

2.4695
+
093

118

LBS 1004102

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

SISTEMAS HOLONOMOS REGULARES Y HACES PERVERSOS CUYO SOPORTE
SINGULAR ES EL GERMEN DE UNA CURVA PLANA IRREDUCIBLE

Memoria presentada por Luis
Narváez Macarro para optar al
grado de Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Director de la memoria

J. L. Vicente

Fdo: José L. Vicente Córdoba

VºBº del Director del Departamento

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS

Autorizo la consulta de esta memoria

[Signature]

Quiero expresar mi agradecimiento a:

Jose Luis Vicente Córdoba. Su manera de entender las Matemáticas, y sus ideas sobre la formación del investigador y del camino a seguir para alcanzar dicho grado, han tenido una influencia decisiva en mí.

Zoghman Mebkhout, que me ha enseñado la mayor parte de las Matemáticas que se encuentran en este trabajo, así como la "filosofía" del diccionario Sistemas Diferenciales - Geometría y Topología de las singularidades.

Lê Dũng Tráng y Bernard Teissier, que han contribuido de manera esencial a mi formación matemática, y que han seguido muy de cerca la realización de este trabajo.

Jean Louis Verdier, con el que he tenido discusiones muy fructíferas y clarificadoras sobre el presente trabajo. El me ha animado desde el principio a continuar en esta línea de investigación.

INDICE

0.- INTRODUCCION

I.- SISTEMAS DIFERENCIALES. CONSTRUCTIBILIDAD, DUALIDAD
Y REGULARIDAD. HACES PERVERSOS

1. \mathcal{D} -módulos. Coherencia.
2. Variedad característica. Sistemas holónomos:
Constructibilidad de las soluciones y Teorema
del índice.
3. Dualidad y regularidad.
4. El problema de Riemann-Hilbert para los comple-
jos constructibles. Haces perversos.

II.- EXTENSION DE HACES PERVERSOS

1. El formalismo de los ciclos evanescentes de Deligne.
2. Teorema de extensión de haces perversos.

III.- DESCRIPCION EXPLICITA DE LAS CATEGORIAS DE LOS SISTE-
MAS HOLONOMOS REGULARES Y DE LOS HACES PERVERSOS CU-
YO SOPORTE SINGULAR ES EL GERMEN DE UNA CURVA PLANA.
IRREDUCIBLE.

1. Generalidades.
2. Cálculo explícito de $[R\psi_f](L)$ en el caso de las
curvas planas irreducibles.
3. Teorema de equivalencia de categorías.
4. Ejemplos.

APENDICE 1 : Cálculo de $[R\psi_f](L)$ a partir del morfismo de especialización.

APENDICE 2 : Haces perversos sobre un disco.

DE REFERENCIAS

0.- INTRODUCCION

En esta memoria, damos una descripción explícita de los sistemas holónomos regulares y de los haces perversos (cf. I.3.10 y I.4.2), cuyo soporte singular es el germen de una curva plana irreducible. Se trata de la generalización natural de los resultados de Deligne ([Del 2]) y de Galligo-Granger-Maisonobe ([Ga-Gra-Mais]), sobre la descripción de los haces perversos cuyo soporte singular es el origen en \mathbb{C} , y un cruzamiento normal en \mathbb{C}^n , respectivamente. Para ello, utilizamos la teoría de "recollement" de haces perversos de MacPherson-Deligne-Verdier, y más concretamente, el teorema de extensión bajo la forma de Deligne-Verdier (cf. [Ver 3] y teorema II.2.1). Si $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una ecuación local de la curva, dicho resultado reduce el problema al cálculo explícito del complejo de los "ciclos próximos" $R\psi_f(L)$, de un sistema local L en el complementario de la curva, y de su automorfismo de monodromía $M(L)$ (cf. I.1 para las definiciones de $R\psi_f$ y M).

En el capítulo I, hacemos un breve recorrido sobre la teoría de \mathcal{D} -módulos, hasta llegar al problema del tipo Riemann-Hilbert para los complejos constructibles (cf. teorema I.4.1), y a la definición de los haces perversos (cf. definición I.4.2)

En el capítulo II, recordamos el formalismo de Deligne de los ciclos evanescentes (cf. [SGA 7 II] exp.XIII

y XIV), y enunciamos el resultado básico en que se apoya este trabajo: el teorema de extensión de los haces perversos (cf. teorema II.2.1).

En el capítulo III, enunciamos y demostramos los principales resultados de este trabajo. En primer lugar, calculamos $(R\psi_f(L), M(L))$ a partir del morfismo de especialización $sp: X_1 \rightarrow X_0$ (cf. [SGA 7 II] exp. XIV). $R\psi_f(L)$ se identifica a $Rsp_*(L|_{X_1})$, y $M(L)$ a $Rsp_*(\tau_L)$, donde $\tau_L: L|_{X_1} \rightarrow T_*(L|_{X_1})$ es el morfismo "natural" (cf. A1.7), y $T: X_1 \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo característico de la fibración de Milnor de f (cf. teorema II.1.12 y Apéndice 1). A continuación, hacemos el cálculo explícito de $(Rsp_*(L|_{X_1}), Rsp_*(\tau_L))$. Es decir, dada la representación compleja $\rho: \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ asociada al sistema local L , calculamos el par $E \rightrightarrows F$ que representa al haz perverso sobre X_0 , $Rsp_*(L|_{X_1})$ (cf. [Del 2], [Gal-Gra-Mais] y Apéndice 2), así como el automorfismo del par que representa $Rsp_*(\tau_L)$.

Sean: $f: X \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ un representante de Milnor de la ecuación de la curva;

$$1 \rightarrow L = \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow G = \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \pi_1(D^*, 1) \rightarrow 1$$

la sucesión exacta de homotopía de la fibración $f: X^* \rightarrow D^*$;

$\delta_0 \in L$ el generador positivo del borde de la fibra de Milnor X_1 ;

$\xi \in G$ el elemento, que estando en el borde de la fibración

$f: X^* \rightarrow D^*$, se proyecta en el generador positivo de $\pi_1(D^*, 1)$, y tal que la acción de la monodromía sobre L viene dada por el automorfismo interior $\alpha \mapsto \xi^{-1} \alpha \xi$; y L el sistema local dado por la representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$.

Se obtiene el siguiente (cf. teorema III.2.27)

TEOREMA 1. - El par $(\text{Rsp}_*(L|_{X_1}), \text{Rsp}_*(\tau_L)) (\cong (\text{R}\psi_f(L), M(L)))$ está representado en términos de pares de espacios vectoriales por:

$$\left(E \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E), (t^1, t^2) \right)$$

donde: -) I es el ideal de aumentación del álgebra del grupo L , $\mathbb{C}[L]$.

$$\text{-) } U(e)(\alpha) = \alpha \cdot e \quad e \in E \quad \alpha \in I.$$

$$\text{-) } V(h) = h(\delta_0 - 1) \quad h \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E).$$

$$\text{-) } t^1(e) = \xi \cdot e \quad e \in E.$$

$$\text{-) } t^2(h) = t^1 \cdot h \cdot \phi, \quad h \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E), \text{ con}$$

$$\phi = \mathbb{C}[\pi_1(T)] : \mathbb{C}[L] \rightarrow \mathbb{C}[L].$$

La demostración del teorema 1 constituye la parte técnica de este trabajo. Se trata de utilizar convenientemente la igualdad:

$$\text{R}\Gamma(Z, L) = \text{RHom}_{\mathbb{C}[\pi_1(Z)]}(\mathbb{C}, \Gamma(\tilde{Z}, p^{-1}L))$$

válida para los espacios Z cuyo revestimiento universal $p: \tilde{Z} \rightarrow Z$ es contráctil, y para los sistemas locales L sobre Z .

Como consecuencia del teorema 1, y del teorema de extensión de haces perversos, obtenemos el (cf. teorema III.3.3 y corolario III.3.4)

TEOREMA 2.- La categoría de los haces perversos (respectivamente sistemas holónomos regulares) sobre X , cuya variedad característica está contenida en la reunión de: la sección nula del fibrado cotangente, del conormal a la parte lisa de la curva $f^{-1}(0)$, y del conormal al origen, es equivalente a la categoría cuyos objetos son los pares:

$$\left(E, \begin{array}{ccc} E & \begin{array}{c} \xrightarrow{c_1} \\ \xleftarrow{v_1} \end{array} & \phi_1 \\ \begin{array}{c} U \downarrow \\ \uparrow V \end{array} & \text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E) & \begin{array}{c} u \downarrow \\ \uparrow v \end{array} \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{c_2} \\ \xleftarrow{v_2} \end{array} & \phi_2 \end{array} \right) \dots$$

donde: -) E es un $\mathbb{C}[G]$ -módulo de dimensión finita sobre \mathbb{C} .

-) ϕ_1 y ϕ_2 son \mathbb{C} -espacios vectoriales de dimensión finita.

-) c_1, v_1, c_2, v_2, u, v son \mathbb{C} -lineales.

-) $1_\phi + v \cdot u$ es un automorfismo.

-) $c_2 \cdot U = u \cdot c_1$; $v \cdot c_2 = c_1 \cdot V$; $v_1 \cdot v = V \cdot v_2$;

$v_2 \cdot u = U \cdot v_1$.

-) $1_E + v_1 \cdot c_1 = t^1$; $1_{\text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E)} + v_2 \cdot c_2 = t^2$.

y cuyos morfismos son los evidentes.

Para terminar estudiamos algunos ejemplos, y aplicamos el teorema 2 al cálculo de las multiplicidades

de las "prolongaciones intermedias" (cf. [Beil-Ber-Del]). Si K es un haz perverso en las condiciones del teorema 2, y E, ϕ_1, ϕ_2 son los \mathbb{C} -espacios vectoriales asociados, sus dimensiones están ligadas estrechamente a las multiplicidades de las componentes de la variedad característica de K (cf. III.3.5 d)). Si K es la prolongación intermedia $j_{i*}(L)$ de un sistema local L sobre X^* , el conocimiento explícito de la representación (V, ρ) asociada a L , y del grupo fundamental local G en términos de generadores y relaciones, nos permite calcular explícitamente (con los métodos del Algebra Lineal) las multiplicidades de las componentes de $\text{Ch}(j_{i*}(L))$ (cf. Proposición III.3. y Ejemplo III.4.19).

Señalemos que un resultado análogo al Teorema 2 en el caso de la curva $x^3 - y^2 = 0$, ha sido obtenido independientemente por M. Granger y Ph. Maisonobe ([Gra-Mais]). Su técnica consiste en fabricar "Coupures" adaptadas a la situación, como en [Gal-Gra-Mais] .

I.- SISTEMAS DIFERENCIALES. CONSTRUCTIBILIDAD, DUALIDAD
Y REGULARIDAD. HACES PERVERSOS.

En este capítulo, damos un rápido repaso a la teoría de los \mathcal{D} -módulos, haciendo especial hincapié en el problema del tipo Riemann-Hilbert para los complejos con cohomología constructible. Dicha teoría tiene su origen, en la aplicación de los métodos cohomológicos de Grothendieck a las ecuaciones en derivadas parciales, por medio de la teoría de las Hiperfunciones de Sato (cf. [S.K.K.]). Su filosofía consiste por una parte, en poner de manifiesto los aspectos algebraicos de las ecuaciones en derivadas parciales, y por otra, en extender los métodos microlocales de Hörmander (caso C^∞) al caso analítico complejo.

En un principio, la teoría fue concebida y desarrollada para estudiar los sistemas lineales de ecuaciones en derivadas parciales holomorfas. Así por ejemplo, se da la definición de variedad característica de un sistema, y se demuestra su involutividad, punto éste que constituye el primer resultado profundo de la teoría (cf. [S.K.K.]). Poco a poco se va construyendo un formalismo semejante al de la Geometría Algebraica: imágenes directas, imágenes inversas, funtores Tor , Ext , etc.. A continuación, se demuestra el Teorema de Constructibilidad de las soluciones de un sistema holónomo (cf. [Kas 2]), generalización a la dimensión superior

del clásico teorema de Cauchy, y del de Malgrange (cf. [Ma 1]), y se descubre la estructura de sistema holónomo, sobre el haz de las funciones meromorfas con polos en una hipersuperficie arbitraria fijada de antemano (cf. [Kas 3]). Más tarde, se demuestra el Teorema de Dualidad Global para los \mathcal{D} -módulos coherentes (cf. [Me 1]), que engloba como casos límites la dualidad de Poincaré y la dualidad de Serre para los \mathcal{O} -módulos coherentes, así como el Teorema de Bidualidad Local (cf. [Me 2]), que relaciona la dualidad al nivel de los \mathcal{D} -módulos holónomos, con la dualidad al nivel de los complejos constructibles. Un paso particularmente importante, es la definición de regularidad (cf. [Me 2]), basada al mismo tiempo en el Teorema de Comparación de Grothendieck (cf. [Gro]), y en la comparación solución formal - solución convergente de Malgrange. Dicha noción permite resolver el llamado problema de Riemann-Hilbert para los complejos constructibles (cf. [Me 3,4,5]), lo que constituye sin lugar a dudas un punto culminante de la teoría. Como aplicación de dicho resultado, se ha probado recientemente la conjetura de Kazhdan-Lusztig (cf. [Bry-Kas]), y se ha desarrollado el "formalismo de los haces perversos", que constituye una prometedora teoría de cara al estudio de la geometría y topología de las singularidades (cf. [Beil-Ber-Del]).

Señalemos para terminar, que en esta breve introducción hemos omitido la importante Teoría Microlocal (\mathcal{E} -módulos), dado que en el diccionario ecuaciones en

derivadas parciales - geometría y topología de las singularidades, que es el que nos interesa en este trabajo, sólo ha jugado un papel técnico.

1. \mathcal{D} -módulos. Coherencia.

Consideremos una variedad análítica compleja X , y sea \mathcal{D}_X el haz de los operadores diferenciales lineales con coeficientes holomorfos sobre X . \mathcal{D}_X es la sub- \mathcal{O}_X -álgebra de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ generada por \mathcal{O}_X y por los campos de vectores holomorfos $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

\mathcal{D}_X es un haz de anillos (no conmutativos) dotado de una filtración creciente $\{\mathcal{D}_X^m\}_{m \geq 0}$: la filtración por el orden de los operadores diferenciales.

$$\mathcal{D}_X^0 = \mathcal{O}_X ; \quad \mathcal{D}_X^1 = \mathcal{O}_X \oplus \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

Teniendo en cuenta la definición de \mathcal{D}_X y de $\{\mathcal{D}_X^m\}_{m \geq 0}$, es fácil demostrar que $\text{Gr}(\mathcal{D}_X)$ es canónicamente isomorfo al álgebra simétrica de los campos de vectores $S(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X))$, y por tanto, el fibrado cotangente $\pi: T^*(X) \rightarrow X$ de X se identifica canónicamente al espectro analítico de la \mathcal{O}_X -álgebra $\text{Gr}(\mathcal{D}_X)$:

$$T^*(X) = \text{Specan}(\text{Gr}(\mathcal{D}_X))$$

En particular, disponemos de una inyección canónica:

$$\pi^{-1}\text{Gr}(\mathcal{D}_X) \hookrightarrow \mathcal{D}_{T^*(X)}$$

(1.2) Teorema.- \mathcal{D}_X es un haz de anillos coherente.

La demostración de (1.2) puede hacerse utilizando los análogos de los teoremas A y B de Cartan sobre \mathcal{D}_X (cf. [SG] y [Pham]), o bien por un razonamiento de tipo general, que reduce la coherencia de un haz de anillos filtrado satisfaciendo ciertas propiedades, inmediatas en el caso de $(\mathcal{D}_X, \{\mathcal{D}_X^m\})$, a la de su graduado (cf. [Bj]).

(1.3) Definición.- Un sistema diferencial (lineal) a la izquierda (respec. a la derecha) sobre X, es un \mathcal{D}_X -módulo coherente a la izquierda (respec. a la derecha).

Como consecuencia del teorema (1.2), un \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda M es coherente si y solamente si es localmente de presentación finita, es decir, si todo punto $x \in X$ posee un entorno abierto U donde existe una sucesión exacta de la forma:

$$(1.4) \quad (\mathcal{D}_X|_U)^m \xrightarrow{\phi} (\mathcal{D}_X|_U)^n \rightarrow M|_U \rightarrow 0$$

Notemos que la presentación (1.4) viene dada por una matriz de operadores diferenciales lineales sobre U,

$\{P_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, donde: $\phi(U)(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) = (P_{i1}, \dots, P_{in}) \in$

$\in \mathcal{D}_X(U)^n$, $1 \leq i \leq m$. Por tanto, $M|_U$ se identifica al cociente de $(\mathcal{D}_X|_U)^n$ por el submódulo generado por (P_{i1}, \dots, P_{in}) , $1 \leq i \leq m$.

Si N es otro \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda, las secciones del haz $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N)$ sobre un abierto $V \subset U$, se identifican a las n -uplas $(f_1, \dots, f_n) \in N(V)^n$ tales que:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} \cdot f_j = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

es decir, a las soluciones clásicas del sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales dado por la matriz $\{P_{ij}\}$. Todo lo dicho, motiva la siguiente definición:

- (1.5) Definición.- Sea M un sistema diferencial a la izquierda (respec. derecha) sobre X , y sea N un \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda (respec. derecha). Las soluciones de M con valores en N son el haz de \mathbb{C} -espacios vectoriales:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N).$$

Esta definición es la versión intrínseca y global de la definición clásica de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales.

Teniendo en cuenta que el anillo graduado de la fibra de \mathcal{O}_X en un punto $x \in X$, es isomorfo a un anillo de polinomios en $d = \dim(X)$ variables sobre el anillo de series convergentes en d variables, no es difícil demostrar, utilizando razonamientos estándar anillo filtrado-anillo graduado, que la dimensión proyectiva de $\mathcal{O}_{X,x}$ está acotada por $2d$. En realidad es posible demostrar que la dimensión proyectiva de $\mathcal{O}_{X,x}$ es d (cf. [Bj]).

La definición (1.5) admite la generalización siguiente, que será la utilizada de ahora en adelante:

(1.6) Si N es un \mathcal{O}_X -módulo a la izquierda, el functor solución con valores en N es por definición el functor derivado de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, N)$:

$$\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(-, N) : D(\mathcal{O}_X)_{\mathbb{C}} \rightarrow D(\mathbb{C}_X)$$

donde $D(\mathcal{O}_X)_{\mathbb{C}}$ (respec. $D(\mathbb{C}_X)$) denota la categoría derivada de los complejos acotados de \mathcal{O}_X -módulos con cohomología coherente (respec. categoría derivada de los complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales sobre X). (Para lo referente a categorías derivadas y funtores derivados, consultar [Hart]).

Los grupos de cohomología $h^k(\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(M, N)$ $k \geq 1$, se denominan soluciones superiores de

$$\cdot (h^0(\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M,N)) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^0(M,N) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M,N)).$$

(1.7) Ejemplos.- a) \mathcal{O}_X tiene una estructura canónica de \mathcal{O}_X -
-módulo a la izquierda. Si $(U; x_1, \dots, x_d)$ es una carta
local de X , $\mathcal{O}_X|_U$ admite la siguiente presentación:

$$(\mathcal{O}_X|_U)^d \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X|_U \rightarrow 0$$

con: $(U)(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) = \frac{\delta}{\delta x_i} \quad 1 \leq i \leq d$

$$p(U)(1) = 1$$

Por tanto, \mathcal{O}_X es un sistema diferencial (a la izquierda).

b) $\Omega_X = \Lambda^d \Omega_X^1$ tiene una estructura canónica de \mathcal{O}_X -módulo a la derecha: si $(U; \underline{x})$ es una carta local de X , $\omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ es una sección de Ω_X sobre U , y $P =$

$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{\delta \underline{x}}\right)^\alpha$ es un operador diferencial sobre U , defini-

mos:

$$\omega \cdot P = ({}^t P \cdot f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

Es fácil comprobar que esta definición no depende de la carta elegida. Asimismo, $\Omega_X|_U$ admite la siguiente presentación (a la derecha):

$$(\mathcal{O}_X|_U)^d \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{P} \Omega_X|_U \rightarrow 0$$

con: $\phi(U)(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) = \frac{\delta}{\delta x_i} \quad 1 \leq i \leq d$

$p(U)(1) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$

y Ω_X es un sistema diferencial a la derecha.

c) Si X es un disco abierto de \mathbb{C} centrado en el origen, y $P = a_N(z) \frac{d^N}{dz^N} + \dots + a_0(z)$ es un operador diferencial sobre X , consideremos el \mathcal{D}_X -módulo $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot P$.

Una resolución \mathcal{D}_X -libre de M viene dada por:

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}_X \rightarrow M \rightarrow 0$$

y por tanto $R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N)$ es el complejo:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow N \xrightarrow{P} N \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

(g°0) (g°1)

En este caso: $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N) = \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^0(M, N) = \text{Ker } P$,

$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^1(M, N) = \text{Coker } P$, y $\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^k(M, N) = 0$ si $k \neq 0, 1$.

Las secciones de $\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^1(M, N)$ representan la obstrucción para resolver la ecuación: $P \cdot f = g$.

(1.8) Si M es un \mathcal{D}_X -módulo a la izquierda (respec. derecha), la estructura natural de \mathcal{D}_X -módulo sobre $\Omega_X \otimes_{\mathcal{D}_X} M$ (respec. $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\Omega_X, M)$) se prolonga de manera

canónica en una estructura de \mathcal{D}_X -módulo a la derecha (respec. izquierda) (cf. [Pham] 13.4 primera Parte). Estos procesos definen dos funtores, de la categoría de los \mathcal{D}_X -módulos a la izquierda en la categoría de los \mathcal{D}_X -módulos a la derecha, y viceversa. Dichos son quasi-inversos el uno del otro, lo que nos permite pasar libremente de una categoría a la otra, y por tanto restringir el estudio a una de ellas. De ahora en adelante, consideraremos tan sólo \mathcal{D}_X -módulos a la izquierda, y cuando escribamos \mathcal{D}_X -módulos, sistemas diferenciales, etc. quedará sobreentendido que se trata de objetos a la izquierda.

2. Variedad Característica, Sistemas holónomos: Constructibilidad de las soluciones y Teorema del índice.

(2.1) Definición.- Si M es un \mathcal{D}_X -módulo, una filtración sobre M es una familia $\{M_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de sub- \mathcal{D}_X -módulos de M tal que:

$$i) M_k \subset M_{k+1} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$ii) \mathcal{D}_X^m \cdot M_k \subset M_{k+m} \quad k \in \mathbb{Z} \quad m \geq 0$$

$$iii) M = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} M_k \quad (\text{en el sentido de los haces,})$$

$$\text{i.e. } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} M_k = \varinjlim M_k$$

$$iv) M_k = 0 \quad \text{para } k \ll 0.$$

Si M es un \mathcal{O}_X -módulo dotado de una filtración $\{M_k\}$, $\text{Gr}(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k/M_{k-1}$ tiene una estructura natural de $\text{Gr}(\mathcal{O}_X)$ -módulo. Diremos que $\{M_k\}$ es una buena filtración si verifica las condiciones siguientes:

- v) M_k es un \mathcal{O}_X -módulo coherente $k \in \mathbb{Z}$
- vi) $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{O}_X^m \cdot M_{k_0} = M_{k_0+m}$ $m \geq 0$

Si M es un \mathcal{O}_X -módulo que admite una presentación global finita:

$$(\mathcal{O}_X)^m \xrightarrow{\phi} (\mathcal{O}_X)^n \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$$

entonces $\{M_k = \psi((\mathcal{O}_X^k)^n)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una buena filtración de M (cf. [SG]). Por tanto, todo sistema diferencial sobre X admite localmente buenas filtraciones.

La siguiente proposición está demostrada en [SG]:

(2.2) Proposición.- Sea M un \mathcal{O}_X -módulo dotado de una filtración $\{M_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Hay equivalencia entre:

- a) $\text{Gr}(M)$ es un $\text{Gr}(\mathcal{O}_X)$ -módulo coherente,
- b) $\{M_k\}$ es una filtración localmente buena,

y en ese caso, M ha de ser un \mathcal{O}_X -módulo coherente.

(2.3) Definición.- Si M es un sistema diferencial sobre X , y $\{M_k\}$ es una filtración localmente buena de M , definimos el $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ -módulo coherente:

$$F(M, \{M_k\}) = \pi^{-1} \text{Gr}(M) \otimes_{\pi^{-1} \text{Gr}(\mathcal{O}_X)} \Theta_{T^*(X)}$$

y para cada punto $p = (x, \xi) \in T^*(X)$,

$$e_p(M, \{M_k\}) = \text{multiplicidad del } \Theta_{T^*(X), p} \text{-módulo } F(M, \{M_k\})_p.$$

(2.4) Proposición. - Si M es un sistema diferencial sobre X , y $\{M_k\}$, $\{M'_k\}$ son dos filtraciones localmente buenas de M , se tiene que:

$$a) \text{Sop}(F(M, \{M_k\})) = \text{Sop}(F(M, \{M'_k\}))$$

$$b) e_p(M, \{M_k\}) = e_p(M, \{M'_k\})$$

La demostración de (2.4) se hace por un razonamiento tipo Artin-Rees, y tiene en cuenta la platitude de

$$\pi^{-1} \text{Gr}(\mathcal{O}_X) \hookrightarrow \Theta_{T^*(X)} \text{ (cf. [SG])}.$$

(2.5) Definición. - Sea M un sistema diferencial sobre X , y p un punto de $T^*(X)$. La variedad característica de M , es el subconjunto analítico cerrado de $T^*(X)$, $\text{Ch}(M)$, definido como sigue: Si $U \subset X$ es un abierto de X donde $M|_U$ admite una buena filtración $\{M_k\}$, $\text{Ch}(M) \cap \pi^{-1}(U) = \text{sop}(F(M|_U, \{M_k\}))$.

$\text{Ch}(M)$ está bien definido, de acuerdo con (2.4). Asimismo se define la multiplicidad de M en p , $e_p(M)$, como:

$$e_p(M) = e_p(M|_U, \{M_k\})$$

donde suponemos que $\pi(p) \in U$. Teniendo en cuenta de nuevo

la proposición (2.4), $e_p(M)$ está bien definida.

- (2.6) Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de sistemas diferenciales sobre X , es fácil ver que: $\text{Ch}(M) = \text{Ch}(M') \cup \text{Ch}(M'')$, y si p es un punto de $T^*(X)$ donde $\dim_p(\text{Ch}(M')) = \dim_p(\text{Ch}(M''))$, entonces:

$$e_p(M) = e_p(M') + e_p(M'') .$$

A continuación daremos el primer resultado profundo de la teoría de \mathcal{D} -módulos:

- (2.7) Teorema.— Si M es un sistema diferencial sobre X , la variedad característica de M , $\text{Ch}(M)$, es un subconjunto analítico cónico cerrado de $T^*(X)$, involutivo para la estructura simpléctica canónica de $T^*(X)$.

La demostración de este teorema es bastante difícil. La primera demostración se encuentra en [S.K.K.], y utiliza las transformaciones canónicas de $T^*(X)$. Una segunda demostración más elegante fue dada por Malgrange (cf. [Ma 2]). Gabber, en el año 1979, dió una demostración de (2.7) puramente algebraica y mucho más general (cf. [Ga]).

- (2.8) Corolario.— Si M es un sistema diferencial sobre X , $\dim_p(\text{Ch}(M)) \geq d$, para todo punto p de $\text{Ch}(M)$.

- (2.9) Definición.— Si M es un sistema diferencial sobre X , diremos que M es un sistema holónomo (o \mathcal{D}_X -módulo ho-

lónomo), si la variedad característica de M es de dimensión pura igual a $d = \dim(X)$.

(2.10) Si M es un \mathcal{O}_X -módulo holónomo, y $V \subset \text{Ch}(M)$ es una componente irreducible de $\text{Ch}(M)$, V es un subconjunto analítico cerrado, cónico y lagrangiano (involutivo de dimensión d) de $T^*(X)$, de donde $\pi(V)$ es un subconjunto analítico cerrado de X , y V coincide con la adherencia del conormal a la parte lisa de $\pi(V)$ (cf. [Pham]), y por tanto:

$$\text{Ch}(M) = \bigcup_V \overline{T_{\pi(V)}^*(X)}$$

donde V recorre las componentes irreducibles de $\text{Ch}(M)$, y $\pi(V)^\circ$ designa la parte lisa $\pi(V)$.

Definimos el soporte singular de M como:

$$\text{sop.sing.}(M) = \bigcup \{ \pi(V) \mid V \text{ es una componente irreducible de } \text{Ch}(M) \text{ de dimensión menor que } d = \dim(X) \}$$

Notemos que el soporte de M coincide con la imagen por π de $\text{Ch}(M)$, de donde $\text{sop}(M)$ es un subconjunto analítico cerrado de X .

(2.11) Ejemplo. - \mathcal{O}_X es un \mathcal{O}_X -módulo holónomo, cuya variedad característica es la sección nula de $T^*(X)$, $T_X^*(X)$. Por tanto:

$$\text{sop.sing.}(\mathcal{O}_X) = \emptyset$$

(2.12) Si M es un \mathcal{O}_X -módulo holónimo, diremos que una estratificación $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X por subvariedades analíticas localmente cerradas y conexas, es regular con respecto a M si satisface las condiciones siguientes:

i) $\{S_\alpha\}$ es una estratificación de Whitney de X

ii) $\text{Ch}(M) \subset \bigcup_{\alpha} T_{S_\alpha}^*(X)$

A causa de (2.10), todo \mathcal{O}_X -módulo holónimo posee una estratificación regular, pues es suficiente encontrar una estratificación de Whitney $\{S_\alpha\}$ de X , tal que si V es una componente irreducible de $\text{Ch}(M)$, $\pi(V)$ sea reunión de algunos S_α . En ese caso, las condiciones de Whitney nos aseguran la igualdad:

$$\bigcup_{\alpha} T_{S_\alpha}^*(X) = \overline{\bigcup_{\alpha} T_{S_\alpha}^*(X)} = \bigcup_{\alpha} \overline{T_{S_\alpha}^*(X)}$$

(2.13) Teorema.- Sea M un \mathcal{O}_X -módulo holónimo, y sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una estratificación regular con respecto a M . Entonces tenemos lo siguiente:

a) Los haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(M, \Theta_X)$ $k \in \mathbb{Z}$, son haces constructibles con respecto a la estratificación $\{S_\alpha\}$, i.e. su restricción a cada S_α es un sistema local complejo de dimensión finita.

b) $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(M, \Theta_X) = 0$ si $k \neq 0, \dots, d$, y
 $\dim(\text{sop}(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(M, \Theta_X))) \leq d - k$ si $k = 0, \dots, d$.

La demostración del teorema (2.13) se debe a

Kashiwara (cf. [Kas 2]). La importancia de dicho teorema radica en el hecho de que coloca a los sistemas holónomos, en un lugar privilegiado dentro de los sistemas diferenciales. Una condición de tipo geométrico sobre M $-\dim(\text{Ch}(M)) = d-$, se traduce en una condición de finitud sobre sus soluciones holomorfas $-\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^k(M, \mathcal{O}_X)$ es constructible, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Más tarde veremos que los sistemas holónomos, constituyen una traducción en términos de ecuaciones en derivadas parciales, de los objetos estudiados en la Geometría y Topología de los espacios analíticos complejos.

(2.14) Si M es un \mathcal{D}_X -módulo holónimo, y V es una componente irreducible de $\text{Ch}(M)$, de acuerdo con la definición de la multiplicidad de M en un punto p de $T^*(X)$, $e_p(M)$ (cf. (2.5)), la función:

$$p \in V \mapsto e_p(M) \in \mathbb{N}$$

toma un valor genérico. Nótese que dicha función coincide (localmente) con la función multiplicidad de un haz analítico coherente sobre $T^*(X)$ (cf. (2.3) y (2.5)). Dicho valor genérico será llamado "multiplicidad de M en V ", y lo notaremos: $e_V(M)$.

(2.15) Teorema. - Sea M un \mathcal{D}_X -módulo holónimo, x un punto de X y $\{V_i\}_{i \in I}$ la familia (finita) de las componentes irreducibles de $\text{Ch}(M)$ tales que $x \in Y_i = \pi(V_i)$. Entonces se tiene

la igualdad:

$$\chi(\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M, \Theta_X)) = \sum_{i \in I} (-1)^{\text{codim}(Y_i)} \cdot \text{Eu}(Y_i, x) \cdot e_{V_i}(M)$$

donde: $\chi(\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M, \Theta_X)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}}(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(M, \Theta_X))$

y $\text{Eu}(Y_i, x)$ es la obstrucción de Euler del conjunto analítico \bar{Y}_i en el punto x (cf. [Gon-Ver] y [Bry-Du-Kas]).

La demostración del teorema (2.15) se debe a Kashiwara (cf. [Kas 4]). La demostración original no utiliza la obstrucción de Euler en la formulación del resultado. Con posterioridad se observó que los invariantes usados por Kashiwara coincidían con la obstrucción de Euler (cf. [Bry-Du-Kas]). El teorema (2.15) constituye una generalización a los sistemas holónomos en dimensión cualquiera del teorema del índice de Malgrange (cf. [Ma 1]).

Para terminar la sección 2, vamos a recordar dos operaciones importantes sobre los \mathcal{O} -módulos.

(2.16) Si $Y \subset X$ es un subespacio analítico cerrado de X , definido por un ideal $I_Y \subset \mathcal{O}_X$, y M es un \mathcal{O}_X -módulo, definimos:

$$\Gamma_{[Y]}(M) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I_Y^k, M)$$

$$\Gamma_{[X|Y]}(M) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I_Y^k, M)$$

Es fácil demostrar que $\Gamma_{[Y]}(M)$ (respec. $\Gamma_{[X|Y]}(M)$)

es un sub- \mathcal{O}_X -módulo de $\Gamma_Y(M)$ (respec. de $j_*j^{-1}M$, donde $j: X \setminus Y \hookrightarrow X$ es la inclusión).

Los funtores Γ_Y y $\Gamma_{X \setminus Y}$ se derivan, y nos dan unos funtores:

$$R\Gamma_Y, R\Gamma_{X \setminus Y} : D(\mathcal{O}_X) \rightarrow D(\mathcal{O}_X).$$

Si M es un objeto de $D(\mathcal{O}_X)$, disponemos de un triángulo distinguido de $D(\mathcal{O}_X)$:

(2.17)

$$\begin{array}{ccc}
 & R\Gamma_{X \setminus Y}(M) & \\
 \swarrow +1 & & \searrow \\
 R\Gamma_Y(M) & \longleftarrow & M
 \end{array}$$

funtorial en M .

Notemos que si Y es una hipersuperficie de X , y $M = \mathcal{O}_X$, $R\Gamma_{X \setminus Y}(\mathcal{O}_X)$ coincide con el haz $\mathcal{O}_X[*Y]$ de las funciones meromorfas sobre X con polos en Y .

(2.18) Teorema.- Si M es un \mathcal{O}_X -módulo holónimo, entonces $R^i\Gamma_Y(M)$ es también holónimo (en particular coherente), para cada $i \in \mathbb{Z}$.

La demostración del teorema (2.18) es debida a Mebkhout cuando $M = \mathcal{O}_X$ (cf. [Me 6]), y a Kashiwara en el caso general (cf. [Kas 3]).

(2.19) Corolario.- Los funtores $R\Gamma_{[Y]}$ y $R\Gamma_{[X|Y]}$ preservan la categoría $D(\mathcal{D}_X)_h$ de los complejos de \mathcal{D}_X -módulos con cohomología holónoma.

3. Dualidad y Regularidad.

Como consecuencia del teorema (2.13), sabemos que el functor "soluciones holomorfas" $Sol = RHom_{\mathcal{D}_X}(-, \Theta_X)$ (cf. (1.6)) envía la categoría derivada de los complejos de \mathcal{D}_X -módulos con cohomología holónoma $D(\mathcal{D}_X)_h$ en la categoría de los complejos de haces de \mathbb{C} -espacios vectoriales con cohomología constructible $D(\mathbb{C}_X)_c$:

$$(3.1) \quad Sol = RHom_{\mathcal{D}_X}(-, \Theta_X) : D(\mathcal{D}_X)_h \rightarrow D(\mathbb{C}_X)_c$$

En la categoría $D(\mathbb{C}_X)_c$ existe una involución natural: la dualidad de Grothendieck-Verdier.

Dado un complejo K de $D(\mathbb{C}_X)_c$, definimos su dual como:

$$(3.2) \quad K^\vee = RHom_{\mathbb{C}_X}(K, \mathbb{C}_X)$$

Se demuestra que K^\vee es de nuevo un objeto de $D(\mathbb{C}_X)_c$, y que $(K^\vee)^\vee \simeq K$ de forma natural (cf. [Ver 2]).

Por otra parte, en la categoría $D(\mathcal{D}_X)_h$ también disponemos de una involución natural:

Dado un complejo M de $D(\mathcal{O}_X)$, el complejo $RHom_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{O}_X)$ hereda la estructura de \mathcal{O}_X -módulo a la derecha del propio \mathcal{O}_X , y por tanto (cf. (1.8)) podemos formar el complejo de \mathcal{O}_X -módulos a la izquierda:

$$(3.3) \quad M^* = Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, RHom_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{O}_X))[d] \quad (1)$$

(3.4) Proposición.- Si M es un \mathcal{O}_X -módulo holónimo, entonces M^* es un complejo concentrado en el grado 0, con cohomología hólónoma, y $(M^*)^* \simeq M$ de forma natural.

La demostración de la proposición (3.4) se encuentra en [Kas 1]. En este caso, M^* se identifica al \mathcal{O}_X -módulo:

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, Ext_{\mathcal{O}_X}^d(M, \mathcal{O}_X))$$

(3.5) Corolario.- El functor $M \mapsto M^*$ definido en (3.3) es una involución de $D(\mathcal{O}_X)_h$.

En el caso del \mathcal{O}_X -módulo holónimo \mathcal{O}_X , existe un isomorfismo canónico: $(\mathcal{O}_X)^* \simeq \mathcal{O}_X$, que nos induce un isomorfismo natural en M (\mathcal{O}_X -módulo holónimo):

$$(3.6) \quad Sol(M^*) \simeq RHom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, M)$$

Para cada \mathcal{O}_X -módulo holónimo, definimos el complejo de De Rham de M como:

$$(3.7) \quad DR(M) = RHom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, M)$$

(1) [d] significa que hemos corrido el complejo d lugares a la izquierda.

(3.8) Teorema. - Si M es un complejo de \mathcal{O}_X -módulos acotado con cohomología holónoma, existe un isomorfismo canónico:

$$\text{Sol}(M^*) \cong \text{Sol}(M)^\vee$$

Este teorema es debido a Mebkhout, y su demostración se encuentra en [Me 2].

Definamos ahora la importante noción de regularidad. Se trata de una generalización de la noción de puntos singulares regulares del Análisis clásico, y de la noción de regularidad para una conexión meromorfa, introducida por Deligne en [Del 1]. Dicha noción está inspirada en el Teorema de Comparación de Grothendieck ([Gro]).

(3.9) Proposición. - Sea M un complejo de $D(\mathcal{O}_X)_h$, e Y un subespacio analítico cerrado de X . Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) El morfismo natural: $\text{DR}(\text{R}\Gamma_{[Y]}(M)) \rightarrow \text{DR}(\text{R}\Gamma_Y(M)) = \text{R}\Gamma_Y(\text{DR}(M))$ es un isomorfismo.

b) El morfismo natural: $\text{Sol}(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \rightarrow \text{Sol}(\text{R}\Gamma_{[Y]}(M))$ es un isomorfismo.

La proposición (3.9) se debe a Mebkhout (loc.cit.), y se demuestra con la ayuda de una tercera condición equivalente, que hace intervenir los operadores diferenciales de orden infinito.

(3.10) Definición (Mebkhout).- Dado un complejo M de $D(\mathcal{O}_X)_h$, y un subespacio analítico cerrado Y de X , diremos que M es regular a lo largo de Y si las condiciones a) y b) de (3.9) son satisfechas. Asimismo, diremos que M es regular, si lo es a lo largo de todo subespacio analítico cerrado de X .

No es difícil demostrar que un complejo M de $D(\mathcal{O}_X)_h$ es regular si y sólo si sus grupos de cohomología son regulares.

(3.11) Proposición.- El \mathcal{O}_X -módulo holónimo \mathcal{O}_X es regular.

Esta proposición se debe a Mebkhout (cf. [Me 6]). La prueba se basa en el Teorema de Comparación de Grothendieck (cf. [Gro]).

(3.12) Teorema.- Si M es un complejo de $D(\mathcal{O}_X)_h$ regular, M^* también lo es.

La prueba del teorema (3.12) se encuentra en [Me 5].

4. El problema de Riemann-Hilbert para los complejos constructibles. Haces perversos.

Los teoremas (2.13) y (3.8) establecen una relación muy estrecha entre las categorías $D(\mathcal{D}_X)_h$ y $D(\mathbb{C}_X)_c$, a través del funtor Sol (cf. (3.1)). Una pregunta que surge de forma natural es en qué forma las soluciones de un complejo M , $\text{Sol}(M)$, lo determinan. Esta pregunta encuentra un precedente clásico en el problema de Riemann: Dada una representación compleja de dimensión finita del grupo fundamental del complementario de los puntos $\{0,1,\infty\}$ en la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, encontrar una ecuación diferencial con puntos singulares regulares en $0,1,\infty$, cuya monodromía realice dicha representación. Con más generalidad, nos planteamos el problema sobre una variedad algebraica lisa, en lugar de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$ (Problema de Riemann-Hilbert). La respuesta a éste último, fue dada por Deligne (cf. [Del 1]). En ambos problemas, se añade siempre una condición de regularidad en el "infinito", pues en ellos no se trata el comportamiento de las soluciones en los puntos singulares, situados siempre en el "infinito".

El Problema de Riemann-Hilbert para los complejos constructibles consiste en realizar todo complejo de $D(\mathbb{C}_X)_c$ como solución (en el sentido de (3.1)) de un complejo de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ (categoría derivada de los complejos de \mathcal{D}_X -módulos acotados, con cohomología holónoma regular).

El resultado principal en este sentido, y quizá uno de los puntos culminantes de la teoría de \mathcal{D} -módulos, es el siguiente:

(4.1) Teorema (Mebkhout).- El functor $\text{Sol} : D(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}} \rightarrow D(\mathbb{C}_X)_c$ es una (anti)equivalencia de categorías.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [Me 5], y utiliza la práctica totalidad de los resultados enunciados en las secciones precedentes, así como el comportamiento de la regularidad por las imágenes inversa y directa, el teorema de dualidad relativa, la solución del problema de Riemann-Hilbert de Deligne, y la resolución de singularidades de Hironaka.

Entre las numerosas e importantes aplicaciones del teorema (4.1), nos centraremos en lo que constituye el objeto del presente trabajo: los haces perversos.

(4.2) Definición.- La categoría de los haces perversos sobre X , notada $\text{Perv}(X)$, es la imagen por el functor Sol de la categoría $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}}$.

Un objeto de $\text{Perv}(X)$ es un complejo K de $D(\mathbb{C}_X)_c$, para el cuál existe un \mathcal{D}_X -módulo (regular) M tal que:

$$K \simeq \text{RHom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$$

Por definición, tenemos una equivalencia de categorías:

$$(4.3) \quad \text{Sol} : \text{Mod}(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}} \rightarrow \text{Perv}(X)$$

por lo que $\text{Perv}(X)$ es una categoría abeliana local.

(4.4) Como consecuencia de los teoremas (2.13) y (3.8), y de la proposición (3.4), si K es un haz perverso sobre X , K verifica las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } h^i(K) &= 0 \quad \text{si } i \neq 0, \dots, d, \quad \text{y} \\ \dim(\text{sop}(h^i(K))) &\leq d - i \quad \text{si } i = 0, \dots, d. \end{aligned}$$

b) El dual de K , K^\vee , verifica a).

(4.5) Teorema: $\text{Perv}(X)$ es la subcategoría plena de $D(\mathbb{C}_X)_{\mathbb{C}}$ formada por los complejos que verifican las condiciones a) y b) de (4.4).

El teorema (4.5) es debido a Deligne (cf. [Bry]).

(4.6) Nota: La denominación "haz perverso" proviene del hecho de que se trata de objetos locales (se pueden reconstruir a partir de la restricción a los elementos de un recubrimiento abierto de X), y de que los primeros complejos de $D(\mathbb{C}_X)_{\mathbb{C}}$ no triviales conocidos, soluciones de un único (concentrado en grado 0) \mathcal{D}_X -módulo holónimo regular, fueron los complejos de intersección de los subespacios analíticos de X , definidos con la "perversidad media" (cf. [Gor-MacP]).

(4.7) Recapitulación.- La equivalencia de categorías (4.1), ha servido para descubrir la categoría de los haces perversos $\text{Perv}(X) \subset D(\mathbb{C}_X)_{\mathbb{C}}$, así como para lo que podríamos llamar, el desarrollo del formalismo de los haces perversos, independiente de la teoría original de \mathcal{D} -módulos (cf. [Beil-Ber-Del]). Dicho formalismo es la continuación natural de las ideas de Grothendieck.

En el capítulo II, repasaremos la parte concerniente al problema de extensión de los haces perversos, y en el capítulo III aplicaremos el teorema de extensión (cf. II,2,1.), a la descripción explícita de los haces perversos estratificados por el germen de una curva plana irreducible, y a fortiori, de los sistemas diferenciales holónomos regulares cuyo soporte singular es el germen de una curva plana irreducible. Es en este sentido, donde el teorema (4.1) se revela como una herramienta importante, capaz de aplicar los métodos de la Topología y Geometría Algebraica, al estudio de los sistemas lineales de ecuaciones en derivadas parciales.

II.- EXTENSION DE HACES PERVERSOS.

Este capítulo tiene por objeto enunciar el teorema de extensión de haces perversos (cf. (2.1)). Dicho teorema constituye el resultado fundamental, sobre el que nos apoyaremos para obtener la descripción explícita de los haces perversos, en el caso de las curvas planas irreducibles (cf. Teorema (III.3.3)).

En la primera sección, recordaremos el formalismo de los ciclos evanescentes de Deligne, e introduciremos gran parte de las notaciones utilizadas en la prueba de los resultados del capítulo III.

En la segunda sección, enunciaremos el teorema de extensión.

1. El formalismo de los ciclos evanescentes de Deligne.

En esta sección, damos un resumen modificado de los "exposés" XIII y XIV de [SGA 7 II].

(1.1) Sea X un espacio topológico, y $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Pongamos:

-) $X_t = f^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{C}$; $X^* = X \setminus X_0 = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$

-) $j: X^* \rightarrow X$, $i: X_0 \rightarrow X$ las inclusiones

-) $(X^* ; p , f)$ el producto fibrado definido por el diagrama cartesiano siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 X^* & \xleftarrow{p} & \tilde{X}^* \\
 f \downarrow & \square & \downarrow \tilde{f} \\
 \mathbb{C}^* & \xleftarrow{\exp} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

(1.2) Definimos el funtor:

$$\psi_f = i^{-1} \cdot j_* \cdot p_* \cdot p^{-1} : \text{Mod}(\mathbb{C}_{X^*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0})$$

Dado que p es un revestimiento (cíclico infinito), el funtor derivado $R\psi_f$ se identifica a:

$$i^{-1} \cdot Rj_* \cdot R p_* \cdot p^{-1}$$

(p^{-1} transforma objetos inyectivos en objetos inyectivos).

(1.3) Sea $T: \tilde{X}^* \rightarrow \tilde{X}^*$ el automorfismo tal que $p \cdot \tilde{T} = \tilde{T}$ y $\tilde{f}(\tilde{T}(x)) = \tilde{f}(x) + 2\pi i$ para cada $x \in \tilde{X}^*$. \tilde{T} es por definición el generador positivo de $\text{Aut}(\tilde{X}^*/\tilde{X}^*)$.

\tilde{T} induce un automorfismo $\sigma_{\tilde{T}}$ del funtor $p_* \cdot p^{-1}$, que a su vez nos proporciona unos automorfismos $M: \psi_f \rightarrow \psi_f$, $M: R\psi_f \rightarrow R\psi_f$.

Antes de continuar, introduzcamos algunas notaciones que utilizaremos más adelante.

Si A es una categoría, definimos:

- (1.4) A^\bullet es la categoría cuyos objetos son los pares $(A; \alpha)$, donde A es un objeto de A , y α es un automorfismo de A , y si $(B; \beta)$ es otro par en las mismas condiciones:

$$\text{Hom}_{A^\bullet}((A; \alpha), (B; \beta)) = \{h \in \text{Hom}_A(A, B) \mid \beta \circ h = h \circ \alpha\} .$$

Con más generalidad, si $F: A \rightarrow A$ es un funtor, definimos la categoría A^F cuyos objetos son los pares $(A; \alpha)$, donde A es un objeto de A , y α es un isomorfismo de A en $F(A)$, y sus morfismos son los evidentes. Señalemos que $A^\bullet = A^{\text{id}_A}$.

- (1.5) A^* es la categoría cuyos objetos son las 4-uplas $(A, B; \alpha, \sigma)$, donde A, B son objetos de A , $\alpha \in \text{Hom}_A(A, B)$, $\sigma \in \text{Aut}_A(B)$, tales que $\sigma \circ \alpha = \alpha$, y si $(A', B'; \alpha', \sigma')$ es otra 4-upla en las mismas condiciones:

$$\text{Hom}_{A^*}((A, B; \alpha, \sigma), (A', B'; \alpha', \sigma')) = \{(g, h) \in \text{Hom}_A(A, A') \times \text{Hom}_A(B, B') \mid h \circ \alpha = \alpha' \circ g, h \circ \sigma = \sigma' \circ h\} .$$

- (1.6) Si A es aditiva, $\mathcal{C}(A)$ es la categoría cuyos objetos son las 4-uplas $(E, F; U, V)$, donde E, F son objetos de A , y $U: E \rightarrow F$, $V: F \rightarrow E$ son morfismos de A tales que $1_E + V \circ U$ y $1_F + U \circ V$ son automorfismos, y si $(E', F'; U', V')$ es otra 4-upla en las mismas condiciones:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(A)}((E, F; U, V), (E', F'; U', V')) = \{(g, h) \in \text{Hom}_A(E, E') \times \text{Hom}_A(F, F') \mid h \circ U = U' \circ g, g \circ V = V' \circ h\} .$$

(1.7) Señalemos que si A es una categoría aditiva (respec. abeliana), A^\bullet , A^* y $C(A)$ son categorías aditivas (respec. abelianas), y que si A es la categoría de los haces de k -módulos sobre un espacio topológico X , A^\bullet , A^* y $C(A)$ se identifican a una categoría de haces de R -módulos sobre X , donde R es un anillo construido a partir de k y de los grafos que definen a dichas categorías (cf. [Gab]).

(1.8) Sea $[R\psi_f]: D^+(C_{X^*}) \rightarrow D^+(C_{X_0})$ el funtor que a un complejo K asocia el objeto $(R\psi_f(K), M(K))$ (cf. (1.3)). De manera análoga, consideremos el funtor:

$$\psi_f^\bullet: K \in \text{Mod}(C_{X^*}) \mapsto (\psi_f(K), M(K)) \in \text{Mod}(C_{X_0})$$

Utilizando el formalismo de los funtores derivados, es fácil ver que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 D^+(C_{X^*}) & \xrightarrow{[R\psi_f]} & D^+(C_{X_0})^\bullet \\
 \searrow R\psi_f^\bullet & & \nearrow \text{canónico} \\
 & & D^+(\text{Mod}(C_{X_0})^\bullet)
 \end{array}$$

Si K es un complejo de $D^+(C_{X^*})$, $R\psi_f(K)$ es por definición el complejo de los "ciclos próximos" de K con respecto a f , y $M(K)$ su automorfismo de monodromía.

(1.9) El objeto del resto de esta sección es definir

el funtor "ciclos evanescentes", y los morfismos "can" (canónico) y "var" (variación).

Consideremos el funtor:

$$\bar{\psi}_f : K \in \text{Mod}(\mathbb{C}_X) \mapsto (i^{-1}K, \psi_f(j^{-1}K); a(K), M(j^{-1}K)) \in \text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0})$$

donde $a: i^{-1} \rightarrow \psi_f \circ j^{-1} = i^{-1} \circ j_* \circ p_* \circ p^{-1} \circ j^{-1}$ es la flecha proveniente de la adjunción.

(1.10) Si $(A^*, B^*; \alpha^*, \sigma^*)$ es un complejo de objetos de $\text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0})^*$, consideremos la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{\phi^*} B^* \oplus \text{cono}(A^*) \xrightarrow{U^*} Q^* \rightarrow 0$$

donde: $\phi^* = (\alpha^*, \text{canónico})$, y $(Q^*; U^*) = \text{Coker}(\phi^*)$.

Pongamos $\tilde{\sigma}^* = \sigma^* \oplus 1_{\text{cono}(A^*)} \in \text{Aut}(B^* \oplus \text{cono}(A^*))$.

$\tilde{\sigma}^* \cdot \phi^* = \phi^*$, de donde $\exists! V^*: Q^* \rightarrow B^* \oplus \text{cono}(A^*)$ tal que $V^* \cdot U^* = \tilde{\sigma}^* - 1$. Es evidente que: $1 + V^* \cdot U^*$ y $1 + U^* \cdot V^*$ son automorfismos.

Definimos: $\Omega(A^*, B^*; \alpha^*, \sigma^*) = (B^* \oplus \text{cono}(A^*), Q^*; U^*, V^*) \in \mathcal{C}(\mathcal{C}^+(\mathbb{C}_{X_0}))$.

Es fácil ver que el funtor $\Omega : \mathcal{C}^+(\text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0}))^* \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}^+(\mathbb{C}_{X_0}))$ pasa a las categorías derivadas:

$$\Omega : D^+(\text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0}))^* \rightarrow \mathcal{C}(D^+(\mathbb{C}_{X_0}))$$

(1.11) Definición.- $\Psi_f = \Omega \circ R\bar{\psi}_f : D^+(\mathbb{C}_X) \rightarrow C(D^+(\mathbb{C}_{X_0}))$

El funtor Ψ_f jugará un papel fundamental en el teorema de extensión de haces perversos (cf. (2.1)).

(1.12) En la situación de (1.6), definimos los funtores:

$\Pi_i : C(A) \rightarrow A$, $\Pi_i^\bullet : C(A) \rightarrow A^\bullet$, $i = 1, 2$, como sigue:

$$\Pi_1(E, F; U, V) = E, \quad \Pi_1^\bullet(E, F; U, V) = (E; 1 + V \cdot U)$$

$$\Pi_2(E, F; U, V) = F, \quad \Pi_2^\bullet(E, F; U, V) = (F; 1 + U \cdot V)$$

De acuerdo con las definiciones, existe un isomorfismo canónico:

(1.13)
$$\alpha : [R\psi_f] \cdot j^{-1} \cong \Pi_1^\bullet \cdot \Psi_f$$

(1.14) Definición.- El funtor de los ciclos evanescentes es

$$\phi_f = \Pi_2 \cdot \Psi_f.$$

Pongamos $\psi_f = \Pi_1 \cdot \Psi_f$, y para cada objeto K de $D^+(\mathbb{C}_X)$, $\Psi_f(K) = (\psi_f(K), \phi_f(K); \text{can}(K), \text{var}(K))$.

Los morfismos $\text{can}: \psi_f \rightarrow \phi_f$, $\text{var}: \phi_f \rightarrow \psi_f$ son llamados respectivamente canónico y variación (de Deligne).

Señalemos que $(\Pi_1^\bullet \cdot \Psi_f)(K) = (\psi_f(K); 1 + \text{var}(K) \cdot \text{can}(K))$

(1.15) Si K es un complejo de $D^+(\mathbb{C}_X)$, disponemos de un triángulo distinguido:

$$\begin{array}{ccc} K|_{X_0} & \xrightarrow{\quad} & \Psi_f(K) \\ & \swarrow & \searrow \text{can}(K) \\ +1 & & \Phi_f(K) \end{array}$$

funtorial en K .

2. Teorema de extensión de haces perversos.

En I.4.2 hemos definido los haces perversos sobre una variedad analítica compleja X . Si $Y \subset X$ es un subespacio analítico cerrado, de codimensión pura igual a r ; podemos definir la categoría de los haces perversos sobre Y , $\text{Perv}(Y)$, como la subcategoría plena de $D(\mathbb{C}_Y)_c$ formada por los complejos K tales que $(i_*K)[-r]$ es un haz perverso sobre X , donde $i:Y \rightarrow X$ es la inclusión. En el caso en que Y sea liso, esta definición coincide con la dada en I.4.2.

El problema de la extensión de haces perversos consiste en, dada una variedad analítica compleja X , un subespacio analítico cerrado Y de X , y un haz perverso K sobre el abierto $U = X \setminus Y$, describir las extensiones de K a X . En esta sección, trataremos dicho problema

en el caso en que Y es una hipersuperficie de ecuación $f = 0$, donde $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica.

El problema de extensión de haces perversos, fue tratado en un principio por MacPherson, desde un punto de vista puramente topológico (cf. [MacP]), y por Deligne en el caso monodrómico (sin publicar). Más tarde, Verdier formuló las ideas de MacPherson con la ayuda del formalismo de los ciclos evanescentes (cf. [Ver 3]). La demostración de Verdier utiliza el caso monodrómico de Deligne y la reducción al cono normal.

Enunciemos a continuación el teorema de extensión en la versión de Verdier

(2.1) Teorema. - Sea X una variedad analítica compleja, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no constante, Y la hipersuperficie ($\neq \emptyset$) de ecuación $f = 0$, y U el abierto $X \setminus Y$. Con las notaciones de la sección anterior, se tiene lo siguiente:

a) Si $K \in \text{Perv}(U)$, $R\psi_f(K) \in \text{Perv}(Y)$

b) Si $K \in \text{Perv}(X)$, $\Psi_f(K), \Phi_f(K) \in \text{Perv}(Y)$

c) Sea $\mathcal{R}_c(U; Y)$ la categoría cuyos objetos son las ternas $(L, (\psi, \phi; c, v), \alpha)$, donde $L \in \text{Perv}(U)$, $(\psi, \phi; c, v)$ es un objeto de $\mathcal{C}(\text{Perv}(Y))$, y $\alpha: R\psi_f(L) \xrightarrow{\sim} (\psi; 1 + v \cdot c)$ es un isomorfismo, y sus morfismos son los evidentes. Consideremos el funtor:

$$R : K \in \text{Per}v(X) \rightarrow (K|_U, \Psi_f(K), \alpha(K)) \in \text{Rc}(U; Y)$$

donde α ha sido definido en (1.13).

Entonces, R es una equivalencia de categorías.

Una demostración de a) puede encontrarse en [Gor-MacP 1].

La demostración de b) está contenida en [Lê-Me].

La demostración de c) se debe a Deligne en el caso monodrómico, y a Verdier en el caso general (cf. [Ver 3]).

(2.2) Si L es un haz perverso sobre U , disponemos de tres extensiones privilegiadas a X : j_*L , j_iL , $j_{i*}L$ (cf. [Beil-Ber-Del]). El functor R del teorema (2.1) nos da la siguiente descripción de dichas extensiones:

$$R(j_*L) \simeq (L, (R\psi_f(L) \xrightleftharpoons[1]{M(L) - 1} R\psi_f(L)), \text{Id})$$

$$R(j_iL) \simeq (L, (R\psi_f(L) \xrightleftharpoons[M(L) - 1]{1} R\psi_f(L)), \text{Id})$$

$$R(j_{i*}L) \simeq (L, (R\psi_f(L) \xrightleftharpoons[\text{inclu.}]{M(L) - 1} \text{Im}(M(L) - 1)), \text{Id})$$

III.- DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA DE LAS CATEGORÍAS DE LOS SISTEMAS HOLONOMOS REGULARES Y DE LOS HACES PERVERSOS CUYO SOPORTE SINGULAR ES EL GERMEN DE UNA CURVA PLANA IRREDUCIBLE

En este capítulo, enunciamos y demostramos los principales resultados de este trabajo. La equivalencia de categorías $\text{Sol:Mod}(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}} \rightarrow \text{Perv}(X)$ (cf. I.4.3), nos permite reducir el problema de la descripción al lado topológico, es decir, a trabajar en $\text{Perv}(X)$. La herramienta fundamental será el teorema de extensión II.2.1.

Si $f_0: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es un germen de función analítica irreducible, y $f: X \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow D$ designa un "buen representante" de f_0 , el teorema II.2.1 reduce la descripción de la categoría de los haces perversos (sistemas holónomos regulares) sobre X cuya variedad característica está contenida en $T_X^*(X) \cup \overline{T_{X_0 \setminus \{0\}}^*(X)} \cup T_0^*(X)$, al cálculo explícito de $[R\psi_f](L)$, donde L es un sistema local sobre X^* (cf. II,1.8).

En la sección 1, calculamos $[R\psi_f](L)$ con la ayuda del morfismo de especialización:

$$\text{sp} : X_1 (= \text{fibra de Milnor}) \rightarrow X_0 (= \text{fibra especial})$$

Todo ello se hace en el caso de singularidades aisladas en dimensión cualquiera. Los detalles técnicos

están expuestos en el Apéndice 1.

En la sección 2, calculamos explícitamente $[R\psi_f](L)$, en función de la representación compleja del grupo fundamental de X^* , asociada al sistema local L , y todo ello en el caso de las curvas planas irreducibles.

En la sección 3, damos el teorema de equivalencia de categorías, que nos proporciona la descripción explícita buscada.

Por último, en la sección 4, estudiamos en detalle el caso de las curvas con un solo par de Puiseux, y aplicamos nuestra descripción explícita al cálculo de las multiplicidades de los complejos de intersección de Goreski-MacPherson.

1. Generalidades.

El objeto de esta sección, es definir una condición adaptada a nuestras necesidades, sobre una función analítica:

$$(1.1) \quad f: X(\text{ent. abierto conexo de } 0 \in \mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow D(\text{disco ab. centrado en } 0 \in \mathbb{C})$$

con singularidad aislada en 0 , y $f(0) = 0$, del tipo " $f: X \rightarrow D$ está en la situación local del punto 0)". Esta

condición nos asegurará las propiedades siguientes:

(1.2) $f|_{X^*}: X^* \rightarrow D^*$ es una fibración topológica (o C^∞) localmente trivial, isomorfa a la fibración de Milnor del germen de f en 0 .

(1.3) Existe un homeomorfismo característico $T: X_1 \rightarrow X_1$ ($1 \in D$, $X_1 = f^{-1}(1)$) de la fibración $f: X^* \rightarrow D^*$, y una aplicación continua propia $sp: X_1 \rightarrow X_0$ tal que:

a) $sp|_{X_1 \setminus sp^{-1}(0)}: X_1 \setminus sp^{-1}(0) \rightarrow X_0 \setminus \{0\}$ es

un homeomorfismo.

b) $sp \circ T = sp$ ($\Rightarrow T(x) = x$ para todo x perteneciente a $X_1 \setminus sp^{-1}(0)$).

c) $f: X \rightarrow D$ se reconstituye a partir del sistema (X_0, X_1, T, sp) por el procedimiento descrito en (A1.1) (cf. [SGA 7 II] exp. XII Introduction, exp. XIV (3.1.4))

En particular tendremos una retracción continua $r: X \rightarrow X_0$ y una trivialización de $f: X^* \rightarrow D^*$

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times \tilde{D}^* & \xrightarrow{p} & X^* \\
 \text{pr}_2 \downarrow & \square & \downarrow f \\
 \tilde{D}^* & \xrightarrow{\text{exp}} & D^*
 \end{array}$$

tales que: $p(x, 0) = x$ para todo x de X_1 , $r(p(x, s)) = r(x) = sp(x)$ para todo (x, s) de $X_1 \times \tilde{D}^*$, y

$\tilde{T}: (x, s) \in X_1 \times \tilde{D}^* \rightarrow (T(x), s + 2\pi i) \in X_1 \times D^*$ es el generador positivo del grupo de los automorfismos del revestimiento cíclico p .

Señalemos que si $X^\delta = X \setminus r^{-1}(0)$, $f|_{X^\delta}: X^\delta \rightarrow D$ es una fibración trivial, y que $X_0^\delta := X_0 \cap X^\delta = X_0 \setminus \{0\}$, $X_1^\delta := X_1 \cap X^\delta = X_1 \setminus sp^{-1}(0)$.

(1.4) Definición.- Sea $f: X \rightarrow D$ en la situación de (1.1). Diremos que $f: X \rightarrow D$ está en la situación local (topológica) del punto 0 , si las condiciones siguientes son satisfechas:

(i) $f: X^* \rightarrow D^*$ es una fibración localmente trivial.

(ii) Si ϵ_0 es un número real positivo tal que ⁽¹⁾

$$\rightarrow \bar{B}_{\epsilon_0} \subset X$$

$$\rightarrow \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0] \exists \eta_\epsilon > 0 \text{ tal que } f^{-1}(t) \uparrow \uparrow S_\epsilon$$

si $|t| < \eta_\epsilon$,

entonces, para cada ϵ_1 de $(0, \epsilon_0]$ existe un homeomorfismo $H: f^{-1}(D_{\eta_{\epsilon_1}}) \cong B_{\epsilon_0} \cap f^{-1}(D_{\eta_{\epsilon_1}})$ tal que $f \circ H = f$, y H es

la identidad sobre $f^{-1}(D_{\eta_{\epsilon_1}}) \cap \bar{B}_{\epsilon_1}$.

Si $f_0: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es un germen de función analítica con singularidad aislada, el teorema de fibración de Milnor (cf. [Mi]) nos asegura la existencia de un representante $f: X \rightarrow D$ de f_0 que está en la situación

local del punto 0.

(1.5) Proposición.- Sea $f: X \rightarrow D$ una función analítica como en (1.1), y supongamos que $f: X \rightarrow D$ está en la situación local del punto 0. Entonces existen $T: X_1 \rightarrow X_1$ y $sp: X_1 \rightarrow X_0$ como en (1.3).

Demostración.- Si ϵ_0 es un real positivo verificando la condición (ii) de la definición (1.4), es suficiente demostrar la proposición (1.5) para:

$$f|_{B_{\epsilon_0} \cap f^{-1}(D_{n_{\epsilon_1}})} : B_{\epsilon_0} \cap f^{-1}(D_{n_{\epsilon_1}}) \rightarrow D_{n_{\epsilon_1}}$$

para lo cuál enviamos al lector a [SGA 7 II] exp. XIV Prop. (3.1.5) .

(1.6) Ejemplo.- Si $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio quasihomogéneo con singularidad aislada en el origen, $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ está en la situación local del punto 0.

(1.7) Sea $f: X \rightarrow D$ como en (1.1), y supongamos que $f: X \rightarrow D$ está en la situación local del punto 0. Elija- mos $T: X_1 \rightarrow X_1$, $sp: X_1 \rightarrow X_0$, $r: X \rightarrow X_0$ y $p: X_1 \times \tilde{D}^* \rightarrow X^*$ como en (1.3), y un punto base $x_0 \in X_1^\delta = X_1 \setminus sp^{-1}(0)$.

Sea $\xi \in \pi_1(X^*, x_0)$ la clase de homotopía del camino: $t \in [0, 2\pi] \mapsto p(x_0, ti) \in X^*$.

$$(1.8) \quad \text{Si: } 1 \rightarrow \pi_1(X_1, x_0) \xrightarrow{\text{inc.}} \pi_1(X^*, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(D^*, 1) \rightarrow 1$$

es la sucesión exacta de homotopía de la fibración $f: X^* \rightarrow D^*$, se verifica lo siguiente:

$$\pi_1(f)(\xi) = \text{generador positivo de } \pi_1(D^*, 1)$$

$$\pi_1(T)(\alpha) = \xi^{-1} \cdot \alpha \cdot \xi \quad \text{para todo } \alpha \in \pi_1(X_1, x_0)$$

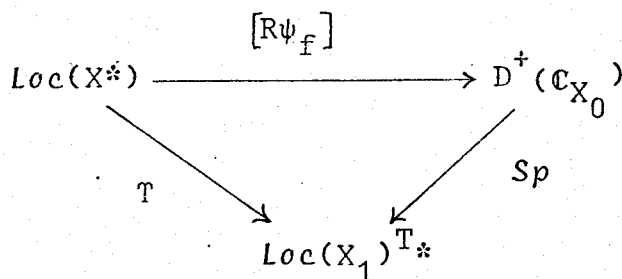
(1.9) Si L es un sistema local sobre X^* , L satisface la condición (*) de (A1.2), y el funtor T definido en (A1.7) envía $Loc(X^*)$ en $Loc(X_1)^{T^*}$

(1.10) Si el sistema local L viene dado por la representación $\rho: \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ (cf. por ejemplo [Del 1] corollaire I.14), entonces $L_1 = L|_{X_1}$ viene dado por la representación inducida $\rho_1 = \rho|_{\pi_1(X_1, x_0)}$, T_*L_1 por $\rho_1 \cdot \pi_1(T)^{-1}$ y $\tau_L: L_1 \rightarrow T_*L_1$ (cf. (A1.7)) por $\rho(\xi): (E; \rho_1) \rightarrow (E; \rho_1 \cdot \pi_1(T)^{-1})$.

(1.11) Dado que $sp \circ T = sp$, existe un isomorfismo canónico $\chi: \text{Rsp}_* \rightarrow (\text{Rsp}_*) \circ T_*$.

Como consecuencia de (A1.6) y (A1.7), tenemos el siguiente:

(1.12) Teorema.- En la situación y con las notaciones de (1.7), el diagrama siguiente es conmutativo:



donde $[\text{R}\psi_f]$ ha sido definido en II.1.8, y Sp en (A1.4).

2. Cálculo explícito de $[\text{R}\psi_f](L)$ en el caso de las curvas planas irreducibles.

Durante toda esta sección, X será un entorno abierto conexo de 0 en \mathbb{C}^2 , $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto centrado en el origen, y $f: X \rightarrow D$ una función analítica con singularidad aislada en 0 , con $f(0) = 0$ y f irreducible en 0 , que está en la situación local del punto 0 (cf. Definición (1.4)).

Elijamos de una vez por todas un sistema $T: X_1 \rightarrow X_1$, $\text{sp}: X_1 \rightarrow X_0$, $r: X \rightarrow X_0$, $p: X_1 \times \tilde{D}^* \rightarrow X^*$ como en (1.3). Tenemos lo siguiente (ver la figura 1):

(2.1) El espacio estratificado $(X_0, 0)$ es homeomorfo a $(\mathbb{C}, 0)$.

(2.2) X_1 es un toro de género g , privado de un disco cerrado, donde $\mu = 2g$ es el número de Milnor del germen de f en 0 .

(2.3) $X_1^\delta = X_1 \setminus sp^{-1}(0)$ es un collar "abierto" de X_1 .

(2.4) $sp^{-1}(0)$ es un toro de género g con borde de una sola componente, que es un retracto de deformación de X_1

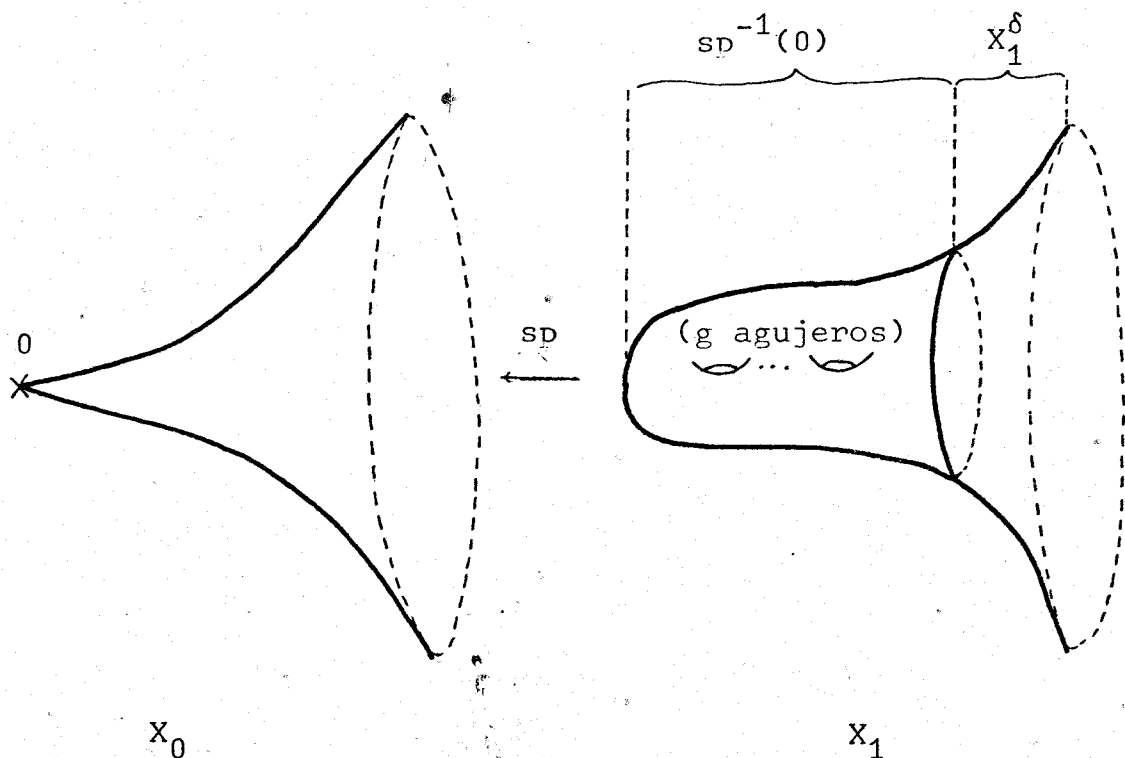


figura 1

Elijamos también un punto base $x_0^1 \in X_0 \setminus \{0\}$,
y pongamos $x_0^2 = sp^{-1}(x_0^1) \in X_1^\delta$.

(2.5) $L = \pi_1(X_1, x_0^2)$ es un grupo libre de rango μ
(cf. (2.2)).

(2.6) $L^\delta = \pi_1(X_1, x_0^2)$ es un subgrupo cíclico infinito

de L (cf.(2.3)).

(2.7) De acuerdo con (1.3) y la proposición (1.5), $f|_{X^*\delta}: X^*\delta := X^* \cap X^\delta \rightarrow D^*$ es una subfibración trivial de $f|_{X^*}: X^* \rightarrow D^*$, de donde obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas de grupos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & L & \hookrightarrow & G = \pi_1(X^*, x_0^2) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(D^*, 1) & \rightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\
 1 & \rightarrow & L^\delta & \hookrightarrow & G^\delta = \pi_1(X^*\delta, x_0^2) & \rightarrow & \pi_1(D^*, 1) & \rightarrow & 1 \\
 & & & & & & \pi_1(f|_{X^*\delta}) & &
 \end{array}$$

Señalemos que el elemento $\xi \in G$ construido en (1.7) pertenece de hecho a G^δ , y que G^δ es un grupo abeliano libre de rango 2 (La segunda sucesión exacta define una extensión trivial, puesto que $f|_{X^*\delta}: X^*\delta \rightarrow D^*$ es una fibración trivial).

En este caso, el elemento $\xi \in G$ está determinado por las condiciones siguientes:

- (i) $\xi \in G^\delta$
- (ii) $\pi_1(f)(\xi)$ es el generador positivo de $\pi_1(D^*, 1)$
- (iii) $\pi_1(T)(\alpha) = \xi^{-1} \cdot \alpha \cdot \xi$ para todo $\alpha \in L$

ya que si un $\xi' \in G$ verifica (ii) e (iii), existiría un $\delta \in L^\delta$ tal que $\xi' = \delta \cdot \xi$, de donde sacaríamos que $\delta^{-1} \cdot \alpha \cdot \delta = \alpha$ para todo $\alpha \in L$, y $\delta = 1$, $\xi' = \xi$.

(2.8) Recordemos que (cf. $[\widehat{L}]$ (3.1)) si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ es una base de L , G admite la siguiente presentación:

$$G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \xi; \xi^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \xi = \tilde{\alpha}_i, 1 \leq i \leq \mu \rangle$$

donde $\tilde{\alpha}_i = \pi_1(T)(\alpha_i)$ $1 \leq i \leq \mu$, y que $\pi_1(f): G \rightarrow \pi_1(D^*, 1)$ es la abelianización de G (L se identifica al subgrupo normal generado por los conmutadores).

A continuación, vamos a introducir algunas notaciones que serán utilizadas en la prueba del teorema (2.27).

(2.9) Si (X, x_0) es un espacio topológico punteado, conexo, localmente conexo por arcos y localmente simplemente conexo por arcos (un "buen" espacio, para simplificar), y k es un anillo, $Loc^{(f)}(X, k)$ denotará la subcategoría plena de la categoría de los haces de k -módulos a la izquierda sobre X , $Mod(k_X)$, formada por los haces localmente constantes (respec. con fibras de tipo finito sobre k).

(2.10) Si $G = \pi_1(X, x_0)$, notaremos por $k[G]$ la k -álgebra del grupo G , y por $I(G)$ el ideal de aumentación de $k[G]$, i.e. el núcleo del morfismo canónico $k[G] \rightarrow k$. Señalemos que k tiene una estructura canónica de $(k[G]; k[G])$ -bimódulo.

(2.11) Si $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ es el revestimiento universal de (X, x_0) , pongamos $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}/X)$ el antiisomorfismo canónico (cf. [Dou] IV, (4.5.3)), y para cada $T \in \text{Aut}(\tilde{X}/X)$ sea $\sigma_T: p_* \circ p^{-1} \rightarrow p_* \circ p^{-1}$ el automorfismo (de funtores) definido por:

$$\begin{array}{ccc}
 p_* \circ p^{-1} & \xrightarrow{\sigma_T} & p_* \circ p^{-1} \\
 \text{adjunción} \quad \Big| & & \Big| \quad \text{canónico } (p \circ T = p) \\
 p_* \circ T_* \circ T^{-1} \circ p^{-1} & \xlongequal{\quad} & p_* \circ T_* \circ T^{-1} \circ p^{-1}
 \end{array}$$

Es fácil demostrar que $T \mapsto \sigma_T$ define una acción a la derecha de $\text{Aut}(X/X)$ sobre $p_* \circ p^{-1}$. Componiendo con λ , obtenemos una acción a la izquierda de G sobre $p_* \circ p^{-1}$, también notada $g \mapsto \sigma_g$. Por tanto, si L es un haz de k -módulos sobre X , $(p_* \circ p^{-1})(L)$ tiene estructura natural de haz de $k[G]$ -módulos.

Pongamos:

(2.12) $\underline{B}_X : L \in \text{Mod}(k_X) \mapsto (p_* \circ p^{-1})(L) \in \text{Mod}(k[G]_X)$

(2.13) $B_X = \Gamma(X, -) \circ \underline{B}_X : \text{Mod}(k_X) \rightarrow \text{Mod}(k[G])$

(2.14) Notemos que la equivalencia de categorías "habitual" $F_{x_0} : L \in \text{Loc}^{(f)}(X, k) \mapsto L_{x_0} \in \text{Mod}^{(f)}(k[G])$ (cf. por ejemplo [Del 1]) es canónicamente isomorfa a $B_X \Big|_{\text{Loc}^{(f)}(X, k)}$.

(2.15) Notemos por:

$$\underline{\zeta}_X : \text{Id}_{\text{Mod}(k_X)} \rightarrow \text{Hom}_{k[G]}(k_X, -) \circ \underline{B}_X$$

$$\zeta_X = \Gamma(X, -) \circ \underline{\zeta}_X : \Gamma(X, -) \rightarrow \text{Hom}_{k[G]}(k, -) \circ B_X$$

los isomorfismos provenientes de la adjunción $\text{Id} \rightarrow p_* p^{-1}$.

(2.16) Si (Y, y_0) es otro buen espacio topológico punteado, y $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una aplicación continua punteada, pongamos: $H = \pi_1(Y, y_0)$, $\delta = \pi_1(f): G \rightarrow H$, $\phi = k[\delta]: R = k[G] \rightarrow S = k[H]$, $\underline{\phi}: \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(R)$ el funtor restricción de escalares inducido por ϕ , $q: (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ el revestimiento universal de (Y, y_0) , $\tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ la aplicación continua inducida por f , y $\underline{\eta}: q_* \circ q^{-1} \rightarrow f_* \circ p_* \circ p^{-1} \circ f^{-1}$ la transformación natural definida por:

$$\begin{array}{ccc}
 q_* \circ q^{-1} & \xrightarrow{\underline{\eta}} & f_* \circ p_* \circ p^{-1} \circ f^{-1} \\
 \text{adjun.} \downarrow & & \text{canónico} \downarrow \\
 q_* \circ f_* \circ f^{-1} \circ q^{-1} & \xrightarrow{\text{canónico}} & (q \circ f)_* \circ (q \circ f)^{-1} = (f \circ p)_* \circ (f \circ p)^{-1}
 \end{array}$$

Es fácil ver que, para todo $g \in G$, $[f_* \circ \sigma_g \circ f^{-1}] \circ \underline{\eta} = \underline{\eta} \circ \sigma_{\delta(g)}$ (cf. (2.11)), de donde $\underline{\eta}$ define una transformación natural de $\underline{\phi} \circ \underline{B}_Y$ en $f_* \circ \underline{B}_X \circ f^{-1}$.

Pongamos:

$$(2.17) \quad \eta = \Gamma(Y, -) \circ \underline{\eta} : \Phi \circ B_Y \rightarrow B_X \circ f^{-1},$$

$$(2.18) \quad \Lambda : \text{Hom}_S(-, -) \rightarrow \text{Hom}_R(\Phi(-), \Phi(-)) \quad \text{la transformación natural evidente},$$

$$(2.19) \quad \gamma = [\text{Hom}_R(k, -) \circ \eta] \circ [\Lambda(k, B_Y(-))] : \text{Hom}_S(k, -) \circ B_Y \rightarrow \text{Hom}_R(k, -) \circ B_X \circ f^{-1}.$$

Es fácil demostrar la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(Y, -) & \xrightarrow{\text{canónico}} & \Gamma(X, -) \circ f^{-1} \\
 \downarrow \zeta_Y & & \downarrow \zeta_X \circ f^{-1} \\
 \text{Hom}_S(k, -) \circ B_Y & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hom}_R(k, -) \circ B_X \circ f^{-1}
 \end{array}$$

así como:

$$(2.20) \quad \eta(L) \text{ es un isomorfismo, para cada sistema local } L \text{ sobre } Y.$$

$$(2.21) \quad \text{Los funtores } \underline{B}_X \text{ y } B_X \text{ transforman objetos inyectivos en objetos inyectivos.}$$

$$(2.22) \quad \text{Con las notaciones precedentes, sean:}$$

$$\mathcal{G} : E \in \text{Mod}(R) \mapsto E^G \in \text{Mod}(R), \text{ donde la estructura de}$$

R-módulo viene dada por: $g \cdot \{e_h\}_{h \in G} = \{e_{hg}\}_{h \in G}$

para cada $g \in G$ y para cada $\{e_h\} \in E^G$.

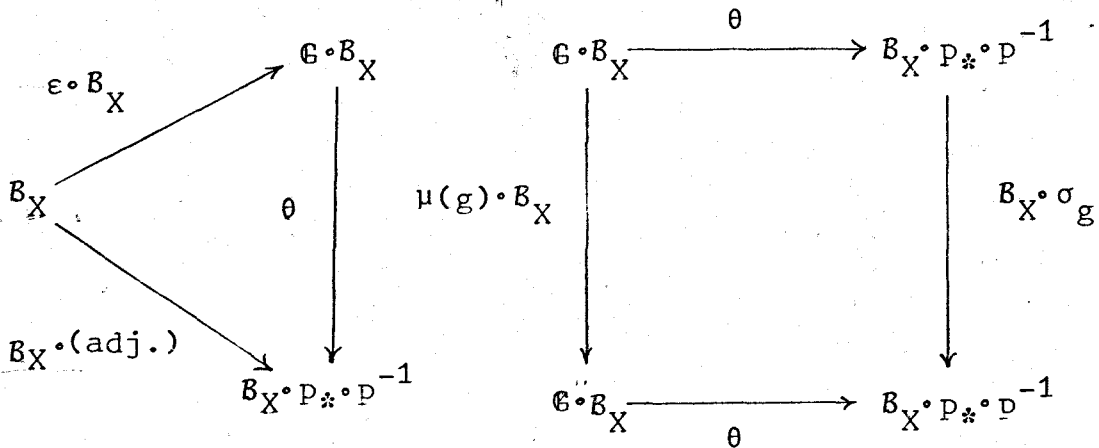
$\varepsilon : \text{Id}_{\text{Mod}(R)} \rightarrow G : \varepsilon(E)(e) = \{h \cdot e\}_{h \in G}$ para cada $e \in E$, y para cada $E \in \text{Mod}(R)$.

$\mu : G \rightarrow \text{Aut}(G) : \mu(g)(E)(\{e_h\}_{h \in G}) = \{g \cdot e_{g^{-1}h}\}_{h \in G}$ para cada $\{e_h\} \in G(E)$, cada $E \in \text{Mod}(R)$, y cada $g \in G$.

Existe un isomorfismo canónico de funtores definidos sobre $\text{Loc}(X, k)$:

$$\theta : G \cdot B_X \rightarrow B_X \cdot P_* \cdot P^{-1}$$

tal que los diagramas siguientes son conmutativos:



para cada $g \in G$.

Volvamos a la situación descrita al principio de la presente sección.

Sea δ_0 el generador positivo de $\pi_1(X_0 \setminus \{0\}, x_0^1)$,

y pongamos $\delta'_0 = sp^{-1}(\delta_0) \in \pi_1(X_1, x_0^2)$.

Pongamos para simplificar: $Loc(X^*) = Loc^f(X^*, \mathbb{C})$,
 $Mod(T) = Mod^f(\mathbb{C}[G])$, $Loc(X_1) = Loc^f(X_1, \mathbb{C})$, $Mod(S) =$
 $= Mod^f(\mathbb{C}[L])$, y sean:

$\Psi : Perv(X_0, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ la equivalencia de cate-
 gorías definida en (A2.5),

$B_{X^*} : Loc(X^*) \rightarrow Mod(T)$ la equivalencia de cate-
 gorías descrita en (2.13) y (2.14),

$$(2.23) \quad F : E \in Mod(S) \mapsto \left[E \begin{array}{c} U \\ \neq \\ V \end{array} \text{Hom}_S(I(L), E) \right] \in \mathbb{C}$$

donde: $U(e)(\alpha) = \alpha \cdot e$ para todos $e \in E$ y $\alpha \in I(L)$

$V(h) = h(\delta'_0 - 1)$ para todo $h \in \text{Hom}_S(I(L), E)$

(2.24) $\xi : Mod(T) \rightarrow Mod(S)$ el funtor restricción de
 escalares inducido por la inclusión $L \hookrightarrow G$.

(2.25) $\tau : F \circ \xi \rightarrow F \circ \xi$, $\tau(E) = (t^1, t^2)$ donde

$t^1 : e \in E \mapsto \xi \cdot e \in E$ (cf. (27));

$t^2 : h \in \text{Hom}_S(I(L), E) \mapsto t^1 \cdot h \cdot \phi_1 \in \text{Hom}_S(I(L), E)$, con $\phi_1 =$
 $= \mathbb{C}[\pi_1(T)] : S \rightarrow S$.

(2.26) $F : E \in Mod(T) \mapsto (F(\xi(E)); \tau(E)) \in \mathbb{C}^*$ (cf. II.1.4)

Una vez introducidas las notaciones precedentes,
 podemos enunciar el siguiente

(2.27) Teorema.- El diagrama siguiente de categorías y funtores es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Loc}(X^*) & \xrightarrow{[\mathcal{R}\psi_f]} & \text{Perv}(X_0, 0) \\
 \downarrow B_{X^*} & & \downarrow \Psi \\
 \text{Mod}(T) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}
 \end{array}$$

Antes de demostrar el teorema (2.27), vamos a hacer algunos comentarios.

(2.28) a) El teorema (2.27) nos calcula explícitamente el haz perverso $\mathcal{R}\psi_f(L)$, y su automorfismo de monodromía $M(L)$, en función de la representación compleja ($\mathbb{C}[G]$ -módulo) asociada al sistema local L . Este cálculo explícito es posible, a causa de que la equivalencia de categorías $\Psi: \text{Perv}(X_0, 0) \rightarrow \mathcal{C}$ nos proporciona una representación explícita de los objetos de $\text{Perv}(X_0, 0)$.

b) El funtor \mathcal{F} depende exclusivamente de la elección de $X^\partial \subset X$ y de una trivialización $X_0^\partial \times D \simeq \simeq X^\partial$ de $f|_{X^\partial}: X^\partial \rightarrow D$, así como de un punto base $x_0^1 \in X_0^\partial = X_0 \setminus \{0\}$. Todo ello nos da el punto base $x_0^2 \in X_1^\partial \subset X_1 \subset X^*$, el isomorfismo: $\pi_1(X_0 \setminus \{0\}, x_0^1) \simeq \pi_1(X_1^\partial, x_0^2)$ y el elemen-

to ξ de G (cf. (2.7)).

c) Si elegimos una base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ de L , y escribimos:

$$\tilde{\alpha}_i = \pi_1(T)(\alpha_i) = \xi^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \xi \quad 1 \leq i \leq \mu \quad (\text{cf. (2.8)})$$

$$\delta'_0 - 1 = \sum_{i=1}^{\mu} A_i \cdot (\alpha_i - 1) \quad , \quad A_i \in \mathbb{C}[L] \quad , \quad 1 \leq i \leq \mu \quad (a)$$

$$\tilde{\alpha}_i - 1 = \sum_{j=1}^{\mu} B_{ij} \cdot (\alpha_j - 1) \quad , \quad B_{ij} \in \mathbb{C}[L] \quad ,$$

$$1 \leq i, j \leq \mu \quad (i)$$

el functor F es isomorfo al functor $F_{\{\alpha_i\}}$ definido como sigue:

$$F_{\{\alpha_i\}}(E) = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ \alpha_1 - 1 \end{array} \right) \\ E \xrightarrow{\quad} E \\ \left(A_1, \dots, A_\mu \right) \end{array} \quad , \quad \left(\xi, \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \xi B_{11} & \dots & \dots & \xi B_{\mu 1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \xi B_{\mu 1} & \dots & \dots & \xi B_{\mu \mu} \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

donde todas las matrices operan por la izquierda.

Demostración del teorema (2.27).- Una primera reducción nos viene dada por el teorema (1.12). Señalemos que

$Sp(\text{Loc}(X_1)^{T*}) \subset \text{Perv}(X_0, 0)$, puesto que si L_1 es un sistema local sobre X_1 , $(\text{Rsp}_*)(L_1) \in \text{Perv}(X_0, 0)$ en virtud del teorema de dualidad relativa para la aplicación propia $sp: X_1 \rightarrow X_0$ (cf. [Ver 1]).

(a) $I(L)$ es un $\mathbb{C}[L]$ -módulo libre de base $(\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_\mu - 1)$.

Sean:

(2,29) $\phi_1 : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(S)$ el functor restricción de escalares inducido por ϕ_1 (cf. (2.25)), y $\phi_1' = \phi_1^{-1}$.

(2,30) $\delta : \mathcal{E} \rightarrow \phi_1' \circ \mathcal{E}$, $\delta(E) : e \in \mathcal{E}(E) \mapsto \xi \cdot e \in \phi_1'(\mathcal{E}(E))$ para todo $E \in \text{Mod}(T)$ (cf. (2.24)), y

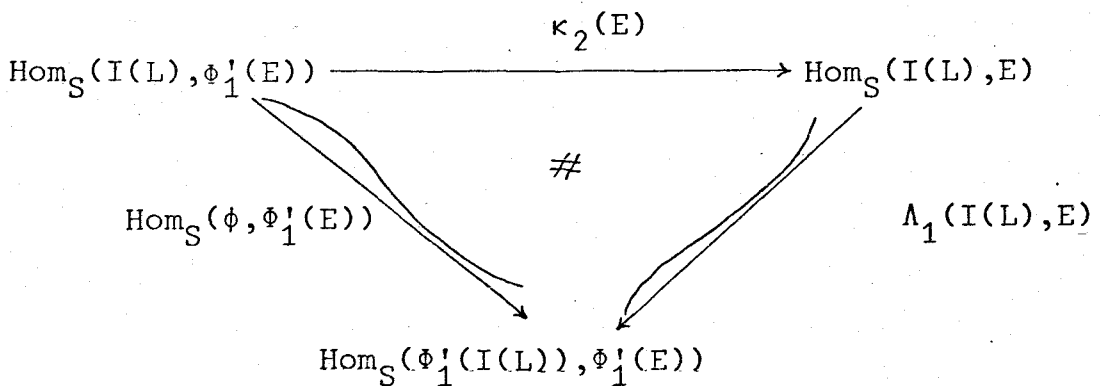
$\Delta : E \in \text{Mod}(T) \mapsto (\mathcal{E}(E), \delta(E)) \in \text{Mod}(S)^{\phi_1'}$ (cf. II.1.4).

(2,31) $\eta : \phi_1' \circ \mathcal{B}_{X_1} \cong \mathcal{B}_{X_1} \circ T_*$ ($\cong \mathcal{B}_{X_1} \circ (T^{-1})^{-1}$) el isomorfismo definido en (2.17) y (2.20), y

$[\mathcal{B}_{X_1}] : (L_1, \tau) \in \text{Loc}(X_1)^{T_*} \mapsto (\mathcal{B}_{X_1}(L_1), \eta(L_1)^{-1} \cdot \mathcal{B}_{X_1}(\tau)) \in \text{Mod}(S)^{\phi_1'}$

(2,32) $\kappa : \mathbb{F} \circ \phi_1' \cong \mathbb{F}$ $\kappa(E) = (1_E, \kappa_2(E)) : \mathbb{F}(\phi_1'(E)) \rightarrow \mathbb{F}(E)$

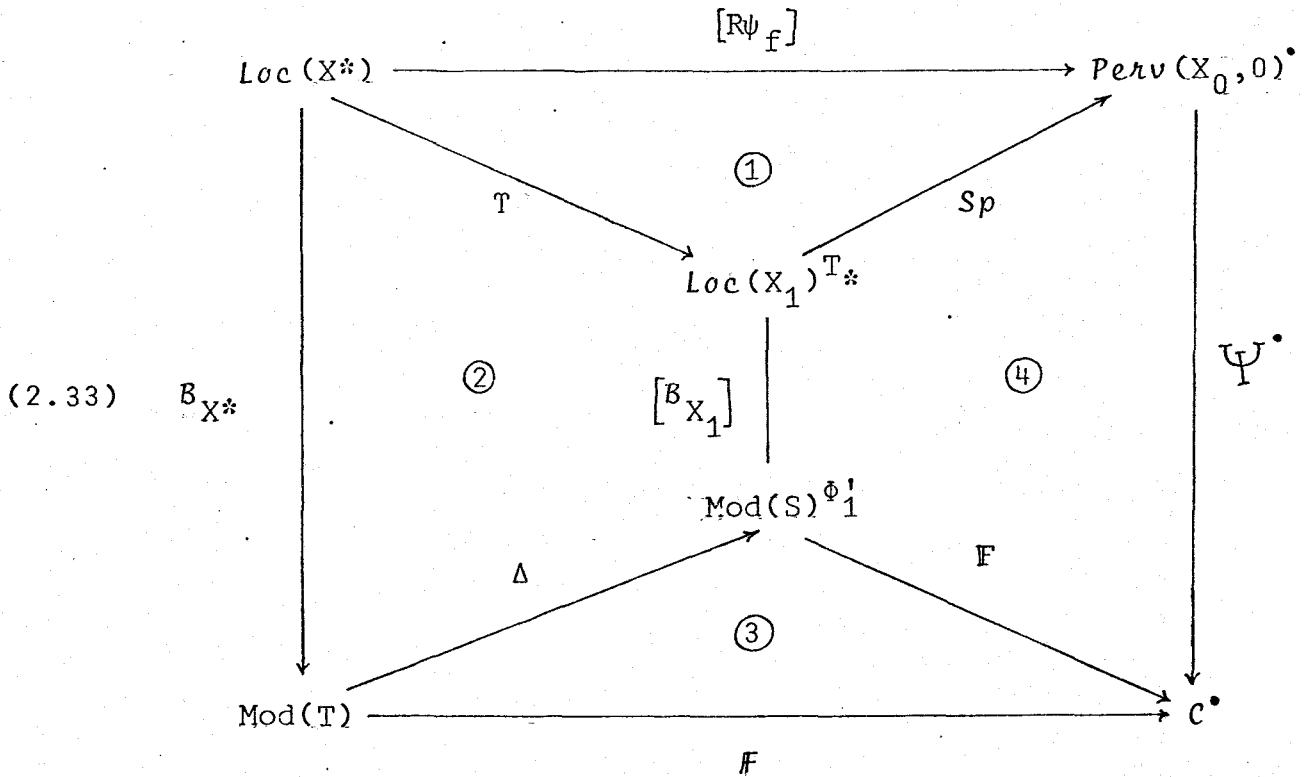
donde:



para cada $E \in \text{Mod}(S)$ (cf. (2.18) para la definición de Λ_1 y (2.23) para la de \mathbb{F}), y

$[\mathbb{F}] : (E, \beta) \in \text{Mod}(S)^{\phi_1'} \mapsto (\mathbb{F}(E), \kappa(E) \cdot \mathbb{F}(\beta)) \in \mathcal{C}$

Consideremos el diagrama siguiente:



El triángulo 1 es conmutativo, de acuerdo con el teorema (1,12). El cuadrado 2 es conmutativo, de acuerdo con (1,10). El triángulo 3 es conmutativo por definición ($F = F \cdot \Delta$). Por tanto, para demostrar el teorema (2,27), es suficiente demostrar la conmutatividad del cuadrado ④.

En una primera parte, demostraremos que:

$$\Psi \cdot R_{sp^*} \simeq F \cdot B_{X_1}$$

En la segunda parte, demostraremos la conmutatividad de (2,33) ④ reduciendo el problema en lo esencial a la primera parte. Esto se hará gracias al "dévissage"

dado por el teorema (1.12): Dado un sistema local L sobre X^* , el funtor T (cf. (A1.7)) descompone a L en $L_1 = L|_{X_1}$ y $\tau_L : L_1 \rightarrow T_*L_1$. L_1 nos sirve para calcular $R\psi_f(L)$:

$$R\psi_f(L) \simeq R\text{sp}_*(L_1)$$

τ_L nos sirve para calcular $M(L)$:

$$M(L) \equiv \chi(L_1)^{-1} \circ R\text{sp}_*(\tau_L) .$$

Por tanto, el trabajo a realizar en la segunda parte, consiste en interpretar $\chi : R\text{sp}_* \rightarrow (R\text{sp}_*) \circ T_*$ del lado del funtor F .

Primera parte. Sea $j: X_1^{\partial} \hookrightarrow X_1$ la inclusión, y tomemos las notaciones introducidas en (2.9) - (2.22) para:

$$(X, x_0) = (X_1^{\partial}, x_0^2) \quad , \quad (Y, y_0) = (X_1, x_0^2) \quad , \quad f = j .$$

(2,34) Notemos por: $P^{\bullet} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ (respec. $Q^{\bullet} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$) la resolución libre;

$$0 \rightarrow I^{\partial} = I(L^{\partial}) \rightarrow R = \mathbb{C}[L^{\partial}] \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

(respec. $0 \rightarrow I = I(L) \rightarrow S = \mathbb{C}[L] \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$).

$\phi = \mathbb{C}[\pi_1(j)] : R \rightarrow S$ será considerada como una aplicación R -lineal de R en $\phi(S)$ (cf. (2.16) para la definición de ϕ)

(2,35) Existe un único morfismo R -lineal $\phi^{\bullet} : P^{\bullet} \rightarrow \phi(Q^{\bullet})$

tal que $\phi^0 = \phi$.

(2,36) Consideremos el functor $F^0: \text{Mod}(S) \rightarrow C^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*)$
 (cf. II.1.5) definido por:

$$F^0(E) = \left[\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_R(\phi^*, \varepsilon(\phi(E)) \cdot \Lambda(Q^*, E)) & \\ \text{Hom}_S(Q^*, E) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_R(P^*, \mathfrak{G}(\phi(E))) \end{array} \right]$$

$\text{Hom}_R(P^*, \mu(\delta'_0)(\phi(E)))$

$$(*) \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\alpha^0} & E^{\mathbb{Z}} \curvearrowright \sigma^0 \\ U \downarrow & & \downarrow D \\ \text{Hom}_S(I, E) & \xrightarrow{\alpha^1} & E^{\mathbb{Z}} \curvearrowright \sigma^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \right] \in C^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*) \text{ , con} \end{array}$$

$$U(e)(\alpha) = \alpha \cdot e \quad ; \quad \alpha^0(e) = \{(\delta'_0)^i \cdot e\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad ;$$

$$\alpha^1 = \alpha^0 \cdot v \quad , \quad v(h) = h(\delta'_0 - 1) \quad ; \quad D(\{e_i\}) = \{e_{i+1} - e_i\} \quad ;$$

$$\sigma^0(\{e_i\}) = \sigma^1(\{e_i\}) = \{\delta'_0 \cdot e_{i-1}\} \quad .$$

La identificación (*) proviene del isomorfismo $L^{\partial} \simeq \mathbb{Z}$, $\delta'_0 \leftrightarrow 1$ (cf. (2.16), (2.18) y (2.22) para las notaciones).

F^0 será también considerado como un functor de $\text{Mod}(S)$ en $D^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*)$.

Consideremos el diagrama siguiente:

(2.37)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Loc}(X_1) & \xrightarrow{\text{Rsp}_*} & \text{Perv}(X_0, 0) \\
 \downarrow \mathbb{B}_{X_1} & \textcircled{1} & \downarrow \overline{R\psi} \\
 \text{Mod}(S) & \xrightarrow{\quad} & D^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*) \\
 & \textcircled{3} & \searrow \Omega_0 \\
 & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

\mathbb{F}

donde $\overline{R\psi}$ y Ω_0 han sido definidos en (A2.4).

El triángulo ② es conmutativo por definición (cf. (A2.4)). La conmutatividad del triángulo ③ será una consecuencia del lema 2.39). Por tanto, para demostrar que $\mathbb{P} \cdot \text{Rsp}_* \simeq \mathbb{F} \cdot \mathbb{B}_{X_1}$ (objetivo de esta primera parte), es suficiente probar que el cuadrado ① es conmutativo.

(2,38) Sea:

$$H : (E \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \downarrow V \end{array} F) \in \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha^0} & E^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sigma^0} \\ U \downarrow & D \downarrow & \\ F & \xrightarrow{\alpha^1} & E^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sigma^1} \end{array} \right] \in C^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*) \quad (6)$$

$D^+(\text{Mod}(\mathbb{C})^*)$), donde:

$$\alpha^0(e) = \{M^i(e)\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad M = 1_E + V \cdot U \quad ; \quad \alpha^1 = \alpha^0 \cdot V \quad ;$$

D ha sido definido en (2.36); $\sigma^0(\{e_i\}) = \sigma^1(\{e_i\}) = \{M(e_{i-1})\}$.

Señalemos que $F^0 = H \circ F$.

(2.39) Lema.- Existe un isomorfismo natural $\Omega_0 \circ H \xrightarrow{\sim} \text{Id}_C$. Es decir, H es un Quasiinverso a la derecha de Ω_0 .

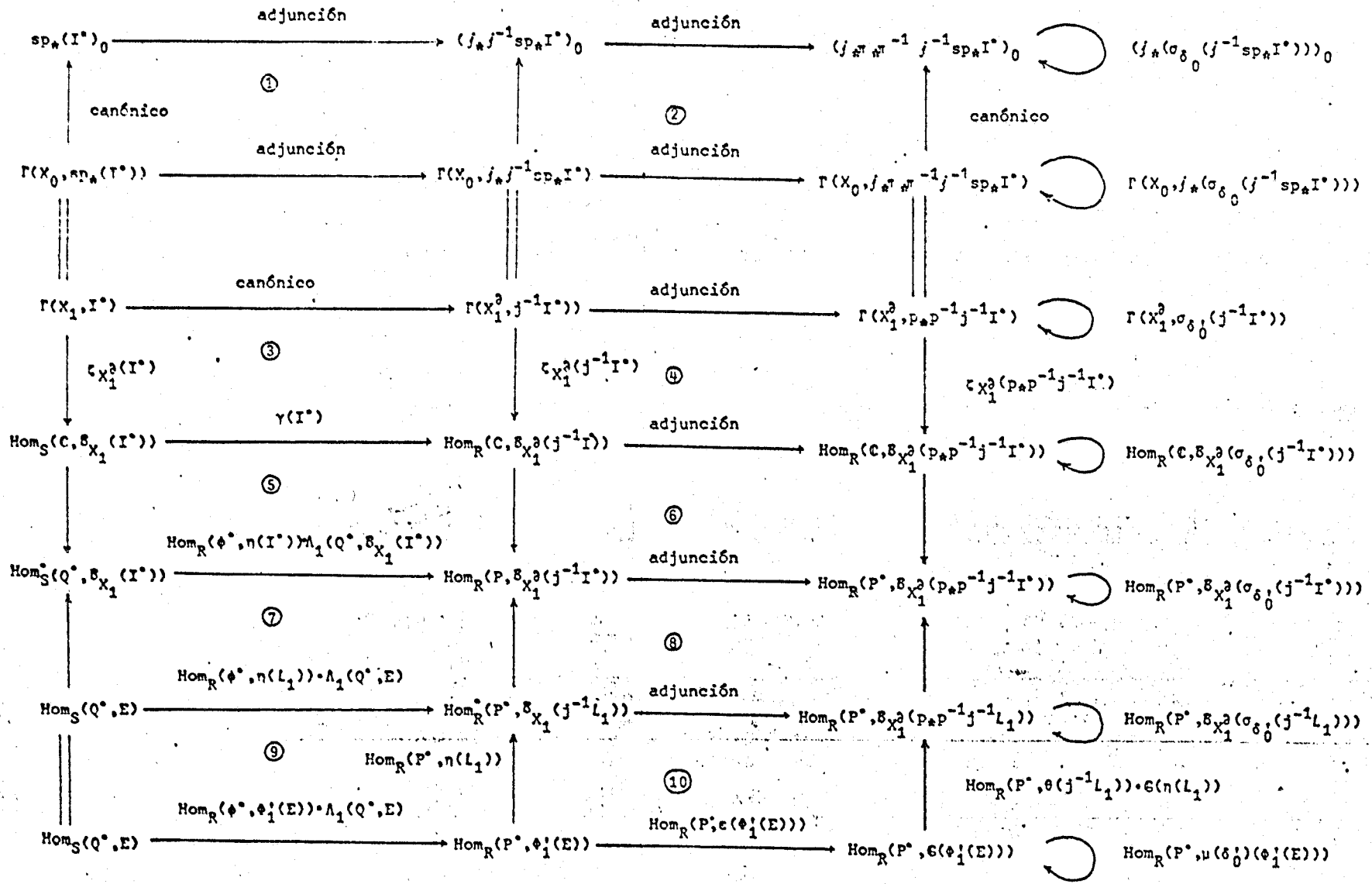
La demostración de este lema se hace simplemente aplicando la definición de Ω_0 (cf. (A2.4)), y se deja al lector.

Demostremos ahora la conmutatividad de (2.37) ①.

Sean: $j : X_0^\partial = X_0 \setminus \{0\} \hookrightarrow X_0$ la inclusión;
 $\pi : (\tilde{X}_0^\partial, \tilde{x}_0^1) \rightarrow (X_0^\partial, x_0^1)$, $p : (\tilde{X}_1^\partial, \tilde{x}_0^2) \rightarrow (X_1^\partial, x_0^2)$ y
 $q : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_0^2) \rightarrow (X_1, x_0^2)$ los revestimientos universales correspondientes; L_1 un sistema local sobre X_1 , $I^\bullet = I^\bullet(L_1)$ la resolución canónica inyectiva de Godement de L_1 , y $E = B_{X_1}(L_1) \in \text{Mod}(S)$.

$(R\bar{\psi} \circ R\text{sp}_*)(L_1)$ puede calcularse como $\bar{\psi}(\text{sp}_*(I^\bullet))$, puesto que sp_* transforma objetos inyectivos en objetos inyectivos (cf. [Hart] Chap. I Propo. (5.4)).

Se tiene el diagrama siguiente en $C^+(\mathbb{C})$:




donde: σ_{δ_0} y $\sigma_{\delta'_0}$ han sido definidos en (2.11); ζ_{X_1} y $\zeta_{X_1^\partial}$ en (2.15); γ en (2.19); η en (2.17); ϕ en (2.16); P^* y Q^* en (2.34); ϕ^* en (2.35); \mathcal{E} , ε , μ y θ en (2.22); y por último Λ^* es la extensión a los complejos de (2.18).

Señalemos que si suprimimos el complejo de en-
medio de la primera línea (respec. última línea) de
(2.40), y componemos las flechas correspondientes, obte-
nemos: $(R\bar{\psi} \cdot Rsp_*)(L_1) = \bar{\psi}(sp_*(I^*))$ (respec. $\mathbb{F}^0(E) =$
 $(\mathbb{F}^0 \cdot B_{X_1})(L_1)$).

Nuestro objetivo es construir un isomorfismo
entre $(R\bar{\psi} \cdot Rsp_*)(L_1)$ y $(\mathbb{F}^0 \cdot B_{X_1})(L_1)$, natural en
 L_1 , a partir del diagrama (2.40).

Señalemos también, que estamos obligados a tra-
bajar en $C^+(\mathbb{C})$, y no en $D^+(\mathbb{C})$, a causa de la defini-
ción de $\text{Mod}(\mathbb{C})$, $C^+(\text{Mod}(\mathbb{C})) = C^+(\mathbb{C})$ y Ω_0 (ver II.1.5
y (A2.4)).

Commutatividad de (2.40):

La conmutatividad de ①, ②, ④, ⑥, ⑧, y de
las flechas verticales de la derecha con los automorfis-
mos de monodromía (), es trivial. La conmutati-
vidad de ③ es una consecuencia de (2.19). La conmutati-

vidad de (5), (7) y (9) es inmediata a partir de la functorialidad de las flechas en cuestión. Por último, la conmutatividad de (10) es una consecuencia de (2.22).

Veamos ahora que las flechas verticales de (2.40) son quasiisomorfismos:

-) Las flechas entre la segunda y primera líneas son quasiisomorfismos debido a la constructibilidad de los complejos: $sp_*(I^\bullet) = Rsp_*(L_1)$, $j_*j^{-1}sp_*(I^\bullet)$

$$(Rj_*)(Rsp_*(L_1)|_{X_0^0}) \quad \text{y} \quad j_*\pi_*\pi^{-1}j^{-1}sp_*(I^\bullet)$$

$(Rj_*)(R\pi_*)(\pi^{-1}j^{-1}Rsp_*(L_1))$, éste último de rango infinito.

-) Las flechas entre la tercera y cuarta líneas son isomorfismos en $C^+(\mathcal{C})$, de acuerdo con (2.20).

-) Las flechas entre la cuarta y quinta líneas son quasiisomorfismos, puesto que $B_{X_1}(I^\bullet), B_{X_1}(j^{-1}I^\bullet)$ y $B_{X_1}^\delta(p_*p^{-1}j^{-1}I^\bullet)$ son complejos de objetos inyectivos (cf. (2.21)), y $Q^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$, $P^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$ son quasiisomorfismos (cf. [Hart] Chap. I Lemma (6.2)).

-) Las flechas entre la sexta y quinta líneas son quasiisomorfismos puesto que (cf. [Hart] I (6.2)):

(i) Q^\bullet y P^\bullet son complejos de objetos libres.

(ii) La flecha $p_*p^{-1}j^{-1}L_1 \rightarrow p_*p^{-1}j^{-1}I^\bullet$ es una resolución inyectiva de $p_*p^{-1}j^{-1}L_1$ ($R^i p_*$ (haz constante) = 0 para todo $i \geq 1$, al ser X_1 contráctil

localmente).

(iii) Las flechas $B_{X_1}(L_1) \rightarrow B_{X_1}(I^\bullet)$,
 $B_{X_1}(j^{-1}L_1) \rightarrow B_{X_1}(j^{-1}I^\bullet)$ y $B_{X_1}(p_*p^{-1}j^{-1}I^\bullet) \rightarrow$
 $\rightarrow B_{X_1}(p_*p^{-1}j^{-1}I^\bullet)$ son quasiisomorfismos ($R^i\Gamma(Z, \text{haz constante}) = 0$ para todo $i \geq 1$, si Z es contráctil).

-) Las flechas entre la séptima y sexta líneas son isomorfismos en $C^+(\mathcal{C})$, de acuerdo con (2.20) y (2.22).

Por tanto, el diagrama (2.40) nos proporciona un isomorfismo:

$$(2.41) \quad \theta(L_1) : (R\bar{\psi} \cdot Rsp_*)(L_1) \xrightarrow{\sim} (F^0 \cdot B_{X_1})(L_1)$$

natural en L_1 , y deducimos la conmutatividad de (2.37) ①.

Segunda parte. - Se trata de demostrar la conmutatividad de (2.33) ④.

Pongamos: $\theta' = \Omega_0 \circ \theta : \Psi \cdot Rsp_* \rightarrow F \cdot B_{X_1}$

Sea (L_1, τ) un objeto de $Loc(X_1)^{T*}$. Tenemos que demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\tau) & & \Psi(\chi(L_1)^{-1}) \\
 \Psi(\text{Rsp}_*(L_1)) & \xrightarrow{\quad} & \Psi(\text{Rsp}_*(T_*L_1)) & \xrightarrow{\quad} & \Psi(\text{Rsp}_*(L_1)) \\
 \downarrow \theta'(L_1) & & \downarrow \theta'(T_*L_1) & & \downarrow \theta'(L_1) \\
 \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \\
 \text{F}(\mathcal{B}_{X_1}(L_1)) & \xrightarrow{\quad} & \text{F}(\mathcal{B}_{X_1}(T_*L_1)) & \xrightarrow{\quad} & \text{F}(\mathcal{B}_{X_1}(L_1)) \\
 (\varepsilon) & & \text{F}(\eta(L_1)^{-1}) & & \kappa(\mathcal{B}_{X_1}(L_1))
 \end{array}$$

$\textcircled{1}$ es conmutativo pues θ' es una transformación natural. La conmutatividad de $\textcircled{2}$, se demuestra considerando un diagrama gemelo de (2.40), donde se ha sustituido L_1 por T_*L_1 e I por T_*I (T_*I es una resolución inyectiva de T_*L_1), y construyendo una flecha evidente entre los dos diagramas, de tal manera que la parte correspondiente a las primeras líneas nos de $\Psi(\chi(L_1)^{-1})$, y la parte correspondiente a las últimas $\kappa(\mathcal{B}_{X_1}(L_1)) \circ \text{F}(\eta(L_1)^{-1})$.

Fin de la demostración del teorema (2.27)

3. Teorema de equivalencia de categorías.

En esta sección, damos la descripción explícita de la categoría de los sistemas holónomos regulares y de los haces perversos, cuyo soporte singular es el germen de una curva plana irreducible.

(3.1) Conservemos las notaciones introducidas en la sección 2, y sea A la categoría cuyos objetos son las 4-uplas:

$$E = (E, (\phi_1 \begin{matrix} u \\ \downarrow \\ v \end{matrix} \phi_2) = \phi; \text{can}, \text{var})$$

donde E es un $\mathbb{C}[G]$ -módulo de dimensión finita sobre \mathbb{C} (cf. (2.7)), ϕ es un objeto de \mathcal{C} (cf. (A2.4)), y $\text{can} : \mathbb{F}(\xi(E)) \rightarrow \phi$, $\text{var} : \phi \rightarrow \mathbb{F}(\xi(E))$ son dos morfismos de \mathcal{C} (cf. (2.23) y (2.24)), tales que $1_{\mathbb{F}(\xi(E))} + \text{var} \circ \text{can} = -\tau(E)$ (cf. (2.25)),

y si $E' = (E', \phi'; \text{can}', \text{var}')$ es otro objeto de A , un morfismo de E en E' es un par (g, h) , donde $g : E \rightarrow E'$ es $\mathbb{C}[G]$ -lineal y $h : \phi \rightarrow \phi'$ es un morfismo de \mathcal{C} , tales que $\mathbb{F}(\xi(g)) \circ \text{var} = \text{var}' \circ h$, $\text{can}' \circ \mathbb{F}(\xi(g)) = h \circ \text{can}$.

Es fácil ver que A es una categoría abeliana.

(3.2) Sea Σ la estratificación de X formada por X^* , $X_0 \setminus \{0\}$, $\{0\}$, y sea $\text{Perv}(X; \Sigma)$ la subcategoría ple-

na de $Perv(X)$ formada por los haces perversos K tales que:

$$Ch(K) \subset T_X^*(X) \cup \overline{T_{X_0}^*(X) \setminus \{0\}} \cup T_0^*(X) .$$

Señalemos que un haz perverso K sobre X pertenece a $Perv(X; \Sigma)$ si y sólo si está estratificado por Σ , es decir, si los haces de cohomología $H^i(K)$ son constructibles con respecto a Σ (utilícese por ejemplo el teorema del índice I, 2.15).

(3.3) Teorema.- Existe una equivalencia de categorías:

$$E : Perv(X; \Sigma) \rightarrow A .$$

Demostración.- Se trata de una consecuencia directa del teorema de extensión de haces perversos (cf. II.2.1), del hecho de que $\mathcal{U} : Perv(X_0; 0) \rightarrow \mathcal{C}$ es una equivalencia de categorías (cf. (A2.5)), y del teorema (2.27). Expliquemos más detalladamente el proceso.

Sea $Rc_\Sigma(X^*; X_0)$ la subcategoría plena de $Rc(X^*; X_0)$ (cf. II.2.1) cuyos objetos son las 3-uplas $(L, (\psi, \phi : c, v),)$ tales que L es un sistema local sobre X^* , y $\psi, \phi \in Perv(X_0; 0)$.

Veamos que el funtor $R : Perv(X) \rightarrow Rc(X^*; X_0)$

(cf. II.2.1) establece una equivalencia de categorías entre $\text{Perv}(X; \Sigma)$ y $\text{Rc}_{\Sigma}(X^*; X_0)$.

Si $K \in \text{Perv}(X; \Sigma)$, $K|_{X^*}$ es un sistema local por definición. El hecho de que $\Psi_f(K) \simeq \mathbb{R}\Psi_f(K|_{X^*})$ esté estratificado por $X_0 \setminus \{0\}, \{0\}$, puede demostrarse utilizando el teorema (1,12). El hecho de que $\Phi_f(K)$ esté estratificado por $X_0 \setminus \{0\}, \{0\}$ proviene de la existencia del triángulo:

$$K|_{X_0} \rightarrow \Psi_f(K) \xrightarrow{\text{can}} \Phi_f(K) \xrightarrow{+1} \quad (\text{cf. II.1.15}).$$

Por tanto, $R(K) \in \text{Rc}_{\Sigma}(X^*; X_0)$.

Recíprocamente, sea $K \in \text{Perv}(X)$ tal que $R(K) \in \text{Rc}_{\Sigma}(X^*; X_0)$. Entonces $K|_{X^*}$ es un sistema local, y $\Psi_f(K)$, $\Phi_f(K)$ están estratificados por $X_0 \setminus \{0\}, \{0\}$, de donde, utilizando de nuevo el triángulo II.1.15, $K|_{X_0}$ también está estratificado por $X_0 \setminus \{0\}, \{0\}$, y deducimos que $K \in \text{Perv}(X; \Sigma)$.

A continuación, vamos a construir una equivalencia de categorías entre $\text{Rc}_{\Sigma}(X^*; X_0)$, y la categoría definida en (3.1).

Sea $D : \text{Rc}_{\Sigma}(X^*; X_0) \rightarrow A$ el funtor definido por:

$$D(L, (\psi, \phi, c, v), \alpha) = (B_{X^*}(L), \Psi(\phi); \Psi(c \cdot \alpha) \cdot \omega(L), \omega(L)^{-1} \cdot \Psi(\alpha^{-1} \cdot v))$$

donde: $B_{X^*} : \text{Loc}(X^*) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{C}[G])$ es la equivalencia de categorías utilizada en el teorema (2.27) (cf. (2.13) y (2.14)),

$\Psi : \text{Perv}(X_0; 0) \rightarrow \mathbb{C}$ es la equivalencia de categorías definida en (A2.4) y (A2.5).

$\omega : \mathbb{F} \circ \varepsilon \circ B_{X^*} \xrightarrow{\cong} \Psi \circ R\psi_f$ es el isomorfismo dado por el teorema (2.27).

$$\begin{aligned} & 1_{\mathbb{F}(\varepsilon(B_{X^*}(L)))} + \omega(L)^{-1} \circ \Psi(\alpha^{-1} \circ v) \circ \Psi(c \circ \alpha) \circ \omega(L) = \\ & = \omega(L)^{-1} \circ \left[1_{\Psi(R\psi_f(L))} + \Psi(\alpha^{-1}) \circ \Psi(v \circ c) \circ \Psi(\alpha) \right] \circ \omega(L) = \\ & = \omega(L)^{-1} \circ \Psi(1_{R\psi_f(L)} + v \circ c) \circ \omega(L) = \omega(L)^{-1} \circ \Psi(M(L)) \circ \omega(L) = \\ & = \tau(B_{X^*}(L)) \quad , \quad \text{puesto que } \omega \text{ es también un isomorfismo de} \\ & \mathbb{F} \circ B_{X^*} \text{ en } \Psi \circ [R\psi_f] \text{ (cf. teorema (2.27)).} \end{aligned}$$

D es una equivalencia de categorías, puesto que B_{X^*} y Ψ lo son.

Definimos: $E = D \circ R : \text{Perv}(X; \Sigma) \rightarrow A$.

(3.4) Corolario:- Sea $\text{Mod}^\Sigma(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}}$ la subcategoría plena de $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}}$ (cf. I.4.2) formada por los \mathcal{D}_X -módulos holónomos regulares M tales que: $\text{Ch}(M) \subset T_X^*(X) \cup \overline{T_{X_0}^* \setminus \{0\}}(X) \cup T_0^*(X)$.

Existe una equivalencia de categorías:

$$E' : \text{Mod}^\Sigma(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}} \rightarrow A \quad .$$

Demostración.- Basta considerar $E' = E \circ \text{Sol}$ (cf. I.4.3).

(3.5) a) Si $K \in \text{Perv}(X; \Sigma)$, y $E(K) = (E, \phi: \text{can}, \text{var})$, el $\mathbb{C}[G]$ -módulo E representa el sistema local $K|_{X^*}$, el par $\phi \in \mathcal{C}$ representa el haz perverso $\phi_f(K) \in \text{Perv}(X_0; 0)$, el par $F(\mathcal{E}(E))$ representa el haz perverso $\Psi_f(K) \simeq R\Psi_f(K|_{X^*}) \in \text{Perv}(X_0; 0)$, de acuerdo con el teorema (2.27), y los morfismos $\text{can}: F(\mathcal{E}(E)) \rightarrow \phi$, $\text{var}: \phi \rightarrow F(\mathcal{E}(E))$ representan respectivamente los morfismos $\text{can}(K)$ y $\text{var}(K)$ (cf. II.1.14).

b) Sea L un sistema local sobre X^* , y pongamos $E = B_{X^*}(L) \in \text{Mod}(\mathbb{C}[G])$. Teniendo en cuenta II.2.2, obtenemos unos isomorfismos naturales en L :

$$E(j_* L) \simeq (E, F(\mathcal{E}(E))) ; \tau(E) - 1, 1)$$

$$E(j_i L) \simeq (E, F(\mathcal{E}(E))) ; 1, \tau(E) - 1)$$

$$E(j_{i*} L) \simeq (E, \text{Im}(\tau(E) - 1)) ; \tau(E) - 1, \text{inclusión})$$

c) Si elegimos una base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ de L , y hacemos como en (2.28) c), podemos construir una categoría $A_{\{\alpha_i\}}$ sustituyendo el funtor F por $F_{\{\alpha_i\}}$. De esta forma, obtenemos una equivalencia:

$$E_{\{\alpha_i\}} : \text{Perv}(X; \Sigma) \rightarrow A_{\{\alpha_i\}}$$

En los cálculos (cf. (4.19)), utilizaremos el funtor

"combinatorio" $E_{\{\alpha_i\}}$, en lugar del funtor "explícito" E .

d) Sea $K \in \text{Per}v(X; \Sigma)$, y $E(K) = (E, \phi = (\phi_1 \begin{smallmatrix} u \\ \downarrow \\ v \end{smallmatrix} \phi_2))$; can, var).

Pongamos:

m_0 = multiplicidad de la sección nula $T_X^*(X)$ en $\text{Ch}(K)$

m_1 = multiplicidad de $\overline{T_{X_0}^*(X) \setminus \{0\}}$ en $\text{Ch}(K)$

m_2 = multiplicidad de $T_0^*(X)$ en $\text{Ch}(K)$

donde la variedad característica de $K, \text{Ch}(K)$, es por definición $\text{Ch}(M)$, donde $M \in \text{Mod}^{\Sigma}(\mathcal{D}_X)_{\text{hr}}$ y $K = \text{Sol}(M)$ (cf. I.4.3),

Las multiplicidades han sido definidas en I.2.14, y el teorema I.2.15 nos asegura que dichas multiplicidades dependen exclusivamente de K . (Ver [Lê-Me] para una definición directa de $\text{Ch}(K)$ a partir de K).

e = multiplicidad de la curva X_0 en $0 = \text{Eu}(X_0, 0)$

(cf. I.2.15)

Se tiene lo siguiente:

(i) $m_0 = \dots = \text{rango del sistema local } K|_{X^*} = \dim_{\mathbb{C}}(E)$.

(ii) Si $p \in X_0 \setminus \{0\}$, teniendo en cuenta la fórmula del índice (cf. I.2.15), $\chi(K_p) = m_0 - m_1$. Asimismo, $\chi(\Psi_f(K)_p) = m_0$ y $\chi(\Phi_f(K)_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\phi_1)$ (cf. a)), de donde: $m_1 = \dim_{\mathbb{C}}(\phi_1)$ (II.1.15 $0 = \chi(K_p) - \chi(\Psi_f(K)_p) + \chi(\Phi_f(K)_p)$).

(iii) Teniendo en cuenta de nuevo I.2.15, $\chi(K_0) =$

$$= m_0 - e \cdot m_1 + m_2 \cdot \chi(\Psi_f(K)_0) = \chi(R\psi_f(K|_{X^*})) = \chi(E \xrightarrow{U} \text{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I, E)) =$$

$$= (1 - \mu) \cdot m_0 ; \chi(\Phi_f(K)_0) = \chi(\phi_1 \xrightarrow{u} \phi_2) = \dim_{\mathbb{C}}(\phi_1) - \dim_{\mathbb{C}}(\phi_2) ;$$

de donde: $\dim_{\mathbb{C}}(\phi_2) = \mu \cdot m_0 + (1 - e) \cdot m_1 + m_2$.

(3.6) Proposición, - Sea L un sistema local sobre X^* , $E = \mathcal{B}_{X^*}(L)$ el $\mathbb{C}[G]$ -módulo asociado, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ una base de L , y $\{B_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq \mu}$ los elementos de $\mathbb{C}[L]$ definidos en (2.28) c). Las multiplicidades de las componentes de $\text{Ch}(j_{i^*} L)$ vienen dadas por:

$$m_0(j_{i^*} L) = r = \text{rango de } L = \dim_{\mathbb{C}}(E)$$

$$m_1(j_{i^*} L) = \text{rg}(\xi - 1)$$

$$m_2(j_{i^*} L) = \text{rg} \begin{pmatrix} \xi \cdot B_{11} - 1 & \xi \cdot B_{12} & \dots & \dots & \dots & \xi \cdot B_{1\mu} \\ \xi \cdot B_{21} & \xi \cdot B_{22} - 1 & \dots & \dots & \dots & \xi \cdot B_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi \cdot B_{\mu 1} & \xi \cdot B_{\mu 2} & \dots & \dots & \dots & \xi \cdot B_{\mu\mu} - 1 \end{pmatrix} - r +$$

$$+ (e - 1) \cdot \text{rg}(\xi - 1).$$

Demostración, - Es una consecuencia de (2.28) c), (3.5) b), c) y d).

4. Ejemplos.

(4.1) Ejemplo.- Curvas con un sólo par de Puiseux.

Sean m, n dos enteros primos entre sí tales que $m > n \geq 2$, y sea:

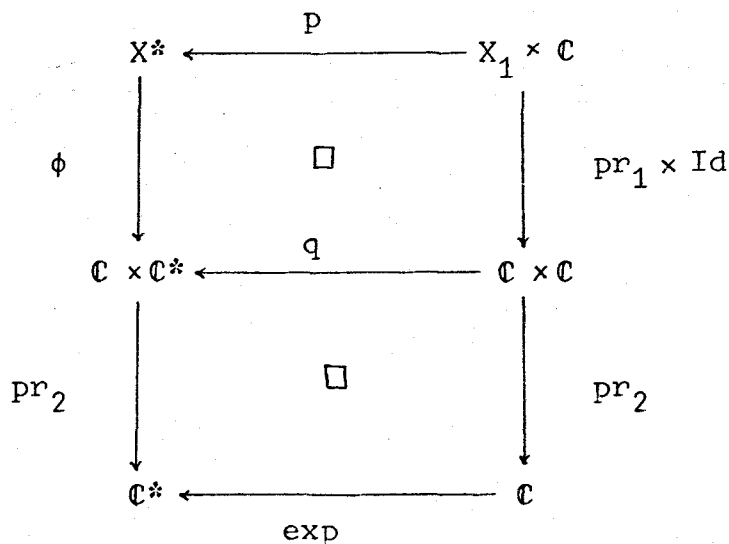
$$\tilde{f} : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow f(x,y) = x^m - y^n \in \mathbb{C}$$

f es irreducible en 0 , y $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ está en la situación local del punto 0 (cf. (1.6)).

Pongamos $X = \mathbb{C}^2$, y $\phi : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow (x, f(x,y)) \in \mathbb{C}^2$.
 es un revestimiento de grado n ramificado en $\Delta(\phi) = \{(x,\lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda = x^m\} \subset \mathbb{C}^2$.

Disponemos del diagrama cartesiano siguiente:

(4.2)



donde: $p((x,y),s) = (e^{\frac{s}{m} \cdot x}, e^{\frac{s}{n} \cdot y})$; $q(x,s) = (e^{\frac{s}{m} \cdot x}, e^s)$.

Un homeomorfismo característico de la fibración $f: X^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ viene dado por:

$$T_0 : (x,y) \in X_1 \rightarrow T_0(x,y) = (e^{\frac{2\pi i}{m} \cdot x}, e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot y})$$

X_1 .

Pongamos: $U = \{(x,\lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid 3^m |\lambda| < |x|^m\}$,
 y $X^\partial = \phi^{-1}(U)$. $pr_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una fibración trivial de
 fibra $\simeq \mathbb{C}^*$, $\phi: X^\partial \rightarrow U$ es un revestimiento de grado n ,
 y $f: X^\partial \rightarrow \mathbb{C}$ es una fibración trivial de fibra $\simeq \mathbb{C}^*$.

Vamos a construir un homeomorfismo característico $T: X_1 \rightarrow X_1$ tal que T sea la identidad sobre $X_1^\partial = X_1 \cap X^\partial$, y $T = T_0$ sobre $X_1 \cap \{(x,y) \in X \mid |x| < 2\}$.

Sea $v: [0,1] \times [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación continua:

$$v(\sigma, m) = \begin{cases} -1 & \text{si } m \leq 2 \\ \sigma \cdot m - 1 - 2 \cdot \sigma & \text{si } 2 \leq m \leq 3 \\ -1 + \sigma & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$$

y sea $H: [0,1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la isotopía:

$$H(\sigma, x) = e^{v(\sigma, |x|) \frac{2\pi i}{m} \cdot x}$$

$$H(0,x) = e^{\frac{2\pi i}{m} \cdot x} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C};$$

$$H(1,-) = \text{Id sobre } \{|x| \geq 3\}.$$

Existe una única isotopía $\tilde{H}: [0,1] \times X_1 \rightarrow X_1$ tal que $\text{pr}_1(\tilde{H}(\sigma,(x,y))) = H(\sigma,x)$ para todo $\sigma \in [0,1]$ y para todo $(x,y) \in X_1$, y $\tilde{H}(0,-) = T_0$.

Elijamos el punto base: $p_0 = (4, \sqrt[n]{4^m - 1}) \in X_1 \cap \mathbb{R}^2$.

(4.3) Consideremos el camino $\gamma(\sigma) = 4 \cdot e^{-\sigma \frac{2\pi i}{m}}$, $0 \leq \sigma \leq 1$, y sea $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow X_1$ el levantamiento de γ de origen $\tilde{\gamma}(0) = p_0$ (ver figura 2). No es difícil probar que $\tilde{\gamma}(1) = T_0(p_0)$.

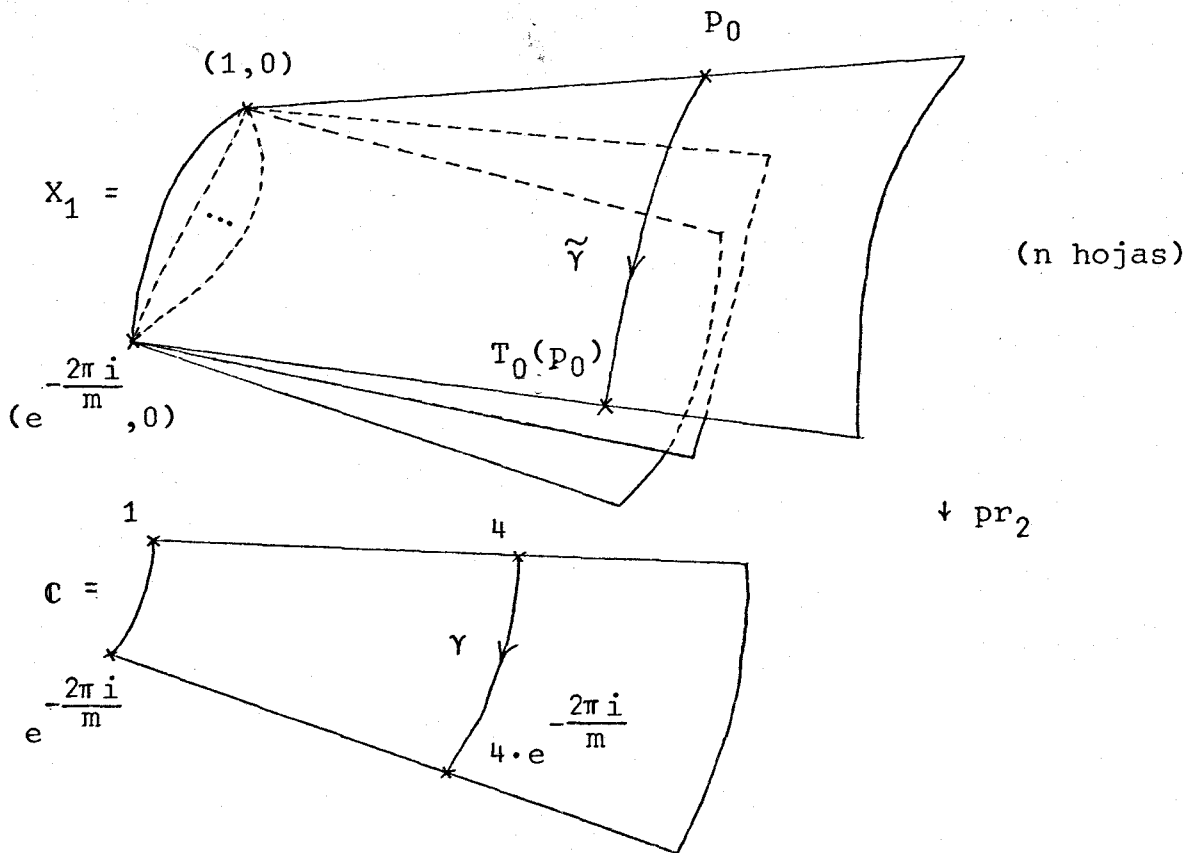


figura 2

Señalemos que $H(\sigma, p_0) = \tilde{\gamma}(1 - \sigma)$ para todo $\sigma \in [0, 1]$, de donde $\tilde{H}(1, p_0) = p_0$, y $H(1, -) = \text{Id}$ sobre X_1^∂ .

(4.4) Pongamos $T = \tilde{H}(1, -)$, \tilde{H} es una isotopía entre T_0 y T , y T coincide con T_0 sobre $X_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(\{|x| < 2\})$, y $T = \text{Id}$ sobre $X_1^\partial = X_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(\{|x| > 4\})$.

Sea $r: X \rightarrow X_0$ la retracción remontada por ϕ de la retracción $r': \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \{0\}$ que contrae U^c en $(0, 0)$, y U sobre $\mathbb{C}^* \times \{0\}$ como indica la figura 3:

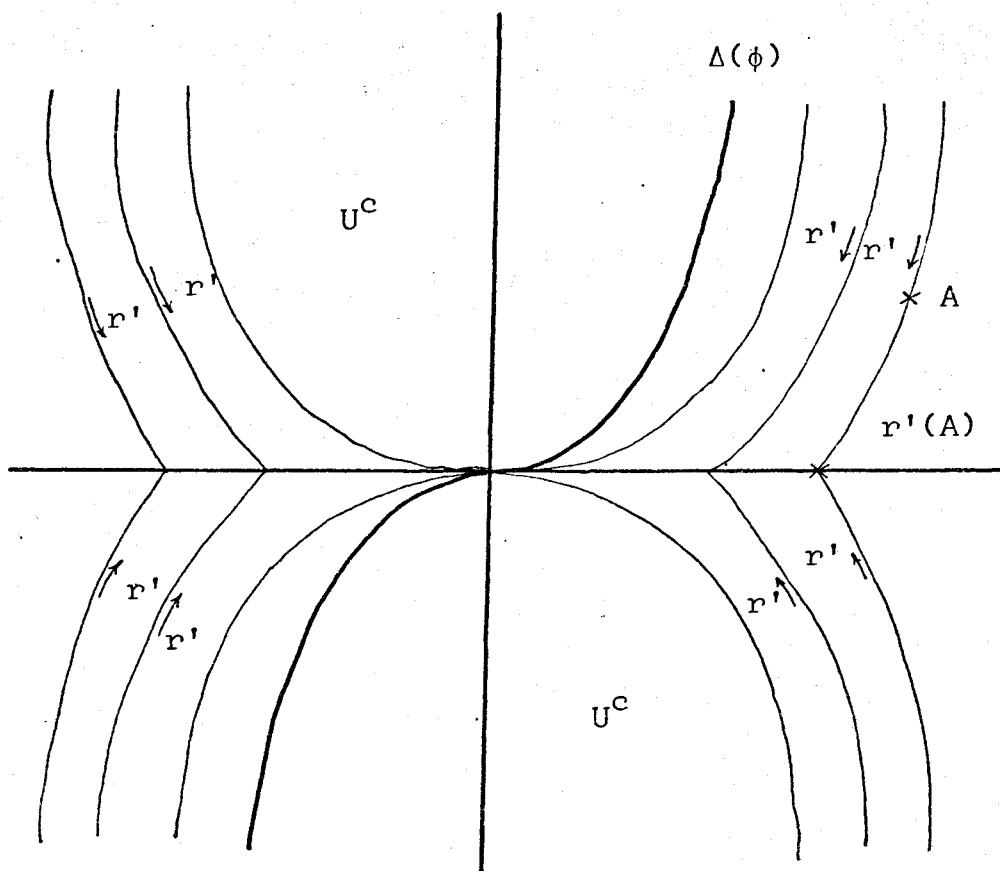


figura 3

(4.5) Si $sp = r|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_0$, y δ_0 es el generador positivo de $\pi_1(X_0 \setminus \{0\}, sp(p_0))$, $\delta'_0 = sp^{-1}(\delta_0)$ es el elemento de $\pi_1(X_1, p_0)$ que se proyecta por $pr_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ sobre n veces el generador positivo de $\pi_1(\mathbb{C}^*, 4)$.

A continuación, vamos a construir una base de $L = \pi_1(X_1, p_0)$, y a describir la acción de T sobre dicha base (cf. (2.28) c)).

(4.6) Consideremos los cortes de $\mathbb{C} \setminus \{\omega \mid \omega^m = 1\}$, $K_\omega = \{c \cdot \omega \mid c \in [1, +\infty)\}$, $\omega^m = 1$, y pongamos:

$$X_1 \setminus pr_1^{-1}\left(\bigcup_{\omega^m=1} K_\omega\right) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i k}{n}} \cdot X_1^0$$

donde \hat{X}_1^0 es la componente conexa que contiene $\tilde{\gamma}(0,1)$ (cf. (4.3)).

(4.7) Para cada $j = 0, \dots, m-1$, sea $e_j : \sigma \in [0,1] \rightarrow e^{\frac{2(j+\sigma)\pi i}{m}} \in \mathbb{C}$, y si $k=0, \dots, n-1$, sea $e_{jk} : [0,1] \rightarrow X_1$ el levantamiento de e_j tal que $e_{jk}(\sigma) \in X_1^k$ para cada $\sigma \in (0,1)$.

(4.8) Se tiene lo siguiente:

$$T(e_{jk}) = T_0(e_{jk}) = e_{j+1, k+1} \quad \text{si } 0 \leq j \leq m-2, 0 \leq k \leq n-2$$

$$T(e_{m-1,k}) = T_0(e_{m-1,k}) = e_{0,k+1} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n-2$$

$$T(e_{m-1,n-1}) = T_0(e_{m-1,n-1}) = e_{00}$$

(4.9) Sea $\alpha : \sigma \in [0,1] \mapsto (3\sigma + 1, \sqrt{(3\sigma + 1)^m - 1}) \in X_1 \cap \mathbb{R}^2$. $\alpha(0) = (1,0)$, $\alpha(1) = p_0$.

Está claro que: $T(\alpha^{-1}) \sim e_{00} \cdot \alpha^{-1} \sim T_0(\alpha) \cdot \tilde{\gamma}$
(cf. (4.3) y (4.4)).

Pongamos para cada $j=0, \dots, m-1$; $k=0, \dots, n-1$

$$\check{\alpha}_{jk} = (e_{00}^{-1}) \cdot \dots \cdot (e_{j-1,0}^{-1}) \cdot (e_{j,k+1}^{-1}) \cdot (e_{j,k}) \cdot (e_{j-1,0}) \cdot \dots \cdot (e_{00})$$

donde $e_{jn} = e_{j0}$ $j=0, \dots, m-1$ por definición.

(4.10) No es difícil demostrar las afirmaciones siguientes: (i)

a) $\{\alpha_{jk}\}_{\substack{0 \leq j \leq m-2 \\ 0 \leq k \leq n-2}}$ es una base de $\pi_1(X_1, (1,0))$.

b) $\check{\alpha}_{j,n-1} = (\check{\alpha}_{j0}^{-1}) \cdot (\check{\alpha}_{j1}^{-1}) \cdot \dots \cdot (\check{\alpha}_{j,n-2}^{-1})$ si $0 \leq j \leq m-2$

c) $\check{\alpha}_{m-1,k} = [[\check{\alpha}_{0k} \cdot \dots \cdot \check{\alpha}_{00}] \cdot [\check{\alpha}_{1k} \dots \check{\alpha}_{10}] \cdot \dots$
 $\cdot [\check{\alpha}_{m-2,k} \dots \check{\alpha}_{m-2,0}]]^{-1} \cdot [\check{\alpha}_{0,k-1} \dots \check{\alpha}_{00}] \cdot [\check{\alpha}_{1,k-1} \dots \check{\alpha}_{10}] \cdot \dots$
 $\cdot [\check{\alpha}_{m-2,k-1} \dots \check{\alpha}_{m-2,0}]$ si $0 \leq k \leq n-2$.

(i) Hay que tener en cuenta que: $e_{m-1,j} \cdot e_{m-2,j} \cdot \dots \cdot e_{0j} = 1$ para cada $j = 0, \dots, n-1$.

$$d) \check{\alpha}_{m-1, n-1} = [\check{\alpha}_{0, n-2} \cdots \check{\alpha}_{00}] \cdot [\check{\alpha}_{1, n-2} \cdots \check{\alpha}_{10}] \cdots \\ \cdot [\check{\alpha}_{m-2, n-2} \cdots \check{\alpha}_{m-2, 0}]$$

(4.11) Definamos: $\alpha_{jk} = \alpha \cdot \check{\alpha}_{jk} \cdot \alpha^{-1}$, $0 \leq j \leq m-1$,
 $0 \leq k \leq n-1$.

a) $\{\alpha_{jk}\}_{\substack{0 \leq j \leq m-2 \\ 0 \leq k \leq n-2}}$ es una base de $L = \pi_1(X_1, P_0)$.

b) $\pi_1(T)(\alpha_{jk}) = [\alpha_{10} \cdots \alpha_{j0}] \cdot [\alpha_{j+1, k+1}] \cdot [\alpha_{10} \cdots \alpha_{j0}]^{-1}$
 si $0 \leq j \leq m-3$, $0 \leq k \leq n-3$

c) $\pi_1(T)(\alpha_{j, n-2}) = [\alpha_{10} \cdots \alpha_{j0}] \cdot [\alpha_{j+1, n-2} \cdots \alpha_{j+1, 0}]^{-1} \cdot$
 $[\alpha_{10} \cdots \alpha_{j0}]^{-1}$ si $0 \leq j \leq m-3$

d) $\pi_1(T)(\alpha_{m-2, n-2}) = [\alpha_{10} \cdots \alpha_{m-2, 0}] \cdot [\alpha_{0, n-2} \cdots \alpha_{00}] \cdots$
 $[\alpha_{m-3, n-2} \cdots \alpha_{m-3, 0}] \cdots [\alpha_{m-2, n-2} \cdots \alpha_{m-2, 1}] \cdot$
 $[\alpha_{10} \cdots \alpha_{m-3, 0}]^{-1}$

(4.12) Ejemplo.- Explicitación de la equivalencia de categorías (3.5) c), en el caso de la curva $x^{2p+1} - y^2 = 0$, $p \geq 1$.

Pongamos $m = 2p + 1$ y $n = 2$ en el ejemplo (4.1), y notemos: $a_i = \alpha_{i0}$ $0 \leq i \leq m-2$ los genera-

dores de L construidos en (4.11).

En este caso, el generador positivo δ'_0 de L^∂ (cf. (4.5)) viene dado por:

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad \delta'_0 &= \alpha \cdot [e_{2p,1} \cdot e_{2p-1,0} \cdot \dots \cdot e_{2i,1} \cdot e_{2i-1,0} \cdot \dots \cdot e_{10} \cdot e_{01}] \\
 & [e_{2p,0} \cdot e_{2p-1,1} \cdot \dots \cdot e_{2i,0} \cdot e_{2i-1,1} \cdot \dots \cdot e_{11} \cdot e_{00}] \cdot \alpha^{-1} = \\
 & = \dots = [a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2p-1}] \cdot [a_0 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2p-2}] \cdot \\
 & \cdot [a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{2p-2} \cdot a_{2p-1}]^{-1} .
 \end{aligned}$$

(4.14) De acuerdo con (4.11), la acción de T sobre los $\{a_i\}$ viene dada por:

$$\tilde{a}_i = \pi_1(T)(a_i) = (a_1 \cdot \dots \cdot a_i) \cdot (a_1 \cdot \dots \cdot a_{i+1})^{-1} \quad 0 \leq i \leq m-3$$

$$\tilde{a}_{m-2} = \pi_1(T)(a_{m-2}) = a_1 \cdot \dots \cdot a_{m-2} \cdot a_0 .$$

Calculemos los $\{A_i\}$ y $\{B_{ij}\}$ de (2.28) c).

Si b es un elemento de L , definimos $\phi_i(b) \in \mathbb{C}[L]$ $0 \leq i \leq m-2$, por la expresión:

$$b - 1 = \sum_{i=0}^{m-2} \phi_i(b) \cdot (a_i - 1)$$

Se tienen las fórmulas siguientes:

$$(4.15) \quad \phi_i(a_j) = \delta_{ij}$$

$$\phi_i(b^{-1}) = -b^{-1} \cdot \phi_i(b)$$

$$\phi_i\left(\prod_{k=1}^N b_k\right) = \sum_{l=1}^N \left(\prod_{k=1}^{l-1} b_k\right) \cdot \phi_i(b_l)$$

Por definición, $A_i = \phi_i(\delta'_0)$, $0 \leq i \leq m-2$, y
 $B_{ij} = \phi_j(\tilde{a}_i)$ $0 \leq i, j \leq m-2$.

Utilizando (4.15), obtenemos:

$$(4.16) \quad A_i = \phi_i(\delta'_0) = \begin{cases} a_1 \cdot a_3 \cdots a_{m-2} \cdot a_0 \cdots a_{2(r-1)} - \\ - a_1 \cdot a_3 \cdots a_{m-3} \cdot (a_i \cdots a_{m-2})^{-1}, & \text{si } i=2r, \\ 0 \leq r \leq p-1 \end{cases}$$

$$(4.17) \quad B_{ij} = \phi_j(a_i) \begin{cases} a_1 \cdots a_{j-1} - a_1 \cdots a_i \cdot (a_j \cdots a_{i+1})^{-1} \\ \text{si } 0 < j \leq i \\ - a_1 \cdots a_i \cdot a_{i+1}^{-1}, & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{si } j=0 \text{ ó } j > i+1 \end{cases}$$

si $0 \leq i \leq m-3$

$$B_{m-2,j} = \phi_j(a_{m-2}) = \begin{cases} a_1 \cdots a_{j-1} & \text{si } 0 \leq j \leq m-2 \\ a_1 \cdots a_{m-2} & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

(4.18) Teniendo en cuenta (3.5) c), se obtiene una equivalencia de categorías:

$$E_{\{a_i\}} : \text{Perv}(\mathbb{C}^2; \Sigma) \rightarrow A_{\{a_i\}}$$

donde $E_{\{a_i\}}$ es la estratificación asociada a la curva $x^{2p+1} - y^2 = 0$, y $A_{\{a_i\}}$ es la categoría de los diagramas de \mathbb{C} -espacios vectoriales de dimensión finita:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xi \\ \circlearrowleft \\ E \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{can}_1} \\ \xleftarrow{\text{var}_1} \end{array} & \begin{array}{c} \phi_1 \\ \updownarrow \\ \phi_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_i \\ \circlearrowleft \\ E \\ 0 \leq i \leq m-2 \end{array} & \begin{array}{c} \updownarrow \\ (A_0, \dots, A_{m-2}) \\ \updownarrow \end{array} & \begin{array}{c} u \\ \updownarrow \\ v \end{array} \\ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} a_0 - 1 \\ \vdots \\ a_{m-2} - 1 \end{array} \right) \\ \updownarrow \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{can}_2} \\ \xleftarrow{\text{var}_2} \end{array} & \begin{array}{c} E^{2p=m-1} \end{array} \end{array}$$

- tales que:
-) $\xi, a_0, \dots, a_{m-2} \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$
 -) A_0, \dots, A_{m-2} han sido definidos en (4.16)
 -) $\xi^{-1} \cdot a_i \cdot \xi = \tilde{a}_i$, $0 \leq i \leq m-2$, y los \tilde{a}_i

han sido definidos en (4.14).

$$\rightarrow) \text{can}_1 \cdot (A_0, \dots, A_{m-2}) = v \cdot \text{can}_2;$$

$$\text{can}_2 \cdot \begin{pmatrix} a_0^{-1} \\ \vdots \\ a_{m-2}^{-1} \end{pmatrix} = u \cdot \text{can}_1 .$$

$$\rightarrow) \text{var}_1 \cdot v = (A_0, \dots, A_{m-2}) \cdot \text{var}_2 ; \text{var}_2 \cdot u =$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{-1} \\ \vdots \\ a_{m-2}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \text{var}_1 .$$

$$\rightarrow) 1_E + \text{var}_1 \cdot \text{can}_1 = \xi ; 1_{E^{m-1}} + \text{var}_2 \cdot \text{can}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \cdot B_{00} & \dots & \xi \cdot B_{0,m-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi \cdot B_{m-2,0} & \dots & \xi \cdot B_{m-2,m-2} \end{pmatrix} , \text{ y los } B_{ij} \text{ han sido}$$

definidos en (4.17).

(4.19) Ejemplo.- Cálculo de las multiplicidades de ciertos complejos de intersección en el caso de la curva $x^3 - y^2 = 0$.

Como caso particular del ejemplo (4.12), sabemos que $L = \pi_1(X_1, p_0)$ tiene una base $\{a_0, a_1\}$, de tal forma que la acción de la monodromía viene dada por (cf. (4.14)):

$$\tilde{a}_0 = \pi_1(T)(a_0) = a_1^{-1}$$

$$\tilde{a}_1 = \pi_1(T)(a_1) = a_1 \cdot a_0$$

y por tanto (cf. (2.8)), una presentación de $G = \pi_1(X^*, p_0)$ es:

$$G = \langle a_0, a_1, \xi; \xi^{-1} \cdot a_0 \cdot \xi = a_1^{-1}, \xi^{-1} \cdot a_1 \cdot \xi = a_1 \cdot a_0 \rangle$$

Además (cf. (4.13)), $\delta_0^! = a_1 \cdot a_0 \cdot a_1^{-1} \cdot a_0^{-1}$.

Consideremos la familia de representaciones complejas de rango 2:

$$\rho_{(s,t)} : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \quad s, t \in \mathbb{C}, \quad s \cdot t \neq 0$$

dadas por:

$$\rho_{(s,t)}(a_0) = \rho_{(s,t)}(a_1) = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{pmatrix}, \quad \theta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\rho_{(s,t)}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $\rho_{(s,t)}$ es una representación irreducible para todo $(s,t) \in \mathbb{C}^2$, $s \cdot t \neq 0$.

Sea $L_{(s,t)}$ el sistema local sobre X^* correspondiente a la representación $\rho_{(s,t)}$. Vamos a describir a continuación el ciclo característico (suma formal de las componentes de la variedad característica, multiplicadas

por las multiplicidades respectivas) del complejo de intersección $IC(L_{(s,t)})$ (cf. [Gor-MacP 2]). $IC(L_{(s,t)})$ coincide con $j_{i*}L_{(s,t)}$ (cf. loc.cit. y [Beil-Ber-Del]).

De acuerdo con la proposición (3.6), tenemos:

$$m_0(IC(L_{(s,t)})) = 2$$

$$m_1(IC(L_{(s,t)})) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & s \\ t & -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } s \cdot t - 1 \neq 0 \\ 1 & \text{si } s \cdot t - 1 = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta (4.17), se obtiene:

$$B_{00} = 0, B_{01} = -a_1^{-1}, B_{10} = a_1, B_{11} = 1$$

Si ponemos:

$$M(s,t) = \begin{pmatrix} \rho_{(s,t)}(\xi \cdot B_{00}^{-1}) & \rho_{(s,t)}(\xi \cdot B_{01}) \\ \rho_{(s,t)}(\xi \cdot B_{10}) & \rho_{(s,t)}(\xi \cdot B_{11}^{-1}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -s\theta \\ 0 & -1 & -t\theta^2 & 0 \\ 0 & s\theta^2 & -1 & s \\ t\theta & 0 & t & -1 \end{pmatrix}$$

$$m_2(\text{IC}(L_{(s,t)})) = \text{rg}(M(s,t)) - 4 + m_1(\text{IC}(L_{(s,t)}))$$

$$\det(M(s,t)) = (s \cdot t - 1)^2, \text{ de donde:}$$

$$m_2(\text{IC}(L_{(s,t)})) = 4 - 4 + 2 = 2 \quad \text{si } s \cdot t - 1 \neq 0.$$

Si $s \cdot t - 1 = 0$, $t = s^{-1}$, y se ve fácilmente que $\text{rg}(M(s, s^{-1})) = 3$, de donde:

$$m_2(\text{IC}(L_{(s,t)})) = 3 - 4 + 1 = 0 \quad \text{si } s \cdot t - 1 = 0.$$

Así pues:

ciclo característico de $\text{IC}(L_{(s,t)}) =$

$$2 \cdot T_{\mathbb{C}^2}^*(\mathbb{C}^2) + \overline{T_{X_0 \setminus \{0\}}^*(\mathbb{C}^2)} + T_0^*(\mathbb{C}^2) \quad \text{si } s \cdot t - 1 \neq 0$$

$$2 \cdot T_{\mathbb{C}^2}^*(\mathbb{C}^2) + \overline{T_{X_0 \setminus \{0\}}^*(\mathbb{C}^2)} \quad \text{si } s \cdot t - 1 = 0$$

En particular, $\text{Ch}(\text{IC}(L_{(s,t)}))$ no contiene el

conormal a $0, T_0^*(\mathbb{C}^2)$, si $s \cdot t - 1 = 0$.

(4.20) Ejemplo.- Cálculo del ciclo característico del complejo de intersección en el caso del "paraguas de Whitney".

Este ejemplo no está en las condiciones del teorema (3.3), pues el plano complejo es sustituido por una superficie con singularidad no aislada. No obstante, lo hemos incluido para mostrar que los métodos de las secciones 2 y 3 se aplican a situaciones geoméricamente más complicadas.

Sea $F : (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto F(x, y, z) = x^2 - y^2 z \in \mathbb{C}$,
y pongamos $X = F^{-1}(0)$ (X es el "paraguas de Whitney")

El lugar singular de X , X_{sing} , es la recta
 $x = y = 0$.

Sea $f : (x, y, z) \in X \mapsto f(x, y, z) = y \in \mathbb{C}$. Se tiene:

$$X_{\text{sing}} = f^{-1}(0) = X_0.$$

Veamos que $f : X^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una fibración trivial.

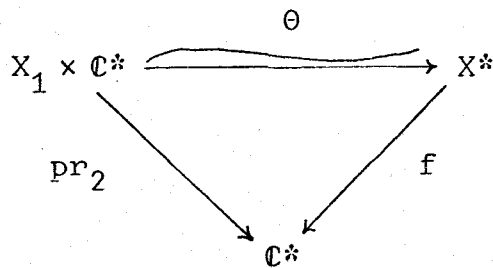
Sea $\theta : X_1 \times \mathbb{C}^* \rightarrow X^*$

$$\theta((x,1,z),t) = (t \cdot x, t, z)$$

es un isomorfismo, y su inverso es:

$$\theta^{-1}(x,y,z) = \left(\left(\frac{x}{y}, 1, z \right), y \right),$$

y el diagrama siguiente es conmutativo:



Así pues, $T = \text{Id}: X_1 \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo característico de la fibración $f: X^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Calculemos ahora $\text{sp}: X_1 \rightarrow X_0$ (comparar con (1.2) y (1.3)).

Sea $\phi: (x,y,z) \in X \mapsto (z,y) \in \mathbb{C}^2$. es un revestimiento finito ramificado a lo largo de $\Delta(\phi) = \{z=0\} \cup \{y=0\} \subset \mathbb{C}^2$ de grado 2.

La retracción $r': \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \{0\}$, $r'(z,y) = (z,0)$ da lugar (vía ϕ) a una retracción $r: X \rightarrow X_0$:

$$r(x,y,z) = (0,0,z) \quad (\text{comparar con la figura 3}) .$$

Sea $\text{sp} = r|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_0$. No es difícil probar

que $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ se reconstituye (topológicamente) a partir de (X_0, X_1, T, sp) como en (1.3) c).

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y = 1, x^2 = z\} \quad \text{y}$$
$$X_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = 0\}, \text{ de donde } sp: X_1 \rightarrow X_0 \text{ es}$$

isomorfo

$$v: x \in \mathbb{C} \mapsto v(x) = x^2 \in \mathbb{C}$$

Sea $p_0 \in X_1$ un punto base. $L = \pi_1(X_1, p_0) = \{1\}$ y $G = \pi_1(X^*, p_0) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$. Sea $\xi \in G$ el elemento que se proyecta en el generador positivo de $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.

(4.22) Un sistema local L sobre X^* , viene dado por un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita, E , y un automorfismo C (la acción de $\xi \in \pi_1(X^*, p_0)$).

Debemos calcular $[R\psi_f](L)$. Si $L_1 = L|_{X_1}$, $T_*L_1 = L_1$ ($T=Id$), y por tanto:

$[R\psi_f](L) \simeq (Rsp_*(L_1), Rsp_*(\tau_L))$ (comparar con (1.12)).

Ahora bien, $X_1 \simeq \mathbb{C}$ es simplemente conexo, y los sistemas locales sobre X_1 vienen dados por un espacio vectorial de dimensión finita.

Sea pues L_1 un sistema local sobre X_1 , y sea E el \mathbb{C} -espacio vectorial que lo representa. Nuestro objetivo es calcular el par que representa al haz perverso $Rsp_*(L_1)$.

Con más generalidad, el funtor $Rv_* : Perv(\mathbb{C}; 0) \rightarrow Perv(\mathbb{C}; 0)$ (cf. (4.2.1)) está representado (cf. (A2.5)) por el funtor:

$$\left(E \begin{array}{c} U \\ \rightleftharpoons \\ V \end{array} F \right) \in \mathcal{C} \longmapsto \left(E \oplus E \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & U \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ M & V \end{pmatrix}} \end{array} E \oplus F \right) \in \mathcal{C}$$

Por tanto, si L es un sistema local sobre X^* dado por $(E; C)$ (cf. (4.22)), se tiene:

$$\Psi^*([R\psi_f](L)) \simeq \left(E \oplus E \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} E ; (C \oplus C, C) \right)$$

Teniendo en cuenta II.2.2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(\phi_f(IC(L))) &= \Psi(\phi_f(j_{i^*} L)) = \Psi(\text{Im}(M(L) - 1)) = \\ &= \text{Im}((C \oplus C, C) - (1 \oplus 1, 1)) \subset E \oplus E \begin{array}{c} \rightleftharpoons \\ E \end{array}, \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\phi_f(IC(X))) &:= \Psi(\phi_f(j_{i^*} \mathbb{C}_{X^*})) = \dots = \\ &= \text{Im}((1 \oplus 1, 1) - (1 \oplus 1, 1)) = 0 \Rightarrow \phi_f(IC(X)) = 0. \end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula del índice (cf. I.2.15) y tenemos en cuenta que X en un punto $p \in X_0 \setminus \{0\}$ es un cruzamiento normal de dos componentes, y que $\text{Eu}(X, 0) = 1$ (cf. [Gon-Ver]), llegamos a que:

$$\text{ciclo característico de } \text{IC}(X) = \overline{T_{X^*}^*(\mathbb{C}^3)}$$

En particular, $(X, 0)$ es un ejemplo de superficie en \mathbb{C}^3 , tal que las condiciones de Whitney no son satisfechas en 0 para $(X \setminus X_{\text{sing}}, X_{\text{sing}})$, y sin embargo $\text{Ch}(\text{IC}(X))$ no contiene el conormal a 0.

APENDICE 1 : Cálculo de $[R\psi_f](L)$ a partir del morfismo de especialización.

(A1.1) Consideremos un sistema (X_0, X_1, T, sp) , donde X_0 y X_1 son dos espacios topológicos, $T: X_1 \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo, y $sp: X_1 \rightarrow X_0$ es una aplicación continua tal que $sp \circ T = sp$.

Sea $g: Y \rightarrow S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ la fibración localmente trivial de fibra X_1 y de homeomorfismo característico T , es decir, Y es el espacio cociente $X_1 \times (\mathbb{R}i) / \sim$ donde \sim es la relación de equivalencia siguiente:

$$(x, s) \sim (x', s') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x' = T^n(x), \\ s' = s + 2n\pi i,$$

$$y: \overline{(x, s)} \in Y \mapsto \exp(s) \in S^1.$$

Definamos la aplicación continua:

$$r: \overline{(x, s)} \in Y \mapsto r(\overline{(x, s)}) = sp(x) \in X_0$$

y pongamos: $X = \text{cono}(r) = (Y \times [0, +\infty)) \sqcup X_0 / \{(y, 0) = r(y), y \in Y\}$

$$f: X \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(\overline{(y, \sigma)}) = \sigma \cdot g(y)$$

Dicho de otra manera, $(f: X \rightarrow \mathbb{C}) =$
 $= \text{cono}((Y \xrightarrow{g} S^1) \xrightarrow{r} (X_0 \rightarrow \{0\}))$ (Comparar con [SGA 7 II] exp. XIII Introduction, y exp. XIV (1.4), (3.1.4)).

$X^* = X \setminus f^{-1}(0)$ se identifica canónicamente al espacio cociente $X_1 \times \mathbb{C} / \sim$, donde:

$$(x, s) \sim (x', s') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x' = T^n(x), \\ s' = s + 2n\pi i,$$

y se tiene el diagrama cartesiano siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{p} & X_1 \times \mathbb{C} \\ \downarrow f & \square & \downarrow \text{pr}_2 \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbb{C} \end{array}$$

donde; $p(x, s) = \overline{(x, (\text{Im } s)i), e^{\text{Re } s}}$

Claramente X_0 se identifica a $f^{-1}(0)$, y X_1 a $f^{-1}(1)$.

El generador positivo \tilde{T} de $\text{Aut}(X_1 \times \mathbb{C} / X^*)$ viene dado por: $\tilde{T}(x, s) = (T(x), s + 2\pi i)$.

Señalemos que $r: Y \rightarrow X_0$ se prolonga a X , dándonos una retracción continua, notada también $r: X \rightarrow X_0$:

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in f^{-1}(0) \cong X_0 \\ sp(x) & \text{si } x = p(x, s) \end{cases}$$

Asímismo, se verifica: $r \circ j \circ p = sp \circ pr_1$,
 donde $j: X^* \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Definamos:

$$S = sp_* \circ (pr_1)_* \circ p^{-1} = r_* \circ j_* \circ p_* \circ p^{-1} : \text{Mod}(\mathbb{C}_{X^*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0})$$

$\delta : S \rightarrow \psi_f = i^{-1} \circ j_* \circ p_* \circ p^{-1}$ el morfismo proveniente
 de $r_* \rightarrow i^{-1}$ ($r \circ i = \text{Id}_{X_0}$).

$N : S \rightarrow S$ el automorfismo proveniente de
 $\sigma_{\bar{f}} : p_* \circ p^{-1} \rightarrow p_* \circ p^{-1}$ (cf. II.1.3 y III.2.11). Es eviden-
 te que: $\delta \circ N = M \circ \delta$, donde $M : \psi_f \rightarrow \psi_f$ ha sido definido
 en II.1.3.

Notemos también por $\delta : RS \rightarrow R\psi_f$, $N : RS \rightarrow RS$
 los morfismos inducidos por $\delta : S \rightarrow \psi_f$, $N : S \rightarrow S$ respec-
 tivamente.

(A1.2) Sea A la subcategoría plena de $\text{Mod}(\mathbb{C}_{X^*})$ cu-
 yos objetos son los haces F que verifican:

$$(*) \quad (pr_1^{-1} \circ (pr_1)_*)(p^{-1}F) \cong p^{-1}F$$

A es una "thick abelian subcategory" de $\text{Mod}(\mathbb{C}_{X_0})$
 (cf. [Hart] I § 4).

(A1.3) Proposición. - Si K es un objeto de $D_A^+(\mathbb{C}_{X^*})$, $\delta(K) : RS(K) \rightarrow$

$R\psi_f(K)$ es un isomorfismo.

Demostración. Como consecuencia del lema de los "way out functors" (cf. [Hart] I Prop. (7.1)), es suficiente demostrar que $\delta(K)$ es un isomorfismo para todo $K \in A$.

Sea K un objeto de A , y pongamos $L = (pr_1)_*(p^{-1}K)$. $pr_1^{-1}L \cong p^{-1}K$.

Sean $x \in X_0$, $i \geq 0$. Se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 R^i S(K)_x \xrightarrow{\quad} \lim_{\substack{\rightarrow \\ X_0 \supset U \ni x}} H^i(sp^{-1}(U) \times \mathbb{C}, pr_1^{-1}L) & & \\
 \downarrow h^i(\delta(K))_x & & \downarrow \text{canónico} \\
 R^i \psi_f(K)_x \xrightarrow{\quad} \lim_{\substack{\rightarrow \\ X_0 \supset U \ni x \\ \eta > 0}} H^i(sp^{-1}(U) \times \{\text{Re } s < \log \eta\}, pr_1^{-1}L) & &
 \end{array}$$

y como \mathbb{C} y $\{\text{Re } s < \log \eta\}$ son contráctiles:

$$\begin{aligned}
 H^i(sp^{-1}(U) \times \mathbb{C}, pr_1^{-1}L) &\cong H^i(sp^{-1}(U), L) \cong \\
 &\cong H^i(sp^{-1}(U) \times \{\text{Re } s < \log \eta\}, pr_1^{-1}L)
 \end{aligned}$$

de donde, $h^i(\delta(K))_x$ es un isomorfismo para cada $x \in X_0$ y cada $i \geq 0 \Rightarrow \delta(K)$ es un isomorfismo.

(A1.4) Introduzcamos las siguientes notaciones:

$$-) S_0 = (\text{pr}_1)_* \circ p^{-1} : \text{Mod}(\mathbb{C}_{X^*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{C}_{X_1})$$

-) $\tau' : S_0 \cong T_* \circ S_0 = (\text{pr}_1)_* \circ T_* \circ p^{-1}$ el isomorfismo inducido por la identificación canónica $p^{-1} \cong T_* \circ p^{-1}$ ($p \circ T = p$), y notemos también por $\tau' : \text{RS}_0 \cong T_* \circ \text{RS}_0$ el "derivado" de τ' .

$$-) T' : K \in D^+(\mathbb{C}_{X^*}) \mapsto (\text{RS}_0(K); \tau'(K)) \in D^+(\mathbb{C}_{X_1})^{T_*}$$

(cf. II.1.4).

$$-) Sp : (K; \alpha) \in D^+(\mathbb{C}_{X_1})^{T_*} \mapsto (\text{Rsp}_*(K); \chi(K)^{-1} \cdot \text{Rsp}_*(\alpha)) \in D^+(\mathbb{C}_{X_0})^*$$

donde $\chi : \text{Rsp}_* \cong \text{Rsp}_* \circ T_*$ es el isomorfismo natural ($sp \circ T = T$).

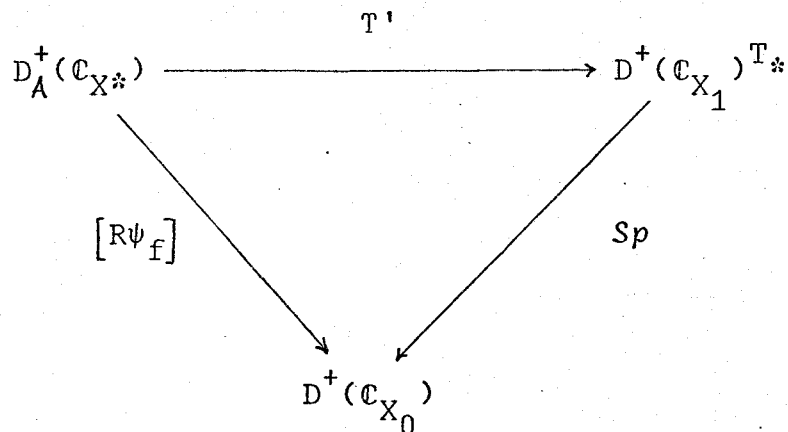
$$-) [\text{RS}] : K \in D^+(\mathbb{C}_{X^*}) \mapsto (\text{RS}(K), N(K)) \in D^+(\mathbb{C}_{X_0})^*$$

Con las notaciones precedentes, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 D^+(\mathbb{C}_{X^*}) & \xrightarrow{T'} & D^+(\mathbb{C}_{X_1})^{T_*} \\
 \searrow [\text{RS}] & & \swarrow Sp \\
 & & D^+(\mathbb{C}_{X_0})^*
 \end{array}$$

(A1.5)

(A1.6) Corolario.- El siguiente diagrama es conmutativo:



Demostración.- Es una consecuencia inmediata de (A1.3) y (A1.5).

(A1.7) Si K es un objeto de A , $R^i S_0(K) = R^i(\text{pr}_1)_*(p^{-1}K) = 0$ para todo $i \geq 1$, de donde el morfismo canónico:

$$K|_{X_1} \rightarrow S_0(K)$$

es un isomorfismo, y por tanto (cf. [Hart] I Prop.(7.1)):

$$K|_{X_1} \cong RS_0(K)$$

para todo $K \in D_A^+(\mathbb{C}_{X^*})$.

Pongamos: $T : K \in D_A^+(\mathbb{C}_{X^*}) \mapsto (K|_{X_1}, \tau_K) \in D^+(\mathbb{C}_{X_1})^{T^*}$

donde:

$$\begin{array}{ccc}
 K|_{X_1} & \xrightarrow{\tau_K} & T_*(K|_{X_1}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 RS_0(K) & \xrightarrow{\tau'(K)} & T_*(RS_0(K))
 \end{array}$$

Es evidente que (A1.6) permanece válido si se sustituye T' por T .

(A1.8) (A1.6) y (A1.7) nos permiten calcular "por partes" $[R\psi_f](K)$, si $K \in D_A^+(\mathbb{C}_{X^*})$: el funtor T (ó T') descompone K en $K|_{X_1}$ y $\bar{\tau}_K: K|_{X_1} \rightarrow T_*(K|_{X_1})$.

$K|_{X_1}$ nos sirve para calcular $R\psi_f(K)$: $R\psi_f(K) \simeq \simeq Rsp_*(K|_{X_1})$

τ_K nos sirve para calcular $M(K)$: $M(K) \equiv \equiv \chi(K|_{X_1})^{-1} \cdot Rsp_*(\tau_K)$

APENDICE 2: Haces perversos sobre un disco .

En este apéndice, recordamos la descripción combinatoria de los haces perversos sobre \mathbb{C} , con respecto a la estratificación $\{0\}, \mathbb{C}^*$ (cf. [Del 2] , [Gal-Gra-Mais]).

Si tenemos en cuenta la estructura analítica subyacente, dicha descripción es un caso particular del teorema de extensión II.2.1. No obstante, hemos preferido dar un enunciado y una indicación de la prueba puramente topológicos. El método elegido es el de [Del 2], pues se adapta mejor a la prueba del teorema "fundamental" II.2.27, que el de [Gal-Gra-Mais].

(A2.1) Sea $(X,0)$ un espacio topológico punteado, homeomorfo a $(\mathbb{C},0)$, y elijamos un punto base $x_0 \in X^* = X \setminus \{0\}$. Elijamos también un generador δ_0 de $\pi_1(X^*, x_0)$. En el caso en que $(X,0)$ sea un representante de un germen de curva analítica compleja, (cf. por ejemplo III.2.1), la elección de δ_0 puede realizarse "canónicamente", pues X^* es una variedad orientada.

(A2.2) Definimos $Per_v(X;0)$ como la subcategoría

plena de $D(\mathbb{C}_X)$ formada por los complejos K tales que:

(i) $h^i(K) = 0$ para $i \neq 0, 1$

(ii) $h^i(K)$ es constructible con respecto a $\{0\}, X^*$ (cf. teorema I.2.13)

(iii) $\text{sop } h^1(K) \subset \{0\}$

(iv) $K^\vee = \text{RHom}_{\mathbb{C}_X}(K, \mathbb{C}_X)$ verifica (i), (ii) e (iii)

Si $(X, 0)$ es una curva analítica compleja, la definición (A2.2) coincide con la definición dada en la introducción de II.2.

(A2.3) La condición (iv) de (A2.2) puede sustituirse por:

(iv') $\Gamma_{\{0\}}(h^0(K)) = 0$

(cf. [Gal-Gra-Mais] y [Beil-Ber-Del]).

(A2.4) Sea $p: (\tilde{X}^*, \tilde{x}_0) \rightarrow (X^*, x_0)$ el revestimiento universal de (X^*, x_0) , y pongamos:

$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(\{\mathbb{C}\text{-espacios vectoriales}\})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\{\mathbb{C}\text{-espacios vectoriales de dimensión finita}\})$ (cf. II.1.6)

$i: \{0\} \hookrightarrow X$, $j: X^* \hookrightarrow X$ las inclusiones

$= 1_E + V \cdot U$, y L el sistema local sobre X^* correspondiente a la representación $\rho : \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ tal que $\rho(\delta_0) = M$.

Consideremos el complejo de haces sobre X^* :

$$G^{\bullet} = \begin{array}{ccc} & \sigma_{\delta_0}(L) - 1 & \\ & \downarrow & \\ p_* p^{-1} L & \xrightarrow{\quad} & p_* p^{-1} L \\ (d^{\circ} 0) & & (d^{\circ} 1) \end{array}$$

Dado que:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow p_* p^{-1} L \xrightarrow{\sigma_{\delta_0}(L) - 1} p_* p^{-1} L \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, G es quasiisomorfo canónicamente a L .

Es fácil ver que $i^{-1} j_* G$ es canónicamente isomorfo a $E \xrightarrow{M-1} E$.

$$\text{Sea: } F^{\bullet} = \begin{array}{ccc} & U & \\ E & \xrightarrow{\quad} & E \\ (d^{\circ} 0) & & (d^{\circ} 1) \end{array} \in C^+(\mathbb{C}), \text{ y}$$

$$\alpha^{\bullet} = (1_E, V) : F^{\bullet} \longrightarrow i^{-1} j_* G$$

Interpretemos G^{\bullet}, F^{\bullet} y α^{\bullet} en la categoría de los haces de complejos, en lugar de complejos de haces. En ese caso, podemos "pegar" G^{\bullet} y F^{\bullet} con la ayuda de α^{\bullet} , y obtenemos una haz de complejos sobre X , F^{\bullet} ,

que podemos reinterpretar como un complejo de haces sobre X . Es fácil demostrar que F^\bullet verifica (A2.2) (i),(ii), y (iii), y (A2.3) (iv'), y que el funtor:

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \xrightarrow{z} \\ \xrightarrow{V} \end{array} F \in \mathcal{C} \longmapsto F^\bullet \in \text{Perv}(X;0)$$

es un quasiinverso de Ψ .

REFERENCIAS

- [Beil-Ber-Del] A.A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne:
Faisceaux Pervers. Analyse et topologie sur
les espaces singuliers. Astérisque n°100 S.M.F. 1982
- [Bj] J.E. Björk: Rings of differential operators.
North-Holland 1979.
- [Bry] J.L. Brylinski: Contributions a la théorie de
groupes. Thèse de Doctorat d'Etat. Orsay, Juin 1981
- [Bry-Kas] J.L. Brylinski et M. Kashiwara: Démonstration de
la conjecture de Kazhdan-Lusztig. C.R.A.S. Sér. A
(1980) 373-376.
- [Bry-Du-Kas] J.L. Brylinski, A. Dubson et M. Kashiwara: Formule
de l'indice pour les modules holonomes et obs-
truction d'Euler locale. C.R.A.S. t.293 (30-XI-81)
- [Del 1] P. Deligne: Equations différentielles à points
singuliers réguliers. Lect. Notes in Math. n°163
Springer Verlag 1970.
- [Del 2] _____: Faisceaux pervers sur un disque (1982).
Carta a R. MacPherson.
- [Dou] R. et A. Douady: Algèbre et théories galoisiennes.
2/ Théories galoisiennes. CEDIC/ Fernand Nathan,
Paris 1979.
- [Ga] O. Gabber: The integrability of the characteristic
variety. Am. J. of Math. 103 (81) 445-468.

- [Gab] P. Gabriel: Représentations indécomposables. Sémin. Bourbaki n°444. Lect. Notes in Math. n°431. Springer Verlag 1975.
- [Gal-Gra-Mais] A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe: \mathcal{D} -modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal. A paraître aux Annales de l'Institut Fourier (1985).
- [Gon-Ver] G. González-Sprinberg et J.L. Verdier: L'obstruction d'Euler locale et le théorème de MacPherson. Sémin. de l'E.N.S. 78-79. Astérisque n°82-83 (1981).
- [Gor-MacP 1] M. Goreski and R. MacPherson: Morse theory and intersection homology theory. Astérisque n°101-102 (1983) 135-192.
- [Gor-MacP 2] _____ and _____: Intersection homology II. Invent. Math. 71 (83) 77-129.
- [Gra-Mais] M. Granger et Ph. Maisonobe: Faisceaux pervers relativement à un cusp. Note aux C.R.A.S., a paraître.
- [Gro] A. Grothendieck: On the de Rham cohomology of algebraic varieties. IHES Publ. Math. 29 (66) 93-103.
- [Hart] R. Hartshorne: Residus and duality. Lect. Notes in Math. n°20. Springer Verlag.
- [Kas 1] M. Kashiwara: Algebraic study of systems of partial equations. Master's thesis. Univ. of Kyoto (1971).
- [Kas 2] _____: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. Publ. RIMS

- [Kas 3] M. Kashiwara: On the holonomic systems of linear differential equations II. Invent. Math. 49(78) 121-135.
- [Kas 4] _____: Systems of microdifferential equations. Progress in Math. Vol. 34. Birkhauser 1983.
- [Lê] Lê D.T.: Three lectures on local monodromy. Aarhus Universitet. Lect. Notes Series No. 43 (74).
- [Lê-Me] Lê D.T. et Z. Mebkhout: Variétés caractéristiques et variétés polaires. C.R.A.S. t. 296 (Janvier 83).
- [MacP] R. MacPherson: Carta a Deligne (1982), y "exposé" au Colloque Luminy 83.
- [Ma 1] B. Malgrange: Sur les points singuliers réguliers des équations différentielles. Enseign. Math. 20 (76) 147-176.
- [Ma 2] _____: L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels. Sém. Bourbaki n°522. Lect. Notes in Math.
- [Me 1] Z. Mebkhout: Théoremes de dualité globale pour les \mathcal{D} -modules cohérents. Math. Scand. 50 (82) 25-43.
- [Me 2] _____: Théoremes de bidualité locale pour les \mathcal{D} -modules holonômes. Ark. Mat. 20(82) 111-122.
- [Me 3] _____: Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. Thèse de Doctorat d'Etat. Univ. Paris VII 1979.

- [Me 4] Z. Mebkhout: Une équivalence de catégories.
Comp. Math. 51 (84) 51-62.
- [Me 5] _____: Une autre équivalence de catégories.
Comp. Math. 51 (84) 63-88.
- [Me 6] _____: Local cohomology of analytic spaces.
RIMS, Kyoto Univ. 12 (77) 247-256.
- [Mi] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies No. 61. Princeton 1968.
- [Pham] F. Pham: Singularités des systèmes de Gauss-Manin. Progress in Math. Birkhauser 1979.
- [SGA 7 II] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1967-1969, par P. Deligne et N. Katz. Lect. Notes in Math. n°340. Springer Verlag.
- [SG] Séminaire sur les opérateurs différentiels. Grenoble 1975.
- [SKK] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Microfunctions and pseudodifferential operators. Lect. Notes in Math. n°287. Springer Verlag (73) 265-529.
- [Ver 1] J.L. Verdier: Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Sémin. Bourbaki n°300.
- [Ver 2] _____: Extension of a perverse sheaf over a closed subspace. A paraître dans les actes du Colloque Luminy 83.
- [Ver 3] _____: Classe d'homologie associée à un cycle. Sémin. de l'ENS, Astérisque 36-37(76)101-151.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en la fecha, para juzgar la Tesis doctoral de
D. Luis Navarro Macarro

"Sistemas holonomos regulares y haces
perversos cuyo soporte singular es el generador de
una curva plana irreducible."

Concederle la calificación de Sobresaliente con Lode

Sevilla, 31 de octubre 1984

El Vocal,

José Vicente

El Presidente.

[Signature]

El Vocal,

[Signature]

El Secretario,

Juan Aza de Paz M.

El Vocal,

[Signature]

El Decano,

[Signature]