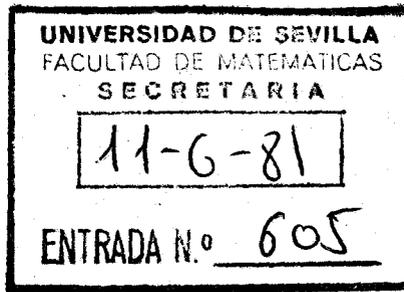


CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO NUMÉRICO
DE PROBLEMAS DE VÓRTICES
ESTACIONARIOS

E. Fernández Cara

4256



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

CONTRIBUCION AL ESTUDIO

NUMERICO DE PROBLEMAS DE

VORTICES ESTACIONARIOS

Vº Bº

EL DIRECTOR DEL TRABAJO

Fdo. Antonio VALLE SANCHEZ

Catedrático-Director del
Dpto. de Ecuaciones Funcio-
nales de la Facultad de
Matemáticas de la Universidad
de Sevilla

Memoria que presenta
Enrique FERNANDEZ CARA
para optar al grado
de Doctor en Ciencias
Matemáticas.

Sevilla, Julio de 1981

Fdo. Enrique FERNANDEZ CARA

INTRODUCCION

En la Sección 1 de este Capítulo formulamos el problema físico bajo consideración, describimos su modelización matemática, y presentamos un detallado desarrollo histórico del mismo, resaltando de forma especial las analogías que presenta con ciertas cuestiones que aparecen en el estudio del plasma confinado en una cavidad toroidal. La Sección 2, de carácter general, resume el espíritu de los próximos Capítulos, y señala el interés físico-matemático de los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sección 3, indicamos los resultados básicos del Análisis Funcional que utilizaremos más adelante.

CAPITULO IINTRODUCCION. EL PROBLEMA FISICO Y SU MODELIZACION
MATEMATICA.1- MOTIVACION FISICA

El estudio de la existencia de vórtices estacionarios axisimétricos (anillos vórtices) en un fluido ideal (es decir, no viscoso y de densidad constante) en equilibrio conduce a ciertos problemas de frontera libre que pueden posteriormente reducirse a problemas elípticos semilineales. Un vórtice estacionario axisimétrico es una figura de revolución \mathcal{R} en el espacio Euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 homeomorfa a un toro en la mayoría de los casos, y asociada a un campo vectorial continuo y axisimétrico \vec{q} (la velocidad del fluido) de tal forma que se tenga:

- (a) Tanto \mathcal{R} como \vec{q} no dependen del tiempo.
- (b) La vorticidad $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{q}$ es nula en $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{R}$, no lo es en \mathcal{R} , y satisface una ecuación no lineal de movimiento que determina, entre otras cosas, la frontera de \mathcal{R} .
- (c) \vec{q} tiende hacia un valor constante en el infinito.

Se puede adoptar el siguiente punto de vista, quizás el más próximo a aquellos anillos vórtices que aparecen en el mundo físico (es el caso, por ejemplo, de los anillos de humo, de ciertos fenómenos meteorológicos, y de los "hongos" creados por las grandes explosiones):

"Si la velocidad constante mencionada en (c) está orientada (por ejemplo) en dirección vertical y sentido hacia abajo, un observador fijo con respecto al fluido en el infinito

ve un anillo vórtice que se mueve hacia arriba con velocidad constante y sin cambio de tamaño o de forma."

(1.1)- Descripción de las ecuaciones

El problema matemático puede formularse en términos de la función de corriente de STOKES Ψ (muy próxima al potencial vectorial del campo de velocidades) como un problema de valores de contorno para una E.D.P. elíptica semilineal que toma formas diferentes dentro y fuera de la región \mathcal{R} .

En efecto, denotemos por

$$X = [X_1, X_2, X_3] = [r \cdot \cos \theta, r \cdot \operatorname{sen} \theta, z]$$

un punto arbitrario de R^3 , de forma que r , θ y z son las coordenadas cilíndricas del punto X . Utilizaremos de momento corchetes para expresar las componentes de un campo vectorial (tal como el campo de las velocidades del fluido) en las direcciones X_j , y paréntesis para las componentes del mismo en el sistema cilíndrico habitual. Consideremos el flujo axisimétrico de un fluido ideal de densidad ρ , con velocidad \vec{q} y de vorticidad $\omega = \operatorname{rot} \vec{q} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{q}$. La ecuación de conservación de la masa, $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0$, debido a la axisimetría, puede escribirse también

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0,$$

y por tanto existirá una función $\Psi = \Psi(r, z)$ (función de corriente) tal que

$$q_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad q_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r};$$

de igual forma puede deducirse la existencia de un potencial vectorial $\vec{\phi} = \vec{\phi}(r, z)$, que verifica

$$\vec{\phi} = \left(0, \frac{1}{r} \Psi, 0 \right), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} = 0,$$

$$\vec{q} = \text{rot } \vec{\phi} = \left(+ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right),$$

$$\vec{\omega} = -\Delta \vec{\phi} \equiv \left(0, L\Psi, 0 \right),$$

donde

$$\Delta \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_j^2}, \quad \text{y} \quad L \equiv - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La función Ψ debe ser constante sobre cada superficie de corriente, ya que $\vec{q} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$; por otra parte, el flujo volumétrico entre dos superficies de corriente

$$\Psi(r, z) \equiv \text{cte.} = \Psi_j, \quad j=1, 2,$$

viene dado por $2\pi(\Psi_2 - \Psi_1)$.

Con objeto de determinar la E.D.P. del problema, pongamos

$$\vec{\omega} = \left(0, \omega, 0 \right), \quad \omega = L\Psi,$$

y definamos el semiplano meridiano

$$\Pi = \{ (r, z) \mid (r, z) \in \mathbb{R}^2, r > 0 \}.$$

Las ecuaciones que rigen el movimiento de un flujo no viscoso, estacionario y axisimétrico indican que la magnitud $\frac{1}{r} \omega$ debe ser constante sobre cada superficie de corriente; de acuerdo con esto pondremos

$$\omega = \lambda r f(\Psi),$$

donde f es una determinada *función de vorticidad* cuyas características serán especificadas más adelante; la constante positiva λ es un parámetro de *intensidad de vorticidad*, que suponemos conocido. Tomando ejes fijos con respecto al anillo, llamando A a la sección meridiana de la región \mathcal{D} en Π , e igualando

las anteriores expresiones de ω obtendremos

$$(1.1) \quad L\Psi \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \begin{cases} \lambda r f(\Psi), & \text{en } A, \\ 0, & \text{en } \Pi \setminus A, \end{cases}$$

donde

$$(1.2) \quad \Psi \text{ y } \vec{\nabla} \Psi \text{ son continuas sobre } \partial A;$$

dado que ∂A y el eje de simetría $r=0$ deben ser líneas de corriente, escribiremos

$$(1.3) \quad \Psi = 0 \text{ sobre } \partial A,$$

$$(1.4) \quad \Psi = -k \text{ sobre } \partial \Pi,$$

donde k es una constante que se interpreta como un *parámetro de flujo* entre el eje $r=0$ y el anillo. Realmente, la cantidad de flujo entre el eje de simetría y la frontera ∂A del anillo vórtice viene dada por $-2\pi k$. Si el anillo debe moverse con respecto al fluido en el infinito con velocidad $(0,0,W)$, tendremos también

$$(1.5) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \rightarrow -W, \quad \text{cuando } r^2 + z^2 \rightarrow +\infty.$$

Una de las mayores dificultades del problema (1.1)-(1.5) estriba en la existencia de una frontera libre ∂A , sobre la cual el segundo miembro de (1.1) puede presentar una discontinuidad en ciertos casos de interés. Con la intención de soslayarla, recurriremos a la siguiente consecuencia del *Principio del Máximo* (cf. PROTTER-WEINBERGER [50]) :

"Si $f(\Psi) > 0$ en A , entonces $\Psi > 0$ en A , y $\Psi < 0$ en $\Pi \setminus A$ ".

De acuerdo con ello, consideraremos funciones de vorticidad definidas de $\mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$, y tal que

$$f(t) = 0, \quad \forall t \leq 0, \quad f(t) > 0, \quad \forall t > 0$$

y pondremos

$$A = \{ x \mid x=(r,z) \in \Pi, \Psi(x) > 0 \} .$$

La función f se supondrá también no-decreciente, estrictamente creciente si $f(t) > 0$, y cumpliendo una condición de tipo Hölder localmente en R^1 . En ese caso, la teoría de regularidad de soluciones de E.D.P. elípticas muestra que (1.1) es equivalente a

$$L\Psi = \lambda r f(\Psi) \quad \text{en } \Pi ,$$

y la frontera libre ∂A dejará de ser un obstáculo en la resolución del problema de Dirichlet. Si es necesario, el caso en que f presenta una discontinuidad en $t=0$ puede ser posteriormente tratado mediante un procedimiento de regularización.

Es conveniente descomponer la función de corriente Ψ en la suma

$$\Psi(r,z) = u(r,z) - \frac{1}{2} W r^2 + k ,$$

donde $u = u(r,z)$ es la función de corriente del campo de velocidades inducido por el anillo, y $-\frac{1}{2} W r^2 + k$ representa una conducción uniforme del fluido. Obsérvese que la energía cinética del movimiento de vorticidad viene dada por

$$(1.6) \quad \pi \rho \int_{\Pi} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 dx = \pi \rho \int_{\Pi} \frac{1}{r} \left| \nabla \left(\Psi + \frac{1}{2} W r^2 \right) \right|^2 dx .$$

Si suponemos que esta energía cinética está fijada "a priori", las anteriores ecuaciones, en términos de u , podrán escribirse:

$$(1.7) \left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda r f \left(u - \frac{1}{2} W r^2 + k \right) \text{ en } \Pi, \\ u=0 \text{ sobre } \partial \Pi = \{ x \mid x=(r,z) \in R^2, r=0 \}, \\ \int_{\Pi} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 dx = \eta > 0 \quad (\text{constante conocida}) \end{array} \right.$$

Como ya quedó señalado, la frontera libre ∂A no interviene en las ecuaciones. Puede ser determinada "a posteriori", a partir de una solución u de (1.7), mediante

$$A = \{ x \mid x=(r,z) \in \Pi, u(x) > \frac{1}{2} W r^2 - k \} .$$

Nota 1.1 Si ponemos $u' = u + k$, y luego llamamos u a u' , (1.7) puede formularse equivalentemente como sigue

$$(1.7') \left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda r f \left(u - \frac{1}{2} W r^2 \right) \text{ en } \Pi; \\ u=k \text{ sobre } \partial \Pi, \\ \int_{\Pi} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 dx = \eta, \end{array} \right.$$

y el conjunto A (zona de vorticidad) queda determinado a partir de una solución u de (1.7') mediante

$$A = \{ x \mid x=(r,z) \in \Pi, u(x) > \frac{1}{2} W r^2 \} .$$

Podemos considerar de forma análoga el flujo plano estacionario de un fluido en R^2 que contenga regiones de vorticidad; mediante la introducción de una nueva función de corriente Ψ , y fijando "a priori" la energía cinética desprendida en el movimiento de vorticidad, el problema físico posee una formulación matemática análoga a (1.1)-(1.6), que, tras el cambio

$$\Psi(r,z) = u(r,z) - W r + k ,$$

se reduce a

$$(1.8) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda f(u - Wr + k) \text{ en } \Pi, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Pi, \\ \int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx = \eta, \end{array} \right.$$

la región de vorticidad viene en este caso dada por el conjunto

$$A = \{x \mid x = (r, z) \in \Pi, u(x) > Wr - k\}$$

Para el problema (1.8) es válida la observación hecha en la Nota 1.1, y, en particular, obtenemos la formulación equivalente

$$(1.8') \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda f(u - Wr) \text{ en } \Pi; \\ u = k \text{ sobre } \partial\Pi, \\ \int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx = \eta, \end{array} \right.$$

quedando determinada "a posteriori" la región A por

$$A = \{x \mid x = (r, z) \in \Pi, u(x) > Wr\},$$

donde u es la solución de (1.8').

Nota 1.2 Nótese la gran analogía entre los problemas (1.7) y (1.8) considerados aquí, y las ecuaciones que describen el comportamiento del plasma confinado en una cavidad toroidal (máquina Tokamak) (cf. SHAFRANOV [55], BERESTYCKI [6] y BERESTYCKI-BREZIS [8, 9]).

(1.2)- Desarrollo histórico del problema

Una cuestión clásica de la Mecánica de Fluidos ha sido la demostración de existencia de soluciones de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido ideal que re-

presenten anillos vórtices estacionarios. Ya en 1858, HELMHOLTZ [34] consideró los *anillos de pequeña sección* como uno de los dos casos extremos, y dedujo de la posibilidad de convenientes aproximaciones que tales anillos se movían "con velocidad muy grande y aproximadamente constante". El problema fue reconsiderado por Kelvin en 1910 (cf. THOMSON [60]); dando por supuesta la existencia de ciertos anillos estacionarios de pequeña sección, éste calculaba una aproximación explícita de su velocidad de propagación, establecía un principio variacional (curiosamente válido para vórtices estacionarios no restringidos a la simetría axial, pero formulado sólo en términos físicos, y con una obscura base analítica), conjeturaba la existencia de ciertas configuraciones de vórtices no axisimétricos, y proponía una teoría de la estructura atómica basada en el concepto de vorticidad. HICKS [35] y DYSON [23], nuevamente suponiendo la existencia de anillos vórtices estacionarios de pequeña sección y magnitud $\frac{1}{r} \omega$ constante, calcularon la propagación de los mismos de forma más sistemática que Kelvin; en particular, Dyson calculó los desarrollos de las expresiones que dan la configuración y la velocidad en función de un pequeño parámetro hasta los términos de cuarto orden.

En cuanto al otro caso extremo (*anillos de gran sección*), HILL [36] descubrió en 1894 una solución exacta explícita con $\frac{1}{r} \omega$ constante, para la cual el anillo es realmente una bola de R^3 . En el caso

$$(1.9a) \quad f(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s > 0, \\ 0, & \text{si } s \leq 0, \end{cases}$$

$$(1.9b) \quad k = 0,$$

esta solución se encuentra como sigue. Sean R, θ las coordenadas esféricas del sistema de referencia habitual:

$$r = R \cdot \sin \theta, \quad z = R \cdot \cos \theta.$$

Si admitimos de que una esfera $R=a$ puede servir de frontera del anillo, y resolvemos (1.1)-(1.5) separadamente para $R \leq a$ y para $R \geq a$, obtenemos

$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{10} \lambda R^2 \sin^2 [(a^2 - R^2) \theta], & \text{si } R \leq a, \\ -\frac{1}{2} W R^2 \sin^2 \left[\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) \theta \right], & \text{si } R \geq a, \end{cases}$$

donde la solución exterior representa el flujo irrotacional clásico asociado a una esfera. La elección $\lambda a^2/W = 15/2$ hace $\frac{\partial \Psi}{\partial R}$ continua sobre la esfera $R=a$, y todas las ecuaciones (1.1)-(1.5) son satisfechas (cf. NORBURY [44]):

Nota 1.3 Un anillo de pequeña sección puede ser definido en términos de un pequeño parámetro positivo ε , como aquel cuya zona de vorticidad A_ε contiene al menos un punto $(\ell, 0)$ en el cual $\nabla \Psi = 0$, y posee área

$$m(A_\varepsilon) = \pi \varepsilon^2 \ell^2 + o(\varepsilon^2).$$

Si se han fijado los parámetros ℓ y ε , y no W y k (éstos serán determinados a partir de la solución), tomamos λ proporcional a $1/\varepsilon^2$, de manera que, definiendo las coordenadas (s, t) mediante

$$r - \ell = \varepsilon \ell s \cdot \cos t, \quad z = \varepsilon \ell s \cdot \sin t,$$

la solución fundamental del operador $-r\Delta$ (cf. FRAENKEL-BERGER [32]) se convierte, para valores acotados de s y s_0 , en

$$P(r_0, z_0; r, z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \frac{8}{\varepsilon |s-s_0|} - 2 + o(\varepsilon \log \varepsilon) \right\},$$

donde

$$|s-s_0|^2 = s^2 + s_0^2 - 2ss_0 \cdot \cos(t-t_0).$$

Esta es esencialmente la fórmula utilizada por Helmholtz para, al combinarla con la expresión de la solución de (1.1)-(1.5) en función de la solución fundamental

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(r_0, z_0) = -\frac{1}{2} W r_0^2 + k + \lambda \int_{A_\varepsilon} r P(r_0, z_0; r, z) f(\Psi) dx, \\ \Psi|_{\partial A_\varepsilon} = 0, \end{array} \right.$$

deducir una velocidad de propagación W "grande" y "aproximadamente constante". Kelvin, Hicks y Dyson añadieron la condición f cte. y la suposición de ser ∂A aproximadamente circular, para así obtener estimaciones de la misma.

En rigor (cf. FRAENKEL [30]) debe imponerse

$$\Psi = 0, \quad \text{cuando } s=0,$$

y la constante $\Psi|_{\partial A}$ debe dejarse libre; la función f suele tomarse positiva y continuamente diferenciable en $(-\infty, 0]$, con derivada uniformemente acotada (la condición de positividad puede ser ligeramente debilitada). Basta entonces resolver (1.10) en \bar{A} , ya que esta misma expresión define Ψ en todo R^3 , y una primera "aproximación formal" $\Psi_0 = \Psi_0(s)$ se obtiene al resolver la E.D.O.

$$\Psi_{ss} + \frac{1}{s} \Psi_s = \begin{cases} -\lambda_0 f(\Psi) & , \quad s < 1 \\ 0 & \quad s > 1 \end{cases},$$

que contiene los términos dominantes de (1.1), y en la cual,

$\lambda_0 = \epsilon^2 \lambda \ell^4$ es independiente de ϵ . Esta función es la primera de una sucesión de aproximaciones sucesivas que convergen en \bar{A} para valores de ϵ que tienden a 0. En este caso particular resulta que la constante de flujo k es "grande". Más precisamente, si $\pi r \eta$ es la energía cinética del movimiento de vorticidad, entonces el radio

$$kW^{1/3} \eta^{-2/3} \cong \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{\pi} \cdot \log \frac{8}{\epsilon} \right\}^{2/3} .$$

Las configuraciones estudiadas por Kelvin en 1910 condujeron a TAIT [57] a escribir las primeras notas sobre la teoría de nudos topológicos; la teoría de vórtices atómicos ha dado lugar, por su parte, a la modelización de ciertos problemas en Física de bajas temperaturas (superconductividad, superfluidez), como por ejemplo, los tratados en FEYNMAN [29] y DONNELLY-ROBERTS [22]. Además, el desarrollo histórico de la teoría de anillos vórtices muestra la analogía con otros problemas de tipo frontera libre, donde, hablando "a grosso modo", se produce un fenómeno de confinamiento; entre ellos, puede citarse el problema de la Física de Plasmas (cf. TEMAM [58], BERESTYCKI-BREZIS [8]; sin embargo, pueden encontrarse en TEMAM [59] otros modelos de distinta naturaleza para el estudio del equilibrio del plasma), la determinación de la configuración de equilibrio de estrellas fluídas en rotación (cf. AUCHMUTY-BEALS [3], LIONS, P.L. [40]) y ciertos problemas no-lineales en la teoría de Thomas-Fermi (cf. BENILAN-BREZIS [4] y LIONS, P.L. [41]).

Nota 1.4 En (1.7)-(1.8), la tercera condición puede ser interpretada como una normalización restrictiva. En el modelo que describe el equilibrio de un plasma aximétrico confinado en una

cavidad toroidal evocado anteriormente, el sistema viene regido por las ecuaciones:

$$(1.11) \left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda g(x, u) \quad \text{en } \Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Pi \quad (\text{acotado}) \\ u = k \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \quad (k \text{ es una constante desconocida}) \\ - \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I > 0, \end{array} \right.$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ representa la derivada en la dirección de la normal exterior en los puntos de Γ . Este problema ha sido estudiado por TEMAM [53] y PUEL [51] en el caso modelo $g(r, u) = u^+ \equiv \max(u, 0)$, y por BERESTYCKI-BREZIS [8, 9] en un caso más general; para una deducción exacta de las ecuaciones que gobiernan este fenómeno véase MERCIER [43], y el Apéndice de TEMAM [58]. Este último prueba la existencia de al menos un par (u, λ) , solución del problema de autovalores no lineal

$$(1.12) \left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda g(x, u) \quad \text{en } \Omega, \\ u = k \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \quad (k \text{ es una constante desconocida}) \\ - \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I > 0, \\ \int_{\Omega} G(x, u) dx = C > 0, \end{array} \right.$$

donde

$$G(x, z) = \int_0^z g(x, s) ds, \quad (x, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1,$$

y C es una constante positiva arbitraria, bajo ciertas condiciones (algo restrictivas) para la función g . Posteriormente,

BERESTYCKI-BREZIS [8] establecen la existencia de solución de (1.12), fijando "a priori" el valor de λ , y eliminando la restricción

$$\int_{\Omega} G(x,u) dx = C.$$

PUEL [51] y TEMAM [59] dan un resultado de existencia para (1.11) con λ , $I > 0$ dados, dejando el par (u, k) como incógnita del sistema y tomando $g(x, u) = u^+$. Este último y DAMLAMIAM-PUEL [21] demuestran seguidamente un resultado parcial de unicidad del problema (mientras que SCHAEFFER [53] establece un resultado de no unicidad). Las distintas formulaciones ("primal" y "dual" en la terminología clásica del Análisis no Convexo) de (1.11), así como su equivalencia pueden encontrarse en DAMLAMIAM [20]. Finalmente, BERESTYCKI-BREZIS [9] estudian la existencia y unicidad de (1.11), donde de nuevo λ e I son constantes positivas dadas, las incógnitas son la función u y el parámetro k , y la función g es continua de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$, y verifica

$$(i) \quad g(x, z) = 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall z \leq 0.$$

$$(ii) \quad g(x, z) \leq g(x, z'), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^1, \quad z \leq z'.$$

$$(iii) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} g(x, z)/z^p = 0 \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega},$$

donde

$$1 < p < +\infty, \quad \text{si } N \leq 2$$

$$p = N/(N-2), \quad \text{si } N \geq 3$$

$$(iv) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(x, z) dx > I$$

La existencia de soluciones de (1.11) queda demostrada en [9] tanto por métodos variacionales (que caracterizan la solución como un punto crítico de un apropiado funcional, interviniendo la traza sobre la frontera como multiplicador de Lagrange asociado a la condición de normalización), como por métodos de tipo topológicos (que caracterizan la solución como punto fijo de un apropiado operador). La estructura variacional de (1.11) se debe a la linealidad en u del primer miembro de la restricción

$$-\int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I . \quad \blacksquare$$

La demostración matemática de la existencia de solución de (1.7) fue considerada por primera vez por LICHTENSTEIN [9], para el caso particular de vórtices de pequeña sección y magnitud $\frac{1}{r} \omega$ constante. Este trabajo sigue una técnica constructiva, pero también posee serios errores de tipo aritmético. Ha sido posteriormente corregido y extendido al caso de funciones de vorticidad más generales en FRAENKEL [3]. Por otra parte, en 1972, NORBURY [4] dio una demostración constructiva de la existencia de anillos estacionarios de magnitud $\frac{1}{r} \omega$ constante, próximos al vórtice de Hill, pero homeomorfos a un toro sólido.

La existencia de otros vórtices estacionarios se conjetura en NORBURY [45] mediante resultados numéricos que describen la familia uniparamétrica de anillos de magnitud $\frac{1}{r} \omega$ constante que se "deforman" en el plano, con estado inicial de pequeña sección y con estado final esférico (o vórtice

ce de Hill).

En 1974, FRAENKEL-BERGER [3] establecen de manera definitiva la existencia de solución del problema siguiente:

(P₁) { "Dados $W > 0$, $k \leq 0$, $\eta > 0$ y una función $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$ no-decreciente y localmente Hölder-continua, hallar una función u y un parámetro real $\lambda > 0$ tales que u y λ satisfagan las ecuaciones (1.7)".

En primer lugar, estos autores se restringen al caso en que (1.7) se formula en un cilindro acotado V de \mathbb{R}^2 , y demuestran que las soluciones (u, λ) quedan caracterizadas como puntos críticos de un determinado funcional definido en un apropiado espacio de Hilbert. Después, utilizando la caracterización variacional isoperimétrica, la simetrización de Steiner (véase, por ejemplo, POLYA-SZEGÖ [4]) y el principio del máximo generalizado (cf. LITTMAN [4]), deducen ciertas propiedades y estimaciones de las soluciones que, mediante un argumento secuencial, conducen a la existencia de soluciones. Un resultado análogo es obtenido por NORBURY [4] en el caso de las ecuaciones (1.8).

Nota 1.5 Las demostraciones de estos dos resultados reposan, en realidad, sobre un método variacional, bastante natural en cada caso, que consiste, por ejemplo para (1.7), en maximizar

$$\int_{\Omega_a} F(u-W) \frac{r^2}{2} dx, \text{ sujeto a } \int_{\Omega_a} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 dx = \eta,$$

donde

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma) d\sigma,$$

y Ω_a es el cilindro acotado $(0,a) \times (-a,a)$. Esto explica naturalmente la aparición de un multiplicador de Lagrange λ en (1.7'). Así, si λ no está fijado "a priori", el problema de valores propios no lineal (1.7') posee estructura variacional, y es precisamente desde este punto de vista desde el que λ se interpreta como un parámetro de intensidad de vorticidad.

AMBROSETTI-MANCINI [2] estudian un problema análogo, bajo hipótesis muy restrictivas para la función f , y sin fijar la energía $\pi\eta$ (con k y W dados). Se trata entonces de un problema de valores de contorno elíptico y semilineal de tipo clásico, para el cual puede obtenerse una solución no trivial, por un método también de tipo variacional.

Finalmente, BERESTYCKI [5,6] considera un problema algo más general que (1.7)-(1.8), pero formulado en un abierto acotado de \mathbb{R}^2 contenido en Π . La existencia de soluciones del correspondiente problema (ahora con $\lambda > 0$, $\eta > 0$ y $W > 0$ (ó $k \leq 0$) dados, y dejando como incógnita el par (u, k) (resp. (u, W)), puede obtenerse utilizando razonamientos de tipo topológico que quedan descritos en la sección 1 del Capítulo siguiente. En lo que sigue, nos referiremos constantemente a los problemas (1.7*) y (1.8*), obtenidos de (1.7) y (1.8) respectivamente sustituyendo Π por Ω , y $\partial\Pi$ por Γ , donde Ω es un abierto acotado contenido en Π de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. Estos problemas parecen tener interés físico por sí solos, y permiten por paso al límite (cuando $\Omega \rightarrow \Pi$) estudiar (1.7) y (1.8); en este sentido, es necesario hacer referencia a los trabajos sobre la simetría de GUIDAS-

NI-NIREMBERG [33], a ciertas técnicas de acotación de CAFFARELLI-FRIEDMAN [14], y a razonamientos similares a los utilizados en FRAENKEL-BERGER [32] y en NORBURY [46]. Algunos resultados parciales sobre la existencia de soluciones pueden encontrarse en BERESTYCKI-LIONS, P.L. [11] y BERESTYCKI-FERNANDEZ CARA-GLOWINSKI [10].

Nota 1.6 Los problemas considerados consisten en

(a) determinar la estructura y la velocidad de propagación de un vórtice para el cual se conoce la cantidad de flujo entre el eje de simetría y la región de vorticidad, y la energía cinética desprendida en el movimiento de vorticidad, y

(b) determinar la estructura y el flujo de entrada en un vórtice para el que se conocen la velocidad de propagación (en el infinito) y la energía cinética.

Parece ser que en ciertas situaciones experimentales, si bien se conocen los otros parámetros, resulta difícil por el contrario fijar "a priori" la velocidad a la cual va a desplazarse el anillo en régimen estacionario. Análogamente, (b) aparece en algunos casos en los que el cálculo experimental del parámetro k resulta excesivamente complicado. ■

2- INTERES DEL PROBLEMA

En este trabajo, el objetivo fundamental es obtener resultados de aproximación numérica de los anteriores problemas. Para ello, es preciso en primer lugar dar un esquema finito-dimensional que lo "discretice" formalmente, y estudiar después las correspondientes propiedades de estabilidad, consistencia y convergencia. Posteriormente daremos algoritmos que converjan hacia una solución (aproximada), y finalmente, caracterizaremos la o las soluciones así obtenidas.

El problema numérico asociado al estudio de los vórtices estacionarios axisimétricos no ha sido abordado hasta el momento en la literatura matemática, si hacemos excepción de FERNANDEZ CARA [25,26], FERNANDEZ CARA-GLOWINSKI [28], BERESTYCKI-FERNANDEZ CARA-GLOWINSKI [10], y los trabajos de Fraenkel sobre vórtices de pequeña sección y de Norbury sobre deformación de vórtices, a los que antes nos hemos referido.

En el próximo Capítulo estudiamos una propiedad de regularización que permite, como se verá, asociar en el sentido de los mínimos cuadrados un problema de optimización sin restricciones (susceptible de tratamiento numérico por ejemplo por métodos de tipo gradiente), a (1.7*) y (1.8*). También haremos notar que las propiedades de monotonía (cf. STAMPACCHIA [59]) asociadas de forma natural al problema, son aprovechables desde el punto de vista numérico, y permiten formular algoritmos con buenas propiedades de convergencia.

Muchas cuestiones interesantes quedadn abiertas. Entre ellas, señalamos la concerniente a la resolubilidad completa del problema, en particular la ausencia de resultados de

unicidad, y la inexistencia de formulaciones variacionales equivalentes sería de todas formas interesante ver si se pueden construir problemas variacionales asociados.

El tratamiento de las soluciones aisladas (fuertemente motivadas desde el punto de vista físico) se desarrolla en el Capítulo 3, mediante una sencilla aplicación del Teorema de Newton- Kantorovitch; finalmente, señalemos que ofrece gran interés tanto físico como matemático el estudiar la dependencia entre los parámetros-soluciones W y k (velocidad de propagación y cantidad de flujo), lo cual ha sido el objeto de [10].

3- CONCEPTOS PREVIOS

En lo que sigue, y mientras no se advierta lo contrario, Ω representará un abierto acotado de \mathbb{R}^N (N entero ≥ 1) "suficientemente regular", es decir, de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ que sea una variedad $(N-1)$ -dimensional por ejemplo 1 vez diferenciable con continuidad a trozos, tal que Ω está localmente a un lado de Γ . $\mathcal{D}(\Omega)$ representa el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables (con valores en \mathbb{R}^1) y soporte compacto contenido en Ω , y se dota de la topología límite inductivo definida por los espacios vectoriales

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{ \phi \mid \phi \in C^\infty(\Omega), \text{sup}(\phi) \subset K \},$$

donde $K \subset \Omega$ es compacto, que poseen a su vez estructura de espacios localmente convexos para las seminormas:

$$p_K^m(\phi) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^\alpha \phi(x)|, \quad \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \quad m \geq 1.$$

El dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones sobre Ω , y una forma lineal T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ será una distribución sobre Ω si y sólo si es secuencialmente continua en el origen de $\mathcal{D}(\Omega)$. Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, la derivada de T de orden α es la distribución $\partial^\alpha T$, definida por

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la dualidad $\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$.

Dados un entero $m \geq 0$ y un real $p \geq 1$, definimos el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f \mid f \in L^p(\Omega); \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha: |\alpha| \leq m \},$$

donde las derivadas anteriores se entienden en el sentido de las distribuciones sobre Ω . Estos espacios se dotan de las normas correspondientes $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, dadas por

$$(3.1) \quad \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega),$$

y para las cuales poseen estructura de Banach. En particular, para $p=2$, obtenemos los $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$, que son de hecho espacios de Hilbert, pues las normas $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)} \equiv \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)}$ de-

rivan de los correspondientes productos escalares

$$(3.2) \quad (f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f \cdot \partial^{\alpha} g \, dx \quad \forall f, g \in H^m(\Omega)$$

En general, $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^m(\Omega)$ si $m \geq 1$. Sea entonces, para $m \geq 1$, $H^m_0(\Omega)$ la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$, esto es, la completación de $\mathcal{D}(\Omega)$ para el producto escalar (3.2); un producto escalar sobre $H^m_0(\Omega)$, equivalente a éste viene dado por

$$(3.3) \quad (f, g)_{H^m_0(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f \cdot \partial^{\alpha} g \, dx \quad \forall f, g \in H^m_0(\Omega)$$

Realmente, $H^m_0(\Omega)$ no es más que el núcleo de la aplicación "traza"

$$\gamma : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma),$$

prolongación continua de la aplicación $\phi \rightarrow (\phi|_{\Gamma}, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} \phi}{\partial \nu^{m-1}}|_{\Gamma})$, de $C^m(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)^m$, donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ representa la derivada en la dirección de la normal exterior en los puntos de Γ , los $H^r(\Gamma)$, para r entero ≥ 0 , son los análogos a los $H^m(\Omega)$ para la medida

superficial sobre Γ inducida por cartas locales, los $H^{-r}(\Gamma)$ son sus respectivos duales topológicos, y los $H^s(\Omega)$, con $0 \leq r-1 < s < r \equiv$ entero, son los espacios de las "trazas" (ó valores en el origen) tomadas por las funciones f que verifican

$$f \in L^2(0, +\infty; H^m(\Gamma)), \quad t^\alpha f \in L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma)),$$

con $v = \alpha + 1/2$, $(1-v)r = s$.

En los próximos Capítulos serán casi constantemente utilizadas las inclusiones de Sobolev:

"Sea m un entero ≥ 1 , y p un real > 1 . Se tiene:

(a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ (con inyección continua), si

$$0 < \frac{1}{p} - \frac{m}{N} \leq \frac{1}{q}.$$

(b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q > 1$ finito, si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$.

(c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, si $m - \frac{N}{p} \geq k + \alpha$, k es un entero ≥ 0 y α es un real que verifica $0 \leq \alpha < 1$.

En (c), el espacio $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ es el conjunto de las funciones de clase C^k en $\bar{\Omega}$ (restricciones a $\bar{\Omega}$ de funciones de $C^k(\mathbb{R}^N)$) tales que todas sus derivadas de orden $\leq k$ verifican una condición de tipo Hölder de exponente α . Este espacio posee estructura de Banach para la norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{|\beta| \leq k \\ x \in \bar{\Omega}}} |\partial^\beta f(x)| + \sup_{\substack{|\beta| \leq k \\ x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \forall f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Dados dos espacios normados E y F , y un operador $T: E \rightarrow F$, se dice que T es compacto si la imagen $T(A)$ de todo acotado A de E es relativamente compacto en F ; el

el operador T es, pues, compacto, si y sólo si de toda sucesión $\{T(x_n)\}$ de elementos de $T(E)$ tal que $\{x_n\}$ es acotada, puede extraerse una subsucesión convergente en F . En virtud del Teorema de Extensión de Calderón, las inyecciones de Sobolev de los apartados (a) y (c) anteriores son compactas si las desigualdades que las siguen son estrictas (cf. KONDRACHOFF [37]; véase también BERGER [12]).

También utilizaremos en lo que sigue la siguiente consecuencia de Teorema de Riesz (cf. YOSHIDA [62])

"Sea H un espacio de Hilbert, $(u,v) \rightarrow a(u,v)$ una forma bilineal, continua y coerciva sobre H (i.e.:

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H, \quad \alpha > 0)$$

y f una forma lineal continua sobre H . El problema

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{Hallar } u \in H, \text{ tal que:} \\ a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

posee una solución única $u \in H$, y la aplicación $f \rightarrow u = u(f)$ que a cada f le hace corresponder la solución $u(f)$ de (3.4) es un isomorfismo de $H' \rightarrow H$. Además, si la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, (3.4) es equivalente al problema de optimización

$$(3.5) \quad \begin{cases} \text{Hallar } u \in H, \text{ tal que:} \\ J(u) = \min_{v \in H} J(v), \quad J(v) = 1/2 a(v,v) - f(v). \end{cases}$$

Sea L el operador lineal en derivadas parciales

$$L \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}) \quad (\text{por ejemplo}),$$

para el que suponemos que se verifica la condición de elipticidad uniforme (sobre $H_0^1(\Omega)$):

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \alpha > 0;$$

el operador L está asociado de manera natural a la forma bilineal continua y coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$ $(u,v) \rightarrow a(u,v)$, donde

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Si llamamos $H^{-1}(\Omega)$ al dual de $H_0^1(\Omega)$, para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$, el correspondiente problema (3.4) tendrá por lo tanto una solución única. De forma clásica se deduce además que la solución u de (3.4) satisface, al menos formalmente, el problema de Dirichlet homogéneo

$$(3.6) \quad \begin{cases} Lu \equiv - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f & \text{en } \Omega, \\ u=0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, esta (clase de) función(es) define una única forma lineal continua \tilde{f} sobre $H_0^1(\Omega)$, mediante las relaciones

$$\tilde{f}(u) = \int_{\Omega} f \cdot u dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

y, por abuso del lenguaje, llamamos f a \tilde{f} . En este caso, los resultados clásicos de regularidad implican $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Más generalmente, tenemos

si $p > 1$ y $f \in L^p(\Omega)$, entonces $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

si $\alpha \geq 0$ y $f \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \equiv C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, entonces $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$;

en este último caso la ecuación (3.6) se verifica además puntualmente, y tiene validez el célebre Principio del Máximo:

"Si $f \geq 0$ en Ω , ó bien $u=0$ (lo que implica necesariamente $f=0$), ó bien $u > 0$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sobre Γ ".

Nota 3.1 Una versión más general de este principio (inclu-

yendo el caso de discontinuidad de los a_{ij}) puede encontrarse en [56]. ■

Para la demostración de la existencia de soluciones de nuestro problema recurrimos al Teorema del Punto Fijo de Schauder:

"Sea E un espacio de Banach, y $T: E \rightarrow E$ un operador compacto que transforma un convexo cerrado y acotado C de E en sí mismo. Entonces T posee al menos un punto fijo en C ".

Una versión en dimensión finita viene dada por el Teorema de Brower:

"Sea E un espacio de Banach de dimensión finita, y $T: E \rightarrow E$ un operador continuo que transforma un compacto convexo C de E en sí mismo. Entonces T posee al menos un punto fijo en C ".

Finalmente, con objeto de estudiar el comportamiento de las soluciones aisladas, necesitaremos el Teorema de Newton-Kantorovitch, cuyo enunciado es el siguiente:

"Sea H un espacio de Hilbert real de norma $\|\cdot\|_H$, cuya norma dual asociada (en el espacio dual H') es $\|\cdot\|_{H'}$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad entre H' y H , y $T: H \times H \rightarrow \mathbb{R}^1$ una aplicación no lineal con respecto a su primera variable, tal que $T(u, \cdot) \in H'$, $\forall u \in H$. Sea $f \in H'$, y consideremos el problema

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H, \text{ tal que:} \\ T(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H. \end{array} \right.$$

Supongamos que existe $u^0 \in H$, tal que:

- (i) Para cada $v \in H$, $u \rightarrow T(u, v)$ es diferenciable-Fréchet en

$$Q(u^\circ; R) = \{u \mid u \in H, \|u - u^\circ\|_H < R\},$$

con derivada $\partial_1 T(u, v)$;

- (ii) existe $\gamma > 0$, tal que $\langle \partial_1 T(u, v), v \rangle \geq \gamma \|v\|_H^2$, $\forall v \in H$;
- (iii) existe $K > 0$, tal que $\|\partial_1 T(u, v) - \partial_1 T(\tilde{u}, v)\|_H \leq$
 $\leq K \|u - \tilde{u}\|_H \cdot \|v\|_H$, $\forall v \in H$, si $u, \tilde{u} \in Q(u^\circ; R)$.
- (iv) existe $\lambda \geq 0$, tal que $\xi = \frac{K\lambda}{\gamma} < \frac{1}{2}$, $\lambda \geq \frac{1}{\gamma} \|f - T(u^\circ, \cdot)\|_H$,
 y $t^* = \frac{\gamma}{K} (1 - \sqrt{1 - 2\xi}) < R$.

Entonces:

1°) El problema (3.7) admite una solución $u^* \in B(u^\circ; t^*) = \{u \mid u \in H, \|u - u^\circ\|_H \leq t^*\}$, que es el límite (en H) de la sucesión $\{u^k\}$ de puntos de $Q(u^\circ; R)$, bien definida por las iteraciones

$$u^{k+1} = u^k + z^{k+1}, \quad \forall k \geq 0,$$

donde z^{k+1} es la única solución del problema lineal

$$(3.8) \quad \begin{cases} \text{Hallar } z \in H, \text{ tal que:} \\ \langle \partial_1 T(u^k, v), z \rangle = \langle f, v \rangle - T(u^k, v), \quad \forall v \in H; \end{cases}$$

2°) Esta solución u^* es la única en la bola abierta $Q(u^\circ; \rho)$, donde $\rho = \min(R, \gamma/K)$;

3°) Si existe una función $J: N \rightarrow R^1$, tal que su derivada $J'(u)$ verifica:

$$\langle J'(u), v \rangle = T(u, v) - \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H,$$

entonces u^* es el mínimo local en $Q(u^\circ; \rho)$ de J ."

Nota 3.2 Para la demostración de este Teorema, véase ORTEGA

[47]. ■

INTRODUCCION

En la Sección 1 de este Capítulo, recordamos los resultados de BERESTYCKI [5] para el problema modelo general, y aplicamos razonamientos similares para el problema discreto asociado, formulación en elementos finitos, obteniéndose la existencia de soluciones, tras las respectivas aplicaciones de los *Teoremas de Schauder y de Brower del Punto Fijo*. La diferenciabilidad del operador que interviene en cada formulación se considera en la Sección 2, y permite posteriormente formular equivalentemente los problemas considerados en el sentido de los mínimos cuadrados. En la Sección 3 desarrollamos un algoritmo iterativo que se nutre de las propiedades de monotonía del problema. Finalmente, aplicamos en la Sección 4 un procedimiento de regularización a dos ejemplos típicos "no diferenciables".

CAPITULO IIRESULTADOS DE EXISTENCIA, REGULARIDAD, MONOTONIA
Y REGULARIZACION.1- FORMULACION DE LOS PROBLEMAS. EXISTENCIA DE SOLUCIONES(1.1)- El problema continuo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (N entero ≥ 1) un abierto acotado "suficiente regular" de frontera $\Gamma = \partial\Omega$, y sea

$$L \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$ (por ejemplo), tales que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

para un $\alpha > 0$. Pongamos

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

La forma bilineal $(u,v) \rightarrow a(u,v)$ es entonces continua y coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$, pues $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \equiv \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx,$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Consideremos el siguiente problema

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H^2(\Omega), \text{ y } v \in R^1, \text{ tales que:} \\ Lu = g(x, u - v\rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ a(u,u) \equiv \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \eta, \end{array} \right.$$

donde:

$$(1.1) \quad \rho \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \rho > 0 \text{ en } \Omega,$$

- (1.2) $\eta > 0$ es una constante dada,
- (1.3) la función $(x, s) \rightarrow g(x, s)$, de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, verifica:
- (1.3a) $g \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$, $g \geq 0$,
- (1.3b) $\exists s_0 \in \mathbb{R}^1$, tal que $g(x, s) = 0$, para $x \in \bar{\Omega}$, $s \leq s_0$,
- (1.3c) $\forall x \in \bar{\Omega}$, $s \rightarrow g(x, s)$ es creciente, y estrictamente creciente si $g(x, s) > 0$,
- (1.3d) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s^\beta} = 0$ uniformemente en $x \in \bar{\Omega}$,
- donde $\left\{ \begin{array}{l} 1 < p < +\infty, \text{ si } N \leq 2, \\ 1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \text{ si } N \geq 3, \end{array} \right.$
- (1.3e) $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(x, s) = +\infty$ uniformemente en un abierto no vacío $\Omega_0 \subset \bar{\Omega} \subset \Omega$.

Nota 1.1 Se puede considerar también un problema más general que (P), Con una ecuación tal como

$$Lu = g(x, u, v) \text{ en } \Omega,$$

haciendo convenientes hipótesis sobre la nueva función g (cf. la Nota 1.5 y BERESTYCKI [7]). ■

Los resultados que siguen se prueban en BERESTYCKI [5]:

Lema 1.1.1 " Para cada $v \in \mathbb{R}^1$, y cada $v \in H_0^1(\Omega)$, se define $u = S(v, v)$ como la (única) solución del problema de Dirichlet:

$$(1.4) \quad \begin{cases} Lu = g(x, v - v\rho(x)) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{cases}$$

bajo las hipótesis (1.1)-(1.3e), tenemos:

(i) El operador de Nemitskii $\phi \rightarrow g(\cdot, \phi)$ es compacto de $H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, donde $q = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$, y $q > 1$ es finito y arbitrario, si $N \leq 2$.

(ii) El operador $(v, v) \rightarrow S(v, v)$ es compacto de $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow H_0^1(\Omega)$ (en realidad, se trata de un operador compacto de $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow W^{2,q}(\Omega)$, de acuerdo con AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG [1]).

(iii) Si $v \leq \mu$, entonces $S(v, v) \geq S(v, \mu) \geq 0$ c.p.d. en Ω , $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. " ■

Lema 1.1.2 "En todos los casos se tiene $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega)$, donde q' es el exponente conjugado de q , y q' está definido como en Lema anterior. Por tanto, podemos definir

$$(1.5) \quad \alpha(v, v) = \int_{\Omega} S(v, v) \cdot g(x, v - v\rho(x)) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall v \in \mathbb{R}^1,$$

y la función

$$(1.6) \quad (v, v) \rightarrow \alpha(v, v)$$

es continua de $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$. Además, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, la función $v \rightarrow \alpha(v, v)$ es continua y decreciente de $\mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$, y estrictamente decreciente para $\alpha(v, v) > 0$. " ■

Lema 1.1.3 "Sea $K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Omega\}$

Para cada $v \in K$, se tiene

$$(1.7) \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} \alpha(v, v) \rightarrow +\infty,$$

$$(1.8) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha(v, v) \rightarrow 0. " \blacksquare$$

Lema 1.1.4 "Para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, la ecuación (en v)

$$\alpha(v, v) \equiv \int_{\Omega} S(v, v) \cdot g(x, v - v\rho(x)) \, dx = \eta > 0$$

posee una solución única $v = v(v)$. " ■

Lema 1.1.5 "Pongamos, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, $T^+(v) \equiv S(v^+, v^+)$, donde $v^+ = \max(v, 0)$. Entonces el par

$(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ es solución de (P) si y sólo si u es un punto fijo de T^+ y $v = v(u^+) \equiv v(u)$ ". ■

Lema 1.1.6 "La función $v \rightarrow v(v^+)$ es continua y acotada de $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$." ■

Nota 1.2 Podemos también demostrar que $v \rightarrow v(v^+)$ es secuencialmente continua de $H_0^1(\Omega)$ -débil en \mathbb{R}^1 . En efecto, si $v_n \rightarrow v$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, entonces la sucesión $\{\|v_n\|\}$ es acotada, de donde también lo es $\{v(v_n^+)\}$. Luego puede extraerse una subsucesión $\{v_\mu\}$ de $\{v_n\}$, tal que

$v_\mu \rightarrow v$ en $H_0^1(\Omega)$ -débil y $L^{pq}(\Omega)$ -fuerte, $v(v_\mu^+) \rightarrow v^*$ (en \mathbb{R}^1).

El mismo razonamiento utilizado en [5] para probar el Lema 1.1.6 es válido aquí, y en particular, resulta:

(a) $v^* = v(v^+)$

(b) toda la sucesión $\{v(v_n^+)\}$ converge hacia v^* . ■

Lema 1.1.7 "El operador $v \rightarrow T^+(v)$ es compacto de $H_0^1(\Omega)$ en sí mismo, y aplica el espacio $H_0^1(\Omega)$ en la porción de esfera

$$D_\eta = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), v \geq c.p.d. \text{ en } \Omega, a(v, v) = \eta\}." \blacksquare$$

Teorema 1.1.1 "Sea $B = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), a(v, v) < \eta + 1\}$.

El operador T^+ aplica el convexo cerrado y acotado \bar{B} en B . En consecuencia, en virtud del Teorema de Schauder, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$u \in B, \quad u = T^+(u) \equiv S(u^+, v(u^+));$$

el par $(u, v(u))$ es una solución del problema (P) ." ■

(1.2)- El problema discreto

Consideremos ahora una sucesión generalizada \mathcal{H} de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ convergente hacia 0, a la cual le asociamos una familia regular (cf. CIARLET [16]) de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ de Ω . Por simplicidad, supondremos que $\bar{\Omega}$ es un poliedro de \mathbb{R}^N , y para cada $h \in \mathcal{H}$, tendremos

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Dados un entero $\ell \geq 0$ y un N -símplex $K \in \mathcal{T}_h$, consideremos el espacio $P_K \equiv P_\ell(K)$, donde P_ℓ es el espacio de todos los polinomios de grado $\leq \ell$ en las variables x_1, x_2, \dots, x_N , i.e. polinomios de la forma

$$p: x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \rightarrow p(x) \in \mathbb{R}^1,$$

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \equiv \alpha_1, \dots, \alpha_N \leq \ell} \gamma_\alpha x^\alpha \equiv \sum_{|\alpha| \leq \ell} \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N},$$

y, de manera genérica, si Φ es un espacio de funciones definidas sobre \mathbb{R}^N , y $A \subset \mathbb{R}^N$, $\Phi(A)$ representa el espacio de las restricciones a A de las funciones Φ .

Cada triangulación \mathcal{T}_h está asociada de forma natural al correspondiente espacio finito-dimensional

$$V_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_K \equiv P_\ell(K), \forall K \in \mathcal{T}_h; v_h|_\Gamma \equiv 0\}.$$

Es bien sabido que V_h es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$, y que una base (canónica) de V_h viene dada por las funciones V_h -interpolantes ω_j^h , $1 \leq j \leq m = m(h) \equiv \dim(V_h)$, asociadas a la base canónica de \mathbb{R}^m . Por ejemplo, si $\ell=1$, y $\{b_i^h\}_{i=1}^{M_1(h)}$ es una enumeración de los vértices de la triangulación \mathcal{T}_h , ω_j^h viene bien definida

por las relaciones

$$\omega_j^h \in V_h, \quad \omega_j^h(b_i^h) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq M(h),$$

y, en particular, $m(h) = M_1(h)$. Si $\ell = 2$, la construcción de los ω_j^h es análoga, pero partiendo ahora de una enumeración

$\{c_i^h\}_{i=1}^{M_2(h)}$ de los vértices y los puntos medios de cada lado (variedad unidimensional que sea intersección de dos N -símplices) de la triangulación \mathcal{C}_h , y en este caso $m(h) = M_2(h)$.

Pongamos

$$V_h = [\omega_1^h, \omega_2^h, \dots, \omega_m^h] \text{ espacio engendrado por los } \omega_j^h, \\ 1 \leq j \leq m = m(h).$$

Entonces la forma más natural de aproximar V_h consiste en formular el problema discreto

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h, \text{ y } v_h \in R^1, \text{ tales que:} \\ a(u_h, \omega_j^h) \equiv (Lu_h, \omega_j^h) = (g(\cdot, u_h - v_h), \omega_j^h), \quad \forall j=1, 2, \dots, m, \\ a(u_h, u_h) = \eta, \end{array} \right.$$

donde (\cdot, \cdot) representa el producto escalar "standard" de $L^2(\Omega)$.

Evidentemente, (P_h) puede ser formulado también como sigue:

$$(P'_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \zeta_h \in R^m, \text{ y } v_h \in R^1, \text{ tales que:} \\ A_h \zeta_h = b_h(\zeta_h, v_h), \\ (\zeta_h, b_h(\zeta_h, v_h)) = \eta, \end{array} \right.$$

donde A_h es la matriz de componentes

$$a_{ij}^h, \quad a_{ij}^h = a(\omega_i^h, \omega_j^h), \quad 1 \leq i, j \leq m = m(h),$$

y $b_h(\zeta_h, v_h)$ es el vector de componentes

$$b_h^j(\zeta_h, v_h) = (g(\cdot, \sum_{i=1}^m \zeta_h^i \omega_i^h - v_h \rho(\cdot)), \omega_j^h), \quad 1 \leq j \leq m;$$

en (\mathcal{P}_h^1) hemos llamado también (\cdot, \cdot) al producto escalar de \mathbb{R}^m .

La matriz A_h es siempre definida positiva, en virtud de la elipticidad del operador L ; por tanto, para cada $b \in \mathbb{R}^m$, existe una única solución del sistema $A_h \zeta = b$. En lo que sigue se supondrá que A_h es además una matriz de clase monótona, es decir, A_h^{-1} sólo tiene elementos no negativos (véase la Nota 1.6).

Lema 1.2.1 " Sea, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ y cada $v \in \mathbb{R}^1$, $\zeta = S_h(\xi, v)$ la solución (única) del sistema $A_h \zeta = b_h(\xi, v)$. Entonces se tiene:

- (i) La aplicación $(\xi, v) \rightarrow S_h(\xi, v)$ es continua de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$.
(ii) Para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$, si $v \leq \mu$, entonces $S_h(\xi, v) \geq S_h(\xi, \mu) \geq 0$."

Demostración

(i) Basta tener en cuenta que $(\xi, v) \rightarrow S_h(\xi, v)$ se obtiene mediante la composición de las aplicaciones siguientes:

$$(\xi, v) \rightarrow \sum_i \xi^i \omega_i^h - v \rho(\cdot), \text{ de } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow H^1(\Omega),$$

$$u \rightarrow g(\cdot, u), \text{ de } H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega),$$

$$f \rightarrow \{(f, \omega_j)\}_{j=1}^m, \text{ de } L^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$b \rightarrow A_h^{-1} b, \text{ de } \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

(ii) Resulta como consecuencia trivial de la monotonía de $s \rightarrow g(x, s)$ para cada $x \in \bar{\Omega}$, y de la monotonía de A_h^{-1} .

Lema 1.2.2 "Pongamos

$$\alpha_h(\xi, v) = (A_h S_h(\xi, v), S_h(\xi, v)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \forall v \in \mathbb{R}^1.$$

La función $(\xi, v) \rightarrow \alpha_h(\xi, v)$ es continua de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$; además, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$, $v \rightarrow \alpha_h(\xi, v)$ es decrecien-

te, y estrictamente decreciente si $\alpha_h(\xi, \nu) > 0$."

Demostración

La continuidad y la decrecencia son triviales. Por otra parte, si $\alpha_h(\xi, \nu) > 0$, existirá al menos una componente de $A_h S_h(\xi, \nu)$, por ejemplo $b_h^j(\xi, \nu)$, estrictamente positiva. Esto significa que $b_h^j(\xi, \mu) < b_h^j(\xi, \nu)$, si $\mu > \nu$, mientras que, para $k \neq j$, se tiene $b_h^k(\xi, \mu) \leq b_h^k(\xi, \nu)$. Esto completa la demostración del Lema. ■

Lema 1.2.3 "Sea $\xi \in \mathbb{R}^m$. Para $|h|$ suficientemente pequeño, se tiene:

$$(i) \quad \lim_{\nu \rightarrow -\infty} \alpha_h(\xi, \nu) \rightarrow +\infty$$

$$(ii) \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \alpha_h(\xi, \nu) \rightarrow 0."$$

Nota 1.3 De hecho, (ii) se verifica siempre, independientemente del valor de h . ■

Demostración

Debido a la monotonía de la función $\nu \rightarrow \alpha_h(\xi, \nu)$, basta razonar secuencialmente

(ii) Sea $\{\nu^n\}$ una sucesión tal que $\nu^n \rightarrow +\infty$. La función

$\sum_i \xi^i \omega_i^h$ es acotada, y por tanto

$$\sum_i \xi^i \omega_i^h - \nu^n \rho(\cdot) \rightarrow -\infty \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

y

$$g(\cdot, \sum_i \xi^i \omega_i^h - \nu^n \rho(\cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. De acuerdo con el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Monótona, tenemos $b_h(\xi, \nu^n) \rightarrow 0$, de donde se deduce (ii).

(i) Sea ahora $\nu^n \rightarrow -\infty$. Sabemos que existe $\Omega_0 \subset \Omega$, abierto no

vacío, tal que $\bar{\Omega} \subset \Omega$ y $g(\cdot, s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \rightarrow +\infty$, uniformemente en Ω . Si $|h|$ es suficientemente pequeño, de acuerdo con la regularidad de $\{\mathcal{G}_h\}$, existirá una unión finita no vacía F_h de elementos finitos (cerrada), tal que $F_h \subset \Omega$. Pongamos

$$r_{h,n}^j = \begin{cases} b_h^j(\xi, v^n), & \text{si } \text{sop}(\omega_j^h) \subset F_h, \\ 0, & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

sea g_h^n la solución del sistema $A_h g_h^n = r_{h,n}$. Entonces

$$\alpha_h(\xi, v^n) \geq (A_h g_h^n, g_h^n) = (r_{h,n}, g_h^n),$$

y $(r_{h,n}, g_h^n) \rightarrow +\infty$. ■

Lema 1.2.4 "Para cada $\xi \in R^m$, podemos definir

$v_h = v_h(\xi)$ como la única solución de la ecuación $\alpha_h(\xi, v) = \eta$." ■

Lema 1.2.5 "Sea, para $\xi \in R^m$, $T_h^+(\xi) = S_h(\xi^+, v_h(\xi^+))$,

con $\xi^+ = \{\xi^{j+}\}_{j=1}^m$, y $\xi^{j+} = \max(\xi^j, 0)$, $1 \leq j \leq m$. Entonces (ξ_h, v_h) es una solución de (P'_h) si y sólo si ξ_h es un punto fijo del operador T_h^+ , y $v_h = v_h(\xi_h^+)$."

Demostración

Si (ξ_h, v_h) es solución de (P'_h) , dado que las componentes de $A_h \xi_h$ son ≥ 0 , se tendrá $\xi_h^+ = \xi_h$; luego el vector ξ_h verificará

$$A_h \xi_h = b_h(\xi_h^+, v_h(\xi_h^+)),$$

ó sea $\xi_h = T_h^+(\xi_h)$.

Recíprocamente, la igualdad $T_h^+(\xi_h) = \xi_h$ implica $\xi_h \geq 0$, y por tanto

$$\xi_h = \xi_h^+, \quad A_h \xi_h = b_h(\xi_h, v_h(\xi_h)),$$

de donde $(\xi_h, v_h(\xi_h))$ es una solución de (P'_h) . ■

Lema 1.2.6 "La función $\xi \rightarrow v_h(\xi^+)$ es continua de $R^m \rightarrow R^1$."

Demostración

Veamos en primer lugar que es acotada. Supongamos que existe $\{\xi_n\}$, tal que

$$|\xi_n| \leq R, \quad \forall n \geq 1; \quad |v_h(\xi_n^+)| \rightarrow +\infty.$$

(a) Si $v_h(\xi_n^+) \rightarrow +\infty$, entonces

$$g(\cdot, \sum_i \xi_n^{i+} \omega_i^h - v_h(\xi_n^+) \rho(\cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

y de acuerdo con el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Dominada,

$$b_h^j(\xi_n^+, v_h(\xi_n^+)) \rightarrow 0; \quad 1 \leq j \leq m,$$

y

$$S_h(\xi_n^+, v_h(\xi_n^+)) \rightarrow 0.$$

Pero esto conduce al absurdo

$$\eta = (S_h(\xi_n^+, v_h(\xi_n^+)), b_h(\xi_n^+, v_h(\xi_n^+))) \rightarrow 0.$$

(b) Si, por el contrario, $v_h(\xi_n^+) \rightarrow -\infty$, podemos razonar como en el Lema 1.2.3 (i), y llegar a la conclusión de que η debe tender hacia $+\infty$.

Veamos ahora que se trata de una función continua. Supongamos que $\xi_n \rightarrow \xi$ en R^m . Como la sucesión $\{v_h(\xi_n^+)\}$ es acotada, existirá una subsucesión $\{v_h(\xi_\mu^+)\} \equiv \{v_\mu\}$ convergente hacia un $v \in R^1$.

Entonces

$$\alpha_h(\xi^+, v) = (S_h(\xi^+, v), b_h(\xi^+, v)) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} (S_h(\xi_\mu^+, v_\mu), b_h(\xi_\mu^+, v_\mu)),$$

en virtud del Teorema de Lebesgue; pero esto implica

$$\alpha_h(\xi^+, v) = \eta, \quad \text{de donde } v = v_h(\xi^+).$$

Como este razonamiento es aplicable a toda subsucesión de $\{v_n\}$ (de toda subsucesión puede extraerse una subsucesión convergente hacia $v_h(\xi^+)$), necesariamente $v_n \rightarrow v_h(\xi^+)$, y esto demuestra el Lema ■

Hemos demostrado, por tanto, el siguiente resultado de existencia:

Teorema 1.2.1 "La aplicación $\xi \rightarrow T_h^+(\xi)$ es continua de $R^m \rightarrow R^m$, y transforma el convexo compacto \bar{B}_h^+ , donde

$$B_h^+ = \{\xi \mid \xi \in R^m, (A_h \xi, \xi) < \eta + 1, \xi^j \geq 0\},$$

en B_h ; en virtud del Teorema de Brower del Punto Fijo, el operador T_h^+ posee un punto fijo $\zeta_h \in B_h$; entonces el par $(\zeta_h, v_h(\zeta_h))$ es solución de (P'_h) , y la función $u_h = \sum_i \zeta_k^i \omega_i^h$ y el valor $v_h(\zeta_h)$ son soluciones de (P_h) ." ■

Nota 1.4 Se puede considerar también (lo que se hará en la practica) un problema análogo, pero con integración numérica:

$$(P_h^*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h^* \in V_h \text{ y } v_h^* \in R^1, \text{ tales que:} \\ (Lu_h^*, \omega_j)_h = (g(\cdot, u_h^* - v_h^*(\cdot)), \omega_j), \quad \forall j: 1 \leq j \leq m, \\ (Lu_h^*, u_h^*)_h = \eta, \end{array} \right.$$

donde $(\cdot, \cdot)_h$ es el producto escalar (en R^m) asociado a una fórmula de cuadratura, exacta para los polinomios de grado $\leq l$. Por ejemplo, si $N=2$ y $l=1$, basta elegir la fórmula de los trapecios:

"Para $\hat{K} \in \mathcal{C}_h$, elemento finito de referencia, ponemos

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \text{medida}(\hat{K}) \cdot \hat{\phi}(\hat{b}_K),$$

donde $\hat{\phi} \in C^0(\hat{K})$, y \hat{b}_K es el baricentro de \hat{K} ; posteriormente, determinamos con respecto a \hat{K} las correspondientes aproximaciones

de los valores $\int_K \phi(x) dx$, $\phi \in C^0(K)$."

Análogamente, si $N=l=2$, utilizaremos la fórmula de Simpson:

"Para $\hat{K} \in \mathcal{G}_h$, elemento finito de referencia, ponemos

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{3} \text{medida}(\hat{K}) \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \hat{\phi}(\hat{b}_{ij,K}),$$

donde $\hat{\phi} \in C^0(\hat{K})$, y los $\hat{b}_{ij,K}$ son los puntos medios de los lados de \hat{K} ."

En cualquier caso, tenemos

$$a_h(u_h, v_h) \equiv (Lu_h, v_h)_h = (Lu_h, v_h) \equiv a(u_h, v_h), \quad \forall u_h, v_h \in V_h.$$

Podemos ahora definir $S_h^*(\xi, v)$, para $(\xi, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$, como en el Lema 1.2.1, es decir, como la solución (única) del sistema

$$A_h \zeta = b_h^*(\xi, v),$$

donde $b_h^*(\xi, v)$ es el vector de componentes

$$b_h^{*j}(\xi, v) = (g(\cdot, \sum_i \xi^i \omega_i^h - v\rho(\cdot)), \omega_j), \quad 1 \leq j \leq m;$$

luego podemos hacer $\alpha_h^*(\xi, v) = (S_h^*(\xi, v), b_h^*(\xi, v))$, y definir, para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$, $v_h^*(\xi)$ como la (única) solución de la ecuación

$$\alpha_h^*(\xi, v) = \eta;$$

finalmente, podemos construir el operador T_h^{*+} , de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dado por

$$T_h^{*+}(\xi) = S_h^*(\xi^+, v_h^*(\xi^+)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Los resultados precedentes siguen siendo ciertos, y, en particular, bajo la hipótesis de monotonía de las matri-

ces A_h^{-1} , (P_h^*) posee solución. ■

Nota 1.5 Los problemas (P) , (P_h) y (P_h^*) pueden ser generalizados al caso en que se considera una ecuación tal como

$$Lu = G(x, u, v) \quad \text{en } \Omega,$$

donde G es una función continua de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$, tal que:

(a) existe una función ϕ continua de $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$, que verifica

$$y \quad \lim_{s^2 + v^2 \rightarrow +\infty} \frac{G(x, s, v)}{\phi(s, v)} = 0, \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega},$$

$\phi(s, v) \leq C_1 |s|^p + C_2 |v|^\alpha + C_3$, donde C_1, C_2 y C_3 son tres constantes positivas dadas, $\alpha > 1$ y p viene dado por (1.3d);

(b) para cada $x \in \bar{\Omega}$ y cada $s \in \mathbb{R}^1$, $v \rightarrow G(x, s, v)$ es (por ejemplo) decreciente, y estrictamente decreciente si $G(x, s, v) > 0$;

(c) existe $v_0 \in \mathbb{R}^1$, tal que $G(x, s, v) = 0$ para $x \in \bar{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}^1$ y $v \geq v_0$;

$$(d) \lim_{v \rightarrow -\infty} G(x, s, v) = +\infty, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1;$$

(e) para cada $x \in \bar{\Omega}$ y cada $v \in \mathbb{R}^1$, $s \rightarrow G(x, s, v)$ es creciente.

Para este tipo de problema generalizada, los resultados de (1.1) y de (1.2) vuelven a ser ciertos. ■

Nota 1.6 Más adelante volveremos sobre el problema de la monotonía de A_h^{-1} . Nótese de momento que en algunos ejemplos típicos, con $L = -\Delta$ y $\ell = 1$, esta condición se verifica (cf. CIARLET-RAVIART [17]) siempre que las triangulaciones h satisfagan ciertas propiedades de tipo angular. Otro caso típico ($N=2$) viene dado por el operador

$$L = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};$$

si $\bar{\Omega} \subset \{x \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$, lo cual corresponde a ciertas situaciones físicas, pueden encontrarse condiciones idénticas sobre las \mathcal{E}_h que harán de A_h una matriz de clase monótona (cf. RUAS [5]).

(1.3) - Apéndice de la Sección 1

En (1.1) se ha conseguido formular el problema modelo (P) , de manera equivalente, como una ecuación de punto fijo relativa al operador T^+ , introducido en BERESTYCKI [5]. Sin embargo, desde el punto de vista numérico, sería interesante escribir (P) en la forma

$$u = T(u), \quad v = v(u), \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

donde T es un operador DIFERENCIABLE. Para ello, necesitamos el resultado siguiente, debido a FERNANDEZ CARA [2]:

Lema 1.1.3' "Sea $v \in H_0^1(\Omega)$; entonces se tiene:

(i) $\lim_{v \rightarrow -\infty} \alpha(v, v) \uparrow +\infty,$

(ii) $\lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha(v, v) \downarrow 0."$

Nota 1.7 De la demostración que sigue se deduce que el Lema continúa siendo cierto para $v \in L^{pq}(\Omega)$ arbitrario. ■

Demostración

(i) Si $v < \mu$, entonces $\alpha(v, v) \geq \alpha(v, \mu)$. Podemos, en consecuencia, razonar por sucesiones. Sea $\{v^n\}$ una sucesión de \mathbb{R}^1 monótonamente convergente hacia $-\infty$. Entonces

(1.1') $v - v^n \rho(x) \uparrow +\infty, \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$

y

(1.2') $g(x, v - v^n \rho(x)) \uparrow +\infty \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$

Si no se tuviera $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(v, v^n) \uparrow +\infty$, existiría $\alpha^* \in \mathbb{R}^1$,

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(v, v^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} S(v, v^n) \cdot g(x, v - v^n \rho(x)) dx = \alpha^* \in \mathbb{R}^1.$$

Pero entonces el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Monótona conduce a la convergencia en $L^1(\Omega)$ y c.p.d. en Ω de las funciones

$$S(v, v^n) \cdot g(\cdot, v - v^n \rho(\cdot))$$

hacia

$$(1.3') \quad \sup_{n \geq 1} \{S(v, v^n) \cdot g(x, v - v^n \rho(x))\}.$$

Por otra parte, las funciones $u^n = S(v, v^n)$ verifican $\alpha(u^n, u^n) \uparrow \alpha^*$, y existirán una subsucesión $\{u^\mu\}$ de $\{u^n\}$ y una función $u^* \in H_0^1(\Omega)$, tales que:

$$u^\mu \rightarrow u^* \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-debil, en } L^{pq}(\Omega) \text{ y c.p.d. en } \Omega.$$

Como $u^n < u^m$ para $n < m$, necesariamente $u^n \uparrow u^*$ c.p.d. en Ω , y de (1.2')-(1.3') se deduce que $u^* = 0$ c.p.d. en Ω . Pero esto implica $u^n = 0$ (c.p.d.) $\forall n \geq 1$, y, de acuerdo con (1.3e), existirá $s_1 \in \mathbb{R}^1$ tal que

$$(1.4') \quad v - v^n \rho(x) \leq s_1 \text{ c.p.d. en } \Omega_0,$$

para cada $n \geq 1$.

Se tiene entonces

$$v(x) \leq s_1 + v^n \rho(x), \quad \forall n \geq 1$$

en un conjunto $\Omega_0 \setminus Z$, donde $Z \subset \Omega$ es medible y de medida nula. Naturalmente, esto está en contradicción con la relación $v \in L^{pq}(\Omega)$.

(ii) La demostración que se da en BERESTYCKI [5] del Lema 1.1.3 (ii) no utiliza la "positividad" de v , y, por tanto, es aplicable aquí. ■

Como consecuencia de Lema 1.1.3', podemos demostrar,

como en [5], los resultados siguientes:

Lema 1.1.4' " Para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, la ecuación $\alpha(v, v) = \eta$ (donde $\eta > 0$) posee una solución única $v = v(v)$." ■

Lema 1.1.5' " Si ponemos, para $v \in H_0^1(\Omega)$, $T(v) = S(v, v(v))$, el par $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ es solución de (P) si y sólo si

$$T(u) = u, \quad v = v(u). \quad \blacksquare$$

Lema 1.1.6' " La función $v \rightarrow v(v)$ es acotada, continua y secuencialmente débilmente continua de $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$." ■

Lema 1.1.7' " El operador $v \rightarrow T(v)$ es compacto de $H_0^1(\Omega)$ en sí mismo, y aplica todo el espacio $H_0^1(\Omega)$ en la porción de esfera D_η , definida por (1.9)." ■

Teorema 1.1.1' " T aplica \bar{B} en B , donde B viene dado por (1.10). Por tanto, según el Teorema de Schauder del Punto Fijo, existirá $u \in B$, tal que $T(u) = u$; el par $(u, v(u))$ es una solución de (P)." ■

El único punto conflictivo es la

Demostración del Lema 1.1.6'

Sea $\{v_n\}$ una sucesión de $H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v_n\| \leq R$ y $|v_n| = |v(v_n)| \rightarrow +\infty$.

(a) Supongamos en primer lugar que $v_n \rightarrow +\infty$. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^q}(\Omega)$, con inyección compacta, se puede suponer que

$$(1.5') \quad v_n \rightarrow v \in H_0^1(\Omega) \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-débil},$$

$$(1.6') \quad v_n \rightarrow v \text{ en } L^{p^q}(\Omega) \text{ y c.p.d. en } \Omega,$$

En virtud del Recíproco del Teorema de Lebesgue (cf. BOURBAKI [13]), existirá $\psi \in L^{p^q}(\Omega)$, tal que $|v_n| \leq \psi$ c.p.d. en Ω , $\forall n \geq 1$.

Entonces $g(\cdot, v_n - v_n \rho(\cdot)) \rightarrow 0$ en $L^q(\Omega)$, puesto que

$0 \leq g(x, v_n - v_n \rho(x)) \leq g(x, |v_n| - v_n \rho(x)) \leq g(x, \psi(x))$ c.p.d. en Ω ,
 $g(\cdot, \psi(\cdot)) \in L^q(\Omega)$, y

$$(1.7') \quad g(x, v_n - v_n \rho(x)) \rightarrow 0 \text{ c.p.d. en } \Omega.$$

Pero esto implica $u_n = S(v_n, v_n) \rightarrow 0$ en $W^{2,q}(\Omega)$, y en consecuencia en $H^1_0(\Omega)$ y en $L^q(\Omega)$, de donde

$$\eta = \int_{\Omega} u_n \cdot g(x, v_n - v_n \rho(x)) dx \rightarrow 0, \text{ lo cual es absurdo.}$$

(b) Sea ahora $v_n \rightarrow -\infty$. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que:

$$(1.5') \quad v_n \rightarrow v \text{ en } H^1_0(\Omega) \text{-débil}$$

$$(1.6') \quad v_n \rightarrow v \text{ en } L^{pq}(\Omega) \text{ y c.p.d. en } \Omega,$$

$$(1.8') \quad v_n \rightarrow -\infty \text{ (en } \mathbb{R}^1).$$

Repitiendo la demostración del Lema 1.1.3' (i), obtenemos

$$\eta = \int_{\Omega} u_n \cdot g(x, v_n - v_n \rho(x)) dx \geq \int_{\Omega} \phi_n \cdot g(x, -\psi - v_n \rho(x)) dx,$$

donde $\phi_n = S(\psi, v_n)$ (de acuerdo con la Nota 1.7, ϕ_n está bien definida, pues $\psi \in L^{pq}(\Omega)$), y $\int_{\Omega} \phi_n \cdot g(x, -\psi - v_n \rho(x)) dx \rightarrow +\infty$, lo que también es un absurdo. ■

Nota 1.8 Se puede proceder de manera análoga en el caso discreto. En particular, podemos definir para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ los vectores

$$T_h(\xi) = S_h(\xi, v_h(\xi)), \quad T_h^*(\xi) = S_h^*(\xi, v_h^*(\xi)),$$

y los operadores $\xi \rightarrow T_h(\xi)$ y $\xi \rightarrow T_h^*(\xi)$ serán de nuevo continuos y susceptibles de aplicación del Teorema de Brouwer. ■

2- DIFERENCIABILIDAD

(2.1)- El caso continuo

De momento nos limitaremos a considerar los casos $N=2$ y $N=3$. Supongamos que la función $(x,s) \rightarrow g(x,s)$ de (1.1) verifica las condiciones (1.3a)-(1.3e), y

$$(1.3f) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow g(x,s) \text{ es continuamente diferenciable de } R^1 \rightarrow R^1, \\ \text{para casi todo } x \in \bar{\Omega}; \\ x \rightarrow D_2 g(x,s), \text{ definida c.p.d. en } \Omega, \text{ es integrable,} \\ \text{para cada } s \in R^1; \end{array} \right.$$

$$(1.3g) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{D_2 g(x,s)}{s^{p^*}} = 0 \text{ uniformemente } x \in \bar{\Omega}, \text{ donde}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < p^* < +\infty, \text{ si } N=2, \\ 1 < p^* \leq 4, \text{ si } N=3. \end{array} \right.$$

Consideremos la ecuación

$$(2.1) \quad \alpha(v,v) \equiv \int_{\Omega} S(v,v) \cdot g(x, v - v\rho(x)) dx = \eta;$$

sabemos que para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, (2.1) admite una solución única $v = v(v)$, y que la función $(v,v) \rightarrow \alpha(v,v)$ es continua de $H_0^1(\Omega) \times R^1 \rightarrow [0, +\infty)$. En esta Sección nos proponemos aplicar el Teorema de la Función Implícita (cf. BERGER [12]) a (2.1), y determinar después las propiedades de regularidad de $v \rightarrow v(v)$, que ya sabemos que es continua e incluso secuencialmente débilmente continua de $H_0^1(\Omega) \rightarrow R^1$.

Sean entonces $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $v_0 = v(v_0)$, y consideremos en primer lugar la función

$$(2.2) \quad v \rightarrow \alpha(v_0, v), \text{ continua de } R^1 \rightarrow [0, +\infty).$$

Naturalmente, existirá un entorno N_0 de v_0 , tal que

$\alpha(v_0, v) > 0$ para $v \in N_0$, y (2.2) será estrictamente decreciente en N_0 . Por otra parte ,

$$\alpha(v_0, v) = \int_{\Omega} f(x, v_0(x), v) dx ,$$

donde $f(x, v_0(x), v) = S(v_0, v) \cdot g(x, v_0 - v\rho(x))$, $\forall (x, v) \in \Omega \times N_0$. Cualquiera que sea $v \in N_0$, $x \rightarrow f(x, v_0(x), v)$ es una función integrable. Mostremos que para casi todo $x \in \Omega$, $v \rightarrow f(x, v_0(x), v)$ es diferenciable en N_0 . Para ello bastará probar que las funciones

$$(2.3) \quad v \rightarrow S(v_0, v)(x) , \text{ y } v \rightarrow g(x, v_0 - v\rho(x))$$

son diferenciables en N_0 para casi todo N_0 . Para la segunda de ellas, esta afirmación es una consecuencia trivial de (1.3f), y se tiene además que su derivada (con respecto a v) viene dada por

$$v \rightarrow -D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \cdot \rho(x) .$$

Por tanto, para $v \in N_0$ y μ suficientemente pequeño, se tendrá

$$g(x, v_0 - (v+\mu)\rho(x)) - g(x, v_0 - v\rho(x)) = -\mu D_2 g(x, v_0 - v^*(x)\rho(x)) \rho(x) ,$$

donde $v^* = v^*(x)$, definida c.p.d. en Ω , tomará valores comprendidos entre v y $v+\mu$. Se deduce de aquí que las integrales

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\mu} (g(x, v_0 - (v+\mu)\rho(x)) - g(x, v_0 - v\rho(x))) + \rho(x) D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \right|^q dx = \\ = \int_{\Omega} \rho(x) |D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) - D_2 g(x, v_0 - v^*(x)\rho(x))|^q dx , \end{aligned}$$

(donde $q > 1$ es finito y arbitrario si $N=2$, y $q=6/5$ si $N=3$), convergen hacia 0 cuando $\mu \rightarrow 0$, de acuerdo con (1.3g) y el Teorema de Lebesgue. Mediante estimación en L^q (cf. AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG [1]) obtenemos la convergencia en $W^{2,q}(\Omega)$ (y también en $H_0^1(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$) de las funciones $-\frac{1}{\mu} \{S(v_0, v+\mu) - S(v_0, v)\}$

hacia la solución $-Q(v_0, v)$ del problema de Dirichlet.

$$(2.4) \quad \begin{cases} L\omega = -D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ \omega = 0 \text{ sobre } \Gamma; \end{cases}$$

esto significa que la primera función de (2.3) es también diferenciable para casi todo $x \in \Omega$, y que $x \rightarrow D_3 f(x, v_0(x), v)$ es integrable para cada $v \in N_0$.

Para probar la diferenciabilidad de (2.2) en N_0 , queda tan sólo por demostrar que existe $F_1 \in L^1(\Omega)$, tal que

$$(2.5) \quad |D_3 f(x, v_0(x), v)| \leq F_1(x), \text{ c.p.d. en } \Omega, \forall v \in N_0.$$

Pero si N_0 se ha elegido acotado, entonces las funciones $g(\cdot, v_0 - v\rho(\cdot))$ y $D_2 g(\cdot, v_0 - v\rho(\cdot))$ están en un acotado de $L^q(\Omega)$ (puesto que las aplicaciones $v \rightarrow g(\cdot, v)$ y $v \rightarrow D_2 g(\cdot, v)$ son continuas, acotadas y compactas de $H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ (cf. BERESTYCKI [5] y BERGER [12]), y $\rho \in L^\infty(\Omega)$), $S(v_0, v)$ y $Q(v_0, v)$ están en un acotado de $L^{q'}(\Omega)$ y las funciones

$$(2.6) \quad x \rightarrow D_3 f(x, v_0(x), v) = -\{Q(v_0, v) \cdot g(x, v_0 - v\rho(x)) + \\ + S(v_0, v) D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \cdot \rho(x)\},$$

$v \in N_0$, están en un acotado de $L^1(\Omega)$.

De acuerdo con los Teoremas de diferenciación de las funciones integrales con respecto a un parámetro (cf., por ejemplo, LANG [8]), tenemos:

Teorema 2.1.1 "Bajo las hipótesis precedentes, la función $v \rightarrow \alpha(v_0, v)$ es diferenciable en un entorno N_0 de $v_0 = v(v_0)$, para cada $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Su derivada viene dada por:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v}(v_0, v) &= - \int_{\Omega} [Q(v_0, v) \cdot g(x, v_0 - v\rho(x)) + \\ &+ S(v_0, v) \cdot D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \rho(x)] dx = \\ &= -2 \int_{\Omega} S(v_0, v) \cdot D_2 g(x, v_0 - v\rho(x)) \rho(x) dx. \end{aligned} \right.$$

Además, la función

$$(2.8) \quad v \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial v}(v_0, v), \quad v \in N_0,$$

es continua, y toma valores estrictamente negativos en N_0 ."

Demostración

Las dos primeras afirmaciones han sido probadas ya (la segunda igualdad de (2.7) es una consecuencia trivial del carácter autoadjunto del operador L). Por otra parte, la continuidad de (2.8) resulta de (1.3g), y de la continuidad del operador de composición $v \mapsto D_2 g(\cdot, v)$, de $L^{p^*q}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$. Siendo (2.8) continua, se tiene $\alpha(v_0, \cdot) \in C^1(N_0)$, de donde $\alpha(v_0, \cdot)$ es absolutamente continua. Si se ha elegido N_0 tal que $\alpha(v_0, v) > 0$ para $v \in N_0$, resultará entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}(v_0, v) < 0, \quad \forall v \in N_0.$$

De nuevo utilizando la continuidad del operador $v \mapsto D_2 g(\cdot, v)$, la propiedad de continuidad (2.8) puede ser mejorada:

Lema 2.1.1 "La función $(v, v) \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial v}(v, v)$, definida en un entorno de (v_0, v_0) en $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$, y con valores en $(-\infty, 0]$, es continua." ■

Seguidamente aplicaremos el Teorema de la Función Implícita. De acuerdo con los resultados anteriores, dados $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $v_0 = v(v_0)$, existe un entorno U_1 de v_0 (que puede ser

elegido de forma que $U_1 \times N_0$ esté contenido en el entorno del Lema 2.1.1), y una función

$$\tilde{g}: v \in U_1 \rightarrow \tilde{g}(v) \in \mathbb{R}^1,$$

tales que

$$\tilde{g}(v_0) = v_0, \text{ y } \alpha(v, \tilde{g}(v)) = \eta, \quad \forall v \in U_1.$$

Se tiene entonces $\tilde{g}(v) = v(v)$, $\forall v \in U_1$. En los resultados que siguen estableceremos la diferenciabilidad de \tilde{g} , y por tanto la de $v = v(v)$.

Consideremos el operador $v \rightarrow R_0(v)$, definido por

$$(2.9) \quad R_0(v) = g(\cdot, v - v\rho(\cdot)), \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

con $v \in \mathbb{R}^1$ fijo, continuo, acotado y compacto de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$. Veamos que cuando g cumple (1.3a)-(1.3g), este operador es también diferenciable. En primer lugar, observemos que para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, y cada $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, la función $t \rightarrow g(x, v(x) + t\delta v - v\rho(x))$ es diferenciable de \mathbb{R}^1 en sí mismo, y que su derivada en $t=0$ viene dada por $D_2 g(x, v(x) - v\rho(x)) \cdot \delta v$. Por otra parte, las funciones

$$\frac{1}{t} \{g(\cdot, v + t\delta v - v\rho(\cdot)) - g(\cdot, v - v\rho(\cdot))\}, \quad t \neq 0,$$

convergen en $L^q(\Omega)$ hacia $D_2 g(\cdot, v(\cdot) - v\rho(\cdot)) \cdot \delta v(\cdot)$ (definida c.p.d. en Ω) cuando $t \rightarrow 0$, ya que, debido a (1.3f), debe existir una función medible $t^* = t^*(x)$, definida c.p.d. en Ω , tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{g(x, v + t\delta v - v\rho(x)) - g(x, v - v\rho(x))\} = \\ = D_2 g(x, v + t(x)\delta v - v\rho(x)) \cdot \delta v \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \end{aligned}$$

y $|t^*(x)| < |t|$. Resulta entonces que (2.9) es *diferenciable-Gâteaux* en $H_0^1(\Omega)$, y

$$(2.10) \quad R_0'(v; \delta v) = D_2 g(\cdot, v - v\rho(\cdot)) \cdot \delta v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \delta v \in H_0^1(\Omega).$$

Nota 2.1 Cuando $N=2$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r>1$ finito. Por tanto, en (2.10), v puede ser considerada como una función de $L^{2p^*q}(\Omega)$, y δv como una función de $L^{2q}(\Omega)$, de donde, efectivamente, tenemos que $R_0'(v; \delta v) \in L^q(\Omega)$. Por el contrario, si $N=3$, se tiene $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, y entonces $v \in L^6(\Omega)$, $D_2 g(\cdot, v - v\rho(\cdot)) \in L^{3/2}(\Omega)$ y $R_0'(v; \delta v) \in L^{6/5}(\Omega)$.

En todos los casos, $R_0'(v; \delta v) \in L^q(\Omega)$ para un $q>1$ finito tal que $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$, de acuerdo con las *inyecciones de Sobolev*.

Deducimos de (2.10) y de la Nota 2.1 que para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, la aplicación $\delta v \rightarrow R_0'(v; \delta v)$ es lineal y continua de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, y viene dada por la función $D_2 g(\cdot, v - v\rho(\cdot))$. Si ponemos

$$R_0'(v; \delta v) = R_0'(v) \cdot \delta v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \delta v \in H_0^1(\Omega),$$

tendremos también que la aplicación $v \rightarrow R_0'(v)$ es continua de $H_0^1(\Omega)$ en el espacio $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); L^q(\Omega))$, ya que la convergencia (en $H_0^1(\Omega)$) de v_n hacia v implica $D_2 g(\cdot, v_n - v_n\rho(\cdot)) \rightarrow D_2 g(\cdot, v - v\rho(\cdot))$ en $L^{2q}(\Omega)$ (donde $q>1$ es finito y arbitrario) en el caso $N=2$, y en $L^{3/2}(\Omega)$ si $N=3$.

En consecuencia, el operador (2.9) es también *diferenciable-Fréchet* en $H_0^1(\Omega)$, de diferencial

$$(2.11) \quad R_0'(v) \cdot \delta v = D_2 g(\cdot, v - v\rho(\cdot)) \cdot \delta v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \delta v \in H_0^1(\Omega),$$

y la aplicación $(v, \delta v) \rightarrow R_0'(v) \cdot \delta v$ es continua de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$.

Una sencilla aplicación de la *Regla de la Cadena* conduce a la diferenciabilidad-Fréchet de la función $v \rightarrow \alpha(v, v)$ (con $v \in R^1$ fijo), de $H_0^1(\Omega)$ en R^1 , y a la igualdad

$$(2.12) \quad \left(\frac{\partial \alpha(v, v)}{\partial v} ; \delta v' \right) = 2 \int_{\Omega} S(v, v) \cdot D_2 g(x, v - v\rho(x)) dx ,$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) , \quad \forall \delta v \in H_0^1(\Omega) .$$

Nota 2.2 La relación (2.12) indica la pertenencia de $\frac{\partial \alpha(v, v)}{\partial v}$ a $L^q(\Omega)$, donde, de nuevo, $q > 1$ es finito y arbitrario si $N=2$, y $q=6/5$ si $N=3$. ■

Teorema 2.1.2 "Sean $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $v_0 = v(v_0)$. La función $v \rightarrow v(v)$ es continuamente diferenciable en un entorno de v_0 , y en él se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} v'(v) = - \frac{1}{\frac{\partial \alpha(v, v(v))}{\partial v}} \cdot \frac{\partial \alpha(v, v(v))}{\partial v} = \\ = \frac{1}{\int_{\Omega} S(v, v(v)) \cdot D_2 g(x, v - v(v)\rho(x)) \rho(x) dx} \cdot S(v, v(v)) \cdot D_2 g(\cdot, v - v(v)\rho(\cdot)) , \end{array} \right.$$

es decir:

$$(2.13a) \quad v'(v) \in L^q(\Omega), \text{ donde } \begin{cases} q > 1 \text{ es finito y arbitrario, si } N=2, \\ q=6/5, \text{ si } N=3, \end{cases}$$

$$(2.13b) \quad \left\{ \begin{array}{l} v'(v) \cdot \delta v = \frac{1}{\int_{\Omega} S(v, v(v)) \cdot D_2 g(x, v - v(v)\rho(x)) \rho(x) dx} \cdot \\ \cdot \int_{\Omega} S(v, v(v)) \cdot D_2 g(x, v - v(v)\rho(x)) \delta v dx , \end{array} \right.$$

donde v varía en un entorno de v_0 , y $\delta v \in H_0^1(\Omega)$. ■

Nota 2.3 De acuerdo con este resultado, siendo $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ arbitrario, y estando definida globalmente la función $v \rightarrow v(v)$, resulta que (2.13) es válido $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ y $\forall \delta v \in H_0^1(\Omega)$. ■

Sea, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(2.14) \quad R(v) = g(\cdot, v - v(v)\rho(\cdot)).$$

El operador $v \rightarrow R(v)$ es continuo, acotado y compacto de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, y una nueva aplicación de la Regla de la Cadena nos dice que también es diferenciable-Fréchet en $H_0^1(\Omega)$, y que

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'(v) \cdot \delta v = D_2 g(\cdot, v - v(v)\rho(\cdot)) \cdot \\ \left\{ \delta v - \frac{\rho(\cdot)}{\beta(v, v(v))} \int_{\Omega} S(v, v(v)) D_2 g(x, v - v(v)\rho(x)) \delta v dx \right\}, \end{array} \right.$$

donde $\beta(v, v) = \int_{\Omega} S(v, v) \cdot D_2 g(x, v - v\rho(x)) \rho(x) dx$, $\forall (v, v) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$.

Nota 2.4 El problema modelo (P) descrito en (1.1) puede ser formulado como sigue:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que:} \\ Lu = R(u) \text{ en } \Omega. \end{array} \right.$$

Llamando $\xi = \xi(v)$ a la solución (única) de

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} L\xi = R(v) \text{ en } \Omega, \\ \xi = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

encontramos que (P) es equivalente al problema de minimización sin restricciones

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que:} \\ J(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v), \end{array} \right.$$

donde (por ejemplo) $J(v) = \frac{1}{2} a(v - \xi, v - \xi)$, $\xi = \xi(v)$. Nótese que (P) queda formulado como un problema de control óptimo, donde el estado ξ del sistema viene dado por la solución de (2.16), el control es v (variando en el espacio de controles admisibles

$H_0^1(\Omega)$), y el funcional coste es

$$(2.17) \quad v \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} a(v-\xi, v-\xi), \quad \xi = \xi(v);$$

al ser (2.14) diferenciable, también lo es J , y, en particular, podremos aplicar métodos de tipo gradiente para la resolución de (Q).

Nota 2.5 En la formulación mínimos-cuadrados (Q), la norma de $H_0^1(\Omega)$ que mide la "desviación de la optimalidad" entre v y $\xi(v)$ viene inducida por la forma bilineal $(u, v) \rightarrow a(u, v)$. Pueden elegirse sin embargo otras normas (o seminormas), que conducen a diferentes formulaciones equivalentes del mismo problema.

Por ejemplo, podemos tomar

$$(2.18) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v-\xi|^2 dx, \quad \xi = \xi(v),$$

ó bien

$$(2.19) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v-\xi)|^2 dx, \quad \xi = \xi(v).$$

Nota 2.6 En el sentido de los mínimos-cuadrados, la "mejor" formulación asociada a (R) es:

$$(2.20) \quad \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\| -Lv + R(v) \right\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

donde $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ es la norma dual de la norma en $H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = a(v, v)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right)^{1/2}.$$

Si se introduce $\xi \in H_0^1(\Omega)$, solución de (2.16) (ó, lo que es lo mismo, $\xi = T(v)$), entonces (2.20) tomará la forma

$$(2.21) \quad \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\| -L(v-\xi) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \xi = \xi(v),$$

y detallando el valor de $\|L(v-\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|L(v-\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{|\langle L(v-\xi), \phi \rangle|}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} = \\ &= \sup_{\substack{H_0^1(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{|a(v-\xi, \phi)|}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} = a(v-\xi, v-\xi)^{1/2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 2.7 Todo lo que se ha dicho para los casos $N=2$ y $N=3$, puede ser generalizado al caso $N \leq 5$, tomando en (1.3g)

$1 < p^* < +\infty$ (finito y arbitrario), si $N \leq 2$,

$1 < p^* \leq \frac{4}{N-2}$, si $3 \leq N \leq 5$;

cuando $N \geq 6$, la condición (1.3g) debe ser sustituida por (1.3f') (véase la Sección 2 del Cap. III). Para detalles, cf. FERNANDEZ CARA [27].

(2.2)- El caso discreto

Bajo las hipótesis (1.3a)-(1.3g), impuestas a la función $(x,s) \rightarrow g(x,s)$ en la Sección precedente, podemos también aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación $\alpha_h(\xi_h, v_h) = \eta$, en un entorno de un punto (ξ_h^0, v_h^0) , $v_h^0 = v_h(\xi_h^0)$. Resulta entonces que (P_h) puede formularse equivalentemente como sigue:

$$(R_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \zeta_h \in \mathbb{R}^m, \text{ tal que:} \\ A_h \zeta_h = R_h(\zeta_h), \end{array} \right.$$

donde $\xi_h \rightarrow R_h(\xi_h) \equiv b_h(\xi_h, v_h(\xi_h))$ es continuo y diferenciable de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, y su diferencial viene dada por

$$(2.22) \quad R'_h(\xi_h) = \left\{ I - \frac{1}{\beta_h(\xi_h, v_h(\xi_h))} f_h(\xi_h) \cdot S_h(\xi_h, v_h(\xi_h))^t \right\} \cdot F_h(\xi_h).$$

donde

(2.23a) $f_h(\xi_h)$ es el vector de componentes

$$f_h^j(\xi_h) = \int_{\Omega} D_2 g(x, \sum_i \xi_h^i \omega_i^h - v_h(\xi_h) \rho(x)) \rho(x) \omega_j^h dx ,$$

(2.23b) $\beta_h(\xi_h, v_h) = (f_h(\xi_h), S_h(\xi_h, v_h))$, y

(2.23c) $F_h(\xi_h)$ es la matriz de elementos

$$F_{h,j}^i(\xi_h) = \int_{\Omega} D_2 g(x, \sum_i \xi_h^i \omega_i^h - v_h(\xi_h) \rho(\cdot)) \omega_i^h \omega_j^h dx .$$

Nota 2.8 Se puede proceder de forma análoga con el problema

(P_h^*) . ■

3- MONOTONIA

En esta Sección aplicaremos las propiedades de monotonia del operador $v \rightarrow R(v)$ definido en la Nota 2.3 deducidas del *Principio del Máximo*, y posteriormente obtendremos un algoritmo iterado de resolución del problema. Recordemos que un espacio de Banach E se dice parcialmente ordenado, si existe una relación de orden parcial \prec definida en E tal que:

(i) Si $f \in E$, $f \succ 0$, entonces $cf \succ 0$, $\forall c \succ 0$.

(ii) Si $f_1, f_2, g_1, g_2 \in E$, y $f_1 \succ g_1, f_2 \succ g_2$, entonces

$$f_1 + f_2 \succ g_1 + g_2 .$$

Sea $E = H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$, con el orden parcial

$$e_1 = (v_1, \mu_1), e_2 = (v_2, \mu_2) \in E ,$$

" $e_1 \prec e_2$ si y sólo si $v_1(x) \leq v_2(x)$ c.p.d. en Ω , y $\mu_1 \geq \mu_2$ ".

En el espacio producto E definimos el operador

$$(v, \mu) \rightarrow N(v, \mu) = (S(v, \mu), v(v)),$$

que puede descomponerse en la suma del operador $(v, \mu) \rightarrow N_1(v, \mu) = (S(v, \mu), 0)$ y del operador $(v, \mu) \rightarrow N_2(v, \mu) = (0, v(v))$.

Proposición 3.1 " El operador N , y los operadores N_1 y N_2 son compactos de E en sí mismo. Además, N_1 es isotono (si $e_1 \prec e_2$, entonces $N_1(e_1) \prec N_1(e_2)$), mientras que N_2 es antitono (si $e_1 \prec e_2$, entonces $N_2(e_1) \succ N_2(e_2)$). "

Demostración

La compacidad de N, N_1 y N_2 es trivial, dado que el operador $(v, \mu) \rightarrow S(v, \mu)$ es compacto de $E \rightarrow H_0^1(\Omega)$. Por otra parte, si $e_1 = (v_1, \mu_1)$ y $e_2 = (v_2, \mu_2)$ pertenecen a E , y $e_1 \prec e_2$, entonces

$$(3.1) \quad v_1 \leq v_2 \text{ c.p.d. en } \Omega \text{ y } \mu_1 \geq \mu_2 ,$$

de donde

$$g(x, v_1 - \mu_1 \rho(x)) \leq g(x, v_2 - \mu_2 \rho(x)) \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

y, de acuerdo con el Principio del Máximo,

$$S(v_1, \mu_1) \leq S(v_2, \mu_2) \quad \text{c.p.d. en } \Omega.$$

Esto implica en particular la isotonía de N_1 . Además, si en las condiciones (3.1) tuviéramos $v(v_1) > v(v_2)$, sería cierta la desigualdad

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{\Omega} S(v_1, v(v_1)) \cdot g(x, v_1 - v(v_1)\rho(x)) dx < \\ &< \int_{\Omega} S(v_2, v(v_2)) \cdot g(x, v_2 - v(v_2)\rho(x)) dx = \eta, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por tanto, $v(v_1) \leq v(v_2)$, y N_2 es autítono. ■

Nota 3.1 Los resultados de existencia dados en las Secciones (1.1) y (1.2) de este Capítulo pueden obtenerse por un procedimiento no constructivo, manejando el espacio producto E y el operador $(v, \mu) \rightarrow \Phi(v, \mu)$, definido por

$$\Phi(v, \mu) = (S(v, v(v)), \alpha(v, \mu) - \eta), \quad \forall (v, \mu) \in E;$$

para detalles, cf. BERESTYCKI [6]. ■

El algoritmo iterado al que hemos hecho referencia se basa en el resultado siguiente, cuya demostración puede encontrarse en COLLATZ [18]:

Teorema 3.1 " Se considera la ecuación

$$(3.2) \quad e = N(e)$$

en un espacio de Banach parcialmente ordenado E , donde N puede descomponerse en la suma de dos operadores N_1 (isótono) y N_2 (autítono). Supongamos que N_1 y N_2 son continuos y están defi-

nidos en un dominio convexo DCE. Consideremos las iteraciones

$$(3.3) \quad e_{n+1} = N_1(e_n) + N_2(f_n), \quad f_{n+1} = N_1(f_n) + N_2(e_n), \quad n=0,1,2,\dots,$$

obtenidas a partir de los elementos $e_0, f_0 \in D$. Si e_0, f_0, e_1 y f_1 verifican

$$(3.4) \quad e_0 \leq e_1 \leq f_1 \leq f_0,$$

entonces N aplica cada intervalo

$$M_n = [e_n, f_n] = \{f \mid f \in E, e_n \leq f \leq f_n\}$$

en sí mismo. Si, para algún $n \geq 0$, $N(M_n)$ es compacto, entonces

(3.2) posee una solución e que además verifica

$$e_n \leq e \leq f_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Nótese que la ecuación

$$(3.5) \quad (u, v) = N(u, v) \equiv (S(u, v), v(u))$$

no es más que una nueva formulación del problema (P) . Eligiendo (v^0, v^0) y (w^0, μ^0) en E tales que $v^0 \leq w^0$ c.p.d. en Ω y $v^0 \geq \mu^0$, e iterando a partir de las relaciones

$$(3.3') \quad (v^{n+1}, v^{n+1}) = N_1(v^n, v^n) + N_2(w^n, \mu^n),$$

$$(w^{n+1}, \mu^{n+1}) = N_1(w^n, \mu^n) + N_2(v^n, v^n),$$

es decir

$$v^{n+1} = S(v^n, v^n), \quad v^{n+1} = v(w^n), \quad w^{n+1} = S(w^n, \mu^n), \quad \mu^{n+1} = v(v^n),$$

existirá una solución (u, v) de (3.5) (y por tanto de (P)) para la que tendremos

$$(3.6) \quad v^n \leq u \leq w^n \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \quad \text{y} \quad v^n \geq v \geq \mu^n, \quad \forall n \geq 0,$$

siempre que v^0, w^0, v^0 y μ^0 verifiquen

$$(3.4') \quad v^\circ \leq v^1 = S(v^\circ, v^\circ) \leq w^1 = S(w^\circ, \mu^\circ) \leq w^\circ, \quad y$$

$$v^\circ \geq v^1 = v(w^\circ) \geq \mu^1 = v(v^\circ) \geq \mu^\circ.$$

Nota 3.2 Además de obtener la estimación (3.6) de una solución (u, v) del problema considerado, las relaciones (3.3'), junto con la compacidad del operador N , aseguran la existencia de $v_*, w_* \in H_0^1(\Omega)$, y de $v_*, \mu_* \in R^1$, tales que

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^n \rightarrow v_* \quad \text{en } H_0^1(\Omega)\text{-débil y en } L^2(\Omega), \\ w^n \rightarrow w_* \quad \text{en } H_0^1(\Omega)\text{-débil y en } L^2(\Omega), \quad v_* \leq w_* \text{ c.p.d. en } \Omega, \\ v^n \rightarrow v_*, \quad v_* = S(v_*, v_*), \quad v_* = v(w_*), \\ \mu^n \rightarrow \mu_*, \quad w_* = S(w_*, \mu_*), \quad \mu_* = v(v_*), \quad \mu_* \leq v_*, \quad y \\ \int_{\Omega} S(v_*, v_*) \cdot g(x, v_* - v_* \rho(x)) dx \leq \eta \leq \int_{\Omega} S(w_*, \mu_*) \cdot g(x, w_* - \mu_* \rho(x)) dx. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

4- ALGUNOS EJEMPLOS TÍPICOS

(4.1)- El caso $g(x,s)=\lambda(s-t(x))_+$

Supongamos ahora que la función g viene dada por

$$(4.1) \quad g(x,s) = \begin{cases} \lambda(s-t(x)) & \text{si } s > t(x), \quad \lambda > 0 \\ 0, & \text{si } s \leq t(x), \end{cases}$$

donde $t \in C(\bar{\Omega})$, $t > 0$ en Ω . Si hacemos $f(s) = s_+$, $\forall s \in \mathbb{R}^1$, podremos escribir

$$g(x,s) = \lambda f(s-t(x)), \quad \forall (x,s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1,$$

y este caso corresponderá a una generalización de los problemas (1.8*) del Capítulo I, para esta particularización de la función de vorticidad.

Está claro que g verifica las condiciones (1.3a)-(1.3e) de la Sección (1.1), con $s_0 = 0$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ arbitrario (si $N \geq 3$) y $\Omega_0 = \Omega$. Sin embargo no es cierto que $s \rightarrow g(x,s)$ sea diferenciable para cada $x \in \Omega$, y por tanto no será posible aplicar los resultados de la Sección 2.

Con objeto de eliminar esta dificultad, el problema (P) asociado a (4.1) será aproximado por otros problemas "regularizados", para los cuales se cumplan las condiciones (1.3f)- y (1.3g).

Sea entonces $\varepsilon > 0$, y pongamos

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < -\varepsilon, \\ (s+\varepsilon)^2 / (4\varepsilon), & \text{si } -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon, \\ s, & \text{si } s > \varepsilon. \end{cases}$$

Sea $g_\varepsilon(x,s) = \lambda f_\varepsilon(s-t(x))$, para $x \in \bar{\Omega}$ y $s \in \mathbb{R}^1$. Entonces, para todo $x \in \bar{\Omega}$, $s \rightarrow g_\varepsilon(x,s)$ es una función continuamente

diferenciable en R^1 , siendo su derivada

$$(4.2) \quad D_2 g_\varepsilon(x, s) \begin{cases} 0, & \Delta t \quad s-t(x) < -\varepsilon, \\ \lambda(s-t(x)+\varepsilon)/(2\varepsilon), & \Delta t \quad -\varepsilon \leq s-t(x) \leq \varepsilon, \\ \lambda, & \Delta t \quad s-t(x) > \varepsilon; \end{cases}$$

por otra parte, para cada $s \in R^1$, $x \rightarrow D_2 g_\varepsilon(x, s)$ es integrable en Ω , y para valores de s superiores a $\varepsilon + \sup_{x \in \bar{\Omega}} t(x)$ la función $s \rightarrow$

$\rightarrow D_2 g_\varepsilon(x, s)$ es constante, cualquiera que sea $x \in \bar{\Omega}$. Tenemos entonces que g_ε verifica (1.3a)-(1.3g), y para cada $\varepsilon > 0$ pueden aplicarse los razonamientos de la Sección 2 al correspondiente problema

$$(P_\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_\varepsilon \in H^2(\Omega) \text{ y } v_\varepsilon \in R^1, \text{ tales que:} \\ \\ Lu_\varepsilon = g(x, u_\varepsilon - v_\varepsilon \rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \\ a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \eta. \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \eta, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

existirán $u^* \in H_0^1(\Omega)$, $v^* \in R^1$ y una subsucesión $\{u_{\varepsilon_i}\}$ de $\{u_\varepsilon\}$, tales que

$$(4.4a) \quad u_{\varepsilon_i} \rightarrow u^* \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-débil y en } L^{pq}(\Omega),$$

y

$$(4.4b) \quad v_{\varepsilon_i} \rightarrow v^* \text{ (en } R^1).$$

Pero debido a las desigualdades

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|g(\cdot, u^* - v^* \rho(\cdot)) - g_{\varepsilon'}(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \leq \\ \leq \|g(\cdot, u^* - v^* \rho(\cdot)) - g(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} + \\ + \|g(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot)) - g_{\varepsilon'}(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \end{array} \right.$$

a las relaciones (4.4), a la convergencia c.p.d. en Ω de las funciones $g(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot)) - g_{\varepsilon'}(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot))$ hacia 0, al carácter acotado de los operadores $v \rightarrow g_{\varepsilon'}(\cdot, v)$, de $L^{pq}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, y a las desigualdades

$$g_{\varepsilon'}(x, s) \leq h(x, s) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } s - t(x) < -1, \\ \lambda [2(s - t(x)) + 1], & \text{si } |s - t(x)| \leq 1, \\ \lambda(s - t(x)), & \text{si } s - t(x) > 1, \end{cases}$$

para $\varepsilon' < 1$, deducimos, tras la aplicación de Teorema de Lebesgue, la convergencia hacia 0 del segundo miembro de (4.5), y entonces

$$g_{\varepsilon'}(\cdot, u_{\varepsilon'}, -v_{\varepsilon'}, \rho(\cdot)) \rightarrow g(\cdot, u^* - v^* \rho(\cdot)) \text{ en } L^q(\Omega),$$

cuando $\varepsilon' \rightarrow 0$.

La estimación en L^q (cf. [5]) nos dice ahora que las funciones $u_{\varepsilon'}$ convergen en $W^{2,q}(\Omega)$ hacia la solución v^* del problema

$$\begin{cases} Lv^* = g(x, v^* - v^* \rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ v^* = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Pero, en virtud de (4.4), $v^* = u^*$ c.p.d. en Ω , y entonces

$$v^* = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} v_{\varepsilon'} = v(u^*),$$

de donde (u^*, v^*) es una solución de (P) .

En consecuencia, (P) puede ser aproximado por pro-

blemas regularizados (P_ϵ) asociados a funciones g_ϵ que satisfacen las hipótesis exigidas en (2.1) y (2.2); hemos visto además que las soluciones (u_ϵ, v_ϵ) de los (P_ϵ) convergen (al menos para una subsucesión) fuertemente en $W^{2,q}(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ hacia una solución (u^*, v^*) de (P) .

Nota 4.1 La sucesión $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$, pues lo está en $W^{2,q}(\Omega)$. ■

(4.2)- El caso límite (Función de Heaviside)

Tomemos ahora $g(x,s) = \lambda h(s-t(x))$, $\lambda > 0$, con

$$h(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s > 0, \\ 0, & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

(definida c.p.d. en \mathbb{R}^1 ; se trata de la función de Heaviside, cuya derivada en el sentido de las distribuciones sobre \mathbb{R}^1 es la *masa de Dirac* en el origen). Mediante un razonamiento análogo al utilizado en (4.1), podemos asociar a cada $\epsilon > 0$ la función

$$h_\epsilon(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < -\epsilon, \\ (s+\epsilon)^2 / (2\epsilon^2), & \text{si } -\epsilon \leq s \leq 0, \\ -(s-\epsilon)^2 / (2\epsilon^2) + 1, & \text{si } 0 \leq s \leq \epsilon, \\ 1, & \text{si } s > \epsilon, \end{cases}$$

seguidamente construir

$$g_\epsilon(x,s) = \lambda h_\epsilon(s-t(x)), \quad \forall (x,s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1,$$

y considerar el correspondiente problema

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_\varepsilon \in H^2(\Omega), \text{ y } v_\varepsilon \in \mathbb{R}^1, \text{ tales que:} \\ \\ Lu_\varepsilon = g(x, u_\varepsilon - v_\varepsilon \rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \\ a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \eta \end{array} \right.$$

Obsérvese que, en principio, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ puede no tener solución. De hecho, las funciones g_ε verifican (1.3a), (1.3b), (1.3d), (1.3f) y (1.3g), y, suponiendo que existe una solución u^* del problema (\mathcal{P}) asociado a g , y que existen soluciones u_ε de los problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, se obtiene, al menos para una subsecuencia $\{u_\varepsilon\}$, la convergencia en $W^{2,p}(\Omega)$ hacia u^* .

Nota 4.2 Las funciones g_ε no verifican en general la condición (1.3c) de (1.1), lo que nos impide asegurar la existencia de solución en $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Incluso pueden darse ejemplos de no existencia de soluciones. Sin embargo, bajo ciertas "condiciones de compatibilidad" para los datos Ω , λ , η y $t(\cdot)$, estos problemas pueden resolverse. Para detalles, cf. BERESTYCKI [7], y FERNANDEZ-CARA [27].

Nota 4.3 Aunque el procedimiento de regularización (análogo al de (4.1)) es válido, desde el punto de vista numérico, la particular forma de las funciones $D_2 g_\varepsilon(x, \cdot)$ puede originar dificultades suplementarias. ■

INTRODUCCION

En la Sección 1 de este Capítulo, establecemos la convergencia (fuerte) en el espacio producto $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ de las soluciones (u_h, v_h) de los problemas (P_h) hacia una solución (u, v) del problema modelo (P) . Seguidamente aplicaremos los resultados obtenidos a los casos particulares de anillos vórtices y pares de vórtices planos. La Sección 2 considera la existencia y aproximación de soluciones aisladas; mediante una sencilla aplicación del *Teorema de Newton-Kantorovitch* (cf. [47]), obtenemos un algoritmo convergente hacia una solución del problema considerado, una vez que se conoce una aproximación de la misma. Finalmente, detallamos en la Sección 3 las condiciones "de tipo angular" que deben imponerse sobre las diferentes triangulaciones de dominio Ω para obtener la monotonía del operador discreto A_h^{-1} .

CAPITULO III

RESULTADOS DE CONVERGENCIA Y COMPATIBILIDADES

1- RESULTADOS DE CONVERGENCIA

(1.1)- Esquemas generales

Como en el Cap. II, (1.2), volvemos a considerar una sucesión generalizada \mathcal{R} de $R^S \setminus \{0\}$, convergente a 0, a la que asociaremos una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{R}}$ de Ω .

Pongamos de nuevo, para cada $h \in \mathcal{R}$,

$$(1.1) \quad V_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_K, \forall K \in \mathcal{T}_h; v_h|_\Gamma \equiv 0\},$$

siendo los P_K espacios finito-dimensionales de funciones polinómicas definidas en los N -símplices $K \in \mathcal{T}_h$. Es clásico que V_h es un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$, en el cual formulamos el problema discreto

$$(P_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ y } v_h \in R^1, \text{ tales que:} \\ a(u_h, v_h) = (g(\cdot, u_h - v_h) \rho(\cdot), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ a(u_h, u_h) = \eta. \end{array} \right.$$

Supondremos que la familia $\{\mathcal{T}_h\}$ y los espacios P_K son tales que se cumplen las siguientes hipótesis:

(H1)- $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{R}}$ es una familia regular de triangulaciones, en el sentido de CIARLET [16].

(H2)- Para cada $h \in \mathcal{R}$, la matriz A_h , definida por

$$A_h = \{a_{ij}^h\}_{i,j=1}^m, \quad a_{ij}^h = a(\omega_i^h, \omega_j^h), \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

donde $\{\omega_1^h, \omega_2^h, \dots, \omega_m^h\}$ es una base de V_h , y $m = m(h) = \dim(V_h)$, es de

clase monótona.

(H3)- Si $f \in L^q(\Omega)$ (como en el Cap. II, $1 < q < +\infty$ si $N \leq 2$, y $q = \frac{2N}{N+2}$ si $N \geq 3$), ω es una solución del problema de Dirichlet

$$(1.2) \quad \begin{cases} L\omega = f & \text{en } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

y ω_h la solución del problema variacional finito-dimensional

$$(1.3) \quad a(\omega_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad \omega_h \in V_h,$$

entonces

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathcal{H}}} \|\omega - \omega_h\| = 0$$

Sea, para cada $h \in \mathcal{H}$, (u_h, v_h) una solución de (P_h) . Evidentemente, existirá una subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} y una función $u_* \in H_0^1(\Omega)$, tales que $u_{h'} \rightarrow u_*$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^{p,q}(\Omega)$ cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$. La función $v \rightarrow v(v)$, donde $v(v)$ es la solución (única) de la ecuación

$$\alpha(v, v) \equiv \int_{\Omega} S(v, v) \cdot g(x, v - v\rho(x)) dx = \eta,$$

es secuencialmente débilmente continua de $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$ (cf. el Lema 1.1.6' del Cap. II). Por tanto, los valores $v(u_{h'})$ convergen hacia $v(u_*)$.

Queremos probar que $(u_*, v(u_*))$ es una solución del problema:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H^2(\Omega) \text{ y } v \in R^1, \text{ tales que:} \\ Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) = g(x, u - v\rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ u=0 \text{ sobre } \Gamma, \\ a(u, u) \equiv \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \eta. \end{array} \right.$$

Para ello bastará demostrar la igualdad $u_* = T(u_*) \equiv S(u_*, v(u_*))$; pero la caracterización que poseemos de cada u_h , como punto fijo del operador T_h , y la convergencia débil de estas funciones hacia u_* implicarán la misma, si (por ejemplo) las funciones $T_h(u_h) \equiv S_h(u_h, v_h(u_h))$ convergen en $L^q(\Omega)$ hacia $T(u_*)$. Esta convergencia será establecida como consecuencia del siguiente

Lema 1.1.1 "Con las precedentes notaciones, y llamando (como en el Cap. II) $v_h(v)$, $h \in \mathcal{H}$, $v \in H_0^1(\Omega)$, a la (única) solución de la ecuación

$$a_h(v, v) \equiv \int_{\Omega} S_h(v, v) \cdot g(x, v - v\rho(x)) dx = \eta,$$

si $\{v_h\}$ es una sucesión de funciones débilmente convergente en $H_0^1(\Omega)$ a $v_* \in H_0^1(\Omega)$, tenemos:

$$(1.4a) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathcal{H}}} v_h(v_h) = v(v_*),$$

$$(1.4b) \quad S_h(v_h, v_h(v_h)) \rightarrow S(v_*, v(v_*)) \text{ en } H_0^1(\Omega). "$$

Demostración

Partimos de las igualdades

$$(1.5a) \quad \eta = \int_{\Omega} S_h(v_h, v_h(v_h)) \cdot g(x, v_h - v_h(v_h)\rho(x)) dx, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$(1.5b) \quad \eta = \int_{\Omega} S(v_*, v(v_*)) \cdot g(x, v_* - v(v_*)\rho(x)) dx.$$

No supone restricción decir que $\{v_h(v_h)\}$ debe estar acotada. En efecto, si no fuera así, ó bien existiría $\delta > 0$ y $\bar{v} > 0$, tales que

$$|v_h(v_h)| \leq \bar{v}, \quad \forall h \in \mathcal{H} : |h| \leq \delta,$$

en cuyo caso nos limitaríamos a considerar la subsucesión $\{h \in \mathcal{H}, |h| \leq \delta\}$ de \mathcal{H} , ó bien podríamos encontrar ciertos $h_n \in \mathcal{H}$, $h_n \rightarrow 0$, tales que

$$|v_n| = |v_{h_n}(v_{h_n})| \rightarrow +\infty, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Sea $u_n = S_{h_n}(v_{h_n}, v_n)$ para cada n . Podemos suponer (tomando una subsucesión si es necesario) que $v_n \rightarrow +\infty$ ó que $v_n \rightarrow -\infty$. En el primer caso tendremos

$$g(\cdot, v_{h_n} - v_n \rho(\cdot)) \rightarrow 0 \text{ en } L^q(\Omega),$$

ya que existe $\phi \in L^{p'q}(\Omega)$ que verifica $0 \leq |v_{h_n}| \leq \phi$ c.p.d. en Ω .

$\forall n \geq 1$, y por tanto $u_n \rightarrow 0$ en $L^{q'}(\Omega)$. Además, para cada n ,

$$u_n = S_{h_n}(v_{h_n}, v_n) \leq S_{h_n}(v_{h_n}, v_1);$$

pero $S_{h_n}(v_{h_n}, v_1) \rightarrow S(v_*, v_1)$ en $H_0^1(\Omega)$, puesto que

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|S(v_*, v_1) - S_{h_n}(v_{h_n}, v_1)\| \leq \\ \leq \|S(v_*, v_1) - S_{h_n}(v_*, v_1)\| + \|S_{h_n}(v_*, v_1) - S_{h_n}(v_{h_n}, v_1)\|, \end{array} \right.$$

y (clásicamente) existe una constante $C_1 > 0$ independiente de n , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|S_{h_n}(v_*, v_1) - S_{h_n}(v_{h_n}, v_1)\| \leq \\ \leq C_1 \|g(\cdot, v_* - v_1^\rho(\cdot)) - g(\cdot, v_{h_n} - v_1^\rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} . \end{array} \right.$$

En virtud del *Inverso del Teorema de Lebesgue* (cf. [13]), existirá una función $\psi \in L^{q'}(\Omega)$ tal que

$$0 \leq u_n \equiv S_{h_n}(v_{h_n}, v_n) \leq S_{h_n}(v_{h_n}, v_1) \leq \psi \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \quad \forall n \geq 1,$$

y el Teorema de Lebesgue muestra que

$$\eta = \int_{\Omega} u_n \cdot g(x, v_{h_n} - v_n^\rho(x)) dx \rightarrow 0,$$

lo cual es absurdo.

Por el contrario, si $v_n \downarrow -\infty$, el *Lema de Fatou* asegura la integrabilidad de la función

$$(1.7) \quad f = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{u_n \cdot g(\cdot, v_{h_n} - v_n^\rho(\cdot))\},$$

así como la desigualdad

$$\int_{\Omega} f dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n \cdot g(x, v_{h_n} - v_n^\rho(x)) dx = \eta.$$

Sea $R > 0$ lo suficientemente grande como para tener

$$S(v_*, -R) > 1 \text{ en un abierto no vacto } \omega \subset \Omega;$$

existirá $n_0 \geq 1$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$u_n \equiv S_{h_n}(v_{h_n}, v_n) \geq S_{h_n}(v_{h_n}, v_{n_0}) \geq S_{h_n}(v_{h_n}, -R),$$

y se puede deducir, como en (1.6), que las funciones $S_{h_n}(v_{h_n}, -R)$ convergen hacia $S(v_*, -R)$ en $H_0^1(\Omega)$, y también (extrayendo una subsucesión si es necesario) c.p.d. en Ω . Pero esto implica claramente

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \cdot g(x, v_{h_n} - v_n \rho(x)) = +\infty \text{ c.p.d. en } \omega,$$

ya que $g(x, v_{h_n} - v_n \rho(x)) \rightarrow +\infty$ c.p.d. en Ω , y de nuevo llegamos a un absurdo.

De la acotación de los valores $v_h(v_h)$ se deduce la existencia de una subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} y de un valor real v_* tales que $v_{h'}(v_{h'}) \rightarrow v_*$ cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$. Notemos por otra parte que

$$(1.8) \quad \left| \int_{\Omega} S(v_*, v_*) \cdot g(x, v_* - v_* \rho(x)) dx - \int_{\Omega} S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'})) \cdot g(x, v_{h'} - v_{h'}(v_{h'}) \rho(x)) dx \right| \leq \\ \leq \int_{\Omega} |S(v_*, v_*) - S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'}))| \cdot g(x, v_* - v_* \rho(x)) dx + \\ + \int_{\Omega} S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'})) |g(x, v_* - v_* \rho(x)) - g(x, v_{h'} - v_{h'}(v_{h'}) \rho(x))| dx,$$

pero

$$(1.9) \quad \begin{cases} \|S(v_*, v_*) - S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'})) \rho(x)\| \leq \\ \leq \|S(v_*, v_*) - S_{h'}(v_*, v_*)\| + \|S_{h'}(v_*, v_*) - S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'}))\|, \end{cases}$$

y este último término converge a 0 (en virtud de la desigualdad

$$\|S_{h'}(v_*, v_*) - S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'}))\| \leq \\ \leq C_1 \|g(\cdot, v_* - v_* \rho(\cdot)) - g(\cdot, v_{h'} - v_{h'}(v_{h'}) \rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

mientras que $S_{h'}(v_*, v_*) \rightarrow S(v_*, v_*)$ en $H^1_0(\Omega)$, como consecuencia de (H3).

Tenemos por tanto que $S_{h'}(v_{h'}, v_{h'}(v_{h'})) \rightarrow S(v_*, v_*)$

en $H_0^1(\Omega)$, y de (1.5a) y (1.8), se obtiene la igualdad

$$\alpha(v_*, v_*) \equiv \int_{\Omega} S(v_*, v_*) \cdot g(x, v_* - v_* \rho(x)) dx = \eta,$$

de donde $v_* = v(v_*)$.

Dado que el mismo razonamiento es aplicable a toda subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} , tendremos la convergencia de toda la sucesión $\{v_h(v_h)\}$ hacia $v(v_*)$, y por tanto (1.4a). Para probar (1.4b), basta ahora aplicar (1.9) a todo $h \in \mathcal{H}$, obteniéndose la convergencia deseada. ■

Aplicando el Lema 1.1.1 a las funciones u_h , $h' \in \mathcal{H}'$, y a u_* , obtenemos:

Teorema 1.1.1 "Existe una subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} tal que las correspondientes soluciones (u_h, v_h) de los problemas (P_h) , $h' \in \mathcal{H}'$, convergen en $H_0^1(\Omega) \times R^1$ a una solución (u_*, v_*) del problema (P) . De hecho, si $u \in H_0^1(\Omega)$ es el límite débil de una subsucesión $\{u_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ de $\{u_h\}_{h \in \mathcal{H}}$, entonces el par $(u, v(u))$ es solución de (P) , $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$, y $v_k(u_k)$ converge hacia $v(u)$ en R^1 , cuando $k \in \mathcal{K}$, $k \rightarrow 0$."

(1.2)- Esquemas en elementos finitos para problemas de vórtices estacionarios axisimétricos

Consideremos de nuevo el problema (1.8*) descrito en el Cap. I. Recordemos que $N=2$, $\Pi = \{x | x = (r, z) \in R^2, r > 0\}$, Ω es un abierto acotado contenido en Π , y que buscamos una función $u \in H^2(\Omega)$ y una constante k , tales que se tenga:

$$(1.10) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u - Wr + k) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \eta, \end{cases}$$

donde las constantes λ , η y W y la función $s \rightarrow f(s)$ son conocidas, $\lambda, \eta, W > 0$ y f verifica las condiciones siguientes:

$$(1.11a) \quad f: \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty) \text{ es localmente Lipchiciana,}$$

$$(1.11b) \quad f(s) = 0, \quad \forall s \leq 0,$$

$$(1.11c) \quad s \rightarrow f(s) \text{ es estrictamente creciente en } [0, +\infty),$$

$$(1.11d) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty,$$

$$(1.11e) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0, \text{ para un valor real } p > 1.$$

Análogamente, dadas las constantes λ , η y k (≤ 0) y la función f , podemos considerar el problema de hallar u y W , solución de (1.10). Por simplicidad, supongamos que $\bar{\Omega}$ es un polígono no degenerado de \mathbb{R}^2 . Está claro que nos encontramos en un caso particular del problema (P) del Cap. anterior; la forma más simple de construir un esquema en elementos finitos consiste en tomar una sucesión generalizada \mathcal{H} de $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ convergente a 0, posteriormente asociar a cada $h \in \mathcal{H}$ una triangulación \mathcal{C}_h de Ω , y finalmente considerar los subespacios de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$

$$(1.12) \quad V_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_\ell(K), \forall K \in \mathcal{C}_h; v_h|_\Gamma \equiv 0\},$$

donde ℓ es un entero ≥ 1 . Si la familia $\{\mathcal{C}_h\}$ es regular, y los ángulos de cada triángulo K de cada \mathcal{C}_h son $\leq \pi/2$, se verificarán las hipótesis (H1) y (H2) (cf. CIARLET-RAVIART [17]); por

otra parte, es clásico que (H3) se cumple para esta elección de los espacios P_K en una familia regular de triangulaciones.

Hemos probado entonces el siguiente

Teorema 1.2.1 "Sea (u_h, k_h) para cada $h \in \mathcal{H}$, una solución del problema variacional finito-dimensional

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ y } k_h \in R^1, \text{ tales que:} \\ (\nabla u_h, \nabla v_h) = \lambda (f(u_h - W r + k_h), v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ (\nabla u_h, \nabla u_h) = \eta, \end{array} \right.$$

donde los V_h vienen dados por (1.12) para $l \geq 1$, entero fijo, y para una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{C}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$, y donde las constantes λ , η y W y la función f verifican las condiciones anteriores. Existe una subsucesión $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ tal que las correspondientes soluciones $(u_{h'}, k_{h'})$, $h' \in \mathcal{H}'$, convergen en $H_0^1(\Omega) \times R^1$ a una solución (u_*, k_*) de (1.10)!" ■

Nota 1.1 Un resultado análogo puede ser enunciado para la convergencia (al menos para una subsucesión) de las soluciones (u_h, W_h) del problema

$$(1.13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h, \text{ y } W_h \in R^1, \text{ tales que:} \\ (\nabla u_h, \nabla v_h) = \lambda (f(u_h - W_h r + k), v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ (\nabla u_h, \nabla u_h) = \eta, \end{array} \right.$$

hacia una solución (u_*, W_*) de (10). En lo que sigue (y de momento no insistiremos más en ello), los parámetros-soluciones k y W juegan un papel simétrico, pudiendo intercambiarse de manera conveniente en las diferentes formulaciones. ■

En segundo lugar consideraremos el problema (1.7*)

del Cap. I. De nuevo $N=2$, Ω es un abierto acotado (poligonal por simplicidad) contenido en el semiplano Π de \mathbb{R}^2 , y queremos encontrar una función u y una constante k , tales que:

$$(1.14) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda r f(u - W \frac{r^2}{2} + k) \text{ en } \Omega, \\ u=0 \text{ sobre } \Gamma \equiv \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 dx = \eta, \end{cases}$$

donde las constantes η , λ y W son positivas y f verifica las condiciones (1.11a)-(1.11e).

Con objeto de formular (1.14) es preciso introducir nuevos espacios de funciones (de tipo Sobolev) entre los cuales pueda actuar el operador \mathcal{L} ; es por ello que definiremos el espacio

$$(1.15a) \quad H(\Omega) = \{v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{1}{\sqrt{r}} \nabla v \in L^2(\Omega)^2\},$$

al que dotaremos de su norma hilbertiana "natural"

$$(1.15b) \quad \|v\|_{H(\Omega)} = \left(|v|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2},$$

y después llamaremos $H_0(\Omega)$ a la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H(\Omega)$. Evidentemente, $H_0(\Omega)$ es siempre un subespacio de $H_0^1(\Omega)$, y por tanto (supuesto Ω suficientemente regular) tiene sentido la traza de una función de $H_0(\Omega)$. Podemos distinguir dos casos:

1er Caso El compacto $\bar{\Omega}$ está contenido en Π .

Entonces la función $x=(r,z) \rightarrow 1/r$ pertenece a $C^\infty(\bar{\Omega})$, y $H(\Omega) \equiv H^1(\Omega)$. En consecuencia, $H_0(\Omega) \equiv H_0^1(\Omega)$, y las normas

$$\|v\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

y

$$(1.16) \quad \|\|v\|\| = \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

son equivalentes en $H_0(\Omega)$ a $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$. Podemos aplicar de nuevo los resultados de (1.1), obteniéndose:

Teorema 1.2.2 "Sea (u_h, k_h) para cada $h \in \mathcal{H}$, una solución del problema variacional finito-dimensional

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ y } k_h \in \mathbb{R}^1, \text{ tales que:} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \lambda \int_{\Omega} r f(u_h - W \frac{r^2}{2} + k_h) v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla u_h|^2 dx = \eta, \end{array} \right.$$

donde los V_h vienen dados por (1.12) para $l \geq 1$, entero fijo, y una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ del abierto acotado Ω , que verifica $\bar{\Omega} \subset \Pi$, y las constantes λ , η y W , y la función f verifican las condiciones anteriores. Existe una subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} tal que las soluciones correspondientes $(u_{h'}, k_{h'})$, $h' \in \mathcal{H}'$, convergen en $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ a una solución (u_*, k_*) de (1.14)." ■

2º Caso $\Gamma \cap \partial \Pi \neq \emptyset$

Sea $\Gamma_0 = \Gamma \cap \partial \Pi$. De las definiciones anteriores, se deduce que $H(\Omega)$ coincide con $H^1(\Omega)$ (y entonces $H_0(\Omega) \equiv H_0^1(\Omega)$) si y sólo si Γ_0 es de capacidad (lineal) nula. Desde el punto de vista físico es más interesante considerar (como se vio en el Cap. I) el caso de capacidad estrictamente positiva.

Nota 1.2 Cuando $\text{cap}(\Gamma_0) > 0$, $H_0(\Omega)$ es un subespacio propio de

$H(\Omega)$, la inyección $H_0(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ es continua, y, en $H_0(\Omega)$, la seminorma $\|\cdot\|$, dada por (1.16), es de hecho una norma, equivalente a $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$. En efecto, basta tener en cuenta que, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &\equiv \int_{\Omega} |\phi|^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\phi|^2 dx = \\ &= C(\Omega) \int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla \phi|^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \frac{1}{r} |\nabla \phi|^2 dx, \end{aligned}$$

donde $0 < \sup_{x=(r,z) \in \Omega} r \leq \tilde{a} \leq +\infty$, y $C(\Omega)$ es una constante positiva que sólo depende de Ω . ■

Pueden repetirse los razonamientos de la Sección (1.1) del Cap. II substituyendo $H_0^1(\Omega)$ por $H_0(\Omega)$, obteniéndose el resultado de existencia que sigue:

Teorema 1.2.3 " Sea f una función de $\mathbb{R}^1 \rightarrow [0, +\infty)$ que verifica (1.11a)-(1.11e). Sean λ, n, W tres constantes positivas dadas; entonces existe una función $u \in H_0(\Omega)$ y un valor real k , tales que el par (u, k) es solución de (1.14) ." ■

Nótese que una definición de los V_h tal como (1.12) no es ahora posible, salvo para $\ell \geq 3$, ya que si $\ell=1$ ó 2, y el triángulo K posee un lado sobre $\partial \Pi$, podemos siempre encontrar funciones $p \in P_{\ell}(K)$, para las cuales

$$x=(r,z) \rightarrow \frac{1}{r} |\nabla p|^2$$

no es integrable y $p|_{\partial \Pi \cap K} \equiv 0$; es decir, para $\ell=1,2$, el espacio V_h de (1.12) no está contenido en $H_0(\Omega)^*$. Por otra parte,

(*) Sería de todas formas interesante describir esquemas no conformes asociados al problema (1.14).

si $l \geq 3$, el trabajo numérico empleado en la resolución efectiva del problema puede resultar excesivo. Por estas razones, nos limitaremos a trabajar con familias $\{\mathcal{C}_h\}$ para las que se cumpla la propiedad siguiente:

(P) - "Para cada $h \in \mathcal{H}$, existe $h_0: 0 < h_0 \leq |h|$, tal que todos los triángulos $K \in \mathcal{C}_h$ tales que $\partial K \cap \partial \Pi \neq \emptyset$ (y tengan por tanto un lado ó un vértice sobre $\partial \Pi$) son de una de las dos formas:

(i)

$$K_1 = c_0 \cdot \{(0, z_1^*), (h_0, z_2^*), (0, z_3^*)\}$$

ó

(ii)

$$K_2 = c_0 \cdot \{(0, z_1^*), (h_0, z_2^*), (h_0, z_3^*)\}$$

para tres valores reales z_1^* ,

z_2^* y z_3^* ."

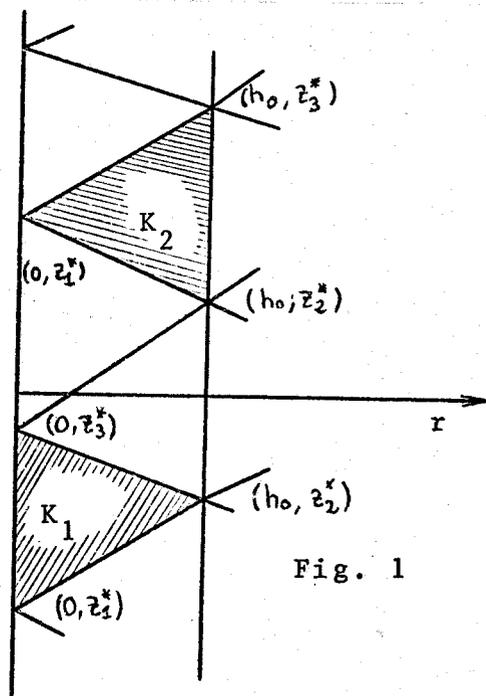


Fig. 1

Tomemos a continuación

$$(1.18) \quad \tilde{V}_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_K, \forall K \in \mathcal{C}_h; v_h|_\Gamma \equiv 0\},$$

donde

$$(1.19) \quad P_K = \begin{cases} P_\ell(K), & \text{si } \partial K \cap \partial \Pi = \emptyset, \quad \ell (\text{entero}) \geq 1, \\ \{q \mid q(r, z) \equiv r^2 p(r, z), p \in P_\ell(K), p|_{\partial K \cap \partial \Pi} \equiv 0\}, & \text{si no.} \end{cases}$$

La consistencia de la definición (1.18) será consecuencia del resultado siguiente:

Proposición 1.2.1

(a) "Sea $l=1$, $\tilde{K} \in \mathcal{C}_h$, $\partial \tilde{K} \cap \partial \Pi \neq \emptyset$, y $q \in P_{\tilde{K}}$, donde $P_{\tilde{K}}$ viene dado por (1.19). Entonces está bien definido por los valores que toma en los vértices de \tilde{K} . Además, \tilde{V}_h es un subespa-

cio de dimensión finita de $H_0(\Omega)$, y una función $v_h \in \tilde{V}_h$ está bien definida por sus valores en los vértices de \mathcal{T}_h que no pertenecen a Γ ."

(b) "Sea $l=2$, $K \in \mathcal{T}_h$, $\partial K \cap \Pi \neq \emptyset$, y $q \in P_K$, donde P_K viene dado por (1.19). Entonces q está bien definido por los valores que toma en los puntos medios de cada lado de K . Además, \tilde{V}_h es un subespacio de dimensión finita de $H_0(\Omega)$, y una función $v_h \in \tilde{V}_h$ está bien definida por sus valores en los vértices y puntos medios de los lados \mathcal{T}_h que no pertenecen a Γ ."

Demostración

Consideremos el caso $l=1$. La primera parte de (a) es trivial, dado que q puede ser escrito de manera única de la forma

$$q(r, z) = r^2 p(r, z), \quad \forall x = (r, z) \in \tilde{K},$$

donde $p \in P_1(\tilde{K})$, y por tanto viene definida por los valores que toma en los vértices de \tilde{K} .

Sea $\{a_i\}_{i=1}^M$ una enumeración de los vértices de \mathcal{T}_h que no pertenecen a Γ , y supongamos dados unos valores reales v_i , $1 \leq i \leq M$. Veamos que existe una única función $v_h \in \tilde{V}_h$, tal que

$$(1.20) \quad v_h(a_i) = v_i, \quad \forall i: 1 \leq i \leq M.$$

En efecto, consideremos para cada $K \in \mathcal{T}_h$, $\partial K \cap \Pi = \emptyset$, el $P_1(K)$ -interpolante $\Pi_K v$ de $\{v_i\}_{i=1}^M$, definido (cf. CIARLET [16]) como la única función de $P_1(K)$ que toma el valor v_i sobre cada correspondiente vértice "interior" (i.e., que no pertenece a Γ) de K , y el valor 0 sobre cada vértice "frontera".

Si $K \in \mathcal{T}_h$, $\partial K \cap \partial \Pi \neq \emptyset$, podemos distinguir dos casos:

Caso 1 : $K \cap \partial \Pi$ se reduce a un punto.

Entonces definimos el P_K -interpolante $\Pi_K v$ mediante la relación

$$(1.21) \quad \Pi_K v \equiv r^2 p_K, \quad x = (r, z) \in K,$$

donde p_K es el $P_1(K)$ -interpolante asociado a los valores $\frac{v_i}{h_0}$ sobre los vértices interiores de K y al valor 0 sobre el vértice que corresponde a Γ .

Caso 2 : K tiene un lado sobre $\partial \Pi$.

Análogamente, el P_K -interpolante $\Pi_K v$ viene definido por (1.21), donde ahora p_K es el $P_1(K)$ -interpolante asociado al valor $\frac{v_i}{h_0}$ sobre el único vértice interior de K , y a 0 sobre los vértices frontera.

Mostremos que existe una única función $v_h \in C^0(\bar{\Omega})$ tal que, para cada $K \in \mathcal{T}_h$, $v_h|_K \equiv \Pi_K v$. La teoría clásica de interpolación (cf. [17]) puede aplicarse para cada par de triángulos $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ que tengan intersección vacía con $\partial \Pi$, y por tanto bastará demostrar que si $K, \tilde{K} \in \mathcal{T}_h$, $\partial \tilde{K} \cap \partial \Pi \neq \emptyset$, y $K \cap \tilde{K}$ es un lado común a K y a \tilde{K} , entonces $\Pi_K v = \Pi_{\tilde{K}} v$ sobre $K \cap \tilde{K}$.

Supongamos en primer lugar que $\partial K \cap \partial \Pi = \emptyset$ (fig.2); entonces $\Pi_K v$ y $\Pi_{\tilde{K}} v$ son dos funciones polinómicas de grado ≤ 1 en la variable z sobre $K \cap \tilde{K}$, que coinciden en dos puntos distintos (los vértices comunes a K y a \tilde{K}), por otra parte, si $\partial \tilde{K} \cap \partial \Pi \neq \emptyset$ (fig.3), tendremos

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_K v \equiv r^2 p_K \\ \Pi_K v \equiv r^2 p_K^\vee \end{array} \right\} \text{ sobre } K \cap \tilde{K},$$

donde p_K y p_K^\vee pueden escribirse (sobre $K \cap \tilde{K}$) como dos funciones polinómicas de grado ≤ 1 en la variable r que coinciden para dos valores (distintos) de la misma. En consecuencia,

siempre debemos tener $\Pi_K v = \Pi_{\tilde{K}} v$ sobre $K \cap \tilde{K}$, y queda probada la existencia de una función $v_h \in \tilde{V}_h$ que satisface (1.20).

Esta función es además única, puesto que las relaciones

$$\begin{aligned} v_h, \omega_h \in \tilde{V}_h, \quad v_h(a_i) = \omega_h(a_i), \\ 1 \leq i \leq M, \end{aligned}$$

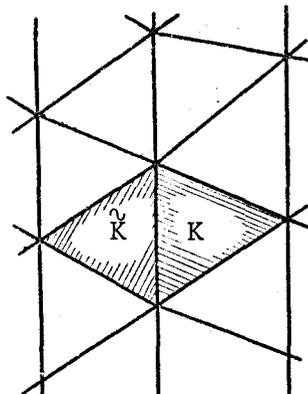
implican claramente $v_h \equiv \omega_h$, debido a la unisolvencia de los valores en los vertices de $K \in \mathcal{C}_h$ para el espacio $P_1(K)$.

Para terminar la demostración de (a) sólo queda probar la inclusión $\tilde{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$. Pero si

$v_h \in \tilde{V}_h$, tenemos trivialmente que $v_h \in H_0^1(\Omega)$. Luego todo se reduce a probar la integrabilidad de la función

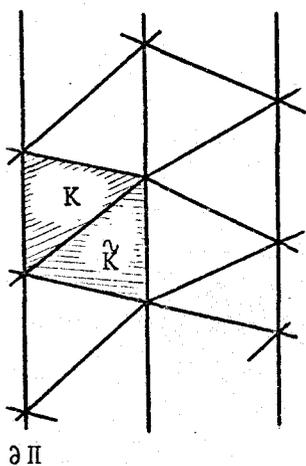
$$(1.22) \quad x = (r, z) \rightarrow \frac{1}{r} |\nabla v_h|^2, \quad x \in K,$$

sobre cada triángulo $K \in \mathcal{C}_h$ tal que $\partial K \cap \partial \Pi \neq \emptyset$. Sea K uno de estos



$\partial \Pi$

Fig. 2



$\partial \Pi$

Fig. 3

triángulos, y pongamos

$$Q_K = |\nabla v_h|^2 \quad \text{en } K;$$

entonces

$$Q_K(r, z) \equiv r^2 \left(2p_K + r \frac{\partial p_K}{\partial r} \right)^2 + r^4 \left(\frac{\partial p_K}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en } K,$$

donde $p_K \in P_1(K)$, y

$$(1.23) \quad \frac{1}{r} Q_K(r, z) \equiv r \left(2p_K + r \frac{\partial p_K}{\partial r} \right)^2 + r^3 \left(\frac{\partial p_K}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en } K,$$

lo que demuestra que (1.22) es integrable.

Para $\ell=2$, la demostración puede obtenerse de forma totalmente análoga. ■

Nota 1.2 De (1.22)-(1.23) se deduce que podemos utilizar un esquema algo más general, poniendo en (1.19)

$$q(r, z) \equiv r^\alpha \cdot p(r, z),$$

donde $\alpha > 3/2$. ■

Una vez que hemos construido los espacios \tilde{V}_h , supongamos que trabajamos con una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ tal que, para cada $h \in \mathcal{H}$, la matriz $\tilde{\lambda}_h$, definida por

$$\tilde{\lambda}_h = \{ \tilde{a}_{ij}^h \}_{i,j=1}^{\tilde{m}}, \quad \tilde{a}_{ij}^h = \tilde{a}(\tilde{\omega}_i^h, \tilde{\omega}_j^h),$$

donde $\{\tilde{\omega}_1^h, \tilde{\omega}_2^h, \dots, \tilde{\omega}_m^h\}$ es una base de \tilde{V}_h , $\tilde{m} = \tilde{m}(h) = \dim(\tilde{V}_h)$, y

$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal asociada de manera "standard" al operador $\tilde{\mathcal{L}}$.

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0(\Omega),$$

es de clase monótona. Para cada h consideramos el problema aproximado

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in \tilde{V}_h \text{ y } k_h \in \mathbb{R}^1, \text{ tales que:} \\ \tilde{a}(u_h, v_h) = \lambda \left(r f \left(u_h - \frac{W}{2} r^2 + k_h \right), v_h \right), \quad \forall v_h \in V_h, \\ \tilde{a}(u_h, u_h) = \eta. \end{array} \right.$$

Repitiendo los razonamientos de la Sección (1.2), Cap. II, pero cambiando ahora los espacios $H_0^1(\Omega)$ y V_h (allí definido como en (1.11)), por $H_0(\Omega)$ y \tilde{V}_h respectivamente, obtenemos el siguiente resultado de existencia:

Teorema 1.2.4 " En las condiciones del Teorema 1.2.3, existe una función $u_h \in \tilde{V}_h$, y un valor k_h , solución de (1.24)." ■

Estamos interesados en dar un resultado de convergencia análogo al Teorema 1.2.1, y, para ello, necesitaremos la siguiente

Proposición 1.2.2 Sea $f \in L^2(\Omega)$ y ω la solución del problema de Dirichlet

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma \omega \equiv - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = f, \quad x = (r, z) \in \Omega, \\ \omega = 0 \text{ sobre } \Gamma; \end{array} \right.$$

para cada $h \in \mathcal{H}$, sea ω_h la solución del problema variacional finito-dimensional

$$(1.26) \quad \tilde{a}(\omega_h, v_h) \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h dx = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h, \quad \omega_h \in \tilde{V}_h.$$

Entonces

$$(1.27) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathcal{H}}} \|\omega - \omega_h\| = 0."$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Como $D(\Omega)$ es denso en $H_0(\Omega)$, existe

$\phi \in D(\Omega)$ tal que $\|\omega - \phi\| < \varepsilon/4$. Pero, por otra parte, ω_h es la proyección ortogonal de ω sobre \tilde{V}_h asociada a la forma bilineal $(u, v) \rightarrow \tilde{a}(u, v)$ (producto escalar en $H_0(\Omega)$), de donde

$$(1.28) \quad \|\omega - \omega_h\| = \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|\omega - v_h\| \leq \|\omega - \phi_h\|,$$

donde ϕ_h es la función \tilde{V}_h -interpolante de ϕ , definida como en la demostración de la Proposición 1.2.1.

Sea

$$L = \text{sop}(\phi) = \{x \mid x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\},$$

y pongamos

$$r_L = \inf_{x=(r,z) \in L} r > 0.$$

La regularidad de la familia $\{\mathcal{C}_h\}$ implica la existencia de $h_1 > 0$ tal que, si $h \in \mathcal{R}$, $|h| < h_1$, entonces

$$(1.29) \quad \text{sop}(\phi_h) \subset L_1 = \{x \mid x=(r,z) \in \bar{\Omega}, r \geq \frac{r_L}{2}\}.$$

De (1.28)-(1.29) y la elección de ϕ , se deducen las desigualdades

$$\|\omega - \omega_h\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\phi - \phi_h\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{2}}{r_L} \|\phi - \phi_h\|,$$

para $h \in \mathcal{R}$, $|h| < h_1$. Pero

$$\|\phi - \phi_h\|^2 \equiv \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_h)|^2 dx = \int_{L_h} |\nabla(\phi - \phi_h)|^2 dx,$$

donde L_h es la unión de todos los triángulos $K \in \mathcal{C}_h$ tales que $K \cap L \neq \emptyset$, y ϕ_h coincide con la $P_{\ell}(K)$ -interpolante de ϕ en L_h ; por tanto, existe $h_2 > 0$, $h_2 < h_1$, tal que

$$\|\phi - \phi_h\| < \frac{\varepsilon \sqrt{r_L}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{si } h \in \mathcal{R}, \quad |h| < h_2.$$

Esto demuestra la Proposición. ■

Finalmente, podemos deducir como en (1.1) (pero trabajando con los espacios $H_0(\Omega)$ y \tilde{V}_h) el resultado de convergencia que sigue:

Teorema 1.2.5 " Sea (u_h, k_h) para cada $h \in \mathcal{H}$, una solución del problema variacional no lineal finito-dimensional (1.24), donde \tilde{V}_h viene dado por (1.18)-(1.19) para $l=1$ ó $l=2$, y para una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$ del abierto acotado Ω , para el cual $\text{cap}(\partial\Omega \cap \partial\Pi) > 0$. Se supone que las constantes λ , η y W son positivas, y que la función f verifica (1.11a)-(1.11e). Entonces existe una subsucesión \mathcal{H}' de \mathcal{H} tal que las correspondientes soluciones $(u_{h'}, k_{h'})$ convergen en $H_0(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ hacia una solución (u_*, k_*) de (1.13), cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$. " ■

2- UNA APLICACION DEL TEOREMA DE NEWTON-KANTOROVITCH AL

CASO DE LAS SOLUCIONES AISLADAS

Las hipótesis (1.3f) y (1.3g) de la Sección (1.1), Cap. II, serán sustituidas en esta Sección por otras dos un poco más restrictivas, que enunciaremos así:

$$(1.3f') \left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow g(x,s) \text{ es continuamente diferenciable de } \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \\ \text{para casi todo } x \in \Omega, \\ x \rightarrow D_2 g(x,s) \text{ es medible y esencialmente acotada,} \\ \text{para todo } s \in \mathbb{R}^1, \\ \exists \tau_1 > 0 \text{ tal que } |D_2 g(\cdot, s)|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tau_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \end{array} \right.$$

$$(1.3g') \quad \exists \tau_0 > 0, \text{ tal que } |D_2 g(x, s_1) - D_2 g(x, s_2)| \leq \\ \leq \tau_0 |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1, \quad \text{x.c.p.d. en } \Omega.$$

Continuaremos considerando los casos $N=2$ y $N=3$; un estudio análogo al que va a hacerse aquí (aunque técnicamente algo más complicado) es, sin embargo, posible en el caso general $N \geq 1$.

Diremos que una solución u_0 del problema (\mathcal{R}) (cf. (2.1), Cap. II), es aislada (y esto se justificará más adelante) si la forma bilineal continua

$$(u,v) \rightarrow a(u,v) - (R'(u_0) \cdot u, v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $R(u) \equiv g(\cdot, u - v(u)\rho(\cdot))$ y $R'(u)$ es la diferencial-Fréchet de R en u , es $H_0^1(\Omega)$ -coerciva, es decir, si existe $\gamma > 0$, tal que

$$(2.1) \quad a(v,v) - (R'(u_0) \cdot v, v) \geq \gamma \|v\|^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 2.1.1 "Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ una solución aislada de (\mathcal{R}) . Entonces existen dos constantes R, C (que sólo depen-

den de los datos del problema y de u_0), tales que

$$\|R'(\omega) - R'(\tilde{\omega})\|_* \leq C \|\omega - \tilde{\omega}\|,$$

si $\omega, \tilde{\omega} \in B(u_0, R) \equiv \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \|v - u_0\| \leq R\}$, donde $\|\cdot\|_*$ es la norma dual de $\|\cdot\|$ en $H^{-1}(\Omega)$.

Nota 2.1 En el transcurso de la demostración que sigue se ve que también existe una constante $C^* > 0$ tal que

$$(1.4^*) \quad |(R'(\omega) \cdot u, v) - (R'(\tilde{\omega}) \cdot u, v)| \leq C^* \|\omega - \tilde{\omega}\| \cdot |u| \cdot |v|;$$

para todo par de funciones $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y para $\omega, \tilde{\omega}$ en un entorno de u_0 . Nótese también que el carácter de solución aislada de u_0 no se utiliza en los razonamientos siguientes; el Lema continúa por tanto siendo cierto cuando $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ es una función arbitraria, y, en particular, $\omega \rightarrow R'(\omega)$ es un operador localmente lipchiciano de $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ (e incluso de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$).

Demostración

Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Si ω y $\tilde{\omega} \in H_0^1(\Omega)$, tenemos:

$$\begin{aligned} & |(R'(\omega) \cdot u, v) - (R'(\tilde{\omega}) \cdot u, v)| = \\ & = \left| \int_{\Omega} \{D_2 g(x, \omega - v(\omega)\rho(x)) - D_2 g(x, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(x))\} u(x) v(x) dx - \right. \\ & \quad - \int_{\Omega} \rho(x) \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\beta(\omega, v(\omega))} S(\omega, v(\omega)) D_2 g(y, \omega - v(\omega)\rho(y)) - \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\beta(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega}))} S(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega})) D_2 g(y, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(y)) \right\} u(y) dy v(x) dx \right| \leq \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} |D_2 g(x, \omega - v(\omega)\rho(x)) - D_2 g(x, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(x))| |u(x)| |v(x)| dx + \\ &+ \int_{\Omega} \rho(x) \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\beta(\omega, v(\omega))} S(\omega, v(\omega)) D_2 g(y, \omega - v(\omega)\rho(y)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\beta(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega}))} S(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega})) D_2 g(y, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(y)) \right| |u(y)| dy |v(x)| dx . \end{aligned}$$

Siendo $v \rightarrow v(v)$ y $v \rightarrow v'(v)$ continuas de $H_0^1(\Omega) \rightarrow R^1$ y $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ respectivamente, podremos encontrar $R_0 > 0$ tal que, si $u \in B(u_0; R_0)$,

$$\|v'(u) - v'(u_0)\|_* \leq 1 ;$$

entonces, si $0 < R \leq R_0$ y $\omega, \tilde{\omega} \in B(u_0; R)$, se tendrá:

$$\begin{aligned} |v(\omega) - v(\tilde{\omega})| &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|v'(\theta\omega + (1-\theta)\tilde{\omega})\|_* \cdot \|\omega - \tilde{\omega}\| \leq \\ &\leq (1 + \|v'(u_0)\|_*) \cdot \|\omega - \tilde{\omega}\| , \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D_2 g(x, \omega - v(\omega)\rho(x)) - D_2 g(x, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(x))| \cdot |u(x)| \cdot |v(x)| dx &\leq \\ &\leq \tau_0 \int_{\Omega} |\omega(x) - \tilde{\omega}(x)| \cdot |u(x)| \cdot |v(x)| dx + \\ &+ \tau_0 (1 + \|v'(u_0)\|_*) |\rho|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega - \tilde{\omega}\| \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx , \end{aligned}$$

y, en virtud de las inyecciones de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega) \quad \text{y} \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q^{*'}}(\Omega) ,$$

donde $q^* > 1$ es finito y arbitrario si $N=2$ y $q^*=3$ si $N=3$, resulta

$$(2.2) \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega} |D_2 g(x, \omega - v(\omega)\rho(x)) - D_2 g(x, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega})\rho(x))| |u(x)| |v(x)| dx \leq \\ &\leq \tau_0 (C_1 + |\rho|_{L^\infty(\Omega)} (1 + \|v'(u_0)\|_*)) \|\omega - \tilde{\omega}\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| , \end{aligned} \right.$$

donde C_1 sólo depende del abierto Ω . Por otra parte, $u \rightarrow \beta(u, v(u))$ es una función continua que toma sólo valores positivos; luego también podremos encontrar $R_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{\beta(\omega, v(\omega))} - \frac{1}{\beta(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega}))} \right| < 1, \text{ si } \omega, \tilde{\omega} \in B(u_0; R_1);$$

elijamos $R_2 > 0$ tal que $\beta(u, v(u)) > \beta(u_0, v(u_0))/2$ si $u \in B(u_0; R_2)$, y R_3 tal que $|S(u, v(u)) - S(u_0, v(u_0))|_{L^{q'}(\Omega)} \leq 1$ si $u \in B(u_0; R_3)$.

Entonces, si $0 < R \leq \min_{0 \leq i \leq 3} R_i$ y $\omega, \tilde{\omega} \in B(u_0; R)$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\beta(\omega, v(\omega))} - \frac{1}{\beta(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega}))} \right| \leq \\ & \leq \frac{4}{\beta(u_0, v(u_0))^2} \int_{\Omega} |S(\omega, v(\omega)) D_2 g(x, \omega - v(\omega) \rho(x)) - \\ & \quad - S(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega})) D_2 g(x, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega}) \rho(x))| \rho(x) dx \leq \\ & \frac{4}{\beta(u_0, v(u_0))^2} \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \{ \tau_1 C_2 (1 + (1 + \|v'(u_0)\|_*) \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}) + \\ & + \tau_0 C_2 (1 + |S(u_0, v(u_0))|_{L^{q'}(\Omega)}) (1 + (1 + \|v'(u_0)\|_*) \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}) \} \|\omega - \tilde{\omega}\| \equiv \\ & \equiv C_3 \|\omega - \tilde{\omega}\|, \end{aligned}$$

donde C_3 sólo depende de u_0, ρ, g y Ω . Por tanto, si $\omega, \tilde{\omega} \in B(u_0; R)$, y $0 < R \leq \min_{0 \leq i \leq 3} R_i$,

$$(2.3) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x) \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\beta(\omega, v(\omega))} S(\omega, v(\omega)) D_2 g(y, \omega - v(\omega) \rho(y)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\beta(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega}))} S(\tilde{\omega}, v(\tilde{\omega})) D_2 g(y, \tilde{\omega} - v(\tilde{\omega}) \rho(y)) \right| |u(y)| dy |v(x)| dx \leq \\ & \leq \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \left[(\tau_1 (1 + |S(u_0, v(u_0))|_{L^{q'}(\Omega)}) C_2 C_3 + \beta(u_0, v(u_0)) C_3 / 2 \right] \\ & \cdot \|\omega - \tilde{\omega}\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| \equiv C_4 \|\omega - \tilde{\omega}\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|, \end{aligned} \right.$$

donde de nuevo C_4 sólo depende de u_0 , ρ , g y Ω . De (2.2) y (2.3) obtenemos

$$(2.4) \quad |R'(\omega) \cdot u, v) - (R'(\tilde{\omega}) \cdot u, v)| \leq C_5 \|\omega - \tilde{\omega}\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|, \\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad \omega, \tilde{\omega} \in B(u_0; R),$$

si $R > 0$ se ha elegido como precedentemente. Esto demuestra el Lema. ■

Supongamos que existe $\omega_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para una determinada constante $\gamma > 0$, se tenga

$$(2.5) \quad a(v, v) - (R'(\omega_0) \cdot v, v) \geq \gamma \|v\|^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En virtud de la Nota 2.1, podremos aplicar el Lema anterior a la función ω_0 , de donde se deduce la existencia de una constante $K > 0$, tal que

$$(2.6) \quad \|R'(\omega) - R'(\tilde{\omega})\|_* \leq K \|\omega - \tilde{\omega}\|,$$

si ω y $\tilde{\omega}$ están en un cierto entorno $B(\omega_0; R)$ de ω_0 .

Sea $\lambda \geq \|a(\omega_0, \cdot) - (R(\omega_0), \cdot)\|_*/\gamma$, y supongamos que

$$(2.7) \quad 0 < \xi = \frac{K\lambda}{\gamma} < \frac{1}{2},$$

$$(2.8) \quad 0 < t^* = \frac{\gamma}{K} (1 - \sqrt{1 - 2\xi}) < R.$$

Se puede aplicar entonces el Teorema de Newton-Kantorovitch (cf. Sección 3, Cap. I) con $X = H_0^1(\Omega)$, $x^0 = \omega_0$, $f = 0$ y

$$T(x, y) \equiv a(x, y) - (R(x), y), \quad \forall x, y \in H_0^1(\Omega),$$

obteniéndose el resultado siguiente:

Teorema 2.1.1 "El problema (R) admite una solución $u_0 \in B(\omega_0; t^*)$, que es el límite (en $H_0^1(\Omega)$) de la sucesión $\{u^k\}$ de puntos de $B(\omega_0; t^*)$, bien definida por

$$(2.9) \quad u^0 = \omega_0; \quad u^{k+1} = u^k + z^{k+1}, \quad \forall k \geq 0,$$

donde z^{k+1} es la solución del problema lineal

$$(R^k) \quad a(z, v) - (R'(u^k) \cdot z, v) = (R(u^k), v) - a(u^k, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad z \in H_0^1(\Omega). \blacksquare$$

Nota 2.2 Cada problema (R^k) equivale, al menos "formalmente", al problema de Dirichlet:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Lz - D_2 g(x, u^k - v(u^k)) \rho(x) z + \\ + \frac{1}{\beta(u^k, v(u^k))} D_2 g(x, u^k - v(u^k)) \rho(x) \cdot \\ \cdot \int_{\Omega} S(u^k, v(u^k)) \cdot D_2 g(x, u^k - v(u^k)) \rho(x) z dx = \\ = g(x, u^k - v(u^k)) \rho(x) - Lu^k, \quad x \in \Omega, \\ z=0 \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right.$$

Nota 2.3 El Teorema anterior asegura también la unicidad de u_0 como solución de (R) en la bola abierta

$$Q(\omega_0; \tilde{\rho}) = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v - \omega_0\| < \tilde{\rho}\}, \quad \text{donde } \tilde{\rho} = \min(R, \frac{Y}{K}).$$

En particular, si u_0 es una solución aislada de (R) (en el sentido de (2.1)), podemos tomar $\omega_0 = u_0$ (siempre existirá $\lambda > 0$ para el cual se cumplan (2.7) y (2.8)), resultando que u_0 es una solución aislada también en el sentido usual. \blacksquare

Nota 2.4 El algoritmo (2.9) - (R^k) puede escribirse equivalentemente como sigue:

(i) Tomar $u^0 = \omega_0$.

(ii) Después, para cada $k \geq 0$, hallar u^{k+1} , solución de:

$$a(u, v) - (R'(u^k) \cdot u, v) = (R(u^k) - R'(u^k) \cdot u^k, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \blacksquare$$

Desgraciadamente, no podemos aplicar el punto 3^o

del Teorema de Newton-Kantorovitch (cf. Sección 3, Cap.I). De hecho, si existiera una función J , de $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$, tal que

$$(J'(u), v) = a(u, v) - (R(u), v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

se tendría que la función

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - J(u), \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

debería verificar $I' \equiv \mathbb{R}$; pero esto implica (cf. BERGER [12])

la hermiticidad del operador $I''(u)$, de $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, i.e.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) v(x) \omega(x) dx - \\ & - \frac{1}{\beta(u, v(u))} \left(\int_{\Omega} S(u, v(u)) D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) \omega dx \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\int_{\Omega} \rho(y) D_2 g(y, u-v(u)\rho(y)) v dy \right) = \\ & \quad = \int_{\Omega} D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) \omega(x) v(x) dx - \\ & \quad - \frac{1}{\beta(u, v(u))} \left(\int_{\Omega} S(u, v(u)) D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) v dx \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\int_{\Omega} \rho(y) D_2 g(y, u-v(u)\rho(y)) \omega dy \right), \end{aligned}$$

cualquiera que sean $u, v, \omega \in H_0^1(\Omega)$, de donde

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} S(u, v(u)) D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) v dx \right) \left(\int_{\Omega} \rho(y) D_2 g(y, u-v(u)\rho(y)) \omega dy \right) = \\ & = \left(\int_{\Omega} S(u, v(u)) D_2 g(x, u-v(u)\rho(x)) \omega dx \right) \left(\int_{\Omega} \rho(y) D_2 g(y, u-v(u)\rho(y)) v dy \right), \end{aligned}$$

$\forall u, v, \omega \in H_0^1(\Omega)$. Evidentemente, esto no es cierto en general (tómese, por ejemplo, $\rho \equiv \text{cte.} > 0$).

Nota 2.5 El razonamiento precedente parece indicar que no se puede afirmar la estabilidad física de las soluciones aisla-

das (cf. CROUZEIX-THOMAS [19]).

Consideremos ahora el problema discreto. Por simplicidad, nos referiremos únicamente al caso "no singular", en el que las funciones a_{ij} que definen el operador L pertenecen a $C^1(\bar{\Omega})$. Con la notación de la Sección (1.1), y haciendo $R_h(v_h) \equiv g(\cdot, v_h - v_h(v_h)\rho(\cdot))$ para $v_h \in V_h$, encontramos que (P_h)

puede formularse de manera equivalente como sigue:

$$(R_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h, \text{ tal que:} \\ a(u_h, v_h) = (R_h(u_h), v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Seguiremos suponiendo que se verifican las condiciones (H1)-(H3), lo cual permite afirmar la convergencia en $H_0^1(\Omega)$ (al menos para una subsucesión) de las soluciones de los problemas (R_h) hacia una solución de (R) . Con un pequeño cambio de notación, (R_h) puede también escribirse de la manera siguiente

$$(R'_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \xi_h \in R^m, \quad m = m(h) \equiv \dim(V_h), \text{ tal que:} \\ A_h \xi_h = b_h(\xi_h) \equiv b_h(\xi_h, v_h(\xi_h)), \end{array} \right.$$

y, razonando como en la demostración del Lema 2.1.1, deduciremos:

Lema 2.1.2 " La aplicación $\zeta_h \rightarrow b_h(\zeta_h)$ es continuamente diferenciable (Fréchet) de $R^m \rightarrow R^m$; y además, para cada $\xi_h \in R^m$, existen $R > 0$ y $C > 0$ (sólo dependientes de h, ρ, g, ξ_h), tales que:

$$\|b'_h(\zeta_h) - b'_h(\tilde{\zeta}_h)\|_{\mathcal{L}(R^m)} \leq C |\zeta_h - \tilde{\zeta}_h|, \quad \forall \zeta_h, \tilde{\zeta}_h \in B_m(\xi_h; R),$$

donde $B_m(\xi_h; R) = \{\zeta_h \mid \zeta_h \in R^m, |\zeta_h - \xi_h| \leq R\}$."

Supongamos que existe $\zeta_{\circ h} \in \mathbb{R}^m$, tal que

$$(2.11) \quad \gamma_h > 0: (A_h \zeta_h, \zeta_h) - (b'(\zeta_{\circ h}) \cdot \zeta_h, \zeta_h) \geq \gamma_h |\zeta_h|^2, \quad \forall \zeta_h \in \mathbb{R}^m,$$

$$(2.12) \quad \lambda \geq |A_h \zeta_{\circ h} - b(\zeta_{\circ h})| / \gamma_h, \quad 0 < \ell = \frac{K\lambda}{\gamma_h} < \frac{1}{2},$$

$$(2.13) \quad \|b'(\zeta_h) - b'(\tilde{\zeta}_h)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq K |\zeta_h - \tilde{\zeta}_h|, \quad \forall \zeta_h, \tilde{\zeta}_h \in B_m(\zeta_{\circ h}; R),$$

$$(2.14) \quad t^* = \frac{\gamma}{K} (1 - \sqrt{1 - 2\ell}) < R;$$

de nuevo, tras aplicación del Teorema de Newton-Kantorovitch, obtendremos

Teorema 2.1.2 "El problema (\mathcal{R}'_h) admite una solución $\xi_{\circ h}$ en la bola cerrada $B_m(\zeta_{\circ h}; t^*)$, que es el límite (en \mathbb{R}^m) de la sucesión $\{\zeta_h^k\}$ de puntos de $B_m(\zeta_{\circ h}; t^*)$, bien definido por:

$$(2.15) \quad \zeta_h^0 = \zeta_{\circ h}; \quad \zeta_h^{k+1} = \zeta_h^k + \delta_h^{k+1}, \quad \forall k \geq 0,$$

donde δ_h^{k+1} es la solución del sistema lineal

$$(A_h - b'_h(\zeta_h^k)) \cdot \delta_h = b_h(\zeta_h^k) - A_h \zeta_h^k. \quad \blacksquare$$

Nota 2.6 Al igual que en el caso continuo, la unicidad de la solución de (\mathcal{R}'_h) en la bola abierta

$$Q_m(\zeta_{\circ h}; \tilde{\rho}_h) = \{\zeta_h \mid \zeta_h \in \mathbb{R}^m, |\zeta_h - \zeta_{\circ h}| < \tilde{\rho}_h\},$$

donde $\tilde{\rho}_h = \min(R, \frac{\gamma_h}{K})$, está asegurada. \blacksquare

Nota 2.7 De nuevo puede considerarse una formulación del problema discreto con integración numérica. Todo se reduce a cambiar en (\mathcal{R}_h) el producto escalar "standard" (\cdot, \cdot) de $L^2(\Omega)$ por un producto $(\cdot, \cdot)_h$, asociado a una fórmula de cuadratura, la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ por una forma $a_h(\cdot, \cdot)$ también asociada

a ella, y el operador R_h por R_h^* , operador de $V_h \rightarrow L^q(\Omega)$, definido por

$$R_h^*(v_h) = g(\cdot, v_h - v_h^*(v_h)\rho(\cdot)) \quad , \quad \forall v_h \in V_h \quad ,$$

donde $v_h^*(v_h)$ es la solución (única bajo la hipótesis (H2) aplicada a la matriz A_h^* de elementos $a_h(\omega_i^h, \omega_j^h)$), de la ecuación (en v_h^*)

$$\alpha_h^*(v_h, v_h^*) \equiv \int_{\Omega} S_h^*(v_h, v_h^*) \cdot g(x, v_h - v_h^*\rho(x)) dx = \eta \quad ,$$

y donde $\omega_h^* = S_h^*(v_h, v_h^*)$ es la solución de

$$a_h(\omega_h^*, z_h) = (g(\cdot, v_h - v_h^*\rho(\cdot)), z_h)_h \quad , \quad \forall z_h \in V_h \quad , \quad \omega_h^* \in V_h \quad .$$

3- LA MONOTONIA DEL OPERADOR A_h^{-1}

Hasta el momento, cada vez que se considera el problema discreto (P_h) , hemos supuesto que la condición (H2) de la Sección (1.1) de este Capítulo tenía lugar. En esta Sección vamos a ver bajo qué condiciones (impuestas sobre cada triangulación \mathcal{T}_h), puede efectivamente afirmarse la monotonía de A_h^{-1} , cuando los esquemas utilizados corresponden a la discretización de los problemas (1.7*) y (1.8*) del Cap.I.

Recordemos que una matriz real y de elementos extradiagonales ≤ 0 es una *matriz de Stieljes*, si es simétrica y definida positiva. Un resultado clásico (cf., por ejemplo, VARGA [61]) afirma que toda matriz de Stieljes es una M-matriz, i.e., se trata de una matriz no singular de elementos extradiagonales ≤ 0 de clase monótona.

Consideremos en primer lugar el problema (1.10) de la Sección (1.2), al que asociamos el correspondiente problema discreto (1.13), donde V_h viene dado por (1.12) para $\ell=1$. La matriz A_h tiene por elementos

$$(3.1) \quad a_{ij}^h = a(\omega_i^h, \omega_j^h) \equiv \int_{\Omega} \nabla \omega_i^h \cdot \nabla \omega_j^h \, dx, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

donde $\{\omega_1^h, \omega_2^h, \dots, \omega_m^h\}$ es una base de V_h , y $m=m(h) \equiv \dim(V_h)$. De hecho, los ω_i^h vienen dados por las relaciones

$$\omega_i^h \in V_h; \quad \omega_i^h(b_j^h) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

donde $\{b_j^h\}_{j=1}^m$ es una enumeración de los vértices de \mathcal{T}_h que pertenecen a Ω .

Evidentemente, A_h es una matriz real simétrica y definida positiva, y, en virtud del resultado anterior, A_h se-

rá una M-matriz si se verifican las desigualdades

$$a_{ij} \equiv a(\omega_i^h, \omega_j^h) \leq 0, \text{ para } 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j.$$

Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$, utilizaremos la notación siguiente:

$$(3.2) \quad \delta(K) \equiv \text{diámetro de } K, \quad K \in \mathcal{T}_h,$$

$$(3.3) \quad \sigma(K) = \max_{t \neq s} [\cos(\nabla \lambda_t, \nabla \lambda_s)],$$

$$(3.4) \quad \delta_h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h(K), \quad \sigma(h) = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma(K),$$

donde

$$\cos(\nabla \lambda_t, \nabla \lambda_s) = \frac{(\nabla \lambda_t, \nabla \lambda_s)}{|\nabla \lambda_t| \cdot |\nabla \lambda_s|},$$

y, dado un triángulo $K \in \mathcal{T}_h$, λ_1 , λ_2 y λ_3 son las coordenadas baricéntricas de un punto $x \in K$ con respecto a sus vértices

Teorema 3.1.1 "Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$ (para la cual $\delta_h \rightarrow 0$), si todos los ángulos de todos los triángulos de cada triangulación \mathcal{T}_h son $\leq \pi/2$, entonces las matrices A_h son de Stieltjes."

Demostración

Observemos que para $i \neq j$, $a_{ij}^h = a(\omega_i^h, \omega_j^h)$ se reduce a una suma finita de integrales de la forma

$$\int_K \nabla \lambda_t \cdot \nabla \lambda_s \, dx = (\nabla \lambda_t, \nabla \lambda_s) \cdot \text{med}(K),$$

donde $K \in \mathcal{T}_h$, λ_t y λ_s son de nuevo las coordenadas baricéntricas de los puntos de K asociadas a los vértices, y $t \neq s$. Ahora bien, si los ángulos de K son $\leq \pi/2$, evidentemente $\sigma(K) \leq 0$ (y recíprocamente); luego, en este caso, $a_{ij}^h \leq 0$ para $i \neq j$. ■

Una forma equivalente de enunciar el Teorema 3.1.1 (cf. CIARLET-RAVIART [17]) consiste en dar la condición suficiente

$$(3.5) \quad \sigma(h) \leq \sigma_0 \leq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Nota 3.1 Puede también demostrarse que, bajo la condición (3.5), se tiene

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}^h \geq 0, \quad \forall i: 1 \leq i \leq m, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

de donde se deduce que los problemas discretos asociados a las triangulaciones \mathcal{T}_h son de tipo no negativo, y satisfacen un principio del máximo discreto (cf. [17]).

Nota 3.2 El resultado anterior es también aplicable al caso en que se considera el problema (1.14) con $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Pi$, y v_h dado por (1.12) para $\ell=1$. ■

Consideremos ahora el problema (1.14) de (1.2), con

$$\Gamma_0 \equiv \partial\Omega \cap \partial\Pi \neq \emptyset, \quad \text{y } \text{cap}(\Gamma_0) > 0.$$

Sea \tilde{V}_h el espacio finito-dimensional dado por (1.18)-(1.19) para $\ell=1$, y tomemos como base (canónica) de \tilde{V}_h la definida por las relaciones

$$\omega_i^h \in \tilde{V}_h; \quad \omega_i^h(b_j^h) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq \tilde{m},$$

donde de nuevo $\{b_j^h\}_{j=1}^{\tilde{m}}$ es una enumeración de los vértices "interiores" de \mathcal{T}_h . Naturalmente, si $K \subset \text{sop}(\omega_i^h)$ y $\partial K \cap \partial\Pi = \emptyset$, entonces $\omega_i^h|_K$ se reduce a la función de $P_1(K)$ que toma el valor 1 en b_i^h y valor nulo en los otros vértices de K ; por el contrario, si $\partial K \cap \partial\Pi \neq \emptyset$, $\omega_i^h|_K$ coincide con la función

$$q_K(r, z) \equiv r^2 p_K(r, z), \quad x = (r, z) \in K,$$

donde p_K es la función de $P_1(K)$ que toma el valor $\frac{1}{h_0^2}$ en b_i^h y valor 0 en los otros dos vértices del triángulo.

Teorema 3.1.2 "Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$ del abierto Ω , si todos los ángulos de todos los triángulos de cada triangulación \mathcal{T}_h son $\leq \pi/2$, y además aquéllos cuyo vértice pertenece a Γ_0 son $\leq \pi/2 - \varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$, entonces las correspondientes $\tilde{\chi}_h$ son matrices de Stieltjes para h suficientemente pequeño."

Demostración

Recordemos que cada $\tilde{\chi}_h$ es al matriz de los elementos \tilde{a}_{ij}^h , donde

$$(3.6) \quad \tilde{a}_{ij}^h \equiv \tilde{a}(\omega_i^h, \omega_j^h) \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla \omega_i^h \cdot \nabla \omega_j^h dx;$$

tendremos que probar nuevamente las desigualdades $\tilde{a}_{ij}^h \leq 0$, para $i \neq j$, ya que $\tilde{\chi}_h$ es trivialmente simétrica real y definida positiva.

Sea $i: 1 \leq i \leq \tilde{m}$, y consideremos la función base correspondiente ω_i^h . Si $\text{sop}(\omega_i^h) \cap \partial \Pi = \emptyset$, y $j \neq i$, entonces, ó bien $\tilde{a}_{ij}^h = 0$ (cuando $\text{sop}(\omega_j^h) \cap \text{sop}(\omega_i^h)$ tiene interior vacío), ó bien \tilde{a}_{ij}^h se reduce, como en el Teorema 3.1.1, a una suma finita de términos tales como

$$(3.7) \quad \int_K \frac{1}{r} \nabla \lambda_t \cdot \nabla \lambda_s dx = (\nabla \lambda_t, \nabla \lambda_s) \int_K \frac{1}{r} dx,$$

donde $K \subset \text{sop}(\omega_j^h) \cap \text{sop}(\omega_i^h)$, los λ_t son las coordenadas baricéntricas de los puntos de K con respecto a sus vértices, y $t \neq s$.

Como la condición impuesta sobre los ángulos de K

es equivalente a (3.5), tenemos $\tilde{a}_{ij}^h \leq 0$.

Si, por el contrario, $\text{sop}(\omega_i^h) \cap \partial \Pi \neq \emptyset$, y $j \neq i$, de nuevo puede ser $\tilde{a}_{ij}^h = 0$ (si $\text{sop}(\omega_j^h) \cap \text{sop}(\omega_i^h)$ tiene interior vacío), puede ser que \tilde{a}_{ij}^h se reduzca a una suma finita de términos análogos a los de (3.7) (si $\text{sop}(\omega_j^h) \cap \text{sop}(\omega_i^h)$ tiene interior no vacío y $\text{sop}(\omega_j^h) \cap \partial \Pi = \emptyset$), ó bien que tengamos una situación tal como la de la fig.4. En este último caso,

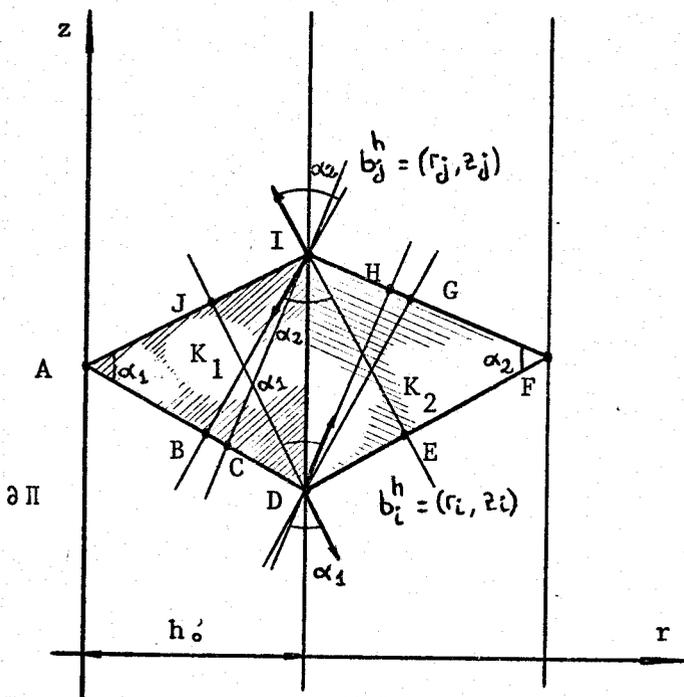


Fig. 4

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}^h &= \tilde{a}(\omega_i^h, \omega_j^h) = \\ &= \int_{K_1} \frac{1}{r} \nabla \omega_i^h \nabla \omega_j^h dx + \int_{K_2} \frac{1}{r} \nabla \omega_i^h \nabla \omega_j^h dx = \\ &= \int_{K_1} \frac{1}{r} \nabla \left(\frac{r^2}{h_0} \lambda_i^1 \right) \cdot \nabla \left(\frac{r^2}{h_0} \lambda_j^1 \right) dx + \\ &+ (\nabla \lambda_i^2, \nabla \lambda_j^2) \int_{K_2} \frac{1}{r} dx \end{aligned}$$

donde hemos llamado λ_i^k y λ_j^k ($k=1,2$), a las coordenadas baricéntricas asociadas a los vértices b_i^h y b_j^h en el triángulo K_k . En este último

miembro, el primer término puede también ser escrito como sigue:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{h_0} \int_{K_1} \frac{1}{r} \nabla (r^2 \lambda_i^1) \cdot \nabla (r^2 \lambda_j^1) dx = \\ &\frac{1}{h_0} \int_{K_1} \frac{1}{r} \left[\left\{ r^2 \frac{\partial \lambda_i^1}{\partial r} + 2r \lambda_i^1 \right\} \left\{ r^2 \frac{\partial \lambda_j^1}{\partial r} + 2r \lambda_j^1 \right\} + r^4 \frac{\partial \lambda_i^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \lambda_j^1}{\partial z} \right] dx = \\ &= (\nabla \lambda_i^1, \nabla \lambda_j^1) \frac{1}{h_0} \int_{K_1} r^3 dx + \frac{2}{h_0} \int_{K_1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \lambda_i^1 \lambda_j^1) dx ; \end{aligned} \right.$$

luego, teniendo en cuenta las igualdades

$$\frac{1}{h_0^4} \int_{K_1} r^3 dx = \frac{z_j - z_i}{5}, \quad y$$

$$\frac{1}{h_0^4} \int_{K_1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \lambda_i^1 \lambda_j^1) dx = \int_{z_i}^{z_j} \lambda_i^1(h_0, z) \cdot \lambda_j^1(h_0, z) dz,$$

donde z_i y z_j son respectivamente las ordenadas de los puntos b_i^h y b_j^h , obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}^h &= (\nabla \lambda_i^1, \nabla \lambda_j^1) \frac{z_j - z_i}{5} + (\nabla \lambda_i^2, \nabla \lambda_j^2) \int_{K_2} \frac{1}{r} dx + 2 \int_{z_i}^{z_j} \lambda_i^1(h_0, z) \lambda_j^1(h_0, z) dz = \\ &= -(\cos \alpha_1) |\nabla \lambda_i^1| |\nabla \lambda_j^1| \frac{z_j - z_i}{5} - (\cos \alpha_2) \frac{\text{med}(K_2)}{h_0 + h_1} + \\ &\quad + 2 \int_{z_i}^{z_j} \lambda_i^1(h_0, z) \lambda_j^1(h_0, z) dz, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Para tener $\tilde{a}_{ij}^h \leq 0$ bastará entonces con que se cumpla la desigualdad

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &2 \int_{z_i}^{z_j} \lambda_i^1(h_0, z) \cdot \lambda_j^1(h_0, z) dz \leq \\ &\leq (\cos \alpha_1) |\nabla \lambda_i^1| \cdot |\nabla \lambda_j^1| \frac{z_j - z_i}{5} + (\cos \alpha_2) \frac{\text{med}(K_2)}{h_0 + h_1}; \end{aligned} \right.$$

pero la regularidad de $\{\mathcal{C}_h\}$ entraña la existencia de una constante $C > 0$ tal que, si $K \in \mathcal{C}_h$ y $\rho(K)$ es el diámetro de la mayor bola contenida en K , se tiene

$$\frac{\delta(K)}{\rho(K)} \leq C,$$

y, por otra parte, la condición impuesta sobre α_1 implica

$$\cos \alpha_1 \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0.$$

Luego, si elegimos h^* tal que

$$0 < h^* \leq \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{10C}},$$

se tendrán, para $0 < \delta_h < h^*$, las desigualdades

$$2\delta_h \leq \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{5C\delta_h} \leq \frac{\cos \alpha_1}{\delta_h^2} \cdot \frac{z_j - z_i}{5},$$

y por tanto (3.8) (nótese que $|\nabla \lambda_i^1|$ y $|\nabla \lambda_j^1|$ son $\geq 1/\delta_h$). ■

Nota 3.3 El Teorema 3.1.2 puede formularse equivalentemente imponiendo

$$(3.9a) \quad \sigma(h) \leq \sigma_0 \leq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

y

$$(3.9b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\nabla \lambda_s, \nabla \lambda_t) \leq \sigma_\Gamma < 0, \text{ si } K \in \mathcal{G}_h, \partial K \cap \partial \Pi \text{ se reduce a un} \\ \text{vértice de } K, \text{ y } \lambda_t, \lambda_s \text{ son las coordenadas baricén-} \\ \text{tricas de los puntos de } K \text{ asociados a los otros dos} \\ \text{vértices de este triángulo.} \blacksquare \end{array} \right.$$

Nota 3.4 Las hipótesis del Teorema anterior pueden ser debilitadas utilizando razonamientos algo más sofisticados, inspirados en [], que conducen a la existencia de un cierto "incremento" límite $\tilde{\varepsilon}$ tal que, si $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi + \tilde{\varepsilon}$ para cada par de ángulos α_1, α_2 tal como los representados en la fig.4, las matrices λ_h^{-1} continúan siendo monótonas; para detalles, cf.

FERNANDEZ CARA [27]. ■

CAPITULO IVEXPERIENCIAS NUMERICAS1- DESCRIPCION DE LOS ALGORITMOS

Presentamos ahora algunos algoritmos iterados para la resolución del problema (P) de Cap. II. Los esquemas han sido aplicados en los casos particulares (1.7*) y (1.8*) del Cap. I, como queda indicado en la Sección siguiente. De acuerdo con las diferentes formulaciones equivalentes del problema (P) , estos algoritmos pueden agruparse en tres categorías.

(1.1)- Esquemas "Naturales"

De la demostración del Teorema 1.1.1 del Cap II, deducimos de forma natural el procedimiento iterado siguiente, propuesto en BERESTYCKI [5]:

(A1)- (a) Tomar $u^0 \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Después, con $n \geq 0$ y $u^n \in H_0^1(\Omega)$ dados, calcular

$$u^{n+1} = T(u^n) ,$$

i.e. :

$$v^{n+1} = v(u^n)$$

(resolviendo la ecuación

$$\alpha(u^n, v) \equiv \int_{\Omega} S(u^n, v) \cdot g(x, u^n - v\rho(x)) dx = \eta) ,$$

y

$$u^{n+1} = S(u^n, v^{n+1}) .$$

Un esquema ligeramente diferente puede ser obte-

nido (cf. [5]) como sigue:

- (A2)- (a) Tomar $v^0 \in H_0^1(\Omega)$ y $\mu^0 \in R^1$.
 (b) Después, con $n \geq 0$, $v^n \in H_0^1(\Omega)$ y $\mu^n \in R^1$ dados, calcular

$$v^{n+1} = S(v^n, \mu^n),$$

y μ^{n+1} , solución de la ecuación

$$\int_{\Omega} v^{n+1} \cdot g(x, v^{n+1} - \mu^n(x)) dx = \eta.$$

Con respecto a estos dos algoritmos es inmediato el resultado de estabilidad siguiente:

Proposición 1.1.1 "Existe una subsucesión $\{u^{n'}\}$ ($\{v^{n'}\}$) de $\{u^n\}$ (resp. $\{v^n\}$) que converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$."

Además, si $\{u^{n'}\}$ ($\{v^{n'}\}$) converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ hacia $u^*(v^*)$, y $\{u^{n'+1}\}$ ($\{v^{n'+1}\}$) también converge (ahora la convergencia es fuerte) hacia u^* (resp. v^*), entonces u^* (resp. v^*) es una solución de (P).

La convergencia de estos dos esquemas puede ser eventualmente acelerada (como ocurre en la práctica) mediante la introducción de parámetros de relajación.

Señalemos finalmente que bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad del operador T del Cap. II (descritas en (1.2)), podemos establecer un resultado de convergencia para el algoritmo (cf. SERMANGE [54]):

- (A3)- (a) Tomar $u^0 \in H_0^1(\Omega)$
 (b) Después, con $n \geq 0$ y $u^n \in H_0^1(\Omega)$ dados, calcular:

$$(b_1) \quad u^{n+1/3} = T(u^n) \equiv S(u^n, v(u^n)),$$

$$(b_2) \quad u^{n+2/3} = T(u^{n+1/3}) \equiv S(u^{n+1/3}, v(u^{n+1/3})),$$

$$(b_3) \quad u^{n+1} = (1-\alpha)u^n + 2\alpha u^{n+1/3} - \alpha u^{n+2/3},$$

donde α es un número real positivo suficiente pequeño.

(1.2) - Esquemas "Mínimos-Cuadrados"

Hemos probado ya que si la función $(x,s) \rightarrow g(x,s)$ verifica las condiciones (1.3f) y (1.3g) de la Sección 2 del Cap. II, el operador $v \rightarrow R(v) \equiv g(\cdot, v - v(v)\rho(\cdot))$ es diferenciable-Fréchet de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ (donde de nuevo q es un número real arbitrario >1 si $N \leq 2$, y $q = 2N/(N+2)$ si no), y su diferencial viene dada por

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'(v) \cdot \delta v = D_2 g(\cdot, v - v(v)\rho(\cdot)) \cdot \\ \cdot \left\{ \delta v - \frac{\rho(\cdot)}{\beta(v, v)} \int_{\Omega} S(v, v(v)) \cdot D_2 g(x, v - v(v)\rho(x)) \delta v dx \right\} \right\}, \end{array} \right.$$

para todos $v, \delta v \in H_0^1(\Omega)$, donde

$$(1.2) \quad \beta(v, v) \equiv \int_{\Omega} S(v, v) \cdot D_2 g(x, v - v\rho(x)) \rho(x) dx$$

(>0 si v se encuentra en un entorno de $v(v)$).

Nótese que (P) puede formularse de forma equivalente como sigue:

$$(R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que:} \\ Lu = R(u) \text{ en } \Omega. \end{array} \right.$$

Por tanto, si hacemos $\xi = \xi(v) \equiv T(v)$, obtenemos la siguiente formulación mínimos-cuadrados de (P).

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que:} \\ J(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v), \end{array} \right.$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v - \xi, v - \xi), \quad \xi = \xi(v).$$

En virtud de (1.3f)-(1.3g), tenemos que la función $v \rightarrow J(v)$ es diferenciable, y que su derivada viene dada explícitamente por

$$(1.3) \left\{ \begin{array}{l} (J'(v), \delta v) = a(\delta v - \xi'(v) \cdot \delta v, \delta v - \xi(v)) \equiv \\ \equiv a(\delta v, \delta v - \xi(v)) - (R'(v) \cdot \delta v, \delta v - \xi(v)), \end{array} \right.$$

para todos $v, \delta v \in H_0^1(\Omega)$. Podemos pues utilizar métodos variacionales de tipo gradiente para resolver el problema (Q). Ello nos lleva al algoritmo del gradiente:

- (A4) -
- (a) Tomar $u^0 \in H_0^1(\Omega)$
 - (b) Después, con $n \geq 0$ y $u^n \in H_0^1(\Omega)$ dados, calcular:
 - (b₁) $\omega^n \in H_0^1(\Omega)$, solución de

$$a(\omega^n, z) = (J'(u^n), z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega),$$
 - (b₂) $\rho^n \in \mathbb{R}_+^1$, solución de

$$J(u^n - \rho^n \omega^n) = \inf_{\rho > 0} J(u^n - \rho \omega^n)$$
 - (b₃) $u^{n+1} = u^n - \rho^n \omega^n$.

Otra posibilidad consiste en aplicar a (Q) el algoritmo del gradiente conjugado:

(A5)- (a) Tomar $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, calcular $v^{-1} \in H_0^1(\Omega)$, solución de:

$$a(v^{-1}, z) = (J'(u^0), z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega),$$

y hacer $\omega^0 = v^0$..

(b) Después, con $n \geq 0$, y $u^n, \omega^{n-1} \in H_0^1(\Omega)$ dados, calcular:

(b₁) $v^n \in H_0^1(\Omega)$, solución de:

$$a(v^n, z) = (J'(v^n), z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega),$$

(b₂) $\omega^n = v^n + \theta^n \omega^{n-1}$, con

$$\theta^n = \frac{(v^n - v^{n-1}, v^n)}{(v^{n-1}, v^{n-1})},$$

(b₃) $\rho^n \in \mathbb{R}_+^1$, solución de

$$J(u^n - \rho^n \omega^n) = \inf_{\rho > 0} J(u^n - \rho \omega^n),$$

(b₄) $u^{n+1} = u^n - \rho^n \omega^n$.

Sobre las propiedades de estabilidad y convergencia de estos algoritmos nos referimos a la obra de POLAK [48]. Para la minimización unidimensional de la función

$$\rho \rightarrow J(u^n - \rho \omega^n),$$

utilizaremos el algoritmo descrito en CEA [15] .

(1.3)- Esquemas "Mnótonos"

Tras los resultados de la Sección 3 del Cap. II, y la formulación (3.5) que allí se da del problema (P), obtenemos el algoritmo siguiente:

- (A6)- (a) Tomar $e_0 = (u^0, v^0)$, $f_0 = (v^0, \mu^0) \in E \equiv H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$, tales que:
- $$u^0 \leq v^0 \text{ c.p.d. en } \Omega, \quad v^0 \geq \mu^0,$$
- y, para $u^1 = S(u^0, v^0)$, $v^1 = v(v^0)$, $v^1 = S(v^0, \mu^0)$ y $\mu^1 = v(u^0)$, tengamos:
- $$u^0 \leq u^1 \leq v^1 \leq v^0 \text{ c.p.d. en } \Omega, \quad v^0 \geq v^1 \geq \mu^1 \geq \mu^0$$
- (b) Después, con $n \geq 0$, $e_n = (u^n, v^n) \in E$ y $f_n = (v^n, \mu^n) \in E$ dados, calcular
- (b₁) $u^{n+1} = S(u^n, v^n)$, $v^{n+1} = v(v^n)$,
- (b₂) $v^{n+1} = S(v^n, \mu^n)$, $\mu^{n+1} = v(u^n)$,
- (b₃) $e_{n+1} = (u^{n+1}, v^{n+1})$, $f_{n+1} = (v^{n+1}, \mu^{n+1})$.

Este algoritmo posee la importante propiedad de monotonía siguiente:

Proposición 1.2.1 "Para todo $n \geq 0$, las sucesiones $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ generadas por el esquema (A6) verifican:

$$e_n = (u^n, v^n), \quad f_n = (v^n, \mu^n),$$

$$u^0 \leq u^1 \leq \dots \leq u^n \leq \dots \leq v^n \leq \dots \leq v^1 \leq v^0 \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$v^0 \geq v^1 \geq \dots \geq v^n \geq \dots \geq \mu^n \geq \dots \geq \mu^1 \geq \mu^0. "$$

Por otra parte, es inmediato que la sucesión $\{u^n\}$ ($\{v^n\}$) converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ hacia una función u^* (resp. v^*) que verifica:

$$(1.4) \quad \begin{cases} Lu^* = g(x, u^* - v^* \rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ u^* = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \int_{\Omega} u^* \cdot g(x, u^* - v^* \rho(x)) dx \leq \eta, \end{cases}$$

(resp.

(1.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} Lv^* = g(x, v^* - \mu^* \rho(x)) \text{ en } \Omega, \\ v^* = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \int_{\Omega} v^* \cdot g(x, v^* - \mu^* \rho(x)) \geq \eta \end{array} \right.$$

donde

$$v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = v(v^*) \quad y \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = v(u^*) .$$

Si además $u^* = v^*$ c.p.d. en Ω ó $v^* = \mu^*$, entonces u^* es una solución de (P). En cualquier caso, el algoritmo (A6) nos proporciona estimaciones de la solución, dado que la existencia de una solución $e = (u, v)$ perteneciente a cada intervalo $[e_n, f_n]$ (i.e., tal que

$$u^n \leq u \leq v^n \text{ c.p.d. en } \Omega \quad y \quad v^n \geq v \geq \mu^n$$

para cada $n \geq 0$) está esgurada.

(1.4)- Algoritmo de Newton-Kantorovitch

Finalmente, recordemos que para el caso de las soluciones aisladas tiene especial aplicación el algoritmo de Newton-Kantorovitch, que tomará la forma siguiente:

(A7)- (a) Tomar $u^0 \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Después, con $n \geq 0$ y $u^n \in H_0^1(\Omega)$ dados, calcular:

(b₁) $z^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$, solución de:

$$a(z, v) - (R'(u^n) \cdot z, v) = (R(u^n), v) - a(u^n, v) ,$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

(b₂) $u^{n+1} = u^n + z^{n+1}$. ■

La convergencia de este esquema está asegurada bajo las hipótesis del Teorema 2.1.1 de la Sección 2 del Cap. III.

2- CALCULOS

Las experiencias que presentamos seguidamente corresponden a los casos particulares del problema (P) que derivan de los problemas de vorticidad (1.7*) y (1.8*) (anillos-vórtices y pares de vórtices planos) descritos en el Cap. I, planteados en abiertos del tipo

$$\Omega^{(1)} = (0, a) \times (-a, a)$$

y

$$\Omega^{(2)} = \{x \mid x = (r, z) \in \mathbb{R}^2; r^2 + z^2 < a^2; r > 0\},$$

donde $a > 0$. Debido a la simetría de los problemas (cf. "simetrización de STEINER" en FRAENKEL-BERGER [32] y NORBURY [44]), nos limitamos a trabajar en las semiregiones

$$\Omega_+^{(1)} = (0, a) \times (0, a)$$

y

$$\Omega_+^{(2)} = \{x \mid x = (r, z) \in \mathbb{R}^2; r^2 + z^2 < a^2; r, z > 0\},$$

respectivamente.

El test de salida utilizado en todos los casos fue

$$(TS) \quad \sum_i \frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{|u_i^{n+1}|} < \epsilon,$$

con $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$, según la precisión deseada.

Para la resolución de las diferentes ecuaciones

$$\alpha(u^n, v) \equiv \int_{\Omega} S(u^n, v) \cdot g(x, u^n - v\rho(x)) dx = \eta,$$

se utilizó un procedimiento de dicotomía de precisión 10^{-7} de

rápida convergencia, debida a la monotonía de las funciones

$$v \rightarrow \alpha(u^n, v)$$

En la Fig. T.1 presentamos un ejemplo de triangulación del dominio $\Omega_+^{(1)}$ con $a=10$, constituida por 180 triángulos y con 110 vértices, de los cuales intervinieron 87 como vértices "activos".

Por aplicación del algoritmo (A1) obtuvimos una solución aproximada del problema

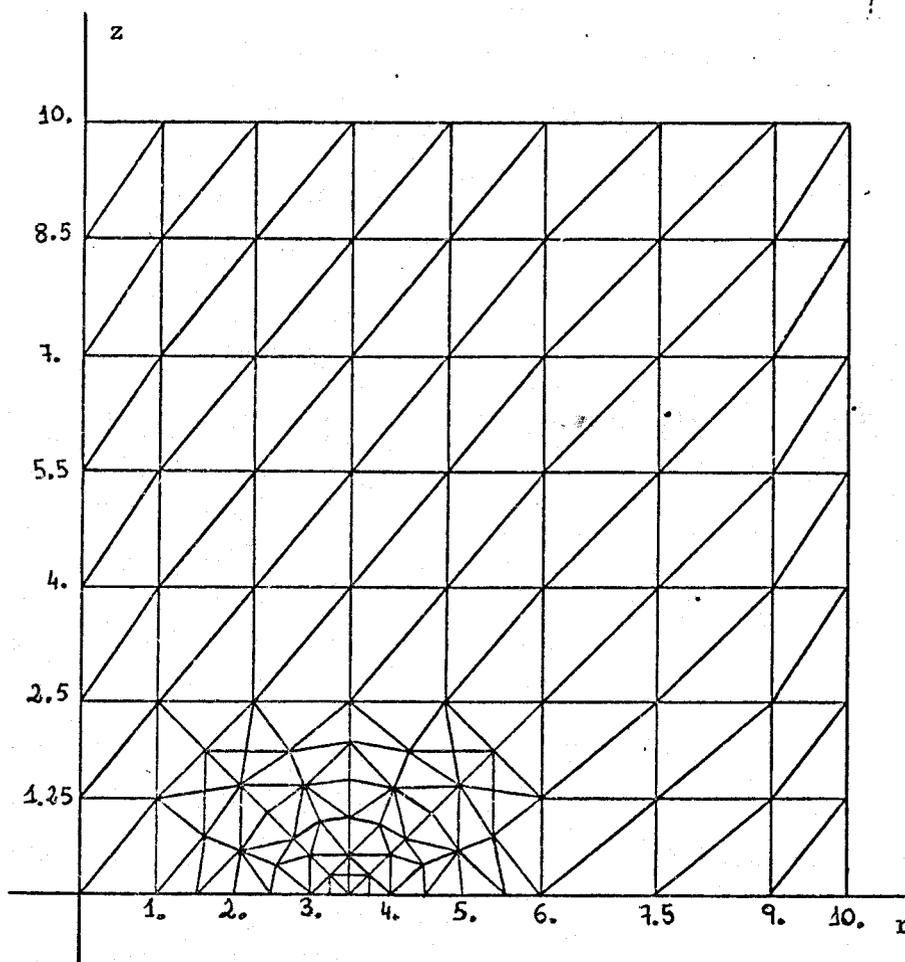


Fig. T.1

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda(u - Wr + k)_+, \quad x = (r, z) \in \Omega_+^{(1)} \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_+^{(1)}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0^{(1)}, \\ \int_{\Omega_+^{(1)}} |\nabla u|^2 dx = \eta/2, \end{array} \right.$$

donde

$$\Gamma_+^{(1)} = \{0, 10\} \times [0, 10] \quad \Gamma_0^{(1)} = (0, 10) \times \{0\},$$

$$\lambda = 2, \quad W = 0.08 \quad \text{y} \quad \eta = 10,$$

mediante elementos finitos de tipo P_1 , necesitándose 13 iteraciones para la convergencia, correspondientes a un tiempo de cálculo de 22.5 segundos en MULTICS. La semiregión de vorticidad asociada ($A_+ = \{x \mid x = (r, z) \in \Omega_+^{(1)}; u(x) - Wr + k > 0\}$) queda representada en la Fig. RV.1.

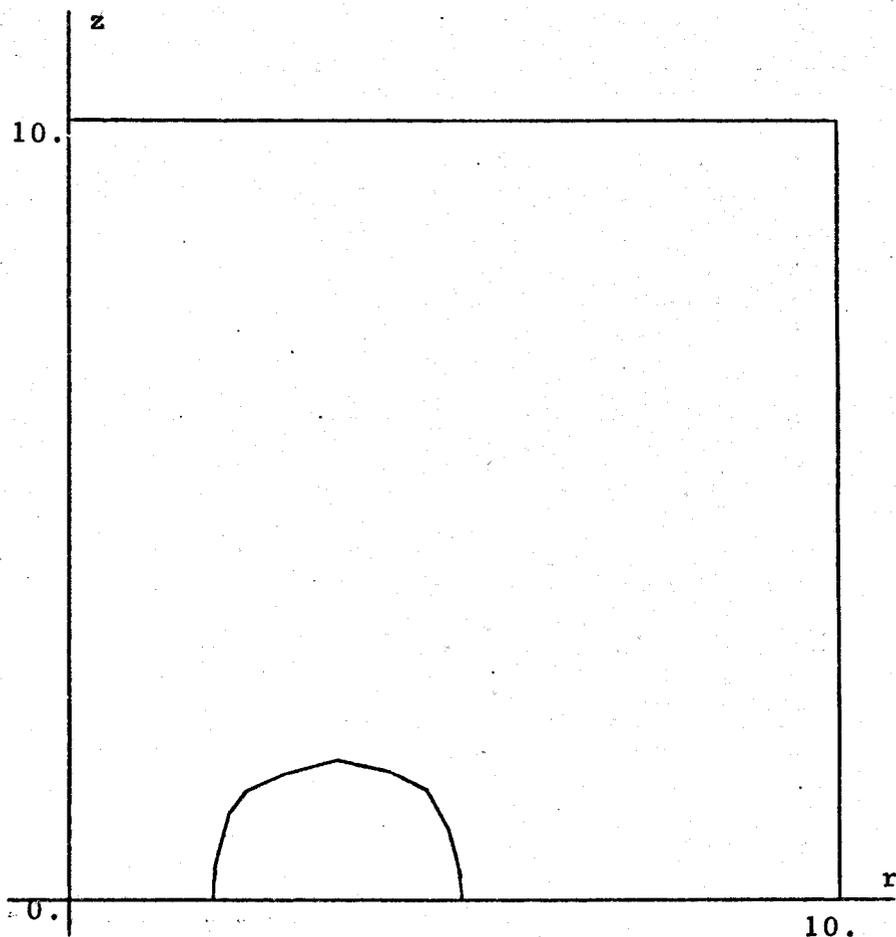


Fig. RV.1

El problema análogo

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda(u - Wr + k)_+ , \quad x = (r, z) \in \Omega_+^{(2)} , \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_+^{(2)} , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0^{(2)} , \\ \int_{\Omega_+^{(2)}} |\nabla u|^2 = \eta/2 , \end{array} \right.$$

donde

$$a = 10, \quad \Gamma_+^{(2)} = \{x \mid x = (r, z) ; r^2 + z^2 = 10^2, r, z \geq 0\} \cup \{0\} \cup [0, 10],$$

$$\Gamma_0^{(2)} = (0, 10) \times \{0\} , \quad \lambda = 2, \quad W = 0.01, \quad \eta = 8.8 ,$$

fue resuelto utilizando la triangulación de la Fig. T.2, tam-

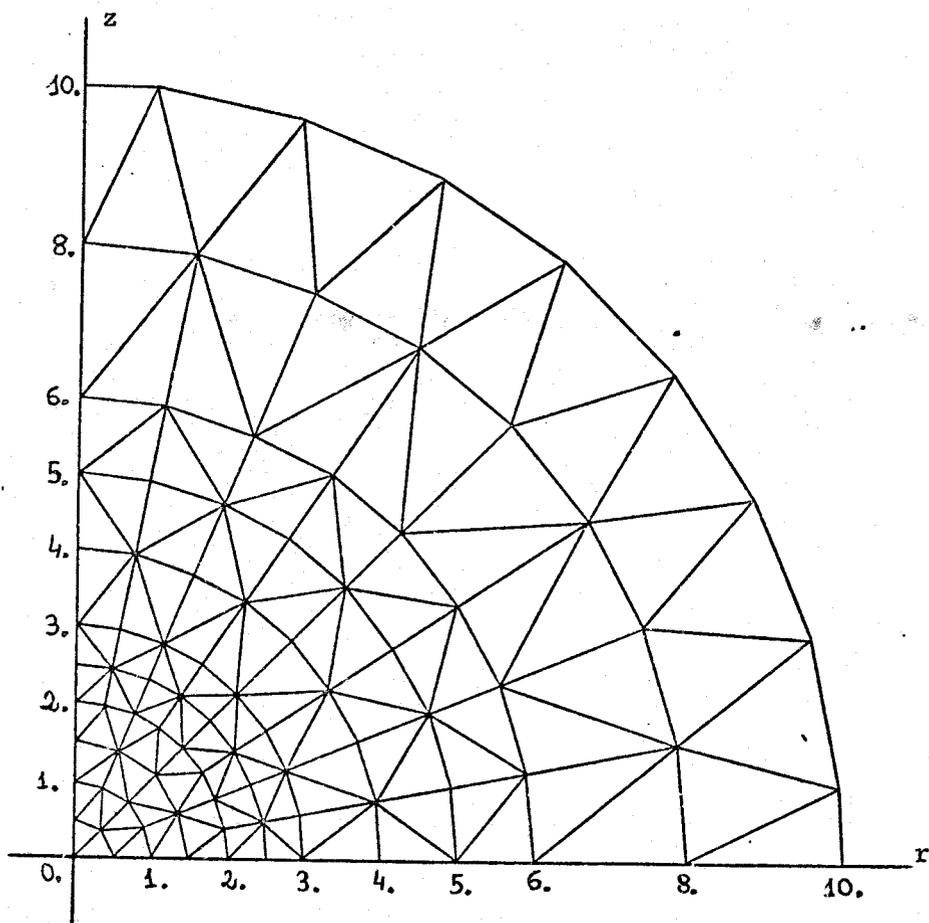


Fig. T.2

bién aplicándose el algoritmo (A1), mediante elementos finitos de tipo P_1 , tras 10 iteraciones, correspondiendo a un tiempo de cálculo de 19.1 segundos en MULTICS. La semiregión de vorticidad obtenida viene dada en la Fig. RV. 2.

En este mismo dominio consideramos también el problema

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda r \left(u - \frac{1}{2} W r^2 + k \right)_+, \quad x = (r, z) \in \Omega_+^{(2)}, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_+^{(2)}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0^{(2)}, \\ \int_{\Omega_+^{(2)}} \frac{1}{r} |\nabla u|^2 = \eta/2, \end{array} \right.$$

resuelto por elementos finitos del tipo descrito en la Sección (1.2) del Cap. III, siendo aplicada una vez más el algoritmo (A1).

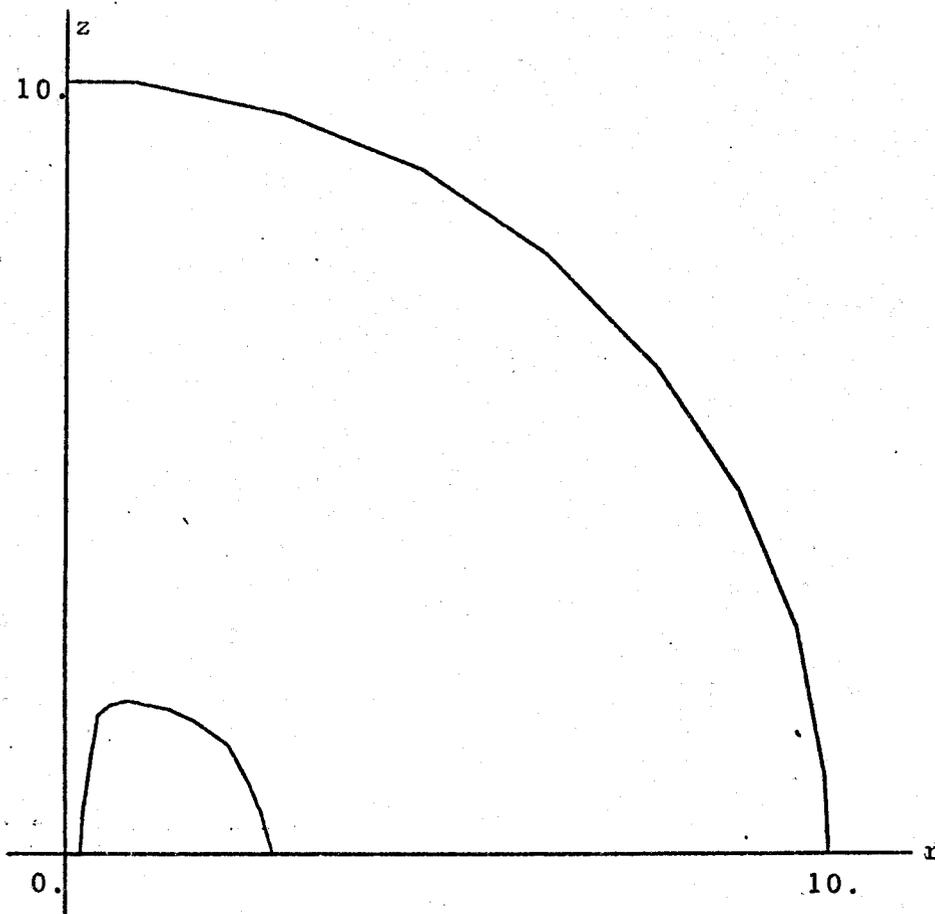


Fig. RV.2

La triangulación utilizada fue la de la Fig. T.3 (como se observará, cumpliendo la propiedad (P) del Cap. III), formada por 135 triángulos, con 92 vértices y 70 vértices "activos". Para los valores

$$\lambda=2, \quad W=0.005, \quad \eta=5,$$

obtuvimos convergencia tras de 9 iteraciones, correspondientes a un tiempo de cálculo de 21.2 segundos. La semiregión de vorticidad (ahora $A_+ = \{x | x=(r,z) \in \Omega_+^{(2)}; u(x) - \frac{1}{2}Wr^2 + k > 0\}$) queda detallada en la Fig. RV.3.

En las Fig. RV.4 a RV.7 describimos el movimiento de la región de vorticidad asociada a las soluciones obtenidas por aplicación de los diferentes algoritmos (A1)-(A7)

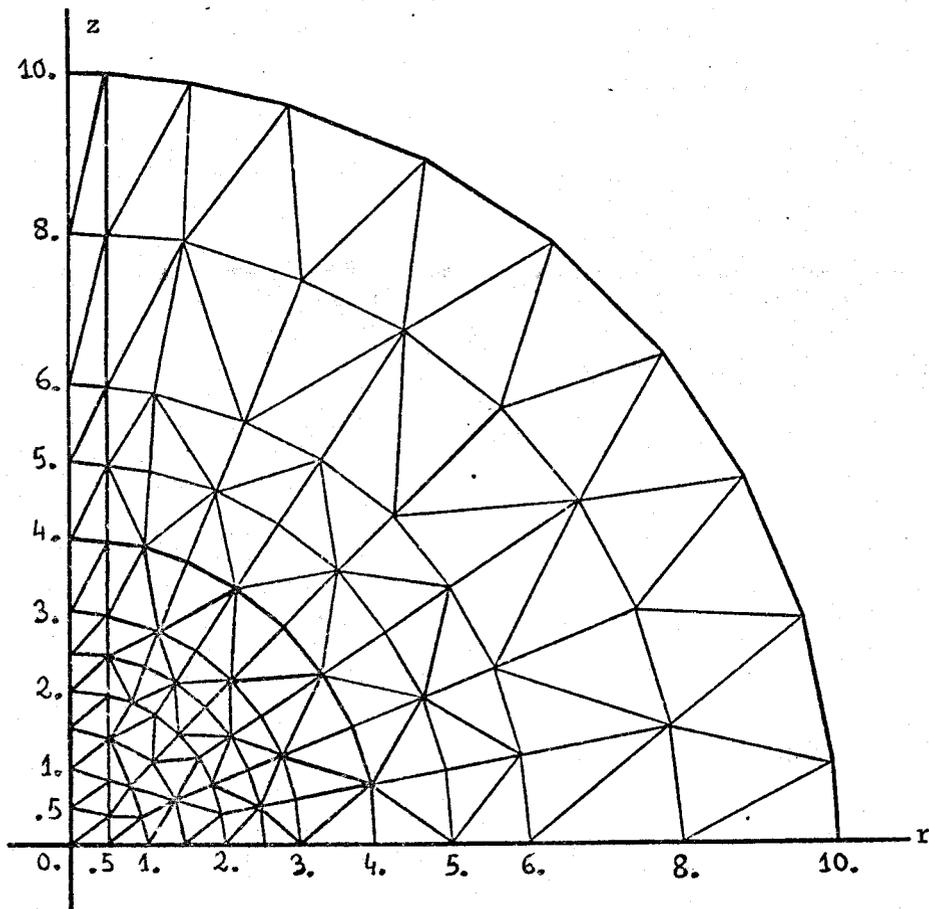


Fig. T.3

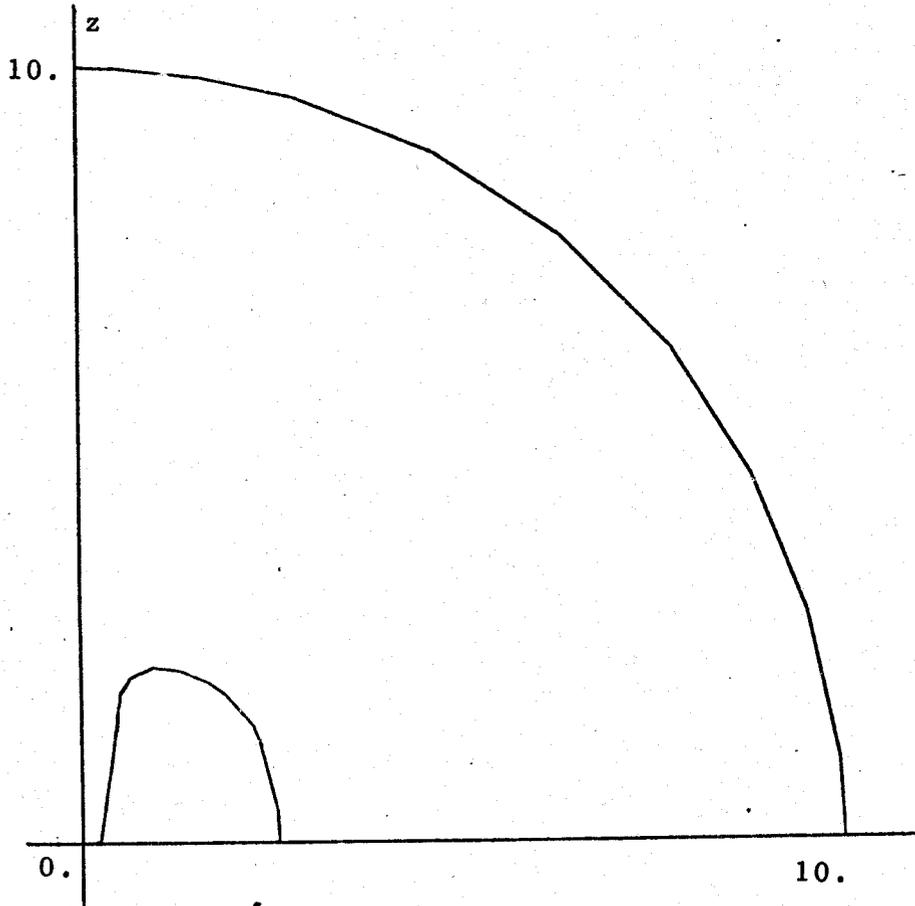


Fig. RV.3

de los problemas

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda(u - Wr + k)_+ , \quad x = (r, z) \in \Omega^{(1)} , \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma^{(1)} \equiv \partial\Omega^{(1)} , \\ \int_{\Omega^{(1)}} |\nabla u|^2 = \eta , \end{array} \right.$$

donde

$$a = 10, \quad \eta = 10$$

y W toma los valores

$$-0.6 + 0.1k, \quad k = 0, 1, \dots, 11.$$

Puede observarse que la estructura de la región

$$(2.5) \quad A = \{x \mid x = (r, z) \in \Omega^{(1)}; \quad u(x) - Wr + k > 0\}$$

es antisimétrica respecto de los valores de W con relación al eje $z=0$, y la explicación de este fenómeno reside en el hecho de que el cambio de variable $r' = a - r$ conduce a pares de problemas idénticos para pares de valores W y $-W$. Para $W=0$, el anillo-vórtice es simétrico respecto de ambos ejes (y esto corrobora un reciente resultado análogo obtenido para el problema continuo).

Las distintas experiencias realizadas indican que estas propiedades no dependen de los valores de los parámetros λ , η , ni del valor de a . Así, para el estudio del problema no acotado (cf. BERESTYCKI-FERNANDEZ CARA-GLOWINSKI [10], BERESTYCKI-LIONS [11]) Obtenemos ciertas indicaciones de interés; en concreto, dado que la región de vorticidad no se encuentra acotada en Π independientemente del valor de a para $W \leq 0$, com-

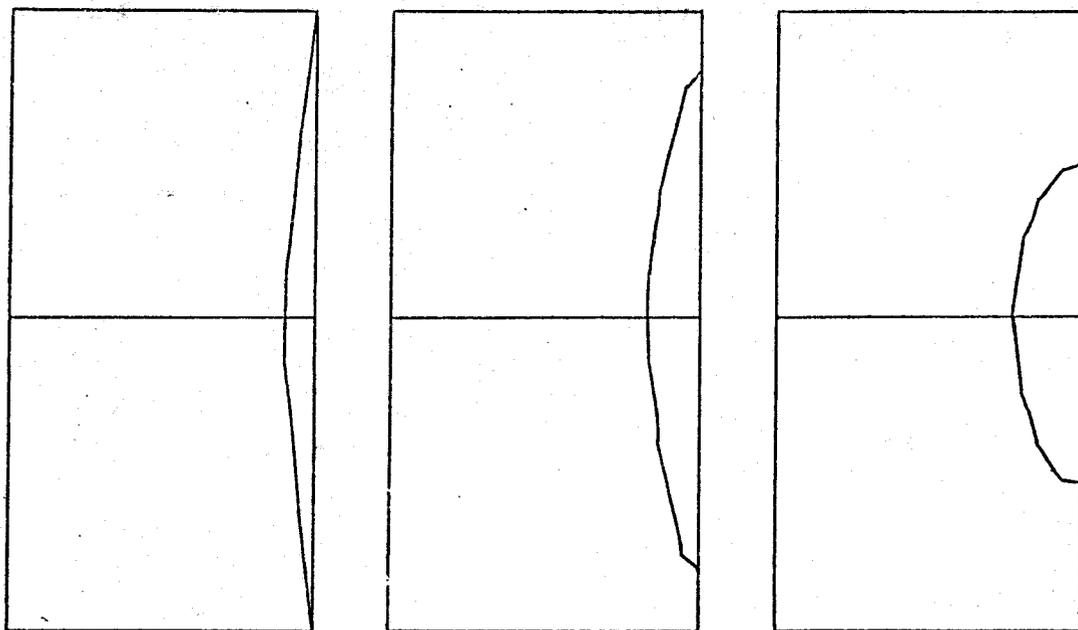


Fig. RV.4

probamos la no existencia de soluciones del problema (1.8) del Cap.I para valores no positivos de la velocidad, deducida en [11] (cf. también ESTEBAN [24]). Para más detalles, cf. [10] y [27] .

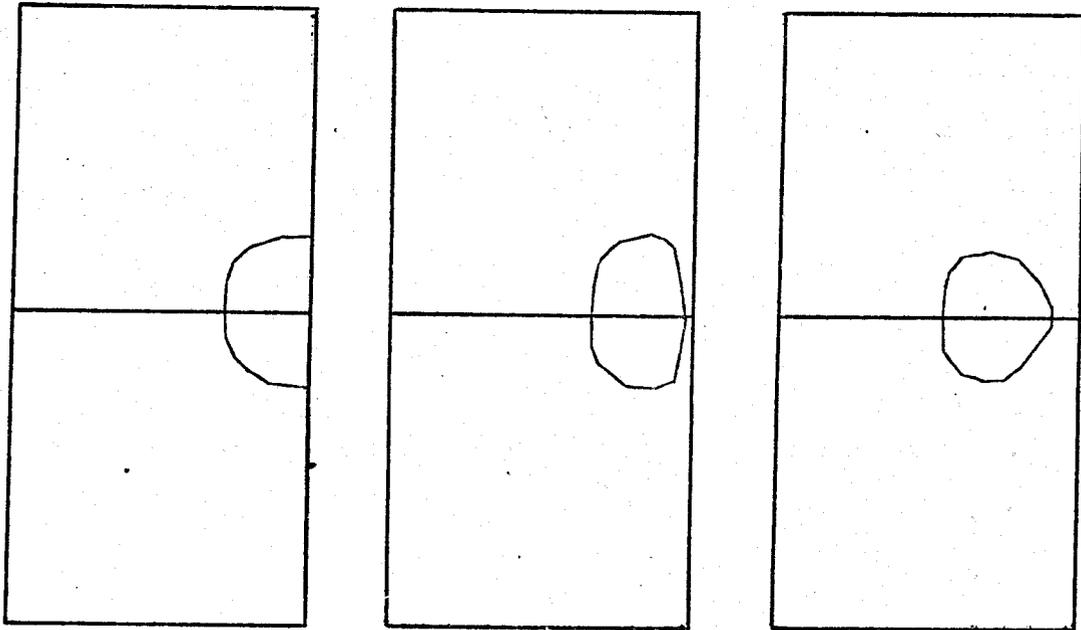


Fig. RV.5

Los diferentes valores obtenidos para el parámetro k son (con precisión 10^{-5}) los siguientes:

W	k
-0.6	5.2983
-0.5	4.7125
-0.4	3.8641
-0.3	2.9845
-0.2	2.1981
-0.1	1.4565
0.	0.8589
0.1	0.4564
0.2	0.1981
0.3	-0.0201
0.4	-0.1539
0.5	-0.2875

En las Fig. RV.8 a RV.11 presentamos las "semiregiones de vorticidad" asociadas a las soluciones aproximadas

de los problemas (2.2), donde $a=100$, $\eta=1000$, $\lambda=2$, y W (fijo) toma los valores 3.2, 3.225, 3.25 y 3.29305. Para este último valor de W , tenemos

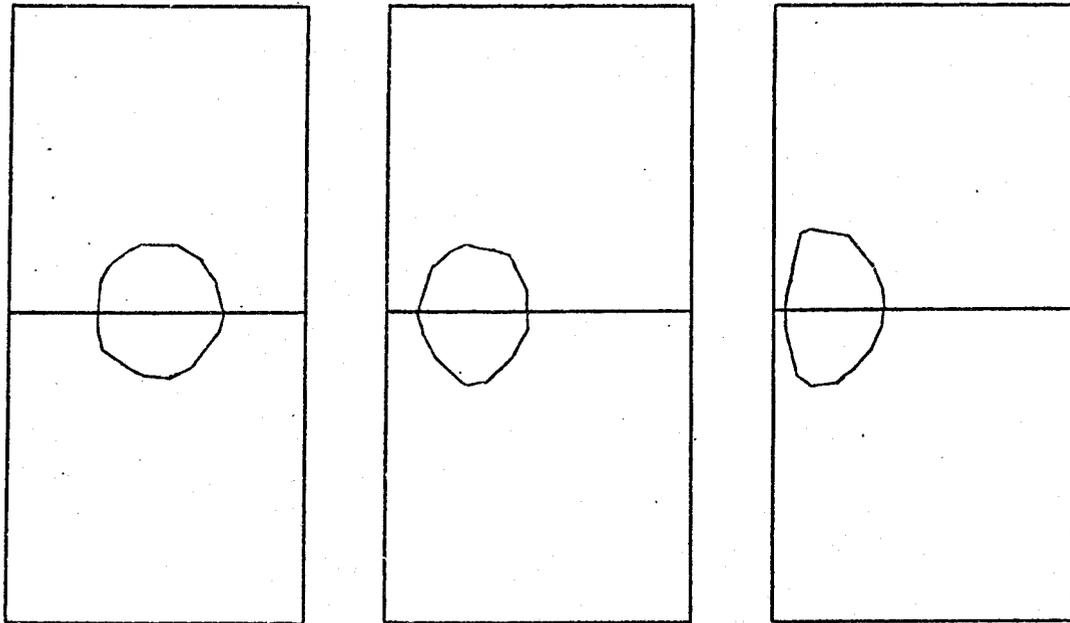


Fig. RV.6

$$\eta \approx 2\pi \cdot W^2 \cdot \alpha^2,$$

donde $\alpha=3.831\dots$ es el primer cero de la Función de BESSEL $J_1(x)$ de primera clase (cf. NORBURY [46]), y el valor correspondiente de k es prácticamente $=0$. De esta forma, obtenemos una "buena" aproximación del vórtice cilíndrico de HILL. Los cálculos se hicieron con triángulos de diámetro máximo ≤ 1.5 , 0.5 y 0.2 en un entorno de la región de vorticidad, con elementos finitos de tipo P_1 , P_1 y P_2 respectivamente, y una precisión de 10^{-6} . La convergencia fue obtenida tra N_i iteraciones del algoritmo (A1), $6 \leq N_i \leq 9$, considerablemente acelerada introduciendo un parámetro de suprarrelajación $\omega=1.11$.

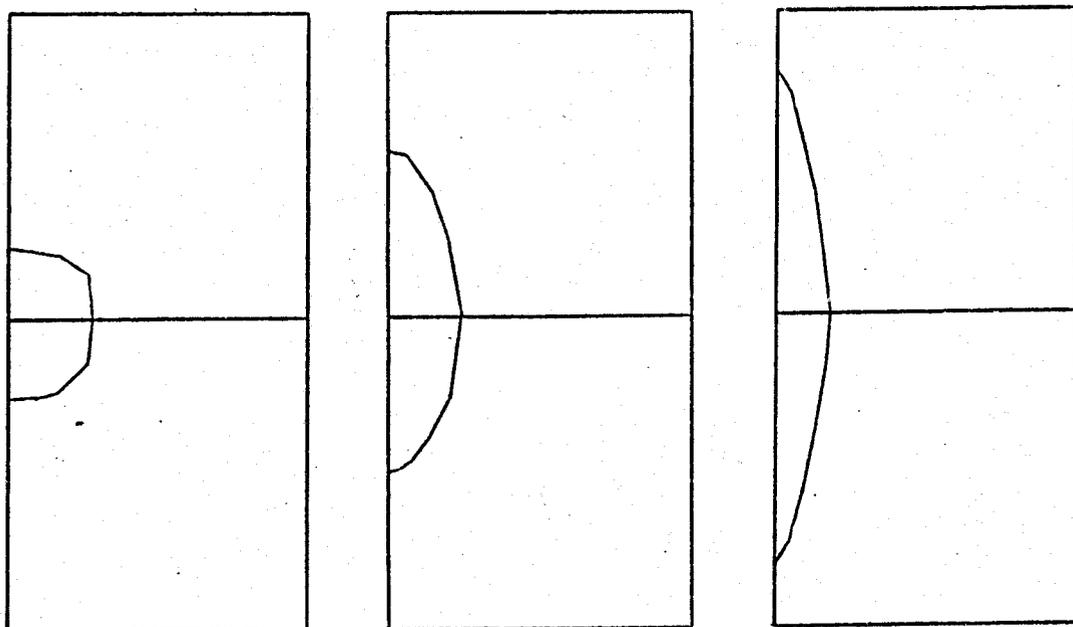


Fig. RV.7

Finalmente, en las Fig. RV.12 a RV.15 presentamos las semiregiones asociadas a las soluciones aproximadas de los problemas (2.1), donde $a=50$, $\eta=1000$, $\lambda=2$ y W toma los valores 3.8, 3.82, 3.822 y 3.84516. Para este último tenemos de nuevo $k \approx 0$. Las triangulaciones utilizadas poseían diámetro máximo ≤ 1.5 y 0.5 en un entorno de las regiones de vorticidad, la precisión fue de 10^{-6} , y la convergencia se obtuvo tras N_i iteraciones del algoritmo (A1), $5 \leq N_i \leq 10$, mejorada al introducir el parámetro de suprarrelajación $\omega=1.07$. Empleamos en este caso elementos finitos de tipo P_1 .

Fig. RV. 8

(1) y (2): Elementos finitos de tipo P_1 .

(3): Elementos finitos de tipo P_2

$$W=3.2$$

$$k = \begin{cases} .21472 & (1) \\ .21471 & (2) \\ .21471 & (3) \end{cases}$$

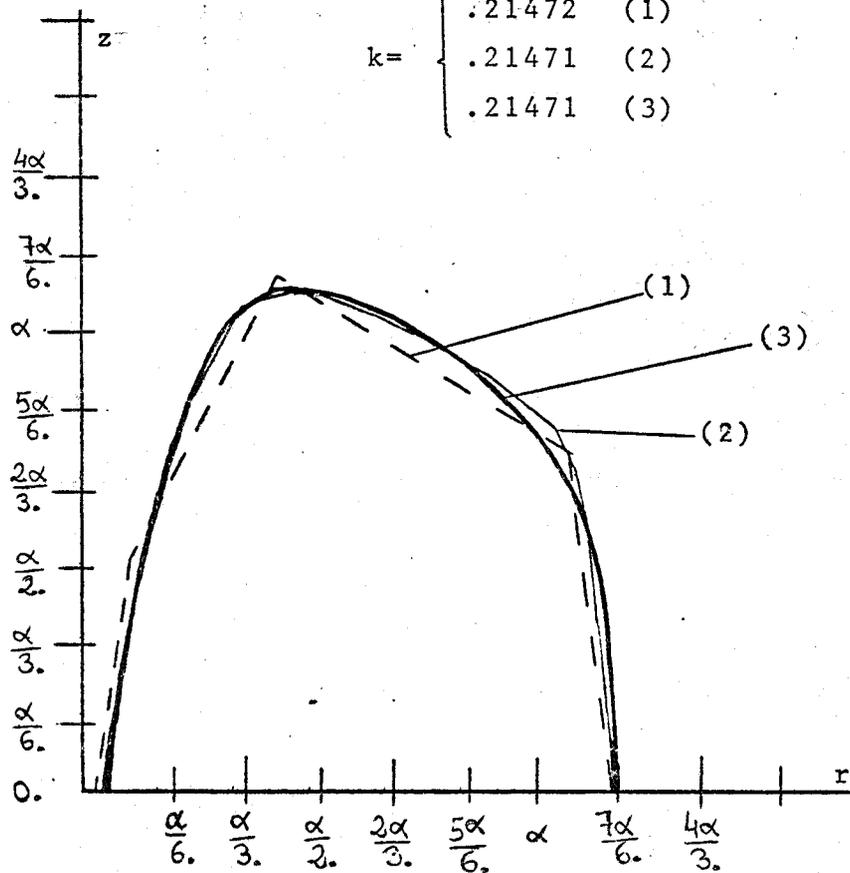
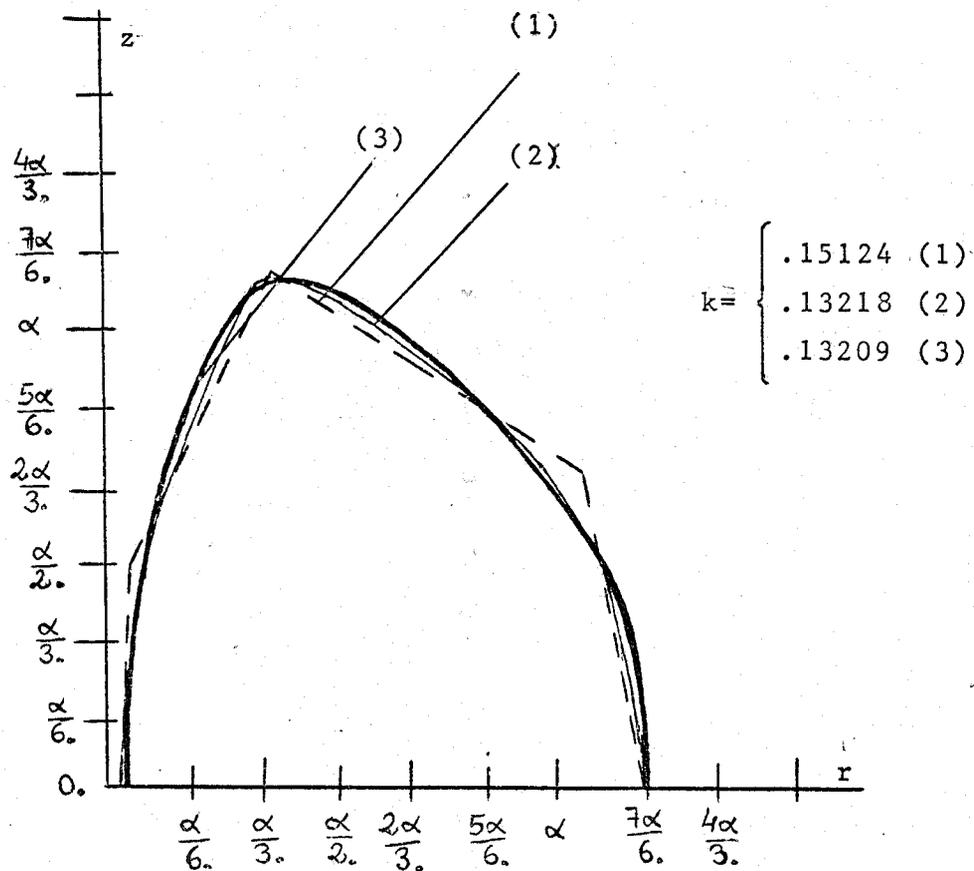


Fig. RV. 9

(1) y (2): Elementos finitos de tipo P_1

(3): Elementos finitos de tipo P_2

$$W=3.225$$



$$k = \begin{cases} .15124 & (1) \\ .13218 & (2) \\ .13209 & (3) \end{cases}$$

Fig. RV. 10

(1) y (2): Elementos finitos de tipo P_1

(3): Elementos finitos de tipo P_2

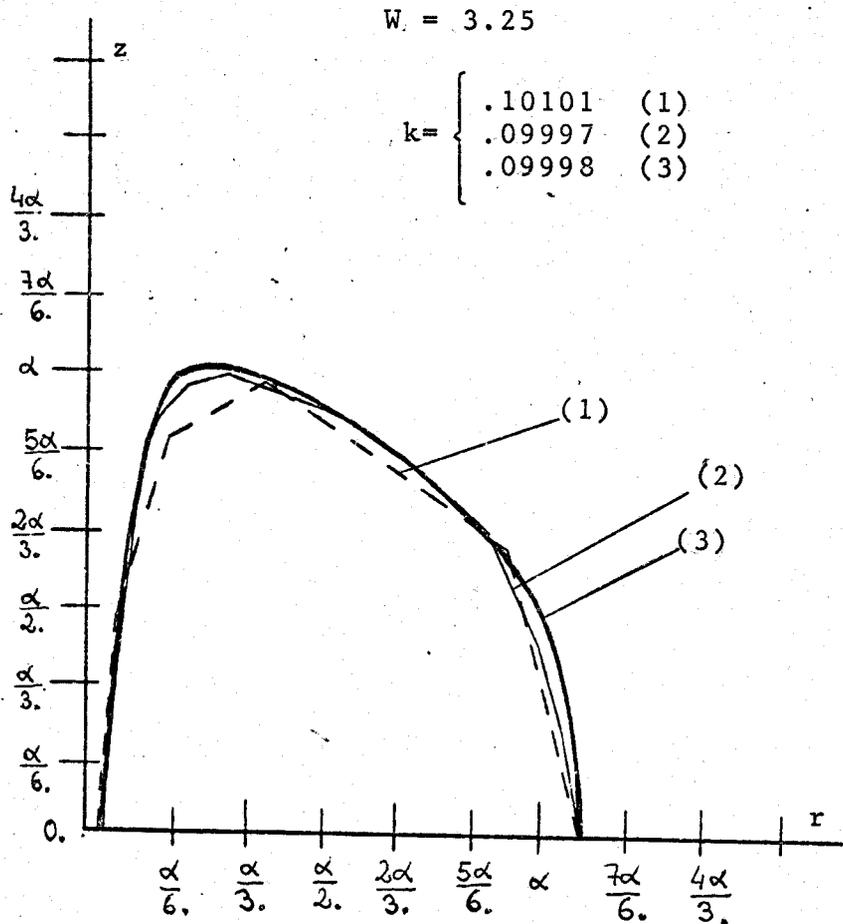
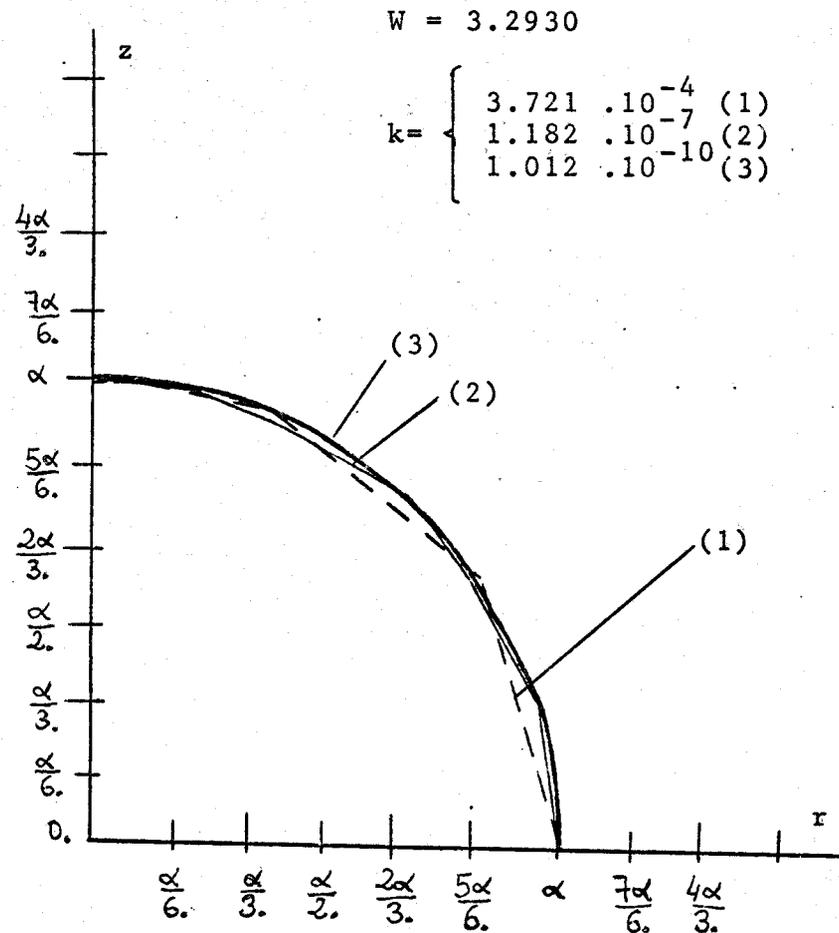


Fig. RV. 11

(1) y (2): Elementos finitos de tipo P_2

(3): Elementos finitos de tipo P_2



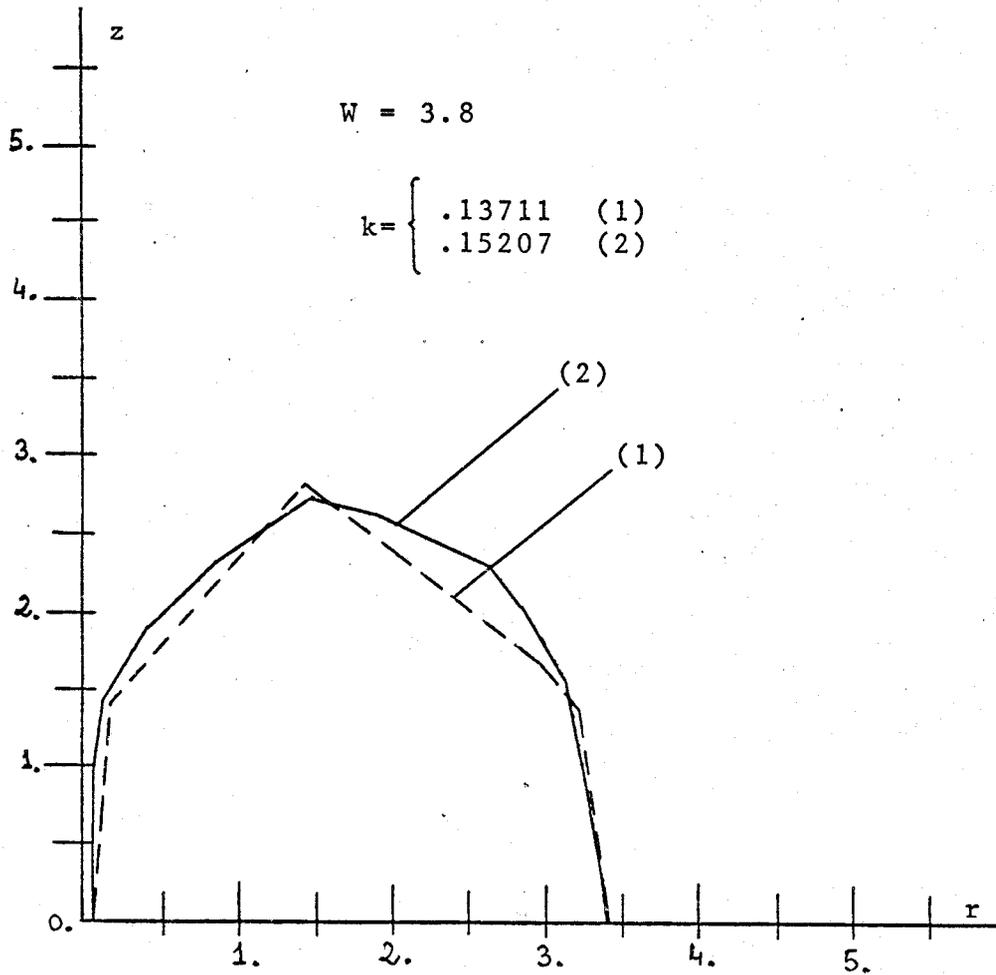


Fig. RV. 12

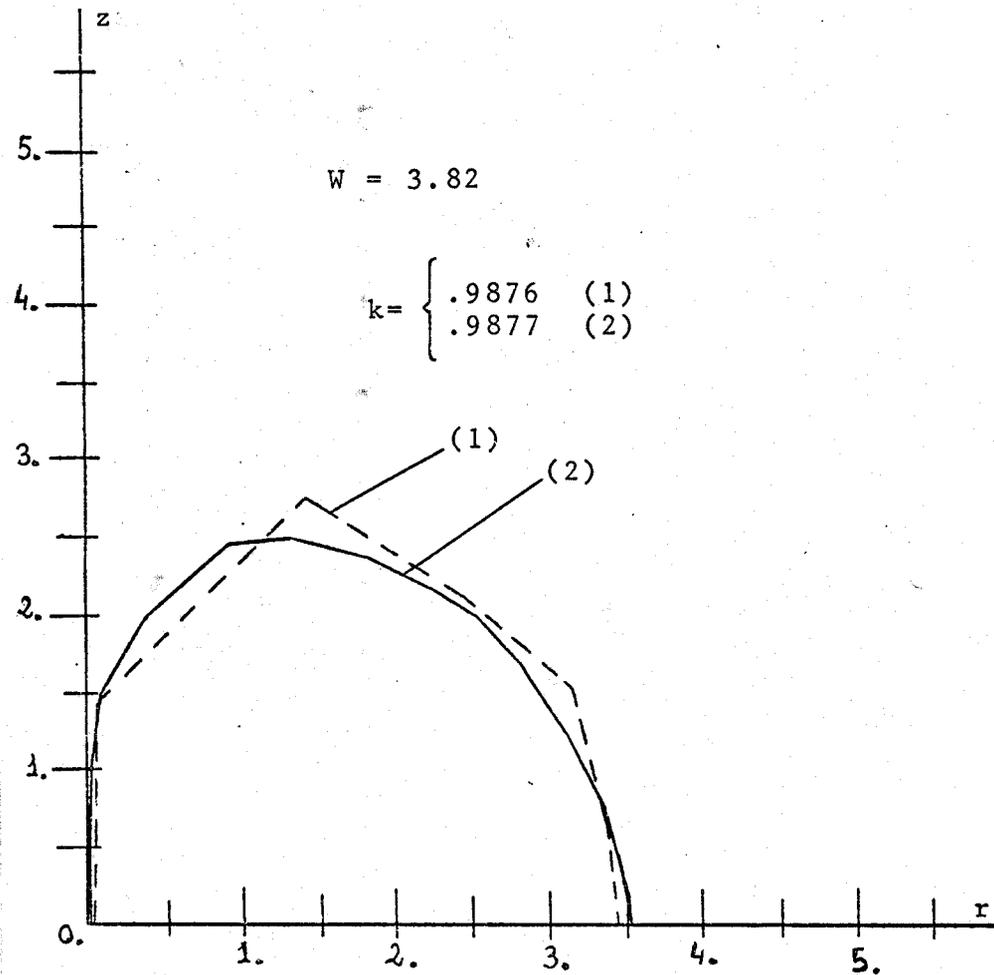


Fig. RV. 13

Fig. RV. 14

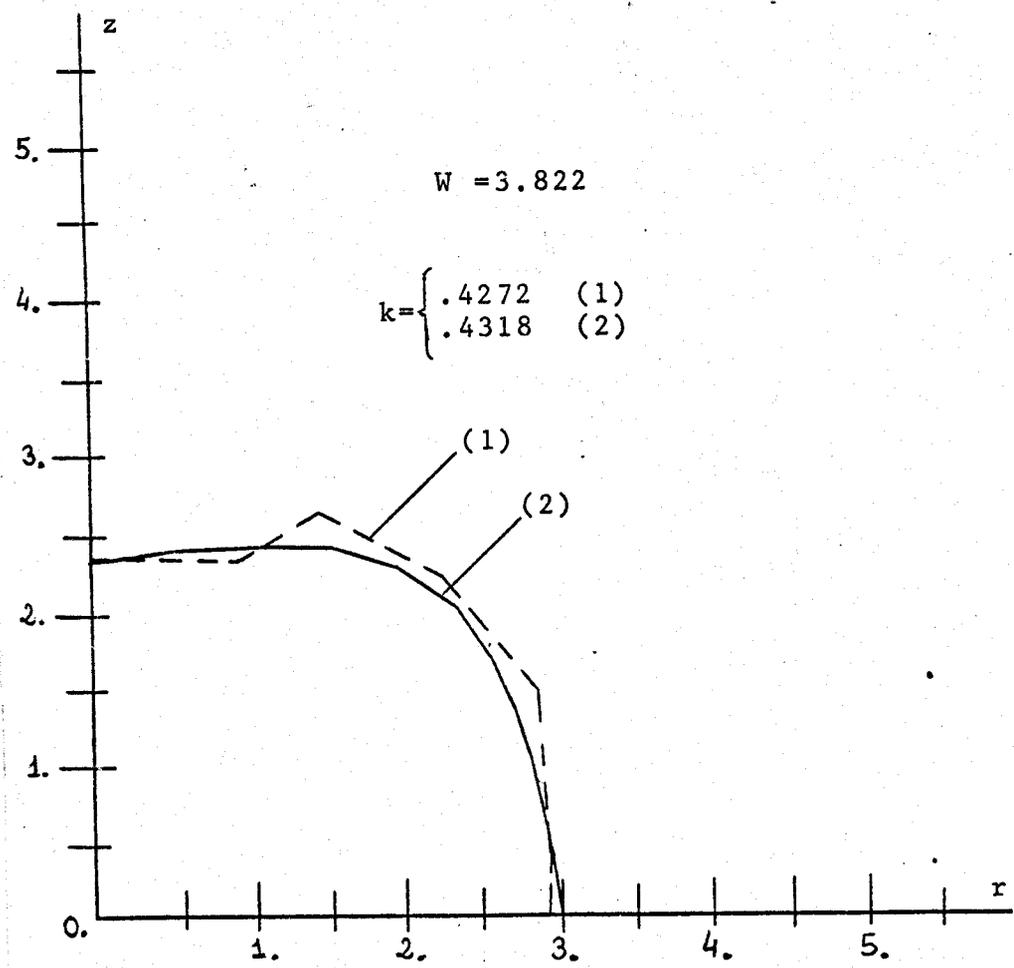
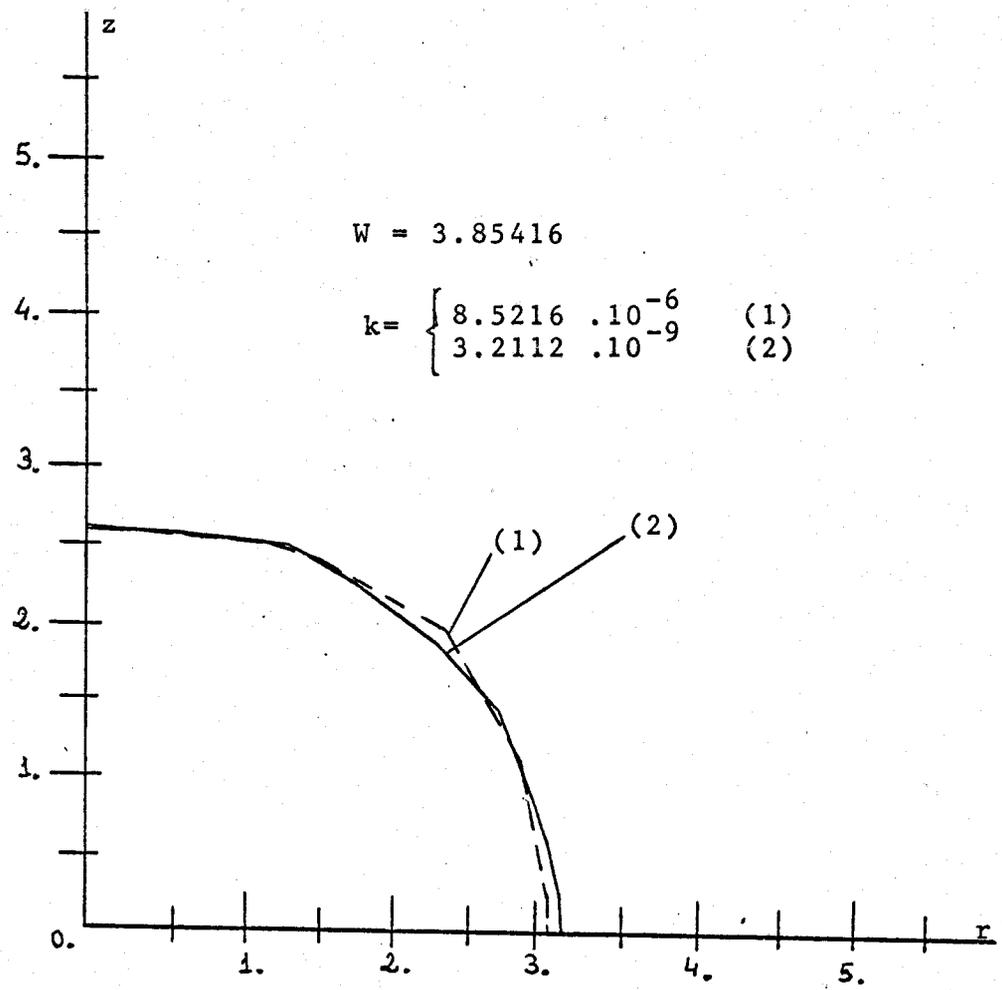


Fig. RV. 15



REFERENCIAS

- AGMON, S. ; DOUGLIS, A. y NIREMBERG, L. [1] "Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying general Boundary Conditions". Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), pp. 623-727.
- AMBROSETTI, A. y MANCINI, G. [2] "Remarks on some Free Boundary Problems", in "Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations", Berestycki, H. & Brézis, H. Ed. Aparecerá.
- AUCHMUTY, J.F.G. y BEALS, R. [3] "Variational Solutions of some Nonlinear Free Boundary Problems". Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (nº4) (1971), pp. 255-271.
- BENILAN, P. y BREZIS, H. [4] "Nonlinear Problems related to the Thomas-Fermi Equation". Aparecerá.
- BERESTYCKI, H. [5] "Certaines Questions liées à la Théorie des Tourbillons Stationnaires dans un Fluide Idéal". Thèse de Doctorat d'Etat, Université P. et M. Curie (Paris VI), Février 1980. Aparecerá en J. Math. Pures et Appl.
- BERESTYCKI, H. [6] "Some Free Boundary Problems in Plasma Physics and Fluid Mechanics". Aparecerá
- BERESTYCKI, H. [7] Aparecerá.
- BERESTYCKI, H. y BREZIS, H. [8] "Sur Certains Problèmes de Frontière Libre". Comptes Rendues Ac. Sc. Paris, série A, 283 (1976), pp. 1091-1094.

- BERESTYCKI, H. y BREZIS, H. [9] "On a Free Boundary Problem arising in Plasma Physics". Nonlinear Anal., T.M.A. Aparecerá. Véase también [5] .
- BERESTYCKI, H.; FERNANDEZ CARA, E. y GLOWINSKI, R. [10] "A Numerical Study of some Questions in Vortex Rings Theory". Aparecerá.
- BERESTYCKI, H. y LIONS, P.L. [11] "Nonlinear Scalar Field Equations". Aparecerá.
- BERGER, M.S. [12] "Nonlinearity and Functional Analysis". Academic Press, New York, 1977.
- BOURBAKI, N. [13] "Eléments de Mathématiques. Livre VI Intégration". Act. Sc. Hermann.
- CAFFARELLI, L. y FRIEDMAN, A. [14] "The Shape of Axisymmetric Rotating Fluids". Aparecerá.
- CEA, J. [15] "Optimisation: Théorie et Algorithmes". Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- CIARLET, Ph. [16] "The Finite Element Method for Elliptic Problems". North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- CIARLET, Ph. y RAVIART, Ph. [17] "General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with Applications to Finite Elements Methods". Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), pp. 177-199.
- COLLATZ, L. [18] "Functional Analysis and Numerical Mathematics". Academic Press, New York, 1965.

- CROUZEIX, M. y THOMAS, J.M. [19] "Eléments Finis et Problèmes Elliptiques Dégénérés". RAIRO. Décembre 1973, R-3, pp. 77-104.
- DAMLAMIAM, A. [20] "Application de la Dualité non-Convexe à un Problème non-Linéaire à Frontière Libre (Equilibre d'un Plasma Confiné)". Comptes Rendues Ac. Sc. Paris, Série A, 286 (1978), pp. 153-155.
- DAMLAMIAM, A. y PUEL, J.P. [21]. Aparecerá.
- DONNELLY, R.J. y ROBERTS, P.H. [22] "Stochastic Theory of the Nucleation of Quantized Vortices in Superfluid Helium". Philos. Trans. Roy. Soc. London A 271 (1971), pp. 41-100.
- DYSON, F.W. [23] "The Potential of an Anchor Ring", part II. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 184 (1893), pp. 401-1106.
- ESTEBAN, M.J. [24] Thèse de Doctorat de 3^{ème} Cycle. Université P. et M. Curie (Paris VI), Mars 1981.
- FERNANDEZ CARA, E. [25] "Ciertos Problemas Variacionales no Lineales", en "3^{er} Congreso en Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones". Santiago de Compostela, Junio 1980.
- FERNANDEZ CARA, E. [26] "Méthodes Numériques pour des Problèmes non-Linéaires apparaissant dans la Théorie des Tourbillons Stationnaires d'un Fluide Idéal". Rapport de Recherche INRIA n° 39, Octobre 1980.
- FERNANDEZ CARA, E. [27] Thèse de Doctorat de 3^{ème} Cycle. Université P. et M. Curie (Paris VI). Aparecerá.

- FERNANDEZ CARA, E. y GLOWINSKI, R. [28] "Numerical Analysis of Vortex Ring Problems", in "4th International Conference on Numerical Analysis of the Netherlands, Wondeschoten (Austerlitz-Zeist), September-October 1980.
- FEYNMAN, R.P. [29] "Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium". in "Progress in Low Temperature Physics". (ed. by C.J. Gorter). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1955.
- FRAENKEL, L.E. [30] "On Steady Vortex Rings of small Cross-Section in an Ideal Fluid". Proc. Roy. Soc. London, A 316 (1970), pp. 29-62.
- FRAENKEL, L.E. [31] "Examples of Steady Vortex Rings of small Cross-Section in an Ideal Fluid". J. Fluid Mech. 51 (1972), pp. 119-135.
- FRAENKEL, L.E. y BERGER, M.S. [32] "A Global Theory on Steady Vortex Rings in an Ideal Fluid". Acta Math. 132 (1974), pp. 14-51.
- GUIDAS, B.; NI, WEI-MING y NIREMBERG, L. [33] "Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle". Comm. Math. Phys. 68 (1979), pp. 209-243.
- HELMHOLTZ, H. [34] "Über Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen, Welche den Wirbelbewegungen Entsprechen". J. Reine Angew. Math. 55 (1858), pp. 25-55.
- HICKS, W.M. [35] "Researches on Theory of Vortex Rings", part II Philos. Trans. Roy. Soc. London, A 176 (1885), pp. 725-780.

- HILL, M.J.M. [36] "On a Spherical Vortex". Philos. Trans. Roy. Soc. London, A 185 (1894), pp. 213-245.
- KONDRACHOFF, V.I. [37] "Sur Certaines Proprietés des Fonctions de l'Espace L^p ". Doklay Akad. Nauk. 48 (1945), pp. 563-566.
- LANG, S. [38] "Real Analysis". Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading (Massachusetts), 1973.
- LICHTENSTEIN, L. [39] "Über Einige Existenzprobleme der Hydrodynamik". Math. Z. 23 (1925), pp. 89-154.
- LIONS, P.L. [40] "Minimization Problems in $L^1(\mathbb{R}^3)$ and Applications to Free Boundary Problems". Aparecerá.
- LIONS, P.L. [41] "Minimization Problems in $L^1(\mathbb{R}^3)$ ". Aparecerá.
- LITTMAN, W. [42] "Generalized Subharmonic Functions: Monotonic, Approximations and an Improved Maximum Principle Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 17 (1963), pp. 207-222.
- MERCIER, C. [43] "The Magnetohydrodynamic Approach to the Problem of the Plasma Confinement in Closed Magnetic Configurations". EURATOM-CEA, Comm. of the European Communities, Luxembourg 1974 (Report EUR 5127/1e).
- NORBURY, J. [44] "A Steady Vortex Ring close to Hill's Spherical Vortex". Proc. Cambridge Philos. Soc. 72 (1972), pp. 253-284.
- NORBURY, J. [45] "A Family of Steady Vortex Rings". J. Fluid Mech. 57 (1973), pp. 417-431.
- NORBURY, J. [46] "Steady Plasmar Vortex Pairs in an Ideal Fluid". Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), pp. 679-700.

- ORTEGA, J. [47] "The Newton-Kantorovitch Theorem". Amer. Math. Monthly 75 (1968), pp. 658-660.
- POLAK, E. [48] "Computational Methods in Optimization (A Unified Approach)". Academic Press, New York, 1970.
- POLYA, G. y SZEGÖ, G. [49] "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics". Princeton University Press, 1971.
- PROTTER, M.H. y WEINBERGER, H.F. [50] "Maximum Principles in Differential Equations". Prentice-Hall, 1967.
- PUEL, J.P. [51] "Sur un Problème de Valeur Prope non-Linéaire et de Frontière Libre". Comptes Rendues Ac. Sc. Paris, Série A, 284 (1977), pp. 861-863.
- RUAS, V. [52] Comunicación Personal, INRIA, Rocquencourt 1980. Véase también: "On the Strong Maximum Principle for Some Piecewise Linear Finite Element Approximate Problems of Non-Positive Type". Rapport de Recherche INRIA n° 43, Novembre 1980.
- SCHAEFFER, D.G. [53] "Non-uniqueness in the Equilibrium Shape of a Confined Plasma". Comm. Part. Diff. Eq. 2 (6) (1977) pp. 587-600.
- SERMANGE, M. [54] "Etude Numérique des Bifurcations et de la Stabilité des Solutions des Equations de Grad-Shafranov", in "Computing Methods in Applied Sciences and Engineering", Glowinski, R. & Lions, J.L. editors. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

- SHAFRANOV, V.D. [55] "On Magneto-Hydrodynamical Equilibrium Configurations". Soviet Physics, J.E. J.E.T.P. 6 (n°3) (1958), pp. 545-554.
- STAMPACCHIA, G. [56] "Equations Elliptiques du 2nd Ordre à Coefficients Discontinus". Les Presses de l'Université de Montreal, Séminaire de Math. , Eté 1965.
- TAIT, P.G. [57] "Scientific Papers", vol.I. Cambridge, 1898.
- TEMAM, R. [58] "A Nonlinear Eigenvalue Problem: The Shape at Equilibrium of a Confined Plasma". Arch. Rat. Mech. Anal. 60 (1975), pp. 51-73.
- TEMAM, R. [59] "Remarks on a Free Boundary Value Problem arising in Plasma Physics". Comm. Part. Diff. Eq. 2 (6) (1977), pp. 563-585.
- THOMSON, W. [60] (BARON KELVIN) "Mathematical and Physical Papers", vol. IV. Cambridge, 1910.
- VARGA, R. [61] "Matrix Iterative Analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- YOSIDA, K. [62] "Functional Analysis". Springer-Verlag, Berlin 1971.

INDICE

CAPITULO I.: Introducción. El problema Físico y su modelización matemática.	
1-Motivación física	2
(1.1) Descripción de las ecuaciones.	
(1.2) Desarrollo histórico del problema	
2-Interés del problema	19
3-Conceptos previos	21
CAPITULO II.: Resultados de existencia, regularidad, monotónia regularización.	
1-Formulación de los problemas. Existencia de soluciones	29
(1.1) El problema continuo	
(1.2) El problema discreto	
(1.3) Apéndice a la Sección 1	
2-Diferenciabilidad	46
(2.1) El caso continuo	
(2.2) El caso discreto	
3-Monotonía	57
4-Algunos ejemplos típicos	61
(4.1) El caso $g(x,s)=\lambda(s-t(x))_+$	
(4.2) El caso límite (función de Heaviside).	
CAPITULO III.: Resultados de convergencia y compatibilidad.	
1-Resultados de convergencia	67
(1.1) Esquemas generales	
(1.2) Esquemas en elementos finitos para problemas	

de vórtices estacionarios axisimétricos.

2-Una aplicación del Teorema de Newton-Kantorovitch al caso de las soluciones aisladas	87
3-La monotonía del operador A_h^{-1}	97

CAPITULO IV.: Experiencias numéricas

1-Descripción de los algoritmos	104
(1.1)Esquemas "naturales"	
(1.2)Esquemas "mínimos cuadrados"	
(1.3)Esquemas monótonos	
(1.4)Algoritmo de Newton-Kantorovitch	
2-Cálculos	112
REFERENCIAS	127

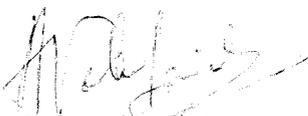
UNIVERSIDAD DE S. J. LA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal decretado por sus abajo firmantes
en el día de la fecha, y a juzgar de la obra de
D. Enrique Fernández Para
titulada "Contribución al estudio numérico
de problemas de vórtices estacionarios"

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "Cum
Laude"

Sevilla 11 de Julio de 1981

El Vocal,



El Presidente,



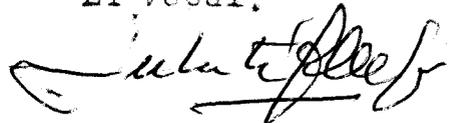
El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Vocal,

