UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

MÉTODOS COMPUTACIONALES EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla bajo la dirección del doctor D. Francisco J. Castro Jiménez, para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº

Fdo: Dr. D. Francisco J. Castro Jiménez
Catedrático de la Universidad de Sevilla

El doctorando

Fdo: María de los Ángeles Moreno Frías

Sevilla, Febrero de 2000

81

95

A mis padres y
a mi hermana

Índice

Introducción

El estudio de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales constituye una rama importante y extensa de la Matemática Moderna. Se trata de un área de intensa investigación teórica que tiene importantes aplicaciones prácticas. Las primeras demostraciones rigurosas se deben a Cauchy; empezó estudiando los casos más simples de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que pueden presentarse. En los tomos XIV, XV y XVI de *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1842 y 1843) prueba[1] la existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales. Después, desde el mismo punto de vista, estudia un sistema lineal de m ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con m incógnitas, donde los primeros miembros de cada ecuación están formados por la derivada de una función incógnita respecto de la misma variable,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial t}.$$

Para demostrar la convergencia de los desarrollos en serie obtenidos emplea un método llamado *Calcul des limites*, y es el que hoy conocemos con el nombre de *Método de las funciones mayorantes*. En 1856, Briot et Bouquet, (en su trabajo [20]) dan otra demostración de la existencia de soluciones. En 1872, se plantea esta misma cuestión para los sistemas de ecuaciones diferenciales, *completamente integrables*. La solución la obtuvieron y la publicaron simultáneamente, tres geómetras, Méray, Bouquet y Mayer, [17], [61], [65]. En 1875, los resultados de Cauchy, que eran poco conocidos, fueron demostrados de nuevo por M. Darboux y Sonia Kowalevsky.

Méray publica un trabajo [66], en 1880, donde se propone demostrar, de una manera general, la existencia de soluciones de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Comienza por un sistema de primer orden, donde el primer miembro de cada ecuación está formado por una derivada. Distingue, para cada función incógnita, entre las variables independientes respecto de las cuales se han hecho las derivadas de los primeros miembros y las variables que no aparecen en esas derivadas; las primeras las llama *variables principales* de la función considerada y las segundas las llama *variables paramétricas*; así una misma variable puede ser principal para una función incógnita y paramétrica para otra. Partiendo de esta idea, Méray establece una clasificación para las derivadas de cualquier orden de una misma función incógnita, en ella distingue entre *derivadas principales* y *derivadas paramétricas*. Una derivada de una función incógnita se llama principal si las derivadas que aparecen se han hecho únicamente respecto de variables principales, y una derivada es paramétrica si la derivación se ha hecho respecto de cualquier tipo de variable. Méray considera como funciones incógnitas, funciones desarrollables en serie de Taylor a partir de ciertas condiciones iniciales. Las derivadas paramétricas se obtienen a partir de estas condiciones iniciales. Meray añade otra restricción a los sistemas: " Si a las ecuaciones del sistema dado se le añaden todas las que se pueden deducir por derivaciones de las ecuaciones primitivas, entonces cada ecuación puede ser ordenada de manera que cada una no contenga en su segundo miembro (además de las derivadas paramétricas, funciones incógnitas y variables independientes) más que derivadas principales que pertenecen al sistema primitivo".

En un trabajo publicado en 1890, Méray y Riquier [64] demuestran la convergencia de los desarrollos en serie de las soluciones para los sistemas que habían sido estudiados hasta ese momento.

La *forma canónica* de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es debida a Riquier, que (en 1892) demuestra la existencia de soluciones de un sistema diferencial cualquiera.

[1] Esta información la hemos obtenido del prefacio del libro de [83]

En 1920, Janet [44] da un método nuevo, hasta entonces, que permite enunciar y demostrar un teorema general sobre la existencia de soluciones de cualquier sistema de ecuaciones en derivadas parciales en forma canónica.

Hasta aquí una brevísima (y muy incompleta) reseña histórica que nos permitirá presentar el origen del trabajo que presentamos como tesis doctoral.

Los resultados presentados en esta memoria se enmarcan dentro de lo que se denomina estudio algebraico de los $\mathcal{D}$-módulos, (c.f. [13], [14], [15], [47], [48], [58], [59], [63], [74]). La génesis de los $\mathcal{D}$-módulos es la teoría del análisis algebraico de M. Sato, quien considera un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales como un módulo de presentación finita sobre $\mathcal{D}$, [47], donde $\mathcal{D}$ representa el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes holomorfos. Si

$$\begin{array}{ccccc} R_{11}u_1 & + & \cdots & + & R_{1q}u_q = 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ R_{p1}u_1 & + & \cdots & + & R_{pq}u_q = 0 \end{array} \tag{1}$$

es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales (esto es $R_{ij} \in \mathcal{D}$ y $(u_1, \cdots, u_q)$ son las incógnitas), se le asocia el $\mathcal{D}$-módulo M conúcleo del homomorfismo φ definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^p & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ (P_1, \cdots, P_p) & \longrightarrow & (\sum_{i=1}^{p} P_i R_{ij})_{1 \leq j \leq q} \end{array} \tag{2}$$

E inversamente, a una presentación dada en (2) de un $\mathcal{D}$-módulo M se le asocia el sistema dado en (1). (Esta correspondencia no es biunívoca ya que un mismo $\mathcal{D}$-módulo puede tener dos presentaciones distintas). Para una introducción al estudio de los $\mathcal{D}$-módulos se puede consultar [14], [48], [53], [63], [74].

El presente trabajo comienza con la exposición de los resultados de Janet [44] en términos del Álgebra Computacional y de la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos.

Por otra parte los resultados de Buchberger ([26]) sobre bases de Gröbner para ideales de anillos (conmutativos) de polinomios han sido generalizados al caso de varios anillos de operadores diferenciales (lineales) (ver por ejemplo [19], [27] para los primeros trabajos sobre el tema). Independientemente, los trabajos de Riquier [83] y Janet [44], [45] sobre los sistema de ecuaciones diferenciales fueron redescubiertos por Pommaret ([79], [77]; ver también Rey Pastor [82]). Desde entonces estos trabajos y las ideas en ellos desarrolladas han sido sistemáticamente aplicados en el estudio algebraico de los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, incluso no lineales (trabajos de Ritt [84])(ver también [38], [39], [81]).

A pesar de ello, y hasta donde conocemos, no existe en la literatura ninguna comparación sistemática entre la teoría de las bases de Gröbner y la teoría desarrollada por Janet en [44]. La primera parte de la tesis tiene por objeto remediar, en la medida de lo posible, esta laguna. A este respecto diremos que la lectura de los trabajos de Pommaret, F. Schwartz ([89], [90]) y V.P. Gerdt ([38], [39]) (entre otros) nos ha sido de gran ayuda. La segunda parte de la tesis (desde el capítulo 5 hasta el final) tiene por objeto hacer una generalización de los resultados y técnicas de Janet a otros anillos de operadores diferenciales lineales (Janet trabaja básicamente con coeficientes en un cuerpo de funciones racionales). Esta generalización es distinta a la realizada en ([19],[27], [28]) y tiene la virtud de que puede ser susceptible de aplicación en la teoría de "abanicos de Gröbner" para anillos de operadores diferenciales con coeficientes en $\mathbf{C}[[X]]\{x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}\}$ (entre otros anillos). Pero no abordaremos aquí esta cuestión.

Vamos a comentar brevemente el contenido de cada capítulo.

En el capítulo uno resumimos una serie de conceptos y nociones conocidas que necesitaremos a lo largo de toda la exposición. Estos conceptos son: orden monomial, teorema de división en $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$, ideales monomiales, lema de Dickson, teorema de la base de Hilbert, bases de Gröbner, S-polinomios y algoritmo de Buchberger [1], [12], [32], [35], [54] y sus correspondientes para el álgebra de Weyl([27], [29], [28])

El capítulo dos está dedicado, siguiendo a Janet, [44] al estudio de los sistemas de monomios y en particular al estudio de los módulos de monomios; estudiaremos la noción de sistema de monomios completo, que es fundamental en todo el resto del trabajo. Si un sistema de monomios es completo entonces se verifica que todos sus múltiplos se reparten en un número finito de clases. Después ordenaremos los monomios según su altura, y veremos cómo esto determina una ordenación en sus correspondientes clases. También veremos algunas propiedades importantes que verifica el producto de un monomio por una variable.

El capítulo tres está dedicado al estudio formal de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales; dado un sistema en forma canónica, definiremos (siguiendo a Janet) el concepto de *sistema completamente integrable*, veremos una caracterización de los sistemas completamente integrables y la relación que tiene esto, con el hecho de que el conjunto de operadores que definen el sistema, formen una base de Gröbner de operadores diferenciales, del ideal que generan. Más concretamente probaremos que si el sistema de ecuaciones diferenciales tiene coeficientes en un cuerpo, bajo ciertas condiciones precisas, un sistema completamente integrable es una base de Gröbner y viceversa. En particular, si el anillo de operadores diferenciales es con coeficientes constantes (anillo conmutativo de polinomios) la noción de sistema completamente integrable debe considerarse como un precedente de la de Buchberger (de base de Gröbner). Más aún, el algoritmo de reducción propuesto por Janet se aparenta (en este caso) con la división de polinomios y el método de Janet para verificar si un sistema es completamente integrable debe considerarse como un precedente del método de Buchberger para el cálculo de una base de Gröbner.

En el capítulo cuatro comenzaremos con una aplicación de lo visto en el capítulo dos, (lo que Janet llama cálculo inverso de la derivación), que no es otra cosa que resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuyos primeros miembros están formados por las derivadas de una función incógnita y en los segundos miembros de cada ecuación sólo aparecen funciones conocidas. Demostraremos que si un sistema es completamente integrable entonces siempre tiene solución, cualesquiera que sean las condiciones iniciales del sistema.

Veremos que el algoritmo de Janet, aplicado a este contexto, nos permite, después de un número finito de pasos, dado un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, en forma canónica, salvo condiciones de incompatibilidad, obtener un sistema equivalente en forma canónica y completamente integrable.

El procedimiento que utilizamos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales, es el método de Frobenius, es decir construir el desarrollo de la serie de Taylor solución, en un entorno de un punto dado $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$. Podemos suponer que el punto es el origen de $\mathbf{C}^n$ y que las ecuaciones vienen determinadas por operadores diferenciales del anillo $\mathfrak{D}$

(anillo de gérmenes de operadores diferenciales lineales con coeficientes holomorfos en un entorno del origen de $\mathbf{C}^n$).

Terminaremos este capítulo viendo que $Ext^m_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O}) = 0$ con $m \geq 1$, siendo M un $\mathcal{D}$-submódulo de un módulo libre correspondiente a un sistema en forma canónica y $\mathcal{O}$ el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en el origen de $\mathbf{C}^n$. Para ello utilizamos el procedimiento de Janet de cálculo de una resolución libre del $\mathcal{D}$-módulo asociado a un sistema en forma canónica. Este procedimiento debe considerarse como un precedente del cálculo de las sicigias de una familia de polinomios.

En los capítulos que siguen se propone una generalización del método de Janet a sistemas diferenciales no necesariamente en forma canónica, si bien las aplicaciones de este otro método difieren de las obtenidas por Janet para los sistemas en forma canónica.

En el capítulo quinto introducimos la noción de δ-base de Gröbner para ideales (a la izquierda) en el álgebra de Weyl $A_n(\mathbf{k})$, comparamos esta noción con el concepto bien conocido de bases de Gröbner para ideales en $A_n(\mathbf{k})$ y damos algunos cálculos explícitos en $A_n(\mathbf{k})$ usando δ-bases de Gröbner. Esto es una aplicación de los trabajos de [3], [40], [41], [95].

Algunos de estos resultados han sido generalizados por Insa-Pauer [41], para anillos de operadores diferenciales $\mathcal{H}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ donde $\mathcal{H}$ es una $\mathbf{k}$-subálgebra noetheriana de $\mathbf{k}(x_1, \cdots, x_n)$ (el cuerpo de cocientes del anillo de polinomios $\mathbf{k}[X] = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$)($\mathbf{k}$ es un cuerpo) estable por las derivaciones $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nosotros ampliamos estos resultados a toda $\mathbf{k}$-álgebra $\mathcal{H} \subset \mathbf{k}((X))$ (cuerpo de fracciones del anillo de series formales $\mathbf{k}[[X]] = \mathbf{k}[[x_1, \cdots, x_n]]$.)

Nuestro primer resultado, muestra que la noción de δ-base de Gröbner es equivalente a la noción de base de Gröbner introducida por Insa-Pauer [41]. Describimos un algoritmo (similar al utilizado por Assi, [3] y al de Insa-Pauer, [41]), para calcular una δ-base de Gröbner para un ideal I de $\mathcal{H}[\partial]$. Mostramos una familia de δ-bases de Gröbner que no son bases de Gröbner.

Finalmente describimos algunas aplicaciones de las δ-bases de Gröbner: problema de pertenencia a un ideal, eliminación, sicigias, resolución libre, $\cdots$ y mostramos algunos ejemplos para los cuales los cálculos en las δ-bases de Gröbner son más rápidos que los cálculos en las bases de Gröbner.

En el capítulo sexto generalizamos lo anterior a submódulos de un módulo libre. Para terminar vemos, como aplicación, el cálculo de la intersección de dos ideales pertenecientes a $A_n(\mathbf{k})$ y comparamos una resolución libre obtenida mediante una base de Gröbner con otra obtenida a través de una δ-base de Gröbner.

Terminamos el trabajo con un apéndice en el que incluimos la ordenación de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, dada por Janet. Esta ordenación consiste en asignar unos determinados pesos a las variables x_i y a las funciones incógnitas, u_j. Esto nos permite definir un conjunto de pesos (en la terminología) para cualquier derivada de cualquier función incógnita $\partial^\alpha(u_j)$ y de ahí que sea posible su ordenación.

No queremos terminar esta introducción sin hacer una consideración de carácter general sobre los resultados (de otros autores) usados y no demostrados en esta memoria. Hemos pretendido ser "autocontenidos" corriendo el riesgo de "demasiados extensos" en algunos puntos.

En el capítulo 1 hemos enunciado (sin demostración) el teorema de caracterización de las bases de Gröbner para el Álgebra de Weyl (1.7) (hemos referido a la prueba dada en [27]). Este resultado lo hemos usado en el capítulo 5 5.6.

Un caso ligeramente diferente es el de nuestro teorema análogo para anillos de operadores diferenciales con coeficientes en un cuerpo 1.7. Este resultado es usado en el capítulo 3, en la comparación de las bases de Gröbner con las bases de Janet.

Una prueba de este resultado (que es análoga al caso del Álgebra de Weyl) puede encontrarse en [41]. Además este resultado es un caso particular de nuestra proposición 5.9.13.

En este capítulo hemos usado, sin demostración, un resultado esencial: si un sistema de ecuaciones diferenciales está en forma canónica y es completamente integrable y si sus coeficientes son funciones holomorfas, entonces sus soluciones (en el sentido de 4.3.5) son funciones holomorfas. Hemos referido para su prueba al propio trabajo de Janet ([44] pag. 122-135). Aparte de estos casos, el resto del trabajo es completamente autocontenido.

Para la elaboración de esta memoria nos hemos beneficiado de multitud de trabajos anteriores que hemos recogido en la bibliografía. En particular, queremos reseñar aquí el trabajo de la Profesora Monique Lejeune-Jalabert ([54]) y del libro del Profesor Tomás Sánchez Giralda ([87]).

Para terminar sólo me resta expresar mi más sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Francisco Jesús Castro Jiménez por haberme brindado la oportunidad de emprender con él la gran aventura de la investigación matemática; por las valiosas explicaciones, opiniones y sugerencias; por sus múltiples y minuciosas correcciones apuntadas a las diversas lecturas de los sucesivos borradores y de quien siempre estaré en deuda por la gran labor humana y profesional realizada. Asímismo, quiero darle las gracias al Prof. Dr. D. Alejandro Pérez Cuéllar, a quien tuve la suerte de conocer cuando llegué al Dpto. de Matemáticas, persona de la que en todo momento aprendo, que siempre me ha infundido ánimos para seguir adelante y al que le debo gran parte de los logros profesionales conseguidos. Del mismo modo, quiero agradecer al Prof. Dr. D. Juan Luís Romero Romero sus útiles consejos e indicaciones hechas con un equilibrio perfecto de sabiduría y magisterio. También agradezco al Prof. Dr. D. Enrique Pardo Espino su interés por el trabajo que estaba realizando y el apoyo prestado. Doy las gracias a todos los compañeros del Dpto. de Matemáticas y de Estadística de la Universidad de Cádiz en especial al Prof. Dr. D. José Ramirez Labrador por su continua disponibilidad y atención en la elaboración del trabajo; a los profesores doctores Dña. Maria Luz Gandarias y D. Jorge Ollero que han sido partícipes constantes en el desarrollo de esta tarea; a los profesores: Dña. Concepción Muriel, D. Ramón Gestoso, Dña. Pilar Venero, Dña. Alicia Cornejo, D. Fco. Gónzalez y Dña. María de los Santos Bruzón; y a Dña. Ana Gómez por la ayuda que me han dado. Asimismo agradezco al Dpto. de Álgebra de la Universidad de Sevilla, en especial al Prof. Dr. D. Luís Narváez Macarro la amabilidad con la que siempre me ha atendido y al Prof. Dr. D. José M. Ucha por los valiosos materiales que me ha proporcionado. Igualmente, deseo manifestar mi agradecimiento a mi familia, que nunca ha escatimado esfuerzos y siempre ha puesto todos los medios a su alcance para hacerme más cómodo mi trabajo, pero que, paradójicamente, es quien, a cambio, ha recibido mayor falta de atención y sufrido el desánimo y la irritabilidad que tantas veces en este periodo hicieron mella en mí.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo resumimos una serie de nociones y resultados, bien conocidos en todos los casos, sobre bases de Gröbner de ideales de un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo. Con el objetivo de hacer este trabajo autocontenido (en la medida de lo posible), presentamos una prueba de cada uno de los resultados anunciados. Si bien la noción de exponente privilegiado de un polinomio y el enunciado del teorema de división que presentamos están "copiados" de [18], (J. Briançon "Weierstrass preparé à la Hironaka" Astérisque 7-8 (1973) p.p. 67-73), también pueden consultarse, como referencias para este capítulo, [1], [12], [32], [33], [54], [96].

También exponemos las nociones y resultados elementales sobre bases de Gröbner de ideales en el Álgebra de Weyl y en un anillo de operadores diferenciales con coeficientes en un cuerpo. Como referencia a estos conceptos puede consultarse [27].

1.1 Órdenes monomiales

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo y denotemos por $\mathbf{k}[X]$ el anillo de los polinomios en las indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con coeficientes en $\mathbf{k}$.

Notación 1.1.1 *La expresión X^α denotará al monomio mónico de la forma*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

donde todos los exponentes son enteros no negativos, es decir, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. Así $x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0 = 1$ será considerado un monomio mónico.

Al conjunto de todos los monomios mónicos del anillo de polinomios $\mathbf{k}[X]$ lo denotaremos por $\mathcal{M}(X)$.

Nota 1.1.2 *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \mathbf{N}^n \\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} & \longrightarrow & (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \end{array}$$

es biyectiva.

Definición 1.1.3 *Un orden monomial en $\mathbf{N}^n$ es cualquier relación $<$ en $\mathbf{N}^n$ verificando:*

1. *$<$ es orden total en $\mathbf{N}^n$.*
2. *Si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ y $\alpha < \beta$ entonces $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, $\forall \gamma \in \mathbf{N}^n$.*
3. *$<$ es un buen orden en $\mathbf{N}^n$.*

Lema 1.1.4 *Una relación $<$ de orden total en $\mathbf{N}^n$ es un buen orden si y solo si cada sucesión estrictamente decreciente en $\mathbf{N}^n$ es finita.*

Demostración. Vamos a probar que:

$$< \text{ no es buen orden } \Longleftrightarrow \text{ existe una sucesión estrictamente decreciente infinita en } \mathbf{N}^n.$$

$\Longrightarrow$ Si $<$ no es buen orden, entonces existe un subconjunto no vacío $S \subset \mathbf{N}^n$ que no tiene primer elemento.

Elegimos $\alpha(1) \in S$. Puesto que $\alpha(1)$ no es primer elemento, entonces existirá $\alpha(2) \in S$ tal que

$$\alpha(2) < \alpha(1),$$

como $\alpha(2)$ no es primer elemento, entonces existirá $\alpha(3) \in S$, de manera que

$$\alpha(3) < \alpha(2).$$

Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión infinita en S estrictamente decreciente

$$\cdots < \alpha(3) < \alpha(2) < \alpha(1).$$

$\Longleftarrow$ Dada una sucesión infinita, estrictamente decreciente

$$\cdots < \alpha(3) < \alpha(2) < \alpha(1),$$

el conjunto

$$\{\alpha(1), \alpha(2), \cdots\},$$

es un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}^n$ que no tiene primer elemento. Así, $<$ no es un buen orden. □

Nota 1.1.5 *Más adelante veremos que si se cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición 1.1.3, entonces se verifica que, la condición de que una relación $<$ en $\mathbf{N}^n$ sea un buen orden es equivalente a que $\alpha \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$. La prueba de este resultado la veremos más adelante, en el corolario 1.4.8.*

1.1.1 Ejemplos de órdenes monomiales

Definición 1.1.6 (Orden lexicográfico)
Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. Diremos que $\alpha <_{\mathcal{L}} \beta$ si existe i, $1 \leq i \leq n-1$ tal que $\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_i = \beta_i, \alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$.

Notación 1.1.7 *Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ denotamos por $|\alpha|$ la suma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.*

Definición 1.1.8 (Orden graduado lexicográfico)
Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. Diremos que $\alpha <_{\mathcal{D}} \beta$ si o bien $|\alpha| < |\beta|$ o bien $|\alpha| = |\beta|$ y α es menor que β para el orden lexicográfico.

Definición 1.1.9 (Orden lexicográfico inverso)
Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. *Diremos que* $\alpha <_{\mathcal{LJ}} \beta$ *si existe* i, $2 \leq i \leq n$ *tal que* $\alpha_n = \beta_n, \cdots, \alpha_i = \beta_i, \alpha_{i-1} < \beta_{i-1}$.

Definición 1.1.10 (Orden diagonal inverso)
Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. *Diremos que* $\alpha <_{\mathcal{DJ}} \beta$ *si o bien* $|\alpha| < |\beta|$ *o bien* $|\alpha| = |\beta|$ *y* α *es menor que* β *para el orden lexicográfico inverso.*

Proposición 1.1.11 *Los órdenes definidos anteriormente son órdenes monomiales en* $\mathbf{N}^n$.

Definición 1.1.12 *Sea*

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} f_\alpha X^\alpha, \qquad f_\alpha \in \mathbf{k}$$

un polinomio no nulo en $\mathbf{k}[X]$ *y sea* $<$ *un orden monomial en* $\mathbf{N}^n$, *definimos:*

1. *Exponente privilegiado de* f, *respecto a* $<$, *y se denota por* $\exp_<(f)$ *(o simplemente* $\exp(f)$*)*

$$\text{máx}_<\{\alpha \in \mathbf{N}^n : f_\alpha \neq 0\}.$$

2. *Monomio principal (o privilegiado) de* f *(respecto de* $<$*), al monomio de* f *correspondiente al exponente privilegiado de* f, *con respecto a* $<$. *Se denotará por* $\mathrm{mp}_<(f)$ *(o simplemente* $\mathrm{mp}(f)$*).*
3. *Llamaremos monomio mónico principal, al monomio mónico correspondiente al monomio principal, lo denotaremos por* $\mathrm{mmp}_<(f)$ *(o simplemente* $\mathrm{mmp}(f)$*).*
4. *Llamaremos coeficiente principal, al coeficiente del monomio principal, lo denotaremos por* $\mathrm{cp}_<(f)$ *(o simplemente por* $\mathrm{cp}(f)$*).*

Nota 1.1.13 *Cuando en el texto aparezcan las expresiones:* $\exp(f)$, $\mathrm{mp}(f)$, $\mathrm{mmp}(f)$, $\mathrm{cp}(f)$ *se supone que* f *es un polinomio no nulo de* $\mathbf{k}[X]$.

Proposición 1.1.14 *Con las notaciones anteriores se verifica:*

1. $\exp(fg) = \exp(f) + \exp(g)$.
2. $\mathrm{mp}(fg) = \mathrm{mp}(f)\mathrm{mp}(g)$; *y en particular,* $\mathrm{mmp}(fg) = \mathrm{mmp}(f)\mathrm{mmp}(g)$ *y* $\mathrm{cp}(fg) = \mathrm{cp}(f)\mathrm{cp}(g)$.
3. *Si* $\exp(f) \neq \exp(g)$, *entonces* $\exp(f+g) = \text{máx}\{\exp(f), \exp(g)\}$.
4. *Si* $\exp(f) = \exp(g)$, *y* $\mathrm{cp}(f) + \mathrm{cp}(g) \neq 0$ *entonces* $\exp(f+g) = \exp(f) = \exp(g)$ *y* $\mathrm{cp}(f+g) = \mathrm{cp}(f) + \mathrm{cp}(g)$.
5. *Si* $\exp(f) = \exp(g)$, *y* $\mathrm{cp}(f) + \mathrm{cp}(g) = 0$ *entonces* $\exp(f+g) < \exp(f) = \exp(g)$.

1.2 Partición asociada a un elemento de $(\mathbf{N}^n)^m$

Sea $(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(m)})$ un elemento de $(\mathbf{N}^n)^m$. Se considera la familia de subconjuntos de $\mathbf{N}^n$, Δ_i, $(1 \leq i \leq m)$, definidos por

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 & = & (\alpha^{(1)} + \mathbf{N}^n) \\ \Delta_i & = & (\alpha^{(i)} + \mathbf{N}^n) \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j),\ 2 \leq i \leq m, \\ \overline{\Delta} & = & \mathbf{N}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i). \end{array}$$

Proposición 1.2.1 *Con las notaciones anteriores, el conjunto*

$$\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \overline{\Delta}\}$$

constituye una partición de $\mathbf{N}^n$.

Definición 1.2.2 *A la partición anterior se le llama partición asociada al elemento* $(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(m)})$ *de* $(\mathbf{N}^n)^m$.

1.3 Teorema de división en $\mathbf{k}[X]$

Teorema 1.3.1 *Sea* $<$ *un orden monomial en* $\mathbf{N}^n$ *y* $\{f_1, \cdots, f_m\}$ *un subconjunto de* $\mathbf{k}[X]$, *donde cada* $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$ *y notemos por* $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \overline{\Delta}\}$ *la partición de* $\mathbf{N}^n$ *asociada a* $(\exp(f_1), \cdots, \exp(f_m))$. *Entonces, para todo* $f \in \mathbf{k}[X]$, *existe* $(q_1, \cdots, q_m, r) \in (k[X])^{m+1}$ *único tal que*

1. $f = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + r$.
2. *Si* $r \neq 0$, *todos los monomios de* r *están en* $\overline{\Delta}$.
3. *Para todo* i, *si* $q_i \neq 0$, *todo monomio* X^β *de* q_i *verifica* $\exp(f_i) + \beta \in \Delta_i$.

Demostración. Como $(\mathbf{N}^n, <)$ es un conjunto bien ordenado, se puede hacer inducción sobre $\exp(f)$.
Podemos suponer $f \neq 0$.
Vamos a empezar demostrando la existencia de la $m+1$-upla, $(q_1, \cdots, q_m, r)$.
Supongamos que $\exp(f) = (0, \ldots, 0)$ en este caso f será una constante, entonces podemos considerar dos casos:

a) Si $(0, \ldots, 0) \in \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$ entonces, por la partición anterior, tendremos que existe un único i_0 tal que $(0, \ldots, 0) \in \Delta_{i_0}$, y de ahí que f_{i_0} sea una constante. Por lo tanto podemos tomar

$$q_i = 0,\ \forall i \neq i_0;\ q_{i_0} = \frac{f}{f_{i_0}} \text{ y } r = 0.$$

b) Si $(0, \ldots, 0) \in \overline{\Delta}$, en este caso tomamos

$$q_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, m;\ \text{y } r = f.$$

Por la hipótesis de inducción suponemos el resultado probado para todo polinomio g tal que todos los monomios de g tienen exponente menor que $\alpha \in \mathbf{N}^n$ dado, con $\alpha \neq (0,\ldots,0)$.
Sea $f \in \mathbf{k}[X]$, donde $f \neq 0$ y $\exp(f) = \alpha$. Podemos considerar dos casos:

a) Si $\alpha \in \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$, entonces existe un único i_0 tal que $\alpha \in \Delta_{i_0}$, observamos que $i_0 = min\{j \mid \alpha \in (\exp(f_j) + \mathbf{N}^n)\}$.
Notaremos

$$\widehat{f} = f - c_\alpha X^\alpha \qquad \text{y} \qquad \widehat{f_{i_0}} = f_{i_0} - c_{i_0} X^{\alpha^{i_0}}$$

con $c_\alpha = \mathrm{cp}(f)$ y $c_{i_0} = \mathrm{cp}(f_{i_0})$
Se tiene
$f = c_\alpha X^\alpha + \widehat{f} = \frac{c_\alpha}{c_{i_0}} X^\beta c_{i_0} X^{\alpha^{i_0}} + \widehat{f}$,
para algún $\beta \in \mathbf{N}^n$, $\beta + \alpha^{i_0} = \alpha \in \Delta_{i_0}$.
Entonces,

$$f = c_\alpha X^\alpha + \widehat{f} = \frac{c_\alpha}{c_{i_0}} X^\beta f_{i_0} - \frac{c_\alpha}{c_{i_0}} X^\beta \widehat{f_{i_0}} + \widehat{f}.$$

Si llamamos $g = -\frac{c_\alpha}{c_{i_0}} X^\beta \widehat{f_{i_0}} + \widehat{f}$, entonces tenemos que todos los monomios de g tienen exponente menor que α. Así podemos aplicar la hipótesis de inducción a g y afirmamos que existe $(q'_1, \ldots, q'_m, r') \in (\mathbf{k}[X])^{m+1}$ tal que

$$g = \sum_{i=1}^m q'_i f_i + r',$$

donde $(q'_1, \ldots, q'_m, r')$ verifica las condiciones 2 y 3 del teorema.
Llamando

$$q_i = q'_i, \quad i \neq i_0, \quad q_{i_0} = q'_{i_0} + \frac{c_\alpha}{c_{i_0}} X^\beta, \quad r = r'$$

se tiene que

$$f = \sum_{i=1}^m q_i f_i + r,$$

donde $(q_1, \ldots, q_m, r) \in (\mathbf{k}[X])^{m+1}$ verifica las condiciones 2 y 3 del teorema.

b) Si $\alpha \in \overline{\Delta}$, entonces,

$$f = \widehat{f} + c_\alpha X^\alpha$$

donde todos los monomios de $\widehat{f}$ tienen exponente menor que α, entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a $\widehat{f}$ y tendremos que

$$f = \sum_{i=1}^m q'_i f_i + r' + c_\alpha X^\alpha$$

donde $(q'_1, \ldots, q'_m, r') \in (\mathbf{k}[X])^{m+1}$ verifica las condiciones 2 y 3 del teorema, así todos los monomios de $r' + c_\alpha X^\alpha$ están en $\overline{\Delta}$ y los de q'_i verifican la condición 3 del teorema.

Una vez demostrada la existencia, vamos a demostrar la unicidad.

Supongamos que existen $(q_1, \ldots, q_m, r)$ y $(q'_1, \ldots, q'_m, r')$ verificando las condiciones 1, 2 y 3 del teorema para un cierto $f \in \mathbf{k}[X]$, así

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + r \qquad \text{y} \qquad f = \sum_{i=1}^{m} q'_i f_i + r'$$

es decir,

$$0 = \sum_{i=1}^{m} (q_i - q'_i) f_i + (r - r').$$

Si $q_i - q'_i \neq 0$ para algún i entonces tendremos que

$$(q_i - q'_i) f_i \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \exp((q_i - q'_i) f_i) \in \Delta_i.$$

Si $r - r' \neq 0$ entonces

$$\exp(r - r') \in \overline{\Delta}.$$

Así,

$$\exp(r - r') \neq \exp((q_i - q'_i) f_i) \neq \exp((q_j - q'_j) f_j), \quad i \neq j.$$

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{m} (q_i - q'_i) f_i + (r - r') \neq 0$$

y esto es una contradicción. □

1.4 Ideales monomiales y Lema de Dickson

Definición 1.4.1 *Un ideal $I \subset \mathbf{k}[X]$ es un ideal monomial si está generado por monomios. Esto lo expresaremos de la siguiente manera:*

$$I = \langle X^{\alpha} : \alpha \in A \rangle,$$

donde A es un subconjunto de $\mathbf{N}^n$.

Vamos a caracterizar todos los monomios que pertenecen a un ideal monomial.

Lema 1.4.2 *Sea $I = \langle X^{\alpha} : \alpha \in A \rangle$ un ideal monomial. Entonces un monomio X^{β} está en I si y solo si X^{β} es divisible por X^{α} para algún $\alpha \in A$.*

Demostración. $\Longleftarrow$ Trivial, ya que si X^{β} es múltiplo de algún X^{α}, entonces

$$X^{\beta} \in I.$$

$\Longrightarrow$ Si $X^{\beta} \in I$ entonces $X^{\beta} = \sum_{i=1}^{s} h_i X^{\alpha(i)}$, donde $h_i \in \mathbf{k}[X]$ y $\alpha(i) \in A$.
Si desarrollamos cada h_i, que es un polinomio, como combinación lineal de monomios, se ve que cada término de la parte derecha de la expresión es divisible por algún $X^{\alpha(i)}$ con $\alpha(i) \in A$. Por tanto X^{β}, es divisible por algún $X^{\alpha(i)}$. □

Ejemplo 1.4.3 *Si* $I = \langle x^4y^2, x^3y^4, x^2y^5\rangle$, *entonces los exponentes de los monomios de* I *forman el conjunto*

$$((4,2)+\mathbf{N}^2)\bigcup((3,4)+\mathbf{N}^2)\bigcup((2,5)+\mathbf{N}^2)$$

y los podemos representar en la siguiente figura,

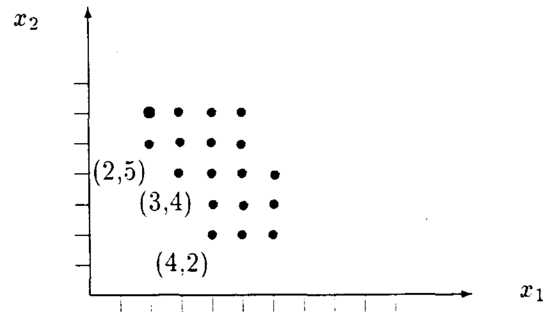

Figura 1.1:

Lema 1.4.4 *Sea* I *un ideal monomial, y sea* $f \in \mathbf{k}[X]$. *Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $f \in I$.
2. *Cada monomio de* f *está en* I.
3. f *es una* **k**-*combinación lineal de monomios en* I.

Demostración. 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1) Trivial.

1) $\Longrightarrow$ 3) Supongamos que $I = \langle X^\alpha : \alpha \in A\rangle$ con $A \subset \mathbf{N}^n$. Sea $f \in I$ entonces

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i X^{\alpha(i)},$$

donde $h_i \in \mathbf{k}[X]$, $X^{\alpha(i)} \in I$, $\alpha(i) \in A \subset \mathbf{N}^n$.
Pero cada h_i es un polinomio en $\mathbf{k}[X]$, que puede desarrollarse como suma de monomios en $\mathbf{k}[X]$, entonces la expresión de f se escribe como suma de productos de elementos de $\mathbf{k}$ por monomios, que son múltiplos de los monomios de I, por tanto también están en I; y así f queda expresada como una $\mathbf{k}$-combinación lineal de monomios en I. □

Una consecuencia inmediata de la afirmación 3) del lema 1.4.4 es que un ideal monomial está unívocamente determinado por sus monomios. De aquí, tenemos el siguiente

Corolario 1.4.5 *Dos ideales monomiales son iguales si y solo si contienen los mismos monomios.*

Teorema 1.4.6 (Lema de Dickson). *Dado un ideal monomial*

$$I = \langle X^\alpha : \alpha \in A \rangle \subset \mathbf{k}[X]$$

entonces existe $s \in \mathbf{N}$ tal que

$$I = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)} \rangle$$

con $\alpha(1), \cdots, \alpha(s) \in A$. En particular todo ideal monomial I está finitamente generado.

Nota 1.4.7 *Por supuesto que este resultado se deduce del teorema de la base de Hilbert. Damos aquí una prueba independiente de dicho teorema.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n, siendo n el número de variables. Si $n = 1$, entonces I está generado por los monomios X^α, $\alpha \in A \subset \mathbf{N}$.
Sea β el menor de los elementos de $A \subset \mathbf{N}$. Entonces X^β divide a todos sus generadores, y, por tanto

$$I = \langle X^\beta \rangle.$$

Supongamos cierto el resultado para un número de variables menor que n. Lo demostramos para n variables. Escribimos las variables

$$x_1, \cdots, x_{n-1}, y = x_n$$

de modo que los monomios en $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_{n-1}, y]$ pueden escribirse como

$$x^\alpha y^m$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ y $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{N}^{n-1}$ y $m \in \mathbf{N}$.
Supongamos que I es un ideal monomial, $I \subset \mathbf{k}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y]$. Sea J el ideal en $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ generado por los monomios x^α para los que $x^\alpha y^m \in I$, para algún $m \geq 0$. Es decir,

$$J = \langle x^\alpha : \exists m \geq 0, x^\alpha y^m \in I \rangle.$$

Al ser J un ideal monomial en $\mathbf{k}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$, por la hipótesis de inducción podemos afirmar que J está finitamente generado,

$$J = \langle x^{\alpha(1)}, \cdots, x^{\alpha(s)} \rangle.$$

Para cada $1 \leq i \leq s$, la definición de J nos dice que $x^{\alpha(i)} y^{m_i} \in I$ para algún $m_i \geq 0$. Sea m el máximo de los m_i.
Entonces para cada $0 \leq k \leq m - 1$ consideramos el ideal $J_k \subset \mathbf{k}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ generado por los monomios x^β tales que $x^\beta y^k \in I$.

Usando la hipótesis de inducción de nuevo, podemos afirmar que para todo k, J_k, tiene un conjunto finito de generadores, sea

$$J_k = \langle x^{\alpha_k(1)}, \cdots, x^{\alpha_k(s_k)} \rangle.$$

Vamos a ver que I está generado por los monomios siguientes,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{de} \quad J & : & x^{\alpha(1)} y^m, \cdots, x^{\alpha(s)} y^m, \\ \text{de} \quad J_0 & : & x^{\alpha_0(1)}, \cdots, x^{\alpha_0(s_0)}, \\ \text{de} \quad J_1 & : & x^{\alpha_1(1)} y, \cdots, x^{\alpha_1(s_1)} y, \\ \quad \vdots & & \\ \text{de} \quad J_{m-1} & : & x^{\alpha_{m-1}(1)} y^{m-1}, \cdots, x^{\alpha_{m-1}(s_{m-1})} y^{m-1}. \end{array} \right.$$

Primero observemos que cada monomio de I es divisible por uno de la lista. En efecto:
Sea $x^\alpha y^p \in I$.
Si $p \geq m$ entonces $x^\alpha y^p$ es divisible por algún $x^{\alpha(i)}y^m$ por la construcción de J.
Si $p \leq m-1$, entonces $x^\alpha y^p$ es divisible por algún $x^{\alpha_p(j)}y^p$ por la construcción de J_p. Así los anteriores monomios generan un ideal, que notaremos por I', que tiene los mismos monomios que I, ya que,

Si $x^\beta \in I \Longleftrightarrow x^\beta$ es múltiplo de un monomio de J_k con $0 \leq k \leq m-1$ ó x^β es múltiplo de un monomio de J.

Por el corolario 1.4.5, I e I' son iguales y los generadores de I son la unión de todos los generadores que hemos obtenido para los conjuntos J_k con $0 \leq k \leq m-1$.

Para completar la demostración del teorema, necesitamos demostrar que el conjunto finito de generadores puede elegirse del conjunto dado de generadores del ideal.
Escribimos las variables como $x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$. Así tenemos que,

$$I = \langle X^\alpha : \alpha \in A\rangle \subset \mathbf{k}[X].$$

Vamos a probar que I está finitamente generado por un conjunto finito de los X^α, con $\alpha \in A$. Hemos visto en los párrafos anteriores que $I = \langle X^{\beta(1)}, \cdots, X^{\beta(s)}\rangle$, para algunos monomios de I. Puesto que $X^{\beta(i)} \in I = \langle X^\alpha : \alpha \in A\rangle$, por el lema anterior podemos afirmar que cada $X^{\beta(i)}$ es divisible por $X^{\alpha(i)}, \alpha(i) \in A$ y de ahí vamos a probar que

$$I = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)}\rangle.$$

Si $X^{\beta(i)} \in I$ entonces $X^{\beta(i)}$ es divisible por algún $X^{\alpha(i)}$, es decir, existe $\gamma(i) \in A$ tal que $X^{\beta(i)} = X^{\alpha(i)}X^{\gamma(i)}$, luego
$\forall f \in I$ tenemos que $f = \sum_{i=1}^s h_i X^{\beta(i)} = \sum_{i=1}^s h_i X^{\alpha(i)}X^{\gamma(i)}$, donde $h_i X^{\gamma(i)} \in \mathbf{k}[X]$, así

$$I = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)}\rangle.$$

□

Corolario 1.4.8 *Sea $<$ una relación en $\mathbf{N}^n$ verificando:*

1. *$<$ es orden total en $\mathbf{N}^n$.*
2. *Si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ y $\alpha < \beta$ entonces $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, $\forall \gamma \in \mathbf{N}^n$.*

Entonces $<$ es un buen orden si y solo si $0 \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Si $<$ es un buen orden en $\mathbf{N}^n$, sea α_0 el primer elemento de $\mathbf{N}^n$ respecto de $<$. Supongamos que $\alpha_0 < 0$, entonces por la hipótesis 2, podemos construir,

$$\cdots < (n+1)\alpha_0 < n\alpha_0 < \cdots < 2\alpha_0 < \alpha_0 < 0.$$

Así hemos encontrado una sucesión estrictamente decreciente infinita, y esto es contradictorio con la hipótesis de que $<$ es un buen orden.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $0 \leq \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}^n$. Necesitaremos probar que el conjunto A tiene un primer elemento respecto de $<$.

Consideramos el ideal $I = \langle X^\alpha : \alpha \in A \rangle$, sabemos que este ideal es un ideal monomial y aplicando el lema de Dickson, podemos afirmar que existen $\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(s) \in A$ tales que $I = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)} \rangle$.

Por otra parte, como $<$ es un orden total en $\mathbf{N}^n$ y $\alpha(i) \in \mathbf{N}^n$, $1 \leq i \leq s$ podemos suponer que

$$\alpha(1) < \cdots < \alpha(s).$$

Veamos que $\alpha(1)$ es el primer elemento del conjunto A respecto de la relación $<$.

Sea $\alpha \in A$, entonces $X^\alpha \in I = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)} \rangle$, pero entonces por el lema 1.4.2 tendremos que X^α es divisible por algún $\alpha(i)$, $1 \leq i \leq s$, es decir, $\alpha = \alpha(i) + \gamma$, para algún $\gamma \in \mathbf{N}^n$. Pero $0 \leq \gamma$ y utilizando la hipótesis 2 tendremos que,

$$\alpha(1) \leq \alpha(i) = \alpha(i) + 0 \leq \alpha(i) + \gamma = \alpha.$$

Es decir, $\alpha(1)$ es el primer elemento de A. $\square$

Después de este corolario, podemos dar una definición equivalente a la definición 1.1.3, donde las condiciones 1 y 2 son las mismas pero la condición 3 la sustituimos por ésta otra 3'): $0 \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Corolario 1.4.9 *Sea*

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$$

una sucesión de subconjuntos de $\mathbf{N}^n$ *tal que* $E_i + \mathbf{N}^n = E_i$, $\forall i$. *Entonces la sucesión es estacionaria, es decir existe* j_0 *tal que* $\forall j \geq j_0$, $E_{j_0} = E_j$.

Demostración. Consideramos los ideales

$$I_j = \langle X^\alpha : \alpha \in E_j \rangle \subseteq \mathbf{k}[X],$$

entonces tenemos una sucesión creciente de ideales monomiales en $\mathbf{k}[X]$,

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$$

y por tanto, $\bigcup_{i \geq 1} I_i$ es un ideal monomial. Entonces por el lema de Dickson, será finitamente generado, es decir, existen $X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)}$ tales que,

$$\bigcup_{i \geq 1} I_i = \langle X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)} \rangle.$$

Sea $j_0 = min\{j : X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(s)} \in E_j\}$, entonces $I_{j_0} = I_j$, $\forall j \geq j_0$ y como los ideales monomiales están determinados por sus monomios, tendremos que,

$$E_j = E_{j_0}, \qquad \forall j \geq j_0.$$

$\square$

1.5 El teorema de la base de Hilbert y Bases de Gröbner

Notación 1.5.1 *Sea $I \subset \mathbf{k}[X]$ un ideal distinto de $\{0\}$.*

1. *Denotamos por* $\mathrm{mp}(I)$ *el conjunto de los monomios principales de los elementos de I, es decir,*
$$\mathrm{mp}(I) = \{\mathrm{mp}(f) \text{ tal que } f \in I\}.$$
2. *Denotamos por* $\langle \mathrm{mp}(I) \rangle$ *el ideal generado por los elementos de* $\mathrm{mp}(I)$.

Observación. Si I está finitamente generado, $I = \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$, entonces $\langle \mathrm{mp}(f_1), \cdots, \mathrm{mp}(f_s) \rangle$ y $\langle \mathrm{mp}(I) \rangle$ pueden ser ideales diferentes.
Siempre se cumple que
$$\langle \mathrm{mp}(f_1), \cdots, mp(f_s) \rangle \subset \langle \mathrm{mp}(I) \rangle.$$
Pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, sea $I = \langle f_1, f_2 \rangle$, donde
$$\begin{cases} f_1 = x^3 - 2xy \\ f_2 = x^2y - 2y^2 + x. \end{cases}$$
Si usamos el orden diagonal en $\mathbf{k}[x, y]$ entonces tendremos que
$$\mathrm{mp}(f_1) = x^3 \text{ y } \mathrm{mp}(f_2) = x^2$$
por tanto,
$$\langle \mathrm{mp}(f_1), \mathrm{mp}(f_2) \rangle = \langle x^3, x^2y \rangle.$$
Sea $x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy) = x^2$, entonces, $x^2 \in I$ y por tanto, $\mathrm{mp}(x^2) = x^2 \in \langle \mathrm{mp}(I) \rangle$, sin embargo $x^2 \notin \langle \mathrm{mp}(f_1), \mathrm{mp}(f_2) \rangle$ ya que x^2 no es divisible ni por x^3 ni por x^2y.

Proposición 1.5.2 *Sea $I \subset \mathbf{k}[X]$ un ideal no nulo. Entonces se verifica que:*

1. $\langle \mathrm{mp}(I) \rangle$ *es un ideal monomial.*
2. *Existen $g_1, g_2, \cdots, g_t$ pertenecientes a I tales que*
$$\langle \mathrm{mp}(I) \rangle = \langle \mathrm{mp}(g_1), \mathrm{mp}(g_2), \cdots, \mathrm{mp}(g_t) \rangle.$$

Demostración.

1. Consideramos el ideal monomial generado por el monomio principal de cada $g \in I \setminus \{0\}$, es decir (ver notación 1.1.12)
$$\langle \mathrm{mmp}(g) : g \in I \setminus \{0\} \rangle.$$

Puesto que $\mathrm{mmp}(g)$ y $\mathrm{mp}(g)$ se diferencian solo en una constante no nula, resulta que

$$\langle \mathrm{mmp}(g)\rangle = \langle \mathrm{mp}(g)\rangle, \qquad \forall g \in I \setminus \{0\},$$

y como

$$\langle \mathrm{mp}(g) : g \in I \setminus \{0\}\rangle = \langle \mathrm{mp}(I)\rangle,$$

entonces $\langle \mathrm{mp}(I)\rangle$ es un ideal monomial.

2. Puesto que $\langle \mathrm{mp}(I)\rangle$ está generado por los monomios $\mathrm{mmp}(g)$ para $g \in I \setminus \{0\}$, por el lema de Dickson podemos afirmar que existen $g_1, \cdots, g_s \in I \setminus \{0\}$ tal que,

$$\langle \mathrm{mp}(I)\rangle = \langle \mathrm{mmp}(g_1), \cdots, \mathrm{mmp}(g_s)\rangle.$$

Puesto que $\mathrm{mmp}(g_i)$ difiere de $\mathrm{mp}(g_i)$ en una constante no nula, podemos decir que

$$\langle \mathrm{mp}(I)\rangle = \langle \mathrm{mp}(g_1), \cdots, \mathrm{mp}(g_s)\rangle.$$

□

Teorema 1.5.3 (Teorema de la base de Hilbert). *Cada ideal $I \subset \mathbf{k}[X]$ está finitamente generado.*

Demostración. Por la proposición anterior, existen $g_1, g_2, \cdots, g_t \in I$ tales que

$$\langle \mathrm{mp}(I)\rangle = \langle \mathrm{mp}(g_1), \mathrm{mp}(g_2), \cdots, \mathrm{mp}(g_t)\rangle.$$

Vamos a demostrar que

$$I = \langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle.$$

Siempre se verifica $\langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle \subset I$, ya que cada $g_i \in I$, e I es un ideal. Veamos la inclusión recíproca, sea $f \in I$, aplicando el algoritmo de la división para dividir f entre $g_1, g_2, \cdots, g_t$ tenemos,

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_t g_t + r$$

donde ninguno de los monomios de r es divisible por ninguno de los $\mathrm{mp}(g_i)$.
Vamos a demostrar que $r = 0$.

$$r = f - (a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_t g_t) \in I$$

Si $r \neq 0$, entonces

$$\mathrm{mp}(r) \in \langle \mathrm{mp}(I)\rangle = \langle \mathrm{mp}(g_1), \mathrm{mp}(g_2), \cdots, \mathrm{mp}(g_t)\rangle,$$

y por tanto, tenemos que $\mathrm{mp}(r)$ debe ser divisible por algún $\mathrm{mp}(g_i)$, y esto es contradictorio, por lo tanto,

$$r = 0.$$

Así

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_t g_t$$

por tanto $f \in \langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle$ lo que demuestra que $I \subset \langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle$. □

Corolario 1.5.4 (Condición de cadena ascendente). *Sea*

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots.$$

una cadena ascendente de ideales en $\mathbf{k}[X]$. Entonces existe un $N \geq 1$ tal que

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \cdots$$

Demostración. Dada una cadena ascendente $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ consideramos $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$, veamos que I es un ideal.

1. $0 \in I$, puesto que $0 \in I_i, \quad \forall i$.
2. Sean $f, g \in I$, entonces existen i, j tales que $f \in I_i$ y $g \in I_j$.
   Como estos ideales forman una cadena ascendente, podemos suponer que $i \leq j$, entonces $f, g \in I_j$, y por lo tanto $f + g \in I_j$ y de ahí que $f + g \in I$.
3. Si $f \in I$ y $r \in \mathbf{k}[X]$, existe i tal que $f \in I_i$, por lo tanto $rf \in I_i$ y de ahí que $rf \in I$.

Así I es un ideal de $\mathbf{k}[X]$. Por el teorema de la base de Hilbert, el ideal I deberá de ser finitamente generado, es decir,

$$I = \langle f_1, \cdots, f_t \rangle.$$

Pero cada uno de los f_i pertenecerá a algún I_{j_i}, es decir $f_i \in I_{j_i}$ para algún $j_i \geq 1$.
Tomamos N el máximo de los j_i. Entonces por definición de cadena ascendente $f_i \in I_N$ para todo i, luego tenemos

$$I = \langle f_1, \cdots, f_t \rangle \subset I_N \subset I_{N+1} \subset \cdots I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i,$$

luego la cadena se estabiliza en I_N. □

Definición 1.5.5 *Dado un orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^n$, diremos que un subconjunto finito $G = \{g_1, \cdots, g_t\}$ de un ideal I de $\mathbf{k}[X]$ es una base de Gröbner (o base estándar) de I relativamente a $<$ si verifica:*

$$\langle \mathrm{mp}(g_1), \cdots, \mathrm{mp}(g_t) \rangle = \langle \mathrm{mp}(I) \rangle.$$

Ejemplo 1.5.6 *Dado el ideal $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq \mathbf{k}[x, y]$, siendo $f_1 = x^3 - 2xy$ y $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$, entonces si consideramos el orden diagonal, afirmamos que $\{f_1, f_2\}$ no es una base de Gröbner, ya que*

$$y(x^3 - 2xy) - x(x^2y - 2y^2 + x) = -x^2, \qquad \mathrm{mp}(-x^2) = -x^2$$

y

$$-x^2 \notin \langle x^3, x^2y \rangle = \langle \mathrm{mp}(f_1), \mathrm{mp}(f_2) \rangle.$$

Ejemplo 1.5.7 *Consideremos el ideal $J = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle x + z, y - z \rangle$. En este caso el conjunto $\{g_1, g_2\}$ forman una base de Gröbner usando el orden lexicográfico para el ideal J.*

Corolario 1.5.8 *Dado un orden monomial, $<$ en $\mathbf{N}^n$, todo ideal $I \subseteq \mathbf{k}[X]$ no nulo tiene una base de Gröbner.*

Demostración. Ver proposición 1.5.2. □

Corolario 1.5.9 *Sea $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_t\}$ una base de Gröbner para un ideal $I \subseteq \mathbf{k}[X]$ y sea $f \in \mathbf{k}[X]$, entonces se verifica que $f \in I$ si y solo si el resto de la división de f por G es cero. En particular toda base de Gröbner es un sistema de generadores.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Sea $f \in I$ entonces aplicando el algoritmo de la división podemos afirmar que existen $q_1, \cdots, q_t, r$ únicos tales que

$$f = \sum_{i=1}^{t} q_i g_i + r$$

donde ningún monomio de r es divisible por ninguno de los $\mathrm{mp}(g_i)$.

Si $r \neq 0$, como $r = f - \sum_{i=1}^{t} q_i g_i \in I$, y al ser el conjunto G una base de Gröbner tendremos que $\mathrm{mp}(r) \in \langle \mathrm{mp}(I) \rangle$ y esto es una contradicción con el hecho de que ningún monomio de r es divisible por ninguno de los $\mathrm{mp}(g_i)$.

$\Longleftarrow$ Si para cualquier $f \in \mathbf{k}[X]$ se tiene $f = \sum_{i=1}^{t} q_i g_i$, con $(q_1, \cdots, q_t)$ verificando las condiciones del teorema de división, entonces $f \in I$. □

Corolario 1.5.10 *Dados $I \subseteq \mathbf{k}[X]$ un ideal no nulo, $\{f_1, \cdots, f_m\}$ un sistema generador de I y $<$ un orden monomial en $\mathbf{N}^n$. Entonces son equivalentes:*

1. *$\{f_1, \cdots, f_m\}$ es una base de Gröbner para el orden $<$.*
2. *$\forall f \in \mathbf{k}[X]$, $f \in I$ si y solo si el resto de dividir f entre $\{f_1, \cdots, f_m\}$ es cero.*

Demostración. 1 $\Longrightarrow$ 2 es el corolario anterior.
2 $\Longrightarrow$ 1 Sea $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \bar{\Delta}\}$ la partición asociada a $(\exp(f_1), \cdots, \exp(f_m))$.
Sea $f \in I$, entonces por hipótesis tenemos que,

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i.$$

Si $q_i f_i \neq 0$ entonces $\exp(q_i f_i) \in \Delta_i$ y si $q_i f_i \neq q_j f_j$ entonces $\exp(q_i f_i) \neq \exp(q_j f_j)$. Por tanto se verificará que,

$$\exp(f) = \max_{1 \leq i \leq m}\{\exp(q_i f_i)\} = \exp(q_h f_h),$$

para algún h, $1 \leq h \leq m$, luego,

$$\mathrm{mp}(f) = \mathrm{mp}(q_h f_h) = \mathrm{mp}(q_h)\mathrm{mp}(f_h) \in \langle \mathrm{mp}(f_1), \cdots, \mathrm{mp}(f_m) \rangle.$$

□

1.6 S-polinomios. Algoritmo de Buchberger

Definición 1.6.1 *Sean $f, g \in \mathbf{k}[X]$ polinomios no nulos y un orden monomial dado.*

1. *Si $\exp(f) = \alpha$ y $\exp(g) = \beta$, entonces notemos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$, donde $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. (Entonces X^γ es el mínimo común múltiplo de $\mathrm{mmp}(f)$ y de $\mathrm{mmp}(g)$).*
2. *Llamamos S-polinomio de f y g a la expresión*

$$S(f, g) = \frac{X^\gamma}{\mathrm{mp}(f)} \cdot f - \frac{X^\gamma}{\mathrm{mp}(g)} \cdot g.$$

Ejemplo 1.6.2 *Sean* $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ *y* $g = 3x^4y + y^2$ *pertenecientes a* $\mathbf{R}[x, y]$. *Consideremos el orden diagonal. Entonces* $\gamma = (4, 2)$ *y*

$$S(f, g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g = -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Lema 1.6.3 *Con la notación anterior se verifica que*

$$\exp(S(f, g)) < \gamma.$$

Teorema 1.6.4 (Teorema de Buchberger). *Sean* I *un ideal polinomial y* $G = \{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ *un sistema de generadores de* I. *Entonces se verifica que* G *es un una base de Gröbner de* I *si y solo si para cada* $i \neq j$, *el resto de la división de* $S(f_i, f_j)$ *por* G *es cero.*

Demostración. Presentamos aquí la prueba dada por M. Lejeune-Jalabert en [54].
$\Longrightarrow$ Como $S(f_i, f_j) \in I$ entonces el resto de dividir $S(f_i, f_j)$ por G es cero.

$\Longleftarrow$ Veamos que para todo $f \in I$ el resto de dividir f entre G es cero.

Al dividir f entre G, por el algoritmo de la división, obtenemos,

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i + g,$$

donde si $g \neq 0$, tenemos que $g = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$ y si $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{s} (\exp(f_i) + \mathbf{N}^n)$.

Por otro lado,

$$g = f - (h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s),$$

como $f \in I$ y $h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s \in I$ entonces $g \in I$, y al ser $\{f_1, \cdots, f_s\}$ un sistema generador de I, entonces que existen $H_1, \cdots, H_s \in \mathbf{k}[X]$ no todos nulos tales que,

$$g = H_1 f_1 + \cdots + H_s f_s.$$

Sea

$$N = \text{máx}_{i, H_i \neq 0} \{\exp(H_i f_i)\}.$$

- Veamos que al menos existen dos subíndices, i, j donde se alcance este máximo, es decir,

$$\exp(H_i f_i) = \exp(H_j f_j) = N.$$

Supongamos que existiese un único índice i_0 tal que $\exp(H_i f_i) = N$, entonces se verificará que $\exp(g) = N$ y así tendremos que,

$$\exp(g) = \exp(H_{i_0} f_{i_0}) = \exp(H_{i_0}) + \exp(f_{i_0}) \in \bigcup_{i=1}^{s} (\exp(f_i) + \mathbf{N}^n),$$

y esto es contradictorio con lo visto anteriormente. Por lo tanto existen al menos dos subíndices, i, j tales que, $\exp(H_i f_i) = \exp(H_j f_j) = N$. Sean $i_0 < i_1 < \cdots < i_t$, $t \geq 1$ los subíndices ordenados tales que $\exp(H_i f_i) = N$.

Supongamos

$$\begin{array}{lll} \mathrm{mp}(f_{i_0}) = \lambda_{i_0} X^{\alpha}, & \lambda_{i_0} \in \mathbf{k}, & \lambda_{i_0} \neq 0, \\ \mathrm{mp}(f_{i_1}) = \lambda_{i_1} X^{\beta}, & \lambda_{i_1} \in \mathbf{k}, & \lambda_{i_1} \neq 0, \\ \mathrm{mp}(H_{i_0}) = \nu_{i_0} X^{u}, & \nu_{i_0} \in \mathbf{k}, & \nu_{i_0} \neq 0, \\ \mathrm{mp}(H_{i_1}) = \nu_{i_1} X^{v}, & \nu_{i_1} \in \mathbf{k}, & \nu_{i_1} \neq 0, \end{array}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, $u = (u_1, \cdots, u_n)$ y $v = (v_1, \cdots, v_n)$.
Como $\exp(H_{i_0} f_{i_0}) = \exp(H_{i_1} f_{i_1})$, tenemos que $\exp(H_{i_0}) + \exp(f_{i_0}) = \exp(H_{i_1}) + \exp(f_{i_1})$ y de ahí que,

$$\alpha + u = \beta + v = N.$$

Sea $\gamma_i = \text{máx}(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \cdots, n$, observamos que $\gamma = \mathrm{mcm}(\alpha, \beta)$, entonces se verifica que,

$$u_i \geq \gamma_i - \alpha_i \text{ y } v_i \geq \gamma_i - \beta_i \text{ con } i = 1, \cdots, n$$

en efecto,
si $\alpha_i \geq \beta_i$, entonces $\gamma_i = \alpha_i$ y al ser $u_i \geq 0$, tendremos que $u_i \geq \gamma_i - \alpha_i$ y

$$v_i = u_i + \alpha_i - \beta_i = u_i + \gamma_i - \beta_i \geq \gamma_i - \beta_i,$$

si $\alpha_i \leq \beta_i$ entonces $\gamma_i = \beta_i$ entonces como $v_i \geq 0$ entonces $v_i \geq \gamma_i - \beta_i$ y

$$u_i = v_i + \beta_i - \alpha_i \geq \beta_i - \alpha_i = \gamma_i - \alpha_i,$$

de donde podemos afirmar que,

$$u \geq \gamma - \alpha \text{ y } v \geq \gamma - \beta.$$

Como $u + \alpha = v + \beta$ entonces $u - (\gamma - \alpha) = v - (\gamma - \beta)$, entonces sea

$$p = u - (\gamma - \alpha) = v - (\gamma - \beta) \in \mathbf{N}^n.$$

Así tendremos que,

$$X^p S(f_{i_0}, f_{i_1}) = X^p \left(\frac{X^{\gamma-\alpha}}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} - \frac{X^{\gamma-\alpha}}{\lambda_{i_1}} f_{i_1} \right) = \tag{1.6.4}$$

$$= \frac{X^{p+(\gamma-\alpha)}}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} - \frac{X^{p+(\gamma-\alpha)}}{\lambda_{i_1}} f_{i_1} = \frac{X^u}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} - \frac{X^v}{\lambda_{i_1}} f_{i_1} =$$

$$= \frac{\mathrm{mp}(H_{i_0})}{\lambda_{i_0} v_{i_0}} f_{i_0} - \frac{\mathrm{mp}(H_{i_1})}{\lambda_{i_1} v_{i_1}} f_{i_1}.$$

Reescribimos ahora g,

$$g = H_{i_0} f_{i_0} + H_{i_1} f_{i_1} + \sum_{j \geq 2}^{t} H_{i_j} f_{i_j} + \sum_{i \neq i_0, \cdots, i_t} H_i f_i =$$

$$= \mathrm{mp}(H_{i_0}) f_{i_0} + \mathrm{mp}(H_{i_1}) f_{i_1} + (H_{i_0} - \mathrm{mp}(H_{i_0}))\, f_{i_0} + (H_{i_1} - \mathrm{mp}(H_{i_1}))\, f_{i_1} +$$

$$+ \sum_{j \geq 2}^{t} H_{i_j} f_{i_j} + \sum_{i \neq i_0, \cdots, i_t} H_i f_i,$$

y teniendo en cuenta (1.6.4), tenemos

$$g = \lambda_{i_0} v_{i_0} X^p S(f_{i_0}, f_{i_1}) + \left(1 + \frac{\lambda_{i_0} v_{i_0}}{\lambda_{i_1} v_{i_1}}\right) \mathrm{mp}(H_{i_1}) f_{i_1} +$$

$$+\left(H_{i_0}-\mathrm{mp}(H_{i_0})\right) f_{i_0}+\left(H_{i_1}-\mathrm{mp}(H_{i_1})\right) f_{i_1}+\sum_{j\geq 2}^{t} H_{i_j} f_{i_j}+\sum_{i\neq i_0,\cdots,i_t} H_i f_i=$$

$$=\lambda_{i_0} v_{i_0} X^p S(f_{i_0},f_{i_1})+\left(H_{i_0}-\mathrm{mp}(H_{i_0})\right) f_{i_0}+\left(H_{i_1}+\frac{\lambda_{i_0} v_{i_0}}{\lambda_{i_1} v_{i_1}}\mathrm{mp}(H_{i_1})\right) f_{i_1}+$$

$$+\sum_{j\geq 2}^{t} H_{i_j} f_{i_j}+\sum_{i\neq i_0,\cdots,i_t} H_i f_i.$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} H'_{i_0} &= H_{i_0}-\mathrm{mp}(H_{i_0}),\\ H'_{i_1} &= H_{i_1}+\frac{\lambda_{i_0} v_{i_0}}{\lambda_{i_1} v_{i_1}}\mathrm{mp}(H_{i_1}),\\ H'_i &= H_i,\ i\neq i_0,i_1, \end{aligned}$$

entonces se tiene,

$$\begin{array}{ll} \exp(H'_{i_0} f_{i_0})<N, & \text{si } H'_{i_0}\neq 0,\\ \exp(H'_{i_1} f_{i_1})\leq N, & \text{si } H'_{i_1}\neq 0,\\ \exp(H'_{i_j} f_{i_j})=N, & j\geq 2,\\ \exp(H'_i f_i)<N, & i\neq i_0,\cdots,i_t \text{ si } H'_i\neq 0, \end{array}$$

y

$$g=\lambda_{i_0} v_{i_0} X^p S(f_{i_0},f_{i_1})+\sum_{i=1}^{s} H'_i f_i.$$

Vamos a razonar los exponentes principales que tienen los términos que forman la nueva expresión de g,

$$\exp(X^p S(f_{i_0},f_{i_1}))=p+\exp(S(f_{i_0},f_{i_1}))<p+\gamma=N,\quad \text{si } S(f_{i_0},f_{i_1})\neq 0.$$

Ahora, o bien $H'_i=0$, $i=1,\cdots,s$, o si existe algún $H'_i\neq 0$ sea

$$N'=\max\{i, H'_i\neq 0\}\{\exp(H'_i f_i)\},$$

entonces puede suceder que $N'<N$ o en caso contrario, $N=N'$, razonamos como antes y encontramos al menos dos subíndices $i'\neq j'$ tal que $\exp(H_{i'} f_{i'})=\exp(H_{j'} f_{j'})=N'=N$. Haciendo los mismos cálculos que hemos hecho antes, encontramos $q_{i_j}\in\mathbf{N}^n$, $\lambda_{i_j}\in\mathbf{k}$, $i<j$, $i,j=i_0,\cdots,i_t$ y $\widetilde{H_i}\in\mathbf{k}[X]$, $i=1,\cdots,s$ tales que,

$$g=\sum_{i<j,i_0,\cdots,i_t}\lambda_{ij} X^{q_{ij}} S(f_i,f_j)+\sum_i \widetilde{H_i} f_i,$$

y que

$$\exp(X^{q_{ij}} S(f_i,f_j))<N,$$

y o bien $\widetilde{H_i}=0$, $i=1,\cdots,s$ o $\max_{i,\widetilde{H_i}\neq 0}\{\exp(\widetilde{H_i} f_i)\}<N$.

Como por hipótesis se verifica que el resto de dividir $S(f_i,f_j)$ entre G es cero, entonces existen $h^l_{ij}\in\mathbf{k}[X]$ tales que $S(f_i,f_j)=\sum_{l=1}^{s} h^l_{ij} f_l$ y si $h^l_{ij}\neq 0$, tenemos que $\exp\left(h^l_{ij} f_l\right)\leq\exp\left(S(f_i,f_j)\right)$. Entonces

$$X^{q_{ij}} S(f_i,f_j)=\sum_{l=1}^{s} X^{q_{ij}} h^l_{ij} f_l,\quad \text{y si } h^l_{ij}\neq 0,\ \exp\left(X^{q_{ij}} h^l_{ij} f_l\right)\leq\exp\left(X^{q_{ij}} S(f_i,f_j)\right)<N.$$

Se tiene así un nueva expresión para g,

$$g=\sum_{i=1}^{s}\widehat{H_i} f_i,$$

donde $N_1 = \text{máx}_{i,\widehat{H_i}\neq 0} \exp\left(\widehat{H_i} f_i\right) < N$.

Podemos comenzar de nuevo con esta expresión de g, hacemos todos los cálculos anteriores y razonando así obtendremos, si $g \neq 0$ una sucesión infinita $\{N_p\}_{p\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}^n$ tales que

$$\cdots < N_{p+1} < N_p < \cdots < N_1 < N,$$

y esto es imposible. □

Este teorema proporciona un algoritmo para calcular una base de Gröbner de un ideal I de $\mathbf{k}[X]$ a partir de una familia $\{f_1, \cdots, f_s\}$ de generadores de I. En efecto, basta dividir, para cada (i, j), $S(f_i, f_j)$ entre $\{f_1, \cdots, f_s\}$ y calcular el resto. Si el resto es no nulo se añade al conjunto de generadores y se vuelve a empezar. Dicho proceso acaba, pues cada resto no nulo proporciona un exponente principal que no está en el conjunto de elementos de $\mathbf{N}^n$ definido por los generadores anteriores.

Ejemplo 1.6.5 *Sea el ideal $I = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$. Se verifica que el conjunto $G = \{y - x^2, z - x^3\}$ es una base de Gröbner si consideramos el orden lexicográfico con $y > z > x$. Sin embargo no es base de Gröbner si consideramos el orden lexicográfico con $x > y > z$.*

1.7 Bases de Gröbner en el Álgebra de Weyl

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Sea $A_n(\mathbf{k})$ el álgebra de Weyl de orden $n \geq 1$, es decir,

$$A_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}[X][\partial] = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n][\partial_1, \cdots, \partial_n],$$

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0, \qquad [\partial_i, x_j] = \delta_{ij}.$$

Dado un elemento no nulo

$$P = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^{2n}} a_{(\alpha,\beta)} X^\alpha \partial^\beta \in A_n(\mathbf{k}) \qquad \text{con} \qquad a_{(\alpha,\beta)} \in \mathbf{k},$$

denotamos por $\mathcal{N}(P)$ su diagrama de Newton:

$$\mathcal{N}(P) = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n} \,|a_{(\alpha,\beta)\neq 0}\right\}.$$

Dado un orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^{2n}$, llamaremos exponente principal de P, respecto de $<$, a la siguiente expresión

$$\exp_<(P) = \text{máx}\{\mathcal{N}(P)\}.$$

Notaremos $\exp(P)$ en lugar de $\exp_<(P)$ si no hay riesgo de confusión. Dados $P, Q \in A_n(\mathbf{k})$ el exponente principal verifica las siguientes propiedades:

1. $\exp(P + Q) \leq \text{máx}\{\exp(P), \exp(Q)\}$.
2. $\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q), \quad \exp([P, Q]) < \exp(PQ)$.

(Ver por ejemplo [27]).

Se llama coeficiente principal del operador $P \in A_n(\mathbf{k})$, siendo $P \neq 0$, respecto de $<$, y lo representamos por $c_<(P)$ (o mejor c(P))a la siguiente expresión

$$c(P) = a_{\exp(P)}.$$

Dados $P, Q \in A_n(\mathbf{k})$, si $\exp(P) = \exp(Q)$, se tiene

1. Si $c(P) + c(Q) \neq 0$ entonces $\exp(P + Q) = \exp(P) = \exp(Q)$.
2. Si $c(P) + c(Q) = 0$ entonces $\exp(P + Q) < \exp(P) = \exp(Q)$.

Dado un ideal (a la izquierda) I de $A_n(\mathbf{k})$, definimos

$$\operatorname{Exp}(I) = \{\exp(P) \,|P \in I,\ P \neq 0\}.$$

Con la notación anterior se verifica que

$$\operatorname{Exp}(I) + \mathbf{N}^{2n} = \operatorname{Exp}(I).$$

Dado un ideal I de $A_n(\mathbf{k})$, diremos que un subconjunto $\{P_1, \cdots, P_m\}$ de I es una base de Gröbner para I, respecto del orden $<$ definido en $\mathbf{N}^{2n}$, si se verifica que

$$\operatorname{Exp}(I) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp(P_i) + \mathbf{N}^{2n}\right).$$

En [27] estas bases reciben el nombre de bases de división.

Sea $(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(m)})$ un elemento de $(\mathbf{N}^{2n})^m$. Se considera la familia $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \overline{\Delta}\}$, de subconjuntos de $\mathbf{N}^{2n}$, (ver 1.2), que constituye una partición de $\mathbf{N}^{2n}$.

Teorema 1.7.1 (Teorema de división)
Dado $<$ un orden monomial en $\mathbf{N}^{2n}$ y $(P_1, \cdots, P_m)$ un elemento de $A_n(\mathbf{k})^m$, tal que $P_j \neq 0$, $1 \leq j \leq m$. Sea $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \overline{\Delta}\}$ la partición de $\mathbf{N}^{2n}$ asociada a $(\exp(P_1), \cdots, \exp(P_m))$. Entonces, para todo $P \in A_n(\mathbf{k})$, existe $(Q_1, \cdots, Q_m, R) \in A_n(\mathbf{k})^{m+1}$ único tal que

1. $P = \sum_{i=1}^{m} Q_i P_i + R$.
2. $\exp(P_j) + \mathcal{N}(Q_j) \subseteq \Delta_j$.
3. $\mathcal{N}(R) \subseteq \overline{\Delta}$.

La familia $(Q_i)_{1 \leq i \leq m}$ es llamada la familia de cocientes y R el resto de la división de P por $(P_1, \cdots, P_m)$. La demostración de este teorema puede consultarse en [27].

A continuación vamos a enunciar el teorema de caracterización de las bases de Gröbner en $A_n(\mathbf{k})$.

Teorema 1.7.2 *Sea I un ideal (a la izquierda) no nulo en $A_n(\mathbf{k})$ y sea $G = \{P_1, \cdots, P_m\}$ un subconjunto de I. Se verifica que G es una base de Gröbner para el ideal I si y sólo si el resto de dividir cualquier elemento $P \in I$ por G es cero.*

Para la demostración de este teorema puede consultarse [27].

Definición 1.7.3 *Sean $P, Q \in A_n(\mathbf{k})$ operadores no nulos y un orden monomial dado en $\mathbf{N}^{2n}$.*

1. *Si $\exp(P) = (\alpha, \delta)$ y $\exp(Q) = (\alpha', \delta')$, entonces notemos $(\beta, \gamma) = mcm((\alpha, \delta), (\alpha', \delta'))$ (ver 1.6.1).*
2. *Llamamos S-operador de P y Q a la expresión*

$$S(P, Q) = \frac{X^\beta \partial^\gamma}{c(P) X^\alpha \partial^\delta} P - \frac{X^\beta \partial^\gamma}{c(Q) X^{\alpha'} \partial^{\delta'}} Q.$$

Teorema 1.7.4 *([27]) Sean I un ideal a la izquierda en $A_n(\mathbf{k})$ y $G = \{P_1, P_2, \cdots, P_s\}$ un sistema de generadores de I. Entonces se verifica que G es un una base de Gröbner de I si y solo si para cada $i \neq j$, el resto de la división de $S(P_i, P_j)$ por G es cero.*

Si tomamos como anillo de coeficientes $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{X\} = \mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$, el anillo de las series convergentes en n variables con coeficientes complejos, se tiene (ver [27]) una versión análoga a la anterior de base de división para ideales de $\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial] = \mathcal{O}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$, anillo de operadores diferenciales con coeficientes en $\mathcal{O}$. Dicha noción será utilizada en 3.6.1

1.8 Bases de Gröbner en un anillo de operadores diferenciales con coeficientes en un cuerpo K

Sea $Q_n = \mathbf{k}(X) = \mathbf{k}(x_1, \cdots, x_n)$ el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$ y sea $\widehat{Q}_n = \mathbf{k}((X)) = \mathbf{k}((x_1, \cdots, x_n))$ el cuerpo de fracciones del anillo de series formales $\mathbf{k}[[x_1, \cdots, x_n]]$.

Sea K uno cualquiera de los cuerpos $\mathbf{k}$, Q_n, $\widehat{Q}_n$. Denotemos por $K[\partial] = K[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ el anillo de operadores diferenciales con coeficientes en K. Si $<$ es un orden monomial en $\mathbf{N}^n$, se dispone en $K[\partial]$ de una noción de exponente principal análoga al caso conmutativo (ver 1.1.12) y al caso del álgebra de Weyl (ver 1.7). Si $P \in K[\partial]$ y $P = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} p_\alpha \partial^\alpha$ con $p_\alpha \in K$, se define $\exp_<(P)$(o $\exp(P)$ si no hay riesgo de confusión) como el máximo, respecto de $<$, del conjunto $\{\alpha \,|p_\alpha \neq 0\}$.

Dados $P, Q \in K[\partial]$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $\exp(P + Q) \leq \max\{\exp(P), \exp(Q)\}$.
2. $\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q)$.

Si I es un ideal a la izquierda de $K[\partial]$ se define

$$\mathrm{Exp}(I) = \{\exp(P) \,|P \in I \setminus \{0\}\}.$$

Se tiene $\mathrm{Exp}(I) = \mathrm{Exp}(I) + \mathbf{N}^n$.

Se dice que una familia $\{P_1, \cdots, P_m\}$ es base de Gröbner, respecto de $<$, si $\text{Exp}(I) = \bigcup_{i=1}^{m} (\exp(P_i) + \mathbf{N}^n)$.

En $K[\partial]$ tenemos el teorema de división y el teorema de caracterización de bases de Gröbner, que son análogos a los vistos anteriormente.

Teorema 1.8.1 (Teorema de división)
Sea $(P_1, \cdots, P_m) \in K[\partial]^m$, *tal que* $P_j \neq 0$, $1 \leq j \leq m$. *Sea* $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_m, \overline{\Delta}\}$ *la partición de* $\mathbf{N}^n$ *asociada a* $(\exp(P_1), \cdots, \exp(P_m))$. *Entonces, para todo* $P \in K[\partial]$, *existe un único elemento* $(Q_1, \cdots, Q_m, R) \in K[\partial]^{m+1}$ *tal que*

1. $P = \sum_{i=1}^{m} Q_i P_i + R$.
2. *Para todo monomio* ∂^β *en* Q_j *se verifica que* $\exp_(P_j) + \beta \subseteq \Delta_j$.
3. *Si* $R \neq 0$ *entonces todo monomio en* ∂ *de* R *pertenece a* $\overline{\Delta}$.

La familia $(Q_i)_{1 \leq i \leq m}$ es llamada la familia de cocientes y R el resto de la división de P por $(P_1, \cdots, P_m)$.

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 1.7.1

A continuación vamos a enunciar el teorema de caracterización de las bases de Gröbner en $K[\partial]$.

Teorema 1.8.2 *Sea* I *un ideal (a la izquierda) no nulo en* $K[\partial]$ *y sea* $G = \{P_1, \cdots, P_m\}$ *un subconjunto de* I. *Se verifica que* G *es una base de Gröbner para el ideal* I *si y sólo si el resto de dividir cualquier elemento* $P \in I$ *por* G *es cero.*

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 1.7.2.

Capítulo 2

Módulos de monomios en el sentido de Janet

En este capítulo, siguiendo a Janet, vamos a ver algunas propiedades que verifican los monomios mónicos del anillo $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$. En lo sucesivo cuando hablemos de monomios nos estaremos refiriendo a monomios mónicos.

Estudiaremos el concepto de módulo de Janet, daremos un procedimiento para calcular la base de un módulo de Janet y caracterizaremos estas bases. En este estudio pondremos de manifiesto la similitud existente entre el lema de Dickson y el algoritmo de Buchberger, entre otros, con los conceptos y propiedades utilizados por Janet para el estudio de los monomios del anillo $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$.

2.1 Módulos de monomios e ideales en $\mathbf{N}^n$

Vamos a comenzar el capítulo dando algunas generalidades y propiedades que verifican las sucesiones de monomios.

2.1.1 Resultados sobre las sucesiones de monomios

Teorema 2.1.1 *Toda sucesión de monomios distintos,*

$$X^{\alpha(1)}, X^{\alpha(2)}, \ldots, X^{\alpha(i)}, \ldots$$

tales que cada uno de ellos no es múltiplo de ninguno de los anteriores, es finita.

Observación. Podemos observar que la afirmación de que cada uno de los monomios del conjunto no sea múltiplo de ninguno de los anteriores, es necesaria, ya que si solo se exige que no sea múltiplo del anterior podríamos tener una situación del tipo

$$x_1x_2^2,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^3,\ x_1^3x_2, x_1x_2^4,\ x_1^4x_2, \cdots$$

y esta sucesión es infinita.

Este teorema es un caso particular de la propiedad clásica que verifica todo conjunto bien ordenado respecto de un orden determinado, cuyo enunciado es : "En todo conjunto bien ordenado toda sucesión estrictamente decreciente es finita."

Demostración. Este teorema es un corolario del lema de Dickson, (ver 1.4.9), pero daremos aquí la prueba que da Janet en [44]. Haremos la demostración por inducción sobre n, siendo n el número de variables.

- Para $n = 1$, la sucesión sería una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos que es finita.
- Suponemos que toda sucesión de monomios distintos en $n-1$ variables, tal que cada uno de los monomios de la sucesión no es múltiplo de ninguno de los monomios anteriores, es finita.
- Lo demostraremos para una sucesión de monomios en n variables.
Sea S la sucesión de monomios dada y
supongamos que
$$X^{\alpha(1)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
es el primer término de esta sucesión. En cualquiera de los siguientes monomios de la sucesión, el exponente de al menos una variable x_i, tiene que ser inferior al exponente de x_i en $X^{\alpha(1)}$, $\alpha(1)_i$. Así podemos formar las siguientes subsucesiones S_{ik} de S,
$$S_{ik} = \{X^{\alpha(j)} \mid \alpha(j)_i = k\}, \qquad 1 \leq i \leq n, \qquad k = 0, \cdots, \alpha(1)_i - 1$$
es decir, cada S_{ik} estará formada por la sucesión de monomios de S donde la variable x_i aparece con un exponente igual a k.
Así tendremos
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$
sucesiones parciales de S, donde se verifica que
1. $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=0}^{\alpha_i - 1} S_{ik} \bigcup \{X^{\alpha(1)}\}$.
2. En general $S_{ik} \bigcap S_{jk} \neq \emptyset$.

Pero los términos de cada S_{ik} son monomios en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ que tienen todos el exponente k en la variable x_i, por tanto podemos considerar la siguiente aplicación p, definida entre S_{ik} y S'_{ik}, donde S'_{ik} representa a la sucesión obtenida de la sucesión S_{ik}, suprimiendo en cada uno de sus términos el factor x_i^k, es decir
$$S'_{ik} = \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^k x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \in S_{ik}\}$$
y
$$\begin{array}{rcl} p : S_{ik} & \longrightarrow & S'_{ik} \\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^k x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} & \longrightarrow & x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \end{array}$$
que es biyectiva, por lo tanto card(S_{ik})=card(S'_{ik}).

Pero cada sucesión S'_{ik} obtenida de la S_{ik} es una sucesión en $n-1$ variables en la que cada término no es múltiplo de ninguno de los anteriores, por tanto, aplicando la hipótesis de inducción, diremos que cada S'_{ik} es finita, por tanto también lo será cada S_{ik}, $\forall k = 0, 1, \cdots, \alpha_i - 1$, así, tendremos que
$$card(S) \leq card\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{\alpha_i - 1} S_{ik}\right) + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i - 1} card(S_{ik}) + 1$$
y de ahí que S sea una sucesión finita.

□

Este teorema justifica que los algoritmos que vamos a utilizar terminan después de un número finito de pasos.

Corolario 2.1.2 *Dado un conjunto I de monomios, siempre es posible obtener un conjunto finito $\mathfrak{F} \subseteq I$, tal que todo monomio de I sea múltiplo de al menos uno de $\mathfrak{F}$.*

Observación. Se trata de un enunciado equivalente al lema de Dickson (1.4.6). Incluimos una prueba basada en el teorema anterior. En particular demuestra que todo ideal generado por monomios es finitamente generado.

Demostración. Efectuamos el siguiente proceso:
Elegimos un monomio $X^{\alpha(1)} \in I$, a continuación si todos los monomios de I son múltiplos de $X^{\alpha(1)}$ ya estaría. En este caso $\mathfrak{F} = \{X^{\alpha(1)}\}$, en caso contrario sea $X^{\alpha(2)}$ un monomio de I que no es múltiplo de $X^{\alpha(1)}$.
De nuevo ocurrirá que si no existiese ningún monomio que no fuese múltiplo ni de $X^{\alpha(1)}$, ni de $X^{\alpha(2)}$ ya nos detendríamos, en caso contrario elegimos un nuevo monomio $X^{\alpha(3)} \in I$ tal que no sea múltiplo ni de $X^{\alpha(1)} \in I$ ni de $X^{\alpha(2)} \in I$, $\cdots$
así construimos una sucesión, que verifica las condiciones del teorema anterior y por tanto es, finita. Podemos, por tanto, formar el conjunto

$$\mathfrak{F} = \{X^{\alpha(1)}, X^{\alpha(2)}, \cdots, X^{\alpha(r)}\}.$$

Comprobemos que este conjunto, $\mathfrak{F}$, finito cumple las condiciones que queríamos:
Sea $X^\alpha \in I$, entonces pueden ocurrir dos casos:

1. $X^\alpha \in \mathfrak{F}$, entonces existe $i = 1, \cdots, r$ tal que $X^\alpha = X^{\alpha(i)}$.
2. $X^\alpha \in I \backslash \mathfrak{F}$, entonces, por construcción, X^α es múltiplo de algún $X^{\alpha(i)}$, con $i = 1, \cdots, r$.

□

Del teorema anterior podemos obtener varios corolarios.

Corolario 2.1.3 *Dada una sucesión infinita de monomios*

$$X^{\alpha(1)}, X^{\alpha(2)}, \cdots, X^{\alpha(i)}, \cdots$$

existe $k \in \mathbf{N}$ tal que cada $X^{\alpha(k+i)}$, con $i > 0$ es múltiplo de algún elemento del conjunto

$$\{X^{\alpha(1)}, X^{\alpha(2)}, \cdots, X^{\alpha(k)}\}.$$

Definición 2.1.4 *Dado el monomio*

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

llamaremos grado de X^α, y lo representaremos por $|\alpha|$, al siguiente número natural

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Corolario 2.1.5 *Dada una sucesión de monomios cuyos grados forman una sucesión monótona no decreciente, es decir,*

$$X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(i)}, \cdots$$

donde $|\alpha(i)| \leq |\alpha(i+1)|$, $\forall i \in \mathbf{N}$, entonces existe $p \in \mathbf{N}$ tal que todo monomio $X^{\alpha(j)}$, $j \geq 1$ de la sucesión anterior es múltiplo de algún monomio del conjunto $\{X^{\alpha(i)} : |\alpha(i)| \leq p\}$.

Corolario 2.1.6 *Sea*

$$S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots$$

una sucesión de conjuntos de monomios donde el conjunto S_{i+1} verifica que cada uno de sus monomios no es múltiplo de ninguno de los monomios de S_{i-j}, con $0 \leq j \leq i-1$, es decir

$$\forall X^\alpha \in S_{i+1} \text{ se tiene que } \alpha \notin \beta + \mathbf{N}^n,\ \forall X^\beta \in S_{i-j}, \quad 0 \leq j \leq i-1.$$

Entonces esta sucesión es finita.

Corolario 2.1.7 *Sea*

$$S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots$$

una sucesión de conjuntos de monomios donde el conjunto S_{i+1} está constituido por:

1. *Los monomios de S_i.*
2. *Monomios que no son múltiplos de ningún monomio de S_i.*

Entonces esta sucesión es finita.

2.1.2 Módulos de Janet

Definición 2.1.8 *Diremos que un conjunto J de monomios forma un módulo de Janet, si o bien $J = \emptyset$ o bien todo múltiplo de cada uno de sus monomios pertenece al conjunto J, es decir,*

$$\forall X^\alpha \in J,\ \forall \beta \in \mathbf{N}^n \text{ se verifica } X^{\alpha+\beta} \in J.$$

Observación. Un conjunto J de monomios de $\mathbf{k}[X]$ es un módulo de Janet $\Longleftrightarrow$ $\phi(J)$ verifica que

$$\phi(J) + \mathbf{N}^n = \phi(J).$$

(ver 1.1.2)

Definición 2.1.9 *Llamaremos base del módulo de Janet, J, a un conjunto finito de monomios $\mathcal{B} \subseteq J$, tal que todo elemento de J es múltiplo de algún elemento de $\mathcal{B}$.*

Teorema 2.1.10 *Todo módulo de Janet tiene una base.*

Demostración. Aplicando el corolario 2.1.2 a J, existe $\mathcal{B} \subset J$, $\mathcal{B}$ finito, tal que todo monomio de J es múltiplo de algún monomio de $\mathcal{B}$. □

2.1.3 Estructura de un módulo de Janet. Generalidades

En este apartado vamos a estudiar cómo podemos trasladar el estudio de un módulo J de Janet en n variables al estudio de un número finito de módulos de Janet

$$J'_0, J'_1, \cdots, J'_k$$

en $n-1$ variables.

El razonamiento utilizado por M. Janet es el mismo que el utilizado en la demostración del lema de Dickson dado en [32].

Dado el módulo de Janet J, vamos a clasificar los monomios que pertenecen a este módulo, según el exponente que tengan en la variable x_n.

Notación 2.1.11 *Para cada $i \geq 0$ denotaremos por J_i, al conjunto*

$$J_i = \left\{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} \in J \text{ tal que } \alpha_n = i \right\}$$

y por J'_i al conjunto

$$J'_i = \{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mid x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^i \in J \}.$$

Obtenemos así una sucesión de conjuntos de monomios en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$,

$$J'_0, J'_1, \cdots, J'_i, \cdots$$

Sea $\pi_n : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}^{n-1}$ la proyección definida por $\pi_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$. Entonces se tiene

$$\pi_n \left(J \bigcap (\mathbf{N}^{n-1} \times \{i\}) \right) = J'_i.$$

Nota 2.1.12 *Puede ocurrir que algunos de estos conjuntos sea vacío, como en el caso del módulo de Janet, en dos variables, generado por*

$$\{x_1^7 x_2^3,\ x_1^6 x_2^4\} \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2]$$

se tiene que $J'_0 = J'_1 = J'_2 = \emptyset$.

Observación. El conjunto J'_i es un módulo de Janet, vamos a verlo:
Sea $x_1^{\beta_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}$, un múltiplo del monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in J'_i$. Entonces, por la propia definición de J'_i, tenemos que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^i \in J$, y al ser J un módulo de Janet tendremos que $x_1^{\beta_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^i \in J$ y por tanto $x_1^{\beta_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in J'_i$.

Lema 2.1.13 *Sea J un módulo de Janet en las variables $x_1, \cdots, x_n$ y consideremos la sucesión de módulos de Janet en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$,*

$$J'_0, J'_1, \cdots, J'_i, \cdots$$

definida anteriormente. Entonces $J'_i \subseteq J'_{i+1}$.

Demostración. Si $J'_i \neq \emptyset$, existirá $x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in J'_i$, entonces $x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^i \in J$ por tanto, $x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{i+1} \in J$ y de ahí que $x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in J'_{i+1}$. □

A continuación, vamos a demostrar que la sucesión anterior es estacionaria.

Lema 2.1.14 *Sea J un módulo de Janet en las variables $x_1, \cdots, x_n$ y consideremos la sucesión de módulos de Janet en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$,*

$$J'_0, J'_1, \cdots, J'_i, \cdots,$$

definida anteriormente. Entonces esta sucesión es estacionaria.

Demostración.

- Demostración 1. Basta observar que la sucesión

$$J'_0 \subseteq J'_1 \subseteq \cdots \subseteq J'_i, \cdots$$

  está en las condiciones del corolario 2.1.7.

- Demostración 2. Ésta es una demostración constructiva ya que nos da información del índice a partir del cual la sucesión es estacionaria.

  Sea $\mathcal{B}$ una base del módulo de Janet J (que sabemos que existe por el teorema 2.1.10) y sea

$$k = \max\{\alpha_n \mid x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{B}\}.$$

  Veamos que se verifica que

$$\forall i \geq k,\ J'_i = J'_{i+1}.$$

  Hemos visto que en general se verifica que, $J'_i \subseteq J'_{i+1}$. Veamos ahora que para $i \geq k$, entonces se verifica el recíproco.

  Sea $x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in J'_{i+1}$ entonces se tiene que $x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n^{i+1} \in J$, y al ser $\mathcal{B}$ una base para el módulo de Janet, J, entonces existirá $x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^i \in \mathcal{B}$, donde $\alpha_j \leq \beta_j$ para algún $j = 1, \cdots, n-1$.
  Entonces tendremos que $x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n^i \in J$ y de ahí que

$$x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in J'_i.$$

  Así la sucesión es estacionaria.

□

Por tanto, hemos demostrado que $J'_i = J'_{i+1}$ siendo $i \geq k$ para un cierto $k \in \mathbf{N}$. Vamos a ver que con estos módulos de Janet $J'_0, \cdots, J'_k$ en $n-1$ variables, nos basta para conocer los monomios que pertenecen a J.

Notación 2.1.15 *Hemos demostrado que los conjuntos J'_i son módulos de Janet, entonces por el teorema 2.1.10, podemos afirmar que cada módulo J'_i tiene una base, denotemos a esa base $\mathcal{B}_i$.*

Teorema 2.1.16 *Con la notación anterior y con las notaciones obvias se verifica que,*

$$J = \bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\bigcup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\in \mathbf{N}^{n-1}} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathcal{B}_i x_n^i \right) \bigcup \left(\bigcup_{(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in \mathbf{N}^n} x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n} \mathcal{B}_k x_n^k \right).$$

Demostración. Siempre se verifica que,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\in \mathbf{N}^{n-1}} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathcal{B}_i x_n^i \right) \bigcup \left(\bigcup_{(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in \mathbf{N}^n} x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n} \mathcal{B}_k x_n^k \right) \subseteq J.$$

Veamos la inclusión recíproca, sea $x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n} \in J$ entonces puede suceder,

1. $\gamma_n < k$, entonces $x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \in J'_{\gamma_n}$, así

   $$x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} = \left(x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right)\left(x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}}\right)$$

   con, $x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}} \in \mathcal{B}_{\gamma_n}$ y $\alpha_i + \delta_i = \gamma_i$, $i = 1,\cdots,n-1$, luego

   $$x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n} \in x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathcal{B}_{\gamma_n} x_n^{\gamma_n}.$$

2. $\gamma_n \geq k$, entonces podemos escribir,

   $$x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{\gamma_n} = x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^k x_n^{\gamma_n - k}$$

   pero, $x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \in J'_{\gamma_n} = J'_k$, por tanto,

   $$x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} = (x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}})(x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}})$$

   con $x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}} \in \mathcal{B}_k$, $\beta_i + \delta_i = \gamma_i$, $i = 1,\cdots,n-1$, luego

   $$\begin{aligned} x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{\gamma_n} &= x_1^{\gamma_1}\cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{\gamma_n - k} x_n^k = \\ &= (x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}})(x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}}) x_n^{\gamma_n - k} x_n^k = \\ = (x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^{\gamma_n - k})&(x_1^{\delta_1}\cdots x_{n-1}^{\delta_{n-1}}) x_n^k \in x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n} \mathcal{B}_k x_n^k, \end{aligned}$$

   con $\beta_n = \gamma_n - k$.

□

Observación. El teorema anterior nos afirma que,

$$\phi(J) = \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{\alpha\in\phi(\mathcal{B}_i)} ((\alpha, i) + \mathbf{N}^{n-1} \times \{0\}) \right) \bigcup \left(\bigcup_{\beta\in\phi(\mathcal{B}_k)} (\beta, k) + \mathbf{N}^n \right).$$

2.2 Variables multiplicadoras. Clases

2.2.1 Variables multiplicadoras

Definición 2.2.1 *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de monomios y sea $X^\alpha \in \mathcal{F}$.*

1. *Diremos que x_j, con $1 \leq j \leq n-1$ es variable multiplicadora para X^α en $\mathcal{F}$, si al considerar el conjunto de los monomios X^β de $\mathcal{F}$ tales que:*
$$\begin{cases} \beta_n & = & \alpha_n \\ & \vdots & \\ \beta_{j+1} & = & \alpha_{j+1} \end{cases}$$
se verifica que en él no existe ningún monomio X^β tal que $\beta_j > \alpha_j$.

2. *Diremos que x_n es variable multiplicadora para X^α en $\mathcal{F}$, si no existe ningún monomio X^β de $\mathcal{F}$ con $\beta_n > \alpha_n$.*

Notación 2.2.2 *El conjunto de variables multiplicadoras de X^α en $\mathcal{F}$ será denotado por $mult(X^\alpha, \mathcal{F})$.*

Ejemplo 2.2.3 *Sea $\mathcal{F}$ el subconjunto finito de $\mathcal{M}(x_1, x_2, x_3)$,*
$$\mathcal{F} = \{x_3^3x_2^2x_1^2,\quad x_3^3x_2x_1^5,\quad x_3^3x_1^5,\quad x_3^2x_2^2x_1^4,\quad x_3^2x_2x_1^7,\quad x_3^2x_1^7,\quad x_3x_1^7,\quad x_1^7\}.$$
Las variables multiplicadoras para los monomios en este conjunto son:

$mult(x_3^3x_2^2x_1^2, \mathcal{F}) = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$mult(x_3^3x_2x_1^5, \mathcal{F}) = \{x_1, x_3\}$,
$mult(x_3^3x_1^5, \mathcal{F}) = \{x_1, x_3\}$,
$mult(x_3^2x_2^2x_1^4, \mathcal{F}) = \{x_1, x_2\}$,
$mult(x_3^2x_2x_1^7, \mathcal{F}) = \{x_1\}$,
$mult(x_3^2x_1^7, \mathcal{F}) = \{x_1\}$,
$mult(x_3x_1^7, \mathcal{F}) = \{x_1, x_2\}$,
$mult(x_1^7, \mathcal{F}) = \{x_1, x_2\}$.

Veamos un ejemplo en el caso de dos variables.

Ejemplo 2.2.4 *Sea $\mathcal{F} = \{x_2^3, x_2^4x_1, x_1^2, x_1^3\}$. Entonces las variables multiplicadoras para los monomios de este conjunto son:*
$mult(x_2^3, \mathcal{F}) = \{x_1\}$,
$mult(x_2^4x_1, \mathcal{F} = \{x_2, x_1\}$,
$mult(x_1^2, \mathcal{F}) = \emptyset$,
$mult(x_1^3, \mathcal{F}) = \{x_1\}$.

Esto se puede representar en la siguiente figura,

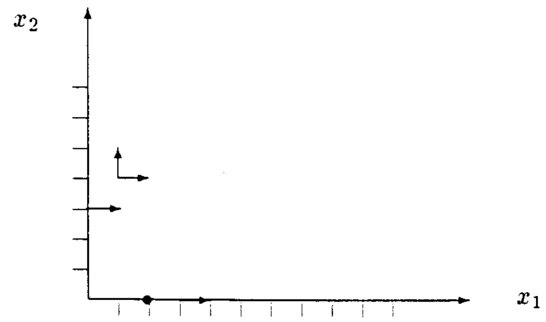

Figura 2.1:

Notación 2.2.5 *Dado* $(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^{n-j}$, $j\leq n-1$, *notemos por* $\mathcal{F}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)$ *el conjunto de los monomios* $X^\beta\in\mathcal{F}$ *donde* $x_{j+1},\cdots,x_n$ *tienen los exponentes* $\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n$ *exactamente, es decir,*

$$\mathcal{F}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)=\left\{X^\beta\in\mathcal{F}\mid\beta_{j+1}=\alpha_{j+1},\cdots,\beta_n=\alpha_n\right\}.$$

Dividimos los monomios de este conjunto por $x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}$. *El conjunto de los monomios así obtenido lo denotamos por* $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)$, *es decir,*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)=\left\{\frac{X^\beta}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}}=x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_j^{\beta_j}\mid X^\beta\in\mathcal{F}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)\right\}.$$

Proposición 2.2.6 *Con la notación anterior, para cada* k *con* $1\leq k\leq j$ *y* $1\leq j\leq n-1$ *se verifica que,*

$$x_k\in mult(X^\alpha,\mathcal{F})\Longleftrightarrow x_k\in mult\left(\frac{X^\alpha}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}},\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)\right).$$

Demostración. $\Longrightarrow$ Sea x_k una variable multiplicadora para X^α en el conjunto $\mathcal{F}$. Si $x_k\notin mult\left(\frac{X^\alpha}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}},\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)\right)$ entonces existe $\frac{X^\beta}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}}\in\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)$ tal que,

$$\alpha_j=\beta_j,\cdots,\alpha_{k+1}=\beta_{k+1},\quad\alpha_k<\beta_k,$$

entonces tendremos que existe $X^\beta\in\mathcal{F}$ tal que,

$$\alpha_n=\beta_n,\cdots,\alpha_{j+1}=\beta_{j+1},\alpha_j=\beta_j,\cdots,\alpha_{k+1}=\beta_{k+1},\quad\alpha_k<\beta_k,$$

y esto es contradictorio con el hecho de que $x_k\in mult(X^\alpha,\mathcal{F})$.

$\Longleftarrow$ Sea $x_k\in mult\left(\frac{X^\alpha}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}},\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)\right)$ y supongamos que $x_k\notin mult(X^\alpha,\mathcal{F})$, entonces tendremos que existe $X^\beta\in\mathcal{F}$ tal que,

$$\alpha_n=\beta_n,\cdots,\alpha_{j+1}=\beta_{j+1},\alpha_j=\beta_j,\cdots,\alpha_{k+1}=\beta_{k+1},\quad\alpha_k<\beta_k,$$

por tanto, $X^\beta\in\mathcal{F}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n)$. Dividimos X^β por $x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}$ y obtenemos que,

$$\frac{X^\beta}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}}\in\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n),$$

con

$$\alpha_j = \beta_j, \cdots, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad \alpha_k < \beta_k,$$

y esto es contradictorio con el hecho de que, $x_k \in mult\left(\frac{X^\alpha}{x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)\right)$.

□

Corolario 2.2.7 *Con la notación anterior, tenemos que para $1 \leq k \leq n-1$ se verifica que,*

$$x_k \in mult(X^\alpha, \mathfrak{F}) \Longleftrightarrow x_k \in mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right).$$

Demostración. Basta considerar en la proposición 2.2.6, $j = n-1$. □

Corolario 2.2.8 *Con la notación anterior, se verifica que,*

$$mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right) \subseteq mult(X^\alpha, \mathfrak{F}).$$

Corolario 2.2.9 *Con la notación anterior, se verifica que:*

1. *Si $\alpha_n < a$ entonces $mult(X^\alpha, \mathfrak{F}) = mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right)$.*
2. *Si $\alpha_n = a$ entonces*

$$mult(X^\alpha, \mathfrak{F}) = mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right) \bigcup \{x_n\},$$

donde $a = máx\{\alpha_n : X^\alpha \in \mathfrak{F}\}$.

Demostración.

1. Al ser $\alpha_n < a$ entonces $x_n \notin mul(X^\alpha, \mathfrak{F})$ y por la proposición 2.2.6, podemos afirmar que,

$$mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right) = mult(X^\alpha, \mathfrak{F}).$$

2. Si $\alpha_n = a$, entonces, por definición, tenemos $x_n \in mult(X^\alpha, \mathfrak{F})$, es decir, $\{x_n\} \subseteq mult(X^\alpha, \mathfrak{F})$ y como por el corolario 2.2.8, siempre se verifica que,

$$mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right) \subseteq mult(X^\alpha, \mathfrak{F}),$$

entonces

$$\{x_n\} \bigcup mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right) \subseteq mult(X^\alpha, \mathfrak{F}).$$

Por otro lado, siempre se verifica que,

$$mult(X^\alpha, \mathfrak{F}) \subseteq \{x_n\} \bigcup mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}}, \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha_n)\right),$$

así tenemos el resultado que queremos.

□

2.2.2 Clases

Definición 2.2.10 *Dado un monomio $X^\alpha \in \mathfrak{F}$, se llama clase correspondiente al monomio X^α en el conjunto $\mathfrak{F}$, y se denota por $\mathcal{C}_{\alpha,\mathfrak{F}}$ o $\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathfrak{F}}$ al conjunto de monomios que podemos obtener mediante el producto del monomio X^α por todos los monomios que podemos formar con sus variables multiplicadoras (comprendiendo al propio X^α).*
Así

$$\mathcal{C}_{\alpha,\mathfrak{F}} = \left\{X^\alpha \cdot X^{\alpha'} \mid \text{toda variable de } X^{\alpha'} \text{ está en } mult(X^\alpha, \mathfrak{F})\right\}.$$

Si X^α no admite variables multiplicadoras, la clase $\mathcal{C}_{\alpha,\mathfrak{F}}$ es igual $\{X^\alpha\}$.

Notación 2.2.11 *En lo que sigue escribiremos $\mathcal{C}_\alpha$ o $\mathcal{C}_{X^\alpha}$ en lugar de $\mathcal{C}_{\alpha,\mathfrak{F}}$ o de $\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathfrak{F}}$ cuando no haya posibilidad de confusión.*

Ejemplo 2.2.12 *Considerando el ejemplo anterior, las clases las podemos representar por*

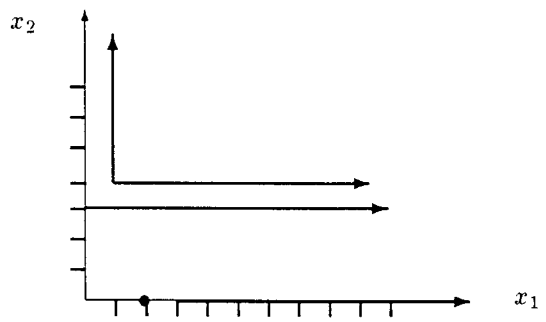

Figura 2.2:

Vamos a ver la relación que existe entre las clases de los monomios X^α pertenecientes al conjunto $\mathfrak{F}$ y las clases de los monomios $\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{F}}(\lambda)$.

Notación 2.2.13 *Denotaremos por $X^\gamma \mathcal{C}_\alpha$ al siguiente conjunto,*

$$X^\gamma \mathcal{C}_\alpha = \left\{X^\gamma X^\beta \,|X^\beta \in \mathcal{C}_\alpha\right\}.$$

Proposición 2.2.14 *Con las notaciones anteriores, se verifica que dado $X^\alpha \in \mathfrak{F}$, con $X^\alpha \in \mathfrak{F}(\lambda)$, tenemos,*

1. *Si $\lambda < a$, entonces $\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathfrak{F}} = x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathfrak{F}}(\lambda)}$.*
2. *Si $\lambda = a$, entonces $\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathfrak{F}} = x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\widetilde{\mathfrak{F}}(a)}$, para todo $a' \geq 0$.*

Demostración.

1. Si $\lambda < a$ entonces x_n no será variable multiplicadora para el monomio X^α en el conjunto $\mathcal{F}$. Por tanto para cualquier $X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}}$, tenemos que $X^\gamma = X^\alpha X^{\alpha'}$ donde $X^{\alpha'} \in \mathcal{M}(x_1,\cdots,x_{n-1})$ y las variables que aparecen en el monomio $X^{\alpha'}$ son variables multiplicadoras para X^α en el conjunto $\mathcal{F}$, así

$$X^\gamma = x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^\lambda x_1^{\alpha'_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} = x_n^\lambda x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_1^{\alpha'_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}},$$

donde, por el corolario 2.2.7, las variables de $X^{\alpha'}$ al pertenecer al conjunto $mult\,(X^\alpha,\mathcal{F})$, tenemos que pertenecen al conjunto $mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)\right)$.
Tenemos la siguiente situación

$$X^\gamma = x_n^\lambda \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} X^{\alpha'},$$

donde las variables de $X^{\alpha'}$ pertenecen a $mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)\right)$, por tanto, $X^\gamma \in x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)}$ y así

$$\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}} \subseteq x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)}.$$

Recíprocamente, sea $x_n^\lambda X^\beta \in x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)}$, donde $X^\beta = \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} X^{\beta'}$ con $X^{\beta'} \in \mathcal{M}(x_1,\cdots,x_{n-1})$ y las variables de $X^{\beta'}$ pertenecen al conjunto $mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)\right)$ que sabemos, por el corolario, 2.2.7, que es el mismo que $mult\,(X^\alpha,\mathcal{F})$. Así

$$x_n^\lambda X^\beta = x_n^\lambda \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} X^{\beta'} = X^\alpha X^{\beta'},$$

donde las variables de $X^{\beta'}$ pertenecen al conjunto $mult\,(X^\alpha,\mathcal{F})$, por tanto,

$$x_n^\lambda X^\beta = X^\alpha X^{\beta'} \in \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}},$$

y de ahí que,

$$x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda},\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)} \subseteq \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}},$$

y por tanto la igualdad.

2. Si $\lambda = a$, entonces tendremos que para cualquier $X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}}$, se verifica que,

$$X^\gamma = X^\alpha X^{\alpha'},$$

donde $X^{\alpha'} \in \mathcal{M}(x_1,\cdots,x_n)$ y las variables de $X^{\alpha'}$ son multiplicadoras para el monomio X^α en el conjunto $\mathcal{F}$. Pero como se verifica, por el corolario 2.2.9, que

$$mult\,(X^\alpha,\mathcal{F}) = \left\{x_n, mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a},\widetilde{\mathcal{F}}(a)\right)\right\},$$

entonces X^γ será de la forma,

$$X^\gamma = x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^a x_1^{\alpha'_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} x_n^{a'} = x_n^{a+a'} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_1^{\alpha'_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}},$$

para algún $a' \geq 0$, por tanto,

$$X^\gamma = x_n^{a+a'} \frac{X^\alpha}{x_n^a} x_1^{\alpha'_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}},$$

donde las variables del monomio $x_1^{\alpha'_1}\cdots x_n^{\alpha'_n}$ pertenecen a $mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a},\widetilde{\mathcal{F}}(a)\right)$, así

$$X^\gamma = x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\widetilde{\mathcal{F}}(a)},$$

por tanto,

$$\mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}} \subseteq x_n^{a+a'}\mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\tilde{\mathcal{F}}(a)},$$

para cierto $a' \geq 0$.

Recíprocamente, sea $x_n^{a+a'}X^\beta \in x_n^{a+a'}\mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\tilde{\mathcal{F}}(a)}$, donde $X^\beta \in \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\tilde{\mathcal{F}}(a)}$, por tanto X^β será de la forma, $X^\beta = \frac{X^\alpha}{x_n^a}X^{\beta'}$ con $X^{\beta'} \in \mathcal{M}(x_1,\cdots,x_{n-1})$ y las variables del monomio $X^{\beta'}$ son multiplicadoras para el monomio $\frac{X^\alpha}{x_n^a}$ en el conjunto $\tilde{\mathcal{F}}(a)$. Entonces

$$x_n^{a+a'}X^\beta = x_n^{a+a'}\frac{X^\alpha}{x_n^a}X^{\beta'} = x_n^{a'}X^\alpha X^{\beta'} = x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^a x_1^{\beta'_1}\cdots x_{n-1}^{\beta'_{n-1}}x_n^{a'}.$$

Como se verifica que, $mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a},\tilde{\mathcal{F}}(a)\right) \subseteq mult\,(X^\alpha,\mathcal{F})$ y $x_n \in mult\,(X^\alpha,\mathcal{F})$, tendremos que $x_n^{a+a'}X^\beta \in \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}}$, por tanto,

$$x_n^{a+a'}\mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a},\tilde{\mathcal{F}}(a)} \subseteq \mathcal{C}_{X^\alpha,\mathcal{F}},$$

para cierto $a' \geq 0$ y de ahí la igualdad que queríamos.

□

Se verifica que las clases correspondientes a monomios distintos, son disjuntas. Más precisamente,

Proposición 2.2.15 *Con la notación anterior, si $X^\alpha, X^\beta \in \mathcal{F}$, donde $\alpha \neq \beta$, entonces se verifica que*

$$\mathcal{C}_\alpha \bigcap \mathcal{C}_\beta = \emptyset.$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n, siendo n el número de variables.

• Si $n = 1$, en este caso $\mathcal{F}$ es un conjunto finito de monomios en la variable x y supongamos $a = \text{máx}\{j \mid x^j \in \mathcal{F}\}$.
Por lo tanto la clase de todo monomio x^α con $\alpha < a$ estará formada únicamente por él mismo, es decir,

$$\mathcal{C}_\alpha = \{x^\alpha\}, \quad \forall x^\alpha \in \mathcal{F}, \quad \text{con} \quad \alpha < a.$$

y la clase de x^a será

$$\mathcal{C}_a = \{x^{a+\lambda} \mid \lambda \geq 0\}.$$

Luego para monomios diferentes de $\mathcal{F}$ sus clases son disjuntas.

• Supongamos cierta la proposición para todo conjunto de monomios en $n-1$ variables, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$.

• Lo demostramos para un conjunto de monomios $\mathcal{F}$, en n variables, $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Notación 2.2.16 *Denotaremos por α_n, β_n, γ_n y δ_n el exponente de la variable x_n en los monomios X^α, X^β, X^γ y X^δ respectivamente.*

Sean $X^\gamma \in \mathcal{C}_\alpha$ y $X^\delta \in \mathcal{C}_\beta$, entonces tendremos que,

$$X^\gamma = X^\alpha X^{\alpha'}, \qquad X^\delta = X^\beta X^{\beta'},$$

donde $X^{\alpha'}$ y $X^{\beta'}$ son monomios formados por variables multiplicadoras de X^α y X^β respectivamente, en el conjunto $\mathcal{F}$.

Consideramos los siguientes casos:

1. Si X^α y X^β tienen exponentes diferentes en x_n, es decir, $\alpha_n \neq \beta_n$, entonces x_n es variable multiplicadora para uno de ellos como máximo, (ya que puede no serlo para ninguno); entonces consideramos,
   (a) Si $x_n \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$ y $x_n \notin mult(X^\beta, \mathcal{F})$, entonces tendremos que $\gamma_n = \alpha_n$ y $\delta_n = \beta_n$ y por lo tanto, $\gamma \neq \delta$.
   (b) Si $x_n \in mult(X^\alpha, \mathcal{F})$ y $x_n \notin mult(X^\beta, \mathcal{F})$, entonces $\alpha_n > \beta_n$, $\beta_n = \delta_n$ y $\gamma_n \geq \alpha_n$. Por tanto tenemos que $\gamma_n > \delta_n$ y de ahí que $\gamma \neq \delta$.
2. Si X^α y X^β tienen el mismo exponente λ en x_n, es decir

$$\alpha_n = \beta_n = \lambda,$$

consideramos

$$Q_\alpha = \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} \qquad \text{y} \qquad Q_\beta = \frac{X^\beta}{x_n^\lambda}.$$

Recordamos que a representa al máximo de los exponentes de x_n en el conjunto de los monomios $\mathcal{F}$.

(a) Si $\lambda < a$, entonces

$$mult(X^\alpha, \mathcal{F}) = mult(Q_\alpha, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)) \text{ y } mult(X^\beta, \mathcal{F}) = mult(Q_\beta, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)).$$

Por tanto los monomios X^γ y X^δ se diferencian solo en el factor x_n^λ de los monomios $X^{q_\alpha} \in \mathcal{C}_{Q_\alpha}$, $X^{q_\beta} \in \mathcal{C}_{Q_\beta}$, es decir,

$$X^\gamma = X^{q_\alpha} x_n^\lambda, \text{ y } X^\delta = X^{q_\beta} x_n^\lambda,$$

aplicando la hipótesis de inducción, tendremos que $\mathcal{C}_{Q_\alpha} \bigcap \mathcal{C}_{Q_\beta} = \emptyset$, por tanto $X^{q_\alpha} \neq X^{q_\beta}$ y de ahí que $X^\gamma \neq X^\delta$.

(b) Si $\lambda = a$, entonces

$$mult(X^\alpha, \mathcal{F}) = \left\{x_n, \, mult(Q_\alpha, \widetilde{\mathcal{F}}(a))\right\},$$

y

$$mult(X^\beta, \mathcal{F}) = \left\{x_n, \, mult(Q_\beta, \widetilde{\mathcal{F}}(a))\right\}.$$

Entonces, si

$$X^\gamma = X^\alpha X^{\alpha'} \text{ y } X^\delta = X^\beta X^{\beta'},$$

podemos considerar dos casos:

i. Si $\alpha'_n \neq \beta'_n$, entonces como

$$\gamma_n = a + \alpha'_n \text{ y } \delta_n = a + \beta'_n$$

tendremos que,

$$X^\gamma \neq X^\delta.$$

ii. Si $\alpha'_n = \beta'_n = \nu$, $\nu \geq 0$ entonces,

$$X^\gamma = X^{q_\alpha} x_n^{a+\nu} \text{ y } X^\delta = X^{q_\beta} x_n^{a+\nu},$$

donde $X^{q_\alpha} \in \mathcal{C}_{Q_\alpha}$ y $X^{q_\beta} \in \mathcal{C}_{Q_\beta}$.
Como $\mathcal{C}_{Q_\alpha} \bigcap \mathcal{C}_{Q_\beta} = \emptyset$, por hipótesis de inducción, se verifica que $X^{q_\alpha} \neq X^{q_\beta}$ y de ahí que $X^\gamma \neq X^\delta$.

Por tanto podemos afirmar que $\mathcal{C}_\alpha \bigcap \mathcal{C}_\beta = \emptyset$. □

2.3 Conjuntos completos

Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto finito de monomios. Denotamos por J al módulo de Janet definido por $\mathcal{F}$, es decir, J es el conjunto de los monomios que son múltiplos de algún monomio del conjunto $\mathcal{F}$. Es obvio que,

$$\mathcal{C}_\alpha \subseteq J, \qquad \forall X^\alpha \in \mathcal{F}.$$

A continuación vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que

$$\bigcup_{X^\alpha \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_\alpha = J,$$

es decir, para que todo múltiplo de un monomio de $\mathcal{F}$ pertenezca a una clase de algún monomio x^β perteneciente al conjunto $\mathcal{F}$.

Definición 2.3.1 *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto finito de monomios. Diremos que el conjunto $\mathcal{F}$ es un conjunto completo de monomios si todos los productos obtenidos multiplicando cualquier monomio X^α de $\mathcal{F}$ por una cualquiera de sus variables no multiplicadoras, pertenecen a alguna clase, es decir si*

$$\forall\, X^\alpha \in \mathcal{F} \text{ y } \forall\, x_b \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F}) \text{ se tiene } X^\alpha x_b \in \mathcal{C}_\gamma, \text{ para algún } X^\gamma \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo 2.3.2 *El conjunto $\mathcal{F} = \{x_1 x_2^2, x_1^2, x_1^3\}$ no es completo, ya que $x_2 \notin mult(x_1^2, \mathcal{F})$ y el monomio $x_1^2 x_2$ no pertenece a ninguna clase de ningún monomio de $\mathcal{F}$.*

Esto puede verse en la siguiente figura,

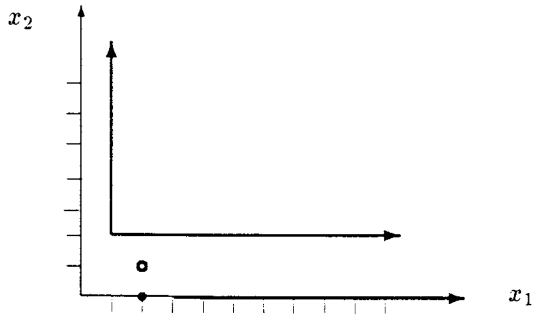

Figura 2.3:

Ejemplo 2.3.3 *El conjunto* $\mathcal{F} = \{x_1x_2^2, x_1^2, x_1^3, x_1^2x_2\}$ *es completo. Esto queda reflejado en la siguiente figura,*

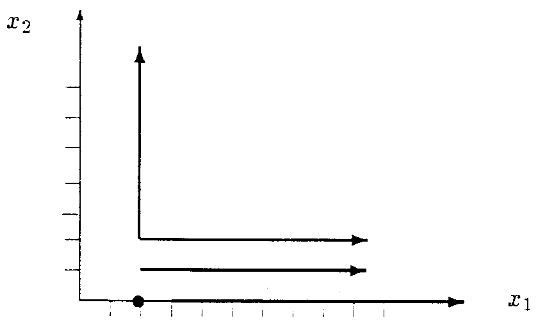

Figura 2.4:

A continuación vamos a caracterizar los subconjuntos completos de un módulo de Janet.

Teorema 2.3.4 *Todo múltiplo de cualquier monomio* X^α *de* $\mathcal{F}$ *pertenece a una clase si y solo si el producto de* X^α *por* x_k*, para cualquier variable no multiplicadora* x_k *para* X^α *en el conjunto* $\mathcal{F}$*, pertenece a alguna clase,* $\mathcal{C}_{X^\beta}$*,* $X^\beta \in \mathcal{F}$*.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Trivial, ya que si todo múltiplo de un monomio pertenece a alguna clase, en particular también pertenecerá el producto de un monomio por una cualquiera de sus variables no multiplicadoras.

$\Longleftarrow$ La demostración en este sentido, la haremos por inducción sobre el número, n, de variables).

Si $n = 1$, sea $\mathcal{F}$ un conjunto de monomios en la variable x. Consideremos

$$a = \max\{\alpha \,|x^\alpha \in \mathcal{F}\} \qquad \text{y} \qquad b = \min\{\alpha \,|x^\alpha \in \mathcal{F}\}.$$

Podemos suponer que $a \neq b$, ya que en caso contrario $\mathcal{F}$ sería de la forma, $\mathcal{F} = \{x^\alpha\}$ con $x \in mult(x^\alpha, \mathcal{F})$, en cuyo caso ya estaría demostrado.

Por otra parte se verifica que, si $x^b \in \mathcal{F}$ entonces $x^{b+1} \in \mathcal{F}$, ya que como $x \notin mult(x^\alpha, \mathcal{F})$ y por hipótesis se verifica que

$$x^b x \in \mathcal{C}_{x^\gamma}, \qquad \text{con} \qquad x^\gamma \in \mathcal{F},$$

entonces se pueden verificar dos casos:

1. Si $b + 1 = \gamma$, entonces $x^{b+1} \in \mathcal{F}$ y ya estaría.
2. Si $b + 1 > \gamma$ entonces $x \in mult(x^\gamma, \mathcal{F})$, por tanto $\gamma = a$, y de ahí que $b + 1 > a$, pero estamos suponiendo que $b \leq a - 1$.

Por tanto podemos afirmar que,

$$\text{Si } x^b \in \mathcal{F} \text{ entonces } x^{b+1}, x^{b+2}, \cdots, x^{b+(a-b-1)} \in \mathcal{F}.$$

Vamos a ver a continuación que todo múltiplo del monomio x^b, pertenece a $\mathcal{F}$.

Consideremos un monomio de la forma $x^{b+b'}$ con $b' \geq 0$, $b' \in \mathbf{N}$, entonces pueden darse dos casos:

1. Si $b + b' < a$, entonces, por lo demostrado en los párrafos anteriores, podemos afirmar que $x^{b+b'} \in \mathcal{F}$ y de ahí que $x^{b+b'} \in \mathcal{C}_{x^{b+b'}}$.
2. Si $b + b' \geq a$, entonces $x^{b+b'} \in \mathcal{C}_{x^a}$.

Sea ahora un monomio $x^\alpha \in \mathcal{F}$ y consideremos $x^{\alpha+\alpha'}$ un múltiplo de x^α, entonces tendremos que este monomio puede considerarse como un múltiplo del monomio x^b, es decir,

$$x^{\alpha+\alpha'} = x^{b+b'},$$

para algún $b' \geq 0$ con $b' \in \mathbf{N}$, y de ahí que

$$x^{\alpha+\alpha'} \in \mathcal{C}_{x^\gamma}, \qquad x^\gamma \in \mathcal{F}.$$

Supongamos la proposición cierta para monomios en $n - 1$ variables, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$.

Vamos a demostrarlo para monomios en n variables, $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Recordamos (ver 2.2.5) que $\mathcal{F}(\lambda)$ denota el subconjunto de $\mathcal{F}$ formado por todos los monomios de $\mathcal{F}$ cuyo exponente en x_n es λ, es decir,

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left\{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F} : \alpha_n = \lambda \right\}.$$

Al conjunto de los cocientes de los monomios de $\mathcal{F}(\lambda)$ entre x_n^λ lo hemos denotado, (2.2.5), por $\widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)$.

En primer lugar vamos a demostrar que si el producto de un monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ por una variable $x_1, \cdots, x_{n-1}$ que no es multiplicadora para él en el conjunto $\mathcal{F}(\lambda)$, pertenece a alguna clase del conjunto de monomios $\mathcal{F}$, entonces el producto de $X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ por cualquier monomio en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$ pertenece a alguna clase.

Sabemos (ver 2.2.7) que para todo $i = 1, \cdots, n-1$ se verifica que,

$$x_i \in mult(X^\alpha, \mathcal{F}(\lambda)) \Longleftrightarrow x_i \in mult(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)).$$

Por lo tanto cada clase C_{X^α}, $X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$, contiene productos de x_n^λ por monomios de la clase $\mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)}$.

Por otra parte, por hipótesis, se verifica que si $x_i \notin mul(X^\alpha, \mathcal{F}(\lambda))$, para $i = 1, \cdots, n-1$, entonces,

$$X^\alpha x_i \in \mathcal{C}_{X^\beta}, \qquad X^\beta \in \mathcal{F}(\lambda),$$

es decir,

$$X^\alpha x_i = X^\beta X^{\beta'},$$

donde $X^{\beta'}$ es un monomio en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$ que son multiplicadoras para X^β en $\mathcal{F}(\lambda)$.

Sea $x_i \notin mult(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda))$ con $i = 1, \cdots, n-1$, entonces tendremos que,

$$x_i \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} = \frac{X^\beta X^{\beta'}}{x_n^\lambda} = \frac{X^\beta}{x_n^\lambda} X^{\beta'} \in \mathcal{C}_{\frac{X^\beta}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)},$$

es decir el producto de un monomio, en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$, por variables que no son multiplicadoras para él, pertenece a una clase. Estamos en condiciones aplicar la hipótesis de inducción y podemos afirmar que el producto de cualquier monomio X^γ, en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$, por $\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}$ pertenece a alguna clase, es decir,

$$X^\gamma \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} = X^{\beta'} \frac{X^\beta}{x_n^\lambda},$$

donde las variables de $X^{\beta'}$ pertenecen a $mult(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda))$ por tanto pertenecen al conjunto $mult(X^\alpha, \mathcal{F}(\lambda))$, así,

$$X^\gamma X^\alpha = X^\beta X^{\beta'},$$

y de esta forma obtenemos el resultado que queríamos.

Observación. Sea $a = \max\{\alpha_n \,|x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F}\}$ y $X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\alpha}$, con $\gamma_n \leq a$, donde γ_n denota al exponente que tiene la variable x_n en el monomio X^γ. Veamos que el producto de X^γpor un monomio en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$ pertenece a alguna clase.

Tenemos que

$$x_1^{\beta_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} X^\gamma = x_1^{\beta_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} X^\alpha x_1^{\alpha'_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} =$$

$$= x_1^{\beta_1+\alpha'_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}+\alpha'_{n-1}} X^\alpha,$$

entonces considerando $X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ para un cierto λ y como por hipótesis se verifica que,

$$x_i X^\alpha \in \mathcal{C}_\beta,$$

donde cada x_i es variable no multiplicadora para X^α en el conjunto $\mathcal{F}(\lambda)$ para $i = 1, \cdots, n-1$, entonces por el resultado anterior tenemos que,

$$x_1^{\beta_1+\alpha'_1} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}+\alpha'_{n-1}} X^\alpha \in \mathcal{C}_{X^\delta},$$

para algún $X^\delta \in \mathcal{F}$.

También se verifica que, si el producto de un monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}$ por cualquier monomio cuyo grado en x_n es ρ pertenece a una clase, entonces el producto de un monomio por todo monomio cuyo grado en x_n es $\rho + 1$ también pertenece a una clase.

Vamos a verlo,

Sea $X^\alpha \in \mathcal{F}$ y $X^\beta \in \mathcal{F}(\rho+1)$, es decir un monomio cuyo exponente en x_n es $\rho + 1$, entonces el producto $X^\alpha X^\beta$ puede considerarse como $X^\gamma x_n^{\rho+1}$ con $X^\gamma \in \mathcal{F}$ y este producto lo podemos reescribir de la forma,

$$X^\gamma x_n^{\rho+1} = X^\gamma x_n^\rho x_n.$$

Por hipótesis, sabemos que se verifica que,

$$X^\gamma x_n^\rho = X^{\mu'}, \quad \text{donde} \quad X^{\mu'} \in \mathcal{C}_{X^\mu}, \quad \text{para algún } X^\mu \in \mathcal{F}.$$

Por tanto tenemos,

$$X^\alpha X^\beta = X^\gamma x_n^{\rho+1} = X^\gamma x_n^\rho x_n = X^{\mu'} x_n.$$

Sea μ'_n el exponente de x_n en el monomio $X^{\mu'}$, entonces podemos considerar los siguientes casos:

1. Si $\mu'_n < a$, entonces $X^{\mu'}$ pertenece a la clase de un monomio X^μ tal que x_n no es variable multiplicadora para él en el conjunto $\mathcal{F}$, entonces tendremos que

   $$X^{\mu'} x_n = X^{\mu''} X^\mu x_n,$$

   donde $X^{\mu''}$ es un monomio en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$ que sean multiplicadoras para el monomio X^μ en el conjunto $\mathcal{F}$.

   Pero $X^\mu x_n$ es el producto de un monomio X^μ por una variable no multiplicadora para él, que por hipótesis, pertenece a alguna clase, es decir,

   $$X^\mu x_n = X^{\delta'} \in \mathcal{C}_{X^\delta}, \quad \text{para algún } X^\delta \in \mathcal{F},$$

   donde el exponente que tiene $X^{\delta'}$ en la variable x_n, δ'_n, verifica que, $\delta'_n \geq a$.
   Tenemos por tanto la siguiente situación,

   $$X^\alpha X^\beta = X^{\mu'} x_n = X^{\mu''} X^\mu x_n = X^{\mu''} X^{\delta'},$$

   donde $X^{\mu''}$ es un monomio en las variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$ y $\delta'_n \leq a$ entonces estamos en las hipótesis del resultado anterior y podemos afirmar que $X^{\mu''} X^{\delta'}$, pertenece a alguna clase, es decir

   $$X^\alpha X^\beta = X^{\mu''} X^{\delta'} \in \mathcal{C}_{X^\gamma}, \quad \text{con} \quad X^\gamma \in \mathcal{F}.$$

2. Si $\mu'_n \geq a$, entonces $X^{\mu'}$ pertenece a la clase de un monomio $X^\mu \in \mathcal{F}$ para el cual x_n es variable multiplicadora, por tanto $X^{\mu'}x_n$ pertenecerá a la misma clase y así
$$X^\alpha X^\beta = X^{\mu'}x_n \in \mathcal{C}_{X^\mu}.$$

Por tanto, si $X^\alpha X^\beta$ es cualquier múltiplo del monomio X^α con $X^\alpha \in \mathcal{F}$ entonces este producto puede escribirse como,
$$X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n^{\beta_n},$$
sabemos que
$$X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in \mathcal{C}_{X^\gamma} \qquad \text{con} \qquad X^\gamma \in \mathcal{F}.$$
Entonces podemos considerar los siguientes casos:

1. Si $\beta_n = 0$ ya estaría.
2. Si $\beta_n \neq 0$ entonces escribimos,
$$X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n^{\beta_n} = X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n x_n^{\beta_n-1},$$
como $X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in \mathcal{C}_{X^\gamma}$ con $X^\gamma \in \mathcal{F}$ entonces $X^\alpha x_1^{\beta_1}\cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n$ pertenece a otra clase y así aplicando el último resultado, de forma recursiva, llegamos a que $X^\alpha X^\beta$ pertenece a alguna clase.

□

Entonces podemos afirmar que,

Corolario 2.3.5 (Propiedad I). *Si un conjunto de monomios $\mathcal{F}$ es completo, todo múltiplo de un monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}$ pertenece a una clase y sólo a una.*

Así, si tenemos un conjunto completo $\mathcal{B}$ del módulo de Janet J entonces
$$J = \bigcup_{X^{\alpha(i)}\in\mathcal{B}} \mathcal{C}_{X^{\alpha(i)}}, \quad i = 1,\cdots,t, \quad \mathcal{C}_{X^{\alpha(i)}} \bigcap \mathcal{C}_{X^{\alpha(j)}} = \emptyset, \quad i \neq j.$$

2.3.1 Procedimiento para obtener un conjunto completo

Sea J un módulo de Janet. Daremos aquí un procedimiento para calcular un conjunto completo generador de J.

Sea $\mathcal{F}^{(1)}$ un conjunto finito cualquiera de monomios; si $\mathcal{F}^{(1)}$ no es completo es porque existe un producto de un monomio por una variable no multiplicadora para él en el conjunto $\mathcal{F}^{(1)}$ que no pertenece a ninguna clase; añadimos este monomio al conjunto $\mathcal{F}^{(1)}$ y obtenemos el conjunto finito de monomios $\mathcal{F}^{(2)}$ y razonamos sobre $\mathcal{F}^{(2)}$ como lo hemos hecho con $\mathcal{F}^{(1)}$ y así seguiremos razonando.

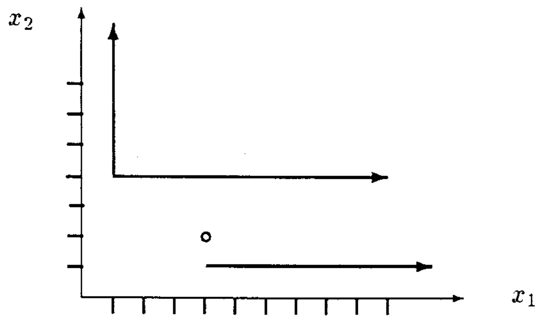

Figura 2.5:

Ejemplo 2.3.6 *Sea* $\mathcal{F}^{(1)} = \{x_1x_2^4, x_1^4x_2\}$

Como $x_1^4x_2^2$ *no pertenece a ninguna clase del conjunto* $\mathcal{F}^{(1)}$*, siendo* $x_2 \notin mult(x_1^4x_2, \mathcal{F}^{(1)})$*, como puede apreciarse en la figura,*

entonces consideramos el conjunto $\mathcal{F}^{(2)} = \{x_1x_2^4, x_1^4x_2, x_1^4x_2^2\}$.

Volvemos a razonar con este conjunto, $\mathcal{F}^{(2)}$ *y de nuevo ocurre que* $x_1^4x_2^3$ *no pertenece a ninguna clase del conjunto* $\mathcal{F}^{(2)}$*, siendo* $x_2 \notin mult(x_1^4x_2, \mathcal{F}^{(2)})$*, como puede apreciarse en la figura,*

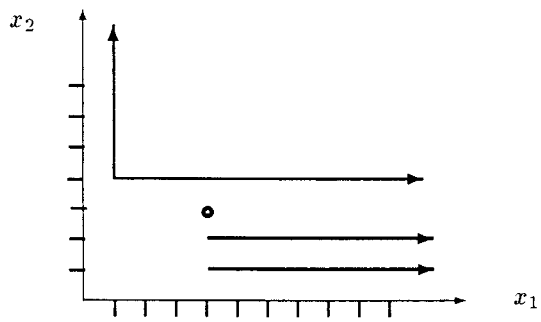

Figura 2.6:

entonces consideramos el conjunto, $\mathcal{F}^{(3)} = \{x_1x_2^4, x_1^4x_2, x_1^4x_2^2, x_1^4x_2^3\}$*, que es completo, como puede apreciarse en la siguiente figura,*

y por tanto el procedimiento anterior termina.

A continuación vamos a demostrar que dado un conjunto finito de monomios $\mathcal{F}$, podemos completarlo después de un número finito de operaciones.

Proposición 2.3.7 *Dado un conjunto finito de monomios,* $\mathcal{F}$*, siempre es posible, después de un*

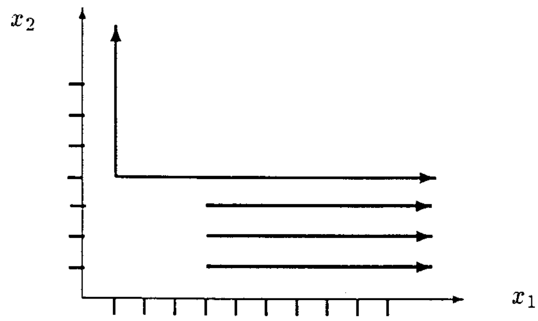

Figura 2.7:

número finito de operaciones, obtener un conjunto de monomios que definan el mismo módulo de Janet que el conjunto $\mathfrak{F}$ y que además sea completo.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n, siendo n el número de variables.

Dado un conjunto $\mathfrak{F}$ finito de monomios, sean

$$b = \min\{\alpha_n \,|X^\alpha \in \mathfrak{F}\} \qquad \text{y} \qquad a = \max\{\alpha_n \,|X^\alpha \in \mathfrak{F}\}.$$

Para $n = 1$, $\mathfrak{F}$ es un conjunto finito de monomios en una variable, y este conjunto siempre es posible completarlo en un número de pasos igual o menor que $a - b$.

Suponemos el resultado cierto para monomios en $n-1$ variables y lo demostraremos para un conjunto $\mathfrak{F}$ en n variables.

Supongamos en primer lugar que $b < a$. Efectuamos el siguiente proceso:

Consideramos el conjunto de todos los monomios del conjunto $\mathfrak{F}$ que tienen en la variable x_n el exponente b, es decir consideramos el conjunto $\mathfrak{F}(b)$, (ver notación 2.2.5). Dividimos estos monomios por x_n^b y obtenemos el conjunto $\widetilde{\mathfrak{F}}(b)$. Este conjunto es un conjunto en $n-1$ variables, entonces, por hipótesis de inducción, es posible completar $\widetilde{\mathfrak{F}}(b)$ en un número finito de pasos. Denotemos por $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(b)$ a este conjunto.

Siguiendo la misma notación, consideremos el conjunto de monomios $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(b) \cup \widetilde{\mathfrak{F}}(b+1)$, que es un conjunto de monomios en $n-1$ variables. Entonces, por hipótesis de inducción, podemos completarlo. Denotemos por $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(b+1)$ el conjunto que obtenemos al completar $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(b) \cup \widetilde{\mathfrak{F}}(b+1)$ y seguimos así hasta obtener el conjunto $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(a)$ es decir, el conjunto, en $n-1$ variables, que resulta de completar $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(a-1) \cup \widetilde{\mathfrak{F}}(a)$.

Observación. Por construcción se verifica que

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_c(b+j) \subseteq \widetilde{\mathfrak{F}}_c(b+j+1) \qquad \text{con} \qquad 0 \leq j \leq a-b-1.$$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\lambda=a}^{b} x_n^\lambda \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda).$$

Veamos que este conjunto de monomios, en n variables, es completo.

Sea $X^\alpha \in \mathcal{G}$, entonces existe λ tal que $X^\alpha \in x_n^\lambda \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)$, por tanto, podemos escribir,

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^\lambda,$$

donde $x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)$. Podemos considerar varios casos:

1. Si $\lambda < a$. Sea $x_k \notin mult(X^\alpha, \mathcal{G})$ y efectuemos el producto de X^α por x_k, es decir,

   $$x_k X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k+1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^\lambda.$$

   Entonces

   (a) Si $k = n$, entonces

   $$x_n X^\alpha = x_n^{\lambda+1} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in x_n^{\lambda+1} \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda) \subseteq x_n^{\lambda+1} \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda+1),$$

   es decir, $x_k X^\alpha$ es un elemento de $\mathcal{G}$ y por tanto pertenecerá a su propia clase.

   (b) Sea $k < n$. Podemos escribir,

   $$x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k+1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = x_k \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}$$

   con $x_k \notin mult(X^\alpha, \mathcal{G})$.
   Pero, por la proposición 2.2.6, sabemos que en este caso se verifica,

   $$mult(X^\alpha, \mathcal{G}) = mult(\frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)).$$

   Se tiene,

   $$\tfrac{X^\alpha}{x_n^\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda) \text{ y } x_k \notin mult(\tfrac{X^\alpha}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda));$$

   pero como $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)$ es un conjunto completo, se tiene que $x_k \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda}$ pertenece a alguna clase del conjunto $\widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)$, es decir,

   $$x_k \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} \in \mathcal{C}_{\frac{X^\gamma}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)},$$

   para algún $\frac{X^\gamma}{x_n^\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)$. Entonces,

   $$x_k X^\alpha = x_n^\lambda x_k \frac{X^\alpha}{x_n^\lambda} \in x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\gamma}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)}.$$

   Por otra parte, tenemos que $\mathcal{C}_{X^\gamma} = x_n^\lambda \mathcal{C}_{\frac{X^\gamma}{x_n^\lambda}, \widetilde{\mathfrak{F}}_c(\lambda)}$, entonces podemos afirmar que

   $$x_k X^\alpha \in \mathcal{C}_{X^\gamma, \mathcal{G}} \text{ para algún } X^\gamma \in \mathcal{G}, \text{ como queremos demostrar.}$$

2. Veamos ahora el caso $\lambda = a$. Sean

   $$X^\alpha \in x_n^a \widetilde{\mathfrak{F}}_c(a) \text{ y } x_k \notin mult(X^\alpha, \mathcal{G}).$$

Si $k = n$, entonces $x_n \in mult(X^\alpha, \mathcal{G})$, por tanto vamos a considerar únicamente el caso $k < n$. En este caso tendremos que,

$$x_k X^\alpha = x_k x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^a.$$

Sabemos que si $X^\alpha \in \mathcal{G}(a)$, entonces tenemos que:

(a) $\mathcal{C}_{X^\alpha, \mathcal{G}} = \bigcup_{l \geq 0} x_n^{a+l} \mathcal{C}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{F}}_c(a)}$.

(b) $mult(X^\alpha, \mathcal{G}) = mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{G}}(a)\right) \bigcup \{x_n\}$.

por tanto, si $x_k \notin mult(X^\alpha, \mathcal{G})$, como $k \neq n$ entonces tendremos que $x_k \notin mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{G}}(a))\right)$. Pero al ser $\widetilde{\mathcal{G}}(a)$ un conjunto completo, podemos afirmar que, $x_k \frac{X^\alpha}{x_n^a} \in \mathcal{C}_{\frac{X^\gamma}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{G}}(a)}$ para algún $\frac{X^\gamma}{x_n^a} \in \widetilde{\mathcal{G}}(a)$, es decir,

$$x_k \frac{X^\alpha}{x_n^a} = \frac{X^\gamma}{x_n^a} X^\beta,$$

donde todas las variables de X^β son multiplicadoras para $\frac{X^\gamma}{x_n^a}$ en el conjunto $\widetilde{\mathcal{G}}(a)$. Pero como,

$$x_k \in mult(\frac{X^\gamma}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{G}}(a)) \Longleftrightarrow x_k \in mult(X^\gamma, \mathcal{G}),$$

entonces tenemos que las variables del monomio X^β son multiplicadoras para X^γ en el conjunto $\mathcal{G}$, por tanto $X^\gamma X^\beta \in \mathcal{C}_{X^\gamma}$ y de ahí que ,

$$x_k X^\alpha = x_n^a x_k \frac{X^\alpha}{x_n^a} = X^\gamma X^\beta \in \bigcup_{X^\delta \in \mathcal{G}} \mathcal{C}_{\delta, \mathcal{G}}.$$

3. Si $a = b$ se razona del mismo modo que el caso anterior.

Por construcción el módulo de Janet definido por el conjunto $\mathcal{F}$ es el mismo que el módulo de Janet definido por $\mathcal{G}$. □

2.4 Ordenación de los monomios de un módulo. Orden lexicográfico

La noción "ser más alto que" (que veremos a continuación) coincide con "ser mayor que " respecto del orden lexicográfico $x_n > \cdots > x_1$. Nosotros seguimos usando la expresión "ser más alto que" para respetar la terminología de M. Janet.

Definición 2.4.1 *Sea un conjunto $\mathcal{F}$ un conjunto finito de monomios.*

- *Decimos que un monomio $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F}$ es más alto (o más bajo) que $X^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \in \mathcal{F}$ si la primera de las diferencias*

$$\alpha_n - \beta_n, \cdots \alpha_1 - \beta_1,$$

que no sea nula es positiva (o negativa).

- *La clase $\mathcal{C}_{X^\alpha}$ es más alta (o más baja) que la clase $\mathcal{C}_{X^\beta}$, si X^α es más alto (o más bajo) que X^β.*

Observación. Vemos que decir que X^α es más alto que X^β es lo mismo que afirmar que $\alpha >_{lex} \beta$.

Proposición 2.4.2 *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de monomios, $X^\alpha \in \mathcal{F}$, $X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\alpha}$ y $x_b \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$. Si $X^\gamma x_b \in \mathcal{C}_{X^\beta}$, para algún $X^\beta \in \mathcal{F}$ entonces se verifica que $\mathcal{C}_{X^\beta} > \mathcal{C}_{X^\alpha}$ con $\mathcal{C}_{X^\beta} \neq \mathcal{C}_{X^\alpha}$.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre el número de variables, n.
• Si $n = 1$.
Sea $a = \text{máx}\{\alpha_1 \mid x_1^{\alpha_1} \in \mathcal{F}\}$ y consideremos $x_1^\lambda \in \mathcal{F}$ tal que $x_1 \notin mult(x_1^\lambda, \mathcal{F})$ entonces tendremos que $\lambda < a$. Por tanto, $\mathcal{C}_{x_1^\lambda} = \{x_1^\lambda\}$, luego $x_1^\lambda x_1 = x_1^{\lambda+1}$, donde $\lambda + 1 \leq a$, así

$$\mathcal{C}_{x_1^\lambda} > \mathcal{C}_{x_1^{\lambda+1}}, \qquad \mathcal{C}_{x_1^\lambda} \neq \mathcal{C}_{x_1^{\lambda+1}}.$$

• Supongamos la proposición cierta para los monomios en $n-1$ variables.

• Lo demostramos para un conjunto $\mathcal{F}$ finito de monomios en n variables.
Consideremos el monomio $X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\alpha}$, donde $X^\alpha \in \mathcal{F}$ y $x_i \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$ y supongamos

$$x_i X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\beta}, \text{ para algún } X^\beta \in \mathcal{F},$$

entonces pueden suceder dos casos:

1. Si $i = n$, entonces tendremos que $\gamma_n = \alpha_n$ y vamos a considerar dos casos:
   (a) Si $x_n \notin mult(X^\beta, \mathcal{F})$ entonces $\beta_n = \gamma_n + 1 > \gamma_n = \alpha_n$ y de ahí que $X^\beta > X^\alpha$ y por tanto,
   $$\mathcal{C}_{X^\beta} > \mathcal{C}_{X^\alpha}, \qquad \mathcal{C}_{X^\beta} \neq \mathcal{C}_{X^\alpha}.$$
   (b) Si $x_n \in mult(X^\beta, \mathcal{F})$, entonces como $x_n \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$ tendremos que $\beta_n > \alpha_n$ y de ahí que $X^\beta > X^\alpha$ y por tanto,
   $$\mathcal{C}_{X^\beta} > \mathcal{C}_{X^\alpha}, \qquad \mathcal{C}_{X^\beta} \neq \mathcal{C}_{X^\alpha}.$$

2. Si $i \neq n$, entonces sea
   $$a = \text{máx}\{\delta_n \mid \forall X^\delta \in \mathcal{F}\}.$$
   Notemos por $\alpha_n = \lambda$, es decir $X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$. Vamos a considerar dos posibilidades:
   (a) Si $\lambda \neq a$, entonces $x_n \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$ y
   $$mult(X^\alpha, \mathcal{F}) = mult(Q_\alpha, \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda))$$
   donde $Q_\alpha = \dfrac{X^\alpha}{x_n^{\alpha_n}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(\lambda)$.
   Supongamos que,
   $$x_i X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\beta}, \text{ para algún } X^\beta \in \mathcal{F},$$

entonces

$$x_i X^{\gamma} = X^{\beta} X^{\beta'}, \qquad i \neq n$$

donde $X^{\beta'} \in \mathcal{M}(X)$, es decir,

$$x_i x_1^{\gamma_1} \cdots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{\alpha_n} = x_1^{\beta_1+\beta'_1} \cdots x_n^{\beta_n+\beta'_n},\ i \neq n,$$

entonces, $\alpha_n = \beta_n + \beta'_n$ y de ahí que $\beta_n \leq \alpha_n \neq a$, por tanto podemos afirmar que, $x_n \notin mult(X^{\beta}, \mathcal{F})$, así tendremos $\beta'_n = 0$ y $\alpha_n = \beta_n$, y por tanto, $X^{\beta} \in \mathcal{F}(\lambda)$.

Por tanto los monomios $X^{\beta}X^{\beta'}$ de la clase $\mathcal{C}_{X^{\beta}}$ serán productos por $x_n^{\beta_n}$ de un monomio de la clase $\mathcal{C}_{Q_{\beta}}$, es decir,

$$\mathcal{C}_{X^{\beta}} = x_n^{\beta_n} \mathcal{C}_{Q_{\beta}},$$

donde $Q_{\beta} = \dfrac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda}}$, es decir,

$$X^{\beta} X^{\beta'} = x_n^{\lambda} Q_{\beta} Q_{\beta'}$$

y como por hipótesis tenemos que, $x_i X^{\gamma} \in \mathcal{C}_{X^{\beta}}$, entonces,

$$x_i X^{\gamma} = X^{\beta} X^{\beta'} = x_n^{\lambda} Q_{\beta} Q_{\beta'},\ i \neq n.$$

Por otra parte como $\alpha_n = \lambda \neq a$ y $X^{\gamma} = x_n^{\lambda} Q_{\alpha} Q_{\alpha'}$ donde $Q_{\alpha}Q_{\alpha'} \in \mathcal{C}_{Q_{\alpha}}$ así

$$x_i x_n^{\lambda} Q_{\alpha} Q_{\alpha'} = x_n^{\lambda} Q_{\beta} Q_{\beta'},\ i \neq n.$$

Así

$$x_i Q_{\alpha} Q_{\alpha'} = Q_{\beta} Q_{\beta'},\ i \neq n,$$

por tanto,

$$x_i Q_{\alpha} Q_{\alpha'} \in \mathcal{C}_{\beta}, \qquad i \neq n,$$

donde $Q_{\alpha}Q_{\alpha'} \in \mathcal{C}_{Q_{\alpha}}$. Aplicando la hipótesis de inducción en $n-1$ variables tendremos que, $\mathcal{C}_{Q_{\alpha}} > \mathcal{C}_{Q_{\beta}}$, con $\mathcal{C}_{Q_{\alpha}} \neq \mathcal{C}_{Q_{\beta}}$ luego,

$$x_n^{\lambda} \mathcal{C}_{Q_{\alpha}} > x_n^{\lambda} \mathcal{C}_{Q_{\beta}},\ \text{con}\ x_n^{\lambda} \mathcal{C}_{Q_{\alpha}} \neq x_n^{\lambda} \mathcal{C}_{Q_{\beta}}.$$

Así podemos afirmar que,

$$\mathcal{C}_{X^{\alpha}} > \mathcal{C}_{X^{\beta}},\ \text{con}\ \mathcal{C}_{X^{\alpha}} \neq \mathcal{C}_{X^{\beta}}.$$

(b) Sea $\lambda = a$, es decir $X^{\alpha} \in \mathcal{F}(a)$, entonces se verificará que $\gamma_n = a + a'$, con $a' \geq 0$. En este caso tendremos,

$$mult(X^{\alpha}, \mathcal{F}) = \{x_n\} \bigcup mult(Q_a, \widetilde{\mathcal{F}}(a)).$$

El grado del monomio $x_i X^{\gamma}$ en la variable x_n es γ_n que en este caso es mayor o igual que a. Así el grado, en la variable x_n del monomio $x_i X^{\gamma}$ es mayor o igual que a.

Ahora si $x_i X^{\gamma} \in \mathcal{C}_{X^{\beta}}$ entonces $X^{\beta} \in \mathcal{F}(a)$.

Así tendremos que,

$$\mathcal{C}_{X^{\alpha}} = x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_{\alpha}}, \qquad Q_{\alpha} = \frac{X^{\alpha}}{x_n^{a}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(a)$$

y

$$\mathcal{C}_{X^{\beta}} = x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_{\beta}}, \qquad Q_{\beta} = \frac{X^{\beta}}{x_n^{a}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(a)$$

como $x_i X^\gamma \in \mathcal{C}_{X^\beta}$ luego,

$$x_i X^\gamma = x_i x_n^{a+a'} Q_\alpha Q_{\alpha'} = x_n^{a+a'} Q_\beta Q_{\beta'}, \ i \neq n$$

entonces,

$$x_i Q_\alpha Q_{\alpha'} = Q_\beta Q_{\beta'}, \ i \neq n$$

así $x_i \mathcal{C}_{Q_\alpha} \in \mathcal{C}_\beta$ y aplicando la hipótesis de inducción, tendremos que, $\mathcal{C}_{Q_\beta} > \mathcal{C}_{Q_\alpha}$, $\mathcal{C}_{Q_\beta} \neq \mathcal{C}_{Q_\alpha}$. Así

$$x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_\beta} > x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_\alpha}, \qquad x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_\beta} \neq x_n^{a+a'} \mathcal{C}_{Q_\alpha}$$

y por tanto,

$$\mathcal{C}_{X^\beta} > \mathcal{C}_{X^\alpha}, \qquad \mathcal{C}_{X^\beta} \neq \mathcal{C}_{X^\alpha}.$$

□

Corolario 2.4.3 (Propiedad II)
En un conjunto de monomios $\mathcal{F}$, finito y completo, todo producto de un monomio de una clase $\mathcal{C}_{X^\alpha}$, $X^\alpha \in \mathcal{F}$ por una variable x_k tal que $x_k \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$, pertenece a una clase $\mathcal{C}_{X^\beta}$ para algún $X^\beta \in \mathcal{F}$ siendo $\mathcal{C}_{X^\beta} > \mathcal{C}_{X^\alpha}$ y $\mathcal{C}_{X^\alpha} \neq \mathcal{C}_{X^\beta}$.

2.4.1 Observaciones

Vemos que,

1. En un conjunto finito de monomios $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(X)$, el monomio más alto es el único que tiene todas las variables $\{x_1, \cdots, x_n\}$ multiplicadoras.

2. Sea $\mathcal{B}$ una base de Janet del módulo de Janet J,

$$\mathcal{B} = \left\{ X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(m)} \right\}$$

donde $X^{\alpha(i)}$ es más alto que $X^{\alpha(i+1)}$, para $i \in \{1, \cdots, m-1\}$. Entonces consideramos la partición asociada a la m-upla $(X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(m)})$(ver 1.2.1).
Tendremos,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(1)}}\right) &= \alpha(1) + \mathbf{N}^n = \Delta_1, \\
\phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(2)}}\right) &= (\alpha(2) + \mathbf{N}^n) \setminus \phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(1)}}\right) = \Delta_2, \\
&\vdots \\
\phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(m)}}\right) &= (\alpha(m) + \mathbf{N}^n) \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{m-1} \phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(j)}}\right) = \Delta_m.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bigcup_{j=1}^{m} \left(\phi\left(\mathcal{C}_{X^{\alpha(j)}}\right)\right) = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j = \phi(J).$$

3. Un conjunto de monomios puede ser completo para un orden determinado de las variables y no serlo para otro, ya que la noción de variable multiplicadora depende del orden establecido entre las variables.

Ejemplo 2.4.4

$$\mathcal{F} = \{x_1^3 x_2, x_1 x_2^2\}$$

es completo si $x_2 > x_1$, *pero sin embargo si consideramos el orden* $x_1 > x_2$ *no es completo.*

4. **Definición 2.4.5** *Dado un monomio* $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F}$, *se llama orden del monomio a*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Proposición 2.4.6 *Un conjunto finito de monomios* $\mathcal{F}$, *tal que* $|\alpha| = 1$ *para todo* $X^\alpha \in \mathcal{F}$ *es siempre completo.*

Demostración. Vamos a demostrar la proposición para las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Supongamos que tenemos un conjunto $\mathcal{F}$ formado por algunas de las variables anteriores. Se verifica, por la definición de variables multiplicadoras, que las variables multiplicadoras de un monomio x_i del conjunto $\mathcal{F}$ son:

(a) Todas las x_k donde $k \leq i$.

(b) Entre las x_k, donde $k > i$, las que no están en el conjunto $\mathcal{F}$ dado.

Para ver que el conjunto $\mathcal{F}$ es completo veremos que todo múltiplo de un monomio $x_i \in \mathcal{F}$ pertenece a alguna clase del conjunto $\mathcal{F}$.

Sea X^γ un múltiplo de $x_i \in \mathcal{F}$, entonces tenemos que

$$X^\gamma = x_i X^\alpha.$$

Entre las variables que tiene el monomio X^γ existe al menos alguna de las que pertenecen al conjunto $\mathcal{F}$, en particular la variable x_i. Consideramos

$$h = \text{máx}\{x_j \in \mathcal{F} \,|\, x_j \in X^\gamma\}$$

entonces se verifica que,

$$mult\,(x_h, \mathcal{F}) = \{x_k \,|\, k \leq h,\, x_k \in \mathcal{F}\} \bigcup \{x_k \notin \mathcal{F}\}$$

por tanto podemos afirmar que $X^\gamma \in \mathcal{C}_{x_h, \mathcal{F}}$.

□

2.5 Monomios complementarios. Clases. Aplicación a los módulos

En este apartado vamos a obtener los monomios que no pertenecen al módulo de Janet generado por el conjunto $\mathcal{F}$.
El conjunto de tales monomios está generado por un conjunto que denotamos por $\mathcal{N}$, siendo este conjunto la unión disjunta de ciertos conjuntos de monomios que denotaremos por $\mathcal{N}^{(i)}$, con $1 \leq i \leq n$ es decir

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{N}^{(i)}.$$

También veremos que $\mathbf{N}^n$ está generado por el conjunto $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{N}^{(i)}$, siendo $\mathcal{N}^{(0)} = \mathcal{F}$, en el sentido precisado en la proposición 1.2.

Para obtener los elementos de un conjunto $\mathcal{N}^{(i)}$ donde $0 \leq i \leq n-1$, procederemos como sigue, en primer lugar consideramos el conjunto de monomios de $\mathcal{F}$ tales que en las variables $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{i+1}$ tengan los exponentes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}$, es decir consideramos el conjunto $\mathcal{F}(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$.
Sea $E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1})$ el conjunto formado por los exponentes en la variable x_i de los monomios pertenecientes a $\mathcal{F}(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, es decir,

$$E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}) = \{\alpha_i \in \mathbf{N} \mid X^\alpha \in \mathcal{F}(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)\}.$$

Nótese que $E^{(0)}(\alpha_n, \cdots, \alpha_1) = \mathbf{N}$.

Consideremos el conjunto $\{\beta_{ij}\} \subseteq \mathbf{N}$ tal que,

$$\beta_{ij} \notin E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}) \quad \text{y} \quad \beta_{ij} < \text{máx}\left\{E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1})\right\}$$

es decir, cada β_{ij} es un entero positivo o nulo (si $E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}) \neq \emptyset$) que no pertenece al conjunto $E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1})$ e inferior al máximo de $E^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1})$. Por convenio escribimos $\beta_{00} = 0$.

Entonces ya estamos en condiciones de formar el conjunto de monomios $\mathcal{N}^{(i)}(\alpha_n, \cdots, \alpha_{i+1})$,

$$\mathcal{N}^{(i)}(\alpha_n, \cdots, \alpha_{i+1}) = \left\{x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_i^{\beta_{ij}} \mid X^\alpha \in \mathcal{F}\right\}$$

y así podemos decir que,

$$\mathcal{N}^{(i)} = \bigcup_{(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}) \in \mathbf{N}^{n-i}} \mathcal{N}^{(i)}(\alpha_n, \cdots, \alpha_{i+1}).$$

El conjunto de monomios $\mathcal{N}^{(n)}$ está formado por todos los monomios de la forma x_n^β tal que β no aparece como exponente de la variable x_n en los monomios del conjunto $\mathcal{F}$ y además $\beta < \text{máx}\{\alpha_n \mid X^\alpha \in \mathcal{F}\}$.

El conjunto de monomios $\mathcal{N}^{(0)}$ está formado por todos los monomios del conjunto $\mathcal{F}$, basta construirlo, según el procedimiento que hemos indicado.

Entonces ya estamos en condiciones de dar la siguiente definición,

Definición 2.5.1 *A los monomios generados por el conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{i+1}) \in \mathbf{N}^{n-i}} \mathcal{N}^{(i)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots \alpha_{i+1})$$

se le llaman monomios complementarios de los monomios perteneciente al módulo de Janet generado por $\mathcal{F}$.

Más adelante veremos la razón de llamarse monomios complementarios.

Ejemplo 2.5.2 *Vamos a calcular los monomios complementarios del conjunto*

$$\mathcal{F} = \{x_3^3x_2^2x_1^2,\ x_3^3x_1^3,\ x_3x_2x_1^3,\ x_3x_2\}.$$

Como x_3 *aparece en el conjunto* $\mathcal{F}$ *con los exponentes* $\{1,3\}$, *entonces decimos que,*

$$\mathcal{N}^{(3)} = \{x_3^2, 1\}.$$

Vamos a calcular $\mathcal{N}^{(2)}$. *Para ello tendremos que calcular:*

1. $\mathcal{N}^{(2)}(3)$,
como $\mathcal{F}(3) = \{x_3^3x_2^2x_1^2, x_3^3x_1^3\}$, *entonces* $E^{(2)}(3) = \{2,0\}$ *y* $\beta_{ij} = \{1\}$, *por tanto*
$$\mathcal{N}^{(2)}(3) = \{x_3^3x_2\}.$$

2. $\mathcal{N}^{(2)}(1)$,
como $\mathcal{F}(1) = \{x_3x_2x_1^3, x_3x_2\}$, *entonces* $E^{(2)}(1) = \{1\}$ *y* $\beta_{ij} = \{0\}$, *por tanto*
$$\mathcal{N}^{(2)}(1) = \{x_3\}.$$

Por tanto,
$$\mathcal{N}^{(2)} = \{x_3^3x_2, x_3\}.$$

Vamos a calcular $\mathcal{N}^{(1)}$, *para ello tendremos que calcular:*

1. $\mathcal{N}^{(1)}(3,2)$,
como $\mathcal{F}(2,3) = \{x_3^3x_2^2x_1^2\}$, *entonces* $E^{(1)}(3,2) = \{2\}$ *y* $\beta_{ij} = \{0,1\}$, *por tanto*
$$\mathcal{N}^{(1)}(3,2) = \{x_3^3x_2^2, x_3^3x_2^2x_1\}.$$

2. $\mathcal{N}^{(1)}(3,0)$,
como $\mathcal{F}(0,3) = \{x_3^3x_1^3\}$, *entonces* $E^{(1)}(3,0) = \{3\}$ *y* $\beta_{ij} = \{0,1,2\}$, *por tanto*
$$\mathcal{N}^{(1)}(3,0) = \{x_3^3, x_3^3x_1, x_3^3x_1^2\}.$$

3. $\mathcal{N}^{(1)}(1,1)$,
como $\mathcal{F}(1,1) = \{x_3x_2x_1^3, x_3x_2\}$, *entonces* $E^{(1)}(1,1) = \{3,0\}$ *y* $\beta_{ij} = \{1,2\}$, *por tanto*
$$\mathcal{N}^{(1)}(1,1) = \{x_3x_2x_1, x_3x_2x_1^2\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{N}^{(1)} = \{x_3^3x_2, x_3^3x_2^2x_1, x_3^3, x_3^3x_1, x_3^3x_1^2, x_3x_2x_1, x_3x_2x_1^2\},$$

y así podemos afirmar que,

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{N}^{(i)}.$$

Definición 2.5.3 *Sea*

$$\overline{X^\alpha} = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_i^{\beta} \in \mathcal{N}^{(i)}$$

entonces llamaremos variables multiplicadoras de $\overline{X^\alpha}$ *a:*

1. *Las variables* $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$.
2. *Las variables* $x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n$ *que pertenecen a mult* $(X^\alpha, \mathcal{F})$, *donde* $X^\alpha \in \mathcal{F}(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$.

Ejemplo 2.5.4 *En el ejemplo anterior tenemos que las variables multiplicadoras de cada monomio del conjunto* $\mathcal{N}$ *son respectivamente,*

	Variables multiplicadoras		
$1, \quad x_3^2$	$\bullet$	x_2	x_1
$x_3^3 x_2$	x_3	$\bullet$	x_1
x_3	$\bullet$	$\bullet$	x_1
$x_3^3 x_2^2 x_1, \quad x_3^3 x_2^2$	x_3	x_2	$\bullet$
$x_3^3 x_1^2, \quad x_3^3 x_1, \quad x_3^3$	x_3	$\bullet$	$\bullet$
$x_3 x_2 x_1^2, \quad x_3 x_2 x_1$	$\bullet$	x_2	$\bullet$

Definición 2.5.5 *Dado un monomio* $\overline{X^\alpha} \in \mathcal{N}$, *se llama clase correspondiente al monomio* $\overline{X^\alpha}$ *y se denota por* $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}}$ *al conjunto de monomios que podemos obtener mediante el producto de un monomio* $\overline{X^\alpha}$ *por todos los monomios que podemos formar con sus variables multiplicadoras (comprendiendo al propio* $\overline{X^\alpha}$*), es decir*

$$\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}} = \left\{ \overline{X^\alpha} X^\beta \mid \textit{toda variable de } X^\beta \textit{ está en mult } (\overline{X^\alpha}) \right\}.$$

Si $\overline{X^\alpha}$ *no admite variables multiplicadoras, entonces* $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}} = \left\{ \overline{X^\alpha} \right\}$.

Ejemplo 2.5.6 *En el ejemplo 2.5.4 tenemos que,*

$$\mathcal{C}_{\overline{1}} = \{x_2^\lambda x_1^\mu \mid \lambda, \mu \geq 0\}, \quad \mathcal{C}_{\overline{x_3^2}} = \{x_3^2 x_2^\lambda x_1^\mu \mid \lambda, \mu \geq 0\}, \quad \mathcal{C}_{\overline{x_3^3 x_2}} = \{x_3^{3+\lambda} x_2 x_1^\mu \mid \lambda, \mu \geq 0\}, \quad \cdots$$

A continuación vamos a ver las propiedades que tienen las clases correspondientes a monomios complementarios de un conjunto $\mathcal{F}$ y la relación que tienen con las clases de los monomios de $\mathcal{F}$.

Proposición 2.5.7 *Con la notación anterior, se verifica que dados dos monomios* $\overline{X^\alpha}, \overline{X^\delta} \in \mathcal{N}$ *con* $\alpha \neq \delta$ *entonces tenemos que* $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}} \bigcap \mathcal{C}_{\overline{X^\delta}} = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\overline{X^\alpha} \in \mathcal{N}^{(j)}$ y $\overline{X^\delta} \in \mathcal{N}^{(j')}$ con $j \geq j'$. Entonces podemos considerar

- Si $\overline{X^\alpha} \in \mathcal{N}^{(j)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1})$ y $\overline{X^\delta} \in \mathcal{N}^{(j')}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1})$ es decir $\overline{X^\alpha}$ y $\overline{X^\delta}$ corresponden a monomios complementarios que tienen en las variables $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{j+1}$ el mismo conjunto de exponentes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1}$, entonces estos monomios serán de la forma,

$$\overline{X^\alpha} = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} x_j^{\beta_{jk}}$$

y

$$\overline{X^\delta} = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} x_j^{\delta_j} x_{j-1}^{\delta_{j-1}} \cdots x_{j'+1}^{\delta_{j'+1}} x_{j'}^{\beta_{j'k'}}.$$

Si $\beta_{jk} = \delta_j$, es decir el exponente que tiene x_j en $\overline{X^\alpha}$ fuese igual al exponente que tiene x_j en el monomio $\overline{X^\delta}$ tendríamos que $\beta_{jk} \in E^{(j)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1})$ y esto es imposible por la condición que debe cumplir β_{jk}, así podemos afirmar que $\beta_{jk} \neq \delta_j$.

Consideremos ahora un monomio X^γ perteneciente a $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}}$ entonces es de la forma,

$$X^\gamma = x_n^{\gamma_n} \cdots x_{j+1}^{\gamma_{j+1}} x_j^{\beta_{jk}} x_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdots x_1^{\gamma_1},$$

aquí observamos que el exponente de x_j en cualquier monomio perteneciente a la clase de un monomio $\overline{X^\alpha}$ es el mismo que tiene $\overline{X^\alpha}$, ya que $mult(\overline{X^\alpha}) \subseteq \{x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n\}$.

Sea X^μ un monomio perteneciente a $\mathcal{C}_{\overline{X^\delta}}$ entonces X^μ es de la forma,

$$X^\mu = x_n^{\mu_n} \cdots x_{j+1}^{\mu_{j+1}} x_j^{\mu_j} x_{j-1}^{\mu_{j-1}} \cdots x_{j'+1}^{\mu_{j'+1}} x_{j'}^{\beta_{j'k'}} x_{j'-1}^{\mu_{j'-1}} \cdots x_1^{\mu_1}.$$

Ahora si $\mu_j = \delta_j$ ya estaría y si $\mu_j \neq \delta_j$, entonces tenemos que x_j es variable multiplicadora para $\overline{X^\delta} \in \mathcal{N}^{(j')}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1})$ significa que δ_j es mayor o igual al máximo de los exponentes de x_j en los nomomios de $\mathcal{F}$ donde las variables $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{j+1}$ tienen los exponentes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1}$. Por tanto δ_j es mayor que β_{jk} y de ahí que,

$$\mu_j > \delta_j > \beta_{jk} = \gamma_{n-j}$$

y así podemos afirmar que las clases $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}}$ y $\mathcal{C}_{\overline{X^\delta}}$ son disjuntas.

- Si $\overline{X^\alpha} \in \mathcal{N}^{(j)}(\alpha_n, \cdots, \alpha_{j+1})$ y $\overline{X^\delta} \in \mathcal{N}^{(j')}(\delta_n, \cdots, \delta_{j+1})$ donde

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{j+1}) \neq (\delta_n, \delta_{n-1}, \cdots, \delta_{j+1})$$

es decir $\overline{X^\alpha}$ y $\overline{X^\delta}$ corresponden a monomios complementarios que tienen en las variables $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{j+1}$ distintos conjuntos de de exponentes, entonces estos monomios serán de la forma,

$$\overline{X^\alpha} = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} x_j^{\beta_{jk}}$$

y

$$\overline{X^\delta} = x_n^{\delta_n} x_{n-1}^{\delta_{n-1}} \cdots x_{j+1}^{\delta_{j+1}} x_j^{\delta_j} x_{j-1}^{\delta_{j-1}} \cdots x_{j'+1}^{\delta_{j'+1}} x_{j'}^{\delta_{j'k'}}.$$

Sean $X^\gamma \in \mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}}$ y $X^\mu \in \mathcal{C}_{\overline{X^\delta}}$, entonces estos monomios serán de la forma,

$$X^\gamma = x_n^{\gamma_n} \cdots x_{j+1}^{\gamma_{j+1}} x_j^{\beta_{jk}} x_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdots x_1^{\gamma_1}$$

y

$$X^\mu = x_n^{\mu_n} \cdots x_{j+1}^{\mu_{j+1}} x_j^{\mu_j} x_{j-1}^{\mu_{j-1}} \cdots x_{j'+1}^{\mu_{j'+1}} x_{j'}^{\beta_{j'k'}} x_{j'-1}^{\mu_{j'-1}} \cdots x_1^{\mu_1}$$

donde $(\alpha_n, \cdots, \alpha_{n-j+1}) \neq (\delta_n, \cdots, \delta_{n-j+1})$.

Notación 2.5.8 *Dado un monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}$, denotaremos por $\widetilde{X^\alpha}$ al monomio obtenido haciendo en $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 1$ en el monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}$. Al conjunto de tales monomios lo denotaremos por $\mathcal{F}^{(i)}$, es decir*

$$\mathcal{F}^{(i)} = \left\{ x_n^{\alpha_n} \cdots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mid X^\alpha \in \mathcal{F} \right\}.$$

Podemos afirmar que $\mathcal{F}^{(i)}$ es el conjunto de monomios obtenidos haciendo $x_1 = \cdots = x_i = 1$ en todos los monomios del conjunto $\mathcal{F}$.

Observación. Dados dos monomios $X^\alpha, X^\delta \in \mathcal{F}$, tales que $\alpha \neq \delta$ entonces tenemos que,

$$\mathcal{C}_{\tilde{X}^\alpha,\mathcal{F}^{(i)}} \bigcap \mathcal{C}_{\tilde{X}^\delta,\mathcal{F}^{(i)}} = \emptyset.$$

Si hacemos $x_1 = \cdots = x_{n-j} = 1$ en X^γ y en X^μ obtenemos que, $\widetilde{X^\gamma} = x_n^{\gamma_n} \cdots x_{j+1}^{\gamma_{j+1}}$ $\widetilde{X^\mu} = x_n^{\mu_n} \cdots x_{j+1}^{\mu_{j+1}}$ son monomios pertenecientes respectivamente a las clases $\mathcal{C}_{\tilde{X}^\alpha,\mathcal{F}^{(j)}}$ y $\mathcal{C}_{\tilde{X}^\delta,\mathcal{F}^{(j)}}$ que al ser distintas, hace que los monomios anteriores sean distintos y de ahí que X^γ y X^μ sean monomios distintos.

□

Proposición 2.5.9 *Con la notación anterior, se verifica que,*

$$\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha},\mathcal{N}} \bigcap \mathcal{C}_{X^\delta,\mathcal{F}} = \emptyset$$

para cualquier $\overline{X}^\alpha \in \mathcal{N}$ *y cualquier* $X^\delta \in \mathcal{F}$.

Demostración. Basta que observemos que los monomios del conjunto $\mathcal{F}$ pueden ser considerados como monomios de $\mathcal{N}^{(0)}$ y aplicaríamos la proposición anterior. □

Proposición 2.5.10 *Con la notación anterior, dado cualquier monomio* X^α, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, *entonces se verifica que o bien* $X^\alpha \in \mathcal{C}_{\overline{X^\beta}}$, *para algún* $\overline{X^\beta} \in \mathcal{N}^{(i)}$ *con* $i = 1, \cdots, n$ *o bien* $X^\alpha \in \mathcal{C}_{X^\delta}$ *para algún* $X^\delta \in \mathcal{F}$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n, siendo n el número de variables.

- Si $n = 1$ la proposición es evidente.
- Supongamos la proposición cierta para monomios en $n-1$ variables.
- Demostraremos la proposición para monomios en n variables.

Sea $X^\lambda = x_n^{\lambda_n} \cdots x_1^{\lambda_1}$ un monomio de $\mathcal{M}(X)$. Sea

$$a = \max\{\alpha_n \mid X^\alpha \in \mathcal{F}\}$$

entonces

- Si $\lambda_n < a$ y $\lambda_n \notin \{\alpha_n \mid X^\alpha \in \mathcal{F}\}$ entonces tenemos que $X^\lambda \in \mathcal{N}^{(n-0)}$ y de ahí que $X^\gamma \in \overline{\mathcal{C}_{X^\gamma}}$.
- Si $\lambda < a$ y $\lambda_n = \alpha_n$ para algún monomio $X^\alpha \in \mathcal{F}$ entonces consideramos el conjunto,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\lambda_n) = \left\{ \frac{X^\alpha}{x_n^{\lambda_n}} \mid \forall X^\alpha \in \mathcal{F}(\lambda_n) \right\}$$

así tenemos un conjunto de monomios en $n-1$ variables.

Denotemos por $\overline{\mathcal{C}}'_{\frac{X^\alpha}{x_n^{\lambda_n}}}$ y $\mathcal{C}'_{\frac{X^\alpha}{x_n^{\lambda_n}}}$ las clases en $n-1$ variables que define el conjunto $\tilde{\mathcal{F}}(\lambda_n)$.
En particular, el monomio $\frac{X^\gamma}{x_n^{\lambda_n}}$, en $n-1$ variables, pertenecerá a alguna clase, es decir,

$$\frac{X^\gamma}{x_n^{\lambda_n}} \in \overline{\mathcal{C}}'_{\frac{X^\alpha}{x_n^{\lambda_n}}}$$

para algún $\overline{X^{\alpha}} \in \mathcal{N}^{(n-i)}$ para algún $i = 0, \cdots, n-2$, ó

$$\frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} \in \mathcal{C}'_{\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}}$$

para algún $X^{\beta} \in \mathcal{F}$.
Pero entonces

$$x_n^{\lambda_n} \overline{\frac{X^{\alpha}}{x_n^{\lambda_n}}} = \overline{X^{\alpha}} \text{ y } x_n^{\lambda_n} \overline{\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}} = \overline{X^{\beta}}$$

donde $mult(\overline{X^{\alpha}}) = mult\left(\overline{\frac{X^{\alpha}}{x_n^{\lambda_n}}}\right)$ y $mult\left(X^{\beta}, \mathcal{F}\right) = mult\left(\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}, \mathcal{F}\right)$.
Así si $\frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} \in \overline{\mathcal{C}}'_{\frac{X^{\alpha}}{x_n^{\lambda_n}}}$ entonces tendremos que,

$$\frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} = \frac{\overline{X^{\alpha}}}{x_n^{\lambda_n}} X^{\alpha'}$$

donde las variables de $X^{\alpha'}$, pertenecen al conjunto $mult\left(\overline{\frac{X^{\alpha}}{x_n^{\lambda_n}}}\right)$ luego,

$$X^{\gamma} = x_n^{\lambda_n} \frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} = x_n^{\lambda_n} \frac{\overline{X^{\alpha}}}{x_n^{\lambda_n}} X^{\alpha'} = \overline{X^{\alpha}} X^{\alpha'}$$

donde las variables del monomio $X^{\alpha'}$ pertenecen al conjunto $mult(\overline{X^{\alpha}})$, por tanto podemos decir que,

$$X^{\gamma} \in \mathcal{C}_{\overline{X^{\alpha}}}, \qquad \overline{X^{\alpha}} \in \mathcal{N}^{(n-i)}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Si $\frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} \in \mathcal{C}'_{\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}, \mathcal{F}}$ entonces tendremos que

$$\frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} = \frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}} X^{\beta'}$$

donde las variables de $X^{\beta'}$ pertenecen al conjunto $mult\left(\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}, \mathcal{F}\right)$ y al verificarse

$$mult\left(\frac{X^{\beta}}{x_n^{\lambda_n}}, \mathcal{F}\right) = mult\left(X^{\beta}, \mathcal{F}\right)$$

tendremos que,

$$X^{\gamma} = x_n^{\lambda_n} \frac{X^{\gamma}}{x_n^{\lambda_n}} = x_n^{\lambda_n} \frac{\overline{X^{\beta}}}{x_n^{\lambda_n}} X^{\beta'} \in \mathcal{C}_{X^{\beta}, \mathcal{F}}.$$

- Supongamos que $\lambda_n \geq a$, es decir, $\lambda_n = a + a'$, con $a' \geq 0$. En este caso podemos considerar el conjunto,

$$\widetilde{\mathcal{F}}(a) = \left\{ \frac{X^{\alpha}}{x_n^a} \mid X^{\alpha} \in \mathcal{F}(a) \right\}.$$

De nuevo el conjunto $\widetilde{\mathcal{F}}(a)$ es un conjunto en $n-1$ variables y de nuevo podremos aplicar la hipótesis de inducción. Por tanto si consideramos el monomio

$$\frac{X^{\lambda}}{x_n^{a+a'}} = x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \cdots x_1^{\lambda_1},$$

tendremos que este monomio verifica que o bien, $\frac{X^{\lambda}}{x_n^{a+a'}} \in \mathcal{C}'_{\frac{X^{\alpha}}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{F}}(a)}$ para algún $\frac{X^{\alpha}}{x_n^a} \in \widetilde{\mathcal{F}}(a)$ o bien $\frac{X^{\lambda}}{x_n^{a+a'}} \in \overline{\mathcal{C}'}_{\frac{X^{\beta}}{x_n^a}}$, para algún $\overline{\frac{X^{\beta}}{x_n^a}} \in \mathcal{N}$. Por tanto si $\frac{X^{\lambda}}{x_n^{a+a'}} \in \mathcal{C}'_{\frac{X^{\alpha}}{x_n^a}, \widetilde{\mathcal{F}}(a)}$ entonces tendremos que,

$$\frac{X^{\gamma}}{x_n^{a+a'}} = \frac{X^{\alpha}}{x_n^a} X^{\alpha'},$$

donde las variables de $X^{\alpha'}$ pertenecen al conjunto *mult* $\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a}, \tilde{\mathcal{F}}(a)\right)$. Pero sabemos que se verifica que si $X^\alpha \in \mathcal{F}(a)$ entonces,

$$mult\,(X^\alpha, \mathcal{F}) = \{x_n\} \bigcup mult\left(\frac{X^\alpha}{x_n^a}, \tilde{\mathcal{F}}(a)\right).$$

Por tanto,

$$X^\gamma = x_n^{a+a'} \frac{X^\gamma}{x_n^a} X^{\alpha'} = X^\alpha x_n^{a'} X^{\alpha'} \in \mathcal{C}_{X^\alpha, \mathcal{F}}.$$

Si $\frac{X^\lambda}{x_n^{a+a'}} \in \overline{\mathcal{C}'}_{\frac{X^\alpha}{x_n^a}}$ para algún $\overline{\frac{X^\alpha}{x_n^a}} \in \mathcal{N}^{(n-i)}$ para algún $i = 0, \cdots, n-1$ entonces

$$\frac{X^\gamma}{x_n^{a+a'}} = \overline{\frac{X^\alpha}{x_n^a}} X^{\alpha'}$$

donde las variables de $X^{\alpha'}$ pertenecen al conjunto *mult* $\left(\overline{\frac{X^\alpha}{x_n^a}}\right)$ pero

$$mult\left(\overline{\frac{X^\alpha}{x_n^a}}\right) = \{x_1, \cdots, x_{n-i-1}\} \bigcup \{x_j \mid x_j \in mult\,(X^\alpha, \mathcal{F})\}$$

donde $X^\alpha \in \mathcal{F}(\alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{n-i+1})$. Así tendremos que

$$X^\gamma = x_n^{a+a'} \frac{X^\gamma}{x_n^{a+a'}} = x_n^{a+a'} \overline{\frac{X^\alpha}{x_n^a}} X^{\alpha'} = x_n^{a'} \overline{X^\alpha} X^{\alpha'} = \overline{X^\alpha} x_n^{a'} X^{\alpha'} \in \overline{\mathcal{C}_{X^\alpha}}.$$

□

Así tenemos el siguiente corolario,

Corolario 2.5.11 *Un monomio cualquiera X^α, $\alpha \in \mathbf{N}^n$ pertenece a un única clase $\mathcal{C}_{\overline{X^\alpha}}$ con $\overline{X^\alpha} \in \mathcal{N}^{(i)}$, $i = 0, \cdots, n$.*

Por tanto, podemos concluir que,

Si $\mathcal{F}$ es un conjunto finito y completo de monomios y J el módulo de Janet definido por $\mathcal{F}$ entonces, tendremos que

$$J = \bigcup_{\alpha \in \phi(\mathcal{F})} \mathcal{C}_\alpha$$

y el conjunto de monomios que no pertenecen a J, que denotaremos por $\overline{J}$ será

$$\overline{J} = \bigcup_{\beta \in \phi(\mathcal{N})} \mathcal{C}_\beta.$$

Por tanto,

$$\mathbf{N}^n = \phi(J) \bigcup \phi\left(\overline{J}\right)$$

siendo esta unión disjunta. Así hemos obtenido la partición de $\mathbf{N}^n$ como los monomios que pertenecen al módulo de Janet definido por un conjunto y los que no pertenecen. De aquí el nombre de monomios complementarios.

2.6 Número de monomios de orden p que pertenecen a un módulo de Janet. Función de Hilbert

Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de monomios. Sea p_0 el orden máximo de los monomios del conjunto $\mathcal{F}$, es decir,

$$p_0 = \text{máx}\{|\alpha| \mid X^\alpha \in \mathcal{F}\}.$$

Observación. Para cualquier monomio X^β del conjunto $\mathcal{N}$ tendremos que $|\beta| \leq p_0 - 1$.

Sea $p \in \mathbf{N}$, tal que $p \geq p_0$ y consideremos los siguientes conjuntos,

$$\mathcal{C}_\alpha^p = \{X^\gamma \in \mathcal{C}_\alpha \mid \alpha \in \phi(\mathcal{F}) \wedge |\gamma| = p\}$$

y

$$\overline{\mathcal{C}_\beta^p} = \{X^\mu \in \overline{\mathcal{C}_\beta} \mid \beta \in \phi(\mathcal{N}) \wedge |\mu| = p\}$$

es decir, $\mathcal{C}_\alpha^p$ y $\overline{\mathcal{C}_\beta^p}$ representan a los monomios de orden p de las clases de los conjuntos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.

Proposición 2.6.1 *Con la notación anterior, se verifica que el cardinal de los conjuntos $\bigcup_{\alpha\in\phi(\mathcal{F})} \mathcal{C}_\alpha$ y $\bigcup_{\beta\in\phi(\mathcal{N})} \overline{\mathcal{C}_\beta}$ es un polinomio en p.*

Demostración.

Notación 2.6.2 *Si denotamos por $\Gamma(n, d)$ al número de monomios de grado d en n variables. Entonces tendremos que,*

$$\Gamma(n, d) = \binom{n-1+d}{n-1} = \frac{(d+n-1)\cdots(d+1)}{(n-1)!}$$

y de ahí podemos afirmar que $\Gamma(n, d)$ es un polinomio en d.

Sea $X^\alpha \in \mathcal{F}$, tal que $|\alpha| = d$ y vamos a calcular el cardinal de $\mathcal{C}_\alpha^p$, es decir dado un monomio de grado d vamos a calcular cuántos monomios de grado p hay en su clase. Entonces si denotamos por m el número de variables no multiplicadoras del monomio X^α en el conjunto $\mathcal{F}$, el cardinal pedido será igual al número de monomios de orden $p - d$ que podemos formar con m variables, y ese número viene dado por, $\Gamma(m, p - d)$, es decir,

$$\text{card}(\mathcal{C}_\alpha^p) = \Gamma(m, p - d)$$

que es un polinomio en p. Por tanto,

$$\text{card}\left(\bigcup_{\alpha\in\phi(\mathcal{F})} \mathcal{C}_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\phi(\mathcal{F})} \Gamma(m, p - d)$$

y al ser la suma de un número finito de polinomios en p será también un polinomio en p.

Razonando de la misma forma podemos afirmar que, $card\left(\bigcup_{\beta\in\phi(\mathcal{N})}\overline{\mathcal{C}}_\beta\right)$ es un polinomio en la variable p.

Por tanto,

$$card\left(\bigcup_{\alpha\in\phi(\mathcal{F})}\mathcal{C}_\alpha\right) + card\left(\bigcup_{\beta\in\phi(\mathcal{N})}\overline{\mathcal{C}}_\beta\right) = \Gamma(n,p)$$

y será un polinomio en p. $\square$

Observación. Hemos obtenido la función de Hilbert del cociente $\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n]/I$ siendo I el ideal generado por los monomios del conjunto $\mathcal{F}$.

Capítulo 3

Sistemas completamente integrables

En este capítulo nos ocuparemos de diversas cuestiones relativas a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales lineales. Para ello vamos a aplicar todo lo que hemos visto en el capítulo anterior a este contexto. Nuestro principal objetivo es, a partir del trabajo esencial de M. Janet ([44]), dar un algoritmo para decidir cuándo un tal sistema (sujeto a ciertas condiciones) tiene o no solución y en caso de que ésta exista determinar el "grado de generalidad" de la misma[1]. Precisamos en lo que sigue estos conceptos. Janet siguiendo los trabajos de Riquier y Cartan, considera sistemas de ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes holomorfos en el entorno de algún punto de $\mathbf{C}^n$ (aquí n es el número de variables independientes del sistema). Las soluciones buscadas serán también holomorfas en el entorno del mismo punto.

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Denotamos por $\mathbf{k}(X)$ (resp. $\mathbf{k}((X))$) el cuerpo cociente del anillo de polinomios) $\mathbf{k}[X] = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$ (resp. del anillo de series formales de potencias $\mathbf{k}[[X]] = \mathbf{k}[[x_1, \cdots, x_n]]$). En esta sección consideraremos los anillos de operadores diferenciales lineales $\mathbf{k}[\partial] = \mathbf{k}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$, $Q_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}(X)[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ y $\widehat{Q_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}((X))[\partial_1, \cdots, \partial_n]$. Denotamos por $\mathcal{R}$ cualquiera de estos anillos y por $\mathcal{A}$ cualquiera de los correspondientes cuerpos $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}(X)$, $\mathbf{k}((X))$. Sea $\mathcal{N}$ un $\mathcal{R}$-módulo a la izquierda.

Los sistemas que vamos a estudiar verifican unas condiciones que presentamos a continuación.

3.1 Condiciones sobre el sistema: Sistemas en forma canónica

En lo que sigue, consideraremos un orden total en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, s\}$ que denotaremos $\prec$. Además supondremos que el orden $\prec$ es compatible con la suma; es decir, si $(\alpha, i) \prec (\beta, j)$, entonces $(\alpha + \gamma, i) \prec (\beta + \gamma, j)$ para todo $\gamma \in \mathbf{N}^n$. En el apéndice 1 se explicitan los órdenes totales que utilizaremos en lo que sigue.

Siguiendo la notación de Janet([44]) diremos que (α, i) es anterior (resp. posterior) a (β, j) si $(\alpha, i) \prec (\beta, j)$ (resp. $(\beta, j) \prec (\alpha, i)$).

Cuando $s = 1$ el orden $\prec$ correspondiente coincidirá con el siguiente,

$$\alpha <_{\text{diag}} \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \quad \text{ó} \\ |\alpha| = |\beta| \quad \text{y} \quad (\alpha_n, \cdots, \alpha_1) <_{\text{lex}} (\beta_n, \cdots, \beta_1), \end{cases}$$

donde $<_{\text{lex}}$ es el orden lexicográfico.

Consideremos un sistema S de ecuaciones en derivadas parciales lineales (no necesariamente homogéneas)

[1] Este objetivo no será alcanzado hasta el capítulo siguiente.

$$\begin{array}{ccc} R_{11}(u_1)+ & \cdots & +R_{1s}(u_s) = f_1 \\ & \vdots & \\ R_{r1}(u_1)+ & \cdots & +R_{rs}(u_s) = f_r \end{array}$$

con $R_{ji} \in \mathcal{R}$, $f_j \in \mathcal{N}$ y las incógnitas pertenecientes a $\mathcal{N}$. Reescribimos cada ecuación

$$R_{j1}(u_1) + \cdots + R_{js}(u_s) = f_j$$

como

$$a_{(\alpha(j),i_j)}\partial^{\alpha(j)}(u_{i_j}) = \sum_{(\beta,l)\prec(\alpha(j),i_j)} a_{(\beta,l)}\partial^{\beta}(u_l) + f_j$$

con $a_{(\alpha(j),i_j)}$, $a_{(\beta,l)} \in \mathcal{A}$. El elemento $a_{(\alpha(j),i_j)}\partial^{\alpha(j)}(u_{i_j})$ (resp. $\sum_{(\beta,l)\prec(\alpha(j),i_j)} a_{(\beta,l)}\partial^{\beta}(u_l) + f_j$) se llama primer (resp. segundo) miembro de esta ecuación. En lo que sigue identificaremos $\partial^{\alpha}(u_i)$ con (α, i).

Definición 3.1.1 *([44], pág. 105) Sea S un sistema de ecuaciones en derivadas parciales reescrito como más arriba. Diremos que S está en forma canónica (con respecto a $\prec$) si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $a_{(\alpha(j),i_j)} = 1$ *para cada* j.
2. *Los primeros miembros de dos ecuaciones son distintos.*

Ejemplo 3.1.2 *El sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_2^2(u) & = & x_2\partial_{12}(u) + \partial_2(u) + x_1 \\ \partial_1^2(u) & = & \partial_1(u) + x_2x_1(u) + x_2 \end{array} \right.$$

está en forma canónica respecto de $<_{diag}$ (ver apéndice 1).

Ejemplo 3.1.3 *El sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1x_2\partial_2^2(u) & = & \partial_{12}(u) + \partial_2(u) + x_2 \\ \partial_1^2(u) & = & \partial_1(u) + x_2^2(u) - x_2 \end{array} \right.$$

no está en forma canónica, (ver apéndice 1). Sin embargo podría darse otro sistema de cotas tal que el sistema anterior "convenientemente reescrito" estuviese en forma canónica. Por ejemplo basta tomar para x_1 y x_2 el siguiente conjunto de cotas,

	x_1	x_2
1^a *Cota*	1	1
2^a *Cota*	2	1

Definición 3.1.4 *(Janet [44], pág. 106) Dado un sistema de ecuaciones en derivadas parciales S, en forma canónica, llamaremos,*

1. *Derivadas principales a aquellas derivadas que se obtienen por derivación de alguna de las que forman los primeros miembros.*

2. Derivadas paramétricas a todas las demás derivadas.

Observación. Vemos que dado un sistema S en forma canónica y si denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de sus primeros miembros, una derivada principal (con respecto a S) es cada monomio ∂^α que pertenece al módulo de Janet generado por $\mathcal{F}$. Las restantes derivadas serán paramétricas.

Nota 3.1.5 *En lo que sigue, y siempre que no se diga lo contrario, supondremos que el sistema S con el que estamos trabajando es un sistema que está en forma canónica y haciendo la identificación de $\partial^\alpha(u_i)$ con (α, i).*

Definición 3.1.6 *Sea $E \equiv a_{(\alpha,i)}\partial^\alpha(u_i) = \sum_{(\beta,j)<(\alpha,i)} a_{(\beta,j)}\partial^\beta(u_j) + f$ con $a_{(\alpha,i)}, a_{(\beta,j)} \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{N}$ y $a_{(\alpha,i)} \neq 0$. Llamaremos diagrama de Newton de E al conjunto $\mathrm{Nw}(E) = \{(\gamma, l) \mid a_{(\gamma,l)} \neq 0\}$. Llamaremos a (α, i) exponente privilegiado de E (respecto de $\prec$) y lo denotamos por $\exp_\prec(E)$ (o $\exp(E)$ si no existe confusión).*

Vamos a definir los conceptos de variable multiplicadora y clase, dados anteriormente, para una ecuación de un sistema. Esto nos llevará a definir también el concepto de sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 3.1.7 *Sea S un sistema dado anteriormente y denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de los primeros de S. Sea E un elemento de S. Llamamos variable multiplicadora (resp. no multiplicadora) de E (en S) cualquier variable multiplicadora (resp. no multiplicadora) del primer miembro de E (en $\mathcal{F}$). La clase de E es la clase de su primer miembro en $\mathcal{F}$ (ver 2.2.10). La clase de la ecuación E_i del sistema S, siempre será denotada por $\mathcal{C}_{E_i}$.*

Definición 3.1.8 *El sistema S es completo si $\mathcal{F}$ es completo (ver 2.3.1).*

3.2 Sistemas completamente integrables. Bases de Janet

Queremos ver si un sistema de ecuaciones lineales en derivadas parciales en forma canónica, tiene efectivamente una solución para valores arbitrarios de las condiciones iniciales. A estos sistemas los llamaremos sistemas completamente integrables.

Vamos a dar a continuación la definición textual (traducida al castellano) que da Janet en su artículo [44].

Definición 3.2.1 *(M. Janet, pag. 107)*
Un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales, en forma canónica es completamente integrable si por derivaciones y combinaciones no puede obtenerse ninguna relación formada únicamente por derivadas paramétricas (y variables independientes).

En primer lugar restringiremos nuestro estudio a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales lineales homogéneos.

Sea $S = \{E_1, \cdots, E_r\}$ un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales lineales y homogéneas. Denotemos por M el $\mathcal{R}$-módulo a la izquierda generado por S y escribimos $\Delta(S) = \bigcup_{i=1}^{r} (\exp(E_i) + \mathbf{N}^n)$.

Recordemos que $\bigcup_{j=1}^{r} (\exp(E_j) + \mathbf{N}^n) = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{C}_{(\alpha(j), i_j)}$ donde $(\alpha(j), i_j) = \exp(E_j)$.

Nota 3.2.2 *Aquí la clase $\mathcal{C}_{(\alpha(j),i_j)}$ se refiere al módulo de Janet (ver 2.1.8) definido (en $\mathbf{N}^n \simeq \mathbf{N}^n \times \{i_j\}$) por los primeros miembros de S que sean de la forma $\partial^\gamma(u_{i_j})$ para algún $\gamma \in \mathbf{N}^n$.*

Vamos a hacer una reformulación de la definición de Janet (3.2.1) y diremos,

Definición 3.2.3 *El sistema S se dice completamente integrable si el único elemento de M que tiene su diagrama de Newton en $\mathbf{N}^n \setminus \Delta(S)$ es el cero.*

Cada ecuación de la forma $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = R_1(u_1) + \cdots + R_s(u_s) = 0$, la identificamos con el vector $(R_1, \cdots, R_s)$ de $\mathcal{R}^s$.

Si una ecuación

$$E \equiv \left(\partial^\alpha(u_i) = \sum_{(\beta,j)\prec(\alpha,i)} a_{(\beta,j)} \partial^\beta(u_j) \right)$$

proviene de $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0$, será identificada con el vector $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^s$.

Definición 3.2.4 *Sea M un submódulo del módulo libre $\mathcal{R}^s$ generado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales S, en forma canónica. Se dice que S es una base de Janet de M si S es completamente integrable.*

3.3 Relación entre las bases de Janet y las bases de Gröbner

Los enunciados de esta sección se demuestran para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales en una incógnita, es decir en el caso de ideales, pero los mismos son también válidos para el caso de sistemas en varias incógnitas, es decir en el caso de un submódulo de un módulo libre. Seguimos considerando en esta sección sólo el caso de los sistemas homogéneos.

Si I es un ideal a la izquierda de $\mathcal{R}$ denotamos por $\mathrm{Exp}(I)$ el conjunto de los exponentes privilegiados, $\exp(P)$, para cada $P \in I$ (ver 3.1.6 para el caso de una sola incógnita). Un subconjunto finito $\{P_1, \cdots, P_r\} \subset I$ es una base de Gröbner de I si $\mathrm{Exp}(I) = \bigcup_{j=1}^{r} (\exp(P_j) + \mathbf{N}^n)$ (ver 1.8).

Dado $\underline{\alpha} = (\alpha^1, \cdots, \alpha^r) \in (\mathbf{N}^n)^r$ definimos la partición $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_r, \overline{\Delta}\}$ de $\mathbf{N}^n$ asociada a $\underline{\alpha}$ de la siguiente manera:

$$\text{Para } i = 1, \cdots, r;\ \Delta_i = (\alpha^i + \mathbf{N}^n) \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} \Delta_j);\quad \overline{\Delta} = \mathbf{N}^n \setminus (\cup_{i=1}^{r} \Delta_i).$$

Si $\underline{E} = (E_1, \cdots, E_r) \in \mathcal{R}^r$ llamamos partición asociada a $\underline{E}$ la partición asociada a $(\exp(E_1), \cdots, \exp(E_r))$.

Teorema 3.3.1 *(Teorema de División en $\mathcal{R}$). Sea $(E_1, \cdots, E_r) \in \mathcal{R}^r$ con $E_i \neq 0$, $i = 1, \cdots, r$. Sea $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_r, \overline{\Delta}\}$ la partición asociada de $\mathbf{N}^n$. Entonces, para todo $E \in \mathcal{R}$, existe un único $(Q_1, \cdots, Q_r, R) \in \mathcal{R}^{r+1}$ tal que:*

1. $E = \sum_{i=1}^{r} Q_i E_i + R$.
2. *Si $R \neq 0$, cada monomio de $\mathcal{R}$ (en las variables $\partial_1, \cdots, \partial_n$) pertenece a $\overline{\Delta}$.*
3. *Si $Q_i \neq 0$, cada monomio $c\partial^\alpha$ de Q_i (con $c \in \mathcal{A}$), satisface $\alpha + exp(E_i) \subseteq \Delta_i$.*

Demostración. La demostración es análoga al caso del anillo conmutativo de polinomios (ver por ejemplo [1], pág. 28) ya que los coeficientes de los operadores diferenciales pertenecen al cuerpo $\mathcal{A}$ y la regla de Leibnitz implica que para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\partial^\alpha a - a\partial^\alpha$ es un operador diferencial de grado menor o igual a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1$. □

El teorema de división (y su demostración) está explícito en el trabajo de Janet, mediante un procedimiento de reducción análogo a la división (ver [44], pág. 100-106).

Si $S = \{E_1, \cdots, E_r\}$ es una familia de operadores en $\mathcal{R}$, siempre podemos considerar un sistema "equivalente" a S y en forma canónica (en el sentido de que genera el mismo ideal) sin más que multiplicar cada E_i por el inverso del coeficiente del monomio principal (i.e. del monomio que corresponde al primer miembro de la ecuación).

Teorema 3.3.2 *Sea I un ideal a la izquierda en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_r\} \subseteq I$. Si $\mathcal{B}$ es una base de Janet para el ideal I entonces $\mathcal{B}$ es una base de Gröbner para I respecto del orden $\prec$, (ver 1.8).*

Demostración. Denotamos por $\Delta = \Delta(\mathcal{B}) = \bigcup(\exp(E_j) + \mathbf{N}^n)$. Sea $P \in I$ y supongamos que $\exp(P) \notin \Delta(\mathcal{B})$. Por el teorema de división de operadores diferenciales (ver 3.3.1) exite $R \in \mathcal{R}$ con $\mathrm{Nw}(R) \in \mathbf{N}^n \setminus \Delta(\mathcal{B})$ y tal que $P - R \in I$ y $\exp(P) = \exp(R)$ entonces $R \neq 0$. Pero esto es imposible por las hipótesis (ver 3.2.3, 3.2.4). □

El recíproco no es cierto, como puede verse en el siguiente ejemplo,

Ejemplo 3.3.3 *Consideremos el ideal I de $\mathbf{k}[\partial_1, \partial_2]$ generado por:*

$$\mathcal{F} = \{\partial_2^4\partial_1, \partial_1^3\}.$$

La familia $\mathcal{F}$ no es base de Janet de I ya que no es completo, pero sin embargo es base de Gröbner del ideal I.

Nota 3.3.4 *Un elemento E de $\mathcal{R}$ se dice mónico si el monomio correspondiente al exponente privilegiado tiene coeficiente igual a* 1.

Sin embargo, si a una base de Gröbner de un ideal I, en la que todos sus elementos son mónicos, le añadimos la condición de que sea completa, entonces sí tendremos una base de Janet.

Teorema 3.3.5 *Sea $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_r\}$ una base de Gröbner para un ideal I en $\mathcal{R}$. Supongamos que $\exp(E_i) \neq \exp(E_j)$ para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, E_i es mónico para todo i y $\mathcal{B}$ es un conjunto completo. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de Janet para el ideal I.*

Demostración. Supongamos $E \in I$ con $E \neq 0$ tal que $\mathrm{Nw}(E) \subseteq \mathbf{N}^n \backslash \Delta(\mathcal{B})$, en particular tendremos que $\exp(E) \in \mathbf{N}^n \setminus \Delta(\mathcal{B})$. Pero por otra parte si $E \in I$ con $E \neq 0$ y $\mathcal{B}$ es una base de Gröbner para I entonces se verifica $\exp(E) \in \Delta(\mathcal{B})$. □

3.4 Teorema de caracterización para los sistemas completamente integrables

En esta sección todas las ecuaciones diferenciales serán consideradas homogéneas.

Teorema 3.4.1 *(Criterio de completa integrabilidad) Sea $S = \{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ un conjunto de operadores mónicos en $\mathcal{R}$. Supongamos que para todo i y para toda variable no multiplicadora ∂_k para E_i (en S) se tiene $\partial_k E_i = \sum_{j=1}^r A_{ki}^{(j)} E_j$ tal que las únicas variables que aparecen en cada monomio (en las variables $\partial_1, \cdots, \partial_n$) de $A_{ki}^{(j)}$ son variables multiplicadoras para E_j, para todo $j = 1, 2, \cdots, r$. Entonces tenemos:*

1. *Para todo $H \in \mathcal{R}$*
$$H \in \langle E_1, E_2, \cdots, E_r \rangle \Longleftrightarrow H = \sum_{i=1}^{r} Q_i E_i$$
donde todo monomio de Q_i es de variables multiplicadoras para E_i en S. Aquí $\langle E_1, E_2, \cdots, E_r\rangle$ es el ideal a la izquierda (de R) generado por los E_i.

2. *S es completamente integrable.*

Demostración. No hay ninguna pérdida de generalidad si suponemos que $\exp(E_r) \prec exp(E_{r-1}) \prec \cdots \prec exp(E_1)$. De las hipótesis del teorema se deduce que el conjunto S es completo. En efecto, sea ∂_k una variable multiplicadora para la ecuación E_i en el conjunto S, por hipótesis tenemos que $\partial_k E_i = \sum_{j=1}^r A_{ki}^{(j)} E_j$ tal que las únicas variables que aparecen en cada monomio (en las variables $\partial_1, \cdots, \partial_n$) de $A_{ki}^{(j)}$ son variables multiplicadoras para E_j, para todo $j = 1, 2, \cdots, r$. Así $\exp(\partial_k E_i) = \exp\left(\sum_{j=1}^r A_{ki}^{(j)} E_j\right) \preceq \text{máx}_j\{\exp(A_{ki}^{(j)} E_j)\}$.

Pero $\exp(A_{ki}^{(j)} E_j) \in \mathcal{C}_{E_j}$ y $\mathcal{C}_{E_i} \cap \mathcal{C}_{E_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces tenemos que existe un único $c(k,i) < i$ tal que $\exp(\partial_k E_i) = \exp(A_{ki}^{(c(k,i))} E_{c(k,i)})$ y $\exp(A_{ki}^{(j)} E_j) \prec \exp(\partial_k E_i)$ para $j \neq c(k,i)$.

Si $H \in \langle E_1, E_2, \cdots, E_r \rangle$, entonces H será de la forma

$$H = \sum_{i=1}^{r} G_i E_i.$$

Pero cada operador G_i, $i = 1, 2, \cdots, r$ puede descomponerse en dos sumandos

$$G_i = G_i^{(1)} + H_i$$

donde $G_i^{(1)}$ es un operador en $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ tal que todos sus monomios están formados por variables multiplicadoras para E_i en S y H_i es un operador en $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ cuyos monomios contienen, al menos, una variable no multiplicadora para E_i en S. En particular $H_1 = 0$.

Tenemos

$$H = \sum_{i=1}^{r} G_i E_i = \sum_{i=1}^{r} G_i^{(1)} E_i + \sum_{i=2}^{r} H_i E_i.$$

El sumando $\sum_{i=1}^{r} G_i^{(1)} E_i$ cumple las condiciones que queremos, por tanto estudiaremos el sumando $\sum_{i=2}^{r} H_i E_i$.

Sean

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) = \max\{\exp(H_i E_i), i = 2, \cdots, r\} \quad \text{e} \quad i_0 = \max\{i \mid \exp(H_i E_i) = \delta\}.$$

El par (δ, i_0) será llamado el exponente característico de la expresión $\sum_{i=1}^{r} H_i E_i$.

Consideramos en el conjunto $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\}$ el siguiente buen orden:

$$(\delta, i_0) \lhd (\delta', i_0') \iff \begin{cases} \delta \prec \delta' \\ \text{ó} \\ \delta = \delta' \quad \text{e} \quad i_0 < i_0'. \end{cases}$$

Entonces

$$H_{i_0} E_{i_0} = a \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} E_{i_0} + \widehat{H_{i_0}} E_{i_0}$$

donde $a \in \mathcal{A}$, $\exp(a \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} E_{i_0}) = \delta$ y $\exp(\widehat{H_{i_0}} E_{i_0}) \prec \delta$.

Supongamos que ∂_k es variable no multiplicadora para E_{i_0}, entonces podemos expresar $H_{i_0} E_{i_0}$ de la siguiente forma

$$H_{i_0} E_{i_0} = a \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_k^{\alpha_k - 1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} (\partial_k E_{i_0}) + \widehat{H_{i_0}} E_{i_0}.$$

Aplicando la hipótesis a $\partial_k E_{i_0}$, tendremos

$$\partial_k E_{i_0} = \sum_{j=1}^{r} A_{k i_0}^{(j)} E_j$$

donde todo monomio en $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ de $A_{k i_0}^{(j)}$ es de variables multiplicadoras para cada E_j en el conjunto S y $c(k, i_0)$ es el único entero verificando que

$$\exp(\partial_k E_{i_0}) = \exp(A_{k i_0}^{(c(k, i_0))} E_{c(k, i_0)})$$

con $c(k, i_0) < i_0$ (por 2.4.3).

Así

$$H_{i_0} E_{i_0} = a \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_k^{\alpha_k - 1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \left(\sum_{j=1}^{r} A_{k i_0}^{(j)} E_j \right) + \widehat{H_{i_0}} E_{i_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_k^{\alpha_k - 1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} A_{k i_0}^{(j)} E_j + \widehat{H_{i_0}} E_{i_0}.$$

Con esta nueva expresión de $H_{i_0}E_{i_0}$ reescribimos

$$\sum_{i=2}^{r} H_iE_i = H_{i_0}E_{i_0} + \sum_{j\neq i_0} H_jE_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j + \widehat{H_{i_0}}E_{i_0} + \sum_{j\neq i_0} H_jE_j = \sum_{j=1}^{r} H'_jE_j$$

donde

$$\begin{cases} H'_j = a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)} + H_j & \text{si} \quad j\neq i_0 \\ H'_{i_0} = a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(i_0)} + \widehat{H_{i_0}}. \end{cases}$$

Vamos a calcular el exponente característico de esta nueva expresión. Para ello consideraremos los siguientes casos:

1. Para $i_0+1\leq j\leq r$ se tiene $\exp(H'_jE_j) = \exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j + H_jE_j) \preceq$

   $$\preceq \max\{\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j), \exp(H_jE_j)\}.$$

   Pero $\exp(H_jE_j)\prec\delta$ por la definición de i_0 y

   $$\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_n) + \exp(A_{ki_0}^{(j)}E_j)$$

   pero recordamos que

   $$\begin{cases} \exp(A_{ki_0}^{(j)}E_j) \prec \exp(\partial_kE_{i_0}) \\ \exp(A_{ki_0}^{(c(k,i_0))}E_{c(k,i_0)}) = \exp(\partial_kE_{i_0}) \quad \text{con} \quad c(k,i_0) < i_0. \end{cases}$$

   Así,

   $$(\alpha_1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_n) + \exp(A_{ki_0}^{(j)}E_j) \prec (\alpha_1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_n) + \exp(\partial_kE_{i_0}) = \delta.$$

   Por tanto, $\exp(H'_jE_j)\prec\delta$ para $i_0+1\leq j\leq r$.

2. $\exp(H'_{i_0}E_{i_0}) = \exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(i_0)}E_{i_0} + \widehat{H_{i_0}}E_{i_0}) \preceq$

   $$\preceq \max\{\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(i_0)}E_{i_0}), \exp(\widehat{H_{i_0}}E_{i_0})\},$$

   pero $\exp(\widehat{H_{i_0}}E_{i_0}) \prec \exp(H_{i_0}E_{i_0}) = \delta$ y $\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(i_0)}E_{i_0}) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_n) + \exp(A_{ki_0}^{(i_0)}E_{i_0}) \prec \delta$.

3. Para $1\leq j\leq i_0-1$, tenemos que $\exp(H'_jE_j) = \exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j + H_jE_j) \preceq$

   $$\preceq \max\{\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j), \exp(H_jE_j)\}.$$

   La elección de j, siendo $j<i_0$, implica que $\exp(H_jE_j)\preceq\delta$ y por otro lado tenemos

   $$\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_n) + \exp(A_{ki_0}^{(j)}E_j)$$

   pero $\exp(A_{ki_0}^{(j)}E_j)\preceq\exp(\partial_kE_{i_0})$ si $j<i_0$ luego

   $$\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j) \preceq \delta.$$

   De ahí que podamos afirmar que

   $$\exp(a\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k-1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}A_{ki_0}^{(j)}E_j + H_jE_j) \preceq \delta$$

   con $j<i_0$.

Así hemos demostrado que existen sumandos en los que el exponente privilegiado se mantiene menor que δ y en los casos en los que se alcanza el exponente privilegiado máximo, δ, éste se alcanza en un j_0, con $j_0 < i_0$, por tanto el exponente característico, (δ', j_0) de $\sum_{j=1}^{r} H'_j E_j$ verifica que $(\delta', j_0) \lhd (\delta, i_0)$.

Vamos a demostrar la segunda afirmación del teorema, es decir, S es un sistema completamente integrable.

Por 3.3.5, basta ver que $\{E_i\}_{i=1}^{r}$ es una base de Gröbner del ideal I que genera. Sea $H \in I$. Se tiene $H = \sum_{i=1}^{r} Q_i E_i$ y todo monomio de Q_i es de variables multiplicadoras para E_i en S. En particular el exponente privilegiado de H está en la clase definida por algún E_i y dicha clase está contenida en $\exp(E_i) + \mathbf{N}^n$.

□

3.4.1 Procedimiento para obtener un sistema completamente integrable

Como consecuencia de este teorema, Janet desarrolla un procedimiento finito para obtener un sistema completamente integrable (i.e. base de Janet) de un ideal a la izquierda de $\mathcal{R}$, partiendo de un sistema arbitrario de generadores de I. Este algoritmo puede ser comparado con el algoritmo de Buchberger para calcular bases de Gröbner. El procedimiento de Janet es el siguiente: a)Sea $S_1 = \{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales lineales en forma canónica (ver 3.6.1,3.1.8). b)Para cada $i = 1, \cdots, r$ y cada k tal que ∂_k es variable no multiplicadora para E_i en S "dividimos" [2] esta expresión entre las ecuaciones del sistema, obteniendo una expresión del tipo,

$$\partial_k E_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ki}^{(j)} E_j + R_{ik}$$

donde

1. Todo monomio (en $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$) de $A_{ij}^{(k)}$ está formado por variables multiplicadoras para E_j en S_1.
2. $\exp(A_{ij}^{(k)} E_k) \preceq \exp(\partial_i E_j)$, $\forall k = 1, 2, \cdots, r$.
3. El Newton de R_{ik} está contenido en $\mathbf{N}^n \setminus \Delta(S_1)$, es decir las derivadas que aparecen en el operador R_{ki} son derivadas paramétricas para el sistema S_1.

c)Si todos los R_{ki} son nulos, entonces S_1 es completamente integrable (ver 3.4.1). d) Si existe algún $R_{ki} \neq 0$ entonces consideramos el nuevo sistema de ecuaciones $S_2 = S_1 \cup \{R_{ij}\}$ y volvemos a razonar sobre S_2, como lo hemos hecho sobre S_1.

Vamos a ver que este proceso es finito. Sea S_i, $i = 1, 2, \cdots$, la sucesión de sistemas obtenidos aplicando el procedimiento de Janet. Podemos considerar la sucesión de subconjuntos de $\mathbf{N}^n$ dados por $\mathcal{F}_i = \exp(S_i) = \{\exp(E) : E \in S_i\} \subseteq \mathbf{N}^n$. Por 2.1.7, esta sucesión es estacionaria y por tanto el proceso anterior es finito.

[2] Puesto que el producto de ∂_i por el monomio principal de E_j pertenece a una clase superior (ver 2.4.3), existe $k = c(i,j) < j$ y un monomio N (en $\underline{\partial}$) tales que $\partial_i E_j - N E_k$ tiene exponente principal estrictamente menor que $\exp(E_j) + \exp(\partial_i)$. Esto permite dividir, por recurrencia, $\partial_i E_j$ entre $\{E_1, \ldots, E_r\}$.

Observación. El proceso anterior es un precedente del método de Buchberger para calcular una base de Gröbner de un ideal de polinomios, conocido un sistema de generadores de este ideal, puesto que dicho proceso de puede aplicar a un ideal del anillo conmutativo $\mathbf{k}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$.

3.5 Sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos

Nos proponemos explicar aquí cómo extender las nociones que aparecen en 3.2, 3.3 y 3.4 al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Consideramos un sistema S de ecuaciones diferenciales no necesariamente homogéneo

$$P_1(u) = f_1, \cdots, P_r(u) = f_r$$

con $P_i = (R_{ij})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, siendo $R_{ij} \in \mathcal{R}$, $f_i \in \mathcal{N}$ y la incógnita u es buscada en $\mathcal{N}$. Denotamos por S^h el sistema homogéneo

$$P_1(u) = 0, \cdots, P_r(u) = 0$$

asociado a S.

Cada ecuación $P_i(u) = f_i$ (ó $P_i(u) - f_i = 0$) será denotada por E_i.

Identificamos la ecuación $P_i(u) = f_i$ (i.e. la ecuación E_i) con el par $(P_i, f_i) \in \mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$ y consideramos el $\mathcal{R}$-submódulo M de $\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$ generado por $\{(P_1, f_1), \cdots, (P_r, f_r)\}$.

Definición 3.5.1 *Sea $S = \{E_1, \cdots, E_r\} = \{(P_1, f_1), \cdots, (P_r, f_r)\}$ un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales en forma canónica. Sea M el $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$ generado por S. Diremos que el sistema S es completamente si se verifica:*

1. *Si $(0, f) \in M$ entonces $f = 0$.*
2. *Si $(P, f) \in M$ y $P \neq 0$ entonces el diagrama de Newton de P no está contenido en $\mathbf{N}^n \setminus \Delta(S^h)$.*

Definición 3.5.2 *Sea M $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$ generado por*

$$S = \{(P_1, f_1), \cdots, (P_r, f_r)\}.$$

Diremos que S es base de Janet de M si S es completamente integrable.

Sea $\mathcal{E}$ el $\mathcal{R}$-módulo (a la izquierda) $\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$. Notemos $\pi_1 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}$ la proyección canónica.

Al igual que en $\mathcal{R}$, (ver 1.8), se dispone en $\mathcal{E}$ de la noción de exponente privilegiado, de un teorema de división y de la noción de base de Gröbner.

Se define la aplicación $\exp : \mathcal{E} \setminus (\{0\} \bigoplus \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbf{N}^n$ mediante $\exp_{\prec}(P, f) = \exp(P)$. Es obvio que esta aplicación exp verifica propiedades análogas a las de 1.8.

Teorema 3.5.3 *(de división en $\mathcal{E}$). Consideremos $(E_1, \cdots, E_r) \in \mathcal{E}^r$ con $E_i = (P_i, f_i)$ y $P_i \neq 0$, $i = 1, \cdots, r$. Sea $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_r, \overline{\Delta}\}$ la partición de $\mathbf{N}^n$ asociada a $(\exp(E_1), \cdots, \exp(E_r))$. Entonces, para todo $E = (P, f) \in \mathcal{E}$, existe un único $(Q_1, \cdots, Q_r, (R, g)) \in \mathcal{R}^r \times \mathcal{E}$ tal que:*

1. *$E = \sum_{i=1}^{r} Q_i E_i + (R, g)$.*
2. *Si $R \neq 0$, todo monomio de R (en las variables $\partial_1, \cdots, \partial_n$) está en $\overline{\Delta}$.*
3. *Si $Q_i \neq 0$, todo monomio $c\partial^\alpha$ de Q_i (con $c \in \mathcal{A}$), verifica $\alpha + \exp(E_i) \subseteq \Delta_i$.*

Demostración. Esta prueba es análoga a la demostración que aparece en [27]. Basta hacer la división en $\mathcal{R}$, escribimos $P = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + R$ y escribir $g = f - \sum_{i=1}^{r} Q_i(f_i)$. □

Definición 3.5.4 *Sea $M \subset \mathcal{E}$ un $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{E}$. Un subconjunto finito $\{(P_1, f_1), \cdots, (P_m, f_m)\}$ de M es una base de Gröbner de M, respecto de $\prec$, si se verifica:*

1. *$\{P_1, \cdots, P_m\}$ es una base de Gröbner de $\pi_1(M)$ respecto de $\prec$.*
2. *Para todo $g \in \mathcal{N}$, si $(0, g) \in M$ entonces $g = 0$.*

Proposición 3.5.5 *Sea M un $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{E} = \mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$ y supongamos que $\mathcal{B} = \{(P_1, f_1), \cdots, (P_r, f_r)\} \subseteq M$ es una base de Janet para M. Entonces $\mathcal{B}$ es base de Gröbner para M, respecto del orden $\prec$.*

Demostración. Análoga a la demostración del teorema 3.3.2, utilizando el teorema de división 3.5.3. □

Proposición 3.5.6 *Sea $\mathcal{B} = \{E_1 = (P_1, f_1), \cdots, E_r = (P_r, f_r)\}$ una base de Gröbner del $\mathcal{R}$-submódulo M de $\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{N}$. Supongamos que $\exp(P_i) \neq \exp(P_j)$ para $i \neq j$, E_i es mónico para todo i y $\mathcal{B}$ es completo. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de Janet de M.*

Demostración. Supongamos $(P, f) \in M$ y supongamos $\mathrm{Nw}(P) \subseteq \mathbf{N}^n \setminus \Delta(S^h)$. Por definición la familia $\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una base de Gröbner para $\pi_1(M)$, entonces $\mathrm{Exp}(\pi_1(M)) = \Delta(S^h)$. Como $P \in \pi_1(M)$ tendremos que $\exp(P) \in \Delta(S^h)$ y por tanto $P = 0$. □

Teorema 3.5.7 *(Criterio de completa integrabilidad) Sea $S = \{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ un subconjunto de elementos mónicos en $\mathcal{E}$. Supongamos que para todo i y para toda variable no multiplicadora ∂_k para E_i (en S) se tiene $\partial_k E_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ki}^{(j)} E_j$ donde las únicas variables que aparecen en cada monomio (en las variables $\partial_1, \cdots, \partial_n$) de $A_{ki}^{(j)}$ son variables multiplicadoras para E_j, para todo $j = 1, 2, \cdots, r$. Entonces tenemos:*

1. *Para todo $H \in \mathcal{E}$*

$$H \in \langle E_1, E_2, \cdots, E_r \rangle \Longleftrightarrow H = \sum_{i=1}^{r} Q_i E_i$$

donde todo monomio de Q_i es de variables multiplicadoras para E_i en S. Aquí $\langle E_1, E_2, \cdots, E_r \rangle$ es el $\mathcal{R}$-módulo de $\mathcal{E}$ a la izquierda generado por los E_i.

2. S es completamente integrable.

Demostración. Análoga a la demostración del teorema 3.4.1.

□

3.6 Cadena de sistemas

Sea $S_1 = \{E_1, \cdots, E_r\} \subseteq \mathcal{R}$ un sistema de ecuaciones en derivadas parciales completamente integrable, (no necesariamente homogéneo), entonces para cada ecuación E_j y cada variable ∂_i no multiplicadora para la ecuación E_j en el sistema S_1 tenemos que,

$$H_{ij} \equiv \partial_i E_j = \sum_{k=1}^{r} A_{ij}^k E_k$$

donde todos los monomios (en $\partial_1, \cdots, \partial_n$) que aparecen en A_{ij}^k están formados por variables multiplicadoras para E_k en el conjunto S_1.

Sea S_2 el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en las incógnitas $E_1, \cdots, E_r$, (aquí E_i representa una función incógnita y nos cuidaremos de no confundirla con la ecuación del mismo nombre) formado por las relaciones anteriores (i.e. por las relaciones H_{ij}).

Proposición 3.6.1 *Con la notación anterior, el sistema S_2 está en forma canónica.*

Demostración. Eligiendo un sistema adecuado de cotas (ver apéndice 1) podemos ordenar todos los sumandos que aparecen en cada ecuación y tendremos que los primeros miembros de cada ecuación son del tipo $\partial_i E_j$, donde ∂_i es variable no multiplicadora para E_j en el sistema S_1, y por tanto este sistema verifica:

1. Los primeros miembros de cada ecuación están formadas por derivadas primeras de las funciones incógnitas y éstos son distintos dos a dos.
2. En cada ecuación se verifica que todos los sumandos que aparecen en el segundo miembro son anteriores al que aparece en el primer miembro.

□

Teorema 3.6.2 *Con la notación anterior, S_2 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales completamente integrable.*

Demostración. Identificaremos H_{ij} con el vector

$$(-A_{ij}^1, \ldots, -A_{ij}^{j-1}, \partial_i - A_{ij}^j, \ldots, -A_{ij}^r).$$

Para ver que el sistema S_2 es completamente integrable, tendremos que multiplicar cada expresión H_{ij} respecto de sus variables no multiplicadoras y ver que el resto de "dividir" este producto entre los H_{mp} es cero. Se tiene:

$$\partial_l H_{ij} = \sum_{(m,p)} B_{l,(ij)}^{(m,p)} H_{mp} + R.$$

Supongamos que $R \neq 0$ entonces todas las derivadas que aparecen en R son derivadas paramétricas del sistema S_2. Por otro lado, las derivadas paramétricas de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, en forma canónica, son las derivadas que pertenecen al complementario del módulo de Janet definido por los primeros miembros, es decir, las derivadas que pertenecen al complementario del módulo de Janet definido por,

$$\{\partial_i E_j \mid \partial_i \notin mult(E_j, S_1),\ E_j \in S_1\}.$$

Pero el sistema S_2 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuyos primeros miembros son de primer orden, en las incógnitas $E_1, \cdots, E_r$, por lo tanto las derivadas paramétricas de este sistema son las derivadas de primer orden que no aparecen en los primeros miembros.

Por tanto, las derivadas ∂_m que aparecen en los monomios de R corresponden a las expresiones de la forma $\partial_m E_p$ que no aparecen como primeros miembros en el sistema S_2. Pero si una derivada ∂_m de una ecuación E_p no aparece en los primeros miembros del sistema S_2 es porque ∂_m es variable multiplicadora para E_p en el sistema S_1.

Por otra parte se tiene $\sum_p R_p E_p = 0$ (donde R_p es la componente p-ésima de R). Todos los monomios (en $\underline{\partial}$) de R_p están formados por variables multiplicadoras para E_p. Así, $R_p = 0$ para cada p, ya que S_1 es un sistema completo y las clases de E_i y de E_j son disjuntas si $i \neq j$. □

Nota 3.6.3 . *1.- El sistema S_2 debe considerarse como "el módulo de las relaciones entre los elementos de S_1". Así pues, el teorema anterior es un precedente del teorema de F. O. Schreyer ([88]) que asegura que las relaciones (sicigias) elementales entre los elementos de una base de Gröbner de un ideal de polinomios es una base de Gröbner del módulo de las sicigias de dicho ideal.*

2.- El teorema 3.6.2 puede demostrarse también, con sólo cierta complicación en la notación, para sistemas de partida S_1 en varias funciones incógnitas.

Si aplicamos el mismo razonamiento y la misma notación anterior, obtenemos un nuevo sistema S_3 que también es completamente integrable y así sucesivamente. Ahora la siguiente cuestión es preguntarse:

1. ¿Se para el proceso anterior?.
2. En caso afirmativo, ¿en qué etapa?.

Teorema 3.6.4 *Con la notación anterior, podemos afirmar el proceso anterior es finito. De hecho, el proceso anterior da lugar a (como máximo) $n+1$ sistemas de ecuaciones, donde n es el número de variables independientes.*

Demostración. Al igual que anteriormente, sea S_1 un sistema de r ecuaciones en derivadas parciales lineales con una incógnita u, en las variables $x_1, \cdots, x_n$,

$$S_1 = \{E_1, \cdots, E_r\}$$

completamente integrable.

Entonces se verifican las relaciones,

$$H_{hi} \equiv \left(\partial_h E_i = \sum_{k=1}^{r} A_{hi}^k E_k \right), \tag{3.6.4}$$

donde cada variable ∂_h es no multiplicadora para E_i en el sistema S_1 y todos los monomios en $(\partial_1, \cdots, \partial_n)$ que aparecen en A_{hi}^k están formados por variables multiplicadoras de cada E_k en el conjunto S_1.

Consideramos el sistema S_2 de ecuaciones en derivadas parciales lineales en las incógnitas $E_1, \cdots E_r$ formado por las relaciones anteriores. Por la proposicion 3.6.1, afirmamos que el sistema S_2 está en forma canónica.

Consideremos los subsistemas, descritos anteriormente,

$$\{S_2^k\}_{k=1}^r,$$

donde cada S_2^k representa a un subconjunto de ecuaciones del sistema S_2, cuyos primeros miembros están formados por derivadas de primer orden de la misma función incógnita E_k. Se verifica por tanto que,

$$S_2 = \bigcup_{k=1}^{r} S_2^k.$$

Cada S_2^k es un sistema de ecuaciones completo. Nos planteamos, para cada k, cuál es el cardinal del conjunto S_2^k, es decir cuántas ecuaciones hay en S_2 que tengan como primeros miembros derivadas relativas a la incógnita E_k. Pero como cada ecuación ha sido obtenida derivando una ecuación E_k respecto de sus variables no multiplicadoras, resultará que como máximo habrá n ecuaciones. Así podemos afirmar que

$$card(S_2^k) \leq n.$$

Hemos visto en el teorema 3.6.2 que S_2 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales completamente integrable. Establecemos las relaciones que verifican este hecho, es decir derivar cada ecuación (de S_2) respecto de sus variables no multiplicadoras y expresar esta derivada como combinación lineal de derivadas de las ecuaciones del sistema respecto de las variables multiplicadoras.

Por tanto, dado un subsistema S_2^k nos planteamos a cuántas relaciones da lugar cada ecuación, y la respuesta es a tantas como variables no multiplicadoras tenga esa ecuación respecto de S_2. Pero como los primeros miembros son derivadas de primer grado, de una misma función incógnita, y las variables no multiplicadoras de un conjunto de monomios de primer orden son todas las variables superiores que aparecen en el sistema, tendremos que cada ecuación dará lugar como máximo a $n-1$ relaciones. Así formaremos el sistema S_3, donde cada subsistema de S_3, referido a la misma incógnita tendrá como mucho $n-1$ ecuaciones.

Continuando con este proceso llegaríamos a un sistema S_{n+1} donde cada subsistema tendrá como máximo 1 ecuación y por tanto todas sus variables son multiplicadoras y aquí se pararía el proceso.

Por tanto podemos afirmar que la cadena de sistemas se para en el paso $n+1$, siendo n el número de variables independientes que tiene el sistema. □

Nota 3.6.5 . *El teorema 3.6.4 puede interpretarse como un teorema del tipo "teorema de las sicigias de Hilbert". En efecto, dado un sistema de ecuaciones S_1, lo explicado en esta sección es un algoritmo para construir una resolución libre del ideal generado por S_1 en el anillo correspondiente.*

Sea $S = \{E_1, \cdots, E_r\}$ un sistema completamente integrable, por tanto se verifican las siguientes relaciones

$$\partial_k E_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ki}^j E_j$$

para toda variable no multiplicadora ∂_k de cada E_i en el sistema S.

Denotemos por

$$R_{ki}^j = \begin{cases} \partial_k - A_{ki}^j & j = i \\ -A_{ki}^j & j \neq i. \end{cases}$$

Sea $\mathbf{R}_{ki} = \left(R_{ki}^1, \cdots, R_{ki}^r\right)$, entonces $\mathbf{R}_{ki}$ es una sicigia de $(E_1, \cdots, E_r)$, ya que $\sum_{j=1}^r R_{ki}^j E_j = 0$.

Proposición 3.6.6 *Con la notación anterior el conjunto $\{\mathbf{R}_{ki}\}$ genera el módulo $Sic(E_1, \cdots, E_r)$.*

Demostración. Vamos a considerar el orden "ser más bajo que" (ver 2.4.1) que denotaremos por $\prec$. Sea $\mathbf{H} = (H_1, \cdots, H_r)$ una sicigia de $(E_1, \cdots, E_r)$, es decir, $\sum_{i=1}^r H_i E_i = 0$, donde no todo $H_i = 0$ y $H_i = h_i \partial^{\beta(i)} + \widehat{H_i}$ siendo $\widehat{H_i}$ es más bajo que H_i.

Sean

$$\gamma = \gamma(\mathbf{H}) = \text{máx}_{\prec} \left\{\alpha(j) + \beta(j) \mid j \in \{1, \cdots, r\} \text{ y en } \partial^{\beta(j)} \text{ hay al menos una variable } \partial_k \text{ con } \partial_k \notin mult(E_j, \mathcal{F}\right\}$$

y

$$J = J(\mathbf{H}) = \left\{j \in \{1, \cdots, r\} \mid \alpha(j) + \beta(j) = \gamma(\mathbf{H}) \text{ y en } \partial^{\beta(j)} \text{ hay al menos una variable } \partial_k \text{ con } \partial_k \notin mult(E_j, \mathcal{F}\right\}.$$

Sea $m(\mathbf{H}) = \text{máx}(J(\mathbf{H}))$.

Si para todo $j \in \{1, \cdots, r\}$ todas las variables de $\partial^{\beta(j)}$ son multiplicadoras para E_j en el sistema S entonces $\exp(H_i E_i) \neq \exp(H_j E_j)$ con $i \neq j$ y de ahí que $\sum H_i E_i \neq 0$. Por tanto supongamos $J(\mathbf{H}) \neq \emptyset$ y entonces $m(\mathbf{H}) \geq 1$.

Sea $i = m(\mathbf{H})$, tenemos que $H_i E_i = \left(h_i \partial^{\beta(i)} + \widehat{H_i}\right) (\partial^{\alpha(i)} + \widehat{E_i})$. Consideremos

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - h_i \partial^{\beta(i) - \epsilon_k} \mathbf{R}_{ki}$$

donde ϵ_k representa a la n-upla que tiene todas sus componentes nulas excepto un 1 en el lugar k-ésimo, es decir $\epsilon_k = \exp(\partial_k)$.

Vamos a calcular $\gamma(\mathbf{H}')$. La componente j-ésima de $\mathbf{H}'$ viene dada por:

$$H_j' = \begin{cases} H_i - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k}(\partial_k - A_{ki}^i) & j = i \\ H_j - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k}(-A_{ki}^j) & j \neq i \end{cases}$$

Si $j = i$ entonces tenemos

$$\exp\left(H_i E_i - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k}\left(\partial_k E_i - A^i_{ki} E_i\right)\right) =$$
$$= \exp\left(h_i \partial^{\beta(i)+\alpha(i)} + h_i \partial^{\beta(i)} \widehat{E_i} + \widehat{H_i} \partial^{\alpha(i)} + \widehat{H_i}\widehat{E_i} - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k} \partial_k E_i + h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k} A^i_{ki} E_i\right) \prec \gamma$$

ya que $\exp(A^i_{ki}) E_i \prec \alpha(i) + \epsilon_k$.

Así $\gamma(\mathbf{H}') \prec \gamma(\mathbf{H})$.

Estudiemos ahora el caso $j \neq i$ y tenemos que considerar dos casos:

Si $j \in J$, entonces tenemos que,

$\exp(H_j E_j) \prec \gamma$ y $\exp\left(h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_r}(-A^j_{ki}) E_j\right) \preceq \gamma$ ya que $\exp(A^j_{ki} E_j) \preceq \gamma$ en $j = c(k, i)$, siendo $j = c(k, i) < i$. Así en este caso $m(\mathbf{H}') < m(\mathbf{H}')$.

Si $j \notin J$, supongamos que $\exp\left(H_j - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_r} A^j_{ki}\right) = \tau(j)$. Entonces podemos plantearnos dos casos:

1. Si en $\tau(j)$ existe alguna variable no multiplicadora, para $\alpha(j)$ en el conjunto $\mathcal{F}$ entonces tendremos que $\tau(j) + \alpha(j) \prec \gamma$.
2. Si en $\tau(j)$ todas las variables son multiplicadoras para $\alpha(j)$ en el conjunto $\mathcal{F}$ entonces tenemos que,
$$\sum_{j \notin J} \left(H_j - h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_r} A^j_{ki}\right) E_j = 0.$$

Por tanto, en todos los casos hemos obtenido:

$$(\gamma(\mathbf{H}'), m(\mathbf{H}')) <_{\text{lex}} (\gamma(\mathbf{H}), m(\mathbf{H}))$$

Como el conjunto $(\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\}, <_{\text{lex}})$ es un conjunto bien ordenado, después de un número finito de pasos, este proceso se para. Así llegamos a que $J = \emptyset$ y de ahí que $\sum_{i=1}^r H'_i E_i = 0$ por tanto
$$\mathbf{H} = \sum_{ki} h_i \partial^{\beta(i)-\epsilon_k} \mathbf{R}_{ki}.$$

□

3.6.1 Coeficientes convergentes. Rango de una conexión

Los resultados obtenidos en este capítulo pueden extenderse fácilmente al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes convergentes, a condición de trabajar en el "punto genérico". Más precisamente, si S_1 es un tal sistema (i.e. los coeficientes convergen en el entorno de un punto de $\mathbf{C}^n$), podremos transformarlo en un sistema en forma canónica y completo, si nos situamos en un punto del dominio de convergencia correspondiente, en el que ninguno de los coeficientes de los primeros miembros de S_1 se anule.

Consideremos el anillo de operadores diferenciales $\mathcal{D} = \mathbf{C}\{X\}[\partial] = \mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$. Denotemos $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{X\} = \mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$.

Sea $<_J$ un orden monomial definido en $\mathbf{N}^n$ por Janet([44],[45]):

$$\beta^1 <_J \beta^2 \iff \begin{cases} |\beta^1| < |\beta^2| \\ \text{ó} \\ |\beta^1| = |\beta^2| \quad \text{y} \quad (\beta^1_n, \cdots, \beta^1_1) <_{\text{lex}} (\beta^2_n, \cdots, \beta^2_1). \end{cases}$$

Vamos a definir un orden $\prec_J$ en $\mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$ de la siguiente manera:

$$(\alpha^1, \beta^1) \prec_J (\alpha^2, \beta^2) \iff \begin{cases} \beta^1 <_J \beta^2 \\ \text{ó} \\ \beta^1 = \beta^2 \quad \text{y} \quad \alpha^2 <_{\text{lex}} \alpha^1. \end{cases}$$

Notemos que $\prec_J$ no es un buen orden sobre $\mathbf{N}^{2n}$ pero es es un orden total compatible con la suma en $\mathbf{N}^{2n}$. Dado un operador $P \in \mathcal{D}$ podemos escribir $P = \sum a_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta$ con $a_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}$. Llamaremos diagrama de Newton de P al conjunto $\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n} \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}$.

Siguiendo la notación de [27], llamaremos exponente privilegiado de P (respecto de $\prec_J$) a $\exp_{\prec_J} = \max(\mathcal{N}(P))$.

Nótese que el exponente privilegiado está bien definido pues el orden lexicográfico es un buen orden en $\mathbf{N}^n$. Llamaremos base de Gröbner de un ideal a la izquierda I de $\mathcal{D}$ a toda familia $\{P_1, \cdots, P_r\} \subseteq I$ tal que $\bigcup_{i=1}^r (\exp_{\prec_J}(P_i) + \mathbf{N}^{2n}) = \operatorname{Exp}_{\prec_J}(I)$, donde este último conjunto es, por definición, $\operatorname{Exp}_{\prec_J}(I) = \{\exp_{\prec_J}(P) \mid P \in I\}$.

Notemos π la proyección de $\mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$ en el segundo factor:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n &\longrightarrow \mathbf{N}^n \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \beta. \end{aligned}$$

Nota 3.6.7 *Para todo elemento $P \in \mathcal{D}$ se verifica que $\pi(\exp_{\prec_J}(P)) = \exp_{<_J}(P)$.*

Teorema 3.6.8 *Sea I un ideal en $\mathcal{D}$ (a la izquierda) y sea $\{P_1, \cdots, P_r\}$ una base en el sentido de Janet para I, entonces $\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una base de Gröbner para I respecto del orden $\prec_J$.*

Demostración. Tendremos que ver

$$\operatorname{Exp}_{\prec_J}(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (\exp_{\prec_J}(P_i) + \mathbf{N}^{2n}).$$

Al ser I un ideal a la izquierda, siempre se verifica que: $\bigcup_{i=1}^r (\exp_{\prec_J}(P_i) + \mathbf{N}^{2n}) \subseteq \operatorname{Exp}_{\prec_J}(I)$. Sea $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Exp}_{\prec}(I)$ entonces existe $P \in I$ tal que $\exp_{\prec}(P) = (\alpha, \beta)$. Por 3.6.7 tenemos que $(\alpha, \beta) = (\alpha, \exp_{<_J}(P))$. Al ser $\{P_1, \cdots, P_r\}$ una base de Janet para I (respecto de $<_J$), tendremos que $\beta = \alpha_i + \gamma$ donde $\alpha_i = \exp_{<_J}(P_i)$ y $\gamma \in \mathbf{N}^n$. Así

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha_i + \gamma) = (\alpha, \gamma) + (0, \alpha_i),$$

pero como P_i está en forma canónica (ver) se tiene $\exp_{\prec_J}(P_i) = (0, \alpha_i)$.

$\square$

Sea $\{\triangle_1, \cdots, \triangle_r, \overline{\triangle}\}$ la partición de $\mathbf{N}^n$ relativa a $(\exp_{<_J}(P_1), \cdots, \exp_{<_J}(P_r))$ y notemos por $\{\square_1, \cdots, \square_r, \overline{\square}\}$ la partición de $\mathbf{N}^{2n}$ relativa a $(\exp_{\prec_J}(P_1), \cdots, \exp_{\prec_J}(P_r))$. Notemos $\triangle = \bigcup_{i=1}^r \triangle_i$ y $\square = \bigcup_{i=1}^r \square_i$.

Lema 3.6.9 *Con la notación anterior se verifica que:*

$$\square_i = \mathbf{N}^n \times \triangle_i \quad y \quad \square = \mathbf{N}^n \times \triangle.$$

Demostración. Para demostrar la afirmación del lema es suficiente demostrar que $\square_i = \mathbf{N}^n \times \triangle_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$ y ello es consecuencia de la igualdad $\exp_{\prec_J}(P_i) = (0, \exp_{<_J}(P_i))$. $\square$

Teorema 3.6.10 *Sea I un ideal (a la izquierda) en $\mathcal{D}$ y consideremos el $\mathcal{D}$-módulo $M = \mathcal{D}/I$. Sea $\{P_1, \cdots, P_r\}$ una base de I en el sentido de Janet y sea $\triangle = \bigcup_{i=1}^r (\exp_{<_J}(P_i) + \mathbf{N}^n)$. Entonces*

$$dim_{\mathbf{C}((x))}(M \bigotimes_{\mathcal{O}} \mathbf{C}((x))) = card\,(\mathbf{N}^n \setminus \triangle).$$

Demostración. Tendremos que ver que $M \simeq \bigoplus_{\alpha \notin \triangle} \mathcal{O}\overline{\partial}^\alpha$ como $\mathcal{O}$-módulo, donde $\overline{\partial}^\alpha$ es la clase de ∂^α módulo I. Para ello tendremos que demostrar:

1. $\{\overline{\partial^\alpha}\}_{\alpha \notin \triangle}$ es un sistema generador de M.
2. $\{\overline{\partial^\alpha}\}_{\alpha \notin \triangle}$ es $\mathcal{O}$-linealmente independiente.

1. Para cualquier $P \in \mathcal{D}$, se tiene que $P = \sum a_\beta(X)\partial^\beta$ con $a_\beta(X) \in \mathbf{C}\{X\}$ es decir $a_\beta(X) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_{\alpha\beta} X^\alpha$ donde $a_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}$.
   Notemos $\square = \bigcup_{i=1}^r (\exp_{\prec_J}(P_i) + \mathbf{N}^{2n})$. Dado que en $\mathbf{C}\{X\}[\partial]$ existe un algoritmo de división (ver [27]), entonces podemos afirmar que existen $Q_1, \cdots, Q_r, R \in \mathbf{C}\{X\}[\partial]$ únicos tales que
   $$P = \sum_{i=1}^r Q_i P_i + R$$
   donde todos los monomios en $x_1, \cdots, x_n$ y $\partial_1, \cdots, \partial_n$ de R pertenecen a $\mathbf{N}^{2n} \setminus \square$, es decir $\mathrm{Nw}(R) \subseteq \mathbf{N}^{2n} \setminus \square$. (aquí se utiliza que $\square = \mathrm{Exp}_{\prec_J(I)}$, 3.6.8). Si denotamos $\mathrm{Nw}_\partial(R) = \pi(\mathrm{Nw}(R))$ entonces,
   $$\mathrm{Nw}_\partial(R) \subseteq \pi(\mathbf{N}^{2n} \setminus \square) = \mathbf{N}^n \setminus \triangle,$$
   es decir, $R = \sum_{\beta \notin \triangle} a_\beta(X)\partial^\beta$ con $a_\beta(X) \in \mathbf{C}\{X\}$. Por otra parte, como $P - R = \sum_{i=1}^r Q_i P_i \in I$, entonces tendremos que la clase de P módulo I es la misma que la clase de R módulo I, es decir $\forall \overline{P} \in M$ se tiene $\overline{P} = \sum_{\beta \notin \triangle} a_\beta(X)\overline{\partial^\beta}$.

2. Sea $\sum_{\beta \notin \triangle} a_\beta(X)\partial^\beta \equiv 0$ (mód I) con $a_\beta \in \mathbf{C}\{X\}$.
   Supongamos que existe algún $a_\beta(x) \neq 0$, entonces
   $$0 \neq \sum_{\beta \notin \triangle} a_\beta(X)\partial^\beta \in I$$

así, (ver 3.6.8)

$$\exp_{\prec_J}\left(\sum_{\beta\notin\triangle} a_\beta(X)\partial^\beta\right) \in \exp_{\prec_J}(I) = \bigcup_{i=1}^{r}\left(\square_i + \mathbf{N}^{2n}\right).$$

Aplicando 3.6.7 y 3.6.9 tenemos

$$\exp_{<_J}\left(\sum_{\beta\notin\triangle} a_\beta(X)\partial^\beta\right) = \pi\left(\exp_{\prec_J}\left(\sum_{\beta\notin\triangle} a_\beta(X)\partial^\beta\right)\right) \in \pi\left(\exp_{\prec_J}(I)\right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{r}\pi\left(\square_i + \mathbf{N}^{2n}\right) = \bigcup_{i=1}^{r}\left(\triangle_i + \mathbf{N}^{n}\right).$$

Así $\exp_{<_J}\left(\sum_{\beta\notin\triangle} a_\beta(X)\partial^\beta\right) \in \bigcup_{i=1}^{r}\left(\triangle_i + \mathbf{N}^n\right)$ y esto es una contradicción.

$\square$

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo vamos a aplicar todo lo visto anteriormente, para estudiar la existencia de soluciones de ciertos sistemas (i.e. sistemas en forma canónica) de ecuaciones en derivadas parciales. Estos sistemas son los sistemas llamados *sistemas completamente integrables*. Veremos que dado un sistema en forma canónica, siempre que no haya condiciones de incompatibilidad, siempre es posible hallar otro sistema equivalente al anterior y completamente integrable. Veremos la relación que existe entre este proceso y el algoritmo de Buchberger para el cálculo de una base de Gröbner en $A_n(\mathbf{k})$.

4.1 Observaciones sobre el desarrollo en serie de Taylor

Supongamos que una función u en n variables complejas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ puede descomponerse, en un entorno del $(0, 0, \cdots, 0)$, en serie de Taylor

$$u = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} u(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} u_\alpha X^\alpha.$$

Dado un monomio $X^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_n^{\alpha_n}$ le asignamos de forma arbitraria dos conjuntos de variables, $\{x_{a_1}, \cdots, x_{a_h}\}$ y $\{x_{b_1}, \cdots, x_{b_k}\}$ que podemos llamar variables multiplicadoras y variables no multiplicadoras respectivamente de X^α, con $h + k = n$.

Sea $U_\alpha(x_1, \cdots, x_n)$ la función obtenida agrupando el producto del monomio X^α por aquéllos que se pueden formar con sus variables multiplicadoras, es decir,

$$U_\alpha(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha' \in \mathbf{N}^n \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} u_{\alpha+\alpha'} X^{\alpha+\alpha'}, \quad u_{\alpha+\alpha'} \in \mathbf{C}.$$

Consideramos ahora la función en n variables,

$$V_\alpha(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h})$$

que se obtiene anulando todos los x_b en la expresión

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

es decir,

$$V_\alpha(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h}) = \left. \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|_{x_{b_1}=\cdots=x_{b_k}=0}.$$

Teorema 4.1.1 *Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $U_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $V_\alpha(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_n})$ las funciones definidas anteriormente, entonces se verifica que:*

$$V_\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} U_\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

es decir, $U_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se obtiene integrando V_α, α_1 veces respecto de x_1, α_2 veces respecto de x_2, $\cdots$, α_n veces respecto de x_n, tomando cero como constante de integración. Esto lo podemos expresar diciendo

$$U_\alpha = I_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} V_\alpha$$

Notación 4.1.2 *Sea $X^\beta = x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$, $D^\alpha(x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n})$ denotará la derivada α-ésima del monomio X^β.*

Demostración. Podemos considerar varios casos

1. Si $\beta \notin \alpha + \mathbf{N}^n$, entonces $D^\alpha(x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}) = 0$.
2. Si $\beta \in \alpha + \mathbf{N}^n$, entonces $D^\alpha(x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta_i!}{(\beta_i-\alpha_i)!}X^{\beta-\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}X^{\beta-\alpha}$.
   Por tanto,

$$V_\alpha(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_n}) = D^\alpha\left(\sum\nolimits_{\beta=\alpha+\mathbf{N}^n} u_\beta X^\beta\right)\Big|_{x_{b_1}=\cdots=x_{b_k}=0}.$$

Pero si X^β es el producto de X^α por monomios que contienen variables x_b, entonces al anularlos, resultará que el monomio correspondiente a $X^{\beta-\alpha}$ se anulará y por tanto tendremos que, para calcular V_α es suficiente consider los múltiplos de X^α que se obtengan multiplicandolo por sus variables multiplicadoras, es decir,

$$V_\alpha(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_n}) = D^\alpha\left(\sum_{\substack{\beta=\alpha+\mathbf{N}^n\\ \beta=\alpha+\alpha'\\ \alpha'_{b_j}=0,\ j=1,\cdots,k}} u_\beta X^\beta\right).$$

donde

$$u_\beta = u_{\alpha+\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha+\alpha'|}u(0)}{(\alpha_1+\alpha'_1)!\cdots(\alpha_n+\alpha'_n)!} =$$
$$= \frac{\partial^{|\alpha+\alpha'|}u(0)}{(\alpha_{a_1}+\alpha'_{a_1})!\cdots(\alpha_{a_n}+\alpha'_{a_n})!\alpha_{b_1}!\cdots\alpha_{b_k}!}.$$

Por tanto,

$$D^\alpha\left(\sum_{\substack{\beta=\alpha+\mathbf{N}^n\\ \beta=\alpha+\alpha'\\ \alpha'_{b_j}=0,\ j=1,\cdots,k}} u_\beta X^\beta\right) =$$
$$= \sum_{\substack{\beta=\alpha+\mathbf{N}^n\\ \beta=\alpha+\alpha'\\ \alpha'_{b_j}=0,\ j=1,\cdots,k}} u_\beta D^\alpha\left(X^\beta\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} u_\beta \prod_{i=1}^{n} \frac{(\alpha_i + \alpha'_i)!}{\alpha'_i!} X^{\alpha'} =$$

$$= \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} \frac{\partial^{|\alpha + \alpha'|} u(0)}{\alpha'_{a_1}! \cdots \alpha'_{a_h}!} X^{\alpha'}.$$

Así podemos escribir que

$$V_\alpha = \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} \frac{\partial^{|\alpha + \alpha'|} u(0)}{\alpha'_{a_1}! \cdots \alpha'_{a_h}!} X^{\alpha'}.$$

Veamos que $I_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} V_\alpha = U_\alpha$.

$$I_{\alpha_1} X^{\alpha'} = \underbrace{\int \cdots \int}_{\alpha_1} X^{\alpha'} dx_1 = x_2^{\alpha'_2} \cdots x_n^{\alpha'_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\alpha_1} x_1^{\alpha'_1} dx_1 =$$

$$= x_2^{\alpha'_2} \cdots x_n^{\alpha'_n} \frac{1}{(\alpha'_1 + 1) \cdots (\alpha'_1 + \alpha_1)} x_1^{\alpha_1 + \alpha'_1} =$$

$$= x_2^{\alpha'_2} \cdots x_n^{\alpha'_n} \frac{\alpha'_1!}{(\alpha_1 + \alpha'_1)!} x_1^{\alpha_1 + \alpha'_1}.$$

Por tanto, se puede demostrar que

$$I_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} X^{\alpha'} = \prod \frac{\alpha'_i!}{(\alpha_i + \alpha'_i)!} X^{\alpha + \alpha'},$$

y de ahí que

$$I_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} \frac{(\partial^{|\alpha + \alpha'|} u)(0)}{\alpha'_{a_1}! \cdots \alpha'_{a_h}!} X^{\alpha'} =$$

$$= \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} \frac{(\partial^{|\alpha + \alpha'|} u)(0)}{\alpha'_{a_1}! \cdots \alpha'_{a_h}!} \prod \frac{\alpha'_i!}{(\alpha_i + \alpha'_i)!} X^{\alpha + \alpha'} =$$

$$= \sum_{\substack{\beta = \alpha + \mathbf{N}^n \\ \beta = \alpha + \alpha' \\ \alpha'_{b_j} = 0,\, j = 1, \cdots, k}} \frac{(\partial^{|\alpha + \alpha'|} u)(0)}{\prod (\alpha_i + \alpha' i)!} X^{\alpha + \alpha'} = U_\alpha.$$

□

Con lo visto anteriormente podemos resolver el siguiente problema: Supongamos las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ repartidas de una manera cualquiera en dos grupos disjuntos

$$x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h}; \qquad x_{b_1}, x_{b_2}, \cdots, x_{b_k}, \quad (h+k=n),$$

sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ y una función $f(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h})$.
Queremos encontrar funciones u tales que verifiquen, con multiplicidad $x_{b_1} = x_{b_2} = \cdots = x_{b_k} = 0$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\right|_{x_{b_1}=\cdots=x_{b_k}=0} = f(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h}).$$

Entonces tendremos que el trozo del desarrollo de Taylor de la función u, correspondiente a U_α viene dado por

$$U_\alpha = I_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} f(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots, x_{a_h}).$$

Los coeficientes de todos los términos que no pertenecen a U_α serán arbitrarios (solamente están sujetos a la convergencia del desarrollo total). Si a este resto de los coeficientes, que tomaremos arbitrarios, lo denotamos por W, tendremos que,

$$u = U_\alpha + W.$$

4.2 Soluciones de sistemas diferenciales elementales

En este apartado vamos a ver cómo se puede generalizar lo anterior, para calcular las soluciones de un sistema diferencial, donde los segundos miembros de cada uno de ellos están formados por funciones conocidas.

Consideremos el siguiente conjunto de series formales en las variables $x_1, \cdots, x_n$,

$$S = \{u \in \mathbf{C}[[x_1, \cdots, x_n]] : \partial^\alpha(u) = f^\alpha, \ \alpha \in A\}$$

donde $A \subset \mathbf{N}^n$ finito y $f^\alpha \in \mathbf{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$ son conocidas.

En primer lugar completamos A y obtenemos $\widetilde{A}$ y así consideramos el conjunto,

$$S = \widetilde{S} = \left\{u \in \mathbf{C}[[x_1, \cdots, x_n]] : \partial^\alpha(u) = f^\alpha, \ \alpha \in \widetilde{A}\right\}$$

donde f^α proviene de algún f^β (con $\beta \in A$) por derivación.

Notación 4.2.1 *Notaremos por E_α a cada ecuación del sistema, es decir,*

$$E_\alpha \equiv (\partial^\alpha(u) = f^\alpha)$$

donde $\alpha \in A$.

Definición 4.2.2 *Con la notación anterior diremos que un sistema de ecuaciones $(C) = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es completo si el conjunto formado por los monomios de los primeros miembros de las ecuaciones es completo, es decir, si el conjunto $\{\partial^\alpha \mid \alpha \in A\}$ es completo.*

Observación. Hemos visto que dado un conjunto de monomios, siempre es posible obtener otro completo de modo que generen el mismo módulo de monomios. Así a partir de ahora consideraremos conjuntos de monomios $\mathcal{F} = \{\partial^\alpha \mid \alpha \in \widetilde{A}\}$ finitos y completos.

Notación 4.2.3 *Denotaremos por $\mathcal{F}$, al conjunto completo $\mathcal{F} = \left\{\partial^\alpha \,|\alpha \in \widetilde{A}\right\}$.*

Si $\beta \in \mathbf{N}^n$ y $\alpha \in \widetilde{A}$, diremos que $\partial^{\alpha+\beta}(u) = \partial^\beta(f^\alpha)$ es la derivada de E_α, β_1 veces respecto de $x_1, \cdots, \beta_n$ veces respecto de x_n.

Llamaremos $\mathcal{V}_{\alpha,\mathcal{F}} = \bigcap\{x_i = 0\} \subset \mathbf{C}^n$, con i tal que ∂_i es variable no multiplicadora para ∂^α en el conjunto $\mathcal{F}$. Cuando no haya riesgo de confusión en lugar de $\mathcal{V}_{\alpha,\mathcal{F}}$ escribiremos $\mathcal{V}_\alpha$.

Definición 4.2.4 *Con la notación anterior,*

1. *Llamaremos variable multiplicadora de cada ecuación E_α a cada una de las variables multiplicadoras de ∂^α en el conjunto $\mathcal{F}$.*
2. *Llamaremos clase de una ecuación al conjunto de ecuaciones que podemos formar derivando una ecuación respecto sus variables multiplicadoras.*
3. *Dadas dos ecuaciones E_α, E_β, diremos que E_α es más alta que E_β si ∂^α es más alto que ∂^β.*

Nos planteamos cuando el conjunto anterior S es no vacío y la respuesta la vamos a obtener en el teorema de existencia que demostraremos más adelante.

Recordamos que en el apartado anterior 4.1 las funciones $U_\alpha \in \mathbf{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$ verifican que,

$$\frac{\partial^\alpha U_\alpha}{\partial x^\alpha} = f_\alpha\bigg|_{\mathcal{V}_\alpha} = 0.$$

Vamos a demostrar un lema que necesitamos para el teorema de existencia de soluciones.

Lema 4.2.5 *Con la notación anterior se verifica que para todo $\alpha \in \widetilde{A}$,*

$$\partial^\alpha\left(\sum_{\beta\in\widetilde{A}} U_\beta + W\right)\Bigg|_{\mathcal{V}_\alpha} = f^\alpha|_{\mathcal{V}_\alpha}$$

donde W es cualquier serie formal verificando $\mathcal{N}w(W)\bigcap\left(\bigcup_{\alpha\in\widetilde{A}} C_{\alpha,\mathcal{F}}\right) = \emptyset$

Demostración. Por el resultado 4.1, basta probar que si X^γ es un monomio de $\sum_{\beta\neq\alpha} U_\beta + W$ entonces se verifica que

$$\partial^\alpha(X^\gamma)|_{\mathcal{V}_\alpha} = 0.$$

Tenemos, por tanto, que considerar únicamente dos casos,

- Si $\gamma \notin (\alpha + \mathbf{N}^n)$ entonces $\partial^\alpha(X^\gamma) = 0$ y de ahí que, $\partial^\alpha(X^\gamma)|_{V_\alpha} = 0$.
- Si $\gamma \in (\alpha + \mathbf{N}^n)$ pero $\gamma \notin C_{\alpha,\mathcal{F}}$, entonces X^γ será de la forma,

$$X^\gamma = X^\alpha X^{\gamma-\alpha}$$

y como $X^\gamma \notin C_{\alpha,\mathcal{F}}$ entonces en el monomio $X^{\gamma-\alpha}$ hay alguna variable x_j tal que $x_j \notin mult(X^\alpha, \mathcal{F})$, por tanto x_j es una variable que aparece en $X^{\gamma-\alpha}$ y así tenemos que

$$\partial^\alpha(X^\gamma)|_{V_\alpha} = cX^{\gamma-\alpha}|_{V_\alpha} = 0$$

donde $c \in \mathbf{k}$.

□

Teorema 4.2.6 (Teorema de existencia) *Con la notación anterior, la condición necesaria y suficiente para que $S \neq \emptyset$ es que*

$$\partial_i(f^\alpha) = \partial^\beta(f^{\alpha'})$$

para cada $\alpha \in \widetilde{A}$, cada i tal que ∂_i es variable no multiplicadora de α en $\mathcal{F}$ y $\alpha + \epsilon_i \in \mathcal{C}_{\alpha'}$ con $\beta + \alpha' = \alpha + \epsilon_i$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Si $S \neq \emptyset$ entonces verifica la igualdad

$$\partial_i(f^\alpha) = \partial^\beta(f^{\alpha'})$$

para cualquier variable, en particular para las variables no multiplicadoras.

$\Longleftarrow$ Notemos por U_α (para $\alpha \in \widetilde{A}$) la serie formal construida en 4.1 respecto de una ecuación y de los conjuntos de variables multiplicadoras y no multiplicadoras de X^α en $\mathcal{F}$.

Sea

$$U = \sum_{\beta \in \widetilde{A}} U_\beta + W$$

con $W \in \mathbf{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$ y $\mathcal{N}w(W) \bigcap \phi\left(\bigcup_{\alpha \in \widetilde{A}} C_{\alpha,\mathcal{F}}\right) = \emptyset$.

Ordenamos las ecuaciones según la relación "ser más alto que", sean

$$E_1 > E_2 > \cdots > E_i > \cdots$$

donde notaremos E_i en lugar de $E_{\alpha(i)}$.

Si E_1 es la ecuación más alta, entonces tendrá todas sus variables multiplicadoras y se verifica (por el lema 4.2.5) que:

$$E_1 \equiv \left(\partial^{\alpha(1)}(U) - f^{\alpha(1)} = 0\right).$$

Sea $k \geq 2$ y suponemos que $\partial^{\alpha(j)}(U) = f^{\alpha(j)}$ para $1 \leq j \leq k-1$.

Vamos a demostrar que $\partial^{\alpha(k)}(U) = f^{\alpha(k)}$.

Por el lema 4.2.5 tenemos que:

$$E_k \equiv \partial^{\alpha(k)}(U)\Big|_{\mathcal{V}_\alpha} - f^{\alpha(k)}\Big|_{\mathcal{V}_\alpha} = 0.$$

Se trata de demostrar que

$$\partial^{\alpha(k)}(U) = f^{\alpha(k)}.$$

Supongamos que ∂_i es variable no multiplicadora para la ecuación E_k en el conjunto $\mathcal{F}$; como éste es un conjunto completo, entonces se verificará que,

$$\partial_i\left(\partial^{\alpha(k)}\right) = \partial^{\beta}\left(\partial^{\alpha(h)}\right)$$

pertenece a la clase de una ecuación E_h, siendo $E_h > E_k$ por la propiedad II. Pero por hipótesis se verifica que,

$$\partial_i\left(f^{\alpha(k)}\right) = \partial^{\beta}\left(f^{\alpha(h)}\right)$$

entonces tenemos que,

$$\partial_i\left(E_k\right) = \partial^{\beta}\left(E_h\right)$$

pero si $k > h$ tenemos que

$$\partial^{\alpha(h)}(U) = f^{\alpha(h)}$$

y de ahí que

$$\partial_i\left(\partial^{\alpha(k)}(U)\right) = \partial^{\beta}\left(\partial^{\alpha(h)}(U)\right) = \partial^{\beta}\left(f^{\alpha(h)}\right) = \partial_i(f^{\alpha(k)}),$$

y esto quiere decir que $\partial^{\alpha(k)}(U) - f^{\alpha(k)}$ es constante respecto de la variable x_i. Pero x_i representa a cualquier variable no multiplicadora para E_k en el conjunto $\mathcal{F}$, entonces podemos decir que E_k no depende de sus variables no multiplicadoras y tenemos que,

$$\partial^{\alpha(k)}(U) - f^{\alpha(k)} = \left(\partial^{\alpha(k)}(U) - f^{\alpha(k)}\right)\Big|_{\mathcal{V}_\alpha}.$$

□

4.3 Soluciones de un sistema diferencial en forma canónica

Sea el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales, completo

$$\begin{cases} P_1(u) &= f_1 \\ P_2(u) &= f_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_r(u) &= f_r \end{cases}$$

donde $P_i = \partial^{\alpha(i)} - \widehat{P}_i$ y todo monomio en $\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ en $\widehat{P}_i$ es anterior (ver 3.1) a

$\partial^{\alpha(i)}$ para todo $i = 1, \cdots, r$.

Así el sistema anterior puede escribirse de la forma,

$$\begin{cases} \partial^{\alpha(1)}(u) &= \widehat{P_1}(u) + f_1 \\ & \vdots \\ \partial^{\alpha(r)}(u) &= \widehat{P_r}(u) + f_r \end{cases}$$

Notación 4.3.1 *E_i denotará a la i-ésima ecuación, es decir,*

$$E_i \equiv (P_i(u) - f_i = 0)\,.$$

Consideremos el conjunto de los monomios $\mathcal{F} = \{\partial^{\alpha(1)}, \cdots, \partial^{\alpha(r)}\}$.
Vamos a denotar por $\left\{x_{a_{i,1}}, \cdots, x_{a_{i,h_i}}\right\}$ y $\left\{x_{b_{i,1}}, \cdots, x_{b_{i,k_i}}\right\}$ el conjunto de las variables multiplicadoras y no multiplicadoras respectivamente de E_i respecto del conjunto $\mathcal{F}$.

Sea (ver 4.2.3) $V_{\alpha(i)} = \left\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \,|z_{i,b_1} = \cdots = z_{i,b_{k_i}} = 0\right\}$ es decir, las n-uplas tales que las variables no multiplicadoras de la ecuación E_i respecto del conjunto $\mathcal{F}$ son nulas.

4.3.1 Condiciones iniciales para un sistema

Dado un sistema de ecuaciones en derivadas parciales,

$$\begin{cases} \partial^{\alpha(1)}(u) = \widehat{P}_i(u) + f_1 \\ \quad\vdots \\ \partial^{\alpha(r)}(u) = \widehat{P}_i(u) + f_r, \end{cases}$$

vamos a obtener las condiciones iniciales, relativas a los primeros miembros del sistema anterior. para las posibles soluciones ψ.

Consideramos el conjunto de monomios

$$\mathcal{F} = \left\{\partial^{\alpha(1)}, \cdots, \partial^{\alpha(r)}\right\}.$$

Sea J el módulo de Janet definido por $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{N}$ el sistema generador de $\overline{J} = \mathbf{N}^n \setminus J$.

Para cada elemento $\partial^{\beta} \in \mathcal{N}$, hallamos sus variables multiplicadoras y no multiplicadoras, (ver 2.5) sean éstas,

$$\{x_{c_1}, \cdots, x_{c_l}\} \qquad \text{y} \qquad \{x_{d_1}, \cdots, x_{d_m}\}, \qquad (l + m = n),$$

respectivamente.

Damos de forma arbitraria el valor de $\partial^{\beta}(\psi)$ para $x_{d_1} = \cdots = x_{d_m} = 0$.

Esto nos da el trozo del desarrollo de Taylor de ψ correspondiente a C_{β} con $\partial^{\beta} \in \mathcal{N}$.

Haciendo esto para todos los elementos de $\mathcal{N}$ tendremos todas las derivadas paramétricas del sistema para la serie ψ y de ahí el trozo del desarrollo de Taylor de la serie ψ correspondiente a esos coeficientes.

Proposición 4.3.2 *Con la notación anterior existe una única serie formal ψ, tal que verifica las ecuaciones del sistema anterior en $\mathcal{V}_{\alpha(i)}$, es decir,*

$$\partial^{\alpha(i)}(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}} = \widehat{P}_i(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}} + f_i|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}}, \text{ para todo } i = 1, \cdots, r.$$

Demostración. La demostración de esta proposición la vamos a hacer en dos partes, en la primera parte construimos una serie ψ y en la segunda parte vemos que verifica las condiciones del sistema.

Construcción de la serie. La serie ψ será de la forma

$$\psi = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x^\alpha}(\underline{0}) x^\alpha, \text{ para todo } i = 1, \cdots, r.$$

Denotamos por

$$\psi_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x^\alpha}(\underline{0}).$$

Imponemos a ψ las condiciones iniciales (ver 4.3.1) relativas a

$$\left\{\partial^{\alpha(1)}, \cdots, \partial^{\alpha(r)}\right\}.$$

Sea $\overline{J}$, el complementario del módulo de Janet, J, definido por $\left\{\partial^{\alpha(1)}, \cdots, \partial^{\alpha(r)}\right\}$. Podemos afirmar que los monomios $\psi_\alpha x^\alpha$, con $\alpha \in \overline{J}$ están unívocamente determinados por las condiciones iniciales.

Sea $\alpha \in \bigcup_{i=1}^r \mathcal{C}_{\alpha(i)}$, (donde $\mathcal{C}_{\alpha(i)}$ es la clase de $\partial^{\alpha(i)}$ en $\mathcal{F}$, [2.2.2])entonces sea i_0 el único índice verificando que $\alpha \in \mathcal{C}_{\alpha(i_0)}$. Pongamos $\alpha = \alpha(i_0) + \gamma$ donde las variables ∂^{γ_j} de γ son multiplicadoras para $\alpha(i_0)$ en el conjunto $\{\alpha(1), \cdots, \alpha(r)\}$.

Consideramos en $\mathbf{N}^n$ el orden graduado lexicográfico con $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1$.

Definimos, por recurrencia sobre α con respecto el orden anterior,

$$\partial^\alpha(\psi)(\underline{0}) := \left(\partial^\gamma \widehat{P}_i\right)(\psi)(\underline{0}) + \partial^\gamma(f_i)(\underline{0}).$$

Nota 4.3.3 *La expresión $\left(\partial^\gamma \widehat{P}_i\right)(\psi)(\underline{0})$ tiene sentido, supuesto conocidas $(\partial^\beta \psi)(\underline{0})$ para todo $\beta < \alpha$.*

En efecto, $\widehat{P}_i = \sum_\delta a^i_\delta \partial^\delta$ con $\delta < \alpha(i)$ y con $a^i_\delta \in \mathbf{C}[[x]]$. Por tanto,

$$\partial^\gamma \widehat{P}_i = \sum_{\delta < \alpha(i)} \partial^\gamma a^i_\delta \partial^\delta = \sum_{\beta < \gamma + \alpha(i)} b^i_\beta \partial^\beta,$$

para ciertas series b^i_β (que se deducen del conmutador $[\partial^\gamma, a^i_\delta]$).

Para una función φ arbitraria

$$\left(\partial^\gamma \widehat{P}_i\right)(\varphi) = \sum_{\beta < \gamma + \alpha(i)} b^i_\beta \partial^\beta(\varphi)$$

y por tanto, $\left(\partial^\gamma \widehat{P}_i\right)(\psi)(\underline{0})$ *es* $\sum_{\beta<\gamma+\alpha(i)} b^i_\beta(\underline{0})(\partial^\beta\psi)(\underline{0})$.

Por tanto ya tenemos la serie ψ, que por construcción es única. Veamos que verifica las condiciones que queremos, es decir,

$$\partial^{\alpha(i)}(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}} = \widehat{P}_i(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}} + f_i|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}}, \qquad i=1,\cdots,r.$$

En primer lugar, observamos que, si efectuamos la operación $\partial^{\alpha(i)}(x^\lambda)$ sobre un monomio x^λ que no es múltiplo de $x^{\alpha(i)}$, entonces tendremos que $\partial^{\alpha(i)}(x^\lambda)=0$.
Si en la expresión $\partial^{\alpha(i)}(x^\lambda)$ aparece alguna variable x_{i,b_j} con $1\leq j\leq k_i$, entonces tendremos que, $\partial^{\alpha(i)}(x^\gamma)|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}}=0$.
Entonces

$$\partial^{\alpha(i)}(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}},$$

es no nula en aquellos términos del desarrollo de Taylor cuyo exponente sea de la forma $\alpha(i)+\gamma$, siendo todas las variables de ∂^γ multiplicadoras para $\alpha(i)$ en el conjunto $\mathcal{F}$, así tendremos que,

$$\partial^{\alpha(i)}(\psi)\Big|_{\mathcal{V}_{\alpha(i)}} = \sum_{\gamma+\alpha(i)\in\mathcal{C}_{\alpha(i)}} \frac{(\gamma+\alpha(i))!}{\gamma!}\frac{1}{(\alpha(i)+\gamma)!}\left(\partial^{\gamma+\alpha(i)}\psi\right)(\underline{0})x^\gamma =$$

$$= \sum_{\gamma+\alpha(i)\in\mathcal{C}_{\alpha(i)}} \frac{1}{\gamma!}\left[\left(\partial^\gamma\widehat{P}_i\right)(\psi)(\underline{0})+\partial^\gamma(f_i)(\underline{0})\right]x^\gamma =$$

$$= \sum_{\gamma+\alpha(i)\in\mathcal{C}_{\alpha(i)}} \left(\frac{1}{\gamma!}\left(\partial^\gamma\widehat{P}_i\right)(\psi)(\underline{0})\right)x^\gamma + \sum_{\gamma+\alpha(i)\in\mathcal{C}_{\alpha(i)}} \frac{1}{\gamma!}\left(\partial^\gamma(f_i)(\underline{0})\right)x^\gamma.$$

□

Nota 4.3.4 *Podemos generalizar todo lo anterior a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales en varias incógnitas. Vamos a indicar como sería.*

Dado un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con varias incógnitas, $u_1,\cdots,u_s$ *tales que verifiquen:*

1. *En el primer miembro de cada ecuación aparece la derivada de una función incógnita y en su segundo miembro sólo aparecen derivadas anteriores (ver 3.1) a las del primer miembro (no necesariamente de la misma función incógnita).*
2. *Todas las derivadas de los primeros miembros son distintas entre sí.*

Consideramos las derivadas de las distintas funciones incógnitas ordenadas según el orden del tipo de los descritos en el apéndice 1 del trabajo.

En primer lugar, añadimos las ecuaciones necesarias para obtener para las derivadas de todas las funciones incógnitas sistemas completos.

Igual que en el caso anterior, las condiciones iniciales, que se obtienen a partir de los primeros miembros de cada ecuación nos darán las derivadas paramétricas y cualquier derivada principal de una determinada función incógnita se obtendrá de manera única de las derivadas anteriores de la misma función incógnita y de las derivadas anteriores de otras funciones incógnitas, ya que las restantes funciones incógnitas así como sus derivadas están totalmente ordenadas. Por lo tanto, obtenemos unas series

$$\psi_1, \cdots, \psi_s,$$

que satisfacen a cada una de las ecuaciones del sistema, cuando anulamos las variables no multiplicadoras de la ecuación correspondiente.

Teorema 4.3.5 *Todo sistema de ecuaciones en derivadas parciales completamente integrable tiene solución.*

Demostración. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales,

$$C_1 \equiv \begin{cases} A_1 \equiv \left(\partial^{\alpha(1)}(u) = \widehat{P_1}(u) + f_1\right) \\ \vdots \\ A_r \equiv \left(\partial^{\alpha(r)}(u) = \widehat{P_r}(u) + f_r\right) \end{cases}$$

completo y completamente integrable, veamos que la función ψ, (ver 4.3.2) construida anteriormente verifica,

$$A_1(\psi) = \cdots = A_r(\psi) = 0.$$

Sea ∂_i una variable no multiplicadora para A_j en el conjunto $\mathcal{F} = \{A_1, \cdots, A_r\}$, entonces, como el sistema es completamente integrable, tendremos que,

$$\partial_i A_j = \sum_{k=1}^{r} Q_{ij}^k A_k$$

donde las variables en $\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ que aparecen en Q_{ij}^k son multiplicadoras para A_k en el conjunto $\mathcal{F}$.

Derivamos cada ecuación respecto de todas sus variables no multiplicadoras. Sea C_2 esl sistema formado por todas las relaciones anteriores. Eligiendo un orden conveniente, ver apéndice 1, podemos afirmar que el nuevo sistema C_2 está en forma canónica.

Sabemos (ver 4.3.2) que existe una serie ψ tal que verifica

$$A_i(\phi)|_{V_{\alpha(i)}=0} \qquad \text{para todo } i = 1, \cdots, r.$$

El sistema C_2 puede considerarse como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, en las incógnitas $A_1, \cdots, A_r$ que verifican las condiciones iniciales,

$$A_i(\phi)|_{V_{\alpha(i)}=0} \qquad \text{para todo } i = 1, \cdots, r.$$

Pero el sistema C_2 es un sistema homogéneo, entonces sabemos que siempre existe la solución nula. Pero como la solución nula también verifica la condición inicial, tendremos que

$$A_1(\psi) = \cdots = A_r(\psi)$$

para cualesquiera $x_1, \cdots, x_n$.

Eligiendo un orden conveniente (ver apéndice 1) obtenemos un sistema de ecuaciones $A_1, \cdots, A_l$

$$A_h \equiv \left\{ \partial_i(w_j) = \sum_k Q_{ij}^k(w_k) \right\}_{1 \le j \le r}$$

en derivadas parciales de primer orden en las incógnitas $w_1, \cdots, w_r$ y que verifica:

1. En cada ecuación el primer miembro está formado por una derivada de una función incógnita y las derivadas que aparecen en el segundo miembro son anteriores a las que aparecen en el primer miembro.

2. Todos los primeros miembros de cada ecuación son distintos entre sí.

por la observación que hemos hecho 4.3.4 sabemos que existen un conjunto de series $v_1, \cdots, v_r$ tales que,

$$A_i(v_j)|_{V_i} = 0, \qquad i = 1, \cdots, l.$$

donde V_i denota al conjunto de las n-uplas tales que son nulas las variables no multiplicadoras de la ecuación A_i respecto del conjunto de ecuaciones del sistema. Pero por otra parte, el sistema anterior es un sistema homogéneo, es decir, siempre existe la solución trivial,

$$E_1 = \cdots = E_r = 0$$

Por tanto tenemos que,

$$E_1(v) = \cdots = E_r(v) = 0.$$

luego la serie v construida anteriormente verifica el sistema. □

Nota 4.3.6 *Janet demuestra en [44] (p. 122-135) que si los coeficientes del sistema (en forma canónica y completamente integrable) son holomorfos, las soluciones del mismo también lo son, (siempre que se elijan las condiciones iniciales holomorfas). Este resultado también ha sido demostrado por Riquier ([83]) entre otros autores. Nosotros utilizamos este resultado en el cálculo de los grupos Ext de un tal sistema (ver 4.4)*

Ejemplo 4.3.7 *Consideremos el sistema,*

$$\begin{cases} \partial_2\partial_1(u) & = & x_2^2 \\ \partial_1^2(u) & = & x_1 \end{cases}$$

Como $\partial_2(x_1) = \partial_1(x_2^2)$ entonces el sistema anterior es completamente integrable.

Ejemplo 4.3.8 *El sistema,*

$$\begin{cases} \partial_2\partial_1(u) & = & 2x_1 \\ \partial_1^2(u) & = & x_2. \end{cases}$$

no es completamente integrable.

Ejemplo 4.3.9 *Consideramos el sistema,*

$$\begin{cases} \partial_2\partial_1(u) &= x_1 \\ \partial_1^2(u) &= x_1^2 + x_2. \end{cases}$$

Paso 1: Cálculo de las variables multiplicadoras

	Variables multiplicadoras	
$\partial_2\partial_1$	x_2	x_1
∂_1^2	$\bullet$	x_1

Paso 2: ¿El sistema es completo?

Como se verifica que,

$$\partial_2\partial_1^2 \in \mathcal{C}_{\partial_1^2}$$

entonces podemos afirmar que el sistema es completo.

Paso 3: Existencia de solución

Como

$$\partial_2\left(x_1^2 + x_2\right) = \partial_1(x_1)$$

entonces podemos afirmar que el sistema tiene solución.

Paso 4: Construcción de la solución.

Paso 4.1

Anulamos las variables no multiplicadoras de los primeros miembros y tenemos que,

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2(u)(x_1, x_2) &= x_1 \\ \partial_1^2(u)(x_1, 0) &= x_1^2. \end{cases}$$

Así podemos afirmar que

$$U_{(1,1)} = \int\left(\int x_1 dx_1\right) dx_2 = \frac{x_1^2 x_2}{2}.$$

$$U_{(2,0)} = \int\left(\int x_1^2 dx_1\right) dx_1 = \frac{x_1^4}{12}.$$

Paso 4.2: Cálculo de los monomios complementarios y sus variables multiplicadoras

	Variables multiplicadoras	
∂_2	x_2	$\bullet$
1	$\bullet$	$\bullet$
∂_1	$\bullet$	$\bullet$

Paso 4.: Valores arbitrarios

$$\begin{cases} \dfrac{partialu}{\partial x_2}(0, x_2) & = & f(x_2) \\ u(0,0) & = & c_{(0,0)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(0,0) & = & c_{(1,0)} \end{cases}$$

Entonces,

$$W_{(0,1)} = \int f(x_2)dx_2$$
$$W_{(1,0)} = \int c_{(1,0)}dx_1$$

Así,

$$u = \frac{x_1^2 x_2}{2} + \frac{x_1^4}{12} + W_{(0,1)} + W_{(1,0)} + W_{(0,0)}.$$

Ejemplo 4.3.10 *Hallar una función analítica u, en las variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que verifique:*

$$\begin{cases} \partial_5\partial_4(u) & = & f_1 \\ \partial_5\partial_3(u) & = & f_2 \\ \partial_5\partial_2(u) & = & f_3 \\ \partial_4^2(u) & = & f_4 \\ \partial_4\partial_3(u) & = & f_5 \\ \partial_3^2(u) & = & f_6, \end{cases}$$

siendo f_i, para $i = 1 \cdots, 6$ funciones en las variables $x_1, \cdots, x_5$. **Paso 1: Cálculo de las variables multiplicadoras**

	Variables multiplicadoras				
$\partial_5\partial_4$	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_3$	x_5	•	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_2$	x_5	•	•	x_2	x_1
∂_4^2	•	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_4\partial_3$	•	•	x_3	x_2	x_1
∂_3^2	•	•	x_3	x_2	x_1

Paso 2: ¿El sistema es completo?

Como se verifica que,

$$\begin{cases} \partial_4(\partial_5\partial_3) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4(\partial_5\partial_2) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_3(\partial_5\partial_2) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,0,1)} \\ \partial_5(\partial_4^2) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_5(\partial_4\partial_3) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4(\partial_4\partial_3) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,2,0)} \\ \partial_5(\partial_3^2) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,0,1)} \\ \partial_4(\partial_3^2) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,1,0)} \end{cases}$$

entonces podemos afirmar que el sistema es completo.

Paso 3: Existencia de solución

Como se verifican las siguientes relaciones,

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_4} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \\
\dfrac{\partial f_3}{\partial x_4} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\
\dfrac{\partial f_4}{\partial x_5} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4} & \\
\dfrac{\partial f_5}{\partial x_5} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}, & \dfrac{\partial f_5}{\partial x_4} = \dfrac{\partial f_4}{\partial x_3} \\
\dfrac{\partial f_6}{\partial x_5} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}, & \dfrac{\partial f_6}{\partial x_4} = \dfrac{\partial f_5}{\partial x_3}
\end{array}\right.$$

entonces podemos afirmar que el sistema tiene solución.

Paso 4: Construcción de la solución.
Paso 4.1
Anulamos las variables no multiplicadoras de los primeros miembros y tenemos que,

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) & = & f_2(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_2}(x_1, x_2, 0, 0x_5) & = & f_3(x_1, x_2, 0, 0, x_5) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) & = & f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3, 0, 0) & = & f_5(x_1, x_2, x_3, 0, 0) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3, 0, 0) & = & f_6(x_1, x_2, x_3, 0, 0)
\end{array}\right.$$

Así podemos afirmar que

$$\begin{array}{lcl}
U_{(0,0,0,1,1)} & = & \int \left(\int f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) dx_4 \right) dx_5 \\
U_{(0,0,1,0,1)} & = & \int \left(\int f_2(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) dx_3 \right) dx_5 \\
U_{(0,1,0,0,1)} & = & \int \left(\int f_3(x_1, x_2, 0, 0, x_5) dx_2 \right) dx_5 \\
U_{(0,0,0,2,0)} & = & \int \left(\int f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) dx_4 \right) dx_4 \\
U_{(0,0,1,1,0)} & = & \int \left(\int f_5(x_1, x_2, x_3, 0, 0) dx_3 \right) dx_4 \\
U_{(0,0,2,0,0)} & = & \int \left(\int f_6(x_1, x_2, x_3, 0, 0) dx_3 \right) dx_3
\end{array}$$

Paso 4.2: Cálculo de los monomios complementarios y sus variables multiplicadoras

	Variables multiplicadoras				
∂_4	•	•	•	x_2	x_1
∂_3	•	•	•	x_2	x_1
1	•	•	•	x_2	x_1
∂_5	x_5	•	•	•	x_1

Paso 4.: Valores arbitrarios
La solución queda perfectamente determinada para funciones arbitrarias,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_4}(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & g_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & g_2(x_1, x_2) \\ u(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & g_3(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_5}(x_1, 0, 0, 0, x_5) & = & g_4(x_1, x_5) \end{cases}$$

Estas condiciones arbitrarias nos darán W y de ahí que podamos afirmar que,

$$u = \sum_{\alpha \in \bar{A}} U_\alpha + W.$$

Ejemplo 4.3.11 *Vamos a estudiar si el sistema $(C) = \{E_1, E_2\}$ es completamente integrable, donde*

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_2^2 \end{cases},$$

Empezamos estudiando si el sistema es completo, para ello lo primero que haremos es calcular las variables multiplicadoras de cada ecuación respecto del conjunto $\mathcal{F} = \{\partial_3^2, \partial_2^2\}$,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	$\bullet$	x_2	x_1

Como $\partial_3(\partial_2^2) \notin \bigcup_{\alpha\in\phi(\mathcal{F})} C_\alpha$ entonces consideramos el sistema,

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_3\partial_2^2 \\ E_3 & \equiv & \partial_2^2 \end{cases}$$

Hallamos las variables multiplicadoras de este nuevo conjunto de operadores,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	$\bullet$	x_2	x_1
E_3	$\bullet$	x_2	x_1

Como

$$\partial_3(\partial_3\partial_2^2) \in C_{(2,0,0)} \text{ y } \partial_3(\partial_2^2) \in C_{(1,2,0)},$$

entonces podemos afirmar que el sistema anterior es completo, veamos ahora si es completamente integrable. Tenemos que,

$$\partial_3 E_2 - \partial_2^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_3 = 2\partial_2\partial_1^2,$$

y como $\partial_2\partial_1^2$ es una relación formada únicamente por derivadas paramétricas, entonces podemos afirmar que el sistema anterior no es completamente integrable.

A continuación consideramos el sistema,

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_3\partial_2^2 \\ E_3 & \equiv & \partial_2^2 \\ E_4 & \equiv & \partial_2\partial_1^2 \end{cases}$$

donde el conjunto $\mathcal{F}$ *es*

$$\mathcal{F} = \{\partial_3^2, \partial_3\partial_2^2, \partial_2^2, \partial_2\partial_1^2\}.$$

De nuevo estudiamos si el sistema es completo, para ello calculamos las variables multiplicadoras de cada ecuación,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	•	x_2	x_1
E_3	•	x_2	x_1
E_4	•	•	x_1

Como $\partial_3(\partial_2\partial_1^2) \notin \bigcup_{\alpha\in\diamond(\mathcal{F})} C_\alpha$ *entonces tendremos que considerar el sistema,*

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_3\partial_2^2 \\ E_3 & \equiv & \partial_3\partial_2\partial_1^2 \\ E_4 & \equiv & \partial_2^2 \\ E_5 & \equiv & \partial_2\partial_1^2 \end{cases}$$

Volvemos a calcular las variables multiplicadoras de cada ecuación,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	•	x_2	x_1
E_3	•	•	x_1
E_4	•	x_2	x_1
E_5	•	•	x_1

Este sistema es completo, entonces ahora si estamos en condiciones de preguntarnos si este sistema es completamente integrable, y como de la relación,

$$\partial_3 E_3 - \partial_2\partial_1^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_5 = \partial_1^4$$

es decir, obtenemos una relación entre las derivadas paramétricas, entonces tenemos que este sistema no es completamente integrable.

Añadimos esta ecuación y consideramos el sistema,

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_3\partial_2^2 \\ E_3 & \equiv & \partial_3\partial_2\partial_1^2 \\ E_4 & \equiv & \partial_2^2 \\ E_5 & \equiv & \partial_2\partial_1^2 \\ E_6 & \equiv & \partial_1^4 \end{cases}$$

De nuevo volvemos a calcular las variables multiplicadoras y obtenemos que,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	•	x_2	x_1
E_3	•	•	x_1
E_4	•	x_2	x_1
E_5	•	•	x_1
E_6	•	•	x_1

Como $\partial_3\partial_1^4 \notin \bigcup_{\alpha\in\acute{o}\mathcal{F}} C_\alpha$ *entonces tenemos que considerar el sistema,*

$$\begin{cases} E_1 & \equiv & \partial_3^2 - x_2\partial_1^2 \\ E_2 & \equiv & \partial_3\partial_2^2 \\ E_3 & \equiv & \partial_3\partial_2\partial_1^2 \\ E_4 & \equiv & \partial_3\partial_1^4 \\ E_5 & \equiv & \partial_2^2 \\ E_6 & \equiv & \partial_2\partial_1^2 \\ E_7 & \equiv & \partial_1^4 \end{cases}$$

Calculamos las variables multiplicadoras de cada ecuación y obtenemos que,

	Variables multiplicadoras		
E_1	x_3	x_2	x_1
E_2	•	x_2	x_1
E_3	•	•	x_1
E_4	•	•	x_1
E_5	•	x_2	x_1
E_6	•	•	x_1
E_7	•	•	x_1

El sistema anterior es complento, entonces de nuevo, podemos plantearnos si el sistema es completamente integrable. Al calcular las relaciones, obtenemos que,

$$\begin{cases} \partial_3 E_2 - \partial_2^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_5 - 2E_6 = 0 \\ \partial_3 E_3 - \partial_2\partial_1^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_6 - E_7 = 0 \\ \partial_2 E_3 - \partial_1^2 E_2 = 0 \\ \partial_3 E_4 - \partial_1^4 E_1 + x_2\partial_1^2 E_7 = 0 \\ \partial_2 E_4 - \partial_1^2 E_3 = 0 \\ \partial_3 E_5 - E_2 = 0 \\ \partial_3 E_6 - \partial_1^2 E_2 = 0 \\ \partial_2 E_6 - \partial_1^2 E_5 = 0 \\ \partial_3 E_7 - E_4 = 0 \\ \partial_2 E_7 - \partial_1^2 E_6 = 0 \end{cases}$$

Entonces podemos afirmar que este sistema es completamente integrable.

A continuación consideramos el sistema,

$$(C_1) = \left\{ \begin{array}{lcr} a_1 & \equiv & \partial_3 E_2 - \partial_2^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_5 - 2E_6 \\ a_2 & \equiv & \partial_3 E_3 - \partial_2\partial_1^2 E_1 - x_2\partial_1^2 E_6 - E_7 \\ a_3 & \equiv & \partial_2 E_3 - \partial_1^2 E_2 \\ a_4 & \equiv & \partial_3 E_4 - \partial_1^4 E_1 + x_2\partial_1^2 E_7 \\ a_5 & \equiv & \partial_2 E_4 - \partial_1^2 E_3 \\ a_6 & \equiv & \partial_3 E_5 - E_2 \\ a_7 & \equiv & \partial_3 E_6 - \partial_1^2 E_2 \\ a_8 & \equiv & \partial_2 E_6 - \partial_1^2 E_5 \\ a_9 & \equiv & \partial_3 E_7 - E_4 \\ a_{10} & \equiv & \partial_2 E_7 - \partial_1^2 E_6 \end{array} \right.$$

En este sistema las incógnitas son $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$.
Igualamos a cero las expresiones anteriores obtenemos los primeros miembros de cada ecuación $a_i, i = 1, \cdots, 10$. *Vemos si el sistema* (C_1) *es completo. En este caso si lo es y Janet afirma que es completamente integrable entonces el conjunto de relaciones que obtenemos es,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_3 a_3 - \partial_2 a_2 = 0 \\ \partial_3 a_5 - \partial_2 a_4 = 0 \\ \partial_3 a_8 - \partial_2 a_7 = 0 \\ \partial_3 a_{10} - \partial_2 a_9 = 0 \end{array} \right.$$

Así consideramos el sistema,

$$(C_2) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} b_1 & \equiv & \partial_3 a_3 - \partial_2 a_2 \\ b_2 & \equiv & \partial_3 a_5 - \partial_2 a_4 \\ b_3 & \equiv & \partial_3 a_8 - \partial_2 a_7 \\ b_4 & \equiv & \partial_3 a_{10} - \partial_2 a_9 \end{array} \right.$$

y en este paso tenemos que parar ya que las ecuaciones son independientes, es decir engendran un módulo libre.

Hemos obtenido la siguiente resolución.

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^4 \longrightarrow \mathcal{D}^{10} \longrightarrow \mathcal{D}^7 \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

Ejemplo 4.3.12 *Sea el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_4} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_3} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_3} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \end{array} \right.$$

Si consideramos el orden monomial "ser más alto" tenemos un sistema en el que en toda ecuación se verifica que el término que aparecen en el primer miembro es más alto que el que aparece en el segundo.

Paso 1: Cálculo de las variables multiplicadoras

	Variables multiplicadoras				
$\partial_5\partial_4$	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_3$	x_5	•	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_2$	x_5	•	•	x_2	x_1
∂_4^2	•	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_4\partial_3$	•	•	x_3	x_2	x_1
$\partial_4\partial_2$	•	•	•	x_2	x_1

Paso 2: ¿El sistema es completo?

Como se verifica que,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_4\left(\partial_5\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_5\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_3\left(\partial_5\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,0,1)} \\ \partial_5\left(\partial_4^2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_5\left(\partial_4\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_4\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,2,0)} \\ \partial_5\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,2,0)} \\ \partial_3\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,1,0)} \end{array}\right.$$

entonces podemos afirmar que el sistema es completo.

Paso 3: ¿Sistema completamente integrable?

Como se verifican las siguientes relaciones,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_4 B - \partial_3 A + \partial_1 D = 0 \\ \partial_4 C - \partial_2 A + \partial_1 E = 0 \\ \partial_3 C - \partial_2 B - \partial_1 F = 0 \\ \partial_5 D - \partial_4 A + \partial_1 B = 0 \\ \partial_5 E - \partial_3 A + \partial_1 C = 0 \\ \partial_4 E - \partial_3 D + \partial_1 F = 0 \\ \partial_5 F - \partial_2 A + \partial_3 B + \partial_1 E = 0 \\ \partial_4 F - \partial_2 D + \partial_3 E = 0 \\ \partial_3 F - \partial_2 E = -\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_3^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} \end{array}\right.$$

este sistema no es completamente integrable, entonces tenemos que añadir esta expresión a nuestro sistema y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_4} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_3} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_3} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_2} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^3} & = & \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} \end{array}\right.$$

Volvemos a calcular las variables multiplicadoras de cada ecuación y obtenemos,

	Variables multiplicadoras				
$\partial_5\partial_4$	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_3$	x_5	•	x_3	x_2	x_1
$\partial_5\partial_2$	x_5	•	•	x_2	x_1
∂_4^2	•	x_4	x_3	x_2	x_1
$\partial_4\partial_3$	•	•	x_3	x_2	x_1
$\partial_4\partial_2$	•	•	•	x_2	x_1
∂_3^3	•	•	x_3	x_2	x_1

Vemos si este sistema es completo,

al verificarse que,

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_4\left(\partial_5\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_5\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_3\left(\partial_5\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,0,1)} \\ \partial_5\left(\partial_4^2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_5\left(\partial_4\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_4\partial_3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,2,0)} \\ \partial_5\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,1,1)} \\ \partial_4\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,0,2,0)} \\ \partial_3\left(\partial_4\partial_2\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,1,0)} \\ \partial_5\left(\partial_3^3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,0,1)} \\ \partial_4\left(\partial_3^3\right) & \in & \mathcal{C}_{(0,0,1,1,0)} \end{array}\right.$$

entonces podemos afirmar que el sistema es completo.

Veamos ahora si el sistema es completamente integrable, al verificarse que,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_4 B - \partial_3 A + \partial_1 D = 0 \\ \partial_4 C - \partial_2 A + \partial_1 E = 0 \\ \partial_3 C - \partial_2 B - \partial_1 F = 0 \\ \partial_5 D - \partial_4 A + \partial_1 B = 0 \\ \partial_5 E - \partial_3 A + \partial_1 C = 0 \\ \partial_4 E - \partial_3 D + \partial_1 F = 0 \\ \partial_5 F - \partial_2 A + \partial_3 B + \partial_1 E = 0 \\ \partial_4 F - \partial_2 D + \partial_3 E = 0 \\ \partial_3 F - \partial_2 E + G = 0 \\ \partial_5 G - \partial_3^2 B + \partial_{21} C - \partial_{31} E = 0 \\ \partial_4 G - \partial_3^2 E + \partial_{21} F = 0 \end{array}\right.$$

este sistema es completamente integrable.

Paso 4: Condiciones iniciales.

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_4} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_3} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_5 \partial x_2} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_3} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_4 \partial x_2} & = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^3} & = 0 \end{array}\right.$$

Esto determina

	Variables multiplicadoras				
∂_3^2	•	•	•	x_2	x_1
∂_3	•	•	•	x_2	x_1
1	•	•	•	x_2	x_1
∂_5	x_5	•	•	•	x_1
∂_4	•	•	•	•	x_1

por tanto las condiciones iniciales son

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & f_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & f_2(x_1, x_2) \\ u(x_1, x_2, 0, 0, 0) & = & f_3(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_5}(x_1, 0, 0, 0, x_5) & = & f_4(x_1, x_5) \\ \frac{\partial u}{\partial x_4}(x_1, 0, 0, 0, 0) & = & f_5(x_1) \end{array}\right.$$

4.4 Cálculo del $Ext^m_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}I, \mathcal{O}), m \geq 0$ para los sistemas de ecuaciones en forma canónica

4.4.1 Cálculo de $Ext^m_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}I, \mathcal{O})$, $m = 0$, $m = 1$

Denotamos por $\mathcal{O}$ el anillo de series de potencias con radio de convergencia mayor que cero en las variables $x_1, \cdots, x_n$ y con coeficientes en $\mathbf{C}$, es decir, $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$. Denotaremos por $\mathcal{D} = \mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ el anillo de los gérmenes de operadores diferenciales holomorfos lineales con coeficientes en $\mathcal{O}$.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de r ecuaciones y una incógnita, u, en forma canónica, completo y completamente integrable

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_1(u) & = & f_1 \\ P_2(u) & = & f_2 \\ & \vdots & \\ P_r(u) & = & f_r \end{array}\right.$$

con $P_i = \partial^{\alpha(i)} - \widehat{P}_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$ y todo monomio en $\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ de $\widehat{P}_i$ es anterior a $\alpha(i)$ (ver 3.1).

Consideramos el siguiente "comienzo de" resolución libre del $\mathcal{D}$-módulo $M_0 = \mathcal{D}/\mathcal{D}I$, siendo $I = \langle P_1, \cdots, P_r \rangle$,

$$\mathcal{D}^r \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{D} \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{con} \qquad \phi_0(Q_1, \cdots, Q_r) = \textstyle\sum_{i=1}^r Q_i P_i.$$

Denotemos por r_1 el número de relaciones[1] que obtenemos al verificar que el sistema es completamente integrable. Estas relaciones $\{\mathbf{R}_1, \cdots, \mathbf{R}_{r_1}\}$ (sicigias elementales) constituyen el sistema generador de $Ker(\phi_0)$ (ver 3.6.6).

Consideremos

$$\mathcal{D}^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^r \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{D} \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{con} \qquad \phi_1(Q_1, \cdots, Q_{r_1}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r_1} Q_i \mathbf{R}_i.$$

Aplicamos el funtor $Hom_{\mathcal{D}}(-, \mathcal{O})$ a la resolución reducida del $\mathcal{D}$-módulo M_0,

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\phi_0^*} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^r, \mathcal{O}) \xrightarrow{\phi_1^*} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{r_1}, \mathcal{O})$$

y obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\phi_0^*} \mathcal{O}^r \xrightarrow{\phi_1^*} \mathcal{O}^{r_1}$$

donde,

$$\phi_0^*(u) = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{pmatrix} (u), \forall u \in \mathcal{O} \quad \text{y} \quad \phi_1^*(f_1, \cdots, f_r) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} \forall (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{O}^r.$$

Vamos a calcular $Ext^0_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O})$, por definición es: $Ext^0_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O}) = Ker(\phi_0^*)$.

Si $u \in Ker(\phi_0^*)$ entonces $\phi_0^*(u) = 0$, es decir

$$P_1(u) = \cdots = P_r(u) = 0.$$

Así $Ext^0_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O})$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo,

$$\begin{cases} P_1(u) = 0 \\ \vdots \\ P_r(u) = 0. \end{cases}$$

Siempre es posible encontrar una solución de este tipo de sistemas ya que en 4.3.5 se ha desarrollado un método para calcular las soluciones de estos sistemas.

A continuación vamos a calcular el $Ext^1_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O})$, siendo por definición:

$$Ext^1_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O}) = \frac{Ker(\phi_1^*)}{Im(\phi_0^*)}.$$

[1] Recordemos que este número está bien definido pues depende únicamente del número de variables no multiplicadoras de cada ecuación P_i en el conjunto $\{P_1, \cdots, P_r\}$.

Si $(f_1, \cdots, f_r) \in Ker(\phi_1^*)$ tendremos que, $\phi_1^*(f_1, \cdots, f_r) = 0 \in \mathcal{O}^{r_1}$, y por tanto,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $(f_1, \cdots, f_r)$ verifican las "mismas relaciones que $(P_1, \cdots, P_r)$ y por tanto el sistema

$$\begin{cases} P_1(u) = f_1 \\ \vdots \\ P_r(u) = f_r \end{cases}$$

es completamente integrable, y de ahí por 4.3.5 tendremos que existe $\psi \in \mathcal{O}$ tal que $P_i(\psi) = f_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$, es decir $\phi_0^*(\psi) = (f_1, \cdots, f_r)$. Por tanto $(f_1, \cdots, f_r)$ pertenece a $Im(\phi_0^*)$ y así $\dfrac{Ker(\phi_1^*)}{Im(\phi_0^*)} = 0$.

Nota 4.4.1 *Si el sistema M_0 viene definido por un sistema completo y completamente integrable, en forma canónica, en varias incógnitas, entonces $Ext^1_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O}) = 0$, si más que "recopiar" la prueba que hemos hecho en el caso de una sola incógnita.*

4.4.2 Cálculo de $Ext^m_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}I, \mathcal{O})$, $m > 1$

Consideramos el conjunto de relaciones $\{\mathbf{R}_1, \cdots, \mathbf{R}_{r_1}\}$ como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, en las incógnitas E_i, homógeneo. A este sistema le asociamos el $\mathcal{D}$-módulo M_1 (conúcleo del morfismo ϕ_1)

$$\mathcal{D}^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^r \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{con} \qquad \phi_1(Q_1, \cdots, Q_{r_1}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r_1} Q_i \mathbf{R}_i.$$

Este sistema es completamente integrable (ver 3.6.2).

Denotemos por r_2 el número de relaciones que obtenemos al verificar que el sistema es completamente integrable. Estas relaciones $\{\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_{r_2}\}$ (sicigias elementales) constituyen el sistema generador de $Ker(\phi_1)$ (ver 3.6.6).

Consideremos

$$\mathcal{D}^{r_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{D}^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^r \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{donde } \phi_2(Q_1, \cdots, Q_{r_2}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r_2} Q_i \mathbf{S}_i.$$

Razonando de esta manera podemos construir la siguiente sucesión exacta, que es finita (ver 3.6.4),

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{D}^{r_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{D}^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^{r_0} \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{D} \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0.$$

Vamos a calcular $Ext^2_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O})$, para ello aplicamos el funtor $Hom_{\mathcal{D}}(-, \mathcal{O})$ a la resolución reducida del módulo M_0, calculada anteriormente, y obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\phi_0^*} \mathcal{O}^{r_0} \xrightarrow{\phi_1^*} \mathcal{O}^{r_1} \xrightarrow{\phi_2^*} \mathcal{O}^{r_2} \longrightarrow \cdots$$

Por definición, tenemos que,

$$Ext^2_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = \frac{ker(\phi_2^*)}{Im(\phi_1^*)}.$$

Vamos a calcular $Ext^1_{\mathcal{D}}(M_1,\mathcal{O})$ para ello aplicamos el funtor $Hom_{\mathcal{D}}(-,\mathcal{O})$ a la resolución reducida de la siguiente resolución del $\mathcal{D}$-módulo M_1,

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{D}^{r_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{D}^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^{r_0} \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

y obtenemos,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{r_0} \xrightarrow{\phi_1^*} \mathcal{O}^{r_1} \xrightarrow{\phi_2^*} \mathcal{O}^{r_2} \longrightarrow \cdots$$

así,

$$Ext^1_{\mathcal{D}}(M_1,\mathcal{O}) = \frac{ker(\phi_2^*)}{Im(\phi_1^*)},$$

es decir,

$$Ext^1_{\mathcal{D}}(M_1,\mathcal{O}) = Ext^2_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}).$$

Por tanto podemos afirmar que $Ext^2_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = 0$ (ver 4.4.1).

Proposición 4.4.2 *Con la notación anterior tenemos que,*

$$Ext^m_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = Ext^1_{\mathcal{D}}(M_{m-1},\mathcal{O}), \qquad m \geq 2.$$

Demostración. Se tiene que,

$$Ext^{m-i}_{\mathcal{D}}(M_i,\mathcal{O}) = Ext^{m-(i+1)}_{\mathcal{D}}(M_{i+1},\mathcal{O}), \qquad 0 \leq i \leq m-2,$$

y de ahí obtenemos el resultado que queremos. □

Teorema 4.4.3 *Con la notación anterior, se verifica que,*

$$Ext^m_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = 0, \text{ con } m \geq 1.$$

Demostración. Por la proposición 4.4.2 tenemos que

$$Ext^m_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = Ext^1_{\mathcal{D}}(M_{m-1},\mathcal{O}), \qquad m \geq 2.$$

Por 4.4.1, tenemos que $Ext^1_{\mathcal{D}}(M_{m-1},\mathcal{O}) = 0$, con $m \geq 1$. Por otra parte como también hemos demostrado, en 4.4.1, que $Ext^1_{\mathcal{D}}(M_0,\mathcal{O}) = 0$ así podemos concluir el resultado que queremos. □

Capítulo 5

δ-Bases de Gröbner

Los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales en forma canónica, son sistemas cuyos primeros miembros están formados por operadores diferenciales que pertenecen al anillo $\mathbf{k}[\partial_1, \cdots, \partial_n]$. Nuestro próximo objetivo es generalizar algunos resultados vistos anteriormente, a sistemas cuyos primeros miembros sean operadores que pertenezcan a $A_n(\mathbf{k})$ y a otros anillos de operadores diferenciales. Con este fin adaptamos al caso diferencial las nociones introducidas en [3], [40] y [95], para el caso de un anillo de polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo noetheriano. La noción de δ-base de Gröbner que introduciremos en este capítulo es equivalente a la dada por M. Insa y F. Pauer en [41]. Sin embargo, en nuestro caso, los anillos de operadores diferenciales considerados son más generales que los de [41].

5.1 δ-exponentes y δ-bases de Gröbner

Consideraremos una sub-$\mathbf{k}$-álgebra $\mathcal{H}$ (aquí $\mathbf{k}$ es un cuerpo cualquiera), noetheriana, del cuerpo $\mathbf{k}((X)) = \mathbf{k}((x_1, \cdots, x_n))$ de fracciones del anillo de series formales $\mathbf{k}[[X]] = \mathbf{k}[[x_1, \cdots, x_n]]$ en n variables. Aparte de las $\mathbf{k}$-álgebras utilizadas en [41], los casos $\mathcal{H} = \mathbf{k}[[X]][x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ y $\mathcal{H} = \mathbf{k}\{X\}[x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ (cuando $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$) son especialmente interesantes pues se trata de un primer paso para extender los resultados de [7] y [8] a anillos de operadores diferenciales con coeficientes en $\mathcal{H}$.

Supondremos también que la sub-$\mathbf{k}$-álgebra $\mathcal{H} \subset \mathbf{k}((X))$ es estable, por la acción de las derivaciones $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Notaremos $\mathbf{D}$ (o $\mathbf{D}_{\mathcal{H}}$) la sub-$\mathbf{k}$-álgebra de $\mathbf{k}((X))[\partial] = \mathbf{k}((x_1, \cdots, x_n))[\partial_1, \cdots, \partial_n]$, generada por $\mathcal{H}$ y $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$, es decir la $\mathbf{k}$-álgebra

$$\mathbf{D} = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} p_\alpha \partial^\alpha \in \mathbf{k}((X))[\partial] \mid p_\alpha \in \mathcal{H}, \forall \alpha \right\}.$$

Denotaremos también a dicha $\mathbf{k}$-álgebra $\mathbf{D}$ por $\mathcal{H}[\partial]$.

Definición 5.1.1 *Si $P \in \mathbf{D}$, siendo $P = \sum p_\alpha \partial^\alpha$, donde $p_\alpha \in \mathcal{H}$, llamaremos δ-diagrama de Newton de P al conjunto*

$$\mathcal{N}^\delta(P) = \{\alpha \in \mathbf{N}^n : p_\alpha \neq 0\}.$$

Ejemplo 5.1.2 *Sea $P \in A_3(\mathbf{k})$, donde*

$$P = (2x_1^2 + 2x_2)\partial_1 + (x_3 + 2)\partial_2 + (6x_3^2 + 3x_1)\partial_1\partial_3.$$

En este caso,

$$\mathcal{N}^\delta(P) = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)\}.$$

Definición 5.1.3 *Con la notación anterior, llamaremos δ-exponente, (respecto de un orden monomial $<$), de un operador P no nulo y lo denotaremos por* $\exp_<^\delta(P)$, *a la siguiente expresión*

$$\exp_<^\delta(P) = \text{máx}_< \left(\mathcal{N}^\delta(P)\right).$$

Ejemplo 5.1.4 *Consideremos en* $\mathbf{N}^3$ *el orden lexicográfico con* $\partial_1 > \partial_2 > \partial_3$, *entonces en el ejemplo anterior tendremos*

$$\exp_<^\delta(P) = (1,0,1).$$

Proposición 5.1.5 *Dados* $P, Q \in \mathbf{D}$, *entonces se verifica que:*

1. $\exp_<^\delta(P+Q) \leq \text{máx}_< \left\{\exp_<^\delta(P), \exp_<^\delta(Q)\right\}$.
2. $\exp_<^\delta(PQ) = \exp_<^\delta(P) + \exp_<^\delta(Q)$ *y* $\exp_<^\delta([P,Q]) < \exp_<^\delta(PQ)$.

Demostración. Sean

$$P = \sum p_\alpha \partial^\alpha \qquad \text{y} \qquad Q = \sum q_\beta \partial^\beta,$$

supongamos que $\exp_<^\delta(P) = \alpha_0$ y $\exp_<^\delta(Q) = \beta_0$, luego podemos escribir

$$P = p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha \qquad \text{y} \qquad Q = q_{\beta_0}\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0} q_\beta \partial^\beta.$$

1. Veamos que $\exp_<^\delta(P+Q) \leq \text{máx}\left\{\exp_<^\delta(P), \exp_<^\delta(Q)\right\}$.

$$P+Q = p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha + q_{\beta_0}\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0} q_\beta\partial^\beta$$

luego,

$$\exp_<^\delta(P+Q) \leq \text{máx}_< \{\alpha_0, \beta_0\} = \text{máx}_< \left\{ \mathit{exp}_<^\delta(P), \exp_<^\delta(Q)\right\}.$$

2. La demostración la haremos por inducción sobre $\exp_<^\delta(P) + \exp_<^\delta(Q)$.

   - Supongamos que $\exp_<^\delta(P) = \underline{0}$ ó $\exp_<^\delta(Q) = \underline{0}$, siendo $\underline{0} = (0, \cdots, 0)$. En ese caso, se verifica que $P = p \in \mathcal{H}$ o $Q = q \in \mathcal{H}$.
   Consideremos el caso, $\exp_<^\delta(P) = \underline{0}$, así tendremos que,

   $$\exp_<^\delta(PQ) = \exp_<^\delta(pQ) = \exp_<^\delta\left(\sum_\beta pq_\beta\partial^\beta\right) = \exp_<^\delta(Q) = \exp_<^\delta(P) + \exp_<^\delta(Q).$$

   Así que vamos a suponer que $\exp_<^\delta(P) > \underline{0}$ y $\exp_<^\delta(Q) > \underline{0}$.
   - Supongamos el resultado cierto para todo par de operadores P' y Q' tales que $\exp_<^\delta(P') + \exp_<^\delta(Q') < \gamma$, siendo $\gamma > \underline{0}$.
   - Sean $P, Q \in \mathbf{D}$ tales que $\exp_<^\delta(P) + \exp_<^\delta(Q) = \gamma$, siendo, $\exp_<^\delta(P) = \alpha_0$ y $\exp_<^\delta(Q) = \beta_0$, entonces,

   $$PQ = \left(p_{\alpha_0}\underline{\partial}^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha\right)\left(q_{\beta_0}\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0} q_\beta\partial^\beta\right) =$$

$$= p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0}q_{\beta_0}\partial^{\beta_0} + p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0}\left(\sum_{\beta<\beta_0} q_\beta\partial^\beta\right) +$$

$$\left(\sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha\right) q_{\beta_0}\partial^{\beta_0} + \left(\sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha\right)\left(\sum_{\beta<\beta_0} q_\beta\partial^\beta\right) =$$

$$= p_{\alpha_0}\left(\partial^{\alpha_0}q_{\beta_0}\right)\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0} p_{\alpha_0}\left(\partial^{\alpha_0}q_\beta\right)\partial^\beta +$$

$$+ \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\left(\partial^\alpha q_{\beta_0}\right)\partial^{\beta_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0}\sum_{\beta<\beta_0} p_\alpha\left(\partial^\alpha q_\beta\right)\partial^\beta,$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha_0}q_{\beta_0} &= q_{\beta_0}\partial^{\alpha_0} + S_1, && \text{donde } \exp^\delta_<(S_1) < \alpha_0,\\
\partial^{\alpha_0}q_\beta &= q_\beta\partial^{\alpha_0} + S_2, && \text{donde } \exp^\delta_<(S_2) < \alpha_0,\\
\partial^{\alpha}q_{\beta_0} &= q_{\beta_0}\partial^{\alpha} + S_3, && \text{donde } \exp^\delta_<(S_3) < \alpha,\\
\partial^{\alpha}q_\beta &= q_\beta\partial^{\alpha} + S_4, && \text{donde } \exp^\delta_<(S_4) < \alpha.
\end{aligned}$$

Continuando la expresión anterior, tendremos que:

$$PQ = p_{\alpha_0}\left(q_{\beta_0}\partial^{\alpha_0} + S_1\right)\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0} p_{\alpha_0}\left(q_\beta\partial^{\alpha_0} + S_2\right)\partial^\beta +$$

$$+ \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\left(q_{\beta_0}\partial^\alpha + S_3\right)\partial^{\beta_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0}\sum_{\beta<\beta_0} p_\alpha\left(q_\beta\partial^\alpha + S_4\right)\partial^\beta =$$

$$= p_{\alpha_0}q_{\beta_0}\partial^{\alpha_0+\beta_0} + p_{\alpha_0}S_1\partial^{\beta_0} + \sum_{\beta<\beta_0}\left(p_{\alpha_0}q_\beta\partial^{\alpha_0+\beta} + p_{\alpha_0}S_2\partial^\beta\right) +$$

$$+ \sum_{\alpha<\alpha_0}\left(p_\alpha q_{\beta_0}\partial^{\alpha+\beta_0} + p_\alpha S_3\partial^{\beta_0}\right) + \sum_{\alpha<\alpha_0}\sum_{\beta<\beta_0} p_\alpha q_\beta\partial^{\alpha+\beta} +$$

$$+ \sum_{\alpha<\alpha_0}\sum_{\beta<\beta_0} p_\alpha S_4\partial^\beta,$$

donde, aplicando la hipótesis de inducción, se verifica

$$\begin{aligned}
\exp^\delta_<\left(S_1\partial^{\beta_0}\right) &= \exp^\delta_<(S_1) + \beta_0 < \alpha_0 + \beta_0,\\
\exp^\delta_<\left(S_2\partial^{\beta}\right) &= \exp^\delta_<(S_2) + \beta < \alpha_0 + \beta_0,\\
\exp^\delta_<\left(S_3\partial^{\beta_0}\right) &= \exp^\delta_<(S_3) + \beta_0 < \alpha_0 + \beta_0,\\
\exp^\delta_<\left(S_4\partial^{\beta}\right) &= \exp^\delta_<(S_4) + \beta < \alpha + \beta < \alpha_0 + \beta_0.
\end{aligned}$$

Luego, podemos afirmar que,

$$\exp^\delta_<(PQ) = \exp^\delta_<(P) + \exp^\delta_<(Q).$$

Si efectuamos ahora el producto QP, tendremos que,

$$QP = q_{\beta_0}p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0+\beta_0} + S$$

donde $\exp^\delta_<(S) < \alpha_0 + \beta_0$. Así,

$$[P, Q] = PQ - QP = M$$

donde $\exp^\delta_<(M) < \alpha_0 + \beta_0$, por lo tanto, podemos afirmar que

$$\exp^\delta_<([P, Q]) < \alpha_0 + \beta_0 = \exp^\delta_<(PQ).$$

□

Definición 5.1.6 *Dado un orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^n$, llamaremos δ-coeficiente, (respecto de $<$), de un operador P no nulo y lo denotaremos por $c^{\delta}_{<}(P)$ a la siguiente expresión*

$$c^{\delta}_{<}(P) = p_{\exp^{\delta}_{<}(P)}.$$

Cuando no haya confusión con el orden que estemos utilizando simplemente escribiremos $c^{\delta}(P)$.

Ejemplo 5.1.7 *En el ejemplo anterior, tenemos que $c^{\delta}(P) = 6x_3^2 + 3x_1$.*

Proposición 5.1.8 *Sean $P, Q \in \mathbf{D}$. Si $\exp^{\delta}_{<}(P) = \exp^{\delta}_{<}(Q)$, entonces,*

1. *Si $c^{\delta}(P) + c^{\delta}(Q) \neq 0$, entonces $\exp^{\delta}_{<}(P+Q) = \exp^{\delta}_{<}(P) = \exp^{\delta}_{<}(Q)$.*
2. *Si $c^{\delta}(P) + c^{\delta}(Q) = 0$, entonces $\exp^{\delta}_{<}(P+Q) < \exp^{\delta}_{<}(P) = \exp^{\delta}_{<}(Q)$.*

Demostración. Supongamos que $\exp^{\delta}_{<}(P) = \alpha_0 = \exp^{\delta}_{<}(Q)$, $c^{\delta}(P) = p_{\alpha_0}$ y $c^{\delta}(Q) = q_{\alpha_0}$. Así, podemos escribir,

$$P = p_{\alpha_0}\underline{\partial}^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha \qquad \text{y} \qquad Q = q_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\beta<\alpha_0} q_\beta \partial^\beta,$$

por tanto,

$$P + Q = (p_{\alpha_0} + q_{\alpha_0})\,\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha + \sum_{\beta<\alpha_0} q_\beta\partial^\beta,$$

y pueden ocurrir dos casos:

1. Si $p_{\alpha_0} + q_{\alpha_0} \neq 0$, tendremos que
$$\exp^{\delta}_{<}(P+Q) = \alpha_0 = \exp^{\delta}_{<}(P) = \exp^{\delta}_{<}(Q).$$
2. Si $p_{\alpha_0} + q_{\alpha_0} = 0$, entonces
$$\exp^{\delta}_{<}(P+Q) < \alpha_0 = \exp^{\delta}_{<}(P) = \exp^{\delta}_{<}(Q).$$

□

Sea I un ideal en $\mathbf{D}$. Definimos

$$\mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I) = \left\{exp^{\delta}_{<}(P) : \forall P \in I,\ P \neq 0\right\}.$$

Lema 5.1.9 *Con la notación anterior se verifica que:*

$$\mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I) + \mathbf{N}^n = \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I).$$

Demostración. Se verifica que $\mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I) \subseteq \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I) + \mathbf{N}^n$. Veamos la inclusión recíproca, sea $(\alpha_0, \gamma_0) \in \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I) \times \mathbf{N}^n$, entonces existe $P \in I$ tal que $\exp^{\delta}_{<}(P) = \alpha_0$. Sea $Q = \underline{\partial}^{\gamma_0} \in \mathbf{D}$, entonces, por la proposición 5.1.5, se verifica

$$\exp^{\delta}_{<}(QP) = \exp^{\delta}_{<}(P) + \exp^{\delta}_{<}(Q),$$

tendremos

$$\alpha_0 + \gamma_0 = \exp^{\delta}_{<}(P) + \exp^{\delta}_{<}(Q) = \exp^{\delta}_{<}(QP) \in \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I),$$

al ser I un ideal a la izquierda en $\mathbf{D}$. □

Proposición 5.1.10 *Con la notación anterior* $\mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I)$ *está finitamente generado, es decir existen* $\alpha^1, \cdots, \alpha^m \in \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I)$ *tal que*

$$\bigcup_{i=1}^{m} (\alpha^i + \mathbf{N}^n) = \mathrm{Exp}^{\delta}_{<}(I).$$

Demostración. Basta aplicar el lema de Dickson (ver 1.4.6). □

Notación 5.1.11 *Vamos a considerar el anillo* $\mathcal{H}[\zeta]$, *donde* $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ *y las variables* ζ_i *son conmutativas, es decir, verifican:*

$$[\zeta_i, \zeta_j] = [\zeta_i, x_j] = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Definición 5.1.12 *Sea* $P = \sum p_\alpha \underline{\partial}^\alpha$, *un elemento no nulo del anillo* $\mathbf{D}$. *Se llama δ-forma inicial de P, y se denota por* $in^{\delta}(P)$, *al monomio*[1]

$$in^{\delta}(P) = c^{\delta}(P)\zeta^{\exp^{\delta}_{<}(P)}.$$

Ejemplo 5.1.13 *En el ejemplo 5.1.2, tenemos que*

$$in^{\delta}(P) = (6x_3^2 + 3x_1)\zeta_1\zeta_3.$$

Definición 5.1.14 *Sea I un ideal no nulo en $\mathbf{D}$, se llama δ-ideal inicial de I, y se denota* $in^{\delta}(I)$, *al ideal engendrado por* $\{in^{\delta}(P) : P \in I \setminus \{0\}\}$ *en* $\mathcal{H}[\zeta]$.

Observación. Si $f \in \mathcal{H}[\zeta]$ entonces podemos escribir,

$$f = \sum_{\alpha} f_\alpha \zeta^\alpha$$

donde $f_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo α.

Vamos a ver a continuación que $in^{\delta}(I)$ es un ideal ζ-monomial. Más concretamente,

Proposición 5.1.15 *Sea I un ideal no nulo en $\mathbf{D}$, entonces se verifica que:*

[1] se trata de un monomio en ζ cuyo coeficiente es un elemento de $\mathcal{H}$.

$$f = \textstyle\sum_\alpha f_\alpha \zeta^\alpha \in in^\delta(I) \Longleftrightarrow f_\alpha \zeta^\alpha \in in^\delta(I) \text{ } para \text{ } todo \text{ } \alpha.$$

Demostración. $\Longleftarrow$ Obvio.

$\Longrightarrow$ Sea $f \in in^\delta(I)$, entonces tendremos que,

$$f = \sum_i H_i(X,\zeta) in^\delta(P_i)$$

donde, $P_i \in I$, para cada i y cada $H_i(x,\zeta)$ puede escribirse de la forma,

$$H_i(x,\zeta) = \sum_\beta h^i_\beta \zeta^\beta.$$

Así podemos escribir,

$$f = \sum_i \left(\sum_\beta h^i_\beta \zeta^\beta \right) in^\delta(P_i).$$

Sea $in^\delta(P_i) = c^\delta(P_i)\zeta^{\alpha^i}$, entonces tenemos,

$$f = \sum_i \left(\sum_\beta h^i_\beta \zeta^\beta \right) c^\delta(P_i)\zeta^{\alpha^i} = \sum_{i,\beta} h^i_\beta c^\delta(P_i) \zeta^{\beta+\alpha^i}$$

por tanto, para cada α, tenemos que,

$$f_\alpha \in \langle c^\delta(P_i) \mid \alpha \in \alpha^i + \mathbf{N}^n \rangle.$$

Sean $i_0, \cdots, i_s$ los subíndices tales que,

$$f_\alpha = \sum_{j=0}^s q_{i_j} c^\delta(P_{i_j})$$

con $\alpha^{i_j} + \beta^{i_j} = \alpha$.

Construimos el siguiente operador, perteneciente a I,

$$P_\alpha = \sum_{j=0}^s q_{i_j} \partial^{\beta^{i_j}} P_{i_j}.$$

Tenemos que,

$$P_\alpha = \sum_{j=0}^s q_{i_j} \partial^{\beta^{i_j}} \left(c^\delta(P_{i_j}) \partial^{\alpha^{i_j}} + \widehat{P_{i_j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^s q_{i_j} \left(c^\delta(P_{i_j}) \partial^{\beta^{i_j}} + [c^\delta(P_{i_j}), \partial^{\beta^{i_j}}] \right) \partial^{\alpha^{i_j}} + \sum_{j=0}^s q_{i_j} \partial^{\beta^{i_j}} \widehat{P_{i_j}} =$$

$$= \sum_{j=0}^s q_{i_j} c^\delta(P_{i_j}) \partial^{\beta^{i_j}+\alpha^{i_j}} + \sum_{j=0}^s q_{i_j} [c^\delta(P_{i_j}), \partial^{\beta^{i_j}}] \partial^{\alpha^{i_j}} + \sum_{j=0}^s q_{i_j} \partial^{\beta^{i_j}} \widehat{P_{i_j}},$$

donde

$\exp^\delta \left(\sum_{j=0}^s q_{i_j} c^\delta(P_{i_j}) \partial^{\beta^{i_j}+\alpha^{i_j}} \right) = \alpha,$
$\exp^\delta \left(\sum_{j=0}^s q_{i_j} [c^\delta(P_{i_j}), \partial^{\beta^{i_j}}] \partial^{\alpha^{i_j}} \right) < \beta^{i_j} + \alpha^{i_j} = \alpha$ y

$\exp^\delta\left(\sum_{j=0}^{s} q_{i_j}\partial^{\beta^{i_j}}\widehat{P_{i_j}}\right) < \beta^{i_j} + \alpha^{i_j} = \alpha.$

Por tanto,

$$\exp^\delta(P_\alpha) = \alpha \qquad \text{y} \qquad c^\delta(P_\alpha) = \sum_{j=0}^{s} q_{i_j} c^\delta(P_{i_j})$$

es decir,

$$in^\delta(P_\alpha) = \sum_{j=0}^{s} q_{i_j} c^\delta(P_{i_j})\zeta^\alpha.$$

Así podemos afirmar que para cada $f_\alpha\zeta^\alpha$ existe $P_\alpha \in I$ tal que $in^\delta(P_\alpha) = f_\alpha\zeta^\alpha$ y de ahí el resultado que queremos. □

Dado $P \in \mathbf{D}$, cuando no haya riesgo de confusión escribiremos $\exp^\delta(P)$ en lugar de $\exp^\delta_<(P)$.

A continuación vamos a definir el concepto de δ-exponente de un elemento $f \in \mathcal{H}[\zeta]$.

Definición 5.1.16 *Si $f \in \mathcal{H}[\zeta]$, siendo $f = \sum f_\alpha\zeta^\alpha$, donde $p_\alpha \in \mathcal{H}$, llamaremos δ-diagrama de Newton de f al conjunto*

$$\mathcal{N}^\delta(f) = \{\alpha \in \mathbf{N}^n : f_\alpha \neq 0\}.$$

Definición 5.1.17 *Con la notación anterior, llamaremos δ-exponente, (respecto de $<$), de $f \in \mathcal{H}[\zeta]$ con $f \neq 0$ y lo denotaremos por $\exp^\delta_<(f)$, a la siguiente expresión*

$$\exp^\delta_<(f) = m\acute{a}x_<\left(\mathcal{N}^\delta(f)\right).$$

Cuando no haya riesgo de confusión denotaremos $\exp^\delta(f)$ en vez de $\exp^\delta_<(f)$.

En particular, dado $P \in \mathbf{D}$ tendremos que $in^\delta(P) \in \mathcal{H}[\zeta]$ entonces, respecto del mismo orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^n$, tenemos que,

$$\exp^\delta(in^\delta(P)) = \exp^\delta(P).$$

Vamos a dar la siguiente definición,

Definición 5.1.18 *Dado un ideal $I \subseteq \mathbf{D}$, definimos*

$$\mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I)) = \left\{\exp^\delta(F) : F \in in^\delta(I)\right\} \subseteq \mathbf{N}^n.$$

Cabe preguntarse la relación existente entre $\mathrm{Exp}^\delta(I)$ y $\mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I))$, pues bien ese es el objetivo que tenemos a continuación,

Proposición 5.1.19 *Con la notación anterior se verifica* $\mathrm{Exp}^\delta(I) = \mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I))$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathrm{Exp}^\delta(I)$ entonces existirá $P \in I$ tal que $\exp^\delta(P) = \alpha$, pero entonces también ocurrirá que, $in^\delta(P) \in in^\delta(I)$, con $\exp^\delta(in^\delta(P)) = \alpha$ y eso quiere decir que $\alpha \in \mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I))$, luego,

$$\mathrm{Exp}^\delta(I) \subseteq \mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I)).$$

Para ver la inclusión recíproca, sea $\alpha \in \mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I))$ entonces existe $F \in in^\delta(I)$ tal que $\exp^\delta(F) = \alpha$.

Como $in^\delta(I)$ es un ideal homogéneo respecto de las variables $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, podemos suponer que F es ζ-homogéneo en $in^\delta(I)$ tal que $\exp^\delta(F) = \alpha$, ya que, si existe $G \in in^\delta(I)$, tal que $\exp^\delta(G) = \alpha$, entonces tendremos que,

$$G = G_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} G_\beta \zeta^\beta, \quad G_\alpha \neq 0$$

ó

$$G = \sum_{|\beta| = |\alpha|} G_\beta \zeta^\beta + \sum_{|\beta| < |\alpha|} G_\beta \zeta^\beta$$

y al ser $in^\delta(I)$ un ideal monomial[2], tendremos, $\sum_{|\beta|=|\alpha|} G_\beta \zeta^\beta \in in^\delta(I)$ y $\sum_{|\beta|<|\alpha|} G_\beta \zeta^\beta \in in^\delta(I)$ así podemos considerar,

$$F = \sum_i H_i in^\delta(P_i)$$

donde, $P_i \in I$, $in^\delta(P_i) = c^\delta(P_i)\zeta^{\alpha_i}$, $|\alpha_i| = d_i$ y los polinomios H_i son homogéneos en ζ de grado D_i, así

$$H_i = \sum_\beta H^i_\beta \zeta^\beta$$

donde $D_i + d_i = |\alpha|$.

Construimos el siguiente operador, perteneciente a I,

$$P_F = \sum_i H_i(X, \partial) P_i = \sum_i \left(\sum_\beta H^i_\beta \partial^\beta \right) \left(c^\delta(P_i)\partial^{\alpha_i} + \widehat{P}_i \right) =$$

$$= \sum_i \left(\sum_\beta H^i_\beta \partial^\beta c^\delta(P_i)\partial^{\alpha_i} + \sum_\beta H^i_\beta \partial^\beta \widehat{P}_i \right) =$$

$$= \sum_i \left(\sum_\beta H^i_\beta \left(c^\delta(P_i)\partial^\beta + [c^\delta(P_i), \partial^\beta] \right) \partial^{\alpha_i} + \sum_\beta H^i_\beta \partial^\beta \widehat{P}_i \right) =$$

$$= \sum_{i,\beta} H^i_\beta c^\delta(P_i)\partial^{\beta+\alpha_i} + \sum_{i,\beta} H^i_\beta [c^\delta(P_i), \partial^\beta]\partial^{\alpha_i} + \sum_{i,\beta} H^i_\beta \partial^\beta \widehat{P}_i$$

donde,

$\exp^\delta \left(\sum_{i,\beta} H^i_\beta c^\delta(P_i)\partial^{\beta+\alpha_i} = \alpha \right)$,
$\exp^\delta \left(\sum_{i,\beta} H^i_\beta c^\delta(P_i)\partial^{\beta+\alpha_i} \right) < \beta + \alpha^i = \alpha$ y
$\exp^\delta \left(\sum_{i,\beta} H^i_\beta \partial^\beta \widehat{P}_i \right) < \beta + \alpha^i = \alpha$.

[2] Se trata de un ideal monomial en ζ con coeficientes en el dominio de integridad $\mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n]$.

Por tanto,

$$in^\delta(P_F) = \sum_{\beta+\alpha_i} H^i_\beta c^\delta(P_i)\zeta^\alpha = c^\delta(F)\zeta^{\exp^\delta(F)}.$$

Así podemos afirmar que, dado $\alpha \in \mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I))$ existe $P_F \in I$ tal que $\exp^\delta(P_F) = \alpha$, luego,

$$\mathrm{Exp}^\delta(in^\delta(I)) \subseteq \mathrm{Exp}^\delta(I)$$

y de ahí la igualdad. □

Proposición 5.1.20 *Sean $P, Q \in \mathbf{D}$, entonces se verifica que:*

$$in^\delta(PQ) = in^\delta(P)in^\delta(Q).$$

Demostración. Sean

$$P = \sum_\alpha p_\alpha \partial^\alpha, \qquad \text{donde} \qquad \exp^\delta(P) = \alpha_0, \quad c^\delta(P) = p_{\alpha_0}$$

y

$$Q = \sum_\beta q_\beta \partial^\beta, \qquad \text{donde} \qquad \exp^\delta(Q) = \beta_0, \quad c^\delta(Q) = q_{\beta_0},$$

entonces, haciendo los mismos cálculos que hemos hecho en la demostración de la proposición 5.1.5, tenemos que,

$$in^\delta(PQ) = p_{\alpha_0} q_{\beta_0} \zeta^{\exp^\delta(P)+\exp^\delta(Q)} = p_{\alpha_0}\zeta^{\exp^\delta(P)} q_{\beta_0}\zeta^{\exp^\delta(Q)} =$$
$$c^\delta(P)\zeta^{\exp^\delta(P)} c^\delta(Q)\zeta^{\exp^\delta(Q)} = in^\delta(P)in^\delta(Q).$$

□

Observación. Si $I = \langle P_1, \cdots, P_m\rangle$ entonces siempre se verifica $\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_m)\rangle \subseteq in^\delta(I)$. El recíproco no es cierto en general, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.21 *Sea $I = \langle P_1, P_2\rangle$ el ideal de $\mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$ generado por P_1 y P_2, donde $P_1 = x_1\partial_1$ y $P_2 = x_1\partial_2 + x_2$, entonces* [3]

$$\exp^\delta(P_1) = (1,0), \qquad c^\delta(P_1) = x_1, \qquad in^\delta(P_1) = x_1\zeta_1,$$

y

$$\exp^\delta_<(P_2) = (0,1), \qquad c^\delta(P_2) = x_1, \qquad in^\delta(P_2) = x_1\zeta_2,$$

de donde,

$$\langle in^\delta(P_1), in^\delta(P_2)\rangle = \langle x_1\zeta_1, x_1\zeta_2\rangle.$$

Sea

$$P_3 = \partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 = -x_2\partial_1 - \partial_2 \in I$$

se tiene,

$$\exp^\delta_<(P_3) = (1,0), \qquad c^\delta(P_3) = -x_2, \qquad in^\delta(P_3) = -x_2\zeta_1$$

donde $-x_2\zeta_1 \notin \langle x_1\zeta_1, x_1\zeta_2\rangle$.

[3] respecto del orden lexicográfico en $\mathbf{N}^2$ con $\partial_1 > \partial_2$.

Definición 5.1.22 *Con la notación anterior diremos que un subconjunto* $\{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq I$ *forma una δ-base de Gröbner para I, respecto del orden $<$ en $\mathbf{N}^n$, si se verifica que:*

$$in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_m)\rangle.$$

Ejemplo 5.1.23 *Sea* $I = \langle P_1\rangle \subseteq \mathbf{D}$ *donde* $\exp^\delta(P_1) = \alpha_0$ *y* $c^\delta(P_1) = p_{\alpha_0}$, *por tanto* $in^\delta(P_1) = p_{\alpha_0}\zeta^{\alpha_0}$. *Se verifica que para todo* $P \in I$, *se tendrá que* $P = QP_1$ *con* $Q \in \mathbf{D}$.
Por lo tanto,

$$in^\delta(P) = in^\delta(QP_1) = in^\delta(Q)in^\delta(P_1) \in \langle in^\delta(P_1)\rangle \subseteq B[\zeta].$$

Por tanto, $\{P_1\}$ *es una δ-base de Gröbner de I.*

Observación. Si en lugar del anillo $\mathbf{D}$ trabajásemos en el anillo $\mathbf{k}[\underline{\partial}]$, una δ-base de Gröbner de un ideal de $\mathbf{k}[\partial]$, respecto del orden $<$ en $\mathbf{N}^n$, es una base de Gröbner del mismo ideal y viceversa (ver 1.5.6).

Ejemplo 5.1.24 *El conjunto* $\{\partial_1 + \partial_2, \partial_1 - \partial_2\} \subseteq \mathbf{D}$ *no es una δ-base de Gröbner del ideal que genera, respecto del lexicográfico con* $\partial_1 > \partial_2$ *ya que,* $2\partial_2 \in \langle \partial_1 + \partial_2, \partial_1 - \partial_2\rangle$ *y sin embargo* $in^\delta(2\partial_2) \notin \langle in^\delta(\partial_1 + \partial_2), in^\delta(\partial_1 - \partial_2)\rangle$. *Tampoco es una base de Gröbner en* $\mathbf{k}[\partial]$.

Proposición 5.1.25 *Cada ideal I no nulo de $\mathbf{D}$ tiene una δ-base de Gröbner.*

Demostración. Dado un ideal no nulo I de $\mathbf{D}$, tenemos que $in^\delta(I)$ es un ideal ζ-monomial en $\mathcal{H}[\zeta]$, (ver 5.1.19) y al ser este anillo noetheriano, tendremos que $in^\delta(I)$ es finitamente generado, es decir, existen $p_1\zeta^{\alpha^1}, \cdots, p_m\zeta^{\alpha^m} \in \mathcal{H}[\zeta]$ tales que

$$in^\delta(I) = \langle p_1\zeta^{\alpha^1}, \cdots, p_m\zeta^{\alpha^m}\rangle,$$

ya que en un anillo noetheriano, de cualquier conjunto que genera un ideal se puede extraer un conjunto finito que genera el mismo ideal. Siguiendo la misma demostración de la proposición 5.1.15, tenemos que para cada $p_i(\underline{x})\zeta^{\alpha^i}$ con $i = 1, \cdots, m$, existe $P_i \in I$ tales que $in^\delta(P_i) = p_i\zeta^{\alpha^i}$. Si llamamos

$$G = \{P_1, \cdots, P_m\},$$

entonces tenemos que,

$$in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_m)\rangle,$$

y de aquí que G sea una δ-base de Gröbner de I. □

Notación 5.1.26 *Sea F un subconjunto no vacío en $\mathbf{D}$ y $\alpha \in \mathbf{N}^n$, se denota*

$$K(\alpha, F) = \left\{c^\delta(P) \,|P \in F,\, \alpha \in \exp^\delta(P) + \mathbf{N}^n\right\}.$$

Notación 5.1.27 *Se denota por $C(\alpha, F)$ al ideal, en $\mathcal{H}$, generado por el conjunto $K(\alpha, F)$, es decir,*

$$C(\alpha, F) = \langle K(\alpha, F)\rangle \subseteq \mathcal{H}.$$

Por convenio, si $K(\alpha, F) = \emptyset$ entonces $C(\alpha, F) = \{0\}$.

Si $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$, notaremos habitualmente $K(\alpha; P_1, \cdots, P_r)$ y $C(\alpha; P_1, \cdots, P_r)$ en lugar de $K(\alpha, F)$ y $C(\alpha, F)$ respectivamente.

Ejemplo 5.1.28 *Sea* $F = \{P_1, P_2\} \subseteq A_2(\mathbf{k})$, *siendo* $P_1 = a(x_1)\partial_1^2 + b(x_2)\partial_1$ *y* $P_2 = c(x_2)\partial_2^2 + e(x_1)\partial_2$ *con* $a(x_1), e(x_1) \in \mathbf{k}[x_1]$, *siendo* $a(x_1) \neq 0$ *y* $b(x_2), c(x_2) \in \mathbf{k}[x_2]$ *con* $c(x_2) \neq 0$. *Consideramos el orden lexicográfico en* $\mathbf{N}^2$ *con* $\partial_1 > \partial_2$. *Entonces* $\exp^\delta(P_1) = (2,0)$ *y* $\exp^\delta(P_2) = (0,2)$. *Así*

$$C((1,1),F) = \{0\}, \text{ ya que } K((1,1),F) = \emptyset.$$

$$C((2,2),F) = \langle a(x_1), c(x_2)\rangle, \quad C((2,0),F) = \langle a(x_1)\rangle, \quad C((0,2),F) = \langle c(x_2)\rangle.$$

Proposición 5.1.29 *Con la notación anterior se verifica:*

1. *Si* $\beta \in \alpha + \mathbf{N}^n$ *entonces* $K(\alpha,F) \subseteq K(\beta,F)$ *y por tanto* $C(\alpha,F) \subseteq C(\beta,F)$.
2. *Si* $F_1 \subseteq F_2$ *entonces* $K(\alpha,F_1) \subseteq K(\alpha,F_2)$ *y por tanto* $C(\alpha,F_1) \subseteq C(\alpha,F_2)$ *para cada* $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Proposición 5.1.30 *Sea* I *un ideal (a la izquierda) de* $\mathbf{D}$ *entonces*

$$K(\alpha,I) = \left\{c^\delta(P) \,|P \in I, \exp^\delta(P) = \alpha\right\}.$$

Además $K(\alpha,I)\bigcup\{0\} = C(\alpha,I)$.

Demostración. En efecto, si $P \in I$ y $\exp^\delta(P) = \alpha$ entonces $c^\delta(P) \in K(\alpha,F)$. Recíprocamente si $p \in K(\alpha,I)$, existe $P \in I$ tal que $\alpha \in \exp^\delta(P) + \mathbf{N}^n$ y $c^\delta(P) = p$. Sea $\gamma \in \mathbf{N}^n$ tal que $\exp^\delta(P) + \gamma = \alpha$. Se tiene que $\underline{\partial}^\gamma P \in I$ con $c^\delta(\underline{\partial}^\gamma P) = c^\delta(P) = p$ y $\exp^\delta(\underline{\partial}^\gamma P) = \alpha$.

Para demostrar que $K(\alpha,I)\bigcup\{0\} = C(\alpha,I)$ basta ver que el conjunto $K(\alpha,I)\bigcup\{0\}$ es un ideal de $\mathcal{H}$.

Sean $P,Q \in I$ tales que $\exp^\delta(P) = \exp^\delta(Q) = \alpha$. Si $c^\delta(P) + c^\delta(Q) \neq 0$, entonces por la proposición 5.1.8 tenemos que $\exp^\delta(P+Q) = \alpha$ y $c^\delta(P) + c^\delta(Q) = c^\delta(P+Q) \in K(\alpha,I)$. Sea $f \in \mathcal{H}$ y $P \in I$ tal que $\exp^\delta(I) = \alpha$. Se tiene que $fP \in I$ y además $\exp^\delta(fP) = \exp^\delta(P) = \alpha$ y $fc^\delta(P) = c^\delta(fP) \in K(\alpha,I)$. □

Observación. Se verifica que si $p \in K(\alpha,F)$ entonces existe $P \in F$, $P \neq 0$ tal que $in^\delta(P) = p\zeta^\beta$, donde $\alpha = \beta + \mathbf{N}^n$. Si I es un ideal de $\mathbf{D}$, entonces $K(\alpha,I) = \left\{c^\delta(P) \,|P \in I, in^\delta(P) = p\zeta^\alpha\right\}$.

5.2 Noción de polinomio reducido respecto de un ideal en B y un orden monomial.

Consideremos el anillo $B[\partial]$ donde $B = \mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n]$, $\mathbf{k}$ representa un cuerpo de característica cero y $\partial = (\partial_1,\cdots,\partial_n)$. Observamos que $B[\partial]$ es la n-ésima álgebra de Weyl, que notaremos también $A_n(\mathbf{k})$. Los elementos de $A_n(\mathbf{k})$ se llaman operadores diferenciales o simplemente operadores. Todos los ideales considerados en $A_n(\mathbf{k})$ serán a la izquierda salvo que se diga lo contrario. Sea $<$ un orden monomial en $\mathbf{N}^n$.

Proposición 5.2.1 *Sea I un ideal en B, $<$ un orden monomial en $\mathbf{N}^n$ y sean G_1 y G_2 dos bases de Gröbner de I, respecto de $<$; entonces se verifica que, para todo $f \in B$, el resto de dividir f por G_1 es igual al resto de dividir f por G_2.*

Demostración. Sean $G_1 = \{f_1, \cdots, f_t\}$ y $G_2 = \{g_1, \cdots, g_s\}$ dos bases de Gröbner para I, entonces para todo $f \in B$ se verifica que

$$f = p_1 f_1 + \cdots + p_t f_t + r_1,$$

donde, ningún monomio de r_1 es divisible por ningún monomio del conjunto $\bigcup_{i=1}^{t} (\exp(f_i) + \mathbf{N}^n)$ y,

$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + r_2,$$

donde, ningún monomio de r_2 es divisible por ningún monomio del conjunto $\bigcup_{j=1}^{s} (\exp(g_j) + \mathbf{N}^n)$.

Supongamos $r_1 - r_2 \neq 0$. Como $r_1 - r_2 \in I$, y al ser G_1 y G_2 bases de Gröbner de I, tendremos que,

$$\exp(r_1 - r_2) \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{t} (\exp(f_i) + \mathbf{N}^n) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{j=1}^{s} (\exp(g_j) + \mathbf{N}^n) \right\rangle,$$

que es contradictorio con lo afirmado anteriormente. □

Así tiene sentido la siguiente definición,

Definición 5.2.2 *Llamaremos resto de división de f entre el ideal $I \subseteq B$, relativamente a $<$, y lo denotaremos por $r_<(f; I)$, al resto de dividir f entre G, siendo G cualquier base de Gröbner para el ideal I. Si no hay riesgo de confusión notaremos $r(f; I)$ en lugar de $r_<(f; I)$.*

Definición 5.2.3 *Diremos que un polinomio $f \in B$ es reducido respecto de I si se verifica que $f = r(f; I)$.*

Si $f \in I$, $f \neq 0$, entonces se verifica que $f \neq 0 = r(f; I)$, es decir todo elemento no nulo de I no es reducido respecto de I. Por otra parte, para todo $f \in B$, $f = r(f; (0))$.

Notación 5.2.4 *Sea F un subconjunto no vacío de $B[\partial]$. Notemos*

$$R(F) = \left\{ \sum_{\alpha} p_\alpha(x) \partial^\alpha \in B[\partial] : p_\alpha \text{ reducido respecto a } C(\alpha, F) \right\}.$$

Ejemplo 5.2.5 *Sea $F = \{P_1, P_2\} \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$, siendo*

$$P_1 = x_1^3 \partial_1^2 + x_2 \partial_1 \partial_2 \qquad y \qquad P_2 = x_2^2 \partial_2^2 + x_2.$$

Consideramos el orden lexicográfico con $\partial_1 > \partial_2$, entonces tenemos:

$$P = x_2 \partial_1^3 + x_1 \partial_2^2 \in R(F),$$

ya que,

$C((3,0),F) = \langle x_1^3 \rangle$ *y* $C((0,2),F) = \langle x_2^2 \rangle$.

Sin embargo,

$$P = x_1^4\partial_1^3 + x_2^2\partial_2^4 \notin R(F).$$

Definición 5.2.6 *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq B[\partial]$, *y sea* $P = \sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha \in B[\partial]$; *diremos que* P *es reducido módulo* F *si* $P \in R(F)$.

Ejemplo 5.2.7 *En el ejemplo anterior* $P = x_2\partial_1^3 + x_1\partial_2^2$ *es reducido módulo* F.

Proposición 5.2.8 *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq B[\partial]$, *entonces se verifica que* $R(F)$ *tiene una estructura natural de* **k**-*espacio vectorial.*

Demostración.

- Veremos que la suma en $R(F)$ es una operación interna.
  Sean $\sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha$, $\sum_\alpha q_\alpha(x)\partial^\alpha \in R(F)$, donde $\forall\alpha$, $p_\alpha(x)$ y $q_\alpha(x)$, son reducidos respecto de $C(\alpha, F)$; entonces $p_\alpha(x) + q_\alpha(x)$ es reducido respecto de $C(\alpha, F)$ para todo α y por tanto,

  $$\sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha + \sum_\alpha q_\alpha(x)\partial^\alpha \in R(F).$$

  Así podemos afirmar que la suma es una operación interna en $R(F)$ y al ser $R(F) \subseteq B[\partial]$ se tiene que $(R(F), +)$ es un grupo abeliano.

- Vamos a definir una ley externa,

  $$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} \times R(F) & \longrightarrow & R(F) \\ \left(a, \sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha\right) & \longrightarrow & \sum_\alpha a p_\alpha(x)\partial^\alpha \end{array}$$

  Esta aplicación tiene sentido ya que dados $a \in \mathbf{k}$ y $\sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha \in R(F)$ entonces el producto $a\left(\sum_\alpha p_\alpha(x)\partial^\alpha\right) = \sum_\alpha a p_\alpha(x)\partial^\alpha \in R(F)$ ya que,

  $$\exp\left(a p_\alpha(x)\right) = \exp\left(p_\alpha(x)\right), \qquad a \in \mathbf{k}, \quad a \neq 0,$$

  y de ahí que si $p_\alpha(x)$ es reducido respecto a $C(\alpha, F)$ entonces $a p_\alpha(x)$ también lo será respecto a $C(\alpha, F)$, para todo α.

  Por tanto podemos afirmar que $(R(F), +, \cdot\mathbf{k})$ es un **k**-espacio vectorial.

$\square$

5.3 Algoritmo de reducción

Teorema 5.3.1 (Algoritmo de reducción) *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq B[\partial]$, *entonces, para todo* $P \in B[\partial]$ *existen* $Q_1, \cdots, Q_m \in B[\partial]$ *y* $S \in R(F)$ *tales que*

$$P = \sum_{i=1}^{m} Q_i P_i + S.$$

Además $\exp^\delta(P) = máx_< \left\{ \left(\exp^\delta(Q_i P_i)\right)_{1 \leq i \leq m}, \exp^\delta(S) \right\}$.

Demostración. Al ser $(R(F), +, \cdot\mathbf{k})$ un $\mathbf{k}$-espacio vectorial, bastará demostrarlo para los monomios de la forma $x^\alpha \partial^\beta$ y esto lo haremos por recurrencia sobre β.

Si $\beta = 0$, tendríamos dos posibilidades:

1. Si $x^\alpha \in R(F)$, ya estaría ya que
$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{m} 0 P_i + x^\alpha, \qquad x^\alpha \in R(F).$$

2. Si $x^\alpha \notin R(F)$ entonces x^α no es reducido respecto de $C(0, F)$. Sea
$$r^\alpha = r(x^\alpha; C(0, F))$$
y
$$\Lambda = \left\{ i : 0 \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n \right\} = \left\{ i : \exp^\delta(P_i) = 0 \right\} = \left\{ i : P_i = c^\delta(P_i) \right\}.$$
Se tiene que,
$$x^\alpha - r^\alpha = f_\alpha(x) \in B \qquad \text{y} \qquad f_\alpha(x) = \sum_{i \in \Lambda} q_i(x) c^\delta(P_i)$$
entonces tendremos que,
$$x^\alpha = \sum_{i \in \Lambda} q_i(x) P_i + r^\alpha, \quad \text{donde} \quad r^\alpha \in R(F).$$

Suponemos que $\beta > 0$ y el resultado cierto para todo $\beta' < \beta$.

Sea un monomio $x^\alpha \partial^\beta$, entonces consideramos dos casos:

1. Si $\beta \notin \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, para todo P_i, entonces tendremos que,
$$x^\alpha \partial^\beta = \sum 0.P_i + x^\alpha \partial^\beta,$$
donde $x^\alpha \partial^\beta \in R(F)$, ya que $C(\beta, F) = (0)$.
2. Si $\beta \in \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ para algún i, entonces consideramos:
   (a) Si $r(x^\alpha; C(\beta, F)) = x^\alpha$, entonces x^α es reducido en $C(\beta, F)$ y de ahí que $x^\alpha \partial^\beta \in R(F)$, por tanto,
   $$x^\alpha \partial^\beta = \sum 0.P_i + x^\alpha \partial^\beta,$$
   donde $x^\alpha \partial^\beta \in R(F)$.

(b) Si $r(x^\alpha; C(\beta,F)) \neq x^\alpha$, entonces, recordando que $C(\beta,F) = \langle K(\beta,F)\rangle$ y sea $\{i_0,\cdots,i_s\}$ el conjunto de subíndices tales que,

$$K(\beta,F) = \left\{c^\delta(P_{i_0}),\cdots,c^\delta(P_{i_s})\right\},$$

donde $\beta \in \left(\exp^\delta(P_{i_j}) + \mathbf{N}^n\right)$ con $j = 0,\cdots,s$. Tendremos que,

$$x^\alpha = \sum_{j=0}^{s} q_j c^\delta(P_{i_j}) + r^\alpha$$

donde $r^\alpha = r\left(x^\alpha; C(\beta,F)\right)$, luego,

$$x^\alpha\partial^\beta = \sum_{j=0}^{s} q_j c^\delta(P_{i_j})\partial^\beta + r^\alpha\partial^\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} q_j c^\delta(P_{i_j})\partial^{\beta_{i_j}+\exp^\delta(P_{i_j})} + r^\alpha\partial^\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} q_j c^\delta(P_{i_j})\partial^{\beta_{i_j}}\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})} + r^\alpha\partial^\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} q_j\partial^{\beta_{i_j}} c^\delta(P_{i_j})\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})} + \sum_{j=0}^{s} q_j[c^\delta(P_{i_j}),\partial^{\beta_{i_j}}]\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})} + r^\alpha\partial^\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} q_j\partial^{\beta_{i_j}} P_{i_j} - \sum_{j=0}^{s} q_j\partial^{\beta_{i_j}}\widehat{P_{i_j}} + \sum_{j=0}^{s} q_j[c^\delta(P_{i_j}),\partial^{\beta_{i_j}}]\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})} + r^\alpha\partial^\beta.$$

Se tiene,

$$\exp^\delta\left(\sum_{j=0}^{s} q_j\partial^{\beta_{i_j}}\widehat{P_{i_j}}\right) < \beta, \quad \exp^\delta\left(\sum_{j=0}^{s} q_j[c^\delta(P_{i_j}),\partial^{\beta_{i_j}}]\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})}\right) < \beta.$$

Luego por hipótesis de inducción,

$$\sum_{j=0}^{s} q_j\partial^{\beta_{i_j}}\widehat{P_{i_j}} = \sum_{i=1}^{m} Q_iP_i + S_1, \qquad S_1 \in R(F),$$

y

$$\sum_{j=0}^{s} q_j[c^\delta(P_{i_j}),\partial^{\beta_{i_j}}]\partial^{\exp^\delta(P_{i_j})} = \sum_{i=1}^{m} Q_i'P_i + S_2, \qquad S_2 \in R(F).$$

Así tenemos que,

$$x^\alpha\partial^\beta = \sum_{i=1}^{m} Q_iP_i + S_1 + S_2 + r^\alpha\partial^\beta$$

con $S_1 + S_2 + r^\alpha\partial^\beta \in R(F)$.

Sea $P \in B[\partial]$, supongamos que $\exp^\delta(P) = \alpha_0$ entonces podemos considerar dos casos:

1. Si $\alpha_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n}\left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces se verifica que

$$\exp^\delta(P) = \exp^\delta(S) \qquad \text{y} \qquad \exp^\delta(Q_iP_i) < \exp^\delta(P), \text{ para todo } i.$$

Por tanto,

$$\text{máx}_{<}\left\{\exp^\delta(Q_iP_i)\right\}_{1\leq i\leq m} < \exp^\delta(P) = \exp^\delta(S).$$

2. Supongamos que existe i_0 tal que $\alpha_0 = \exp^\delta(P_{i_0}) + \mathbf{N}^n$. En este caso se verifica que, $\exp^\delta(S) < \exp^\delta(P)$.

   Como
   $$\exp^\delta(Q_iP_i) < \exp^\delta(Q_{i_0}P_{i_0}), \text{ para todo } i \neq i_0,$$
   entonces tenemos que,
   $$\exp^\delta(P) = \exp^\delta(Q_{i_0}P_{i_0}) = \text{máx}_< \left\{ \left(\exp^\delta(Q_iP_i)\right)_{1\leq i\leq m} \right\}.$$

□

Nota 5.3.2 *La prueba anterior proporciona un algoritmo para construir $Q_1, \cdots, Q_m$ y S.*

Ejemplo 5.3.3 *Sea $F = \{P_1, P_2\} \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$, donde $P_1 = x_1^3\partial_1 + x_2$ y $P_2 = x_2^2\partial_2 + x_2$. Sea $P = x_1^4\partial_1\partial_2$. Consideramos el orden lexicográfico en $\mathbf{N}^2$ con $\partial_1 > \partial_2$. Entonces tenemos,*
$$C((1,0), F) = \langle x_1^3 \rangle, \qquad C((0,1), F) = \langle x_2^2 \rangle, \qquad C((1,1), F) = \langle x_1^3, x_2^2 \rangle.$$
Escribamos
$$x_1^4 = x_1x_1^3 + 0x_2^2$$
y
$$H = P - (x_1\partial_2P_1 + 0\partial_1P_2) = -x_1x_2\partial_2 - x_1,$$
como $-x_1x_2\partial_2 - x_1 \in R(F)$ tendremos que la división ha terminado, verificándose que,
$$P = x_1\partial_2P_1 + 0P_2 - x_1x_2\partial_2 - x_1.$$

Observación. El resto que obtenemos en el algoritmo que hemos dado en la demostración del teorema 5.3.1, no es único como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3.4 *Sea $F = \{P_1, P_2\} \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$ donde*
$$P_1 = x_1\partial_1, \qquad P_2 = x_1\partial_2 + x_2.$$
Consideramos el orden lexicográfico en $\mathbf{N}^2$ con $\partial_1 > \partial_2$. Entonces tenemos que $\exp^\delta(P_1) = (1,0)$ y $\exp^\delta(P_2) = (0,1)$, luego
$$C((1,0), F) = \langle x_1 \rangle = C((0,1), F).$$
Sea $P = x_1^2\partial_1\partial_2$. Podemos escribir
$$P = x_1\partial_2P_1 + 0.P_2 + 0$$
y también
$$P = -x_2P_1 + (x_1\partial_1 - 1)P_2 + x_2.$$

Definición 5.3.5 *El operador $S \in B[\partial]$ construido anteriormente (ver 5.3.1) es un resto de la reducción de $P \in B[\partial]$ por $\{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq B[\partial]$. El conjunto de los restos de reducir P por $\{P_1, \cdots, P_m\}$ se denota por $\widetilde{R}(P; \{P_1, \cdots, P_m\})$.*

Notación 5.3.6 *Para aligerar la notación escribiremos* $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_m) = \widetilde{R}(P; \{P_1, \cdots, P_m\})$. *A veces diremos proceso de división en lugar de proceso de reducción.*

Ejemplo 5.3.7 *Sea* $I = \langle P_1, P_2 \rangle \subseteq \mathbf{k}[x, y][\partial_x, \partial_y]$ *donde* $P_1 = x\partial_x$, $P_2 = x\partial_y + y$, *entonces, dado* $P = x^2\partial_x\partial_y$, *se tiene que*

$$x^2\partial_x\partial_y = x\partial_y P_1 + 0$$

de donde, $0 \in \widetilde{R}(P; \{P_1, P_2\})$, *pero*

$$x^2\partial_x\partial_y = (x\partial_x - 1) P_2 - yP_1 + y$$

luego $y \in \widetilde{R}(P; \{P_1, P_2\})$.

Vamos a demostrar dos lemas que utilizaremos en la demostración de la proposición de caracterización de las δ-bases de Gröbner de un ideal I de $B[\partial]$.

Lema 5.3.8 *Sea* I *un ideal no nulo en* $B[\partial]$ *y* $\{P_1, \cdots, P_r\}$ *un subconjunto de* I. *Si* $P \in I$ *y* $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$ *entonces* $C(\exp^\delta(P); P_1, \cdots, P_r) \neq (0)$.

Demostración. Sea $P \in I$ tal que $\exp^\delta(P) = \alpha_0$, entonces P será de la forma,

$$P = p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \widehat{P} \qquad \text{con} \qquad \exp^\delta(\widehat{P}) < \alpha_0.$$

Supongamos que $C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r) = (0)$, entonces tendremos que $p_{\alpha_0} = r(\alpha_0; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r))$ por tanto $p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} \in R(F)$.

Consideremos $\widehat{P} = P - p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0}$, por el algoritmo de reducción (ver 5.3.1) existen $Q_1, \cdots, Q_r, S \in B[\partial]$ tales que

$$\widehat{P} = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + S \qquad \text{con} \qquad S \in R(F).$$

Así $P = \sum_{i=1}^r Q_i P_i + p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + S$ con $p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + S \neq 0$ y $p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + S \neq 0 \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$. □

Lema 5.3.9 *Sea* I *un ideal no nulo en* $B[\partial]$ *y* $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$ *un subconjunto de* I. *Si* $P \in I$, *con* $\alpha_0 = \exp^\delta(P)$, $c^\delta(P) = p_{\alpha_0}$ *y* $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$, *entonces* $r(p_{\alpha_0}; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)) = 0$.

Demostración. Supongamos que $s(x) = r(p_{\alpha_0}; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r))$ con $s(x) \neq 0$, entonces tendremos que $p_{\alpha_0} = \sum_{i \in \Lambda} q_i c^\delta(P_i) + s(x)$, siendo $\Lambda = \{i \,|\, \alpha_0 \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\}$. Por tanto $p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} = \sum_{i \in \Lambda} q_i c^\delta(P_i)\partial^{\alpha_0} + s(x)\partial^{\alpha_0}$.

Como $P = p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha < \alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha$, entonces tenemos que,

$$P = \sum_{i \in \Lambda} q_i c^\delta(P_i)\partial^{\alpha_0} + s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha < \alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha =$$

$$= \sum_{i \in \Lambda} q_i c^\delta(P_i)\partial^{\alpha_0 - \exp^\delta(P_i)}\partial^{\exp^\delta(P_i)} + s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha < \alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha =$$

$$= \sum_{i\in\Lambda} q_i \left(\partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} c^\delta(P_i) - [\partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)}, c^\delta(P_i)]\right) \partial^{\exp^\delta(P_i)} + s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha =$$

$$= \sum_{i\in\Lambda} q_i \partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} c^\delta(P_i) \partial^{\exp^\delta(P_i)} - \sum_{i=1}^{r} q_i [\partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)}, c^\delta(P_i)] \partial^{\exp^\delta(P_i)} +$$

$$+ s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha =$$

$$= \sum_{i\in\Lambda} q_i \partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} \left(P_i - \sum_{\beta<\exp^\delta(P_i)} p_{\beta,i}\partial^\beta \right) - \sum_{i\in\Lambda}^{r} q_i [\partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)}, c^\delta(P_i)] \partial^{\exp^\delta(P_i)} +$$

$$+ s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha =$$

$$= \sum_{i\in\Lambda} q_i \partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} P_i - \sum_{i\in\Lambda} q_i \partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} \sum_{\beta<\exp^\delta(P_i)} p_{\beta,i}\partial^\beta -$$

$$- \sum_{i\in\Lambda}^{r} q_i [\partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)}, c^\delta(P_i)] \partial^{\exp^\delta(P_i)} + s(x)\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha .$$

Así tenemos que,

$$P = \sum_{i\in\Lambda} q_i \partial^{\alpha_0-\exp^\delta(P_i)} P_i + s(x)\partial^{\alpha_0} + A,$$

donde $\exp^\delta(A) < \alpha_0$.

Por el teorema 5.3.1, tenemos que

$$A = \sum_{i=1}^{r} Q_j P_j + S \text{ con } S \in R(F) \text{ y } \exp^\delta(S) \leq \exp^\delta(A) < \alpha_0 .$$

Entonces $S + s(x)\partial^{\alpha_0} \in R(F)$ y $P - S - s(x)\partial^{\alpha_0}$ pertenece al ideal generado por $\{P_1, \cdots, P_r\}$.

Es decir, $S + s(x)\partial^{\alpha_0} \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$, lo que contradice la hipótesis, pues $S + s(x)\partial^{\alpha_0} \neq 0$.
□

Teorema 5.3.10 *Sea I un ideal no nulo en $B[\partial]$ y $\{P_1, \cdots, P_r\}$ un subconjunto de I. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I.*
2. *Para cualquier $\alpha \in \mathbf{N}^n$, se tiene que*
$$C(\alpha, I) = C(\alpha; P_1, \cdots, P_r).$$
3. *Para todo $P \in I$ se tiene que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$.*

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$ Como $C(\alpha; P_1, \cdots, P_r) \subseteq C(\alpha, I)$ demostraremos la inclusión contraria.

Sea $p(x) \in C(\alpha, I)$, entonces hemos razonado que existe $P \in I$ con $P \neq 0$, tal que $in^\delta(P) = p(x)\zeta^\alpha$. Por otro lado, tenemos que $in^\delta(P) \in in^\delta(I)$. Si aplicamos la hipótesis podemos afirmar que,

$$in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle .$$

Si $in^\delta(P_i) = p_i(x)\zeta^{\alpha_i}$ con $1 \leq i \leq r$, entonces se verifica que,

$$p(x)\zeta^\alpha \in \langle p_1(x)\zeta^{\alpha_1}, \cdots, p_r(x)\zeta^{\alpha_r}\rangle.$$

Por tanto,

$$p(x)\zeta^\alpha = \sum_{i=1}^{r} q_i(x,\zeta)p_i(x)\zeta^{\alpha_i},$$

pero como $q_i(x,\zeta) \in B[\zeta]$, tendremos,

$$q_i(x,\zeta) = \sum_\beta q_{i_\beta}(x)\zeta^\beta \qquad con \qquad q_{i_\beta} \in B.$$

Luego,

$$p(x)\zeta^\alpha = \sum_{i=1}^{r}\sum_\beta q_{i_\beta}(x)\zeta^\beta p_i(x)\zeta^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{r}\sum_\beta q_{i_\beta}(x)p_i(x)\zeta^{\beta+\alpha_i} =$$

$$= \sum_{i,\beta} q_{i_\beta}(x)p_i(x)\zeta^{\beta+\alpha_i},$$

por tanto,

$$p(x)\zeta^\alpha \in \langle p_i(x)\zeta^{\alpha_i} : \alpha \in \alpha_i + \mathbf{N}^n\rangle$$

de donde,

$$p(x) \in \langle p_i(x) : p_i(x) = c^\delta(P_i),\ \alpha = \alpha_i + \mathbf{N}^n\rangle = C(\alpha; P_1, \cdots, P_r).$$

Así $C(\alpha; I) \subseteq C(\alpha; P_1, \cdots, P_r)$ y por tanto podemos afirmar que,

$$C(\alpha; I) = C(\alpha; P_1, \cdots, P_r).$$

$2 \Longrightarrow 3$ Sea $P \in I$, $P \neq 0$, entonces hemos demostrado, (ver 5.3.1), que existen $Q_1, \cdots, Q_r \in B[\partial]$ y $S \in R(F)$ (con $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$) tales que

$$P = \sum_{i=1}^{r} Q_iP_i + S,$$

con $\exp^\delta(P) = \max\{\exp^\delta(Q_iP_i), \exp^\delta(S)\}$, por tanto, $S \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$.

Supongamos que $S \neq 0$, entonces como

$$S = \sum p_\alpha(x)\partial^\alpha$$

donde $p_{\alpha_0}(x) \notin C(\alpha_0, F) = C(\alpha_0, I)$ con $\alpha_0 = \exp^\delta(S)$.

Pero por otro lado, como $S \in I$, ya que $S = P - \sum_{i=1}^r Q_iP_i$, entonces, aplicando la hipótesis, como $p_{\alpha_0}(x) \in C(\alpha_0; I)$.

$3) \Longrightarrow 1)$ Tendremos que demostrar

$$in^\delta(I) = \left\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r)\right\rangle.$$

Siempre se verifica que,

$$\left\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r)\right\rangle \subseteq in^\delta(I).$$

Veamos la inclusión recíproca.

Sea $f \in in^\delta(I)$ con $f = f_{\alpha_0}\zeta^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} f_\alpha \zeta^\alpha$, entonces (ver 5.1.15) existe $P \in I$ tal que $in^\delta(P) = f_{\alpha_0}\zeta^{\alpha_0}$.

Consideramos el conjunto $C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)$, donde recordamos que,

$$C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r) = \langle c^\delta(P_i) : \alpha_0 \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n \rangle .$$

Dividimos p_{α_0} por $C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)$, y tenemos que,

$$p_{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c^\delta(P_i) + r\left(p_{\alpha_0}; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)\right)$$

donde $\lambda_i = 0$ si $\alpha_0 \notin \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n$. Por tanto,

$$in^\delta(P) = p_{\alpha_0}\zeta^{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c^\delta(P_i)\zeta^{\alpha_0} + r\left(p_{\alpha_0}; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)\right)\zeta^{\alpha_0}.$$

Pero por hipótesis, se verifica que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$, entonces por el lema 5.3.9 tenemos que $r\left(p_{\alpha_0}; C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)\right) = 0$ y de ahí que

$$in^\delta(P) = p_{\alpha_0}\zeta^{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c^\delta(P_i)\zeta^{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \zeta^{\alpha_0 - \exp^\delta(P_i)} c^\delta(P_i)\zeta^{\exp^\delta(P_i)} =$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \zeta^{\alpha_0 - \exp^\delta(P_i)} in^\delta(P_i)$$

luego, $in^\delta(P) \in \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle$, por lo tanto, $in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle$. □

Observación. En la división que hemos establecido en el teorema 5.3.1 el resto no es único, pero sin embargo, cuando $P \in I$ y hacemos la división de P por una δ-base de Gröbner, este resto si es único ya que el único posible es 0.

Corolario 5.3.11 *Sea I un ideal de $B[\partial]$, $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ una δ-base de Gröbner para I y $P \in I$ entonces se verifica que,*

$$\exp^\delta(P) = \max_<\{\exp^\delta(Q_i P_i)\}_{1 \le i \le r}$$

siendo Q_i, $1 \le i \le r$ los operadores que hemos obtenidos en la división presentada en el teorema 5.3.1.

Corolario 5.3.12 *Una δ-base de Gröbner de I es un sistema de generadores de I.*

Demostración. Sea $\{P_1, \cdots, P_r\}$ una δ-base de Gröbner de I, entonces para todo $P \in I$ tendremos que

$$P = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + R \text{ con } R \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$$

con $Q_i \in B[\partial]$ pero por la condición 3) del teorema 5.3.10, tenemos que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$ y de ahí que,

$$P = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i, \qquad Q_i \in B[\partial].$$

□

Recordamos que en el anillo $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$ tenemos la siguiente proposición que caracteriza a las bases de Gröbner de un ideal:

Proposición 5.3.13 *Un subconjunto $G = \{g_1, \cdots, g_m\}$ de un ideal I de $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$ es una base de Gröbner para I si y solo si se verifica,*

$$\mathrm{Exp}(I) = \bigcup_{i=1}^{m} (\exp(g_i) + \mathbf{N}^n) .$$

Sin embargo cuando trabajamos con las δ-bases de Gröbner de un ideal de $B[\partial]$ la situación es diferente. Veamos primero la siguiente proposición,

Proposición 5.3.14 *Sea I un ideal de $B[\partial]$ y sea $G = \{P_1, \cdots, P_m\}$ un subconjunto de I. Si G es una δ-base de Gröbner para I entonces*

$$\mathrm{Exp}^{\delta}(I) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right) .$$

Demostración. Siempre se verifica que

$$\bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right) \subseteq \mathrm{Exp}^{\delta}(I).$$

Veamos la otra inclusión;

Sea $P \in I$ tal que $\exp^{\delta}(P) = \alpha$. Si $G = \{P_1, \cdots, P_m\}$ es una δ-base de Gröbner para I, entonces tendremos que,

$$in^{\delta}(P) \in \langle in^{\delta}(P_1), \cdots, in^{\delta}(P_m)\rangle = in^{\delta}(I),$$

y como $in^{\delta}(I)$ es un ideal ζ-monomial en el anillo $B[\zeta]$, existe algún i, con $i = 1, \cdots, m$ tal que, $\alpha = \exp^{\delta}(P) = \exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ y por tanto podemos afirmar que, $\mathrm{Exp}^{\delta}(I) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$.

□

El recíproco no es cierto en general como puede verse en el siguiente ejemplo,

Ejemplo 5.3.15 *Sea $I = \langle \partial_1 \rangle$ ideal de $\mathbf{k}[x_1][\partial_1]$. Dado $P = x_1\partial_1$ se tiene*

$$\{P\} \subseteq I$$

y además

$$\mathrm{Exp}^{\delta}(I) = 1 + \mathbf{N} = \exp^{\delta}(P) + \mathbf{N},$$

pero sin embargo $\{P\}$ no es una δ-base de Gröbner para el ideal I, ya que $\{P\}$ no genera al ideal I, debido a que $\partial_1 \notin \langle x_1\partial_1 \rangle$.

Corolario 5.3.16 *Sean I un ideal no nulo de $B[\partial]$ y $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$ una δ-base de Gröbner de I, entonces $R(I) = R(F)$.*

Demostración. Tenemos que

$$R(F) = \left\{ \sum_{\alpha} p_\alpha(x)\partial^\alpha : p_\alpha \text{ es reducido respecto a } C(\alpha, F) \right\},$$

pero si F es una δ-base de Gröbner, por el teorema 5.3.10, tenemos que $C(\alpha, F) = C(\alpha, I)$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$ y de ahí que podamos afirmar que, $R(F) = R(I)$. □

Proposición 5.3.17 *Sean I un ideal no nulo de $B[\partial]$ y $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$, $F' = \{P'_1, \cdots, P'_s\}$ dos δ-bases de Gröbner de I. Sea $P \in B[\partial]$, $P \neq 0$. Entonces,*

$$\widetilde{R}(P; F) = \widetilde{R}(P; F').$$

Demostración. Sea

$$P = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + S_1 \qquad \text{y} \qquad P = \sum_{j=1}^{s} Q'_j P'_j + S_2$$

donde $S_1 \in R(F)$ y $S_2 \in R(F')$.

Como $S_1 - S_2 \in I$, si $S_1 \neq S_2$ entonces

$$c^\delta(S_1 - S_2) \in C\left(\exp^\delta(S_1 - S_2), I\right).$$

Pero por otra parte, por el corolario 5.3.16 tenemos que,

$$R(I) = R(F) = R(F'),$$

por tanto,

$$S_1 \in R(F) = R(I) \qquad \text{y} \qquad S_2 \in R(F') = R(I),$$

así $S_1 - S_2 \in R(I)$. Esto es contradictorio con el hecho de que con el hecho de que

$$0 \neq c^\delta(S_1 - S_2) \in C\left(\exp^\delta(S_1 - S_2), I\right).$$

Luego $S_1 = S_2$. □

Observación. Vemos que el resto de un elemento de $B[\partial]$ por una δ-base de Gröbner de un ideal es independiente de la base considerada.

Notación 5.3.18 *Este resto se denota por $\widetilde{R}(P; I)$.*

Se puede demostrar la siguiente proposción,

Proposición 5.3.19 *Sea I un ideal en $B[\partial]$ y $P \in B[\partial]$. Entonces el resto $\widetilde{R}(P; I)$ verifica:*

1. *$P \in I \Longrightarrow \widetilde{R}(P; I) = 0$.*
2. *$\widetilde{R}(\widetilde{R}(P; I); I) = \widetilde{R}(P; I), \forall P \in B[\partial]$.*

5.4 S^δ-operadores

Definición 5.4.1 *Sean P_1, P_2 elementos no nulos en $B[\partial]$.*

1. *Si $\exp^\delta(P_1) = \alpha^1 = (\alpha_1^1, \cdots, \alpha_n^1)$ y $\exp^\delta_(P_2) = \alpha^2 = (\alpha_1^2, \cdots, \alpha_n^2)$, entonces definimos $\alpha_i = \text{máx}\{\alpha_i^1, \alpha_i^2\}$, $1 \leq i \leq n$. Llamaremos a $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ el $mcm(\alpha^1, \alpha^2)$.*

   Se define análogamente el mínimo común múltiplo de una familia finita de elementos de $\mathbf{N}^n$.

2. *Sea $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$ un subconjunto finito de $B[\partial]$ y supongamos que los P_i son todos no nulos. Definimos el siguiente conjunto,*

$$K(F) = \left\{\alpha \in \mathbf{N}^n : \exists N \subseteq F \ \alpha = mcm\{\exp^\delta(P); P \in N\}\right\} =$$

$$= \left\{mcm\{\exp^\delta(P); P \in N\};\ para\ todo\ N \subseteq F\right\}.$$

Ejemplo 5.4.2 *Sea $F = \{P_1, P_2\} \subseteq k[x,y][\partial_x, \partial_y]$ donde*

$$P_1 = xy\partial_x, \ y \ P_2 = x^2\partial_y + 1.$$

Consideramos el orden lexicográfico con $\partial_x < \partial_y$ Entonces,

$$\exp^\delta(P_1) = (1,0), \qquad \exp^\delta(P_2) = (0,1).$$

Entonces los distintos subconjuntos de F que podemos obtener son: $\{P_1\}$, $\{P_2\}$ y F. Por tanto tendremos que $K(F) = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

Definición 5.4.3 *Con la notación anterior, para todo $\alpha \in K(F)$, definimos*

$$F_\alpha = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in B^r : \sum_{k=1}^r \lambda_k c^\delta(P_k) = 0,\ y\ \lambda_k = 0\ si\ \alpha \notin \exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n\right\}.$$

Ejemplo 5.4.4 *Siguiendo con el ejemplo 5.4.2 tenemos que, $F_{(0,0)} = F_{(1,0)} = F_{(0,1)} = (0,0) \in B^2$ y $F_{(1,1)} = \left\{(\lambda_1,\lambda_2) \in B^2 : \lambda_1 xy + \lambda_2 x^2 = 0\right\}$.*

Observación. Observamos que $F_\alpha \subseteq B^r$ es naturalmente isomorfo al B-módulo de las sicigias entre los elementos $\left\{c^\delta(P_k) : \alpha \in \exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n,\ 1 \leq k \leq r\right\}$.

Por tanto F_α es finitamente generado como B-módulo. Sea $(\lambda_1^\tau, \cdots, \lambda_r^\tau)$, $1 \leq \tau \leq r_\alpha$ un sistema de generadores de F_α.

Para $\tau = 1, \cdots, r_\alpha$ consideramos

$$S^\delta_{\alpha,\tau} = \sum_{k=1}^r \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta_<(P_k)} P_k$$

a estas expresiones $S^\delta_{\alpha,\tau}$ les denominamos S^δ-operadores.

Proposición 5.4.5 *Con la notación anterior, se verifica que*

$$\exp^{\delta}\left(S^{\delta}_{\alpha,\tau}\right) < \alpha.$$

Demostración.

$$S^{\delta}_{\alpha,\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} \left(c^{\delta}(P_k) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} + \sum_{\beta < exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} \partial^{\beta} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} c^{\delta}(P_k) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} \sum_{\beta < \exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} \partial^{\beta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} c^{\delta}(P_k) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta < \exp^{\delta}(P_k)} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} \partial^{\beta}.$$

Se tiene,

$$\partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} c^{\delta}(P_k) = c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + A_k, \text{ con } \exp^{\delta}(A_k) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k)$$

y

$$\partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} = p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + B_k, \text{ con } \exp^{\delta}(B_k) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k).$$

Luego,

$$S^{\delta}_{\alpha,\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \left(c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + A_k \right) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta < \exp^{\delta}(P_k)} \lambda_k^{\tau} \left(p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + B_k \right) \partial^{\beta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta < \exp^{\delta}(P_k)} \left(\lambda_k^{\tau} p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)+\beta} + B_k \partial^{\beta} \right).$$

Se tiene que: $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} c^{\delta}(P_k) = 0$,

$$\exp^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} \right) \leq \text{máx}_{1 \leq k \leq r} \left\{ \exp^{\delta}\left(\lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} \right) \right\} =$$

$$= \text{máx}_{1 \leq k \leq r} \left(\exp^{\delta}(A_k) + \exp^{\delta}(P_k) \right) < \alpha,$$

$$\exp^{\delta}\left(\lambda_k^{\tau} p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)+\beta} \right) = \alpha - \exp^{\delta}(P_k) + \beta < \alpha,$$

y

$$\exp^{\delta}\left(B_k \partial^{\beta} \right) = \exp^{\delta}(B_k) + \exp^{\delta}(\partial^{\beta}) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k) + \beta < \alpha.$$

Por tanto, podemos concluir que,

$$\exp^{\delta}\left(S^{\delta}_{\alpha,\tau}\right) < \alpha.$$

□

Proposición 5.4.6 *Sea $I = \langle P_1, \cdots, P_r\rangle$ un ideal no nulo en $B[\partial]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I.*
2. *Para todo $P \in I$, se tiene que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$.*
3. *Para todo S^δ-operador $S^\delta_{\alpha,\tau}$ de $\langle P_1, \cdots, P_r\rangle$ se tiene que $0 \in \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha,\tau}; P_1, \cdots, P_r\right)$.*

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$ Esta implicación ya está demostrada (ver 5.3.10).

$2 \Longrightarrow 3$ Esto es cierto ya que todo S^δ-operador pertenece a I.

$3 \Longrightarrow 1$ Sea $P \in I$ con $P \neq 0$, donde $I = \langle P_1, \cdots, P_r\rangle$, entonces tendremos que,

$$P = H_1 P_1 + \cdots + H_r P_r, \text{ donde } H_i \in B[\partial].$$

Supongamos que $\alpha_0 = \text{máx}_i \left\{\exp^\delta(H_i P_i)\right\}$ y sea $\{i_0, \cdots, i_t\}$ el conjunto de los subíndices donde se alcanza el máximo, es decir,

$$\exp^\delta\left(H_{i_k} P_{i_k}\right) = \alpha_0, \qquad k = 0, \cdots, t.$$

Por tanto se verificará

$$\exp^\delta\left(H_{i_k}\right) + \exp^\delta\left(P_{i_k}\right) = \alpha_0, \qquad k = 0, \cdots, t.$$

Pueden ocurrir dos casos:

1. Si $\sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right) c^\delta\left(P_{i_k}\right) \neq 0$ entonces se verifica que,

$$in^\delta(P) = c^\delta(P)\zeta^{\alpha_0}, \text{ donde } c^\delta(P) = \sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right) c^\delta\left(P_{i_k}\right).$$

Así,

$$in^\delta(P) = c^\delta(P)\zeta^{\alpha_0} = \sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right) c^\delta\left(P_{i_k}\right)\zeta^{\alpha_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right)\zeta^{\alpha_0 - \exp^\delta(P_{i_k})} c^\delta\left(P_{i_k}\right)\zeta^{\exp^\delta(P_{i_k})} =$$

$$= \sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right)\zeta^{\alpha_0 - \exp^\delta(P_{i_k})} in^\delta(P_{i_k}) \in \left\langle in^\delta(P_{i_1}), \cdots, in^\delta(P_{i_k})\right\rangle.$$

Por tanto, $in^\delta(P) \in \left\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r)\right\rangle$ y ya tendríamos que $\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I.

2. Consideremos el caso $\sum_{k=0}^t c^\delta\left(H_{i_k}\right) c^\delta\left(P_{i_k}\right) = 0$. Sea $\alpha^i = \exp^\delta(P_i)$ y notemos por $\Lambda = \left\{i \mid \exp^\delta(H_i) + \alpha^i = \alpha_0\right\}$. Sea $\gamma = mcm\{\exp^\delta(P_i), i \in \Lambda\}$.
Podemos escribir P de la siguiente forma,

$$P = \sum_{i \notin \Lambda} H_i P_i + \sum_{i \in \Lambda} H_i P_i =$$

$$= \sum_{i\notin\Lambda} H_i P_i + \sum_{i\in\Lambda} c^\delta(H_i)\partial^{\exp^\delta(H_i)} P_i + \sum_{i\in\Lambda}(H_i - c^\delta(H_i)\partial^{\exp^\delta(H_i)})P_i.$$

Podemos identificar a $(c^\delta(H_i))_{i\in\Lambda}$ con un elemento de F_γ (poniendo 0 allí donde $\gamma \in \exp^\delta(P_j)$ y $j \notin \Lambda$). Sea $\underline{\lambda}^1, \cdots, \underline{\lambda}^p$ una familia de generadores de F_γ (recordemos que $\underline{\lambda}^\tau = (\lambda_1^\tau, \cdots, \lambda_r^\tau)$ y que $\lambda_j^\tau = 0$ si $\gamma \notin \exp^\delta(P_j) + \mathbf{N}^n$). Sea $\underline{s} = (s_1, \cdots, s_r) \in B^r$ tal que $s_i = c^\delta(H_i)$ si $i \in \Lambda$ y $s_i = 0$ en otro caso. Existen $u_1, \cdots, u_p \in B$ tales que $\underline{s} = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \underline{\lambda}^\tau$. Se tiene (notando $\beta^i = \exp^\delta(H_i)$ si $i \in \Lambda$)

$$\sum_{i\in\Lambda} c^\delta(H_i)\partial^{\beta^i} P_i = \sum_{i=1}^r s_i \partial^{\beta^i} P_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\tau=1}^p u_\tau \lambda_i{}^\tau\right) \partial^{\beta^i} P_i = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^\tau \partial^{\beta^i} P_i\right),$$

donde β^i, para $i \notin \Lambda$, será definido más adelante.

Por otra parte α_0 es un múltiplo común a los elementos $\{\exp^\delta(P_i) \,|\, i \in \Lambda\}$; de ahí que exista $\epsilon \in \mathbf{N}^n$ tal que $\alpha_0 = \gamma + \epsilon$.

Se tiene, para $i \in \Lambda$, $\beta^i + \alpha^i = \alpha_0 = \gamma + \epsilon$ y de aquí $\beta^i = \gamma - \alpha^i + \epsilon$. Si $j \notin \Lambda$ y $\gamma \in \exp^\delta(P_j) + \mathbf{N}^n$ denotaremos por β^j a $\gamma - \alpha^j + \epsilon$ (teniendo en cuenta que $\gamma - \alpha^j \in \mathbf{N}^n$). Por tanto, podemos escribir

$$\sum_{i\in\Lambda} c^\delta(H_i)\partial^{\beta^i} P_i = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^\tau \partial^{\beta^i} P_i\right) = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^\tau \partial^\epsilon \partial^{\gamma-\alpha^i} P_i\right) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^p u_\tau \left(\sum_{i=1}^r \partial^\epsilon \lambda_i^\tau \partial^{\gamma-\alpha^i} P_i\right) + \sum_{\tau=1}^p u_\tau \left(\sum_{i|\gamma-\alpha^i>0} B_i^\tau \partial^{\gamma-\alpha^i} P_i\right)$$

donde B_i^τ es un operador de $B[\partial]$ con $\exp^\delta(B_i^\tau) < \epsilon$. Así se tiene

$$\sum_{i\in\Lambda} c^\delta(H_i)\partial^{\beta^i} P_i = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon S_{\gamma,\tau}^\delta + \sum_{i|\gamma-\alpha^i>0} \left(\sum_{\tau=1}^p u_\tau B_i^\tau\right) \partial^{\gamma-\alpha^i} P_i.$$

Por hipótesis se puede escribir

$$S_{\gamma,\tau}^\delta = \sum_{j=1}^r Q_j^{\gamma,\tau} P_j,$$

con $\gamma > \exp^\delta(S_{\gamma,\tau}^\delta) = \max_{1\le j\le r}\{\exp^\delta(Q_j^{\gamma,\tau} P_j)\}$. Por tanto,

$$A = \sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon \left(\sum_{j=1}^r Q_j^{\gamma,\tau} P_j\right) = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon Q_j^{\gamma,\tau}\right) P_j.$$

Podemos por tanto escribir,

$$\sum_{i\in\Lambda} c^\delta(H_i)\partial^{\beta^i} P_i = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon Q_j^{\gamma,\tau}\right) P_j + \sum_{j|\gamma-\alpha^j>0} \left(\sum_{\tau=1}^p u_\tau B_j^\tau\right) \partial^{\gamma-\alpha^j} P_j.$$

Así pues hemos obtenido una nueva escritura de P, $P = \sum_{i=1}^r H_i' P_i$ donde

- Si $i \in \Lambda$,

$$H_i' = H_i - c^\delta(H_i)\partial^{\beta^i} + \sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon Q_i^{\gamma,\tau} + \sum_{\tau=1}^p u_\tau B_i^\tau \partial^{\gamma-\alpha^i}.$$

- Si $i \notin \Lambda$ y $\gamma - \alpha^i >> 0$,

$$H_i' = H_i + \sum_{\tau=1}^p u_\tau \partial^\epsilon Q_i^{\gamma,\tau} + \sum_{\tau=1}^p u_\tau B_i^\tau \partial^{\gamma-\alpha^i}.$$

- Si $i \notin \Lambda$ y si no se verifica $\gamma - \alpha^i >> 0$,

$$H_i' = H_i + \sum_{\tau=1}^{p} u_\tau \partial^\epsilon Q_i^{\gamma,\tau}.$$

En todos los casos se tiene $\exp^\delta(H_i'P_i) < \alpha$. Entonces $\max_i\{\exp^\delta(H_i'P_i)\} < \alpha$. Este proceso sólo puede repetirse un número finito de veces ya que el orden $<$ es noetheriano. Así existe una expresión $P = \sum H_i'' P_i$ con las condiciones del punto 1.

□

5.5 Algoritmo de cálculo de una δ-base de Gröbner

Sea I un ideal no nulo de $B[\partial]$ y $F \subseteq I$ un sistema finito generador de I, es decir $I = \langle F \rangle$. Elegimos un orden sobre los elementos de F, sea $F = (P_1, \cdots, P_r)$. Sea $K(P_1, \cdots, P_r) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$, para todo $j = 1, \cdots, s$ calculamos los S^δ-operadores de $\{P_1, \cdots, P_r\}$ en α_j. Sea $\left(S^\delta_{\alpha_j,\tau}\right)_{\substack{1 \leq \tau \leq r_j \\ 1 \leq j \leq s}}$ la familia de los S^δ-operadores.

Supongamos que $\{P_1, \cdots, P_r\}$ no es δ-base de Gröbner para I, entonces (ver 5.4.6), existe un S^δ-operador de $\{P_1, \cdots, P_r\}$, $S^{\tau_0}_{\alpha,j}$ tal que $0 \notin \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha_0,\tau}; P_1, \cdots, P_r\right)$.

Sea $P_{r+1} \in \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha_0,\tau}; P_1, \cdots, P_r\right)$ y volvemos a razonar con el conjunto $\{P_1, \cdots, P_r, P_{r+1}\}$.

Observación. Si un S^δ-operador, S, de $\{P_1, \cdots, P_r\}$ verifica que $0 \in \widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_r)$ entonces $0 \in \widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_r, P_{r+1})$.

En efecto, si $0 \in \widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_r)$ entonces $S = \sum_{i=1}^r Q_i P_i$, por tanto, $S = \sum_{i=1}^r Q_i P_i + 0.P_{r+1}$.

Proposición 5.5.1 *Con la notación anterior, el proceso indicado termina, es decir existe $\rho \in \mathbf{N}$ tal que para todo S^δ-operador S de $\{P_1, \cdots, P_{r+\rho}\}$ se verifica que $0 \in \widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_{r+\rho})$.*

Demostración. Supongamos que el proceso anterior no es finito, entonces se podrá construir, siguiendo el proceso, una sucesión $\{P_k\}_{k \geq r+1}$ de elementos de I no nulos. Sea $M = \bigcup_{k \geq 1}\left(\exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n\right)$.

Vamos a considerar los dos casos posibles que pueden darse:

Caso 1: Si $\left\{\exp^\delta(P_k) : k \geq 1\right\}$ es finito, entonces existirá una sucesión creciente $\{k(i)\}_{i \in \mathbf{N}}$ y existirá $k_0 \geq 1$ tal que

$$\forall i \in \mathbf{N}, \quad \exp^\delta(P_{k(i)}) = \exp^\delta(P_{k_0}) = \alpha_0.$$

Entonces para cada $i \in \mathbf{N}$, existirá un S^δ-operador S de $\{P_1, \cdots, P_{k(i)-1}\}$ tal que $P_{k(i)} = \widetilde{R}\left(S; P_1, \cdots, P_{k(i)-1}\right)$ por tanto se verificará que,

$$c^\delta(P_{k(i)}) \notin C\left(\exp^\delta(P_{k(i)}); P_1, \cdots, P_{k(i)-1}\right) = C\left(\alpha_0; P_1, \cdots, P_{k(i)-1}\right),$$

pero como $k(i-1)+1 \leq k(i)$, entonces $k(i-1) \leq k(i)-1$, así

$$c^\delta(P_{k(i)}) \notin C\left(\alpha_0; P_1, \cdots, P_{k(i-1)}\right).$$

De esta forma obtenemos,

$$C\left(\alpha_0; P_{k(0)}\right) \subset C\left(\alpha_0; P_{k(0)}, P_{k(1)}\right) \subset \cdots \subset C\left(\alpha_0; P_{k(0)}, \cdots, P_{k(i-1)}\right) \subset \cdots$$

una sucesión estrictamente creciente de ideales en B, que al ser noetheriano se estabiliza, y esto es una contradicción.

Caso 2: Supongamos que $\{\exp^\delta(P_k) : k \geq 1\}$ es infinito, entonces existen $A_i \in \mathbf{N}^n$ tales que $\{A_1, \cdots, A_m\} \subset \bigcup_{k \geq 1}\left(\exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n\right)$ y

$$\bigcup_{k \geq 1}\left(\exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n\right) = \bigcup_{i=1}^{m}\left(A_i + \mathbf{N}^n\right).$$

Si el conjunto $\{\exp^\delta(P_k) : k \geq 1\}$ es infinito, exitirá $i_0 \in \{1, \cdots, m\}$ tal que el conjunto $U = \{k : \exp^\delta(P_k) \in A_{i_0} + \mathbf{N}^n\}$ es infinito, supongamos que $A_{i_0} = \exp^\delta(P_{k(0)})$. Al ser U un conjunto infinito, sea $k(1) \in U$ el mínimo entero $k(1) > k(0)$ tal que

$$U_1 = \left\{k \in U : \exp^\delta(P_k) \in \exp^\delta(P_{k(1)}) + \mathbf{N}^n\right\}$$

es infinito.

Como $k(1) > k(0)$, veamos que $c^\delta\left(P_{k(1)}\right) \notin C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right)$.

Nos fijamos en que $P_{k(1)}$ se ha obtenido de la siguiente forma,

$$P_{k(1)} \in \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha,\tau}; P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)-1}\right),$$

para $S^\delta_{\alpha,\tau}$ el S^δ-operador de $\{P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)-1}\}$. Se tiene que, $\exp^\delta(P_{k(1)}) \in \exp^\delta(P_{k(0)}) + \mathbf{N}^n$ por tanto se verifica,

$$0 \neq c^\delta(P_{k(1)}) = r\left(c^\delta(P_{k(1)}); C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(1)-1}\right)\right)$$

ya que,

$$P_{k(1)} \in \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha,\tau}; P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)-1}\right).$$

Así

$$c^\delta(P_{k(1)}) \notin C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(1)-1}\right),$$

ya que si perteneciera su resto sería cero, pero

$$C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right) \subset C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(1)-1}\right)$$

ya que $k(0) \leq k(1)-1$.
Como

$$c^\delta(P_{k(1)}) \notin C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(1)-1}\right)$$

entonces, (ver 5.1.29)

$$c^\delta(P_{k(1)}) \notin C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right).$$

Veamos que,

$$K\left(\exp^\delta(P_{k(0)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right) \subset K\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right).$$

En efecto si $p(x) \in K\left(\exp^\delta(P_{k(0)}; P_1, \cdots, P_{k(0)})\right)$ entonces existe P_i, $1 \leq i \leq k(0)$ tal que $p(x) = c^\delta(P_i)$, $\exp^\delta(P_{k(0)}) \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n$ de donde,

$$\exp^\delta(P_{k(1)}) \in \exp^\delta(P_{k(0)}) + \mathbf{N}^n \subseteq \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n,$$

luego,

$$p(x) \in K\left(\exp^\delta_<(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}\right).$$

Por tanto

$$C\left(\exp^\delta(P_{k(0)}); P_1, \cdots, P_{k(0)})\right) \subset C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k_(0)}\right).$$

Por otro lado siempre se verifica que,

$$C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)})\right) \subset C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)}\right)$$

luego,

$$C\left(\exp^\delta(P_{k(0)}); P_1, \cdots, P_{k(0)})\right) \subset C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)}\right)$$

Consideramos ahora, $k(2) > k(1)$ tal que $k(2) \in U_1$ y

$$U_2 = \left\{k \in U_1 : \exp^\delta(P_k) \in \exp^\delta(P_{k(2)}) + \mathbf{N}^n\right\}$$

sea infinito.
Construimos así una sucesión estrictamente creciente de ideales en B

$$C\left(\exp^\delta(P_{k(0)}); P_1, \cdots, P_{k(0)})\right) \subset C\left(\exp^\delta(P_{k(1)}); P_1, \cdots, P_{k(0)}, \cdots, P_{k(1)}\right) \subset \cdots$$

que al ser B noetheriano es imposible, luego $\{\exp^\delta(P_k) : k \geq 1\}$ es finito y en ese caso existe ρ tal que todo S^δ-operador de $\{P_1, \cdots, P_{r+\rho}\}$ verifica que $0 \in \widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_{r+\rho})$.

□

5.6 Relación entre las bases de Gröbner y las δ-bases de Gröbner

Consideremos los conjuntos de variables $\{x_1, \cdots, x_n\}$ y $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Supongamos que $<_x$ y $<_\partial$ sean órdenes monomiales definidos en las variables x_i y ∂_i respectivamente[4]. $X^\alpha \partial^\beta$ denotará un monomio mónico del anillo $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$. Vamos a definir un orden $<$ en estos monomios.

Para cualesquiera $(\alpha(1), \beta(1))$, $(\alpha(2), \beta(2)) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$ diremos que,

$$(\alpha(1), \beta(1)) < (\alpha(2), \beta(2)) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \beta(1) & <_\partial & \beta(2) \\ & \text{ó} & \\ \beta(1) = \beta(2) & \text{y} & \alpha(1) <_x \alpha(2) \end{array}\right.$$

Es obvio que la relación $<$ definida anteriormente es un orden monomial en $\mathbf{N}^{2n}$.

[4] Esto es un abuso de notación. $<_x$ y $<_\partial$ son dos órdenes monomiales en $\mathbf{N}^n$. El primero de ellos será usado para ordenar los monomios en las x_i y el segundo para ordenar los monomios en las ∂_i.

Definición 5.6.1 *El orden $<$ definido anteriormente en $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ se llama orden eliminación.*

Teorema 5.6.2 *Si $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ es una base de Gröbner para un ideal $I \subseteq B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ respecto del orden $<$, entonces G es una δ-base de Gröbner para el ideal $I \subseteq B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$, respecto del orden $<_\delta$.*

Demostración. Sea $P \in I = \langle P_1, \cdots, P_r \rangle$. Tendremos que probar,

$$in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle.$$

Es obvio que $\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle \subseteq in^\delta(I)$; veamos la inclusión recíproca. Sea $P \in I$, escribimos los operadores P_i, $1 \leq i \leq r$ de la siguiente forma:

$$P_i = a_i \partial^{\alpha_i} + \widehat{P_i}$$

donde $\exp^\delta(P_i) = \alpha_i$, $\exp^\delta(\widehat{P_i}) < \alpha_i$ y $a_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$, así

$$in^\delta(P_i) = a_i \zeta^{\alpha_i}.$$

Puesto que $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ es una base de Gröbner en $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ podemos aplicar el algoritmo de la división (ver 1.8.1) y aseguraremos que existen $Q_{i_1}, \cdots, Q_{i_N} \in B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$, $1 \leq i_j \leq r$, no nulos tales que,

$$P = Q_{i_1} P_{i_1} + \cdots + Q_{i_N} P_{i_N} \tag{5.6.2}$$

con la propiedad,

$$\exp(Q_{i_N} P_{i_N}) < \exp(Q_{i_{N-1}} P_{i_{N-1}}) < \cdots < \exp(Q_{i_1} P_{i_1}). \tag{5.6.2}$$

Escribamos $Q_{i_j} = c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}}$ con $\exp^\delta(Q_{i_j}) = \beta_{i_j}$, $\exp^\delta(\widehat{Q_{i_j}}) < \beta_{i_j}$, $c_{i_j} \in B$. Por tanto,

$$\exp(Q_{i_j}) = (\exp_{<_x}(c_{i_j}), \beta_{i_j}).$$

Así,

$$\begin{aligned} Q_{i_j} P_{i_j} &= \left(c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}}\right) \left(a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + \widehat{P_{i_j}}\right) = \\ &= c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} = \\ &= c_{i_j} \left(a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} + A_{i_j}\right) \partial^{\alpha_{i_j}} + c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \end{aligned}$$

donde $\exp^\delta(A_{i_j}) < \beta_{i_j}$.

Por tanto,

$$\begin{gathered} Q_{i_j} P_{i_j} = \\ c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}} + c_{i_j} A_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \end{gathered} \tag{5.6.2}$$

donde

$$\exp^\delta\left(c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}}\right) = \beta_{i_j} + \alpha_{i_j},\ \exp^\delta\left(c_{i_j} A_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}}\right) < \beta_{i_j} + \alpha_{i_j},$$

$$\exp^\delta\left(c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}}\right) < \beta_{i_j} + \alpha_{i_j},\ \exp^\delta\left(\widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}}\right) < \beta_{i_j} + \alpha_{i_j} \text{ y } \exp^\delta\left(\widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}}\right) < \beta_{i_j} + \alpha_{i_j}.$$

Así podemos escribir la ecuación 5.6.2,

$$P = \sum_{j=1}^{N} Q_{i_j} P_{i_j} = \sum_{j=1}^{N} \left(c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}+\alpha_{i_j}} + c_{i_j} A_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} + \widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}+\alpha_{i_j}} + \sum_{j=1}^{N} (c_{i_j} A_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}}) + \sum_{j=1}^{N} \left(c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} \right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \right)$$

donde,

$\exp^\delta \left(\sum_{j=1}^{N} c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}+\alpha_{i_j}} \right) \leq \max_{1 \leq j \leq N}\{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}\}$, $\exp^\delta \left(\sum_{j=1}^{N} c_{i_j} A_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} \right) < \max_{1 \leq j \leq N}\{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}\}$,

$\exp^\delta \left(\sum_{j=1}^{N} c_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \right) < \max_{1 \leq j \leq N}\{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}\}$, $\exp^\delta \left(\sum_{j=1}^{N} \widehat{Q_{i_j}} a_{i_j} \partial^{\alpha_{i_j}} \right) < \max_{1 \leq j \leq N}\{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}\}$ y $\exp^\delta \left(\sum_{j=1}^{N} \widehat{Q_{i_j}} \widehat{P_{i_j}} \right) < \max_{1 \leq j \leq N}\{\beta_{i_j} + \alpha_{i_j}\}$.

Sea j_0 el mínimo subíndice que verifica:

$$\beta_{i_{j_0+1}} + \alpha_{i_{j_0+1}} < \beta_{i_{j_0}} + \alpha_{i_{j_0}},$$

es decir,

$$\beta_{i_{j_0+1}} + \alpha_{i_{j_0+1}} < \beta_{i_{j_0}} + \alpha_{i_{j_0}} = \beta_{i_{j_0-1}} + \alpha_{i_{j_0-1}} = \cdots = \beta_{i_2} + \alpha_{i_2} = \beta_{i_1} + \alpha_{i_1}.$$

Por tanto, $in^\delta(P) = \left(\sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \right) \zeta^{\beta_{i_1}+\alpha_{i_1}}$ siempre que $\sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \neq 0$.

Veamos que $\sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \neq 0$. Como

$$\exp_<(Q_{i_{j_0}} P_{i_{j_0}}) < \exp_<(Q_{i_{j_0-1}} P_{i_{j_0}-1}) < \cdots < \exp_<(Q_{i_2} P_{i_2}) < \exp_<(Q_{i_1} P_{i_1}),$$

de la expresión 5.6.2, podemos afirmar que,

$$\exp_<(Q_{i_j} P_{i_j}) = \exp_<(c_{i_j} a_{i_j} \partial^{\beta_{i_j}+\alpha_{i_j}}) = \left(\exp_{<_x}(c_{i_j} a_{i_j}), \beta_{i_j} + \alpha_{i_j} \right)$$

y de la expresión 5.6.2 afirmamos que,

$$\left(\exp_{<_x}(c_{i_{j_0}} a_{i_{j_0}}), \beta_{i_{j_0}} + \alpha_{i_{j_0}} \right) < \cdots < \left(\exp_{<_x}(c_{i_1} a_{i_1}), \beta_{i_1} + \alpha_{i_1} \right),$$

por tanto, $\sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \neq 0$.

Entonces,

$$in^\delta(P) = in^\delta \left((\sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j}) \partial^{\beta_{i_1}+\alpha_{i_1}} \right) = \sum_{j=1}^{j_0} (c_{i_j} a_{i_j}) \zeta^{\beta_{i_1}+\alpha_{i_1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \zeta^{\beta_{i_j}} \zeta^{\alpha_{i_j}} = \sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} a_{i_j} \zeta^{\alpha_{i_j}} \zeta^{\beta_{i_j}} = \sum_{j=1}^{j_0} c_{i_j} in^\delta(P_{i_j}) \zeta^{\beta_{i_j}} \in \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle.$$

□

El recíproco no es cierto como puede verse en el siguiente ejemplo,

Ejemplo 5.6.3 *Sean*

$$P_1 = x_1\partial_1 + a\partial_2 + b, \quad P_2 = (x_2 - x_1)\partial_2 - d$$

donde $a, b, d \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$. Consideramos el ideal $I = \langle P_1, P_2\rangle$ generado por P_1 y P_2 en $\mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$. Supongamos que el orden, en las variables ∂_i, es el orden graduado lexicográfico (ver 1.1.8), con $\partial_1 > \partial_2 > x_1 > x_2$ y en las variables x_i también el orden graduado lexicográfico con $x_1 > x_2$. Entonces $\{P_1, P_2\}$ no es una base de Gröbner para el ideal $I \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$ y sin embargo sí es una δ-base de Gröbner para el ideal $I \subseteq \mathbf{k}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$.

Tenemos

$$\exp_<(P_1) = (1, 0, 1, 0), \qquad \exp_<(P_2) = (1, 0, 0, 1)$$

Entonces

$$S(P_1, P_2) = \partial_2 P_1 + \partial_1 P_2 = x_2\partial_1\partial_2 + \partial_2 a\partial_2 + \partial_2 b - \partial_1 d - \partial_2,$$

y se tiene

$$\exp_<(S(P_1, P_2)) = (0, 1, 1, 1) \notin \langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle = \langle \exp_<(P_1), \exp_<(P_2)\rangle .$$

Así $G = \{P_1, P_2\}$ no es una base de Gröbner del ideal I.

Veamos que para algunos valores de a, b y d, $G = \{P_1, P_2\}$ es una δ-base de Gröbner en $\mathbf{C}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$.

Tenemos que,

$$\exp^\delta(P_1) = (1, 0), \qquad c^\delta(P_1) = x_1$$

y

$$\exp^\delta(P_2) = (0, 1), \qquad c^\delta(P_2) = x_2 - x_1.$$

Vamos a calcular los S^δ-operadores. Como $Sic(c^\delta(P_1)) = Sic(c^\delta(P_2)) = \{0\}$, entonces sólo consideraremos el caso del conjunto $\{P_1, P_2\}$.
Empezamos calculando

$$\alpha = mcm((1, 0), (0, 1)) = (1, 1)$$

entonces vamos a calcular $F_{(1,1)}(P_1, P_2)$ y así tendremos,

$$F_{(1,1)}(P_1, P_2) = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}[x_1, x_2] : \lambda_1 c^\delta(P_1) + \lambda_2 c^\delta(P_2) = 0\right\}$$

por tanto,

$$Sic(c^\delta(P_1), c^\delta(P_2)) = F_{(1,1)}(P_1, P_2) = \langle (x_2 - x_1, -x_1)\rangle$$

así,

$$\begin{aligned} S^\delta_{(1,1),(x_2-x_1,-x_1)} &= (x_2 - x_1)\partial^{(1,1)-(1,0)}P_1 - x_1\partial^{(1,1)-(0,1)}P_2 = \\ &= (x_2 - x_1)a\partial_2^2 + (x_2 - x_1)\partial_2(a)\partial_2 + (x_2 - x_1)b\partial_2 + \\ &\quad + (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_2 + x_1 d\partial_1 + x_1\partial_1(d). \end{aligned}$$

Ahora efectuamos una división de $S^\delta_{(1,1),(x_2-x_1,-x_1)}$ entre (P_1, P_2) y,

$$S^\delta_{(1,1),(x_2-x_1,-x_1)} - dP_1 =$$

$$\begin{aligned} &= (x_2 - x_1)a\partial_2^2 + (x_2 - x_1)\partial_2(a)\partial_2 + (x_2 - x_1)b\partial_2 + \\ &\quad + (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_2 + x_1\partial_1(d) - ad\partial_2 - db. \end{aligned}$$

$$S^{\delta}_{(1,1),(x_2-x_1,-x_1)} - dP_1 - \partial_2 a P_2 =$$
$$= (x_2 - x_1)b\partial_2 + (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_2 + x_1\partial_1(d) - a\partial_2 + a\partial_2(d) + \partial_2(a)d - db.$$

$$S^{\delta}_{(1,1),(x_2-x_1,-x_1)} - dP_1 - \partial_2 a P_2 - bP_2 =$$
$$= (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_2 + x_1\partial_1(d) - a\partial_2 + a\partial_2(d) + \partial_2(a)d =$$
$$= (x_2 - x_1)\partial_2(b) + (x_1 - a)\partial_2 + x_1\partial_1(d) + \partial_2(ad).$$

Así $\{P_1, P_2\}$ *es una* δ*-base de Gröbner si se verifica* $a = x_1$, $b \in \mathbf{C}[x_1]$ *y* $d \in \mathbf{C}$.

Podemos efectuar un tratamiento más adecuado del ejemplo anterior de la siguiente manera:

Consideremos el operador, $P_3 = (x_1 - a)\partial_2 + (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_1(d) + \partial_2(ad)$. *Dividiendo en* $\mathbf{k}[x_1, x_2]$ *se puede escribir,*

$$(x_1 - a) = q(x_2 - x_1) + r(x_2) \tag{5.6.3}$$

donde $q = q(x_1, x_2) \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$ *y* $r(x_2) \in \mathbf{k}[x_2]$.

Entonces

$$P_3 - qP_2 = r(x_2)\partial_2 + (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_1(d) + \partial_2(ad) + qd.$$

Por tanto, si $(x_1 - a)$ *no es múltiplo de* $(x_2 - x_1)$, $\{P_1, P_2\}$ *no es una* δ*-base de Gröbner de* I *ya que en ese caso tendríamos que* $r(x_2) \neq 0$ *y por lo tanto* $in^{\delta}(P_3 - qP_2) \notin \langle in^{\delta}(P_1), in^{\delta}(P_2)\rangle$.

Supongamos ahora que

$$r(x_2) = 0. \tag{5.6.3}$$

Se tiene

$$P_3 - qP_2 = (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_1(d) + \partial_2(ad) + qd.$$

y por el teorema 5.4.6 tenemos que $\{P_1, P_2\}$ *es una* δ*-base de Gröbner de* I *si y sólo si* $P_3 - qP_2$ *es cero. Teniendo en cuenta 5.6.3 y 5.6.3,*

$$P_3 - qP_2 =$$
$$= (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_1(d) + \partial_2\left((x_1 + q(x_1 - x_2))d\right) + qd =$$
$$= (x_2 - x_1)\partial_2(b) + x_1\partial_1(d) + x_1\partial_2(d) + (x_1 - x_2)\partial_2(qd) - qd + qd =$$
$$= (x_2 - x_1)\partial_2(b - qd) + x_1\left(\partial_1(d) + \partial_2(d)\right).$$

Así bajo la condición 5.6.3, $\{P_1, P_2\}$ *es una* δ*-base de Gröbner de* I *si y sólo si* b, d, q *verifican la ecuación diferencial (no lineal)*

$$(x_2 - x_1)\partial_2(b - qd) + x_1\left(\partial_1(d) + \partial_2(d)\right) = 0.$$

Así las posibles soluciones deben cumplir,

$$\begin{cases} \partial_2(b - qd) & = & f(x_1, x_2)x_1 \\ \partial_1(d) + \partial_2(d) & = & f(x_1, x_2)(x_1 - x_2). \end{cases}$$

para algún $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$.

Ejemplo 5.6.4 *Este ejemplo muestra una δ-base de Gröbner de $A_4(\mathbf{k})$ (para cualquier orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^4$) que no es una base de Gröbner (en el sentido de 1.7). Consideremos el conjunto de operadores*

$$P_1 = f_1\partial_t, \qquad P_2 = f_2\partial_t, \qquad P_3 = f_3\partial_t.$$

donde

$$f_1 = x^2y^2 - z^2, \qquad f_2 = xy^2z - xyz, \qquad f_3 = xyz^3 - xz^2.$$

Sea $<$ cualquier orden monomial en $\mathbf{N}^4$. Sea I el ideal (a la izquierda) en $A_4(\mathbf{k})$ generado por el conjunto $F = \{P_1, P_2, P_3\}$. Veamos que

$$C(\alpha, I) = C(\alpha, F)$$

para cualquier $\alpha \in \mathbf{N}^4$, (es decir F es una δ-base de Gröbner de I).

Siempre se verifica que $C(\alpha, F) \subseteq C(\alpha, I)$. Veamos la inclusión recíproca.

Observación. Tenemos que $\mathrm{Exp}^\delta(I) = (0,0,0,1) + \mathbf{N}^4$. *En efecto:*

Siempre se verifica que

$$(0,0,0,1) + \mathbf{N}^4 \subseteq \exp^\delta(I)$$

al ser I un ideal en $A_4(\mathbf{k})$. Veamos la inclusión recíproca:
Para cualquier $P \in I$ entonces se verifica que

$$P = Q_1f_1\partial_t + Q_2f_2\partial_t + Q_3f_3\partial_t = (Q_1f_1 + Q_2f_2 + Q_3f_3)\partial_t.$$

Por tanto,

$$\exp^\delta(P) = \exp^\delta(Q_1f_1 + Q_2f_2 + Q_3f_3) + (0,0,0,1) \in (0,0,0,1) + \mathbf{N}^4.$$

Tendremos que ver que para cualquier $P \in I$ tal se tiene que $c^\delta(P) \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle$ (ya que $\mathrm{Exp}(I) = (0,0,0,1) + \mathbf{N}^4$*). Para cualquier $P \in I$ tendremos que*

$$P = Q_1f_1\partial_t + Q_2f_2\partial_t + Q_3f_3\partial_t = (Q_1f_1 + Q_2f_2 + Q_3f_3)\partial_t.$$

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \exp^\delta(P)$ entonces tendremos que,

$$\exp^\delta(Q_1f_1 + Q_2f_2 + Q_3f_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 - 1)$$

y

$$c^\delta(P) = c^\delta(Q_1f_1 + Q_2f_2 + Q_3f_3).$$

Llamemos $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 - 1)$.
Supongamos que cada Q_i, $i = 1, 2, 3$ puede escribirse de la forma,

$$Q_i = \sum_\beta \partial^\beta q_{i\beta}$$

donde $\exp^\delta(Q_i) = \beta^i$ y $c^\delta(Q_i) = q_{i\beta^i}$. Vamos a escribir los productos Q_if_i de la forma siguiente:

$$\begin{cases} Q_1f_1 &= \partial^{\beta^1}q_{1\beta^1}f_1 + \cdots \\ Q_2f_2 &= \partial^{\beta^2}q_{2\beta^2}f_2 + \cdots \\ Q_3f_3 &= \partial^{\beta^3}q_{3\beta^3}f_3 + \cdots \end{cases}.$$

Sea $\beta = \text{máx}\{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$, *entonces podemos considerar dos casos:*

Si $\beta = \alpha'$ *entonces tenemos que*

$$c^\delta(P) \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle.$$

Si $\beta > \alpha'$ *entonces tenemos que considerar el conjunto de índices*

$$\Lambda = \left\{l \in \{1,2,3\} \,|\beta = \beta^l\right\}.$$

Como $\beta > \alpha'$ *entonces tendremos que el conjunto* Λ *tendrá por lo menos dos elementos y se verifica que,*

$$\sum_{l\in\Lambda} q_{l\beta^l} f_l = 0.$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i f_i = \sum_{l\in\Lambda} Q_l f_l + \sum_{i\notin\Lambda} Q_i f_i =$$
$$= \sum_{l\in\Lambda} \left(Q_l - \partial^{\beta^l} q_{l\beta^l}\right) f_l + \sum_{i\notin\Lambda} Q_i f_i$$

donde $\exp^\delta\left(Q_l - \partial^{\beta^l} q_{l\beta^l}\right) < \beta$ *y seguimos razonando de la misma manera hasta obtener el resultado que queremos.*

Veamos ahora que F *no es una base de Gröbner (ver 1.7). Sea* $<$ *cualquier orden en* $\mathbb{N}^8$ *y sean* $<_1$, $<_2$ *los siguientes órdenes definidos por*

$$<_1 = <|_{\mathbb{N}^4\times\{0\}} \qquad y \qquad <_2 = <|_{\{0\}\times\mathbb{N}^4}.$$

Veamos que el conjunto $\{P_1, P_2, P_3\}$, *siendo*

$$P_1 = f_1\partial_t, \qquad P_2 = f_2\partial_t, \qquad y \qquad P_3 = f_3\partial_t,$$

donde

$$\begin{cases} f_1 &= x^2y^2 - z^2, \\ f_2 &= xy^2z - xyz, \\ f_3 &= xyz^3 - xz^2, \end{cases}$$

no es una base de Gröbner respecto del orden $<$ *definido en* $\mathbb{N}^8$.
Para cualquier orden monomial $<_1$ *en* $\mathbb{N}^4$ *se verifica que*

$$\exp_{<_1}(f_2) = (1,2,1,0), \qquad \exp_{<_1}(f_3) = (1,1,3,0).$$

Sin embargo, dependiendo del orden, $<_1$, *que consideremos puede ocurrir que*

$$\exp_{<_1}(f_1) = (2,2,0,0) \qquad ó \qquad \exp_{<_1}(f_1) = (0,0,2,0).$$

Supongamos que $\exp_{<_1}(f_1) = (2,2,0,0)$.

Calculamos $S(f_1, f_2)$ *(S-polinomio , ver 1.6.1)) y tenemos que*

$$S(f_1, f_2) = x^2yz - z^3.$$

Como ningún monomio de $S(f_1, f_2)$ es divisible por ningún elemento del conjunto $\{mp(f_1), mp(f_2)\}$, consideramos el conjunto de polinomios,

$$\begin{cases} f_1 &= x^2y^2 - z^2, \\ f_2 &= xy^2z - xyz, \\ f_3 &= xyz^3 - xz^2, \\ f_4 &= x^2yz - z^3. \end{cases}$$

Ahora continuando nuestro razonamiento tendremos que calcular $\exp_{<_1}(f_4)$ y tenemos varias posibilidades, dependiendo del orden entre las variables. Vamos a considerar el caso

$$z <_1 y <_1 x.$$

En este caso se verifica que $\exp_{<_1}(f_4) = x^2yz$.

Entonces si consideramos el conjunto $G = \{f_i\}_{i=1}^4$, tenemos que el resto de dividir $S(f_1, f_2)$ entre G es cero.

Calculamos $S(f_1, f_3)$ y se verifica que,

$$S(f_1, f_3) - zf_4 = -z^5 + z^4.$$

Como ningún monomio del polinomio $-z^5 + z^4$ es divisible por ningún elemento del conjunto $\{mp(f_i)\}_{i=1}^4$ entonces tenemos que considerar el conjunto de polinomios

$$\begin{cases} f_1 &= x^2y^2 - z^2, \\ f_2 &= xy^2z - xyz, \\ f_3 &= xyz^3 - xz^2, \\ f_4 &= x^2yz - z^3, \\ f_5 &= z^5 - z^4. \end{cases}$$

Si denotamos por G al siguiente conjunto $G = \{f_i\}_{i=1}^5$ tenemos que el resto de dividir $S(f_1, f_2)$ y $S(f_1, f_3)$ entre G es cero.

Calculamos $S(f_1, f_4)$ y tenemos que

$$S(f_1, f_4) - zf_4 = -z^3 + yz^3.$$

Como ningún monomio del polinomio $-z^3 + yz^3$ es divisible por ningún elemento del conjunto $\{mp(f_i)\}_{i=1}^5$ entonces tenemos que considerar el conjunto de polinomios

$$\begin{cases} f_1 &= x^2y^2 - z^2, \\ f_2 &= xy^2z - xyz, \\ f_3 &= xyz^3 - xz^2, \\ f_4 &= x^2yz - z^3, \\ f_5 &= z^5 - z^4, \\ f_6 &= yz^3 - z^3, \end{cases}$$

donde $\exp_{<_1}(f_6) = (0, 1, 3, 0)$.

Si denotamos por G al siguiente conjunto $G = \{f_i\}_{i=1}^6$ tenemos que el resto de dividir $S(f_1, f_2)$ y $S(f_1, f_3)$ y $S(f_1, f_4)$ entre G es cero.

Calculamos $S(f_1, f_5)$ y se verifica que

$$S(f_1, f_5) - z^4 f_1 + z^2 f_5 = 0.$$

Por tanto podemos afirmar que el resto de dividir $S(f_1, f_5)$ entre el conjunto G es cero.

Calculamos $S(f_1, f_6)$ y tenemos que

$$S(f_1, f_6) - x f_3 + f_5 = x^2 z^2 - z^4.$$

Como ningún monomio de $x^2 z^2 - z^4$ es divisible por ningún elemento del conjunto $\{mp(f_i)\}_{i=1}^{6}$ entonces tenemos que considerar el conjunto de polinomios

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & x^2y^2 - z^2, \\ f_2 & = & xy^2z - xyz, \\ f_3 & = & xyz^3 - xz^2, \\ f_4 & = & x^2yz - z^3, \\ f_5 & = & z^5 - z^4, \\ f_6 & = & yz^3 - z^3, \\ f_7 & = & x^2z^2 - z^4. \end{array} \right.$$

En el caso que estamos estudiando tenemos que $\exp_{<_1}(f_7) = (2, 0, 2, 0)$.

Si denotamos por G al siguiente conjunto $G = \{f_i\}_{i=1}^{7}$ tenemos que el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ con $2 \leq i \leq 6$ entre G es cero.

Se verifica que,

$$S(f_1, f_7) - (yz + z) f_6 = 0.$$

Por tanto podemos afirmar que el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ con $2 \leq i \leq 7$ entre G es cero.

Calculamos $S(f_2, f_3)$ y tenemos que

$$S(f_2, f_3) + f_3 = xyz^2 - xz^2.$$

Como ningún monomio de $xyz^2 - xz^2$ es divisible por ningún elemento del conjunto $\{mp(f_i)\}_{i=1}^{7}$ entonces tenemos que considerar el conjunto de polinomios

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & x^2y^2 - z^2, \\ f_2 & = & xy^2z - xyz, \\ f_3 & = & xyz^3 - xz^2, \\ f_4 & = & x^2yz - z^3, \\ f_5 & = & z^5 - z^4, \\ f_6 & = & yz^3 - z^3, \\ f_7 & = & x^2z^2 - z^4, \\ f_8 & = & xyz^2 - xz^2 \end{array} \right.$$

donde $\exp_{<_1}(f_8) = (1, 1, 2, 0)$.
Si denotamos por G al conjunto $\{f_i\}_{i=1}^{8}$ podemos afirmar que,

el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ entre G es cero para $2 \leq i \leq 7$ y el resto de dividir $S(f_2, f_3)$ entre G es cero.

Si calculamos $S(f_1, f_8)$, tenemos que

$$S(f_1, f_8) - zf_4 = 0.$$

Por tanto podemos afirmar que,

el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ entre G es cero para $1 \leq i \leq 8$ y el resto de dividir $S(f_2, f_3)$ entre G es cero.

Calculamos $S(f_2, f_4)$ y se verifica que,

$$S(f_2, f_4) + f_4 - f_6 = 0.$$

Luego,

el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ entre G es cero para $1 \leq i \leq 8$ y el resto de dividir $S(f_2, f_j)$ entre G es cero para $j = 3, 4$.

Calculamos $S(f_2, f_5)$ y tenemos que,

$$S(f_2, f_5) - z^3 f_2 + (z^2 - z) f_3 = -xz^4 + xz^3.$$

Entonces tenemos que considerar el siguiente conjunto de polinomios:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & x^2y^2 - z^2, \\ f_2 & = & xy^2z - xyz, \\ f_3 & = & xyz^3 - xz^2, \\ f_4 & = & x^2yz - z^3, \\ f_5 & = & z^5 - z^4, \\ f_6 & = & yz^3 - z^3, \\ f_7 & = & x^2z^2 - z^4, \\ f_8 & = & xyz^2 - xz^2, \\ f_9 & = & xz^4 - xz^3. \end{array} \right.$$

donde $\exp_{<_1}(f_9) = (1, 0, 4, 0)$.

Se tienen las siguientes relaciones:

$$S(f_1, f_9) - z^3 f_1 + zf_5 = 0, \qquad S(f_2, f_6) = 0, \qquad S(f_2, f_7) + zf_4 - z(y+1) f_6 = 0,$$
$$S(f_2, f_8) = 0, \qquad S(f_2, f_9) - z^2 f_2 + (z - 1) f_3 = -xz^3 + xz^2.$$

Entonces tenemos que considerar el siguiente conjunto de polinomios:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & x^2y^2 - z^2, \\ f_2 & = & xy^2z - xyz, \\ f_3 & = & xyz^3 - xz^2, \\ f_4 & = & x^2yz - z^3, \\ f_5 & = & z^5 - z^4, \\ f_6 & = & yz^3 - z^3, \\ f_7 & = & x^2z^2 - z^4, \\ f_8 & = & xyz^2 - xz^2, \\ f_9 & = & xz^4 - xz^3, \\ f_{10} & = & xz^3 - xz^2. \end{array} \right.$$

Luego,

el resto de dividir $S(f_1, f_i)$ entre G es cero para $2 \le i \le 9$ y el resto de dividir $S(f_2, f_j)$ entre G es cero para $3 \le j \le 9$.

Se tienen las siguientes relaciones:

$$S(f_1, f_{10}) - z^2 f_1 + f_5 = 0, \qquad S(f_2, f_{10}) - z f_2 + f_3 - f_8 = 0,$$

$$S(f_3, f_4) - f_5 + f_7 = 0, \qquad S(f_3, f_5) - z f_3 + f_9 = 0, \qquad S(f_3, f_6) - f_{10} = 0,$$

$$S(f_3, f_7) - f_5 + f_7 = 0, \qquad S(f_3, f_8) - f_{10} = 0, \qquad S(f_3, f_9) - f_3 + f_{10} = 0, \qquad S(f_3, f_{10}) - f_8 = 0.$$

$$S(f_4, f_5) - z^3 f_4 + z^2 f_5 = 0, \qquad S(f_4, f_6) - z f_7 = 0, \qquad S(f_4, f_7) - y f_6 = 0, \qquad S(f_4, f_8) - f_7 = 0.$$

$$S(f_4, f_9) - x f_3 + (z+1) f_5 - f_7 = 0, \qquad S(f_4, f_{10}) - z f_4 + f_5 = 0.$$

$$S(f_5, f_6) - z^3 f_4 + z^2 f_5 = 0, \qquad S(f_5, f_7) - z^2 f_5 + z^2 f_7 = 0, \qquad S(f_5, f_8) + z f_3 - (z+1) f_9 = 0.$$

$$S(f_5, f_9) = 0, \qquad S(f_5, f_{10}) = 0,$$

$$S(f_6, f_7) + (1-y) f_5 - z f_6 + z f_7 = 0,$$

$$S(f_6, f_8) = 0, \qquad S(f_6, f_9) - f_3 + f_9 + f_{10} = 0, \qquad S(f_6, f_{10}) - f_8 + f_{10} = 0,$$

$$S(f_7, f_8) + z f_6 - f_7 = 0, \qquad S(f_7, f_9) + z f_5 - z f_7 = 0, \qquad S(f_7, f_{10}) + f_5 - f_7 = 0,$$

$$S(f_8, f_9) - f_3 + f_9 + f_{10} = 0, \qquad S(f_8, f_{10}) - f_8 + f_{10} = 0, \qquad S(f_9, f_{10}) = 0.$$

Así el conjunto $G = \{f_i\}_{i=1}^{10}$ constituye una base de Gröbner en $\mathbf{k}[x, y, z, t]$ para el ideal generado por el conjunto G.

Si llamamos $P_i = f_i \partial_t$ tenemos que el conjunto $\{P_i\}_{i=1}^{10}$ constituye una base de Gröbner en A_4 ya que $S(P_i, P_j) = S(f_i, f_j)\partial_t$ (ver 1.7).

5.7 Aplicaciones de las δ-bases de Gröbner

5.7.1 Test de pertenencia

Dado un ideal $I = \langle F_1, \cdots, F_s \rangle$ de $B[\partial]$ y $P \in B[\partial]$ vamos a ver cuándo $P \in I$. En el caso de que $P \in I$ encontraremos $Q_1, \cdots, Q_s \in B[\partial]$ tales que,

$$P = Q_1 F_1 + \cdots + Q_s F_s.$$

Sean $F = \{F_1, \cdots, F_s\}$ un subconjunto de $B[\partial]$ y $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ una δ-base de Gröbner para $I = \langle F_1, \cdots, F_s \rangle$ con respecto a un orden monomial fijado en $\mathbf{N}^n$. Por el teorema de caracterización de las δ-bases de Gröbner, (ver 5.3.10), tenemos que dado $P \in B[\partial]$,

$$P \in I \Longleftrightarrow \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}.$$

Además, en ese caso si aplicamos 5.3.1, existen $H_1, \cdots, H_r \in B[\partial]$ tales que

$$P = H_1 P_1 + \cdots + H_r P_r. \tag{5.7.0}$$

Consideremos las matrices $F \in M_{s\times 1}(B[\partial])$ y $G \in M_{r\times 1}(B[\partial])$ cuyas filas son los elementos de los conjuntos F y G respectivamente, es decir

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_s \end{pmatrix} \text{ y } G = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{pmatrix}.$$

Si recordamos el algoritmo 5.9.3, que hemos utilizado para calcular una δ-base de Gröbner, resulta que los operadores P_i, $1 \leq i \leq r$, los vamos obteniendo como combinación lineal de los F_j, $1 \leq j \leq s$, luego todos los elementos de la matriz G se pueden expresar como combinación lineal de los F_j, $1 \leq j \leq s$ y así existe una matriz $T \in M_{r\times s}(B[\partial])$ tal que

$$G = TF.$$

Por lo tanto en el caso de que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$, utilizando la igualdad 5.7.0 podemos expresar al operador P como combinación lineal de los operadores del conjunto F y de ahí obtenemos los operadores $Q_1, \cdots, Q_s$.

Por otro lado, como los operadores F_j, $1 \leq j \leq s$ pertenecen al ideal, tendremos que,

$$\widetilde{R}(F_j; P_1, \cdots, P_r) = \{0\},$$

de ahí que por el algoritmo (ver 5.3.1) sea posible escribir los operadores F_j, $1 \leq j \leq s$ en función de los operadores P_i, $1 \leq i \leq r$ y así podemos afirmar que existirá una matriz $S \in M_{s\times r} \in B[\partial]$ tal que,

$$F = SG.$$

5.7.2 Eliminación.

Consideremos en $\mathbf{N}^{2n}$ el orden eliminación dado en 5.6.1. En realidad, para el razonamiento que vamos a hacer bastaría cualquier orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^{2n}$ que verifique: si $\beta, \beta' \in \mathbf{N}^{2n}$ con $\beta'_n < \beta_n$ entonces $\beta' < \beta$.

Vamos a definir un orden en $\mathbf{N}^{2n-1}$, que necesitaremos más adelante. Para ello identificamos $\mathbf{N}^{2n-1}$ con $\mathbf{N}^{2n-1} \times \{0\} \subset \mathbf{N}^{2n}$. De esta forma definimos un orden $<'$ en $\mathbf{N}^{2n-1}$ de la siguiente manera:

$$(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}) <' (\alpha', \beta'_1, \cdots, \beta'_{n-1}) \Longleftrightarrow (\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, 0) <' (\alpha', \beta'_1, \cdots, \beta'_{n-1}, 0).$$

Teorema 5.7.1 *Sea I un ideal de $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ y $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ una δ-base de Gröbner de I respecto de un orden del tipo de la definición 5.6.1. Entonces:*

1. $G \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}] = \emptyset \Longleftrightarrow I \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}] = (0)$.
2. *Si $G \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}]$ no es vacío, entonces es una δ-base de Gröbner respecto del orden de eliminación (ver 5.6.1).*

Demostración. Escribamos

$$I_n = I \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}] \quad \text{y} \quad G_n = G \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}].$$

La primera afirmación la obtenemos de que si $G = \emptyset$ entonces $I = (0)$ y recíprocamente.

Por lo tanto vamos a suponer que $G \neq \emptyset$ y demostraremos la segunda afirmación. Para ello tendremos que probar que,

$$in^\delta(I_n) = \left\langle in^\delta(P_i) : P_i \in G_n,\ i = 1, \cdots, r \right\rangle.$$

Como $G \subseteq I$ entonces tendremos que $G_n \subseteq I_n$ y de ahí que

$$\left\langle in^\delta(P_i) : P_i \in G_n,\ i = 1, \cdots, r \right\rangle \subseteq in^\delta(I_n).$$

Veamos la inclusión recíproca, sea $0 \neq P \in I_n$, entonces tendremos que $P \in I$ y por tanto,

$$in^\delta(P) \in \langle in^\delta(P_i) : P_i \in G,\ i = 1, \cdots, r \rangle,$$

luego existe $P_i \in G$ tal que $in^\delta(P_i)$ divide a $in^\delta(P)$, por tanto podemos afirmar que $in^\delta(P_i) < in^\delta(P)$, entonces en $in^\delta(P_i)$ sólo aparecen las variables $\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}$, es decir, $P_i \in B[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}]$. así $P_i \in G_n$ y podemos afirmar que,

$$in^\delta(P) \subseteq \langle in^\delta(P_i) : P_i \in G_n,\ i = 1, \cdots, r \rangle,$$

para todo $P \in I_n$. □

Una primera aplicación del teorema 5.7.1 es un método para encontrar los generadores de la intersección de dos ideales.

Observación. El concepto de δ-base de Gröbner en $B[\partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta]$ es el mismo que el que tenemos en todo el trabajo, con la salvedad de que ahora $\exp^\delta(P)$ pertenece a $\mathbb{N}^{n+1}$, para cada $P \in B[\partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta]$, donde ζ es una variable que conmuta con $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$.

Notación 5.7.2 *Notaremos por $\zeta I + (1-\zeta)J$ el ideal de $B[\partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta]$ generado por $\zeta I \bigcup (1-\zeta)J$.*

Proposición 5.7.3 *Sean I, J ideales en $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ y sea ζ la variable descrita anteriormente. Consideramos el ideal $\zeta I + (1-\zeta)J$ en $B[\partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta]$. Entonces se verifica:*

$$I \bigcap J = (\zeta I + (1-\zeta)J) \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_n].$$

Demostración. Recordamos que, si $I = \langle P_1, \cdots, P_s \rangle$ y $J = \langle P'_1, \cdots, P'_r \rangle$ entonces tendremos que,

$$\zeta I + (1-\zeta)J = \langle \zeta P_1, \cdots, \zeta P_s, (1-\zeta)P'_1, \cdots, (1-\zeta)P'_r \rangle.$$

Sea $P \in I \bigcap J$ como, $P = \zeta P + (1-\zeta)P$, tendremos que,

$$P \in \zeta I + (1-\zeta)J \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_n],$$

y de ahí que,

$$I \bigcap J \subseteq (\zeta I + (1-\zeta)J) \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_n].$$

Recíprocamente, sea

$$P \in (\zeta I + (1-\zeta)J) \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$$

entonces tendremos que,

$$P(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \zeta H_i(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta) P_i(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots \partial_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} (1-\zeta) H_i'(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta) P_j'(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n) H_j'(x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n, \zeta).$$

Como en el operador P no aparece la variable ζ entonces tendremos que si $\zeta = 0$ entonces $P \in J$ y para $\zeta = 1$, $P \in J$ y de ahí que $P \in I \bigcap J$. Nótese que podemos hacer $\zeta = 0$ ó $\zeta = 1$ pues ζ conmuta con $B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$.
□

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos un procedimiento para calcular una δ-base de Gröbner G, del ideal $I \bigcap J$. Primero calculamos una δ-base de Gröbner del ideal $\zeta I + (1-\zeta)J$, utilizando el orden producto en $\mathbf{N}^{2n+1}$ con $\zeta > \partial > X$. Después calculamos $G \bigcap B[\partial_1, \cdots, \partial_n]$ y este conjunto será una δ-base de Gröbner de $I \bigcap J$.

En el ejemplo que viene a continuación comparamos el cálculo de una δ-base de Gröbner de $I \bigcap J$ con el de una base de Gröbner del mismo ideal.

Ejemplo 5.7.4 *Consideremos los ideales* $I = \langle x_1\partial_1 + x_1\partial_2 + b(x_1)\rangle$ *y* $J = \langle (x_2 - x_1)\partial_2 - d\rangle$ *de* $\mathbf{C}[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ *donde* $d \in \mathbf{C}$.

Vamos a calcular una δ-base del ideal $I \bigcap J$. Para ello primero calcularemos una δ-base del ideal

$$\langle x_1\partial_1\zeta + x_1\partial_2\zeta + b(x_1)\zeta, (1-\zeta)(x_2 - x_1)\partial_2 - (1-\zeta)d\rangle \subseteq \mathbf{C}[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2, \zeta]$$

donde las variables están ordenadas según $\zeta > \partial_1 > \partial_2$.

Consideramos los operadores,

$$P_1 = x_1\partial_1\zeta + x_1\partial_2\zeta + b(x_1)\zeta, \qquad P_2 = -\zeta(x_2 - x_1)\partial_2 + (x_2 - x_1)\partial_2 - (1-\zeta)d.$$

Por lo tanto tendremos[5] *que,*

$$\exp^\delta(P_1) = (1, 1, 0), \qquad c^\delta(P_1) = x_1$$

y

$$\exp^\delta(P_2) = (1, 0, 1), \qquad c^\delta(P_2) = (x_1 - x_2).$$

Así, (ver 5.4.3)

$$F_{(1,1,1)} = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 c^\delta(P_1) + \lambda_2 c^\delta(P_2) = 0\right\} = \langle (x_2 - x_1, x_1)\rangle.$$

Por tanto,

$$S^\delta_{(1,1,1),(x_2-x_1,x_1)} = (x_2 - x_1)\partial_2 P_1 + x_1\partial_1 P_2 =$$

$$= (x_2 - x_1)x_1\zeta\partial_2^2 + b(x_1)(x_2 - x_1)\zeta\partial_2 + x_1\zeta\partial_2 + x_1(x_2 - x_1)\partial_1\partial_2 - x_1\partial_2 - x_1(1-\zeta)d\partial_1.$$

[5]Por la observación hecha 5.7.2 el δ-exponente se refiere a las variables $(\zeta, \partial_1, \partial_2)$

Reduciendo tenemos que,

$$S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,x_1)} + x_1\partial_2 P_2 + b(x_1)P_2 - dP_1 =$$

$$x_1(x_2-x_1)\partial_1\partial_2 + x_1(x_2-x_1)\partial_2^2 + b(x_1)(x_2-x_1)\partial_2 - dx_1\partial_2 - dx_1\partial_1 - b(x_1)d.$$

Escribamos,

$$P_3 = x_1(x_2-x_1)\partial_1\partial_2 + x_1(x_2-x_1)\partial_2^2 + b(x_1)(x_2-x_1)\partial_2 - dx_1\partial_2 - dx_1\partial_1 - b(x_1)d.$$

Se tiene,

$$\exp^{\delta}(P_3) = (0,1,1), \qquad c^{\delta}(P_3) = x_1(x_2-x_1).$$

Entonces tenemos que,

$$F_{(1,1,1)} = \langle (x_2-x_1, x_1, 0), (x_2-x_1, 0, -1), (0, x_1, 1)\rangle .$$

Como

$$(0, x_1, 1) = (x_2-x_1, x_1, 0) - (x_2-x_1, 0, -1)$$

entonces $F_{(1,1,1)}$ *está generado por* $\{(x_2-x_1, x_1, 0), (x_2-x_1, 0, -1)\}$.

Por tanto para calcular los S^{δ}*-operadores, en este ejemplo, solo tendremos que calcular*

$$S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,x_1,0)} \text{ y } S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,0,-1)}.$$

Como $S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,x_1,0)} = S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,x_1)}$ *entonces ya está calculado. Vamos a calcular el que nos queda,*

$$S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,0,-1)} = (x_2-x_1)\partial_2 P_1 - \zeta P_3 =$$
$$= dx_1\zeta\partial_2 + dx_1\zeta\partial_1 + b(x_1)d\zeta$$

por tanto,

$$S^{\delta}_{(1,1,1),(x_2-x_1,0,-1)} - dP_1 = 0.$$

Así podemos afirmar que, el conjunto $G = \{P_1, P_2, P_3\}$ *es una* δ*-base de Gröbner del ideal* $\zeta I + (1-\zeta)J$ *(ver notación 5.7.2) y como una* δ*-base del ideal* $I \bigcap J$ *es* $G \bigcap \mathbf{C}[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$, *tendremos que la base de* $I\bigcap J$ *viene dada por,* $\{x_1(x_2-x_1)\partial_1\partial_2 + x_1(x_2-x_1)\partial_2^2 + b(x_1)(x_2-x_1)\partial_2 - dx_1\partial_2 - dx_1\partial_1 - b(x_1)d\}$.

Vamos ahora a calcular una base de Gröbner del ideal

$$\langle x_1\partial_1 t + x_1\partial_2 t + b(x_1)t, (1-t)(x_2-x_1)\partial_2 - (1-t)d\rangle \subseteq \mathbf{C}[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2, t]$$

respecto del orden lexicográfico $t > \partial_1 > \partial_2 > x_1 > x_2$.

Consideraremos los operadores,

$$P_1 = tx_1\partial_1 + tx_1\partial_2 + tb(x_1) \text{ y } P_2 = tx_1\partial_2 - tx_2\partial_2 - x_1\partial_2 + x_2\partial_2 + td - d.$$

Por tanto, $S(P_1, P_2) = \partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 =$

$$= tx_1\partial_2^2 + b(x_1)t\partial_2 - t\partial_2 + tx_2\partial_1\partial_2 + x_1\partial_1\partial_2 + \partial_2 - x_2\partial_1\partial_2 - t\partial_1 d + d\partial_1.$$

Dividiendo tenemos que,

$$S(P_1, P_2) - \partial_2 P_2 =$$
$$b(x_1)t\partial_2 + tx_2\partial_1\partial_2 + x_1\partial_1\partial_2 - x_2\partial_1\partial_2 - t\partial_1 d + d\partial_1 + tx_2\partial_2^2 + x_1\partial_2^2 - x_2\partial_2^2 - td\partial_2 + d\partial_2.$$

Como,

$$b(x_1) = b_0 + x_1\widetilde{b}(x_1),\ donde\ gr(\widetilde{b}(x_1)) < gr(b(x_1))\ y\ b_0 \in \mathbf{k}$$

tenemos que,

$$b(x_1)t\partial_2 = \left(b_0 + x_1\widetilde{b}(x_1)\right)t\partial_2 = b_0 t\partial_2 + x_1\widetilde{b}(x_1)t\partial_2.$$

Por tanto,

$$S(P_1, P_2) - \partial_2 P_2 =$$
$$b_0 t\partial_2 + x_1\widetilde{b}(x_1)t\partial_2 + tx_2\partial_1\partial_2 + x_1\partial_1\partial_2 - x_2\partial_1\partial_2 - t\partial_1 d + d\partial_1 + tx_2\partial_2^2 + x_1\partial_2^2 - x_2\partial_2^2 - td\partial_2 + d\partial_2.$$

Así podemos seguir dividiendo y obtendremos que,

$$S(P_1, P_2) - \partial_2 P_2 - \widetilde{b}(x_1)P_2 =$$
$$= b_0 t\partial_2 + tx_2\partial_1\partial_2 + x_1\partial_1\partial_2 - x_2\partial_1\partial_2 - td\partial_1 + d\partial_1 + tx_2\partial_2^2 + x_1\partial_2^2 - x_2\partial_2^2 - td\partial_2 + d\partial_2 +$$
$$+\widetilde{b}(x_1)tx_2\partial_2 + \widetilde{b}(x_1)x_1\partial_2 - \widetilde{b}(x_1)x_2\partial_2 - \widetilde{b}(x_1)td + \widetilde{b}(x_1)d.$$

Este operador, que denotaremos por P_3, no puede reducirse por P_1, P_2. Siguiendo el algoritmo de Buchberger para el caso del Álgebra de Weyl, (ver 1.7), tendremos que añadir este resto a nuestro conjunto de operadores y tendremos que el nuevo conjunto será $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Ahora, tendremos que calcular $S(P_1, P_2)$, $S(P_1, P_3)$ y $S(P_2, P_3)$ y ver si se reducen a cero por división por $\{P_1, P_2, P_3\}$. Tenemos la seguridad de que vamos a tener que añadir, como mínimo un nuevo operador P_4, ya que tiene que existir un operador que no dependa de la variable t para que al hacer la intersección de la base que obtengamos con el anillo $\mathbf{C}[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ no sea el vacío.

Conclusión: El cálculo de $I \bigcap J$ necesita de menos iteraciones con el método de las δ-bases de Gröbner que con el método de las bases de Gröbner.

5.8 δ-bases de Gröbner y sicigias

Sea I un ideal a la izquierda en $B[\partial]$ generado por $\{P_1, \cdots, P_r\} \subset B[\partial]$. Consideramos el homomorfismo sobreyectivo de $B[\partial]$-módulos a la izquierda ϕ definido por

$$\begin{array}{rcl} \phi : (B[\partial])^r & \longrightarrow & I \\ (Q_1, \cdots, Q_r) & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{r} Q_i P_i \end{array}$$

Tendremos que $(B[\partial])^r / Ker(\phi) \simeq I$.

Definición 5.8.1 *Con la notación anterior, al $Ker(\phi)$ se le llama módulo de las sicigias de $(P_1, \cdots, P_r)$. Se le denota por $Sic(P_1, \cdots, P_r)$. Un elemento $(Q_1, \cdots, Q_r)$ de $Sic(P_1, \cdots, P_r)$ se llama una sicigia de $(P_1, \cdots, P_r)$ y verifica: $Q_1 P_1 + \cdots + Q_r P_r = 0$.*

Ejemplo 5.8.2 *Sea $I = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ donde*

$$P_1 = x_1 \partial_1, \quad P_2 = x_1 \partial_2 + x_2 \text{ y } P_3 = x_2 \partial_1 + \partial_2,$$

entonces,

$$\partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 + P_3 = 0$$

luego $(\partial_2, -\partial_1, 1)$ es una sicigia de (P_1, P_2, P_3).

Sea $\{P_1, \cdots, P_r\}$ un subconjunto de $B[\partial]$, donde $\exp^\delta(P_i) = \alpha^i$. Denotamos[6]

$$F_\alpha(P_1, \cdots, P_r) \simeq Sic\left(c^\delta(P_{i_1}), \cdots, c^\delta(P_{i_s})\right) \subseteq B^s$$

si $\alpha = mcm(\alpha^{i_1}, \cdots, \alpha^{i_s})$, $\{i_1, \cdots, i_s\} \subseteq \{1, \cdots, r\}$.

$F_\alpha(P_1, \cdots, P_r)$ tendrá una familia finita de generadores, sea esa familia[7], $\langle \underline{S}_{\alpha,1}, \cdots, \underline{S}_{\alpha,r_\alpha} \rangle$ donde cada $\underline{S}_{\alpha,\tau} = \left(S^{i_1}_{\alpha,\tau}, \cdots, S^{i_s}_{\alpha,\tau}\right)$ con $1 \leq \tau \leq r_\alpha$ verifica $\sum_{j=i_1}^{i_s} S^j_{\alpha,\tau} c^\delta(P_j) = 0$.

Para cada sicigia $\underline{S}_{\alpha,\tau}$ vamos a considerar el S^δ – *operador*, $S^\delta_{\alpha,\tau}$, que por definición es

$$S^\delta_{\alpha,\tau} = \sum_{j=1}^{s} S^{i_j}_{\alpha,\tau} \partial^{\alpha - \alpha^{i_j}} P_{i_j}$$

por tanto, un elemento del ideal generado por los P_{i_j} y tiene la propiedad $\exp^\delta\left(S^\delta_{\alpha,\tau}\right) < \alpha$, (ver 5.4.5).

Supongamos ahora que $\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I, entonces tendremos que cada uno de los $S^\delta_{\alpha,\tau}$ se puede escribir de la forma

$$S^\delta_{\alpha,\tau} = \sum_{j=1}^{r} Q_{\alpha,\tau,j} P_j$$

donde, $\exp^\delta\left(Q_{\alpha,\tau,j} P_j\right) \leq \exp^\delta\left(S^\delta_{\alpha,\tau}\right) < \alpha$.

Notación 5.8.3 *Denotemos por* $R^j_{\alpha,\tau} = \begin{cases} S^j_{\alpha,\tau} \partial^{\alpha - \alpha^j} - Q_{\alpha,\tau,j} & si \quad j \in \{i_1, \cdots, i_s\} \\ -Q_{\alpha,\tau,j} & si \quad j \notin \{i_1, \cdots, i_s\} \end{cases}$, *y sea $\underline{R}_{\alpha,\tau} = \left(R^1_{\alpha,\tau}, \cdots, R^r_{\alpha,\tau}\right)$ que es una sicigia de $(P_1, \cdots, P_r)$, ya que*

$$\sum_{j=1}^{r} R^j_{\alpha,\tau} P_j = 0.$$

Teorema 5.8.4 *Con la notación anterior, $\left\{\underline{R}_{\alpha,\tau}\right\}_{\alpha \in K(P_1, \cdots, P_r), 1 \leq \tau \leq r_\alpha}$ genera $Sic(P_1, \cdots, P_r)$.*

[6] Esta notación difiere ligeramente de la introducida en 5.4.3.
[7] Esta notación difiere ligeramente de la introducida en 5.4.3.

Demostración. Dada $\underline{R} = (R_1, \cdots, R_r) \in Sic(P_1, \cdots, P_r)$, llamaremos

$$\gamma(\underline{R}) = \text{máx}_{1\leq i\leq r}\{\exp^\delta(R_iP_i)\} \quad \text{y} \quad J(\underline{R}) = \{j \in \{1, \cdots, r\} : \exp^\delta(R_jP_j) = \gamma(\underline{R})\}.$$

La demostración la haremos por recurrencia sobre $\{\gamma(\underline{R}) : \underline{R} \in Sic(P_1, \cdots, P_r)\}$.

Sea $\underline{H} = (H_1, \cdots, H_r)$ una sicigia tal que $\gamma = \gamma(\underline{H})$ es el mínimo en el conjunto $\{\gamma(\underline{R}) : \underline{R} \in Sic(P_1, \cdots, P$

Supongamos que $\exp^\delta(H_k) = \beta^k$ y $c^\delta(H_k) = h_k$, es decir

$$H_k = h_k\partial^{\beta^k} + \widehat{H_k} \text{ con } \exp^\delta(\widehat{H_k}) < \beta^k$$

y que

$$P_k = c^\delta(P_k)\partial^{\alpha^k} + \widehat{P_k} \text{ con } \exp^\delta(\widehat{P_k}) < \alpha^k.$$

Observación. Si notamos $J = J(\underline{H})$, tendremos que, $\alpha^j + \beta^j = \gamma$, $\forall j \in J$ y $\alpha^j + \beta^j < \gamma$, $\forall j \notin J$.

Así se verifica que,

$$0 = \sum_{i=1}^{r} H_iP_i = \sum_{j\in J} H_jP_j + \sum_{j\notin J} H_jP_j = \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j} + \widehat{H_j}\right)\left(c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} + \widehat{P_j}\right) + \sum_{j\notin J} H_jP_j =$$

$$= \sum_{j\in J} h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} + \sum_{j\in J} h_j\partial^{\beta^j}\widehat{P_j} + \sum_{j\in J}\widehat{H_j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} + \sum_{j\in J}\widehat{H_j}\widehat{P_j} + \sum_{j\notin J} H_jP_j,$$

donde se verifica que,

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J} h_j\partial^{\beta^j}\widehat{P_j}\right) < \gamma, \qquad \exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\widehat{H_j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right) < \gamma,$$

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\widehat{H_j}\widehat{P_j}\right) < \gamma \quad \text{y} \quad \exp^\delta\left(\sum_{j\notin J} H_jP_j\right) < \gamma$$

y el único operador cuyo δ-exponente puede ser γ será $\sum_{j\in J} h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}$, que en ese caso el δ-coeficiente es $\sum_{j\in J} h_jc^\delta(P_j)$. Pero la suma $\sum_{i=1}^r H_iP_i$ es 0, por tanto el coeficiente anterior también lo será, es decir,

$$\sum_{j\in J} h_jc^\delta(P_j) = 0.$$

Supongamos que $J = \{i_1, \cdots, i_s\}$, $s \geq 2$.

Por tanto, $\underline{h} = (h_{i_1}, \cdots, h_{i_s})$ es una sicigia[8] entre los δ-coeficientes de los operadores $P_1, \cdots, P_r$ es decir,

$$\underline{h} = (h_{i_1}, \cdots, h_{i_s}) \in Sic(c^\delta(P_1), \cdots, c^\delta(P_r)) = F_\alpha(P_1, \cdots, P_r)$$

[8] Como siempre, poniendo un cero donde sea necesario, es decir en el lugar j-ésimo para $j \notin \{i_1, \cdots, i_s\}$.

donde $\alpha = mcm(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s})$, por lo tanto podemos escribir $\underline{h}$ como combinación lineal de los generadores del módulo $Sic(c^\delta(P_1), \cdots, c^\delta(P_r))$, $\underline{S}_{\alpha,\tau}$, es decir,

$$\underline{h} = \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \Lambda_\tau \underline{S}_{\alpha,\tau}, \qquad \Lambda_\tau \in k[x_1, \cdots, x_n]$$

donde la componente j-ésima tendrá la siguiente expresión,

$$h_j = \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau} \tag{5.8.4}$$

Consideramos la expresión

$$\sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau},$$

si desarrollamos la expresión anterior[9], tendremos,

$$\sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau} = \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_1 \underline{R}_{\alpha,1} + \cdots + \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_{r_\alpha} \underline{R}_{\alpha,r_\alpha} =$$

$$= \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_1 \left(R^1_{\alpha,1}, \cdots, R^r_{\alpha,1}\right) + \cdots + \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_{r_\alpha} \left(R^1_{\alpha,r_\alpha}, \cdots, R^r_{\alpha,r_\alpha}\right).$$

Si $\underline{R}_{\alpha,\tau}$ es una sicigia entonces $\Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau}$ es una sicigia, al igual que también lo es $\partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau}$.

Denotamos por

$$\underline{H}' = (H'_1, \cdots, H'_r) = (H_1, \cdots, H_r) - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau},$$

entonces $\underline{H}'$ verifica:

1. $H' \in Sic(P_1, \cdots, P_r)$.
2. Vamos a calcular $\gamma(\underline{H}')$, para ello consideramos la componente j-ésima, con $j \in J(\underline{H})$,

$$H'_j = H_j - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau R^j_{\alpha,\tau}.$$

Probaremos que $\exp^\delta(H'_j P_j) < \gamma$. Se tiene, con la notación de 5.8.3:

$$\sum_{j \in J} H'_j P_j = \sum_{j \in J} \left(H_j - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau R^j_{\alpha,\tau}\right) P_j =$$

$$= \sum_{j \in J} \left(h_j \partial^{\beta^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \left(S^j_{\alpha,\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} - Q^j_{\alpha,\tau}\right) + \widehat{H_j}\right) P_j =$$

$$= \sum_{j \in J} h_j \partial^{\beta^j} P_j - \sum_{j \in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j}\right) P_j + \sum_{j \in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau Q^j_{\alpha,\tau}\right) P_j + \sum_{j \in J} \widehat{H}_j P_j.$$

[9] Nótese que γ es un múltiplo de cada α_{i_j} para $j = \{1, \cdots, s\}$.

Como se verifica que,

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau Q^j_{\alpha,\tau}\right)P_j\right)<\gamma \quad \text{y} \quad \exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\widehat{H}_j P_j\right)<\gamma,$$

seguiremos razonando con

$$\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}P_j-\sum_{j\in J}\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)P_j$$

y así tendremos,

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}-\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)P_j=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}-\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)\left(c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}+\widehat{P}_j\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right)-\sum_{j\in J}\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}+$$

$$+\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}\widehat{P_j}-\sum_{j\in J}\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)\widehat{P_j}.$$

Como

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}\widehat{P_j}\right)<\gamma \text{ y } \exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\widehat{P_j}\right)<\gamma$$

seguimos razonando con

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j);\partial^{\alpha^j}\right);$$

pero

$$\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}=\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha}+A_{\tau,\alpha,j}$$

donde $\exp^\delta(A_{\tau,\alpha,j})<\gamma-\alpha$, así,

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}(\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha}+A_{\tau,\alpha,j})\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}A_{\tau,\alpha,j}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right).$$

Como

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}A_{\alpha,j,\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right)<\gamma-\alpha+\alpha-\alpha^j+\alpha^j=\gamma,$$

seguiremos razonando con

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}-\left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha}\partial^{\alpha-\alpha^j}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right)=$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j}\right);$$

pero

$$\partial^{\gamma-\alpha^j}c^\delta(P_j) = c^\delta(P_j)\partial^{\gamma-\alpha^j} + B_j$$

donde $\exp^\delta(B_j) < \gamma - \alpha^j$, entonces

$$\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\partial^{\gamma-\alpha_j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} = \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}(c^\delta(P_j)\partial^{\gamma-\alpha^j} + B_j)\partial^{\alpha^j} =$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma-\alpha^j}\partial^{\alpha^j} + \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}B_j\partial^{\alpha^j}$$

donde

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}B_j\partial^{\alpha_j}\right) < \gamma - \alpha^j + \alpha^j = \gamma;$$

luego seguiremos razonando con

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma-\alpha^j}\partial^{\alpha^j}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right)$$

pero

$$\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j) = c^\delta(P_j)\partial^{\beta^j} + C_{j,\beta}$$

donde $\exp^\delta(C_{j,\beta}) < \beta_j$, por tanto

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(P_j)\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j(c^\delta(P_j)\partial^{\beta^j} + C_{j,\beta})\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_jc^\delta(P_j)\partial^{\beta^j}\partial^{\alpha^j} + h_jC_{j,\beta}\partial^{\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right);$$

pero, $\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}h_jC_{j,\beta}\partial^{\alpha^j}\right) < \beta^j + \alpha^j = \gamma$, entonces razonamos con

$$\sum_{j\in J}\left(h_jc^\delta(P_j)\partial^{\beta^j+\alpha^j} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_jc^\delta(P_j)\partial^{\gamma} - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}c^\delta(P_j)\partial^{\gamma}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j - \sum_{\tau=1}^{r_\alpha}\Lambda_\tau S^j_{\alpha,\tau}\right)c^\delta(P_j)\partial^{\gamma} = 0,$$

sin más que aplicar la fórmula 5.8.4.

Ahora si tomamos $j \notin J(\underline{H})$ también tendremos que $\exp^\delta(H'_j P_j) < \gamma$, luego $\gamma(H') < \gamma$. La minimalidad de γ implica que, $H' = \underline{0}$ y de ahí que

$$(H_1, \cdots, H_r) = \sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{\alpha,\tau}.$$

Estamos haciendo recurrencia sobre $\{\gamma(\underline{R}) : \underline{R} \in Sic(P_1, \cdots, P_r)\}$. Lo hemos demostrado para $\gamma(\underline{R})$ mínimo. Suponemos el resultado cierto para todo $\underline{R}$ tal que $\gamma(\underline{R}) < \gamma$. Sea $\underline{R}$ tal que $\gamma(\underline{R}) = \gamma$, aplicando el mismo razonamiento obtendríamos una relación $\underline{R}'$ tal que $\gamma(\underline{R}') < \gamma$ y aplicaremos la recurrencia.

□

Ahora tendremos que calcular el módulo de sicigias de un conjunto cualquiera $\{F_1, \cdots, F_s\} \subseteq B[\partial]$.

Primero calculamos una δ-base de Gröbner $G = \{P_1, \cdots, P_r\}$ para el ideal $\langle F_1, \cdots, F_s\rangle$. En 5.7.1 hemos visto que dadas las matrices F y G,

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_s \end{pmatrix} \text{ y } G = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{pmatrix},$$

existen $T \in M_{r\times s}(B[\partial])$ y $S \in M_{s\times r}(B[\partial])$ tales que.

$$G = TF \text{ y } F = SG.$$

Por el teorema 6.6.3 sabemos que $\{\underline{R}_{\alpha,\tau}\}_{\alpha\in mcm(\alpha^1,\cdots,\alpha^r),\, 1\leq\tau\leq r_\alpha}$ genera $Sic\,(P_1, \cdots, P_r)$.

Así podemos suponer que

$$Sic(P_1, \cdots, P_r) = \langle \underline{R}_{\alpha(1)\tau}, \cdots, \underline{R}_{\alpha(l)\tau}\rangle.$$

Por tanto, para cada $i = 1, \cdots, l$ tendremos

$$0 = \underline{R}_{\alpha(i)\tau} G = \underline{R}_{\alpha(i)\tau}(TF) = (\underline{R}_{\alpha(i)\tau} T)F,$$

y de ahí que,

$$\langle \underline{R}_{\alpha(i)\tau} T : i = 1, \cdots, l\rangle \subseteq Sic(F_1, \cdots, F_s).$$

Sea I_s la matriz identidad, tenemos

$$(I_s - ST)F = F - STF = F - SG = F - F = 0,$$

luego, las filas $\underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_s$ de $I_s - ST$ están en $Sic(F_1, \cdots, F_s)$.

Teorema 5.8.5 *Con la notación anterior tenemos*

$$Sic(F_1, \cdots, F_s) = \langle \underline{R}_{\alpha(1)\tau} T, \cdots, \underline{R}_{\alpha(l)\tau} T, \underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_s\rangle \subseteq B[\partial]^s.$$

Demostración. Hemos demostrado que,

$$\langle \underline{R}_{\alpha(1)\tau}T, \cdots, \underline{R}_{\alpha(l)\tau}T, \underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_s \rangle \subseteq Sic(F_1, \cdots, F_s)$$

veamos la inclusión recíproca.
Sea $\underline{R} = (R_1, \cdots, R_s) \in Sic(F_1, \cdots, F_s)$, entonces

$$0 = \underline{R}F = \underline{R}(SG) = (\underline{R}S)G$$

y de ahí que $\underline{R}S \in Sic(P_1, \cdots, P_r)$.
Pero hemos visto en el teorema 6.6.3 que $\{\underline{R}_{\alpha(1)\tau}, \cdots, \underline{R}_{\alpha(l)\tau}\}$ es un conjunto generador de $Sic(P_1, \cdots, P_r)$, entonces,

$$\underline{R}S = \sum_{i=1}^{l} H_i \underline{R}_{\alpha(i)\tau}, \quad H_i \in B[\partial]$$

por tanto tenemos, $\underline{R}ST = \sum_{i=1}^{l} H_i \underline{R}_{\alpha(i)\tau}T$.

Por último,

$$\underline{R} = \underline{R} - \underline{R}ST + \underline{R}ST = \underline{R}(I_s - ST) + \sum_{i=1}^{l} H_i \underline{R}_{\alpha(i)\tau}T = \sum_{i=1}^{s} R_i \underline{r}_i + \sum_{i=1}^{l} H_i \underline{R}_{\alpha(i)\tau}T.$$

Por tanto, $Sic(F_1, \cdots, F_s) \subseteq \langle \underline{R}_{\alpha(1)\tau}T, \cdots, \underline{R}_{\alpha(l)\tau}T, \underline{r}_1, \cdots, \underline{r}_s \rangle$. □

5.9 δ-bases de Gröbner en otros anillos de operadores diferenciales

En esta sección vamos a extender el estudio que hemos hecho anteriormente (en las secciones 5.2 a 5.7) a otros anillos de operadores diferenciales. Esto constituye, también, una extensión del tipo de anillos utilizado por M. Insa y F. Pauer dado en [41] para calcular bases de Gröbner. Consideraremos, en lo que sigue, el anillo $\mathbf{D}$ de 5.1. Sólo indicaremos aquí los cambios que hay que hacer en 5.2-5.7 para adaptar los resultados de las anteriores secciones al anillo $\mathbf{D}$.

5.9.1 Reducción de elementos en $\mathbf{D}$

En esta sección supondremos que la $\mathcal{H} \subset \mathbf{k}((X))$ verifica, además de las condiciones de 5.1, estas otras dos:

a) Dados $\{f_1, \cdots, f_r\} \subseteq \mathcal{H}$ y dado $f \in \mathcal{H}$ tal que f pertenece al ideal $\langle f_1, \cdots, f_r \rangle$, es posible encontrar $q_1, \cdots, q_r \in \mathcal{H}$ tales que $f = \sum_{i=1}^{r} q_i f_i$.

b)Dados $\{f_1, \cdots, f_r\} \subset \mathcal{H}$ es posible encontrar un conjunto de generadores del $\mathcal{H}$-módulo de las sicigias entre $\{f_1, \cdots, f_r\}$.

Los casos particulares $\mathcal{H} = \mathbf{k}[X], \mathbf{k}(X), \mathbf{k}[[X]], \mathbf{k}((X)), \mathbf{k}[[X]][x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ y $\mathbf{k}\{X\}[x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ (con $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$) verifican las condiciones a) y b).

Cuando trabajamos en el anillo $\mathbf{D}$ el concepto de reducción dado en la sección 5.2 varía. Esto lo vamos a ver a continuación.

Definición 5.9.1 *Sean* $F = \{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq \mathbf{D}$ *y* $P \in \mathbf{D}$. *Diremos que* P *es reducido respecto de* F, *si* $\exp^\delta(P) \notin \bigcup_{i=1}^m \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ *o si* $\exp^\delta(P) \in \bigcup_{i=1}^m \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ *entonces* $c^\delta(P) \notin C(\exp^\delta(P), F)$.

Definición 5.9.2 *Sea* I *un ideal de* $\mathbf{D}$. *Diremos que un operador* $P \in \mathbf{D}$ *es reducido respecto de* I, *si* $\exp^\delta(P) \notin \operatorname{Exp}^\delta(I)$ *o si* $\exp^\delta(P) \in \operatorname{Exp}^\delta(I)$ *entonces* $c^\delta(P) \notin C(\exp^\delta(P), I)$.

Notación 5.9.3 *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_m\}$ *un subconjunto no vacío de* $\mathbf{D}$. *Notemos*

$$R(F) = \{R \in \mathbf{D} \,|\, R \text{ es reducido respecto de } F\}.$$

Si I *es un ideal de* $\mathbf{D}$ *entonces notaremos por* $R(I)$ *al siguiente conjunto,*

$$R(I) = \{R \in \mathbf{D} \,|\, R \text{ es reducido respecto de } I\}.$$

Consideramos que $0 \in R(F)$ *para cualquier* $F \subset \mathbf{D}$.

Observación. Contrariamente a la afirmación hecha en la proposición 5.2.8 tenemos que $R(F)$ no tiene estructura de $\mathbf{k}$-espacio vectorial.

Teorema 5.9.4 (Algoritmo de reducción) *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_m\} \subseteq \mathbf{D}$, *entonces, para todo* $P \in \mathbf{D}$ *existen* $Q_1, \cdots, Q_m, R \in \mathbf{D}$ *tales que*

1. $P = \sum_{i=1}^m Q_i P_i + R$.
2. $R \in R(F)$.
3. $\text{máx}\{\exp^\delta(Q_i P_i), \exp^\delta(R)\} = \exp^\delta(P)$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre α, siendo $\exp^\delta(P) = \alpha$.

Sea $\alpha = 0$, es decir $P \in \mathcal{H}$. Podemos considerar dos casos:

1. Si $0 \notin \bigcup_{i=1}^r \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces tendremos que,

$$P = \sum_{i=1}^r 0 P_i + P, \qquad \text{con} \qquad P \in R(F).$$

2. Si $0 \in \bigcup_{i=1}^r \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces consideramos el conjunto $\Lambda = \left\{i \,|\, 0 \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right\}$. Tendremos que $\forall i \in \Lambda$, $P_i \in \mathcal{H}$ y así tenemos que considerar:
   (a) Si $P \in \langle P_i : i \in \Lambda\rangle$ entonces $P = \sum_{i \in \Lambda} q_i P_i$. En este caso $Q_i = q_i$ para todo $i \in \Lambda$. $Q_i = 0$ para todo $i \notin \Lambda$ y $R = 0$.
   (b) Si $P \notin \langle P_i : i \in \Lambda\rangle$ entonces $P \in R(F)$.

Supongamos $\alpha > \underline{0}$ y el resultado cierto para todo $P \in \mathbf{D}$ tal que $\exp^\delta(P) < \alpha$. Consideremos $P \in \mathbf{D}$ con $\exp^\delta(P) = \alpha$. Tenemos que estudiar los siguientes casos:

(a) Si $\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces podemos escribir $P = \sum_{i=1}^{r} 0P_i + P$ con $P \in R(F)$ y ya lo tendríamos.

(b) Supongamos que $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{m} \left(\exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$. Consideremos el conjunto $\Lambda = \left\{ i \,| \alpha \in \exp^{\delta}(P_i) + \mathbf{N}^n \right\}$. Entonces consideramos:

i. Si $c^{\delta}(P) \in C(\alpha, F)$, existen $(q_i)_{i\in\Lambda} \in \mathcal{H}$ tales que

$$c^{\delta}(P) = \sum_{i\in\Lambda} q_i c^{\delta}(P_i).$$

Consideramos,

$$P^{(1)} = P - \sum_{i\in\Lambda} q_i \underline{\partial}^{\gamma^i} P_i, \qquad \text{con} \qquad \gamma^i + \exp(P_i) = \alpha.$$

Como $\exp^{\delta}(P^{(1)}) < \exp^{\delta}(P)$, aplicamos sobre $P^{(1)}$ la hipótesis de inducción y tenemos que existen $Q'_1, \cdots, Q'_m, R' \in \mathbf{D}$ tales que

A. $P^{(1)} = \sum_{j=1}^{m} Q'_j P_j + R'$.

B. Si $R' \neq 0$ entonces $R' \in R(F)$.

Por tanto

$$P = \sum_{j=k}^{m} Q_k P_k + R,$$

donde, $Q_k = Q'_k + q_k \underline{\partial}^{\gamma^k}$ si $k \in \Lambda$, $Q_k = Q'_k$ si $k \notin \Lambda$ y $R' = R$. De este modo, tenemos el resultado que queremos.

ii. Si $c^{\delta}(P) \notin C(\alpha, F)$ entonces $P \in R(F)$ y también obtenemos el resultado que queremos.

$\square$

Nota 5.9.5 *La demostración del teorema anterior nos da un algoritmo para reducir un operador $P \in \mathbf{D}$ respecto de un conjunto $F \subseteq \mathbf{D}$.*

Definición 5.9.6 *El operador $R \in \mathbf{D}$ construido anteriormente es un resto de la reducción de $P \in \mathbf{D}$ por $(P_1, \cdots, P_m) \subseteq \mathbf{D}^m$. El conjunto de los restos obtenidos al reducir P por $(P_1, \cdots, P_m)$ se denota por $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_m)$.*

Observación. Tenemos que,

$$\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \left\{ \begin{array}{ccc} R \in R(F) & | & \exists Q_1, \cdots, Q_r \in \mathbf{D}, \; P - R = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i, \\ & & \exp^{\delta}(P) = \max\{\exp^{\delta}(Q_i P_i)\}. \end{array} \right\}.$$

Teorema 5.9.7 *Sea I un ideal no nulo en $\mathbf{D}$ y $\{P_1, \cdots, P_r\}$ un subconjunto de I. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I.*
2. *Para cualquier $\alpha \in \mathbf{N}^n$, se tiene que*

$$C(\alpha; I) = C(\alpha; P_1, \cdots, P_r).$$

3. Para todo $P \in I$ *se tiene que* $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$.

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$ Análoga a 5.3.10.

$2 \Longrightarrow 3$ Sea $P \in I$, $P \neq 0$, entonces hemos demostrado, (ver 5.9.4 y la definición 5.9.6), que existen $Q_1, \cdots, Q_r, R \in \mathbf{D}$ tales que

$$P = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + R,$$

donde $R \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$.

Supongamos que $R \neq 0$, entonces como

$$R = P - \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i \in I.$$

Podemos considerar los siguientes casos:

1. Supongamos que $\exp^\delta(R) \notin \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces tendremos que $C(\exp^\delta(R); P_1, \cdots, P_r) = (0)$ y por tanto $c^\delta(R) \notin C(\exp^\delta(R); P_1, \cdots, P_r) = C(\exp^\delta(R), I)$ (por 2)).
   Por otro lado como $R \in I$, tendremos que $c^\delta(R) \in C(\exp^\delta(R), I)$.
2. Supongamos $\exp^\delta(R) \in \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$, entonces tendremos que $c^\delta(R) \notin C(\exp^\delta(R); P_1, \cdots, P_r)$ $C(\exp^\delta, I)$ (por 2)). Por otro lado como $R \in I$, tendremos que $c^\delta(R) \in C(\exp^\delta(R), I)$.

Por tanto $R = 0$ y de ahí el resultado que queremos.

$3) \Longrightarrow 1)$ Tenemos que probar la igualdad, tenemos que demostrar que:

$$in^\delta(I) = \langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle.$$

Siempre se verifica que,

$$\langle in^\delta(P_1), \cdots, in^\delta(P_r) \rangle \subseteq in^\delta(I).$$

Veamos la inclusión recíproca.

Sea $P \in I$, $P \neq 0$, entonces P será de la forma

$$P = p_{\alpha_0} \underline{\partial}^{\alpha_0} + \widehat{P} \qquad \text{con} \qquad p_{\alpha_0} \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad \exp^\delta(\widehat{P}) < \alpha_0.$$

Entonces tenemos que:

1. $\exp^\delta(P) \in \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$. Vamos a verlo:
   Si $\exp^\delta(P) \notin \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ entonces tenemos que $0 \neq P \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$.
2. $c^\delta(P) \in C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)$. Vamos a verlo:
   Si $c^\delta(P) \notin C(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r)$, como hemos visto que $\exp^\delta(P) \in \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ entonces $0 \neq P \in \widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r)$.

Por tanto podemos afirmar que para todo $0 \neq P \in I$ de la forma

$$P = p_{\alpha_0}\underline{\partial}^{\alpha_0} + \widehat{P}$$

se tiene que:

$$\alpha_0 \in \bigcup_{i=1}^{r} \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right) \qquad \text{y} \qquad c^\delta(P) \in C\left(\alpha_0; P_1, \cdots, P_r\right).$$

Sea $\Lambda = \left\{ i \,|\alpha_0 \in \exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n \right\}$ entonces $c^\delta(P) = \sum_{i\in\Lambda} q_i^{(1)} c^\delta(P_i)$.

Sea

$$P^{(1)} = P - \sum_{i\in\Lambda} q_i^{(1)} \underline{\partial}^{\gamma^i} P_i, \qquad \text{con} \qquad \gamma^i + \exp^\delta(P_i) = \alpha_0,$$

entonces se verifica que $P^{(1)} \in I$ y $\exp^\delta(P^{(1)}) < \alpha_0$.

Ahora pueden ocurrir dos casos:

1. Si $P^{(1)} = 0$, entonces $P = \sum_{i\in\Lambda} q_i^{(1)} \underline{\partial}^{\gamma^i} P_i$, y, haciendo los cálculos necesarios, obtenemos que
$$in^\delta(P) = \sum_{i\in\Lambda} q_i^{(1)} \zeta^{\gamma^i} in^\delta(P_i).$$
2. Si $P^{(1)} \neq 0$, entonces, siguiendo el mismo razonamiento encontramos $P^{(2)} \in I$ y $\exp^\delta(P^{(2)}) < \exp^\delta(P^{(1)})$ y volvemos a repetir el mismo proceso.
Después de un número finito de pasos, aplicando la hipótesis existe un subíndice k, tal que $P^{(k)} = 0$ por tanto tenemos el resultado que queremos.

$\square$

Análogo al corolario 5.3.12 tenemos el siguiente resultado,

Corolario 5.9.8 *Dado un ideal I de $\mathbf{D}$ se verifica que toda δ-base de I es un sistema generador para I.*

En el anillo $\mathbf{D}$ se verifican los resultados da la proposición 5.3.14. Veamos como se verifican también el resultado del corolario 5.3.16.

Proposición 5.9.9 *Sean I un ideal no nulo en $\mathbf{D}$ y $F = \{P_1, \cdots, P_m\}$ una δ-base de Gröbner de I, entonces $R(I) = R(F)$.*

Demostración. Sea $R \in R(I)$, al ser F una δ-base de Gröbner para I se verifica que:

1. Si $\exp^\delta(R) \notin \bigcup_{i=1}^m \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ ya lo tendríamos.
2. Si $\exp^\delta(R) \in \bigcup_{i=1}^m \left(\exp^\delta(P_i) + \mathbf{N}^n\right)$ entonces $\exp^\delta(R) \in \mathrm{Exp}^\delta(I)$, así $c^\delta(R) \notin C(\exp^\delta(R); I)$ y de ahí que $c^\delta(R) \notin C(\exp^\delta(R); F)$.

Por tanto podemos afirmar que $R \in R(F)$. La inclusión recíproca se demuestra de forma análoga y de ahí la igualdad. $\square$

5.9.2 S^δ-operadores

Definición 5.9.10 *Sean P_1, P_2 elementos no nulos en* $\mathbf{D}$.

1. *Si* $\exp^\delta(P_1) = \alpha^1 = (\alpha_1^1, \cdots, \alpha_n^1)$ *y* $\exp^\delta_(P_2) = \alpha^2 = (\alpha_1^2, \cdots, \alpha_n^2)$, *entonces definimos* $\alpha_i =$ *máx*$\{\alpha_i^1, \alpha_i^2\}$, $1 \leq i \leq n$. *Llamaremos a* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *el* $mcm(\alpha^1, \alpha^2)$.
   Se define análogamente el mínimo común múltiplo de una familia finita de elementos de $\mathbf{N}^n$.
2. *Sea* $F = \{P_1, \cdots, P_r\}$ *un subconjunto finito de* $\mathbf{D}$ *y supongamos que los* P_i *son todos no nulos. Definimos el siguiente conjunto,*
$$K(F) = \left\{\alpha \in \mathbf{N}^n : \exists N \subseteq \{P_1, \cdots, P_r\},\ \alpha = mcm\{\exp^\delta(P); P \in N\}\right\} =$$
$$= \left\{mcm\{\exp^\delta(P); P \in N\};\ para\ todo\ N \subseteq F\right\}.$$

Definición 5.9.11 *Con la notación anterior, para todo* $\alpha \in K(F)$, *definimos*
$$F_\alpha = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathcal{H}^r : \sum_{k=1}^{r} \lambda_k c^\delta(P_k) = 0,\ y\ \lambda_k = 0\ si\ \alpha \notin \exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n\right\}.$$

Observación. Observamos que $F_\alpha \subseteq \mathcal{H}^r$ es naturalmente isomorfo al $\mathcal{H}$-módulo de las sicigias entre los elementos $\left\{c^\delta(P_k) : \alpha \in \exp^\delta(P_k) + \mathbf{N}^n,\ 1 \leq k \leq r\right\}$.

Por tanto F_α es finitamente generado como $\mathcal{H}$-módulo. Sea $(\lambda_1^\tau, \cdots, \lambda_r^\tau)$, $1 \leq \tau \leq r_\alpha$ un sistema de generadores de F_α.

Para $\tau = 1, \cdots, r_\alpha$ consideramos
$$S^\delta_{\alpha,\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta(P_k)} P_k$$
a estas expresiones $S^\delta_{\alpha,\tau}$ les denominamos S^δ-operadores.

Se verifica, análogamente a 5.4.5 tenemos la siguiente proposición,

Proposición 5.9.12 *Con la notación anterior, se verifica que*
$$\exp^\delta\left(S^\delta_{\alpha,\tau}\right) < \alpha.$$

Demostración.
$$S^\delta_{\alpha,\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta(P_k)} P_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta(P_k)} \left(c^\delta(P_k) \partial^{\exp^\delta(P_k)} + \sum_{\beta < \exp^\delta(P_k)} p_{\beta,k} \partial^\beta \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta(P_k)} c^\delta(P_k) \partial^{\exp^\delta(P_k)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha - \exp^\delta(P_k)} \sum_{\beta < \exp^\delta(P_k)} p_{\beta,k} \partial^\beta =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} c^{\delta}(P_k) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta<\exp^{\delta}(P_k)} \lambda_k^{\tau} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} \partial^{\beta}.$$

Se tiene,

$$\partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} c^{\delta}(P_k) = c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + A_k, \text{ con } \exp^{\delta}(A_k) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k)$$

y

$$\partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} p_{\beta,k} = p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + B_k, \text{ con } \exp^{\delta}(B_k) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k).$$

Luego,

$$S_{\alpha,\tau}^{\delta} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} \left(c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + A_k \right) \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta<\exp^{\delta}(P_k)} \lambda_k^{\tau} \left(p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)} + B_k \right) \partial^{\beta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} c^{\delta}(P_k) \partial^{\alpha} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{\beta<\exp^{\delta}(P_k)} \left(\lambda_k^{\tau} p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)+\beta} + B_k \partial^{\beta} \right).$$

Se tiene que: $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} c^{\delta}(P_k) = 0$,

$$\exp^{\delta} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} \right) \leq \text{máx}_{1 \leq k \leq r} \left\{ \exp^{\delta} \left(\lambda_k^{\tau} A_k \partial^{\exp^{\delta}(P_k)} \right) \right\} =$$

$$= \text{máx}_{1 \leq k \leq r} \left(\exp^{\delta}(A_k) + \exp^{\delta}(P_k) \right) < \alpha,$$

$$\exp^{\delta} \left(\lambda_k^{\tau} p_{\beta,k} \partial^{\alpha-\exp^{\delta}(P_k)+\beta} \right) = \alpha - \exp^{\delta}(P_k) + \beta < \alpha,$$

y

$$\exp^{\delta} \left(B_k \partial^{\beta} \right) = \exp^{\delta}(B_k) + \exp^{\delta}(\partial^{\beta}) < \alpha - \exp^{\delta}(P_k) + \beta < \alpha.$$

Por tanto, podemos concluir que,

$$\exp^{\delta} \left(S_{\alpha,\tau}^{\delta} \right) < \alpha.$$

□

Los resultados que vienen a continuación son análogos a los obtenidos en el caso del anillo $B[\partial]$, por tanto creo que podría generalizarse los apartados 5.3 y 5.4 al caso del anillo $\mathbf{D}$.

Proposición 5.9.13 *Sea $I = \langle P_1, \cdots, P_r \rangle$ un ideal no nulo en $\mathbf{D}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\{P_1, \cdots, P_r\}$ es una δ-base de Gröbner de I.*
2. *Para todo $P \in I$, se tiene que $\widetilde{R}(P; P_1, \cdots, P_r) = \{0\}$.*
3. *Para todo S^{δ}-operador $S_{\alpha,\tau}^{\delta}$ de $\langle P_1, \cdots, P_r \rangle$ se tiene que $0 \in \widetilde{R}\left(S_{\alpha,\tau}^{\delta}; P_1, \cdots, P_r\right)$.*

*Demostración.*Análoga a la demostración de la proposición 5.9.7. □

5.9.3 Algoritmo de cálculo de una δ-base de Gröbner

Sea I un ideal no nulo de $\mathbf{D}$ y $F \subseteq I$ un sistema finito generador de I, es decir, $I = \langle F \rangle$.

Elegimos un orden sobre los elementos de F, sea $F = (P_1, \cdots, P_r)$. Sea $K(P_1, \cdots, P_r) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$, para todo $j = 1, \cdots, s$ calculamos los S^δ-operadores de $\{P_1, \cdots, P_r\}$ en α_j. Sea $\left(S^\delta_{\alpha_j,\tau}\right)_{\substack{1 \leq \tau \leq r_j \\ 1 \leq j \leq s}}$ la familia de los S^δ-operadores.

Supongamos que $\{P_1, \cdots, P_r\}$ no es δ-base de Gröbner para I, entonces por la proposición 5.9.13, existe un S^δ-operador de $\{P_1, \cdots, P_r\}$, $S^\delta_{\alpha_0,\tau}$ tal que $0 \notin \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha_0,\tau}; P_1, \cdots, P_r\right)$.

Sea $P_{r+1} \in \widetilde{R}\left(S^\delta_{\alpha_0,\tau}; P_1, \cdots, P_r\right)$ y volvemos a razonar con el conjunto $\{P_1, \cdots, P_r, P_{r+1}\}$.

Proposición 5.9.14 *Con la notación anterior, el proceso anterior se termina, es decir existe $\rho \in \mathbf{N}$ tal que para todo S^δ-operador S de $\{P_1, \cdots, P_{r+\rho}\}$ se verifica que $\widetilde{R}(S; P_1, \cdots, P_{r+\rho}) = \{0\}$.*

Demostración. Análoga a 5.5.1 □

5.9.4 δ-bases de Gröbner y sicigias

El cálculo de sicigias en el caso de los anillos $\mathcal{H}[\partial]$ se hace de forma totalmente análoga al caso 5.8.

Capítulo 6

δ-Bases de Gröbner para módulos

Para todo $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, se escribirá

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Si m es un entero positivo y $(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ se escribirá

$$\partial^{(\alpha,i)} = (0, \cdots, \partial^\alpha, \cdots, 0),$$

estando el monomio situado en el i-ésimo lugar.

Para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$ y para todo $(\beta, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ escribiremos,

$$\alpha + (\beta, i) = (\alpha + \beta, i).$$

$B[\partial]^m$ es el conjunto de expresiones formales, (sumas finitas)

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i)\in \mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}(x)\partial^{(\alpha,i)}, \quad \text{donde } p_{(\alpha,i)}(x) \in \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n]$$

.

En este conjunto definimos la suma usual,

$$\begin{array}{rcl} B[\partial]^m \times B[\partial]^m & \longrightarrow & B[\partial]^m \\ (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) & \longrightarrow & \mathbf{P} + \mathbf{Q} \end{array}$$

Definimos el producto a la izquierda por elementos de $B[\partial]$,

$$\begin{array}{rcl} B[\partial] \times B[\partial]^m & \longrightarrow & B[\partial]^m \\ (R, \mathbf{Q}) & \longrightarrow & (RQ_1, \cdots, RQ_m) \end{array}$$

donde $\mathbf{Q} = (Q_1, \cdots, Q_m)$.

Con las operaciones definidas anteriormente, $B[\partial]^m$ es un $B[\partial]$-módulo libre a la izquierda.

En los capítulos anteriores hemos visto que $B[\partial]^m$ tiene submódulos particulares importantes, como por ejemplo el módulo de las sicigias. A continuación vamos a generalizar la construcción de δ-bases de Gröbner para los submódulos de $B[\partial]^m$.

Consideraremos la base canónica de $B[\partial]^m$,

$$\mathrm{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, \mathrm{e}_m = (0, 0, \cdots, 1).$$

6.1 Relaciones de orden sobre $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$. Exponentes privilegiados

Definición 6.1.1 *Un orden monomial sobre $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ es un orden total $\prec$ sobre $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ tal que,*

1. $\mathbf{a} \prec \alpha + \mathbf{a}$ *para cualquier* $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$, $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$.
2. *Si* $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ *(con* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$*) entonces* $\alpha + \mathbf{a} \prec \alpha + \mathbf{b}$ *para cualquier* $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Esta definición coincide en el caso $m = 1$ con la definición usual de orden monomial en $\mathbf{N}^n$. Vamos a definir un un orden monomial concreto sobre $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ que será el que utilizaremos en todos nuestros razonamientos posteriores.

Definición 6.1.2 *Dado un orden monomial, $<$, en $\mathbf{N}^n$ definimos en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ la siguiente relación $\prec$*

$$(\alpha, i) \prec (\beta, j) \iff \begin{cases} \alpha < \beta \\ o \\ \alpha = \beta \quad e \quad i < j. \end{cases}$$

A este orden le llamaremos orden TOP (ver [1]).

Es obvio que, con la notación anterior, se verifica que $\prec$ es un orden monomial sobre $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$.

Sea $\mathbf{P}$ un elemento no nulo de $B[\partial]^m$, entonces este elemento se escribirá de la forma,

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i) \in \mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}(x) \partial^{(\alpha,i)} \quad \text{donde} \quad p_{(\alpha,i)}(x) \in B;$$

También se puede escribir,

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \sum_{i=1}^{m} p_\alpha(x) \partial^\alpha \mathbf{e}_i \quad \text{donde} \quad p_\alpha(x) \in B.$$

Ejemplo 6.1.3 *Sea*

$$\mathbf{P} = \left(x^2 \partial_x + 1, (x^2 + y)\partial_x \partial_y - y\right) \in B[\partial_x, \partial_y]^2, \qquad \text{con} \qquad B = \mathbf{k}[x, y].$$

Definición 6.1.4 *Con la notación anterior, llamaremos δ-diagrama de Newton de $\mathbf{P} \in B[\partial]^m$ al siguiente conjunto,*

$$\mathcal{N}^\delta(\mathbf{P}) = \left\{(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\} : p_{(\alpha,i)} \neq 0\right\}.$$

Ejemplo 6.1.5 *Si consideramos el vector $\mathbf{P}$ del ejemplo 6.1.3, tendremos*

$$\mathcal{N}^\delta(\mathbf{P}) = \{((1, 0), 1), ((0, 0), 1), ((1, 1), 2), ((0, 0), 2)\}.$$

Definición 6.1.6 *Dado un orden monomial $<$ en $\mathbf{N}^n$ y con la notación anterior, llamaremos δ-exponente de un operador $\mathbf{P} \in \mathbf{B}[\partial]^{\mathbf{m}}$ (respecto de $\prec$) y lo denotaremos $\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P})$, a la siguiente expresión*

$$\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P}) = \textit{máx}_{\prec}\{\mathcal{N}^{\delta}(\mathbf{P})\}.$$

Ejemplo 6.1.7 *En el ejemplo 6.1.3 tenemos que,*

$$((0,0),1) \prec ((0,0),2) \prec ((1,0),1) \prec ((1,1),2)$$

por tanto,

$$\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P}) = ((1,1),2).$$

Nota 6.1.8 *Si $\exp_{\prec}(\mathbf{P}) = (0,i)$ para algún $i \in \{1, \cdots, m\}$ entonces $\mathbf{P} \in B^m$.*

Es fácil probar que (ver 5.1.5 para el caso $m = 1$), dados $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q} \in B[\partial]^m$, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{N}^{\delta}(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{N}^{\delta}(\mathbf{P}) \cup \mathcal{N}^{\delta}(\mathbf{Q})$.
2. $\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) \preceq \text{máx}\{\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P}), \exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{Q})\}$.

Nota 6.1.9 *Cuando no haya riesgo de confusión notaremos $\exp^{\delta}(\mathbf{P})$ en lugar de $\exp^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P})$.*

Definición 6.1.10 *Dado $\mathbf{P} \in B[\partial]^m$, siendo*

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i)\in\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}(x)\partial^{(\alpha,i)}$$

llamaremos δ-coeficiente principal de $\mathbf{P}$ y lo denotaremos por $c^{\delta}_{\prec}(\mathbf{P})$ (o simplemente $c^{\delta}(\mathbf{P})$ si no hay riesgo de confusión) a la siguiente expresión,

$$c^{\delta}(\mathbf{P}) = p_{(\alpha,i)}(x) \quad \textit{siendo} \quad (\alpha,i) = exp^{\delta}(\mathbf{P}).$$

Ejemplo 6.1.11 *En el ejemplo 6.1.3 tendremos que, $c^{\delta}(\mathbf{P}) = x^2 + y$.*

Proposición 6.1.12 *Sean $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q} \in B[\partial]^m$. Si $\exp^{\delta}(\mathbf{P}) = \exp^{\delta}(\mathbf{Q})$, entonces,*

1. *Si $c^{\delta}(\mathbf{P}) + c^{\delta}(\mathbf{Q}) \neq 0$, entonces, $\exp^{\delta}(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \exp^{\delta}(\mathbf{P}) = \exp^{\delta}(\mathbf{Q})$.*
2. *Si $c^{\delta}(\mathbf{P}) + c^{\delta}(\mathbf{Q}) = 0$, entonces, $\exp^{\delta}(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) \prec \exp^{\delta}(\mathbf{P}) = \exp^{\delta}(\mathbf{Q})$.*

Proposición 6.1.13 *Con la notación anterior se verifica que,*

$$\exp^{\delta}(P\mathbf{Q}) = \exp^{\delta}(P) + \exp^{\delta}(\mathbf{Q}), \quad \textit{para cualesquiera } P \in B[\partial],\ \mathbf{Q} \in B[\partial]^m.$$

6.2 Partición asociada a un elemento de $(\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\})^r$

Sea $((\alpha^1, i^1), \cdots, (\alpha^r, i^r)) \in (\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\})^r$. Se considera la familia de subconjuntos de $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$, Δ^j, $(1 \leq j \leq r)$ definida por

$$\begin{aligned} \Delta^1 &= (\alpha^1, i^1) + \mathbf{N}^n, \\ \Delta^j &= ((\alpha^j, i^j) + \mathbf{N}^n) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} \Delta^j\right), \; 2 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Se escribe $\Delta = \bigcup_{j=1}^{r} \Delta^j$ y $\overline{\Delta} = (\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}) \setminus \Delta$. La familia $\{\Delta^1, \cdots, \Delta^r, \overline{\Delta}\}$ es una partición de $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$. Esta familia puede tener elementos iguales al conjunto vacío. Esta familia se llamará la partición asociada al elemento $((\alpha^1, i^1), \cdots, (\alpha^r, i^r)) \in (\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\})^r$.

Notación 6.2.1 *Sea M un submódulo de $B[\partial]^m$, $M \neq (\underline{0})$, notaremos* $\mathrm{Exp}^{\delta}_{\prec}(M)$ *(o simplemente $Exp^{\delta}(M)$ cuando no haya riesgo de confusión) al conjunto*

$$\mathrm{Exp}^{\delta}(M) = \{\exp^{\delta}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \in M \setminus (\underline{0})\} \subseteq \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}.$$

Lema 6.2.2 *Con la notación anterior, se verifica,*

$$\mathrm{Exp}^{\delta}(M) + \mathbf{N}^n = \mathrm{Exp}^{\delta}(M)$$

es decir, $\mathrm{Exp}^{\delta}(M)$ *es invariante por traslaciones en* $\mathbf{N}^n$.

Demostración. Siempre se verifica que $\mathrm{Exp}^{\delta}(M) \subseteq \mathrm{Exp}^{\delta}_{\prec}(M) + \mathbf{N}^n$. Demostraremos la inclusión recíproca; sea $((\alpha, i), \beta) \in \mathrm{Exp}^{\delta}(M) \times \mathbf{N}^n$, entonces existe $\mathbf{P} \in M$, tal que $\exp^{\delta}(\mathbf{P}) = (\alpha, i)$; tendremos que $\partial^{\beta}\mathbf{P} \in M$ al ser M un submódulo de $B[\partial]^m$ y $\exp^{\delta}(\partial^{\beta}\mathbf{P}) = ((\alpha + \beta, i) \in \mathrm{Exp}^{\delta}(M)$. Así tenemos que $\mathrm{Exp}^{\delta}(M) + \mathbf{N}^n \subseteq \mathrm{Exp}^{\delta}(M)$ y con ello la igualdad. □

Notación 6.2.3 *Vamos a considerar el $B[\zeta]$-módulo, $B[\zeta]^m$ donde $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ y las variables ζ_i son conmutativas, es decir, verifican:*

$$[\zeta_i, \zeta_j] = [\zeta_i, x_j] = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Sea $\mathbf{u_j}$, $j = 1, \cdots, m$ la base canónica de $B[\zeta]^m$.

Definición 6.2.4 *Dado*

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i) \in \mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}(x) \partial^{(\alpha,i)}$$

donde $p_{(\alpha,i)}(x) \in B$, un elemento no nulo del $B[\partial]$-módulo $B[\partial]^m$, se llama δ-forma inicial de $\mathbf{P}$, y se denota por $in^{\delta}(\mathbf{P})$ a

$$in^{\delta}(\mathbf{P}) = p_{(\alpha,i)}\zeta^{(\alpha,i)} = p_{(\alpha,i)}\zeta^{\alpha}\mathbf{u_i} \in B[\zeta]^m,$$

donde $(\alpha, i) = \exp^{\delta}(\mathbf{P})$.

Ejemplo 6.2.5 *En el ejemplo 6.1.3 tenemos que*

$$in^{\delta}(\mathbf{P}) = (0, (x^2 + y)\zeta_1\zeta_2).$$

Definición 6.2.6 *Sea M un submódulo no nulo de $B[\partial]^m$, se llama δ-módulo inicial de M, y se denota por $in^\delta(M)$, al submódulo generado por $\{in^\delta(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \in M \setminus (\underline{0})\}$ en $B[\zeta]^m$.*

Proposición 6.2.7 *Sean $(P, \mathbf{Q}) \in B[\partial] \times B[\partial]^m$, entonces se verifica que,*

$$in^\delta(P\mathbf{Q}) = in^\delta(P) in^\delta(\mathbf{Q}).$$

Demostración. Sean

$$P \in B[\partial],\ P = p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha \partial^\alpha.$$

Así,

$$\exp^\delta(P) = \alpha_0, \quad in^\delta(P) = p_{\alpha_0}\zeta^{\alpha^{\alpha_0}}$$

y

$$\mathbf{Q} \in B[\partial]^r, \quad \mathbf{Q} = q_{(\beta_0,i)}\partial^{(\beta_0,i)} + \sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} q_{(\beta,j)}\partial^{(\beta,j)}.$$

Así,

$$\exp^\delta(\mathbf{Q}) = (\beta_0, i), \quad in^\delta(\mathbf{Q}) = q_{(\beta_0,i)}\zeta^{(\beta_0,i)}$$

$$\begin{aligned}
P\mathbf{Q} &= \left(p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha\right)\left(q_{(\beta_0,i)}\partial^{(\beta_0,i)} + \sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} q_{(\beta,j)}\partial^{(\beta,j)}\right) = \\
&= p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0} q_{(\beta_0,i)}\partial^{(\beta_0,i)} + p_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0}\left(\sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} q_{(\beta,j)}\partial^{(\beta,j)}\right) + \\
&+ \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha q_{(\beta_0,i)}\partial^{(\beta_0,i)} + \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\partial^\alpha \sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} q_{(\beta,j)}\partial^{(\beta,j)} = \\
&= p_{\alpha_0}\left(q_{(\beta_0,i)}\partial^{\alpha_0} + S_1\right)\partial^{(\beta_0,i)} + \sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} p_{\alpha_0}\left(q_{(\beta,j)}\partial^{\alpha_0} + S_2\right)\partial^{(\beta,j)} + \\
&+ \sum_{\alpha<\alpha_0} p_\alpha\left(q_{(\beta_0,i)}\partial^\alpha + S_3\right)\partial^{(\beta_0,i)} + \sum_{\alpha<\alpha_0}\sum_{(\beta,j)<(\beta_0,i)} p_\alpha\left(q_{(\beta,j)}\partial^\alpha + S_4\right)\partial^{(\beta,j)}
\end{aligned}$$

donde,

$$\exp^\delta(S_1) < \alpha_0,\ \exp^\delta(S_2) < \alpha_0,\ \exp^\delta(S_3) < \alpha,\ \exp^\delta(S_4) < \alpha.$$

Por tanto,

$$P\mathbf{Q} = p_{\alpha_0}q_{(\beta_0,i)}\partial^{\alpha_0+(\beta_0,i)} + \sum_{\alpha+(\beta,j)<\alpha_0+(\beta_0,i)} p_\alpha q_{(\beta,j)}\partial^{\alpha+(\beta,j)}.$$

Así

$$\begin{aligned}
in^\delta(P\mathbf{Q}) &= in^\delta\left(p_{\alpha_0}q_{(\beta_0,i)}\partial^{\alpha_0+(\beta_0,i)}\right)\mathbf{u_i} = p_{\alpha_0}q_{(\beta_0,i)}\zeta^{\alpha_0+\beta_0,i} = p_{\alpha_0}q_{(\beta_0,i)}\zeta^{\alpha_0}\zeta^{(\beta_0,i)} = \\
&= in^\delta(P) in^\delta(\mathbf{Q}).
\end{aligned}$$

□

Observación. Si $M = \langle \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\rangle \subseteq B[\partial]^m$, entonces siempre se verifica que,

$$\langle in^\delta(\mathbf{P}_1), \cdots, in^\delta(\mathbf{P}_r)\rangle \subseteq in^\delta(M).$$

El recíproco no es cierto en general, como sabemos que ocurre en el caso $m = 1$. Veamos ahora un ejemplo para $m > 1$,

Ejemplo 6.2.8 *Sea* $M = \langle \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \rangle$, *siendo* $\mathbf{P}_1 = (x_1\partial_1, 0)$ *y* $\mathbf{P}_2 = (x_1\partial_2 + x_2, 0)$.

Entonces se tiene,

$$\exp^\delta(\mathbf{P}_1) = ((1,0),1), \quad in^\delta(\mathbf{P}_1) = (x_1\zeta_1, 0)$$

y

$$\exp^\delta(\mathbf{P}_2) = ((0,1),1), \quad in^\delta(\mathbf{P}_2) = (x_1\zeta_2, 0).$$

Si consideramos $\mathbf{P}_3 = \partial_2\mathbf{P}_1 - \partial_1\mathbf{P}_2 = (-x_2\partial_1 - \partial_2, 0)$, *entonces tenemos que*

$$\exp^\delta(\mathbf{P}_3) = ((1,0),1), \quad in^\delta(\mathbf{P}_3) = (-x_2\zeta_1, 0)$$

donde

$$in^\delta(\mathbf{P}_3) = (-x_2\zeta_1, 0) \notin \langle in^\delta(\mathbf{P}_1), in^\delta(\mathbf{P}_2) \rangle.$$

Definición 6.2.9 *Dado un submódulo* $M \neq \{\underline{0}\}$ *de* $B[\partial]^m$, *diremos que un subconjunto finito* $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ *de* M *es una* δ*-base de Gröbner de* M *si se verifica que,*

$$in^\delta(M) = \langle in^\delta(\mathbf{P}_1), \cdots, in^\delta(\mathbf{P}_r) \rangle.$$

Ejemplo 6.2.10 *Sea* M *un submódulo de* $B[\partial]^m$, *tal que* $M = \langle \mathbf{P}_1 \rangle$, $\mathbf{P}_1 \in B[\partial]^m$, *entonces*

$$\langle in^\delta(\mathbf{P}_1) \rangle = in^\delta(M).$$

La inclusión $\langle in^\delta(\mathbf{P}_1) \rangle \subseteq in^\delta(M)$ *es obvia. Veamos la recíproca. Para todo* $\mathbf{P} \in M$, *tendremos que,* $\mathbf{P} = Q\mathbf{P}_1$, *donde* $Q \in B[\partial]$, *entonces*

$$in^\delta(\mathbf{P}) = in^\delta(Q\mathbf{P}_1) = in^\delta(Q) in^\delta(\mathbf{P}_1) \in \langle in^\delta(\mathbf{P}_1) \rangle.$$

Definición 6.2.11 *Sea* F *un subconjunto no vacío de* $B[\partial]^m$ *y* $(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$. *Definimos*

$$K((\alpha,i), F) = \left\{ p \in B : \exists \mathbf{P} \in F,\ \mathbf{P} \neq 0,\ c^\delta(\mathbf{P}) = p,\ (\alpha, i) \in \exp^\delta(\mathbf{P}) + \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\} \right\}.$$

Ejemplo 6.2.12 *Sea* $F = \{(x\partial_x, y\partial_x), (x\partial_y, x\partial_x\partial_y)\}$. *Consideremos el orden TOP (ver 6.1.2) con* $\partial_x > \partial_y$. *Tenemos que,*

$$\exp^\delta(x\partial_x, y\partial_x) = ((1,0),2),\ c^\delta(x\partial_x, y\partial_x) = y,$$
$$\exp^\delta(x\partial_y, x\partial_x\partial_y) = ((1,1),2),\ c^\delta(x\partial_y, x\partial_x\partial_y) = x,$$

así

$$K(((0,0),1), F) = K(((0,0),2), F) = \emptyset,$$
$$K(((1,0),1), F) = \emptyset,\ K(((1,0),2), F) = \{y\},$$
$$K(((0,1),1), F) = K(((0,1),2), F) = \emptyset,$$
$$K(((1,1),1), F) = \emptyset,\ K(((1,1),2), F) = \{x, y\}.$$

Observación. Si $p_{(\beta,i)} \in K((\alpha,i), F)$, entonces existe $\mathbf{P} \in F$ tal que

$$in^\delta(\mathbf{P}) = p_{(\beta,i)}\zeta^{(\beta,i)}, \quad (\alpha, i) \in (\beta, i) + \mathbf{N}^n.$$

Definición 6.2.13 *Se denota por $C((\alpha,i),F)$ al ideal en B generado por el conjunto $K((\alpha,i),F)$, es decir*

$$C((\alpha,i),F) = \langle K((\alpha,i),F)\rangle \subseteq B.$$

Si $K((\alpha,i),F)=\emptyset$, entonces $C((\alpha,i),F)=(0)$.

Ejemplo 6.2.14 *En el ejemplo anterior tenemos que,*

$$C(((0,0),1),F) = C(((0,0),2),F) = C(((1,0),1),F) = (0),$$
$$C(((1,0),2),F) = \langle y\rangle,$$
$$C(((0,1),1),F) = C(((0,1),2),F) = C(((1,1),1),F) = (0),$$
$$C(((1,1),2),F) = \langle x,y\rangle.$$

6.3 Noción de vector reducido respecto de un ideal en B y un orden monomial.

Definición 6.3.1 *Sea F un subconjunto no vacío de $B[\partial]^m$. Definimos el siguiente conjunto,*

$$R(F) =$$
$$= \left\{ \sum_{(\alpha,i)\in\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}\partial^{(\alpha,i)} : p_{(\alpha,i)}(x)\in B,\ p_{(\alpha,i)}(x) \text{ es reducido respecto a } C((\alpha,i),F) \right\}.$$

Definición 6.3.2 *Sea $F=\{\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r\}\subseteq B[\partial]^m$, y sea*

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i)\in\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,m\}} p_{(\alpha,i)}\partial^{(\alpha,i)} \in B[\partial]^m$$

diremos que $\mathbf{P}$ es reducido módulo F si $\mathbf{P}\in R(F)$.

Teorema 6.3.3 *Sea $F=\{\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r\}$ un subconjunto de $B[\partial]^m$ tal que $\mathbf{P}_i\neq 0$, $1\leq i\leq r$. Entonces, para todo $\mathbf{P}\in B[\partial]^m$ existe un elemento $(Q_1,\cdots,Q_r,\mathbf{R})\in B[\partial]^r\times B[\partial]^m$ tal que,*

1. $\mathbf{P}=\sum_{i=1}^r Q_i\mathbf{P}_i+\mathbf{R}$.
2. $\mathbf{R}\in R(F)$. *Además* $\exp^\delta(\mathbf{P}) = máx_{1\leq i\leq r}\{\exp^\delta(Q_i\mathbf{P}_i),\exp^\delta(\mathbf{R})\}$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre $\exp^\delta(\mathbf{P})$. Sea $\exp^\delta(\mathbf{P})=(\beta,i)$.

- Si $\beta=0$, entonces, debido al orden que hemos elegido en $\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,r\}$, (ver 6.1.8) $\mathbf{P}\in B^m$ y consideramos dos casos:

1. Si $\mathbf{P} \in R(F)$, en ese caso podemos afirmar que,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{r} 0\mathbf{P_i} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} \in R(F).$$

2. Supongamos que $\mathbf{P} \notin R(F)$ entonces si

$$\mathbf{P} = \sum_{(\alpha,i)\in\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,r\}} p_{(\alpha,i)}$$

tendremos que existe algún $p_{(\alpha_0,i)}$ tal que no es reducido respecto de $C((0,i),F)$, en ese caso dividimos $p_{(\alpha_0,i)}$ entre $C((0,i),F)$ y obtenemos $r_{(\alpha_0,i)}$, es decir,

$$p_{(\alpha_0,i)} = \sum_{j\in\Lambda} q_j(x)c^\delta(\mathbf{P}_j) + r_{(0,i)},$$

donde $r_{(0,i)} = r(p_{(0,i)}; C((0,i),F))$ y $\Lambda = \{i \mid (0,i) \in \exp(\mathbf{P_j}) + \mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}\}$.

- Suponemos que $\beta \succ 0$ y el resultado cierto para todo $(\beta',j) \prec (\beta,i)$.
- Dado que los conjuntos $\Delta^1, \Delta^2, \cdots, \Delta^r, \overline{\Delta}$ constituyen una partición de $\mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}$ tendremos que considerar los casos 1) $\exp^\delta(\mathbf{P}) \in \overline{\Delta}$ y 2) $\exp^\delta(\mathbf{P}) \in \Delta_{i_0}$ para algún i_0. Vamos a verlo,

1. Si $\exp^\delta(\mathbf{P}) \in \overline{\Delta}$, entonces consideramos

$$\mathbf{P} = c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \widehat{\mathbf{P}}$$

donde $\exp^\delta(\widehat{\mathbf{P}}) \prec \exp^\delta(\mathbf{P})$.

Entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a $\widehat{\mathbf{P}}$ y tendremos que,

$$\widehat{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{r} Q_i\mathbf{P_i} + \mathbf{R}$$

donde $\mathbf{R} \in R(F)$, por tanto,

$$\mathbf{P} = c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \sum_{i=1}^{r} Q_i\mathbf{P}_i + \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{r} Q_i\mathbf{P}_i + \left(c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \mathbf{R}\right)$$

donde $c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \mathbf{R} \in R(F)$, ya que $c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} \in R(F)$ al verificarse que $(\beta,i) \in \overline{\Delta}$, es decir $C((\beta,i),F) = 0$.

2. Si $(\beta,i) \in \Delta_{i_0}$, es decir, $(\beta,i) = \exp^\delta_\prec(\mathbf{P}_{i_0}) + \alpha$. Entonces escribimos $\mathbf{P} = c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,\mathbf{i})} + \widehat{\mathbf{P}}$ donde $\exp^\delta(\widehat{\mathbf{P}}) \prec \exp^\delta_\prec(\mathbf{P})$.
Puede ocurrir:
   (a) Si $c^\delta(\mathbf{P})$ es reducido en $C((\beta,i),F)$ entonces ya estaría ya que aplicaríamos la hipótesis de inducción a $\widehat{\mathbf{P}}$ y tendríamos que

$$\mathbf{P} = c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \sum_{i=1}^{r} Q_i\mathbf{P}_i + \mathbf{R}$$

   donde $c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} + \mathbf{R} \in R(F)$.

(b) Si $c^\delta(\mathbf{P})$ no es reducido en $C((\beta,i),F)$. Supongamos que $\{j_0,\cdots,j_s\}$ es el conjunto de subíndices tales que

$$K((\beta,i),F)=\left\{c^\delta(\mathbf{P}_{j_0}),\cdots,c^\delta(\mathbf{P}_{j_s})\right\}$$

donde $(\beta,i)\in \exp^\delta(\mathbf{P}_{j_h})+\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,m\}$ con $h=0,\cdots,s$. Escribamos $(\beta,i)=\exp^\delta(\mathbf{P}_{j_h})$, para ciertos $\alpha^{j_h}\in\mathbf{N}^n$.
Entonces, por 1.3

$$c^\delta(\mathbf{P})=\sum_{h=0}^{s} q_h c^\delta(\mathbf{P}_{j_h})+r^\beta$$

donde r^β es reducido respecto de $C((\beta,i),F)$ y por tanto

$$\begin{aligned}
c^\delta(\mathbf{P})\partial^{(\beta,i)} &= \sum_{h=0}^{s} q_h c^\delta(\mathbf{P}_{j_h})\partial^{(\beta,i)}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h c^\delta(\mathbf{P}_{j_h})\partial^{\exp^\delta_\prec(\mathbf{P}_{j_h})+\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h c^\delta(\mathbf{P}_{j_h})\partial^{\exp^\delta_\prec(\mathbf{P}_{j_h})}\partial^{\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h\left(\mathbf{P}_{j_h}-\widehat{\mathbf{P}_{j_h}}\right)\partial^{\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h\mathbf{P}_{j_h}\partial^{\alpha_{j_h}}-\sum_{h=0}^{s} q_h\widehat{\mathbf{P}_{j_h}}\partial^{\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h\left(\partial^{\alpha_{j_h}}\mathbf{P}_{j_h}-[\partial^{\alpha_{j_h}},\mathbf{P}_{j_h}]\right)-\sum_{h=0}^{s} q_h\widehat{\mathbf{P}_{j_h}}\partial^{\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}=\\
&=\sum_{h=0}^{s} q_h\partial^{\alpha_{j_h}}\mathbf{P}_{j_h}-\sum_{h=0}^{s} q_h\left[\partial^{\alpha_{j_h}},\mathbf{P}_{j_h}\right]-\sum_{h=0}^{s} q_h\widehat{\mathbf{P}_{j_h}}\partial^{\alpha_{j_h}}+r^\beta\partial^{(\beta,i)}
\end{aligned}$$

donde $\exp^\delta_\prec\left(\sum_{h=0}^{s} q_h\left[\partial^{\alpha_{j_h}},\mathbf{P}_{j_h}\right]\right)\prec(\beta,i)$ y $\exp^\delta_\prec\left(\sum_{h=0}^{s} q_h\widehat{\mathbf{P}_{j_h}}\partial^{\alpha_{j_h}}\right)\prec(\beta,i)$. Por tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción y tenemos el resultado.

□

Definición 6.3.4 *El vector* $\mathbf{R}\in B[\partial]^m$ *construido anteriormente es un resto de la división de* $\mathbf{P}\in B[\partial]^m$ *por* $(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)\in(B[\partial]^m)^r$. *El conjunto de los restos de dividir* $\mathbf{P}$ *por* $(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$ *se denota por* $\widetilde{R}(\mathbf{P};\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$.

Teorema 6.3.5 *Sea* M *un módulo no nulo en* $B[\partial]^m$ *y* $F=\{\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r\}$ *un subconjunto de elementos no nulos de* M. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $F=\{\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r\}$ *es una* δ*-base de Gröbner de* M.
2. *Para cualquier* $(\alpha,i)\in\mathbf{N}^n\times\{1,\cdots,m\}$, *se tiene que,*

$$C((\alpha,i),M)=C((\alpha,i),F).$$

3. *Para todo* $\mathbf{P} \in M$, $\widetilde{R}(\mathbf{P}; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r) = \{0\}$.

Demostración. Es una generalizacion del teorema 5.3.10 para el caso de que $m = 1$. □

Corolario 6.3.6 *Una δ-base de Gröbner de un módulo $M \subseteq B[\partial]^m$ es un sistema generador de M.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 6.3.5. □

6.4 S^δ-operadores de vectores

Definición 6.4.1 *Sean $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ vectores en $B[\partial]^m$. Pongamos*

$$\exp^\delta(\mathbf{P}_1) = (\alpha^1, i) \ y \ \exp^\delta(\mathbf{P}_2) = (\alpha^2, j).$$

Si $i = j$ definimos el mínimo común múltiplo de (α^1, i) y de (α^2, i) como $mcm((\alpha^1, i), (\alpha^2, i)) = (mcm(\alpha^1, \alpha^2), i)$. Si $i \neq j$ diremos que no está definido el mínimo común múltiplo de (α^1, i) y (α^2, j).

Sea $F = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ un subconjunto finito de $B[\partial]^m$ y supongamos que los $\mathbf{P}_i$ son todos no nulos. Definimos el siguiente conjunto,

$$K(F) = \left\{(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\} : \exists N \subseteq F,\ (\alpha, i) = mcm\{\exp^\delta(\mathbf{P}); \mathbf{P} \in N\}\right\}.$$

Ejemplo 6.4.2 *Sea $F = \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\} \subseteq (k[x, y][\partial_x, \partial_y])^2$,*

$$\mathbf{P}_1 = (x\partial_x\partial_y, \partial_y),\ \mathbf{P}_2 = (\partial_y, y\partial_x\partial_y),\ \mathbf{P}_3 = (y\partial_x, \partial_y),$$

siendo el orden TOP con $\partial_x < \partial_y$. Entonces tendremos que,

1. *Si $N = \{\mathbf{P}_1\}$, entonces $((1, 1), 1) \in K(F)$.*
2. *Si $N = \{\mathbf{P}_2\}$, entonces $((1, 1), 2) \in K(F)$.*
3. *Si $N = \{\mathbf{P}_3\}$, entonces $((0, 1), 2) \in K(F)$.*
4. *Si $N = \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$, entonces N no da lugar a ningún elemento en $K(F)$.*
5. *Si $N = \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3\}$, entonces N no da lugar a ningún elemento en $K(F)$.*
6. *Si $N = \{\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\}$, entonces $((1, 1), 2) \in K(F)$.*
7. *Si $N = \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\}$, entonces N no da lugar a ningún elemento en $K(F)$.*

Luego podemos afirmar que,

$$K(F) = \{((1, 1), 1), ((1, 1), 2), ((0, 1), 2)\}.$$

Definición 6.4.3 *Con la notación anterior, para todo* $(\alpha, i) \in K(F)$, *definimos*

$$F_{(\alpha,i)}(F) = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in B^r : \sum_{k=1}^{r} \lambda_k c^\delta(\mathbf{P}_k) = 0, \text{ } y \text{ } \lambda_k = 0 \text{ } si \text{ } (\alpha, i) \notin \exp^\delta(\mathbf{P_k}) + \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\} \right\}.$$

Ejemplo 6.4.4 *En el ejemplo anterior, tenemos que,*

$$F_{((0,1),2)}(F) = F_{((1,1),1)}(F) = (0,0,0), \qquad F_{((1,1),2)}(F) = \langle (0,1,-y) \rangle.$$

Observación. Vemos que

$$F_{(\alpha,i)}(F) \simeq \text{Sicigias}(\{c^\delta(\mathbf{P}_k) : (\alpha, i) \in \exp^\delta(\mathbf{P}_k) + \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\} \, 1 \leq k \leq r\}).$$

Por tanto $F_{(\alpha,i)}(F)$ es un B-módulo finitamente generado. Sea $\{(\lambda_1^\tau, \cdots, \lambda_r^\tau), \quad 1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)}\}$, un sistema de generadores de $F_{(\alpha,i)}(F)$.

Sea $(\alpha^k, l^k) = \exp^\delta(\mathbf{P}_k)$, entonces para $\tau = 1, \cdots, r_{(\alpha,i)}$ consideramos

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \mathbf{P_k}$$

a estas expresiones $S^\delta_{(\alpha,i),\tau}$ les denominamos S^δ-operadores asociados a los vectores $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq r$.

Proposición 6.4.5 *Con la notación anterior se verifica que,*

$$\exp^\delta \left(S^\delta_{(\alpha,i),\tau} \right) \prec (\alpha, i).$$

Demostración. La prueba es similar a la demostración hecha en 5.4.5

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \mathbf{P}_k = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \left(c^\delta(\mathbf{P}_k) \partial^{\exp^\delta(\mathbf{P}_k)} + \widehat{\mathbf{P}_k} \right)$$

donde $\exp^\delta(\widehat{\mathbf{P}_k}) \prec \exp^\delta(\mathbf{P}_k)$.
Así,

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} c^\delta(\mathbf{P}_k) \partial^{\exp^\delta}(\mathbf{P}_k) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \widehat{\mathbf{P}_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \left(c^\delta(\mathbf{P}_k) \partial^{\alpha-\alpha^k} + A_k \right) \partial^{\exp^\delta}(\mathbf{P}_k) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \widehat{\mathbf{P}_k}$$

donde $\exp^\delta(A_k) \prec \alpha - \alpha^k$.

Por tanto,

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau c^\delta(\mathbf{P}_k) \partial^{\alpha-\alpha^k} \partial^{\exp^\delta(\mathbf{P}_k)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau A_k \partial^{\exp^\delta(\mathbf{P}_k)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^\tau \partial^{\alpha-\alpha^k} \widehat{\mathbf{P}_k}.$$

Pero al verificarse que

$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\tau} c^{\delta}(\mathbf{P}_k) = 0,$

$\exp^{\delta}(A_k \partial^{\exp^{\delta}(\mathbf{P}_k)}) = \exp^{\delta}(A_k) + \exp^{\delta}(\mathbf{P}_k) \prec (\alpha - \alpha^k) + \exp^{\delta}(\mathbf{P}_k) = (\alpha, i)$ y

$\exp^{\delta}(\partial^{\alpha-\alpha^k}\widehat{\mathbf{P}_k}) = (\alpha - \alpha^k) + \exp^{\delta}(\widehat{\mathbf{P}_k}) \prec (\alpha - \alpha^k) + \exp^{\delta}(\mathbf{P}_k) = (\alpha, i),$

podemos afirmar que,

$$\exp^{\delta}(S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}) \prec (\alpha, i).$$

□

Teorema 6.4.6 *Sea $G = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ un conjunto de operadores no nulos en $B[\partial]^m$ y sea $M = \langle \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r \rangle$ el submódulo de $B[\partial]^m$ generado por los $\{\mathbf{P}_i\}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$G = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ es una δ-base de Gröbner de M.*
2. *Para todo $\mathbf{P} \in M$, se tiene que $\widetilde{R}(\mathbf{P}; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r) = \{\mathbf{0}\}$.*
3. *Para todo S^{δ}-polinomio $S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}$ de $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ se tiene que $\widetilde{R}\left(S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\right) = \{\mathbf{0}\}$.*

La prueba de este teorema es similar a la prueba del teorema 5.4.6 y la omitimos.

6.5 Algoritmo de cálculo de una δ-base de Gröbner de un módulo

Sea M un módulo de $B[\partial]^m$ y $F \subseteq M$ un conjunto finito de generadores de M. Ordenamos el conjunto F considerando el orden TOP, sea $F = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$. Sea $K(F) = \{(\alpha^1, i_1), \cdots, (\alpha^s, i_s)\}$. Calculamos todos los S^{δ}-vectores asociados a $F = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$.

Supongamos que $F = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ no es una δ-base de Gröbner para M entonces por el teorema anterior existirá un S^{δ}-vector de $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$, $S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}$ tal que $\widetilde{R}(S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r) \neq \{\mathbf{0}\}$ y volvemos a razonar con el conjunto $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r, \mathbf{P}_{r+1}\}$.

Proposición 6.5.1 *Con la notación anterior, el proceso anterior se termina, es decir existe $\rho \in \mathbf{N}$ tal que para todo S^{δ}-vector S de $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_{r+\rho}\}$ se verifica que $\widetilde{R}(S; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_{r+\rho}) = \{\mathbf{0}\}$.*

La prueba de este teorema es similar a la prueba de la proposición 5.5.1 y la omitimos.

6.5.1 Test de pertenencia

Sea $M = \langle \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_s \rangle$ un submódulo de $B[\partial]^m$. Como en el caso de los ideales de $B[\partial]$ podemos plantearnos la siguiente cuestión:

Dado $\mathbf{P} \in B[\partial]^m$, determinar cuando $\mathbf{P} \in M$, y cuando esto sea cierto encontrar $Q_1, \cdots, Q_s \in B[\partial]$ tales que,

$$\mathbf{P} = Q_1\mathbf{P}_1 + \cdots + Q_s\mathbf{P}_s.$$

Sea $F = \{\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s\}$ un conjunto de vectores no nulos de $B[\partial]^m$ y sea M el $B[\partial]$-módulo generado por el conjunto F. Sea $G = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ una δ-base de Gröbner para M (con respecto a algún orden monomial adecuado en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$). Por el teorema de caracterización 6.4.6 tenemos que

$$\mathbf{P} \in M \Longleftrightarrow \widetilde{R}(\mathbf{P}; \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r) = \{0\}.$$

Por tanto podemos, perfectamente determinar cuándo $\mathbf{P} \in M$.

Además si $\mathbf{P} \in M$, por el teorema 6.3.3, existen $H_1, \cdots, H_r \in B[\partial]$ tales que

$$\mathbf{P} = H_1\mathbf{P}_1 + \cdots + H_r\mathbf{P}_r. \tag{6.5.1}$$

Sean F y G matrices de órdenes $s \times m$ y $r \times m$ respectivamente, cuyas filas son los elementos de los conjuntos Fy G respectivamente.

Al igual que en el caso de los ideales, como los vectores $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq r$, se han ido obteniendo como combinación lineal de los vectores $\mathbf{F}_j$, $1 \leq j \leq s$, luego existe una matriz $T \in M_{r\times s}(B[\partial])$ tal que $G = TF$.

Por tanto, los vectores $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq r$, pueden expresarse como combinación lineal de los vectores $\mathbf{F}_j$, $1 \leq j \leq s$. Cuando sustituimos estas expresiones en la igualdad 6.5.1 tenemos el resultado deseado.

6.6 Sicigias para módulos

Dados $\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s \in B[\partial]^m$, vamos a calcular el módulo $Sic(\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s$ de manera similar a como hemos calculado el módulo $Sic(F_1, \cdots, F_s)$, donde $F_i \in B[\partial]$, $1 \leq i \leq s$.

Todo morfismo de $B[\partial]^s$ en otro $B[\partial]$-módulo a la izquierda viene determinado por las imágenes de la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_s\}$, luego para dar el morfismo,

$$\phi : B[\partial]^s \longrightarrow B[\partial]^m$$

nos basta conocer s elementos, $\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s$ de $B[\partial]^m$, es decir ϕ se define mediante, $\phi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{F}_i$, $1 \leq i \leq s$. Así el morfismo ϕ vendrá dado por

$$\phi(h_1, \cdots, h_s) = \sum_{i=1}^{s} h_i\mathbf{F}_i.$$

Si cada $\mathbf{F}_i = (F_{i1}, \cdots, F_{im})$, podemos escribir la expresión del morfismo ϕ en notación matricial como sigue,

$$\phi(h_1, \cdots, h_s) = \begin{pmatrix} h_1, \cdots, h_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s1} & \cdots & F_{sm} \end{pmatrix}.$$

Definición 6.6.1 *Con la notación anterior, el módulo de sicigias de $F = \{\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s\}$ es el núcleo del morfismo ϕ, es decir,*

$$Sic(F) = Ker(\phi) = \left\{ \mathbf{h} \in B[\partial]^s \textit{ tal que } \mathbf{h} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Nuestro objetivo es el cálculo de un conjunto finito de generadores del módulo $Sic(F)$, para cualquier subconjunto finito $F \subseteq B[\partial]^m$. Esto lo conseguimos mediante los S^δ-vectores y las δ-bases de Gröbner. Este cálculo, como en el caso de $m = 1$ lo realizaremos en dos pasos, en primer lugar calculamos una δ-base de Gröbner $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ para el módulo $\langle \mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s \rangle \subseteq B[\partial]^m$ y calculamos $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r) \subseteq B[\partial]^r$ y en segundo lugar calcularemos $Sic(\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s)$ a partir de $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$.

Sea $F = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\} \subseteq B[\partial]^m$ una δ-base de Gröbner del módulo $\langle \mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_s \rangle \subseteq B[\partial]^m$, donde $\exp^\delta(\mathbf{P}_i) = (\alpha^i, l^i)$. Recordemos que en 6.4.3 hemos visto que para cada $(\alpha, i) \in K(F)$, se tiene

$$F_{(\alpha,i)}(F) \simeq Sic\left(c^\delta(\mathbf{P}_{i_1}), \cdots, c^\delta(\mathbf{P}_{i_s})\right) \subseteq B^s,$$

donde $\{\mathbf{P}_{i_1}, \cdots, \mathbf{P}_{i_s}\}$ es el subconjunto maximal de F tal que $(\alpha, i) \in \exp^\delta(\mathbf{P}_{i_j}) + \mathbf{N}^n$ para $j = 1, \cdots, s$.

Como $F_{(\alpha,i)}(F)$ es un submódulo de B^s y al ser éste noetheriano, tendremos que $F_{(\alpha,i)}(F)$ es finitamente generado. Sea $\left\{\mathbf{S}_{(\alpha,i),1}, \cdots, \mathbf{S}_{(\alpha,i),r_{(\alpha,i)}}\right\}$ un conjunto finito de generadores donde cada $\mathbf{S}_{(\alpha,i),\tau} = \left(S^{i_1}_{(\alpha,i),\tau}, \cdots, S^{i_s}_{(\alpha,i),\tau}\right)$ con $1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)}$ verifica $\sum_{j=1}^s S^{i_j}_{(\alpha,i),\tau} c^\delta(\mathbf{P}_{i_j}) = 0$.

Para cada sicigia $\mathbf{S}_{(\alpha,i),\tau}$ recordemos que $S^\delta_{(\alpha,i),\tau}$, es por definición

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{j=1}^s S^{i_j}_{(\alpha,i),\tau} \partial^{\alpha - \alpha^{i_j}} \mathbf{P}_{i_j}$$

por tanto, un elemento del módulo $\langle \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r \rangle$ y verifica que $\exp^\delta\left(S^\delta_{(\alpha,i),\tau}\right) \prec (\alpha, i)$.

Como $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ es una δ-base de Gröbner del módulo $\langle \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r \rangle$, entonces se verifica que, cada uno de los $S^\delta_{(\alpha,i),\tau}$ se puede escribir de la forma

$$S^\delta_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{j=1}^r Q_{(\alpha,i),\tau,j} \mathbf{P}_j, \quad Q_{(\alpha,i),\tau,j} \in B[\partial]$$

donde $\exp^\delta\left(Q_{(\alpha,i),\tau,j}\mathbf{P}_j\right) \leq \exp^\delta\left(S^\delta_{(\alpha,i),\tau}\right) \prec (\alpha,i)$.

Notación 6.6.2 *Denotemos por* $R^j_{(\alpha,i),\tau} = \begin{cases} S^j_{(\alpha,i),\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j} - Q_{(\alpha,i),\tau,j} & si \quad j \in \{i_1,\cdots,i_s\} \\ -Q_{(\alpha,i),\tau,j} & si \quad j \notin \{i_1,\cdots,i_s\} \end{cases}$,

y sea

$$\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = \left(R^1_{(\alpha,i),\tau},\cdots,R^r_{(\alpha,i),\tau}\right).$$

Observación. $\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = \left(R^1_{(\alpha,i),\tau},\cdots,R^r_{(\alpha,i),\tau}\right)$ es una sicigia de $(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$ ya que

$$\sum_{j=1}^r R^j_{(\alpha,i),\tau}\mathbf{P}_j = 0, \quad \forall(\alpha,i) \in K(F), \quad \forall\tau \in \{1,\cdots,r_{(\alpha,i)}\}.$$

Teorema 6.6.3 *Con la notación anterior,* $\left\{\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\right\}_{\substack{(\alpha,i)\in K(F)\\ 1\leq\tau\leq r_{(\alpha,i)}}}$ *genera* $Sic(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$.

Demostración. Dada $\mathbf{R} = (R_1,\cdots,R_r) \in Sic(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$. Llamaremos

$$\gamma(\mathbf{R}) = \text{máx}_{1\leq j\leq r}\{\exp^\delta(R_j\mathbf{P}_j)\} \in \mathbf{N}^n \times \{1,\cdots,m\}$$

y

$$J(\mathbf{R}) = \left\{j \in \{1,\cdots,r\} : \exp^\delta(R_j\mathbf{P}_j) = \gamma(\mathbf{R})\right\}.$$

La demostración la haremos por recurrencia sobre $\{\gamma(\mathbf{R})\}$, $\mathbf{R} \in Sic(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)$).

Sea $\mathbf{H} = (H_1,\cdots,H_r)$ una sicigia tal que $\gamma(\mathbf{H}) = (\gamma,t)$ es el mínimo en el conjunto

$$\{\gamma(\mathbf{R}) : \mathbf{R} \in Sic(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)\}.$$

Supongamos que $\exp^\delta(H_k) = \beta^k$ y $c^\delta(H_k) = h_k$, es decir

$$H_k = h_k\partial^{\beta^k} + \widehat{H_k} \text{ con } \exp^\delta(\widehat{H_k}) < \beta^k.$$

escribamos también

$$\mathbf{P}_k = c^\delta(\mathbf{P}_k)\partial^{(\alpha^k,l^k)} + \widehat{\mathbf{P}}_k \text{ con } \exp\delta(\widehat{\mathbf{P}}_k) < (\alpha^k,l^k),\ 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq l^k \leq m.$$

Observación. Si notamos $J = J(\mathbf{H})$, tendremos que, $\forall j \in J$, $(\alpha^j,t) + \beta^j = (\gamma,t)$, y $\forall j \notin J$ se tiene $(\alpha^j,l^j) + \beta^j < (\gamma,t)$.

Así se verifica que,

$$0 = \sum_{i=1}^r H_i\mathbf{P}_i = \sum_{j\in J} H_j\mathbf{P}_j + \sum_{j\notin J} H_j\mathbf{P}_j =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}+\widehat{H_j}\right)\left(c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}+\widehat{\mathbf{P}_j}\right)+\sum_{j\notin J}H_j\mathbf{P}_j=$$

$$=\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}+\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}\widehat{\mathbf{P}_j}+\sum_{j\in J}\widehat{H_j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}+$$

$$+\sum_{j\in J}\widehat{H_j}\widehat{\mathbf{P}}_j+\sum_{j\notin J}H_j\mathbf{P}_j$$

donde se verifica que,
$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}\widehat{\mathbf{P}_j}\right)\prec\beta^j+(\alpha^j,t)=(\gamma,t)$,
$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\widehat{H_j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right)\prec\beta^j+(\alpha^j,t)=(\gamma,t)$,
$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\widehat{H_j}\widehat{\mathbf{P}}_j\right)\prec\beta^j+(\alpha^j,t)=(\gamma,t)$ y
$\exp^\delta\left(\sum_{j\notin J}H_j\mathbf{P}_j\right)\prec(\gamma,t)$.

Entonces el único operador cuyo δ-exponente puede ser (γ,t) es

$$\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}.$$

En ese caso tendríamos,

$$c^\delta\left(\sum_{j\in J}h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right)=\sum_{j\in J}h_jc^\delta(\mathbf{P}_j),$$

pero como $\sum_{i=1}^r H_i\mathbf{P}_i=\mathbf{0}$, entonces el coeficiente anterior será nulo, es decir,

$$\sum_{j\in J}h_jc^\delta(\mathbf{P}_j)=\mathbf{0}.$$

Supongamos que $J=\{i_1,\cdots,i_s\}$, $s\geq 2$,

Por tanto,

$$\mathbf{h}=(h_{i_1},\cdots,h_{i_s})\in Sic(c^\delta(\mathbf{P}_{i_1}),\cdots,c^\delta(\mathbf{P}_{i_s}))\subseteq F_{(\alpha,t)}(F)$$

donde $(\alpha,t)=mcm((\alpha_{i_1},t),\cdots,(\alpha_{i_s},t))$, por lo tanto podemos escribir $\mathbf{h}$ como combinación lineal de los generadores del módulo $Sic(c^\delta(\mathbf{P}_{i_1}),\cdots,c^\delta(\mathbf{P}_{i_s}))$, $\mathbf{S}_{(\alpha,t),\tau}$, es decir,

$$\mathbf{h}=\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}}\Lambda_\tau\mathbf{S}_{(\alpha,t),\tau},\qquad \Lambda_\tau\in\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n],$$

donde la componente j-ésima tendrá la siguiente expresión,

$$h_j=\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}.$$

Consideramos la expresión,

$$\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau\mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$$

Denotamos por

$$\mathbf{H}' = (H'_1, \cdots, H'_r) = (H_1, \cdots, H_r) - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$$

entonces $\mathbf{H}'$ verifica:

1. $\mathbf{H}' \in Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$, ya que, si $\mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$ es una sicigia entonces $\Lambda_\tau \mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$ es una sicigia, al igual que también lo es $\partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$.

2. Vamos a calcular $\gamma(\mathbf{H}')$, para ello consideramos la componente j-ésima, con $j \in J(\mathbf{H})$,

$$H'_j = H_j - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau R^j_{(\alpha,t),\tau}$$

probaremos que $\gamma(\mathbf{H}') < (\gamma, t)$.

$$\sum_{j\in J} H'_j \mathbf{P}_j = \sum_{j\in J} \left(H_j - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau R^j_{(\alpha,t),\tau} \right) \mathbf{P}_j =$$

$$= \sum_{j\in J} \left(h_j \partial^{\beta^j} - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \left(S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} - Q^j_{(\alpha,t),\tau} \right) + \widehat{H_j} \right) \mathbf{P}_j =$$

$$= \sum_{j\in J} h_j \partial^{\beta^j} \mathbf{P}_j - \sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} \mathbf{P}_j \right) +$$

$$+ \sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau Q^j_{(\alpha,t),\tau} \mathbf{P_j} \right) + \sum_{j\in J} \widehat{H_j} \mathbf{P}_j$$

como se verifica que,

$$\exp^\delta \left(\sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau Q^j_{(\alpha,t),\tau} \mathbf{P_j} \right) \right) \prec (\gamma, t) \text{ y } \exp^\delta \left(\sum_{j\in J} \widehat{H_j} \mathbf{P}_j \right) \prec (\gamma, t)$$

seguiremos razonando con

$$\sum_{j\in J} h_j \partial^{\beta^j} \mathbf{P}_j - \sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} \mathbf{P}_j \right)$$

y así tendremos,

$$\sum_{j\in J} \left(h_j \partial^{\beta^j} - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} \right) \mathbf{P}_j =$$

$$= \sum_{j\in J} \left(h_j \partial^{\beta^j} - \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} \right) \left(c^\delta(\mathbf{P}_j) \partial^{(\alpha^j,t)} + \widehat{\mathbf{P}_j} \right) =$$

$$= \sum_{j\in J} \left(h_j \partial^{\beta^j} c^\delta(\mathbf{P}_j) \partial^{(\alpha^j,t)} \right) - \sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,t)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} c^\delta(\mathbf{P}_j) \partial^{(\alpha^j,t)} \right) +$$

$$+ \sum_{j\in J} h_j \partial^{\beta^j} \widehat{\mathbf{P}}_j - \sum_{j\in J} \left(\sum_{\tau=1}^{r_\alpha} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} \partial^{\alpha-\alpha^j} \widehat{\mathbf{P}_j} \right)$$

como

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J} h_j\partial^{\beta^j}\widehat{\mathbf{P}_j}\right) \prec (\gamma,t), \text{ y } \exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}\widehat{\mathbf{P}_j}\right) \prec (\gamma,t)$$

seguimos razonando con

$$\mathbf{L} = \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)} - \sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right)$$

pero

$$\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau} = \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\gamma-\alpha} + A_{\tau,\alpha,j}$$

donde $\exp^\delta(A_{\tau,\alpha,j}) \prec \gamma-\alpha$, así,

$$\mathbf{L} = \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)} - \sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} (\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\gamma-\alpha} + A_{\tau,\alpha,j})\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)} - \sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\gamma-\alpha}\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right) -$$

$$-\sum_{j\in J}\left(\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} A_{\tau,\alpha,j}\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right).$$

Como

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} A_{\tau,\alpha,j}\partial^{\alpha-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right) \prec \gamma-\alpha+\alpha-\alpha^j+(\alpha^j,t) = (\gamma,t)$$

seguiremos razonando con,

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)} - \sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\gamma-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}\right),$$

pero

$$\partial^{\gamma-\alpha^j}c^\delta(\mathbf{P}_j) = c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\gamma-\alpha^j} + B_j$$

donde $\exp^\delta(B_j) \prec \gamma-\alpha^j$, entonces

$$\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\partial^{\gamma-\alpha_j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)} =$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}(c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\gamma-\alpha^j} + B_j)\partial^{(\alpha^j,t)} =$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\gamma-\alpha^j}\partial^{(\alpha^j,t)} + \sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}B_j\partial^{(\alpha^j,t)}$$

donde

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}B_j\partial^{(\alpha_j,t)}\right) \prec \gamma-\alpha^j+(\alpha^j,t) = (\gamma,t)$$

luego seguiremos razonando con

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}\right)$$

pero

$$\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)=c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\beta^j}+C_{j,\beta}$$

donde $\exp^\delta(C_{j,\beta})<\beta_j$, por tanto

$$\sum_{j\in J}\left(h_j\partial^{\beta^j}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\alpha^j,t)}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j(c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\beta^j}+C_{j,\beta})\partial^{(\alpha^j,t)}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_jc^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{\beta^j}\partial^{(\alpha^j,t)}+h_jC_{j,\beta}\partial^{(\alpha^j,t)}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}\right)$$

pero,

$$\exp^\delta\left(\sum_{j\in J}h_jC_{j,\beta}\partial^{(\alpha^j,t)}\right)\prec\beta^j+(\alpha^j,t)=(\gamma,t),$$

entonces razonamos con

$$\sum_{j\in J}\left(h_jc^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\right)c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}=$$

$$=\sum_{j\in J}\left(h_j-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\Lambda_\tau S^j_{(\alpha,t),\tau}\right)c^\delta(\mathbf{P}_j)\partial^{(\gamma,t)}=\mathbf{0}.$$

3. Si $j\notin J$, análogamente vemos que $\exp^\delta(H'_j\mathbf{P}_j)\prec(\gamma,t)$.

Luego $\gamma(\mathbf{H}')\prec(\gamma,t)$, que al ser mínimo tendremos que, $\mathbf{H}'=\mathbf{0}$ y de ahí que,

$$\mathbf{H}=(H_1,\cdots,H_r)=\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau\mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau},\quad(\alpha,t)\in K(F).$$

Estamos haciendo recurrencia sobre $\{\gamma(\mathbf{R}):\mathbf{R}\in Sic(\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_r)\}$.
Lo hemos demostrado para $\gamma(\mathbf{H})=(\gamma,t)$ mínimo. Suponemos el resultado cierto para todo $\mathbf{R}$ tal que $\gamma(\mathbf{R})\prec(\gamma,t)$.
Sea $\mathbf{R}$ tal que $\gamma(\mathbf{R})=(\gamma,t)$, aplicando el mismo razonamiento obtendríamos una relación

$$\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau\mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}$$

tal que

$$\gamma\left[\mathbf{R}-\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)}\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau\mathbf{R}_{(\alpha,t),\tau}\right]\prec(\gamma,t)$$

y aplicaríamos la recurrencia.

$\square$

Observación. Vemos que este teorema no sólo nos proporciona el conjunto de generadores del módulo $Sic(\mathbf{P_1}, \cdots, \mathbf{P_r})$ sino que también nos dice la expresión que tiene cada sicigia en función de los generadores.

Lema 6.6.4 *Sean $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r$ vectores no nulos en $B[\partial]^m$. Definimos la siguiente relación en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\}$,*

$$(\alpha, k) \tilde{<} (\beta, h) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exp^\delta(\partial^\alpha \mathbf{P}_k) < \exp^\delta(\partial^\beta \mathbf{P}_h) \\ \text{ó} \\ \exp^\delta(\partial^\alpha \mathbf{P}_k) = \exp^\delta(\partial^\beta \mathbf{P}_h) \ y \ k > h. \end{cases}$$

Entonces se verifica que $\tilde{<}$ es un orden monomial en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$.

Nota 6.6.5 *Este orden $\tilde{<}$ es llamado el orden de O. Schreyer, (ver [88]). Diremos que el orden definido en el lema anterior está inducido por $(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$ (o por $(\exp^\delta(\mathbf{P}_1), \cdots, \exp^\delta(\mathbf{P}_r))$).*

Lema 6.6.6 *Sean $P \in B[\partial]$ y $\mathbf{Q} \in B[\partial]^r$ entonces se verifica que,*

$$\exp^\delta_{\tilde{<}}(P\mathbf{Q}) = \exp^\delta(P) + \exp^\delta_{\tilde{<}}(\mathbf{Q}).$$

Definición 6.6.7 *Dado un orden monomial, $<$, en $\mathbf{N}^n$ definimos en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$ la siguiente relación $\bigcirc$,*

$$(\alpha, i) \bigcirc (\beta, j) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \text{ó} \\ \alpha = \beta \quad y \quad i > j \end{cases}$$

Proposición 6.6.8 *Con la notación anterior, se verifica que $\bigcirc$ es un orden monomial en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, m\}$.*

Utilizando este orden el teorema 6.6.3 podemos afirmar que,

$$\exp_{\tilde{<}}(\mathbf{H}) = \gamma(\mathbf{H})$$

por lo que siguiendo la notación del teorema 6.6.3 podemos afirmar que

$$in^\delta(\mathbf{R}) = in^\delta \left(\sum_{\tau=1}^{r(\alpha,t)} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \underline{R}_{(\alpha,t),\tau} \right).$$

Teorema 6.6.9 *Sea $\mathcal{G} = \{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ una δ-base de Gröbner del submódulo de $B[\partial]^m$ que engendra. Entonces la colección*

$$\left\{\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\right\}_{(\alpha,i)\in K(\mathcal{G}),\, 1 \le \tau \le r_{(\alpha,i)}}$$

es una δ-base de Gröbner para $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$ relativamente al orden $\tilde{<}$. Además se verifica que,

$$\exp^\delta_{\tilde{<}}\left(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\right) = (\alpha - \alpha^h, h)$$

siendo, $h = min\{i_1, \cdots, i_s\}$, $\{\mathbf{P}_{i_1}, \cdots, \mathbf{P}_{i_n}\}$ es el subconjunto maximal de $\mathcal{G}$ con $(\alpha, i) \in \left(\exp^\delta(\mathbf{P}_{i_j}) + \mathbf{N}^n\right)$.

Demostración. Recordamos que con la notación 6.6.2 se tiene

$$\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = \left(R^1_{(\alpha,i),\tau}, \cdots, R^r_{(\alpha,i),\tau}\right), \quad R^j_{(\alpha,i),\tau} \in B[\partial],\ 1 \leq j \leq r$$

y

$$R^j_{(\alpha,i),\tau} = \begin{cases} S^j_{(\alpha,i),\tau}\partial^{\alpha-\alpha^j} - Q_{(\alpha,i),\tau,j} & \text{si} \quad j \in \{i_1, \cdots, i_s\} \\ -Q_{(\alpha,i),\tau,j} & \text{si} \quad j \notin \{i_1, \cdots, i_s\} \end{cases},$$

Queremos demostrar que

$$\{\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} : (\alpha,i) \in K(\mathcal{G}),\ 1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)}\}$$

es una δ-base de Gröbner para $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$, respecto de $\tilde{<}$.

Por el teorema 6.6.3, existe el conjunto finito, $\{\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\}_{(\alpha,i)\in K(\mathcal{G}),1\leq\tau\leq r_{(\alpha,i)}} \subseteq B[\partial]^r$ que genera al módulo $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$.

Veamos en primer lugar que

$$\exp^{\delta}_{\tilde{<}}(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}) = (\alpha - \alpha^h, h)$$

donde $h = \min\{i_1, \cdots, i_s\} \subseteq \{1, \cdots, r\}$ y $\{\mathbf{P}_{i_1}, \cdots, \mathbf{P}_{i_n}\}$ es el subconjunto maximal de $\mathcal{G}$ con $(\alpha, i) \in \left(\exp^{\delta}(\mathbf{P}_{i_j}) + \mathbf{N}^n\right)$.

Como

$$\exp^{\delta}\left(\partial^{\alpha-\alpha^h}\mathbf{P}_h\right) = \exp^{\delta}\left(\partial^{\alpha-\alpha^k}\mathbf{P}_k\right) = (\alpha, i), \quad h, k \in \{i_1, \cdots, i_s\}$$

entonces tendremos que,

$$(\alpha - \alpha^k, k)\tilde{<}(\alpha - \alpha^h, h).$$

Por otro lado, sea ∂^{β^l} algún monomio que aparezca en $Q_{(\alpha,i),\tau,l}$, entonces, al ser $\{\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r\}$ una δ-base de Gröbner, se verifica que,

$$\exp^{\delta}(\partial^{\alpha^l}\mathbf{P}_l) \leq \exp^{\delta}(S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}).$$

Pero como por otra parte se verifica que,

$$\exp^{\delta}\left(S^{\delta}_{(\alpha,i),\tau}\right) \prec \exp^{\delta}\left(\partial^{\alpha-\alpha^h}\mathbf{P}_h\right) = (\alpha, i)$$

luego

$$\exp^{\delta}(\partial^{\alpha^l}\mathbf{P}_l) \prec \exp^{\delta}\left(\partial^{\alpha-\alpha^h}\mathbf{P}_h\right)$$

y de ahí que,

$$(\alpha^l, l)\tilde{<}(\alpha - \alpha^h, h).$$

También queremos demostrar que,

$$\{\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\}_{(\alpha,i)\in\mathcal{G},\,1\leq\tau\leq r_{(\alpha,i)}}$$

es una δ-base de Gröbner para $Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$ relativamente al orden $\tilde{<}$, es decir,

$$in^{\delta}\left(Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)\right) = \left\langle in^{\delta}(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}) \,|\, (\alpha, i) \in K(\mathcal{G}),\ 1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)}\right\rangle.$$

Como $\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} \in Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$, entonces $in^\delta(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}) \in in^\delta(Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r))$ y de ahí que,

$$\langle in^\delta(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}) \mid (\alpha, i) \in K(\mathcal{G}), 1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)} \rangle \subseteq in^\delta(Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)).$$

Veamos la inclusión recíproca.

Sea $\mathbf{H} = (H_1, \cdots, H_r) \in Sic(\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r)$, entonces por el teorema 6.6.3 hemos visto que

$$\mathbf{H} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \partial^{\gamma-\alpha} \Lambda_\tau \mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}, \quad \Lambda_\tau \in B,$$

donde $(\gamma, i) = \max_{1 \leq k \leq r}\{\exp^\delta H_k \mathbf{P}_k\}$, entonces como

$$\partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau = \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} + A_{\tau,\alpha}, \qquad \exp^\delta(A_{\tau,\alpha}) < \gamma - \alpha$$

tenemos que,

$$\mathbf{H} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \partial^{\gamma-\alpha}\Lambda_\tau \mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \left(\Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} + A_{\tau,\alpha}\right) \mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} \mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} + \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} A_{\tau,\alpha} \mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}$$

al verificarse que $\exp^\delta_<\left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} A_{\tau,\alpha}\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}\right) < \gamma - \alpha + (\alpha - \alpha^h, h) = (\gamma - \alpha^h, h)$. seguiremos razonando con el vector $\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha}\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}$ y como

$$\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)} + \widehat{\mathbf{R}}_{(\alpha,i),\tau}, \quad \exp^\delta_<(\widehat{\mathbf{R}}_{(\alpha,i),\tau}) < (\alpha, i)$$

tenemos,

$$\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha}\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha}\left(c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)} + \widehat{\mathbf{R}}_{(\alpha,i),\tau}\right) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \left(\Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)} + \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha}\widehat{\mathbf{R}}_{(\alpha,i),\tau}\right)$$

como,

$$\exp^\delta_<\left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha}\widehat{\mathbf{R}}_{(\alpha,i),\tau}\right) < \gamma - \alpha + (\alpha - \alpha^h, h) = (\gamma - \alpha^h, h)$$

seguiremos razonando con $\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)}$ y al verificarse que,

$$\partial^{\gamma-\alpha}c^\delta(\mathbf{R}_{(\alpha,t)\tau}) = c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{\gamma-\alpha} + B_{\alpha,\tau}, \quad \exp^\delta(B_{\alpha,\tau}) < \gamma - \alpha$$

tenemos que,

$$\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \partial^{\gamma-\alpha} c^\delta(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau \left(c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{\gamma-\alpha} + B_{\alpha,\tau}\right)\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \left(\Lambda_\tau c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{\gamma-\alpha}\partial^{\alpha-(\alpha^h,h)} + \Lambda_\tau B_{\alpha,\tau}\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)}\right)$$

como $\exp^\delta\left(\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau B_{\alpha,\tau}\partial^{(\alpha-\alpha^h,h)}\right) < \gamma - \alpha + (\alpha - \alpha^h, h) = (\gamma - \alpha^h, h)$ seguiremos razonando con

$$\sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i)\tau})\partial^{\gamma-\alpha}\partial^{\alpha-\alpha^h} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau c^\delta_<(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\partial^{(\gamma-\alpha^h,h)}.$$

Por tanto,

$$in^{\delta}_{\leq}(\mathbf{H}) = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau c^{\delta}_{\leq}(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau})\zeta^{(\gamma-\alpha^h,h)} = \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau c^{\delta}_{\leq}(\mathbf{R}_{(\alpha,i)\tau})\zeta^{(\alpha-\alpha^h,h)}\zeta^{\gamma-\alpha} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{r_{(\alpha,i)}} \Lambda_\tau in^{\delta}(\mathbf{R}_{(\alpha,i)\tau})\zeta^{\gamma-\alpha} \in \left\langle in^{\delta}_{\leq}(\mathbf{R}_{(\alpha,i),\tau}) \mid (\alpha,i) \in K(\mathcal{G}),\ 1 \leq \tau \leq r_{(\alpha,i)} \right\rangle.$$

□

6.7 Aplicaciones del módulo de sicigias.

6.7.1 Intersección de dos ideales de $B[\partial]$

En 5.7.3 hemos indicado un procedimiento para calcular la intersección de dos ideales I y J de $B[\partial]$. Indicamos aquí otro procedimiento para el cálculo de $I \cap J$.

Sean I, J ideales en $B[\partial]$, supongamos que,

$$I = \langle F_1, \cdots, F_s\rangle \text{ y } J = \langle G_1, \cdots, G_t\rangle.$$

Si $H \in I \bigcap J$ entonces tendremos que, existirán $A_1, \cdots, A_s \in B[\partial]$ tales que,

$$H = A_1F_1 + \cdots A_sF_s$$

y existirán $B_1, \cdots, B_t \in B[\partial]$ tales que,

$$H = B_1G_1 + \cdots B_tG_t.$$

Consideremos la matriz $D \in M_{(1+s+t)\times 2}(B[\partial])$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ F_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_s & 0 \\ 0 & G_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & G_t \end{pmatrix}.$$

Notaremos $Sic(D)$ el $B[\partial]$-módulo a la izquierda de las sicigias de las columnas de D.

Teorema 6.7.1 *Con la notación anterior se verifica que,*

$H \in I \bigcap J$ si y sólo si existen $A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t \in B[\partial]$ tales que $(H, A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t) \in Sic(D)$.

Además si $\{\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_r\}$ es un conjunto generador de $Sic(D)$, donde

$$\mathbf{S_1} = (s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{1s+t+1})$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{S_r} = (s_{r1}, s_{r2}, \cdots, s_{rs+t+1}).$$

Entonces $\{s_{11}, s_{21}, \cdots, s_{r1}\}$ es un conjunto generador para $I \bigcap J$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Si $H \in I \bigcap J$ entonces existen $A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t \in B[\partial]$ tales que

$$H = A_1F_1 + \cdots + A_sF_s, \qquad H = B_1G_1 + \cdots + B_tG_t$$

de donde,

$$H - A_1F_1 - \cdots - A_sF_s = 0, \qquad H - B_1G_1 - \cdots - B_tG_t = 0.$$

Por tanto,

$$\left(H, -A_1, \cdots, -A_s, -B_1, \cdots, -B_t \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ F_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_s & 0 \\ 0 & G_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & G_t \end{pmatrix} = (0,0)$$

y de ahí que, $(H, -A_1, \cdots, -A_s, -B_1, \cdots, -B_t) \in Sic(D)$.

$\Longleftarrow$ Si se verifica que,

$$\left(H, A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ F_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_s & 0 \\ 0 & G_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & G_t \end{pmatrix} = (0,0),$$

entonces tenemos que,

$$H + A_1F_1 + \cdots + A_sF_s = 0, \qquad H + B_1G_1 + \cdots + B_tG_t = 0$$

con lo cual, $H \in I \bigcap J$.

Sea $\{\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_r\}$ un conjunto generador de $Sic(D)$, donde

$$\mathbf{S_1} = (s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{1s+t+1})$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{S_r} = (s_{r1}, s_{r2}, \cdots, s_{rs+t+1}).$$

Sea $H \in I \cap J$. Existen $A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t \in B[\partial]$ y existen $L_1, \cdots, L_r \in B[\partial]$ tales que,

$$(H, A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_t) = \sum_{i=1}^{r} L_i \mathbf{S}_i$$

entonces

$$H = \sum_{i=1}^{r} L_i s_{i1}.$$

□

Observación. Vemos que un sistema generador de $I \bigcap J$ es el conjunto formado por todas las primeras coordenadas de cada uno de los elementos de un conjunto generador de $Sic(D)$.

Capítulo 7

Apéndice (Cotas)

Consideremos un conjunto $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de variables independientes. Consideramos para cada $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, una familia p_{ki}, $1 \leq i \leq n$, de enteros no negativos tales que $p_{1i} = 1$ para todo $i = 1, \cdots, n$ y los restantes son números enteros arbitrarios.

Definición 7.0.2 *Con la notación anterior, al número p_{ki} se le llama peso k-ésimo de la variable x_i.*

Definición 7.0.3 *Consideremos la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} p_k : & \mathbf{N}^n & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & \alpha & \longrightarrow & \sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ki}. \end{array}$$

El número $p_k(\alpha)$ será llamado peso k-ésimo de α.

Sea B el conjunto de las funciones incógnitas de un determinado sistema de ecuaciones diferenciales,

$$B = \{u_1, \cdots, u_r\}.$$

Consideramos para cada $k \in \mathbf{N}$ con $k \geq 1$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} q_k : & B & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & u_j & \longrightarrow & q_{kj} \end{array}$$

donde q_{kj} es un entero arbitrario.

Definición 7.0.4 *Con la notación anterior, a q_{kj} le llamamos peso k-ésimo de la función u_j.*

Una vez definidos los pesos para cada variable x_i y para cada función u_j, podemos definir los correspondientes pesos k-ésimos para cada derivada de cualquier función incógnita u_j, $\partial^\alpha(u_j)$. Consideramos la aplicación,

$$\begin{array}{rccc} P_k : & \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & (\alpha, i) & \longrightarrow & p_k(\alpha) + q_{ki} \end{array}$$

Definición 7.0.5 *Con la notación anterior, llamaremos peso k-ésimo de $\partial^\alpha(u_j)$ al número $P_k(\alpha)$.*

En particular,

$$P_1(\partial^\alpha u_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + q_{1j}.$$

Por tanto a cada derivada de una misma función incógnita, u_j, le podemos asignar s pesos, (para cada $s \geq 1$), y de ahí que podamos definir la siguiente aplicación ϕ_s dada por,

$$\phi_s : \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\} \longrightarrow \mathbf{Z}^s \quad (7.0.5)$$
$$(\alpha, i) \longrightarrow (P_1(\alpha, i), \cdots, P_s(\alpha, i)). \quad (7.0.5)$$

Ahora estamos en condiciones de definir un orden parcial $<_s$, en $\mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\}$ de la siguiente forma,

$$(\alpha, i) <_s (\beta, j) \Longleftrightarrow \phi_s(\alpha, i) <_{lex} \phi_s(\beta, j)$$

(aquí $(0, \cdots, 0, 1) <_{lex} (0, \cdots, 1, 0) <_{lex} \cdots <_{lex} (1, \cdots, 0, 0)$).

Consideremos el conjunto

$$C_{\phi_s}(\alpha, i) = \{(\beta, j) \mid \phi_s(\alpha, i) = \phi_s(\beta, j)\}.$$

Definición 7.0.6 *Con la notación anterior, al conjunto $C_{\phi_s}(\alpha, i)$ se llama clase del elemento (α, i), respecto de ϕ_s.*

En lo que sigue haremos uso de la siguiente elección de p_k y q_k.

Asignamos a cada incógnita, x_i y cada variable independiente, u_j los siguientes $n+2$ pesos,

	u_1	u_2	u_3	$\cdots$	u_r	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
1^er^ Peso	0	0	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1
2º Peso	0	1	2	$\cdots$	$r-1$	0	0	$\cdots$	0
3^er^ Peso	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	1
$\vdots$									
$n+2$(ésimo) Peso	0	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0

Es decir, para las funciones incógnitas $u_1, \cdots, u_r$ los pesos serán,

- Los pesos 1º, 3º, 4º, $\cdots$, $n+2$-ésimo son todos nulos. Es decir $q_{kj} = 0$ para $k = 1, 3, 4, \cdots, (n+2)$ y $1 \leq j \leq r$.
- El segundo peso, q_{2i} de cada u_i vale $i-1$ para cada $i = 1, \cdots, r$.

Para las variables x_i, $i = 1, \cdots, n$ los pesos serán,

- El primer peso p_{1i} de cualquier variable x_i vale 1.
- El segundo peso p_{2i} de cualquier variable x_i vale 0.

- Los pesos 3º, 4º, $\cdots$, $(n+2)$-ésimo de toda x_i son nulos salvo el peso $(n+3-i)$-ésimo que vale 1. Es decir $p_{ki} = \delta_{k,n+3-i}$ para $3 \leq k \leq n+2$, $1 \leq i \leq n$; donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker.

Proposición 7.0.7 *Con la notación anterior y el conjunto de pesos que hemos asignado a las variables x_i, $i = 1, \cdots, n$ y a las funciones incógnitas $u_1, \cdots, u_r$, se verifica que cada una de las clases $C_{\phi_{n+2}}(\alpha, i)$, con $(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \cdots, r\}$, que resultan sólo contiene un elemento.*

Demostración. Basta demostrar que, si $\phi_{n+2}(\alpha, i) = \phi_{n+2}(\beta, j)$ entonces $(\alpha, i) = (\beta, j)$.

Si $\phi_{n+2}(\alpha, i) = \phi_{n+2}(\beta, j)$ entonces se verifica que,

$$(P_1(\alpha, i), \cdots, P_{n+2}(\alpha, i)) = (P_1(\beta, j), \cdots, P_{n+2}(\beta, j))$$

es decir, tendremos que, $P_1(\alpha, i) = P_1(\beta, j)$ y por tanto $|\alpha| = |\beta|$.
$P_2(\alpha, i) = P_2(\beta, j)$ y por tanto $i - 1 = j - 1$ y de ahí que $i = j$.

Por otra parte, se tiene $P_k(\alpha, i) = P_k(\beta, j)$ para $k = 3, \cdots, n+2$; es decir $p_k(\alpha) = p_k(\beta)$ para $k = 3, \cdots, n+2$. De la definición de los p_{ki} se sigue

$$\alpha_{n+3-k} = \beta_{n+3-k} \text{ para } k = 3, \cdots, n+2.$$

Es decir $\alpha = \beta$. Así $(\alpha, i) = (\beta, j)$. □

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones, S_0, en forma canónica,

$$S_0 \equiv \begin{cases} A_1(u) \equiv (\partial^{\alpha(1)}(u) = \widehat{P}_1(u) + f_1) \\ \vdots \\ A_r(u) \equiv (\partial^{\alpha(r)}(u) = \widehat{P}_r(u) + f_r) \end{cases}$$

Supongamos que el sistema S_0 es completamente integrable, entonces se verifica,

$$B_{ki} = \partial_k E_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ki}^j E_j$$

donde cada variable ∂_k es no multiplicadora para E_i en el conjunto $\{E_1, \cdots, E_r\}$ y toda variable en $\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ de A_{ki}^j es multiplicadora para E_j en el conjunto anterior.

Notemos por B_h a B_{ij}, $h = 1, \cdots, l$

Consideramos S_2 el sistema cuyas ecuaciones son las relaciones anteriores, así, S_2 es un sistema de l ecuaciones, en las incógnitas $E_1, E_2, \cdots, E_r$.

Definición 7.0.8 *Dada una ecuación E_i, llamaremos*

1. *Peso k-ésimo de una ecuación E_i al k-ésimo peso de su primer miembro. Es decir,*

$$P_k(E_i) = P_k(\partial^{\alpha(j)}(u)) = P_k(\alpha, j)$$

2. *Para cada ecuación E_i, definiremos $\phi_{n+2}(E_i) = \phi_{n+2}(\alpha, i)$.*

Ahora vamos a definir un nuevo peso, $n+3$ para las variables x_i y para las ecuaciones. Diremos que $p_{n+3}(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Dadas las ecuaciones A_h, $h = 1, \cdots, r$, vamos a definir un orden $<_e$ entre ellas de la siguiente forma,

$$E_i <_e E_j \Longleftrightarrow (\alpha, k) <_s (\beta, h)$$

Ordenamos las ecuaciones y renombramos de manera que tengamos,

$$E_r <_e \cdots <_e E_1$$

entonces definimos $P_{n+3}(A_i) = i$.

Teorema 7.0.9 *Con las notaciones anteriores, el sistema S_2 está en forma canónica.*

Demostración. Asociamos a cada variable x_i, $i = 1, \cdots, n$ y cada incógnita E_j, $j = 1, \cdots, n$ las siguientes $n+3$ cotas.

Para las variables x_i, tendremos

- Las $n+2$ primeras cotas, son las mismas que las $n+2$ cotas que tenían en el sistema primitivo.
- La cota $n+3$-ésima de todas las variables x_i es cero.

Para las incógnitas E_j, tenemos, las cotas que le hemos asignado antes, es decir,

- Las $n+2$ primeras cotas de cada E_j son las cotas de sus sus primeros miembros en el sistema S_0.
- La cota $n+3$-ésima es el índice que tiene la ecuación según el orden que ocupa en la ordenación que hemos establecido.

Denotemos por $\phi(\partial_j E_i) = (\partial_j, i)$ y defimos $P_k(\partial_j E_i) = P_k(\partial_j) + P_k(E_i)$.

Para demostrar el teorema, bastará demostrar que si $\phi_{n+3}(\partial_j, i) = \phi(\partial_t, h)$ entonces, $(\partial_j, i) = (\partial_t, h)$.

Si $\phi_{n+3}(\partial_j, i) = \phi_{n+3}(\partial_t, h)$, entonces tendremos que, $P_{n+3}(\partial_j, i) = P_{n+3}(\partial_t, h)$ y de ahí que $i = h$, es decir, $E_i = E_h$.

Como, $P_k(\partial_j, i) = P_k(\partial_t, i)$ para $k = 1, \cdots, n+2$, entonces tenemos que $P_k(\partial_j) = P_k(\partial_t)$ y por tanto podemos afirmar que $\partial_j = \partial_t$ ya que si $\partial_j \neq \partial_t$ entonces existe algún k_0 tal que $P_{k_0}(\partial_j) \neq P_{k_0}(\partial_t)$. $\square$

Bibliografía

[1] W.W. ADAMS AND P.H. LOUSTAUNAU. *An introduction to Gröbner Bases.* Number 3 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. (1994).

[2] J.M. AROCA, H. HIRONAKA AND J.L. VICENTE. *The theory of the maximal contact.* Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan" 29. (1975).

[3] A. ASSI. *Constructions effectives en algèbre commutative.* Tesis de Doctorado. Grenoble. (1991).

[4] A. ASSI. *On Flatness of generic projections.* J. Symbolic Computation 18, pp. 447-462. (1994).

[5] A. ASSI. *Some remarks on universal standard basis.* Prepublication Université Nice. (1993).

[6] A. ASSI, F.J. CASTRO AND J.M. GRANGER. *How to calculate the slopes of a $\mathcal{D}$-module.* Compositio-Mathematica. 104, 2, pp. 107-123. (1996).

[7] A. ASSI, F. CASTRO-JIMÉNEZ AND J.-M. GRANGER. *The Gröbner fan of a A_n-module. To appear,* Journal of Pure and Applied Algebra.

[8] A. ASSI, F. CASTRO-JIMÉNEZ AND J.-M. GRANGER. *The standard fan of an analytic D-module.* Prepublicación nº47(1-Junio-1999). Universidad de Sevilla.

[9] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD. *Introducción al álgebra conmutativa.* Editorial Reverté, s.a. (1980).

[10] D. BAYER AND M. STILLMAN. *A Theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order.* Duke Mathematical Journal. n^{0}2, 33. (1987).

[11] D. BAYER AND M. STILLMAN. *On the complexity of computing syzygies.* J. Symbolic Computation, 6, 135-147. (1998).

[12] T. BECKER AND V. WEISPFENNING. *Gröbner bases. A computacional approach to commutative algebra.* Springer-Verlag. (1993).

[13] I.N. BERNSTEIN. *Modules over the ring of diff. operators. A study of the fundamental solution of equation with constant coeff.* Funz. Anal. Akademia CCCR 5 (2) pp. 1-16. (1971).

[14] J.E. BJORK. *Rings of Differential Operators.* North Holland, Amsterdam-NewYork. (1979).

[15] J.E. BJORK. *Analytic D-modules and applications.* Kluwer Adademic, Dordrecht. (1993).

[16] N. BOURBAKI. *Algèbre Commutative, Chap. 8 et 9.* Volumen of Eléments de Mathématiques. Masson. Paris. (1983).

[17] BOUQUET. *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* t. III. pp. 265. (1972).

[18] J. BRIANÇON. *Weierstrass preparé à la Hironaka.* Astérisque 7-8 pp. 67-73. (1973).

[19] J. BRIANÇON ET PH. MAISONOBE. *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable.* L'Enseignement Math. 30 pp. 7–38. (1984).

[20] MM. BRIOT ET BOUQUET. *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles.* Journal de l'École Polytechnique, Cahier XXXVI.

[21] R.L. BRYANT, S.S. CHERN, R.B. GARDNER, H.L. GOLDSCHMIDT, P.A. GRIFFITHS. *Exterior Differential Systems.* Springer-Verlag. (1991).

[22] J.L. BUESO, F.J. CASTRO, J. GÓMEZ-TORRECILLAS AND F.J. LOBILLO. *An introduction to effective calculus in quantum groups, in: Rings, Hopf algebras and Brauer groups.* S. Caenepeel, A. Verschoren (Eds,), Marcel Dekker, pp. 55-83. (1998).

[23] J.L. BUESO, F.J. CASTRO, J. GÓMEZ AND F.J. LOBILLO. *Test de primalité dans une extension de Ore itérée.* C.R.A.S. Paris, t. 328, Série I, pp. 459-462. (1999).

[24] J.L. BUESO, F.J. CASTRO AND P. JARA. *Effective computacion of the Gelfand-Kirillow dimension.* Proc. Edimburgh Math. Soc. 40, 1, pp. 111-117. (1997).

[25] B. BUCHBERGER. *A theoretical basis for the reduction of polynomial to canonical forms.* ACM. SIGSAM. Bull. 39, pp. 19-29. (1976).

[26] B. BUCHBERGER. *Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory.* Multi-dimensional systems theory, pp. 184-232. (1985).

[27] F.J. CASTRO. *Théorème de division pour les opérateurs differentiels et calcul des multiplicités.* PhD thesis, Univ. Paris VII, (Oct-1984).

[28] F.J. CASTRO. *Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels.* In Travaux en Cours. Géométrie Algébrique et Aplications, Tome III. pp.1-19. Hermann (Paris). (1987).

[29] F.J. CASTRO-JIMÉNEZ AND J.M. GRANGER. *Explicit calculations in rings of differential operators.* Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. nº 35. (Junio-1997).

[30] F.J. CASTRO JIMÉNEZ, L. NARVÁEZ MACARRO. *Homogenising differential operators.* Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. nº 36. (Junio-1997).

[31] S.C. COUTINHO. *A primer of Algebraic $\mathfrak{D}$-modules.* Cambridge. University Press. (1995).

[32] D. COX, J. LITTLE AND D. O'SHEA. *Ideals, varieties and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.* Springer-Verlag. (1992).

[33] D. EISENBUD. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer-Verlag. (1995).

[34] M. FAUCONNET. *Algèbre de Weyl et Polynôme de Bernstein.* Université d'Angers. (1993).

[35] R. FRÖBERG. *An introduction to Gröbner Bases.* John Wiley Sons. (1997).

[36] S. FRÖHLER AND U. OBERST. *Continuous time-varying linear systems.* Systems and Control Letters, 35, pp. 97-110. (1998).

[37] A. GALLIGO. *Algorithmes de calcul de base standards.* Prepublication de l'Université de Nice. n^0. (1983).

[38] V.P. GERDT. *Grobner bases and involutive methods for algebraic and differential equations.* Math. Comput. Modelling. n. 8-9, pp. 75-90. (1997).

[39] V.P. GERDT AND Y.A. BLINKOV *Involutive bases of polynomial ideals.* Math. and Comput. in Simulation, vol. 45, no. 5-6, pp. 519-41 (1998).

[40] P. GIANNI, B. TRAGER AND G. ZACHARIAS. *Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals.* J. Symb. Comput., 6(2-3) pp. 149-167. (1988).

[41] M. INSA AND F. PAUER. *Gröbner bases in rings of differential operators.* In Gröbner Bases and Applications. London Math. Soc. L.N.S. 251. Cambridge University Press. pp. 367-380. (1998).

[42] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag. (1977).

[43] C. JACOBSSON AND C. LÖFWALL. *Standard bases for general coefficient rings and a new constructive proof of Hilbert's basis theorem.* J. Symb. Comput., 12, n. 3, : pp. 337-371. (1991).

[44] M. JANET. *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* J. de Math., 8^e serie, III: pp. 65-151. (1920).

[45] M. JANET. *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Gauthiers-Villars. Paris. (1929).

[46] A. KANDRI-RODY AND V. WEISPFENNING. *Noncommutative Grobner bases in algebras of solvable type.* J. Symbolic Computation 9,1, pp. 1-26. (1990).

[47] M. KASHIWARA. *Algebraic study of systems of partial differential equations.* Société Mathématique de France. Mémoire 63. Supplément au Bulletin de la S.M.F. Tome 123, fascicule 4. (1995).

[48] M. KASHIWARA. *Systems of microdifferential equations.* Progress in Mathematics. n^0 34. Birkhauser. (1983).

[49] E.R. KOLCHIN. *Differential algebraic groups.* Academic Press. New York. (1984).

[50] E. KUNZ. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhäuser. (1985).

[51] J.P. LAFON. *Algèbre commutative.* Hermann. (1977).

[52] D. LAZARD. *Gröbner bases, gaussian elimination and resolution of algebraic equations.* Procceding of EUROCAL 83, Springer lect. notes comp. sci. 162, pp. 146-156.

[53] LÊ D.T.- Z.MEBKHOUT. *Introduction to linear differential systems.* Proceeding of Symposia in Pure Mathe. Vol. 40. Part 2. (1983).

[54] M. LEJEUNE-JALABERT. *Effectivité de calculs polynomiaux.* Cours de DEA., Univ. Grenoble. (1984-85).

[55] E. LLUIS-PUEBLA. *Algebra Homológica, Cohomología de Grupos y k-teoría algebraica clásica.* Addison-Wesley Iberoamericana. (1990).

[56] F.J. LOBILLO. *Métodos Algebraicos y Efectivos en Grupos Cuánticos.* Tesis Doctoral de la Universidad de Granada. (1998).

[57] P. MAISONOBE, C. SABBAH. *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes. Elements de la théorie des systèmes differéntiels.* Hermann. (1983).

[58] B. MALGRANGE. *Équations Différentielles à coefficients Polynomiaux.* Progress in Math. 96. Birkhäuser. (1991).

[59] B. MALGRANGE AND M. LEJEUNE. *Seminario de Grenoble de Operadores Diferenciales.* Prepublicaciones de la Universidad de Grenoble. (1975-76).

[60] E.L. MANSFIELD. *Differential Gröbner Bases.* Ph. D. Thesis. University of Sydney. (1992).

[61] MAYER. *Mathematische Annalen.* t. V, pp. 448. (1872).

[62] J. MCCONNELL AND J.C. ROBSON. *Noncommutative noetherian rings.* Wiley Interscience. New York. (1987).

[63] Z. MEBKHOUT. *Systèmes différentiels. Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents.* Hermann. Paris. (1989).

[64] M. MERAY ET C. RIQUIER. *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d' équations différentielles partielles.* Annales de l'École Normal, janvier, février et mars. (1890).

[65] MÉRAY. *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale.* pp. 143. (1872).

[66] MÉRAY. *Démonstration géneral de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3^e série, t. VI. (1880).

[67] T. MORA. *An Introduction to commutative and non-commutative Gröbner bases.* Theoretical Computer Science. 134. pp. 131-173. (1994).

[68] T. MORA AND L. ROBBIANO *The Gröbner Fan of an ideal.* J. Symbolic Computation 6, pp. 183-208. (1988).

[69] M.A. MORENO FRÍAS. *Sobre un trabajo de Maurice Janet.* Primer Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA-95; Santander 1995.

[70] M.A. MORENO FRÍAS. *Bases de Gröbner y sistemas completamente integrables en anillos de operadores diferenciales.* Tercera Reunión de Teoría de Anillos, Granada 1998.

[71] M.A. MORENO FRÍAS Y F.J. CASTRO JIMÉNEZ. *Gröbner δ-bases for rings of differential operators.* SAGA-V, León (España) 1999.

[72] F. PAUER AND M. PFEIFHOFER. *The theory of Gröbner Bases.* L'enseignement mathématique, t.34, pp. 215-232. (1988).

[73] F. PAUER AND S. ZAMPIERI. *Gröbner Bases with respect to generalized term orders and their applications to the modelling problem.* J. Symbolic Computation, 21, pp. 155-168. (1996).

[74] F. PHAM. *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin.* Progress in Mathematics 2. Birkhäuser. (1979).

[75] P.S. PEDERSEN. *Basis for Power Series Solutions to Systems of Linear, Constant Coefficient Differential Equations.* Advances in Mathematics, 141, pp. 155-166. (1999).

[76] J.F. POMMARET. *Lie pseudogroups and mechanics.* Gordon and Breach, London, New York, pp. 590, (1988).

[77] J.F. POMMARET, A. HADDAK. *Effective methods for systems of algebraic PDE.* In: Effective methods in Algebraic Geometry, T. Mora, C. Traverso (eds). Birkhäuser. pp. 411-426. (1991).

[78] J.F. POMMARET, S. LAZZARINI. *Lie pseudogroups and differential sequences: new perspectives in two-dimensional conformal geometry.* J. Geometry and Physics 10, pp. 47-91. (1993).

[79] J.F. POMMARET. *Partial Differential Equations and Group Theory. New Perspectives for Applications.* Kluwer Academic Publishers. (1994).

[80] J.F. POMMARET. *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups.* Gordon and Breach Science Publishers. New York, London, Paris. (1978).

[81] G. REID. *Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solutions space and calculating Taylor series solutions.* European Journal of Applied Mathematics, 2, pp. 293-318. (1991).

[82] J.REY PASTOR, P. PI CALLEJA Y C.A. TREJO. *Análisis Matemático. Vol. III. Análisis Funcional y aplicaciones.* Editorial Kapelusz. Buenos Aires. (1965).

[83] C. RIQUIER. *Les systèmes d'équations aux derivées partielles.* Gauthier-Villars. (1910).

[84] J.F. RITT. *Differential algebra.* Dover Publications, Inc. New York. (1966).

[85] J.J. ROTMAN. *An introduction to homological algebra.* Academic Press, Inc. (1979).

[86] M. SAITO, B. STURMFELS AND N. TAKAYAMA. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations.* Algorithms and Computation in Mathematics, 6. Springer-Verlag. (1999).

[87] T. SÁNCHEZ GIRALDA. *Álgebra conmutativa y homológica I.* Universidad de Valladolid. (1996).

[88] F.O. SCHREYER. *Diplomärbeit am Fachbeneich Mathematik.* Universität Hamburg. (1980).

[89] F. SCHWARTZ. *An Algorithm for Determining the Size of Symmetry Groups.* Computing 49, pp. 95-115. (1992).

[90] F. SCHWARTZ. *Janet for Symmetry Groups.* In Gröbner Bases and Applications. London Math. Soc. L.N.S. 251. Cambridge University Press. pp. 221-234. (1998).

[91] B. STURMFELS. *Grobner Bases of Determinantal Ideals.* Publications/Reports Linz. (1988).

[92] B. STURMFELS. *Grobner Bases of Toric Varieties.* Tohoku, Math. J. 43, pp. 249-261. (1991).

[93] D.C. STRUPPA. *Gröbner bases in Partial Differential Equations.* In Gröbner Bases and Applications. London Math. Soc. L.N.S. 251. Cambridge University Press. pp. 235-245. (1998).

[94] SZE-TSEN HU. *Introducción al álgebra homológica.* Vicens Universidad. (1974).

[95] W. TRINKS. *Über Buchergers verfahren, Systeme algebraicher Gleichungen zu lösen.* J. Number Theory, 10: pp. 475-488. (1978).

[96] W.V. VASCONCELOS. *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry.* Technical report. Departament of Mathematics. Rutgers University. (1996).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. María de los Angeles Moreno Frías titulada Métodos Computacionales en los Sistemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "cum Laude" por unanimidad.

Sevilla, 22 de Mayo 2000

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,