que cumple (1) se reduce a un polinomio, con lo cual tendríamos además que la Prop. I.15, aunque cierta, sería trivial:

Por inducción, $G(r^{2^n}) \leq G(r)^{2^n}$ $\forall n \geq 1$, pues para $n=1$ es (1) y supuesto para n, $G(r^{2^{n+1}}) \leq G(r^{2^n})^2 \leq (G(r)^{2^n})^2 = G(r)^{2^{n+1}}$. Fijamos $r = e$ y hacemos $x_n = r^{2^n} \Rightarrow G(x_n) \leq G(e)^{\log x_n} \leq x_n^k$, siendo k un entero $\geq \log G(e) \Rightarrow$ por las desigualdades de Cauchy, $|a_m| \leq G(x_n)/x_n^m \leq x_n^{k-m} \xrightarrow[n]{} 0$ $\forall m > k \Rightarrow g$ es un polinomio de grado k como máximo.

No obstante, la clase de las funciones que no cumplen la condición (I;29) no se reduce a los polinomios, como probamos con el siguiente nuevo ejemplo:

Si $\rho_1, \lambda_1, \tau_1, t_1$ designan respectivamente el orden, orden inferior, tipo y tipo inferior logarítmicos de g, se verifica (cfr. (*)):

$$\liminf_n \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{n}\log|1/a_n|\right)} \leq \lambda_1 - 1 \leq \rho_1 - 1 = \limsup_n \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{n}\log|1/a_n|\right)} \qquad (2)$$

$$\text{y} \quad \liminf_n \frac{(n/\rho_1)^{\rho_1}}{\left\{\frac{\log|1/a_n|}{\rho_1 - 1}\right\}^{\rho_1 - 1}} \leq t_1 \leq \tau_1 = \limsup_n \frac{(n/\rho_1)^{\rho_1}}{\left\{\frac{\log|1/a_n|}{\rho_1 - 1}\right\}^{\rho_1 - 1}} \qquad (3).$$

Aplicando (2) y (3), la función entera trascendente

$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} z^n / e^{(\beta-1)\cdot(n/\beta)^{\beta/\beta-1}} \qquad (\beta > 1) \qquad (4)$$

tiene crecimiento logarítmico completamente regular, con orden β y tipo 1.
Por tanto, $\lim_{r\to\infty} \frac{\log G(r)}{(\log r)^\beta} = 1 \Rightarrow \log G(r) = (1 + \varphi(r))(\log r)^\beta \Rightarrow G(r) = \exp((1 + \varphi(r)) \cdot (\log r)^\beta)$, donde $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = 0$. Sea $\sigma \in (1, 2^{1/\beta}) \Rightarrow G(r^\sigma) = \exp((1+\varphi(r^\sigma))(\log r^\sigma)^\beta) = \exp(\sigma^\beta(1+\varphi(r^\sigma))(\log r)^\beta)$ y $G(r)^2 = \exp(2(1+\varphi(r))(\log r)^\beta) \Rightarrow G(r)^2/G(r^\sigma) = \exp((\log r)^\beta \cdot (2 - \sigma^\beta + 2\varphi(r) - \sigma^\beta(r^\sigma)))$. Pero $\lim_{r\to\infty} (2\varphi(r) - \sigma^\beta(r^\sigma)) = 0 \Rightarrow |2\varphi(r) - \sigma^\beta\varphi(r^\sigma)| < 2 - \sigma^\beta$ $\forall r > r_0$ $(r_0 > 1) \Rightarrow (\log r)^\beta \cdot (2 - \sigma^\beta + 2\varphi(r) - \sigma^\beta\varphi(r^\sigma)) > 0 \Rightarrow G(r)^2 > G(r^\sigma)$ $\forall r > r_0(\sigma) > 0$. Así que g no verifica (I;29).

En la Prop. I.16 se trataba de dar un contraejemplo de la tesis del teorema I.5 si no se cumplía (I;29). Puesto el que se da se basa en el ejemplo incorrecto, proporcionamos aquí uno basado en la función que acabamos de dar: "Para cada $\alpha \in (1,2)$,

(*) A.R. REDDY, Approximation of an Entire Function. J. of Approx. Theory 3,131. 197

$\exists g \in \mathcal{E}$ / $\lambda_g(g^2) \geqslant \alpha$" (necesariamente $\rho_g(g^2) \leqslant 2$ por el lema I.7, pero hemos obtenido $\rho_g(g^2) \geqslant \alpha > 1 = \max(\rho_g(g), \rho_g(g))$). En efecto:

Si $\alpha \in (1,2)$ está dado, sea $\beta = \log 2/\log\alpha > 1$ y construimos la correspondiente g de (4). Si $\widetilde{G}(r) = \max\{|g^2(z)| : |z| = r\} = G(r)^2 \Rightarrow \widetilde{G}(r) > G(r^\sigma)$ asintóticamente para cada $\sigma \in (1, \alpha = 2^{1/\beta})$ $\Rightarrow \log G^{-1}(\widetilde{G}(r))/\log r > \sigma \quad \forall r > r_o(\sigma) > 0 \Rightarrow$ tomando límites inferiores, $\lambda_g(g^2) \geqslant \sigma \Rightarrow \lambda_g(g^2) \geqslant \alpha$ ∎

...AD DE CIENCIAS MAT...

...o el Tribunal integrado por l...

...de la fecha, para juzgar la T...

D. Luis Bernal González

... "Crecimiento relativo de funciones enteras. Aportaciones al estudio de las funciones enteras con índice exponencial finito"

...la calificación de Sobresaliente "cum laude"

...villa, 29 de Septiembre 84

...l, El Vocal,

...te El Secretario, El Doctorando