RAMIFICACION EN K-ALGEBRAS Y TEOREMAS DE ASCENSO Y DESCENSO

Memoria presentada en el

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, COMPUTACION, GEOMETRIA Y TOPOLOGIA
FACULTAD DE CC. MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

por

EUGENIO ROANES LOZANO

para optar al grado de
Doctor en CC. Matemáticas

Director: Dr. Eugenio Roanes Macías
Tutor: Prof. Dr. José Luís Vicente Córdoba

febrero 1991

INDICE

Capítulo IV. Criterios de no-ramificación de primos

Apéndice: Automatización de algunos cálculos

0. Introduccion.

0.1 Preámbulo.

El problema de la **Ramificación**, que por su enjundia ha interesado a numerosos matemáticos, entre los que caba destacar a *Krull, Zariski, Abhyankar, Samuel, Shafarevich, Fulton, Lazarsfeld,...*, puede ser abordado con diversas técnicas de estudio. Nosotros estudiamos este problema con técnicas propias de la Teoría de Ideales, considerando una k-álgebra, B , finitamente generada sobre un subanillo de polinomios, A.

Son varios los modos de medir el **nivel de ramificación**, según cúal sea el objetivo de estudio, siendo los más difundidos: el **grado de ramificación**, utilizado por *Gaffney* y *Lazarsfeld*, 1980 [G-L](*) y el **índice de ramificación**, usado por *Fulton*, 1984 [Ful-2]. En nuestro estudio, para medir el nivel de ramificación, se utiliza el concepto de **orden de ramificación**, introducido en [Roa 4] de modo algebraico (a partir del rango de cierta matriz jacobiana) y que en el presente trabajo se ha conseguido dotar de significado geométrico (cómo número de direcciones en común del subespacio tangente con el subespacio de las variables a las cuales se extiende, al pasar del subanillo A al anillo B).

En el capítulo primero se construye dicha interpretación geométrica del concepto de orden de ramificación, a partir del espacio tangente de Zariski, del que se toma la versión de *Bochnak-Coste-Roy*, 1987 [B-C-R]. Dicho concepto se llega a caracterizar de varios modos, relacionándolo con otros conceptos: número de coordenadas de uniformización elegibles en el subanillo A, dimensión del núcleo de la aplicación lineal asociada, etc (**).

Si el capítulo primero se dedica al estudio local de la ramificación, en el segundo se realiza su estudio global, determinando los ideales que

---

(*) Las referencias marcadas entre paréntesis rectangulares, se encuentran al final de la memoria, en la bibliografía.

(**) Aunque algunos de estos resultados fueron ya obtenidos en [Roa 4], aquí se considera otra situación y otros métodos de demostración.

definen las subvariedades de ramificación de los diversos órdenes, llegando a obtener una estratificación (o filtración) de dichas subvariedades, por lo que podría afirmarse que esta parte de nuestro trabajo está en la línea de los trabajos de Teissier, 1987 [Tei 2] y Lê Dung Tráng, 1988 [Lê].

Uno de los problemas más interesantes de la teoría de anillos conmutativos es el de la determinación de propiedades de las cadenas de ideales primos, que son transferibles por contracción-extensión, y a los resultados obtenidos en esta línea se les denomina, de modo genérico, **teoremas de ascenso y descenso**. Los teoremas clásicos de ascenso y descenso, para caso de dependencia entera, se deben a *Krull*, 1937 [Kru 1], siendo posteriormente refinados por *Cohen* y *Seidemberg*, 1946 [C-S], pero nunca se ha dejado de trabajar en este problema, habiendo aportado posteriormente resultados importantes numerosos matemáticos, entre los que cabe citar a *Cohen*, 1954 [Coh], *Nagata*, 1962 [Nag-1], *Kaplanski*, 1972 [Kap-1] y *Ratliff*, 1978 [Rat].

Nuestra contribución al estudio de este problema, desarrollada en el capítulo tercero, se ciñe al caso que venimos considerando a lo largo de la memoria, es decir, para el caso en que $A \subseteq B$, siendo A un anillo de polinomios y B una k-álgebra finitamente generada, extensión algebraica de A, habiendo conseguido sustituir la condición de dependencia entera, por ciertas condiciones de no-ramificación (en la extensión $A \hookrightarrow B$) de los ideales primos considerados.

Algunos de estos teoremas de ascenso y descenso, con condiciones de ramificación, son utilizados más adelante, en el capítulo cuarto, para obtener varios criterios de no-ramificación de ideales primos del subanillo A, en la extensión $A \hookrightarrow B$, lo cual proporciona criterios para detectar ideales radicales del anillo B . De este modo, se obtiene una interesante aplicación a una de las cuestiones hoy en estudio en el campo del Algebra Computacional, cual es la detección de ideales radicales.

Finalmente, hemos conseguido automatizar el cálculo del rango de matrices jacobianas y del orden de ramificación, así como un criterio de no-ramificación de primos de A en extensiones simples, llegando a su programación en lenguaje Reduce, todo lo cual se incluye en un apéndice, al final.

Una extensa colección de ejemplos ilustra los resultados obtenidos.

0.2 Objetivos

En la presente memoria se estudia la ramificación de ideales primos de un subanillo de polinomios, A, sobre un cuerpo, k, de característica cero, al extender a una k-álgebra afín, B, finitamente generada sobre A. Los objetivos que nos proponemos sucesivamente en este trabajo son cuatro:

a) profundizar en el estudio del **orden de ramificación** de un ideal primo, introducido en [Roa 4], definiendolo "vía geométrica" y caracterizándolo de varios modos

b) estudiar condiciones de **no-ramificación local**, que después se aplicarán a determinar condiciones de **no-ramificación global** para "ideales de punto" (esto es, para ideales maximales que sean ideales de puntos de la variedad, cuyo anillo de coordenadas es A)

c) adaptar los **teoremas de Cohen-Seidemberg** (de ascenso y descenso) al caso de extensiones algebraicas, sustituyendo la condición de ser B entero sobre A, por una condición de no-ramificación, para algún ideal de punto que contenga a los ideales de A considerados

d) determinar **criterios de no-ramificación** de primos del subanillo de polinomios A, al extender a la k-álgebra B, aprovechando aquellos teoremas de ascenso adaptados (lo cual proporciona criterios para detectar ideales radicales de B)

e) **automatizar el cálculo del rango de matrices jacobianas**, cuyos elementos pertenezcan a una k-álgebra finitamente generada (no necesariamente anillo de polinomios), que permita realizar con comodidad el cálculo efectivo del orden de ramificación, a partir de su implementación en lenguaje Reduce

f) **automatizar un criterio de no-ramificación** de ideales primos de un anillo de polinomios en una extension simple y entera, llegando también a su implementación en Reduce

0.3 Resumen

Dado un homomorfismo de anillos $f:A \longrightarrow B$, se dice que un ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se **ramifica** en f, si su extendido $\mathfrak{p}^e = f(\mathfrak{p})B$ no es radical, es decir, si

$$\mathfrak{p}^e \neq \sqrt{\mathfrak{p}^e}$$

Ahora bien, supuesto que $\mathfrak{p}^e$ admite una descomposición primaria irredundante, $\mathfrak{p}^e$ no será radical syss uno, al menos, de sus componentes primarios no coincide con su primo asociado. Sin embargo, si $\mathfrak{q}^*$ es un componente primario aislado coincidente con su primo asociado $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*} = \mathfrak{q}^*$, entonces al extender $\mathfrak{p}^e$ al localizado $B_{\mathfrak{p}^*}$, se obtiene el ideal maximal $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$, sucediendo así aunque $\mathfrak{p}^e$ no sea radical. En consecuencia, al extender a B y después localizar, puede precisarse más en el análisis de los componentes directamente responsables de la ramificación.

Estas consideraciones nos inducen a comenzar estudiando la ramificación localmente, es decir, la ramificación respecto de $A \longrightarrow B_{\mathfrak{p}^*}$ (donde $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$) del ideal $\mathfrak{p}$, contraído de p^* en A.

Con un planteamiento aún tan general, pueden obtenerse pocos resultados, por lo que restringiremos nuestro estudio al caso en que B sea una k-álgebra finitamente generada y A un anillo de polinomios. Y puesto que el estudio va a ser básicamente local, bastará considerar el caso afín, por no suponer mayor generalidad el caso proyectivo. En resumen, supondremos que:

i) A es el anillo de polinomios $k[x] = k[x_1,\ldots,x_r]$

ii) B es la k-álgebra afín $k[x,y] = k[x_1,..,x_r,y_1,..,y_n] = A[y_1,..,y_n]$, extensión algebraica de A y dominio de integridad, definida por las condiciones:

$$f_s(x_1,..,x_r,y_1,..,y_n) = 0 \; ; \; {\scriptstyle s=1,\ldots,m} \qquad (1)$$

iii) f es el monomorfismo de inclusión $A \to B$

También supondremos que el cuerpo base, k, es de característica cero (lo que será esencial en la obtención de algunos resultados), pero no se exigirá que sea algebraicamente cerrado, a menos que ello se explicite (notemos que las indeterminadas x_i pueden no pertenecer a $k[y_1,..,y_n]$, lo que, en principio, no supone mayor complicación y aumenta la generalidad).

En nuestro estudio utilizaremos con frecuencia el concepto de **ideal de punto**, esto es, de ideal de algún punto de la variedad algebraica de k^{r+n}, cuyo anillo de coordenadas es B.

El concepto de **orden de ramificación** fue introducido en [Roa 4] a partir del rango de cierta matriz jacobiana. Hemos conseguido aquí construir una definición "vía geométrica" de este concepto, equivalente a la dada allí.

Comencemos observando que si A es el anillo de polinomios $k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ es el anillo de coordenadas de una superficie algebraica lisa, V^*, de ecuación $f(x_1,x_2,y) = 0$, del espacio afín k^3, entonces los puntos de ramificación de V^* son aquellos cuyos plano tangente es paralelo al eje "y".

Al tratar de generalizar este resultado al caso en que A sea el anillo de polinomios $k[x_1,..,x_r]$ y B la k-álgebra definida por las condiciones (1), sustituiremos el plano tangente en un punto de la superficie por el espacio tangente de Zariski en $\mathfrak{p}^*$ (siendo $\mathfrak{p}^*$ el ideal del punto considerado), que notaremos $T_{Zar}(\mathfrak{p}^*)$, definido como el subespacio vectorial de k^{r+n} (definición 1.1.1):

$$\boxed{T_{Zar}(\mathfrak{p}^*) = \bigcap_{s=1}^{m} \left\{(x,y) \in k^{r+n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}^*} x_i + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}^*} y_j = 0\right\}}$$

Entonces el punto es de ramificación si este subespacio vectorial no corta trasversalmente al subespacio

$$0^r \times k^n = \left\{ (x_1,..,x_r,y_1,..,y_n) \in k^{r+n} \mid x_1 = ... = x_r = 0 \right\}$$

es decir, si es no nulo el subespacio

$$T_{Zar}(\mathfrak{p}^*) \cap (0^r \times k^n)$$

siendo dicha ramificación tanto más "fuerte", cuanto mayor sea la dimensión de este subespacio intersección. Denominamos a tal dimensión el **orden de ramificación** de $\mathfrak{p}^*$, que notaremos ord.ram $\mathfrak{p}^*$, es decir (definición 1.1.2):

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \dim_k \left[T_{Zar}(\mathfrak{p}^*) \cap (0^r \times k^n)\right]}$$

También puede llegarse a este concepto a partir de la versión afín (en vez de la vectorial) del espacio tangente de Zariski (según se indica en la nota 1.1.7).

El orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$ resulta, estar relacionado con el rango de la matriz jacobiana

$$J_y = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \qquad (2)$$

de las condiciones (1), respecto de las variables "y", especializando en $\mathfrak{p}^*$, mediante la igualdad (teorema 1.1.3):

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}} \qquad (3)$$

En consecuencia, si $\mathfrak{p}^*$ es ideal de un punto singular, entonces ord.ram $\mathfrak{p}^* > 0$ (1.1.4) y si es ideal de un punto simple (es decir, si el anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular), entonces resulta (1.1.6):

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \leq \text{mín}\{r,n\}$$

El resultado (3) se adopta como definición (1.2.8) de orden de ramificación para cualquier $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec } B$, no necesariamente ideal de punto.

Para nuestro estudio es importante caracterizar del orden de ramificación de otros modos equivalentes. En el apartado 1.2 se caracteriza a partir de las coordenadas de uniformización, que determinamos mediante la definición de Zariski (1.2.1), o el criterio de André Weil (1.2.3). En caso de ser ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$, se verifican (proposición 1.2.9):

1) el anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular

2) $x_1,\ldots,x_r$ son coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$

y en el caso general (orden de ramificación arbitrario), si nos limitamos a considerar coordenadas de uniformización pertenecientes al conjunto $\{x_1,..,x_r,y_1,..,y_n\}$, que denominamos **coordenadas de uniformización canónicas** (definición 1.2.10), se llega al siguiente resultado (1.2.11):

Si $B_{\mathfrak{p}^*}$ *es regular y* ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$, *entonces se verifican:*

i) existe un conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$ *que consta de* r-u *variables* "x" *y de* u *variables* "y" , *es decir* , *salvo permutación de subíndices, de la forma* $\{y_1,..,y_u,x_{u+1},..,x_r\}$

ii) para cualquier conjunto de coordenadas de uniformización canónicas, C, *de* $\mathfrak{p}^*$, *el número de variables* "x" *pertenecientes a* C *es, a lo mas,* r-u, *es decir:*

$$\#\left[C\cap\{x_1,..,x_r\}\right] \leq \text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \qquad (4)$$

En el apartado 1.3 se dan otras tres caracterizaciones del orden de ramificación. En primer lugar, siendo $\mathfrak{p}^*$ ideal de un punto simple y notando $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$, $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\vartheta$, se tienen:

a) $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ y $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\vartheta/\mathfrak{m} \simeq k \simeq \vartheta^*/\mathfrak{m}^*$

b) $\tau : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$, tal que, para todo $G \in \mathfrak{m}$, $\tau(G+\mathfrak{m}^2) = G+\mathfrak{m}^{*2}$, es un k-homomorfismo de espacios vectoriales

y esta aplicación, τ , que denominamos **aplicación lineal asociada** a $\mathfrak{p}^*$, permite dar otra caracterización del orden de ramificación (teorema 1.3.3), como dimensión del núcleo de dicha aplicación lineal:

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \dim_k \ker \tau} \qquad (5)$$

En segundo lugar, siendo $(a_1,..,a_r,b_1,..,b_n) \in k^{r+n}$ el punto simple del que $\mathfrak{p}^*$ es ideal, las bases del ideal de no unidades, $\mathfrak{m}^*$, contenidas en $\{x_1-a_1,..,x_r-a_r,y_1-b_1,..,y_n-b_n\}$, que denominamos **bases canónicas** de $\mathfrak{m}^*$ (definición 1.3.4), permiten dar otra caracterización del orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$ (teorema 1.3.5 y su corolario), como diferencia entre r y el máximo número de elementos de una base canónica minimal de $\mathfrak{m}^*$ que pueden pertenecer al subanillo A, es decir:

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \text{máx}\left\{(\beta\cap A) \,:\, \beta \in \text{BCM}(\mathfrak{m}^*)\right\}$$

donde $\text{BCM}(\mathfrak{m}^*)$ es el conjunto de las bases canónicas minimales de $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$.

Y en tercer lugar, si se admiten coordenadas de uniformización cualesquiera (no necesariamente canónicas), el máximo número de ellas elegibles en el subanillo A , o incluso en el subanillo $A_{\mathfrak{p}}$, vuelve a ser (4), es decir, para cualquier conjunto, C , de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, se verifica (teorema 1.3.8):

$$\#(C \cap A_{\mathfrak{p}}) \leq \text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord ram } \mathfrak{p}^*$$

luego el número de coordenadas de uniformización pertenecientes al subanillo A , o incluso al $A_{\mathfrak{p}}$, no decrece por limitarnos a considerar coordenadas canónicas.

Finaliza el apartado 1.3 considerando el problema de la determinación de coordenadas de uniformización de cualquier $\mathfrak{p}'' \in \text{Spec } B$, reduciéndolo a determinarlas para un ideal de punto $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}''$ (proposición 1.3.11), en el caso usual de que exista tal punto (de lo que, obviamente, hay seguridad si k es algebraicamente cerrado).

En el apartado 1.4 se determinan condiciones de ramificación local. Precisando el concepto esbozado al comienzo del resumen, decimos que $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$ es de **ramificación local** (1.4.1), si el extendido del ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$ en el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ no es su ideal maximal, es decir, si $\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{p}^*\vartheta^*$. De acuerdo con esta definición, se tiene (1.4.2 y 1.4.4):

i) si $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0$, *entonces* $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$ *(y en consecuencia* $\mathfrak{p}^*$ *no es de ramificación local)*

ii) si $\mathfrak{p}^*$ *es ideal de punto y primo minimal de* $\mathfrak{p}B$, *y* $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* > 0$, *entonces* $\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{m}^*$ *y* $\sqrt{\mathfrak{p}\vartheta^*} = \mathfrak{m}^*$ *(y en consecuencia* $\mathfrak{p}^*$ *es de ramificación local)*

Por otra parte, para cualquier $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec} B$, su no-ramificación local puede asegurarse, si existe algún ideal de punto $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}''$, tal que $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0$.

En el capitulo II se estudia la ramificación global, esto es, la ramificación respecto de la extensión $A \longrightarrow B$ (sin localizar en un primo de B).

Para ello, se comienza considerando el ideal de B generado por los menores de orden n-u+1 de la matriz (2), que denominamos **ideal de ramificación de orden** u y notamos $\operatorname{ram}_u B$; $u=1,..,n$ (definición 2.1.2). Tal ideal no depende de las condiciones de definición (1) elegidas para definir B sobre A (proposición 2.1.1). Completamos la definición 2.1.2 admitiendo que $\operatorname{ram}_0 B = (0)$ y $\operatorname{ram}_{n+1} B = B$.

Geométricamente, si V^* es la variedad de k^{r+n} , cuyo anillo de coordenadas es B , a la subvariedad de V^* determinada por el ideal $\operatorname{ram}_u B$ la llamamos **subvariedad de ramificación de orden** u y la notamos R^*_u .

Los ideales de ramificación forman una cadena ascendente, siendo $\operatorname{ram}_1 B \neq 0$, es decir (proposiciones. 2.1.3 y 2.1.4):

$$0 = \operatorname{ram}_0 B \subsetneq \operatorname{ram}_1 B \subseteq \dots \subseteq \operatorname{ram}_u B \subseteq \operatorname{ram}_{u+1} B \subseteq \dots \subseteq \operatorname{ram}_n B \subseteq \operatorname{ram}_{n+1} B = B$$

lo que admite una versión dual, para las correspondientes subvariedades de ramificación:

$$V^* = R^*_0 \supsetneq R^*_1 \supseteq \dots \supseteq R^*_u \supseteq R^*_{u+1} \supseteq \dots \supseteq R^*_n \supseteq R^*_{n+1} = \emptyset$$

El concepto de orden de ramificación, estudiado en el capitulo I, se conecta con los ideales de ramificación mediante la equivalencia (prop.2.1.5):

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = u \iff \text{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^* \ \wedge \ \text{ram}_{u+1} B \not\subseteq \mathfrak{p}^*}$$

de donde se deduce (2.1.6) que si R^*_u contiene algún punto simple, entonces $u \leq r$. Además, si el cuerpo base, k, es algebraicamente cerrado y V^* es una variedad lisa, entonces $R^*_u = \emptyset$, para todo $u > r$ (corolario 2.1.7).

Por otra parte, al ideal que define la subvariedad S^* , de los puntos singulares de V^*, generada por los menores de orden n de la matriz

$$J_{xy} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_n)}$$

lo llamamos **ideal de singularidad** y lo notamos sing B , verificándose (2.1.8): $\text{ram}_1 B \subseteq \text{sing } B$ (geométricamente: $R^*_1 \supseteq S^*$, pudiendo darse la igualdad).

En el apartado 2.2 se estudian criterios de no-ramificación global de ideales de punto, para lo que comenzamos considerando los ideales contraídos del subanillo A:

$$\text{ram}_u A = (\text{ram}_u B) \cap A \ ; \quad u=0,1,\ldots,n,n+1$$

$$\text{sing } A = (\text{sing } B) \cap A$$

que denominamos, respectivamente, **ideal de ramificación contraído de orden** u e **ideal de singularidad contraído** (definición 2.2.1) y para los cuales se verifican (proposición.2.2.2):

$$\text{ram}_u A \subseteq \text{ram}_{u+1} A \ ; \ u=0,1,\ldots,n \quad , \quad \text{ram}_1 A \subseteq \text{sing } A \quad , \quad \text{ram}_1 A \neq (0)$$

El resultado fundamental de este apartado es el siguiente (teorema 2.2.4): siendo k algebraicamente cerrado y $\mathfrak{p}$ un ideal de punto del subanillo A, si $\mathfrak{p} \not\supseteq \text{ram}_1 A$, entonces $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \longrightarrow B$ (es decir, el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ es radical). Además, si la extensión es simple, es decir , si $n = 1$, entonces puede prescindirse de la condición de ser algebraicamente cerrado el cuerpo base k (2.2.5).

El apartado 2.3 se dedica a caracterizar la ramificación de ideales maximales, en caso de ser B entero sobre A . En primer lugar se obtiene una caracterización local (2.3.2): siendo B entero sobre A y $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec } B$, se tiene la equivalencia:

$$\boxed{\mathfrak{p}^* \text{ es de ramificación local} \iff \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = 0}$$

y finalmente se llega a una caracterización global (teorema 2.3.7): siendo B entero sobre A y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec\,Max} A$, se tiene la equivalencia:

$$\boxed{\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{ram} A \iff \mathfrak{p} \text{ no se ramifica en } A \to B}$$

En el apartado 2.4 se comienza comparando dos definiciones. Decimos que la extensión $A \hookrightarrow B$ es **inramificada** , si $\operatorname{ram}_1 B = B$ (y por tanto $R_1^* = \emptyset$) y decimos que tal extensión es **trivial** si $B = A$. Es inmediato verificar la implicación siguiente (2.4.3):

trivial $\Rightarrow$ *inramificada*

habiendo conseguido (2.4.4) probar la implicación recíproca, en caso de ser k algebraicamente cerrado, ser B entero sobre A y ser las condiciones (1) de la forma:

$$f_s(x_1,..,x_r,y_s) = 0 \ ; \ {\scriptstyle s=1,...,n}$$

Por otra parte, suponiendo $m = n$ y considerando el epimorfismo natural:

$$\varphi : B \longrightarrow B' = B/(\operatorname{ram}_1 B) = k[x'_1,..,x'_r,y'_1,..,y'_n]$$

donde $x'_i = \varphi(x_i)$ e $y'_j=\varphi(y_j)$, el anillo B', definido por las n+1 condiciones:

$$f_s(x'_1,..,x'_r,y'_1,..,y'_n) = 0 \ ; \ {\scriptstyle s=1,..,n} \quad , \quad \det J_{y'} = 0$$

resulta ser extensión algebraica del anillo de polinomios $A' = k[x'_1,..,x'_{r-1}]$, lo que permite considerar la ramificación respecto de $A' \longrightarrow B'$, y por tanto el ideal $\operatorname{ram}_1 B'$, respecto de ella. Al contraído en φ de este ideal, es decir, a $\varphi^{-1}(\operatorname{ram}_1 B')$ lo denominamos **ideal de ramificación reiterada,** notando R'_1 a su correspondiente subvariedad de ramificación reiterada (definición 2.4.5), habiendo llegado a probar la siguiente inclusión (prop. 2.4.6):

$$\varphi^{-1}(\operatorname{ram}_1 B') \subseteq \operatorname{ram}_2 B \qquad (\text{geométricamente: } R'_1 \supseteq R_2^*)$$

El capitulo III se dedica a adaptar los teoremas de Krull-Cohen-Seidemberg (de ascenso y descenso) a extensiones algebraicas, sustituyendo la condición de ser B entero sobre A , por la condición de ser nulo el orden de ramificación, para algún ideal de punto, que contenga a los ideales considerados, según se precisa a continuación.

En el apartado 3.1 se generalizan los teoremas previos de ascenso, es decir, aquellos, que para el caso de ser B entero sobre A , aseguran:

a) la contracción de primos: $\operatorname{Spec} B \xrightarrow{c} \operatorname{Spec} A$ *es sobre, es decir: para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, *existe* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$

b) la contracción de primos Spec B $\xrightarrow{c}$ Spec A *conserva la dimensión , y por tanto la altura (en nuestro caso de* k-*álgebras afines), es decir: para todo* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , alt$(\mathfrak{p}^* \cap A)$ = alt $\mathfrak{p}^*$

c) la contracción de primos Spec B $\xrightarrow{c}$ Spec A *restringida a cadenas, es inyectiva, esto es: para cualesquiera* $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *si* $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A$, *entonces* $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$

habiendo conseguido adaptarlos para el caso de ser B extensión algebraica de A (no necesariamente entera), respectivamente, del siguiente modo:

a') siendo $\mathfrak{p} \in$ Spec A , *si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^*$ *tal que* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ *(teorema 3.1.1)*

b') siendo $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , *si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces* alt$(\mathfrak{p}^* \cap A)$ = alt $\mathfrak{p}^*$ *(lema 3.1.3)*

c') siendo $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tales que* $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A$, *si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces* $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$ *(teorema 3.1.5)*

La línea de demostración seguida para probar el resultado a'), consiste en utilizar la igualdad (5) y tener en cuenta que $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ es un anillo de Zariski, por lo que su completado, $\hat{\vartheta}_0^*$, resulta ser un anillo local regular completo equicaracterístico, lo que permite aprovechar propiedades conocidas de la extensión y contracción en $\vartheta_0^* \longrightarrow \hat{\vartheta}_0^*$.

Los resultados anteriores sugieren preguntarnos si no son consecuencia de cierta dependencia entera, pues aunque B no es entero sobre A , puede pensarse en la posibilidad de que fueran consecuencia de ser $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ entero sobre $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$. Para responder a esta cuestión se ha construido un contraejemplo (en 3.1.3), que asegura la no existencia de tal dependencia entera.

En el apartado 3.2 se generaliza el "teorema del ascenso" , que, para caso de ser B entero sobre A, afirma:

<< *siendo* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B *y* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$, *para todo* $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , *tal que* $\mathfrak{p}_2 \supsetneq \mathfrak{p}_1$, *existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \supsetneq \mathfrak{p}_1^*$ >>

habiendo conseguido adaptarlo para el caso de ser B extensión algebraica de A, definida por condiciones de la forma:

$$f_s(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s) = 0 \quad ; \quad s=1,\dots,n$$

es decir, para extensiones que resulten de reiterar extensiones simples de la forma

$$A[y_1,\dots,y_{s-1}] \longrightarrow A[y_1,\dots,y_{s-1},y_s] \quad ; \quad s=1,\dots,n$$

por lo que las denominamos **extensiones multisimples**. Para tales extensiones, hemos llegado al siguiente resultado (teorema 3.2.4):

<< *siendo* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$ *un primo intersección completa y* $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , *tal que* $\mathfrak{p}_2 \supsetneq \mathfrak{p}_1$, *si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \supsetneq \mathfrak{p}_1^*$ >>

En la demostración de este teorema es fundamental la consideración de un resultado previo (3.2.3), que asegura, que en las condiciones antes citadas, el extendido de $\mathfrak{p}_1$ al localizado $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ ha de ser primo. A su vez, para demostrar este resultado se hace uso de un lema (3.2.1) que asegura, que (aún prescindiendo de la condición de extensión multisimple) el ideal extendido $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$ es no mezclado (puro o equidimensional) y sus primos aislados yacen sobre $\mathfrak{p}_1$, siendo de su misma altura (y en cuya demostración es esencial observar que ϑ_0^* es un anillo local de Cohen-Macaulay).

En el apartado 3.3 se generaliza el "teorema del descenso", que, para caso de ser B un D.I. entero sobre el subanillo íntegrante cerrado A , afirma:

<< *siendo* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B *y* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$, *para todo* $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , *tal que* $\mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1$, *existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$ >>

habiendo conseguido adaptarlo para el caso de ser B extensión algebraica de A , con el siguiente enunciado (teorema 3.3.4):

<< *siendo* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$ *y* $\mathfrak{p}_2$ *un primo intersección completa del subanillo* A, *tal que* $\mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1$, *si existe en* B *un ideal de punto,* $\mathfrak{p}_0^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B, *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$ >>

en cuya demostración es esencial considerar la siguiente equivalencia:

$$\boxed{\mathfrak{p}_2^* \ \textit{es primo aislado de}\ \mathfrak{p}_2 B \iff \mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2}$$

que sigue de los lemas 3.3.1 y 3.3.2.

Y en el apartado 3.4 se consigue obtener otra adaptación del teorema del ascenso, prescindiendo de la condición de extensión multisimple, que se sustituye por una condición jacobiana, muy cómoda de verificar, y cuyo enunciado es el siguiente (teorema 3.4.4):

<< *siendo* $\mathfrak{p}_1^* \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$ *un primo de altura* a *y* $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$, *tal que* $\mathfrak{p}_2 \supsetneq \mathfrak{p}_1$ *, si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^*$ *, tal que se verifiquen:*

i) $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2$ *y* $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}_0^* = 0$

ii) $\mathfrak{p}_1$ *admite una base* $\{z_1,..,z_a\}$, *de* a *elementos, tal que*

$$\operatorname{rango} \left[\frac{\partial(z_1,\dots,z_a)}{\partial(x_1,\dots,x_a)}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = a$$

entonces existe $\mathfrak{p}_2^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \supsetneq \mathfrak{p}_1^*$ >>

En su demostración se tiene en cuenta que (siendo $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$ y $\vartheta_0 = A_{\mathfrak{p}_0}$, la condición ii) implica (según 3.4.2) que el anillo cociente $\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ sea local regular (lo que geométricamente significa que $\mathfrak{p}_0$ sea ideal de un punto simple de la subvariedad de $\mathfrak{p}_1$). Ello, a su vez, implica (según el lema 3.4.1), que sea $\mathfrak{p}_1^*$ el único primo de B contenido en $\mathfrak{p}_0^*$ y que yace sobre $\mathfrak{p}_1$.

Finalmente, en el capítulo IV se determinan criterios de no-ramificación de primos del subanillo de polinomios A, aprovechando, tanto los teoremas de ascenso clásicos, como los obtenidos en el capítulo anterior (en el apartado 2.3 ya se obtuvieron para maximales de A).

En el apartado 4.1, se considera el caso de dependencia entera, en el cual se llegan a establecer caracterizaciones de la ramificación para primos de A , que sean intersección completa. La primera de estas caracterizaciones se refiere a un primo, $\mathfrak{p}$, que verifique $\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A = A$ (lo que geométricamente significa que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no pase por la proyección de puntos singulares), siendo su enunciado como sigue (teorema 4.1.2):

<< *siendo* B *entero sobre* A *y* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A *, tal que* $\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A = A$ *, se tiene la equivalencia:*

$$\boxed{\mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{ram}_1 A \iff \textit{no se ramifica en } A \hookrightarrow B}$$ >>

Otra caracterización conseguida, permite prescindir de la condición $\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A = A$, pero requiere que el cuerpo base sea algebraicamente cerrado (teorema 4.1.6):

<< *siendo* B *entero sobre* A *y* k *algebraicamente cerrado, para todo primo,* $\mathfrak{p}$, *intersección completa del subanillo* A, *se tiene la equivalencia:*

$$\boxed{\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A \iff \textit{no se ramifica en } A \hookrightarrow B} \quad >>$$

Más útil que las dos caracterizaciones precedentes es el siguiente criterio (teorema 4.1.5), que no exige la condición $\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\, A = A$, ni que k haya de ser algebraicamente cerrado:

<< *siendo* B *entero sobre* A *y* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A , *si existe* $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec\,Max}\, A$, *tal que* $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$ *y* $\mathfrak{p}_0 \not\supset \mathrm{ram}_1 A$, *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical* >>

En el apartado 4.2, se considera el caso de extensiones simples y multisimples, para los cuales las condiciones $\mathfrak{p}_0 \not\supset \mathrm{ram}_1 A$ ó $\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A$, anteriormente indicadas, van a ser sustituidas por la de factorización completa (con todas sus raíces simples) de cierto polinomio en una indeterminada, lo cual suele ser más cómodo de verificar. Para caso de extensión simple, se ha obtenido el siguiente criterio (teorema 4.2.1.):

<< *Sea* $A \hookrightarrow B$ *una extensión simple, definida por el polinomio* $f(x_1,..,x_r,Y)$, *mónico en la variable* Y, *y sea* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A . *Si existe un punto* $(a_1,..,a_r) \in k^r$ *en la subvariedad de* $\mathfrak{p}$, *tal que el polinomio* $f(a_1,..,a_r,Y) \in k[Y]$ *sea factorizable linealmente en* k, *con todas sus raíces simples, entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$ >>

Este criterio es muy cómodo de aplicar, por cuanto no requiere calcular las raíces del polinomio $f(a_1,..,a_r,Y)$, bastando comprobar que el número de tales raíces sea igual a su grado, lo que, en caso de que el cuerpo base sea $\mathbb{R}$, puede hacerse con el clásico método de Sturm, o con otros métodos más sofisticados ([L-S] ó [C-R-V-R], por ejemplo), si el grado del polinomio es muy elevado. Para el caso de extensiones multisimples, el criterio anterior admite cierta generalización (teorema 4.2.4) de aplicación ménos cómoda.

En el apartado 4.3 se omite la condición de dependencia entera de B sobre A , con lo cual pierden su validez los criterios de los dos apartados precedentes, que han de ser sustituidos por el siguiente (teorema 4.3.1):

<< *Supongamos el cuerpo base* k *algebraicamente cerrado y sea* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y* $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1 A = A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *no se*

ramifica en $A \hookrightarrow B$ >>

En este criterio se dan condiciones suficientes para la no-ramificación de $\mathfrak{p}$, pero el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ puede ser radical, sin que k sea algebraicamente cerrado y sin que se verifique la condición $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1 A = A$ (que asegura que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no pase por la proyección de puntos de ramificación), según muestran contraejemplos apropiados.

Por último, en el apartado 4.4 se considera la ramificación en extensiones trascendentes finitamente generadas. El camino seguido es el usual, factorizando la extensión, en una extensión trascendente pura seguida de una extensión algebraica. Pero la extensiones trascendentes puras conservan el carácter de primo, por lo que es sólo la extensión algebraica la responsable de la ramificación.

La conservación del carácter de primo en extensiones trascendentes puras es un resultado conocido, del que ofrecemos una demostración, que creemos original (lemas 4.4.1 y 4.4.2 y teorema 4.4.4). También probamos la conservación del carácter de primario en tales extensiones (lema 4.4.3 y teorema 4.4.4).

Termina la memoria con un apéndice, en que se automatiza el cálculo de algunos de los procesos anteriormente descritos, para lo que se han elaborado algoritmos apropiados, que se han llegado a implementar en lenguaje Reduce, describiendo su ejecución y mostrando ejemplos de su uso.

En el apartado A.1, de dicho apéndice, se automatiza el cálculo del rango de matrices, cuyos elementos pertenezcan a una k-álgebra finitamente generada, introduciendo una base del ideal de definición de la k-álgebra. El algoritmo de cálculo del rango se basa en reducción a una matriz "escalonada" (que se define al comienzo de dicho apartado).

En el apartado A.2 se abrevia el cálculo del rango en aquellas matrices cuyas columnas tienen muchos ceros terminales, reordenando convenientemente dichas columnas (este es el caso de las matrices jacobianas que suelen aparecer en la mayoría de los ejemplos presentados en esta memoria).

En el apartado A.3 se automatiza el cálculo del rango de matrices jacobianas (aprovechando los algoritmos utilizados en los dos apartados anteriores), así como el cálculo del orden de ramificación.

En el apartado A.4 se automatiza el cálculo del número de raíces reales de una ecuación algebraica con coeficientes enteros, mediante una adaptación del método de Sturm, que trata de moderar el crecimiento de los coeficientes de los polinomios de la sucesión de Sturm.

Y en el apéndice A.5 se aprovecha el cálculo efectuado en el apartado anterior, para automatizar la aplicación del criterio 4.2.1, anteriormente indicado, de no-ramificación de primos en extensiones simples y enteras. Dicho criterio puede ser útil para detectar, en ciertos casos, ideales radicales de una k-álgebra, según se explicita en la nota de dicho apartado A5.

En el análisis de la literatura relacionada con la presente memoria, hemos encontrado diversos artículos, que han sido citados en la bibliografía, pero únicamente [Bre], [Gre], [G-T-Z] , [Rat], [Tei 2] , [Lê] y , por supuesto, [Roa 4] , tienen relación con nuestro trabajo.

En el primero de ellos, [Bre], se demuestra, para anillos de la forma $R[x_1,..,x_r]$, donde R es un anillo noetheriano (anillos algo más generales que las k-álgebras aquí tratadas), una proposición muy débil, frente a las obtenidas en nuestra memoria (ya que exige la no-ramificación de todos los primos de altura uno).

El segundo de ellos, [Gre], se ocupa de problemas relativos a la no-ramificación en extensiones de anillos de tipo muy particular (problema esencialmente distinto de los tratados aquí).

En el tercero, [G-T-Z], se describe el cálculo de radicales en un anillo de polinomios sobre un D.I.P. , por reducción del problema al caso 0-dimensional, haciendo uso de bases de Groebner.

En el cuarto, [Rat], se analizan propiedades de las cadenas de primos, así como propiedades de dichas cadenas, que se conservan por contracción o extensión, pero no se trata, en particular, el caso de extensiones desde un anillo de polinomios a una k-álgebra, que es el considerado a lo largo de esta memoria.

En el quinto y sexto, [Tei 2] y [Lê], se obtienen resultados similares a los nuestros, en cuanto a estratificación del contorno aparente (esto es a la filtración $\mathrm{ram}_u B \subseteq \mathrm{ram}_{u+1} B$), pero en ellos se trabaja con otras técnicas, por tratarse de espacios analíticos complejos.

Y en el último, [Roa 4], que puede considerarse como punto de partida de la primiera parte de la presente memoria, el subanillo no era un anillo de polinomios, sino una k-álgebra, de modo que la situación era algo más general que la nuestra, aunque consecuentemente los resultados eran mas pobres. Notemos que, si bien alguna de las proposiciones contenidas al comienzo de la presente memoria (como la 1.3 3) fueron ya obtenidas allí, la demostración dada aquí difiere esencialmente de aquella. En todo caso, la parte central de esta memoria, consistente en la adaptación de los teoremas de ascenso y descenso al caso de extensiones algebraicas (no necesariamente enteras), así como los criterios de no-ramificación obtenidos, entendemos que son originales.

Capítulo I.

Ramificación Local

1.0 Notación y consideraciones previas

Sea $A = k[x_1,...,x_r]$ un anillo de polinomios sobre el cuerpo k, que supondremos de característica cero, y sea

$$B = A[y_1,...,y_n] = k[x_1,...,x_r,y_1,...,y_n]$$

un dominio, extensión algebraica de A , definido por las condiciones

$$f_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_s(x_1,...,x_r,y_1,...,y_n) = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,...,m \ (m\geq n)} \qquad (1)$$

(donde $y_j \notin A$; $_{j=1,...,n}$, mientras no se explicite lo contrario). En consecuencia, en el anillo de polinomios

$$k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = k[X_1,...,X_r,Y_1,...,Y_n]$$

pueden considerarse los elementos

$$f_s = f_s(X_1,...,X_r,Y_1,...,Y_n) \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,...,m}$$

los cuales generarán el núcleo del k-epimorfismo

$$\mathbf{f} : k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \longrightarrow B$$

tal que

$$\mathbf{f}(X_i) = x_i \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,...,r} \quad ; \quad \mathbf{f}(Y_j) = y_j \quad ; \quad {\scriptstyle j=1,...,n}$$

Las derivadas parciales respecto de X_i e Y_j en el anillo $k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$, permiten considerar la matriz jacobiana

$$J_{XY}(f_1,...,f_m) = \frac{\partial(f_1,...,f_m)}{\partial(X_1,...,X_r,Y_1,...,Y_n)}$$

y su submatriz

$$J_Y(f_1,...,f_m) = \frac{\partial(f_1,...,f_m)}{\partial(Y_1,...,Y_n)}$$

luego notando

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_i} = \mathbf{f}\left[\frac{\partial f_s}{\partial X_i}\right] \quad , \quad \frac{\partial f_s}{\partial y_j} = \mathbf{f}\left[\frac{\partial f_s}{\partial Y_j}\right] \quad ; \ {\scriptstyle i=1,...,r} \ ; \ {\scriptstyle j=1,...,n} \ ; \ {\scriptstyle s=1,...,m} \qquad (2)$$

a las imágenes en **f** de las matrices jacobianas anteriores, podemos escribirlas, respectivamente

$$J_{xy}(f_1,...,f_m) = \frac{\partial(f_1,...,f_m)}{\partial(x_1,...,x_r,y_1,...,y_n)}$$

$$J_y(f_1,\dots,f_m) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}$$

o, más brevemente, J_{xy} y J_y , cuando no sea preciso aludir a las f_s .

Siendo $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , a las imágenes en el epimorfismo natural

$$h^*: B \longrightarrow B/\mathfrak{p}^*$$

de los elementos (2), los designaremos

$$\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}^*} , \left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}^*} \quad ; \quad i=1,\dots,r \quad ; \quad j=1,\dots,n \quad ; \quad s=1,\dots,m$$

y a las imágenes en h^* de las matrices J_{xy} y J_y las designaremos respectivamente $\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*}$ y $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$.

Sea V^* la variedad algebraica del espacio afín k^{r+n} , definida por el ideal ker **f** . Su anillo de coordenadas es pues B. Un ideal $\mathfrak{p}_0^*$ del anillo B diremos que es un **ideal de punto**, si existe

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_n) \in V^*$$

cuyo correspondiente ideal (maximal) en el anillo B sea $\mathfrak{p}_0^*$, esto es, si existe $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in k^{r+n}$, tal que

$$f_s(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \quad , \quad s=1,\dots,m$$

y los elementos x_i-a_i e y_j-b_j generan en B dicho ideal:

$$\mathfrak{p}_0^* = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)B$$

Naturalmente, si el cuerpo base k es algebraicamente cerrado, entonces los ideales de punto de B son los elementos de Spec Max B (Análogamente, los ideales de punto de A serán los ideales de los puntos de la variedad afín de k^r, cuyo anillo de coordenadas es A).

El punto del cual $\mathfrak{p}_0^*$ es ideal se dice **punto simple** si y sólo si el anillo local $B_{\mathfrak{p}_0^*}$ es regular. Los puntos no simples se dicen **singulares.** Utilizaremos frecuentemente el criterio jacobiano de simplicidad (o de "no singularidad"):

$$\boxed{\mathfrak{p}_0^* \text{ es ideal de punto simple} \iff \text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \text{codim } V^*}$$

siendo dicho rango menor que codim V^* si el punto es singular. Puesto que, en nuestro caso, la codimensión de V^* es

$$\text{codim } V^* = (r+n) - \dim V^* = (r+n) - \text{gr.tr.}(B:k) = (r+n) - r = n$$

el criterio anterior puede enunciarse así

$$\boxed{\mathfrak{p}_0^* \text{ es ideal de punto simple} \Leftrightarrow \text{rango } \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = n}$$

siendo dicho rango menor que n si el punto es singular.

De modo más general, siendo $\mathfrak{p}^*$ un primo cualquiera (no necesariamente ideal de punto), se dice que la subvariedad de $\mathfrak{p}^*$ es **simple** si $B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular, lo que también resulta ser equivalente a que sea n el rango de $\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*}$.

1.1 Definición y cálculo del orden de ramificación local

El concepto de orden de ramificación fue introducido en [Roa 4] , a partir del rango de la matriz jacobiana $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$ Aquí comenzamos construyendo una definición "vía geométrica" de este concepto, equivalente a la dada allí.

Comencemos con unas consideraciones previas informales.

Observemos que si A es el anillo de polinomios $k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ es el anillo de coordenadas de una superficie algebraica lisa , V^* , de ecuación $f(x_1,x_2,y) = 0$, del espacio afín k^3 , entonces los puntos de ramificación de V^* son aquellos cuyo plano tangente es paralelo al eje "y".

Tratemos de generalizar a mayor dimensión lo que acaba de indicarse. Sea A el anillo de polinomios $k[x_1,...,x_r]$ y $B = k[x_1,...,x_r,y_1,...,y_n]$ el anillo de coordenadas de una variedad afín, V^* , de k^{r+n} . Ahora, los puntos $P \in V^*$ cuyos ideales se ramifican, son aquellos cuyo espacio tangente afín, $\mathscr{T}(P)$, verifica la siguiente condición: «existe algún subespacio del espacio afín $\mathscr{S}_y$, de las coordenadas "y" (que aparecen al extender desde el subanillo A al anillo B), paralelo (al menos débilmente) a $\mathscr{T}(P)$ ». Pero esta condición es más fácil de expresar pasando de estos subespacios afines a los subespacios vectoriales que constituyen sus respectivas direcciones, $\overrightarrow{\mathscr{T}(P)}$ y $\overrightarrow{\mathscr{S}_y}$. De este modo, los puntos, P , de ramificación, serán aquellos para los cuales sea $\overrightarrow{\mathscr{T}(P)} \cap \overrightarrow{\mathscr{S}_y} \neq 0$, siendo dicha ramificación más "fuerte", cuanto mayor sea la dimensión de este subespacio vectorial intersección $\overrightarrow{\mathscr{T}(P)} \cap \overrightarrow{\mathscr{S}_y}$. Tal dimensión será el orden de ramificación del punto P .

Para precisar este concepto de orden de ramificación en P , hemos de adoptar una definición apropiada de espacio tangente en P ; la definición de Zariski. Y, de acuerdo con lo indicado anteriormente, consideraremos el espacio tangente vectorial, mejor que el afín.

Por otra parte, en lugar de hablar de orden de ramificación de puntos, referiremos tal concepto a los ideales de dichos puntos, lo que facilitará, más adelante, su generalización a primos que no sean ideales de punto.

Después de estas consideraciones, comenzamos la formalización con la siguiente definición, sugerida a partir de la definición 3.3.2 de [B-C-R].

1.1.1 Definición.- *Sea* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto de la* k-*álgebra* $B = k[x,y] = k[x_1,..,x_r,y_1,..,y_n]$, *definida por las condiciones*

$$f_s(x,y) = 0 \quad ; \quad s=1,...,m$$

Llamaremos **espacio tangente de Zariski** *en* $\mathfrak{p}_0^*$, *y notaremos* $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$, *al subespacio vectorial de* k^{r+n} :

$$\boxed{T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) = \bigcap_{s=1}^{m}\left\{(x,y)\in k^{r+n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} x_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} y_j = 0\right\}}$$

Observemos que si el punto del cual $\mathfrak{p}_0^*$ es ideal es simple, entonces, de acuerdo con lo indicado en 1.0, será

$$\text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = n$$

luego la dimensión del espacio tangente de Zariski será

$$\dim_k T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) = (r+n) - \text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = r$$

y en consecuencia: $\dim T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) = \dim V^*$, siendo V^* la variedad afín cuyo anillo de coordenadas es B . En cambio, si el punto es singular, será $\dim T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) > \dim V^*$, pese a lo cual las definiciones anteriores siguen siendo adecuadas a nuestro propósito, según iremos viendo.

1.1.2 Definición.- *Sea* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto de* $B = k[x,y]$. *Llamaremos* **orden de ramificación** *de* $\mathfrak{p}_0^*$, *que notaremos* ord.ram $\mathfrak{p}_0^*$, *a la dimensión del subespacio intersección de* $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ *con el subespacio vectorial de* k^{r+n}

$$0^r \times k^n = \left\{ (x_1,...,x_r,y_1,...,y_n)\in k^{r+n} \;\middle|\; x_1=...=x_r=0 \right\}$$

es decir,

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = \dim_k \left[T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) \cap (0^r \times k^n)\right]}$$

La siguiente proposición proporciona un método cómodo de cálculo del orden de ramificación:

1.1.3 Proposición.- *Siendo* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto de* $B = k[x,y]$, *se verifica:*

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*}}$$

Demostración.- De acuerdo con las definiciones precedentes, $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ es el subespacio vectorial de k^{r+n} de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} x_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} y_j = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,m}$$

luego $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) \cap (0^r \times k^n)$ será el subespacio vectorial de ecuaciones

$$x_1=\dots=x_r=0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} y_j = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,m}$$

cuya dimensión es

$$\dim_k\left[T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) \cap (0^r \times k^n)\right] = r + n - \left\{r + \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*}\right\} = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} \quad \blacksquare$$

1.1.4 Corolario.- *Si* $\mathfrak{p}_0^*$ *es ideal de punto singular, entonces* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* > 0$

Demostración.- Si el punto es singular, entonces, de acuerdo con lo indicado en 1.0, se tendrá:

$$\text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} \le \text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} < n$$

luego

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} > 0 \qquad \blacksquare$$

1.1.5 Proposición.- *Si* $\mathfrak{p}_0^*$ *es ideal de punto simple, entonces* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* \le r$

Demostración.- Considerando la submatriz de J_{xy}

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}$$

y notando J_x a su imagen en el epimorfismo **f** y $\left[J_x\right]_{\mathfrak{p}_0^*}$ a la imagen de J_x en h^* (todo ello de acuerdo con la notación de 1.0), es claro que se tiene:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}J_{xy}\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} \leq \text{rango}\begin{bmatrix}J_x\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} + \text{rango}\begin{bmatrix}J_y\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*}$$

lo que, por ser simple el punto, implica

$$n \leq \text{rango}\begin{bmatrix}J_x\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} + \text{rango}\begin{bmatrix}J_y\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*}$$

pero, siendo r el número de variables "x", habrá de ser

$$\text{rango}\begin{bmatrix}J_x\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} \leq r$$

y por tanto

$$n \leq r + \text{rango}\begin{bmatrix}J_y\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*}$$

luego

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\begin{bmatrix}J_y\end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} \leq r \qquad \blacksquare$$

1.1.6 Corolario.- *Si $\mathfrak{p}_0^*$ es ideal de punto simple, entonces*

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* \leq \min\,\{r,n\}}$$

Demostración.- De la definición 1.1.2 (o del teorema 1.2.3) resulta inmediatamente que ha de ser ord.ram $\mathfrak{p}_0^* \leq n$, bastando ya tener en cuenta la proposición anterior.

1.1.7 Observación.- Si en lugar de considerar el espacio tangente (de Zariski) vectorial en el ideal de punto

$$\mathfrak{p}_0^* = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)B$$

se hubiera considerado el espacio tangente (de Zariski) afín, que notaremos $\mathcal{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$, de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}_0^*}(x_i-a_i) + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}_0^*}(y_j-b_j) = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,m} \qquad (1)$$

entonces, de acuerdo con lo indicado en las consideraciones previas con que comenzamos este apartado 1.1, se podría definir otro orden de ramificación, notado ORD.RAM $\mathfrak{p}_0^*$, que fuese el máximo de las dimensiones de los subespacios afines de $0^r \times k^n$ que sean débilmente paralelos a $\mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$. Es decir, siendo $SA(0^r \times k^n)$ el retículo de los subespacios afines de $0^r \times k^n$ y notando $<|$ a la relación de paralelismo débil, se podría definir

$$\boxed{\text{ORD.RAM } \mathfrak{p}_0^* = \max\left\{\dim H \;\middle|\; H \in SA(0^r \times k^n) \wedge H <| \mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)\right\}} \qquad (2)$$

Es fácil comprobar la equivalencia de esta definición con la 1.1.2. En efecto, la relación de paralelismo débil $H <| \mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ es equivalente a la inclusión de sus respectivas direcciones

$$\vec{H} \subseteq \overrightarrow{\mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)} \qquad (3)$$

pero la dirección del subespacio afín de ecuaciones (1) es la variedad lineal de la definición 1.1.1, es decir, $\overrightarrow{\mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)} = T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$, por lo que la inclusión (3) puede escribirse : $\vec{H} \subseteq T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$. Por otra parte, la relación de pertenencia $\vec{H} \in SA(0^r \times k^n)$ es, obviamente, equivalente a la inclusión $\vec{H} \subseteq 0^r \times k^n$. En consecuencia, de (2) resulta:

$$\text{ORD.RAM } \mathfrak{p}_0^* = \text{máx}\left\{ \dim \vec{H} \mid \vec{H} \subseteq (0^r \times k^n) \wedge \vec{H} \subseteq T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)\right\} =$$

$$= \text{máx}\left\{ \dim \vec{H} \mid \vec{H} \subseteq T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) \cap (0^r \times k^n) \right\} =$$

$$= \dim \left[T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) \cap (0^r \times k^n) \right] = \text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^*$$

Finalmente, observemos que, si en vez de la definición (1) de Zariski, se hubiera adoptado como definición de tangente a V^* en $\mathfrak{p}_0^*$, la unión de las rectas tangentes a las curvas de V^* en $\mathfrak{p}_0^*$, que notaremos $t(\mathfrak{p}_0^*)$, entonces la definición (2) sólo sería válida para el caso de puntos no singulares (no siendo pues aplicable para el siguiente ejemplo c) de 1.1.8, en que. $t(\mathfrak{p}_0^*)$ es el propio cono).

1.1.8 <u>Ejemplos</u>.- a) Siendo $A = k[x_1,x_2]$, $B = k[x_1,x_2,y]$ el anillo de coordenadas de la superficie esférica V^* de ecuacion $x_1^2+x_2^2+(y-1)^2 - 1 = 0$ y $\mathfrak{p}_0^*$ el ideal del punto $(a_1,a_2,1)$ perteneciente a la circunferencia de V^* de ecuación $y = 1$, calculemos el ord.ram $\mathfrak{p}_0^*$. Se tiene:

$$J_{xy} = (2x_1,2x_2,2(y-1)) \quad , \quad \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = (2a_1,2a_2,0)$$

luego $\mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ será el plano tangente de ecuación

$$2a_1(x_1-a_1) + 2a_2(x_2-a_2) + 0(y-1) = 0$$

y su dirección, $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$, la variedad lineal $2a_1x_1 + 2a_2x_2 = 0$. La intersección de esta variedad lineal con $0^2{\times}k^1$, es decir, con $x_1 = 0 = x_2$, será la subvariedad lineal de ecuaciones $x_1 = 0 = x_2$, cuya dimensión es uno, luego ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 1$. Al mismo resultado se llega, más rápidamente, aplicando 1.1.3:

$$J_y = (2(y-1)) \Rightarrow \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = (0) \Rightarrow \text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 1 - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 1$$

b) Siendo $A = k[x_1,x_2,x_3]$, $B = A[y_1,y_2,y_3]$ con las condiciones

$$(y_1-1)^2-x_1+1 = 0 \quad , \quad y_2^3 + y_1-x_2 = 0 \quad , \quad y_3^2-x_3 = 0 \quad (*)$$

y $\mathfrak{p}_0^*$ el ideal del punto de coordenadas

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 9 \ , \ x_3 = 0 \ , \ y_1 = 1 \ , \ y_2 = 2 \ , \ y_3 = 0$$

se tiene

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2y_1-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $\mathscr{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ es el subespacio afín de ecuaciones:

$$(-1)(x_1-1)=0 \ ; \ (-1)(x_2-9)+(y_1-1)+12(y_2-2)=0 \ ; \ (-1)(x_3-0)=0$$

(*) La comprobación de que el anillo B es dominio puede hacerse, por ejemplo, factorizando la extensión $A \hookrightarrow B$ en la forma

$$A \hookrightarrow A_1 = A[Y_1]/I_1 \hookrightarrow A_2 = A_1[Y_2]/I_2 \hookrightarrow A_2[Y_3]/I_3 \simeq B$$

donde I_1,I_2,I_3 son los ideales

$$I_1 = ((Y_1-1)^2-x_1+1)A[Y_1] \ ; \ I_2 = (Y_2^3+y_1-x_2)A_1[Y_2] \ ;$$

$$I_3 = (Y_3^2-x_3)A_2[Y_3]$$

y aplicando el "test de primalidad" de [G-T-Z] a estos tres ideales.

y su dirección, $T_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$, será la variedad lineal:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad -x_2 + y_1 + 12y_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = 0$$

cuya intersección con $0^3 \times k^3$, es decir, con $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, es la variedad lineal:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad , \quad y_1 + 12y_2 = 0$$

cuya dimensión es dos, luego ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 2$. Al mismo resultado se llega brevemente aplicando 1.1.3:

$$\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 3 - \text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 2$$

c) Siendo $A = k[x_1,x_2]$, $B = A[y]$, con la condición $x_1^2 - x_2^2 + y^2 = 0$, y $\mathfrak{p}_0^*$ el ideal del vértice de este cono, se tiene

$$J_y = (2x_1,-2x_2,2y) \Rightarrow \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = (0,0,0)$$

luego $\mathcal{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*)$ es el subespacio afín de ecuación $0(x_1-0)+0(x_2-0)+0(y-0) = 0$, es decir, todo k^3 . Como $x_1 = 0 = x_2$ (es decir, el eje "y") es débilmente paralelo a $\mathcal{T}_{Zar}(\mathfrak{p}_0^*) = k^3$, será ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 1$. Directamente, aplicando 1.1.3:

$$J_y = (2y) \Rightarrow \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = (0) \Rightarrow \text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 1 - 0 = 1$$

d) Siendo $A = k[x]$, $B = k[x,y_1,y_2]$ con las condiciones

$$y_1^3 - x^2 = 0 \quad , \quad y_2^2 - x = 0$$

y $\mathfrak{p}_0^*$ el ideal del punto (0,0,0) , se tiene

$$J_{xy} = \begin{pmatrix} -2x & 3y_1^2 & 0 \\ -1 & 0 & 2y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 < 2 = n$$

luego el punto es singular. Por otra parte

$$\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 0 \Rightarrow \text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 2 - 0 = 2$$

es decir, se tiene: ord.ram $\mathfrak{p}_0^* > 1 = r$, lo que no contradice el resultado 1.1.5, ya que el punto es singular.

1.2 Caracterización del orden de ramificación mediante coordenadas de uniformización

Unas consideraciones previas sobre un caso concreto sencillo nos ayudarán en el planteamiento del problema. Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[x_1,x_2,y]$, con la condición

$$y^2 + x_1^2 - x_2 = 0$$

es inmediato observar que para un punto de ese paraboloide de coordenadas

$$x_1 = a_1 \quad ; \quad x_2 = a_2 \quad ; \quad y = b$$

tal que $b \neq 0$, es posible tomar $\{x_1,x_2\}$ como variables independientes, en un entorno del punto, resultando una función diferenciable:

$$y = + \sqrt{x_2-x_1^2} \quad , \text{ o bien } \quad y = - \sqrt{x_2-x_1^2}$$

o incluso es posible una expresión racional de la forma

$$y-b = - \frac{x_1+a_1}{y+b}(x_1-a_1) + \frac{1}{y+b}(x_2-a_2)$$

donde $\frac{x_1+a_1}{y+b}$ y $\frac{1}{y+b}$ pertenecen al anillo local en el punto considerado. Pero ello no es posible si $b=0$, es decir, en los puntos de ramificación (para los cuales pueden elegirse como variables independientes $\{x_1,y\}$, por ejemplo).

Tratemos de generalizar estas consideraciones. Si el punto no es singular, entonces esas variables independientes, tales que las demás variables puedan expresarse como funciones uniformes de aquellas en un entorno del punto, dan lugar al concepto algebraico de "coordenadas de uniformización", cuyo número es la dimensión de la variedad, es decir gr.tr.(B:k) .

Vamos a probar que el número de coordenadas de uniformización del punto, que pueden ser elegidas de entre las "x", es decir, de $\{x_1,...,x_r\}$, va a darnos otra caracterización del orden de ramificación definido en 1.1.

Comenzaremos recordando el concepto de "coordenadas de uniformización" y los resultados fundamentales, relativos a este concepto, que van a ser utilizados, de los cuales iremos obteniendo versiones apropiadas para ser adaptadas más cómodamente al problema en estudio.

1.2.1 Definición (Zariski) (*).- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B, *tal que el anillo local* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *sea regular, y sean* $G_1,\ldots,G_r \in B_{\mathfrak{p}^*}$. *Si se verifican las dos condiciones :*

a) $\{G_1,\ldots,G_r\}$ *es una base trascendente (separable) del* c.f.(B:k) (**)

b) $\frac{\partial}{\partial G_i} B_{\mathfrak{p}^*} \subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$; $i=1,\ldots,r$

entonces se dice que $G_1,\ldots,G_r$ *son* **coordenadas de uniformización** *de* $\mathfrak{p}^*$ *, o que* $\{G_1,\ldots,G_r\}$ *es un* **conjunto de coordenadas de uniformización** *de* $\mathfrak{p}^*$.

El siguiente resultado lo hemos obtenido con el propósito de detectar con más comodidad coordenadas de uniformización, en los casos que más nos interesan:

1.2.2 Proposición.- *Sean* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , $B_{\mathfrak{p}^*}$ *regular y* $G_1,\ldots,G_r \in B_{\mathfrak{p}^*}$. *Si se verifican:*

a^*) $\{G_1,\ldots,G_r\}$ *es una base trascendente del* c.f.(B:k)

b^*) $\frac{\partial}{\partial G_i} B \subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$

entonces $G_1,\ldots,G_r$ *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$.

Demostración.- Bastará probar que b^*) implica la condición b) de 1.2.1. Supongamos pues que se verifica b^*). Siendo

$$H = \frac{u}{v} \in B_{\mathfrak{p}^*} \quad ; \quad u,v \in B \quad ; \quad v \notin \mathfrak{p}^*$$

se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial G_i} = \frac{\partial}{\partial G_i}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(v\frac{\partial u}{\partial G_i} - u\frac{\partial v}{\partial G_i}\right) v^{-2} \qquad (1)$$

pero b^*) implica

$$v\frac{\partial u}{\partial G_i} - u\frac{\partial v}{\partial G_i} \in B_{\mathfrak{p}^*}$$

y de $v \in B - \mathfrak{p}^*$ se deduce, por ser primo $\mathfrak{p}^*$, que $v^{-2} \in B_{\mathfrak{p}^*}$, luego (1) pertenece a $B_{\mathfrak{p}^*}$. ■

(*) Definición 9.1 de [Zar 1]

(**) En nuestro caso, en que la característica del cuerpo base, k, es cero, puede obviamente omitirse la condición de separabilidad.

El siguiente criterio de caracterización de coordenadas de uniformización y, sobre todo, los dos corolarios que le siguen, formalizan las consideraciones previas con que comenzamos este apartado 1.2 (sobre posibilidad de expresar las demás variables como funciones uniformes de las coordenadas de uniformización).

1.2.3 Criterio (de André Weil) (*).- *Sea* $\mathfrak{p}^*\in$ Spec B, *tal que* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *regular, y sean* $G_1,\dots,G_r\in B_{\mathfrak{p}^*}$. *Las* G_i *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$, *si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

a') *el anillo cociente* $B/\mathfrak{p}^*$ *es extensión algebraica de* $k[\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_r]$, *donde* $\overline{G}_i$ *es la imagen de* G_i *en el epimorfismo natural* $B\longrightarrow B/\mathfrak{p}^*$

b') $k[G_1,\dots,G_r]$ *contiene una base del ideal de no unidades* $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$

Con el propósito de facilitar su aplicabilidad a nuestro problema, hemos obtenido los dos corolarios siguientes:

1.2.4 Corolario.- *Sean* $\mathfrak{p}^*\in$ Spec B , $B_{\mathfrak{p}^*}$ *regular, y* $G_1,\dots,G_r\in B$. *Sí se verifican las dos condiciones:*

a'') $\mathfrak{p}^*$ *es ideal de un punto*

b'') $k[G_1,\dots,G_r]$ *contiene a una base del ideal de no unidades* $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$

entonces $G_1,\dots,G_r$ *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$

Demostración.- Puesto que $B\subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$, bastará probar que a'') $\Rightarrow$ a') . Y en efecto, si $\mathfrak{p}^*$ es ideal de punto, entonces dim $\mathfrak{p}^*=0$, es decir, gr.tr.$(B/\mathfrak{p}^*)=0$, luego $B/\mathfrak{p}^*$ es algebraico sobre k , lo que, teniendo en cuenta que

$$k\subseteq k[\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_r]\subseteq B/\mathfrak{p}^*$$

implica que $B/\mathfrak{p}^*$ sea extensión algebraica de $k[\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_r]$ ∎

(*) Proposición 10.4 de [Zar 1]

1.2.5 Corolario.- *Sean* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , $B_{\mathfrak{p}^*}$ *regular, y* $G_1,\dots,G_r \in B$. *Si se verifican las dos condiciones:*

a‴) $G_1,\dots,G_r$ *son algebraicamente independientes sobre* k

b‴) $k[G_1,\dots,G_r]$ *contiene a una base del ideal de no unidades* $\mathfrak{p}^* B_{\mathfrak{p}^*}$

entonces $G_1,\dots,G_r$ *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$

Demostración.- Puesto que $B \subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$, bastará probar que a‴) $\Rightarrow$ a′). Y, en efecto, si se verifica a‴) , como

$$\text{gr.tr.}(B:k) = \text{gr.tr.}(A:k) = r$$

$\{G_1,\dots,G_r\}$ será una base trascendente de B sobre k , luego B será extensión algebraica de $k[G_1,\dots,G_r]$, lo que, pasando al anillo cociente $B/\mathfrak{p}^*$, implicará que $B/\mathfrak{p}^*$ sea extensión algebraica de

$$k[G_1,\dots,G_r]/\mathfrak{p}^* = k[\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_r] \qquad \blacksquare$$

1.2.6 Criterio de cambio de coordenadas de uniformización (Zariski) (*).- *Sean* $G_1,\dots,G_r$ *coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$ *y sean* $G'_1,\dots,G'_r \in B_{\mathfrak{p}^*}$. *Entonces* $G'_1,\dots,G'_r$ *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$ *si y sólo si*

$$\det \frac{\partial(G'_1,\dots,G'_r)}{\partial(G_1,\dots,G_r)} \notin \mathfrak{p}^* B_{\mathfrak{p}^*}$$

1.2.7 Criterio clásico (adaptado a nuestra notación).- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B y $B_{\mathfrak{p}^*}$ *regular. Las variables* $y_1,\dots,y_d,x_{d+1},\dots,x_r$ *son conjunto de coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$ *si y sólo si existen* $j_1,\dots,j_n \in \{1,\dots,m\}$, *tales que*

$$\det \left[\frac{\partial\left(f_{j_1},\dots,f_{j_n}\right)}{\partial(x_1,\dots,x_d,y_{d+1},\dots,y_n)} \right]_{\mathfrak{p}^*} \neq 0$$

donde $f_1,\dots,f_m$ *son las condiciones de definición de* B , *indicadas en* 1.0.

El concepto de orden de ramificación, introducido en 1.1 para el caso de ser $\mathfrak{p}^*$ ideal de punto, se extiende de modo natural a cualquier primo $\mathfrak{p}^*$ del anillo B , a través de la proposición 1.1.3, como se indica a continuación.

(*) Proposición 9.2 de [Zar 1]

1.2.8 Definición.- *Siendo* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , *llamaremos* **orden de ramificación** *de* $\mathfrak{p}^*$ *al número natural*

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}}$$

1.2.9 Proposición.- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B . *Si* ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$, *entonces se verifican:*

i) *el anillo local* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *es regular*

ii) $x_1,\dots,x_r$ *son coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$

iii) *para todo* $\mathfrak{p}'' \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}^*$, *es* ord.ram $\mathfrak{p}'' = 0$

Demostración.- i) Si suponemos ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$, es decir

$$\text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = n \qquad (1)$$

entonces existirá un subconjunto $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq \{1,\dots,m\}$, tal que, para la submatriz de J_y

$$J_y\left(f_{j_1},\dots,f_{j_n}\right) = \frac{\partial\left(f_{j_1},\dots,f_{j_n}\right)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} \qquad (2)$$

sea

$$\det\left[\, J_y\left(f_{j_1},\dots,f_{j_n}\right)\,\right]_{\mathfrak{p}^*} \neq 0 \qquad (3)$$

pero por ser (2) submatriz de J_{xy} , esta condición implica

$$\text{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} = n \qquad (4)$$

ya que el rango de esta matriz ha de ser menor o igual que n, según se indicó en 1.0. En consecuencia, de acuerdo con el criterio jacobiano de simplicidad, el anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$ será regular.

ii) Según el criterio clásico 1.2.7, la condición (3) implica que $x_1,\dots,x_r$ sean coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$.

iii) De la inclusión $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}^*$ se deduce que

$$H : B/\mathfrak{p}'' \longrightarrow B/\mathfrak{p}^* \quad ; \quad \forall\, b \in B \quad ; \quad H(b+\mathfrak{p}'') = b + \mathfrak{p}^*$$

es un homomorfismo, en el que

$$\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}''} \xrightarrow{\quad H \quad} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}^*}$$

luego

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}''} \geq \text{rango} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}^*} = n \qquad (5)$$

y por otra parte, teniendo en cuenta que, por ser J_y submatriz de J_{xy} , ha de ser, de acuerdo con (4):

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}''} \leq \text{rango} \begin{bmatrix} J_{xy} \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}''} = n$$

lo que, junto con (5) implica

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}''} = n$$

y en consecuencia ord.ram $\mathfrak{p}'' = 0$ ■

1.2.10 <u>Definición</u>.- *Un conjunto, C , de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, diremos que es de coordenadas* **canónicas**, *si sólo está formado por variables* "x" *e* "y", *es decir, si*

$$C \subseteq \{\, x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_n \,\}$$

1.2.11 <u>Lema</u>.- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *sea regular. Si* ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$, *entonces se verifican:*

i) *existe un conjunto de coordenadas de uniformización canónicas,* C_0 , *que consta de* r - u *variables* "x" *y de* u *variables* "y", *es decir, salvo permutación de subíndices, de la forma*

$$C_0 = \{\, y_1,\ldots,y_u,x_{u+1},\ldots,x_r \,\} \qquad (1)$$

ii) *si C es un conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$, entonces el número de variables* "y" *pertenecientes a C es, al menos,* u, *es decir*

$$\boxed{\#\Big[\, C \cap \{\, y_1,\ldots,y_n \,\} \Big] \geq \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*}$$

y en consecuencia, el número de variables "x" *pertenecientes a C es, a lo mas,* r - u , *es decir*

$$\boxed{\#\left[\, C \cap \{x_1,\dots,x_r\} \,\right] \le \text{gr.tr.}(B{:}k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*}$$

<u>Demostración</u>.- Sea ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$.

i) Por ser

$$\text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = n - u \qquad (2)$$

existe $\{j_1,\dots,j_{n-u}\} \subseteq \{1,\dots,m\}$, tal que, salvo permutación de subíndices de las "y", la submatriz cuadrada de $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$

$$\left[\frac{\partial\left[f_{j_1},\dots,f_{j_{n-u}}\right]}{\partial(y_{u+1},\dots,y_n)}\right]_{\mathfrak{p}^*} \qquad (3)$$

sea regular (es decir, de determinante no nulo). Por otra parte, por ser regular el anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$, de acuerdo con el criterio jacobiano, habrá de ser

$$\text{rango } \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} = n$$

luego, por ser (3) submatriz cuadrada regular de $\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*}$, podrá orlarse (3), añadiendo filas y columnas, hasta conseguir una submatriz cuadrada regular de orden n de $\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*}$, que, salvo permutación de subíndices de las "x", puede suponerse que es

$$\left[\frac{\partial\left[f_{j_1},\dots,f_{j_n}\right]}{\partial(x_1,\dots,x_u,y_{u+1},\dots,y_n)}\right]_{\mathfrak{p}^*} \qquad (4)$$

ya que en el denominador de la jacobiana no pueden aparecer más "y", según sigue de (2). La regularidad de (4) asegura que (1) sea conjunto de coordenadas de uniformización, de acuerdo con el criterio clásico 1.2.7.

ii) Sea ahora C un conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$. Si el número de "y" que aparecen en C es d, entonces, salvo permutación de subíndices, podemos suponer que es

$$C = \{\, y_1,\dots,y_d,x_{d+1},\dots,x_r \,\}$$

luego, de acuerdo con el criterio clásico 1.2.7, existirá un subconjunto $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq \{1,\dots,m\}$, tal que

$$\det \left[\frac{\partial\left(f_{j_1},\ldots,f_{j_n}\right)}{\partial(x_1,\ldots,x_d,y_{d+1},\ldots,y_n)} \right]_{\mathfrak{p}^*} \neq 0$$

lo que obviamente implica que sea n - d el rango de la submatriz

$$\left[\frac{\partial\left(f_{j_1},\ldots,f_{j_n}\right)}{\partial(y_{d+1},\ldots,y_n)} \right]_{\mathfrak{p}^*}$$

y en consecuencia

$$\text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} \geq n - d$$

luego, de acuerdo con 1.2.8

$$n - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \geq n - d$$

es decir

$$d \geq \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$ ■

El lema precedente permite dar una caracterización del orden de ramificación para $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, tal que $B_{\mathfrak{p}^*}$ sea regular:

1.2.12 <u>Teorema</u>.- *Siendo* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *sea regular, y* $CUC(\mathfrak{p}^*)$ *la familia de conjuntos de coordenadas de uniformización canónicas de* $\mathfrak{p}^*$ *, se verifican:*

$$\min \left\{ \#\left[C \cap \{y_1,\ldots,y_n\} \right] : C \in CUC(\mathfrak{p}^*) \right\} = \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$

$$\max \left\{ \#\left[C \cap \{x_1,\ldots,x_r\} \right] : C \in CUC(\mathfrak{p}^*) \right\} = r - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$

<u>Demostración</u>.- Sea ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$ y notemos

$$u_y = \min \left\{ \#\left[C \cap \{y_1,\ldots,y_n\} \right] : C \in CUC(\mathfrak{p}^*) \right\}$$

$$u_x = \max \left\{ \#\left[C \cap \{x_1,\ldots,x_r\} \right] : C \in CUC(\mathfrak{p}^*) \right\}$$

De acuerdo con 1.2.11 i), habrá de ser $u_x \geq r - u$, pero, según el apartado ii) de dicho lema, ha de ser $u_x \leq r - u$. Por tanto, será $u_x = r - u$. Por otra parte, es claro que $u_x + u_y = r$, luego

$$u_y = r - u_x = r - (r - u) = u \qquad \blacksquare$$

1.2.13 Ejemplo.- Sean $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[y_1,y_2]$ con las condiciones: $y_1^2-x_1 = 0$, $y_2^3-x_2 = 0$ y consideremos los siguientes ideales de punto:

a) para $\mathfrak{p}_0^* = (x_1-1,x_2-1,y_1-1,y_2-1)B$, se tiene

$$J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 2 - \text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 0$$

luego, según 1.2.9 ii), x_1,x_2 deben ser coordenadas de uniformización, lo que vamos a comprobar directamente, aplicando el corolario 1.2.4. En efecto, de las condiciones de definición de B , resulta

$$y_1-1 = \frac{1}{y_1+1}(x_1-1) \in B_{\mathfrak{p}_0^*} \quad ; \quad y_2-1 = \frac{1}{y_2^2+y_2+1}(x_2-1) \in B_{\mathfrak{p}_0^*}$$

luego para el ideal de no unidades del anillo local $B_{\mathfrak{p}_0^*}$, se tiene

$$\mathfrak{p}_0^* B_{\mathfrak{p}_0^*} = (x_1-1,x_2-1,y_1-1,y_2-1)B_{\mathfrak{p}_0^*} = (x_1-1,x_2-1)B_{\mathfrak{p}_0^*}$$

lo que, teniendo en cuenta que

$$\dim B_{\mathfrak{p}_0^*} = \text{alt } \mathfrak{p}_0^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \dim \mathfrak{p}_0^* = 2 - 0 = 2$$

implica que el anillo local $B_{\mathfrak{p}_0^*}$ es regular, siendo $\{x_1-1,x_2-1\}$ un sistema regular de parámetros. Como el anillo de polinomios $k[x_1,x_2]$ contiene a esta base minimal, $\{x_1-1,x_2-1\}$, del ideal maximal $\mathfrak{p}_0^* B_{\mathfrak{p}_0^*}$, $\{x_1,x_2\}$ será conjunto de coordenadas de uniformización, según 1.2.4.

b) para $\mathfrak{p}_1^* = (x_1-1,x_2,y_1-1,y_2)B$, se tiene:

$$\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{ord.ram } \mathfrak{p}_1^* = 2 - 1 = 1$$

luego, según 1.2.12, el máximo número de coordenadas de uniformización canónicas que pueden escogerse entre las "x" es uno. Comprobémoslo directamente. De las condiciones de definición de B , resulta

$$y_1 - 1 = \frac{1}{y_1+1}(x_1-1) \quad ; \quad x_2 = y_2^3$$

luego, para el ideal de no unidades del anillo local bidimensional $B_{\mathfrak{p}_1^*}$, se tiene:

$$\mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*} = (x_1-1, x_2, y_1-1, y_2) B_{\mathfrak{p}_1^*} = (x_1-1, y_2) B_{\mathfrak{p}_1^*}$$

por lo que $B_{\mathfrak{p}_1^*}$ es regular, siendo $\{x_1-1, y_2\}$ sistema regular de parámetros. Como $\{x_1-1, y_2\} \subseteq k[x_1, y_2]$, de acuerdo con 1.2.4, será $\{x_1, y_2\}$ conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$. Ahora, para comprobar que $\{x_1, x_2\}$ no es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$, puede usarse el criterio 1.2.6, de cambio de coordenadas de uniformización:

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & 3y_2^2 \end{vmatrix} = 3y_2^2 \qquad (1)$$

donde se ha tenido en cuenta que, por ser x_1, y_2 coordenadas de uniformización, las derivaciones respecto de estas dos variables son linealmente independientes, luego

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = 0$$

y, por otra parte, de la condición $y_2^3 - x_2 = 0$, resulta

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = 3y_2^2$$

Como (1) pertenece a $\mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*}$, de acuerdo con 1.2.6, $\{x_1, x_2\}$ no será conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$ (como ya permitía prever 1.2.11 ii)). Análogamente, para comprobar que $\{y_1, y_2\}$ es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$, puede usarse otra vez 1.2.6:

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1} \notin \mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*}$$

o también puede comprobarse verificando que $\{y_1-1, y_2\}$ es sistema regular de parámetros y aplicando 1.2.4.

c) para $\mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2,y_1,y_2)B$, se tiene:

$$\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_2^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{ord.ram } \mathfrak{p}_2^* = 2 - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_2^*} = 2$$

luego, de acuerdo con 1.2.12, ninguna coordenada de uniformización podrá ser "x" (es decir, ambas habrán de ser "y"). Comprobémoslo directamente:

$$\mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*} = (x_1,x_2,y_1,y_2)B_{\mathfrak{p}_2^*} = (y_1,y_2)B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

luego para el anillo local bidimensional $B_{\mathfrak{p}_2^*}$, $\{y_1,y_2\}$ será sistema regular de parámetros . Como $\{y_1,y_2\} \subseteq k[y_1,y_2]$, de acuerdo con 1.2.4, $\{y_1,y_2\}$ será conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_2^*$. Finalmente, para comprobar que, por ejemplo, $\{x_1,y_2\}$ no es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_2^*$, basta usar el criterio 1.2.6:

$$\det \frac{\partial(x_1,y_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} 2y_1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y_1 \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

1.3 Otras caracterizaciones del orden de ramificación

Comenzaremos con unas consideraciones previas sobre un caso concreto sencillo. Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$, con la condición

$$(y - 1)^2 - x_2 = 0$$

consideremos un punto (a_1,a_2,b) de este cilindro parabólico y su ideal $\mathfrak{p}^* = (x_1-a_1,x_2-a_2,y-b)B$. Si $b \neq 1$, entonces, según se comprueba inmediatamente, el ideal de no unidades, $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$, del anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$, admite la base $\{x_1-a_1,x_2-a_2\}$ formada por elementos del anillo A . En cambio, si $b = 1$ (es decir, en los puntos de ramificación), el ideal $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$ no admite una base formada por elementos pertenecientes todos al subanillo A .

Trataremos de generalizar esta observación, relacionando el máximo número de elementos de una base minimal del ideal de no unidades $\mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*}$, que pueden escogerse en A , con el orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$. El problema, según veremos, está íntimamente relacionado con la dimensión del ker de una aplicación lineal asociada a $\mathfrak{p}^*$, que comenzaremos estudiando.

1.3.1 <u>Lema</u>.- *Siendo* $\mathfrak{p}^*$ *el ideal del punto*

$$\mathfrak{p}^* = (x_1-a_1,...,x_r-a_r,y_1-b_1,...,y_n-b_n)B$$

$\mathfrak{p}$ *el ideal contraído de este en el subanillo* A *, es decir,*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A = (x_1-a_1,...,x_r-a_r)A$$

$\mathfrak{m}^*$ *el ideal de no unidades del anillo local* $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ *, es decir,*

$$\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*} = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$$

y $\mathfrak{m}$ *el ideal de no unidades del anillo local* $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ *, es decir,*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\vartheta$$

se verifican:

i) $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *y* $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$ *son espacios vectoriales sobre el cuerpo* $\vartheta/\mathfrak{m} \simeq k \simeq \vartheta^*/\mathfrak{m}^*$

ii) $\tau : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$ *, tal que, para todo* $G \in \mathfrak{m}$ *,* $\tau(G+\mathfrak{m}^2) = G+\mathfrak{m}^{*2}$ *, es un* k-*homomorfismo de espacios vectoriales.*

<u>Demostración</u>.- i) Comenzaremos probando que $\vartheta/\mathfrak{m} \simeq k$. En efecto, la aplicación $h:A \longrightarrow k$, en que la imagen del polinomio $p(x_1,...,x_r) \in A$ es

$p(a_1,\dots,a_r) \in k$, es obviamente un k-homomorfismo de anillos de núcleo: $\ker h = \mathfrak{p}$. Por tanto, si $e \in A-\mathfrak{p}$, entonces $h(e)$ es una unidad de k , luego h podrá extenderse a un homomorfismo, H , de $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ en k (de acuerdo con la propiedad universal de la localización de anillos), que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & k \\ & \vartheta = A_{\mathfrak{p}} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd} \qquad \left[\forall a \in A \ , \ \lambda(a) = \frac{a}{1} \right]$$

y puesto que ha de verificarse

$$\forall \ \frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}} \quad ; \quad H\left[\frac{a}{s}\right] = \frac{h(a)}{h(s)}$$

el ideal $\ker H$ será el extendido en λ de $\ker h$, es decir, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\vartheta$, y por tanto

$$\vartheta/\mathfrak{m} = A_{\mathfrak{p}}/\ker H \simeq \text{Imagen } H = k$$

y análogamente se prueba que $\vartheta^*/\mathfrak{m}^* \simeq k$.

Por otra parte, es bien conocido (e inmediato de probar) que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\vartheta/\mathfrak{m}$, definiendo la operación externa en la forma

$$\forall \ \alpha \in \vartheta \ , \ \forall \ G \in \mathfrak{m} \quad ; \quad (\alpha+\mathfrak{m})(G+\mathfrak{m}^2) = \alpha G+\mathfrak{m}^2$$

y, análogamente, $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\vartheta^*/\mathfrak{m}^*$, por lo que ambos, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *y* $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$, pueden ser considerados como k-espacios vectoriales.

ii) De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\lambda"'] & B \arrow[d, "\lambda^*"] \\ \vartheta \arrow[r] & \vartheta^* \end{tikzcd} \qquad \left[\forall \ b \in B \ ; \ \lambda^*(b) = \frac{b}{1} \right]$$

resulta $\mathfrak{m}^* \cap \vartheta = \mathfrak{m}$, luego $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^*$ y por tanto $\mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m}^{*2}$. En consecuencia, la aplicación τ está bien definida, siendo inmediato verificar que es un k-homomorfismo de espacios vectoriales.

1.3.2 <u>Definición</u>.- *A la aplicación lineal*

$$\tau: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2} \quad ; \quad \tau(G+\mathfrak{m}^2) = G+\mathfrak{m}^{*2}$$

que acabamos de indicar , la llamaremos **aplicación lineal asociada** *a* $\mathfrak{p}^*$.

1.3.3 Teorema.- *Si $\mathfrak{p}^*$ es ideal de un punto simple (y, por tanto, es regular el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$), entonces la dimensión del núcleo de la aplicación lineal asociada a $\mathfrak{p}^*$ es igual al orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$, es decir,*

$$\boxed{\dim_k \ker \tau = \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*}$$

Demostración.- Sea ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$ y por tanto

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}^*} = n - u \qquad (1)$$

luego, salvo permutación de subíndices, podemos suponer

$$\det \left[\frac{\partial(f_{u+1},\dots,f_n)}{\partial(y_{u+1},\dots,y_n)} \right]_{\mathfrak{p}^*} \neq 0 \qquad (2)$$

Ahora bien, por ser $\mathfrak{p}^*$ ideal de punto simple, de acuerdo con lo indicado en 1.0, habrá de ser

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J_{xy} \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}^*} = n$$

y por tanto, orlando el menor no nulo (2) con nuevas filas y columnas, se llegará a tener una submatriz cuadrada regular de orden n de $\begin{bmatrix} J_{xy} \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}^*}$, luego, salvo permutación de subíndices, puede suponerse que

$$\det \left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_u,f_{u+1},\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_u,y_{u+1},\dots,y_n)} \right]_{\mathfrak{p}^*} \neq 0 \qquad (3)$$

ya que en el denominador de este determinante jacobiano no nulo no pueden aparecer más "y", según sigue de (1).

Por otra parte, si $(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_n)$ es el punto del que $\mathfrak{p}^*$ es ideal, para las condiciones de definición de B , indicadas en 1.0, se tendrá

$$f_s(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_n) = 0 \;;\; {\scriptstyle s=1,\dots,m}$$

luego los polinomios $f_s(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_n) \in k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ podrán escribirse en la forma

$$f_s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{si}(X_i-a_i) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{sj}(Y_j-b_j) + f''_s \;;\; s=1,\dots,m \qquad (4)$$

donde α_{si} , $\beta_{sj} \in k$ y los f''_s son polinomios cuyos términos son todos de grado mayor o igual que dos (en X_i-a_i e Y_j-b_j), es decir, los polinomios f''_s pertenecen al cuadrado del ideal de k[**X**,**Y**]:

$$(X_1-a_1,\dots,X_r-a_r,Y_1-b_1,\dots,Y_n-b_n)k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$$

cuya imagen en el epimorfismo **f** (definido en 1.0) es $\mathfrak{p}^*$. Por tanto, pasando de (4) a imágenes en **f** , resulta:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{si}(x_i-a_i) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{sj}(y_j-b_j) + f''_s(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \qquad (5)$$

$$f''_s(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \in \mathfrak{p}^{*2} \quad ; \quad s=1,\dots,m \qquad (6)$$

Derivando en (4) respecto de X_d e Y_e , se obtiene:

$$\frac{\partial f_s}{\partial X_d} = \alpha_{sd} + \frac{\partial f''_s}{\partial X_d} \quad ; \quad d=1,\dots,r$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial Y_e} = \beta_{se} + \frac{\partial f''_s}{\partial Y_e} \quad ; \quad e=1,\dots,n$$

luego pasando a imágenes en el epimorfismo compuesto

$$k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \xrightarrow{\quad \mathbf{f} \quad} B \xrightarrow{\quad h^* \quad} B/\mathfrak{p}^*$$

resulta

$$\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_d}\right]_{\mathfrak{p}^*} = \alpha_{sd} \; ; \; \left[\frac{\partial f_s}{\partial y_e}\right]_{\mathfrak{p}^*} = \beta_{se} \; ; \; d=1,\dots,r \; ; \; e=1,\dots,n \; ; \; s=1,\dots,m \quad (7)$$

ya que (6) implica

$$\frac{\partial f''_s}{\partial x_d}, \frac{\partial f''_s}{\partial y_e} \in \mathfrak{p}^* \Rightarrow \left[\frac{\partial f''_s}{\partial x_d}\right]_{\mathfrak{p}^*} = 0 = \left[\frac{\partial f''_s}{\partial y_e}\right]_{\mathfrak{p}^*} \quad ; \quad \begin{array}{l} d=1,\dots,r \\ e=1,\dots,n \\ s=1,\dots,m \end{array}$$

Teniendo en cuenta (7), las expresiones (5) pueden escribirse:

$$0 = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}^*}(x_i-a_i) + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}^*}(y_j-b_j) +$$

$$+ f''_s(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \quad ; \quad s=1,\dots,m$$

y la condición (3) sugiere escribir las n primeras de estas m igualdades en la forma

$$\sum_{i=1}^{u}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}^*}(x_i-a_i) + \sum_{j=u+1}^{n}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}^*}(y_j-b_j) =$$

$$= f''_s - \sum_{i=u+1}^{r}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}^*}(x_i-a_i) - \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\right]_{\mathfrak{p}^*}(y_j-b_j) \quad ; \quad s=1,..,m$$

con el fin de explicitar un sistema lineal en las incógnitas

$$x_1-a_1,\dots,x_u-a_u,y_{u+1}-b_{u+1},\dots,y_n-b_n$$

que resulta ser un sistema de Cramer, como consecuencia de (3). Aplicando pues la regla de Cramer, resulta

$$x_i-a_i = \sum_{l=1}^{u} c'_{il}(y_l-b_l) + \sum_{l=u+1}^{r} c'_{il}(x_l-a_l) + \sum_{l=1}^{n} c''_{il}f''_l \quad ; \ i=1,\dots,u$$

$$y_j-b_j = \sum_{l=1}^{u} d'_{jl}(y_l-b_l) + \sum_{l=u+1}^{r} d'_{jl}(x_l-a_l) + \sum_{l=1}^{n} d''_{jl}f''_l \quad ; \ j=u+1,\dots,n$$

donde c'_{il} , c''_{il} , d'_{jl} , $d''_{jl} \in k$. Pasando ahora a clases residuales módulo $\mathfrak{m}^{*2}$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
(x_i-a_i)+\mathfrak{m}^{*2} &= \sum_{l=1}^{u} c'_{il}\left[(y_l-b_l)+\mathfrak{m}^{*2}\right]+\sum_{l=u+1}^{r} c'_{il}\left[(x_l-a_l)+\mathfrak{m}^{*2}\right] \ ; \ i=1,\dots,u \\
(y_j-b_j)+\mathfrak{m}^{*2} &= \sum_{l=1}^{u} d'_{jl}\left[(y_l-b_l)+\mathfrak{m}^{*2}\right]+\sum_{l=u+1}^{r} d'_{jl}\left[(x_l-a_l)+\mathfrak{m}^{*2}\right] \ ; \ j=u+1,\dots,n
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ya que (6) implica $\left(\text{teniendo en cuenta que } \mathfrak{p}^{*2} \subseteq \mathfrak{m}^{*2}\right)$:

$$f''_l + \mathfrak{m}^{*2} = 0 + \mathfrak{m}^{*2} \quad ; \quad l=1,\dots,n$$

Por otra parte

$$\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* = \mathfrak{p}^*B_{\mathfrak{p}^*} = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)\vartheta^*$$

luego

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}^{*2},\dots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2},(y_1-b_1)+\mathfrak{m}^{*2},\dots,(y_n-b_n)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

será sistema de generadores del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$. Ahora bien, las igualdades (8) permiten prescindir de algunos de estos (n+r) vectores, teniendo así el sistema de generadores más reducido

$$\left\{(y_1-b_1)+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(y_u-b_u)+\mathfrak{m}^{*2},(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2}\right\} \qquad (9)$$

pero es sabido que la dimensión del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$ es

$$\dim_{\vartheta^*/\mathfrak{m}^*}\left[\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}\right] = \dim \vartheta^* = \text{alt } \mathfrak{p}^* = r - \dim \mathfrak{p}^* = = r - 0 = r$$

por lo que el sistema de generadores (9) es base. En consecuencia, los r-u vectores

$$(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2} \qquad (10)$$

serán linealmente independientes y obviamente pertenecientes a la imagen de la aplicación lineal τ , para cuya dimensión se verificará pues:

$$\dim_k \text{Imagen } \tau \geq r - u \qquad (11)$$

Por otra parte

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\vartheta = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r)\vartheta$$

luego

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}^2,\ldots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^2\right\}$$

es sistema de generadores del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ y , en consecuencia, su imagen en τ :

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

será sistema de generadores de Imagen τ , del que podrá extraerse una base de Imagen τ , que, salvo permutación de subíndices, supondremos que es

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(x_d-a_d)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

la cual podrá completarse hasta tener una base de $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$:

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(x_d-a_d)+\mathfrak{m}^{*2},(y_{d+1}-b_{d+1})+\mathfrak{m}^{*2},\ldots,(y_r-b_r)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

Así pues, $\{(x_1-a_1),\ldots,(x_d-a_d),(y_{d+1}-b_{d+1}),\ldots,(y_r-b_r)\}$ será base (minimal) del ideal $\mathfrak{m}^*$ y en consecuencia (de acuerdo con 1.2.4):

$$\{x_1,\ldots,x_d,y_{d+1},\ldots,y_r\}$$

será un conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$. Pero, según 1.2.11, ha de ser $d \leq r - u$, luego

$$\dim_k \text{Imagen } \tau = d \leq r - u$$

lo que, junto con (11), implica

$$\dim_k \text{Imagen } \tau = r - u$$

y por tanto

$$\dim_k \text{Ker } \tau = \dim_k \left[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right] - \dim_k \text{Imagen } \tau = r-(r-u) = u = \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \qquad \blacksquare$$

1.3.4 Definición.- *Siendo* $\mathfrak{p}^*$ *el ideal del punto simple* $(a_1,..,a_r,b_1,..,b_n)$, *diremos que una base del ideal de no unidades* $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$ *, del anillo local* $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ *, es una* **base canónica**, *si está contenida en la base*

$$\{x_1-a_1,...,x_r-a_r,y_1-b_1,...,y_n-b_n\}$$

1.3.5 Teorema.- *Siendo* $\mathfrak{p}^*$ *un ideal de punto simple en el anillo* B , *para el ideal de no unidades,* $\mathfrak{m}^*$ *, del anillo local* $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ *, se verifican:*

i) $\mathfrak{m}^*$ *admite una base canónica minimal,* β_0^* *, cuyo número de elementos pertenecientes al subanillo* A *es* r - ord.ram $\mathfrak{p}^*$ *, es decir, tal que*

$$\#(\beta_0^* \cap A) = \text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$

ii) *si* β^* *es base canónica minimal de* $\mathfrak{m}^*$ *, entonces el número de elementos de* β^* *pertenecientes al subanillo* A *es menor o igual que* r - ord.ram $\mathfrak{p}^*$ *, es decir,*

$$\#(\beta^* \cap A) \leq \text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$

Demostración.- Siendo $\mathfrak{p}^*$ el ideal del punto simple $(a_1,...,a_r,b_1,...,b_n)$ y suponiendo ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$, se tiene:

i) De acuerdo con el teorema 1.3.3

$$\dim_k \text{Imagen } \tau = \dim_k \left[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right] - \dim_k \ker \tau = = r - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = r - u$$

luego, salvo permutación de subíndices, podemos suponer que el conjunto de vectores

$$\left\{(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},...,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

es base de Imagen τ , de la que, por prolongación, podrá completarse una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$:

$$\left\{(y_1-b_1)+\mathfrak{m}^{*2},..,(y_u-b_u)+\mathfrak{m}^{*2},(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},..,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

siendo en consecuencia

$$\beta_0^* = \left\{y_1\text{-}b_1,\dots,y_u\text{-}b_u,x_{u+1}\text{-}a_{u+1},\dots,x_r\text{-}a_r\right\}$$

una base minimal de $\mathfrak{m}^*$, obviamente canónica, cuyo número de elementos pertenecientes al subanillo A es r-u (De acuerdo con lo indicado en 1.0, se supone que ninguno de los y_j pertenece al subanillo A).

ii) Si

$$\beta^* = \{x_1\text{-}a_1,\dots,x_d\text{-}a_d,y_{d+1}\text{-}b_{d+1},\dots,y_r\text{-}b_r\}$$

es base canónica minimal de $\mathfrak{m}^*$, entonces, de acuerdo con 1.2.4,

$$\{x_1,\dots,x_d,y_{d+1},\dots,y_r\}$$

será conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$, luego, según el lema 1.2.11, habrá de verificarse: $d \leq r - u$ y en consecuencia

$$\#(\beta^* \cap A) = d \leq r - u$$ ∎

El teorema anterior permite formular otra caracterización del orden de ramificación:

1.3.6 Corolario.- *Siendo $\mathfrak{p}^*$ ideal de un punto simple y $BCM(\mathfrak{m}^*)$ la familia de bases canónicas minimales del ideal de no unidades del anillo local $B_{\mathfrak{p}^*}$, se verifica*

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \text{gr.tr.}(B{:}k) - \text{máx}\{\ \#(\beta^* \cap A) : \beta \in BCM(\mathfrak{m}^*)\ \}$$

1.3.7 Ejemplos.- En los ejemplos siguientes se calculará el orden de ramificación mediante el teorema 1.3.3 y se comprobará el resultado 1.3.5:

a) Para $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición

$$y^2 - 2y - x_2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

y $\mathfrak{p}^* = (x_1,x_2,y\text{-}1)B$, el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es de dimensión dos, siendo su ideal de no unidades

$$\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* = (x_1,x_2,y\text{-}1)\vartheta^* = (x_1,y\text{-}1)\vartheta^*$$

donde la última igualdad sigue de (1), luego ϑ^* es regular, siendo $\{x_1,y\text{-}1\}$ base minimal y en consecuencia

$$\left\{x_1 + \mathfrak{m}^{*2} ,\ (y\text{-}1) + \mathfrak{m}^{*2}\right\}$$

es base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$, luego

$$x_1 + \mathfrak{m}^{*2} \neq 0 + \mathfrak{m}^{*2} \qquad (2)$$

Por otra parte, para $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A = (x_1,x_2)A$, el anillo local $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ también es bidimensional, siendo su ideal de no unidades

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\vartheta = (x_1,x_2)\vartheta$$

luego $\{x_1,x_2\}$ es base minimal de $\mathfrak{m}$ y en consecuencia $\{x_1+\mathfrak{m}^2,x_2+\mathfrak{m}^2\}$ es base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Pasando a imágenes en la aplicación lineal τ, definida en 1.3.2, resulta

$$\tau\left[x_1+\mathfrak{m}^2\right] = x_1+\mathfrak{m}^{*2} \neq 0+\mathfrak{m}^{*2}$$

$$\tau\left[x_2+\mathfrak{m}^2\right] = x_2+\mathfrak{m}^{*2} = (y-1)^2 + \mathfrak{m}^{*2} = 0+\mathfrak{m}^{*2}$$

luego la dimensión de Imagen τ es uno y por tanto

$$\dim_k \ker\tau = \dim_k \left[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right] - \dim_k \text{Imagen } \tau = 2 - 1 = 1$$

lo que, de acuerdo con el teorema 1.3.3, implica

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \dim_k \ker\tau = 1$$

que es el mismo resultado al que conduce el cálculo directo:

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = 1 - 0 = 1$$

Finalmente, comprobemos el teorema 1.3.5 para este ejemplo. La base minimal $\{x_1,y-1\}$ de $\mathfrak{m}^*$, antes indicada, es una base canónica, que verifica la condición i) de 1.3.5, y por otra parte, de acuerdo con el apartado ii) de 1.3.5, $\{x_1,x_2\}$ no será base de $\mathfrak{m}^*$ (en efecto, si lo fuera, entonces, según 1.2.4, $\{x_1,x_2\}$ sería conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, en contradicción con 1.2.11).

b) Para $A = k[x_1,x_2,x_3]$ y $B = k[y_1,y_2,y_3]$ con las condiciones:

$$y_1^2-x_1 = 0 \ , \ y_2^3+2x_1-x_2-2 = 0 \ , \ y_3^4+x_1+3x_2-x_3-1 = 0 \qquad (3)$$

y $\mathfrak{p}^* = (x_1-1,x_2,x_3,y_1-1,y_2,y_3)B$, el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es de dimensión tres, siendo su ideal de no unidades

$$\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* = (x_1-1,x_2,x_3,y_1-1,y_2,y_3)\vartheta^* = (x_1-1,y_2,y_3)\vartheta^*$$

donde la última igualdad sigue de las condiciones (3), de las que resultan:

$$y_1 = \frac{1}{(y_1+1)}(x_1-1) \quad ; \quad x_2 = y_2^3+2(x_1-1) \quad ; \quad x_3 = y_3^4+(x_1-1)+3x_2 \qquad (4)$$

Por tanto, ϑ^* es regular, siendo $\{x_1-1,y_2,y_3\}$ una base minimal de $\mathfrak{m}^*$ y en consecuencia

$$\left\{ (x_1-1) + \mathfrak{m}^{*^2} , y_2+ \mathfrak{m}^{*^2} , y_3+ \mathfrak{m}^{*^2} \right\}$$

será base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*^2}$, luego

$$(x_1-1) + \mathfrak{m}^{*^2} \neq 0 + \mathfrak{m}^{*^2} \qquad (5)$$

Por otra parte, para $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A = (x_1-1,x_2,x_3)A$, el anillo local $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ también es de dimensión 3, siendo su ideal de no unidades

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\vartheta = (x_1-1,x_2,x_3)A$$

luego $\{x_1-1,x_2,x_3\}$ es base minimal de $\mathfrak{m}$ y en consecuencia $\{(x_1-1)+\mathfrak{m}^2,x_2+\mathfrak{m}^2,x_3+\mathfrak{m}^2\}$ es base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Pasando a imágenes en la aplicación lineal τ , se tiene (teniendo en cuenta (4)):

$$\tau\left[(x_1-1)+\mathfrak{m}^2\right] = (x_1-1)+\mathfrak{m}^{*^2}$$

$$\tau\left[x_2+\mathfrak{m}^2\right] = x_2+\mathfrak{m}^{*^2} = y_2^3+2(x_1-1) + \mathfrak{m}^{*^2} = 2\left[(x_1-1)+\mathfrak{m}^{*^2}\right]$$

$$\tau\left[x_3+\mathfrak{m}^2\right] = x_3+\mathfrak{m}^{*^2} = y_3^4+(x_1-1)+3x_2 + \mathfrak{m}^{*^2} = 7\left[(x_1-1)+\mathfrak{m}^{*^2}\right]$$

lo que, recordando (5), implica que la dimensión de la imagen de τ sea uno y en consecuencia:

$$\dim_k \ker \tau = \dim_k \left[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right] - \dim_k \text{Imagen } \tau = 3 - 1 = 2$$

lo que, según el teorema 1.3.3, implica

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \dim_k \ker \tau = 2$$

que es el mismo resultado a que conduce el cálculo directo:

$$J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 & 0 \\ 1 & 3y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4y_3^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = 3 - 1 = 2$$

Finalmente, comprobemos el teorema 1.3.5 para este ejemplo. La base minimal $\{x_1-1,y_2,y_3\}$, antes indicada, es una base canónica, que verifica la condición i) de 1.3.5, pero de acuerdo con el apartado ii) de 1.3.5, por ejemplo $\{x_1-1,x_2,y_3\}$ no puede ser base de $\mathfrak{m}^*$ (en efecto, si lo fuera, entonces, según 1.2.4, $\{x_1,x_2,y_3\}$ sería conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$, en contradicción con 1.2.11). ■

En el apartado 1.2 se determinó el máximo número de coordenadas de uniformización canónicas elegibles de entre las "x", que resultó ser

$$\text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \qquad (*)$$

y parece natural preguntarse que ocurre si se admiten coordenadas de uniformización cualesquiera, no necesariamente canónicas, para tratar de determinar el máximo número de ellas elegibles en el subanillo A , o incluso en el subanillo $A_{\mathfrak{p}}$. Veremos que tal número, curiosamente, vuelve a ser (*), es decir, el máximo número de coordenadas de uniformización pertenecientes al subanillo (A ó $A_{\mathfrak{p}}$), no decrece por limitarnos a considerar coordenadas canónicas.

1.3.8 <u>Teorema</u>.- *Sea* $\mathfrak{p}^*$ *ideal de un punto simple y* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$. *Para todo conjunto,* C *, de coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$, *tal que* $C \subseteq \vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, *el número de elementos* de C *pertenecientes al subanillo* $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$, *es, a lo más,* r - ord.ram $\mathfrak{p}^*$, *es decir,*

$$\boxed{\#(C \cap A_{\mathfrak{p}}) \leq \text{gr.tr.}(B:k) - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*}$$

<u>Demostración</u>.- Sea ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$. De acuerdo con 1.3.5, podemos pues suponer que, salvo permutación de subíndices,

$$\{y_1-b_1,\dots,y_u-b_u,x_{u+1}-a_{u+1},\dots,x_r-a_r\} \qquad (1)$$

es una base minimal de $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$, lo que (según 1.2.4) implica que

$$C_0 = \{y_1,\dots,y_u,x_{u+1},\dots,x_r\}$$

sea un conjunto de coordenadas de uniformización canónicas de $\mathfrak{p}^*$. Vamos a probar que no existe ningún conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$ con más de r-u de sus elementos pertenecientes a $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$. Para ello consideremos el subconjunto de $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$:

$$C^* = \{G_1,\dots,G_{r-u},G_{r-u+1},G^*_{r-u+2},\dots,G^*_r\} \subseteq \vartheta^*$$

tal que $G_1,\dots,G_{r-u},G_{r-u+1} \in \vartheta$ y probemos que C^* no puede ser conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$. En efecto:

$$G_s \in \vartheta \Rightarrow G_s = \frac{e_s}{d_s} \ ; \ e_s, d_s \in A \ ; \ d_s \notin \mathfrak{p} \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

pero, por pertenecer a A , los elementos e_s pueden escribirse en la forma

$$e_s = \sum_{l=1}^{r} c_{sl}(x_l - a_l) + c_s \ ; \ c_{sl} \in A \ ; \ c_s \in k \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

y por tanto

$$e_s - c_s = \sum_{l=1}^{r} c_{sl}(x_l - a_l) \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} = \mathfrak{p}\vartheta \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

luego, pasando a clase residuales módulo $\mathfrak{m}^2$, se tienen los elementos

$$(e_s - c_s) + \mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

cuyas imágenes en la aplicación lineal asociada τ (definida en 1.3.2) serán

$$(e_s - c_s) + \mathfrak{m}^{*2} \in \text{Imagen } \tau \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1 \qquad (2)$$

Ahora bien, por ser (1) base minimal de $\mathfrak{m}^*$, los vectores

$$(y_1-b_1)+\mathfrak{m}^{*2},\dots,(y_u-b_u)+\mathfrak{m}^{*2},(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},\dots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2}$$

forman base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$, luego

$$(x_{u+1}-a_{u+1})+\mathfrak{m}^{*2},\dots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}^{*2} \qquad (3)$$

son linealmente independientes y como además pertenecen a Imagen τ , cuya dimensión, de acuerdo con 1.3.3, es

$$\dim_k \text{Imagen } \tau = \dim_k \left[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right] - \dim \ker \tau = r - u$$

(3) será una base de Imagen τ , por lo que los vectores (2) podrán expresarse como combinación lineal de los vectores (3):

$$(e_s - c_s) + \mathfrak{m}^{*2} = \sum_{l=u+1}^{r} \gamma_{sl}\left[(x_l - a_l) + \mathfrak{m}^{*2}\right] \ ; \ \gamma_{sl} \in k \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

luego

$$E_s^* = (e_s - c_s) - \sum_{l=u+1}^{r} \gamma_{sl}(x_l - a_l) \in \mathfrak{m}^{*2} \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

y por tanto

$$e_s = c_s + \sum_{l=u+1}^{r} \gamma_{sl}(x_l - a_l) + E_s^* \ ; \ s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

Considerando ahora las derivaciones parciales respecto de las y_j pertenecientes a C_0 , se tiene

$$\frac{\partial e_s}{\partial y_j} = \frac{\partial E^*_s}{\partial y_j} \quad ; \quad j=1,\dots,u \quad ; \quad s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

ya que, por ser las $c_s, \gamma_{sl} \in k$ y por ser C_0 conjunto de coordenadas de uniformización, ha de ser

$$\frac{\partial c_s}{\partial y_j} = 0 \ , \quad \frac{\partial (x_l - a_l)}{\partial y_j} = \frac{\partial x_l}{\partial y_j} = 0 \ , \quad \frac{\partial \gamma_{sl}}{\partial y_j} = 0$$

Además

$$E^*_s \in \mathfrak{m}^{*2} \Rightarrow \frac{\partial E^*_s}{\partial y_j} \in \mathfrak{m}^*$$

y por tanto

$$\frac{\partial e_s}{\partial y_j} \in \mathfrak{m}^* \quad ; \quad j=1,\dots,u \quad ; \quad s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

Análogamente se prueba que

$$\frac{\partial d_s}{\partial y_j} \in \mathfrak{m}^* \quad ; \quad j=1,\dots,u \quad ; \quad s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial G_s}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{e_s}{d_s}\right] = \left[d_s \frac{\partial e_s}{\partial y_j} - e_s \frac{\partial d_s}{\partial y_j}\right] d_s^{-2} \in \mathfrak{m}^* \ ; \ j=1,\dots,u; s=1,\dots,r-u,r-u+1$$

luego la matriz de elementos de ϑ^* :

$$J_{11} = \frac{\partial (G_1, \dots, G_{r-u}, G_{r-u+1})}{\partial (y_1, \dots, y_u)}$$

tiene todos sus elementos pertenecientes al ideal $\mathfrak{m}^*$. Consideremos ahora la matriz de elementos de ϑ^* :

$$J(C^*, C_0) = \frac{\partial \left[G_1, \dots, G_{r-u+1}, G^*_{r-u+2}, \dots, G^*_r\right]}{\partial (y_1, \dots, y_u, x_{u+1}, \dots, x_r)}$$

que podemos descomponer en cajas en la forma

$$J(C^*, C_0) = \left[\begin{array}{c|c} J_{11} & J_{12} \\ \hline J_{21} & J_{22} \end{array}\right] \qquad (4)$$

donde J_{11} es la indicada anteriormente y las otras cajas son

$$; \quad J_{12} = \frac{\partial(G_1,\ldots,G_{r-u+1})}{\partial(x_{u+1},\ldots,x_r)}$$

$$J_{21} = \frac{\partial\left[G^*_{r-u+2},\ldots,G^*_r\right]}{\partial(y_1,\ldots,y_u)} \quad ; \quad J_{22} = \frac{\partial\left[G^*_{r-u+2},\ldots,G^*_r\right]}{\partial(x_{u+1},\ldots,x_r)}$$

siendo las respectivas dimensiones de las matrices (4):

$$r \times r \qquad \left[\begin{array}{c|c} (r-u+1)\times u & (r-u+1)\times(r-u) \\ \hline (u-1)\times u & (u-1)\times(r-u) \end{array}\right]$$

Por tanto, toda submatriz cuadrada, H , de orden u de $J(C^*,C_0)$, obtenida a partir de sus u primeras columnas, contendrá una, al menos, de las filas de J_{11} (cuyos elementos pertenecen todos al ideal $\mathfrak{m}^*$), luego det H $\in \mathfrak{m}^*$. En consecuencia, desarrollando el determinante de (4) por la regla de Laplace, respecto de sus u primeras columnas, resulta

$$\det J(C^*,C_0) \in \mathfrak{m}^*$$

Pero C_0 era conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, por lo que, según el criterio 1.2.6, C^* no será conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, tal como se deseaba probar. ∎

El teorema anterior permite dar una nueva caracterización del orden de ramificación:

1.3.9 Corolario.- *Siendo* $\mathfrak{p}^*$ *ideal de un punto simple,* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$, $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$ *y* $CU(\mathfrak{p}^*)$ *la familia de conjuntos de coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$ *, se verifica*

$$\boxed{\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \max\{\#(C \cap \vartheta) : C \in CU(\mathfrak{p}^*)\}}$$

Demostración.- Del teorema anterior y de 1.2.11 i), sin más que tener en cuenta que $x_i \in A \subseteq \vartheta$; $i=u+1,\ldots,r$, resulta:

$$\max\{\#(C \cap \vartheta) : C \in CU(\mathfrak{p}^*)\} = r - \text{ord.ram } \mathfrak{p}^*$$ ∎

1.3.10 Ejemplo.- Sean $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[y_1,y_2]$, donde $y_1^2 - x_1 = 0$, $y_2^3 - x_2 = 0$. Para $\mathfrak{p}_1^* = (x_1-1,x_2,y_1-1,y_2)B$, según se comprobó en 1.2.13 b), era ord.ram $\mathfrak{p}_1^* = 1$ y $\{x_1,y_2\}$ conjunto de coordenadas de uniformización.

Vamos ahora a comprobar que, de acuerdo con 1.3.8, no existe ningún conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$ contenido en $A_{\mathfrak{p}_1}$, donde $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$. Para ello consideremos

$$\mathcal{C}_1 = \{G_1, G_2\} \subseteq A_{\mathfrak{p}_1}$$

y vamos a probar que $\mathcal{C}_1$ no puede ser conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$. En efecto, los elementos G_1 y G_2, por pertenecer a $A_{\mathfrak{p}_1}$, podrán expresarse en la forma

$$G_i = \frac{e_i}{d_i} \quad ; \quad e_i, d_i \in A \quad ; \quad d_i \notin \mathfrak{p}_1 \quad ; \quad i=1,2$$

y los elementos e_i, por pertenecer a A, podrán ser escritos en la forma

$$e_i = a_{i1}(x_1 - 1) + a_{i2}\, x_2 + c_i \quad ; \quad a_{i1}, a_{i2} \in A \quad ; \quad c_i \in k \quad ; \quad i=1,2$$

luego

$$e_i = a_{i1}(x_1 - 1) + a_{i2}\, y_2^3 + c_i \quad ; \quad i=1,2$$

pero, por ser x_1, y_2 coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$, las derivaciones $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ son linealmente independientes, luego

$$\frac{\partial e_i}{\partial y_2} = \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_2}(x_1 - 1) + \frac{\partial a_{i2}}{\partial y_2}\, y_2^3 + 3\, a_{i2}\, y_2^2 \quad ; \quad i=1,2$$

y, según 1.2.1 b)

$$\frac{\partial a_{i1}}{\partial y_2}, \frac{\partial a_{i2}}{\partial y_2} \in B_{\mathfrak{p}_1^*} \quad ; \quad i=1,2$$

luego

$$\frac{\partial e_i}{\partial y_2} \in \mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*} = (x_1 - 1, y_2) B_{\mathfrak{p}_1^*} \quad ; \quad i=1,2$$

y análogamente se probaría que

$$\frac{\partial d_i}{\partial y_2} \in \mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*} \quad ; \quad i=1,2$$

luego

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{e_i}{d_i}\right] = \left[d_i \frac{\partial e_i}{\partial y_2} - e_i \frac{\partial d_i}{\partial y_2}\right] d_i^{-2} \in \mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*} \quad ; \quad i=1,2$$

y en consecuencia

$$\det \frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(x_1, y_2)} \in \mathfrak{p}_1^* B_{\mathfrak{p}_1^*}$$

lo que, según el criterio 1.2.6, permite asegurar que C_1 no es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_1^*$, por serlo $\{x_1,y_2\}$.

Por otra parte, para $\mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2,y_1,y_2)$, según se comprobó en 1.2.13 c), era ord.ram $\mathfrak{p}_2^* = 2$ e $\{y_1,y_2\}$ conjunto de coordenadas de uniformización. Vamos ahora a comprobar que, de acuerdo con 1.3.8, no existe un conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_2^*$, tal que alguna de sus coordenadas pertenezca a $A_{\mathfrak{p}_2}$, donde $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2^* \cap A$. Para ello consideremos

$$C_2 = \{G_1,G_2\} \subseteq B_{\mathfrak{p}_2^*} \quad ; \quad G_1 \in A_{\mathfrak{p}_2}$$

y vamos a probar que C_2 no puede ser conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_2^*$. En efecto, se tiene

$$G_1 = \frac{e_1}{d_1} \in A_{\mathfrak{p}_2} \quad ; \quad e_1,d_1 \in A \quad ; \quad d_1 \notin \mathfrak{p}_2$$

pudiendo expresarse

$$e_1 = a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + c_1 \quad ; \quad a_{11},a_{12} \in A \quad ; \quad c_1 \in k$$

luego

$$e_1 = a_{11}\,y_1^2 + a_{12}\,y_2^3 + c_1$$

y por ser $\{y_1,y_2\}$ conjunto de coordenadas de uniformización, las derivaciones respecto de y_1 e y_2 serán linealmente independientes, luego se tiene:

$$\frac{\partial e_1}{\partial y_1} = \frac{\partial a_{11}}{\partial y_1}\,y_1^2 + 2\,a_{11}\,y_1 + \frac{\partial a_{12}}{\partial y_1}\,y_2^3 \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial y_2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial y_2}\,y_1^2 + \frac{\partial a_{12}}{\partial y_2}\,y_2^3 + 3\,a_{12}\,y_2^2 \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

y análogamente resulta

$$\frac{\partial d_1}{\partial y_1}\,,\ \frac{\partial d_1}{\partial y_2} \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

luego

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{e_1}{d_1}\right] = \left[d_1\,\frac{\partial e_1}{\partial y_1} - e_1\,\frac{\partial d_1}{\partial y_1}\right] d_1^{-2} \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_2} \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

y en consecuencia

$$\det \frac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(y_1,y_2)} \in \mathfrak{p}_2^* B_{\mathfrak{p}_2^*}$$

lo que, según el criterio 1.2.6, permite asegurar que C_2 no es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}_2^*$, por serlo $\{y_1,y_2\}$. ■

El siguiente resultado permite reducir la determinación de coordenadas de uniformización de primos cualesquiera al caso en que los primos sean ideales de punto.

1.3.11 <u>Proposición</u>.- *Siendo* $\mathfrak{p}^*$ *un ideal de punto simple y* $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}^*$, *se verifican:*

i) *el anillo local* $B_{\mathfrak{p}''}$ *es también regular*

ii) *todo conjunto de coordenadas de uniformización de* $\mathfrak{p}^*$, *también lo es de* $\mathfrak{p}''$

<u>Demostración</u>.- i) Por ser $\mathfrak{p}^*$ ideal de punto simple, de acuerdo con lo indicado en 1.0, será

$$\operatorname{rango} \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} = n$$

y de la inclusión $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}^*$ se deduce que

$$H : B/\mathfrak{p}'' \longrightarrow B/\mathfrak{p}^* \quad ; \quad \forall b \in B \ , \ H(b+\mathfrak{p}'') = b + \mathfrak{p}^*$$

es homomorfismo, en el cual

$$\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}''} \xrightarrow{\quad H \quad} \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*}$$

luego

$$\operatorname{rango} \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}''} \geq \operatorname{rango} \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} = n$$

lo que, teniendo en cuenta que el rango $\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}''}$ ha de ser menor o igual que n , implica que tal rango sea n , y por tanto el anillo local $B_{\mathfrak{p}''}$ sea regular.

ii) Sea $C = \{G_1,\dots,G_r\}$ un conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$. Por tanto, de acuerdo con 1.2.1: $C \subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$, C es base trascendente del c.f.(B:k) y

$$\frac{\partial}{\partial G_i} B_{\mathfrak{p}^*} \subseteq B_{\mathfrak{p}^*} \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,r}$$

lo que, teniendo en cuenta que $B \subseteq B_{\mathfrak{p}^*}$, implica

$$\frac{\partial}{\partial G_i} B \subseteq B_{\mathfrak{p}^*} \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,r} \qquad (1)$$

Por otra parte, $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}^*$ implica $B_{\mathfrak{p}^*} \subseteq B_{\mathfrak{p}''}$, luego $C \subseteq B_{\mathfrak{p}''}$ y, además, de (1) resulta obviamente

$$\frac{\partial}{\partial G_i} B \subseteq B_{\mathfrak{p}''} \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,r}$$

por lo que, según 1.2.2, C será conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}''$. ■

1.4 Condiciones de no ramificacion local

De acuerdo con la definición tradicional, un ideal primo se dice que "se ramifica" si su extendido no es radical. Desde el punto de vista local, que estamos considerando en este capítulo I, la extensión debe seguirse de localización, como se precisa en la siguiente:

1.4.1 <u>Definición</u>.- *Diremos que el ideal* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B *es de* **ramificación local**, *si el extendido del ideal* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$ *al anillo local* $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ *no es el ideal de no-unidades de* ϑ^* *, es decir, si*

$$\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{p}^*\vartheta^*$$

1.4.2 <u>Lema</u>.- *Siendo* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$ *y* $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ *, se verifican:*

i) *si* ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$ *entonces* $\mathfrak{p}\vartheta^*$ *es el ideal* $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$ *, de no unidades de* ϑ^*

ii) *siendo* $\mathfrak{p}^*$ *ideal de punto y primo minimal de* $\mathfrak{p}$B *, si* ord.ram $\mathfrak{p}^* > 0$ *, entonces* $\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{p}^*\vartheta^*$ *(pero* $\sqrt{\mathfrak{p}\vartheta^*} = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$*)*

<u>Demostración</u>.- i) si ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$, entonces, de acuerdo con el apartado 2) de 1.2.9, $\{x_1,...,x_r\}$ es conjunto de coordenadas de uniformización de $\mathfrak{p}^*$, lo cual (según 1.2.3) implica que $k[x_1,...,x_r]$ contiene a una base de $\mathfrak{m}^*$, es decir, $\mathfrak{m}^*$ admite una base, β^* , cuyos elementos pertenecen todos al subanillo A . Por tanto,

$$\beta^* \subseteq \mathfrak{m}^* \cap A = \mathfrak{m}^* \cap (B \cap A) = (\mathfrak{m}^* \cap B) \cap A = \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$$

luego se tiene

$$\beta^* \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^*$$

y por tanto

$$\mathfrak{m}^* = \beta^*\vartheta^* \subseteq \mathfrak{p}\vartheta^* \subseteq \mathfrak{p}^*\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$$

lo que implica: $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$

ii) Supongamos que el ideal de punto $\mathfrak{p}^*$ sea primo minimal de $\mathfrak{p}$B y ord.ram $\mathfrak{p}^* > 0$. Consideremos una descomposición primaria irredundante del ideal extendido $\mathfrak{p}$B :

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^* \cap \ldots$$

Puesto que $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ implica $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^*$, se tiene

$$\mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^* \cap \ldots \subseteq \mathfrak{p}^*$$

luego el primo $\mathfrak{p}^*$ contiene a alguno de los componentes primarios, $\mathfrak{q}_i^*$, de $\mathfrak{p}B$. Si, por ejemplo, $\mathfrak{q}_1^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, entonces $\sqrt{\mathfrak{q}_1^*} \subseteq \mathfrak{p}^*$, lo que implica $\sqrt{\mathfrak{q}_1^*} = \mathfrak{p}^*$ (ya que, si fuera $\sqrt{\mathfrak{q}_1^*} \subsetneq \mathfrak{p}^*$, entonces $\mathfrak{p}^*$ no sería primo minimal de $\mathfrak{p}B$, en contradicción con nuestra hipótesis). En consecuencia, aplicando propiedades bien conocidas de paso al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, se tiene:

$$\mathfrak{p}\vartheta^* = (\mathfrak{p}B)\vartheta^* = (\mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^* \cap \ldots)\vartheta^* = \mathfrak{q}_1^*\vartheta^*$$

luego

$$\sqrt{\mathfrak{p}\vartheta^*} = \sqrt{\mathfrak{q}_1^*\vartheta^*} = \sqrt{\mathfrak{q}_1^*}\vartheta^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* = \mathfrak{m}^* \qquad (1)$$

Por otra parte, vamos a probar que la condición ord.ram $\mathfrak{p}^* > 0$ implica

$$\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{m}^* \qquad (2)$$

Distingamos dos casos, según que el anillo local ϑ^* sea regular, o no lo sea. Si ϑ^* es regular, se ha de verificar (2), ya que si fuera $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$, ello implicaría que el ideal $\mathfrak{m}^*$ admite una base formada por elementos pertenecientes a $\mathfrak{p}$ y por tanto al subanillo A , en contradicción con 1.3.5 ii). Si, por el contrario, ϑ^* no es regular, entonces

$$\dim_k \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2} > \dim \vartheta^* = \text{alt } \mathfrak{p}^*\vartheta^* = \text{alt } \mathfrak{p}^* =$$

$$= \text{gr.tr.}(B{:}k) - \dim \mathfrak{p}^* = r - 0 = r \qquad (3)$$

pero, por ser el ideal $\mathfrak{p}$ de la forma

$$\mathfrak{p} = (x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r)A$$

extendiendo al anillo local ϑ^* , se tendrá

$$\mathfrak{p}\vartheta^* = (x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r)\vartheta^*$$

luego, pasando a clases residuales módulo $\mathfrak{m}^{*2}$,

$$\{(x_1 - a_1) + \mathfrak{m}^{*2}, \ldots, (x_r - a_r) + \mathfrak{m}^{*2}\}$$

será sistema de generadores del subespacio $\mathfrak{p}\vartheta^*/\mathfrak{m}^{*2}$ del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$, y por tanto

$$\dim_k \left[\mathfrak{p}\vartheta^*/\mathfrak{m}^{*2}\right] \leq r$$

lo que, junto con (3), implica

$$\dim_k \left[\mathfrak{p}\vartheta^*/\mathfrak{m}^{*2}\right] < \dim_k \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2}$$

y esta desigualdad sólo puede verificarse si ocurre (2) , ya que $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$ implicaría

$$\dim_k \left[\mathfrak{p}\vartheta^*/\mathfrak{m}^{*2}\right] = \dim_k \mathfrak{m}^*/\mathfrak{m}^{*2} \qquad \blacksquare$$

1.4.3 <u>Observación</u>.- La condición de ser $\mathfrak{p}^*$ primo minimal de $\mathfrak{p}B$ (considerada en el apartado ii del lema anterior) no es superflua, como se verá en el siguiente contraejemplo.

<u>Contraejemplo</u>.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición

$$x_1y - x_2 = 0 \qquad (1)$$

y $\mathfrak{p}^* = (x_1,x_2,y)B$, se tiene:

$$J_{xy} = (y,-1,x_1) \Rightarrow \text{rango} \left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} = 1 = n$$

luego, de acuerdo con lo indicado en 1.0, el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular (lo que es natural por ser el paraboloide hiperbólico (1) una superficie lisa) y además

$$J_y = (x_1) \Rightarrow \text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango} \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = 1 - 0 = 1$$

pero el ideal $\mathfrak{p}^*$ no es de ramificación local, según vamos a comprobar. En efecto, $\mathfrak{p}^* \cap A$ es el ideal maximal del subanillo A :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A = (x_1,x_2)A$$

y su extendido en el dominio B es

$$\mathfrak{p}B = (x_1,x_2)B \qquad (2)$$

que es un primo de dimensión uno de B , ya que el anillo cociente $B/\mathfrak{p}B$ es obviamente isomorfo al anillo de polinomios k[y] . En consecuencia $\mathfrak{p}B \subsetneq \mathfrak{p}^*$. Y ahora, por propiedades de paso al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, el ideal extendido $(\mathfrak{p}B)\vartheta^* = \mathfrak{p}\vartheta^*$ será primo de ϑ^* , verificándose $\sqrt{\mathfrak{p}\vartheta^*} = \mathfrak{p}\vartheta^* \subsetneq \mathfrak{p}^*\vartheta^*$, es decir, $\sqrt{\mathfrak{p}\vartheta^*} \neq \mathfrak{m}^*$.

Ello no contradice al apartado ii) del lema anterior, pues como $\mathfrak{p}^*$

contiene estrictamente al primo (2), el ideal $\mathfrak{p}^*$ no es primo minimal de $\mathfrak{p}B$. ∎

1.4.4 Teorema.- *Siendo* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$ *y* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$, *se verifican:*

i) *si* $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0$, *entonces* $\mathfrak{p}^*$ *no es de ramificación local*

ii) *siendo* $\mathfrak{p}^*$ *ideal de punto y primo minimal de* $\mathfrak{p}B$, *si* $\operatorname{ord.ram}\mathfrak{p}^* > 0$, *entonces* $\mathfrak{p}^*$ *es de ramificación local*

Demostración.- i) según 1.4.2 i), se verifica: $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{m}^*$, luego el extendido del ideal $\mathfrak{p}$ al anillo local ϑ^* es su maximal, luego $\mathfrak{p}^*$ no es de ramificación local (según 1.4.1).

ii) según 1.4.2 ii), el ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta^*$ tiene por radical el maximal $\mathfrak{m}^*$, siendo distinto de él, luego es primario no primo del anillo local ϑ^* , y por tanto $\mathfrak{p}\vartheta^* \neq \mathfrak{p}^*\vartheta^*$, luego $\mathfrak{p}^*$ es de ramificación local (de acuerdo con 1.4.1). ∎

1.4.5 Corolario.- *Si el ideal de punto* $\mathfrak{p}^*$ *es primo minimal del ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ (*del ideal* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$), *se verifica:*

$$\boxed{\mathfrak{p}^* \textit{ es de ramificación local} \Leftrightarrow \operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* > 0}$$

(En el capítulo II se verá que puede prescindirse de la condición de ser $\mathfrak{p}^*$ primo minimal de $\mathfrak{p}B$, con tal de que B sea entero sobre A).

El siguiente resultado permite reducir la verificación de si un primo, $\mathfrak{p}''$, de B no es de ramificación local, al caso de un ideal de punto $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}''$, lo que tendrá interés si existe tal $\mathfrak{p}^*$ (lo cual es seguro en caso de ser k algebraicamente cerrado).

1.4.6 Corolario.- *Sea* $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec} B$. *Si existe un ideal de punto* $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}''$, *tal que* $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0$, *entonces* $\mathfrak{p}''$ *no es de ramificación local.*

Demostración.- Sea $\mathfrak{p}^*$ un ideal de punto del dominio B , tal que $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}''$ y $\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0$. Según 1.2.9, apartado 3, será

$$\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}'' = 0$$

lo que, de acuerdo con 1.4.4 i), implica que $\mathfrak{p}''$ no sea de ramificación local.

1.4.7 <u>Ejemplo</u>.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición

$$y^2 + x_1^2 - x_2 = 0 \qquad (1)$$

se tiene: $J_y = (2y)$ .Vamos a comprobar si son de ramificación local algunos primos de B .

Para $\mathfrak{p}_0^* = (x_1,x_2-1,y-1)B$, resulta

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - 1 = 0$$

luego, (según 1.4.4 i)) $\mathfrak{p}_0^*$ no debe ser de ramificación local. Y, en efecto, pasando al contraído en el subanillo A :

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A = (x_1,x_2-1)A$$

y extendiendo este ideal al anillo local $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$, de (1) resulta

$$y-1 = \frac{1}{y+1}(x_2-1) - \frac{x_1}{y+1}x_1$$

luego

$$\mathfrak{p}_0\vartheta_0^* = (x_1,x_2-1)\vartheta_0^* = (x_1,x_2-1,y-1)\vartheta_0^* = \mathfrak{p}_0^*\vartheta_0^* = \mathfrak{m}_0^*$$

(de acuerdo con 1.4.2 i)) y por tanto $\mathfrak{p}_0^*$ no es de ramificación local.

En cambio, para $\mathfrak{p}_1^* = (x_1,x_2,y)B$, resulta

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_1^* = n - \text{rango } \left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = 1 - 0 = 1$$

y pasando ahora al contraído en el subanillo A :

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A = (x_1,x_2)A$$

y extendiendo este ideal al anillo B , teniendo en cuenta (1), resulta:

$$\mathfrak{p}_1B = (x_1,x_2)B = (x_1,x_2,y^2)B$$

cuyo radical es obviamente $\mathfrak{p}_1^*$, luego $\mathfrak{p}_1^*$ es primo minimal de $\mathfrak{p}_1B$. En consecuencia (según 1.4.4 ii)), $\mathfrak{p}_1^*$ será de ramificación local. Y, en efecto, extendiendo $\mathfrak{p}_1$ al anillo local $\vartheta_1^* = B_{\mathfrak{p}_1^*}$, de (1) resulta:

$$\mathfrak{p}_1\vartheta_1^* = (x_1,x_2)\vartheta_1^* = (x_1,x_2,y^2)\vartheta_1^* \neq \mathfrak{p}_1^*\vartheta_1^* \quad ; \quad \sqrt{\mathfrak{p}_1\vartheta_1^*} = \mathfrak{p}_1^*\vartheta_1^*$$

(de acuerdo con 1.4.2 ii)), es decir, $\mathfrak{p}_1\vartheta_1^*$ es un ideal cuyo radical es el maximal $\mathfrak{p}_1^*\vartheta_1^*$, siendo distinto de él, luego es primario no primo, y en consecuencia $\mathfrak{p}_1^*$ es de ramificación local.

Finalmente, consideremos el ideal $\mathfrak{p}'' = (x_1)B$, que será primo, ya que

$$B/\mathfrak{p}'' \simeq k[X_2,Y]/(Y^2-X_2)$$

siendo Y^2-X_2 polinomio irreducible del D.F.U. $k[X_2,Y]$. Ahora bien, $\mathfrak{p}''$ está contenido en los dos ideales considerados anteriormente, $\mathfrak{p}_0^*$ y $\mathfrak{p}_1^*$ (de respectivos órdenes de ramificación 0 y 1), luego, de acuerdo con 1.4.6, $\mathfrak{p}''$ no será de ramificación local. Y, en efecto, pasando al contraído en A :

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'' \cap A = (x_1)A$$

y extendiendo al anillo local $\vartheta'' = B_{\mathfrak{p}''}$

$$\mathfrak{p}'\vartheta'' = (x_1)\vartheta'' = (x_1,x_1^2+y^2-x_2)\vartheta'' = (x_1,y^2-x_2)\vartheta''$$

que es el ideal de no unidades, $\mathfrak{p}''\vartheta''$, del anillo local ϑ'' . En consecuencia, $\mathfrak{p}''$ no es de ramificación local.

Capítulo II.

Ramificación Global

2.1 Ideales de ramificación global

De acuerdo con lo indicado al comienzo de 1.1, siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición

$$x_1^2 + x_2^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad (*)$$

los puntos de ramificación, respecto de la extensión $A \hookrightarrow B$, son aquellos para los cuales es $y = 1$, que forman una circunferencia contenida en la superficie esférica de ecuación (*).

En general, dada una variedad algebraica afín, V^* , el subconjunto de puntos de V^* , cuyo orden de ramificación es mayor o igual que un determinado número natural, u , resulta ser una subvariedad de V^* . Vamos a ocuparnos de estudiar los ideales del anillo B , que definen tales subvariedades de ramificación.

De acuerdo con la notación de 1.0, considerando la matriz jacobiana

$$J_y(f_1,\dots,f_m) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} \qquad (m \geq n)$$

al ideal de B generado por los menores de orden n-u+1 de esta matriz, lo notaremos

$$\mathrm{ram}_u(f_1,\dots,f_m) \qquad (**)$$

pudiendo ser $u=1,2,\dots,n$. Considerando ahora otro conjunto de condiciones de definición del mismo anillo B :

$$f'_t(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) = 0 \quad ; \quad t=1,\dots,m' \quad (m' \geq n)$$

es decir, considerando otra base del ideal ker **f** (definido en 1.0):

$$\left\{f'_t(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_n)\right\}_{t=1,\dots,m'}$$

se llegará, de modo análogo, a los ideales de B :

$$\mathrm{ram}_u(f'_1,\dots,f'_{m'}) \quad ; \quad u=1,\dots,n$$

y parece natural preguntarse si estos ideales coinciden, o no, con los (**). La respuesta es afirmativa:

2.1.1 <u>Proposición</u>.- *De acuerdo con la notación precedente, se verifica:*

$$\mathrm{ram}_u(f'_1,\dots,f'_{m'}) = \mathrm{ram}_u(f_1,\dots,f_m) \quad ; \quad u=1,\dots,n$$

Demostración.- Por ser, tanto las f_s , como las f'_t , bases de ker **f** , existirán $\alpha_{ts} \in k[X,Y]$, tales que

$$f'_t = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ts} f_s \quad ; \quad t=1,\dots,m'$$

luego

$$\frac{\partial f'_t}{\partial Y_j} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{ts}}{\partial Y_j} f_s + \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ts} \frac{\partial f_s}{\partial Y_j} \quad ; \quad j=1,\dots,n \quad ; \quad t=1,\dots,m'$$

y pasando a imágenes en el homomorfismo **f** , resulta

$$\frac{\partial f'_t}{\partial y_j} = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ts} \frac{\partial f_s}{\partial y_j} \quad ; \quad j=1,\dots,n \quad ; \quad t=1,\dots,m'$$

luego, por las propiedades de multilinealidad de los determinantes, todo menor de orden d de la matriz $J_y(f'_1,\dots,f'_{m'})$ se puede expresar como B-combinación lineal de menores de orden d de la matriz $J_y(f_1,\dots,f_m)$. En consecuencia

$$\mathrm{ram}_u(f'_1,\dots,f'_{m'}) \subseteq \mathrm{ram}_u(f_1,\dots,f_m) \quad ; \quad u=1,\dots,n$$

probándose de modo similar la inclusión recíproca. ∎

2.1.2 Definición.- *Al ideal generado por los menores de orden* n-u+1 *de la matriz* J_y *(que, según se acaba de probar, no depende de la base del ideal* ker **f** *considerada), lo notaremos* $\mathrm{ram}_u B$, es decir

$$\boxed{\mathrm{ram}_u B = \mathrm{ram}_u(f_1,\dots,f_m)}$$

y llamaremos **ideal de ramificación de orden** u (u=1,...,n) . *Completaremos definiendo los ideales de ramificación de órdenes cero y* n+1 , *en la forma*

$$\boxed{\mathrm{ram}_0 B = (0) \quad ; \quad \mathrm{ram}_{n+1} B = B}$$

Geométricamente, si V^* *es la variedad de* k^{r+n} *que se está considerando (cuyo anillo de coordenadas es* B*), a la subvariedad de* V^* *definida por el ideal* $\mathrm{ram}_u B$ *la llamaremos* **subvariedad de ramificación de orden** u *y la notaremos* R^*_u .

Pasemos a estudiar algunas propiedades de los ideales $\mathrm{ram}_u B$ (y de sus respectivas subvariedades R^*_u).

2.1.3 Proposición.- *El ideal de ramificación de orden uno es no nulo, es decir*

$$\boxed{\mathrm{ram}_1 B \neq (0)}$$

Demostración.- Por ser los elementos y_j algebraicos sobre el subanillo A , existen polinomios con coeficientes en A :

$$\phi_d(Y_d) \in A[Y_d] \quad ; \quad {\scriptstyle d=1,\dots,n} \qquad (1)$$

cuyas imágenes en el epimorfismo **f** se anulan, es decir, tales que

$$\phi_d(y_d) = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle d=1,\dots,n} \qquad (2)$$

Supondremos los polinomios (1) de grado mínimo, de entre los que verifican (2). De acuerdo con lo indicado en 1.0, el ideal ker **f** admite una base de la forma

$$\left\{ f_s(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_n) \right\}_{s=1,\dots,m}$$

luego los polinomios (1), que, por verificarse (2), pertenecen a ker **f** , podrán expresarse en la forma

$$\phi_d = \sum_{s=1}^{m} \beta_{ds}\, f_s \quad ; \quad {\scriptstyle d=1,\dots,n}$$

donde $\beta_{ds} \in k[X,Y]$. Por ser las Y_j indeterminadas independientes, derivando respecto de ellas, se tiene:

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial Y_j} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \beta_{ds}}{\partial Y_j} f_s + \sum_{s=1}^{m} \beta_{ds} \frac{\partial f_s}{\partial Y_j} \quad ; \quad {\scriptstyle j=1,\dots,n} \quad ; \quad {\scriptstyle d=1,\dots,n}$$

luego, pasando a imágenes en **f** , teniendo en cuenta que $f_s \in$ ker **f** y notando $b_{ds} = \mathbf{f}(\beta_{ds})$, queda

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y_j} = \sum_{s=1}^{m} b_{ds} \frac{\partial f_s}{\partial y_j} \quad ; \quad {\scriptstyle j,d=1,\dots,n}$$

de donde resulta

$$\frac{\partial(\phi_1,\dots,\phi_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} = \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{nm} \end{bmatrix} J_y \qquad (3)$$

Ahora bien, como en ϕ_d no aparecen las Y_j tales que $j \neq d$, será

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y_j} = 0 \quad , \quad \text{si } j \neq d$$

luego

$$\det \frac{\partial(\phi_1,\ldots,\phi_n)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_n)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi_j}{\partial Y_j} \qquad (4)$$

pero, por ser los polinomios (1) de grado mínimo, de entre los que verifican (2), y por ser k de característica cero, habrá de ser

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial y_j} = f\left[\frac{\partial\phi_j}{\partial Y_j}\right] \neq 0 \quad ; \quad {\scriptstyle j=1,\ldots,n} \qquad (5)$$

lo que, recordando que B es un dominio, implica

$$\det \frac{\partial(\phi_1,\ldots,\phi_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi_j}{\partial y_j} \neq 0$$

En consecuencia, de (3) se deduce que

$$\text{rango } J_y = n$$

luego existe, al menos, un menor no nulo de orden n en la matriz J_y . Dichos menores generan el ideal $\text{ram}_1 B$, que, en consecuencia, será no nulo. ∎

Nota.- La proposición anterior admite la siguiente interpretación geométrica: la subvariedad de ramificación de orden 1 es subvariedad propia, es decir, $R_1^* \neq V^*$

2.1.4 Proposición.- $\text{ram}_u B \subseteq \text{ram}_{u+1} B$; ${\scriptstyle u=0,1,\ldots,n}$

Demostración.- Para u=0,1,...,n-1 , basta recordar la definición 2.1.2 y tener en cuenta que al desarrollar cualquier menor de orden n-u+1 de la matriz $J_y(f_1,\ldots,f_m)$ por los menores de los elementos de una de sus líneas, se obtiene una B-combinación lineal de menores de orden n-u = n-(u+1)-1 de esa matriz. Y para u=0 y u=n sigue inmediatamente de la definición 2.1.2. ∎

Nota.- Las dos últimas proposiciones admiten una interpretación geométrica inmediata:

$$V^* = R_0^* \supsetneq R_1^* \supseteq R_2^* \supseteq \ldots \supseteq R_n^* \supseteq R_{n+1}^* = \emptyset$$

2.1.5 Proposición.- *Siendo* $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec } B$, *son equivalentes:*

i) $\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = u$

ii) $\text{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^*$ y $\text{ram}_{u+1} B \not\subseteq \mathfrak{p}^*$

Demostración.- Basta considerar las siguientes afirmaciones:

a) ord.ram $\mathfrak{p}^* = u$

b) rango $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*} = n\text{-}u$

c) en la matriz $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$ todos los menores de orden n-u+1 son nulos, existiendo, al menos, un menor de orden n-u no nulo

d) en la matriz J_y , todos los menores de orden n-u+1 pertenecen a $\mathfrak{p}^*$, existiendo, al menos, un menor de orden n-u no perteneciente a $\mathfrak{p}^*$

e) $\mathrm{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^*$ y $\mathrm{ram}_{u+1} B \not\subset \mathfrak{p}^*$

siendo inmediatas las equivalencias:

$$a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow e) \qquad \blacksquare$$

Nota.- La proposición anterior admite la siguiente versión geométrica: siendo V^* la variedad de k^{r+n} considerada, cuyo anillo de coordenadas es B , para cualquier subvariedad irreducible W^* de V^* , se verifica:

$$\boxed{\text{ord.ram } W^* = u} \Leftrightarrow \boxed{W^* \subseteq R^*_u \ \wedge \ W^* \not\subset R^*_{u+1}}$$

En consecuencia, si W^* es un punto, se tiene: R^*_1 es el subconjunto de puntos de V^* cuyo orden de ramificación es mayor que cero, es decir,

$$R^*_1 = \{ P^* \in V^* : \text{ord.ram } P^* > 0 \}$$

y, de modo más general, R^*_u es el subconjunto de puntos de V^* , cuyo orden de ramificación es mayor o igual que u , es decir

$$R^*_u = \{ P^* \in V^* : \text{ord.ram } P^* \geq u \}$$

2.1.6 Corolario.- *Si existe un ideal de punto simple,* $\mathfrak{p}^*$ *, tal que* $\mathrm{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^*$ *, entonces* $u \leq r$.

Demostración.- Si $\mathfrak{p}^*$ es ideal de punto simple, entonces, de acuerdo con 1.1.6,

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \leq r$$

y, por otra parte, si $\mathrm{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^*$, según 2.1.5,

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* \geq u$$

luego $u \leq r$. ∎

Nota.- Geométricamente, el corolario anterior admite un enunciado cómodo: *si* R^*_u *contiene algún punto simple, entonces* $u \leq r$.

2.1.7 Corolario.- *Si* k *es algebraicamente cerrado y para todo* $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec Max } B$, *el anillo local* $B_{\mathfrak{p}^*}$ *es regular, entonces para todo* $u > r$ *es* $\text{ram}_u B = B$.

Demostración.- Probaremos su contrarrecíproco. Si $\text{ram}_u B \neq B$, entonces, por ser B anillo unitario, existirá $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec Max } B$, tal que $\text{ram}_u B \subseteq \mathfrak{p}^*$. Pero, al ser k algebraicamente cerrado, $\mathfrak{p}^*$ es ideal de punto. Siendo además, por hipótesis, $B_{\mathfrak{p}^*}$ regular, tal punto será simple, luego, según 2.1.6, ha de ser $u \leq r$. ∎

Nota.- La versión geométrica de este corolario puede enunciarse así: si V^* es una variedad lisa sobre cuerpo base algebraicamente cerrado, entonces, para todo $u > r$, es $R^*_u = \emptyset$.

2.1.8 Definición-proposición.- *El ideal del anillo* B *generado por los menores de orden* n *de la matriz jacobiana* J_{xy} *(definida en* 1.0*) es independiente de la base de* ker **f** *utilizada para determinarlo. Lo llamaremos* **ideal de singularidad** *(que notaremos* sing B*), ya que su variedad (que notaremos* S^**) es la subvariedad singular (o conjunto de puntos singulares de la variedad), verificándose*

$$\boxed{\text{ram}_1 B \subseteq \text{sing } B} \qquad (*)$$

y en consecuencia

$$\boxed{S^* \subseteq R^*_1}$$

Demostración.- La independencia de sing B de la base de ker **f** utilizada, se prueba como en 2.1.1. La inclusión (*) sigue de que J_y es submatriz de J_{xy} . ∎

2.1.9 Ejemplos.- **a)** Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[y_1,y_2]$ con las condiciones

$$y_1^2 - x_1 = 0 \quad ; \quad y_2^3 - x_2 = 0$$

de acuerdo con la notación precedente, se tiene

$$J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{bmatrix}$$

de donde resultan:

$$\mathrm{ram}_1 B = (y_1 y_2^2)B \quad , \quad \mathrm{ram}_2 B = (y_1, y_2^2)B$$

verificándose (de acuerdo con 2.1.4):

$$(0) = \mathrm{ram}_0 B \subsetneq \mathrm{ram}_1 B \subseteq \mathrm{ram}_2 B \subsetneq \mathrm{ram}_3 B = B$$

y para las subvariedades de ramificación correspondientes:

$$R_1^* = \{x_1 = 0 = y_1\} \cup \{x_2 = 0 = y_2\} \quad ; \quad R_2^* = \{x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0\}$$

se verifica

$$V^* \supsetneq R_1^* \supseteq R_2^* \supseteq \emptyset$$

b) Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición

$$y^2 + x_1^2 - x_2^3 - x_2^2 = 0$$

que geométricamente corresponde a la superficie de rotación obtenida al girar la "alfa-curva":

$$x_1^2 - x_2^3 - x_2^2 = 0 \quad ; \quad y = 0 \qquad (*)$$

alrededor del eje x_2 , resulta $J_y = (2y)$, por lo que R_1^* es la propia alfa-curva (*). Análogamente,

$$J_{xy} = (2x_1,-3x_2^2-2x_2,2y)$$

luego sing $B = (x_1,3x_2^2+2x_2,y)B$ y operando resulta:

$$\mathrm{sing}\ B = (x_1,x_2,y)B$$

luego

$$S^* = \{(0,0,0)\} \subseteq R_1^*$$

c) Para $A = \mathbb{C}[x_1,x_2]$ y $B = A[y_1,y_2,y_3]$ con las condiciones

$$y_1^2 - x_1 = 0 \ , \ y_2^3 - x_2 = 0 \ , \ y_3^2 + x_1 + x_2 - 1 = 0 \qquad (**)$$

se tiene

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2y_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3y_2^2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2y_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{bmatrix}$$

resultando ser 3 el rango de la matriz J_{xy} para cualesquiera y_1,y_2,y_3 que satisfagan las condiciones (**). Por tanto, se trata de una variedad lisa y en consecuencia (de acuerdo con 2.1.7), se tiene:

$$\text{ram}_3 B = (y_1,y_2^2,y_3)B = (y_1,y_2^2,y_3,x_1,x_2,1)B = B$$

luego $R_3^* = \varnothing$.

2.2 Condiciones de no-ramificación global de ideales de punto

Se trata ahora de determinar condiciones para que un primo $\mathfrak{p}$ de A no se ramifique en la extensión $A \hookrightarrow B$, es decir, para que el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ sea radical. En tales criterios aparecerán los contraídos en el subanillo A de los ideales $\mathrm{ram}_u B$, definidos en 2.1.2.

2.2.1 Definición.- *Al contraído en el subanillo* A *del ideal* $\mathrm{ram}_u B$ *lo llamaremos* **ideal de ramificación contraído de orden** u *y lo notaremos* $\mathrm{ram}_u A$, es decir,

$$\boxed{\mathrm{ram}_u A = (\mathrm{ram}_u B) \cap A \quad ; \quad u=0,1,\ldots,n,n+1}$$

Al contraído en A del ideal sing B (definido en 2.1.8*), lo llamaremos* **ideal de singularidad contraído** *y lo notaremos* sing A *, es decir,*

$$\boxed{\mathrm{sing}\ A = (\mathrm{sing}\ B) \cap A}$$

Geométricamente, a la subvariedad del ideal $\mathrm{ram}_u A$ *del subanillo* A *, la llamaremos* **subvariedad de ramificación contraída de orden** u *y la notaremos* R_u *. Análogamente, a la subvariedad del ideal* sing A *, la llamaremos* **subvariedad singular contraída** *y la notaremos* S .

2.2.2 Proposición.- *Para los ideales que acabamos de definir, se verifica :*

i) $\mathrm{ram}_u A \subseteq \mathrm{ram}_{u+1} A \quad ; \quad u=0,1,\ldots,n$

ii) $\mathrm{ram}_1 A \subseteq \mathrm{sing}\ A$

iii) $\mathrm{ram}_1 A \neq (0)$

Demostración.- i) Sigue inmediatamente de 2.1.4

ii) Sigue de 2.1.8

iii) Según 2.1.3, $\mathrm{ram}_1 B \neq 0$, luego alguno de los generadores de este ideal, es decir, alguno de los menores de orden n de J_y será un elemento no nulo del anillo B . Si $f_0(X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_n)$ es un polinomio de k[**X**,**Y**] , cuya imagen en el epimorfismo **f** (definido en 1.0), sea dicho menor de orden n de J_y , entonces obviamente

$$0 \neq \mathbf{f}(f_0) = f_0(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \in \mathrm{ram}_1 B \qquad (1)$$

Por otra parte, siendo $D(X_1,\dots,X_r)$ una componente de la resultante de eliminar $Y_1,\dots,Y_n$ entre los polinomios $f_0,f_1,\dots,f_m$ de $k[X,Y]$ (donde $f_1,\dots,f_m$ son los indicados en 1.0), este polinomio, perteneciente a $k[X_1,\dots,X_r]$, podrá expresarse en la forma

$$D(X_1,\dots,X_r) = H_0 f_0 + \sum_{s=1}^{m} H_s f_s$$

donde $H_0,H_1,\dots,H_m \in k[X,Y]$, luego pasando a imágenes en $\mathbf{f}$, resulta

$$D(x_1,\dots,x_r) = H_0(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n)\cdot f_0(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \qquad (2)$$

ya que $f_s(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) = 0$; $s=1,\dots,m$ eran las condiciones de definición de B sobre A . Finalmente, ha de verificarse

$$H_0(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n) \neq 0 \qquad (3)$$

ya que si este elemento de B fuera nulo, de (2) resultaría $D(x_1,\dots,x_r) = 0$, y, puesto que el grado de D es mayor o igual que el de f_0 , se tendría una relación algebraica no trivial entre las "x" , luego el subanillo A (del anillo B) no sería anillo de polinomios, en contradicción con la hipótesis admitida desde un principio (en 1.0). Por tanto, puesto que B es dominio, de (1), (2) y (3) resulta

$$0 \neq H_0 f_0 = D(x_1,\dots,x_r) \in (\mathrm{ram}_1 B) \cap A = \mathrm{ram}_1 A$$

luego este último ideal es no nulo. ∎

Nota.- Geométricamente, el enunciado anterior se expresaría:

i) $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq R_{n+1}$

ii) $S \subseteq R_1$

iii) $R_1 \neq k^r$

2.2.3 Lema.- *Siendo el cuerpo base* , k , *algebraicamente cerrado y* $\mathfrak{p}$ *un ideal de punto del anillo* A , *tal que* $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, *se verifican:*

a) *los primos de* B , *que contienen a* $\mathfrak{p}$, *yacen sobre* $\mathfrak{p}$

b) *los primos minimales del ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *son ideales de puntos simples del dominio* B

c) $\mathfrak{p}B$ *no posee componentes primarios sumergidos (es decir, sus primos asociados son todos aislados)*

Demostración.- **a)** si $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, verifica: $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$$

pero además $\mathfrak{p}^* \cap A \neq A$ (ya que si fuera $\mathfrak{p}^* \cap A = A$, entonces $1 \in \mathfrak{p}^*$, lo que es absurdo). Por tanto

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A \neq A$$

lo que, teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}$ es maximal, implica: $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$.

b) Si $\mathfrak{p}^*$ es primo minimal de $\mathfrak{p}B$, entonces

$$\mathfrak{p}^* \not\supseteq \operatorname{ram}_1 B \qquad (1)$$

ya que, si $\mathfrak{p}^* \supseteq \operatorname{ram}_1 B$, entonces, de acuerdo con el apartado a),

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A \supseteq (\operatorname{ram}_1 B) \cap A = \operatorname{ram}_1 A$$

en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{ram}_1 A$. Según 2.1.5, de (1) se deduce que

$$\operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* = 0 \qquad (2)$$

luego

$$\operatorname{rango} \left[J_y \right]_{\mathfrak{p}^*} = n$$

y, por tanto, existe un menor de orden n de la matriz J_y no perteneciente a $\mathfrak{p}^*$:

$$\Delta(x_1,...,x_r,y_1,...,y_n) \notin \mathfrak{p}^*$$

lo que asegura la siguiente inclusión estricta de ideales de B :

$$\mathfrak{p}^* + (\Delta)B \supsetneq \mathfrak{p}^*$$

luego, por ser k algebraicamente cerrado, las variedades de estos dos ideales serán distintas, lo que implica la existencia de un punto $P'' = (a_1,...,a_r,b_1,...,b_n) \in k^{r+n}$, tal que P'' pertenezca a la subvariedad de $\mathfrak{p}^*$, pero no pertenezca a la subvariedad de $\mathfrak{p}^*+(\Delta)B$. En consecuencia, siendo $\mathfrak{p}''$ el ideal del punto P'' , se tiene:

$$\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}'' \qquad (3)$$

y

$$\Delta(a_1,...,a_r,b_1,...,b_n) \neq 0$$

luego para el ideal

$$\mathfrak{p}'' = (x_1-a_1,...,x_r-a_r,y_1-b_1,...,y_n-b_n)B$$

se verifica

$$\text{rango} \left[J_y \right]_{\mathfrak{p}''} = n$$

y por tanto

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}'' = 0 \qquad (4)$$

Por otra parte, de (3) se deduce que $\mathfrak{p}'' \supseteq \mathfrak{p}$, lo que. según a), implica

$$\mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$$

luego, extendiendo al anillo local $\vartheta'' = B_{\mathfrak{p}''}$, de acuerdo con 1.4.2 i), resulta

$$\mathfrak{p}\vartheta'' = \mathfrak{m}'' \qquad (5)$$

donde $\mathfrak{m}''$ es el ideal de no unidades de ϑ'' . Ahora bien

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}'' \Rightarrow \mathfrak{p}\vartheta'' \subseteq \mathfrak{p}^*\vartheta'' \subseteq \mathfrak{p}''\vartheta'' \subseteq \mathfrak{m}''$$

lo que junto con (5) implica

$$\mathfrak{p}^*\vartheta'' = \mathfrak{p}''\vartheta''$$

de donde, por la biyección existente entre ideales primos de ϑ'' y primos de B contenidos en $\mathfrak{p}''$, resulta $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}''$. Por tanto $\mathfrak{p}^*$ es ideal de punto, siendo tal punto simple, ya que $B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular, como consecuencia de (2), según sigue de 1.1.4.

c) Puesto que los primos aislados de $\mathfrak{p}B$ son maximales, $\mathfrak{p}B$ no tendrá componentes sumergidos. ∎

2.2.4 <u>Teorema</u>.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y* $\mathfrak{p} \in$ Spec Max A *.Si* $\mathfrak{p} \not\supseteq \text{ram}_1 A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$ *(es decir,* $\mathfrak{p}B$ *es radical).*

<u>Demostración</u>.- Por ser k algebraicamente cerrado, $\mathfrak{p}$ es ideal de punto del anillo A . Si $\mathfrak{p} \not\supseteq \text{ram}_1 A$, entonces, de acuerdo con el lema anterior, el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ admitirá una descomposición primaria irredundante única:

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_e^* \qquad (1)$$

es decir, cuyos componentes primarios, $\mathfrak{q}_i^*$, son todos aislados, siendo los primos asociados de $\mathfrak{p}B$:

$$\mathfrak{p}_i^* = \sqrt{\mathfrak{q}_i^*} \quad ; \quad i=1,\ldots,e \qquad (2)$$

ideales de puntos simples del anillo B , es decir, siendo los anillo locales

$$\vartheta_i^* = B_{\mathfrak{p}_i^*} \quad ; \quad i=1,\ldots,e$$

todos regulares. Además, ha de ser

$$\mathfrak{p}_i^* \not\supseteq \mathrm{ram}_1 B \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e}$$

ya que si, por ejemplo, se verificara $\mathfrak{p}_1^* \supseteq \mathrm{ram}_1 B$, entonces se tendría (de acuerdo con el apartado a) del lema precedente):

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^* \cap A \supseteq (\mathrm{ram}_1 B) \cap A = \mathrm{ram}_1 A$$

en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 B$. Luego, según 2.1.5,

$$\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_i^* = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e}$$

Por tanto, de acuerdo con 1.4.4, los ideales $\mathfrak{p}_i^*$; ${\scriptstyle i=1,\dots,e}$ no son de ramificación local, es decir, los ideales extendidos de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i^* \cap A$ en $A \hookrightarrow \vartheta_i^*$ son (según 1.4.2) los respectivos ideales de no unidades $\mathfrak{m}_i^* = \mathfrak{p}_i^* \vartheta_i^*$, esto es:

$$\mathfrak{p}\vartheta_i^* = \mathfrak{m}_i^* = \mathfrak{p}_i^* \vartheta_i^* \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e} \qquad (3)$$

Ahora bien, por ser los ideales (2) los primos minimales de $\mathfrak{p}B$, aplicando propiedades bien conocidas de paso al anillo local $B \hookrightarrow \vartheta_i^* = B_{\mathfrak{p}_i^*}$, se tiene:

$$\mathfrak{p}\vartheta_i^* = (\mathfrak{p}B)\vartheta_i^* = (\mathfrak{q}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{q}_e^*)\vartheta_i^* = \mathfrak{q}_i^* \vartheta_i^* \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e}$$

lo que, junto con (3), implica

$$\mathfrak{p}\vartheta_i^* = \mathfrak{q}_i^* \vartheta_i^* \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e}$$

luego por la biyección existente entre ideales primarios de ϑ_i^* e ideales primarios de B contenidos en $\mathfrak{p}_i^*$, se tiene:

$$\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{p}_i^* \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,e}$$

y, en consecuencia, de (1) y (2) resulta

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{q}_e^* = \mathfrak{p}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{p}_e^* = \sqrt{\mathfrak{p}B}$$

luego $\mathfrak{p}B$ es radical, y por tanto $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$. ∎

Nota.- Puede suceder que $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, y que $\mathfrak{p}B$ sea primo (ver ejemplo 2.2.6 c)), pero si B es entero sobre A , entonces la condición $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$ es equivalente a que el ideal $\mathfrak{p}$ no se ramifique en $A \hookrightarrow B$, según se verá más adelante (en 2.3.7).

Si la extensión es simple, en el teorema anterior puede prescindirse de la condición de ser k algebraicamente cerrado:

2.2.5 <u>Teorema</u>.- *Supongamos* $A \hookrightarrow B$ *extensión simple (es decir,* $n=1$ *) y sea* $\mathfrak{p}$ *un ideal de punto del subanillo* A . *Si* $\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B = A[y]$, *es decir, el ideal* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

<u>Demostración</u>.- Sea $(a_1,\dots,a_r) \in k^r$ el punto del cual $\mathfrak{p}$ es ideal, es decir, sea $\mathfrak{p} = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)A$. Por ser $n=1$, las condiciones de definición de B sobre A se reducen a

$$f_1(x_1,\dots,x_r,y) = 0$$

luego el ideal ker **f** (definido en 1.0) es generado por el polinomio

$$f_1(x_1,\dots,x_r,Y) \in k[x,Y]$$

y, por ser conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A = k[x] \arrow[r, hook] \arrow[dr] & k[x,Y] = k[x_1,\dots,x_r,Y] \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

y ser **f** epimorfismo, el extendido de $\mathfrak{p}$ en B será la imagen en **f** del extendido de $\mathfrak{p}$ en $k[x,Y]$, es decir

$$\mathfrak{p}B = \mathbf{f}(\mathfrak{p}k[x,Y])$$

luego el contraído, I , de este ideal en **f** , será

$$I = \mathbf{f}^{-1}(\mathfrak{p}B) = \mathfrak{p}k[x,Y] + \ker \mathbf{f} =$$

$$= \left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,f_1(x_1,\dots,x_r,Y)\right)k[x,Y] =$$

$$= \left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,f_1(a_1,\dots,a_r,Y)\right)k[x,Y] \qquad (1)$$

pudiendo suceder para el elemento $f_1(a_1,\dots,a_r,Y)$ una de las tres siguientes posibilidades:

P1) $f_1(a_1,\dots,a_r,Y) = 0$

P2) $f_1(a_1,\dots,a_r,Y)$ es una unidad (elemento invertible)

P3) $f_1(a_1,\dots,a_r,Y)$ no es nulo, ni unidad

En lugar de demostrar la implicación

$$\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A \Rightarrow B \text{ es radical}$$

vamos a probar la implicación equivalente

$$\sqrt{\mathfrak{p}B} \neq \mathfrak{p}B \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$$

por lo que, en adelante, supondremos que $\mathfrak{p}B$ no es radical. Ello va a implicar que las posibilidades P1) y P2), anteriormente indicadas, no puedan verificarse. En efecto, en el caso P1), el ideal I , de acuerdo con (1), sería el extendido del primo $\mathfrak{p}$ en la extensión trascendente pura $k[x] \hookrightarrow k[x,Y]$, luego sería primo (según se precisa en el teorema 4.4.4), y, por ser f epimorfismo, el ideal $\mathfrak{p}B = f(I)$ también sería primo, en contradicción con la hipótesis de no ser radical. Y en el caso P2), resultaría $\mathfrak{p}B = B$, en contradicción también con la hipótesis.

En consecuencia, se ha de verificar P3), es decir, $f_1(a_1,...,a_r,Y)$ ha de ser un elemento no nulo ni unidad, luego admitirá una factorización única de la forma:

$$f_1(a_1,...,a_r,Y) = H_1(Y)^{e_1} \cdot ... \cdot H_z(Y)^{e_z} \qquad (2)$$

donde los $H_i(Y)$ son elementos irreducibles del DFU $k[Y]$, que supondremos distintos dos a dos.

Vamos a probar que el ideal (1) admite una descomposición primaria irredundante (única):

$$I = Q_1^* \cap ... \cap Q_z^* \qquad (3)$$

$$Q_i^* = \left[x_1-a_1,...,x_r-a_r,H_i^{e_i}\right]k[x,Y] \quad ; \quad i=1,...,z \qquad (4)$$

siendo los primos asociados de I los ideales:

$$P_i^* = \sqrt{Q_i^*} = \left[x_1-a_1,...,x_r-a_r,H_i\right]k[x,Y] \quad ; \quad i=1,...,z \qquad (5)$$

Comenzaremos probando que los ideales P_i^* son maximales. Para ello consideremos el k-epimorfismo

$$g: k[x,Y] \hookrightarrow k[Y] \quad ; \quad g(x_i) = a_i \quad ; \quad i=1,...,r$$

de núcleo

$$\ker g = (x_1-a_1,...,x_r-a_r)k[x,Y] = \mathfrak{p}k[x,Y]$$

en el que las imágenes de los ideales del anillo $k[x,Y]$:

$$I_i = H_i(Y)k[x,Y] \quad ; \quad i=1,...,z$$

son los respectivos ideales del anillo $k[Y]$

$$I_i' = g(I_i) = H_i(Y)k[Y]$$

cuyos contraídos en g son

$$g^{-1}(I'_i) = I_i + \ker g = (x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r,H_i)k[x,Y] = P^*_i \qquad (6)$$

Ahora bien, por ser los polinomios $H_i(Y)$; $i=1,\ldots,z$ elementos irreducibles del DIP $k[Y]$, los ideales I'_i son maximales, y, en consecuencia, también serán maximales sus contraídos en el epimorfismo g , los ideales (6). Por tanto, los ideales Q^*_i serán primarios (ya que, de acuerdo con (5), sus radicales son maximales).

Pasemos a probar la igualdad (3). La imagen del ideal I en el epimorfismo g :

$$g(I) = f_1(a_1,\ldots,a_r,Y)k[Y]$$

admitirá, según sigue de (2), una descomposición primaria irredundante (única):

$$g(I) = \bigcap_{i=1}^{z} I''_i \quad ; \quad I''_i = \left[H_i^{e_i}\right]k[Y]$$

luego, como $I \supseteq \ker g$, por contracción en g se obtiene la descomposición primaria irredundante (también única):

$$I = g^{-1}\left[g(I)\right] = \bigcap_{i=1}^{z} g^{-1}(I''_i)$$

bastando ahora tener en cuenta que $g\left[H_i^{e_i}k[x,Y]\right] = I''_i$ y por tanto

$$g^{-1}\left[I''_i\right] = \left[H_i^{e_i}\right]k[x,Y] + \ker g = = \left[x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r\ ,\ H_i^{e_i}\right]k[x,Y] = Q^*_i$$

para terminar de probar las igualdades (3) y (4), resultando análogamente (5). De estas igualdades, pasando a imágenes en el epimorfismo **f** y teniendo en cuenta que $\ker \mathbf{f} \subseteq I$, resulta la descomposición primaria irredundante (única):

$$\mathfrak{p}B = \mathbf{f}(I) = \bigcap_{i=1}^{z} \mathfrak{q}^*_i$$

$$\mathfrak{q}^*_i = \mathbf{f}(Q^*_i) = \left[x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r,H_i(x_1,\ldots,x_r,y)^{e_i}\right]B \quad ; \quad i=1,\ldots,z \qquad (7)$$

$$\mathfrak{p}^*_i = \sqrt{\mathfrak{q}^*_i} = \left[x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r,H_i(x_1,\ldots,x_r,y)\right]B \quad ; \quad i=1,\ldots,z \qquad (8)$$

Para que, de acuerdo con nuestra hipótesis, el ideal $\mathfrak{p}B$ no sea radical, será necesario que, para algún i , sea $\mathfrak{q}^*_i \neq \sqrt{\mathfrak{q}^*_i} = \mathfrak{p}^*_i$, lo que, de acuerdo con (7) y (8), equivale a decir que, para algún i , sea $e_i > 1$. Supondremos pues , por ejemplo,

$$e_i > 1 \qquad (9)$$

Ahora bien, puesto que $x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r \in \mathfrak{p}_1^*$, se tiene

$$\left[\frac{\partial f_1(x_1,\ldots,x_r,y)}{\partial y}\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = \left[\frac{\partial f_1(a_1,\ldots,a_r,y)}{\partial y}\right]_{\mathfrak{p}_1^*} =$$

$$= \left[\mathbf{f}\left(\frac{\partial f_1(a_1,\ldots,a_r,Y)}{\partial Y}\right)\right]_{\mathfrak{p}_1^*} \qquad (10)$$

pero, de (2) y (9) resulta

$$\frac{\partial f_1(a_1,\ldots,a_r,Y)}{\partial Y} = \frac{\partial\left(H_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot H_z^{e_z}\right)}{\partial Y} \in \left(H_1(a_1,\ldots,a_r,Y)\right)k[x,Y]$$

y por tanto, pasando a imágenes en $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{f}\left(\frac{\partial f_1(a_1,\ldots,a_r,Y)}{\partial Y}\right) \in \left(H_1(a_1,\ldots,a_r,y)\right)B$$

pero de (8) se deduce que $H_1(a_1,\ldots,a_r,Y) \in \mathfrak{p}_1^*$, luego

$$\mathbf{f}\left(\frac{\partial f_1(a_1,\ldots,a_r,Y)}{\partial Y}\right) \in \mathfrak{p}_1^*$$

lo que, junto con (10), implica

$$\left[\frac{\partial f_1(x_1,\ldots,x_r,y)}{\partial y}\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = 0$$

y por tanto

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_1^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = 1 - \text{rango}\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = 1 - 0 = 1$$

lo cual (según 2.1.5) implica

$$\mathfrak{p}_1^* \supseteq \text{ram}_1 B$$

y por tanto

$$\mathfrak{p}_1^* \cap A \supseteq (\text{ram}_1 B) \cap A = \text{ram}_1 A$$

pero $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}_1^* \cap A$, lo que, teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}$ es maximal, implica $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p} \supseteq \text{ram}_1 A$. ∎

2.2.6 Ejemplos.- **a)** Siendo $A = \mathbb{C}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición $y^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, se tiene: $J_y = (2y)$, luego

$$\mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y,x_1^2+x_2^2-1)B \Rightarrow \mathrm{ram}_1 A = (x_1^2+x_2^2-1)A$$

Para el ideal de punto $\mathfrak{p} = (x_1,x_2)A$, se tiene $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego, según el teorema 2.2.4, $\mathfrak{p}$ no se ramificará en $A \hookrightarrow B$. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}B = (x_1,x_2)B = (x_1,x_2,y^2-1)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^*$$

siendo

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1,x_2,y-1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2,y+1)B$$

luego $\mathfrak{p}B$ es intersección de estos dos maximales y, en consecuencia, es radical:

$$\mathfrak{p}B = \sqrt{\mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^*} = \sqrt{\mathfrak{p}_1^*} \cap \sqrt{\mathfrak{p}_2^*} = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^* = \mathfrak{p}B$$

es decir, $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$. En cambio, para el ideal de punto $\mathfrak{p}' = (x_1,x_2-1)A$, para el cual $\mathfrak{p}' \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, se tiene

$$\mathfrak{p}'B = (x_1,x_2-1)B = (x_1,x_2-1,y^2)B$$

cuyo radical es el maximal $(x_1,x_2-1,y) \neq \mathfrak{p}'B$, luego $\mathfrak{p}'B$ es un ideal primario no primo y, en consecuencia, $\mathfrak{p}'$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

b) Si en el ejemplo anterior se sustituye el cuerpo base $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$, y se considera el ideal de punto $\mathfrak{p} = (x_1-a_1,x_2-a_2)A$, con la condición

$$a_1^2 + a_2^2 < 1$$

entonces ya no es aplicable 2.2.4, pero si 2.2.5, según el cual $\mathfrak{p}B$ no se ramificará. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}B = (x_1-a_1,x_2-a_2)B = (x_1-a_1,x_2-a_2,y^2-b^2)B$$

donde $b^2 = 1 - (a_1^2 + a_2^2) > 0$, resultando

$$\mathfrak{p}B = (x_1-a_1,x_2-a_2,y-b) \cap (x_1-a_1,x_2-a_2,y+b)B$$

luego $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

En cambio, para

$$a_1^2 + a_2^2 > 1$$

se tiene

$$\mathfrak{p}B = (x_1-a_1,x_2-a_2,y^2+b^2)B \qquad (*)$$

(donde $b^2 = (a_1^2+a_2^2) - 1 > 0$) y, por no ser factorizable el polinomio y^2+b^2 , el ideal $\mathfrak{p}B$ no es intersección de ideales de punto (el apartado b) de 2.2.3

ya no se verifica y el teorema 2.2.4 no es aplicable). Sin embargo, según el teorema 2.2.5, el ideal (*) debe ser radical, y, en efecto, es primo, ya que, si se considera el k-epimorfismo

$$g: B \longrightarrow \mathbb{R}[Y] \ ; \ g(x_1) = a_1 \ ; \ g(x_2) = a_2 \ ; \ g(y) = Y$$

como el ideal $\mathfrak{q} = (Y^2+b^2)\mathbb{R}[Y]$ es primo, por ser Y^2+b^2 irreducible en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[Y]$, entonces

$$\mathfrak{p}B = g^{-1}(\mathfrak{q})$$

será primo, por serlo $\mathfrak{q}$.

c) Siendo $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$, con la condición

$$yx_2^2 - x_1^2 = 0 \quad \text{(paraguas de Whitney)}$$

resulta: $J_y = (x_2^2)$, luego

$$\mathrm{ram}_1 B = (x_2^2)B = (x_2^2,x_1^2)B \ \Rightarrow \ \mathrm{ram}_1 A = (x_1^2,x_2^2)A$$

Para el ideal de punto $\mathfrak{p} = (x_1,x_2)A$, se tiene $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, pero $\mathfrak{p}B = (x_1,x_2)B$ es primo, ya que el anillo cociente

$$B/(x_1,x_2)B \simeq \mathbb{R}[y]$$

es dominio. Además, el extendido en B de este primo está contenido estrictamente en los ideales maximales $(x_1,x_2,y-b)B$, para cualquier $b \in \mathbb{R}$. En consecuencia, no se verifica la condición b) del lema 2.2.3, que es esencial para la demostración de 2.2.4. Tampoco es aplicable 2.2.5. En resumen, aunque no se verifica $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, el ideal $\mathfrak{p}B$ es primo (Obsérvese que este es el caso de la posibilidad P1) considerada en la demostración de 2.2.5).

d) Siendo $A = \mathbb{R}[x]$ y $B = \mathbb{R}[x,y]$ con la condición $xy-1 = 0$, resulta

$$J_y = (x) \ \Rightarrow \ \mathrm{ram}_1 B = (x)B = (x,1)B = B \ \Rightarrow \ \mathrm{ram}_1 A = A$$

Para el ideal $\mathfrak{p} = (x)A$, se tiene: $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego (según 2.2.5) $\mathfrak{p}$ no se ramificará en $A \hookrightarrow B$. Y, en efecto, se tiene

$$\mathfrak{p}B = (x)B = B$$

(Obsérvese que este es el caso de la posibilidad P2), considerada en la demostración de 2.2.5).

2.3 Caracterización de la ramificación global de maximales en caso de dependencia entera

En el apartado 2.2 se han determinado condiciones suficientes, que aseguran la no-ramificación global de ideales de punto del subanillo A en la extensión $A \hookrightarrow B$. Si tal extensión es entera, entonces, según veremos, es posible establecer condiciones necesarias y suficientes de ramificación.

En los siguientes resultados 2.3.1, 2.3.3 y 2.3.4, A y B son anillos unitarios cualesquiera (no necesariamente los indicados en 1.0).

2.3.1 <u>Lema</u>.- *Siendo* A *subanillo de* B , B *entero sobre* A *y* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *se verifica: si* $\mathfrak{p}^*$ *yace sobre* $\mathfrak{p}$, *entonces* $\mathfrak{p}^*$ *es primo aislado del ideal extendido* $\mathfrak{p}B$, *es decir:*

$$\boxed{\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \;\Rightarrow\; \mathfrak{p}^* \textit{ es primo minimal de } \mathfrak{p}B}$$

<u>Demostración</u>.- Si $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego $\sqrt{\mathfrak{p}B} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}^*} = \mathfrak{p}^*$. Por tanto, siendo $\mathfrak{p}_1^*,\ldots,\mathfrak{p}_z^*$ los ideales primos minimales (o aislados) de $\mathfrak{p}B$, se tiene:

$$\sqrt{\mathfrak{p}B} = \mathfrak{p}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_z^* \subseteq \mathfrak{p}^*$$

luego $\mathfrak{p}^*$ contiene a alguno de los $\mathfrak{p}_i^*$; $i=1,\ldots,z$ (por contener a su intersección). Si, por ejemplo, $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, entonces $\mathfrak{p}_1^* \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, luego

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}_1^* \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$$

y por tanto $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}$. Se tiene pues

$$\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}^* \cap A \quad \wedge \quad \mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}^*$$

lo cual, por ser B entero sobre A, implica: $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}^*$. Luego $\mathfrak{p}^*$ es primo minimal del ideal extendido $\mathfrak{p}B$. ∎

<u>Nota</u>.- Si se prescindiera de la condición de dependencia entera, la implicación del lema precedente no sería cierta, como muestra el siguiente contraejemplo: siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$, con la condición $x_1y-x_2 = 0$, el ideal primo $\mathfrak{p}^* = (x_1,x_2,y)B$ yace sobre $\mathfrak{p} = (x_1,x_2)A$, pero $\mathfrak{p}^*$ no es primo minimal de $\mathfrak{p}B$, ya que $\mathfrak{p}^* \supsetneq \mathfrak{p}'' = (x_1,x_2)B$, que también es primo de B (ya que $B/\mathfrak{p}'' \simeq k[y]$, que es D.I.) y yace sobre $\mathfrak{p}$.

2.3.2 Corolario.- *Siendo* A *y* B *los indicados en* 1.0, *supongamos* B *entero sobre* A . *Si* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *entonces* $\mathfrak{p}^*$ *es de ramificación local syss* ord.ram $\mathfrak{p}^* > 0$, *es decir:*

$$\boxed{\mathfrak{p}^* \textit{ es de ramificación local} \iff \operatorname{ord.ram} \mathfrak{p}^* > 0}$$

Demostración.- Sigue inmediatamente de 1.4.5, teniendo en cuenta el lema anterior. ■

2.3.3 Corolario.- *Siendo* A *subanillo de* B, B *entero sobre* A , $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *y* $\mathfrak{p}B$ *su extendido en* $A \hookrightarrow B$, *se verifican:*

i) existe un primo minimal, $\mathfrak{p}^*$, *de* $\mathfrak{p}B$, *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$

ii) la fibra de $A \hookrightarrow B$ *en* $\mathfrak{p}$ *es finita (es decir, el conjunto de ideales* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *tales que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ *es finito)*

iii) si $\mathfrak{p}''$ *es primo sumergido de* $\mathfrak{p}B$, *entonces* $\mathfrak{p}'' \cap A \supsetneq \mathfrak{p}$

Demostración.-

i) Por ser B entero sobre A , existe $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, tal que $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, y ahora, de acuerdo con el lema anterior, será $\mathfrak{p}^*$ primo minimal de $\mathfrak{p}B$.

ii) Si $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, según 2.3.1, habrá de ser $\mathfrak{p}^*$ primo aislado de $\mathfrak{p}B$ y es sabido que el número de tales primos aislados es finito.

iii) si $\mathfrak{p}''$ es primo sumergido de $\mathfrak{p}B$, entonces contiene estrictamente a algún primo aislado, es decir, existe un primo minimal, $\mathfrak{p}^*$, de $\mathfrak{p}B$, tal que $\mathfrak{p}^* \subsetneq \mathfrak{p}''$, luego, por ser B entero sobre A , $\mathfrak{p}^* \cap A \subsetneq \mathfrak{p}'' \cap A$ y por otra parte $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, luego $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}'' \cap A$. ■

2.3.4 Teorema.- *Sea* A *subanillo del dominio* B , A *íntegramente cerrado y* B *entero sobre* A. *Siendo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{p}B$ *su extendido en* $A \hookrightarrow B$ *y* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$, *se verifica:* $\mathfrak{p}^*$ *es primo aislado de* $\mathfrak{p}B$ *syss yace sobre* $\mathfrak{p}$, *es decir:*

$$\boxed{\mathfrak{p}^* \textit{ es primo minimal de } \mathfrak{p}B \iff \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}}$$

Demostración.- Como consecuencia del lema 2.3.1, bastará probar $\Rightarrow$). Si $\mathfrak{p}^*$ es primo minimal (esto es, aislado) de $\mathfrak{p}B$, entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, lo que implica una de las dos condiciones:

$$\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \quad (1) \qquad ; \qquad \mathfrak{p}^* \cap A \supsetneq \mathfrak{p} \quad (2)$$

Bastará probar que (2) conduce a contradicción. En efecto, según el teorema del descenso, la condición (2) implicaría la existencia de $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec} B$, verificando las condiciones:

$$\mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p} \qquad (3) \qquad ; \qquad \mathfrak{p}'' \subsetneq \mathfrak{p}^* \qquad (4)$$

pero (3) implica: $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}''$ y por tanto $\sqrt{\mathfrak{p}B} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}''} = \mathfrak{p}''$, luego, si los primos aislados de $\mathfrak{p}B$ son $\mathfrak{p}_1^*,\ldots,\mathfrak{p}_e^*$, se tiene:

$$\sqrt{\mathfrak{p}B} = \mathfrak{p}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_e^* \subseteq \mathfrak{p}''$$

y por tanto $\mathfrak{p}''$ contiene a alguno de los $\mathfrak{p}_i^*$; $i=1,\ldots,e$ (por contener a su intersección). Si, por ejemplo, $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}''$, entonces de (4) resultaría: $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}^*$, luego se tendrían dos primos aislados, $\mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{p}^*$, uno estrictamente contenido en el otro, lo que es absurdo. Por tanto, se verifica (1), como se deseaba probar. ∎

2.3.5 <u>Corolario</u>.- *Siendo* A *y* B *los indicados en* 1.0, *supongamos* B *entero sobre* A. *Si* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec\,Max} A$, *entonces para su extendido* $\mathfrak{p}B$ *en* $A \hookrightarrow B$, *se verifican:*

a) los primos minimales de $\mathfrak{p}B$ *son ideales maximales de* B *y yacen sobre* $\mathfrak{p}$

b) $\mathfrak{p}B$ *no posee primos asociados sumergidos*

<u>Demostración</u>.- Por ser A anillo de polinomios sobre un cuerpo, es DFU, y por tanto íntegramente cerrado, luego se verifican las condiciones exigidas en el teorema 2.3.4, de acuerdo con el cual se tiene:

a) si $\mathfrak{p}^*$ es primo aislado de $\mathfrak{p}B$, será $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, lo que, por ser $\mathfrak{p}$ maximal de A y ser B entero sobre A, implica que $\mathfrak{p}^*$ sea maximal de B.

b) siendo maximales los primos aislados de $\mathfrak{p}B$, este ideal no poseerá primos asociados sumergidos. ∎

2.3.6 <u>Lema</u>.- *Siendo* A *y* B *los indicados en* 1.0, *supongamos* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. *Si* $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ram}_1 A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir:*

$$\boxed{\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ram}_1 A \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} \textit{ se ramifica en } A \hookrightarrow B}$$

<u>Demostración</u>.- Teniendo en cuenta 2.3.5, puede asegurarse que el ideal $\mathfrak{p}B$ admite una descomposición primaria irredundante única:

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{q}_z^* \qquad (1)$$

es decir, cuyos componentes primarios, $\mathfrak{q}_i^*$, son todos aislados, y los primos minimales de $\mathfrak{p}B$:

$$\mathfrak{p}_i^* = \sqrt{\mathfrak{q}_i^*} \in \text{Spec Max } B \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,z} \qquad (2)$$

yacen todos sobre $\mathfrak{p}$, es decir, verifican:

$$\mathfrak{p}_i^* \cap A = \mathfrak{p} \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,z} \qquad (3)$$

Supongamos pues que se verifica:

$$\mathfrak{p} \supseteq \text{ram}_1 A \qquad (4)$$

Si los primos minimales de $\text{ram}_1 B$ son $\mathfrak{p}_1''$, $\mathfrak{p}_2''$,... y los contraídos en A de estos ideales son, respectivamente, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$,... , entonces, se tiene:

$$\sqrt{\text{ram}_1 B} = \mathfrak{p}_1'' \cap \mathfrak{p}_2'' \cap \dots$$

luego

$$\sqrt{\text{ram}_1 A} = \sqrt{(\text{ram}_1 B) \cap A} = \sqrt{\text{ram}_1 B} \cap A = (\mathfrak{p}_1'' \cap \mathfrak{p}_2'' \cap \dots) \cap A =$$
$$= (\mathfrak{p}_1'' \cap A) \cap (\mathfrak{p}_2'' \cap A) \cap \dots = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots$$

lo que, junto con (4), implica

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supseteq \sqrt{\text{ram}_1 A} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots$$

luego el primo $\mathfrak{p}$ contiene a alguno de los ideales $\mathfrak{p}_i$; ${\scriptstyle i=1,2,\dots}$ (por contener a su intersección). Si, por ejemplo, $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$, entonces, según el teorema del ascenso (en $A \hookrightarrow B$) , existe $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , tal que

$$\mathfrak{p}_1'' \subseteq \mathfrak{p}^* \quad \wedge \quad \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \qquad (5)$$

y se tiene: $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}_1'' \supseteq \text{ram}_1 B$, luego, de acuerdo con 2.1.5,

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* > 0 \qquad (6)$$

Ahora bien, según 2.3.1, de (5) se deduce que $\mathfrak{p}^*$ ha de ser primo minimal de $\mathfrak{p}B$, luego $\mathfrak{p}^*$ será alguno de los ideales (2). Si, por ejemplo, es $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1^*$, entonces, pasando al anillo local $\vartheta_1^* = B_{\mathfrak{p}_1^*}$, de (1) resulta

$$\mathfrak{p}\vartheta_1^* = (\mathfrak{p}B)\vartheta_1^* = (\mathfrak{q}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{q}_z^*)\vartheta_1^* = \mathfrak{q}_1^*\vartheta_1^* \qquad (7)$$

pero, según 2.3.2, de (6) se deduce que $\mathfrak{p}_1^*$ es de ramificación local, luego $\mathfrak{p}\vartheta_1^* \neq \mathfrak{p}_1^*\vartheta_1^*$, lo que, junto con (7) , implica $\mathfrak{q}_1^*\vartheta_1^* \neq \mathfrak{p}_1^*\vartheta_1^*$ y, por la biyección existente entre primarios de ϑ_1^* y primarios de B contenidos en $\mathfrak{p}_1^*$, esto implica $\mathfrak{q}_1^* \neq \mathfrak{p}_1^* = \sqrt{\mathfrak{q}_1^*}$, luego el ideal (1) no es radical, y en consecuencia $\mathfrak{p}$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

2.3.7 Teorema.- *Siendo* A *y* B *los indicados en* 1.0, *supongamos* B *entero sobre* A. *Si* $\mathfrak{p} \in$ Spec Max A , *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical syss* $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, *es decir:*

$$\boxed{\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \text{ no se ramifica en } A \hookrightarrow B}$$

Demostración.- Partamos de las condiciones (1), (2) y (3) de la demostración del lema 2.3.6 . De acuerdo con esta notación, si se verifica

$$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A \qquad (4)$$

ello implica

$$\mathfrak{p}_i^* \not\supseteq \mathrm{ram}_1 B \ ; \ i=1,\dots,z \qquad (5)$$

ya que si, por ejemplo, fuera $\mathfrak{p}_1^* \supseteq \mathrm{ram}_1 B$, entonces se tendría, recordando (3),

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^* \cap A \supseteq (\mathrm{ram}_1 B) \cap A = \mathrm{ram}_1 A$$

en contradicción con nuestra hipótesis (4). De (5) se deduce, de acuerdo con 2.1.5,

$$\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_i^* = 0 \ ; \ i=1,\dots,z \qquad (6)$$

Pasando ahora a los anillos locales $\vartheta_i^* = B_{\mathfrak{p}_i^*}$, de (1) resulta

$$\mathfrak{p}\vartheta_i^* = (\mathfrak{p}B)\vartheta_i^* = (\mathfrak{q}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{q}_z^*)\vartheta_i^* = \mathfrak{q}_i^*\vartheta_i^* \qquad (7)$$

pero, según 2.3.2, de (6) se deduce que $\mathfrak{p}_i^*$ no es de ramificación local, luego $\mathfrak{p}\vartheta_i^* = \mathfrak{p}_i^*\vartheta_i^*$, lo que, junto con (7), implica $\mathfrak{q}_i^*\vartheta_i^* = \mathfrak{p}_i^*\vartheta_i^*$ y por la biyección existente entre primarios de ϑ_i^* y primarios de B contenidos en $\mathfrak{p}_i^*$, esto implica: $\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{p}_i^*$. Como ello es cierto para $i=1,\dots,z$, para el ideal (1) se verifica:

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{p}_1^* \cap \dots \cap \mathfrak{p}_z^* = \sqrt{\mathfrak{p}B}$$

luego $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

2.3.8 Ejemplos.-

a) Siendo $A = \mathbb{R}[x]$ y $B = \mathbb{R}[x,y]$ con la condición $x^2+y^2-1 = 0$, resulta:

$$J_y = (2y) \Rightarrow \mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y,x^2-1)B \Rightarrow \mathrm{ram}_1 A = (x^2-1)A$$

Para el ideal maximal $\mathfrak{p} = (x^2+1)A$, se tiene: $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$ (ya que si x^2-1 perteneciera a $\mathfrak{p}$, entonces sería $\mathfrak{p}=A$). Por tanto, según el teorema 2.3.7, $\mathfrak{p}$

no se ramificará. Y en efecto

$$\mathfrak{p}B = (x^2+1)B = (x^2+1,x^2+y^2-1)B = (x^2+1,y^2-2)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^* \qquad (1)$$

siendo

$$\mathfrak{p}_1^* = (x^2+1,y-\sqrt{2})B \quad , \quad \mathfrak{p}_2^* = (x^2+1,y+\sqrt{2})B$$

Para probar que $\mathfrak{p}_1^*$ es primo, podemos considerar el $k[x]$-epimorfismo

$$g : \mathbb{R}[x,y] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \quad ; \quad g(y) = \sqrt{2}$$

para el cual $\ker g = (y-\sqrt{2})\mathbb{R}[x,y]$ y $g(\mathfrak{p}_1^*) = (x^2+1)\mathbb{R}[x]$, luego

$$\mathbb{R}[x,y]/(x^2+1,y-\sqrt{2})\mathbb{R}[x,y] = \mathbb{R}[x,y]/g^{-1}g(\mathfrak{p}_1^*) \simeq \mathbb{R}[x]/g(\mathfrak{p}_1^*) =$$
$$= \mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x] \qquad (2)$$

pero

$$\mathbb{R}[x,y]/(x^2+1,y-\sqrt{2})\mathbb{R}[x,y] \simeq B/\mathfrak{p}_1^*$$

luego $\mathfrak{p}_1^*$ es maximal, por ser cuerpo (2). Y de modo análogo se prueba que $\mathfrak{p}_2^*$ es maximal, luego (1) es radical, es decir $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$. En cambio, para $\mathfrak{p}' = (x-1)A$, se tiene: $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego, según 2.3.7, $\mathfrak{p}$ se ramificará en $A \hookrightarrow B$. Y en efecto:

$$\mathfrak{p}B = (x-1)B = (x-1,x^2+y^2-1)B = (x-1,y^2)B$$

siendo su radical el maximal $(x-1,y)B$, por lo que $\mathfrak{p}B$ es un primario no primo, luego $\sqrt{\mathfrak{p}B} \neq \mathfrak{p}B$, y por tanto $\mathfrak{p}$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

b) Siendo $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$, $B = A[y]$, $y^2+x_1^2-x_2^2 = 0$, se tiene:

$$J_y = (2y) \Rightarrow \mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y,x_1^2-x_2^2)B \Rightarrow \mathrm{ram}_1 A = (x_1^2-x_2^2)A$$

Para el ideal maximal $\mathfrak{p} = (x_1,x_2-1)A$, se verifica: $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego, según 2.3.7, $\mathfrak{p}$ no se ramificará, y en efecto:

$$\mathfrak{p}B = (x_1,x_2-1)B = (x_1,x_2-1,y^2-1)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^*$$

donde

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1,x_2-1,y-1)B \quad , \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2-1,y+1)B$$

luego $\mathfrak{p}B$ es radical, por ser intersección de primos. En cambio para el ideal maximal $\mathfrak{p}' = (x_1-1,x_2-1)A$, se tiene:

$$x_1^2-x_2^2 = (x_1^2-1)-(x_2^2-1) \in \mathfrak{p}'$$

luego $\mathfrak{p}' \supseteq \mathrm{ram}_1 A$ y en consecuencia (según 2.3.6) $\mathfrak{p}'$ se ramificará, y en efecto

$$\mathfrak{p}'B = (x_1-1,x_2-1)B = (x_1-1,x_2-1,y^2)B$$

es primario (no primo), ya que su radical es el maximal $(x_1-1,x_2-1,y)B$ siendo $\sqrt{\mathfrak{p}'B} \neq \mathfrak{p}'B$.

c) Siendo $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$, $B = A[y_1,y_2]$, $y_1^2-x_1 = 0$, $y_2^3-x_2 = 0$, resulta

$$J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{ram}_1 B = (y_1y_2^2)B = (y_1y_2^2,x_1x_2)B \Rightarrow \operatorname{ram}_1 A = (x_1x_2)A$$

Para $\mathfrak{p} = (x_1-a_1,x_2-a_2)A$, donde $a_1 > 0 \neq a_2$, se verifica $\mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{ram}_1 A$ (ya que, en otro caso resultaría $\mathfrak{p} = A$, lo que es absurdo), luego, según 2.3.7, $\mathfrak{p}$ se ramificará. Y en efecto:

$$\mathfrak{p}B = (x_1-a_1,x_2-a_2)B = (x_1-a_1,x_2-a_2,y_1^2-a_1,y_2^3-a_2)B = \bigcap_{i=1}^{4} \mathfrak{p}_i^*$$

siendo

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1-a_1,x_2-a_2,y_1-\alpha_1,y_2-\alpha_2)B$$
$$\mathfrak{p}_2^* = (x_1-a_1,x_2-a_2,y_1-\alpha_1,y_2^2+\alpha_2y_2+\alpha_2^2)B$$
$$\mathfrak{p}_3^* = (x_1-a_1,x_2-a_2,y_1+\alpha_1,y_2-\alpha_2)B$$
$$\mathfrak{p}_4^* = (x_1-a_1,x_2-a_2,y_1+\alpha_1,y_2^2+\alpha_2y_2+\alpha_2^2)B$$

donde α_1 es una raíz cuadrada real de a_1 y α_2 la raíz cúbica real de a_2 . Ahora bien, los ideales $\mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{p}_3^*$ son maximales (por ser ideales de punto) y $\mathfrak{p}_2^*$ es primo, según resulta fácilmente de considerar el $\mathbb{R}[y_2]$-epimorfismo

$$g : B \longrightarrow \mathbb{R}[y_2] \ ; \ g(x_1) = a_1 \ , \ g(x_2) = a_2 \ , \ g(y_1) = \alpha_1$$

y de modo similar resulta primo $\mathfrak{p}_4^*$. Por tanto $\mathfrak{p}B$ es radical, por ser intersección de primos. En cambio , para $\mathfrak{p}' = (x_1-a_1,x_2)A$, donde $a_1>0$, se verifica: $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ram}_1 A$, luego, según 2.3.7, $\mathfrak{p}$ se ramificará. Y en efecto

$$\mathfrak{p}'B = (x_1-a_1,x_2)B = (x_1-a_1,x_2,y_1^2-a_1,y_2^3)B = \mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^*$$

siendo

$$\mathfrak{q}_1^* = (x_1-a_1,x_2,y_1-\alpha_1,y_2^3)B \ ; \ \mathfrak{q}_2^* = (x_1-a_1,x_2,y_1+\alpha_1,y_2^3)B$$

donde α_1 es una raíz cuadrada real de a_1 . Como estos dos ideales tienen por respectivos radicales a los maximales

$$\mathfrak{p}_1^* = \sqrt{\mathfrak{q}_1^*} = (x_1-a_1,x_2,y_1-\alpha_1,y_2)B$$
$$\mathfrak{p}_2^* = \sqrt{\mathfrak{q}_2^*} = (x_1-a_1,x_2,y_1+\alpha_1,y_2)B$$

serán primarios, siendo además $\mathfrak{q}_1^* \neq \mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{q}_2^* \neq \mathfrak{p}_2^*$, luego $\mathfrak{p}B$ no es radical.

2.4 Inramificación y ramificación reiterada

Para $A = \mathbb{R}[x]$ y $B = A[y]$, con la condición $xy-1 = 0$, es $J_y = (x)$, luego $\mathrm{ram}_1 B = (x)B = (x,1)B = B$ y, por tanto, la subvariedad de ramificación R_1^* es $\emptyset$, es decir, no existen puntos de ramificación.

2.4.1 <u>Definición</u>.- *Diremos que* $A \hookrightarrow B$ *es una* **extensión inramificada**, *si* $\mathrm{ram}_1 B = B$.

<u>Nota</u>.- Es claro que si $\mathrm{ram}_1 B = B$, entonces $R_1^* = \emptyset$, pero puede suceder que sea $R_1^* = \emptyset$, siendo $\mathrm{ram}_1 B \neq B$. Tal es el caso siguiente:

$$A = \mathbb{R}[x] \quad , \quad B = \mathbb{R}[x,y] \quad , \quad y^2-x^2 = 1$$

en que: $J_y = (2y)$, $\mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y,x^2+1)B \neq B$, pero $R_1^* = \emptyset$ (lo que naturalmente se debe a que el cuerpo base, $\mathbb{R}$, no es algebraicamente cerrado).

2.4.2 <u>Definición</u>.- *Diremos que* $A \hookrightarrow B$ *es una* **extensión trivial**, *si* $B = A$, *es decir, si los elementos* $y_1,\dots,y_n$ *(considerados en* 1.0*) pertenecen todos al subanillo* A.

2.4.3 <u>Proposición</u>.- *Si la extensión* $A \hookrightarrow B$ *es trivial, entonces es inramificada.*

<u>Demostración</u>.- Supongamos que $A \hookrightarrow B$ es trivial, es decir, que $y_j \in A$; $j=1,\dots,n$. Entonces las condiciones de definición de B sobre A, se reducen a

$$y_s - a_s(x_1,\dots,x_r) = 0 \; ; \; s=1,\dots,n$$

donde $a_s(x_1,\dots,x_r) \in A$, luego J_y es la matriz unidad, y por tanto el ideal $\mathrm{ram}_1 B$, generado por $\det J_y$, es todo el anillo B. ■

<u>Nota</u>.- En el caso con el que se iniciaba este apartado 2.4 (xy-1=0), la inramificación parece deberse al hecho de no ser B entero sobre A. Notemos al efecto que aunque, como se indicó en 1.0, estamos trabajando en característica cero, en característica p puede tenerse inramificación, incluso para el caso de extensión entera, como muestra el siguiente ejemplo: siendo el cuerpo base $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p entero primo), $A = k[x]$ y $B = k[x,y]$,

con la condición

$$y^{p+1} - xy^p + 1 = 0$$

de acuerdo con nuestra notación habitual, se tiene:

$$n = 1 \quad ; \quad f_1 = Y^{p+1} - xY^p + 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial Y} = (p+1)Y^p - pxY^{p-1} \equiv Y^p$$

$$J_y = (y^p) \quad ; \quad \mathrm{ram}_1 B = (y^p)B = (y^p, y^{p+1} - xy^p + 1)B = (y^p, 1)B = B$$

2.4.4 Proposición.- *Supongamos el cuerpo base,* k, *algebraicamente cerrado y* B *entero sobre* A, *y que las condiciones de definición de* B *sobre* A *pueden escribirse en la forma*

$$f_s(x_1,\dots,x_r,y_s) = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n} \qquad (*)$$

(es decir, en f_s *sólo aparece* y_s *, pero no las demás* y_j *, para* $j \neq s$*). En estas condiciones, si la extensión* $A \hookrightarrow B$ *es inramificada, entonces es trivial.*

Demostración.- En vez de probar la implicación:

inramificada $\Longrightarrow$ *trivial*

probaremos la implicación equivalente:

no trivial $\Longrightarrow$ *no inramificada*

En efecto, las condiciones (*) permiten considerar la base de ker g formada por los elementos:

$$f_s(x_1,\dots,x_r,Y_s) \in A[Y_s] \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n} \qquad (1)$$

y si la extensión es no trivial, para algún $s = c$, habrá de ser mayor que uno el grado de f_c respecto de Y_c , luego f_c podrá escribirse en la forma:

$$f_c = \alpha_e Y_c^e + \alpha_{e-1} Y_c^{e-1} + \dots + \alpha_1 Y_c + \alpha_0 \quad ; \quad \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_e \in A$$

pudiendo suponer $\alpha_e = 1$, por ser B entero sobre A . Derivando resulta

$$f'_c = \frac{\partial f_c}{\partial Y_c} = e\alpha_e Y_c^{e-1} + (e-1)\alpha_{e-1} Y_c^{e-2} + \dots + \alpha_1$$

luego la resultante de eliminar Y_c entre f_c y f'_c , que notaremos $E(f_c, f'_c)$, será un polinomio de $A = k[x_1,\dots,x_r]$. Por ser k algebraicamente cerrado, la ecuación

$$E(f_c, f'_c) = 0 \qquad (2)$$

tendrá alguna solución:

$$x_{i_1} = a_{i_1} \ , \dots , \ x_{i_t} = a_{i_t} \qquad (3)$$

(donde $i_1,\dots,i_t \in \{1,\dots,r\}$), para la cual las ecuaciones $f_c = 0$ y $f'_c = 0$ tendrán una raíz común

$$y_c = b_c \qquad (4)$$

Bastará pues considerar el ideal $\mathfrak{p}_0^*$ de un punto, para el cual sean válidas (3) y (4), con el fin de asegurar la anulación de f_c y f'_c al especializar en $\mathfrak{p}_0^*$. En consecuencia, y por ser las f_s de la forma (1), se tendrá:

$$\det\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = \prod_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial f_s}{\partial y_s}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 0$$

y por tanto $\det J_y \in \mathfrak{p}_0^* \subsetneq B$, luego $\mathrm{ram}_1 B \neq B$. ■

Nota.- Observemos que en la proposición anterior no es superfluo exigir que B sea entero sobre A. En efecto, si se prescinde de tal condición, entonces el coeficiente α_e del polinomio f_c (considerado en la demostración precedente), sería un elemento de $A = k[x_1,\dots,x_r]$, no necesariamente unidad de A . Ahora bien, en el determinante eliminante, $E(f_c,f'_c)$, aparecen en su primera fila (o columna) los elementos α_e y $e\alpha_e$, siendo nulos los restantes elementos de esa línea, por lo que en el DFU $k[x_1,\dots,x_r]$ podrá factorizarse:

$$E(f_c,f'_c) = \alpha_e \cdot \ \dots$$

y en consecuencia la solución de (2) puede ser solución de $\alpha_e = 0$, lo que invalidaría el método de la resultante de Sylvester, ya que entonces el grado de f_c sería menor que e. Tal es el caso del siguiente ejemplo:

$$A = \mathbb{C}[x] \ , \ B = \mathbb{C}[x,y] \ , \ xy^2-1 = 0$$

para el que se tiene: $J_{xy} = (2xy)$, luego $\mathrm{ram}_1 B = (xy)B = (xy,1)B = B$, pero de $f = xY^2-1$ y $f' = 2xY$, resulta:

$$E(f_c,f'_c) = \begin{vmatrix} x & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4x^2$$

y el valor, $x = 0$, para el que se anula esta resultante, rebajaría el grado de f . Esta es la razón de que la extensión considerada en este ejemplo sea inramificada, aunque no trivial. ■

Si suponemos $m=n$, es decir, si $B = A[y_1,\dots,y_n]$ está definido por n

condiciones:

$$f_s(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_n) = 0 \ ; \ {\scriptstyle s=1,\ldots,n}$$

entonces el ideal de ramificación de orden uno , $ram_1 B$, es el ideal principal del anillo B, generado por el elemento det J_y , y si este elemento no es nulo, ni unidad, entonces tiene interés considerar el anillo cociente

$$B' = B/(ram_1 B) \simeq k[x'_1,\ldots,x'_r,y'_1,\ldots,y'_n]$$

definido por las $n+1$ condiciones

$$f_s(x'_1,\ldots,x'_r,y'_1,\ldots,y'_n) = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\ldots,n} \quad ; \quad \det J_{y'} = 0 \qquad (*)$$

donde x'_i e y'_j son las respectivas imágenes de x_i e y_j en el epimorfismo natural

$$\varphi : B \longrightarrow B' = B/(ram_1 A)$$

En consecuencia, el anillo B' será extensión de un anillo de polinomios en $r-1$ indeterminadas que, salvo permutación de subíndices, podremos suponer que es $A' = k[x'_1,\ldots,x'_{r-1}]$, por lo que tiene sentido ahora considerar la ramificación respecto de la extensión $A' \hookrightarrow B'$ (es decir, la ramificación de la propia subvariedad de ramificación R^*_1), que denominaremos **ramificación reiterada**. De acuerdo con esta notación, se tiene:

2.4.5 <u>Definición</u>.- *Llamaremos* **ideal de ramificación reiterada** *de* $A \hookrightarrow B$ *al contraído en* φ *del ideal de ramificación de orden uno de* $A' \hookrightarrow B'$, *es decir, al ideal del anillo* B

$$\boxed{\varphi^{-1}(ram_1 B')}$$

A la correspondiente subvariedad, la llamaremos **subvariedad de ramificación reiterada** *y la notaremos* R'_1 .

2.4.6 <u>Proposición</u>.- *Si la extensión* $A \hookrightarrow B$ *no es inramificada y es* $m = n$, *entonces el ideal de ramificación reiterada está contenido en el ideal de ramificación de orden dos, es decir,*

$$\boxed{\varphi^{-1}(ram_1 B') \subseteq ram_2 B} \qquad (**)$$

<u>Demostración</u>.- Comencemos comprobando que B' es extensión algebraica de A'. En efecto, por haber supuesto $m=n$, $ram_1 B$ es el ideal principal generado por el elemento $\det J_y$, no siendo este elemento nulo, ni unidad, ya que, por

haber supuesto la extensión $A \hookrightarrow B$ no inramificada y de acuerdo con 2.1.3, ha de ser $(0) \neq \mathrm{ram}_1 B \neq B$. En consecuencia, según el teorema del ideal principal, si $\mathfrak{p}_1^*$ es primo minimal de $\mathrm{ram}_1 B$, la altura de $\mathfrak{p}_1^*$ es uno, luego

$$\mathrm{gr.tr.}(B/\mathfrak{p}_1^* : k) = \mathrm{gr.tr.}(B:k) - 1 = r - 1$$

Puesto que $0 \subsetneq \mathrm{ram}_1 B \subseteq \mathfrak{p}_1^*$, existe un homomorfismo h', que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h_1^*"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B/\mathfrak{p}_1^* \\ & B' \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

donde h_1^* es epimorfismo natural y φ el definido anteriormente. Por tanto, el máximo número de variables algebraicamente independientes existentes en B' será r-1, luego salvo permutación de subíndices, podemos suponer que B' es extensión algebraica de $k[x'_1,\dots,x'_{r-1}]$.

Para $n=1$, la inclusión (**) es trivial, ya que entonces, de acuerdo con 2.1.2, es $\mathrm{ram}_2 B = B$. Supongamos pues, en adelante, $n>1$.

Puesto que (*) son las condiciones de definición de B' sobre A', $\mathrm{ram}_1 B'$ será el ideal principal del anillo B' generado por el determinante de la matriz jacobiana

$$J_{x'_r,y'} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n,\det J_{y'})}{\partial(x'_r,y_1,\dots,y_n)}$$

cuyo desarrollo por los elementos de su última fila, permite escribir

$$\det J_{x'_r,y'} = (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial x'_r}(\det J_{y'})\right] \det J_{y'} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left[\frac{\partial}{\partial y'_j}(\det J_{y'})\right] \det \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x'_r,y'_1,\dots,\hat{y}'_j,\dots,y'_n)} \tag{1}$$

pero, según propiedades conocidas de la derivación de determinantes,

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}(\det J_{y'}) = \sum_{s=1}^{n} \det \frac{\partial\left(f_1,\dots,f_{s-1},\frac{\partial f_s}{\partial x'_r},f_{s+1},\dots,f_n\right)}{\partial(y'_1,\dots,y'_n)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x'_r \partial y'_j} \det J_{y'}(\hat{s},\hat{j})$$

donde

$$J_{y'}(\hat{s},\hat{j}) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_{s-1},\hat{f}_s,f_{s+1},\dots,f_n)}{\partial(y'_1,\dots,y'_{j-1},\hat{y}'_j,y'_{j+1},\dots,y'_n)} \qquad (2)$$

Ahora bien, los determinantes de las matrices (2), por ser menores de orden $n-1$ de la matriz $J_{y'}$, pertenecen al ideal $\varphi(\mathrm{ram}_2 B)$. En consecuencia,

$$\frac{\partial}{\partial x'_r}(\det J_{y'}) \in \varphi(\mathrm{ram}_2 B)$$

y, de modo análogo, resulta

$$\frac{\partial}{\partial y'_j}(\det J_{y'}) \in \varphi(\mathrm{ram}_2 B) \ ; \ j=1,\dots,n$$

lo que, teniendo en cuenta (1), implica

$$\det J_{x'_r,y'} \in \varphi(\mathrm{ram}_2 B)$$

y por tanto $\mathrm{ram}_1 B' \subseteq \varphi(\mathrm{ram}_2 B)$, luego

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ram}_1 B') \subseteq \mathrm{ram}_2 B + \ker \varphi$$

pero, de acuerdo con 2.1.4, $\ker \varphi = \mathrm{ram}_1 B \subseteq \mathrm{ram}_2 B$ y en consecuencia se verifica (**). ■

Nota.- La proposición anterior admite una versión geométrica inmediata, sustituyendo la inclusión (**) por

$$\boxed{R_2^* \subseteq R'_1}$$

de acuerdo con la notación de 2.1.2 y 2.4.5 .

2.4.7 Ejemplo.- Para $A = k[x_1,x_2]$, $B = A[y_1,y_2]$, $y_1^2-x_1 = 0$, $y_2^3-x_2 = 0$, se tiene

$$J_y = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{ram}_1 B = (y_1y_2^2)B \ ; \ \mathrm{ram}_2 B = (y_1,y_2^2)B$$

luego, tomando $A'= k[x'_1]$, $B'= k[x'_2,y'_1,y'_2]$ con las condiciones:

$$y_1'^2-x'_1 = 0 \ , \ y_2'^3-x'_2 = 0 \ , \ \det J_{y'} = 6y'_1y_2'^2 = 0 \qquad (1)$$

$\varphi^{-1}(\mathrm{ram}_1 B')$ será el ideal de B generado por

$$\det \frac{\partial(y_1^2-x_1,y_2^3-x_2,\det J_y)}{\partial(x_2,y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 2y_1 & 0 \\ -1 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 6y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 24y_1^2y_2$$

luego se verifica la inclusión

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ram}_1 B') \subseteq \mathrm{ram}_2 B \qquad (2)$$

Y si se intercambian los papeles de x_1 y x_2 , es decir, tomando $A' = k[x_2']$, $B' = k[x_1',y_1',y_2']$ con las mismas condiciones (1), $\varphi^{-1}(\mathrm{ram}_1 B')$ sería el ideal de B generado por

$$\det \frac{\partial(y_1^2-x_1,y_2^3-x_2,\det J_y)}{\partial(x_1,y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} -1 & 2y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3y_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 6y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 18y_2^4$$

luego también se verifica la inclusión (2).

Capítulo III.

Sustitución de la dependencia entera por condiciones de ramificación en los teoremas de Cohen-Seidemberg

3.1 Teoremas previos de ascenso en caso de no ramificación

En los teoremas de ascenso, que comienzan con un resultado bien conocido, cuyo enunciado recordamos:

<< *Sean* A *subanillo de* B *y* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A$. *Si* B *es entero sobre* A , *entonces existe* $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Spec}\ B$, *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ >>

es esencial la dependencia entera de B sobre A, según se muestra en [C-S]. No obstante, siendo A el anillo de polinomios y B la k-álgebra finita que venimos considerando a lo largo de esta memoria, la condición de ser B entero sobre A puede ser sustituida por la de existir un ideal de punto, $\mathfrak{p}_0^*$, del anillo B , que contenga a $\mathfrak{p}$ y cuyo orden de ramificación sea cero. En adelante seguiremos pues suponiendo que A y B son los indicados en 1.0.

3.1.1 Teorema.- *Sea* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A$. *Si existe en* B *un ideal de punto,* $\mathfrak{p}_0^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}$ *y* $\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe* $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Spec}\ B$, *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ (*Además, puede elegirse* $\mathfrak{p}^*$ *de modo que* $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$).

Demostración.- Sea $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$. Comencemos considerando los anillos locales $\vartheta_0 = A_{\mathfrak{p}_0}$ y $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$, y notemos $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{p}_0\vartheta_0$ y $\mathfrak{m}_0^* = \mathfrak{p}_0^*\vartheta_0^*$ a sus respectivos ideales de no unidades. Supongamos $\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0$, lo que, según 1.2.9, implica la regularidad del anillo local ϑ_0^* , de dimensión:

$$\dim \vartheta_0^* = \mathrm{alt}\ \mathfrak{m}_0^* = \mathrm{alt}\ \mathfrak{p}_0^* = \dim B - \dim \mathfrak{p}_0^* = \mathrm{gr.tr.}(B{:}k) - 0 = r$$

Además, por ser A anillo de polinomios, el anillo local ϑ_0 también será regular r-dimensional. Si

$$\{t_1,\ldots,t_r\} \qquad (1)$$

es un sistema regular de parámetros de ϑ_0 , entonces

$$\{t_1+\mathfrak{m}_0^2,\ldots,t_r+\mathfrak{m}_0^2\} \qquad (2)$$

es base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Ahora bien, según 1.3.3, la aplicación lineal

$$\tau : \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_0^*/\mathfrak{m}_0^{*2} \quad ; \quad \tau(G+\mathfrak{m}_0^2) = G+\mathfrak{m}_0^{*2} \quad (\forall G\in \mathfrak{m}_0)$$

tiene por núcleo un subespacio de dimensión:

$$\dim \ker \tau = \mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0$$

luego τ es monomorfismo y, por tanto, las imágenes en τ de los vectores (2), es decir,

$$t_1+\mathfrak{m}_0^{*2},\dots\dots,t_r+\mathfrak{m}_0^{*2} \qquad (3)$$

son vectores linealmente independientes de $\mathfrak{m}_0^*/\mathfrak{m}_0^{*2}$, lo que, teniendo en cuenta que la dimensión de este espacio vectorial es

$$\dim_k\left[\mathfrak{m}_0^*/\mathfrak{m}_0^{*2}\right] = \dim \vartheta_0^* = r$$

implica que (3) sea base de $\mathfrak{m}_0^*/\mathfrak{m}_0^{*2}$, luego (1) es también sistema regular de parámetros de ϑ_0^*, y por tanto, (1) genera su ideal maximal, es decir

$$\mathfrak{m}_0^* = (t_1,\dots\dots,t_r)\vartheta_0^* \qquad (4)$$

Por otra parte, es claro que ϑ_0^* es noetheriano (por serlo B) y que $\mathfrak{m}_0^*$ está contenido en el radical de Jacobson de ϑ_0^*, luego ϑ_0^* es un anillo de Zariski (respecto de la topología $\mathfrak{m}_0^*$-ádica) y, por tanto, su completado, $\hat{\vartheta}_0^*$, es también local noetheriano y además regular r-dimensional (por serlo ϑ_0^*). Considerando ahora la extensión $\vartheta_0^* \longrightarrow \hat{\vartheta}_0^*$, para el maximal $\hat{\mathfrak{m}}_0^*$ de $\hat{\vartheta}_0^*$, se verifican:

$$\hat{\mathfrak{m}}_0^* = \mathfrak{m}_0^*\hat{\vartheta}_0^* \quad ; \quad \hat{\mathfrak{m}}_0^* \cap \vartheta_0^* = \mathfrak{m}_0^* \quad ; \quad \hat{\vartheta}_0^*/\hat{\mathfrak{m}}_0^* \simeq \vartheta_0^*/\mathfrak{m}_0^* \qquad (5)$$

de la primera de las cuales, junto con (4), resulta $\hat{\mathfrak{m}}_0^* = (t_1,\dots,t_r)\hat{\vartheta}_0^*$, lo que, teniendo en cuenta que $\dim \hat{\vartheta}_0^* = r$, permite concluir que (1) es también sistema regular de parámetros de $\hat{\vartheta}_0^*$. Además $k \subseteq B \subseteq \vartheta_0^* \subseteq \hat{\vartheta}_0^*$, luego $\hat{\vartheta}_0^*$ es un anillo local regular completo equicaracterístico y por tanto admite un cuerpo de representantes, K, que permite expresar $\hat{\vartheta}_0^*$ en la forma $\hat{\vartheta}_0^* = K[[t_1,\dots\dots,t_r]]$, pero la última relación (5), recordando 1.3.1i, implica: $\hat{\vartheta}_0^*/\hat{\mathfrak{m}}_0^* \cong k$, luego $\hat{\vartheta}_0^* \cong k[[t_1,\dots,t_r]]$ y análogamente resulta $\hat{\vartheta}_0 \cong k[[t_1,\dots,t_r]]$.

En consecuencia, existe un isomorfismo $\psi : \hat{\vartheta}_0 \longrightarrow \hat{\vartheta}_0^*$, que asegura la conmutatividad del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \vartheta_0 \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
& & \hat{\vartheta}_0 \arrow[r, "\psi"] & \hat{\vartheta}^*_0 \\
B \arrow[r, hook] & \vartheta^*_0 \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
\qquad (6)
$$

Por ser $\mathfrak{p}$ primo y estar $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}^*_0 \cap A$, el ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta_0$ también es primo, y de altura la misma de $\mathfrak{p}$. Pasando ahora al extendido en $\vartheta_0 \hookrightarrow \hat{\vartheta}_0$, es decir, al ideal $(\mathfrak{p}\vartheta_0)\hat{\vartheta}_0 = \mathfrak{p}\hat{\vartheta}_0$, podemos considerar un ideal primo aislado, π, de este ideal extendido. El contraído en ϑ_0 de π es de nuevo $\mathfrak{p}\vartheta_0$, es decir,

$$\pi \cap \vartheta_0 = \mathfrak{p}\vartheta_0 \qquad (7)$$

lo cual es consecuencia de ser $\mathfrak{p}\vartheta_0$ primo (según propiedades conocidas de la extensión $\vartheta_0 \hookrightarrow \hat{\vartheta}_0$).

Considerando ahora en el anillo $\hat{\vartheta}^*_0$ el ideal π^* (imagen de π en el isomorfismo ψ), su contraído en ϑ^*_0, es decir,

$$\pi^* \cap \vartheta^*_0 \qquad (8)$$

será primo (por serlo π^*) y el contraído de este en el anillo B, que notaremos $\mathfrak{p}^*$, es decir,

$$\mathfrak{p}^* = (\pi^* \cap \vartheta^*_0) \cap B \qquad (9)$$

también es primo, por serlo (8). Finalmente, por la conmutatividad del diagrama (6), el contraído en A de este ideal coincidirá con el contraído de π, es decir,

$$\mathfrak{p}^* \cap A = [(\pi^* \cap \vartheta^*_0) \cap B] \cap A = (\pi \cap \vartheta_0) \cap A$$

lo que, recordando (7), implica $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}\vartheta_0 \cap A = \mathfrak{p}$. El proceso descrito se visualiza en el diagrama siguiente, consecuencia de la conmutatividad del diagrama (6):

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{p} \arrow[r] & \mathfrak{p}\vartheta_0 \arrow[dr] & & & \\
& & (\mathfrak{p}\vartheta_0)\hat{\vartheta}_0 = \pi \cap \ldots \arrow[r] & \pi \arrow[r, "\psi"] & \pi^* \arrow[dlll] \\
\mathfrak{p}^* \arrow[uu] & \pi^* \cap \vartheta^*_0 \arrow[l] \arrow[uu] & & &
\end{tikzcd}
$$

Por último, por ser $\hat{\mathfrak{m}}^*_0$ el ideal maximal del anillo local $\hat{\vartheta}^*_0$, será $\pi^* \subseteq \hat{\mathfrak{m}}^*_0$, luego al contraer al subanillo ϑ^*_0, teniendo en cuenta la segunda relación (5), resulta

$$\pi^* \cap \vartheta^*_0 \subseteq \hat{\mathfrak{m}}^*_0 \cap \vartheta^*_0 = \mathfrak{m}^*_0$$

y volviendo a contraer al subanillo B, recordando (9), se tiene:

$$\mathfrak{p}^* = (\pi^* \cap \vartheta_0^*) \cap B \subseteq \mathfrak{m}_0^* \cap B = \mathfrak{p}_0^* B_{\mathfrak{p}_0^*} \cap B = \mathfrak{p}_0^*$$

En resumen, se ha llegado a determinar un ideal $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B, que yace sobre $\mathfrak{p}$ y además está contenido en $\mathfrak{p}_0^*$. ■

Nota.- Lo mismo que en el teorema análogo para caso de dependencia entera (recordado al comienzo de este apartado 3.1), el ideal $\mathfrak{p}^*$, que yace sobre $\mathfrak{p}$ y cuya existencia asegura el teorema, no es único, en general. Notemos, al efecto, que dado $\mathfrak{p} \in$ Spec A, la existencia del ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}$, tal que ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, lo que garantiza, según el teorema 3.1.1, es la existencia de $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , tal que $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, siendo $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$. Pero, además, puede existir otro ideal $\mathfrak{p}'' \in$ Spec B , tal que $\mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}'' \not\subset \mathfrak{p}_0^*$, como muestra el siguiente:

Ejemplo.- Sean $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición $(x_2+1)y^2-1 = 0$. Para el ideal primo $\mathfrak{p} = (x_2)A$, puede considerarse el ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* = (x_1,x_2,y-1)B$, tal que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}$ y

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - 1 = 0$$

luego, según el teorema 3.1.1, existirá $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , tal que $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, siendo además $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$. Y, en efecto, es inmediato verificar que el ideal primo $\mathfrak{p}^* = (x_2,y-1)B$ yace sobre $\mathfrak{p}$, estando además contenido en $\mathfrak{p}_0^*$. Pero también el ideal primo $\mathfrak{p}'' = (x_2,y+1)B$ yace sobre $\mathfrak{p}$, aunque $\mathfrak{p}'' \not\subset \mathfrak{p}_0^*$.

3.1.2 Corolario.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y sea* $\mathfrak{p} \in$ Spec A . *Si para el ideal extendido* $\mathfrak{p}$B, *se verifica* $\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \text{ram}_1 B$, *entonces existe* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$.

Demostración.- Si $\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \text{ram}_1 B$, entonces $\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \sqrt{\text{ram}_1 B}$, luego existe algún primo aislado, $\mathfrak{p}''$, de $\mathfrak{p}B$, tal que $\mathfrak{p}'' \not\supset \sqrt{\text{ram}_1 B}$ y por tanto $\mathfrak{p}'' + \sqrt{\text{ram}_1 B} \neq \mathfrak{p}''$, lo que implica (por ser primo $\mathfrak{p}''$):

$$\dim (\mathfrak{p}'' + \sqrt{\text{ram}_1 B}) < \dim \mathfrak{p}''$$

luego, por ser k algebraicamente cerrado, existirá un punto en la subvariedad de $\mathfrak{p}''$, que no pertenezca la subvariedad de $\mathfrak{p}'' + \sqrt{\text{ram}_1 B}$. Por tanto, para el ideal $\mathfrak{p}_0^*$, de dicho punto, será: $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, pero $\sqrt{\mathrm{ram}_1 B} \not\subset \mathfrak{p}_0^*$, luego (por ser primo $\mathfrak{p}_0^*$) $\mathrm{ram}_1 B \not\subset \mathfrak{p}_0^*$, lo que, según 2.1.5, implica $\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0$. Y ahora sigue ya del teorema anterior. ∎

Nota.- La definición 2.2.1 induce a pensar en la posibilidad de sustituir en el corolario anterior la condición $\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \mathrm{ram}_1 B$, por la condición, aparentemente más elegante, $\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A$, pero esta condición (más exigente que la anterior) no es necesaria para asegurar la existencia de $\mathfrak{p}^*$, que yazca sobre $\mathfrak{p}$, como muestra el siguiente:

Contraejemplo.- Siendo $A = \mathbb{C}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición $x_2y^3-3y+2x_2 = 0$, se tiene:

$$J_y = (3x_2y^2-3) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ram}_1 B = (x_2y^2-1)B$$

de donde resulta: $\mathrm{ram}_1 A = (x_2^2(x_2^3-1))A$, luego para el ideal $\mathfrak{p} = (x_1,x_2-1)A$, es claro que

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A \qquad (1)$$

Ahora bien

$$\mathfrak{p}B = (x_1,x_2-1)B = (x_1,x_2-1,x_2y^3-3y+2x_2)B =$$
$$= (x_1,x_2-1,y^3-3y+2)B = (x_1,x_2-1,(y-1)^2(y+2))B = \mathfrak{q}^* \cap \mathfrak{p}^*$$

siendo $\mathfrak{q}^* = (x_1,x_2-1,(y-1)^2)B$ y $\mathfrak{p}^* = (x_1,x_2-1,y+2)B$, pero $x_2y^2-1 \notin \mathfrak{p}^*$, y por tanto $x_2y^2-1 \notin \sqrt{\mathfrak{p}B} = \sqrt{\mathfrak{q}^*} \cap \mathfrak{p}^*$, luego

$$\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \mathrm{ram}_1 B \qquad (2)$$

no obstante verificarse (1). Finalmente, observemos que, de acuerdo con el corolario anterior, la condición (2) implica la existencia de un primo de B que yazca sobre A, siendo $\mathfrak{p}^*$ un ideal que verifica tal condición. ∎

El contraejemplo precedente ofrece una interpretación geométrica curiosa. La condición $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$ informa de que la proyección sobre k^r de la subvariedad de ramificación contiene a la subvariedad de $\mathfrak{p}$, es decir, $v(\mathfrak{p}) \subseteq v(\mathrm{ram}_1 A)$, mientras que la condición $\sqrt{\mathfrak{p}B} \not\supset \mathrm{ram}_1 B$ informa de que una, al menos, de las componentes irreducibles de la variedad de $\mathfrak{p}B$ no está contenida en la subvariedad de ramificación (lo cual es suficiente para que exista un punto de orden de ramificación cero en la subvariedad de $\mathfrak{p}B$, pudiendo así aplicar el resultado 3.1.1).

3.1.3 Lema.- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B. *Si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}''$, *tal que* $\mathfrak{p}'' \supseteq \mathfrak{p}^*$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}'' = 0$, *entonces*

$$\boxed{\operatorname{alt}(\mathfrak{p}^* \cap A) = \operatorname{alt} \mathfrak{p}^*}$$

Demostración.- Sea $(a_1,..,a_r,b_1,..,b_n) \in k^{r+n}$ el punto cuyo ideal es $\mathfrak{p}''$, es decir, sea

$$\mathfrak{p}'' = (x_1-a_1,..,x_r-a_r,y_1-b_1,..,y_n-b_n)B$$

y por tanto $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'' \cap A = (x_1-a_1,..,x_r-a_r)A$ el ideal del punto $(a_1,..,a_r) \in k^r$. En consecuencia

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}'' = \text{gr.tr.}(B{:}k) - \dim \mathfrak{p}'' = r - 0 = r$$

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}' = \text{gr.tr.}(A{:}k) - \dim \mathfrak{p}' = r - 0 = r$$

luego

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}' = \operatorname{alt} \mathfrak{p}'' = r \qquad (1)$$

Si suponemos

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}^* = a \qquad (2)$$

entonces existirá en el dominio B una cadena de primos:

$$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}^*_a \subsetneq \mathfrak{p}^*_{a+1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}^*_i \subsetneq \mathfrak{p}^*_{i+1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}^*_{r-1} \subsetneq \mathfrak{p}^*_r = \mathfrak{p}''$$

tales que

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}^*_i = i \ ; \ i=a,a+1,..,r \qquad (3)$$

de modo que notando

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^*_i \cap A \ ; \ i = a,a+1,..,r$$

se tendrá la cadena de primos del subanillo A:

$$\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}_a \subseteq \mathfrak{p}_{a+1} \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_{r-1} \subseteq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}' \qquad (4)$$

siendo, de acuerdo con (1),

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}_r = \operatorname{alt} \mathfrak{p}^*_r = r \qquad (5)$$

y además, por ser el dominio B extensión algebraica de A ,

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}_i \geq \operatorname{alt} \mathfrak{p}^*_i = i \ ; \ i=a,a+1,..,r-1 \qquad (6)$$

Bastará pues probar que para $i=r,r-1,..,a+1$, se verifica:

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p}_i = i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{alt} \mathfrak{p}_{i-1} = i-1 \qquad (7)$$

ya que, de esta implicación, junto con (5), se deduce

$$\text{alt } \mathfrak{p}_i = i \;;\; i=r,r-1,\dots,a+1,a$$

lo que, teniendo en cuenta (4) y (2), implica

$$\text{alt}(\mathfrak{p}^* \cap A) = \text{alt } \mathfrak{p}_a = a = \text{alt } \mathfrak{p}^*$$

que es lo que se deseaba demostrar. Para probar la implicación (7), supondremos pues

$$\text{alt } \mathfrak{p}_i = i \qquad (8)$$

Por ser ord.ram $\mathfrak{p}'' = 0$ y $\mathfrak{p}_i^* \subseteq \mathfrak{p}_r^* = \mathfrak{p}''$, de acuerdo con 1.2.9, resulta ser ord.ram $\mathfrak{p}_i^* = 0$, lo que según 1.4.2, implica

$$\mathfrak{p}_i^* \vartheta_i^* = \mathfrak{m}_i^* \qquad (9)$$

Por otra parte, de $\mathfrak{p}_{i-1}^* \cap A = \mathfrak{p}_{i-1}$, resulta que $\mathfrak{p}_{i-1}B \subseteq \mathfrak{p}_{i-1}^*$ y, extendiendo al anillo local $\vartheta_i^* = B_{\mathfrak{p}_i^*}$, se tendrá

$$\mathfrak{p}_{i-1}\vartheta_i^* \subseteq \mathfrak{p}_{i-1}^*\vartheta_i^* \qquad (10)$$

Ahora bien, $\mathfrak{p}_{i-1}^*\vartheta_i^*$ es un ideal primo de altura $i-1$ (por serlo $\mathfrak{p}_{i-1}^*$ y estar $\mathfrak{p}_{i-1}^* \subseteq \mathfrak{p}_i^*$), luego $\mathfrak{p}_{i-1}^*\vartheta_i^* \subsetneq \mathfrak{m}_i^* = \mathfrak{p}_i^*\vartheta_i^*$, lo que junto con (10), implica

$$\mathfrak{p}_{i-1}\vartheta_i^* \subsetneq \mathfrak{m}_i^* \qquad (11)$$

y esta inclusión estricta va a permitirnos concluir que

$$\text{alt } \mathfrak{p}_{i-1} = i-1 \qquad (12)$$

En efecto, si fuera alt $\mathfrak{p}_{i-1} \neq i-1$, entonces de (6) resultaría alt $\mathfrak{p}_{i-1} > i-1$, pero de (4) y (8) se deduce que alt $\mathfrak{p}_{i-1} \leq$ alt $\mathfrak{p}_i = i$, luego sería alt $\mathfrak{p}_{i-1} = i$, y por tanto se tendría $\mathfrak{p}_{i-1} \subseteq \mathfrak{p}_i$ y alt $\mathfrak{p}_{i-1} =$ $= i =$ alt $\mathfrak{p}_i$, lo que implicaría $\mathfrak{p}_{i-1} = \mathfrak{p}_i$, luego $\mathfrak{p}_{i-1}\vartheta_i^* = \mathfrak{p}_i\vartheta_i^*$, lo que, junto con (8) implicaría $\mathfrak{p}_{i-1}\vartheta_i^* = \mathfrak{m}_i^*$, en contradicción con (11) .Queda así probada la igualdad (12), lo que garantiza la validez de la implicación (7), que faltaba demostrar. ■

Nota.- El resultado anterior sugiere que nos preguntemos si la igualdad de alturas de los ideales $\mathfrak{p}^*$ y $\mathfrak{p}^* \cap A$ no será consecuencia de cierta dependencia entera, pues, aunque el anillo B no sea entero sobre A, podemos preguntarnos, si la condición de ser ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$, pudiera implicar que $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ fuera entero sobre $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$, con lo que el lema anterior y el teorema 3.1.1 serían consecuencia de un resultado bien conocido de Cohen-Seidemberg. Como respuesta, veamos que ϑ_0^* no es entero sobre ϑ en el siguiente:

<u>Contraejemplo</u>.- Si $A = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ y $B = A[y]$ con la condición

$$x_1y^2-2x_2y+x_3 = 0 \qquad (1)$$

entonces B es dominio, por ser irreducible el polinomio $x_1Y^2-2x_2Y+x_3$ del DFU $A[Y]$, según es fácil comprobar. Para el ideal de B

$$\mathfrak{p}^* = (x_1,x_2-1,x_3,y)B = \mathfrak{p}_0^*$$

se tiene:

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\Big[J_y\Big]_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - \text{rango}\Big[2x_1y-2x_2\Big]_{\mathfrak{p}_0^*} = 0$$

luego, de acuerdo con 1.2.9, el anillo local de dimensión tres $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ será regular, siendo su ideal de no unidades

$$\mathfrak{m}^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* = (x_1,x_2-1,x_3,y)\vartheta^* = (x_1,x_2-1,x_3)\vartheta^*$$

donde la última igualdad sigue de (1), por ser $2x_2$ elemento invertible de ϑ^* . Por tanto, $\{x_1,x_2-1,x_3\}$ es sistema regular de parámetros de ϑ^*. Por otra parte, es claro que

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A = (x_1,x_2-1,x_3)A \qquad (2)$$

siendo pues alt $\mathfrak{p} = 3 =$ alt $\mathfrak{p}^*$, y vamos a probar que ϑ^* no es entero sobre $\vartheta = A_{\mathfrak{p}}$. En efecto, si ϑ^* fuera entero sobre ϑ entonces, puesto que $y \in \vartheta^*$, existirían $z_0,z_1,\dots,z_{s-1} \in \vartheta$, tales que

$$y^s + z_{s-1}y^{s-1} + \dots + z_1y + z_0 = 0$$

donde

$$z_i = \frac{e_i}{d_i} \in \vartheta = A_{\mathfrak{p}} \;\; ; \;\; e_i,d_i \in A \;\; ; \;\; d_i \notin \mathfrak{p} \;\; ; \;\; {\scriptstyle i=0,1,\dots,s-1} \qquad (3)$$

luego notando

$$c_s = \prod_{i=0}^{s-1} d_i \;\; ; \;\; c_j = z_jc_s \;\; ; \;\; {\scriptstyle j=0,1,s-1} \qquad (4)$$

resultaría

$$c_sy^s + c_{s-1}y^{s-1} + \dots + c_1y + c_0 = 0$$

donde $c_0,c_1,\dots,c_{s-1},c_s \in A$. Por tanto, siendo Y una indeterminada sobre A , el polinomio de A[Y]

$$p(Y) = c_s Y^s + c_{s-1} Y^{s-1} + ...+ c_1 Y + c_0$$

pertenecería al núcleo del A-epimorfismo natural

$$\mathbf{f} : A[Y] \longrightarrow B \quad ; \quad \mathbf{f}(Y) = y$$

pero, según sigue de (1), ker $\mathbf{f}$ es el ideal principal de A[Y] generado por $x_1Y^2\text{-}2x_2Y+x_3$, luego existiría un polinomio

$$q(Y) = q_r Y^r +...+ q_1 Y + q_0 \in A[Y] \quad ; \quad q_r \neq 0$$

tal que

$$q(Y)(x_1Y^2\text{-}2x_2Y+x_3) = p(Y)$$

y en consecuencia se tendría

$$q_r x_1 = c_s \qquad (5)$$

Ahora bien, por ser $\mathfrak{p}$ un ideal primo, de (3) y (4) se deduce que $c_s \notin \mathfrak{p}$, mientras que (2) implica: $q_r x_1 \in \mathfrak{p}$, por lo que la igualdad (5) supondría contradicción.

3.1.4 <u>Corolario</u>.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B . *Si* $\mathfrak{p}^* \not\supset \mathrm{ram}_1 B$, *entonces* alt $(\mathfrak{p}^* \cap A) =$ alt $\mathfrak{p}^*$

<u>Demostración</u>.- Si $\mathfrak{p}^* \not\supset \mathrm{ram}_1 B$, entonces $\mathfrak{p}^* + \mathrm{ram}_1 B \supsetneq \mathfrak{p}^*$, luego dim $(\mathfrak{p}^* + \mathrm{ram}_1 B) <$ dim $\mathfrak{p}^*$, lo que implica la existencia de $\mathfrak{p}_0^* \in$ Spec Max B , tal que $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ y $\mathrm{ram}_1 B \not\subset \mathfrak{p}_0^*$, lo cual, según 2.1.5, implica: ord ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, siendo el maximal $\mathfrak{p}_0^*$ ideal de punto (por ser k algebraicamente cerrado), por lo que basta aplicar ahora el lema 3.1.3 . ∎

3.1.5 <u>Teorema</u>.- *Sean* $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tales que*

$$\boxed{\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^* \quad \wedge \quad \mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A}$$

Si existe en B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2^*$, *tal que* ord ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces*

$$\boxed{\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*}$$

<u>Demostración</u>.- Puesto que el ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, de acuerdo con el lema 3.1.3, se tiene:

$$\text{alt } (\mathfrak{p}_1^* \cap A) = \text{alt } \mathfrak{p}_1^* \quad ; \quad \text{alt } (\mathfrak{p}_2^* \cap A) = \text{alt } \mathfrak{p}_2^*$$

lo que teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A$, implica

$$\text{alt } \mathfrak{p}_1^* = \text{alt } \mathfrak{p}_2^*$$

pero $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$, luego $\mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{p}_2^*$ son dos primos de la misma altura, uno contenido en el otro, y por tanto iguales. ∎

<u>Nota</u>.- En el resultado anterior es esencial la condición de ser $\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 0$, prescindiendo de la cual no puede asegurarse que haya de ser $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$, según muestra el siguiente:

<u>Contraejemplo</u>.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$; $x_1y-x_2 = 0$, consideremos los ideales primos de B:

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1,x_2)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2,y)B$$

para los cuales se verifica

$$\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^* \quad ; \quad \mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A = (x_1,x_2)A = \mathfrak{p}$$

Ahora bien, $\text{ram}_1 B = (x_1,x_2)B$, luego $\mathfrak{p}_2^* \supseteq \mathfrak{p}_1^* \supseteq \text{ram}_1 B$, lo que, según 2.1.5, implica: $\text{ord.ram } \mathfrak{p}_2^* > 0$ y, por tanto, no existe un ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2^*$, tal que $\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 0$ (ya que ello implicaría $\text{ord.ram } \mathfrak{p}_2^* = 0$, de acuerdo con 1.2.9). Por otra parte, se tiene:

$$\text{alt } \mathfrak{p}_1^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \dim(B/\mathfrak{p}_1^*) = 2 - \dim k[Y] = 2 - 1 = 1$$

$$\text{alt } \mathfrak{p}_2^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \dim(B/\mathfrak{p}_2^*) = 2 - 0 = 2$$

y en consecuencia $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_2^*$. En resumen, no se verifica la tesis de 3.1.5, ni de 3.1.3 .

3.1.6 <u>Corolario</u>.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y sean* $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^* \in \text{Spec } B$, *tales que* $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A$. *Si* $\mathfrak{p}_2^* \not\supseteq \text{ram}_1 B$, *entonces* $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$.

<u>Demostración</u>.- Si $\mathfrak{p}_2^* \not\supseteq \text{ram}_1 B$, entonces $\mathfrak{p}_2^*+\text{ram}_1 B \supsetneq \mathfrak{p}_2^*$, luego, por ser primo $\mathfrak{p}_2^*$, $\dim (\mathfrak{p}_2^*+\text{ram}_1 B) < \dim \mathfrak{p}^*$, lo que, por ser k algebraicamente cerrado, implica la existencia de un punto perteneciente a la subvariedad de $\mathfrak{p}_2^*$ y no a la de $\mathfrak{p}_2^*+\text{ram}_1 B$. Por tanto, para el ideal $\mathfrak{p}_0^*$, de dicho punto, se verificará: $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ y $\text{ram}_1 B \not\subset \mathfrak{p}_0^*$, lo cual, según 2.1.5, implica: $\text{ord ram } \mathfrak{p}_0^* = 0$, bastando aplicar ahora el teorema anterior (De otro modo, también sigue fácilmente del corolario 3.1.4). ∎

3.2 Teorema del ascenso para extensiones multisimples

En el teorema del ascenso (o *"going-up" theorem*), cuyo enunciado recordamos:

<< *Sea* A *subanillo de* B , $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$ *y* $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A . *Si* B *es entero sobre* A , *entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ >>

es esencial la condición de dependencia entera de B sobre A . Pero, siendo A el anillo de polinomios y B la k-álgebra finita que venimos considerando, dicha condición puede ser sustituida por la existencia de un ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \in$ Spec B , tal que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2$ y ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$.

3.2.1 <u>Lema</u>.- *Sean* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A, $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto de* B , *tal que* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ *el anillo de fracciones de* B *respecto de* $\mathfrak{p}_0^*$ *y* $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ *el ideal extendido de* $\mathfrak{p}$ *al anillo local* ϑ_0^* . *Si*

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = 0 \qquad (*)$$

entonces para todo primo asociado, P^* , *de* $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ *se verifican las dos condiciones:*

$$\text{alt } P^* = \text{alt } \mathfrak{p} \quad ; \quad P^* \cap A = \mathfrak{p}$$

es decir, el ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ *es no mezclado, puro o equidimensional (y en consecuencia no posee sumergidos) y sus primos aislados yacen sobre* $\mathfrak{p}$. *Además* $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ *es radical (es decir,* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en la extensión* $A \hookrightarrow \vartheta_0^*$*).*

<u>Demostración</u>.- Siendo P^* un primo aislado (o minimal) arbitrario de $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, se tiene: $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}\vartheta_0^* \subseteq P^*$, luego $\mathfrak{p} \subseteq P^* \cap A$ y notando

$$P^* \cap B = \mathfrak{p}^* \qquad (1)$$

resulta

$$P^* \cap A = P^* \cap (B \cap A) = (P^* \cap B) \cap A = \mathfrak{p}^* \cap A \qquad (2)$$

luego

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A \qquad (3)$$

y por tanto

$$\text{alt } \mathfrak{p} \leq \text{alt } (\mathfrak{p}^* \cap A) \qquad (4)$$

Como P^* está contenido en el ideal de no-unidades $\mathfrak{m}_0^*$, del anillo local ϑ_0^* , se tiene

$$\mathfrak{p}^* = P^* \cap B \subseteq \mathfrak{m}_0^* \cap B = \mathfrak{p}_0^*$$

por lo que la condición (*) implica (según 3.1.3):

$$\text{alt } (\mathfrak{p}^* \cap A) = \text{alt } \mathfrak{p}^* \qquad (5)$$

y, teniendo en cuenta propiedades bien conocidas de la localización $B \hookrightarrow \vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$, de (1) resulta: alt $\mathfrak{p}^*$ = alt P^* luego, recordando (4) y (5), se tiene: alt $P^* \geq$ alt $\mathfrak{p} = a$, lo que, por ser P^* primo minimal del ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, implica:

$$\text{alt } \mathfrak{p}\vartheta_0^* \geq a \qquad (6)$$

Por otra parte, el teorema 3.1.1 garantiza la existencia de $\mathfrak{p}'' \in \text{Spec } B$, tal que $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ y

$$\mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p} \qquad (7)$$

verificándose en consecuencia $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}''$ y por tanto $\sqrt{\mathfrak{p}B} \subseteq \mathfrak{p}''$ luego, por ser $\sqrt{\mathfrak{p}B}$ la intersección de los primos aislados (o minimales) de $\mathfrak{p}B$, $\mathfrak{p}''$ contendrá a alguno de ellos, es decir, existirá un primo aislado, $\mathfrak{p}_1^*$, de $\mathfrak{p}B$, tal que

$$\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}'' \qquad (8)$$

y en consecuencia, recordando (7), se tiene:

$$\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}'' \Rightarrow \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}_1^* \cap A \subseteq \mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$$

luego $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$, lo que, junto con (8), de acuerdo con 3.1.5, implica: $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}''$. Por tanto, $\mathfrak{p}_1^*$ es un primo aislado de $\mathfrak{p}B$, que yace sobre $\mathfrak{p}$ y está contenido en $\mathfrak{p}_0^*$, lo que, por verificarse (*), de acuerdo con 3.1.3, implica: alt $\mathfrak{p}_1^*$ = alt $\mathfrak{p} = a$, luego, para el ideal $P_1^* = \mathfrak{p}_1^*\vartheta_0^*$, extendido de $\mathfrak{p}_1^*$ en ϑ_0^* , también será

$$\text{alt } P_1^* = \text{alt } \mathfrak{p} = a \qquad (9)$$

siendo obviamente P_1^* un primo aislado de $(\mathfrak{p}B)\vartheta_0^* = \mathfrak{p}\vartheta_0^*$. En consecuencia alt $\mathfrak{p}\vartheta_0^* \leq a$, lo que junto con (6) implica

$$\text{alt } \mathfrak{p}\vartheta_0^* = a \qquad (10)$$

Así pues, si $z_1,..,z_a$ son los elementos del anillo A que generan $\mathfrak{p}$, estos elementos también generarán a su extendido en ϑ_0^*

$$\mathfrak{p}\vartheta_0^* = (z_1,..,z_a)\vartheta_0^* \tag{11}$$

Pero ϑ_0^* es un anillo local de Cohen-Macaulay (ya que es regular), por lo que (10) y (11) implican que el ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ es no mezclado (o equidimensional), es decir, que todos sus primos asociados sean de la misma altura (y en consecuencia no posee sumergidos), siendo tal altura la de $\mathfrak{p}$, según sigue de (10). En consecuencia para el primo aislado arbitrario, P^*, de $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, considerado al comienzo de la demostración, será alt P^* = alt $\mathfrak{p}$, luego su contraído en B, el ideal (1), será de la misma altura, y por tanto, también habrá de ser

$$\text{alt } \mathfrak{p}^* = \text{alt } \mathfrak{p} \tag{12}$$

de donde resulta $P^* \cap A = \mathfrak{p}$, ya que si fuera $P^* \cap A \neq \mathfrak{p}$, de (2) resultaría $\mathfrak{p}^* \cap A \neq \mathfrak{p}$, lo que, junto con (3), implicaría $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}^* \cap A$ y por tanto sería: alt $\mathfrak{p}$ < alt $(\mathfrak{p}^* \cap A)$, lo que recordando (5) implicaría alt $\mathfrak{p}$ < alt $\mathfrak{p}^*$, en contradicción con (12).

Finalmente, vamos a probar que $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ es radical. Puesto que $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ no posee primos sumergidos, este ideal admite una descomposición primaría irredundante única. En consecuencia, siendo Q^* un componente primario de $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ y $P^* = \sqrt{Q^*}$, y notando a sus respectivos contraídos en el anillo B :

$$\mathfrak{q}^* = Q^* \cap B \quad , \quad \mathfrak{p}^* = P^* \cap B$$

de acuerdo con lo probado anteriormente, será

$$\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \tag{13}$$

pero P^* está contenido en el ideal de no unidades del anillo local ϑ_0^*, luego $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, por lo que de (*) se deduce, según 1.4.6, que $\mathfrak{p}^*$ no es de ramificación local, es decir, que el extendido del ideal (13) en el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es su ideal de no-unidades:

$$\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^* \tag{14}$$

Ahora bien, por transitividad de la localización, el anillo de fracciones de ϑ_0^* respecto de P^* es isomorfo a ϑ^*, lo que asegura la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd] \arrow[dd] & & \\
 & \vartheta^*_{0\,P^*} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \vartheta^* \\
B \arrow[ru] \arrow[r] & \vartheta^*_0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

de la que, junto con (14), resulta:

$$Q^* = \mathfrak{p}\vartheta^* \cap \vartheta^*_0 = \mathfrak{p}^*\vartheta^* \cap \vartheta^*_0 = \mathfrak{p}^*\vartheta^*_0 = P^*$$

luego Q^* es primo. Como ello es cierto para cada componente primario, Q^*, del ideal $\mathfrak{p}\vartheta^*_0$, este último ideal será primo o intersección de primos, y por tanto radical. ■

3.2.2 <u>Definición</u>.- *Diremos que la extensión* $A \hookrightarrow B = A[y_1,..,y_n]$ *es* **multisimple**, *si las condiciones de definición de* B, *indicadas en* 1.0, *pueden expresarse en la forma:*

$$f_s(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s) = 0 \quad ; \quad s=1,\ldots,n$$

es decir, si $m = n$ *y en cada* f_s *pueden aparecer* $y_1,\ldots,y_s$ *, pero no las restantes* y_j *(para* $j>s$*).*

3.2.3 <u>Teorema</u>.- *Supongamos* $A \hookrightarrow B$ *una extensión multisimple y sea* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del anillo* A , $\mathfrak{p}^*_0$ *un ideal de punto del dominio* B , *tal que* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^*_0$, $\vartheta^*_0 = B_{\mathfrak{p}^*_0}$ *el anillo de fracciones de* B *respecto de* $\mathfrak{p}^*_0$ *y* $\mathfrak{p}\vartheta^*_0$ *el ideal extendido de* $\mathfrak{p}$ *al anillo local* ϑ^*_0 *. Si* ord.ram $\mathfrak{p}^*_0 = 0$, *enentonces el extendido* $\mathfrak{p}\vartheta^*_0$ *es primo.*

<u>Demostración</u>.- Siendo $\mathbf{f} : k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \longrightarrow B$ el epimorfismo definido en 1.0, podemos suponer que el ideal ker **f** es generado por los elementos

$$f_s = f_s(X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_s) \; ; \; s=1,\ldots,n \qquad (1)$$

El ideal contraído $P^*_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathfrak{p}^*_0)$ será maximal por serlo $\mathfrak{p}^*_0$ y ser **f** epimorfismo. Designemos por Θ^*_0 al anillo de fracciones de $k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ respecto de P^*_0 y por M^*_0 al ideal de no-unidades de Θ^*_0 . Puesto que

$$\ker \mathbf{f} \subseteq P^*_0 \qquad (2)$$

la permutabilidad de paso a anillo cociente y a anillo de fracciones, garantiza la existencia de un isomorfismo:

$$\Theta^*_0/(\ker f)\Theta^*_0 \simeq B_{\mathfrak{p}^*_0} = \vartheta^*_0 \qquad (3)$$

que asegura la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A = k[X] \arrow[r, hook] & k[X,Y] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda"'] & B \arrow[d, "\lambda"] \\ & \Theta^*_0 \arrow[r, "\psi"] & \vartheta^*_0 \end{tikzcd}$$

donde

$$\forall H \in k[X,Y] \ , \ \Lambda(H) = \frac{H}{1} \in \Theta^*_0$$

$$\forall F \in B \ , \ \lambda(F) = \frac{F}{1} \in \vartheta^*_0$$

y ψ es el producto del epimorfismo natural

$$\Theta^*_0 \longrightarrow \Theta^*_0/(\ker f)\Theta^*_0$$

con el isomorfismo (3). En consecuencia, los elementos (1) también generan el ideal $\ker \psi$, es decir,

$$\ker \psi = (f_1,\dots,f_n)\Theta^*_0 \qquad (4)$$

Si alt $\mathfrak{p} = a$, por ser intersección completa este primo, existirán $z_1,\dots,z_a \in A$, que lo generan, es decir, tales que

$$\mathfrak{p} = (z_1,\dots,z_a)A$$

y que también generarán al extendido de este ideal al anillo local ϑ^*_0 :

$$\mathfrak{p}\vartheta^*_0 = (z_1,\dots,z_a)\vartheta^*_0$$

luego el contraído de este último ideal en ψ será, teniendo en cuenta (4), el ideal

$$I = \psi^{-1}(\mathfrak{p}\vartheta^*_0) = (z_1,\dots,z_a)\Theta^*_0 + \ker\psi = (z_1,\dots,z_a,f_1,\dots,f_n)\Theta^*_0 \qquad (5)$$

Ahora bien, según el lema 3.2.1, el ideal $\mathfrak{p}\vartheta^*_0$ ha de ser radical, y por tanto primo o intersección de primos, luego su contraído en el epimorfismo ψ , es decir el ideal (5), también será primo o intersección de primos. En consecuencia, para probar que I es primo, bastará probar que I no es intersección de dos o más primos (donde ninguno de ellos es superfluo). Supongamos pues que I admite una descomposición primaria irredundante de la forma

$$I = P^*_1 \cap P^*_2 \cap \dots \ ; \ P^*_i \in \operatorname{Spec} \Theta^*_0 \qquad (6)$$

y probemos que ello conduce a contradicción con la condición ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, que hemos supuesto.

Para ello, comenzaremos probando que tales primos P_i^* son de la forma

$$P_i^* = \left[z_1,..,z_a,H_{i1}(X,Y_1),H_{i2}(X,Y_1,Y_2),..,H_{in}(X,Y_1,..,Y_n)\right]\Theta_0^* \qquad (7)$$

En efecto, consideremos los anillos de polinomios

$$A_s = k[X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s] \quad ; \quad {\scriptstyle s=0,1,\dots,n}$$

y los monomorfismos de inclusión

$$A_{s-1} \hookrightarrow A_s \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n} \qquad (8)$$

que permiten factorizar el monomorfismo

$$A = k[X] \hookrightarrow k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \qquad (9)$$

en la forma

$$A = A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_{s-1} \hookrightarrow A_s \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_n = k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$$

y notemos e y e_s a las respectivas extensiones de ideales inducidas por los monomorfismos (9) y (8), para ${\scriptstyle s=1,\dots,n}$. El ideal del anillo A_1

$$\mathfrak{a}_1 = (z_1,\dots,z_a,f_1)A_1 = \mathfrak{p}^{e_1} + (f_1)A_1$$

podrá expresarse como intersección de primarios de la forma

$$\mathfrak{q}'_{i_1} = \left[z_1,\dots,z_a,H_{i_1}(X,Y_1)\right]A_1$$

siendo pues

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i_1} \mathfrak{q}'_{i_1}$$

El ideal del anillo A_2

$$\mathfrak{a}_2 = (z_1,..,z_a,f_1,f_2)A_2 = \mathfrak{a}_1^{e_2} + (f_2)A_2 = \left[\bigcap_{i_1} \mathfrak{q}'_{i_1}\right]^{e_2} + (f_2)A_2$$

por ser (8) monomorfismos, podrá expresarse en la forma

$$\mathfrak{a}_2 = \left[\bigcap \mathfrak{q}'^{\,e_2}_{i_1}\right] + (f_2)A_2$$

y, por ser f_2 el único generador en que aparece Y_2 , será

$$\mathfrak{a}_2 = \bigcap_{i_1} \mathfrak{a}^*_{i_1} \;\; ; \;\; \mathfrak{a}^*_{i_1} = \mathfrak{q}'^{\,e_2}_{i_1} + (f_2)A_2 = (z_1,..,z_a,H_{i_1}(X,Y_1),f_2)A_2$$

según es inmediato verificar, pudiendo ser expresado cada $\mathfrak{a}^*_{i_1}$ como intersección de primarios de la forma

$$\mathfrak{q}''_{i_1 i_2} = \left[z_1,..,z_a,H_{i_1}(X,Y_1),H_{i_2}(X,Y_1,Y_2)\right]A_2$$

siendo pues

$$\mathfrak{a}_2 = \bigcap_{i_1 i_2} \mathfrak{q}''_{i_1 i_2}$$

El ideal del anillo A_3 :

$$\mathfrak{a}_3 = (z_1,..,z_a,f_1,f_2,f_3)A_3 = \mathfrak{a}_2^{e_3} + (f_3)A_3 = \bigcap_{i_1 i_2} \mathfrak{q}''_{i_1 i_2} + (f_3)A_3$$

podrá, de modo análogo, ser expresado como intersección de primarios de la forma

$$\mathfrak{q}'''_{i_1 i_2 i_3} = \left[z_1,..,z_a,H_{i_1}(X,Y_1),H_{i_2}(X,Y_1,Y_2),H_{i_3}(X,Y_1,Y_2,Y_3)\right]A_2$$

y, reiterando el proceso, se llegará a expresar el ideal del anillo A_n :

$$\mathfrak{a}_n = (z_1,..,z_a,f_1,..,f_n)A_n$$

como intersección de primarios de la forma

$$\left[z_1,..,z_a,H_{i_1}(X,Y_1),..,H_{i_s}(X,Y_1,..,Y_s),..,H_{i_n}(X,Y_1,..,Y_n)\right]A_n$$

luego el ideal extendido de $\mathfrak{a}_n$ al anillo local Θ_0^*

$$\mathfrak{a}_n\Theta_0^* = (z_1,..,z_a,f_1,..,f_n)\Theta_0^*$$

será intersección de primarios de la forma

$$\left[z_1,..,z_a,H_{i_1}(X,Y_1),..,H_{i_n}(X,Y_1,..,Y_n)\right]\Theta_0^* \qquad (10)$$

luego los componentes primarios del ideal $\mathfrak{a}_n\Theta_0^*$ serán de la forma (10), lo que por ser el ideal (10) el mismo ideal (5) permite asegurar que los ideales P_i^* sean de la forma (7). Por ser (6) descomposición primaria irredundante,

$$P_1^* \not\subset P_i^* \quad ; \quad i>1$$

y, por tanto, no todos los generadores $H_{11},..,H_{1n}$, del ideal P_1^* , pertenecerán a los restantes P_i^* ($i>1$), luego, salvo permutación de subíndices, puede suponerse que se verifican:

$$H_{11},...,H_{1j-1} \in P_i^* \quad ; \quad i>1 \qquad (11)$$

$$H_{1j} \notin P_2^* \qquad (12)$$

Ahora bien, de (5) y (6) se deduce que $f_j \in P_1^*$, lo que teniendo en cuenta que $f_j \in k[X,Y_1,..,Y_j]$, implica

$$f_j = \sum_{i=1}^{a} w_i z_i + \sum_{i=1}^{j} v_i H_{1i} \qquad (13)$$

(donde w_i , $v_i \in \Theta_0^*$), luego

$$v_j H_{1j} = f_j - \sum_{i=1}^{a} w_i z_i - \sum_{i=1}^{j-1} v_i H_{1i} \qquad (14)$$

pero de (5) y (6) también se deduce que

$$f_j - \sum_{i=1}^{a} w_i z_i \in P_2^*$$

y de (11) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{j-1} v_i H_{1i} \in P_2^*$$

luego de (14) resulta que

$$v_j H_{1j} \in P_2^*$$

lo que, por ser P_2^* primo y teniendo en cuenta (12), implica que $v_j \in P_2^*$ y por tanto

$$v_j = \sum_{i=1}^{a} w'_i z_i + \sum_{i=1}^{n} v'_i H_{2i}$$

(donde w'_i , $v'_i \in \Theta_0^*$), luego (13) puede expresarse en la forma

$$f_j = \sum_{i=1}^{a} w''_i z_i + \sum_{i=1}^{j-1} v_i H_{1i} + \sum_{i=1}^{n} v'_i H_{2i} H_{1j} \qquad (15)$$

(donde $w''_i \in \Theta_0^*$). Ahora bien, de (7) y (11) se deduce

$$H_{11},\ldots,H_{1j-1} \in P_1^* \cap P_2^* \cap \ldots = I$$

lo que, teniendo en cuenta que estos j-1 elementos pertenecen a $k[X,Y_1,..,Y_{j-1}]$ implicará

$$H_{11},\ldots,H_{1j-1} \in (z_1,\ldots,z_a,f_1,\ldots,f_{j-1})\Theta_0^*$$

con lo que (15) podrá escribirse en la forma

$$f_j = \sum_{i=1}^{a} w_i^* z_i + \sum_{i=1}^{j-1} u_i f_i + \sum_{i=1}^{n} v'_i H_{2i} H_{1j}$$

(donde w_i^* , $u_i \in \Theta_0^*$). Ahora derivando respecto de Y_s , resulta

$$\frac{\partial f_j}{\partial Y_s} = \sum_{i=1}^{a} \frac{\partial w_i^*}{\partial Y_s} z_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial u_i}{\partial Y_s} f_i + \sum_{i=1}^{j-1} u_i \frac{\partial f_i}{\partial Y_s} + \frac{\partial}{\partial Y_s}\left[\sum_{i=1}^{n} v'_i H_{2i} H_{1j}\right] \qquad (16)$$

ya que, por ser $z_1,\ldots,z_a \in k[X]$, se tiene

$$\frac{\partial z_i}{\partial Y_s} = 0 \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,a}$$

Ahora bien, como los elementos $w_i^* \in \Theta_0^*$ pueden escribirse en la forma

$$w_i^* = \frac{n_i}{d_i} \quad ; \quad n_i \, , d_i \in k[X,Y] \quad , \quad d_i \notin P_0^*$$

luego

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial Y_s} = \left(d_i \frac{\partial n_i}{\partial Y_s} - n_i \frac{\partial d_i}{\partial Y_s}\right) d_i^{-2} \in \Theta_0^*$$

y análogamente, se tiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial Y_s} \in \Theta_0^*$$

Por otra parte,

$$H_{1j} \in P_1^* \subseteq M_0^* \quad ; \quad H_{2i} \in P_2^* \subseteq M_0^*$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} v_i' H_{2i} H_{1j} \in M_0^{*2}$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial Y_s}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i' H_{2i} H_{1j}\right) \in M_0^*$$

Además

$$z_i \in I \subseteq M_0^* \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,a}$$

$$f_s \in I \subseteq M_0^* \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n}$$

Por todo ello, (16) podrá escribirse en la forma

$$\frac{\partial f_j}{\partial Y_s} = \beta_{js} + \sum_{i=1}^{j-1} u_i \frac{\partial f_i}{\partial Y_s} \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n} \tag{17}$$

donde

$$\beta_{js} \in M_0^* \quad ; \quad {\scriptstyle s=1,\dots,n} \tag{18}$$

Por tanto, el determinante jacobiano

$$\Delta = \det \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(Y_1,\dots,Y_n)}$$

podrá descomponerse en la forma

$$\Delta = \Delta_\beta + \sum_{i=1}^{j-1} u_i \Delta_i$$

donde Δ_β es un determinante cuya fila j-ésima es $(\beta_{j1},\dots,\beta_{jn})$, lo que teniendo en cuenta (18), implica

$$\Delta_\beta \in M_0^*$$

y los determinantes

$$\Delta_i = \det \frac{\partial(f_1,\dots,f_{j-1},f_i,f_{j+1},\dots,f_n)}{\partial(Y_1,\dots,Y_n)} \quad ; \quad {\scriptstyle i=1,\dots,j-1}$$

son nulos, por tener dos filas iguales (la i-ésima y la j-ésima). Por tanto

$$\Delta = \Delta_\beta \in M_0^*$$

lo que teniendo en cuenta que $\Delta \in k[X,Y]$, implica

$$\Delta \in M_0^* \cap k[X,Y] = P_0^*$$

luego, pasando a imágenes en el epimorfismo $\mathbf{f}$, resulta

$$\det \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} = \mathbf{f}(\Delta) \in \mathbf{f}(P_0^*) = \mathfrak{p}_0^*$$

lo que implica

$$\text{rango}\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} < n$$

y en consecuencia

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} > 0$$

en contradicción con la hipótesis de anulación de dicho orden de ramificación.

Por tanto, el ideal (5) es primo, luego (por contener a ker ψ) también lo será su imagen en el epimorfismo ψ , es decir, el ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$. ■

<u>Nota</u>.- Si en el teorema anterior se prescinde de la condición ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, entonces el ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ ya no es necesariamente primo, pudiendo ser intersección de primos o incluso no radical, según muestra el siguiente:

<u>Ejemplo</u>.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$, $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición $y^2-x_2 = 0$ y $\mathfrak{p}_0^* = (x_1,x_2,y)B$, se tiene:

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - \text{rango}\begin{bmatrix} 2y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} = 1$$

pero el anillo local bidimensional $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ es regular, ya que su ideal de no unidades, $\mathfrak{m}_0^*$, puede ser generado por sólo dos elementos:

$$\mathfrak{m}^*_0 = \mathfrak{p}^*_0\vartheta^*_0 = (x_1,x_2,y)\vartheta^*_0 = (x_1,y)\vartheta^*_0 = (x_1\text{-}y,x_1+y)\vartheta^*_0$$

Para el primo $\mathfrak{p} = (x_1^2\text{-}x_2)A$, se tiene

$$\mathfrak{p}\vartheta^*_0 = (x_1^2\text{-}x_2)\vartheta^*_0 = (x_1^2\text{-}x_2,y^2\text{-}x_2)\vartheta^*_0 = (x_1^2\text{-}y^2)\vartheta^*_0$$

siendo fácil verificar que

$$\mathfrak{p}\vartheta^*_0 = P^*_1 \cap P^*_2 \quad ; \quad P^*_1 = (x_1\text{-}y)\vartheta^*_0 \quad , \quad P^*_2 = (x_1+y)\vartheta^*_0$$

donde P^*_1 y P^*_2 son primos, por ser generados por un subconjunto del sistema regular de parámetros $\{x_1\text{-}y,x_1+y\}$ de ϑ^*_0 . En cambio, para el primo $\mathfrak{p}' = (x_1)A$, el ideal extendido $\mathfrak{p}'\vartheta^*_0 = (x_1)\vartheta^*_0$ es primo, por ser $\{x_1\}$ subconjunto del sistema regular de parámetros $\{x_1,y\}$ de ϑ^*_0 . Finalmente, para el primo $\mathfrak{p}'' = (x_2)A$, su extendido en ϑ^*_0 será

$$\mathfrak{p}''\vartheta^*_0 = (x_2)\vartheta^*_0 = (x_2,y^2\text{-}x_2)\vartheta^*_0 = (y^2)\vartheta^*_0$$

pero $P^*_0 = (y)\vartheta^*_0$ es primo, por ser $\{x,y\}$ sistema regular de parámetros de ϑ^*_0 , siendo

$$\mathfrak{p}''\vartheta^*_0 = P^{*2} \neq P^* \quad , \quad \sqrt{\mathfrak{p}''\vartheta^*_0} = P^*$$

luego $\mathfrak{p}''\vartheta^*_0$ no es radical.

3.2.4 <u>Teorema</u> (del ascenso).- *Supongamos* $A \hookrightarrow B$ *extensión multisimple. Sean* $\mathfrak{p}_1$ *un primo intersección completa de* A , $\mathfrak{p}^*_1 \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}^*_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ *y* $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A, *tal que* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$. *Si existe en el anillo* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}^*_0$, *tal que* $\mathfrak{p}^*_1 \subseteq \mathfrak{p}^*_0$, $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}^*_0$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}^*_0 = 0$, *entonces existe* $\mathfrak{p}^*_2 \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}^*_1 \subsetneq \mathfrak{p}^*_2$ y $\mathfrak{p}^*_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ (*además* $\mathfrak{p}^*_2 \subseteq \mathfrak{p}^*_0$).

<u>Demostración</u>.- De $\mathfrak{p}^*_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ se deduce que $\mathfrak{p}_1 B \subseteq \mathfrak{p}^*_1$, luego extendiendo al anillo local $\vartheta^*_0 = B_{\mathfrak{p}^*_0}$, se tiene

$$\mathfrak{p}_1\vartheta^*_0 = (\mathfrak{p}_1 B)\vartheta^*_0 \subseteq \mathfrak{p}^*_1\vartheta^*_0$$

y en consecuencia

$$\mathfrak{p}_1\vartheta^*_0 \cap B \subseteq \mathfrak{p}^*_1\vartheta^*_0 \cap B \qquad (1)$$

pero $\mathfrak{p}^*_1 \subseteq \mathfrak{p}^*_0$ implica $\mathfrak{p}^*_1\vartheta^*_0 \cap B = \mathfrak{p}^*_1$, por lo que (1) puede escribirse:

$$\mathfrak{p}_1\vartheta^*_0 \cap B \subseteq \mathfrak{p}^*_1 \qquad (2)$$

y por tanto

$$(\mathfrak{p}_1\vartheta^*_0 \cap B) \cap A \subseteq \mathfrak{p}^*_1 \cap A = \mathfrak{p}_1 \qquad (3)$$

pero

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap A = \mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap (B \cap A) = (\mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap B) \cap A$$

lo que, junto con (3), implica

$$(\mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap B) \cap A = \mathfrak{p}_1^* \cap A \qquad (4)$$

Ahora bien, según 3.2.3, $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$ es primo, luego su contraído $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap B$ también será primo, por lo que, de acuerdo con 3.1.5, de (2) y (4) se deduce

$$\mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap B = \mathfrak{p}_1^* \qquad (5)$$

Por otra parte, según 3.1.1, existe $\mathfrak{p}_2^* \in \operatorname{Spec} B$, tal que $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ y $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$, pero esta última igualdad implica $\mathfrak{p}_2 B \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ y, en consecuencia, se tiene:

$$\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \subseteq \mathfrak{p}_2\vartheta_0^* = (\mathfrak{p}_2 B)\vartheta_0^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*\vartheta_0^*$$

luego, pasando a contraídos en el subanillo B ,

$$\mathfrak{p}_1\vartheta_0^* \cap B \subseteq \mathfrak{p}_2^*\vartheta_0^* \cap B = \mathfrak{p}_2^* \qquad (6)$$

donde la última igualdad sigue de la inclusión $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$. Ahora de (5) y (6) resulta ya la inclusión $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$. Además $\mathfrak{p}_1^* \neq \mathfrak{p}_2^*$, ya que, si fueran iguales, se tendría $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_2^* \cap A$, es decir, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$. ■

3.2.5 <u>Corolario</u>.- *Supongamos* $A \hookrightarrow B$ *extensión multisimple. Sea* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_s$ *una cadena de primos de* A , *tales que* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_{s-1}$ *sean intersección completa, y* $\mathfrak{p}_1^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. *Si existe en el anillo* B *un ideal de punto,* $\mathfrak{p}_0^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, $\mathfrak{p}_s \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe en* B *una cadena de primos* $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_s^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_i^* \cap A = \mathfrak{p}_i$; $i=2,\dots,s$

<u>Demostración</u>.- Basta aplicar reiteradamente el teorema anterior, para obtener cada $\mathfrak{p}_i^*$ a partir de $\mathfrak{p}_{i-1}^*$; $i=2,\dots,s$ ■

3.2.6 <u>Ejemplo</u>.- Sean $A = k[x_1,x_2,x_3]$ y $B = A[y_1,y_2,y_3]$ con las condiciones:

$$y_1^2-x_1-1 = 0 \ , \ y_2^3-x_2-8 = 0 \ , \ y_3^2-x_3-9 = 0 \qquad (1)$$

y consideremos los ideales primos del anillo de polinomios A:

$$\mathfrak{p} = (x_1)A \quad , \quad \mathfrak{p} = (x_1,x_2)A$$

y el ideal de B

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1,y-1)B \qquad (2)$$

Sea $\mathfrak{p}_0^*$ el ideal de punto del anillo B

$$\mathfrak{p}_0^* = (x_1,x_2,x_3,y_1-1,y_2-2,y_3-3)B$$

y consideremos el anillo local $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ de dimensión:

$$\dim \vartheta_0^* = \text{alt } \mathfrak{p}_0^*\vartheta_0^* = \text{alt } \mathfrak{p}_0^* = \text{gr.tr.}(B:k) - \dim \mathfrak{p}_0^* = 3 - 0 = 3$$

cuyo ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_0^* = \mathfrak{p}_0^*\vartheta_0^* = (x_1,x_2,x_3,y_1-1,y_2-2,y_3-3)\vartheta_0^* = (x_1,x_2,x_3)\vartheta_0^*$$

donde la última igualdad es consecuencia de las siguientes relaciones, que siguen de (1):

$$y_1-1 = \frac{1}{y_1+1}x_1 \quad ; \quad y_2-2 = \frac{1}{y_2^2+2y_2+4}x_2 \quad ; \quad y_3-3 = \frac{1}{y_3+3}x_3$$

Puesto que $\mathfrak{m}_0^*$ admite una base de tres elementos, el anillo local tridimensional ϑ_0^* será regular, siendo $\{x_1,x_2,x_3\}$ un sistema regular de parámetros. En consecuencia, el ideal $(x_1)\vartheta_0^*$ es primo, luego también lo será su contraído en B , el ideal (2), que obviamente yace sobre $\mathfrak{p}_1$.

Puesto que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_2$ y además

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} = 3 - 3 = 0$$

de acuerdo con el teorema 3.2.4, existirá $\mathfrak{p}_2^*$, verificando las condiciones indicadas en él. Y, efectivamente, por ser $\{x_1,x_2\}$ subconjunto del sistema regular de parámetros $\{x_1,x_2,x_3\}$, el ideal $(x_1,x_2)\vartheta_0^*$ será primo, luego también lo será su contraído en B:

$$\mathfrak{p}_2^* = (x_1,x_2)\vartheta_0^* \cap B = (x_1,x_2,y_1-1,y_2-2)B$$

que, obviamente, verifica las condiciones indicadas en el teorema del ascenso:

$$\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_2^* \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$$

3.3 Teorema del descenso

El teorema del descenso (o *"going-down" theorem*) es un resultado bien conocido, cuyo enunciado recordamos a continuación:

<< *Sean* B *un dominio,* A *un subanillo de* B , $\mathfrak{p}_1^* \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A$ *y* $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$, *tal que* $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$. *Si* A *es íntegramente cerrado y* B *entero sobre* A , *entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in \operatorname{Spec} B$, *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_1^*$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$ >>

En este teorema, debido inicialmente a Krull y refinado por Cohen y Seidemberg es esencial la condición de ser B entero sobre A, según se muestra en [C-S]. No obstante, siendo A el anillo de polinomios y B la k-álgebra finita que venimos considerando a lo largo de este trabajo, veremos que la condición de ser B entero sobre A puede ser sustituida por la existencia de un ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \in \operatorname{Spec} B$, tal que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$ y ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$.

3.3.1 Lema.- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Spec} B$ *y supongamos que existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$. Si $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$, *entonces* $\mathfrak{p}^*$ *es primo aislado del ideal extendido* $\mathfrak{p}B$.

Demostración.- Supongamos $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego también $\sqrt{\mathfrak{p}B} \subseteq \mathfrak{p}^*$. Puesto que $\sqrt{\mathfrak{p}B}$ es igual a la intersección de los primos aislados de $\mathfrak{p}B$, el primo $\mathfrak{p}^*$ contendrá a algún primo aislado, $\mathfrak{p}^{**}$, de $\mathfrak{p}B$, luego

$$\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^{**} \subseteq \mathfrak{p}^* \qquad (1)$$

y, en consecuencia, puesto que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A$, se tiene

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{p}^{**} \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$$

lo que implica

$$\mathfrak{p}^{**} \cap A = \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \qquad (2)$$

Si, de acuerdo con nuestra hipótesis, existe un ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, tal que ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, entonces de (1) y (2) se deduce, según 3.1.5, que ha de ser $\mathfrak{p}^{**} = \mathfrak{p}^*$. Así pues $\mathfrak{p}^*$ será un primo aislado de $\mathfrak{p}B$. ∎

3.3.2 Lema.- *Sea* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B *y supongamos que existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$. *Sea* $\mathfrak{p}$ *un primo de altura* a *del anillo* A *y supongamos que* $\mathfrak{p}$ *admite una base de* a *elementos (es decir, que* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa). Si* $\mathfrak{p}^*$ *es primo aislado del ideal extendido* $\mathfrak{p}$B, *entonces* $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$.

Demostración.- Supongamos alt $\mathfrak{p}$ = a y sea $\{z_1,..,z_a\}$ una base del ideal $\mathfrak{p}$, es decir, sea

$$\mathfrak{p} = (z_1,..,z_a)A$$

lo que implica que dicha base también genere al ideal extendido $\mathfrak{p}B$, es decir,

$$\mathfrak{p}B = (z_1,..,z_a)B$$

Si $\mathfrak{p}^*$ es un primo aislado de $\mathfrak{p}B$, entonces, de acuerdo con el teorema del ideal principal generalizado (o teorema de la altura de Krull), habrá de ser

$$\text{alt } \mathfrak{p}^* \leq a = \text{alt } \mathfrak{p} \qquad (1)$$

y, por otra parte, $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A \qquad (2)$$

y por tanto

$$\text{alt } \mathfrak{p} \leq \text{alt } (\mathfrak{p}^* \cap A) \qquad (3)$$

pero hemos supuesto la existencia de un ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, tal que ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, luego, según 3.1.5, se tiene

$$\text{alt } (\mathfrak{p}^* \cap A) = \text{alt } \mathfrak{p}^*$$

lo que, junto con (1) y (3), implica:

$$\text{alt } \mathfrak{p} = \text{alt } (\mathfrak{p}^* \cap A)$$

luego de (2) resulta: $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$. ■

3.3.3 Corolario.- *Sean* $\mathfrak{p}^* \in$ Spec B , $\mathfrak{p} \in$ Spec A , alt $\mathfrak{p}$ = a *y supongamos que el ideal* $\mathfrak{p}$ *admite una base de* a *elementos (es decir, que* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa). Si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces son equivalentes:*

i) $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$

ii) $\mathfrak{p}^*$ *es ideal primo aislado del ideal extendido* $\mathfrak{p}$B

Demostración.- Sigue de los lemas precedentes. ∎

3.3.4 Teorema (del descenso).- *Sean* $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. *Si existe en* B *un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, *tal que* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$ *y* $\mathfrak{p}_2$ *es intersección completa (es decir, admite una base de* a *elementos, siendo* a = alt $\mathfrak{p}_2$), *entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$.

Demostración.- Puesto que $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$, se tiene: $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_1^*$ y, por otra parte, $\mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1$, luego $\mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$, y en consecuencia $\mathfrak{p}_2B \subseteq \mathfrak{p}_1^*$, lo que por ser $\mathfrak{p}_1^*$ primo, implica $\sqrt{\mathfrak{p}_2B} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}_1^*} = \mathfrak{p}_1^*$, pero $\sqrt{\mathfrak{p}_2B}$ es la intersección de los primos aislados de $\mathfrak{p}_2B$, luego el primo $\mathfrak{p}_1^*$ contiene a alguno de los primos aislados, $\mathfrak{p}_2^*$, de $\mathfrak{p}_2B$. Por tanto, existe $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , tal que

$$\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_1^* \qquad (1)$$

siendo $\mathfrak{p}_2^*$ primo aislado de $\mathfrak{p}_2B$, lo que, según el lema 3.3.2, implica: $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$. Recordando (1), falta ya sólo probar que $\mathfrak{p}_1^* \neq \mathfrak{p}_2^*$, lo que es cierto , ya que si fuera $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$, entonces se tendría

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$$

en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1$.

3.3.5 Corolario.- *Supongamos el cuerpo base,* k , *algebraicamente cerrado y sean* $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. *Si* ord.ram $\mathfrak{p}_1^* = 0$ *y* $\mathfrak{p}_2$ *es intersección completa , entonces existe* $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B, *tal que* $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$.

Demostración.- Si ord.ram $\mathfrak{p}_1^* = 0$, entonces, según 2.1.5, $\text{ram}_1 B \not\subset \mathfrak{p}_1^*$, luego $\mathfrak{p}_1^* + \text{ram}_1 B \neq \mathfrak{p}_1^*$, lo que implica (por ser primo $\mathfrak{p}_1^*$): dim ($\mathfrak{p}_1^* + \text{ram}_1 B$) < dim $\mathfrak{p}_1^*$, luego, por ser k algebraicamente cerrado, existirá un punto perteneciente a la subvariedad de $\mathfrak{p}_1^*$ y no a la de $\mathfrak{p}_1^* + \text{ram}_1 B$. Por tanto, para el ideal , $\mathfrak{p}_0^*$, de dicho punto, será $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$, pero, $\mathfrak{p}_0^* \not\supset \text{ram}_1 B$, lo que, según 2.1.5, implica ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$. Y ahora sigue ya del teorema anterior. ∎

3.3.6 Corolario.- *Sea* $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_s$ *una cadena de primos de* A , *tal que* $\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_s$ *sean intersección completa y* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. *Si en* B *existe un ideal de punto* $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}_1^*$ *con* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, *entonces existe en* B *una cadena de primos:* $\mathfrak{p}_2^* \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_s^*$, *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \supsetneq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_i^* \cap A = \mathfrak{p}_i$; $i=2,\dots,s$.

Demostración.- Basta aplicar reiteradamente el teorema 3.2.4, para obtener cada $\mathfrak{p}_i^*$ a partir de $\mathfrak{p}_{i-1}^*$; $i=2,\dots,s$ ∎

3.3.7 Ejemplo.- Sean $A = k[x_1 , x_2]$ y $B = A[y]$, con la condición $(x_1^2+x_2^2)y^2-1 = 0$ y consideremos los ideales primos de A:

$$\mathfrak{p}_1 = (x_1,x_2-1)A \quad ; \quad \mathfrak{p}_2 = (x_1^2+x_2^2-1)A$$

tales que $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2$, y el ideal primo de B :

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1,x_2-1,y-1)B$$

que yace sobre $\mathfrak{p}_1$. Comprobemos que se verifican las condiciones de la hipótesis del teorema 3.3.4 . Notemos que $\mathfrak{p}_1^*$ es ya ideal de punto, siendo

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}_1^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}_1^*} = 1 - 1 = 0$$

y, por otra parte, según el teorema del ideal principal, alt $\mathfrak{p}_2 = 1$. Por tanto, debe existir $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , verificando las condiciones indicadas en 3.3.4 . En efecto, puesto que $\mathfrak{p}_2^*$ ha de yacer sobre $\mathfrak{p}_2$, debe ser primo aislado de $\mathfrak{p}_2B$ (según 3.3.1), pero $\mathfrak{p}_2B$ es el ideal:

$$\mathfrak{p}_2B = (x_1^2+x_2^2-1)B = (x_1^2+x_2^2-1,(x_1^2+x_2^2)y^2-1)B = (x_1^2+x_2^2-1,y^2-1)B$$

que admite la descomposición primaria irredundante

$$\mathfrak{p}_2B = \mathfrak{p}_2^* \cap \mathfrak{p}_2^{**} \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1^2+x_2^2-1,y-1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^{**} = (x_1^2+x_2^2-1,y+1)B$$

siendo $\mathfrak{p}_2^*$ y $\mathfrak{p}_2^{**}$ ideales primos de B, según resulta inmediatamente de considerar los respectivos A-epimorfismos:

$$h_1\colon B \longrightarrow A \quad ; \quad h_1(y) = 1$$

$$h_2\colon B \longrightarrow A \quad ; \quad h_2(y) = -1$$

en los cuales

$$\mathfrak{p}_2^* = h_1^{-1}(\mathfrak{p}_2) \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^{**} = h_2^{-1}(\mathfrak{p}_2)$$

Es claro que se verifican: $\mathfrak{p}_2^* \subsetneq \mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$. Análogamente, si en vez de p_1^* se hubiera tomado

$$p_1^{**} = (x_1,x_2-1,y+1)B$$

entonces, en vez de p_2^*, habríamos de considerar p_2^{**}.

3.4 Teorema del ascenso con condición jacobiana

En el apartado 3.2 se ha llegado a demostrar el teorema del ascenso en caso de extensiones multisimples, sustituyendo la condición de dependencia entera, por la existencia de un ideal de punto de orden de ramificación nulo, que contenga a los primos $\mathfrak{p}_1^*$ y $\mathfrak{p}_2$, considerados en dicho teorema. Se trata aquí de dar otro teorema del ascenso, válido para extensiones cualesquiera, sustituyendo ahora la condición de extensión multisimple por una condición jacobiana muy cómoda de comprobar.

3.4.1 Lema.- *Sean* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto de* B , $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$, ϑ_0 *el anillo de fracciones* $A_{\mathfrak{p}_0}$, $\mathfrak{p}_1$ *un primo de* A , *tal que* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0$ *y* $\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ *su extendido en el anillo local* ϑ_0 . *Si se verifican las dos condiciones*:

a) ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$

b) *el anillo cociente* $\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ *es local regular*

entonces existe $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B, *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_0^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$, *siendo único tal* $\mathfrak{p}_1^*$ *y de la misma altura que* $\mathfrak{p}_1$. *Además el ideal extendido* $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$ *es primo de altura la de* $\mathfrak{p}_1$.

Demostración.- Designemos por a a la altura de $\mathfrak{p}_1$, es decir sea

$$\text{alt } \mathfrak{p}_1 = a \qquad (1)$$

Puesto que la dimensión del anillo local ϑ_0 es

$$\dim \vartheta_0 = \text{alt } \mathfrak{p}_0\vartheta_0 = \text{alt } \mathfrak{p}_0 = \text{gr.tr.}(A:k) - \dim \mathfrak{p}_0 = r - 0 = r$$

y la altura del extendido en ϑ_0 del primo $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_0$ es

$$\text{alt } \mathfrak{p}_1\vartheta_0 = \text{alt } \mathfrak{p}_1 = a$$

el anillo cociente $\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0$, que es local (por serlo ϑ_0 y estar $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_0$, y en consecuencia $\mathfrak{p}_1\vartheta_0 \subseteq \mathfrak{p}_0\vartheta_0$), será de dimensión:

$$\dim (\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0) = \dim \vartheta_0 - \text{alt } \mathfrak{p}_1\vartheta_0 = r - a$$

pero este anillo local, de acuerdo con la condición b) de la hipótesis, es regular, lo que, según es sabido, implica la existencia de un sistema regular de parámetros de ϑ_0 :

$$\{G_1,\dots,G_a,G_{a+1},\dots,G_r\}$$

tal que el ideal $\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ sea generado por a de esos parámetros

$$\mathfrak{p}_1\vartheta_0 = (G_1,\ldots,G_a)\vartheta_0$$

Ahora bien, tales parámetros, por pertenecer a $\vartheta_0 = A_{\mathfrak{p}_0}$, pueden ser escritos en la forma

$$G_i = \frac{g_i}{g'_i} \quad ; \quad g_i, g'_i \in A \quad , \quad g'_i \notin \mathfrak{p}_0 \quad ; \quad i=1,\ldots,r$$

luego, por ser los elementos g'_i unidades de ϑ_0 , será

$$\mathfrak{p}_1\vartheta_0 = (g_1,\ldots,g_a)\vartheta_0 \qquad (2)$$

y

$$\{g_1,\ldots,g_a,g_{a+1},\ldots,g_r\} \qquad (3)$$

sistema regular de parámetros de ϑ_0 , lo que, pasando a clases residuales módulo $\mathfrak{m}_0^2$ (siendo $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{p}_0\vartheta_0$), implica que

$$\{g_1+\mathfrak{m}_0^2,\ldots,g_a+\mathfrak{m}_0^2,g_{a+1}+\mathfrak{m}_0^2,\ldots,g_r+\mathfrak{m}_0^2\} \qquad (4)$$

sea base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Por otra parte, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\
\vartheta_0=A_{\mathfrak{p}_0} \arrow[r] & \vartheta_0^*=B_{\mathfrak{p}_0^*}
\end{tikzcd} \qquad (5)$$

resulta la igualdad de ideales:

$$(\mathfrak{p}_1B)\vartheta_0^* = (\mathfrak{p}_1\vartheta_0)\vartheta_0^* = \mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$$

lo que, junto con (2), implica

$$(\mathfrak{p}_1B)\vartheta_0^* = (g_1,\ldots,g_a)\vartheta_0^* \qquad (6)$$

Por otra parte, la condición a) del enunciado implica (según 1.2.9) que el anillo local $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ sea regular y, además, también implica (según 1.3.3) que la aplicación lineal τ sea inyectiva, por lo que los vectores imágenes de (4) en τ, es decir, los vectores de $\mathfrak{m}_0^*/\mathfrak{m}_0^{*2}$ (donde $\mathfrak{m}_0^* = \mathfrak{p}_0^*\vartheta_0^*$):

$$\{g_1+\mathfrak{m}_0^{*2},\ldots,g_a+\mathfrak{m}_0^{*2},g_{a+1}+\mathfrak{m}_0^{*2},\ldots,g_r+\mathfrak{m}_0^{*2}\}$$

son linealmente independientes y, en consecuencia, (3) es también sistema regular de parámetros de ϑ_0^* , lo cual, como es sabido, implica que el ideal (6), del anillo local regular ϑ_0^* , sea primo de altura $\mathfrak{a}$. Por tanto, su contraído en el anillo B, que notaremos $\mathfrak{p}_1^*$, es decir,

$$\mathfrak{p}_1^* = (\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^* \cap B \qquad (7)$$

será también primo de altura $\mathfrak{a}$, es decir,

$$\mathfrak{p}_1^* \in \text{Spec } B \quad , \quad \text{alt } \mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{a} \qquad (8)$$

luego, para su contraído $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_1^* \cap A$, de acuerdo con 3.1.3, se tendrá

$$\mathfrak{p}_1' \in \text{Spec } A \quad , \quad \text{alt } \mathfrak{p}_1' = \text{alt } \mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{a} \qquad (9)$$

Ahora bien, de (7) se deduce:

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq (\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^* \cap B \cap A = \mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1'$$

luego $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_1'$ y esta inclusión, junto con (1) y (9), implica $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_1$ y, en consecuencia, $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. Además, ha de ser $\mathfrak{p}_1^* \neq \mathfrak{p}_0^*$, ya que

$$\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$$

Queda así probada la existencia de $\mathfrak{p}_1^*$, faltando aún probar su unicidad. Para ello, consideremos un ideal $\mathfrak{p}^* \in \text{Spec } B$, tal que

$$\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^* \quad \wedge \quad \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}_1 \qquad (10)$$

y vamos a probar que estas condiciones implican $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1^*$. En efecto, $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}_1$ implica $\mathfrak{p}_1 B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego $(\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^* \subseteq \mathfrak{p}^*\vartheta_0^*$, de donde, teniendo en cuenta (7), resulta

$$\mathfrak{p}_1^* = (\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^* \cap B \subseteq \mathfrak{p}^*\vartheta_0^* \cap B = \mathfrak{p}^* \qquad (11)$$

donde la última igualdad sigue de la inclusión $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$. Además, de (10), de acuerdo con 3.1.3 , resulta: alt $\mathfrak{p}^*$ = alt $\mathfrak{p}_1$, lo que junto con (1) implica: alt $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{a}$. Finalmente, de (8), (10) y (11), resulta

$$\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}^* \quad , \quad \text{alt } \mathfrak{p}^* = \text{alt } \mathfrak{p}_1^*$$

lo que obviamente implica: $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1^*$.

<u>Nota</u>.- Designando por $\bar{A}$ al anillo cociente $A/\mathfrak{p}_1$ y por $\bar{\mathfrak{p}}_1$ a la imagen de $\mathfrak{p}_1$ en el epimorfismo natural $A \longrightarrow \bar{A} = A/\mathfrak{p}_1$, y teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_0$, la conmutatividad de paso al anillo cociente y al anillo de fracciones, garantiza el isomorfismo

$$\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0 \simeq \bar{A}_{\mathfrak{p}_1}$$

el cual permite dar una versión geométrica muy sencilla de la condición b) del enunciado de 3.4.1: que el punto del cual $\mathfrak{p}_0$ es ideal sea punto simple de la subvariedad que define el primo $\mathfrak{p}_1$. ∎

La condición b) del lema anterior es , a veces, incómoda de verificar, por lo que puede ser sustituida por la condición b′) del siguiente corolario, más fácil de comprobar que aquella.

3.4.2 Corolario.- *Sean* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto del anillo* B , $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$ *y* $\mathfrak{p}_1 \in$ Spec A , *tal que* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0$. *Si se verifican las dos condiciones:*

a) ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$

b') *existe una base,* $\{z_1,\dots,z_v\}$, *del ideal* $\mathfrak{p}_1$, *tal que*

$$\text{rango} \left[\frac{\partial(z_1,\dots,z_v)}{\partial(x_1,\dots,x_r)} \right]_{\mathfrak{p}_0} \geq \text{alt } \mathfrak{p}_1$$

entonces existe un único ideal $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_0^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$, *siendo* alt $\mathfrak{p}_1^*$ = alt $\mathfrak{p}_1$. *Además* $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$ *es primo de altura la de* $\mathfrak{p}_1$.

Demostración.- Bastará probar que la condición b') implica la condición b) de 3.4.1. Si es $(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_n) \in k^{r+n}$ el punto del cual $\mathfrak{p}_0^*$ es ideal, es decir, si

$$\mathfrak{p}_0^* = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)B$$

y en consecuencia

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)A$$

escribiendo los elementos $z_1,\dots,z_v$, generadores de $\mathfrak{p}_1$, en la forma

$$z_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ji}(x_i-a_i) + \text{términos de grado mayor que uno en las } x_i-a_i \qquad (1)$$

donde $c_{ij} \in k$, es claro que

$$\left[\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right]_{\mathfrak{p}_0} = c_{ji} \quad ; \quad i=1,\dots,r \quad ; \quad j=1,\dots,v$$

por lo que, notando alt $\mathfrak{p}_1 = a$, la condición b') del enunciado implica

$$\text{rango}\left[\frac{\partial(z_1,\dots,z_v)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}\right]_{\mathfrak{p}_0} = \text{rango } (c_{ji})_{1\leq j\leq v;1\leq i\leq r} = a \qquad (2)$$

Ahora bien, por ser A anillo de polinomios, el anillo local $\vartheta_0 = A_{\mathfrak{p}_0}$ es regular r-dimensional, siendo $\{x_1-a_1,\dots,x_r-a_r\}$ un sistema regular de parámetros de ϑ_0, luego (notando $\mathfrak{m}_0$ al ideal de no-unidades de ϑ_0) el subconjunto:

$$\left\{(x_1-a_1)+\mathfrak{m}_0^2,\dots,(x_r-a_r)+\mathfrak{m}_0^2\right\}$$

es base del $\vartheta_0/\mathfrak{m}_0 \approx$ k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Pasando ahora a este espacio vectorial, a partir de (1) resulta

$$z_j+\mathfrak{m}_0^2 = \sum_{i=1}^{r} c_{ji}[(x_i-a_i)+\mathfrak{m}_0^2] \quad ; \quad j=1,\dots,v$$

y, teniendo en cuenta (2), puede afirmarse que el subespacio generado por estos v vectores es de dimensión mayor o igual que a, luego, salvo permutación de subíndices, puede suponerse que los vectores $z_j+\mathfrak{m}_0^2$; $j=1,\dots,a$ son linealmente independientes, y por tanto, a partir de ellos puede completarse una base de $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. En consecuencia, existe un sistema regular de parámetros de ϑ_0, del que $\{z_1,\dots,z_a\}$ es subconjunto, y, por tanto, se verifican:

i) el ideal $(z_1,\dots,z_a)\vartheta_0$ es primo de altura a

ii) el anillo cociente $\vartheta_0/(z_1,\dots,z_a)\vartheta_0$ es local regular de dimensión $r-a$

Ahora bien, $z_1,\dots,z_a \in \mathfrak{p}_1$ implica: $(z_1,\dots,z_a)\vartheta_0 \subseteq \mathfrak{p}_1\vartheta_0$, siendo ambos primos de altura a, luego $\mathfrak{p}_1\vartheta_0 = (z_1,\dots,z_a)\vartheta_0$. En consecuencia, la condición ii) implica que el anillo cociente $\vartheta_0/\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ sea local regular, y esta era la condición b) de 3.4.1 . ∎

En el caso usual en que el ideal $\mathfrak{p}_1$ sea de altura uno, la condición b') del corolario anterior puede ser sustituida con ventaja por la condición b") del siguiente:

3.4.3 <u>Corolario</u>.- *Sean* $\mathfrak{p}_0^*$ *un ideal de punto del anillo* B , $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A$ *y* $\mathfrak{p}_1$ *un primo de* A , *de altura uno , tal que* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0$. *Si se verifican las dos condiciones:*

a) ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$

b') *existen* $z_1 \in \mathfrak{p}_1$ y $e \in \{1,...,r\}$ *tales que* $\left[\frac{\partial z_1}{\partial x_e}\right]_{\mathfrak{p}_0} \neq 0$

entonces existe un único $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_0^*$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$, *siendo* alt $\mathfrak{p}_1^*$ = alt $\mathfrak{p}_1$. *Además* $\mathfrak{p}_1\vartheta_0^*$ *es primo.*

Demostración.- Bastará probar que la condición b") implica la condición b') de 3.4.2 . Para ello, es suficiente considerar una base de $\mathfrak{p}_1$, que incluya al elemento z_1 , es decir, tal que $\mathfrak{p}_1 = (z_1,...,z_v)A$ y tener en cuenta que

$$\left[\frac{\partial z_1}{\partial x_e}\right]_{\mathfrak{p}_0} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rango}\left[\frac{\partial(z_1,\ldots,z_v)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}\right]_{\mathfrak{p}_0} \geq 1 = \text{alt}\ \mathfrak{p}_1 \qquad \blacksquare$$

Nota.- El resultado 3.4.2 es similar al 3.1.3, ya que ambos aseguran la existencia de $\mathfrak{p}_1^*$, contenido en $\mathfrak{p}_0^*$ y yaciendo sobre $\mathfrak{p}_1$, pero en 3.4.2 se asegura también su unicidad.

3.4.4 Teorema del ascenso (con condición jacobiana).- *Sean* $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2 \in$ Spec A , $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ *y* $\mathfrak{p}_1^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p}_1$. *Si existe en el anillo* B *un ideal de punto,* $\mathfrak{p}_0^*$, *tal que se verifiquen:*

i) $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ *y* ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$

ii) *el ideal* $\mathfrak{p}_1$ *admite una base de* a *elementos,* $\{z_1,..,z_a\}$, *donde* a = alt $\mathfrak{p}_1$, *siendo*

$$\text{rango}\left[\frac{\partial(z_1,\ldots,z_a)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}\right]_{\mathfrak{p}_0^*} = a \qquad (*)$$

entonces existe $\mathfrak{p}_2^* \in$ Spec B , *tal que* $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_2^*$ *y* $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$. *Además existe un único* $\mathfrak{p}_2^*$ *que verifica la condición adicional* $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, *aparte de las indicadas anteriormente.*

Demostración.- Según el corolario 3.4.2, $\mathfrak{p}_1^*$ es el único primo del anillo B, que yace sobre $\mathfrak{p}_1$ y está contenido en $\mathfrak{p}_0^*$. Por tanto, teniendo en cuenta el lema 3.3.1, puede asegurarse que el conjunto de primos aislados del ideal extendido $\mathfrak{p}_1$B , contenidos en $\mathfrak{p}_0^*$, se reduce a $\{\mathfrak{p}_1^*\}$. En consecuencia, extendiendo al anillo $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ podrá afirmarse que el conjunto de primos aislados de $(\mathfrak{p}_1B)\vartheta_0^*$ se reduce a $\{\mathfrak{p}_1^*\vartheta_0^*\}$, luego

$$\sqrt{(\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^*} = \mathfrak{p}_1^*\vartheta_0^* \qquad (1)$$

Por otra parte, de acuerdo con 3.1.1, existe en B un primo $\mathfrak{p}_2^*$, tal que $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$, luego $\mathfrak{p}_2 B \subseteq \mathfrak{p}_2^*$, lo que, teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$, implica $\mathfrak{p}_1 B \subseteq \mathfrak{p}_2 B \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ y por tanto $\sqrt{\mathfrak{p}_1 B} \subseteq \mathfrak{p}_2^*$, luego extendiendo al anillo local ϑ_0^* , resulta

$$\left[\sqrt{\mathfrak{p}_1 B)}\right]\vartheta_0^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*\vartheta_0^* \qquad (2)$$

pero, por propiedades de la localización,

$$\left[\sqrt{\mathfrak{p}_1 B)}\right]\vartheta_0^* \subseteq \sqrt{(\mathfrak{p}_1 B)\vartheta_0^*}$$

luego de (1) y (2) se deduce: $\mathfrak{p}_1^*\vartheta_0^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*\vartheta_0^*$, lo que, por la biyección ordenada existente entre ideales primos de ϑ_0^* e ideales primos de B contenidos en $\mathfrak{p}_0^*$, implica $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_2^*$. Finalmente, ha de ser $\mathfrak{p}_1^* \neq \mathfrak{p}_2^*$, ya que si fuera $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_2^*$, ello implicaría: $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^* \cap A \subseteq \mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$, en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$. ■

Nota.- Esta versión del teorema del ascenso difiere de la de 3.2.4 en que allí se suponía multisimple la extensión $A \hookrightarrow B$, mientras que aquí se exige la verificación de la condición jacobiana (*), pero en ambos teoremas se supone que $\mathfrak{p}_1$ es un primo intersección completa. Ambos resultados nos inducen a conjeturar que el teorema 3.2.4 sea válido para extensiones cualesquiera (no necesariamente multisimples), pero esto no hemos logrado probarlo, ni tampoco encontrar un contraejemplo, que muestre su no validez para extensiones arbitrarias.

3.4.5 Ejemplo.- Sean $A = k[x_1,x_2,x_3,x_4]$ y $B = A[y]$ con la condición $y^2-x_1-1 = 0$ y consideremos los ideales

$$\mathfrak{p}_1 = (x_1+x_2-x_3^2,\ x_2-2x_3+x_4^3)A$$

$$\mathfrak{p}_2 = (x_1+x_2-x_3^2,\ x_2-2x_3+x_4^3,\ x_1-x_4+x_1^2-x_3^4)A$$

contenidos en el ideal de punto $\mathfrak{p}_0^* = (x_1,x_2,x_3,x_4,y-1)B$. Por ser A un anillo de polinomios, el anillo de fracciones $\vartheta_0 = A_{\mathfrak{p}_0}$, de A respecto del ideal maximal

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A = (x_1,x_2,x_3,x_4)A$$

es regular de dimensión 4, siendo su ideal de no-unidades

$$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{p}_0\vartheta_0 = (x_1,x_2,x_3,x_4)\vartheta_0$$

luego $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ es un sistema regular de parámetros de ϑ_0 , y en consecuencia

$$\{x_1+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ x_2+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ x_3+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ x_4+\mathfrak{m}_0^2\}$$

es base del k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Por tanto,

$$\left\{(x_1+x_2-x_3^2)+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ (x_2-2x_3+x_4^3)+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ (x_1-x_4+x_1^2-x_3^4)+\mathfrak{m}_0^2\ ,\ x_1+\mathfrak{m}_0^2\right\}$$

es otra base de $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$, luego

$$\{x_1+x_2-x_3^2,\ x_2-2x_3+x_4^3,\ x_1-x_4+x_1^2-x_3^4,\ x_1\} \qquad (1)$$

es otro sistema regular de parámetros de ϑ_0 . Los ideales $\mathfrak{p}_1\vartheta_0$ y $\mathfrak{p}_2\vartheta_0$ serán primos de alturas respectivas 2 y 3, por estar generados por subconjuntos del sistema regular de parámetros (1), y, en consecuencia, sus contraídos en el subanillo A , los ideales $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$, también serán primos de alturas respectivas 2 y 3, siendo $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$. Análogamente,

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1+x_2-x_3^2\ ,\ x_2-2x_3+x_4^3\ ,\ y-1)B$$

es también primo, por ser el contraído del ideal $\mathfrak{p}_1^*\vartheta_0^*$, generado por un subconjunto de un sistema regular de parámetros de $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$. Por otra parte, es claro que se verifican:

$$\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_0^* \quad , \quad \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_0^*$$

y

$$\text{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = n - \text{rango}\begin{bmatrix} J_y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - \text{rango}\begin{bmatrix} 2y \end{bmatrix}_{\mathfrak{p}_0^*} = 1 - 1 = 0$$

Además, la altura de $\mathfrak{p}_1$ es 2, siendo este ideal generado por dos elementos:

$$z_1 = x_1+x_2-x_3^2 \quad , \quad z_2 = x_2-2x_3+x_4^3$$

y

$$\text{rango}\left[\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}\right]_{\mathfrak{p}_0} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

luego, de acuerdo con 3.3.4, existirá un ideal $\mathfrak{p}_2^* \in \text{Spec } B$, tal que $\mathfrak{p}_1^* \subsetneq \mathfrak{p}_2^*$ y $\mathfrak{p}_2^* \cap A = \mathfrak{p}_2$. Y, en efecto, el ideal de B :

$$\mathfrak{p}_2^* = (x_1+x_2-x_3^2\ ,\ x_2-2x_3+x_4^3\ ,\ x_1-x_4+x_1^2-x_3^4\ ,\ y-1)B$$

es primo y verifica esas dos condiciones, según es fácil comprobar, como consecuencia de ser

$$\{x_1+x_2-x_3^2 \;,\; x_2-2x_3+x_4^3 \;,\; x_1-x_4+x_1^2-x_3^4 \;,\; y-1\}$$

sistema regular de parámetros de ϑ_0^* , estando $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$. Pero también el ideal

$$\mathfrak{p}_2'' = (x_1+x_2-x_3^2 \;,\; x_2-2x_3+x_4^3 \;,\; x_1-x_4+x_1^2-x_3^4 \;,\; y+1)B$$

contiene a $\mathfrak{p}_1^*$ y yace sobre $\mathfrak{p}_2$, aunque no está contenido en $\mathfrak{p}_0^*$.

Capitulo IV.

Criterios de no ramificación de primos

4.1 Caso de dependencia entera

En 2.2 se han estudiado criterios de no-ramificación global de ideales de punto y en 2.3 de ideales maximales. Trataremos ahora de determinar criterios de no-ramificación para ideales primos, no necesariamente maximales. Pero, para que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ no se ramifique en $A \hookrightarrow B$, es decir, para que el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ sea radical, es preciso que no posea componentes sumergidos, por lo que interesa determinar condiciones que aseguren la no existencia de sumergidos.

4.1.1 Lema.- *Supongamos* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y* $\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A = A$, *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *no posee sumergidos, es decir, todos sus primos asociados son aislados.*

Demostración.- Consideremos una descomposición primaria irredundante del ideal extendido $\mathfrak{p}B$ y sea $\mathfrak{q}^*$ uno de los componentes primarios de dicha descomposición y $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*}$ su primo asociado.

Si $\mathfrak{p}$ es comaximal con el ideal de singularidad, sing A (definido en 2.2.1), es decir, si se verifica

$$\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A = A \qquad (1)$$

entonces el anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es regular, ya que, en otro caso, según el criterio jacobiano de simplicidad (recordado en 1.0), sería $\operatorname{rango}\left[J_{xy}\right]_{\mathfrak{p}^*} < n$, luego los menores de orden n de esta matriz serían nulos, y, por tanto, todos los menores de orden n de la matriz J_{xy} pertenecerían al ideal $\mathfrak{p}^*$, luego el ideal sing B (generado por dichos menores) estaría contenido en $\mathfrak{p}^*$ y, en consecuencia,

$$\operatorname{sing} A = (\operatorname{sing} B) \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A \qquad (2)$$

pero $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$ implica $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, lo que, junto con (2), implicaría: $\mathfrak{p} + \operatorname{sing} A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, luego no se verificaría (1).

Suponiendo alt $\mathfrak{p} = a$, por ser $\mathfrak{p}$ intersección completa, admitirá una base de a elementos:

$$\mathfrak{p} = (z_1,\ldots,z_a)A \quad ; \quad z_1,\ldots,z_a \in A$$

que también generarán al ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta^*$, es decir,

$$\mathfrak{p}\vartheta^* = (z_1,\dots,z_a)\vartheta^* \qquad (3)$$

y, por otra parte, siendo $\mathcal{C} = \{\mathfrak{p}_1^*,\dots,\mathfrak{p}_s^*\}$ el conjunto de los primos minimales (o aislados) del ideal $\mathfrak{p}B$, de acuerdo con 3.2.4, se verificará: $\mathfrak{p}_i^* \cap A = \mathfrak{p}$; $i=1,\dots,s$, lo que, por ser B entero sobre A , implica

$$\text{alt } \mathfrak{p}_i^* = \text{alt } \mathfrak{p} = a \quad ; \quad i=1,\dots,s$$

luego, en particular, serán de altura a los ideales $\mathfrak{p}_i^*$; $i=1,\dots,s$, que estén contenidos en $\mathfrak{p}^*$, es decir, los del subconjunto de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}(\mathfrak{p}^*) = \{\mathfrak{p}_i^* \in \mathcal{C} \mid \mathfrak{p}_i^* \subseteq \mathfrak{p}^*\} \qquad (4)$$

siendo este subconjunto no vacío, ya que el primo asociado $\mathfrak{p}^*$ contiene a algún primo aislado $\mathfrak{p}_i^*$ de $\mathfrak{p}B$. Pasando ahora al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, los primos minimales del ideal extendido $(\mathfrak{p}B)\vartheta^* = \mathfrak{p}\vartheta^*$ serán los extendidos de los ideales de $\mathcal{C}(\mathfrak{p}^*)$, es decir, los del subconjunto

$$\{\mathfrak{p}_i^*\vartheta^* \mid \mathfrak{p}_i^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{p}^*)\}$$

los cuales serán también de altura a , por serlo los de $\mathcal{C}(\mathfrak{p}^*)$. Por tanto, alt $\mathfrak{p}\vartheta^* = a$, lo que, junto con (3), y por ser ϑ^* un anillo local de Cohen-Macaulay (ya que era regular), implica que el ideal $\mathfrak{p}\vartheta^*$ sea no mezclado y, por tanto, no posea primos sumergidos.

Ahora bien, como $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, por propiedades bien conocidas de la localización $B \longrightarrow \vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, el ideal extendido $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ será un componente primario de $\mathfrak{p}\vartheta^*$, que debe ser aislado (y no sumergido), de acuerdo con lo indicado anteriormente, luego su contraído en B, es decir, $\mathfrak{q}^*\vartheta^* \cap B = \mathfrak{q}^*$, será componente primario aislado de $\mathfrak{p}B$ (por la biyección existente entre ideales primarios de ϑ^* e ideales primarios de B contenidos en $\mathfrak{p}^*$).

Finalmente, puesto que $\mathfrak{q}^*$ era un componente primario arbitrario de una descomposición primaria irredundante de $\mathfrak{p}B$, este último ideal no poseerá componentes primarios sumergidos.

4.1.2 Teorema.- *Supongamos* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y* $\mathfrak{p} + \text{sing } A = A$, *entonces son equivalentes:*

i) $\mathfrak{p} \not\supset \text{ram}_1 A$

ii) $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir,* $\mathfrak{p}B$ *es radical*

Demostración.-

i) $\Rightarrow$ *ii)* Según el lema precedente, el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ admitirá una descomposición primaria irredundante única, cuyos primos asociados son todos aislados. Por tanto, si $\mathfrak{q}^*$ es un componente primario de $\mathfrak{p}B$ y $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*}$, su primo asociado será $\mathfrak{p}^*$, primo minimal de $\mathfrak{p}B$, lo que, de acuerdo con 2.3.4, implica

$$\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p} \qquad (1)$$

Si suponemos

$$\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1 A \qquad (2)$$

entonces

$$\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}^* = 0 \qquad (3)$$

ya que, si fuera no nulo este orden de ramificación, entonces, según 2.1.5, se tendría: $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathrm{ram}_1 B$, y por tanto

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A \supseteq (\mathrm{ram}_1 B) \cap A = \mathrm{ram}_1 A$$

en contradicción con (2). Ahora bien, de acuerdo con el lema 1.4.2, de (3) se deduce que $\mathfrak{p}^*$ no es de ramificación local, es decir, el ideal extendido de (1) al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es su ideal maximal $\mathfrak{p}^*\vartheta^*$. Puesto que $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, el ideal extendido $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ es un componente primario de $(\mathfrak{p}B)\vartheta^* = \mathfrak{p}\vartheta^*$, luego $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ será primo, por serlo $\mathfrak{p}\vartheta^*$. En consecuencia, su contraído en B , el ideal $\mathfrak{q}^*\vartheta^* \cap B = \mathfrak{q}^*$, también será primo. Puesto que $\mathfrak{q}^*$ era un componente primario de $\mathfrak{p}B$, este último ideal será intersección de primos y por tanto radical, luego $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sigue de 2.3.6 . ∎

<u>Nota</u>.- La condición $\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\ A = A$ geométricamente significa que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ es disjunta con la subvariedad singular contraída, es decir, que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no pasa por puntos que sean proyección sobre k^r de puntos singulares de la variedad de k^{r+n} , cuyo anillo coordenadas es B . Notemos que la implicación *i)* $\Rightarrow$ *ii)* , relativa al teorema anterior, no requiere que se verifique esta condición $\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\ A = A$, según muestra el siguiente:

<u>Contraejemplo</u>.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = k[x_1,x_2,y]$ con la condición $y^2+x_1^2-x_2^2 = 0$, resulta:

$$J_y = (2y) \quad ; \quad J_{xy} = (2x_1,-2x_2,2y)$$

luego

$$\mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y\ ,\ x_1^2-x_2^2)B \quad ; \quad \mathrm{ram}_1 A = (x_1^2-x_2^2)A$$

$$\mathrm{sing}\ B = (x_1,x_2,y)B \quad ; \quad \mathrm{sing}\ A = (x_1,x_2)A$$

Observemos que B es entero sobre A , por serlo y . El ideal principal $\mathfrak{p} = (x_1)A$ es primo de altura uno (por ser x_1 elemento irreducible del DFU A), luego es intersección completa, pero $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{sing}\ A$, y por tanto

$$\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\ A = \mathrm{sing}\ A \neq A$$

No obstante, para este ideal se tiene: $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$ y

$$\mathfrak{p}B = (x_1)B = (x_1\ ,\ y^2-x_2^2)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^*$$

donde

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1\ ,\ y-x_2)B \quad , \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1\ ,\ y+x_2)B$$

siendo estos ideales primos (según se comprueba inmediatamente), luego $\mathfrak{p}B$ es radical. ∎

Los siguientes resultados (4.1.3 a 4.1.6) permiten generalizar lo que acaba de observarse, prescindiendo de la condición $\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\ A = A$, es decir, no exigiendo que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no pase por la proyección de puntos singulares.

4.1.3 <u>Lema</u>.- *Supongamos* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A$. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y existe* $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec\ Max}\ A$, *tal que* $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$ *y* $\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$, *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *no posee sumergidos, es decir, todos sus primos asociados son aislados.*

<u>Demostración</u>.- Consideremos una descomposición primaria irredundante de $\mathfrak{p}B$ y sea $\mathfrak{q}^*$ uno de los componentes primarios de esa descomposición y $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*}$. Supongamos que existe en el subanillo A un maximal $\mathfrak{p}_0$, tal que $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$ y

$$\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A \qquad (1)$$

Por ser B entero sobre A, el teorema del ascenso asegura la existencia de $\mathfrak{p}_0^* \in \mathrm{Spec}\ B$, tal que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$ y $\mathfrak{p}_0^* \cap A = \mathfrak{p}_0$. Además, ha de verificarse:

$$\mathfrak{p}_0^* \not\supseteq \mathrm{ram}_1 B \qquad (2)$$

ya que, si no fuera así, se tendría

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0^* \cap A \supseteq (\mathrm{ram}_1 B) \cap A = \mathrm{ram}_1 A$$

en contradicción con (1). Ahora, según 2.1.5, de (2) se deduce

$$\mathrm{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0$$

lo que (de acuerdo con 1.2.9) asegura la regularidad del anillo local $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$, que es por tanto Cohen-Macaulay.

Por otra parte, por ser B entero sobre A , todos los primos minimales de $\mathfrak{p}B$ yacen sobre $\mathfrak{p}$, luego (según 2.3.4) tienen todos la misma altura que $\mathfrak{p}$. Además, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ implica $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, luego los primos minimales de $(\mathfrak{p}B)\vartheta_0^* = \mathfrak{p}\vartheta_0^*$ serán extendidos de primos minimales de $\mathfrak{p}B$, luego también tendrán la misma altura que $\mathfrak{p}$ y por tanto

$$\text{alt } \mathfrak{p}\vartheta_0^* = \text{alt } \mathfrak{p}$$

En consecuencia, $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ será intersección completa, por serlo $\mathfrak{p}$. Por ser ϑ_0^* un anillo local de Cohen-Macaulay, ello implica que el ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ sea no mezclado y, por tanto, no posea primos sumergidos.

Puesto que $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, el ideal extendido $\mathfrak{q}^*\vartheta_0^*$ será componente primario de $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$. Además será aislado (por ser $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ no mezclado), luego $\mathfrak{q}^*$ será componente primario aislado de $\mathfrak{p}B$. Basta ya recordar que $\mathfrak{q}^*$ era un componente primario arbitrario de $\mathfrak{p}B$, para concluir que $\mathfrak{p}B$ no posee sumergidos.

4.1.4 <u>Corolario</u>.- *Supongamos el cuerpo base,* k , *algebraicamente cerrado y* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in$ Spec A . *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y* $\mathfrak{p} \not\supseteq \text{ram}_1 A$, *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *no posee sumergidos, es decir, todos sus primos asociados son aislados.*

<u>Demostración</u>.- Si $\mathfrak{p} \not\supseteq \text{ram}_1 A$, entonces $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + \text{ram}_1 A$, luego la subvariedad de $\mathfrak{p}$ contiene estrictamente a la de $\mathfrak{p} + \text{ram}_1 A$, lo que, por ser $\mathfrak{p}$ primo y k algebraicamente cerrado, implica la existencia de un punto $P_0 \in k^r$, tal que P_0 pertenezca a la subvariedad de $\mathfrak{p}$ y no pertenezca a la de $\mathfrak{p} + \text{ram}_1 A$, luego, para el ideal $\mathfrak{p}_0$ del punto P_0 se tendrá: $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \text{ram}_1 A$. Ahora ya sigue del lema anterior. ∎

4.1.5 <u>Teorema</u>.- *Supongamos* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in$ Spec A. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y existe* $\mathfrak{p}_0 \in$ Spec Max A , *tal que* $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$ *y* $\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \text{ram}_1 A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir,* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

<u>Demostración</u>.- Según 4.1.3, $\mathfrak{p}B$ no posee sumergidos. Sea pues $\mathfrak{q}^*$ un componente primario de $\mathfrak{p}B$ y $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*}$, lo que, según 2.3.4, implica:

$\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$. De acuerdo con lo indicado en la demostración de 4.1.3 , existe $\mathfrak{p}_0^* \in$ Spec B , tal que $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$ y ord.ram $\mathfrak{p}_0^* = 0$, lo que, según 1.2.9, implica: ord.ram $\mathfrak{p}^* = 0$. En consecuencia, según 1.4.2, el ideal extendido de $\mathfrak{p}$ al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$ es su ideal maximal, es decir, $\mathfrak{p}\vartheta^* = \mathfrak{p}^*\vartheta^*$. Ahora bien, $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ será componente primario de $(\mathfrak{p}B)\vartheta^* = \mathfrak{p}\vartheta^*$, que era primo, luego $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ es primo y, en consecuencia, también será primo $\mathfrak{q}^*\vartheta^* \cap B = \mathfrak{q}^*$. Basta ya recordar que $\mathfrak{q}^*$ era un componente primario arbitrario de $\mathfrak{p}B$, para concluir que $\mathfrak{p}B$ es intersección de primos y, por tanto, radical. ∎

4.1.6 Teorema.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y* B *entero sobre* A *y sea* $\mathfrak{p} \in$ Spec A . *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa, entonces son equivalentes:*

i) $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$

ii) $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir,* $\mathfrak{p}B$ *es radical*

Demostración.- Basta tener en cuenta el corolario 4.1.4, siendo la demostración análoga a la de 4.1.2 . ∎

4.1.7 Ejemplos.-

a) Si $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición

$$2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2 = 0 \qquad (1)$$

entonces B es entero sobre A, por serlo y . De (1) resulta $J_y = (6y^2-6y)$ y por tanto

$$\mathrm{ram}_1 B = (y^2-y)B = (y^2-y,2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2)B = (y,x_1^2+x_2^2)B \cap (y-1,x_1^2+x_2^2-1)B$$

$$\mathrm{ram}_1 A = (x_1^2+x_2^2)A \cap (x_1^2+x_2^2-1)A \qquad (2)$$

luego la subvariedad de ramificación R_1^* consta del punto $\{x_1=x_2=y=0\}$ y de la circunferencia $\{y=1,x_1^2+x_2^2=1\}$. Por otra parte, $J_{xy} = (2x_1,2x_2, 6y^2-6y)$ y por tanto

$$\mathrm{sing}\ B = (x_1,x_2,y^2-y)B = (x_1,x_2,y^2-y,2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2)B = (x_1,x_2,y)B$$

$$\mathrm{sing}\ A = (x_1,x_2)A$$

luego la subvariedad de singularidad, S^* , consta del punto $\{x_1=x_2=y=0\}$ y en consecuencia $S = \{x_1=x_2=0\}$.

El ideal principal $\mathfrak{p} = (x_1^2+x_2^2-1/2)A$ es primo de altura uno (ya que

$x_1^2+x_2^2-1/2$ es elemento irreducible del DFU $\mathbb{R}[x_1,x_2]$) luego $\mathfrak{p}$ es intersección completa. Vamos a estudiar si $\mathfrak{p}$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$, haciendo uso del teorema 4.1.2 . Es inmediato verificar que $\mathfrak{p}$ + sing A = A y, por otra parte, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$ (ya que, si supusiéramos $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, entonces, por ser primo $\mathfrak{p}$, contendría a alguno de los ideales (2), lo que implicaría $\mathfrak{p} = A$, !absurdo!). Por tanto, según 4.1.2, $\mathfrak{p}$ no se ramificará en $A \hookrightarrow B$. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}B = (x_1^2+x_2^2-1/2)B = (x_1^2+x_2^2-1/2\ ,\ 2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2)B =$$
$$= (x_1^2+x_2^2-1/2\ ,\ 2y^3-3y^2+1/2)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^* \cap \mathfrak{p}_3^*$$

siendo

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_1^2+x_2^2-1/2\ ,\ y-1/2)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_1^2+x_2^2-1/2\ ,\ y-\frac{1+\sqrt{3}}{2})B$$
$$\mathfrak{p}_3^* = (x_1^2+x_2^2-1/2\ ,\ y-\frac{1-\sqrt{3}}{2})B$$

Los tres son ideales primos (ya que, por ejemplo, $\mathfrak{p}_1^*$ es el contraído del primo $\mathfrak{p}$ en el A-epimorfismo $g:B \longrightarrow A$, tal que $g(y) = 1/2$), luego $\mathfrak{p}B$ es radical, por ser intersección de primos.

En cambio, para el primo $\mathfrak{p}' = (x_1^2+x_2^2-1)A$, que también es intersección completa y verifica $\mathfrak{p}'$ + sing A = A , se tiene: $\mathfrak{p}' \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego, según 4.1.2, se ramificará, y, en efecto,

$$\mathfrak{p}'B = (x_1^2+x_2^2-1)B = (x_1^2+x_2^2-1\ ,\ 2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2)B =$$
$$= (x_1^2+x_2^2-1\ ,\ 2y^3-3y^2+1)B = \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{q}^*$$

siendo

$$\mathfrak{p}^* = (x_1^2+x_2^2-1\ ,\ y+1/2)B \quad ; \quad \mathfrak{q}^* = (x_1^2+x_2^2-1\ ,\ (y-1)^2)B$$

El ideal $\mathfrak{p}^*$ es primo, por ser contraído del primo $\mathfrak{p}'$ en el A-epimorfismo $g':B \longrightarrow A$, tal que $g'(y)=-1/2$. Por otra parte, es inmediato verificar que el elemento $x_1^2+x_2^2-1$ pertenece al ideal principal $((y-1)^2)B$, luego $\mathfrak{q}^* = ((y-1)^2)B$ es primario y $\sqrt{\mathfrak{q}^*} = (y-1)B$ su radical ($\sqrt{\mathfrak{q}^*}$ no contiene, ni está contenido, en $\mathfrak{p}^*$, por lo que $\mathfrak{p}^*$ y $\sqrt{\mathfrak{q}^*}$ son los primos minimales de $\mathfrak{p}'B$). Como $\mathfrak{q}^* \neq \sqrt{\mathfrak{q}^*}$, $\mathfrak{q}^*$ es primario no primo, luego $\mathfrak{p}'B$ no es radical y, en consecuencia, $\mathfrak{p}'$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

Para $\mathfrak{p}'' = (x_1)A$, ya no es aplicable 4.1.2, ya que $\mathfrak{p}'' \subseteq$ sing A y por tanto $\mathfrak{p}''$ + sing A $\neq$ A . Tratemos de aplicar 4.1.5 . Para el ideal maximal $\mathfrak{p}_0 = (x_1,x_2-2)A$, es claro que $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}''$, y además $\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A$ (ya que si supusiéramos $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, entonces, por ser $\mathfrak{p}_0$ ideal de punto, y por tanto primo, contendría a uno de los ideales (2), lo cual implicaría $\mathfrak{p}_0 = A$, !absurdo!). Por tanto, según 4.1.5, $\mathfrak{p}''$ no se ramificará en $A \hookrightarrow B$. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}''B = (x_1)B = (x_1 \, , \, 2y^3-3y^2+x_1^2+x_2^2)B = (x_1 \, , \, 2y^3-3y^2+x_2^2)B$$

Para comprobar que este ideal es primo, basta considerar el $\mathbb{R}$-epimorfismo $g'':B \twoheadrightarrow \mathbb{R}[x_2,y]$, tal que $g''(x_1) = 0$, y tener en cuenta que $\mathfrak{p}''B$ es el contraído en g'' del ideal primo $(2y^3-3y^2+x_2^2)$ del anillo de polinomios $\mathbb{R}[x_2,y]$. Luego el ideal $\mathfrak{p}''B$ es primo y por tanto radical.

b) Sean $A = \mathbb{C}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$, con la condición $f_1 = 0$, siendo

$$f_1 = (x_1^2+x_2^2+y^2+c^2-r^2)^2 - 4c^2(x_2^2+y^2) \quad ; \quad 0 < r < c \quad (r,c \in \mathbb{R})$$

que geométricamente corresponde a la superficie tórica resultante de rotar la circunferencia de ecuaciones

$$x_1^2 + (y-c)^2 = r^2 \quad , \quad x_2 = 0$$

alrededor de la recta de ecuaciones $x_2 = 0 = y$. Derivando resulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4y(x_1^2+x_2^2+y^2+c^2-r^2) - 8c^2y = 4y(x_1^2+x_2^2+y^2-c^2-r^2) = 4yw$$

donde $w = x_1^2+x_2^2+y^2-c^2-r^2$, luego

$$\mathrm{ram}_1 B = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)B = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y},f_1\right)B = (yw,f_1)B$$

y en consecuencia la subvariedad de ramificación R_1^* se descompone en las dos subvariedades:

$$R_{11}^* = \{y = 0 = f_1\} \quad ; \quad R_{12}^* = \{w = 0 = f_1\}$$

Para determinar R_{11}^* , observemos que de $y = 0 = f_1$ se deduce

$$(x_1^2+x_2^2+c^2-r^2)^2 - 4c^2x_2^2 = [x_1^2+(x_2+c)^2-r^2][x_1^2+(x_2-c)^2-r^2]$$

luego R_{11}^* se descompone en las dos circunferencias

$$R_{111}^* = \{x_1^2+(x_2+c)^2 = r^2 \ ; \ y = 0\} \quad ; \quad R_{112}^* = \{x_1^2+(x_2-c)^2 = r^2 \ ; \ y = 0\}$$

Análogamente, para determinar R_{12}^* , observemos que el par de ecuaciones $w = 0 = f_1$, que definen R_{12}^* , es equivalente al par de ecuaciones :

$$4c^2(x_2^2+y^2) = (2c^2)^2 \quad ; \quad 4c^2(c^2+r^2-x_1^2) = (2c^2)^2$$

que, teniendo en cuenta que $c \neq 0$, equivalen a

$$x_2^2 + y^2 = c^2 \quad ; \quad x_1^2 - r^2 = 0$$

luego R^*_{12} se descompone en el par de circunferencias

$$R^*_{121} = \{x_2^2+y^2 = c^2 \ ; \ x_1 = r\} \quad ; \quad R^*_{122} = \{x_2^2+y^2 = c^2 \ ; \ x_1 = -r\}$$

Por tanto, las cuatro circunferencias R^*_{111} , R^*_{112} , R^*_{121} , R^*_{122} son las componentes irreducibles de la subvariedad de ramificación R^*_1 . Estas consideraciones geométricas facilitan la verificación de la descomposición primaria irredundante del ideal $\mathrm{ram}_1 B$:

$$\mathrm{ram}_1 B = \mathfrak{p}^*_{111} \cap \mathfrak{p}^*_{112} \cap \mathfrak{p}^*_{121} \cap \mathfrak{p}^*_{122}$$

donde $\mathfrak{p}^*_{1ij}$ es el ideal primo de la subvariedad irreducible R^*_{1ij} , para $i,j=1,2$. Por contracción al subanillo A, se obtiene

$$\mathrm{ram}_1 A = \mathfrak{p}_{111} \cap \mathfrak{p}_{112} \cap \mathfrak{p}_{121} \cap \mathfrak{p}_{122}$$

donde $\mathfrak{p}_{1ij} = \mathfrak{p}^*_{1ij} \cap A$, resultando inmediatamente:

$$\mathfrak{p}_{111} = (x_1^2+(x_2+c)^2-r^2)A \quad ; \quad \mathfrak{p}_{112} = (x_1^2+(x_2-c)^2-r^2)A$$

$$\mathfrak{p}_{121} = (x_1-r)A \quad ; \quad \mathfrak{p}_{122} = (x_1+r)A$$

De acuerdo con 4.1.6, un primo $\mathfrak{p}$ del subanillo A se ramificará en $A \hookrightarrow B$, si y solo si, $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$, pero esta inclusión se verifica, si y sólo si $\mathfrak{p}$ contiene a alguno de los cuatro ideales $\mathfrak{p}_{1ij}$; $i,j=1,2$. Ahora bien, estos cuatro ideales son primos de altura uno, luego, si $\mathrm{alt}\ \mathfrak{p} = 1$, entonces la inclusión $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{ram}_1 A$ equivale a que $\mathfrak{p}$ sea uno de aquellos cuatro ideales. Por tanto, los únicos primos de altura uno, que se ramifican, son estos cuatro ideales $\mathfrak{p}_{1ij}$. Y para un maximal, $\mathfrak{p}_0$, de A , $\mathfrak{p}_0$ se ramificará si contiene a alguno de los cuatro primos $\mathfrak{p}_{1ij}$, lo que, por ser $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado, equivale a decir que $\mathfrak{p}_0$ sea ideal de un punto perteneciente a alguna de las cuatro subvariedades irreducibles de los ideales $\mathfrak{p}_{1ij}$; $i,j=1,2$.

4.2 Criterios para extensiones simples y multisimples

En los criterios de no-ramificación de primos estudiados en 4.1, es esencial la condición de que el ideal de ramificación contraído de orden uno, $\mathrm{ram}_1 A$, no esté contenido, o bien en el ideal primo, $\mathfrak{p}$, considerado (caso de 4.1.2 ó 4.1.6), o bien en algún maximal, $\mathfrak{p}_0$, que contenga a $\mathfrak{p}$ (caso de 4.1.5). Pero si la extensión es simple (es decir, n = 1) o multisimple (definición 3.2.2), entonces dicha condición de no inclusión puede, a veces, ser sustituida por la de factorización completa de ciertos polinomios en una indeterminada, con todas sus raíces simples, lo cual suele ser más cómodo de verificar.

4.2.1 <u>Teorema</u>.- *Sea* $A \hookrightarrow B$ *una extensión simple , definida por la condición* $f(x_1,...,x_r,y) = 0$, *siendo*

$$f(x_1,...,x_r,Y) = Y^s + \alpha_{s-1}(x_1,..,x_r)Y^{s-1} + ... + \alpha_0(x_1,..,x_r)$$

donde $\alpha_i(x_1,...,x_r) \in A$; $i=0,1,...,s-1$, *y sea* $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A . *Si existe un punto* $(a_1,...,a_r) \in k^r$, *perteneciente a la subvariedad del ideal* $\mathfrak{p}$, *tal que el polinomio* $f(a_1,...,a_r,Y) \in k[Y]$ *sea factorizable linealmente en* k , *siendo todas sus raíces simples (es decir, de multiplicidad uno), entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir, el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

<u>Demostración</u>.- Sea $\mathfrak{p}_0$ el ideal del punto $(a_1,..,a_r)$, es decir, sea $\mathfrak{p}_0 = (x_1-a_1,..,x_r-a_r)A$. Si el polinomio $f(a_1,..,a_r,Y)$ admite la factorización

$$f(a_1,...,a_r,Y) = \prod_{i=1}^{s}(Y-b_i) \qquad (1)$$

donde $b_j \neq b_i$, si $j\neq i$, entonces el ideal extendido

$$\mathfrak{p}_0B = (x_1-a_1,...,x_r-a_r)B = \left[x_1-a_1,..,x_r-a_r\ ,\ f(x_1,...,x_r,y)\right]B =$$
$$= \left[x_1-a_1,...,x_r-a_r\ ,\ f(a_1,...,a_r,y)\right]B = \left[x_1-a_1,...,x_r-a_r\ ,\ \prod_{i=1}^{s}(y-b_i)\right]B$$

admite, según vamos a probar, la descomposición primaria

$$\mathfrak{p}_0B = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i^* \ ;\ \mathfrak{p}_i^* = (x_1-a_1,...,x_r-a_r,y-b_i)B \ ;\ i=1,...,s \qquad (2)$$

siendo primos los ideales $\mathfrak{p}_i^*$, por ser ideales de punto. En efecto, el ideal principal, I , del anillo de polinomios $B' = k[Y]$, generado por el elemento (1), es claro que admite la descomposición primaria

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}'_i \quad ; \quad \mathfrak{p}'_i = (Y-b_i)B' \quad ; \quad i=1,\dots,s$$

luego, considerando el B'-epimorfismo $g:B \longrightarrow B'$, tal que $g(x_i) = a_i$; $i=1,\dots,r$, se tiene la descomposición primaria

$$g^{-1}(I) = \bigcap_{i=1}^{s} g^{-1}(\mathfrak{p}'_i) \qquad (3)$$

pero, teniendo en cuenta que $\ker g = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)B$ y recordando (1), resulta

$$g^{-1}(I) = \left[\prod_{i=1}^{s}(y-b_i)\right]B + \ker g = \left[f(a_1,\dots,a_r,y)\ ,\ x_1-a_1,\dots,x_r-a_r\right]B =$$

$$= \left[f(x_1,\dots,x_r,y)\ ,\ x_1-a_1,\dots,x_r-a_r\right]B = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)B = \mathfrak{p}_0 B$$

$$g^{-1}(\mathfrak{p}'_i) = (y-b_i)B + \ker g = (y-b_i,x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)B = \mathfrak{p}^*_i \quad ; \quad i=1,\dots,s$$

con lo que de (3) se obtiene (2). Por tanto, el ideal $\mathfrak{p}_0 B$ es intersección de primos, y en consecuencia radical, lo cual, teniendo en cuenta que B es entero sobre A, por serlo y, implica, de acuerdo con 2.3.7, que

$$\mathfrak{p}_0 \not\supseteq \mathrm{ram}_1 A \qquad (4)$$

En consecuencia, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A$ es intersección completa y $(a_1,\dots,a_r)$ pertenece a la subvariedad de $\mathfrak{p}$ (lo que implica que el ideal maximal $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$), de la condición (4) se deduce, según 4.1.5, que el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ es radical, luego $\mathfrak{p}$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$. ∎

4.2.2 Observaciones.-

a) La subvariedad de $\mathfrak{p}$ puede contener puntos de la subvariedad de ramificación contraída R_1 , esto es, puntos cuyos ideales contengan a $\mathrm{ram}_1 A$, y, sin embargo, ser aplicable el teorema 4.2.1 (como sucede para el ideal $\mathfrak{p}_1$ del siguiente ejemplo).

b) Pueden existir primos a los que no sea aplicable 4.2.1, pero si 4.1.5 (como sucede para el ideal $\mathfrak{p}_4$ del siguiente ejemplo).

Ejemplo.- Siendo $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$, con la condición $f(x_1,x_2,y) = 0$, donde $f(x_1,x_2,Y) = Y^2-x_2$, resulta $J_y = (2y)$, luego

$$\mathrm{ram}_1 B = (y)B = (y,x_2)B \quad ; \quad \mathrm{ram}_1 A = (x_2)A$$

Para el primo de altura uno $\mathfrak{p}_1 = (x_1)A$, podemos considerar el punto $\{x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1\}$ perteneciente a la subvariedad de $\mathfrak{p}_1$, para el cual $f(0,1,Y) = Y^2-1$ admite dos raíces simples distintas, luego, según 4.2.1, el ideal $\mathfrak{p}_1B$ será radical. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}_1B = (x_1)B = (x_1,y^2-x_2)B$$

es primo, por ser contraimagen del ideal primo (y^2-x_2) del anillo de polinomios $A_2 = k[x_2,y]$ en el $k[y]$-epimorfismo $g_1:B \longrightarrow A_2$, tal que $g_1(x_1) = 0$. Por tanto, $\mathfrak{p}_1$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$, y sin embargo la subvariedad de $\mathfrak{p}_1$ pasa por el punto $\{x_1 = 0 = x_2\}$ de la subvariedad de ramificación contraída R_1 definida por el ideal $\mathrm{ram}_1 A$.

Para el primo de altura uno $\mathfrak{p}_2 = (x_1^2-x_2)A$, podemos considerar el punto $\{x_1 = 1 = x_2\}$, perteneciente a la subvariedad de $\mathfrak{p}_2$, para el cual $f(1,1,Y) = Y^2-1$ admite dos raíces simples, luego, según 4.2.1, el ideal $\mathfrak{p}_2B$ será radical. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}_2B = (x_1^2-x_2)B = (x_1^2-x_2 \ , \ y^2-x_2)B = (x_1^2-x_2 \ , \ y^2-x_1^2)B = \mathfrak{p}^*_{21} \cap \mathfrak{p}^*_{22}$$

donde

$$\mathfrak{p}^*_{21} = (x_1^2-x_2 \ , \ y-x_1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}^*_{22} = (x_1^2-x_2 \ , \ y+x_1)B$$

son ambos primos, luego $\mathfrak{p}_2B$ es radical, por ser intersección de primos.

Para el primo de altura uno $\mathfrak{p}_3 = (x_2-1)A$, podemos considerar el punto $\{x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1\}$ de la subvariedad de $\mathfrak{p}_3$, para el cual $f(0,1,Y) = Y^2-1$ admite sus dos raíces simples, luego, según 4.2.1, el ideal $\mathfrak{p}_3B$ será radical. Y, en efecto,

$$\mathfrak{p}_3B = (x_2-1)B = (x_2-1 \ , \ y^2-x_2)B = (x_2-1 \ , \ y^2-1)B = \mathfrak{p}^*_{31} \cap \mathfrak{p}^*_{32}$$

donde

$$\mathfrak{p}^*_{31} = (x_2-1 \ , \ y-1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}^*_{32} = (x_2-1 \ , \ y+1)B$$

son ambos primos, luego $\mathfrak{p}_3B$ es radical.

Para el primo $\mathfrak{p}_4 = (x_2+1)A$, todos los puntos de la subvariedad de $\mathfrak{p}_4$ son de la forma $(a_1,-1)$, donde $a_1 \in \mathbb{R}$, pero $f(a_1,-1,Y) = Y^2+1$ no es factorizable linealmente en $\mathbb{R}$, por lo que no es aplicable 4.2.1. Sin embargo, es claro que $\mathfrak{p}_4 \not\supset \mathrm{ram}_1 A$, por lo que, según 4.1.5, será $\mathfrak{p}_4B$ radical.

4.2.3 <u>Caso en que el cuerpo base sea</u> $\mathbb{R}$.- Al aplicar el teorema 4.2.1, no es preciso conocer las raíces del polinomio $f(a_1,...,a_r,Y) \in k[Y]$, bastando asegurarse de que este polinomio tiene todas sus raíces en el cuerpo base y que estas son todas de multiplicidad uno. En el caso de que dicho cuerpo base sea $\mathbb{R}$, bastará pues determinar el número de raíces reales de $f(a_1,...,a_r,Y)$, comprobando que tal número coincide con el grado del polinomio f .

Para determinar el número de tales raíces reales, puede utilizarse el clásico método de Sturm, que es suficiente en muchos casos, y para facilitar su tediosa aplicación, hemos desarrollado un programa en lenguaje Reduce, que permita automatizar el cálculo del número de raíces reales. Dicho programa puede verse al final de la memoria, en el apéndice A.4, en que también se describe su ejecución. ∎

A continuación se describe un ejemplo de aplicación del teorema 4.2.1, en caso de ser $k = \mathbb{R}$.

Ejemplo.- Sean $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición $f(x_1,x_2,y) = 0$, donde $f(x_1,x_2,Y)$ es el polinomio

$$2Y^4 - 4(x_1+1)^3Y^3 - 5(x_1+1)^2(x_2+2)Y^2 + 8(x_1+1)Y - 12(x_1^2-1)$$

Por ser x_1+1 polinomio irreducible del DFU A , según el criterio de Eisenstein, es $f(x_1,x_2,Y)$ elemento irreducible del DFU k[X,Y] , luego el ideal principal generado por este elemento irreducible será primo, y en consecuencia B es dominio.

Para determinar si el primo $\mathfrak{p} = (x_1^2-x_2^3)A$ se ramifica en $A \hookrightarrow B$, podemos considerar el punto $\{x_1 = 0 = x_2\}$ de la subvariedad de $\mathfrak{p}$, para el cual es $f(0,0,Y) = Y^4-2Y^3-5Y^2+4Y+6$. Como el número de raíces reales de este polinomio es 4 (según se calcula con el programa del apéndice A.4), igual al grado de f , de acuerdo con 4.2.1, el ideal $\mathfrak{p}B$ será radical (lo que se comprueba en el apéndice A.5.5).

4.2.4 Teorema.- *Sea* $A \hookrightarrow B$ *una extensión multisimple (definición 3.2.2) y entera, determinada por las condiciones* $f(x_1,...,x_r,y_1,...,y_s)$; $s=1,...,n$, *siendo*

$$f(x_1,...,x_r,Y_1,...,Y_s) = Y_s^{N_s} + \alpha_{s,s-1}Y_s^{N_s-1} + ... + \alpha_{s,1}Y_s + \alpha_{s,0}$$

donde N_s *es un natural no nulo y*

$$\alpha_{s,i} = \alpha_{s,i}(x_1,\dots,x_r,Y_1,\dots,Y_{s-1}) \in A[Y_1,\dots,Y_{s-1}] \quad ; \quad {\scriptstyle i=0,1,\dots,s-1}$$

y sea $\mathfrak{p}$ *un primo intersección completa del subanillo* A. *Si existe un punto* $(a_1,\dots,a_r) \in k^r$, *perteneciente a la subvariedad de* $\mathfrak{p}$, *tal que se verifiquen:*

i) el polinomio $f_1(a_1,\dots,a_r,Y_1)$ *se factoriza linealmente en* $k[Y_1]$, *siendo todas sus raíces simples*

ii) si para $(b_1,\dots,b_{h-1}) \in k^{h-1}$ *es* $f_s(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) = 0$; ${\scriptstyle s=1,\dots,h-1}$, *entonces el polinomio* $f_h(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_{h-1},Y_h)$ *se factoriza linealmente en* $k[Y_h]$, *siendo todas sus raíces simples;* ${\scriptstyle h=2,\dots,n}$

entonces $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir, el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

Demostración.- Sea $\mathfrak{p}_0$ el ideal del punto $(a_1,\dots,a_r)$ en el subanillo A , es decir , sea $\mathfrak{p}_0 = (x_1-a_1,\dots,x_r-a_r)A$. De acuerdo con el enunciado del teorema, el polinomio mónico $f_1(a_1,\dots,a_r,Y_1)$ del DFU $k[Y_1]$ admitirá un factorización de la forma

$$f_1(a_1,\dots,a_r,Y_1) = \prod_{i_1=1}^{N_1} \left(Y_1-b_{i_1}\right) \qquad (1)$$

donde los elementos $b_{i_1} \in k$ son distintos, dos a dos, y N_1 es el grado del polinomio f_1 en la variable Y_1 . Análogamente, para cada $i_1=1,\dots,N_1$, el polinomio mónico $f_2\left(a_1,\dots, a_r,b_{i_1},Y_2\right) \in k[Y_2]$ admitirá una factorización de la forma

$$f_2\left(a_1,\dots,a_r,b_{i_1},Y_2\right) = \prod_{i_2=1}^{N_2} \left(Y_2-b_{i_1i_2}\right) \qquad (2)$$

donde los elementos $b_{i_1i_2} \in k$ son distintos, dos a dos, y N_2 es el grado de f_2 (en Y_2). Y, en general, para cada $i_1,i_2,\dots,i_{h-1}$, el polinomio mónico $f_2\left(a_1,\dots,a_r,b_{i_1},b_{i_1i_2},\dots, b_{i_1i_2\dots i_{h-1}},Y_h\right) \in k[Y_h]$ admitirá una factorización de la forma

$$f_h\left(a_1,\dots,a_r,b_{i_1},b_{i_1i_2},\dots,b_{i_1i_2\dots i_{h-1}},Y_h\right) = \prod_{i_h=1}^{N_h} \left(Y_h-b_{i_1i_2\dots i_{h-1}i_h}\right) \qquad (3)$$

donde los elementos $b_{i_1 i_2 \dots i_{h-1} i_h} \in k$ son distintos, dos a dos, y N_h es el grado de f_h(en Y_h).

Vamos a probar que el ideal extendido $\mathfrak{p}_0 B$ es igual a la intersección de los siguientes ideales (obviamente primos, por ser ideales de punto):

$$\mathfrak{p}^*_{i_1 i_2 \dots i_n} = \left[x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_n-b_{i_1 i_2 \dots i_n}\right]B \qquad (4)$$

para $i_1=1,\dots,N_1$; ... ; $i_n=1,\dots,N_n$, es decir, que

$$\mathfrak{p}_0 B = \bigcap_{i_1=1}^{N_1} \bigcap_{i_2=1}^{N_2} \cdots \bigcap_{i_n=1}^{N_n} \mathfrak{p}^*_{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad (5)$$

Para ello, comenzaremos suponiendo que $i_1,i_2,\dots,i_{n-1}$ son números naturales fijos y consideremos el ideal intersección

$$I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = \bigcap_{i_n=1}^{N_n} \mathfrak{p}^*_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} \qquad (6)$$

el cual vamos a probar que es igual al ideal

$$\mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1}} = \left[x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-1}-b_{i_1 \dots i_{n-1}}\right]B \qquad (7)$$

Por una parte, es claro que este ideal está contenido en los ideales (4), para los $i_1,\dots,i_{n-1}$ indicados, y por tanto está contenido en el ideal (6). Probemos pues que, recíprocamente, el ideal (6) está contenido en el (7). En efecto, si $z \in I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$, entonces $z \in I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1}$ y por tanto z será de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{r} \alpha'_i(x_i-a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta'_j(y_j-b_{i_1 \dots i_j}) + \gamma'(y_n-b_{i_1 \dots i_{n-1} 1}) \qquad (8)$$

donde $\alpha',\beta',\gamma' \in B$, luego

$$\gamma'\left[y_n-b_{i_1 \dots i_{n-1} 1}\right] = z - \sum_{i=1}^{r} \alpha'_i(x_i-a_i) - \sum_{j=1}^{n-1} \beta'_j\left[y_j-b_{i_1 \dots i_j}\right]$$

y, en consecuencia, este elemento pertenece a los ideales $\mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} i_n}$; $i_n = 2,\dots,N_n$, pero $y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2} \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 2}$ y por tanto $\gamma'(y_n-b_{i_1 \dots i_{n-1} 2}) \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 2}$, luego

$$\gamma'(b_{i_1 \dots i_{n-1} 1} - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2}) \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 2}$$

lo cual, por ser $b_{i_1 \dots i_{n-1} 1} - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2}$ un elemento no nulo de k, implica $\gamma' \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 2}$, y por tanto

$$\gamma' = \sum_{i=1}^{r} \delta_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \left[y_j - b_{i_1 \dots i_j} \right] + \zeta \left[y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2} \right]$$

(donde δ_i, ε_j, $\zeta \in B$), lo que sustituido en (8), implica

$$z = \sum_{i=1}^{r} \alpha''_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta''_j (y_j - b_{i_1 \dots i_j}) + \gamma''(y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 1})(y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2}) \tag{9}$$

donde α'', β'', $\gamma'' \in B$, luego

$$\gamma''(y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 1})(y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2}) = z - \sum_{i=1}^{r} \alpha''_i (x_i - a_i) - \sum_{j=1}^{n-1} \beta''_j (y_j - b_{i_1 \dots i_j})$$

y, en consecuencia, este elemento pertenece a los ideales $\mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} i_n}$; $i_n = 3, \dots, N_n$, pero $y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 3} \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 3}$, luego, notando

$$\chi = (b_{i_1 \dots i_{n-1} 3} - b_{i_1 \dots i_{n-1} 1})(b_{i_1 \dots i_{n-1} 3} - b_{i_1 \dots i_{n-1} 2})$$

se tiene: $\gamma'' \chi \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 3}$, lo cual, por ser χ un elemento no nulo de k, implica $\gamma'' \in \mathfrak{p}^*_{i_1 \dots i_{n-1} 3}$ y por tanto

$$\gamma'' = \sum_{i=1}^{r} \delta'_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon'_j \left[y_j - b_{i_1 \dots i_j} \right] + \zeta' \left[y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} 3} \right]$$

(donde δ'_i, ε'_j, $\zeta' \in B$), lo que sustituido en (9), implica

$$z = \sum_{i=1}^{r} \alpha^*_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta^*_j \left[y_j - b_{i_1 \dots i_j} \right] + \gamma^* \prod_{i_n=1}^{3} \left[y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} i_n} \right]$$

donde α^*_i, β^*_j, $\gamma^* \in B$. Reiterando el proceso anterior, se llega a expresar z en la forma

$$z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left[y_j - b_{i_1 \dots i_j} \right] + \gamma \prod_{i_n=1}^{N_n} \left[y_n - b_{i_1 \dots i_{n-1} i_n} \right]$$

(donde α_i, β_j, $\gamma \in B$), lo que, teniendo en cuenta la igualdad (3), para $h=n$, implica

$$z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left[y_j - b_{i_1 \dots i_j} \right] + \gamma f_n \left[a_1, \dots, a_r, b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-1}}, y_n \right]$$

luego este elemento pertenece al ideal de B:

$$\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-1}-b_{i_1\dots i_{n-1}},f_n(a_1,\dots,a_r,b_{i_1},\dots,b_{i_1\dots i_{n-1}},y_n)\right)B=$$

$$=\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-1}-b_{i_1\dots i_{n-1}},f_n(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-1},y_n)\right)B=$$

$$=\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-1}-b_{i_1\dots i_{n-1}}\right)B$$

donde la última igualdad sigue de ser $f_n(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots, y_{n-1},y_n) = 0$ una de las condiciones de definición de B sobre A. Por tanto, z pertenece al ideal (7), que resulta así ser igual al ideal (6).

Como ello es cierto para cualesquiera $i_1,\dots,i_{n-1}$, se tendrá

$$\bigcap_{i_1=1}^{N_1}\cdots\bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}}\bigcap_{i_n=1}^{N_n}\mathfrak{p}^*_{i_1\dots i_{n-1}i_n} = \bigcap_{i_1=1}^{N_1}\cdots\bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}}\mathfrak{p}^*_{i_1\dots i_{n-1}}$$

Análogamente, suponiendo que $i_1,\dots,i_{n-2}$ son números fijos y considerando el ideal intersección

$$I_{i_1 i_2\dots i_{n-2}} = \bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}}\mathfrak{p}^*_{i_1 i_2\dots i_{n-2}i_{n-1}}$$

se prueba que este ideal es igual al ideal

$$\mathfrak{p}^*_{i_1\dots i_{n-2}} = \left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-2}-b_{i_1\dots i_{n-2}}\right)B$$

para lo cual se tiene en cuenta la igualdad de ideales:

$$\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-2}-b_{i_1\dots i_{n-2}},f_{n-1}(a_1,\dots,a_r,b_{i_1},\dots,b_{i_{n-2}},y_{n-1})\right)B=$$

$$=\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-2}-b_{i_{n-2}},f_{n-1}(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-2},y_{n-1})\right)B=$$

$$=\left(x_1-a_1,\dots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\dots,y_{n-2}-b_{i_{n-2}}\right)B$$

donde la última igualdad sigue de ser $f_{n-1}(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots, y_{n-2},y_{n-1}) = 0$ una de las condiciones de definición de B sobre A . Se llega así a

$$\bigcap_{i_1=1}^{N_1}\cdots\bigcap_{i_{n-2}=1}^{N_{n-2}}\bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}}\mathfrak{p}^*_{i_1\dots i_{n-2}i_{n-1}} = \bigcap_{i_1=1}^{N_1}\cdots\bigcap_{i_{n-2}=1}^{N_{n-2}}\mathfrak{p}^*_{i_1\dots i_{n-2}}$$

Reiterando el proceso, se llegará a la igualdad

$$\bigcap_{i_1=1}^{N_1} \cdots \bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}} \bigcap_{i_n=1}^{N_n} \mathfrak{p}^*_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} = \bigcap_{i_1=1}^{N_1} \cdots \bigcap_{i_h=1}^{N_h} \mathfrak{p}^*_{i_1 \ldots i_h}$$

para cualquier $h \leq n$, donde

$$\mathfrak{p}^*_{i_1 \ldots i_h} = \left(x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r,y_1-b_{i_1},\ldots,y_h-b_{i_1\ldots i_h}\right)B$$

y finalmente a

$$\bigcap_{i_1=1}^{N_1} \cdots \bigcap_{i_{n-1}=1}^{N_{n-1}} \bigcap_{i_n=1}^{N_n} \mathfrak{p}^*_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} = (x_1-a_1,\ldots,x_r-a_r)B = \mathfrak{p}_0 B$$

En consecuencia, $\mathfrak{p}_0 B$ es radical (por ser intersección de primos), lo que, por ser B entero sobre A, de acuerdo con 2.3.7, implica

$$\mathfrak{p}_0 \not\supset \mathrm{ram}_1 A \qquad (10)$$

Por tanto, si el ideal $\mathfrak{p} \in$ Spec A es intersección completa y $(a_1,\ldots,a_r) \in k^r$ pertenece a la subvariedad de $\mathfrak{p}$, lo que implica $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}$, de (10) se deduce, de acuerdo con 4.1.5, que el ideal $\mathfrak{p}B$ es radical. ∎

4.2.5 Ejemplo.- Sean $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y_1,y_2]$ con las condiciones: $f_1(x_1,x_2,y_1) = 0$, $f_2(x_1,x_2,y_1,y_2) = 0$, siendo

$$f_1(x_1,x_2,Y_1) = Y_1^2-x_1$$

$$f_2(x_1,x_2,Y_1,Y_2) = Y_2^3+4Y_1Y_2^2-2x_1Y_2^2-6Y_1Y_2+5x_2Y_2+2Y_1-2x_1-2x_2$$

con lo cual $A \hookrightarrow B$ es una extensión multisimple y entera.

Sea $\mathfrak{p}$ el ideal principal generado por el elemento irreducible x_1-x_2 del DFU A , es decir, el ideal $\mathfrak{p} = (x_1-x_2)A$, que será pues primo de altura uno, y en consecuencia intersección completa. Para el punto $(a_1,a_2) = (1,1)$ de la subvariedad de $\mathfrak{p}$, se verifican:

i) el polinomio $f_1(1,1,Y_1) = Y_1^2-1$ se factoriza: $(Y_1-1)(Y_1+1)$

ii) si en el polinomio $f_2(x_1,x_2,Y_1,Y_2)$ se toma $x_1=1=x_2=Y_1$, resulta $f_2(1,1,1,Y_2) = Y_2^3+2Y_2^2-Y_2-2 \in \mathbb{R}[Y_2]$, que se factoriza: $(Y_2+1)(Y_2-1)(Y_2+2)$, y si en $f_2(x_1,x_2,Y_1,Y_2)$ se toma $x_1 = 1 = x_2$, $Y_1 = -1$, resulta $f_2(1,1,-1,Y_2) = Y_2^3-6Y_2^2+11Y_2-6$, que se factoriza: $(Y_2-1)(Y_2-2)(Y_2-3)$

luego, de acuerdo con lo indicado en la demostración de 4.2.4, el ideal extendido de $\mathfrak{p}_0 = (x_1-1,x_2-1)A$ en B admitirá la descomposición

$$\mathfrak{p}_0 B = \mathfrak{p}_{11}^* \cap \mathfrak{p}_{12}^* \cap \mathfrak{p}_{13}^* \cap \mathfrak{p}_{21}^* \cap \mathfrak{p}_{22}^* \cap \mathfrak{p}_{23}^*$$

siendo

$$\mathfrak{p}_{11}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1-1, y_2+1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_{12}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1-1, y_2-1)B$$

$$\mathfrak{p}_{13}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1-1, y_2+2)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_{21}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1+1, y_2-1)B$$

$$\mathfrak{p}_{22}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1+1, y_2-2)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_{23}^* = (x_1-1, x_2-1, y_1+1, y_2-3)B$$

Por tanto, según el teorema 4.2.4, el ideal extendido de $\mathfrak{p} = (x_1-x_2)A$ no se ramificará en $A \hookrightarrow B$, es decir, el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ será radical. En efecto,

$$\mathfrak{p}B = (x_1-x_2)B = \left[x_1-x_2 \ , \ f_1(x_1,x_2,y_1) \ , \ f_2(x_1,x_2,y_1,y_2)\right]B =$$

$$= (x_1-x_2 \ , \ y_1^2-x_1 \ , \ y_2^3+4y_1y_2^2-2x_1y_2^2-6y_1y_2+5x_2y_2+2y_1-2x_1-2x_2)B =$$

$$= (x_1-x_2 \ , \ y_1^2-x_1 \ , \ \omega(y_1 \ , \ y_2))B$$

donde

$$\omega(y_1,y_2) = y_2^3 + 2(2y_1-y_1^2)y_2^2 + (5y_1^2-6y_1)y_2 - 2(2y_1^2-y_1)$$

luego

$$B/\mathfrak{p}B \simeq \mathbb{R}[x,y_1,y_2] \ / \ \left[y_1^2-x \ , \ \omega(y_1,y_2)\right] \simeq \mathbb{R}[y_1,y_2]/(\omega(y_1,y_2))$$

Ahora bien, $\omega(y_1,y_2)$ es un polinomio irreducible del DFU $\mathbb{R}[y_1][Y_2]$, según resulta de aplicar el criterio de Eisenstein, ya que y_1 es elemento irreducible del DFU $\mathbb{R}[y_1]$. Por tanto, el anillo cociente $B/\mathfrak{p}B$ es dominio, y en consecuencia el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ es primo, luego $\mathfrak{p}B$ es radical, como predecía el teorema 4.2.4 .

Nota.- Observemos que para aplicar el teorema 4.2.4 al ideal $\mathfrak{p} = (x_1-x_2)A$, en el ejemplo anterior, no es preciso hallar las raíces de los polinomios $f_2(1,1,1,Y_2)$ y $f_2(1,1,-1,Y_2)$, bastando verificar que ambos tienen tres raíces reales (distintas, dos a dos), para lo que puede utilizarse, por ejemplo, el teorema de Sturm.

4.3 Criterios para extensiones algebraicas

En los dos apartados precedentes se ha supuesto B entero sobre A. Si se omite esta condición de la hipótesis, no es seguro que aquellos resultados conserven su validez. Así, por ejemplo, si en el teorema 4.1.2 se prescinde de la condición de ser B entero sobre A , las restantes condiciones de su hipótesis no permiten asegurar la no-ramificación de primos del subanillo A , según muestra el siguiente:

Contraejemplo.- Siendo $A = k[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$ con la condición $x_1^2y-x_2 = 0$, resulta $J_y = (x_1^2)$ y $J_{xy} = (2x_1y,-1,x_1^2)$, luego

$$\mathrm{ram}_1B = (x_1^2)B = (x_1^2,x_2)B \quad ; \quad \mathrm{sing}\ B = B$$

$$\mathrm{ram}_1A = (x_1^2,x_2)A \quad ; \quad \mathrm{sing}\ A = A$$

Para el primo intersección completa $\mathfrak{p} = (x_2)A$, se tiene

$$\mathfrak{p}B = (x_2)B = (x_2,x_1^2y)B = \mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^* \qquad (1)$$

donde

$$\mathfrak{q}_1^* = (x_2,x_1^2)B = (x_1^2)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_2,y)B = (y)B$$

luego $\mathfrak{p}_1^* = \sqrt{\mathfrak{q}_1^*} = (x_1)B$ y $\mathfrak{p}_2^*$ son los primos minimales de $\mathfrak{p}B$, por lo que (1) es descomposición primaria irredundante de $\mathfrak{p}B$. Como $\mathfrak{q}_1^* \neq \sqrt{\mathfrak{q}_1^*} = \mathfrak{p}_1^*$, el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ no es radical y, sin embargo, es claro que $\mathfrak{p} + \mathrm{sing}\ A = A$ y $\mathfrak{p} \not\supset \mathrm{ram}_1A$. ■

En el contraejemplo anterior, la causa de la ramificación de $\mathfrak{p}$ en la extensión $A \hookrightarrow B$ puede atribuirse al hecho de que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ pasa por el punto $\{x_1 = 0 = x_2\}$, a que se reduce la subvariedad del ideal ram_1A . Ello sugiere que, al prescindir de la condición de dependencia entera, se exija que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no tenga puntos en común con la subvariedad de ramificación contraída, R_1 , para lo que bastará imponer la condición: $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1A = A$.

4.3.1 Teorema.- *Supongamos* k *algebraicamente cerrado y sea* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A$. *Si* $\mathfrak{p}$ *es intersección completa y* $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1A = A$, *entonces* $\mathfrak{p}$ *no se ramifica en* $A \hookrightarrow B$, *es decir, el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

Demostración.- Consideremos una descomposición primaria irredundante del ideal extendido $\mathfrak{p}B$ y sea $\mathfrak{q}^*$ uno de los componentes primarios de esa descomposición y $\mathfrak{p}^* = \sqrt{\mathfrak{q}^*}$ su primo asociado.

Si $\mathfrak{p}$ es comaximal con $\text{ram}_1 A$, es decir, si se verifica

$$\mathfrak{p} + \text{ram}_1 A = A \qquad (1)$$

entonces

$$\text{ord.ram}\ \mathfrak{p}^* = 0 \qquad (2)$$

ya que, si tal orden de ramificación fuera mayor que cero, de acuerdo con 2.1.5, se tendría: $\text{ram}_1 B \subseteq \mathfrak{p}^*$, luego

$$\text{ram}_1 A = (\text{ram}_1 B) \cap A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A \qquad (3)$$

pero, por otra parte, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$ implica $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, lo que, junto con (3), implica $\mathfrak{p} + \text{ram}_1 A \subseteq \mathfrak{p}^* \cap A$, en contradicción con (1).

Según 2.1.5 , de (2) se deduce: $\text{ram}_1 B \not\subset \mathfrak{p}^*$, luego $\mathfrak{p}^* \subsetneq \mathfrak{p}^* + \text{ram}_1 B$, lo que, por ser $\mathfrak{p}^*$ primo y ser k algebraicamente cerrado, implica que la subvariedad de $\mathfrak{p}^*$ contenga estrictamente a la de $\mathfrak{p}^* + \text{ram}_1 B$. Ello asegura la existencia de un punto perteneciente a la subvariedad de $\mathfrak{p}^*$ y que no pertenezca a la de $\mathfrak{p}^* + \text{ram}_1 B$. En consecuencia, para el ideal $\mathfrak{p}_0^*$, de dicho punto, se verificará: $\mathfrak{p}_0^* \supseteq \mathfrak{p}^*$ y $\mathfrak{p}_0^* \not\supset \text{ram}_1 B$, lo cual, de acuerdo con con 2.1.5, implica

$$\text{ord.ram}\ \mathfrak{p}_0^* = 0 \qquad (4)$$

Por ser $\mathfrak{p}^*$ un ideal primo asociado de $\mathfrak{p}B$, contendrá a algún primo minimal, $\mathfrak{p}_1^*$, de $\mathfrak{p}B$, para el cual se tendrá $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$ y por tanto

$$\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_0^* \qquad (5)$$

y por ser $\mathfrak{p}$ intersección completa y verificarse (4), según 3.3.2, resulta

$$\mathfrak{p}_1^* \cap A = \mathfrak{p} \qquad (6)$$

y ahora, de acuerdo con 3.1.3, se tiene: $\text{alt}\ \mathfrak{p}_1^* = \text{alt}\ \mathfrak{p}$.

Es claro que este razonamiento es válido para todo primo minimal del ideal extendido $\mathfrak{p}B$ (sin más que elegir, para cada uno de ellos, un maximal que lo contenga), luego la altura de tales primos minimales es la de $\mathfrak{p}$ y por tanto $\text{alt}\ \mathfrak{p}B = \text{alt}\ \mathfrak{p}$.

En consecuencia, pasando al anillo local $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ y recordando (5), se sigue que la altura del ideal extendido $(\mathfrak{p}B)\vartheta_0^*$ será también la misma de $\mathfrak{p}$, es decir,

$$\text{alt } \mathfrak{p}\vartheta_0^* = \text{alt } \mathfrak{p} \qquad (7)$$

Por otra parte, toda base del ideal $\mathfrak{p}$ genera al ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, luego $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ será intersección completa, por serlo $\mathfrak{p}$ y verificarse (7).

Ahora bien, de acuerdo con 1.2.9, de (4) se deduce que $\vartheta_0^* = B_{\mathfrak{p}_0^*}$ es anillo local regular y por tanto Cohen-Macaulay, luego el ideal intersección completa $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ es no mezclado, y por tanto no posee primos sumergidos.

Puesto que $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}_0^*$, el ideal extendido $\mathfrak{q}^*\vartheta_0^*$ será componente primario del ideal $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, luego, por ser $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$ no mezclado, $\mathfrak{q}^*\vartheta_0^*$ será componente primario aislado de $\mathfrak{p}\vartheta_0^*$, y por tanto, su contraído en B, el ideal $\mathfrak{q}^*\vartheta_0^* \cap B = \mathfrak{q}^*$ será componente primario aislado de $\mathfrak{p}B$.

Por tanto, $\mathfrak{p}^*$ es un primo aislado de $\mathfrak{p}B$, lo cual, teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}_1^*$ era un primo minimal de $\mathfrak{p}B$ contenido en $\mathfrak{p}^*$, implica: $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1^*$, lo que recordando (6) implica: $\mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$.

Ahora pasando al anillo local $\vartheta^* = B_{\mathfrak{p}^*}$, de acuerdo con 1.4.2, de (2) se deduce que el ideal extendido $\mathfrak{p}\vartheta^*$ es igual al ideal de no-unidades $\mathfrak{p}^*\vartheta^*$. Ahora bien, como $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$, el ideal extendido $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ es componente primario de $\mathfrak{p}\vartheta^*$, luego $\mathfrak{q}^*\vartheta^*$ será primo, por serlo $\mathfrak{p}\vartheta^*$. En consecuencia, su contraido en B, es decir, $\mathfrak{q}^*\vartheta^* \cap B = \mathfrak{q}^*$ también será primo.

Basta ya tener en cuenta que $\mathfrak{q}^*$ era un componente primario arbitrario de $\mathfrak{p}B$, para concluir que $\mathfrak{p}B$ es intersección de primos, y por tanto radical. ∎

<u>Nota</u>.- En el teorema anterior se dan condiciones suficientes para la no-ramificación de $\mathfrak{p}$ en la extensión $A \hookrightarrow B$, pero $\mathfrak{p}B$ puede ser radical, sin que k sea algebraicamente cerrado y sin que se verifique la condición $\mathfrak{p} + \text{ram}_1 A = A$ (que asegura que la subvariedad de $\mathfrak{p}$ no pase por la proyección de puntos de ramificación), según muestra el siguiente:

<u>Contraejemplo</u>.- Siendo $A = \mathbb{R}[x_1,x_2]$ y $B = A[y]$, con la condición $x_1y-x_2 = 0$, resulta $J_y = (x_1)$, luego

$$\text{ram}_1 B = (x_1)B = (x_1,x_2)B \quad ; \quad \text{ram}_1 A = (x_1,x_2)A$$

y para el primo intersección completa $\mathfrak{p}=(x_2)A$, se tiene

$$\mathfrak{p}B = (x_2)B = (x_2,x_1y)B = \mathfrak{p}_1^* \cap \mathfrak{p}_2^* \qquad (1)$$

donde

$$\mathfrak{p}_1^* = (x_2,x_1)B = (x_1)B \quad ; \quad \mathfrak{p}_2^* = (x_2,y)B = (y)B$$

Como estos dos ideales son primos, el ideal $\mathfrak{p}B$ es radical. Sin embargo, $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{ram}_1 A$, luego $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1 A \neq A$, siendo además el cuerpo base, $\mathbb{R}$, no algebraicamente cerrado.

4.3.2 Corolario.- *Supongamos el cuerpo base,* k, *algebraicamente cerrado. Si* $\mathrm{ram}_1 A = A$, *entonces para todo primo,* $\mathfrak{p}$, *intersección completa, del subanillo* A , *el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es radical.*

Demostración.- Si $\mathrm{ram}_1 A = A$, entonces para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, será $\mathfrak{p} + \mathrm{ram}_1 A = A$, con lo cual ya se sigue de 4.3.1. ■

Nota.- En el enunciado del corolario anterior, se admite como radical al anillo, considerado como ideal de sí mismo, ya que, si $\mathrm{ram}_1 A = A$, puede resultar $\mathfrak{p}B = B$, como sucede para el primo $\mathfrak{p}$, considerado en el siguiente ejemplo.

4.3.3 Ejemplo.- Siendo $A = k[x_1,x_2,x_3]$ y $B = A[y]$ con la condición $(x_1^2+x_2^2)y-1 = 0$, resulta $J_y = (x_1^2+x_2^2)$, luego

$$\mathrm{ram}_1 B = (x_1^2+x_2^2)B = (x_1^2+x_2^2,1)B = B \quad ; \quad \mathrm{ram}_1 A = A$$

y por tanto, según 4.3.2, cualquier primo intersección completa del subanillo A, no se ramifica al extenderlo al anillo B .

Así, para el primo $\mathfrak{p}_1 = (x_1^2+x_2^2-r^2)A$, donde $r \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\mathfrak{p}_1 B = (x_1^2+x_2^2-r^2)B = (x_1^2+x_2^2-r^2,y-1/r^2)B$$

siendo $\mathfrak{p}_1 B$ primo, por ser contraído de $\mathfrak{p}_1$ en el A-epimorfismo $g:B \longrightarrow A$, tal que $g(y) = 1/r^2$, luego $\mathfrak{p}_1$ no se ramifica. Análogamente, para el primo $\mathfrak{p}_2 = (x_1)A$, cuya subvariedad pasa por la proyección del punto asintótico $\{x_1 = 0 = x_2\}$, se tiene:

$$\mathfrak{p}_2 B = (x_1)B = (x_1,x_2^2y-1)B$$

pero, por ser x_2^2y-1 elemento irreducible del anillo de polinomios $A_2 = k[x_2,x_3,y]$, el ideal $(x_2^2y-1)A_2$ es primo, luego también será primo su contraído en el A_2-epimorfismo $g_2 : k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \longrightarrow A_2$ tal que $g_2(x_1) = 0$, es decir, el ideal $\pi_2 = (x_1,x_2^2y-1)$ del anillo de polinomios $k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$. Ahora bien, el epimorfismo natural $\mathbf{f} : k[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \longrightarrow B$, definido en 1.0, tiene por núcleo (en nuestro ejemplo) el ideal

$$\ker \mathbf{f} = ((x_1^2+x_2^2)y-1)k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$$

que está contenido en π_2 , luego $\mathfrak{p}_2 B = \mathbf{f}(\pi_2)$ será primo, por serlo π_2 . Por tanto, $\mathfrak{p}_2$ no se ramifica en $A \hookrightarrow B$.

Finalmente, para el primo de altura dos $\mathfrak{p} = (x_1,x_2)A$, se tiene:

$$\mathfrak{p}B = (x_1,x_2)B = (x_1,x_2,(x_1^2+x_2^2)y-1)B = (x_1,x_2,1)B = B$$

de acuerdo con lo indicado en la nota de 4.3.2 .

4.4 Ramificación en extensiones trascendentes

Sean B un dominio de integridad y A_0 un subanillo de B , tales que B sea extensión trascendente de A_0 y $\{t_1,...,t_d\}$ una base trascendente de B sobre A_0 . La consideración del anillo de polinomios

$$A = A_0[t_1,...,t_d]$$

permite descomponer la extensión $A_0 \hookrightarrow B$ en una extensión trascendente pura seguida de una extensión algebraica, de acuerdo con el siguiente diagrama conmutativo (donde todos los morfismos son de inclusión):

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & B \\ & A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, las extensiones trascendentes puras conservan el carácter de primo, por lo que es sólo la extensión algebraica $A \hookrightarrow B$ la responsable de la ramificación en $A_0 \hookrightarrow B$. La conservación del carácter de primo en extensiones trascendentes puras, es un resultado conocido, del cual se ofrece a continuación una demostración, que creemos original. También probaremos la conservación del carácter de primario en tales extensiones.

4.4.1 <u>Lema</u>.- *Sean* A *un anillo noetheriano,* B = A[t] *con B trascendente sobre* A , $\mathfrak{a}$ *un ideal de* A *y* $\mathfrak{a}B$ *su extendido en* $A \hookrightarrow B$. *Para el polinomio* $f(t) = \alpha_0+\alpha_1 t+...+\alpha_n t^n \in B$ *(donde* $\alpha_i \in A$) *se verifica:* $f(t) \in \mathfrak{a}B$ si y sólo si $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathfrak{a}$.

<u>Demostración</u>.- Por ser A noetheriano, podemos suponer $\mathfrak{a} = (e_1,...,e_z)A$, donde $e_i \in A$; $i=1,...,z$. Si $f(t) \in \mathfrak{a}B$, habrá de ser

$$f(t) = \sum_{i=1}^{z} b_i e_i \qquad (1)$$

donde $b_1,...,b_z \in B = A[t]$, y por tanto

$$b_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} t^j \quad ; \quad a_{ij} \in A \ , \ r_i \in \mathbb{N} \quad ; \quad i=1,...,z$$

luego designando $r = \text{máx}\{r_1,...,r_z\}$, podemos escribir

$$b_i = \sum_{j=0}^{r} a_{ij} t^j$$

sin mas que tomar los coeficientes a_{ij} nulos, si $j > r_i$. De este modo, de (1) resulta

$$f(t) = \sum_{i=1}^{z} \left[\sum_{j=0}^{r} a_{ij} t^j \right] e_i = \sum_{j=0}^{r} \left[\sum_{i=1}^{z} a_{ij} e_i \right] t^j$$

luego notando

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{z} a_{ij} e_i \quad ; \quad j=0,\dots,r \qquad (2)$$

queda

$$f(t) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j t^j$$

siendo $\alpha_0,\dots,\alpha_r \in \mathfrak{a}$, según sigue de (2). Recíprocamente, si $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathfrak{a}$, es claro que $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \in \mathfrak{a}B$ ■

4.4.2 Lema.- *Sean* A *un anillo noetheriano y* $B = A[t]$ *con* t *trascendente sobre* A . *Si* $\mathfrak{p}$ *es un ideal primo de* A , *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{p}B$ *es primo también.*

Demostración.- Si $g(t)$ y $h(t)$ pertenecen a $B = A[t]$, entonces pueden escribirse en al forma

$$g(t) = \sum_{i=0}^{r} a_i t^i \quad , \quad h(t) = \sum_{j=0}^{s} a'_j t^j$$

donde $a_i, a'_j \in A$, siendo su producto

$$g(t)h(t) = \sum_{l=0}^{r+s} a''_l t^l \quad ; \quad a''_l = \sum_{i+j=l} a_i a'_j \quad ; \quad l=0,\dots,r+s$$

Supongamos $\mathfrak{p}$ primo. Para demostrar que entonces $\mathfrak{p}B$ es primo, bastará probar la implicación:

$$\Big([\, g(t)h(t) \in \mathfrak{p}B \,] \wedge [\, g(t) \notin \mathfrak{p}B \,] \Big) \Rightarrow [\, h(t) \in \mathfrak{p}B \,]$$

lo que, de acuerdo con el lema 4.4.1, es equivalente a probar la implicación:

$$\Big([a''_l \in \mathfrak{p} \; ; \; l=0,\dots,r+s] \wedge [\exists m \in \{0,\dots,r\} \, , \, a_m \notin \mathfrak{p}] \Big) \Rightarrow [a'_j \in \mathfrak{p} \; ; \; j=0,\dots,s]$$

Para ello, supongamos que es m el menor natural, tal que $a_m \notin \mathfrak{p}$, y por tanto

$$a_0 a'_m + a_1 a'_{m-1} + \dots + a_{m-1} a'_1 + a_m a'_0 = a''_m \in \mathfrak{p} \quad ; \quad a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathfrak{p}$$

luego $a_m a'_0 \in \mathfrak{p}$, pero $a_m \notin \mathfrak{p}$, lo cual, por ser $\mathfrak{p}$ primo, implica: $a'_0 \in \mathfrak{p}$. Ahora

$$a_0 a'_{m+1} + a_1 a'_m + \ldots + a_m a'_1 + a_{m+1} a'_0 = a''_{m+1} \in \mathfrak{p} \quad ; \quad a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a'_0 \in \mathfrak{p}$$

implican: $a_m a'_1 \in \mathfrak{p}$, pero $a_m \notin \mathfrak{p}$, luego $a'_1 \in \mathfrak{p}$. Reiterando el razonamiento, resultará: $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_s \in \mathfrak{p}$ ∎

4.4.3 Lema.- *Sean* A *un anillo noetheriano y* B = A[t] *con* t *trascendente sobre* A. *Si* $\mathfrak{q}$ *es un ideal primario de* A , *entonces el ideal extendido* $\mathfrak{q}$B *es primario también.*

Demostración.- Sean g(t) y h(t) elementos de B = A[t] , definidos como al comienzo de la demostración del lema 4.4.2. Supongamos $\mathfrak{q}$ primario. Para demostrar que entonces $\mathfrak{q}$B es primario, bastará probar la implicación:

$$\Big\{ [\, g(t)h(t) \in \mathfrak{q}B \,] \;\wedge\; [\, g(t) \notin \mathfrak{q}B \,] \Big\} \Rightarrow [\, h(t) \in \sqrt{\mathfrak{p}B} \,]$$

Para ello, supongamos que g(t) $\notin$ $\mathfrak{q}$B , lo que, de acuerdo con 4.4.1, permite asegurar la existencia de un natural $m \le r$, tal que $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathfrak{q}$ y $a_m \notin \mathfrak{q}$, lo cual implica

$$g^*(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \in \mathfrak{q}B$$

y por tanto

$$g''(t) = g(t) - g^*(t) = \sum_{i=m}^{r} a_i t^i \notin \mathfrak{q}B \qquad (1)$$

ya que, si fuera $g''(t) \in \mathfrak{q}B$, se tendría: $g(t) = g^*(t) + g''(t) \in \mathfrak{q}B$, en contradicción con la hipótesis de que $g(t) \notin \mathfrak{q}B$. Por otra parte, si $g(t)h(t) \in \mathfrak{q}B$, entonces

$$g''(t)h(t) = [g(t) - g^*(t)]h(t) = g(t)h(t) - g^*(t)h(t) \in \mathfrak{q}B \qquad (2)$$

siendo

$$g''(t)h(t) = a_m a'_0 t^m + \{\text{términos de grado} > m \text{ en } t\} \in \mathfrak{q}B$$

lo que, según 4.4.1, implica: $a_m a'_0 \in \mathfrak{q}$, y por ser $\mathfrak{q}$ primario, se tiene:

$$\Big\{ [\, a_m a'_0 \in \mathfrak{q} \,] \;\wedge\; [\, a_m \notin \mathfrak{q} \,] \Big\} \Rightarrow [\, a'_0 \in \sqrt{\mathfrak{q}} \,]$$

Vamos a terminar de probar que

$$a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}, a'_n, \ldots, a'_s \in \sqrt{\mathfrak{q}} \qquad (3)$$

por inducción sobre n . Para ello supondremos que $a'_0, \ldots, a'_{n-1} \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ y vamos a probar que entonces también $a'_n \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. En efecto, se tiene

$$h^*(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a'_j t^j \in \sqrt{\mathfrak{q}}B \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}B}$$

luego existe un natural, e , tal que

$$[h^*(t)]^e \in \mathfrak{q}B \qquad (4)$$

y, en consecuencia, considerando el elemento de B

$$h''(t) = h(t) - h^*(t) = \sum_{j=n}^{s} a'_j t^j \qquad (5)$$

se tiene

$$g''(t)[h''(t)]^e = g''(t)[h(t) - h^*(t)]^e = g''(t)\left[\sum_{l=0}^{e} \binom{e}{l} [h(t)]^l[-h^*(t)]^{e-l}\right]$$

lo que, teniendo en cuenta (2) y (4), implica

$$g''(t)[h''(t)]^e \in \mathfrak{q}B \qquad (6)$$

pero, recordando (1) y (5), se tiene

$$g''(t)[h''(t)]^e = a_m(a'_n)^e t^{m+ne} + \{\text{términos de grado mayor que } m+ne \text{ en } t\}$$

luego, de acuerdo con 4.4.1, de (6) se deduce $a_m(a'_n)^e \in \mathfrak{q}$, pero a_m no pertenecía al ideal primario $\mathfrak{q}$, luego alguna potencia de $(a'_n)^e$ pertenecerá a $\mathfrak{q}$ y, en consecuencia, $a'_n \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. Queda así probado (3), lo que, de acuerdo con 4.4.1, implica

$$h(t) = \sum_{j=0}^{s} a'_j t^j \in \sqrt{\mathfrak{q}}B \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}B}$$

con lo que concluye la demostración. ∎

4.4.4 Teorema.- *Sea* A *un anillo noetheriano y* $B = A[t_1,..,t_d]$ *siendo* $t_1,...,t_d$ *indeterminadas independientes sobre* A . *Sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal del anillo* A *y* $\mathfrak{a}B$ *su extendido en el anillo de polinomios* B . *En estas condiciones, se verifican:*

i) si $\mathfrak{a}$ *es primo, entonces* $\mathfrak{a}B$ *es también primo*

ii) si $\mathfrak{a}$ *es primario, entonces* $\mathfrak{a}B$ *es también primario*

Demostración.- Notando $A_i = A[t_1,...,t_i]$; $i=,...,d$, basta tener en cuenta que $A_{i-1}[t_i] \simeq A_i$; $i=1,...,d$, donde $A_0 = A$, y hacer uso de los dos lemas precedentes, aplicando inducción sobre i . ∎

4.4.5 Consecuencia.- Sean $A_0 = k[x_1,...,x_e]$ un anillo de polinomios sobre el cuerpo k y B una k-álgebra afín finitamente generada, que sea dominio de integridad de dimensión r . Si A_0 es subanillo de B , entonces $r \geq e$, luego existen $x_{e+1},...,x_r \in B$, algebraicamente independientes sobre A_0 , tales que B sea extensión algebraica (finita) de

$$A = A_0[x_{e+1},...,x_r] \simeq k[x_1,...,x_e,x_{e+1},...,x_r]$$

y, en consecuencia, existen $y_1,...,y_n \in B$, tales que $B = A[y_1,...,y_n]$, lo cual permite factorizar la extensión trascendente $A_0 \hookrightarrow B$ en una extensión trascendente pura y otra algebraica:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ahora para estudiar la ramificación de $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec} A_0$ en $A_0 \hookrightarrow B$, podemos comenzar pasando al ideal extendido $\mathfrak{p}_0 A$ en el anillo A (que será primo, de acuerdo con el teorema anterior), para pasar, a continuación, al extendido de este último ideal en $A \hookrightarrow B$, es decir, al ideal $(\mathfrak{p}_0 A)B = \mathfrak{p}_0 B$. De este modo, el estudio de la ramificación, al extender desde un anillo de polinomios, A_0 , hasta una A_0-álgebra finitamente generada, se reduce al caso en que la extensión sea algebraica.

APENDICE.

Automatización de algunos cálculos

A.1 Rango de matrices con elementos pertenecientes a una k-algebra por reducción a matriz escalonada

El cálculo del rango de matrices , cuyos elementos pertenecen a una k-álgebra finitamente generada, puede resultar bastante laborioso, por lo que tiene interés utilizar métodos de cálculo que minimicen el número de operaciones (y, en particular, de productos) a efectuar con sus elementos.

El algoritmo que proponemos a tal efecto, trata de reducir la matriz dada a una matriz "escalonada", esto es, a una matriz en la que sea posible trazar una escalera (descendente, de izquierda a derecha), como en la siguiente matriz, cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & x & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x & 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tal que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

i) encima del primer escalón (de izquierda a derecha) habrá, a lo más, un elemento, que ha de ser no nulo

ii) al pasar de cada columna de la matriz, a la siguiente (siempre de izquierda a derecha), la escalera bajará un peldaño syss el elemento que ha de descansar sobre el nuevo peldaño es no nulo; en otro caso, no se bajará ese peldaño (es decir, se tendrá un rellano en la escalera)

iii) debajo de la escalera sólo habrá ceros

Formalicemos, notando z_j al número de elementos de la columna j , que quedan encima de la escalera.

A.1.1 Definición.- *Diremos que una matriz* A = (a_{ij}), *de dimensiones* $m\times n$, *cuyos elementos pertenecen a una* k-*álgebra finitamente generada,* B, *es* **escalonada** , *si existen* $n+1$ *naturales,* $z_0,z_1,\ldots,z_n$, *verificando las tres condiciones:*

1) $z_0 = 0$

2) si existe $a_{z_j+1,j+1}$ *y es no nulo, entonces* $z_{j+1} = 1+z_j$;

en otro caso $z_{j+1} = z_j$;

3) para todo $i > z_j$, $a_{ij} = 0$

Notaremos z(A) *al natural* z_n , *siendo* n *el número de columnas de* **A** .

A.1.2 <u>Lema</u>.- *Si la matriz* **A** *es escalonada, entonces*

$$\boxed{\text{rango A} = z(A)}$$

<u>Demostración</u>.- Notemos $c_j(A)$ a la columna j-ésima de A. El k-espacio vectorial generado por las columnas de A, es claro que admite por base al subconjunto de vectores columna:

$$\{\ c_j(A)\ |\ 1 \leq j \leq n\ ;\ z_j > z_{j-1}\ \}$$

siendo el número de tales vectores columna

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - z_{j-1}) = z_n - z_0 = z_n$$

luego: rango A = z_n = z(A) ∎

Dada una matriz A = (a_{ij}), de dimensiones mxn y elementos pertenecientes a la k-álgebra B , trataremos de construir una matriz escalonada de las mismas dimensiones y rango que la matriz A .

A.1.3 <u>Definición</u>.- *Si* A *es una matriz de dimensiones* mxn , *tal que la submatriz de sus* j *primeras columnas* ($0 \leq j \leq n$) , *la cual notaremos* $A^{(j)}$, *sea escalonada, entonces diremos que* A *es una* **matriz j-preescalonada**.

En consecuencia, si A es n-preescalonada, entonces es escalonada. Además, cualquier matriz A será 0-preescalonada.

La siguiente construcción permite pasar de una matriz j-preescalonada a otra (j+1)-preescalonada, de las mismas dimensiones y rango, lo cual, reiterando el proceso, permitirá resolver el problema propuesto inmediatamente antes de la definición A.1.3 .

A.1.4 Definición-lema.- *Dada una matriz* j-*preescalonada,* A *, de* m *filas, notaremos* $p_j(A)$ *a la matriz resultante de efectuar sobre* A *las operaciones a) y b) siguientes:*

a) determinar, si existe, el menor natural, w *, tal que* $z_j < w \leq m$ *y* $a_{w,j+1} \neq 0$ *(donde* z_j *se refiere a* $A^{(j)}$*); si no existe, entonces* $w=0$.

b) si $w \neq 0$ *, entonces efectuar sucesivamente las operaciones* b_1*) y* b_2*) siguientes:*

b_1) si $w > z_{j+1}$ *, entonces permutar las filas* w *y* z_{j+1}

b_2) para todo $r = z_{j+2},...,m$ *, multiplicar la fila* r *por* $a_{z_j+1,j+1}$ *y restarle la fila* z_j+1 *multiplicada por* $a_{r,j+1}$

La matriz $p_j(A)$*, así construida, es* $(j+1)$-*preescalonada y tiene el mismo rango que* A .

Demostración.-La transformación que hace pasar de A a $p_j(A)$ es composición de las operaciones elementales siguientes:

- permutar dos líneas paralelas
- multiplicar una línea por un elemento no nulo
- sumar a una línea, otra paralela

cada una de las cuales conserva el rango, luego

$$\text{rango } p_j(A) = \text{rango } A$$

Por otra parte, basta tomar

$$z_{j+1} = \begin{cases} 1+z_j \ , \text{ si } w \neq 0 \\ z_j \ , \text{ si } w=0 \end{cases}$$

para que, teniendo en cuenta *b_1)* y *b_2)*, resulte escalonada la matriz $(p_j(A))^{(j+1)}$, de acuerdo con la definición A.1.1, y en consecuencia $p_j(A)$ sea $(j+1)$-preescalonada. ■

A.1.5 Definición-teorema.- *Sea* A *una matriz de dimensiones* $m \times n$ *, cuyos elementos pertenezcan a la* k-*álgebra* B. *Notando*

$$A_0 = A \ , \ A_{j+1} = p_j(A_j) \ ; \ j=0,1,...,n-1 \ , \ p(A) = A_n$$

entonces la matriz $p(A)$ *es escalonada y del mismo rango y dimensiones que* A.

Demostración.- Por inducción sobre j. Por ser A_0 una matriz 0-preescalonada, de acuerdo con A.1.4, $A_1 = p_0(A_0)$ será 1-preescalonada y del mismo rango y dimensiones que A. Suponiendo ahora que A_j es j-preescalonada y del mismo rango y dimensiones que A, según A.1.4, $A_{j+1} = p_j(A_j)$ será $(j+1)$-preescalonada y del mismo rango y dimensiones que A. Finalmente, por ser A_n una matriz n-preescalonada, de n columnas, es escalonada. ■

De acuerdo con la notación precedente, se tiene:

A.1.6 Corolario.- rango A = z(p(A))

Demostración.- Sigue del teorema anterior y de A.1.2 . ■

A fin de aplicar la formalización precedente a calcular el rango de matrices, construimos el siguiente algoritmo.

A.1.7 Algoritmo RANGO(A)

Input: A es una matriz de dimensiones $m \times n$ con elementos de una k-álgebra finitamente generada

Output: RANGO(A) es el rango de la matriz A

(1) determinar los números, m y n, de filas y columnas de A;

(2) hacer $z := 0$;

(3) para $j=1,\dots,n$ hacer

<<(3.1) determinar w , tal que $w := \min\{i \mid z < i \leq m$ y $a_{ij} \neq 0\}$ y si este conjunto es vacío, entonces hacer $w := 0$;

(3.2) si $w \neq 0$, entonces hacer

(3.2.1) $z := z+1$

(3.2.2) si $w \neq z$, entonces permutar las filas w y z

(3.2.3) para $r := z+1$ hasta m hacer

si $a_{rj} \neq 0$, entonces multiplicar la fila r por a_{zj} y restarle la fila z multiplicada por a_{rj} >>;

(4) rango(A) = z

A.1.8 Procedimientos Reduce para el algoritmo RANGO

Los procedimientos que hemos elaborado para implementar el algoritmo RANGO serán denominados: RANGO, RANG, NONUL, PERMU y ANULA.

El procedimiento inicial, RANGO, comienza determinando los números de filas y columnas de la matriz y enviando el control de flujo al procedimiento RANG, que coordina el resto del algoritmo.

El procedimiento NONUL determina el número natural w, considerado en el paso (3.1) del algoritmo. El procedimiento PERMU(h,k) permuta las filas h y k, según requiere el paso (3.2.2), y el procedimiento ANULA(j,e) implementa el paso (3.2.3), anulando los elementos de la columna j, situados por debajo del a_{ej} .

A.1.9 Programa Reduce para el algoritmo RANGO

```
procedure RANGO(A);
  begin
    B:=A;
    m:=first length(B);
    n:=second length(B);
    RANG(B)
  end$

procedure RANG(B);
  begin
    integer j,w,z;
    z:=0;
    A:=B;
    for j:=1:n do
      <<w:=NONUL(j,z+1);
        if w neq 0 then
           <<z:=z+1; PERMU(w,z); ANULA(j,z)>> >>;
    ra:=z; write "rango = ", ra
  end$

procedure NONUL(j,e);
  begin
    integer i;
    i:=e;
    while i<m+1 and A(i,j)=0 do i:=i+1;
    if i<m+1 then return i;
    return 0
  end$

procedure PERMU(h,k);
  begin
    integer j; scalar c;
    if h neq k then
      <<for j:=1:n do <<c:=A(h,j); A(h,j):=A(k,j); A(k,j):=c>> >>
  end$
```

```
procedure ANULA(j,e);
  begin
    integer r,s;
    for r:=e+1:m do
      if A(r,j) neq 0 then
        <<for s:=j+1:n do
            A(r,s):=A(e,j)*A(r,s)-A(r,j)*A(e,s); A(r,j):=0>>
  end$

;end;
```

Nota.- La versión 3.2 de Reduce no dispone de las primitivas FIRST LENGTH ni SECOND LENGTH, por lo que en esta versión el anterior procedimiento RANGO no sería viable, pudiendo sustituirse por los cinco procedimientos:

```
procedure RANGO(A);
  begin
    B:=A;
    n:=NUCOL(B);
    m:=NUFIL(B);
    RANG(B)
  end$

procedure NUFIL(A)$
  symbolic FIL A$

symbolic procedure FIL(A)$
  (length cdr A)$

procedure NUCOL(A)$
  symbolic COL A$

symbolic procedure COL(A)$
  (length cadr A)$
```

Notemos que los procedimientos auxiliares NUFIL y NUCOL utilizan los respectivos procedimientos simbólicos SYMBOLIC FIL y SYMBOLIC COL, que no son procedimientos Reduce, sino Lisp.

A.1.10 Ejecución del programa RANGO

Ante todo, en el mismo directorio de la unidad de disco fijo, en que está instalado Reduce, copiamos el archivo conteniendo el programa precedente, titulandolo, por ejemplo, ESCAL .

Se comienza cargando Reduce, y una vez que empieza la sesión y aparece el prompt 1: , cargamos el archivo ESCAL (escribiendo este nombre precedido de IN y seguido del terminador $ y pulsando Return), en la forma:

```
1: IN ESCAL$ ↵
```

siendo preferible utilizar el terminador $ (mejor que ;), para que al cargar no aparezcan los listados de procedimientos.

Al terminar la carga y aparecer el prompt 2: se introduce la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

cuyo rango se desea calcular, en la forma:

2: P:=MAT((a_{11},...,a_{1n}),...,(a_{n1},...,a_{nn}))$ ↵	(*)

y al aparecer el siguiente prompt, 3: , pedimos que cálcule el rango de P , en la forma:

3: RANGO P$ ↵

y el programa devuelve el rango de P . Notemos que, si se trabaja en Reduce 3.2, antes de introducir la matriz, es preciso declarar la matriz, lo que en el caso de P se haría en la forma:

2: MATRIX P$ ↵

y esta línea precedería a la línea (*), que correspondería al prompt 3:

Si ahora deseamos calcular el rango de la matriz LL, escribimos:

4: LL:=MAT((..,....,..),...,(..,....,..))$ ↵
5: RANGO LL$ ↵

La matriz escalonada en que se transforma la matriz dada (cada vez que se ejecuta el programa RANGO) no es exhibida, en principio, por el programa, pero queda alojada en la variable A, por lo que, para visualizarla, basta ordenar A seguida de punto y coma, es decir,

6: A; ↵

siendo preciso ahora utilizar el terminador ; (en vez de $).

Es conveniente tener en cuenta que el nombre asignado a la matriz, cuyo rango se desea calcular, debe ser distinto de los siguientes:

A, B, C, E, I, J, K, M, N, R, S, W, Z

por ser estas, o bien variables del programa RANGO, o bien palabras reservadas de Reduce, siendo por ello aconsejable designar a las matrices con letras repetidas: AA, BB, ...

Si se desea calcular el rango de varias matrices (AA, BB, CC,...), es práctico guardarlas previamente en otro archivo del mismo directorio en que esté instalado Reduce (con la sintaxis indicada en el paso 4:). Si a este archivo lo hemos titulado, por ejemplo, MATRICES, basta cargarlo (antes de pedir que cálcule el rango de las matrices que contiene) en la forma:

7: IN MATRICES$ ↵

8: RANGO AA$ ↵

9: RANGO BB$ ↵

....

Finalmente, para calcular el rango de la matriz FF, cuyos elementos pertenecen al anillo cociente $\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]/I$, siendo I el ideal generado por los polinomios

$$f_1(x_1,...,x_n),\ f_2(x_1,...,x_n),\ f_3(x_1,...,x_n)$$

se han de declarar las condiciones:

$$f_i(x_1,...,x_n) = 0\ ;\ i{=}1,2,3 \qquad (**)$$

después de introducir esta matriz, es decir, en la forma:

10: FF:=MAT((..,...,..),...,(..,...,..))$ ↵

11: $f_1(x_1,...,x_n)$:=0$ ↵

12: $f_2(x_1,...,x_n)$:=0$ ↵

13: $f_3(x_1,...,x_n)$:=0$ ↵

14: RANGO FF$ ↵

Para sustituir el ideal I por otro, se ha de comenzar anulando las condiciones (**), escribiendo:

15: CLEAR $f_1(x_1,...,x_n),f_2(x_1,...,x_n),f_3(x_1,...,x_n)$$ ↵

A.1.11 Ejemplos.- Supongamos que se desea calcular el rango de la matriz

$$PP = \begin{pmatrix} x^2-y^2 & 1 & 0 \\ 0 & x & x^2-z^2 \\ x-y & y & x-z \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son polinomios del anillo $\mathbb{Z}[x,y,z]$, y después se desea calcular de nuevo el rango de PP, pero ahora suponiendo sus elementos pertenecientes al anillo cociente $\mathbb{Z}[x,y,z]/I$, siendo I el ideal (x-y,y-z), y, finalmente, para el caso en que $I = (x,z)$. Para ejecutar todo ello , se procede del siguiente modo (supuesto ya cargado Reduce):

```
1: IN ESCAL $
2: PP:=MAT((X**2-Y**2,1,0),(0,X,X**2-Z**2),(X-Y,Y,X-Z))$
3: RANGO PP$
rango = 3
4: X-Y:=0$
5: Y-Z:=0$
6: RANGO PP$
rango = 1
7: CLEAR X-Y,Y-Z$
8: X:=0$
9: Z:=0$
10: RANGO PP$
rango = 2
```

y para visualizar la matriz escalonada obtenida en el último cálculo del rango, que se ha efectuado, basta escribir A; y pulsar Return

```
11: A;
MAT(1,1) := - Y^2
MAT(1,2) := 1
MAT(1,3) := 0
MAT(2,1) := 0
MAT(2,2) := -Y*(Y^2 - 1)
MAT(2,3) := 0
MAT(3,1) := 0
MAT(3,2) := 0
MAT(3,3) := 0
```

Finalmente, para calcular el rango de la matriz EE, de dimensiones 5x6 y término general $EE_{ij} = x^i+y^j$, puede procederse así (no olvidando anular las condiciones $x = 0 = z$, anteriormente impuestas):

```
12: CLEAR X,Z$
13: MATRIX EE(5,6)$
14: FOR I:=1:5 DO FOR J:=1:6 DO EE(I,J):=X**I+Y**J$
15: RANGO EE$
rango = 2
```

A.2 Abreviación del cálculo del rango, por reordenación de columnas con ceros terminales

Al tratar de calcular el rango de la siguiente matriz A , se observa que permutando convenientemente sus columnas, se transforma en la matriz **D**, para la cual la ejecución del algoritmo A.1.7 es menos laboriosa que para A .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & x+1 & 0 \\ x & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & x+1 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta observación sugiere que, en aquellas matrices tales que alguna de sus columnas tengan "ceros terminales" (esto es, ceros en elementos finales de la columna), se haga una "preparación", previa a la ejecución del algoritmo A.1.7 . Tal preparación, consistente en reordenar sus columnas, para colocarlas en orden decreciente del número de ceros terminales, es el objetivo del algoritmo indicado tras la siguiente definición.

A.2.1 Definición.- *Siendo* A *una matriz de* m *filas, llamaremos* **número de ceros terminales** *de la columna* j, *y notaremos* c(j), *al natural definido así:*

$$c(j) = \text{máx} \{ s \in \mathbb{N} \mid a_{ij} = 0, \text{ si } i > m-s \}$$

A.2.2 Algoritmo PRE(A)

Input: A es una matriz de dimensiones $m \times n$ con elementos de una k-álgebra

Output: PRE(A) es la matriz resultante de reordenar las columnas de A, en orden decreciente del número de ceros terminales

(1) para $j := 1$ hasta n hacer
    c(j) := número de ceros terminales de la columna j ;
(2) para $j := 1$ hasta n hacer
  (2.1) $w := 1$; $v := 2$;
  (2.2) L: si $c(w) < c(v)$ entonces $w := v$;
  (2.3) $v := v+1$;
  (2.4) si $v := n+1$ entonces $u := w$ y en otro caso goto L ;
  (2.5) $c(u) := -1$;
  (2.6) para $i := 1$ hasta m hacer
    elemento (i,j) de la matriz PRE(A) := elemento (i,u) de A ;

A.2.3 Procedimientos Reduce para los algoritmos PRE y RANGO

Los procedimientos que hemos elaborado para implementar en Reduce los algoritmos A.2.2 y A.1.7 (sucesivamente) serán denominados PRERAN, PRE, LISTCEROS, NUCEROS y MAXCOL (a los que han de añadirse los procedimientos indicados en A.1.8 y A.1.9, excepto RANGO).

El procedimiento inicial, PRERAN, comienza determinando los números de filas y columnas de la matriz y enviando después el control de flujo al procedimiento PRE, que implementa el algoritmo A.2.2, transformando la matriz A en la matriz **D** = PRE(A), para calcular después el rango de esta última, mediante el procedimiento RANG, considerado en A.1.9 .

El procedimiento PRE utiliza los procedimientos auxiliares LISTCEROS , NUCEROS y MAXCOL . El procedimiento NUCEROS(j) determina el natural $c(j)$, de ceros terminales de la columna j , y el procedimiento LISTCEROS crea un "array" para alojar el número de ceros terminales de cada columna: $c(1)$, $c(2)$, ... , $c(n)$. Estos dos últimos procedimientos permiten pues implementar el paso (1) del algoritmo A.2.2 y el procedimiento MAXCOL determina la columna, u , cuyo $c(u)$ es máximo (o el menor u , de entre aquellos para los que es $c(u)$ máximo, si existiera más de uno), es decir, el natural

$$u = \text{mín} \{ w \mid 1 \leq w \leq n \ ; \ \forall v \in \{1,\dots,n\} \ , \ c(w) \geq c(v) \}$$

cambiando posteriormente $c(u) = -1$, para no ser considerada la columna u en la siguiente ejecución de este procedimiento (pasos (2.1) a (2.5) del algoritmo).

Finalmente, el procedimiento PRE, que coordina todo el proceso de reordenación de columnas de la matriz, en orden decreciente de ceros terminales, acaba con la implementación del paso (2.6) del algoritmo.

El programa que implementa ambos algoritmos, PRE y RANGO, será denominado PRERAN .

A.2.4 Programa Reduce para los algoritmos PRE y RANGO

```
procedure PRERAN(A);
  begin
    B:=A;
    m:=first length(B);
    n:=second length(B);
    PRE(B);
    RANG(D)
  end$
```

```
procedure PRE(B);
  begin
    A:=B;
    if n<2 or m<2 then <<D:=A; return 0>>;
    LISTCEROS();
    clear D; matrix D(m,n);
    for j:=1:n do <<MAXCOL(); for i:=1:m do D(i,j):=A(i,u)>>
  end$

procedure LISTCEROS;
  begin
    clear c; array c(n);
    for j:=1:n do c(j):=NUCEROS(j)
  end$

procedure NUCEROS(j);
  begin
    integer i,k,h;
    i:=0;
 L: k:=m-i;
    if A(k,j) neq 0 then return i else
         if k>1 then <<i:=i+1; goto L>>;
    return m
  end$

procedure MAXCOL;
  begin
    w:=1; v:=2;
 L: if c(w)<c(v) then w:=v;
    v:=v+1;
    if v=n+1 then u:=w else goto L;
    c(u):=-1
  end$

;end;
```

Nota.- Los procedimientos RANG, NONUL, PERMU y ANULA son los ya listados en A.1.9 .

A.2.5 Ejecución del programa PRERAN

Ante todo, en el mismo directorio de la unidad de disco fijo en que está instalado Reduce, copiamos un archivo que contenga los programas de A.2.4 y A.1.9, titulándolo, por ejemplo, PRESCAL.

Una vez comenzada la sesión de Reduce, al aparecer el prompt 1: , cargamos el archivo PRESCAL, escribiendo:

```
1: IN PRESCAL$ ↵
```

cuando aparezca el prompt 2: , introducimos la matriz en el modo indicado en

A.1.10, es decir,

2: BB = MAT((...),...,(...))$ ↵

y al aparecer el prompt 3: , ejecutamos el programa sobre la matriz BB , escribiendo

3: PRERAN BB$ ↵

respondiendo el programa el rango de la matriz BB y quedando alojada la matriz PRE(BB) en la variable D. En consecuencia, para visualizar la matriz PRE(BB), basta escribir

4: D; ↵

(*)

<u>Nota</u>.- Si se utiliza la versión 3.3 de Reduce, entonces, al final del procedimiento PRE puede añadirse la sentencia simple

Return D;

para que el programa devuelva automáticamente la matriz PRE(BB), antes indicada, sin necesidad de ordenar (*) . Asímismo, en la versión 3.2, sería preciso declarar la matriz BB , antes de introducirla, como ya se indicó en A.1.10 .

A.2.6 <u>Ejemplo</u>.- Supongamos que se desea calcular el rango de la matriz simbólica

$$BB = \begin{bmatrix} x^2+1 & y-x & y & 0 \\ y & 0 & 0 & x \\ x & x^2 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y después se quiere visualizar cómo ha quedado la matriz al reordenar sus columnas con el algoritmo A.2.2 . De acuerdo con lo indicado anteriormente, operamos del siguiente modo:

```
1: IN PRESCAL $
2: BB:=MAT((X**2+1,Y-X,Y,0),(Y,0,0,X),(X,X**2,0,0),(1,X,0,0))$
3: PRERAN BB$
rango = 3
4: D;
MAT(1,1) := Y
MAT(1,2) := 0
MAT(1,3) := X^2 + 1
MAT(1,4) := - X + Y
MAT(2,1) := 0
```

```
MAT(2,2) := X
MAT(2,3) := Y
MAT(2,4) := 0
MAT(3,1) := 0
MAT(3,2) := 0
MAT(3,3) := X
MAT(3,4) := X^2
MAT(4,1) := 0
MAT(4,2) := 0
MAT(4,3) := 1
MAT(4,4) := X
```

A.3 Cálculo del rango de matrices jacobianas y del orden de ramificación

De acuerdo con lo indicado a lo largo de esta memoria, las matrices para las cuales nos interesa calcular el rango son matrices jacobianas de la forma

$$J_Y = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_n)}$$

donde $f_1,\ldots,f_m$ pertenecen al anillo de polinomios $k[X,Y] = k[X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_n]$, especializando en un primo $\mathfrak{p}^*$ del anillo cociente $B = k[X,Y]/(f_1,\ldots,f_m)$, con objeto de determinar su orden de ramificación:

$$\text{ord.ram } \mathfrak{p}^* = n - \text{rango}\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$$

no presentando ningún problema especial el cálculo del rango de esta matriz jacobiana, ya que se puede trabajar en el cuerpo $k(\mathfrak{p}^*) \simeq B/\mathfrak{p}^*$.

Para ello utilizaremos el siguiente algoritmo ORD, que permite determinar la matriz $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$, calculando su rango mediante la sucesiva aplicación de los algoritmos PRE y RANGO, explicitados en los apartados A.1 y A.2 .

En la mayoría de los casos a considerar, la algebraicidad de cada y_j se expresa sobre $k[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_{j-1}]$, por lo que los polinomios $f_1,\ldots,f_m$ son de la forma

$$f_j(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_{j-1},Y_j) \ ; \ j=1,\ldots,n$$

luego la matriz J_y , reordenando convenientemente sus columnas, llega a ser una matriz triangular, por lo que es recomendable no omitir el algoritmo PRE , antes de ejecutar el algoritmo RANGO.

A.3.1 <u>Algoritmo</u> <u>ORD</u>

Input:
- polinomios $f_1,\ldots,f_m$, que se han de derivar, para obtener la matriz jacobiana J_y
- variables $y_1,\ldots,y_n$, respecto de las cuales se ha de derivar, para obtener J_y
- base $\{p_1,\ldots,p_q\}$ del ideal $\mathfrak{p}^*$

Output: • rango de la matriz $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$

• ord.ram $\mathfrak{p}^*$

(1) introducir los polinomios $f_1,...,f_m$;

(2) introducir las variables $Y_1,...,Y_n$;

(3) para $i := 1$ hasta m hacer

para $j := 1$ hasta n hacer

$$J_y(i,j) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \; ;$$

(4) introducir la base $\{p_1,...,p_q\}$ del ideal $\mathfrak{p}^*$;

(5) para $i := 1$ hasta m hacer $f_i(x_1,...,x_r,Y_1,...,Y_n) := 0$;

(6) para $h := 1$ hasta q hacer $p_h(x_1,...,x_r,Y_1,...,Y_n) := 0$;

(7) para $i := 1$ hasta m hacer

para $j := 1$ hasta n hacer

$$\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}(i,j) = \left[J_y(i,j)\right]_{f_1=0,..,f_m=0,p_1=0,..,p_q=0} \; ;$$

(8) hacer D := PRE $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$;

(9) hacer ra := RANGO D ; escribir rango := ra ;

(10) para $i := 1$ hasta m "clear" f_i (supresión de la asignación (5)) ;

(11) para $h := 1$ hasta q "clear" p_h (supresión de la asignación (6)) ;

(12) escribir "orden de ramificación := " , n - ra ;

Nota.- En los pasos (8) y (9) se ejecutan los algoritmos PRE y RANGO, descritos en A.2.2 y A.1.7, respectivamente. Los pasos (10) y (11) tienen por objeto omitir las asignaciones (5) y (6), de modo que en posteriores ejecuciones, sólo se consideren las nuevas asignaciones (5) y (6).

A.3.2 Procedimientos Reduce para el algoritmo ORD

Los procedimientos que hemos elaborado para implementar en Reduce (versión 3.3) el algoritmo ORD, serán denominados JACOB y ORD.

El procedimiento JACOB determina el número de funciones de definición, f_i , y el de variables, y_j , respecto de las cuales se ha de derivar, calculando la matriz jacobiana J_y (paso (3) del algoritmo).

El procedimiento ORD determina el número, q , de elementos de la base considerada del ideal $\mathfrak{p}^*$, asigna el valor cero a las funciones de definición y a los elementos de la base de $\mathfrak{p}^*$ (pasos (5) y (6) del algoritmo), determina la matriz $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$ (paso (7) del algoritmo), reordena las columnas de esta matriz, utilizando el programa PRE de A.2 (paso (8)) y calcula el rango de la matriz que resulta (paso (9)), para, finalmente, suprimir las asignaciones nulas, hechas a los elementos f_i y p_h (pasos (10) y (11)) y devolver el orden de ramificación (paso (12)).

Nota.- Las funciones de definición f_i, las variables respecto de las cuales se ha de derivar y la base considerada del ideal $\mathfrak{p}^*$, van a ser introducidas en forma de listas, denominadas respectivamente FUN, VA y P, es decir,

$$FUN := \{f_1,...,f_m\}; \qquad VA := \{y_1,...,y_n\}; \qquad P := \{p_1,...,p_q\};$$

lo que no es posible en la versión 3.2 de Reduce, que al no disponer de listas, obliga a introducir estos tres tipos de datos en forma de matrices fila, por ejemplo.

A.3.3 Programa Reduce para el algoritmo ORD

```
procedure JACOB;
  begin
    m:=length fun;
    n:=length va;
    clear Jy; matrix Jy(m,n);
    for i:=1:m do for j:=1:n do
       Jy(i,j):=df(part(fun,i),part(va,j));
  end$

procedure ORD;
  begin
    integer q;
    q:=length p;
    for i:=1:m do part(fun,i)-0:=0;
    for k:=1:q do part(p,k)-0:=0;
    PRE(Jy);
    RANG D;
    for k:=1:q do clear part(p,k)-0;
    for i:=1:m do clear part(fun,i)-0;
    write "orden de ramificación = ", n-ra
  end$

;end;
```

Nota.- Los procedimientos PRE y RANG son los ya listados en A.2.4 y A.1.9, respectivamente, y su utilización exige incluir los demás procedimientos contenidos en esos dos apartados (excepto los procedimientos RANGO y PRERAN).

A.3.4 <u>Ejecución del programa ORD</u>

Ante todo, en el mismo directorio de la unidad de disco fijo en que esté instalado Reduce, copiamos un archivo que contenga el programa precedente, junto con los programas indicados en los apartados A.1.9 y A.2.4 , titulándolo, por ejemplo, ORDRAM .

Una vez que comienza la sesión Reduce y aparece el prompt 1: , cargamos el archivo ORDRAM, escribiendo:

1: IN ORDRAM$ ↵

y al terminar de cargar y aparecer el prompt 2: , introducimos las funciones de definición, en una lista, que se ha de denominar FUN , es decir, en la forma:

2: FUN := $\{f_1,\ldots,f_m\}$$ ↵

Al aparecer el prompt 3: , introducimos las variables, respecto de las cuales se ha de derivar, en una lista llamada VA, es decir, escribiendo:

3: VA := $\{y_1,\ldots,y_n\}$$ ↵

y al aparecer el prompt 4: , pedimos efectuar el calculo de la matriz jacobiana, escribiendo JACOB(), es decir, en la forma:

4: JACOB()$ ↵

Dicha matriz jacobiana es alojada en el programa en la variable J_y , por lo que, si se desea visualizarla, basta escribir J_y; (una vez que aparece el siguiente prompt).

A continuación introducimos los elementos de una base del ideal $\mathfrak{p}^*$, en forma de lista, que se ha de denominar P, es decir, escribiendo:

5: P := $\{p_1,\ldots,p_q\}$$ ↵

y finalmente pedimos efectuar el cálculo del orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$, escribiendo ORD() , es decir, en la forma:

6: ORD()$ ↵

para que el programa devuelva el rango de la matriz $\left[J_y\right]_{\mathfrak{p}^*}$ y el orden de ramificación de $\mathfrak{p}^*$

Ahora para calcular el orden de ramificación de otro primo $\mathfrak{p}^*$, basta introducir los elementos de una de sus bases, en forma de lista de nombre P y, a continuación, escribir ORD(), es decir:

```
7: P := {..,...,..}$ ↵
```

```
8: ORD()$ ↵
```

lo que puede repetirse tantas veces como sea preciso.

Pero si se desea cambiar las funciones f_i, de nuevo habrá que introducirlas en forma de lista denominada FUN, y a las variables respecto de las cuales se ha de derivar, en forma de lista denominada VA, y ordenar el cálculo de la matriz jacobiana escribiendo JACOB() (como en los prompts 2:, 3: y 4:, anteriormente indicados), antes de introducir una base del ideal de $\mathfrak{p}^*$ y ordenar el cálculo del orden de ramificación con ORD (como en los prompts 5: y 6:, o en 7: y 8:).

Finalmente, para concluir la sesión de Reduce, se escribirá BYE; al aparecer el siguiente prompt, es decir,

```
9: BYE; ↵
```

Nota.- Si se trabaja con la versión 3.2 de Reduce, los tres tipos de datos (funciones f_i, variables y_j y base de $\mathfrak{p}^*$), se pueden introducir en forma de matrices fila, con una sencilla adaptación del programa de A.3.3 .

A.3.5 Ejemplos.- Para $A = \mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$ y $B = A[y_1,y_2,y_3]$, con las condiciones

$$(y_1-1)^2-x_1+1 = 0 \quad , \quad y_2^3+y_1-x_2 = 0 \quad , \quad y_3^2-x_3 = 0$$

y siendo $\mathfrak{p}^*$ el ideal $(x_1-1,x_2-9,x_3,y_1-1,y_2-2,y_3)B$, operamos así:

```
1: IN ORDRAM $
2: FUN:={(Y1-1)**2-X1+1,Y2**3+Y1-X2,Y3**2-X3}$
3: VA:={Y1,Y2,Y3}$
4: JACOB()$
5: P:={X1-1,X2-9,X3,Y1-1,Y2-2,Y3}$
6: ORD()$
rango = 1
orden de ramificación = 2
```

y ahora para calcular el orden de ramificación del ideal $(x_1-2,x_2-1,x_3-1,y_1,y_2-1,y_3-1)B$, escribimos:

```
7: P:={X1-2,X2-1,X3-1,Y1,Y2-1,Y3-1}$
8: ORD()$
rango = 3
orden de ramificación = 0
```

y para determinar el orden de ramificación del ideal $(y_2-y_3)B$, escribimos:

```
9: P:={Y2-Y3}$
10: ORD()$
rango = 3
orden de ramificación = 0
```

Finalmente, si se desea considerar la k-álgebra

$$A = \mathbb{Q}[x,y] \quad , \quad B = A[z] \quad ; \quad x^2-2y^3-3y^2+z^2 = 0$$

para calcular el orden de ramificación de $(x-y^2)B$, operamos así:

```
11: FUN:={X**2-2*Y**3-3*Y**2+Z**2}$
12: VA:={Z}$
13: JACOB()$
14: P:={X-Y**2}$
15: ORD()$
rango = 1
orden de ramificación = 0
16: BYE;
```

A.4 Cálculo del número de raices reales

El problema del cálculo efectivo del número de raíces reales de polinomios tiene aquí interés, para permitir formular un criterio de no-ramificación de ideales primos en extensiones simples, en caso de que el cuerpo base sea $\mathbb{R}$, según ya se indicó en 4.2.3 .

La clásica solución dada por Sturm [Stu] a este problema, se consideró prácticamente inviable durante mucho tiempo (salvo para casos especialmente preparados), hasta que, con el uso de la regla de cálculo y las abreviaciones introducidas por Runge [Run], se consiguió mejorar su aplicabilidad, potenciada definitivamente en la actualidad con la utilización del ordenador.

Conviene señalar que para ecuaciones algebraicas de grado elevado, el método de Sturm se hace inoperante, lo que ha motivado la aparición de nuevos algoritmos que faciliten el cálculo del número de raíces reales, como el desarrollado en [CR-GV-R], basado en el método de Sturm-Habicht, o el desarrollado en [L-S], que utiliza matrices de Hankel. Pero, en la mayoría de los casos que aquí nos interesan, para polinonomios de grado no muy elevado, es suficiente aprovechar el clásico método de Sturm, de acuerdo con lo indicado en [B-C-L].

En particular, para el caso de coeficientes enteros o racionales (que permiten la implementación en Reduce), es conveniente introducir ciertas modificaciones, que moderen el crecimiento de los coeficientes de los polinomios de la sucesión de Sturm.

A.4.1 Adaptación propuesta para el método de Sturm

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros en la indeterminada x y $p'(x)$ su polinomio derivado, y consideremos el máximo común divisor de ambos, $m(x)$, es decir,

$$m(x) = \text{m.c.d.}(p,p')$$

Es sabido que el polinomio cociente

$$p_0(x) = p(x)/m(x)$$

tiene las mismas raíces que $p(x)$, pero todas con multiplicidad uno, es decir, sin raíces múltiples.

Antes de pasar a construir la sucesión de polinomios de Sturm, tengamos en cuenta que, a fin de moderar el crecimiento de los coeficientes, conviene sustituir cada polinonomio, q(x), por el resultante de dividir cada uno de sus coeficientes entre el valor absoluto del m.c.d. de dichos coeficientes, denominando **simplificado** de q(x) a dicho polinomio, que notaremos brevemente simpl q(x) . Es decir, si

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

entonces

$$\text{simpl } q(x) = a_n^* x^n + a_{n-1}^* x^{n-1} + \dots + a_1^* x + a_0^*$$

siendo

$$a_i^* = a_i / d \ ; \ {\scriptstyle i=0,1,\dots,n-1,n}$$

donde

$$d = \mid \text{m.c.d.}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \mid$$

Considerando ahora los polinomios:

$$r_0(x) = \text{simpl } p_0(x) \ ;$$

$$p_1(x) = \frac{d}{dx} r_0(x) \ ; \ r_1(x) = \text{simpl } p_1(x) \ ;$$

$$p_i(x) = \text{resto de dividir } r_{i-2}(x) \text{ entre } r_{i-1}(x), \text{ si } r_{i-1}(x) \neq 0 \ ;$$

$$r_i(x) = \text{simpl } [-p_i(x)] \ ; \ {\scriptstyle i=1,2,\dots}$$

se obtiene la sucesión finita de polinomios:

$$r_0(x) \ , \ r_1(x) \ , \ r_2(x) \ , \ \dots \ , \ r_{k-1}(x) \neq 0 \ , \ r_k(x) = 0$$

de la que interesará considerar la subsucesión:

$$r_0(x) \ , \ r_1(x) \ , \ r_2(x) \ , \ \dots \ , \ r_{k-1}(x)$$

que llamaremos **sucesión de polinomios simplificados de Sturm** de p(x).

Sea $r_i^*(x)$ el término líder (o de mayor grado) del polinomio $r_i(x)$; ${\scriptstyle i=0,1,\dots,k-1}$ y consideremos el par de sucesiones numéricas finitas:

$$\{ \ r_0^*(-1) \ , \ r_1^*(-1) \ , \ r_2^*(-1) \ , \ \dots \ , \ r_{k-1}^*(-1) \ \}$$

$$\{ \ r_0^*(1) \ , \ r_1^*(1) \ , \ r_2^*(1) \ , \ \dots \ , \ r_{k-1}^*(1) \ \}$$

a partir de las cuales se obtiene otro par de sucesiones numéricas finitas, $\{s'_j\}$ y $\{s''_j\}$, definidas en la forma:

$$s'_0 = 0 \ , \ s'_j = \begin{cases} 1+s'_{j-1} \ , \ \text{si} \ \ r^*_j(-1)r^*_{j-1}(-1) < 0 \\ s'_{j-1} \ , \text{en otro caso} \end{cases} \quad ; \ j=1,...,k-1$$

$$s''_0 = 0 \ , \ s''_j = \begin{cases} 1+s''_{j-1} \ , \ \text{si} \ \ r^*_j(1)r^*_{j-1}(1) < 0 \\ s''_{j-1} \ , \text{en otro caso} \end{cases} \quad ; \ j=1,...,k-1$$

De acuerdo con el teorema de Sturm, el número de raíces reales, nrr, de p(x) es

$$\text{nrr} = s'_{k-1} - s''_{k-1}$$

y en consecuencia las raíces de p(x) son todas reales syss

$$\text{nrr} = \partial p_0$$

siendo ∂p_0 el grado del polinomio p_0 .

El siguiente algoritmo permite implementar esta adaptación del método de Sturm.

A.4.2 Algoritmo STURM-SIMPL

Input: • polinomio p con coeficientes enteros ;

• variable v ;

Output: • número de raíces reales de p(v) ;

• determinación de si todas sus raíces son reales ;

(1) mcd := máximo común divisor (p,p′) ;

(2) p_0 := p/mcd ;

(3) gg := grado del polinomio p_0 ;

(4) r(0) := simpl p_0 ; (*)

(5) r(1) := simpl $\frac{d}{dv}$ r(0) ;

(6) k := 1 ;

(7) mientras r(k) ≠ 0 hacer

(7.1) k := k+1 ;

(7.2) r(k) := (-1)×simpl resto[r(k-2),r(k-1)] ; (**)

(8) k := k-1 ;

(9) para j:=0 hasta k hacer r^*(j):= término líder de r(j);

(10) para j:=0 hasta k hacer s(j):=sustitución(v=-1,r^*(j));

(11) s′ := 0 ;

(*) simpl es la operación simplificación definida en A.4.1

(**) resto[a,b] es el resto de la división entera del polinomio a entre el b

(12) para j:=1 hasta k hacer

si s(j)*s(j-1) < 0 entonces s′:=1+s′ ;

(13) para j:=0 hasta k hacer s(j):=sustitución(v=1,r^*(j));

(14) s" := 0 ;

(15) para j:=1 hasta k hacer

si s(j)*s(j-1) < 0 entonces s":=1+s" ;

(16) nrr := s′ - s" ;

(17) escribir "Número de raíces reales = " , nrr ;

(18) si nrr = gg entonces

escribir "y todas sus raíces son reales"

en otro caso escribir "pero no todas sus raíces son reales" ;

A.4.3 Procedimientos Reduce para el algoritmo STURM-SIMPL

Los procedimientos que hemos elaborado para implementar este algoritmo son denominados: PRIM, COEF1, REST, TERM1, SIMPL, POLSTURM, VARSIGNOS y NUMRAIZ.

El procedimiento PRIM(p,v) calcula el cociente, p_0 , de dividir el polinomio p(v) entre el m.c.d. de p(v) y p′(v), determinando también el grado de dicho polinomio p_0, es decir, implementa los pasos (1) a (3) del algoritmo.

El procedimiento COEF1(p,v) calcula el coeficiente líder del polinomio p(v). Notemos que este procedimiento no es superfluo, ya que la primitiva LCOF devolvería cero para polinomios no nulos de grado cero.

El polinomio REST(a,b,v) calcula el resto de dividir el polinomio a entre el b, pero para trabajar en $\mathbb{Z}$[v], previamente multiplica el polinomio a por el número

$$|b_0|^{1+\partial a-\partial b}$$

donde b_0 es el coeficiente líder del polinomio b y ∂a y ∂b los grados respectivos de los polinomios a y b.

El procedimiento TERM1(p,v) calcula el término líder del polinomio p(v). Notemos que este procedimiento tampoco es superfluo, ya que la primitiva LTERM devolvería cero para polinomios no nulos de grado cero.

El procedimiento SIMPL(p,v) simplifica el polinomio p(v), dividiendo entre el m.c.d. de sus coeficientes.

El procedimiento POLSTURM(p,v) calcula la sucesión de polinomios de Sturm de p(v), alojando dichos polinomios en el operador r() y determinando el número, κ, de términos de dicha sucesión, es decir, implementa los pasos (4) al (8) del algoritmo.

El procedimiento VARSIGNOS(m) determina la sucesión de números $\{s(j)\}$, resultantes de asignar el valor m a la variable en los polinomios $r^*(j)$, indicados en A.4.2, y calcula el número de variaciones de signo existentes en la sucesión $\{s(j)\}$, es decir, efectúa los pasos (10) al (15) del algoritmo.

Finalmente, el procedimiento principal, NUMRAIZ(p,v), coordina el proceso, ordenando sucesivamente:

i) calcular la sucesión de polinomios simplificados de Sturm, $\{r(j)\}$

ii) sustituir esos polinomios por sus términos líder $r^*(j)$

iii) determinar los números, s' y s'', de variaciones de signo en las sucesiones numéricas resultantes de sustituir la variable v por -1, y por 1, respectivamente, en la sucesión $\{r^*(j)\}$

iv) calcular el número de raíces reales, nrr = $s'-s''$

v) informar si todas las raíces son reales, o si, por el contrario, existen raíces imaginarias

A.4.4 Programa Reduce para el algoritmo STURM-SIMPL

```
procedure PRIM(p,v);
   begin scalar mcd;
      clear p0; operator p0;
      mcd:=gcd(p,df(p,v));
      p0():=p/mcd;
      gg:=deg(p0(),v);
      return p0()
   end$

procedure REST(a,b,v);
   begin operator sol;
      if deg(b,v)=0 then ar:=b else
      ar:=abs(COEF1(b,v))**(1+deg(a,v)-deg(b,v));
      bb:=a*ar;
      sol():=remainder(bb,b); return sol()
   end$

procedure COEF1(p,v);
   begin
      if deg(p,v) neq 0 then return lcof(p,v) else return p
   end$
```

```
procedure TERM1(p,v);
   begin
      if deg(p,v) neq 0 then return lterm(p,v) else return p
   end$

procedure SIMPL(p,v);
   begin integer i,d,g;
      clear c; operator c;
      g:=deg(p,v);
      np:=p;
      for i:=0:g do <<c(i):=COEF1(np,v); np:=np-TERM1(np,v)>>;
      d:=0;
      for i:=0:g do d:=gcd(d,c(i));
      if d neq 0 then p:=p/d; return p
   end$

procedure POLSTURM(p,v);
   begin clear r; operator r;
      k:=1;
      r(0):=p; r(1):=SIMPL(df(p,v),v);
      while r(k) neq 0 do
         <<k:=k+1;r(k):=(-1)*SIMPL(REST(r(k-2),r(k-1),v),v)>>
   end$

procedure VARSIGNOS(m);
   begin integer cc; cc:=0;
      clear s; operator s;
      for j:=0:k do s(j):=sub(vv=m,r1(j));
      for j:=1:k do if s(j)*s(j-1)<0 then cc:=1+cc;
      return cc
   end$

procedure NUMRAIZ(p,v);
   begin clear r1; operator r1;
      vv:=v;
      POLSTURM(SIMPL(PRIM(p,v),v),v);
      k:=k-1;
      for j:=0:k do r1(j):=TERM1(r(j),v);
      nrr:=varsignos(-1)-varsignos(1);
      write "Número de raices reales: " , nrr;
      if nrr=gg then write "y todas sus raices son reales."
          else write "pero no todas sus raices son reales."
   end$

;end;
```

A.4.5 <u>Ejecución del programa STURM-SIMPL</u>

Ante todo, en el mismo directorio de la unidad de disco fijo en que está instalado Reduce, copiamos un archivo, que contenga el programa precedente, titulandolo, por ejemplo, STURM .

Una vez comienza la sesión de Reduce, al aparecer el prompt 1: , cargamos el archivo STURM , escribiendo:

1: IN "STURM"$ ↵

al aparecer el prompt 2: , introducimos el polinomio $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, alojándolo en la variable p , es decir, en la forma:

2: p := a_n*x**n+ ... +a_1*x+$a_0$$ ↵

y a continuación pedimos calcular el número de sus raíces reales escribiendo

3: NUMRAIZ(p,x)$ ↵

ya que es x la variable del polinomio p , devolviendo el programa el número de tales raíces e informando de si existen otras.

Ahora para calcular el número de raíces reales del polinomio $q(y) = = b_m y^m + ... + b_1 y + b_0$, escribimos:

4: q := b_m*y**m+ ... +b_1*y+$b_0$$ ↵

5: NUMRAIZ(q,y)$ ↵

pero estos dos pasos pueden sustituirse por el siguiente:

4: NUMRAIZ(b_m*y**m+ ... +b_1*y+b_0,y)$ ↵

A.4.6 <u>Ejemplo</u>.- Para calcular el número de raíces reales de cada uno de los polinomios

$$(x-2)^2(x+3)^3 \quad ; \quad x^5-1 \quad ; \quad y^4-2y^3-5y^2+4y+6 \quad ; \quad z^2+3$$

de acuerdo con lo indicado anteriormente, puede operarse del siguiente modo:

```
1: IN STURM $
2: P:=(X-2)**2*(X+3)**3$
3: NUMRAIZ(P,X)$
Número de raices reales: 2
y todas sus raices son reales.
4: P:=X**5-1$
5: NUMRAIZ(P,X)$
Número de raices reales: 1
pero no todas sus raices son reales.
6: Q:=Y**4-2*Y**3-5*Y**2+4*Y+6$
7: NUMRAIZ(Q,Y)$
Número de raices reales: 4
y todas sus raices son reales.
8: NUMRAIZ(Z**2+3,Z)$
Número de raices reales: 0
pero no todas sus raices son reales.
```

A.5 Automatización de un criterio de no-ramificación en extensiones simples

Se trata de automatizar la aplicación del criterio 4.2.1, aprovechando el cálculo del número de raíces reales efectuado en A.4. De acuerdo con lo indicado en 4.2, los datos del problema son:

- el polinomio $p(Y) = f(x_1,...,x_r,Y) \in A[Y]$, que define B como extensión simple y entera de A
- una base del ideal primo intersección completa, $\mathfrak{p}$, del subanillo $A = k[x_1,...,x_r]$
- el punto $(a_1,...,a_r) \in k^r$ elegido para verificar el criterio 4.2.1

y para asegurar la no-ramificación de $\mathfrak{p}$ en $A \hookrightarrow B$ (es decir, que el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ sea radical) basta comprobar la verificación de las dos condiciones siguientes:

a) el polinomio $p(Y) = f(a_1,...,a_r,Y) \in k[Y]$ ha de ser factorizable linealmente en $k[Y]$, siendo todas sus raíces simples

b) los elementos de la base dada del ideal $\mathfrak{p}$, han de anularse en el punto $(a_1,...,a_r)$ elegido

La automatización del proceso se precisa a continuación en lenguaje algorítmico. El algoritmo, denominado RAD, que hemos desarrollado al efecto, aprovecha los pasos (5) a (16) del algoritmo STURM-SIMPL, indicado en A.4.1.

Nota.- Observemos que este método es aplicable a asegurar que un ideal, I^*, de una k-álgebra B finitamente generada, sea radical, mediante el proceso consistente en los siguientes pasos:

1) determinar un subanillo de polinomios, A, tal que B sea entero sobre A (a lo que puede ayudar alguna versión constructiva del lema de normalización de E. Noether)

2) determinar el ideal contraído $I = I^* \cap A$ (mediante algún método de eliminación de la variable Y)

3) comprobar que I es un primo intersección completa del subanillo de polinomios A

4) comprobar que el ideal extendido IB es igual al I^* original (para lo que bastará comprobar que $I^* \subseteq IB$)

5) elegir un punto $(a_1,...,a_r) \in k^r$ de la subvariedad del ideal I

6) comprobar si el polinomio $f(a_1,...,a_r,Y) \in k[Y]$ es factorizable linealmente en k[Y], siendo todas sus raíces simples

A.5.1 <u>Algoritmo RAD</u>

Input: • polinomio $f(x_1,...,x_r,v)$ que define B como extensión entera de A

• base $\{G_1(x_1,...,x_r), ... ,G_a(x_1,...,x_r)\}$ del ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura a del subanillo $A = k[x_1,...,x_r]$

• punto $(a_1,...,a_r) \in k^r$

Output: • posibilidad (si/no) de que el polinomio $f(a_1, ... ,a_r,v)$ sea factorizable linealmente en k , con todas sus raíces simples

• posibilidad (si/no) de aplicabilidad del criterio 4.2.1 (para asegurar que el ideal extendido $\mathfrak{p}B$ sea radical)

(0) p(v) := $f(a_1,...,a_r,v)$; (*)

(1) mcd(v) := máximo común divisor $(p(v), \frac{d}{dY} p(v))$;

(2) gmcd := grado mcd(v) ;

(3) si gmcd > 0 entonces return

<<escribir "para ese punto existen raíces múltiples">>;

(4) r(0) := simpl p(v) ; (**)

$\left.\begin{array}{l}(5)\\ \vdots\\ (16)\end{array}\right\}$ (*)

(17) si nrr ≠ grado p(v) entonces return <<escribir "para ese punto no todas las raíces son reales">>;

(18) gfz := 1 ;

(19) para $i := 1$ hasta a hacer $g_i = G_i(a_1,...,a_r)$;

(20) para $i := 1$ hasta a hacer

si $g_i = 0$ entonces gfz := 0 ;

(21) si gfz = 0 entonces return <<escribir "ese punto no es de la subvariedad del ideal">>;

(22) escribir "el ideal no se ramifica (su extendido es radical)">>;

(*) Comienza en cero la numeración, para que (5) a (16) sean pasos idénticos a los de numeración análoga en A.4.2

(**) simpl es la operación simplificación, definida en A.4.1

A.5.2 Procedimientos Reduce para el algoritmo RAD

Los procedimientos que hemos diseñado para implementar el algoritmo RAD son denominados: RADI, PUNTO e IDEAL (siendo además aprovechados los procedimientos REST, COEF1, TERM1, SIMPL, POLSTURM y VARSIGNOS de A.4.4).

El procedimiento PUNTO permite determinar el polinomio p(v), su m.c.d. con el polinomio derivado, p′(v), y el grado de este polinomio, mcd(v), es decir, implementa los pasos (0), (1) y (2) del algoritmo RAD.

El procedimiento principal, RADI, comprueba si el grado del polinomio mcd(v) es positivo (y, caso de serlo, informa de la existencia de raíces múltiples de p(v), deteniendo el proceso, por no ser viable el criterio 4.2.1), ordena determinar el número, nrr, de raíces reales de p(v), del mismo modo que en STURM-SIMPL, comprobando si nrr es igual al grado de p(v) (y, caso de no serlo, informa de la existencia de raíces no reales, deteniendo el proceso, por no ser aplicable el criterio 4.2.1), es decir, implementa los pasos (3) y (17) del algoritmo RAD, terminando por transferir el control de flujo al procedimiento IDEAL.

El procedimiento IDEAL comprueba si todos los polinomios de la base del ideal $\mathfrak{p}$ se anulan en el punto $(a_1,\ldots,a_r)$ (y caso de no ser así, informa de que dicho punto no pertenece a la subvariedad del ideal $\mathfrak{p}$, deteniendo el proceso, por no ser aplicable el criterio 4.2.1), informando finalmente de que el ideal no se ramifica. Notemos que este último procedimiento IDEAL comienza imponiendo una condición (anulación de la variable ZOP) que asegure que no sea ejecutable, si previamente no se ha ejecutado el procedimiento RADI, para así evitar que facilite información errónea, al ejecutarlo.

A.5.3 Programa Reduce para el algoritmo RAD

```
procedure PUNTO(fun,v);
   begin
      scalar mcd;
      clear p; operator p;
      rr:=length(va);
      p:=fun;
      for h:=1:rr do p:=sub(part(va,h)=part(pun,h),p);
      mcd:=gcd(p,df(p,v)); gmcd:=deg(mcd,v);
      p():=p;
      return p()
   end$
```

```
operator sol;

procedure RADI();
   begin
      clear r1; operator r1;
      pp:=PUNTO(fun,v);
      if gmcd neq 0 then return
         <<write "para ese punto existen raices múltiples">>;
      vv:=v;
      POLSTURM(SIMPL(pp,v),v);
      k:=k-1;
      for j:=0:k do r1(j):=TERMl(r(j),v);
      nrr:=VARSIGNOS(-1)-VARSIGNOS(1);
      if nrr neq deg(pp,v) then return
         <<write "para ese punto no todas las raices son reales">>;
      zop:=0, ideal()
   end$

procedure IDEAL();
   begin
     if zop neq 0 then return
       <<write "este procedimiento ha de ejecutarse después de RADI">>;
     gfz:=1;
     a:=length(base);
     matrix gg(1,a);
     for k:=1:a do gg(1,k):=part(base,k);
     for k:=1:a do for h:=1:rr do
        gg(1,k):=sub(part(va,h)=part(pun,h),gg(1,k));
     for k:=1:a do
        if gg(1,k) neq 0 then gfz:=0;
     if gfz=0 then return
        <<write "ese punto no es de la subvariedad del ideal">>;
     write "el ideal no se ramifica (su extendido es radical)";
   end$

;end;
```

A.5.4 <u>Ejecución del programa RAD</u>

Ante todo, en el mismo directorio de la unidad de disco fijo, en que esté instalado Reduce, copiamos un archivo, que contenga el programa precedente, titulandolo, por ejemplo, CRIRAD .

Comenzamos cargando Reduce y al aparecer el prompt 1: , cargamos el archivo CRIRAD, escribiendo

1: IN "CRIRAD"$ ↵

Al terminar la carga, introducimos sucesivamente:

- el polinomio $f(x_1,...,x_r,Y)$, alojándolo en la variable FUN
- la variable , Y, responsable de la extensión $A \hookrightarrow B$, alojandola en V
- las variables $x_1,...,x_r$ del anillo A, alojándolas en la lista VA
- las coordenadas $a_1,...,a_r$ del punto elegido, en la lista PUN
- una base $\{G_1,...,G_a\}$ del ideal $\mathfrak{p}$, en la lista BASE

es decir, en la forma siguiente:

```
2: FUN := f(x1,...,xr,Y)$ ↵
3: V := Y$ ↵
4: VA := {x1,...,xr}$ ↵
5: PUN := {a1,...,ar}$ ↵
6: BASE := {G1,...,Ga}$ ↵
```

y a continuación ejecutamos el programa, escribiendo RADI()$, es decir:

```
7: RADI()$ ↵
```

devolviendo el programa información sobre si el ideal extendido es radical (o, en caso negativo, informando por qué no es aplicable el criterio 4.2.1).

Si ahora se desea verificar dicho criterio para otro ideal $\mathfrak{p}'$, sin variar el polinomio $f(x_1,...,x_r,Y)$, ni el punto $(a_1,...,a_r)$, basta introducir los elementos $G'_1,...,G'_a$ de la base de $\mathfrak{p}'$ en la matriz fila BASE y ejecutar el procedimiento IDEAL, en la forma:

```
8: BASE := {G'1,...,G'a}$ ↵
9: IDEAL()$ ↵
```

Está previsto que el procedimiento IDEAL no pueda ejecutarse, sin haber ejecutado previamente RADI, pues podría dar lugar a un resultado erróneo.

A.5.5 Ejemplos.-

Siendo $A = \mathbb{Q}[x,y]$ y $B = A[z]$ con la condición $x^2+y^2+z^2-1 = 0$, para tratar de comprobar si el ideal primo $\mathfrak{p} = (x)A$ se ramifica, comenzaremos considerando el punto (0,1), que obviamente da lugar a raíz múltiple, por lo que sustituiremos este punto por (0,0), del modo siguiente:

```
1: IN CRIRAD $
2: FUN:=X**2+Y**2+Z**2-1$
3: V:=Z$
4: VA:={X,Y}$
5: PUN:={0,1}$
6: BASE:={X}$
7: RADI()$
para ese punto existen raices múltiples
8: PUN:={0,0}$
9: RADI()$
el ideal no se ramifica (su extendido es radical)
```

y ahora para comprobar si el ideal $\mathfrak{p}' = (x,y)A$ no se ramifica, escribimos:

```
10: BASE:={X,Y}$
11: IDEAL()$
el ideal no se ramifica (su extendido es radical)
```

Por otra parte, para el caso del ejemplo 4.2.3, operamos así:

```
12: FUN:=2*Y**4-4(X1+1)**3*Y**3-5*(X1+1)**2*(X2+2)*Y**2+
                                  +8*(X1+1)*Y-12*(X1**2-1)
13: V:=Y$
14: VA:={X1,X2}$
15: PUN:={0,0}$
16: BASE:={X1**2-X2**3}$
17: RADI()$
el ideal no se ramifica (su extendido es radical)
```

y, finalmente, para comprobar si $\mathfrak{p}'' = (x_1^2-x_2^2+x_2^3)A$ se ramifica, escribimos:

```
18: BASE:={X1**2-X2**2+X2**3}$
19: IDEAL()$
el ideal no se ramifica (su extendido es radical)
20: BYE;
```

Bibliografía

[Abe] **P.Abellanas**: *Algebraic Correspondences*; Rattero. Torino, 1965.

[A-L] **M.Abellanas-D.Lodares**: *Algoritmos y grafos*; Rama, 1990.

[Abh 1] **S.Abhyankar**: *Ramification theoretic methods in Algebraic Geometry*; Ann.Maths.Studies, 43. Princeton University Press, 1959.

[Abh 2] **S.Abhyankar**: *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*; Springer-Verlag, 1990

[A-Z] **Abhyankar-Zariski**: *Splitting of valuations in extensions of local domains*; Proceedings of the Nat. Acad. of Sc., vol. 41.

[Akr] **A.Akritas**: *Elements of Computer Algebra with applications*; Wiley Interscience Pub., 1988.

[A-H-U] **Aho-Hopcroft-Ullman**: *The design and analysis of computer algorithms*; Addison-Wesley, 1974.

[A-H-V] **Aroca-Hironaka-Vicente**: *The theory of maximal contact*; Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juán", núm. 29, 1975

[A-M-G] **Arnold-Varchenko-Goussein Zadé** : *Singularités des applications différentiables*; Mir, 1986.

[A-M] **Atiyah-Macdonald**: *Introducción al Algebra Conmutativ*a; ed. Reverté, 1973.

[Ayo] **C.W.Ayoub**: *The descomposition theorem for Ideals in Polínomial Rings over a Domain;* Journal of Algebra 76 (1982), 99-110.

[Baj] **Bajaj**: *Geometric Modeling with Algebraic Surfaces, The Mathematics of surfaces III*; ed. D. Handscomb, Oxford University Press, 1988

[B-C-R] **Bochnak-Coste-Roy**: *Géométrie algébrique réelle;* Ergebnisse der Math. Springer-Verlag, 1987.

[Bre] **Brezuleanu**: *Sur les morphismes formellement non ramifiés ;* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15 (1970) 481-486.

[B-K] **Briescorn-Knörrer**: *Plane Algebraic Curves*; Birkhaüser-Verlag, 1986.

[B-C-L] **Buchberger-Collins-Loos**: *Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation*; Springer-Verlag, 1983.

[Coh] **I.S.Cohen**: *Lengths of prime ideal chains*; Amer. J. of Math. 76 (1954), 654-668

[C-H] **Cohen-Seidemberg**: *Prime Ideals and Integral Dependence*; Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 252-261.

[CR-R-GV] **Coste Roy - Recio - González Vega** : *Un algoritmo para obtener fórmulas especializables que dan el número de raices reales de un polinomio en* $\mathbb{R}[x]$; XIII Jor. Hispano-Lusas de Matemáticas. Valladolid, 1988

[CR-GV-O] **Coste Roy - González Vega - Olazabal** : *Una implementación en Reduce de algoritmos para caracterizar números algebraicos reales con precisión infinita*; XIII J. Hisp-Lusas de Matemática. Valladolid, 1988

[D-S-T] **Davenport-Siret-Tournier**: *Calcul Formel. Systemes et algorithmes de manipulation algebriques*; Masson, 1987.

[Duv] **D.Duval**: *Calcul formel avec nombres algébriques*; Institut Fourier. Grenoble, 1987

[E-G-R] **Etayo-García-Romo**: *Interpretación geométrica de la teoría de ideales*; Depto. de Algebra, Universidad Complutense. Madrid, 1986.

[Ful 1] **W.Fulton**: *Algebraic curves*; Benjamin, 1969

[Ful 2] **W.Fulton**: *Intersection theory*; Springer, 1984.

[G-L] **Gaffney-Lazarsfeld**: *On the ramification of Branched Covering of* $\mathbb{P}^n$; Inventiones Mathematicae, 59 (1980), 53-58.

[G-M] **Gianni-Mora**: *Algebraic solution of polynomial equations using Groebner basis;* A.A.A.C.C. 5-6 (1989), 247-257

[G-T-Z] **Gianni-Trager-Zacharias**: *Groebner basis and Primary Descomposition of Polynomial Ideals;* J.Symb.Comp.86

[Gir] **Giral:** *Notes on prime elements of* A[X]; X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Murcia, 1985

[Gre] **Greco**: *Sugli omomorfismi piatti e non ramificati* ; Matematiche (Catania) 24 (1969), 392-415.

[G-H] **Griffiths-Harris**: *Principles of Algebraic Geometry*; Wiley-Interscience Pub., 1978.

[Hea] **A.C.Hearn**: *Reduce 3.3 user's manual*; University of Bath, 1987.

[Hee] **Heerema**: *Inertial automorphisms of a class of wildly ramified v-rings*; Trans.Am.Math.Soc.132 (1968),45-54.

[Hei] **Heinzer**: *Higher derivations of wildly ramified v- rings*; Proc. Am. Math. Soc. 23 (1969), 94-100.

[H-P-T] **Hermida-Pérez-Tena**: *Algebra Local*; Manuales y textos universitarios. Universidad de Valladolid, 1985

[Huz] **Huckaba**: *Extensions of pseudo-valuations*; Pacific J. Math. 29 (1969), 295-302.

[Jac] **Jacobson**: *Basic Algebra II*; Freeman, 1980

[Kap 1] **I.Kaplansky**: *Adjacent prime ideals*; J. of Algebra, 20 (1972), 94-97.

[Kap 2] **I.Kaplansky**: *Commutative Rings*; University of Chicago Press, 1974.

[Ken] **K.Kendig**: *Elementary algebraic Geometry*; Springer- Verlag, 1977.

[Kik] **T.Kikuchi**: *Some remarks on high order derivations*; J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 71-87.

[K-N] **Kishimoto-Nowicki**: *A note of the Jacobian Conjeture in two variables*; J. Fac. Sci. Shinshu 22 (1987) 11-12

[Kru 1] **Krull**: *Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie*; Math. Zeit. vol. 42 (1937), págs. 745-766.

[Kru 2] **Krull**: *Allgemeine Bewertungstheorie*; J. f. reine u. angw. Math. T. 167, págs. 160-169.

[Lê] **Lê Dung Tráng** : *Singularités isolées des intersections complètes* ; Collection Travaux en Cours, 36. Hermann, 1988.

[L-J] **Lejeune-Jalabert**: *Effectivité de calculs polynomiaux* ; Institute Fourier. Grenoble, 1987.

[Lip] **J.D.Lipson** : *Elements of Algebra and Algebraic Computation* ; Benjamin Cummings, 1981.

[L-S] **Llovet-Sendra**: *Hankel method for computing the number of real roots*; Linear Algebra and its applications (a aparecer), 1989.

[M-B] **Malliavin-Brameret**: *Sous-anneaux non ramifiés d'anneaux réguliers*; C. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 264 (1967), A 385 - A 387.

[Mat] **Matsumura**: *Commutative Algebra*; Benjamin, 1970.

[Mig] **M.Mignotte**: *Mathematiques pour le Calcul Formel*; Presses Univ. de France, 1981.

[Mil] **J.Milnor**: *Morse theory*; Princeton Univ.Press, 1963.

[Mum] **D.Munford**: *Algebric Geometry*; Springer-Verlag, 1976.

[Nag 1] **Nagata**: *Note on a chain condition for prime ideals*; Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto 32 (1959-60), 85-90.

[Nag 2] **Nagata**: *Local Rings*; Interscience, 1962

[Rat] **Ratley**: *Chain Conjectures in Ring Theory;* Lect. Notes in Maths., 647, Springer-Verlag, 1978.

[Ray] **Rayna**: *Software for Algebraic Computation*; Springer-Verlag, 1987

[Roa 1] **Roanes Macías** : *Estudio de la ramificación en correspondencias algebraicas;* Tesis doctoral, 1973.

[Roa 2] **Roanes Macías** : *Interpretación geométrica de la teoría de ideales* ; Col. de Monografías y Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juán" del C.S.I.C., núm. V, 1974.

[Roa 3] **Roanes Macías**: *Correspondencias entre espacios tangentes inducidas por correspondencias algebraicas locales de superficies ;* Col. de Monografías y Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juán" del C.S.I.C., núm. VI, 1975.

[Roa 4] **Roanes Macías**: *Orden de ramificación de ideales*; Col. de Monografías y Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juán" del C.S.I.C., núm. XVI, 1978.

[Rob] **L.Robbiano**: *Introduccione all'Algebra Computazionale*; Univ. di Genova, 1987.

[Ros] **M.Rothstein**: *Sistemas de Computo Algebraico;* Curso Doct. Univ. Alcalá U.P.M. Madrid, enero 1991.

[Run] **Runge**: *Praxis der Gleichungen*; Berlin, 1924.

[Sei] **A.Seidemberg** : *Construction in a Polynomial Ring over the Ring of Integers*; Am.J. of Maths. vol.100, no. 4 (1978), 685-703.

[Ser] **J.P.Serre** : *Algébre Local.Multiplicités* ; Lec. not. in Maths. 11, Springer-Verlag, 1965.

[Sha] **Shafarevich**: *Basic Algebraic Geometry*; Springer, 1974.

[Stu] **C.Sturm**: *Memoire sur la Resolution des equations numériques*; Inst. France Sc. Math. Phys. 6 (1835)

[Tei 1] **B.Teissier**: *Variétés toriques et polytope* ; Lec. Not. in Maths, 901, Springer, 1981.

[Tei 2] **B.Teissier** : *Sur la Triangulation des Morphismes Sous Analytiques*; Laboratoire de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1987.

[Wal] **R.J.Walker**: *Algebraic curves*; Dover Pub., 1950.

[Win] **F.Winkler**: *Solutions of equations by Gröbner basis*; Johannes Kepler Univ. Pub., 1990.

[Wu] **X.L.Wu**: *A case of Jacobian conjeture*; Acta Math. Sinica (N.S.) 4 (1988), no.4, 309-315.

[Zar 1] **Zariski** : *Theory of Algebraic Surfaces* ; Lec. Not. in Maths., 83, Springer-Verlag, 1969.

[Zar 2] **Zariski**: *Collected papers*; ed. by Hironaka and Mumford, 1972.

[Z-S] **Zariski-Samuel**: *Commutative Algebra I-II*; Van Nostrand, Princeton, 1958-1960.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Eugenio Roanes Lozano titulada "Ramificación en K-Algebras y Teoremas de ascenso y descenso" acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 17 de Junio 1994

El Vocal, El Vocal, El Vocal

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,