$[w]_{A_1}^2$

Carmen María Ortiz Caraballo

CONMUTADORES de INTEGRALES SINGULARES y PESOS A_1

Junio de 2011

$M_{L\log L}f$ $M_{L\log L}f$ $M_{L\log L}f$ $M_{L\log L}f$ $M_{L\log L}f$ $M_{L\log L}f$

M^2f M^2f M^2f M^2f M^2f M^2f M^2f M^2f M^2f

$[b,T]f$ $[b,T]f$ $[b,T]f$ $[b,T]f$ $[b,T]f$ $[b,T]f$ $[b,T]f$

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Conmutadores de integrales singulares y pesos A_1

Carmen María Ortiz Caraballo

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Conmutadores de integrales singulares y pesos A_1

Memoria presentada por
Carmen María Ortiz Caraballo
para optar al grado de
Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

Fdo. Carmen María Ortiz Caraballo

V$^{\underline{o}}$. B$^{\underline{o}}$.: Director del trabajo

Fdo. Dr. D. Carlos Pérez Moreno
Catedrático de Universidad del Departamento
de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, junio de 2011

A ti, mamá, y a ti, papá.

A ti, Sergi.

Índice general

Agradecimientos

Ahora que esta larga etapa de mi vida termina, quiero pararme y mirar hacia atrás una vez más. Es bueno eso de pararse en esta vida loca y vertiginosa. ¡Qué de años!, ¡qué de lugares!, ¡qué de lágrimas y sonrisas! ¿Cómo poder resumir todo esto en unas cuantas frases de agradecimientos? Imposible para mí. Porque esta tesis que aquí presento, no sólo es producto de mi trabajo y esfuerzo. Es también fruto de vuestra paciencia, amistad, cariño, amor, abrazos, sonrisas, buenos ratos y otros no tan buenos, y tantas otras cosas...

Ahora que por fin he conseguido llegar hasta aquí, miro hacia atrás, sí, pero también miro a mi alrededor y, ¡sois tantos los que me habéis ayudado a conseguirlo! Podría acabar con un "Gracias a todos" y que cada uno de vosotros se sintiera reflejado en esta frase, pero entonces no sería yo misma, ¿verdad? Esto es lo mismo que me pasa cuando me voy lejos (bueno, siempre estoy lejos para alguien) y quiero dar señales de vida y escribo un correo multitudinario, o como cuando quiero preparar una cena o merendola en casa y nunca sé dónde cortar la lista de convocados. Pero hay algo que siempre ocurre: nunca sobra nadie, y aquí tampoco. Cada persona que aparece es por algo. Por algo que me ayudó a seguir adelante y a no desfallecer.

En primer lugar, quiero darte las gracias a ti, Carlos. Primero fueron las matemáticas, y luego la amistad a base de cafés, y después y durante, las mates también. Recuerdo el nudo que tenía en el estómago la primera vez que te expliqué alguna cuentita que me habías pedido pensar. ¡Tantos años haciendo cuentas y qué miedo tenía! Pero poco a poco me fui adaptando y aprendiendo a hacerte mis preguntas y plantearte mis dudas. ¡Cuánto me has enseñado, Carlos! ¡Cuánto me enseñas! Es un honor para mí que seas el director de mi tesis. Y aprender de ti. Y reirme contigo también. Contarte cosas y que me cuentes tú. Eso es un amigo, así lo siento. Te quiero mucho.

Gracias a ti también, Rodrigo. Gracias porque en aquel congreso en Sevilla me agarraste de la mano y me convenciste de volver al “fourier”. Ya entonces eras mi amigo y te preocupabas por mí. Contigo primero llegó la amistad y después las matemáticas. Es algo que no olvidaré nunca. Tuviste la paciencia que yo necesitaba que tuvieras y me demostraste que la generosidad es algo inherente a ti. Y después, tiempos duros y complicados. Pero siempre aparecía una llamada de teléfono desde las islas y mi sonrisa volvía, y mis ganas de seguir adelante. Aunque a veces haya desencuentros, te quiero y lo sabes, Rodrigo.

Por supuesto, quiero agradecerte a ti Javi, que me dieras la primera oportunidad. Sin ella, hoy no estaría aquí y, aunque el camino ha sido duro y con muchas vueltas, ha merecido la pena. Y volvería a repetirlo. Gracias por aquellos años, por esos primeros pasos que di de tu mano entre maximales, reordenamientos y nuestro operador de Hardy.

Gracias Critina (Pereyra) por tu ayuda inmensa con los detalles del capítulo IV. Tus críticas acertadísimas me ayudaron a entenderlo aún mejor. Gracias por ser tan detallista y tan amable y encantadora.

Iraide y a ti, ¿qué puedo decirte? ¿Cómo resumir en unas pocas palabras lo que eres para mí? A veces el lenguaje se queda corto y no existen las palabras para definir emociones y sentimientos. Y contigo me ocurre. Gracias por ser mi amiga del alma. El saber que existes y que estás es suficiente para mí para no sentirme perdida. ¡Qué especial es para mí que, pese a que estemos tan lejos, sigas estando tan cerquita de mi corazón! Gracias por ser tú y por estar ahí. Sea lo que sea que signifique ese ahí en cada momento. Cruzarte la península para ir a verme y pasar unas horas conmigo, mantener una conversación de una hora por teléfono si es necesaria o si simplemente es para charlar y reirnos. Te quiero...muchísimo. Y has traído a mi vida a tus padres y a tu hermana, y a Tony y a mi Aimartxo, y al que venga en camino y, bueno, con ellos me has dado a mi familia de Bilbao. ¿Qué más puede darse? Gracias Iraide por ser uno de los fundamentos de mi vida.

Y tú Pablo eres otro de ellos. Gracias por hacerte mi amigo durmiendo a mi lado ... en el autobús y que en esos sueños en los que soñaba con un buen amigo de verdad, fuéramos forjando esta amistad que va mucho más allá de la amistad. ¡Cómo te quiero, Pablo! Esa voz que consigue que me levante cuando estoy caída, esas palabras que hacen que me ría desde el alma, con lo difícil que es eso. Saber que te tengo a mi lado es tan bonito y gratificante...y ¡tan divertido! Durante muchísimos años de mi vida quise tener un hermano mayor y lo encontré en ti. Aquel día hace tantos años en el que tu madre me dijo: “Es que Pablo no podría quererte más si fueses su hermana” pensé que la vida me había dado el regalo que quise durante mucho tiempo. Me había dado a mi “hermano mayor”. Mi vida no sería la que es si tú no estuvieses en ella. Gracias desde lo más profundo de mi alma. Y gracias a ti Marieta, por ser tan buena y generosa, por hacerte mi amiga a través de Pablo. Y sentirte tan cerquita en tantos momentos. Gracias por que te guste agarrar un coche y hacer mil kilómetros para verme unos días, y compartir a Pablo conmigo. Y por abrirme las puertas de tu casa y de tu vida. Te quiero.

Gracias a ti, MC querida. Gracias Mari Cruz por aquellos años de manzanas en el banco del pasillo, por tener un ratito siempre para mi. Por ser mi amiga en tantos momentos. Por acompañarme en aquel viaje que tenía que hacer y que nunca olvidaré. Tú estabas allí para darme la mano, siempre. Gracias por tantas risas y sonrisas cómplices. Aunque ahora estemos lejos, para mí siempre estás cerca. Muchas noches cuando cierro los ojos vienes a mi mente, y siempre sonrío. Sé que volveremos a encontrarnos, y sé que te miraré a los ojos y te sonreiré y me sonreirás. Y volveremos a ser MC & CM, porque de hecho, para mí no hemos dejado de serlo.

Gracias a todas vosotras, Ana Belén, Ana, Verónica, María, Mireia. Sois mi referencia junto a Iraide de aquellos primeros años en los que íbamos y veníamos de la facultad a casa, de tantos cafés, y quedadas para estudiar en aquellos fines de semana de estudio y risas. Y lo mejor es que aún estáis ahí. Y vuestros chicos y vuestros niños. Mi preciosa familia de matemáticas. Y junto a vosotras Inma, Itziar y Leire que aparecieron después, en mis años de becas y contratos de sustitución. Gracias porque entre todas vosotras soy feliz. cada vez que os veo la sonrisa aparece, y me siento querida y aceptada. ¡Cuántas cosas vividas! Muchas buenas, pero también algunas muy duras. Y estabais ahí. Daba igual que se tratara de una comida en un txoko que para hacer de detectives...gracias por todo.

Y después me fui a Cáceres, y allí me encontré con todos vosotros, cada uno de su padre y de su madre, pero que poco a poco se convirtió en una familia. Mi familia de Cáceres, que la tengo. Porque os tengo a vosotros: Valentín y Silvia, Carlos y Yolanda, y vuestros chiquitines, mis sobrinitos “pegados” a los que adoro y con los que paso tantos buenos ratos. Gracias por vuestras palabras de apoyo cada vez que las he necesitado, gracias por hacerme sentir en casa en vuestras casas, gracias por acogerme y cobijarme tantas veces. Gracias porque, en momentos duros siempre había alguno de vosotros a mi lado. Y junto a vosotros, Carmen y Juan Carlos, Rosa y Fernando, Félix y Marisa. Siempre con vuestras puertas abiertas y dispuestos a ayudarme en lo que he necesitado. Carmen preciosa, ¡qué buenos ratos en la Madrila, junto a ti, Pablo Arias! Y en nuestro despacho riéndonos de mensajes anónimos. Nunca olvidaré que, juntos a vosotros dos comencé a sentirme en casa. A todos, gracias por venir a casa a cenar, o a comer o a merendar cada vez que os he convocado (¡con todo lo que me costó la primera vez!, ¿verdad?).

Gracias a ti, Mariquilla mía. Gracias María. Por aparecer aquel día en el comedor de la Escuela Politécnica con ese acento tan bonito tuyo que hizo que no pudiera resistirme a hablarte y a pensar que esa chica tan salada que al hablar me recordaba tanto a mi madre iba a merecer la pena. ¡Y tanto que la mereciste! Mi pareja de hecho y cohecho, ¿verdad? Gracias por entenderme tan bien y participar con tanto empeño en mi teoría de los momentillos. ¿Qué seríamos tú y yo sin esos momentillos? ¿Sabes? Mi corazón se calienta siempre cuando hablamos. Solo el ver tu nombre en mi móvil hace que ocurra. Te quiero.

Gracias a vosotros dos, Rosendo y Alberto. Gracias por ser mis amigos y compartir conmigo tantos momentos tan divertidos muchos, tan angustiosos algunos. Gracias por enseñarme esos lugares en los que se come tan bien (¿qué sería de nosotros sin Domingo y Teresa en “La Garza” y esas cerezas del Jerte?). Gracias por hacer de días difíciles, días alegres y entretenidos. Os quiero mucho a los dos. Sin uno ni otro, estos años no hubieran sido lo mismo. Os llevo en mi corazón allí donde voy. Y os echo de menos. Gracias siempre.

Gracias José Luis, mi amigo cántabro. Gracias por tu hospitalidad de aquel verano que nos salvaste, gracias por las risas compartidas, por los helados “Regma” y los sobaos “el Macho”. Gracias por esos correos que a veces llegan y me reconfortan. Tendremos muchos más ratos como los vividos, seguro.

Gracias Amaya, mi Amayuski, por hacerte mi amiga tendiendo la ropa. Gracias por esos preciosos domingos cacereños, comprando el periódico y paseando. Poniéndonos pegatinas por todas partes para ir a votar. Gracias por esas conversaciones de ahora en la distancia. Por quererme como soy y dejar que yo te quiera como eres. Gracias amiga.

Gracias a vosotros dos Manolo y Josefina. Por ser esos amigos tan sencillos y agradables, simpáticos y estupendos. ¡Cuánto os echo de menos ahora que estamos tan lejos! ¿Cuántas ganas de volver a veros y sentirme como en casa! ¡Qué fácil fue con vosotros! Os quiero mucho.

Gracias a ti, Chema. Por ayudarme tantas veces, por sonreirme y escucharme y tranquilizarme. Aunque acabaras antes, siempre que piense en mi tesis te recordaré como a un compañero de fatigas. Gracias por ayudarme tantas veces con el çhiquitín". Gracias por estar ahí para todo: para reir, divertirnos, trabajar...gracias.

Gracias también a ti, Antonio (Muñoz). Por hacerte mi amigo aunque éramos tan distintos, tanto que el día que te conocí me pusiste de los nervios. Y yo a ti. Y sin embargo lo superfluo se diluyó y lo fundamental permaneció. Hiciste que me sintiera contenta conmigo misma por primera vez en mucho tiempo. Y, aunque a ti también te tenga lejos, te siento cerquita muchas veces. Cuando creo que algo no es posible, pienso en ti y en mí y sé que será realidad aquello en lo que ande metida. Te quiero muchísimo.

Gracias a ti Miguel (Barrigón) por esos cafés matutinos y tempraneros en los que nos permitimos filosofar de cualquier cosa, y crecer como personas sólo con ello. Gracias por tus ánimos y por escucharme estos años.

Gracias Maria Antonieta por quererme y ayudarme cuando lo necesité. Y por ser mi amiga con tantos y tantos kilómetros de distancia entre tú y yo. Te quiero mucho.

Y gracias a ti Ana Belén (Jódar) por hacer que aunque ahora estemos lejos, cuando hablamos los kilómetros desaparecen y tu risa preciosa consigue hacerme reir. Gracias por creer en mí cuando yo no lo hacía.

Gracias Conrado por aparecer en aquella asignatura tan complicada. Gracias a ti fue más sencillo y divertido. Gracias por tanta ayuda y ánimos recibidos y convertirte en amigo. Gracias.

Gracias a mis compañeros de pasillo, escuela y departamento. Gracias a Inma (Torres), Juanlu, Javi (Carmona), Jose (Vaquero), Juan Antonio, Roberto, Álvaro, Julia, Mar (Pozo), Andrés y Mar (Ávila), Elena (Jurado), Juan (Hernández), Adolfo, Pilar (Bachiller), Pedro (Clemente), Pedro (Núñez), Luis (Landesa) José Antonio (García Muñoz), María Jesús (Rufo), Antonio (Pulgarín). Un café en la cafe de la escuela (gracias a ti también, Paco!!! Por tus cafés y tus conversaciones), una charla en un pasillo, una cervecita en alguna de esas “call for cañas”, una conversación seria sobre el futuro de nuestra universidad, las reuniones de GRADO, seguir “Perdidos” con cineforums, una excursión, un cine...todas esas cosas que, aunque pequeñas, hacen del día a día algo agradable y a veces, divertido. Gracias a todos.

Y gracias a aquellos que fueron los primeros en hablarme al llegar a Cáceres. Gracias a Mari Ángeles (Ledo), Puri y al resto de las chicas y chicos de secretaría, gracias a Manolo, Vale, Chose y al resto de los chicos de conserjería. Todos siempre dispuestos a echarme una mano.

Gracias a mis compañeros de departamento de Badajoz. Gracias a Carlos Benítez por ser el primero en abrirme los brazos tras aquella horrible reunión del consejo de departamento, y con ello, abrirme paso en él. Gracias a Germán y a Pepe (Trujillo). Por aguantarme aquellos años primeros, y gracias a Mari Ángeles (Mulero), por ser una buena amiga. Gracias a Diego, Mariano (Rodríguez-Arias), Manolo (Mota), Richard y Manolo (Molina). Gracias por sentirme compañera. Gracias por sonreirme y escucharme. Y gracias a ti, Jacinto (Martín). Recuerdo tantas veces aquella frase del comienzo, cuando aún estabas en Cáceres y me dijiste aquello de: “Extremadura se acostumbrará a ti antes que tú a Extremadura”...y con ella comencé a acostumbrarme y a querer a Extremadura, porque si esta maravillosa tierra tenía a personas como tú, sólo por eso ya merecía la pena.

Gracias a esos amigos argentinos (¿qué tendrá Argentina que tanto me atrae y tanto me gustan sus gentes?). Gracias a María Nidia y a Andrea, mis compis de piso en Corrientes, y a Rubén Cerutti, tan amables los tres conmigo aquellos días de muletas, mates y masillas. Gracias a Silvina, gracias a Oscar y a su encantadora familia. Argentinos que en Sevilla me trajeron mis recuerdos de más allá del océano.

Gracias a esa familia canaria que también tengo. Gracias a Juan Diego y a Marisa y a Irene y a Diego, y a Pili y al resto de los chicos de la Troya. ¡Qué felices fueron mis días laguneros! Siempre os llevo en mi recuerdo.

Gracias a vosotros Pep y Marta. Gracias por permitirme compaginar el trabajo con mi vida. Por hacerlo posible. Y por haceros mis amigos en el camino. Saber ya que cuando llego a Barcelona también llego a casa. Y gracias a vosotros Rosa, Albert, José Vicente y Jesús (Fernández). Maravillosos compañeros de mis días barceloneses. Gracias por hacer que el final de esta tesis haya sido tan agradable.

Gracias a Luis, Guillermo y Rafa (Espínola) por ser mis compañeros de departamento cuando estoy en Sevilla. Y gracias a José Antonio (Facenda). Por su ayuda siempre y sin dudarlo en mis visitas a su departamento. Gracias Aurora por ayudarme con el papeleo tan amablemente, por cuidar de mi casita de colores y por hacerte amiga mía en la distancia. Gracias a mis “hermanos” académicos. Gracias a Jorgelina, mi querida Jorgita tan alegre y buena, gracias a Ezequiel por su sonrisa clara y sincera. Gracias por querer hablar de mates conmigo. Gracias Wendy por ayudarme en aquello que he necesitado. Y gracias Tessa. Gracias por haber aparecido en mi vida. Las risas están aseguradas, pero también haremos mates, seguro. Me tienes para lo que quieras. Gracias a Esti y a Adriana por haberme hecho sonreir los últimos días de este camino.

De mis días de Sevilla no puedo olvidarme de las tortillas de los miércoles. Gracias a las niñas por esos ratitos que, de la mano de Araceli, he tenido con vosotras y en los que me habéis hecho sentir una más. Gracias.

Todo aquel que me conozca sabe que durante estos años he hecho muchas cosas además de mi tesis. Una de ellas ha sido dar muchas horas de clase. Quiero darles las gracias a todos los estudiantes que han pasado por mis clases, por haberme enseñado a explicarme y a hablar de matemáticas. Y quiero personalizar este agradecimiento en tres personas en Toñi (por ser mi

mejor alumna en muchos sentidos), y en mis dos estudiantes de proyectos, Tamara y Agustín. Por su paciencia y sonrisas.

Y mi otra actividad ha sido la política universitaria y con ella el sindicato, las CCOO. Esta tesis también es fruto de mis horas con vosotros peleándome por esa universidad pública que creemos que debe ser y no la que tenemos. Gracias a vosotros María José (García) y Paco Llera. Por aquellos primeros pasos y por nuestras discusiones. Habéis sido amigos y compañeros. Os quiero por muchas cosas. Muchas gracias. Y gracias a mis tres mosqueteros Ángel Ponce, Pepe Palazón y Paco Espadas. ¡Cuánto aprendí con vosotros! y, ¡cuánto os quiero!. Siempre os llevo en mi corazón. De mayor, quiero ser como vosotros. Y a mi Jacinto. Y a ti Eva. Gracias por vuestra amistad en aquellos años y vuestro ánimos. Y por tantas risas y sonrisas. Gracias a Ignacio y a Pepe (Sánchez) y al resto de mis compañeros del primer comité de empresa del PDI de la UEx. Gracias por ayudarme a arrancar. Y gracias a los de “la otra parte” de la mesa. Porque cada vez que hay una negociación, hay una contraparte. Y a veces, en la contraparte se encuentran personas que merecen la pena. Quiero daros las gracias a vosotros, Antonio (Hidalgo) y a Paco (Marcellán) por haber sido auténticas contrapartes y enseñarme que las verdades absolutas no existen. Creo que ambos me recibisteis con recelos (los mismos que yo a vosotros), pero con ambos conecté. Al final, nos entendimos y nos aceptamos. Y aprendimos unos de otros. Sobre todo que algo tan importante como la honestidad y la claridad ayudan en todo en la vida. También en la política. Gracias a los dos de corazón.

Y en mi camino hay otras tres personas, Carlos Latas, Vidal Mateos y Vera Sacristán que, han llegado a mi vida a través de otras personas fundamentales para mí. Poder compartir con vosotros mi cariño hacia el amigo común y poder forjar una relación es muy bonito. Gracias por esa preocupación común que es nuestra universidad. Aunque no estemos de acuerdo siempre, o casi nunca, es muy gratificante poder discutirlo con vosotros. Gracias por vuestros ánimos.

Gracias a esa otra familia que Sergi me ha regalado. Gracias a Miquel, Joana, Moisés, Marisún, Enric, y a mis “primos” de Esterri, Miquel, Montse, Arnau, Miriam (¡gracias por tu ayuda con la portada!), Celi y Gemma. Y gracias a ti iaia, gracias por estar y hacerme sentir una más entre vosotros.

Gracias a mis tíos y primos. Gracias a Curro y Aurora, Rosa y Paco. Cuando por el motivo que sea papá y mamá no están, estáis vosotros que, aunque desde otro lugar diferente al de ser padres, siendo mis tíos, habéis sabido estar ahí. Os quiero muchísimo. A los cuatro. Y a ti, Manuel. Y a Ana, José Francisco y Álvaro, y Natatxa y Sergio, y Manu y Rocío. Y al resto de esta enorme familia llena de tíos y primos que tengo. Gracias por sonreirme y quererme.

Gracias a todos por hacer que me sienta parte de algo grande. Y gracias a los que no están ya, porque se fueron demasiado pronto. Gracias Dolores, Pepe, Antonio, Miguel y Juan. Cada uno de vosotros se llevó algo de mí pero, ahora entiendo que también cada uno de vosotros me dejó algo de vosotros. Y ese algo me hace mejor.

Gracias a mis hermanos. Gracias Jose, por acompañarme a lo largo de toda mi vida, no recuerdo un momento sin ti. Gracias por ser y estar. Con eso para mí, es suficiente. Eres mi referente de vida. Te quiero mucho. Y gracias a ti Esther por quererle. Gracias Rafa por existir. Gracias por tantas sonrisas arrancadas, por ser nuestro "presi" vitalicio de la AEF. Gracias por llevarme a casa cuando más lo necesitaba. Y gracias por sacarme de ella cuando era tan importante que lo hiciera. Gracias por ejercer de hermano mayor cuando lo necesito. Mi compañero de fatigas. Lucirá el sol, ya lo verás. Te quiero mucho. Y gracias a ti, Araceli. Mi pequeñita. Gracias por llegar a mi vida cuando ya era grande. Gracias por calentarme el corazón desde que naciste solo con mirarte. Gracias por hacer que reviva cada momento de la vida. Tú no me haces vieja como suele decirse que hacen los hermanos pequeños. Tú me rejuveneces. Gracias por ser mi compi de piso en esta última etapa y soportar con sonrisas mis despistes y mi agotamiento. Te quiero mucho. Y gracias a mis cuatro pequeños, Rafa, Miguel, Nico y Daniela. De entre de los momentos buenos de mi vida, han habido cuatro momentos muy intensos que no los cambiaría por nada: la primera vez que os he cogido en mis brazos a cada uno de vosotros. Gracias por haber llegado a esta familia, por estar en mi vida. Por ser mis cuatro preciosos sobrinos.

He dejado para el final a tres personas muy importantes para mí. Sin ellos seguro que hoy no estaría escribiendo estas páginas.

Gracias papá, gracias mamá. Gracias por todo. De nuevo me faltan las palabras. Gracias por ser como sois y ayudarme siempre que lo he necesitado. Gracias por preocuparos por mí. Gracias por hacer que me sienta querida y esperada siempre. No hay nada como volver a casa, llamar al timbre insistentemente como siempre hago para que sepáis que soy yo antes de abrir, y ser recibida por vosotros. Con una sonrisa y un gran abrazo. Las penas y preocupaciones siempre se quedan en la puerta de casa, y por eso duermo ahí tanto y tan a gusto. Gracias por apoyarme en los momentos duros y difíciles y gracias por alegraros con cada pequeño triunfo que os cuento y del que os hago partícipe. Papá, mamá, las casitas que hacía en aquellos apuntes ya tienen forma de tesis, y sin vosotros no lo hubiera conseguido. Os quiero tanto...gracias.

Y gracias a ti Sergi. Por llegar a mi vida cuando ya no te esperaba. Por saber compartirme

con tantas personas que pueblan mi vida y mi corazón. Por dejarme ser tu peti. Por llevarme en el “foradet” y guardarme en la “butxaqueta”. Por quererme y valorarme. Por apoyarme siempre. Por tu paciencia y tu energía cuando a mí me faltan. Por cuidarme y amarme. Y hacerme sentir como nunca imaginé. Gracias por ser mi pareja, mi compañero y mi amigo. Gracias por pasar esos ratos tan buenos y divertidos. Gracias por hacerme reir incluso cuando sólo tengo ganas de llorar. Gracias por tu ayuda infinita en estos últimos momentos de la tesis. Sin ti a mi lado, no hubiera podido acabarla. Mereció la pena todo sólo por que llegaras a mi vida. Todo. Te quiero con toda mi alma y todo mi corazón. Desde lo más profundo de mí. Ha merecido la pena llegar aquí y tenerte a ti a mi lado. Aunque a veces estés lejos, siempre estás cerquita. Gracias por todo.

Lejos, ¡qué cantidad de veces he escrito esta palabra en estos agradecimientos! ¡Y qué cerca conseguís estar todos! A todos, GRACIAS.

Introducción

Consideremos la ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f \tag{0.0.1}$$

donde f es una función de $\mathbb{R}^n$. La solución de esta ecuación viene dada por el potencial de Newton

$$u(x) = I_2 f(x) = N * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) f(y)\, dy, \tag{0.0.2}$$

donde $N(x) = |x|^{2-n}$. Para probar las suavidad de las soluciones hay que derivar dos veces (0.0.2) quedando una expresión de la forma

$$Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y)\, dy,$$

donde el núcleo k tiene integral cero en la esfera unidad y satisface las siguientes condiciones

$$|k(y)| \leq \frac{C}{|y|^n} \quad y \quad |\nabla k(y)| \leq \frac{C}{|y|^{n+1}} \quad y \neq 0.$$

A estos operadores T se les denomina integrales singulares (en [Du] se puede encontrar más información al respecto).

Entre estas integrales singulares se encuentran operadores que sirven de modelo de la teoría como la transformada de Hilbert:

$$Hf(x) = vp \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

asociada a la teoría clásica de las series de Fourier o sus generalizaciones n–dimensionales como las transformadas de Riesz

$$R_i f(x) = vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy, \quad i = 1, \cdots, n$$

que surgen en las ecuaciones en derivadas parciales, o la transformada de Beurling que es el operador clave de la variable compleja

$$Cf(z) = vp \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\zeta.$$

Los resultados más importantes de la teoría de Calderón–Zygmund dicen que si $1 < p < \infty$ entonces cualquier integral singular T es un operador acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, esto es, existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx.$$

Este resultado es falso en el caso $p = 1$ pero hay un sustituto y se dice que el operador es de tipo "débil$-(1,1)$":

$$\sup_{t>0} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx. \tag{0.0.3}$$

Todos estos resultados arrancan del artículo de Acta Matematica [CZ] de A. Calderón y A. Zygmund que es sin lugar a dudas uno de los artículos más influyentes del análisis moderno.

En los años 90 empezó a haber un interés por la dependencia exacta de la norma de los operadores en términos de la constante A_p. Esta pregunta surge de forma natural en conexión con ciertos problemas de las ecuaciones en derivadas parciales, concretamente en el trabajo de R. Fefferman, C. Kenig y J. Pipher [FKP], y del análisis armónico, R. Fefferman and J. Pipher [FPi]. Más recientemente el interés ha crecido a raiz del trabajo de K. Astala, T. Iwaniec, E. Saksman [AIS] y el inmediatamente posterior [PetV] de S. Petermichl and A. Volberg. En este trabajo se obtiene el siguiente resultado para la transformada de Beurling B

$$\|B\|_{L^2(w)} \leq c\, [w]_2$$

que era el resultado clave para terminar de resolver el problema propuesto en [AIS].

Sin embargo, el primer resultado de esta índole se debe a S. Buckley, quien probó la dependencia exacta de esta contante para el **operador maximal** (ver [Bu])

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}},$$

resultado que, como veremos, juega un papel importante en el desarrollo de las pruebas clave de esta memoria.

Los operadores protagonistas de esta memoria son los conocidos como conmutadores de integrales singulares con funciones de BMO en espacios con pesos. Motivados por los trabajos de A. P. Calderón sobre la transformada de Cauchy a lo largo de curvas Lipschitz, los autores R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss introdujeron y estudiaron en [CRoW] otro tipo de integrales singulares interesantes por distintas razones. Si b es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, se define el **conmutador** como $[b,T]f = bT(f) - T(bf)$.

En el caso en el que T es una integral singular tendremos entonces que

$$[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))K(x-y)f(y)\,dy,$$

donde K es el núcleo que define la integral singular T.

Aunque inicialmente el estudio de estos operadores estuvo relacionado con las generalizaciones del teorema de factorización para espacios de Hardy, se han encontrado otras muchas aplicaciones y en particular en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

Por otro lado, la teoría de pesos tiene profunda influencia en diversas áreas como la de las ecuaciones elípticas, conexión que se muestra brevemente a continuación.

Consideremos el operador

$$Lu = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = div(A(x).\nabla u),$$

donde los coeficientes de la matriz $A(x) = (a_{i,j}(x))$ son solamente medibles y satisfacen la condición de elipticidad

$$c_1|\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_2|\xi|^2.$$

En 1957 DiGiorgi (Nash también e independientemente pero con un método diferente) probó que si u es una función con derivada localmente integrable tal que $Lu = 0$ entonces u es al menos localmente suave en el sentido de que satisface la condición de Hölder Λ_α para cierto $0 < \alpha < 1$. Posteriormente Moser mejoró este resultado y lo extendió a otras ecuaciones y, de hecho, está considerado uno de los resultados más importantes de las ecuaciones en derivadas parciales. Este resultado se extendió a mediados de los años ochenta en distintas direcciones. Una de ellas considera que los coeficientes satisfacen la siguiente condición de elipticidad uniformemente “degenerada”:

$$|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq |\xi|^2 w(x).$$

La degeneración es uniforme, pues no depende de la dirección de autovalores del operador. Se puede probar que si el peso $w \in A_2$ se recupera toda la teoría clásica que corresponde al caso $w \equiv 1$.

Esta memoria está estructurada de la siguiente manera: comenzaremos introducciendo en el capítulo 1 las herramientas y definiciones necesarias para entender el desarrollo de las pruebas que se presentan. En el capítulo 2 se realiza un estudio detallado de la acotación óptima de la integral singular en $L^p(w)$ con $w \in A_1$ y el caso en el extremo, donde se recogen los trabajos de A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez ([LOPe1],[LOPe2] y [LOPe3]) que serán la fuente de inspiración para el desarrollo de nuestro caso del conmutador. En el capítulo 3 se referencian resultados previos obtenidos para los conmutadores de integrales singulares y en el capítulo 4 se presentan los resultados que hemos obtenidos (parte de ellos pueden encontrarse en [OC]) sobre el estudio del crecimiento cuadrático de la constante $[w]_{A_1}$ en el caso del conmutador y su extensión a los conmutadores de orden superior, así como los casos en el extremo correspondientes. Finalizaremos esta memoria presentando los resultados que hemos obtenido sobre desigualdades de tipo buenos λ para integrales singulares, su extensión vectorial y para el caso del conmutador y de conmutadores de orden superior, y que forman parte de un trabajo con C. Pérez y E. Rela que actualmente se encuentra en su fase final.

1

Preliminares

Queda prohibido llorar sin aprender,
levantarme un día sin saber qué hacer,
tener miedo a mis recuerdos,
sentirme sólo alguna vez.

(Alfredo Cuervo Barrero)

Índice

En este capítulo, presentaremos los principales conceptos y herramientas que necesitaremos para el desarrollo de los problemas y resultados que se presentan en esta memoria con la intención de hacer de documento lo más autocontenido posible. Utilizaremos definiciones estándar muy bien conocidas, que podemos encontrar por ejemplo en [Du, J, GrMF].

1.1. Espacios L^p

Comenzaremos definiendo qué es el espacio de funciones L^p y algunas de las propiedades que en él se verifican.

DEFINICIÓN 1.1.1 *Sea (X, μ) un espacio de medida. Diremos entonces que $L^p(X, \mu)$, con $1 \leq p < \infty$, es el espacio de Banach de funciones definidas de X en $\mathbb{C}$, cuyas potencias de orden p son integrables.*

La norma de $f \in L^p(X, \mu)$ estará definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

En el caso $p = \infty$, $L^\infty(X, \mu)$ denota al espacio de Banach de funciones esencialmente acotadas de X en $\mathbb{C}$, más precisamente, serán las funciones f tales que para alguna $c > 0$ se verifica que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0.$$

La norma $f \in L^\infty(X, \mu)$ es el ínfimo de las constantes que verifican la propiedad anterior.

En esta memoria, y siempre que no se indique lo contrario, $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$, siendo dx la medida de Lebesgue.

Dado p, p' será el exponente conjugado de p, es decir, p' es el exponente que verifica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

y tendremos que el espacio dual de L^p es precisamente $L^{p'}$. Por lo tanto, podremos escribir la norma de una función en L^p en términos del espacio dual como sigue

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|h\|_{L^{p'}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x) \, dx \right|$$

DEFINICIÓN 1.1.2 *Sea (X, μ) un espacio de medida, y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Se llama función de distribución de f asociada a μ a la función $\mu_f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ definida por la siguiente expresión:*

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Una vez definida la función de distribución, explicaremos cómo utilizar esta función para poder integrar una función definida en ese espacio, utilizando la que se conoce como integración por capas, de la siguiente manera

DEFINICIÓN 1.1.3 *Sea (X,μ) un espacio de medida, y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Entonces, si φ es una función convexa definida de $\mathbb{R}$ en $[0,+\infty)$*

$$\int_X \varphi(f)\, d\mu = \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt \tag{1.1.1}$$

Dados dos espacios de medida (X,μ) e (Y,ν), la desigualdad de Minkowski nos dice que

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y)$$

Y por la desigualdad de Hölder sabemos que

$$\int_X fg\, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'}\, d\mu(x)\right)^{1/p'}$$

La desigualdad de Jensen nos dice que si μ es una medida positiva en (X,μ) tal que $\mu(X) = 1$, y si $f \in L^1(\mu)$ tal que $a < f(x) < b$, se verifica que para toda función convesa ϕ en (a,b)

$$\phi\left(\int f\, d\mu\right) \leq \int \phi(f)\, d\mu.$$

Para acabar este apartado recordaremos la desigualdad de Kolmogorov, desigualdad que utilizaremos varias veces en esta memoria . Sea $0 < p < q < \infty$, entonces existe una constante $c = c_{p,q}$ tal que para cualquier función medible f

$$\|f\|_{L^p(Q,\frac{dx}{|Q|})} \leq C\, \|f\|_{L^{q,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})}. \tag{1.1.2}$$

Ver por ejemplo, [GCRdF] pág. 485, o [GrCF] pág. 91, ejercicio. 2.1.5.

1.2. Operadores en espacios L^p

DEFINICIÓN 1.2.1 *Diremos que un operador T de un espacio vectorial de funciones medibles (X,μ) en otro espacio de funciones (Y,ν) es lineal si verifica que:*

- $T(f+g)(x) = Tf(x) + Tg(x).$
- $T(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$

Diremos que un operador T de un espacio vectorial de funciones medibles (X, μ) en otro espacio de funciones (Y, ν) es sublineal si verifica que:

- $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$.
- $|T(\lambda f)(x)| \leq |\lambda||f(x)|$.

DEFINICIÓN 1.2.2 *Sea $\{T_\varepsilon\}_\varepsilon$ una familia de operadores lineales en $L^p(X, \mu)$. Entonces se define el operador maximal asociado a $\{T_\varepsilon\}_\varepsilon$ como*

$$T^*f(x) = sup_\varepsilon |T_\varepsilon f(x)|.$$

Evidentemente, este operador no es un operador lineal, aunque sí es sublineal.

DEFINICIÓN 1.2.3 *Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida, y sea T un operador definido de $L^p(X, \mu)$ con $1 \leq p, q < \infty$ en el espacio de las funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$. Diremos entonces que:*

- *T es de tipo fuerte (p, q) si existe una constante $c > 0$ independiente de f tal que $\|Tf\|_{L^q} \leq c\|f\|_{L^p}$.*
- *T es de tipo débil (p, q), con $q < \infty$, si para todo $\lambda > 0$ si existe una constante $c > 0$ independiente de f tal que*

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q. \tag{1.2.1}$$

Escribiremos que $\|Tf\|_{L^{q,\infty}} = \sup_{\lambda>0} \lambda^q w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\})$.

Aunque $\|Tf\|_{L^{q,\infty}}$ no es una norma, abusando de la notación solemos escribir en este caso que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq c\|f\|_{L^p}.$$

Cuando $(X, \mu) = (Y, \nu)$ y T es la identidad, la desigualdad (p, p)-débil es la clásica desigualdad de Chebyshev, es decir,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p.$$

A continuación, introduciremos los operadores que intervienen en esta memoria

Operador de Hardy

DEFINICIÓN 1.2.4 *Si $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$, definimos el operador de Hardy como*

$$Af(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \qquad x > 0$$

El operador dual del operador de Hardy es

$$Sf(x) = \int_x^\infty f(s) \frac{ds}{s}.$$

Funciones maximales

Aunque dado un punto x podemos definir la función maximal de Hardy–Littlewood sobre bolas, centradas en x o no, obteniendo definiciones equivalentes a la nuestra, a lo largo de todo el documento, y si no se indica lo contrario, la definición de la función maximal de Hardy–Littlewood que manejaremos nosotros será la siguiente:

DEFINICIÓN 1.2.5 *Dada una función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$, el operador maximal de Hardy–Littlewood M está definida por*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y), dy, \tag{1.2.2}$$

donde el supremo se toma en todos los cubos Q que contienen al punto x.

Una de las muchas razones por las que este operador es importante se halla en el hecho que controla el teorema de diferenciación de Lebesgue. Si embargo, en el ámbito en el que se desarrolla esta tesis, lo importante es que el operador maximal tiene una relación muy importante con las integrales singulares. Esta estrecha relación forma parte de un principio más general que suele conocerse como *P*rincipio de Calderón-Zygmund que dice lo siguiente:

Todo operador integral singular está controlado, en algún sentido, por un operador maximal apropiado.

Más adelante formularemos este principio de forma más precisa.

M es un operador acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ y es de tipo débil-$(1, 1)$, esto es cumple una desigualdad como (1.2.1).

En esta memoria $M^k = M\circ \overset{(k)}{\cdots} \circ M$ denotará la iteración k-ésima de la función maximal de Hardy–Littlewood.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos también el siguiente operador:

$$M_\varepsilon f(x) = (M(|f|^\varepsilon)(x))^{1/\varepsilon}.$$

Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, la función maximal sharp de C. Fefferman-Stein $M^\#$, está definida por:

$$M^\#(f)(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy,$$

siendo $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy$.

Una observación interesante es que esta función maximal puede ser no localmente integrable en el caso $0 < \delta < 1$.

Y también utilizaremos el siguiente operador

$$M^\#_\delta f(x) = (M^\#(|f|^\delta)(x))^{1/\delta}$$

Si en cada una de las definiciones anteriores el supremo se restringe a cubos diádicos, tenemos la maximal diádica. Utilizaremos la siguiente notación M^d, $M^{\#,d}_\delta$ y M^d_δ, respectivamente.

La maximal vectorial

Utilizaremos también la extensión vectorial de la función maximal:

$$\overline{M}_q f(x) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}(Mf_j)^q\Big)^{1/q},$$

donde $\overrightarrow{f} = (f_j)_{j=1}^\infty$ es una función vectorial. Este operador no lineal fue definido por C. Fefferman y E. Stein en [FS] como una generalización de la función maximal escalar M y la integral clásica de Marcinkiewicz y desde entonces ha jugado un papel importante en el desarrollo del Análisis Armónico.

Tal y como es bien conocido (ver [GCRdF]), $\overline{M}_q$ puede verse como un operador lineal actuando sobre una función vectorial $f = (f_j)$ cuando escribimos

$$\overline{M}_q f = \|\mathcal{M}f\|_{\ell^q}.$$

Operadores de Calderón–Zygmund

Sea $K(x,y)$ una función localmente integrable definida fuera de la diagonal $\{x = y\}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, que satisface la siguiente condición de tamaño

$$|K(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^n}, \tag{1.2.3}$$

y para cualquier $\varepsilon > 0$, verifica la siguiente condición de regularidad

$$|K(x,y) - K(z,y)| + |K(y,x) - K(y,z)| \leq c\frac{|x-z|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}}, \tag{1.2.4}$$

siempre que $2|x-z| < |x-y|$.

DEFINICIÓN 1.2.6 *Diremos que un operador lineal*

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

es un operador de Calderón–Zygmund si se extiende a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$*, y existe un núcleo* K *que satisfaga* (1.2.3) *y* (1.2.4) *tal que*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy, \tag{1.2.5}$$

para cualquier $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $x \notin supp(f)$*.*

La transformada de Hilbert es un operador de Calderón–Zygmund si $k(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$.

El operador adjunto de un operador de Calderón–Zygmund vuelve a ser otro operador de Calderón–Zygmund.

Dada una familia de operadores de Calderón–Zygmund $\mathcal{T} = \{T_j\}_j$ definimos su extensión vectorial $\overline{T}_q$ como

$$\overline{T}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T_j f_j(x)|^q \right)^{1/q} = \|\mathcal{T}f\|_{\ell^q}.$$

Conmutadores

DEFINICIÓN 1.2.7 *Sea T un operador cualquiera y sea b una función localmente integrable. Definimos el operador conmutador $[b, T]$ como sigue*

$$[b, T]f = bT(f) - T(bf).$$

Veremos que cuando T es un operador de Calderón–Zygmund el conmutador es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$ ([CRoW]) pero no es de tipo $(1, 1)$ débil cuando $b \in BMO$ (ver [Pe1]).

Presentaremos más propiedades de los conmutadores en los capítulos siguientes.

El operador adjunto de un conmutador de una integral singular y una función de BMO vuelve a ser otro conmutador.

1.3. Pesos

La teoría de pesos surge de forma natural con la siguiente cuestión: sabiendo que un operador está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$, ¿se puede extender este resultado a los espacios $L^p(\mu)$, es decir a los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida μ? Este problema tan general, es difícil de responder, pero si consideramos el caso en que μ es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, si $d\mu = w(x)dx$, para una cierta función de densidad w no negativa y localmente integrable a la que llamaremos peso, en este caso sí podremos encontrar respuesta a nuestro problema inicial en el caso de algunos operadores. De hecho, aunque esta pregunta es natural, su respuesta ha causado un gran impacto en el análisis moderno abriendo un gran área de investigación que ha mostrado conexiones profundas en muchos ámbitos, desde la variable compleja hasta las ecuaciones en derivadas parciales.

DEFINICIÓN 1.3.1 *Diremos que $f \in L^p(w)$, con $1 \leq p < \infty$, si*

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, w(x)dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Y en el caso $p = \infty$, $f \in L^\infty(w)$, si

$$\|f\|_{L^\infty(w)} = \inf_c \{ w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > c\}) = 0\} < \infty.$$

La medida de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ con respecto al peso w la denotaremos como $w(A)$ y será igual a

$$w(A) = \int_A w(x)\, dx.$$

Fundamentalmente existen dos tipos de problemas (que evidentemente tienen sus modificaciones) que podemos plantearnos en espacios con peso:

1. Problemas con un peso: Dado un operador T, estudiar para qué funciones $w(x)$ nuestro operador está acotado (de forma fuerte o débil) del espacio $L^p(w)$ al espacio $L^p(w)$.
2. Problemas con dos pesos: Dado un operador T, estudiar para qué funciones $w(x)$ y $u(x)$ nuestro operador está acotado (de forma fuerte o débil) del espacio $L^p(w)$ al espacio $L^q(u)$.

Pues bien, si consideramos problemas del primer tipo para la función maximal de Hardy–Littlewood, obtenemos de manera natural las clases de pesos que a continuación se definen:

DEFINICIÓN 1.3.2 *Diremos que:*

- *Un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si existe una constante c tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\, dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\, dy\right)^{p-1} \leq c$$

  para cada cubo Q.

  Denotamos al ínfimo de las constantes c por $[w]_{A_p}$ y se tiene que $[w]_{A_p} \geq 1$.

- *Un peso w pertence a la clase A_1 si existe una constante c tal que*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\, dy \leq c \inf_Q w.$$

  O lo que es lo mismo, si existe una constante finita c tal que $Mw \leq c\, w$ en casi todo punto, y denotaremos $[w]_{A_1}$ a la menor de esas c.

- *Un peso w está en la clase A_∞ si existen constantes positivas c, ε tales que*

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon}, \tag{1.3.1}$$

  para todos los cubos Q y todos los conjuntos medibles $E \subset Q$. Denotamos por $[w]_{A_\infty}$ al ínfimo de estas conastantes c.

Como las clases A_p son crecientes con respecto a p, la clase A_∞ se define de forma natural como $A_\infty = \cup_{p>1} A_p$.

La importancia de estas clases de pesos se debe al resultado ya clásico de Muckenhoupt de principios de los años 70 donde se muestra la relación íntima con el operador maximal.

TEOREMA 1.3.3 *[Mu]*

1. *Si* $1 < p < \infty$ *entonces* M *está acotado en* $L^p(w)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_p$.

2. M *es de tipo débil-(1,1), esto es*

$$\sup_{t>0} t\, w\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Mf(x) > t\} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_1$.

Una vez dada la definición de pesos y el resultado de Muckenhoupt, hay unas cuantas propiedades de estos pesos que son muy importantes para nosotros y que serán claves en este documento. Vamos a verlas a continuación:

Propiedades de los pesos:

Señalaremos las siguientes propiedades ya que nos serán muy útiles en el desarrollo de esta memoria:

1. $A_p \subset A_q$, para todo $1 \leq p < q \leq \infty$.
2. Dado $1 < p < \infty$, $w \in A_p \Leftrightarrow w^{1-p'} \in A_{p'}$.
3. **Teorema de factorización.**

Muckenhoupt observó en [Mu] que basta con utilizar la definición de un peso A_1 para que ver que si $w_1, w_2 \in A_1$, entonces $w = w_1 w_2^{1-p} \in A_p$, y

$$[w]_{A_p} \leq [w_1]_{A_1} [w_2]_{A_1}^{p-1}. \tag{1.3.2}$$

Pero además, Muckenhoupt conjeturó y P. Jones demostró que, de hecho, todos los pesos A_p se pueden construir de esta manera. Concretamente veremos el siguiente resultado:

TEOREMA 1.3.4 *Sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $w \in A_p$*. Existen pesos* $u, v \in A_1$ *que verifican que*

$$w = u\, v^{1-p},$$

y tales que

$$[u]_{A_1} \leq c_n [w]_{A_p} \quad y \quad [v]_{A_1} \leq c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.3.3}$$

De aquí se deduce que $[w]_{A_p} \leq [u]_{A_1} [v]_{A_1}^{p-1} \leq c_n\, [w]_{A_p}^2$.

Existen diferentes maneras de demostrar este resultado. En una de ellas, se utiliza el conocido Algoritmo de Rubio de Francia que escribimos a continuación. Unas variaciones de este algoritmo serán herramientas fundamentales en las demostraciones fundamentales que se presentan en esta memoria desarrollada por A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez en [LOPe2]:

LEMA 1.3.5 *Sea* $1 < s < \infty$ *y sea* w *un peso. Sea* $h \in L^s(w)$*. Entonces, existe un operador sublineal no negativo* R *que verifica las siguientes propiedades:*

(a) $0 \leq h \leq R(h)$

(b) $\|R(h)\|_{L^s(w)} \leq 2\|h\|_{L^s(w)}$

(c) $R(h)w^{1/s} \in A_1$ *con*

$$[R(h)w^{1/s}]_{A_1} \leq cs'$$

4. **Desigualdad de Hölder al revés.**

La desigualdad que aparece a continuación es una propiedad fundamental en la teoría de pesos:

TEOREMA 1.3.6 *Sea* $w \in A_p$*, con* $1 \leq p < \infty$*. Existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{1/(1+\delta)} \leq c\frac{1}{|Q|}\int_Q w. \tag{1.3.4}$$

De esta desigualdad se deduce que q si $w \in A_p$, entonces existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$, y esto hace que la propiedad de inclusión de las clases A_p (propiedad 1) sea en realidad una indentidad, es decir, $A_p = \cup_{q<p} A_q$.

1.4. El principio de Calderón-Zygmund

Tal y como hemos señalado antes, el principio de Calderón-Zygmund dice que el operador maximal controla en algún sentido las integrales singulares y quizás sea el teorema siguiente la mejor forma de expresarlo (resultado se debe a Coifman y Fefferman [CF]):

TEOREMA 1.4.1 *[CF] Sea T un operador de Calderón–Zygmund, $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante $C_{p,w}$ que depende de p y de w de tal manera que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C_{p,w} \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)dx. \tag{1.4.1}$$

Bajo las mismas condiciones, también se verifica la estimación débil

$$\sup_{t>0} t^p\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq C_{p,w} \sup_{t>0} t^p\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}). \tag{1.4.2}$$

Este tipo de desigualdades engloba una gran cantidad de información sobre el comportamiento de estos operadores tal y como veremos en los siguientes capítulos.

En el desarrollo de esta tesis, necesitaremos también algunas definiciones y propiedades de las funciones de Young y los espacios de Orlicz, que recordaremos en este apartado. (Para más información, ver [BS] o [RRe]).

DEFINICIÓN 1.4.2 *Una función $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función de Young si es continua, convexa y creciente, si $B(0) = 0$ y $B(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y si satisface que $B(2t) \leq CB(t)$ para todo $t > 0$.*

DEFINICIÓN 1.4.3 *Definimos la norma de Luxemburgo localizada por $M_A = M_{A(L)}$, donde $M_{A(L)}$ denota a un tipo de función maximal definida por la expresión*

$$M_{A(L)}f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{A,Q},$$

donde A es una función de Young cualquiera y $\|f\|_{A,Q}$ denota la media–A sobre Q definida por medias de la norma de Luxemburgo

$$\|f\|_{A,Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q A\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}. \tag{1.4.3}$$

Una norma equivalente que se utiliza habitualmente es la siguiente (ver [RRe, p. 69]):

$$\|f\|_{A,Q} \leq \inf_{\mu>0}\left\{\mu + \frac{\mu}{|Q|}\int_Q A\left(\frac{|f|}{\mu}\right)dx\right\} \leq 2\|f\|_{A,Q}. \tag{1.4.4}$$

Dada una función de Young A, $\bar{A}$, denota la función de Young complementaria asociada a A; tiene la propiedad de que para todo $t > 0$,

$$t \leq A^{-1}(t)\bar{A}^{-1}(t) \leq 2t.$$

La propiedad que utilizaremos es la que se conoce como desigualdad de Hölder generalizada y que es la siguiente:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |fg| \leq 2\|f\|_{A,Q}\|g\|_{\bar{A},Q}. \tag{1.4.5}$$

1.5. La desigualdad de John-Nirenberg

DEFINICIÓN 1.5.1 *Definimos el espacio de funciones de oscilación media acotada, y lo denotaremos por BMO como*

$$BMO = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : M^{\#}(f) \in L^\infty\}, \tag{1.5.1}$$

siendo $M^{\#}f$ la función maximal sharp de Fefferman–Stein.

Definiremos la norma de f en BMO como:

$$\|f\|_{BMO} = \left\|M^{\#}f\right\|_{L^\infty} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy, \tag{1.5.2}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$.

Realmente (1.5.2) no es propiamente una norma, ya que las funciones constantes tienen oscilación cero. Aunque las funciones constantes son las únicas funciones con esta propiedad. Por ello, podemos considerar BMO como el espacio cociente entre el espacio definido en (1.5.1) y el espacio de las funciones constantes. Dicho de otra manera, dos funciones que difieren en una constante son la misma función en BMO. Por todo esto, (1.5.2) es una norma en este espacio cociente y además es un espacio de Banach.

Consideremos el siguiente par de funciones de Young complementarias

$$\Phi(t) = t\,(1 + \log^+ t) \;\; and \;\; \Psi(t) = e^t - 1,$$

que definen los clásicos espacios de Zygmund $L(\log L)$ y $\exp L$ respectivamente. Se denotan las correspondientes normas por

$$\|\cdot\|_{\Phi,Q} = \|\cdot\|_{L(\log L),Q} \;\text{ y }\; \|\cdot\|_{\Psi,Q} = \|\cdot\|_{\exp L,Q}.$$

Utilizando esta notación y la desigualdad de Hölder generalizada (1.4.5), obtenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)\,g(x)|\,dx \leq c\,\|f\|_{\exp L,Q}\,\|g\|_{L(\log L),Q}. \tag{1.5.3}$$

Según la desigualdad de John-Nirenberg [J] para funciones de BMO, sabemos que existen constantes dimensionales positivas $c_1 < 1$ y $c_2 > 2$ tales que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp\left(\frac{c_1|b(y) - b_Q|}{\|b\|_{BMO}}\right)\,dy \leq c_2 \tag{1.5.4}$$

Por lo tanto, por (1.5.3) y por

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|\,f(y)\,dy \leq c\,\|b\|_{BMO}\|f\|_{L(\log L),Q}. \tag{1.5.5}$$

para cualquier función $b \in BMO$ y para cualquier función no negativa f, lo que implica fácilmente que para una constante apropiada $c > 0$

$$\|b - b_Q\|_{\exp L,Q} \leq c\,\|b\|_{BMO}. \tag{1.5.6}$$

1.6. Reordenamientos decrecientes

DEFINICIÓN 1.6.1 *Dada una función $f \in L^p$ se define el reordenamiento decreciente de f como la función f^* definida en $[0, +\infty)$ por*

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\},$$

donde μ_f es la función de distribución de f. Por convención, diremos que si $\mu_f(\lambda) > t$, $\forall\lambda \geq 0$, entonces $f^*(t) = \infty$.

Si el espacio X es de medida finita, entonces la función de distribución μ_f está acotada por la medida del espacio $\mu(X)$, y $f^*(t) = 0$, $\forall t \geq \mu(X)$. Podemos suponer así que f^* es una función definida en el intervalo $[0, \mu(X))$.

Propiedades.

(i) f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, +\infty)$.

(ii) Si $|g| \leq |f|$ en c.t.p, entonces $g^* \leq f^*$.

(iii) $(af^*) = |a|f^*$.

(iv) $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \qquad \forall\, t_1, t_2 \geq 0$.

(v) Si $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ c.t.p., entonces $f^* \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n^*$. En particular, si

$$|f_n| \to |f|, \text{ entonces } f_n^* \to f^*. \tag{1.6.1}$$

(vi) La reordenada de una función es, en cierto modo, la inversa de la función de distribución, ya que

$$\begin{aligned} f^*(\mu_f(\lambda)) &\leq \lambda \\ \mu_f(f^*(t)) &\leq t. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

(vii) f y f^* son equimensurables, es decir, tienen la misma función de distribución.

(viii) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, para todo $0 < p < +\infty$.

El siguiente resultado, cuya demostración se deduce del teorema de la convergencia monótona y de las propiedades que tiene el reordenamiento decreciente y la función de distribución, da dos descripciones alternativas de la norma L^p, en términos de la función de distribución y en términos de los reordenamientos decrecientes.

PROPOSICIÓN 1.6.2 *Sea f medible. Si $0 < p < +\infty$, se tiene*

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p\, dx = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} (f^*(t))^p\ dt.$$

Cuando $p = \infty$, tenemos

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in X} |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0).$$

TEOREMA 1.6.3 ***(Desigualdad de Hardy-Littlewood)*** *Sean f y g dos funciones medibles en $(X, d\mu)$, entonces*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \int_0^{+\infty} f^*(t) g^*(t)\, dt. \tag{1.6.3}$$

Pues bien, cuando g es una función característica de un conjunto E de medida positiva t, la desigualdad de Hardy-Littlewood se reduce a

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|\, d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds, \quad \forall f \text{ medible }. \tag{1.6.4}$$

Vemos entonces que el promedio de $|f|$ sobre cualquier conjunto de medida t está dominado por el correspondiente promedio de f^* en el intervalo $(0, t)$, que resulta ser el operador de Hardy actuando sobre f^*.

2

Crecimiento lineal en A_1 para integrales singulares

Queda prohibido no sonreír a los problemas,
no luchar por lo que quiero,
abandonarlo todo por tener miedo,
no convertir en realidad mis sueños.

(Alfredo Cuervo Barrero)

Índice

En este capítulo agruparemos resultados conocidos sobre la integral singular y nos detendremos en las demostraciones de aquellos que serán claves en las pruebas de los resultados de los capítulos 4 y 5 de esta memoria. En 1971, C. Fefferman y E.M. Stein [FS] establecieron la siguiente extensión de la clásica desigualdad débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood M:

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda}\,[w]_{A_1}\,\|f\|_{L^1(w)}, \qquad w \in A_1,$$

que utilizando la notación explicada en el capítulo anterior, $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ (será la que utilizaremos a partir de ahora), se escribe como:

$$\|M\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1}, \qquad w \in A_1 \tag{2.0.1}$$

De hecho, probaron algo mejor:

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx, \qquad w \geq 0, \tag{2.0.2}$$

siendo c independiente de f y de w.

También demostraron que para $f,\ w \geq 0$ y para $1 < p < \infty$ se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, w(x)dx \leq c_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, Mw(x)dx. \tag{2.0.3}$$

Estas desigualdades fueron utilizadas por los autores para probar la extensión vectorial de estimaciones clásicas para M siguiente:

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p}. \tag{2.0.4}$$

En la década de los setenta del siglo XX, B. Muckenhoupt y R. Wheeden conjeturaron que el análogo de (2.0.1) se verifica para T, es decir,

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, Mwdx, \qquad w \geq 0. \tag{2.0.5}$$

Esta cuestión, conocida como la conjetura de Muckenhoupt–Wheeden, ha sido un problema abierto hasta hace poco, ya que a finales del año 2010, M. C. Reguera y C. Thiele demostraron con un contraejemplo que esto es falso (tal y como conjeturó C. Pérez en [Pe3]) en el caso de la transformada de Hilbert (ver [RgT]).

C.Pérez demostró una acotación mejor (ver [Pe3]) donde M se reemplaza por $M_{L(\log L)^\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ con una constante c_ε que explota cuando $\varepsilon \to 0$. El resultado es el siguiente

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_\varepsilon}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M_{L(\log L)^\varepsilon}(w)(x)\, dx, \tag{2.0.6}$$

sin exigencia alguna sobre el peso w. Es importante señalar que, ante el resultado negativo comprobado en [RgT], la acotación (2.0.6) es el mejor resultado conocido hasta ahora.

Al haberse comprobado que (2.0.5) es falsa, podríamos plantearnos qué ocurre con la desigualdad más débil análoga a la (2.0.1) para el caso de las integrales singulares. Es decir, podríamos plantearnos si la que se conoce como conjetura débil de Muckenhoupt–Wheeden es cierta o no:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq c\, [w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)dx, \tag{2.0.7}$$

suponiendo que $w \in A_1$.

Pues bien, ésta desigualdad tampoco se verifica para el caso de la transformada de Hilbert, es decir la siguiente desigualdad

$$\|H\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1}, \qquad w \in A_1, \tag{2.0.8}$$

también es falsa (para más información sobre este tema, consultar [NRVV]).

En este capítulo veremos la mejora de la desigualdad de tipo débil para el operador de Calderón–Zygmund respecto a la dependencia de la constante en $[w]_{A_1}$, que probaron A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez en [LOPe3] y que enunciamos a continuación:

TEOREMA 2.0.4 *[LOPe3]* ***Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces***

$$\|T\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\, \Phi([w]_{A_1}), \tag{2.0.9}$$

siendo $c = c_{n,T}$ y $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

Veremos cómo para probar esta acotación de tipo débil los autores necesitaron afinar en la dependencia de la constante de la desigualdad fuerte. Evidentemente, las correspondientes estimaciones de tipo fuerte L^p tienen también muchísimo interés por ellas mismas. Vamos a hacer un repaso por los resultados fuertes obtenidos hasta ahora.

Si consideramos de nuevo la función maximal de Hardy-Littlewood M, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz obtenemos que

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p'\, [w]_{A_1}^{1/p} \qquad w \in A_1 \tag{2.0.10}$$

Estimaciones análogas a (2.0.8) para la transformada de Hilbert son más difíciles de probar tal y como muestran R. Fefferman and J. Pipher en [FPi]. En este artículo, los autores demostraron que

$$\|H\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p} \, [w]_{A_1} \qquad p \geq 2 \tag{2.0.11}$$

siendo el exponente de $[w]_{A_1}$ el mejor posible. Esta estimación ha sido mejorada en diferentes direcciones por A. Lerner, S. Ombrosy y C.Pérez, en [LOPe1] y [LOPe3] (ver también [LOPe2] para el problema dual). Estas mejoras serán los que estudiaremos en este capítulo. Una de las mejoras que realizan es que el resultado se extiende para cualquier $1 < p < \infty$ y a cualquier operador de Calderón-Zygmund. Para ser precisos lo que prueban es lo siguiente:

TEOREMA 2.0.5 *[LOPe3]* ***Sea T un operador de Calderón-Zygmund y sea $1 < p < \infty$. Entonces***

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c \, pp' \, [w]_{A_1} \tag{2.0.12}$$

con $c = c_{n,T}$. Además este resultado es óptimo tanto en p como en $[w]_{A_1}$.

Estos resultados fueron motivados por importantes trabajos de S. Petermichl y A. Volberg [PetV] para la trasnformada de Ahlfors-Beurling y por S. Petermichl [Pet1, Pet2] para la transformada de Hilbert y las de Riesz. En estos artículos se prueba que si T es cualquiera de los operadores señalados, entonces

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n} \, [w]_{A_p}^{\max\{1, \frac{1}{p-1}\}} \qquad 1 < p < \infty, \tag{2.0.13}$$

donde el exponente $\max\{1, \frac{1}{p-1}\}$ es el mejor posible. Es importante observar que $A_1 \subset A_p$, y $[w]_{A_p} \leq [w]_{A_1}$. Tenemos entonces que (2.0.13) claramente da el exponente adecuado en (2.0.11) cuando $p \geq 2$. De cualquier manera, (2.0.13) no puede utilizarse para obtener el exponente óptimo en el rango $1 < p < 2$, y se obtiene el peor exponente cuando p se acerca a 1. Las demostraciones en [Pet1, Pet2, PetV] están basadas en las técnicas de las funciones de Bellman para $p = 2$. El caso $p \neq 2$ se deduce de la versión sharp del teorema de extrapolación de Rubio de Francia tal y como puede verse en [DGrPPet], y no está claro si pueden extender a la clase más extensa de los operadores de Calderón-Zygmund tal y como se consigue en

[LOPe1, LOPe3] para el caso de pesos A_1. (Ver nueva versión del teorema de extrapolación en [HytPe]).

La acotación óptima (2.0.13) para cualquier operador de Calderón-Zygmund T ha sido probada recientemente en [Hyt] por T. Hytönen. Como se ha señalado antes, es suficiente considerar el caso $p = 2$ y después utilizar el teorema de extrapolación. La prueba de Hytönen se se basa en aproximar T por operadores Haar shift diádicos generalizados con buenas cotas combinados con el hecho clave de que para probar (2.0.13) es suficiente probar la desigualdad de tipo débil $(2, 2)$ con la misma cota lineal tal y como puede verse en [PeTV]. Existe una prueba directa evitando la reducción al caso débil $(2, 2)$ que puede encontrarse en [HytPeTV]. Un poco antes en [L7], la estimación óptima $L^p(w)$ para T se obtuvo para valores de p fuera del intervalo $(3/2, 3)$ y la prueba está basada en las estimaciones correspondientes de la función cuadrado. Recientemente, la acotación (2.0.13) para cualquier operador de Calderón-Zygmund ha sido mejorada por T. Hytönen y C. Pérez en [HytPe], donde una porción de la constante A_p de w se reemplaza por la constante $A_\infty-$ débil, obteniendo que

$$.\|T\|_{L^p(w)} \leq cpp'[w]_{A_1}^{1/p}[w]_{A'_{infty}}^{1/p'} \tag{2.0.14}$$

Antes de estudiar los dos resultados fundamentales de este capítulo, vamos a explicar los resultados y herramientas necesarias para demostrarlos.

2.1. Optimización de la desigualdad de Hölder al revés

Recordemos que la desigualdad de Hölder al revés, presentada en el capítulo anterior nos dice que, si $w \in A_1$ entonces existe una constante $r > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\right)^{1/r} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q, w$$

y que como consecuencia inmediata tenemos que $r > 1$

$$M_r w(x) \leq cw(x).$$

Con la prueba original, la constante $c = c(r, [w]_{A_1})$ presenta una mala dependencia. Para probar nuestro resultado necesitamos una estimación más precisa. A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez en [LOPe1] optimizan esta constante en el siguiente lema:

LEMA 2.1.1 *[LOPe1]* ***Sea $w \in A_1$, y sea $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$. Entonces tenemos que para cada Q***

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\right)^{1/r_w} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

i.e. $M_{r_w}w(x) \leq 2\,[w]_{A_1}\,w(x)$.

Demostración:

Fijemos un cubo Q y denotamos por M_Q^d el operador maximal diádico restringido al cubo Q. Denotemos también $w_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q w$. Entonces, por la fórmula de la integración por capas (1.1.1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\delta}\,w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M_Q^d(w)(x)^{\delta}\,wdx \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{\infty} t^{\delta-1}\,w(\{x\in Q : M_Q^d(w)(x) > t\})\,dt \\
&\leq \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{w_Q} t^{\delta-1}\,w(\{x\in Q : M_Q^d(w)(x) > t\})\,dt \\
&\quad + \frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta-1}\,w(\{x\in Q : M_Q^d(w)(x) > t\})\,dt \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Estudiaremos cada sumando por separado

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{w_Q} t^{\delta-1}\,w(\{x\in Q : M_Q^d(w)(x) > t\})\,dt \\
&\leq \frac{\delta}{|Q|}w(Q)\frac{(w_Q)^{\delta}}{\delta} = (w_Q)^{\delta+1}.
\end{aligned}$$

Para el caso del segundo sumando, utilizaremos una desigualdad inversa de tipo débil $(1,1)$ para la maximal, (ver [GrCF])

$$w\left\{x\in Q : M_Q^d w(x) > t\right\} \leq 2^n t\,|\{x\in Q : M_Q^d w(x) > t\}|$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
II &= \frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta-1}\, w(\{x\in Q : M_Q^d(w)(x)>t\})\,dt \\
&\leq 2^n\frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta-1} t\,|\{x\in Q : M_Q^d(w)(x)>t\}|\,dt \\
&= 2^n\frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta}\,|\{x\in Q : M_Q^d(w)(x)>t\}|\,dt \\
&= 2^n\frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta}\int_{\{x\in Q: M_Q^d(w)(x)>t\}} dx\,dt \\
&\leq 2^n\frac{\delta}{|Q|}\int_{Q}\int_{w_Q}^{M_Q^d(w)(x)} t^{\delta}\,dt\,dx \\
&\leq 2^n\frac{\delta}{|Q|}\int_{Q}\frac{(M_Q^d(w)(x))^{\delta+1}}{\delta+1}\,dx \\
&= 2^n\frac{\delta}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}(M_Q^d(w)(x))^{\delta+1}\,dx \\
&= 2^n\frac{\delta}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}(M_Q^d(w)(x))^{\delta}\,M_Q^d(w)(x)dx \\
&\leq 2^n\frac{\delta}{\delta+1}[w]_{A_1}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}(M_Q^d(w)(x))^{\delta}\,w(x)dx,
\end{aligned}$$

ya que $w\in A_1$.

Hemos llegado entonces a que si elegimos $\delta=\frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{2}\,\frac{2^{n+1}[w]_{A_1}}{1+2^{n+1}[w]_{A_1}}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}(M_Q^d(w)(x))^{\delta}\,w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\,\frac{2^{n+1}[w]_{A_1}}{1+2^{n+1}[w]_{A_1}}(w_Q)^{\delta}w_Q \\
&\leq (w_Q)^{\delta+1}
\end{aligned}$$

ya que $\delta<1$.

Por lo tanto, hemos llegado a que

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q} w^{1+\delta}\,dx \leq 2(w_Q)^{\delta+1}, \tag{2.1.1}$$

y por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d w(x))^\delta\, w(x)dx\right) \leq 2(w_Q).$$

□

2.2. Desigualdad de Coifman-Rochberg

Los pesos de la forma $M_r w$, con $1 < r < \infty$, jugarán un papel fundamental en esta memoria. Ya sabemos que son pesos que satisfacen la condición de A_1 por el teorema de Coifman-Rochberg (ver [CRo]), que nos dice que

LEMA 2.2.1 *[CRo]* ***Si $0 < \delta < 1$ y μ una medida, entonces $(M\mu)^\delta \in A_1$, y además***

$$[(M\mu)^\delta]_{A_1} \leq \frac{c_n}{1-\delta},$$

dependiendo la constante c_n únicamente de la dimensión.

Demostración: Para comprobar que $(M\mu)^\delta \in A_1$ tenemos que ver si existe una constante c tal que

$$M((M\mu)^\delta) \leq c\,(M\mu)^\delta.$$

Para comenzar, escribimos $\mu = \mu_1 + \mu_2$, siendo $\mu_1 = \mu\chi_{3Q}$ y $\mu_2 = \mu\chi_{(3Q)^c}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q (M\mu)^\delta(x)\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (M\mu_1)^\delta(x)\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q (M\mu_2)^\delta(x)\,dx \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado. Comenzaremos por el segundo sumando II. Fijado un $x \in Q$, este sumando está acotado por $(M\mu_2(x))^\delta$ claramente, ya que como $\mu_2(x) = \mu(x)\chi_{(3Q)^c}(x)$, se verifica que $\mu_2(y) \simeq \mu_2(z)$, $\forall y, z \in Q$, es decir, es esencialmente constante en Q.

Para el primer sumando I, utilizamos la integración por capas, y consideramos un $R > 0$ que fijaremos después:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{|Q|}\int_Q (M\mu_1)^\delta(x)\,dx \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{+\infty} t^{\delta-1}|\{x\in Q : M\mu_1(x)>t\}|\,dt \\
&= I_1+I_2,
\end{aligned}$$

siendo

$$I_1=\frac{\delta}{|Q|}\int_0^{R} t^{\delta-1}|\{x\in Q : M\mu_1(x)>t\}|\,dt,$$

y

$$I_2=\frac{\delta}{|Q|}\int_R^{+\infty} t^{\delta-1}|\{x\in Q : M\mu_1(x)>t\}|\,dt.$$

La acotación de I_1 es inmediata:

$$I_1=\frac{\delta}{|Q|}\int_0^{R} t^{\delta-1}|\{x\in Q : M\mu_1(x)>t\}|\,dt\le \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{R} t^{\delta-1}|Q|\,dt=R^\delta.$$

Para estudiar I_2 utilizaremos el hecho de que M es $(1,1)$-débil

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\delta}{|Q|}\int_R^{+\infty} t^{\delta-1}|\{x\in Q : M\mu_1(x)>t\}|\,dt \\
&\le c_n\frac{\delta}{|Q|}\int_R^{+\infty} t^{\delta-1}\frac{1}{t}\int_{3Q}d\mu\,dt \\
&\le c_n\frac{\delta}{|Q|}\int_R^{+\infty} t^{\delta-2}\int_{3Q}d\mu\,dt \\
&= c_n\frac{\delta}{|Q|}\int_{3Q}\frac{R^{\delta-1}}{1-\delta}\,d\mu \\
&= c_n\frac{\delta}{1-\delta}\frac{\mu(3Q)}{|Q|}R^{\delta-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos llegado a que eligiendo $R=\frac{\mu(3Q)}{|Q|}$

$$I\le c_n\frac{1}{1-\delta}\left(\frac{\mu(3Q)}{|Q|}\right)^\delta.$$

Así que hemos llegado a que

$$M((M\mu)^\delta) \leq c_n \frac{1}{1-\delta}(M\mu)^\delta.$$

□

2.3. Construir pesos A_1 a partir de la dualidad

El lema que ahora presentamos es una variación del algoritmo de Rubio de Francia, que será clave en la demostración de nuestro teorema principal. Construiremos con este algoritmo un peso de la clase A_1 que necesitaremos para demostrar nuestro resultado. La idea se desarrolló por A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez (ver [LOPe2]).

LEMA 2.3.1 *[LOPe2]* ***Sea $1 < s < \infty$ y sea w un peso. Entonces, existe un operador sublineal no negativo R que verifica las siguientes propiedades:***

(a) $0 \leq h \leq R(h)$

(b) $\|R(h)\|_{L^s(w)} \leq 2\|h\|_{L^s(w)}$

(c) $R(h)w^{1/s} \in A_1$ ***con***

$$[R(h)w^{1/s}]_{A_1} \leq cs'$$

Demostración:

Consideremos el operador

$$S(f) = \frac{M(f\,w^{1/s})}{w^{1/s}}$$

Como $\|M\|_{L^s} \sim s'$, tenemos que

$$\|S(f)\|_{L^s(w)} \leq cs'\|f\|_{L^s(w)}.$$

Definimos ahora el operador de Rubio de Francia R de la siguiente manera

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{S^k(h)}{(\|S\|_{L^s(w)})^k}.$$

Veamos ahora cómo este operador R verifica las propiedades que hemos señalado antes:

(a) $0 \leq h \leq R(h)$.

Evidentemente, esta propiedad es cierta porque las sumas parciales son todas mayores o iguales que $h(x)$, ya que $Mh \geq 0$, para toda h.

(b) $\|R(h)\|_{L^s(w)} \leq 2\|h\|_{L^s(w)}$.

$$\begin{aligned}
\|Rh\|_{L^s(w)} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{S^k h}{\|S\|^k_{L^s(w)}} \right\|_{L^s(w)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\|S\|^k_{L^q}} \|S^k h\|_{L^s(w)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|h\|_{L^s(w)} \\
&= \|h\|_{L^s(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 2\|h\|_{L^s(w)}.
\end{aligned}$$

(c) $R(h)w^{1/s} \in A_1$ con

$$[R(h)w^{1/s}]_{A_1} \leq cs'$$

□

2.4. Desigualdad puntual

Una de las herramientas que utilizaremos para poder relacionar los operadores de los que nos ocuparemos y la función maximal, serán unas desigualdades puntuales que relacionan la maximal sharp de estos operadores con las maximales, como el siguiente resultado de Álvarez y Carlos Pérez, [APe], que señalamos a continuación:

LEMA 2.4.1 *[APe] Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea $0 < \varepsilon < 1$. Existe una constante c_ε tal que*

$$M_\varepsilon^{\#}(Tf)(x) \leq c_\varepsilon \, Mf(x). \tag{2.4.1}$$

2.5. Constantes óptimas para la función maximal

Tal y como ya hemos señalado, el objetivo de este capítulo es "afinar" las constantes en las desigualdades fuerte y débil de la integral singular. Por eso, antes de estudiar las demostraciones de los teoremas correspondientes, en este apartado repasaremos algunos resultados óptimos en cuanto a las constantes.

Desigualdad de Fefferman-Stein

La desigualdad de Fefferman-Stein [FS] nos dice que que dice que para cualquier peso w,

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, \|f\|_{L^p(Mw)} \qquad (1 < p < \infty), \tag{2.5.1}$$

donde p' denota, como habitualmente, al exponente dual de p, $p' = \frac{p}{p-1}$.

La función maximal sharp con constantes óptimas

Necesitaremos un resultado que relacione la norma L^p con peso de una función y su función maximal sharp. Este resultado es fundamental en nuestro desarrollo. El resultado que buscamos es un corolario del siguiente lema

LEMA 2.5.1 *Sea $w \in A_q$ y sean $0 < \delta, \gamma < 1$. Existe una constante $c = c_{n,q,\gamma,\delta}$, tal que para cualquier función medible se verifica que*

$$f_w^*(t) \leq c[w]_{A_q} \left(M_\delta^\# f\right)_w^*(\gamma t) + f_w^*(2t) \qquad t > 0, \tag{2.5.2}$$

donde puede entenderse el término $f_w^*(2t)$ como un término de "error".

LEMA 2.5.2 *[Pe4]* ***Sea $0 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, y sea $w \in A_q$, con $1 \leq q < \infty$. entonces existe una constante $c = c(n, q, \delta)$ tal que***

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq cp[w]_{A_q} \left\|M_\delta^{\#,d}(f)\right\|_{L^p(w)}, \tag{2.5.3}$$

para cualquier función f tal que $|\{x : |f(x)| > t\}| < \infty$.

Demostración:

Si iteramos (2.5.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} f_w^*(t) &\leq c\,[w]_{A_q} \sum_{k=0}^{\infty} (M_\delta^\# f)_w^*(2^k \gamma t) + f_w^*(+\infty) \\ &\leq \frac{[w]_{A_q}}{\log 2} \int_{t\gamma/2}^{\infty} (M_\delta^\# f)_w^*(s)\, \frac{ds}{s} + f_w^*(+\infty). \end{aligned}$$

Si asumimos entonces que $f_w^*(+\infty) = 0$, la desigualdad que obtenemos es que

$$f_w^*(t) \leq c\,[w]_{A_q} \int_{t\gamma/2}^{\infty} (M_\delta^\# f)_w^*(s)\, \frac{ds}{s}. \tag{2.5.4}$$

Recordando quiénes son el operador de Hardy y su adjunto, podemos escribir la estimación anterior de la siguiente manera:

$$f_w^*(t) \leq c\,[w]_{A_q}\, S((M_\delta^\# f)_w^*)(t\gamma/2)$$

Como tanto el operador de Hardy como su adjunto están acotados en $L^p(0,\infty)$, y además sabemos que

$$\|S\|_{L^p(0,\infty)} = p \qquad p \geq 1.$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(w)} &= \|f_w^*\|_{L^p(0,\infty)} \\ &\leq c\,[w]_{A_q} \|S((M_\delta^\# f)_w^*)\|_{L^p(0,\infty)} \\ &\leq c\,p\,[w]_{A_q} \|(M_\delta^\# f)_w^*\|_{L^p(0,\infty)} \\ &= c\,p\,[w]_{A_q} \|M_\delta^\# f\|_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

y así demostramos el resultado para el caso $1 \leq p < \infty$. Para el caso $0 < p < 1$ bastaría utilizar la desigualdad triangular.

El teorema de Buckley

El siguiente resultado bien conocido, da la acotación óptima para la función de maximal de Hardy-Littlewood en $L^p(w)$, siendo por lo tanto, la versión óptima del teorema de Muckenhoupt (1.3.3).

Hay que observar que S.M. Buckley no encontró la constante $c_n p'$ que aparece en (2.5.5) pero, recientemente A. Lerner en [L4] da una simple y elegante prueba de este teorema donde sí se obtiene, y que escribimos a continuación.

TEOREMA 2.5.3 *[Bu] Sea M la función maximal de Hardy–Littlewood, $p > 1$ y $w \in A_p$. Existe una constante $c = c_n p'$ tal que*

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p' \, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.5.5}$$

□

Es importante hacer notar que podríamos utilizar el teorema 2.5.3, la desigualdad (1.3.2) y después (2.2.1) para probar que $\|M\|_{L^p((M_r w)^{1-p})}$ está acotada por un múltiplo de $[(M_r w)^{1-p}]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \leq [M_r w]_{A_1}^{\frac{p-1}{p-1}} \leq c\, r'$. De todas formas, esta estimación es peor que la desigualdad que se obtiene en el siguiente lema:

LEMA 2.5.4 *Sea $1 < p, r < \infty$, entonces*

$$\|Mf\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \leq c\, p' (r')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(w^{1-p})}. \tag{2.5.6}$$

Demostración: Es una consecuencia del lema 3.4 de [LOPe1]. En realidad con este lema se llega a que

$$\|Mf\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \leq c\, p' (r')^{1-\frac{1}{rp'}} \|f\|_{L^p(w^{1-p})},$$

pero $1 - \frac{1}{rp'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} - \frac{1}{rp'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r'p'}$ y de aquí $(r')^{1-\frac{1}{rp'}} = (r')^{\frac{1}{p}+\frac{1}{r'p'}} \leq c\,(r')^{\frac{1}{p}}$ ya que $t^{1/t} \leq e, \quad t \geq 1$.

□

2.6. La desigualdad fuerte: un crecimiento lineal

En este apartado demostraremos el resultado (p,p)-fuerte.

TEOREMA 2.6.1 ***Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sean $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T}$ tal que para cualquier peso w, se verifica la siguiente desigualdad***

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \left(r'\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(M_r w)}. \tag{2.6.1}$$

En particular, si $w \in A_1$, tenemos que

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' [w]_{A_1}. \tag{2.6.2}$$

Es importante indicar que este resultado es óptimo en p y en el exponente de $[w]_{A_1}$.

Demostración:

Por un argumento de dualidad, demostrar (2.6.1) es equivalente a demosotrar que

$$\|T^* f\|_{L^{p'}((M_r w)^{1-p'})} \leq cpp' \left(r'\right)^{1/p'} \|f\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}, \tag{2.6.3}$$

o lo que es lo mismo

$$\left\| \frac{T^* f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} \leq c\, pp' \left(r'\right)^{1/p'} \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^{p'}(w)}, \tag{2.6.4}$$

donde T^* es el operador adjunto de T, que vuelve a ser un operador de Calderón–Zygmund. Por la definición de norma con respecto al espacio dual, tenemos que

$$\left\| \frac{T^* f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} = \sup_{\|h\|_{L^p(M_r w)} = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x) h(x)\, dx \right|. \tag{2.6.5}$$

Tal y como hemos señalado antes, el algoritmo de Rubio de Francia es la clave de la demostración de este teorema. Observando (5.2.7), vemos que en nuestro caso, $h \in L^p(M_r w)$, y por lo tanto, por dicho algoritmo, definimos $S(f) = \frac{M(f\,(M_r w)^{1/p})}{M_r w)^{1/p}}$ y construimos el operador

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{S^k(h)}{(\|S\|_{L^p(M_r w)})^k}.$$

Entonces, por el lema (2.3.1) podemos asegurar que:

$$\text{(i)} \qquad 0 \le h \le R(h) \tag{2.6.6}$$

$$\text{(ii)} \qquad \|R(h)\|_{L^p(M_r w)} \le 2\|h\|_{L^s(M_r w)} \tag{2.6.7}$$

$$\text{(iii)} \qquad R(h)(M_r w)^{1/p} \in A_1, \tag{2.6.8}$$

con

$$[R(h)(M_r w)^{1/p}]_{A_1} \le cp'.$$

Por lo tanto, por el apartado (i) (2.6.6) tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x) h(x)\, dx \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|\, h(x)\, dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|\, Rh(x)\, dx. \end{aligned}$$

Además, combinando el apartado (iii) (2.6.8) con (1.3.2) y (2.2.1) obtenemos que

$$[Rh]_{A_3} = [Rh(M_r w)^{1/p}(M_r w)^{-1/p}]_{A_3} \tag{2.6.9}$$

$$= [Rh(M_r w)^{1/p}((M_r w)^{1/2p})^{-2}]_{A_3} \tag{2.6.10}$$

$$\le [Rh(M_r w)^{1/p}]_{A_1} [(M_r w)^{1/2p}]^2_{A_1} \tag{2.6.11}$$

$$\le c_n\, p'. \tag{2.6.12}$$

Como T^* es un operador de Calderón-Zygmund, aplicamos el lema 2.5.2 al operador T^* con peso $w = Rh$, y para $q = 3$ y $p = 1$ y llegamos a que

$$I \le c_\delta\, [Rh]_{A_3} \int_{\mathbb{R}^n} M^{\#}_\delta (T^* f)(x)\, Rh(x)\, dx.$$

Por (4.5.8) y aplicando ahora el lema (2.4.1) con $0 < \delta < \varepsilon$, obtenemos que

$$I \le c_{n,\delta,\varepsilon} p' \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\, Rh(x) dx.$$

Multiplicando y dividiendo por $(M_r w)^{1/p}$ y aplicando la desigualdad de Hölder y utilizando el apartado (ii) (2.6.7) y (4.5.8) tenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq c_{n,\delta,\varepsilon} p' \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)(M_r w(x))^{-1/p}(M_r w(x))^{1/p}\, Rh(x)dx \\ &\leq c_{n,\delta,\varepsilon} p' \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^{p'} (M_r w(x))^{1-p'}\, dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M_r w(x)(Rh(x))^p\, dx \right)^{1/p} \\ &= 2cp' \left\| \frac{Mf}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)}. \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por $w^{1/p}$ y utilizando la desigualdad de Hölder con exponente pr tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f = \frac{1}{|Q|}\int_Q f w^{-1/p} w^{1/p} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r \right)^{1/pr} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (f w^{-1/p})^{(pr)'} \right)^{1/(pr)'}$$

y por lo tanto, fijado x se verifica que

$$(Mf)^{p'}(x) \leq (M_r w)^{p'/p}(x) \Big(M(f w^{-1/p})^{(pr)'}(x) \Big)^{p'/(pr)'}.$$

De aquí y por la acotación clásica de la maximal en un espacio L^q sin peso, para $q = \frac{p'}{(pr)'}$ con constante óptima $q' = \frac{pr-1}{r-1}$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Mf}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^{p'} \, (M_r w(x))^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \left\| M((f w^{-1/p})^{(pr)'}) \right\|_{L^{p'/(pr)'}}^{1/(pr)'} \\ &\leq \left(\frac{pr-1}{r-1} \right)^{1/(pr)'} \left\| (f w^{-1/p})^{(pr)'} \right\|_{L^{p'/(pr)'}}^{1/(pr)'} \\ &= \left(\frac{pr-1}{r-1} \right)^{1/(pr)'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^{p'} (w(x))^{-p'/p}\, dx \right)^{1/p'} \\ &\leq (pr')^{1/(pr)'} \left\| \tfrac{f}{w} \right\|_{L^{p'}(w)} \\ &\leq c\,(r')^{1/p'} \left\| \tfrac{f}{w} \right\|_{L^{p'}(w)}. \end{aligned}$$

Y así, hemos demostrado (2.6.3) y por lo tanto (2.6.1).

Para demostrar (2.6.2), basta aplicar a (2.6.1) el lema 2.5.4.

□

Como corolario de (2.6.1) tenemos la siguiente estimación que necesitaremos en un capítulo posterior:

COROLARIO 2.6.2 *[LOPe3] Sea T un operador de Calderón–Zygmund, y sea $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T}$ tal que*

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c(p')^p(r')^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, M_r w(x) dx. \tag{2.6.13}$$

2.7. Crecimiento logarítmico en la desigualdad débil

El resultado correspondiente relacionado con la conjetura (2.0.8) es el siguiente:

TEOREMA 2.7.1 *[LOPe3] Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces*

$$\|T\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\, \Phi([w]_{A_1}), \tag{2.7.1}$$

siendo $c = c_{n,T}$ y $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

Este resultado se ha mejorado recientemente por T. Hytönen y C. Pérez (ver [HytPe].

Demostración:

Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ consideremos la clásica descomposición de Calderón–Zygmund de f a nivel λ. Obtenemos así una familia de cubos diádicos $\{Q_j\}$ disjuntos dos a dos que verifican

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda. \tag{2.7.2}$$

Esto implica que para $\Omega = \cup_j Q_j$ tenemos $|f(x)| \leq \lambda$ en casi todo punto en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Escribimos ahora f separándola en las clásicas partes “buena” y “mala” $f = g + b$. Indeed, si como habitualmente f_{Q_j} denota el promedio de f en Q_j, podemos escribir

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ f_{Q_j}, & x \in Q_j, \end{cases}$$

que también verifica $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ en casi todo punto. Para la parte “mala” consideramos $b = \sum_j b_j$ donde $b_j(x) = (f(x) - f_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$. Importante señalar que en este caso, b es “excelente” y g tiene un un mal comportamiento.

Para cada j denotamos

$$\widetilde{Q_j} = 2Q_j, \quad \widetilde{\Omega} = \cup_j \widetilde{Q_j} \quad \text{and} \quad w_j(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} w\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} &\leq w\{x \in (\widetilde{\Omega})^c : |Tg(x)| > \lambda/2\} \\ &+ 2w(\widetilde{\Omega}) \\ &+ w\{x \in (\widetilde{\Omega})^c : |Tb(x)| > \lambda/2\} \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado:

Para el primer sumando, utilizando la desigualdad de Chebyschev y (2.6.1), para cualquier $p > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} I &= w\{x \in (\widetilde{\Omega})^c : |Tg(x)| > \lambda/2\} \\ &\leq c(pp')^p (r')^{p/p'} \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g|^p M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\ &\leq c(pp')^p (r')^{p/p'} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\ &\leq c(pp')^p (r')^{p/p'} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx + \int_{\Omega} |g|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \right) \\ &= c(pp')^p (r')^{p/p'} \frac{1}{\lambda}(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |g|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f|\, M_r w(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, M_r w(x)dx,
\end{aligned}
$$

claramente.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Omega} |g|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} |f_{Q_j}|\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)|\, dy\, M_r(w\chi_{(\widetilde{\Omega})^c})dx \\
&\leq c\sum_j \int_{Q_j} |f(y)|\, dy \frac{1}{|Q_j|} \inf_{Q_j} M_r(w\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j})|Q_j| \\
&\leq c\sum_j \int_{Q_j} |f(y)| M_r w(y)\, dy \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| M_r w(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Combinando las estimaciones obtenidas y eligiendo el exponente de la desigualdad inversa de Holder óptima $r = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$, por el lema de la desigualdad inversa de Hölder tenemos que

$$
w\{x \in (\widetilde{\Omega})^c : |Tg(x)| > \lambda/2\} \leq \frac{c(p'[w]_{A_1})^p}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w dx.
$$

El segundo término, II, se estima de la manera habitual como sigue

$$
\begin{aligned}
II = w(\widetilde{\Omega}) &\leq c\sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|}|Q_j| \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|f(x)|Mw(x)\,dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)\,dx \qquad (2.7.3) \\
&\leq \frac{c}{\lambda}[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)\,dx, \qquad (2.7.4)
\end{aligned}
$$

porque $w \in A_1$.

Y el tercer término es tan “excelente” que verifica la conjetura de Muckenhoupt-Wheeden (2.0.5) por un argumento bien conocido en el que utilizamos la cancelación de los b_j:

$$
\begin{aligned}
III &= w\{x \in (\widetilde{\Omega})^c : |Tb(x)| > \lambda\} \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,Mw(x)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,w(x)dx,
\end{aligned}
$$

por ser $w \in A_1$.

Combinando las tres estimaciones obtenidas, y eligiendo

$$p = 1 + \frac{1}{\log(1 + [w]_{A_1})}$$

obtenemos que

$$w\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{c[w]_{A_1}(1 + \log[w]_{A_1})}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|wdx.$$

□

3

Conmutadores de integrales singulares y funciones de BMO

Queda prohibido no hacer las cosas por mí mismo,
no creer en mi dios y hacer mi destino,
tener miedo a la vida y a sus castigos,
no vivir cada día como si fuera un último suspiro.

(Alfredo Cuervo Barrero)

Índice

En este capítulo realizaremos un somero repaso sobre los resultados obtenidos para el conmutador de una integral singular y una función de BMO. Recordemos que en el caso en el que T es una integral singular tendremos entonces que

$$[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)f(y)\,dy,$$

donde K es el núcleo que define la integral singular T.

Aunque inicialmente el estudio de estos operadores estuvo relacionado con las generalizaciones del teorema de factorización para espacios de Hardy, se han encontrado otras muchas aplicaciones y en particular en ecuaciones en derivadas parciales.

El resultado principal en [CRoW] nos da una caracterización de la acotación de estos operadores por medio de la clase BMO, esto es:

TEOREMA 3.0.2 *[CRoW] Dada T una intergral singular y b una función localmente integrable, se tiene que*

$$[b,T] : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow b \in BMO, \tag{3.0.1}$$

siempre que $1 < p < \infty$.

Estos operadores se comportan a menudo como los operadores de Calderón-Zygmund pero presentan algunas diferencias sustanciales importantes como por ejemplo, que a diferencia de lo que ocurre con los operadores integrales singulares, la prueba de la acotación en L^p no se basa en la desigualdad débil $(1,1)$. De hecho, simples ejemplos muestran que en general $[b,T]$ no es de tipo débil $(1,1)$ cuando $b \in BMO$. Así lo observó C. Pérez en [Pe1] con el siguiente ejemplo:

Si consideramos la transformada de Hilbert

$$Hf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

y la función de BMO $b(x) = \log|1+x|$, y eligiendo $f \approx \delta$, en el origen tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy < \infty$, tenemos que para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R} : |[b,T]f(x)| > \lambda\}| &= \lambda\left|\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\log|1+x|}{x}\right| > \lambda\}\right| \\ &\geq \lambda\left|\{x > e : \frac{\log x}{x} > \lambda\}\right| \\ &= \lambda\,(\varphi^{-1}(\lambda) - e), \end{aligned}$$

donde φ es la función decreciente $\varphi : (e,\infty) \to (0, e^{-1})$, dada por $\varphi(x) = \frac{\log x}{x}$.

Para concluir observamos que la parte derecha de la estimación no está acotada cuando tiende a cero:

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda\varphi^{-1}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda)\lambda = \infty.$$

.

En ese mismo artículo, C. Pérez demostró también que los conmutadores sí verifican una apropiada desigualdad débil de tipo $L(\log L)$ y que señalaremos en este capítulo. Respecto al Principio de Calderón–Zygmund, Carlos Pérez observó en [Pe2] que M no es el operador adecuado para controlar $[b, T]$, y sí que es muy adecuado $M^2 = M \circ M$. Este aspecto es suficiente para comprobar el comportamiento diferente de los conmutadores con respecto a los operadores de Calderón-Zygmund.

La prueba de la acotación fuerte de Coifman, Rochberg y Weiss sigue un esquema que muestra la estrecha relación entre la existencia de desigualdades con peso para el operador T y la acotación de los conmutadores: "una desigualdad apropiada con peso para T da una desigualdad sin peso para $[b, T]$, si $b \in BMO$".

Más tarde, J.O. Strömberg da una prueba diferente (que puede consultarse en [Tor], página 417) que tiene la ventaja de que permite probar que estos conmutadores también están acotados en $L^p(w)$ siempre que $w \in A_p$. Esta prueba está basada en el uso de la función maximal clásica de Fefferman-Stein y no es suficientemente precisa para desarrollos más avanzados.

3.1. Relación entre M^2 y M_{LlogL}

Tal y como acabamos de señalar, para encontrar la desigualdad de tipo débil para el conmutador en el caso de los espacios con peso, aparece de manera natural la relación entre el conmutador y la M^2, siendo por lo tanto M^2 el operador maximal que "controla" a los conmutadores verificándose así el principio de Calderón-Zygmund del que hemos hablado en el capítulo I.

Estudiaremos entonces en esta sección a M^2, y veremos cómo M^2 y M_{LlogL} son iguales salvo constantes que dependen únicamente de la dimensión (ver [Pe1]). Para ello, veremos previamente dos lemas necesarios para la demostración del resultado:

LEMA 3.1.1 ***Existe una constante positiva dimensional c tal que para cualquier cubo Q y cualquier función medible w,***

$$\|w\|_{L(\log L)(Q)} \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q M(w\chi_Q)\, dx, \tag{3.1.1}$$

Demostración:

Fijemos un cubo Q. La estimación clave se sigue de la estimación de tipo débil $(1,1)$ inversa siguiente: Si g es no negativa y $t > g_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q g$,

$$\frac{1}{t}\int_{\{x\in Q: g(x)>t\}} g\,dx \le 2^n\,|\{x \in Q : M(g\chi_Q)(x) > t\}|. \tag{3.1.2}$$

Consideremos

$$\lambda_Q = \frac{c}{|Q|}\int_Q M(w\chi_Q)\,dx = c\,(M(w\chi_Q))_Q,$$

siendo c una constante que fijaremos después.

Para demostrar (3.1.1), y por la definición de $\|\cdot\|_{L\log L,Q}$, bastará demostrar que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{w}{\lambda_Q}\log(e+\frac{w}{\lambda_Q})\,dx \le 1.$$

Escribimos $f = \dfrac{w}{\lambda_Q}$. Entonces

$$f_Q = \left(\frac{w}{\lambda_Q}\right)_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{w(x)}{\lambda_Q}\,dx \le \frac{1}{c}, \tag{3.1.3}$$

por el teorema de diferenciación de Lebesgue.

Por la fórmula de integración por capas, considerando $\phi(t) = \log(e+t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{|Q|}\int_Q f\log(e+f)\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_0^{+\infty}\frac{1}{e+t}f(\{x\in Q: f(x)>t\})\,dt \\ &= \frac{1}{|Q|}\left(\int_0^{f_Q}\frac{1}{e+t}f(\{x\in Q: f(x)>t\})\,dt + \int_{f_Q}^{+\infty}\frac{1}{e+t}f(\{x\in Q: f(x)>t\})\,dt\right) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{|Q|}\int_0^{f_Q} \frac{1}{e+t} f(\{x \in Q : f(x) > t\})\, dt \\
&= \frac{1}{\lambda_Q |Q|}\int_0^{f_Q} \frac{1}{e+t} w(\{x \in Q : f(x) > t\})\, dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda_Q |Q|}\int_0^{f_Q} w(Q)\, dt \\
&= \frac{1}{\lambda_Q}\frac{w(Q)}{|Q|} f_Q \\
&\leq \frac{w(Q)}{(M(w\chi_Q))(Q)} f_Q \\
&\leq \frac{1}{c^2}.
\end{aligned}
$$

Para estudiar qué ocurre con el segundo sumando I_2, tendremos que utilizar la desigualdad (3.1.2)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{|Q|}\int_{f_Q}^{\infty} \frac{1}{e+t} f(\{x \in Q : f(x) > t\})\, dt \\
&= \frac{1}{|Q|}\int_{f_Q}^{\infty} \frac{1}{e+t} \int_{\{x \in Q : f(x) > t\}} f(x)\, dx\, dt \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_{f_Q}^{\infty} \frac{1}{e+t} 2^n t |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > t\}|\, dt \\
&\leq \frac{2^n}{|Q|}\int_{f_Q}^{\infty} |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > t\}|\, dt \\
&\leq \frac{2^n}{|Q|}\int_0^{\infty} \int_{\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > t\}} dx\, dt \\
&= \frac{2^n}{|Q|}\int_Q \int_0^{M(f\chi_Q)(x)} dt\, dx \\
&= \frac{2^n}{|Q|}\int_Q \frac{1}{\lambda_Q} M(w\chi_Q)\, dx \\
&\leq \frac{2^n}{c}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que

$$I = \frac{1}{|Q|}\int_Q f\log(e+f)\,dx \le \frac{1}{c^2} + \frac{2^n}{c} \le 1,$$

si elegimos por ejemplo $c = 2^{n+1}$.

□

LEMA 3.1.2 ***Existe una constante positiva c tal que para cualquier cubo Q y cualquier función medible w tal que* supp *$w \subset Q$,***

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mw\,dx \le c\,\|w\|_{L(\log L)(Q)}. \tag{3.1.4}$$

Demostración:

Por homogeneidad podemos asumir que $\|w\|_{L(\log L)(Q)} = 1$, ya que si no es así, bastaría con dividir por esta norma desde el comienzo. Así que demostraremos lo que queremos si vemos que

$$I = \frac{1}{|Q|}\int_Q Mw\,dx \le c. \tag{3.1.5}$$

Para probarlo, utilizaremos la integración por capas y el hecho de que M es (1,1)-débil.

Veámoslo:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{|Q|}\int_Q Mw(x)\,dx \\
&= \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty |\{x\in Q : Mw(x)>t\}|\,dt \\
&= \frac{1}{|Q|}\left(\int_0^1 |\{x\in Q : Mw(x)>t\}|\,dt + \int_1^\infty |\{x\in Q : Mw(x)>t\}|\,dt\right) \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_0^1 \int_{\{x\in Q: Mw(x)>t\}} dx\,dt + c\int_1^\infty \frac{1}{t}\int_{\{x\in Q: w(x)>t\}} w(x)\,dx\,dt\right) \\
&= \frac{1}{|Q|}\left(|Q| + c\int_Q w(x)\int_1^{w(x)} \frac{dt}{t}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{|Q|}\left(|Q| + c\int_Q w(x)\log^+ w(x)\,dx\right) \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

ya que por la definición de norma:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\log(e+w(x))\,dx \leq 1.$$

□

Como consecuencia de los dos lemas anteriores tenemos que:

TEOREMA 3.1.3 ***Dada una función $w \in L^1_{loc}$, se verifica que:***

$$M^2 w(x) \approx M_{L\log L} w(x)$$

con constantes geométricas. Además, si $k \in \mathbb{N},\ k > 1$, considerando

$$\|f\|_{L\log^k L,Q} = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi_k(\frac{|f|}{\lambda})\, dx \leq 1\},$$

siendo $\Phi_k(t) = t\log^k(e+t)$, y definiendo

$$M_{L\log^k L} f(x) = \sup_{Q\ni x} \|f\|_{L\log^k L,Q}$$

se verifica que:

$$M^k w(x) \approx M_{L\log^k L} w(x) \tag{3.1.6}$$

con constantes geométricas.

Demostración:

La desigualdad

$$M_{L\log L} w(x) \leq c\, M^2 w(x). \tag{3.1.7}$$

se deduce de (3.1.1) claramente.

Para demostrar que para cualquier w

$$M^2 w(x) \leq c\, M_{L\log L} w(x), \tag{3.1.8}$$

fijamos un cubo Q que contenga a x, y escribimos $w = w_1 + w_2$ donde $w_1 = w\chi_{3Q}$. Entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mw \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q Mw_1 + \frac{1}{|Q|}\int_Q Mw_2 = I + II.$$

Estudiemos cada sumando por separado, comenzando por II. En este caso utilizamos que Mw_2 es esencialmente constante en Q de: $Mw_2(y) \approx Mw_2(z)$, con $z, y \in Q$ por ser $w_2(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q}$. Entonces:

$$II \leq C\, Mw_2(x) \leq C\, Mw(x).$$

Y por lo tanto, por la desigualdad generalizada de Jensen $M^2 w_2(x) \leq M_{L\log L} w(x)$.

Para estimar I utilizaremos (3.1.4):

$$I \leq C \frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} M w_1 \leq C \|w\|_{L(\log L)(3Q)} \leq C\, M_{L\log L} w(x),$$

por definición de $M_{L\log L} w$.

La demostración para el resultado de k iteraciones de M (3.1.6) se hace a través de un argumento de inducción. □

3.2. Desigualdades puntuales

Uno de los puntos clave en las demostraciones del los resultados del siguiente capítulo será la aplicación del lema 2.5.2, tras lo que nos aparece $M_\delta^{\#}(Tf)$. Para continuar con el desarrollo de la prueba, se necesita entonces un resultado que nos relacione este operador con la Mf que es exactamente el lema (2.4.1). En los resultados relacionados con el conmutador, necesitaremos una desigualdad puntual que relaciona a dicho operador con la M^2 a través de la función maximal sharp. Es una de las desigualdades clave de esta memoria y debido a ello, reproduciremos aquí la demostración que de este resultado hizo C. Pérez en [Pe1].

LEMA 3.2.1 *[Pe1]* ***Sea $b \in BMO$ y sea $0 < \delta < \epsilon < 1$. Entonces existe una constante positiva $C = C_{\delta,\epsilon}$ tal que***

$$M_\delta^{\#}([b,T]f)(x) \leq C\|b\|_{BMO}(M_\varepsilon(Tf)(x) + M^2 f(x))$$

para toda función "suave" f.

Demostración:

Sea $B = B(x,r)$ una bola arbitraria. Como $0 < \delta < 1$ implica que $||\alpha|^\delta - |\beta|^\delta| \leq |\alpha - \beta|^\delta$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es suficiente probar que para alguna constante compleja $c = c_B$ existe $C = C_\delta > 0$ tal que

$$A = \left(\frac{1}{|B|}\int_B |[b,T]f(y) - c|^\delta\, dy\right)^{1/\delta} \leq C\,\|b\|_{BMO}\big(M_\varepsilon(Tf)(x) + M^2 f(x)\big). \qquad (3.2.1)$$

Sea $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\,\chi_{2B}$. Para una constante arbitraria a podemos escribir

$$[b,T]f = (b-a)Tf - T((b-a)f_1) - T((b-a)f_2).$$

Si tomamos $c = (T((b-a)f_2))_B$, y $a = b_{2B}$ tenemos que

$$A = \left(\frac{1}{|B|}\int_B |[b,T]f(y) - c|^{\delta}\,dy\right)^{1/\delta} \leq c\,(I + II + III),$$

siendo

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y) - b_{2B})Tf(y)|^{\delta}\,dy\right)^{1/\delta}, \\
II &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b - b_{2B})f_1)(y)|^{\delta}\,dy\right)^{1/\delta}, \\
III &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b - b_{2B})f_2) - (T((b - b_{2B})f_2))_B|^{\delta}\,dy\right)^{1/\delta}.
\end{aligned}$$

Para estimar I utilizaremos la desigualdad de Hölder con exponentes r y r' donde $1 < r < \frac{\varepsilon}{\delta}$:

$$\begin{aligned}
I &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(y) - b_{2B})|^{\delta r'}\,dy\right)^{1/\delta r'} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(y)|^{\delta r}\,dy\right)^{1/\delta r} \\
&\leq C\,\|b\|_{BMO} M_{\delta r}(Tf)(x) \\
&\leq C\,\|b\|_{BMO} M_{\varepsilon}(Tf)(x).
\end{aligned}$$

Como $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \delta < 1$, la desigualdad de Kolmogorov ((1.1.2)) nos lleva a

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{|B|}\int_B |(b(y) - b_{2B})f_1(y)|\,dy \\
&= \frac{C}{|2B|}\int_{2B} |(b(y) - b_{2B})f(y)|\,dy \\
&\leq C\,\|b - b_{2B}\|_{expL,2B}\,\|f\|_{LlogL,2B} \\
&\leq c\,\|b\|_{BMO} M_{L\log L}f(x),
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder generalizada (1.4.5) y la desigualdad de John-Nirenberg (1.5.5).

Para estudiar III consideremos la desigualdad de Jensen junto al teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
III &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |T((b-b_{2B})f_2)(y)-(T((b-b_{2B})f_2))_B|\,dy\\
&\leq \frac{1}{|B|^2}\int_B\int_B\int_{\mathbb{R}^n-2B}|k(y-w)-k(z-w)||(b(w)-b_{2B})f(w)|dw\,dz\,dy\\
&\leq \frac{1}{|B|^2}\int_B\int_B\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr\leq|w-x|<2^{j+1}r}\frac{|y-z|}{|x-w|^{n+1}}|b(w)-b_{2B}||f(w)|dw\,dz\,dy\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}}{(2^{j+1}r)^n}\int_{2^{j+1}B}|b(w)-b_{2B}||f(w)|\,dw\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}}{(2^{j+1}r)^n}\int_{2^{j+1}B}|b(w)-b_{2^{j+1}B}||f(w)|\,dw+\\
&\quad +C\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}|b_{2^{j+1}B}-b_{2B}|\frac{1}{(2^{j+1}r)^n}\int_{2^{j+1}B}|f(w)|\,dw\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\|b-b_{2^{j+1}B}\|_{expL,2^{j+1}B}\|f\|_{LlogL,2^{j+1}B}+C\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j}Mf(x)\\
&\leq C\|b\|_{BMO}M_{LlogL}f(x)+C\|b\|_{BMO}\,Mf(x)\\
&\leq C\|b\|_{BMO}M_{LlogL}f(x),
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado que $|b_{2^{j+1}B}-b_{2B}|\leq 2j\|b\|_{BMO}$, la desigualdad (1.5.6) y $Mf(x)\leq M_{LlogL}f(x)$ por la desigualdad de Jensen generalizada. Finalmente, como $M^2f\approx M_{LlogL}$ (3.1.3) hemos terminado.

□

3.3. Desigualdad débil para los conmutadores

Tal y como hemos dicho antes, el conmutador de una integral singular y una función de BMO no verifica la desigualdad débil de tipo $(1,1)$. Pero, C. Pérez en [Pe1] prueba la siguiente desigualdad que sí se verifica:

TEOREMA 3.3.1 *[Pe1] Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea b una función de BMO. Entonces, existe una constante positiva c tal que para toda función "suave" de soporte* *compacto f y para cada $\lambda > 0$*

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(y)| > \lambda\}| \leq C\|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dy, \tag{3.3.1}$$

donde $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

La prueba de esta estimación de tipo $LlogL$ se basa en la íntima relación que existe entre los conmutadores y la iteración de la función maximal de Hardy–Littlewood a través de la técnica de los buenos λ.

En el caso de los espacios con peso w, en el mismo trabajo C. Pérez demuestra el siguiente resultado

TEOREMA 3.3.2 *[Pe1] Sean b una función en BMO, $w \in A_1$ y sea T una integral singular. Entonces existe una constante positiva C tal que para toda función con soporte compacto f y para todo $\lambda > 0$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\}) \leq C_{\|b\|_{BMO}, \|w\|_{A_1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx, \tag{3.3.2}$$

donde $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

Esta desigualdad será la que mejoraremos en el capítulo siguiente en el apartado del caso débil.

Más tarde, G. Pradolini y C. Pérez en [PePr] mejoraron este último resultado como sigue, y en el que es importante señalar que no se impone condición alguna sobre el peso w.

TEOREMA 3.3.3 *[PePr] Dado $\varepsilon > 0$, se verifica que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\}) \leq c\,\Phi\left(\|b\|_{BMO}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^{1+\varepsilon}} w(x)dx.$$

donde $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$. La constante c es independiente del peso w, de la función f y de $\lambda > 0$.

Uno de los pasos importantes para probar este resultado es dar una versión del siguiente resultado clásico de Coifman y C. Fefferman [CF], resultado en el que se materializa el principio de Calderón–Zygmund:

TEOREMA 3.3.4 *Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea $0 < p < \infty$, entonces existe una constante $c = c_{p,[w]_{A_\infty}}$ tal que para cualquier $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq c_{p,[w]_{A_\infty}} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)dx. \tag{3.3.3}$$

La versión correspondiente para los conmutadores aparece a continuación y podemos encontrarla en [Pe2]. En este resultado vemos cómo el operador maximal adecuado para el conmutador es M^2.

TEOREMA 3.3.5 *[Pe2] Sea $0 < p < \infty$ y sea $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante positiva $c = c_{p,[w]_{A_\infty},\|b\|_{BMO}}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |[b,T]f(y)|^p \, w(y)\, dy \leq c_{p,[w]_{A_\infty},\|b\|_{BMO}} \int_{\mathbb{R}^n} M^2 f(y)^p \, w(y)\, dy. \tag{3.3.4}$$

C. Pérez utilizó la dualidad para demostrar este resultado, consiguiendo recorrer todo el rango $1 < p < \infty$. Para demostrar este resultado se necesita la desigualdad puntual que hemos estudiando en el apartado anterior y dos veces la desigualdad de Coifman–Fefferman.

3.4. Conmutadores de orden superior

Los resultados que se han revisado hasta ahora pueden extenderse a conmutadores de orden superior. Para ello, definiremos en primer lugar a estos operadores, introducidos por R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss en [CRoW]:

DEFINICIÓN 3.4.1 *Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea $b \in BMO$. Se definen los conmutadores de orden superior k, siendo $k = 0, 1, 2, \cdots$ a los operadores lineales siguientes*

$$T_b^k f(x) = \int (b(x) - b(y))^k K(x-y) f(y)\, dy.$$

Se observa que $T_b^0 = T$, $T_b^k = [b, T_b^{k-1}]$, $k = 1, 2, \cdots$.

El resultado fuerte que demostraron R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss en [CRoW] es el siguiente:

TEOREMA 3.4.2 *[CRoW] Sea $1 < p < \infty$ y $b \in BMO$. Entonces existe una constante c such that*

$$\left\|T_b^k f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|b\|_{BMO}^k\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.4.1}$$

C. Pérez demostró en [Pe2], tal y como vemos en el siguiente teorema, que el principio de Calderón–Zygmund en el caso de los conmutadores de orden k se verifica con la iteración $k+1$ de la maximal, es decir, el operador maximal que controla al conmutador $T_b^k f$ con $b \in BMO$ es M^{k+1}

TEOREMA 3.4.3 *[Pe2] Sea $0 < p < \infty$ y sean $w \in A_\infty$ y $b \in BMO$. Entonces, existe una constante c tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^k f(x)|^p\,w(x)dx \leq C\,\|b\|_{BMO}^{kp}\,[w]_{A_\infty}^{(k+1)p} \int_{\mathbb{R}^n} M^{k+1}f(x)^p\,w(x)dx. \tag{3.4.2}$$

Esta desigualdad contiene el hecho bien conocido de que los conmutadores de orden superior están acotados en $L^p(w)$, $w \in A_p$, aplicando $k+1$ veces el teorema de Muckenhoupt.

Necesitaremos también la versión correspondiente del lema 3.2.1, que nos dará una desigualdad puntual en la que se ve perfectamente la relación entre los conmutadores de orden superior y las iteraciones de la maximal:

LEMA 3.4.4 *Dada $b \in BMO$, y $0 < \delta < \epsilon < 1$, existe $C = C_{\delta,\epsilon} > 0$ tal que,*

$$M_\delta^{\#}(T_b^k f)(x) \leq C\|b\|_{BMO} \sum_{j=0}^{k-1} M_\varepsilon(T_b^j)(x) + \|b\|_{BMO}^k\,M^{k+1}f(x) \tag{3.4.3}$$

para cualquier función suave f.

C. Pérez obtuvo también el resultado análogo a (3.4.5) y a (3.3.2) en [**?**].

TEOREMA 3.4.5 *[Pe1] Sea $k = 0, 1, 2, \cdots$, y sea b una función de BMO. Entonces, existe una constante positiva c tal que para cada $\lambda > 0$*

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |T_b^k f(y)| > \lambda\}| \leq C\, \|b\|_{BMO}^k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right)^k dy.$$

El resultado débil con pesos es el siguiente

TEOREMA 3.4.6 *Sea $k = 0, 1, 2, \cdots$, y sea b una función de BMO. Supongamos que $w \in A_1$. Entonces, existe una constante positiva c tal que para cualquier función f de soporte compacto y para cualquier $\lambda > 0$ se verifica que*

$$w(\{y \in \mathbb{R}^n : |T_b^k f(y)| > \lambda\}) \leq C\|b\|_{BMO}^k\, [w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda}(1 + \log^+(\frac{|f(y)|}{\lambda}))^k\, w(y)dy. \tag{3.4.4}$$

Y para terminar, C. Pérez y G. Pradolini en [PePr] demostraron el siguiente resultado

TEOREMA 3.4.7 *[PePr] Sea T un operador de Calderón-Zygmund, $b \in BMO$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe una constante positiva c tal que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^k f(x)| > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(\|b\|_{BMO}^k \frac{|f(x)|}{\lambda})\, M_{L(\log L)^{k+\epsilon}}(w)(x)dx. \tag{3.4.5}$$

siendo $\Phi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$. La constante c es independiente del peso w, de la función f y de $\lambda > 0$.

De nuevo, en este resultado no se impone ningún tipo de condición sobre el peso w.

4

Crecimiento cuadrático en A_1 para conmutadores de integrales singulares con funciones BMO

Queda prohibido no intentar comprender a las personas,
pensar que sus vidas valen más que la mía,
no saber que cada uno tiene su camino y su dicha,
pensar que con su falta el mundo se termina.

(Alfredo Cuervo Barrero)

Índice

Una vez que en el capítulo anterior hemos revisado el comportamiento del conmutador respecto a las desigualdades de tipo débil, nuestro objetivo ahora será estudiar qué ocurre con las constantes en las estimaciones análogas a las que hemos presentado para las integrales singulares en los teoremas 2.6.1 y 2.7.1. Veremos aquí que los conmutadores tienen un "mal comportamiento" extra desde el punto de vista de los pesos A_1 en ambos casos. Este capítulo puede encontrarse esencialmente en [OC]

Al igual que hemos hecho en el caso de la integral singular en el capítulo 2 de esta tesis, comenzaremos explicando lo que se ha obtenido en el caso A_p para $1 < p < \infty$ para el conmutador, para después explicar nuestro caso especial A_1, tanto en el caso de la desigualdad fuerte como en el caso de la débil.

4.1. Resultados en el contexto de A_p

D. Chung en su tesis del año 2010 (ver [Ch2]) probó que el conmutador $[b, H]$, donde H es la transformada de Hilbert y $b \in BMO$, tiene una cota cuadrática en $L^2(w)$ con respecto a la constante A_2 del peso (ver también [Ch]). El resultado que obtiene es el siguiente:

TEOREMA 4.1.1 *[Ch] Sea H la transformada de Hilbert, b una función de BMO y $w \in A_2$. Se verifica el siguiente resultado óptimo respecto a la constante A_2 del peso w:*

$$\|[b, H]\|_{L^2(w)} \leq c\,\|b\|_{BMO}[w]_{A_2}^2.$$

Su prueba se basa en métodos diádicos combinados con técnicas de funciones de Bellman. En estos mismos trabajos, D. Chung también prueba los resultados análogos correspondientes a las transformadas de Beurling y de Riesz.

Por otro lado, el propio Chung junto a Pereyra y a Pérez en [ChPP] probaron el resultado (4.1.1) con técnicas inspiradas en el el trabajo [CRoW] (técnicas de conjugación, ver anotación capítulo 3 [CRoW]). Este resultado es más general y establece que si un operador lineal T con una cota que presente un crecimiento lineal en $L^2(w)$ con respecto a la constante A_2 del peso, entonces su correspondiente conmutador presentará una cota con crecimiento cuadrático respecto a esa misma constante. El resultado obtenido es el siguiente:

TEOREMA 4.1.2 *[ChPP] Sea T un operador lineal tal que*

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \quad w \in A_2. \tag{4.1.1}$$

Entonces, existe una constante c independiente de w y b tal que

$$\|[b, T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{2\alpha}\,\|b\|_{BMO}. \tag{4.1.2}$$

Como una consecuencia evidente, señalamos el siguiente resultado:

COROLARIO 4.1.3 *Sea T un operador lineal que verifica* (4.1.1)*. Sea $1 < p < \infty$, entonces existe una constante $c_{n,p}$ tal que*

$$\|[b, T]\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}\,[w]_{A_p}^{2\,\text{máx}\{1, \frac{1}{p-1}\}}\|b\|_{BMO}. \tag{4.1.3}$$

Siguiendo el razonamiento del resultado de Hytönen esto implica que todos los conmutadores de integrales singulares y funciones de BMO tienen una cota cuadrática en $L^2(w)$ lo que puede extrapolarse a $L^p(w)$. Estos resultados han sido generalizados por Cruz-Uribe y Moen (ver [CrMo]) al problema de los dos pesos para integrales fraccionarias y para extensiones vectoriales.

4.2. Resultados necesarios

Antes de demostrar nuestros resultados para el caso del conmutador, estudiaremos en esta sección un par de cuestiones previas que serán necesarias para la demostración de los teoremas. El primero de ellos está inspirado en el lema 2.5.2, y el segundo sobre la acotación de M^2 de $L^p(w^{1-p})$ en $L^p((M_r w)^{1-p})$:

LEMA 4.2.1 *[OC]* ***Sea $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $0 < \varepsilon \leq 1$ y sea $w \in A_q$. Supongamos que f es una función tal que para $t > 0$, $|\{x : f(x) > t\}| < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c_{n,q,\varepsilon}$ tal que***

$$\left\|M^d_\varepsilon f\right\|_{L^p(w)} \leq c\, p[w]_{A_q} \left\|M^{\#,d}_\varepsilon f\right\|_{L^p(w)}. \tag{4.2.1}$$

Demostración:

(En esta prueba, y por simplificar la notación, denotaremos $M = M^d$).

Para probar el lema 4.2.1, aplicamos el lema 2.5.2 a $M_\varepsilon f$ con $\delta = \varepsilon_0$, tal que $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon < 1$, y obtenemos lo siguiente

$$\|M_\varepsilon f\|_{L^p(w)} \leq cp[w]_{A_q} \left\|M^\#_{\varepsilon_0}(M_\varepsilon f)\right\|_{L^p(w)}. \tag{4.2.2}$$

Por lo tanto, demostraremos lo que queremos si vemos que si $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon < 1$

$$M^\#_{\varepsilon_0}(M_\varepsilon f)(x) \leq c\, M^\#_\varepsilon f(x), \tag{4.2.3}$$

recordando que si $f \geq 0$

$$M^\#_{\varepsilon_0} f(x) = M^\#(f^{\varepsilon_0})^{1/\varepsilon_0}(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f^{\varepsilon_0} - (f^{\varepsilon_0})_Q|\, dy,\right)^{1/\varepsilon_0}. \tag{4.2.4}$$

Veamos entonces lo que hemos indicado. Para ello, fijamos x y un cubo diádico Q con $x \in Q$. Tenemos entonces que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|(M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y) - ((M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon})_Q\right| dy \tag{4.2.5}$$

$$\leq 2\frac{1}{|Q|}\int_Q (M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy - \operatorname*{ínf}_Q (M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}, \tag{4.2.6}$$

sumando y restando $\operatorname{ínf}_Q (M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}$.

Descomponemos f^ε, de la siguiente manera

$$f^\varepsilon(x) = g(x) + h(x), \tag{4.2.7}$$

donde $g(x) = (f^\varepsilon(x) - f^\varepsilon_Q)\chi_Q(x)$ y $h(x) = f^\varepsilon_Q \chi_Q(x) + f^\varepsilon(x)\chi_{(Q)^c}(x)$.

Como $\varepsilon_0/\varepsilon < 1$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mg)^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy + \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mh)^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy \tag{4.2.8}$$

Para finalizar, estudiamos por separado cada sumando. En el primero de ellos utilizamos la desigualdad de Kolmogorov (1.1.2) con $p = \varepsilon_0/\varepsilon < 1 = q$, y además necesitaremos utilizar que M es de tipo débil $(1,1)$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mg)^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy \leq C_{\varepsilon,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(y)|\,dy\right)^{\varepsilon_0/\varepsilon} \tag{4.2.9}$$

$$= C_{\varepsilon,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f^\varepsilon(y) - f^\varepsilon_Q|\,dy\right)^{\varepsilon_0/\varepsilon} \tag{4.2.10}$$

$$\leq C_{\varepsilon,\varepsilon_0}\,(M^\#_\varepsilon f(x))^{\varepsilon_0}. \tag{4.2.11}$$

Esta parte es el término peor ya que el otro término es menos singular. Si asumimos que es cierto que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mh)^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy \leq (\operatorname*{ínf}_Q M(f^\varepsilon))^{\varepsilon_0/\varepsilon}, \tag{4.2.12}$$

combinando esta desigualdad junto a (4.2.11) y (4.2.5) llegamos a (4.2.2) concluyendo la demostración del lema.

Para probar entonces (4.2.12) recordemos que $Mh(x) = \sup\limits_{R \ni x} \frac{1}{|R|}\int_R h(y)\,dy$, tomando el supremo sobre los cubos diádicos R que contienen a x. Distinguimos dos tipos de cubos:

1. Sea $R \subset Q$.

   En este caso,

$$\frac{1}{|R|}\int_R h(y)\,dy = \frac{1}{|R|}\int_R f_Q^{\varepsilon}\,dy = f_Q^{\varepsilon} \le \inf_Q M(f^{\varepsilon}). \tag{4.2.13}$$

2. Consideremos ahora $R \supset Q$

   En este otro caso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|R|}\int_R h(y)\,dy &= \frac{1}{|R|}|R\cap Q| f_Q^{\varepsilon} + \frac{1}{|R|}\int_{R\cap Q^c} f^{\varepsilon}(y)\,dy \\
&= \frac{|Q|}{|R|} f_Q^{\varepsilon} + \frac{1}{|R|}\int_{R\cap Q^c} f^{\varepsilon}(y)\,dy \\
&= \frac{1}{|R|}\int_{R\cap Q} f^{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{1}{|R|}\int_{R\cap Q^c} f^{\varepsilon}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{|R|}\int_R f^{\varepsilon}(x)\,dx \le \inf_Q M(f^{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mh)^{\varepsilon_0/\varepsilon}(y)\,dy \le \frac{1}{|Q|}\int_Q (\inf_Q M(f^{\varepsilon}))^{\varepsilon_0/\varepsilon}\,dy = (\inf_Q M(f^{\varepsilon}))^{\varepsilon_0/\varepsilon}. \tag{4.2.14}$$

□

PROPOSICIÓN 4.2.2 *[OC] **Sea M^2 la composición $M \circ M$, y sea $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante c independiente de r, p tal que***

$$\left\| M^2 f \right\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \le c\,(p')^2 (r')^{1+1/p} \| f \|_{L^p(w^{1-p})}.$$

Demostración:

Para probar el resultado que queremos utilizamos en primer lugar el teorema de Buckley 2.5.3

$$\begin{aligned}
\left\|M^2 f\right\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} &= \|M(Mf)\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n p' \left[(M_r w)^{1-p}\right]_{A_p}^{1/(p-1)} \|Mf\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n p' \left[(M_r w)\right]_{A_1}^{(p-1)/(p-1)} \|Mf\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n\, r'(p')^2 (r')^{1/p} \|f\|_{L^p(w^{1-p})}
\end{aligned}$$

aplicando la propiedad (1.3.2) y el lema 2.5.4.

□

4.3. Crecimiento cuadrático de la constante A_1

A continuación, estudiaremos cómo se comporta la constante A_1 en el caso de la acotación fuerte del conmutador[1]. En la prueba de este teorema puede observase perfectamente cómo la relación entre el conmutador y la M^2 surge de manera natural y que, debido a esto la singularidad del conmutador es mayor que la de la integral singular.

TEOREMA 4.3.1 *[OC] Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea b una función de BMO. Consideremos también los parámetros $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T}$ tal que para cualquier peso w, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\|[b,T]f\|_{L^p(w)} \leq c\,\|b\|_{BMO}\,(pp')^2\,(r')^{1+\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L^p(M_r w)}. \tag{4.3.1}$$

en particular, si $w \in A_1$, tenemos que

$$\|[b,T]\|_{L^p(w)} \leq c\,\|b\|_{BMO}(pp')^2[w]_{A_1}^2. \tag{4.3.2}$$

Es importante indicar que este resultado es óptimo en p y en el exponente de $[w]_{A_1}$.

[1] Recientemente hemos mejorado el resultado que aquí se presenta en el mismo sentido que lo hacen T. Hytönen y C. Pérez en (2.0.14)

Demostración: Probaremos que (4.3.1), es decir, veremos que se verifica que

$$\|[b,T]f\|_{L^p(w)} \leq c(pp')^2 \|b\|_{BMO} (r')^{1+\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(M_r w)}.$$

Una aplicación directa de 2.1.1 con $r = r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ terminaría la demostración del teorema 4.3.1.

Por dualidad, la desigualdad (4.3.1) es equivalente a demostrar que

$$\left\| \frac{[b,T]^* f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} \leq c\,(pp')^2 \|b\|_{BMO} (r')^{1+\frac{1}{p'}} \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^{p'}(w)}, \tag{4.3.3}$$

donde $[b,T]^*$ es el operador adjunto de $[b,T]$. Por la definición de norma con respecto al espacio dual, tenemos que

$$\left\| \frac{[b,T]^* f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} = \sup_{\|h\|_{L^p(M_r w)} = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [b,T]^* f(x) h(x)\, dx \right|. \tag{4.3.4}$$

En primer lugar, por el apartado (i) del lema 2.3.1 para $s = p'$ y $v = M_r w$ existe un operador R tal que

$$\begin{aligned} I &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [b,T]^* f(x) h(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |[b,T]^* f(x)|\, |h(x)|\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |[b,T]^* f(x)|\, Rh(x)\, dx. \end{aligned}$$

Además, combinando el apartado (iii) del mismo lema anteriormente citado (2.3.1) para $s = p$ y $v = M_r w$ con (1.3.2) y (2.2.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} [Rh]_{A_3} &= [Rh(M_r w)^{1/p} (M_r w)^{-1/p}]_{A_3} = [Rh(M_r w)^{1/p} ((M_r w)^{1/2p})^{-2}]_{A_3} && (4.3.5) \\ &\leq [Rh(M_r w)^{1/p}]_{A_1} [(M_r w)^{1/2p}]^2_{A_1} && (4.3.6) \\ &\leq c_n\, p'. && (4.3.7) \end{aligned}$$

Aplicando ahora el lema 2.5.2 al operador $[b,T]^*$ con peso $w = Rh$, y para $q = 3$ y $p = 1$ llegamos a que

$$I \leq c_\delta\, [Rh]_{A_3} \int_{\mathbb{R}^n} M_\delta^{\#}([b,T]^* f)(x)\, Rh(x)\, dx.$$

Como $[b,T]^* = -[b,T^*]$ también es un conmutador de Calderón-Zygmunnd con una función de BMO, aplicamos ahora el lema 3.2.1 con $0<\delta<\varepsilon$.

$$\begin{aligned} I &\leq c_{n,\delta,\varepsilon}\|b\|_{BMO}p' \int_{\mathbb{R}^n} \big(M_\varepsilon(T^*f)(x) + M^2f(x)\big)\, Rh(x)\,dx \\ &= c_{n,\delta,\varepsilon}\|b\|_{BMO}p'(I_1+I_2). \end{aligned}$$

En el caso del segundo sumando I_2, por la desigualdad de Hölder y utilizando el apartado (ii) del lema 2.3.1 y (4.5.8) tenemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} M^2f(x)\,Rh(x)\,dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M^2f(x)|^{p'}(M_rw(x))^{1-p'}\,dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M_rw(x)(Rh(x))^p\,dx\right)^{1/p} \\ &= 2\left\|\frac{M^2f}{M_rw}\right\|_{L^{p'}(M_rw)}. \end{aligned}$$

En el caso del primer sumando I_1, aplicamos en primer lugar el lema 4.2.1 a $M_\varepsilon(T^*f)$ con peso $w=Rh$, y para $q=3$ y $p=1$, para después utilizar el lema 2.4.1 (eligiendo ahora $0<\varepsilon<1$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |M_\varepsilon(T^*f)(x)|\,|Rh(x)|dx \leq c_{n,\varepsilon}\,[Rh]_{A_3}\int_{\mathbb{R}^n} |M_\varepsilon^{\#}(T^*f)(x)|\,|Rh(x)|dx \\ &\leq c_{n,\varepsilon}\,[Rh]_{A_3}\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|\,|Rh(x)|dx \leq c_{n,\varepsilon}\,p'\left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^{p'}(M_rw(x))^{1-p'}\,dx\right)^{1/p'} \\ &= c_{n,\varepsilon}\,p'\left\|\frac{Mf}{M_rw}\right\|_{L^{p'}(M_rw)}, \end{aligned}$$

utilizando el apartado (ii) del lema 2.3.1 y la desigualdad de Hölder, tal y como ya hemos hecho al estimar el sumando I_2.

Combinando entonces las estimaciones obtenidas tenemos que

$$\left\|\frac{[b,T]^*}{M_rw}\right\|_{L^{p'}(M_rw)} \leq c_{n,\delta,\varepsilon}\,\|b\|_{BMO}\,(p')^2\big\|M^2f\big\|_{L^{p'}((M_rw)^{1-p'})}. \tag{4.3.8}$$

Para terminar la demostración del teorema, aplicamos la proposición 4.2.2 para obtener la desigualdad (4.3.3), que tal y como hemos señalado, nos lleva a (4.3.1).

□

4.4. El caso en el extremo

Tal y como hemos visto en el capítulo anterior, el conmutador de integrales singulares y funciones de BMO no verifica la desigualdad débil $(1,1)$. Pero sí una de tipo más débil, que resulta ser una optimización de (3.3.2). En esta sección demostraremos la desigualdad débil correspondiente que surge de la acotación fuerte del apartado anterior.

TEOREMA 4.4.1 *[OC] Sea T y b como en el resto del capítulo. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T,\|b\|_{BMO}}$ tal que para cualquier peso $w \in A_1$ y para cualquier función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\} \leq c\,\Phi([w]_{A_1})^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\,dx, \tag{4.4.1}$$

siendo $\Phi(t) = t(1+\log^+ t)$.

Demostración: Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ consideremos la clásica descomposición de Calderón–Zygmund de f a nivel λ. Obtenemos así una familia de cubos diádicos $\{Q_j\} = Q_j(x_{Q_j}, r_j)$ disjuntos dos a dos que verifican

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leq 2^n\lambda. \tag{4.4.2}$$

Esto implica que para $\Omega = \cup_j Q_j$ tenemos $|f(x)| \leq \lambda$ en casi todo punto en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Escribimos ahora f separándola en las clásicas partes “buena” y “mala” $f = g + h$. Indeed, si como habitualmente f_{Q_j} denota el promedio de f en Q_j, podemos escribir

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ f_{Q_j}, & x \in Q_j, \end{cases}$$

que también verifica $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ en casi todo punto. Para la parte “mala” consideramos $h = \sum_j h_j$ donde $h_j(x) = (f(x) - f_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$.

Para cada j denotamos

$$\widetilde{Q_j} = 3Q_j, \quad \widetilde{\Omega} = \cup_j \widetilde{Q_j} \quad \text{and} \quad w_j(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_j}$$

Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\}) &\leq w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |[b,T]g(x)| > \lambda/2\}) \\ &+ w(\widetilde{\Omega}) \\ &+ w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |[b,T]h(x)| > \lambda/2\}) \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Estudiaremos cada sumando por separado.

Para el primero utilizaremos la desigualdad de Chebyschev llamando $\widetilde{w}(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}}(x)$, y por la estimación L^p (4.3.1) del teorema 4.3.1 que es cierta para cualquier peso, tenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{c}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |[b,T]g(x)|^p \widetilde{w}(x)\, dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda^p} \|b\|_{BMO}^p (pp')^{2p} (r')^{(1+\frac{1}{p'})p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, M_r\widetilde{w}(x)\, dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \|b\|_{BMO}^p (pp')^{2p} (r')^{2p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, M_r\widetilde{w}(x)\, dx \\ &= \frac{c}{\lambda} \|b\|_{BMO}^p (pp')^{2p} (r')^{2p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |f(x)| \, M_r\widetilde{w}(x)\, dx + \int_{\Omega} |g(x)| \, M_r\widetilde{w}(x)\, dx \right). \end{aligned}$$

Es evidente que sólo necesitamos estimar el segundo término de la última expresión y para ello utilizaremos el hecho de que: Para cualquier función no negativa u con $Mu(x) < \infty$ en casi todo punto, a.e., para cualquier cubo Q, y cualquier $R > 1$ tenemos

$$M(\chi_{\mathbb{R}^n \setminus RQ} u)(y) \approx M(\chi_{\mathbb{R}^n \setminus RQ} u)(z) \qquad y, z \in Q \tag{4.4.3}$$

con constantes dependiendo únicamente de la dimensión (ver [GCRdF] p. 159).

Así, podemos estimar el segundo término con

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |g(x)|\, M_r\widetilde{w}(x)\, dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} |f_{Q_j}|\, M_r(w_j)(x)\, dx \\
&= \sum_j \left(\int_{Q_j} |f(x)| dx \right) \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} M_r w_j(x)\, dx \\
&\leq c \sum_j \left(\int_{Q_j} |f(x)|\, dx \right) \inf_{x\in Q_j} M_r w_j \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M_r w(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Hasta aquí, el parámetro $1 < r < \infty$ era arbitrario, pero si elegimos ahora $r = r_w$ siendo r_w el exponente óptimo de la desigualdad inversa de Hölder $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ del lema 2.1.1 podemos continuar con

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{c}{\lambda} \|b\|_{BMO}^p (pp')^{2p} [w]_{A_1}^{2p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M_r w(x)\, dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \|b\|_{BMO}^p (pp')^{2p} [w]_{A_1}^{2p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx.
\end{aligned}$$

El segundo término, II, se estima de la manera habitual como sigue

$$\begin{aligned}
II = w(\widetilde{\Omega}) &\leq c \sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|} |Q_j| \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)| M w(x)\, dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M w(x)\, dx \qquad (4.4.4) \\
&\leq \frac{c}{\lambda} [w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx, \qquad (4.4.5)
\end{aligned}$$

porque $w \in A_1$.

Para el tercer sumando III primero observemos que

$$[b,T]h(x) = \sum_j [b,T]h_j(x) = \sum_j (b(x) - b_{Q_j}) T h_j(x) - \sum_j T((b - b_{Q_j}) h_j)(x)$$

donde $b_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q b$. Entonces

$$\begin{aligned} III &\leq w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_j (b(x) - b_{Q_j})Th_j(x)| > \frac{\lambda}{4}\}) \\ &\quad + w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_j T((b - b_{Q_j})h_j)(x)| > \frac{\lambda}{4}\}) \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Siguiendo las estimaciones estándares del núcleo K obtenemos

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{\Omega}} \sum_j |b(x) - b_{Q_j}||Th_j(x)|\widetilde{w}(x)\,dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|w_j(x)\int_{Q_j} |h_j(y)||K(x,y) - K(x,x_{Q_j})|\,dy\,dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q_j} |K(x,y) - K(x,x_{Q_j})||b(x) - b_{Q_j}|w_j(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k r_j \leq |x - x_{Q_j}| < 2^k r_j} \frac{|y - x_{Q_j}|^{\varepsilon}}{|x - x_{Q_j}|^{n+\varepsilon}}|b(x) - b_{Q_j}|w_j(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^k r_j)^n}\int_{|x - x_{Q_j}| < 2^{k+1} r_j} |b(x) - b_{Q_j}|w_j(x)\,dx\right)dy \end{aligned}$$

Para controlar la suma en k utilizamos las estimaciones estándares junto a la desigualdad de Hölder generalizada y el teorema de John-Nirenberg. De hecho si $y \in Q_j$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{k+1} r_j)^n}\int_{|x - x_{Q_j}| < 2^{k+1} r_j} |b(x) - b_{Q_j}|w_j(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{k+1}r_j)^n}\int_{2^{k+1}Q_j}|b(x)-b_{2^{k+1}Q_j}|w_j(x)\,dx\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{k+1}r_j)^n}\int_{2^{k+1}Q_j}|b_{2^{k+1}Q_j}-b_{Q_j}|w_j(x)\,dx\\
&\leq c\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}\|b-b_{2^{k+1}Q_j}\|_{\exp L,2^{k+1}Q_j}\|w_j\|_{L\log L,2^{k+1}Q_j}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}(k+1)\|b\|_{BMO}\,Mw_j(y)\\
&\leq c\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}\|b\|_{BMO}M_{LlogL}w_j(y)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}(k+1)\|b\|_{BMO}\,[w]_{A_1}w_j(y)\\
&\leq c\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}(k+1)\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}M_{LlogL}w_j(y).
\end{aligned}
$$

Continuamos entonces la estimación de A de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
A &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\,M_{LlogL}w_j(y)dy\\
&\leq \frac{c}{\lambda}|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\sum_j\left(\int_{Q_j}|f(y)|\,M_{LlogL}w_j(y)dy+\int_{Q_j}|f_{Q_j}|\,M_{LlogL}w_j(y)dy\right)\\
&\leq \frac{c}{\lambda}|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,M_{LlogL}w(y)dy\\
&+ \frac{c}{\lambda}|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\sum_j\int_{Q_j}|f(x)|\,dx\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}M_{LlogL}w_j(y)dy\\
&\leq \frac{c}{\lambda}|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,M_{LlogL}w(y)dy+\sum_j\int_{Q_j}|f(x)|\inf_{Q_j}M_{LlogL}w_j\right)\\
&\leq \frac{c}{\lambda}|\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,M_{LlogL}w(y)dy
\end{aligned}
$$

Para estimar B usaremos la desigualdad (2.6.13) del corolario 2.6.2 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
B &\leq \widetilde{w}(\{x \in \mathbb{R}^n : |T(\sum_j (b - b_{Q_j})h_j)(x)| > \frac{\lambda}{4}\}) \\
&\leq c\,\frac{(p')^p (r')^{p-1}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j})h_j)(x) \right| M_r(\widetilde{w})(x)dx \\
&\leq c\,\frac{(p')^p (r')^{p-1}}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f(x) - f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx \\
&= c\,(p')^p (r')^{p-1}(B_1 + B_2) \\
&\leq c\,(p')^p [w]_{A_1}^{p-1}(B_1 + B_2),
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f(x)|\, M_r w_j(x)dx \\
B_2 &= \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx.
\end{aligned}$$

Para estimar B_2 utilizaremos (4.5.11)

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{c}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_r w_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f_{Q_j}|\, dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \sum_j \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| \int_{Q_j} |f(y)| M_r w_j(y)\, dy\, dx \\
&\leq c\|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} M_r w(x)\, dx,
\end{aligned}$$

observando que c es una constante que depende únicamente de loa dimensión.

Para B_1 sabemos que por la desigualdad generalizada de Hölder (1.4.5) y por el teorema de John-Nirenberg (1.5.5) que

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{c}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}||f(x)|\, M_r w_j(x)dx \\
&\leq \frac{c\|b\|_{BMO}}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_r w_j |Q_j| \|f\|_{L \log L, Q_j}.
\end{aligned}$$

Combinando entonces la fórmula (1.4.4) junto a (4.5.10) y recordando que $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|Q_j|\|f\|_{L\log L,Q_j} &\leq \frac{1}{\lambda}|Q_j| \inf_{\mu>0}\{\mu + \frac{\mu}{|Q_j|}\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right)dx\} \\
&\leq |Q_j| + \int_{Q_j}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx + \int_{Q_j}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \\
&\leq 2\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
B_1 &\leq c\,\|b\|_{BMO}\sum_j\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)dx \\
&\leq c\|b\|_{BMO}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)dx.
\end{aligned}$$

Combinando lo obtenido con las estimaciones logradas para los sumandos I, II y III, tenemos que

$$w(x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda) \leq \frac{c\|b\|_{BMO}^p}{\lambda}(pp')^{2p}[w]_{A_1}^{2p}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)M_{LlogL}w(x)dx.$$

Tomando $p = 1 + \frac{1}{\log(1+[w]_{A_1})}$ obtenemos la desigualdad que estábamos buscando porque $\frac{1}{\log(1+[w]_{A_1})} < 1$, y sabemos que para $A > 1$ se verifica que $A^{1/A} < e$.

□

4.5. Conmutadores de orden superior

Los resultados obtenidos en [OC] para el conmutador de operadores de Calderón-Zygmund con funciones de BMO también se verifican para los conmutadores de orden superior T_b^k definidos y estudiados en el último apartado del capítulo anterior. Dedicaremos este apartado a estudiar el comportamiento de estos operadores tanto en la desigualdad fuerte como en la débil. Para ello además de la desigualdad puntual introducida en (3.4.4) necesitaremos el resultado análogo a (4.2.2) siguiente:

PROPOSICIÓN 4.5.1 *[?] Sea M^{k+1} la composición $M \circ M \circ \cdots \circ M$, y sea $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante c independiente de r, p tal que*

$$\|M^{k+1} f\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \leq c\,(p')^{k+1}(r')^{k+1/p}\|f\|_{L^p(w^{1-p})}.$$

Demostración:

Para probar el resultado que queremos utilizamos un algoritmo de inducción y el teorema de Buckley 2.5.3. Sabemos que este resultado es cierto para los casos $k = 0$ (ver (**??**)) y $k = 1$ (ver (4.2.2)). Supongamos que es cierto para el caso k, es decir,

$$\|M^k f\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \leq c\,(p')^k(r')^{k-1+1/p}\|f\|_{L^p(w^{1-p})}, \tag{4.5.1}$$

y probaremos el caso $k + 1$. Entonces, por el teorema de Buckley 2.5.3

$$\begin{aligned}
\|M^{k+1} f\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} &= \|M(M^k f)\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n p' \, [(M_r w)^{1-p}]_{A_p}^{1/(p-1)} \|M^k f\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n p' \, [(M_r w)]_{A_1} \|M^k f\|_{L^p((M_r w)^{1-p})} \\
&\leq c_n \, r'(p')^{k+1}(r')^{k-1+1/p}\|f\|_{L^p(w^{1-p})}
\end{aligned}$$

aplicando el lema 2.5.4 y por el resultado para el caso k, (4.5.1).

□

Demostraremos ahora la desigualdad fuerte para el conmutador de orden k. Veremos aquí que el operador maximal de referencia para este operador es precisamente M^{k+1}.

TEOREMA 4.5.2 *[?] Sea T_b^k el conmutador de orden k de un operador de Calderón–Zygmund con b función de BMO. Consideremos también los parámetros $1 < p, r < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T}$ tal que para cualquier peso w, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\left\|T_b^k f\right\|_{L^p(w)} \leq c\, \|b\|_{BMO}^k\, (pp')^{k+1}\, (r')^{k+\frac{1}{p'}}\, \|f\|_{L^p(M_r w)}. \tag{4.5.2}$$

en particular, si $w \in A_1$, tenemos que

$$\left\|T_b^k\right\|_{L^p(w)} \leq c\, \|b\|_{BMO}^k (pp')^{k+1} [w]_{A_1}^{k+1}. \tag{4.5.3}$$

Es importante indicar que este resultado es óptimo en p y en el exponente de $[w]_{A_1}$.

Demostración: Probaremos (4.5.2), es decir, veremos que

$$\left\|T_b^k f\right\|_{L^p(w)} \leq c (pp')^{k+1}\, \|b\|_{BMO}^k\, (r')^{k+\frac{1}{p'}}\, \|f\|_{L^p(M_r w)}.$$

Una aplicación directa de 2.1.1 con $r = r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ terminaría la demostración 4.5.3.

Por dualidad, la desigualdad (4.5.2) es equivalente a demostrar que

$$\left\|\frac{(T_b^k)^* f}{M_r w}\right\|_{L^{p'}(M_r w)} \leq c\, (pp')^{k+1}\, \|b\|_{BMO}^k\, (r')^{k+\frac{1}{p'}} \left\|\frac{f}{w}\right\|_{L^{p'}(w)}, \tag{4.5.4}$$

donde $(T_b^k)^*$ es el operador adjunto de T_b^k. Por la definición de norma con respecto al espacio dual, tenemos que

$$\left\|\frac{(T_b^k)^* f}{M_r w}\right\|_{L^{p'}(M_r w)} = \sup_{\|h\|_{L^p(M_r w)} = 1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (T_b^k)^* f(x) h(x)\, dx\right|. \tag{4.5.5}$$

En primer lugar, por el apartado (i) del lema 2.3.1 para $s = p'$ y $v = M_r w$ existe un operador R tal que

$$\begin{aligned} I &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (T_b^k)^* f(x) h(x)\, dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(T_b^k)^* f(x)|\, |h(x)|\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(T_b^k)^* f(x)|\, Rh(x)\, dx. \end{aligned}$$

Además, combinando el apartado (iii) del mismo lema anteriormente citado (2.3.1) para $s = p$ y $v = M_r w$ con (1.3.2) y (2.2.1) obtenemos que

$$\begin{aligned}
[Rh]_{A_3} &= [Rh(M_r w)^{1/p}(M_r w)^{-1/p}]_{A_3} = [Rh(M_r w)^{1/p}((M_r w)^{1/2p})^{-2}]_{A_3} && (4.5.6)\\
&\leq [Rh(M_r w)^{1/p}]_{A_1}[(M_r w)^{1/2p}]^2_{A_1} && (4.5.7)\\
&\leq c_n\, p'. && (4.5.8)
\end{aligned}$$

Aplicando ahora el lema 2.5.2 al operador $(T_b^k)^*$ con peso $w = Rh$, y para $q = 3$ y $p = 1$ llegamos a que

$$I \leq c_\delta\, [Rh]_{A_3} \int_{\mathbb{R}^n} M_\delta^{\#}((T_b^k)^* f)(x)\, Rh(x)\, dx.$$

Como $(T_b^k)^* = (-1)^k (T_b^k)^*$ también es un conmutador orden k de un operador Calderón-Zygmunnd con una función de BMO, aplicamos ahora el lema 3.4.4 con $0 < \delta < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
I &\leq c_{n,\delta,\varepsilon} p' \left(\|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{k-1} M_\varepsilon((T_b^j)^* f)(x)\, Rh(x) dx + \|b\|^k_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} M^{k+1} f(x)\, Rh(x) dx \right)\\
&= c_{n,\delta,\varepsilon} p' \left(\sum_{j=0}^{k-1} I_j + I_k \right).
\end{aligned}$$

En el caso del término I_k, por la desigualdad de Hölder y utilizando el apartado (ii) del lema 2.3.1 y (4.5.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
I_k &= \|b\|^k_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} M^{k+1} f(x)\, Rh(x)\, dx\\
&\leq \|b\|^k_{BMO} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M^{k+1} f(x)|^{p'} (M_r w(x))^{1-p'}\, dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M_r w(x) (Rh(x))^p\, dx \right)^{1/p}\\
&= 2\, \|b\|^k_{BMO} \left\| \frac{M^{k+1} f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)}.
\end{aligned}$$

En el caso del término I_{k-1}, aplicamos en primer lugar el lema 4.2.1 a $M_\varepsilon((T_b^{k-1})^* f))$ con peso $w = Rh$, y para $q = 3$ y $p = 1$, para después utilizar el lema 3.4.4 (eligiendo ahora

$0 < \varepsilon < 1$):

$$\begin{aligned}
I_{k-1} &= \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} |M_\varepsilon((T_b^{k-1})^* f))(x)|\, |Rh(x)| dx \\
&\leq c_{n,\varepsilon} [Rh]_{A_3} \int_{\mathbb{R}^n} |M_\varepsilon^{\#}((T_b^{k-1})^* f))(x)|\, |Rh(x)| dx \\
&\leq c_{n,\varepsilon}\, p' \, \|b\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{k-2} M_\varepsilon((T_b^j)^* f)(x)\, Rh(x) dx \\
&+ c_{n,\varepsilon}\, p' \, \|b\|_{BMO}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} M^k f(x)\, Rh(x) dx \\
&\leq c_{n,\varepsilon}\, p' \, \|b\|_{BMO} \textstyle\sum_{j=0}^{k-2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} M_\varepsilon((T_b^j)^* f)(x)\, Rh(x) dx \\
&+ 2c_{n,\varepsilon}\, p' \, \|b\|_{BMO}^{k-1} \left\| \frac{M^k f}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)},
\end{aligned}$$

siguiendo en el último sumando el mismo esquema que en el caso de término I_k pero para el caso $k-1$. Agrupando el sumatorio con el término I_{k-2} y repitiendo el proceso con todos los I_j, llegamos a que:

$$\begin{aligned}
I &\leq c(p')^k \|b\|_{BMO}^k \sum_{j=0}^{k} \left\| \tfrac{M^{j+1}}{M_r w} \right\|_{L^{p'}(M_r w)} \\
&\leq c(p')^k \|b\|_{BMO}^k \sum_{j=0}^{k} p^{j+1} (r')^{j+1/p} \|f\|_{L^{p'}(w^{1-p'})} \\
&\leq c(pp')^k \|b\|_{BMO}^k (r')^{k+1/p} \|f\|_{L^{p'}(w^{1-p'})},
\end{aligned}$$

aplicando la proposición (4.5.1) para cada j, obteniendo así la desigualdad (4.5.4), que tal y como hemos señalado, nos lleva a (4.5.2).

□

A continuación veremos el resultado de tipo débil que encontramos al utilizar la desigualdad para $p > 1$ que acabamos de demostrar. Es una mejora del resultado de C. Pérez (3.4.6) que podemos encontrar en [**?**].

***TEOREMA 4.5.3** [OC] Sea T y b como en el resto del capítulo. Entonces, existe una constante $c = c_{n,T,\|b\|_{BMO}}$ tal que para cualquier peso $w \in A_1$ y para cualquier función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^k f(x)| > \lambda\} \leq c\, \Phi([w]_{A_1})^{k+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\, dx, \tag{4.5.9}$$

siendo $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Demostración: Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ consideremos la clásica descomposición de Calderón–Zygmund de f a nivel λ. Obtenemos así una familia de cubos diádicos $\{Q_j\} = Q_j(x_{Q_j}, r_j)$ disjuntos dos a dos que verifican

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda. \tag{4.5.10}$$

Esto implica que para $\Omega = \cup_j Q_j$ tenemos $|f(x)| \leq \lambda$ en casi todo punto en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Escribimos ahora f separándola en las clásicas partes "buena" y "mala" $f = g + h$. Indeed, si como habitualmente f_{Q_j} denota el promedio de f en Q_j, podemos escribir

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ f_{Q_j}, & x \in Q_j, \end{cases}$$

que también verifica $|g(x)| \leq 2^n \lambda$ en casi todo punto. Para la parte "mala" consideramos $h = \sum_j h_j$ donde $h_j(x) = (f(x) - f_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$.

Para cada j denotamos

$$\widetilde{Q_j} = 3Q_j, \quad \widetilde{\Omega} = \cup_j \widetilde{Q_j} \quad \text{and} \quad w_j(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_j}$$

Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^k f(x)| > \lambda\}) &\leq w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |T_b^k g(x)| > \lambda/2\}) \\ &+ w(\widetilde{\Omega}) \\ &+ w(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |T_b^k h(x)| > \lambda/2\}) \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Estudiaremos cada sumando por separado.

Para el primero utilizaremos la desigualdad de Chebyschev llamando $\widetilde{w}(x) = w(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{\Omega}}(x)$, y por la estimación L^p (4.5.2) del teorema 4.5.2 que es cierta para cualquier peso, tenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{c}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^k g(x)|^p \widetilde{w}(x)\,dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda^p}\|b\|_{BMO}^{kp}(pp')^{(k+1)p}(r')^{(k+\frac{1}{p'})p}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, M_r\widetilde{w}(x)\,dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\|b\|_{BMO}^{kp}(pp')^{(k+1)p}(r')^{kp-1}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, M_r\widetilde{w}(x)\,dx \\
&= \frac{c}{\lambda}\|b\|_{BMO}^{kp}(pp')^{(k+1)p}(r')^{kp-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f(x)|\, M_r\widetilde{w}(x)\,dx + \int_\Omega |g(x)|\, M_r\widetilde{w}(x)\,dx\right).
\end{aligned}$$

Es evidente que sólo necesitamos estimar el segundo término de la última expresión y para ello utilizaremos el hecho de que: Para cualquier función no negativa u con $Mu(x) < \infty$ en casi todo punto, a.e., para cualquier cubo Q, y cualquier $R > 1$ tenemos

$$M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus RQ}u)(y) \approx M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus RQ}u)(z) \qquad y, z \in Q \tag{4.5.11}$$

con constantes dependiendo únicamente de la dimensión (ver [GCRdF] p. 159).

Así, podemos estimar el segundo término con

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x)|\, M_r\widetilde{w}(x)\,dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} |f_{Q_j}|\, M_r(w_j)(x)\,dx \\
&= \sum_j \left(\int_{Q_j} |f(x)| dx\right)\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} M_r w_j(x)\,dx \\
&\leq c\sum_j \left(\int_{Q_j} |f(x)|\,dx\right)\inf_{x\in Q_j} M_r w_j \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M_r w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Hasta aquí, el parámetro $1 < r < \infty$ era arbitrario, pero si elegimos ahora $r = r_w$ siendo r_w el exponente óptimo de la desigualdad inversa de Hölder $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ del lema 2.1.1

podemos continuar con

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{c}{\lambda}\|b\|_{BMO}^{kp}(pp')^{(k+1)p}[w]_{A_1}^{kp-1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,M_r w(x)\,dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\|b\|_{BMO}^{kp}(pp')^{(k+1)p}[w]_{A_1}^{kp}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)\,dx. \end{aligned}$$

El segundo término, II, se estima de la manera habitual como sigue

$$\begin{aligned} II = w(\widetilde{\Omega}) &\leq c\sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|}|Q_j| \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|f(x)|Mw(x)\,dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)\,dx && (4.5.12) \\ &\leq \frac{c}{\lambda}[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)\,dx, && (4.5.13) \end{aligned}$$

porque $w \in A_1$.

Para el tercer sumando III primero observemos que siguiendo el método de[GCHST] y de [PePr]

$$\begin{aligned} T_b^k h_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))^k K(x,y)h_j(y)\,dy \\ &= \sum_{i=0}^{k} C_{i,k}(b(x)-b_{Q_j})^{k-i}\int_{\mathbb{R}^n}(b(y)-b_{Q_j})^i K(x,y)h_j(y)\,dy \\ &= C(b(x)-b_{Q_j})^k Th_j(x) + T((b-b_{Q_j})^k h_j)(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} C_{i,k}(b(x)-b_{Q_j})^{k-i}\int_{\mathbb{R}^n}(b(y)-b_{Q_j})^i K(x,y)h_j(y)\,dy. \end{aligned}$$

Consideremos por un momento el último sumando:

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_{i,k}(b(x)-b_{Q_j})^{k-i}\int_{\mathbb{R}^n}(b(y)-b_{Q_j})^i K(x-y)h_j(y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k-1} C_{i,k} \sum_{l=0}^{k-i} C_{l,k,i} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))^l (b(y)-b_{Q_j})^{k-l} K(x,y) h_j(y)\, dy \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} C_{k,l} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))^l (b(y)-b_{Q_j})^{k-l} K(x,y) h_j(y)\, dy \\
&= CT((b-b_{Q_j})^k h_j)(x) + \sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l((b-b_{Q_j})^{k-l} h_j)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_j T_b^k h_j(x) &= C \sum_j (b(x)-b_{Q_j})^k T h_j(x) + \sum_j T((b-b_{Q_j})^k h_j)(x) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l (\sum_j (b-b_{Q_j})^{k-l} h_j)(x)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
III &\leq w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_j (b(y)-b_{Q_j})^k T h_j(y)| > \frac{\lambda}{6}\}) \\
&\quad + w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_j T((b-b_{Q_j})^k h_j)(y)| > \frac{\lambda}{6}\}) \\
&\quad + w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l (\sum_j (b-b_{Q_j})^{k-l} h_j)(y)| > \frac{\lambda}{6}\}) \\
&= A + B + C.
\end{aligned}$$

Siguiendo las estimaciones estándares del núcleo K obtenemos

$$
\begin{aligned}
A &\le \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{\Omega}} \sum_j |b(x)-b_{Q_j}|^k |Th_j(x)|\widetilde{w}(x)\,dx \\
&\le \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q_j} |b(x)-b_{Q_j}|^k w_j(x)\int_{Q_j}|h_j(y)||K(x,y)-K(x,x_{Q_j})|\,dy\,dx \\
&\le \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q_j}|K(x,y)-K(x,x_{Q_j})||b(x)-b_{Q_j}|^k w_j(x)\,dx\,dy \\
&\le \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{2^i r_j\le|x-x_{Q_j}|<2^i r_j}\frac{|y-x_{Q_j}|^{\varepsilon}}{|x-x_{Q_j}|^{n+\varepsilon}}|b(x)-b_{Q_j}|^k w_j(x)\,dx\,dy \\
&\le \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i\varepsilon}}{(2^i r_j)^n}\int_{|x-x_{Q_j}|<2^{i+1}r_j}|b(x)-b_{Q_j}|^k w_j(x)\,dx\right)dy
\end{aligned}
$$

Para controlar la suma en i utilizamos las estimaciones estándares junto a la desigualdad de Hölder generalizada y el teorema de John-Nirenberg. De hecho si $y \in Q_j$ tenemos que

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i\varepsilon}}{(2^{i+1}r_j)^n}\int_{|x-x_{Q_j}|<2^{i+1}r_j}|b(x)-b_{Q_j}|^k w_j(x)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\le c\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i\varepsilon}}{(2^{i+1}r_j)^n}\int_{2^{i+1}Q_j}|b(x)-b_{2^{i+1}Q_j}|^k w_j(x)\,dx \\
&\quad +\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i\varepsilon}}{(2^{i+1}r_j)^n}\int_{2^{i+1}Q_j}|b_{2^{i+1}Q_j}-b_{Q_j}|^k w_j(x)\,dx \\
&\le c\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i\varepsilon}\|(b-b_{2^{i+1}Q_j})^k\|_{\exp L^{1/k},2^{i+1}Q_j}\|w_j\|_{L(\log L)^k,2^{i+1}Q_j} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i\varepsilon}(i+1)\|b\|_{BMO}^k\,Mw_j(y) \\
&\le c\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i\varepsilon}\|b\|_{BMO}^k M_{L(\log L)^k}w_j(y)+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i\varepsilon}(i+1)\|b\|_{BMO}^k\,[w]_{A_1}w_j(y) \\
&\le c\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i\varepsilon}(i+1)\|b\|_{BMO}[w]_{A_1}M_{L(\log L)^k}w_j(y).
\end{aligned}
$$

Continuamos entonces la estimación de A de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
A &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| \|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1}\, M_{L(\log L)^k} w_j(y)dy \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\|\|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1} \sum_j \left(\int_{Q_j} |f(y)|\, M_{L(\log L)^k} w_j(y)dy + \int_{Q_j} |f_{Q_j}|\, M_{L(\log L)^k} w_j(y)dy \right) \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\|\|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, M_{L(\log L)^k} w(y)dy \\
&+ \frac{c}{\lambda}\|\|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} M_{L(\log L)^k} w_j(y)dy \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\|\|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, M_{L(\log L)^k} w(y)dy + \sum_j \int_{Q_j} |f(x)| \inf_{Q_j} M_{L(\log L)^k} w_j \right) \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\|\|b\|^k_{BMO}[w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, M_{L(\log L)^k} w(y)dy
\end{aligned}
$$

Para estimar B usaremos la desigualdad (2.6.13) del corolario 2.6.2 de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
B &\leq \widetilde{w}(\{x \in \mathbb{R}^n : |T(\sum_j (b - b_{Q_j})^k h_j)(x)| > \frac{\lambda}{6}\}) \\
&\leq c\,\frac{(p')^p (r')^{p-1}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j})^k h_j)(x) \right| M_r(\widetilde{w})(x)dx \\
&\leq c\,\frac{(p')^p (r')^{p-1}}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^k |f(x) - f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx \\
&= c\,(p')^p (r')^{p-1}(B_1 + B_2) \\
&\leq c\,(p')^p [w]^{p-1}_{A_1}(B_1 + B_2),
\end{aligned}
$$

siendo

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^k |f(x)|\, M_r w_j(x)dx \\
B_2 &= int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^k |f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx
\end{aligned}
$$

Para estimar B_2 utilizaremos (4.5.11)

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |b(x)-b_{Q_j}|^k |f_{Q_j}|\, M_r w_j(x)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \inf_{Q_j} M_r w_j \int_{Q_j} |b(x)-b_{Q_j}|^k |f_{Q_j}|\, dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |b(x)-b_{Q_j}|^k \int_{Q_j} |f(y)| M_r w_j(y)\, dy\, dx \\
&\leq c\|b\|_{BMO}^k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} M_r w(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

observando que c es una constante que depende únicamente de loa dimensión.

Para B_1 sabemos que por la desigualdad generalizada de Hölder (1.4.5) y por el teorema de John-Nirenberg (1.5.5) que

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |b(x)-b_{Q_j}|^k |f(x)|\, M_r w_j(x)dx \\
&\leq \frac{c\|b\|_{BMO}^k}{\lambda}\sum_j \inf_{Q_j} M_r w_j |Q_j| \|f\|_{L(\log L)^k, Q_j}.
\end{aligned}
$$

Combinando entonces la fórmula (1.4.4) junto a (4.5.10) y recordando que $\Phi(t) = t(1+\log^+ t)^k$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|Q_j| \|f\|_{L(\log L)^k, Q_j} &\leq \frac{1}{\lambda}|Q_j| \inf_{\mu>0}\{\mu + \frac{\mu}{|Q_j|}\int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right) dx\} \\
&\leq |Q_j| + \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} |f(x)|\, dx + \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \\
&\leq 2\int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned} B_1 &\leq c\,\|b\|_{BMO}^k \sum_j \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx \\ &\leq c\|b\|_{BMO}^k \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx. \end{aligned}$$

Para el estudio del tercer sumando C en primer lugar, recordamos que $h_j(x) = (f(x) - f_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$ y separamos el conjunto C en dos sumandos:

$$w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l(\sum_j (b - b_{Q_j})^{k-l} h_j)(y)| > \frac{\lambda}{6}\})$$

$$\begin{aligned} &\leq w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l(f \sum_j (b - b_{Q_j})^{k-l} \chi_{Q_j})(y)| > \frac{\lambda}{12}\}) \\ &\quad + w(\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} : |\sum_{l=1}^{k-1} C_{k,l} T_b^l(\sum_j (b - b_{Q_j})^{k-l} f_{Q_j} \chi_{Q_j})(y) > \frac{\lambda}{12}\}) \\ &= C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Utilizando un argumento de inducción suponemos que el teorema es cierto para $i < k$, entonces

$$\begin{aligned} C_1 &\leq C \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_l \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} |\sum_j (b(x) - b_{Q_j})^{k-l} \chi_{Q_j}(x)| \right) M_{L(\log L)^{l+\epsilon}}(w^*)(x)\,dx \\ &\leq C \sum_{l=1}^{k-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_l \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} |b(x) - b_{Q_j}|^{k-l} \right) M_{L(\log L)^{l+\epsilon}}(w_j)(x)\,dx \\ &\leq C \sum_{l=1}^{k-1} \sum_j \inf_{Q_j} M_{L(\log L)^{l+\epsilon}}(w_j) \int_{Q_j} \Phi_l \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} |b(x) - b_{Q_j}|^{k-l} \right) dx. \end{aligned}$$

Sea $\psi_i(t) = \exp t^{1/i} - 1$, entonces $\Phi_k^{-1}(t).\psi_{k-l}^{-1}(t) \leq C\,\Phi_l^{-1}(t)$ ya que $\Phi_i^{-1}(t) \approx \frac{t}{(\log t)^i}$ y

$\psi_i^{-1}(t) \approx (\log t)^i$. Combinando (**??**) junto al teorema de John-Nirenberg (4.5.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} \Phi_l\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}|b(x)-b_{Q_j}|^{k-l}\right) dx &\leq \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \\ &\quad + \int_{Q_j} \psi_{k-l}\left(|b(x)-b_{Q_j}|^{k-l}\right) dx \\ &\leq \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx + C|Q_j| \\ &\leq C \int_{Q_j} \Phi_i\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Por todo esto, podemos acotar C_1 por

$$\begin{aligned} C_1 &\leq C \sum_{l=1}^{k-1} \sum_j \inf_{Q_j} M_{L(\log L)^{l+\epsilon}}(w_j) \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \\ &\leq C \sum_{l=1}^{k-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^{l+\epsilon}}(w)(x)\, dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^{k-1+\epsilon}}(w)(x)\, dx. \end{aligned}$$

Podemos controlar C_2 de manera similar observando que por (**??**) y por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} \Phi_l\left(\frac{|f_{Q_j}|}{\lambda}|b(x)-b_{Q_j}|^{k-l}\right) dx &\leq \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f|_{Q_j}}{\lambda}\right) dx + C\,|Q_j| \\ &\approx |Q_j| \approx \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} |f| \\ &\leq C \int_{Q_j} \Phi_k\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Combinando lo obtenido con las estimaciones logradas para los sumandos I y II, tenemos que

$$w(x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda) \leq \frac{c\|b\|_{BMO}^{kp}}{\lambda}(pp')^{(k+1)p}[w]_{A_1}^{(k+1)p} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{LlogL}w(x)dx.$$

Tomando $p = 1 + \frac{1}{\log(1+[w]_{A_1})}$ obtenemos la desigualdad que estábamos buscando porque $\frac{1}{\log(1+[w]_{A_1})} < 1$, y sabemos que para $A > 1$ se verifica que $A^{1/A} < e$.

$\square$

5

Decaimiento exponenciales de operadores

Queda prohibido no crear mi historia,
dejar de dar las gracias a mi familia por mi vida,
no tener un momento para la gente que me necesita,
no comprender que lo que la vida nos da, también nos lo quita.

(Alfredo Cuervo Barrero)

Índice

Tal y como ya hemos comentado anteriormente, en 1.973, R. Coifman y C. Fefferman demostraron el teorema (1.4.1) en el que, suponiendo que $w \in A_\infty$, i.e. con w verificando (1.3.1), y siendo k un núcleo de convolución, se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)dx,$$

para todo $0 < p < \infty$.

En realidad probaron algo mejor al comprobar que

$$\|T^*f\|_{L^p(w)} \leq c_p \|Mf\|_{L^p(w)}, \tag{5.0.1}$$

siendo T^* el operador maximal

$$T^*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

Para demostrar (5.0.1), R. Coifman y C. Fefferman observaron en primer lugar que se verifica la siguiente desigualdad de buenos λ:

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > 2\alpha, Mf(x) \leq \gamma\alpha\}) \leq c\,\gamma^\delta w(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > \alpha\}), \tag{5.0.2}$$

para γ suficientemente pequeña.

Combinando esta desigualdad con la propiedad de los pesos A_∞ (1.3.1) observan entonces que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f > 2\alpha\}) \leq w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf \leq \gamma\alpha\}) + c\,\gamma^\delta w(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f > \alpha\}).$$

Para terminar la demostración de (5.0.1) basta con escribir la norma L^p utilizando la integración por capas y aplicar la desigualdad anterior.

El punto clave en la demostración de (5.0.2) es demostrar que dado un cubo Q de la descomposición de Whitney del conjunto de nivel $\{T^* f > \alpha\}$, se verifica

$$|\{x \in Q : T^* f(x) > 2\alpha, Mf(x) \leq \gamma\alpha\}| \leq C\,\gamma|Q|. \tag{5.0.3}$$

En 1993, S.M. Buckley en [Bu] mejoró esta desigualdad de los buenos lambdas (5.0.3), obteniendo un decaimiento exponencial en γ tal y como puede verse en

$$|\{x \in Q : T^* f(x) > 2\alpha, Mf(x) \leq \gamma\alpha\}| \leq C\,e^{-c/\gamma}|Q|. \tag{5.0.4}$$

El objetivo de S. M. Buckley era optimizar la acotación en términos de $[w]_{A_p}$ de un operador de Calderón-Zygmund (resultado demostrado recientemente por T. Hytönen en [Hyt], tal y como ya hemos señalado en el capítulo 2 de esta memoria).

Anteriormente a S. M. Buckley, en 1972, R. Coifman observó ya un decaimiento de estas características para el caso del operador maximal de integrales singulares con núcleos de convolución y R. A. Hunt hizo lo mismo para la función conjugada, este último basándose en un resultado pobtenido por [Ca].

En 2002, G. A. Karagulyan demostró un resultado mejor que (5.0.4) para $T^* f$, probando que se verifica la siguiente desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T^* f(x)| > \lambda M f(x)\}| \leq k e^{-c\lambda}\,|B|, \tag{5.0.5}$$

para toda f función soportada en una bola B. Esta desigualdad implica la anterior porque como $Mf(x) \leq \gamma\lambda$, se verifica que $\lambda \geq \frac{Mf(x)}{\gamma}$ y por lo tanto

$$\frac{1}{|Q|}|\{x \in Q : T^*f(x) > 2\alpha, Mf(x) \leq \gamma\alpha\}| \leq C\frac{1}{|Q|}|\{x \in Q : T^*f(x) > \frac{2}{\gamma}\}|.$$

En este capítulo daremos una demostración alternativa de (5.0.5) que es más flexible porque puede extenderse a otros objetos como la extensión vectorial de los operadores integrales de Calderón–Zygmund, conmutadores de integrales singulares con funciones de BMO y conmutadores de orden superior. Para las pruebas nos basaremos en la fórmula de A. Lerner (ver [L6]) y que explicamos en el siguiente apartado.

5.1. Una aplicación de la fórmula de Lerner

(A partir de aquí, y hasta final de esta memoria, * representará el reordenamiento decreciente de la función a la que acompañe).

En [L6] A. Lerner obtiene una fórmula que descompone una función en ..... En este apartado daremos dicha fórmula y explicaremos los conceptos y herramientas necesarias para entender lo que en ella aparece.

DEFINICIÓN 5.1.1 *Dada una función medible f en $\mathbb{R}^n$ y dado un cubo Q, definimos la oscilación local media de f en Q por la siguiente expresión*

$$w_\lambda(f;Q) = \inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*(\lambda|Q|),$$

para $0 < \lambda < 1$.

Y definiremos la función maximal sharp local sobre un cubo fijado Q_0 como

$$M^{\#}_{\lambda;Q_0}(x) = \sup_{x\in Q\subset Q_0} w_\lambda(f;Q),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q contenidos en Q_0 y tales que contengan al punto x.

Dada un cubo Q_0, denotaremos por $\mathcal{D}(Q_0)$ como el conjunto de todos los cubos diádicos respecto al cubo Q_0. Si $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ y $Q \neq Q_0$ denotaremos por $\widehat{Q}$ al cubo diádico padre de Q, es decir, es el único cubo de $\mathcal{D}(Q_0)$ que contiene a Q y tal que $|\widehat{Q}| = 2^n|Q|$.

Si f es una función medible y si Q es un cubo, podemos definir la siguiente cantidad:

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \qquad 0 < \lambda \leq 1,$$

siendo g^* el reordenamiento decreciente definido en el capítulo 1 de esta memoria.

Podemos pensar en esta expresión como otra manera de definir la media de una función. En realidad, para cualquier $\delta > 0$, y $0 < \lambda \leq 1$

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \leq \left(\frac{1}{\lambda|Q|}\int_Q |f|^\delta\, dx\right)^{1/\delta}.$$

Damos entonces la siguiente

DEFINICIÓN 5.1.2 *Definimos el operador maximal diádico $m_\lambda f$ para cualquier función medible f por*

$$m_\lambda f(x) = \sup_{x\in Q\in\mathcal{D}} (f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

donde f^* denota el reordenamiento decreciente de f.

Se verifica la siguiente propiedad:

$$|f(x)| \leq m_\lambda f(x) \quad \text{a.e.}x \tag{5.1.1}$$

(ver [L6, Lemma 6]).

Dado un cubo Q, definimos el valor medio $m_f(Q)$ de f sobre Q como un número, posiblemente no único tal que

$$\begin{cases} |\{x\in Q : |f(x)| > m_f(Q)\}| \leq |Q|/2 \\ \text{y} \\ |\{x\in Q : |f(x)| < m_f(Q)\}| \leq |Q|/2. \end{cases}$$

Se deduce fácilmente de la definición que $|m_f(Q)| \leq (f\chi_Q)^*\big(|Q|/2\big)$.

También es fácil comprobar que si f es no negativa

$$m_f(Q) = (f\chi_Q)^*\big(|Q|/2\big)$$

y para cualquier constante c

$$m_f(Q) - c = m_{f-c}(Q) \tag{5.1.2}$$

Se verifica también que:

$$
\begin{aligned}
|m_f(P) - m_f(Q)| &= |m_{f-m_f(Q)}(P)| && (5.1.3)\\
&\leq \big((f - m_f(Q))\chi_P\big)^*\big(|P|/2\big) && (5.1.4)\\
&\leq \left(\frac{2}{|P|}\int_P |f - m_f(Q)|^\delta \, dx\right)^{1/\delta}. && (5.1.5)
\end{aligned}
$$

TEOREMA 5.1.3 *[L6] Sea f una función medible en $\mathbb{R}^n$ y sea Q_0 un cubo fijo. Entonces existe una colección de cubos (puede ser vacía) $Q_j^k \in \mathcal{D}(Q_0)$ tal que:*

(i) Para a.e. $x \in Q_0$,

$$|f(x) - m_f(Q_0)| \leq 4\, M^{\#}_{1/4;Q_0} f(x) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j w_{1/2^{n+2}}(f; \hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x); \qquad (5.1.6)$$

(ii) Para cada k fijo, los cubos Q_j^k son disjuntos dos a dos;

(iii) Si $\Omega_k = \bigcup_j Q_j^k$, entonces $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$;

(iv) $|\Omega_{k+1} \cap Q_j^k| \leq \dfrac{1}{2}\, |Q_j^k|$.

C. Pérez y R. Trujillo–González en [PeTG] obtuvieron una extensión vectorial de la desigualdad puntual (2.4.1) que explicitamos a continuación y que´nos será muy útil en la demostración de la extensión vectorial:

LEMA 5.1.4 *[PeTG] Sea T in operador de Calderón–Zygmund, sea $0 < q < \infty$ y $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existe una constante $c_\varepsilon > 0$ tal que*

$$M^{\#}_{\varepsilon}(T_q f)(x) \leq c_\varepsilon\, M\left(|f|_q\right)(x), \qquad (5.1.7)$$

para cualquier función vectorial suave $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, y para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Se verifica entonces que

PROPOSICIÓN 5.1.5 *Sea $x \in Q_0$, siendo Q_0 un cubo fijo. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los cubos diádicos respecto al cubo Q_0. Sea $\{Q_j^k\} \in \mathcal{D}(Q_0)$ una familia de cubos que verifican las condiciones del teorema anterior. Sea $\widehat{Q}$ el cubo diádico padre de Q, es decir, es el único cubo de $\mathcal{D}(Q_0)$ que contiene a Q y tal que $|\widehat{Q}| = 2^n|Q|$. Entonces*

(i) Si consideramos T un operador de Calderón–Zygmund, se verifica que:

$$|Tf(x)| \leq c\, Mf(x) + c \sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} Mf \chi_{Q_j^k}(x). \tag{5.1.8}$$

(ii) Si consideramos las extensiones vectoriales $\overline{T}_q$ de operadores integrales de Calderón–Zygmund, se verifica que:

$$|\overline{T}_q f(x)| \leq c\, M\left(|f|_q\right)(x) + c \sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} M\left(|f|_q\right) \chi_{Q_j^k}(x). \tag{5.1.9}$$

Demostración:

Para probar el primer apartado aplicando el resultado (5.1.6) a los operadores integrales de Calderón–Zygmund, obtenemos que

$$|Tf(x) - m_{Tf}(Q_0)| \leq 4\, M^{\#}_{1/4;Q_0} Tf(x) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j w_{1/2^{n+2}}(Tf;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x),$$

por lo que

$$|Tf(x)| \leq 4\, M^{\#}_{1/4;Q_0} Tf(x) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j w_{1/2^{n+2}}(Tf;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x) + |m_{Tf}(Q_0)|.$$

Estudiemos cada uno de los sumandos:

$$M^{\#}_{1/4;Q_0} Tf(x) \leq Mf(x),$$

ya que $\forall 0 < \lambda < 1$ se verifica que $M^{\#}_{\lambda;Q_0} Tf(x) \leq Mf(x)$, por (2.4.1).

Por la definición de w_λ y también por (2.4.1) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_j w_{1/2^{n+2}}(Tf;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x) \leq c \sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} Mf \chi_{Q_j^k}(x).$$

Y para el tercer sumando

$$|m_{Tf}(Q_0)| \leq \left(\int_Q (Tf)^\delta\right)^{1/\delta} \leq c_\delta \|Tf\|_{L^{1,\infty}(Q)} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx \leq c\,Mf(x),$$

la desigualdad de Kolmogorov (1.1.2).

Por lo tanto nos queda que:

$$|Tf(x)| \leq c\,Mf(x) + c\sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} Mf\chi_{Q_j^k}(x).$$

En el caso de la extensión vectorial tenemos que aplicando el resultado (5.1.6) a $\overline{T}_q$, obtenemos que

$$|\overline{T}_q(x) - m_{\overline{T}_q}(Q_0)| \leq 4\,M^{\#}_{1/4;Q_0}\overline{T}_q(x) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j w_{1/2^{n+2}}(\overline{T}_q;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x),$$

por lo que

$$|\overline{T}_q(x)| \leq 4\,M^{\#}_{1/4;Q_0}\overline{T}_q(x) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j w_{1/2^{n+2}}(\overline{T}_q;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x) + |m_{\overline{T}_q}(Q_0)|.$$

Estudiemos cada uno de los sumandos:

$$M^{\#}_{1/4;Q_0}\overline{T}_q(x) \leq M\left(|f|_q\right)(x),$$

ya que $\forall\, 0 < \lambda < 1$ se verifica que $M^{\#}_{\lambda;Q_0}\overline{T}_q(x) \leq M\left(|f|_q\right)(x)$, por el lema (5.1.4).

Por la definición de w_λ y también por (5.1.4) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j w_{1/2^{n+2}}(\overline{T}_q;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x) \leq c\sum_{k,j}\inf_{Q_j^k} M\left(|f|_q\right)(x)\chi_{Q_j^k}(x).$$

Y para el tercer sumando

$$|m_{\overline{T}_q}(Q_0)| \leq \left(\int_Q (\overline{T}_q)^\delta\right)^{1/\delta} \leq c_\delta \|\overline{T}_q\|_{L^{1,\infty}(Q)} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(|f|_q\right)(x)\,dx \leq c\,M\left(|f|_q\right)(x),$$

la desigualdad de Kolmogorov (1.1.2).

Por lo tanto nos queda que:

$$|\overline{T}_q f(x)| \leq c\, M\left(|f|_q\right)(x) + c\sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} M\left(|f|_q\right)\chi_{Q_j^k}(x).$$

Aplicando el resultado (5.1.6) a las extensiones vectoriales $\overline{T}_q$ de operadores integrales de Calderón–Zygmund, obtenemos la siguiente desigualdad:

5.2. Decaimiento exponencial de la integral singular y su extensión vectorial

Necesitaremos también probar que el resultado (1.4.1) es cierto también en su versión local. Vamos a probarlo tanto para T operadores de Calderón–Zygmund como para su extensión vectorial. Para ello consideremos una subclase de cubos de $\mathcal{D}$, que satisface ciertas buenas propiedades que exponemos a continuación. Para k, j, enteros, definimos $E_j^k = Q_j^k \backslash \Omega_{k+1}$. $\{E_j^k\}$ es una familia de conjuntos que verifican

(i) $\{E_j^k\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos.

(ii) $|E_j^k| \geq \frac{1}{2}|Q_j^k|$.

Además, como $E_j^k \subset Q_j^k$, si consideramos un peso $w \in A_q$, por la definición de $[w]_{A_q}$, se verifica que

$$\left(\frac{|E_j^k|}{|Q_j^k|}\right)^q \leq [w]_{A_q} \frac{w(E_j^k}{Q_j^k},$$

y por lo tanto

$$w(Q_j^k) \leq [w]_{A_q} \left(\frac{|Q_j^k|}{|E_j^k|}\right)^q w(E_j^k) \leq 2^q [w]_{A_q} w(E_j^k),$$

por (5).

Por lo tanto,

$$w(Q_j^k) \leq 2^q [w]_{A_q} w(E_j^k). \tag{5.2.1}$$

TEOREMA 5.2.1 ***Sea $w \in A_q$, con $1 \leq q < \infty$. Sea T un operador integral de Calderón–Zygmund. Sea f una función tal que* supp *$f = Q$. Entonces existe una constante $c = c_n$ tal que***

$$\|Tf\|_{L^1(w,Q)} \leq c\,[w]_{A_q}\|Mf\|_{L^1(w,Q)}. \tag{5.2.2}$$

Demostración:

Para probar este resultado,aplicamos (5.1.8) y las propiedades de E_j^k definidas antes y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^1(w,Q)} &= \int_Q |Tf(x)|\,w(x)dx \\
&\leq c\int_Q Mf(x)\,w(x)dx + c\sum_{k,j}\int_Q Mf\chi_{Q_j^k}(x)\,w(x)dx \\
&\leq c\int_Q Mf(x)\,w(x)dx + c\sum_{k,j} inf_{Q_j^k} Mf[w]_{A_q}w(E_j^k) \\
&\leq c\int_Q Mf(x)\,w(x)dx + c[w]_{A_q}\sum_{k,j}\int_{E_j^k} Mf(x)\,w(x)dx \\
&\leq c[w]_{A_q}\|Mf\|_{L^1(w,Q)},
\end{aligned}$$

por (5.2.1) y porque $\{E_j^k\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos.

□

Tenemos también la siguiente extensión vectorial de este resultado:

TEOREMA 5.2.2 *Sea $w \in A_q$, con $1 \leq q < \infty$. Sea $\overline{T}_q$ la extensión vectorial de operadores integrales de Calderón–Zygmund. Sea f una función tal que* supp $f = Q$*. Entonces existe una constante $c = c_n$ tal que*

$$\|\overline{T}_q f\|_{L^1(w,Q)} \leq c\,[w]_{A_q}\|M(|f|_q)\|_{L^1(w,Q)}. \tag{5.2.3}$$

Demostración: Siguiendo el esquema de la prueba anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{T}_q f\|_{L^1(w,Q)} &= \int_Q |\overline{T}_q f(x)|\, w(x)dx \\
&\leq c\int_Q M(|f|_q)(x)\, w(x)dx + c\sum_{k,j}\int_Q M(|f|_q)\chi_{Q_j^k}(x)\, w(x)dx \\
&\leq c\int_Q M(|f|_q)(x)\, w(x)dx + c\sum_{k,j} inf_{Q_j^k} M(|f|_q)[w]_{A_q} w(E_j^k) \\
&\leq c\int_Q M(|f|_q)(x)\, w(x)dx + c[w]_{A_q}\sum_{k,j}\int_{E_j^k} M(|f|_q)(x)\, w(x)dx \\
&\leq c[w]_{A_q}\|M(|f|_q)\|_{L^1(w,Q)}
\end{aligned}$$

□

El método utilizado por Karaguluan no puede usarse para demostrar el caso vectorial ni el caso del conmutador que veremos en el siguiente apartado.:

TEOREMA 5.2.3 ***Sea T un operador de Calderón-Zygmund y sea $1 < p < \infty$. Consideremos una función f tal que supp $f = Q$. Entonces existe $t > t_n > 1$ siendo t_n una constante que depende únicamente de la dimensión y exiten $c > 0$ y $k > 0$ tales que***

$$|\{x \in Q : |Tf(x)| > tMf(x)\}| \leq ke^{-ct}\,|Q|. \tag{5.2.4}$$

De manera general, si consideramos la extensión vectorial de los operadores integrales de Calderón–Zygmund $\overline{T}_q$ con $0 < q < \infty$, y consideramos la función vectorial $f = \{f_j\}$ tal que supp $f_j = Q$, para todo j, existen constantes $c > 0$ y $k > 0$ tales que

$$|\{x \in Q : |\overline{T}_q f(x)| > tM(|f|_q)(x)\}| \leq ke^{-ct}\,|Q|. \tag{5.2.5}$$

A continuación explicitaremos las dos maneras de demostrar este resultado:

Primera demostración:

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : |Tf(x)| > tMf(x)\}| &\leq c\frac{1}{t^p}\int_Q \frac{|Tf(x)|^p}{(Mf(x))^p}\,dx \\ &= c\frac{1}{t^p}\left\|\frac{Tf}{Mf}\right\|^p_{L^p(Q)} \\ &= c\frac{1}{t^p}\left(\sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1}\left|\int_Q \frac{Tf(x)}{Mf(x)}h(x)\,dx\right|\right)^p, \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

escribiendo la norma L^p en términos del espacio dual.

Por el apartado (i) de (2.3.1), y aplicando (5.2.1) para $q = 3$ y $w = (Mf)^{-1}Rh$

$$\begin{aligned}
\left|\int_Q \frac{Tf(x)}{Mf(x)}h(x)\,dx\right| &\leq \int_Q |Tf(x)|\,(Mf(x))^{-1}|h(x)|dx \\
&\leq \int_Q |Tf(x)|\,(Mf(x))^{-1}Rh(x)dx \\
&\leq [(Mf)^{-1}Rh]_{A_3}\int_Q Rh(x)\,dx \\
&\leq [(Mf)^{-1}Rh]_{A_3}2\,\|h\|_{L^{p'}(Q)}|Q|^{1/p} \\
&\leq p|Q|^{1/p},
\end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Hölder, el apartado (ii) del lema (2.3.1), y el hecho de que $[(Mf)^{-1}Rh]_{A_3} \leq c_n p$.

Combinando esta desigualdad junto a (5.2.7) obtenemos que

$$|\{x \in Q : |Tf(x)| > Mf(x)\}| \leq c\,\frac{1}{t^p}(c_n p|Q|^{1/p})^p = \left(\frac{c_n p}{t}\right)^p |Q|,$$

concluyendo la prueba del teorema eligiendo $p = \dfrac{t}{e\,c_n}$., que será mayor que 1 tomando $T_n = e\,c_n$

□

Segunda demostración demostración: Veamos ahora el caso de la extensión vectorial. Para ello, utilizaremos directamente (5.1.8), obtenido al aplicar la fórmula de Lerner (5.1.6) a operador integral singular T:

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q : |Tf(x)| > tMf(x)\}| &\leq |\{x \in Q : Mf(x) + c\sum_{k,j}\inf_{Q_j^k} Mf\chi_{Q_j^k}(x) > tMf(x)\}| \\
&= |\{x \in Q : \sum_{k,j}\inf_{Q_j^k} Mf\chi_{Q_j^k}(x) > c\,tMf(x)\}| \\
&\leq |\{x \in Q : \sum_{k,j}\chi_{Q_j^k}(x)| > c\,t\}|,
\end{aligned}$$

porque $t > t_n > 1$, y porque es evidente que para cada $x \in Q$,se verifica que $\inf_{Q_j^k} Mf \leq Mf(x)$.

Para continuar con la prueba, consideremos la familia de cubos $\{E_j^k\}$.

Estudiemos ahora $\sum\limits_{j,k}\chi_{Q_j^k}(x)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\chi_{Q_j^k}(x) &= \sum_{j,k}\left(\frac{1}{|Q_j^k|}|Q_j^k|\right)^q \chi_{Q_j^k}(x)\\
&\leq c_n^q \sum_{j,k}\left(\frac{1}{|Q_j^k|}|E_j^k|\right)^q \chi_{Q_j^k}(x)\\
&\leq c_n^q \sum_{j,k}\left(\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k}\chi_{E_j^k}(x)\,dx\right)^q \chi_{Q_j^k}(x)\\
&\leq c_n^q \sum_{j,k}(M(\chi_{E_j^k})(x))^q\chi_{Q_j^k}(x)\\
&\leq c_n^q \left(\overline{M}_q\left((\chi_{E_j^k})_q\right)(x)\right)^q\\
&= c_n^q \left(\overline{M}_q g(x)\right)^q,
\end{aligned}$$

donde $g=(\chi_{E_j^k})_{j,k}$. Observamos que verifica que

$$|g|_{\ell^q}=\left(\sum_{??}\left(\chi_{E_j^k}(x)\,dx\right)^q\right)^{1/q}\leq 1, \tag{5.2.7}$$

porque $\{E_j^k\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos.

Terminaremos nuestra prueba recordando que si $|g|_{\ell^q}\in L^\infty$, esto implica que $\overline{M}_q g(x)\in ExpL^p$. □

Para el caso de (5.2.5) pueden reproducirse ambas demostraciones tal y como hemos hecho para el caso del operador de Calderón–Zygmund.

5.3. El conmutador: un decaimiento subgaussiano

Para estudiar el caso del conmutador, necesitaremos comprobar que el resultado (4.3.1) se verifica en su versión local. Y para ello estudiemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.3.1 *Sea f una función medible tal que* supp $f \subset Q$*, siendo Q un cubo fijo. Sea $\delta < 1$. Entonces se verifica que*

$$\|f\|_{L^1(w,Q)} \leq c\,[w]_{A_q} \|M_\delta^{\#,d}(f)\|_{L^1(w,Q)} \tag{5.3.1}$$

Demostración: Por la fórmula de A. Lerner (5.1.6) sabemos que

$$\begin{aligned}|f(x) - m_f(Q)| &\leq 4\,M^{\#}_{1/4;Q} f(x) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j w_{1/2^{n+2}}(f;\hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x)\\ &\leq 4\,M^{\#}_{1/4;Q} f(x) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j \operatorname{ínf}_{Q_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)}\chi_{Q_j^k}(x).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_Q |f(x) - m_f(Q)|\, w(x)dx\\ &\leq \int_Q M^{\#}_{1/4;Q} f(x)\, w(x)dx + \int_Q \sum_{j,k} \operatorname{ínf}_{Q_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)}\chi_{Q_j^k}(x)\, w(x)dx\\ &\leq I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Nos detenemos ahora a estudiar el segundo sumando. Por (5.2.1)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_Q \sum_{j,k} \operatorname{ínf}_{Q_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)}\chi_{Q_j^k}(x)\, w(x)dx\\ &\leq \sum_{j,k} \operatorname{ínf}_{Q_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)} w(Q_j^k)\\ &\leq 2^q[w]_{A_q} \sum_{j,k} \operatorname{ínf}_{Q_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)} w(E_j^k)\\ &= 2^q[w]_{A_q} \sum_{j,k} \int_{E_j^k} M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)} f(x)\, w(x)dx\\ &\leq 2^q[w]_{A_q} \int_Q M^{\#}_{1/2^{n+2},\hat{Q}_j^k)} f(x)\, w(x)dx,\end{aligned}$$

ya que los E_j^k son cubos disjuntos.

Por lo tanto, hemos demostrado lo que queríamos.

□

A partir de esta proposición podemos demostrar entonces que

TEOREMA 5.3.2 ***Sea $w \in A_q$, con $1 \leq q < \infty$. Sea T un operador de Calderón–Zygmund y $b \in BMO$. Sea f una función tal que supp $f = Q$. Entonces existe una constante $c = c_n$ tal que***

$$\|[b,T]f\|_{L^1(w,Q)} \leq c\,\|b\|_{BMO}[w]_{A_q}^2 \|M^2 f\|_{L^1(w,Q)}. \tag{5.3.2}$$

Demostración:

Por la proposición anterior (5.3.1) y por (3.2.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|[b,T]f\|_{L^1(w,Q)} &= \int_Q |[b,T]|\, w(x)dx \\
&\leq 2^q [w]_{A_q} \int_Q M_\delta^{\#}(f)\, w(x)dx \\
&\leq 2^q [w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \int_Q (M_\varepsilon(Tf)(x) + M^2 f(x))\, w(x)dx \\
&\leq 2^q [w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \left(\int_Q M_\varepsilon(Tf)(x)\, w(x)dx + \int_Q M^2 f(x) \right) w(x)dx \\
&\leq 2^q [w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \left(\int_Q M_\varepsilon^{\#}(Tf)(x)\, w(x)dx + \int_Q M^2 f(x) \right) w(x)dx \\
&\leq 2^q [w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \left([w]_{A_q} \int_Q Mf(x)\, w(x)dx + \int_Q M^2 f(x) \right) w(x)dx,
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, tenemos que

TEOREMA 5.3.3 ***Sea T un operador de Calderón–Zygmund y sea b una función de BMO. Sea $1 < p < \infty$, y f una función tal que supp $f = Q$. Sea $t > t_n > 1$. Entonces existen $c > 0$ y $k > 0$, tales que***

$$|\{x \in Q : |[b,T]f(x)| > tM^2 f(x)\}| \leq ke^{-\sqrt{ct\|b\|_{BMO}}} |Q|. \tag{5.3.3}$$

Además, para los conmutadores de orden superior se verifica que

$$|\{x \in Q : |[b,T_m]f(x)| > tM^{m+1} f(x)\}| \leq ke^{-(ct\|b\|_{BMO})^{1/(m+1)}} |Q|. \tag{5.3.4}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : |[b,T]f(x)| > tM^2 f(x)\}| &\leq c\,\frac{1}{t^p}\int_Q \frac{|[b,T]f(x)|^p}{(M^2 f(x))^p}\,dx \\ &= c\,\frac{1}{t^p}\left\|\frac{[b,T]f}{M^2 f}\right\|_{L^p(Q)} \\ &= c\,\frac{1}{t^p}\left(\sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1}\left|\int_Q \frac{[b,T]f(x)}{M^2 f(x)} h(x)\,dx\right|\right)^p \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

ecribiendo la norma L^p en términos del espacio dual.

Por el apartado (i) de (2.3.1), y aplicando (5.3.2) para $q = 3$ y $w = (M^2 f)^{-1} Rh$

$$\begin{aligned} \left|\int_Q \frac{[b,T]f(x)}{M^2 f(x)} h(x)\,dx\right| &\leq \int_Q |[b,T]f(x)|\,(M^2 f(x))^{-1}|h(x)|dx \\ &\leq \int_Q |[b,T]f(x)|\,(M^2 f(x))^{-1} Rh(x)dx \\ &\leq c\,[(M^2 f)^{-1} Rh]_{A_3}^2 \int_Q Rh(x)\,dx \\ &\leq c\,[(M^2 f)^{-1} Rh]_{A_3}^2\,\|h\|_{L^{p'}(Q)} |Q|^{1/p} \\ &\leq c_n p |Q|^{1/p}, \end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Hölder, el apartado (ii) del lema 2.3.1, y el hecho de que $[(M^2 f)^{-1} Rh]_{A_3} \leq c_n p$.

Combinando esta desigualdad con (5.3.5) obtenemos que

$$|\{x \in Q : |[b,T]f(x)| > \gamma t M^2 f(x)\}| \quad \leq \quad c\,\frac{1}{t^p}(c_n p^2 |Q|^{1/p})^p = \left(\frac{c_n p^2}{t}\right)^p |Q|.$$

Eligiendo $p = \sqrt{\dfrac{t}{e\,\|b\|_{BMO}}}$, terminamos la demostración de (5.3.3).

□

Bibliografía

[ABKPe] J. Alvarez, R. Bagby, D. Kurtz, C. Perez, *Weighted estimates for commutators of linear operators*, Studia Mat. **104** (2) (1994) 195-209.

[AIS] K. Astala, T. Iwaniec, E. Saksman, *B*eltrami operators in the plane, Duke Mathematical Journal. **107**, no. 1, (2001), 27-56.

[APe] J. Alvarez and C. Pérez, *Estimates with* A_∞ *weights for various singular integral operators*, Bollettino U.M.I. (7) 8-A (1994), 123-133.

[BK1] R. J. Bagby and D. S. Kurtz, *C*overing lemmas and the sharp function, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 291-296.

[BK2] R. J. Bagby and D. S. Kurtz, *A* rearranged good-λ ¸ inequality, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), 71-81.

[BS] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York, 1988.

[Bu] S.M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., **3**40 (1993), no. 1, 253–272.

[CZ] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **8**8 (1952), 85–139.

[Ca] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums or Fourier series*, Acta Math. **116** (1966), pp. 135-157

[Ch2] D. Chung, *Commutators and Dyadic Paraproducts on weighted Lebesgue spaces*, Tesis doctoral, Julio (2010). Disponible en http://www.math.unm.edu/ crisp/students.html

[Ch] D. Chung, *Sharp estimates for the commutators of the Hilbert, Riesz and Beurling transforms on weighted Lebesgue spaces*, Indiana U. Math. J., to appear, Preprint (2010) available at http://arxiv.org/abs/1001.0755

[ChPP] D. Chung, M.C. Pereyra and C. Pérez *Quadratic A_2 bounds for commutators of operators with BMO functions* , to appear Trans. Amer. Math. Soc.. Preprint (2010) available at http://arxiv.org.abs/1002.2396v2

[CF] R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals* , Studia Math. **5**1, (1974), 241–250.

[CPSS] M. J. Carro, C. Pérez, F. Soria y J. Soria, *E*xamples and counterexamples for fractional operators, Indiana Univ. Math. J., **5**4 (2005), 627–644.

[CWW] S.-Y.A. Chang, J.M. Wilson and T. Wolff, *S*ome weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operator, Comm. Math. Helv., **6**0 (1985), 217–246.

[ChW] S. Chanillo and R.L. Wheeden, *S*ome weighted norm inequalities for the area integral, Indiana Univ. Math. J., **3**6 (1987), 277–294.

[Coif] Coifman, R., Distribution function inequalities for singular integrals, *P*roc. Acad. Sci. U.S.A. **6**9, 2838-2839.

[CM] R. Coifman and Y. Meyer, *W*avelets. Calderón-Zygmund and Multilinear Operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 48. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[CRo] R.R. Coifman and R. Rochberg, *Another characterization of* BMO, Proc. Amer. Math. Soc., **7**9 (1980), 249–254.

[CRoW] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. of Math. **1**03 (1976), 611–635.

[CoF] A. Córdoba and C. Fefferman, *A weighted norm inequality for singular integrals* , Studia Math. **5**7 (1976), 97–101.

[CrMPe1] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell and C. Pérez, *Sharp weighted estimates for approximating dyadic operators,* Electron. Res. Announc., **17** (2010),12-19.

[CrMPe2] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell and C. Pérez, *Sharp weighted estimates for classical operators,* preprint (2010).

[CrMPe3] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell y C. Pérez, *Extrapolation results for A_∞ weights and applications,* J. of Funct. Anal., 2, **2**13 (2004) 412–439.

[CrMPe4] D. Cruz-Uribe, SFO, J.M. Martell and C. Pérez, *Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer,* Int. Math. Res. Not. **3**0 2005, 1849-1871.

[CrMPe5] D. Cruz-Uribe, SFO, J.M. Martell and C. Pérez, *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia,* monograph, to appear in Birkhauser, Operator Theory book series.

[CrMo] D. Cruz-Uribe, K. Moen, *Sharp norm inequalities for commutators of classical operators.* Preprint (2010) available at http://www.arxiv.org/abs/1008.0381

[CGMP] G.P. Curbera, J. García-Cuerva, J.M. Martell and C. Pérez, *Extrapolation with weights, Rearrangement Invariant Function Spaces, modular inequalities and applications to Singular Integrals,* Advances in Mathematics, **203** (2006) 256-318.

[dGuz] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lect. Notes Math. **4**81, Springer Verlag, (1975).

[DGrPPet] Dragicevic, L. Grafakos, C. Pereyra, Petermichl, *Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebegue spaces* Pub. Mat, **49**(2005, 73-91)

[Du] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis,* American Math. Soc., Grad. Stud. Math. **29**, Providence, RI, 2000.

[FKP] R. Fefferman, C. E. Kenig, and J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations,* Ann. of Math. 134 (1991), 65–124.

[FPi] R. Fefferman and J. Pipher, *Multiparameter operators and sharp weighted inequalities*, Amer. J. Math. **1**19 (1997), no. 2, 337–369.

[FS] C. Fefferman and E.M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math., **9**3 (1971), 107–115.

[GCHST] J. Garcia-Cuerva, E. Harboure, C. Segovia and J. L. Torrea, *Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals*, Indiana Univ. Math. J. **4**0, (1991), 1398–1420.

[GCRdF] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **1**16, North Holland, Amsterdam, (1985).

[GrCF] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **249**, Second Edition, (2008).

[GrMF] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **250**, Second Edition, (2008).

[H] E. Hernández, *Fatorization and extrapolization of pairs of weights*, Studia Math, **95** (1989), 179-193.

[Hu] R. A. Hunt, *An estimate for conjugate functions*, Studia Math., **44** (1972).

[Hyt] T. Hytönen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Preprint (2010) available at http://arxiv.org/abs/1007.4330

[HytPeTV] T. Hytönen, C. Pérez, S. Treil, A. Volberg, *Sharp weighted estimates of the dyadic shifts and A_2 conjecture*, Preprint (2010) available at http://arxiv.org.abs/1010.0755

[HytPe] T. Hytönen and C. Pérez, *Sharp weighted bounds involving A_∞*, Preprint (2011) available at http://arxiv.org.abs/1103.5562v1.

[Ja] S. Janson, *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, Ark. Mat. **1**6, (1978), 263–270.

[J] J. L. Journé, *Calderón–Zygmund operators, pseudo–differential operators and the Cauchy integral of Calderón*, Lect. Notes Math. **9**94, Springer Verlag, (1983).

[K] G. A. Karagulyan, *Exponential Estimates of the Calderón–Zygmund Operator and Related Questions about Fourier Series*, Mathematical Notes **71** No. 3, (2002), 362-373.

[LPetR] M. Lacey, S. Petermichl, M. C. Reguera, *Sharp A_2 inequality for Haar shift operators*, Math. Ann. to appear, Preprint (2009) available at http://arxiv.org/abs/0906.1941

[LMPT] M. Lacey, K. Moen, C. Pérez and R. Torres, *The sharp bound the fractional operators on weighted L^p spaces and related Sobolev inequalities,* to appear Journal of Functional Analysis.

[L1] A.K. Lerner, *O*n weighted estimates of non-increasing rearrangements, East J. Approx., **4** (1998), 277-290.

[L2] A.K. Lerner, *O*n the John-Strömberg characterization of BMO for nondoubling measures, Real. Anal. Exchange, **2**8 (2003), no. 2, 649–660.

[L3] A.K. Lerner, *O*n some pointwise inequalities, J. Math. Anal. Appl. **2**89 (2004), no. 1, 248–259.

[L4] A. K. Lerner, *An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2829–2833.

[L5] A. K. Lerner, *W*eighted rearrangement inequalities for local sharp maximal functions, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2004), 2445-2465.

[L6] A. K. Lerner, *A* pointwise estimate for local sharp maximal function with applications to singular integrals, Bull. Lond. Math. Soc. **42** (2010), no.5, 843–856.

[L7] A. K. Lerner, *Sharp weighted norm inequalities for Littlewood-Paley operators and singular integrals*, to appear Adv. in Math. Preprint (2010) available at http://arxiv.org.abs/1005.1422

[LOPe1] A. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, *Sharp A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden,* International Mathematics Research Notices, 2008, **no. 6**, Art. ID rnm161, 11 pp. 42B20.

[LOPe2] A. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, *Weak type estimates for Singular Integrals related to a dual problem of Muckenhoupt-Wheeden,* Journal of Fourier Analysis and Applications, **15** (2009), 394–403.

[LOPe3] A. Lerner, C. Pérez and S. Ombrosi, *A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden,* Math. Res. Lett. **1**6 (2009), 149-156.

[MPT] J.M. Martell, C. Pérez y R. Trujillo-Gonzalez, *Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators,* Trans. of the A.M.S., **3**57 (2005), 385-396.

[Mu] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy–Littlewood maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **1**65 (1972), 207–226.

[MW] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1**92 (1974), 261-274.

[NRVV] Nazarov, F., Reznikov, A. Vasuynin V. and Volberg, A., *A_1 conjecture: weak norm estimates of weighted singular operators and Bellman functions*, htpp://sashavolberg.wordpress.com. (2010)

[NTV] F. Nazarov, S. Treil, and A. Volberg. *Two weight inequalities for individual Haar multipliers and other well localized operators,* Math. Res. Lett., **15** #3, 583–597, 2008.

[OC] C. Ortiz-Caraballo *Quadratic A_1 bounds for commutators of singular integrals with BMO functions,* Indiana U. Math. J., to appear, Preprint (2010) available at

[Pe1] C. Pérez, *Endpoint Estimates for Commutators of Singular Integral Operators*, Journal of functional analysis, **(**1) 128 (1995), 163–185.

[Pe2] C. Pérez, *Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function*, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 743-756.

[Pe3] C. Pérez, *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London Math. Soc. **4**9 (1994), 296–308.

[Pe4] C. Pérez, *A course on Singular Integrals and weights*, to appear in Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkauser editors.

[Carlos3] C. Pérez, On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator between weighted L^p–spaces with different weights, *P*roc. London Math. Soc. (3) **7**1 (1995), 135–157.

[PePr] C. Pérez and G. Pradolini, *Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integrals*, Michigan mathematical journal **49** (2001), 23-37.

[PeTV] C. Pérez, S. Treil, A. Volberg, *On A_2 conjecture and corona decomposition of weights.* Preprint 2010, available at http://arxiv.org/abs/1006.2630.

[PeTG] C. Pérez and R. Trujillo–González, *Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators and commutators*, Tohoku Math. Journal **??** (????)

[Pet1] S. Petermichl, *The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical A_p- characteristic*, Amer. J. Math., **1**29 (2007), no. 5, 1355–1375.

[Pet2] S. Petermichl, *The sharp weighted bound for the Riesz transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **1**36 (2008), no. 4, 1237–1249.

[PetV] S. Petermichl and A. Volberg, *Heating of the Ahlfors-Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular*, Duke Math. J. **1**12 (2002), no. 2, 281–305.

[PT1] Pérez, C., and Trujillo-González, R., Sharp weighted estimates for multilinear commutators. *J.* London Math. Soc. **6**5 (2002), no. 3, 672–692.

[PT2] Pérez, C., and Trujillo-González, R., Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators and commutators.*T*öhoku University Mathematical Journal **(2)55** (2003), no.1, 109–129.

[RRe] M.M. Rao and Z.D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[RgT] M.C. Reguera and C. Thiele, *The Hilbert transform does not map $L^1(Mw)$ to $L^{1,\infty}(w)$*, Preprint (2010) available at http://arxiv.org.abs/1011.1767v1.

[Tor] Torchinsky, A., *R*eal Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, New York, 1988.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

$$|\{x\in Q : |[b,T]f(x)| > \lambda t M^2 f(x)\}| \le k e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\|b\|_{BMO}}}}|Q|$$

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\}) \le c\,\Phi([w]_{A_1})^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\,dx$$

$$\|[b,T]\|_{L^p(w)} \le c\|b\|_{BMO}(pp')^2[w]_{A_1}^2$$