Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial

Inducción y Recursión: Las teorías $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$

Memoria presentada por
Francisco Félix Lara Martín
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

F. Félix Lara

Francisco Félix Lara Martín

V. B. Director

A. F. Margarit

D. Alejandro Fernández Margarit

Sevilla, Noviembre de 1999

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a D. Alejandro Fernández Margarit por su dirección de este trabajo y, muy especialmente, a mis compañeros del Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Sevilla por su ayuda.

A mis padres, Eladia y Manuel

Índice

Introducción

Uno de los objetivos generales del estudio de la Aritmética de Peano, **PA**, y sus fragmentos es obtener una mejor comprensión de la potencia y limitaciones del principio de inducción matemática. Dado que **PA** puede identificarse con la teoría de conjuntos finitos, la demostración de un determinado teorema en **PA** supone un análisis, no sólo de las formas concretas del principio de inducción empleadas en la prueba, sino, en general, de los principios combinatorios que son necesarios para probar dicho teorema. Más aún, al establecer que un cierto enunciado, válido en la estructura estándar de los números naturales, $\mathbb{N}$, no es demostrable en **PA**, se está estableciendo la insuficiencia de la combinatoria finita para probar dicho resultado. Este hecho hace de **PA** y sus fragmentos, teorías muy adecuadas para analizar resultados (y problemas) de teoría de la recursión o teoría de la complejidad, en términos de los recursos combinatorios que requiere su demostración. En muchos casos, además, dichos resultados pueden formularse de manera natural en el lenguaje de la Aritmética de primer orden, $\mathcal{L}$. Así, es bien conocida la clasificación de los subconjuntos definibles de $\mathbb{N}$ en términos de la Jerarquía Aritmética, en la cual la complejidad sintáctica de la fórmula que define a un conjunto se corresponde con la complejidad computacional del mismo. En particular, los conjuntos recursivamente enumerables son los definibles en $\mathbb{N}$ por fórmulas Σ_1, y los conjuntos recursivos los definibles en $\mathbb{N}$ por una fórmula Δ_1 (es decir, una fórmula Σ_1 equivalente a una fórmula Π_1). Otro ejemplo, procedente de la teoría de la complejidad, es el resultado de C. Wrathall ([37]), de acuerdo con el cual la jerarquía de tiempo lineal (LTH) está formada, precisamente, por los conjuntos definibles por fórmulas acotadas de $\mathcal{L}$.

Resultados como los anteriores permiten relativizar nociones y problemas de teoría de la recursión, obteniendo formulaciones de dichos conceptos para cada teoría de lenguaje $\mathcal{L}$. Uno de los principales ejemplos es la noción de función recursiva en una teoría:

Dada una teoría $\mathbf{T}$ de lenguaje $\mathcal{L}$, se dice que una función, $f : \omega \to \omega$, es recursiva en $\mathbf{T}$, si existe una fórmula $\varphi(x, y) \in \Sigma_1$ tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y)$.

(2) Para todo $n, m \in \omega$, $\quad f(n) = m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi(n, m)$.

Este concepto resulta fructífero tanto para el estudio de la potencia y las limitaciones de $\mathbf{T}$, como para el análisis del problema general de la clasificación de las funciones recursivas totales. Por un lado, la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{T}$ ofrece una forma de medir la potencia de la teoría. Por otro, podemos medir la complejidad de una función recursiva total, f, estudiando la clase de las teorías, $\mathbf{T}$, tales que f es recursiva en $\mathbf{T}$. De hecho, puede considerarse que f es más compleja, cuanto mayor es la potencia de los principios necesarios para probar que se trata de una función total. En el caso del estudio de las funciones recursivas en fragmentos de la Aritmética, esto conlleva un análisis de los principios combinatorios necesarios para establecer que f es total. Por otra parte, dado que la fórmula que expresa que f es total es una fórmula Π_2, el estudio de las funciones recursivas en una teoría conduce de manera natural al análisis de las Π_2–consecuencias de la misma. De este modo, la determinación de dicha clase de funciones, relaciona el estudio de las Π_2–consecuencias de $\mathbf{T}$ con el problema de la clasificación de las funciones recursivas.

El trabajo que presentamos en esta memoria se inserta en el contexto general que acabamos de describir, cubriendo los dos aspectos anteriormente reseñados. Por una parte, estudiamos las relaciones entre varios fragmentos de la Aritmética, axiomatizados mediante esquemas de axiomas que expresan diversas formas del principio de inducción (y otros principios, como colección y minimización). Por otra, realizamos un análisis general de las Π_{n+2}–consecuencias de las teorías introducidas.

El estudio de los fragmentos de la Aritmética que se obtienen al restringir el principio de inducción a fórmulas de una cierta complejidad (medida en términos de alternancia de cuantificadores universales y existenciales) se remonta a los trabajos de C. Parsons en los años 70 ([30] y [31], entre otros). El trabajo posterior de J. Paris y L. Kirby, [27], estableció las relaciones básicas entre los esquemas de inducción, minimización y colección, restringidos a fórmulas Σ_n y Π_n. Desde entonces, son muchos los esquemas de axiomas que se han introducido con objeto de aislar algunas de las propiedades de los modelos de la Aritmética. Dichos esquemas expresan principios que tienen su origen en la teoría de la recursión (por ejemplo, el esquema de colección fuerte), la teoría de la demostración (por ejemplo, el principio de reflexión) o bien, son de carácter combinatorio (como el principio del palomar). Todos ellos proporcionan, cuando restringimos su uso a fórmulas Σ_n o Π_n, jerarquías de teorías similares a las obtenidas por Paris y Kirby para los esquemas de inducción, minimización y colección (véase [8]). En este trabajo nos centramos fundamentalmente en el estudio de teorías obtenidas restringiendo los esquemas de inducción, minimización y colección a fórmulas Δ_n (es decir, fórmulas Σ_n que son equivalentes a fórmulas Π_n). Este tipo de fórmulas aparece de manera natural en el estudio de los modelos de la Aritmética. Por ejemplo, a veces resulta útil, trabajando en un modelo de $\mathbf{I}\Sigma_n$, disponer del principio de overspill o de inducción, para fórmulas que no son ni Σ_n ni Π_n. Tal es el caso de las fórmulas $\bigvee_n$ (disyunciones de una fórmula Σ_n y otra Π_n, ver [32]) o las fórmulas $\Sigma_0(\Sigma_n)$ (ver [8]): dichas fórmulas resultan ser equivalentes en $\mathbf{I}\Sigma_n$ a fórmulas Δ_{n+1} y, por tanto, la cuestión de si en $\mathbf{I}\Sigma_n$ disponemos de inducción para fórmulas $\bigvee_n$ (o $\Sigma_0(\Sigma_n)$) puede considerarse un caso particular de la pregunta:

¿Prueba $\mathbf{I}\Sigma_n$ inducción para fórmulas Δ_{n+1} (en $\mathbf{I}\Sigma_n$)?

Por otra parte, las relaciones entre las teorías proporcionadas por los esquemas de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1} no son totalmente conocidas. A este respecto, la lista de problemas abiertos dada en [4] incluye el siguiente problema, atribuido a J. Paris:

$$¿\mathrm{I}\Delta_{n+1} \iff \mathrm{L}\Delta_{n+1}?$$

Esta cuestión traduce a fragmentos de la aritmética la conocida equivalencia entre el principio de inducción y el principio del menor elemento. En [8] se dice, respecto a este problema, que a mediados de la decada de los 80, circuló un manuscrito de H. Friedman en el que se afirmaba que dicha equivalencia era cierta. Por ello, a lo largo de este trabajo, denominaremos al problema de la equivalencia

$$\mathrm{I}\Delta_{n+1} \iff \mathrm{L}\Delta_{n+1}$$

como la *Conjetura de Friedman–Paris*. Uno de los objetivos de esta memoria es realizar un análisis de este problema, estudiando diversas variantes del mismo. Los resultados de dicho análisis se exponen, fundamentalmente, en los capítulos II, III y VII.

Como ya hemos mencionado, un tema importante dentro del estudio de los fragmentos de la Aritmética es la determinación de la clase de las funciones recursivas en una teoría. Dada una teoría, **T**, se trata de estudiar qué funciones puede probar **T** que son totales, para alguna definición Σ_1 de su grafo. Un resultado clásico al respecto, debido, independientemente, a G. Takeuti, G. Mints y C. Parsons (ver [30], para el resultado de este último) afirma que la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I\Sigma_1}$ es la clase de las funciones primitivas recursivas. También se conocen (véase [8]) caracterizaciones de la clases de las funciones recursivas en $\mathrm{I}\Sigma_n$ ($n \geq 1$) o en la aritmética de Peano, **PA**, ya sea en términos de la jerarquía de Schwichtenberg–Wainer, o bien, en términos de funciones definidas a través de principios combinatorios como el principio de Paris–Harrington ([26]). Como puede verse en [8], utilizando el método de los indicadores de Paris y Kirby ([15], [16], [25]) o, equivalentemente, la noción de envoltura (véase [20]), es posible dar un tratamiento uniforme de estas caracterizaciones, ya que dichos métodos caracterizan las Π_2–consecuencias de la teoría considerada.

Estas cuestiones constituyen otro objetivo de esta memoria: estudiar las relaciones entre inducción y recursión. Más concretamente, se trata de estudiar las relaciones entre la clase de las funciones que una teoría puede probar que son totales (para una definición adecuada de su grafo) y la clase de las fórmulas para las que la teoría puede demostrar el esquema de inducción. Este estudio se desarrolla en los capítulos IV, V y VI.

Esta memoria está formada por 7 capítulos y 2 apéndices. El capítulo I contiene, con objeto de servir como referencia, los resultados básicos que se utilizan en el resto de la memoria. En cuanto a los apéndices:

(–) El primero contiene material utilizado en el capítulo VI.

(–) El segundo es una lista de las cuestiones planteadas a lo largo de este trabajo y que, finalmente, proponemos como problemas abiertos.

De acuerdo con los comentarios anteriores, el contenido de los capítulos restantes se divide en dos bloques:

(a) En el primero, formado por los capítulos II, III y VII, se estudian las relaciones entre varias teorías, axiomatizadas mediante esquemas restringidos a diversas clases de fórmulas del tipo Δ_{n+1}.

(b) En el segundo, formado por los capítulos IV, V y VI, se lleva a cabo un estudio de las Π_{n+2}-consecuencias de una clase de teorías que llamamos Π_n–funcionales.

Veamos, a continuación, una descripción más detallada del contenido de estas dos partes.

A) Colección e inducción para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

En esta parte se presenta una primera aproximación a la conjetura de Friedman–Paris, introduciendo, para cada teoría $\mathbf{T}$, la clase de fórmulas

$$\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Sigma_{n+1} : \text{ existe } \psi \in \Pi_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$$

Se estudian las relaciones entre las teorías, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, obtenidas al considerar los esquemas de inducción, minimización y colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. La idea es obtener una mejor comprensión de estos esquemas para fórmulas Δ_{n+1}, sustituyendo la parte semántica de los axiomas de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$ (la equivalencia entre una fórmula $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ y otra $\psi \in \Pi_{n+1}$ en un modelo) por una sintáctica (la equivalencia entre φ y ψ debe ser demostrable en $\mathbf{T}$). Con este objetivo también se estudian las relaciones entre la propia teoría $\mathbf{T}$ y los tres fragmentos anteriores. Se introducen para ello, los siguientes conceptos:

(1) $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(2) $\mathbf{T}$ tiene minimización Δ_{n+1}, si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(3) Análogamente, $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(4) Por último, $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada, si la clase $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada en $\mathbf{T}$ bajo cuantificación acotada.

Una parte importante del trabajo desarrollado está dirigida a establecer hasta qué punto es suficiente cada una de las condiciones anteriores para que se tenga la equivalencia

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Se consideran, además, las relaciones entre los nuevos fragmentos y ciertas teorías que reflejan el principio de colección ($\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$), inducción uniforme ($\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$) y minimización ($\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$). El estudio de las relaciones entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ proporciona algunos resultados de axiomatizabilidad para las teorías $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$, $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ y, sobre todo, $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

Debemos destacar aquí la fuerte diferencia, respecto al grado de generalidad, entre los resultados que obtenemos para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ y los correspondientes a $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$. Puesto que se desconoce si es cierta la equivalencia (versión de la conjetura de Friedman–Paris para fórmulas sin parámetros)

$$\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} \iff \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$$

una continuación natural del trabajo presentado en esta memoria es la extensión a $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ de los resultados que hemos obtenido para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

El siguiente diagrama resume las relaciones entre los fragmentos anteriores, en el caso $n = 0$ (ver II.8, II.26, II.27, III.24.1, VII.16, VII.18)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{I\Sigma_0} & & \\
 & & & & \Updownarrow & & \\
 & & \mathbf{L\Delta_1(I\Sigma_0)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta_1(I\Sigma_0)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(I\Sigma_0)} \\
 & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \Uparrow \\
\left.\begin{array}{l}\mathbf{B\Sigma_1^-}\\ \mathbf{I\Pi_1^-}\\ \mathbf{I\Delta_1}\\ \mathbf{B\Sigma_1}\end{array}\right\} & \not\Leftrightarrow & \mathbf{L\Delta_1(I\Sigma_1)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta_1(I\Sigma_1)} & \models\!\!\Rightarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(I\Sigma_1)} \\
 & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \Uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \Uparrow \\
\begin{array}{l}\mathbf{I\Sigma_1^-}\\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{I\Pi_1^-}\\ \mathbf{B\Sigma_1^-}\end{array}\right\}\end{array} & \begin{array}{c}\not\Leftarrow\\ \not\Leftrightarrow\end{array} & \mathbf{L\Delta_1(PA)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta_1(PA)} & \models\!\!\Rightarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(PA)} \\
 & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \Uparrow \\
\begin{array}{l}\mathbf{B\Sigma_1}\\ \mathbf{I\Pi_1^-}\\ \mathbf{B\Sigma_1^-}\end{array} & \begin{array}{c}\not\Leftrightarrow\\ \Leftarrow\!\!\dashv\\ \not\Rightarrow\end{array} & \mathbf{L\Delta_1(\mathbb{N})} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta_1(\mathbb{N})} & \models\!\!\Rightarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(\mathbb{N})} \\
 & & & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} \\
 & & & & \mathbf{I\Sigma_1} & \models\!\!\Rightarrow & \mathbf{B\Sigma_1}
\end{array}
$$

B) Las Π_{n+2}–consecuencias de una teoría

En este bloque consideramos una aproximación distinta a la conjetura de Friedman–Paris, motivada por la observación de la equivalencia entre $\mathbf{I\Delta_n}$ y $\mathbf{L\Delta_n}$ en el caso $n = 0$. En este caso se tiene:

$$\mathbf{I\Delta_0} \iff \mathbf{L\Delta_0} \iff \mathbf{I\Delta_0^-} \iff \mathbf{L\Delta_0^-}$$

Este hecho sugiere buscar condiciones bajo las cuales las fórmulas Δ_n puedan describirse como fórmulas acotadas. A continuación ilustraremos la cuestión en el caso de $\mathbf{I\Sigma_1}$.

Como hemos comentado anteriormente, la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I\Sigma_1}$ es la clase de las funciones primitivas recursivas. Como consecuencia, un conjunto $A \subseteq \omega$ es primitivo recursivo si y sólo si es definible (en la estructura estándar, $\mathbb{N}$) por una fórmula $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma_1})$.

Definamos para cada $n \in \omega$, $F_n : \omega \to \omega$, por recursión sobre $n \in \omega$, como sigue:

$$F_0(x) = (x+1)^2$$
$$F_{n+1}(x) = F_n^{x+2}(x) = F_n(F_n(\cdots \ {}^{x+2 \text{ veces}} \ \cdots F_n(x))\cdots)$$

Es conocido que toda función primitiva recursiva, $f : \omega \to \omega$, está acotada por alguna F_n, es decir, existe $n \in \omega$ tal que

$$\forall x \in \omega, \quad f(x) \leq F_n(x)$$

Dado un conjunto $A \subseteq \omega$ primitivo recursivo, existen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y) \in \Delta_0$ tales que:

(1) $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x\,(\exists y\,\varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\,\psi(x,y))$

(2) $n \in A \iff \mathbb{N} \models \exists y\,\varphi(n,y)$

Consideremos la fórmula $\theta(x,y)$, dada por

$$(\varphi(x,y) \wedge \forall z < y\,\neg\varphi(x,z)) \vee (\neg\psi(x,y) \wedge \forall z < y\,\psi(x,z))$$

y definamos $f : \omega \to \omega$ por

$$f(n) = m \iff \mathbb{N} \models \theta(n,m)$$

Entonces f es primitiva recursiva y, por tanto, para algún n, F_n acota a f. Este hecho permite probar que, para todo $m \in \omega$:

$$m \in A \iff \mathbb{N} \models \exists y \leq F_n(m)\,[\varphi(m,y)]$$

Por tanto, todo conjunto primitivo recursivo puede ser definido por una fórmula acotada, si extendemos el lenguaje de la aritmética convenientemente.

Este ejemplo motiva la introducción del concepto de conjunto Π_0-funcional. Se trata de extender el lenguaje de la aritmética mediante un conjunto de funciones, de tal modo que la clase de las fórmulas acotadas del nuevo lenguaje pueda identificarse con $\Delta_1(\mathbf{T})$. El uso de envolturas y de conjuntos Π_0–funcionales (que desempeñan, en el caso general, el mismo papel que la sucesión $\{F_n : n \in \omega\}$ en el caso de $\mathbf{I\Sigma}_1$) permite, bajo ciertas condiciones sobre $\mathbf{T}$, probar que toda fórmula $\Delta_1(\mathbf{T})$ es equivalente a una fórmula acotada en el nuevo lenguaje. Para generalizar estos resultados a fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ se introducen, siguiendo algunas construcciones de R. Kaye ([12] y [13]), los conjuntos (fuertemente) Π_n–funcionales. La idea es estudiar las Π_{n+2}–consecuencias de una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$ mediante ($\mathbf{I\Sigma}_n$ más) un conjunto de funciones no decrecientes de grafo Π_n–definible. Esta aproximación nos permite estudiar las Π_{n+2}–consecuencias de las teorías consideradas, reforzando sucesivamente el concepto de conjunto Π_n–funcional, de acuerdo con el objetivo que deseamos alcanzar en cada caso. De este modo,

(a) En el capítulo IV se introducen los conjuntos fuertemente Π_n–funcionales. El objetivo es caracterizar las fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ como fórmulas acotadas de una extensión adecuada de $\mathcal{L}$.

(b) En el capítulo V, se introducen las Π_n–envolturas y las Π_n–envolturas fuertes. En cierto sentido éstas últimas pueden considerarse como conjuntos fuertemente Π_n–funcionales definidos de manera uniforme. Para ello se generaliza el concepto de envoltura, considerando funciones de grafo Π_n–definible. El objetivo es desarrollar las herramientas necesarias para separar las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)$, $(m \in \omega)$ (lo que se hará en el capítulo VII).

(c) Por último, en capítulo VI se introduce la noción de conjunto Π_n–funcional inductivo. El objetivo ahora es estudiar bajo qué condiciones podemos garantizar la equivalencia entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$. Esto a su vez, servirá para estudiar las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

El siguiente cuadro resume las relaciones entre las diversas propiedades consideradas en la presente memoria. Debemos destacar que todas dependen esencialmente de las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$. (Ver II.19, II.23, II.24, II.29, IV.41, IV.16, V.15, V.25).

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{T}\text{ deb. PK–}\Delta_{n+1} & & & & \\
\Uparrow & & & & \\
\left\{\begin{array}{l}\mathbf{T}\text{ tiene ind. }\Delta_{n+1}\\ \mathbf{T}\text{ es }\Delta_{n+1}\text{–cerrada}\end{array}\right. & & \mathbf{T}\text{ fuert. }\Pi_n\text{–funcional} & & \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \\
\mathbf{T}\text{ tiene col. }\Delta_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{T}\ \Pi_n\text{–funcional} & {}_{(1)}\Longleftrightarrow_{(2)} & \mathbf{T}\ \Pi_n\text{–env. en }\mathbf{I}\Sigma_n \\
\Updownarrow & & \Updownarrow_{(3)} & & \Updownarrow_{(2)} \\
\mathbf{T}\text{ tiene min. }\Delta_{n+1} & & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}+\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & & \mathbf{T}\ \Pi_n\text{–env. fuert. en }\mathbf{I}\Sigma_n
\end{array}
$$

Las equivalencias numeradas necesitan condiciones adicionales. Concretamente:

(1) Si la Π_n–envoltura considerada es una fórmula Π_n.

(2) Si $\mathbf{T}$ es recursivamente axiomatizable (y $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$, si $n = 0$).

(3) Si $\mathbf{T}$ es Π_{n+2}–axiomatizable o Σ_{n+2}–axiomatizable.

A continuación pasamos a describir con mayor detalle el contenido de esta memoria. Para ello, resumiremos los principales resultados obtenidos en cada capítulo, proporcionando las referencias a los resultados concretos que prueban cada uno de los enunciados.

Capítulo II: Inducción y Minimización $\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$

En este capítulo se estudian las relaciones entre los fragmentos $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$ y $\mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$. Nuestro principal objetivo es obtener condiciones suficientes para que

$$(\bullet) \qquad \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T}) \iff \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$$

Como se prueba en [32] (ver II.12), en el contexto de la conjetura de Friedman–Paris, las teorías $\mathrm{I}\Delta_{n+1}$ y $\mathrm{L}\Delta_{n+1}$ son equivalentes, si en cada modelo $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_{n+1}$, la clase de las fórmulas Δ_{n+1} es cerrada (en $\mathfrak{A}$) bajo cuantificación acotada. En nuestro caso, este hecho nos proporciona una primera condición bajo la que obtener la equivalencia $(\bullet)$, (ver II.11):

Si $\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$ es cerrada en $\mathbf{T}$ bajo cuantificación acotada, entonces

$$\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T}) \iff \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$$

Siguiendo esta misma línea de razonamiento, el análisis de la prueba del teorema de Paris–Kirby, nos permite aislar un esquema de colección, que denotamos por $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, suficiente para probar $(\bullet)$. Decimos que una teoría $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1} (ver II.9) si

$$\mathrm{T} \implies \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$$

Análogamente, decimos que $\mathbf{T}$ tiene inducción si

$$\mathrm{T} \implies \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$$

Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada (ver II.21) y esto último permite probar $(\bullet)$, para teorías con colección Δ_{n+1}. Señalemos, además, que, en este caso, también se tiene la equivalencia entre los esquemas duales $\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ (ver II.20).

Este capítulo se ocupa también de las relaciones entre los conceptos anteriores ($\mathbf{T}$ tiene colección, o inducción, Δ_{n+1}; $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada). Respecto a esta cuestión probamos que:

Teorema (II.21)
Si T tiene inducción Δ_{n+1}, entonces son equivalentes:

(1) T *es Δ_{n+1}–cerrada*

(2) T *tiene colección Δ_{n+1}.*

Los resultados obtenidos sobre las relaciones entre inducción, minimización y colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, en el caso en que $\mathbf{T}$ es $\mathbf{I}\Sigma_m$, $m \in \omega$, quedan resumidos en el siguiente teorema:

Teorema (II.8, II.26, II.27)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{I}\Sigma_n & & \\
 & & \Updownarrow & & \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{B}\Sigma_{n+1}
\end{array}
$$

Los resultados de este teorema se completan más adelante con los obtenidos en el capítulo VII.

Capítulo III: Esquemas uniformes y sin parámetros

En este capítulo estudiamos las relaciones entre las teorías introducidas en el capítulo anterior (especialmente, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$) y las teorías proporcionadas por los esquemas de inducción, minimización y colección para fórmulas sin parámetros ($\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$, $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ y $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$).

En primer lugar obtenemos relaciones entre las teorías con colección y las extensiones de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$:

Teorema (III.2, III.3)

(1) *Si* $\mathbf{T}$ *es extensión de* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría completa. Son equivalentes:*

   (a) $\mathbf{T}$ *es una extensión de* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$.

   (b) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

Este resultado motiva la introducción de un nuevo esquema que denominamos colección uniforme (denotándolo por $\mathbf{UB}\Delta_{n+1}$) y que proporciona una teoría equivalente a $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$:

Teorema (III.5, III.6)

$$\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{UB}\Delta_{n+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{UL}\Delta_{n+1}$$

En el resto del capítulo (secciones 3 y 4) estudiamos las relaciones entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y los fragmentos sin parámetros $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ e $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$. Si $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, entonces (ver II.25)

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

En consecuencia, la cuestión

$$¿\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}?$$

quedaría resuelta afirmativamente si esta otra cuestión:

$$¿\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}?$$

tiene una respuesta positiva. El estudio realizado nos proporciona varios resultados acerca de $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ (los correspondientes para $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ se obtienen a partir del trabajo de McAloon [21]). Las consecuencias de nuestro análisis quedan resumidas a continuación:

Teorema (III.13, III.37, III.17.3, III.23, III.24.1)

(1) $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ *e* $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ *son* Σ_{n+2}*–axiomatizables, pero no son* Π_{n+2}*–axiomatizables.*

(2) $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ *e* $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ *no son finitamente axiomatizables.*

(3) *Se tiene que:*

(a) $(n \geq 1)$, $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n \not\Leftrightarrow \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

(b) $\mathbf{L}\Delta^-_1 \;\; \models\!\!\!\Longrightarrow \;\; \mathbf{I}\Delta_0 \;\; \Longleftarrow\!\!\!\!\dashv \;\; \mathbf{I}\Delta^-_1$.

(4) *Se verifica:*

(a) $(n \geq 1)$ $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$ *es (salvo equivalencia) la única teoría* Π_{n+1}*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

(b) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Π_1*–axiomatizable y* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^-_1$*, entonces*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T} + \mathbf{exp}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$$

La prueba de estos resultados para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$, se basa en las siguientes propiedades:

Teorema (III.16, III.17.4, III.23, III.24.1)

(1) *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión consistente de* $\mathbf{I}\Delta_0$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$*. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$.

(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta^-_1$.

(2) $(n \geq 1)$ *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente* Π_{n+2}*–axiomatizable. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$.

(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

La demostración de estas propiedades contiene varias ideas importantes que volverán a utilizarse en el capítulo VII. En concreto, la prueba de **(1)**, usa que $\mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$, para cada $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$, junto con definiciones de validez en $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$, para fórmulas Δ_0. Para probar **(2)**, en III.18 se introducen los elementos Π_n–minimales, que desempeñarán en la prueba el mismo papel que los elementos de $\mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ desempeñaron en la prueba de (1). El resultado clave (ver III.21) es que los elementos Π_n–minimales son cofinales en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, para cada $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. A partir de este hecho, usando validez para fórmulas Π_n, la prueba de (2) es similar a la de (1).

Como ya hemos comentado, los resultados relativos a $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^-$ se obtienen como consecuencias de los resultados obtenidos por McAloon en [21], si bien debemos observar que en algunos casos las técnicas de [21] proporcionan (al menos en su aplicación directa) resultados más débiles para $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^-$ que los obtenidos en esta memoria para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$. En particular, las dos últimas equivalencias que acabamos de enunciar en (1) y (2) constituyen un interesante problema abierto cuando sustituimos en ellas $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$ por $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^-$.

Capítulo IV: Conjunto Π_n–funcionales

En el capítulo II, se prueba que si $\mathbf{T}$ es una extensión Δ_{n+1}–cerrada de $\mathbf{I}\Sigma_n$, entonces

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

(Esto es, esencialmente, lo que permite demostrar, por ejemplo, que $\mathbf{I}\Delta_0 \iff \mathbf{L}\Delta_0$). Una forma de garantizar que $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada en $\mathbf{T}$ bajo cuantificación acotada, es probar que toda fórmula $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es equivalente a una fórmula acotada (en una extensión adecuada del lenguaje de la aritmética). Para ello se introducen los conjuntos Π_n–funcionales (ver IV.2). La idea es estudiar las Π_{n+2}–consecuencias de una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ mediante ($\mathbf{I}\Sigma_n$ y) un conjunto de funciones no decrecientes de grafo Π_n–definible. Así, (ver de nuevo IV.2) decimos que una teoría, $\mathbf{T}$, es Π_n–funcional si existe un conjunto Γ tal que

$$(\star) \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

donde Γ^* es un conjunto de axiomas que afirman la existencia de una familia de funciones no decrecientes de grafo Π_n. Para cada conjunto Π_n–funcional, Γ, se define (ver IV.18) una extensión del lenguaje $\mathcal{L}$, que denotamos por $\mathcal{L}(\Gamma)$, añadiendo un símbolo de función G_φ, por cada fórmula $\varphi \in \Gamma$. Denotemos por Δ_0^Γ al conjunto de las fórmulas acotadas de $\mathcal{L}(\Gamma)$ y consideremos la teoría (definida de manera natural) $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$. En el caso $n = 0$, los conjuntos Π_0–funcionales son suficientes para probar la equivalencia entre fórmulas Δ_1 y fórmulas acotadas. En concreto, se tiene

Teorema (IV.27, IV.28)
Sean $\mathbf{T}$ una teoría Π_0–funcional y Γ un conjunto Π_0–funcional tales que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Entonces, para cada $\varphi(x) \in \Delta_1(\mathbf{T})$ existe $\varphi_0(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \varphi_0(x)$$

Para generalizar este resultado se introduce una clase especial de conjuntos Π_n–funcionales, los conjuntos fuertemente Π_n–funcionales (ver IV.29), que nos permiten, de manera bastante general, identificar las fórmulas Δ_{n+1} con fórmulas acotadas:

Teorema (IV.32, IV.35, IV.38)
Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional. Se verifica:

(1) $\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \iff (\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \iff (\mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$.

(2) $\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^* \iff \mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^*$.

(3) *(Teorema de Parikh extendido) Sea* $\Theta \subseteq \Pi_{n+1} \cup \Pi_1^\Gamma$ *y* $\varphi(x,y) \in \Pi_n \cup \Delta_0^\Gamma$. *Si* $(\mathrm{B}\Sigma_{n+1} + \Theta + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, *entonces existe un término* $t(x)$ *de* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *tal que*

$$(\mathrm{I}\Delta_0 + \Theta + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall x\, \exists y \leq t(x)\, \varphi(x,y)$$

(4) *Si* $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$, *entonces existe* $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ *tal que*

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

(5) *Si* $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$, *entonces existe* $\varphi \in (\vec{x}) \in \Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$ *tal que*

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

En consecuencia, si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional, entonces se tiene que

$$(\bullet) \qquad \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Hemos obtenido, de este modo, dos condiciones suficientes para probar $(\bullet)$: $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional y $\mathbf{T}$ tiene colección. Sin embargo, se trata de condiciones equivalentes:

Teorema (IV.6, IV.7, IV.16)
Son equivalentes:

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional.*

(3) *Existe un conjunto fuertemente* Π_n*–funcional,* Γ, *tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

(4) *Para cada* $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, *existe* $C_\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que*

- $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, C_\varphi(x,y) \wedge \mathrm{IPF}(C_\varphi)$.
- $\mathbf{T} \vdash C_\varphi(x,y) \rightarrow \exists y' \leq y\, \varphi(x,y')$.

(donde $\mathrm{IPF}(C_\varphi)$ *expresa que* C_φ *define una función monótona no decreciente).*

La condición (4) tiene un cierto valor heurístico con respecto al problema de la equivalencia entre $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ y $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$ (otra versión de la conjetura de Friedman–Paris, ver capítulo I, sección I.8). Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ y $\varphi(x,y) \in \Pi_n^-$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$. Sea $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ la aplicación definida por

$$F(a) = (\mu y)(\varphi(a,y))$$

Consideremos la siguiente cuestión:

¿Es total la función definida en $\mathfrak{A}$, por

$$G(x) = (\mu u)_{\leq x}[\forall v \leq x\,(F(v) \leq F(u))]?$$

Si para cada función F de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$, en las condiciones anteriores, la función G es total, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{UL\Delta}_{n+1}$. De este modo quedaría probado que $\mathbf{UI\Delta}_{n+1} \iff \mathbf{UL\Delta}_{n+1}$.

Capítulo V: Π_n–envolturas

En este capítulo continuamos el estudio de las Π_{n+2}–consecuencias de una teoría $\mathbf{T}$ por medio de conjuntos Π_n–funcionales, pero ahora considerando la posibilidad de una definición uniforme. Con este fin, se introducen los conceptos de Π_n–envoltura y Π_n–envoltura fuerte, que serán las herramientas utilizadas, en el capítulo VII, para separar las teorías $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m)$. Las Π_n–envolturas son una generalización de las envolturas tal y como fueron introducidas por McAloon en [20] y están estrechamente relacionadas con los indicadores ([16], [25]), en su sentido más general (véase [8], [13]). En términos generales, el uso de envolturas es una adaptación al estudio de modelos de la Aritmética, de una técnica general utilizada en teoría de la recursión para separar clases de funciones:

Dadas dos clases $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ se construye una función $F(n,x) \in \mathcal{C}_2$ tal que toda función $f \in \mathcal{C}_1$, está acotada, para algún n, por la función $F_n(x) = F(n,x)$. En consecuencia, $F \in \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$. Es decir, se define de manera uniforme un conjunto de funciones de la clase $\mathcal{C}_2$ que mayoran a las de la clase $\mathcal{C}_1$.

Básicamente (ver V.2), podemos afirmar que una Π_n–envoltura de una teoría $\mathbf{T}$ en otra teoría, $\mathbf{T}_0$, es una fórmula $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ tal que el conjunto

$$\Gamma_\varphi = \{\varphi(k,x,y) : \; k \in \omega\}$$

define una familia de funciones verificando:

(1) $\mathbf{T}$ prueba que Γ_φ define una familia de funciones totales no decrecientes, tal que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k+1,x,y) \to \exists z < y\, \varphi(k,x,z)$$

Si la fórmula φ satisface estas codiciones decimos que es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ ("casi" una Π_n–envoltura).

(2) Para cada función, F, de grafo Π_n, que $\mathbf{T}$ pruebe que es total, existe una función de la familia que acota a F, y esta propiedad es demostrable en $\mathbf{T}_0$. En este caso decimos que φ satisface Π_n–ENV para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$.

Si Γ_φ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional, entonces diremos que φ es una Π_n–envoltura fuerte de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$.

Las Π_n–envolturas nos permiten caracterizar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$, ya que si $\varphi(u,x,y)$ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$, y $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{T}_0$, entonces (ver V.4)

$$(\star) \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_0 + \Gamma_\varphi^*)$$

Como consecuencia, las envolturas han sido utilizadas (ver [8]) para obtener resultados de independencia en fragmentos de la aritmética. En concreto (ver V.5.3), si $\varphi(u,x,y)$ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$, entonces

$$\mathbf{T} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$$

Gracias a $(\star)$, si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional y φ es una Π_n envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$, entonces

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*_\varphi$$

Una parte importante de este capítulo está dedicada a mostrar la relación entre las Π_n–envolturas y la existencia de segmentos iniciales; es decir, la relación existente entre Π_n–envolturas e indicadores (ver [8]). Para ello, dada una fórmula $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ decimos que φ satisface Π_n–IND (ver V.6) para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$ si para todo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ no estándar, numerable, y cada a, $b \in \mathfrak{A}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

IND–(i)	$\forall k \in \omega,\ \mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$.
IND–(ii)	Existe $I \prec^e_n \mathfrak{A}$ tal que $I \models \mathbf{T}$ y $a < I < b$.

Generalizando un resultado de McAloon ([20]), establecemos la equivalecia entre las condiciones Π_n–ENV y Π_n–IND:

Teorema (V.10, V.11)
Sean $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *tales que*

(i) $\mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, (*y* $\mathbf{T}_0 \vdash \mathbf{exp}$, *si* $n = 0$).

(ii) $\mathbf{T}$ *es una teoría recursivamente axiomatizable.*

(iii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1})$.

Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ *una* Π_n*–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) φ *satisface* Π_n*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ (*y, por tanto,* φ *es una* Π_n*-envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$).

(2) φ *satisface* Π_n*–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$.

La prueba de este resultado (así como las de los resultados de existencia de envolturas, a que nos referimos más adelante) es una adaptación el tratamiento de los indicadores presentado en el libro R. Kaye [13]. Sin embargo, esta adaptación presenta un cierto interés, puesto que muestra el papel central (véase V.14) que desempeña la condición **(iii)**

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1})$$

en la equivalencia entre Π_n–ENV y Π_n–IND. Debemos destacar que la condición **(iii)** es suficiente para probar que $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional (ver IV.10). Más aún, si $\mathbf{T}$ es Π_{n+2}–axiomatizable, entonces **(iii)** es equivalente a que $\mathbf{T}$ sea Π_n–funcional. De este modo, el material de este capítulo supone una primera aproximación al problema:

¿Son equivalentes las siguientes condiciones?

(1) $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional.

(2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.

En la última parte del capítulo, mostramos la existencia de Π_n–envolturas de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$, cuando $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional:

Teorema (V.15, V.25)

(1) $(n \geq 1)$ *Toda teoría* $\mathbf{T}$, *Π_n–funcional, recursivamente axiomatizable, tiene una Π_n-envoltura fuerte en* $\mathbf{I}\Sigma_n$.

(2) *Toda teoría* $\mathbf{T}$, *Π_0–funcional, recursivamente axiomatizable y tal que* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$ *tiene una Π_0–envoltura (fuerte) en* $\mathbf{I}\Delta_0$.

Finalmente (V.17, V.26), se prueba la existencia de Π_n–envolturas fuertes de $\mathbf{I}\Sigma_m$ $(m \geq n)$ (y $\mathbf{PA}$) en $\mathbf{I}\Sigma_n$, satisfaciendo algunas propiedades especiales (que posteriormente se utilizarán en el capítulo VII).

Capítulo VI: Funciones recursivas en $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

El tema de este capítulo es el estudio de las relaciones entre recursión e inducción. La cuestión central es hasta qué punto puede caracterizarse, mediante el esquema de inducción, restringido a una clase adecuada de fórmulas, la clase de las funciones que una teoría prueba que son totales (para una definición adecuada de su grafo).

En el capítulo II se asoció a cada teoría $\mathbf{T}$ una teoría axiomatizada por un esquema de inducción: $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Si $\mathbf{T}$ tiene inducción, entonces

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

En este capítulo presentamos condiciones para obtener la equivalencia entre estas dos teorías, centrándonos especialmente en la teoría $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y sus Π_{n+2}–consecuencias.

En VI.7 definimos los conjuntos Π_n–funcionales inductivos. Una teoría $\mathbf{T}$ se dice Π_n–funcional inductiva, si existe un conjunto Π_n–funcional inductivo tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Las propiedades básicas de las teorías Π_n–funcionales inductivas son las siguientes:

Teorema (VI.11)
Sea $\mathbf{T}$ *una teoría Π_n–funcional inductiva. Se verifica:*

(1) *Sea* Γ *un conjunto Π_n–funcional, tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Entonces, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$.

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es Π_{n+2}–axiomatizable.*

(3) $\mathbf{T}$ e $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *tienen las mismas Π_{n+2}–consecuencias.*

En el caso de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ establecemos (ver VI.15) la existencia de un conjunto Π_n–funcional inductivo Φ_n tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \iff \mathbf{I\Sigma}_n + \Phi_n^*$$

y como consecuencia obtenemos:

Teorema (VI.16,VI.18)
Para cada $n \in \omega$,

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}))$.

(2) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$ *es Π_{n+2}–axiomatizable.*

(3) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ *e* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$ *tienen las mismas funciones recursivas.*

(4) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$ *no es finitamente axiomatizable.*

En el caso $n = 0$, se obtiene una consecuencia más fuerte, pues se caracterizan las propiedades sobre las que se tiene inducción, al suponer que las funciones primitivas recursivas son totales. En concreto, para el conjunto Π_0–funcional Φ_0 se tiene que:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_1) \iff \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Sigma}_1) \iff \mathbf{I\Delta}_0 + \Phi_0^*$$

Dado que los subconjuntos de $\mathbb{N}$ definibles por fórmulas $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ son primitivos recursivos, este hecho establece la equivalencia entre inducción para conjuntos primitivos recursivos y que todas las funciones primitivas recursivas sean totales.

La prueba de estos resultados se basa en las Π_n–envolturas que se contruyen en el apéndice A. En dicho apéndice se obtiene una Π_n–envoltura fuerte, φ, de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$ tal que Γ_φ es un conjunto (fuertemente) Π_n–funcional inductivo. La definición de estas Π_n–envolturas es una adaptación de una construcción (parecida a la definición de la función de Ackermann) utilizada por R. Kaye en [12], para analizar las relaciones entre $\mathbf{I\Sigma}_n$ e $\mathbf{I\Sigma}_n^-$.

Capítulo VII: La jerarquía $\{\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) : m \in \omega\}$

En este capítulo se completan los resultados del capítulo II. Concretamente, se obtiene:

Teorema (II.8, II.26, II.27, VII.16, VII.18)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{I\Sigma}_n & & \\
 & & \Updownarrow & & \\
\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) & \iff & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) & \iff & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) & \iff & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) & \models\!\Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) & \iff & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) & \models\!\Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbb{N}) & \iff & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbb{N}) & \models\!\Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & \mathbf{I\Sigma}_{n+1} & \models\!\Longrightarrow & \mathbf{B\Sigma}_{n+1}
\end{array}$$

Para demostrar estos resultados se introducen los modelos $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$. La construcción de dichos modelos constituye una generalización de los modelos formados por los elementos Σ_{n+1}–definibles de $\mathfrak{A}$, con parámetros en X, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$.

Si Γ es un conjunto Π_n–funcional, $X \subseteq \mathfrak{A}$, $X \neq \emptyset$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ es (véase VII.2 y VII.4) el segmento inicial determinado por

$$\{t(a) : \ t(x) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma), \ a \in X\}$$

en la subestructura de $\mathfrak{A}$ formada por los elementos definibles en $\mathfrak{A}$ por fórmulas Δ_0^Γ (con parámetros en X).

Cuando Γ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional estos modelos poseen propiedades similares a los modelos $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. En concreto, se tiene:

Teorema (VII.5, VII.6)
Sean Γ un conjunto fuertemente Π_n-funcional, $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$, no vacío. Entonces,

(1) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0 \mathfrak{A}$.

(2) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_1^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0^e \mathfrak{A}$.

(3) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1,\mathcal{L}}^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$ *y* $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$.

(4) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ *e* $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$.

(5) *Si $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models (\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)_\Gamma$.*

Si Γ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional, un modelo Γ–acotado (ver VII.9) es un modelo de la forma $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$, donde $a \in \mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$. Si tenemos un modelo Γ–acotado con $\Gamma = \Gamma_\varphi$ para una Π_n–envoltura fuerte (sujeta a ciertas condiciones), entonces ω es definible en dicho modelo. Esto es esencial para demostrar el siguiente resultado:

Teorema (VII.13)
Sean $\mathbf{T}$ una teoría Π_n-funcional, (tal que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$, si $n = 0$), $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{T}$ y $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$ una Π_n-envoltura fuerte de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$ tales que

$$\mathbf{T}' \vdash \forall u \, \forall x \, \exists y \, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2 \, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u+1, x, y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$$

Entonces

(1) *Para todo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}'_{\Gamma_\varphi}$ y $a \in \mathfrak{A}$, $a > \omega$, se verifica:*

  (a) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

  (b) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$.

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}') \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Como consecuencia de este teorema, los resultados de existencia de Π_n–envolturas fuertes presentados en el capítulo VII nos proporcionan las herramientas necesarias para completar los resultados del capítulo II:

Teorema (VII.14, VII.16)
Para todo $n \geq 0$ se verifica:

(1) *Para todo $m \leq n$,* $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_m) \iff \mathrm{I}\Sigma_m$.

(2) *Para cada $m \geq n$,*

 (a) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{m+1}) \models\!\!\Rightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_m)$.

 (b) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{m+1}) \models\!\!\Rightarrow \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{m+1})$.

(3) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) \models\!\!\Rightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$.

La última parte del capítulo está dedicada a mostrar una caracterización de los modelos Γ–acotados mediante una construcción que denominamos *ultrapotencia definible acotada.* Estas ultrapotencias generalizan las ultrapotencias recursivas introducidas por Hirschfeld en [9]. Concretamente, probamos que:

Teorema (VII.26)
Si Γ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional, entonces la clase de los modelos Γ–acotados coincide con la clase de las ultrapotencias definibles acotadas de modelos de $\mathrm{I}\Delta_0^{\Gamma}$.

Este resultado complementa el estudio de los conjuntos fuertemente Π_n–funcionales con una descripción en términos de teoría de modelos, de los modelos Γ–acotados, que han resultado cruciales en los resultados de separación de la jerarquía $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_m)$.

Para terminar, comentaremos, brevemente, algunas consideraciones generales que podemos extraer de los procedimientos utilizados en este trabajo para estudiar la conjetura de Friedman–Paris.

Los conjuntos fuertemente Π_n–funcionales, junto con las Π_n–envolturas fuertes y los modelos Γ–acotados introducidos en esta memoria, constituyen un instrumento muy útil para separar fragmentos de la Aritmética, sobre todo a través del análisis de sus Π_{n+2}–consecuencias. El trabajo realizado muestra que existe una cierta relación entre la conjetura de Friedman–Paris y la posibilidad de caracterizar, mediante diferentes clases de funciones, el crecimiento de los "testigos" $z(\vec{x})$ que validan fórmulas del tipo $\forall \vec{x}\, \exists z\, \psi(\vec{x}, z)$. Parte de este trabajo se enmarca dentro del desarrollo de la teoría de modelos de la Aritmética, dirigido a la elaboración de métodos para analizar diferentes formas de inducción y otros principios. El considerable desarrollo de la teoría de modelos para fragmentos de la aritmética proporciona una buena base para resolver estas cuestiones, algunas de las cuales parecen, en principio, abocadas a un tratamiento mediante técnicas de la teoría de la demostración.

Capítulo I

Preliminares

I.1 Colección, Inducción y Minimización

A lo largo de toda esta memoria $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ denotará el lenguaje de la Aritmética de primer orden con igualdad. Consideraremos como símbolos lógicos básicos la negación, la disyunción y el cuantificador existencial. El resto de las conectivas, así como el cuantificador universal, se tratarán como abreviaturas. En particular, para cada término t de $\mathcal{L}$ en el que no aparezca la variable x, y cada fórmula φ, escribiremos

$$\exists x \leq t\, \varphi \quad \text{y} \quad \forall x \leq t\, \varphi$$

en lugar de, $\exists x\, (x \leq t \wedge \varphi)$ y $\forall x\, (x \leq t \rightarrow \varphi)$, respectivamente. Estos cuantificadores se llamarán cuantificadores acotados.

Como es usual, definimos la clase Δ_0, formada por las fórmulas acotadas de $\mathcal{L}$, como la menor colección de fórmulas que contiene las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$ y es cerrada bajo negación, disyunción y cuantificación acotada. A partir de aquí podemos introducir la Jerarquía Aritmética formada por las siguientes clases de fórmulas, que denotamos por Σ_n y Π_n, para cada $n \in \omega$:

- $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$
- $\Sigma_{n+1} = \{\exists \vec{x}\, \varphi : \ \varphi \in \Pi_n\} \cup \Sigma_n$
- $\Pi_{n+1} = \{\forall \vec{x}\, \varphi : \ \varphi \in \Sigma_n\} \cup \Pi_n$

En general, dada una colección de fórmulas, Γ, escribiremos $\varphi \in \Gamma$ si existe $\psi \in \Gamma$ tal que $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, es decir, φ es lógicamente equivalente a una fórmula $\psi \in \Gamma$.

Nota I.1 Dada una fórmula φ y dos variables x e y, escribiremos $\varphi(x, y)$ para denotar que las variables x e y son distintas y aparecen libres en φ, sin que ello implique la existencia, o no, de otras variables libres en φ (que llamaremos parámetros). Cuando queramos resaltar el hecho de que x e y son las únicas variables libres de $\varphi(x, y)$ lo indicaremos expresamente, diciendo que $\varphi(x, y)$ es una fórmula <u>sin parámetros</u> (no obstante, véase también la notación introducida en I.43). Este mismo criterio se extenderá a cualquier número de variables $x_1, \ldots, x_n$, escribiendo en tal caso $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, o más brevemente, $\varphi(\vec{x})$. Además, cuando a lo largo de una demostración trabajemos en un modelo, supondremos, aunque no se indique explícitamente, que los parámetros de las fórmulas consideradas han sido sustituidos por elementos de éste.

Denotaremos por $\mathbf{P}^-$ la teoría dada por un conjunto finito de fórmulas Π_1 tal que, si $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$, entonces $\mathfrak{A}$ es la parte no negativa de un anillo conmutativo, discretamente ordenado (véase [11]).

Todas las teorías consideradas en esta memoria son extensiones de $\mathbf{P}^-$, obtenidas añadiendo a esta teoría algún esquema de axiomas. Los esquemas fundamentales son:

- **Inducción:** Dada una fórmula $\varphi(x, \vec{v})$, el axioma de inducción para φ con respecto a la variable x, $\mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v})$, es la fórmula

$$\varphi(0, \vec{v}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \vec{v}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{v})) \rightarrow \forall x\, \varphi(x, \vec{v})$$

- **Minimización:** Dada una fórmula $\varphi(x, \vec{v})$, el axioma de minimización para φ con respecto a la variable x, $\mathbf{L}_{\varphi,x}(\vec{v})$, es la fórmula

$$\exists x\, \varphi(x, \vec{v}) \rightarrow \exists x\, (\varphi(x, \vec{v}) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(y, \vec{v}))$$

- **Colección:** Dada $\varphi(x, y, \vec{v})$, el axioma de colección para φ con respecto a x e y, $\mathbf{B}_{\varphi,x,y}(\vec{v})$, es la fórmula

$$\forall x \leq z\, \exists y\, \varphi(x, y, \vec{v}) \rightarrow \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x, y, \vec{v})$$

- **Colección Fuerte:** Dada $\varphi(x, y, \vec{v})$, el axioma de colección fuerte para φ con respecto a x e y, $\mathbf{S}_{\varphi,x,y}(\vec{v})$, es la fórmula

$$\forall x \leq z\, \exists u\, (\exists y\, \varphi(x, y, \vec{v}) \rightarrow \exists y \leq u\, \varphi(x, y, \vec{v}))$$

A partir de estos esquemas, para cada conjunto de fórmulas Γ, se definen las siguientes teorías de lenguaje $\mathcal{L}$:

$$\mathrm{I}\Gamma = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

$$\mathrm{L}\Gamma = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

$$\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

$$\mathrm{S}\Gamma = \mathrm{I}\Delta_0 + \{\mathbf{S}_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

donde, como es usual, escribimos $\mathbf{I}_\varphi$, $\mathbf{L}_\varphi$, $\mathbf{B}_\varphi$ y $\mathbf{S}_\varphi$ en lugar de $\mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v})$, etc.

La aritmética de Peano, **PA**, es la teoría de lenguaje $\mathcal{L}$ dada por

$$\mathbf{PA} = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi : \varphi \text{ fórmula de } \mathcal{L}\}$$

Desde un punto de vista sintáctico, la utilidad básica del esquema de colección $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$ es garantizar el cierre de las clases Σ_{n+1} y Π_{n+1} bajo cuantificación acotada:

Proposición I.2 *Las clases de fórmulas Σ_{n+1} y Π_{n+1} son cerradas bajo cuantificación acotada en $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.* □

En I.31 y I.32 veremos la relevancia de los esquemas de colección desde un punto de vista semántico.

Notación I.3 A lo largo de este trabajo si $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son dos teorías, escribiremos:

- $\mathbf{T}_1 \Longrightarrow \mathbf{T}_2$ si todo modelo de $\mathbf{T}_1$ es modelo de $\mathbf{T}_2$ ($\mathbf{T}_1$ es una extensión de $\mathbf{T}_2$).
- $\mathbf{T}_1 \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{T}_2$ si $\mathbf{T}_1$ es una extensión de $\mathbf{T}_2$ pero $\mathbf{T}_2$ no es extensión de $\mathbf{T}_1$.
- $\mathbf{T}_1 \Longleftrightarrow \mathbf{T}_2$ si son teorías equivalentes.
- $\mathbf{T}_1 \not\Longleftrightarrow \mathbf{T}_2$ si $\quad \mathbf{T}_1 \not\Longrightarrow \mathbf{T}_2 \quad$ y $\quad \mathbf{T}_2 \not\Longrightarrow \mathbf{T}_1$.

Las relaciones básicas entre los esquemas anteriores para fórmulas Σ_n y Π_n quedan resumidas en el siguiente resultado:

Teorema I.4 (Paris-Kirby, [27]) *Para todo $n \in \omega$,*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{I}\Sigma_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Pi_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Sigma_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Pi_n \\
\Uparrow & & & & & & \\
\mathbf{B}\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}\Pi_n & & & & \\
\Uparrow & & & & & & \\
\mathbf{I}\Sigma_{n+1} & & & & & &
\end{array}$$

□

Y con respecto a colección fuerte tenemos (ver [8]):

Proposición I.5 *Para todo $n \in \omega$,* $\quad \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \Longleftrightarrow \mathbf{S}\Pi_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ □

Definición I.6 *Sea $\mathbf{T}$ una teoría y Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, denotaremos por*

(1) $\mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Gamma \cap \mathbf{Sent}(\mathcal{L}) : \mathbf{T} \vdash \varphi\}$

(2) $\Gamma(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}) :$ *Existe* $\psi \in \Gamma$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$

(3) *Dada una estructura $\mathfrak{A}$, escribiremos $\mathbf{Th}_\Gamma(\mathfrak{A})$ y $\Gamma(\mathfrak{A})$ en lugar de $\mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{Th}(\mathfrak{A}))$ y $\Gamma(\mathbf{Th}(\mathfrak{A}))$, respectivamente.*

($\mathbf{Form}(\mathcal{L})$ *y* $\mathbf{Sent}(\mathcal{L})$ *denotan, respectivamente, la clase de las fórmulas y la clase de las fórmulas cerradas de $\mathcal{L}$*).

El siguiente resultado (véase de nuevo [8] o [11]) debido, independientemente, a H. Friedman y J. Paris, proporciona una de las relaciones fundamentales entre los esquemas de colección e inducción:

Teorema I.7 *Para cada* $n \in \omega$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$; *es decir, para cada* $\varphi \in \Pi_{n+2}$

$$\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \varphi \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi \qquad \square$$

Un resultado estrechamente relacionado con esta propiedad de conservación es el conocido teorema de Parikh, que enunciamos como sigue:

Teorema I.8 (Parikh, [24]) *Sea* $\varphi(\vec{x}, y) \in \Sigma_1$. *Si* $\mathbf{B}\Sigma_1 \vdash \forall \vec{x}\, \exists y\, \varphi(\vec{x}, y)$, *entonces existe un término* $t(\vec{x})$ *de* $\mathcal{L}$ *tal que*

$$\mathbf{I}\Delta_0 \vdash \forall \vec{x}\, \exists y \leq t(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}, y) \qquad \square$$

I.2 Exponenciación y conjuntos finitos

Como es sabido, es posible definir el grafo de la función exponencial mediante una fórmula Δ_0, de tal modo que $\mathbf{I}\Delta_0$ prueba las propiedades básicas de dicha función (salvo que es total).

Teorema I.9 *Existe una fórmula* $\mathrm{Exp}(x, y, z) \in \Delta_0$ *tal que* $\mathbf{I}\Delta_0$ *prueba que:*

(1) $\mathrm{Exp}(x, 0, z) \leftrightarrow z = 1$

(2) $\mathrm{Exp}(x, y+1, z) \leftrightarrow \exists v\, (\mathrm{Exp}(x, y, v) \wedge z = v \cdot x)$ $\square$

Además, toda fórmula Δ_0 que satisfaga las dos condiciones de I.9 es equivalente en $\mathbf{I}\Delta_0$ a $\mathrm{Exp}(x, y, z)$. De este modo, la fórmula $\mathrm{Exp}(x, y, z)$ proporciona una definición del grafo de la función exponencial en todo modelo de $\mathbf{I}\Delta_0$. Salvo que exista peligro de confusión denotaremos la fórmula $\mathrm{Exp}(x, y, z)$ por $x^y = z$. Además, denotaremos por **exp** la fórmula $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \mathrm{Exp}(x, y, z)$.

Sea $x \in y$ la fórmula Δ_0

$$\exists v \leq y\, \exists z_1, z_2 \leq y\, \exists w < z\, (2^x = z_1 \wedge 2^{x+1} = z_2 \wedge y = v \cdot z_2 + z_1 + w)$$

(podemos reescribir esta fórmula como $\exists v \leq y\, \exists w < 2^x\, (y = v 2^{x+1} + 2^x + w)$, es decir, el dígito x-ésimo del desarrollo en base 2 de y es 1). Esta fórmula permite interpretar todo elemento de un modelo de $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$ como un conjunto finito, y es posible desarrollar dentro de cada uno de tales modelos una teoría de conjuntos finitos de manera bastante natural. En particular, podemos definir los conceptos de aplicación biyectiva, cardinal de un conjunto, etc. y sobre esta base probar una versión del Principio del Palomar (que denotaremos por PHP) para conjuntos finitos.

Definición I.10 ($\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$) *Para cada* z, *denotamos por* $(< z)$ *al conjunto de los elementos menores que* z, *es decir,*

$$(< z) = 2^z - 1 = \{x : x < z\}$$

Teorema I.11 ($\mathbf{I\Delta_0 + exp}$)
(1) *Para cada x existe un único $y = \mathrm{card}(x)$, para el que existe una aplicación biyectiva de x en $(< y)$.*

(2) (PHP para conjuntos finitos) *Si* $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(y)$, *entonces no existe ninguna aplicación inyectiva de y en x. En particular, si $x < y$, entonces no existe ninguna aplicación inyectiva de $(< y)$ en $(< x)$.* □

Por otra parte, la teoría de conjuntos finitos desarrollable con $\mathbf{I\Delta_0 + exp}$ como base, admite un versión de los axiomas de separación, fuertemente ligada a la clase de fórmulas para las que se dispone del esquema de inducción.

Definición I.12 *Sea $\varphi \in \Sigma_{n+1}$. Definimos $\Sigma_0(\varphi)$ como la menor colección de fórmulas que contiene fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$, junto con φ y todas las fórmulas obtenidas a partir de φ sustituyendo sus variables libres por términos, y es cerrada bajo conectivas lógicas y cuantificación acotada. Por último, definimos*

$$\Sigma_0(\Sigma_{n+1}) = \bigcup_{\varphi \in \Sigma_{n+1}} \Sigma_0(\varphi)$$

Teorema I.13 $\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \Longleftrightarrow \mathrm{I}\Sigma_0(\Sigma_{n+1})$ □

Este último resultado nos proporciona las siguientes versiones del esquema de separación:

Teorema I.14 (Separación)
(1) *Para cada $\varphi(x) \in \Delta_0$,*

$$\mathbf{I\Delta_0 + exp} \vdash \forall x\, \exists y\, \forall u \leq x\, (u \in y \leftrightarrow \varphi(u))$$

(2) *Para cada $n \in \omega$, si $\varphi(x) \in \Sigma_0(\Sigma_{n+1})$, entonces*

$$\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \forall u \leq x\, (u \in y \leftrightarrow \varphi(u))$$ □

Una referencia general para los resultados de este sección es [8].

I.3 Sucesiones y codificación

Para trabajar con sucesiones en modelos de $\mathrm{I}\Delta_0$, adoptaremos una codificación de sucesiones similar a la descrita, por ejemplo, en [33] (véase también [29]). La propiedad fundamental que requerimos de este tratamiento de las sucesiones es que los conceptos básicos sean definibles por fórmulas Δ_0 y, además, la concatenación sea una operación no decreciente en sus dos componentes. A continuación daremos algunos detalles, siguiendo la descripción dada en [33].

Dado un conjunto finito A denotaremos por $A^\star$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A, es decir, $A^\star = \bigcup_{n \in \omega} A^n$. En $A^\star$ la concatenación, que denotamos por $*$, es una operación asociativa y existe un elemento neutro: la sucesión vacía, que denotaremos por $\langle\rangle$.

Definición I.15 ($n \geq 2$). *Definimos la representación de Smullyan de x en base n como:*

$$\bar{x}^n = \begin{cases} \langle\rangle & si\ x = 0 \\ \bar{q}^n * \langle r \rangle & si\ x = qn + r\ con\ 1 \leq r \leq n \end{cases}$$

donde $\langle r \rangle$ es la sucesión cuyo único elemento es r.

Nota I.16 Observemos que dado $m \in \omega$,

$$\bar{m}^n = x = \langle a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_k \rangle \iff m = a_0 n^k + \cdots + a_{k-1} n + a_k$$

Lema I.17 *Para cada $n \geq 2$, la aplicación $\bar{\cdot}^n : \omega \to \{1, \ldots, n\}^*$ es biyectiva.* □

Esta biyección nos permite trasladar la estructura de $\{1, \ldots, n\}^*$ a ω y definir funciones que actúen sobre los elementos de ω considerados como cadenas. De este modo tenemos:

$$\begin{array}{ll} |\cdot|_n : \omega \to \omega, & |x|_n = \text{ longitud de } \bar{x}^n \\ *_n : \omega^2 \to \omega, & x *_n y = z \iff \bar{x}^n * \bar{y}^n = \bar{z}^n \\ (\cdot)_{n;i} : \omega^2 \to \omega, & (x)_{n;i} = \begin{cases} a_i & \text{si } x = \langle a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_k \rangle \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

El hecho importante es que podemos dar definiciones Δ_0 de los grafos de estas funciones, y probar en $\mathrm{I}\Delta_0$ muchas de sus propiedades, en particular que son funciones totales.

Gracias a estas funciones, podemos obtener fórmulas Δ_0 que expresen los conceptos y relaciones necesarios a la hora de trabajar con sucesiones de longitud finita arbitraria, de tal modo que muchas de las propiedades de dichas relaciones pueden probarse en $\mathrm{I}\Delta_0$. A continuación enunciamos algunas de estas fórmulas.

$\mathrm{Seq}(x)$ ("x es una sucesión")

$$x = 0 \lor (x)_{3;0} = 3.$$

$z = \langle x \rangle$ ("z es la sucesión cuyo único elemento es x")

$$\exists v \leq z \begin{cases} |z|_3 = v \land |x|_2 = v - 1 \land (z)_{3;0} = 3 \land \\ \forall i \leq v - 2\, ((z)_{3;i+1} = (x)_{2;i}) \end{cases}$$

$x * y = z$ (la concatenación de sucesiones) es la fórmula $x *_3 y = z$

$\mathrm{lg}(x) = y$ ("la longitud x es y") es $\nu(x, y, 3, 3)$

(donde $\nu(x, y, j, k)$ es una fórmula Δ_0 que expresa que el dígito j aparece y veces en la representación de x en base k, (ver [33])).

$(x)_i = y$ ("y es la i-ésima componente de x")

$$\begin{cases} ((\mathrm{lg}(x) \leq i \lor \neg\mathrm{Seq}(x)) \land y = 0) \lor \\ \exists u, v \leq x\, (\mathrm{Seq}(u) \land \mathrm{Seq}(v) \land x = (u * \langle y \rangle) * v) \land \mathrm{lg}(u) = i) \end{cases}$$

$x \subseteq_e y$ ("x es una subsucesión inicial de y")

$$\mathrm{Seq}(x) \wedge \mathrm{Seq}(y) \wedge \exists z \leq y\,(\mathrm{Seq}(z) \wedge x * z = y)$$

$\langle x_1, \ldots, x_k\rangle = y$ es la fórmula Δ_0

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \langle x_1\rangle * \cdots * \langle x_k\rangle = y$$

El siguiente teorema (ver [33]) resume las propiedades de monotonía de esta codificación que utilizaremos a lo largo de este memoria (muchas veces sin referencia explícita).

Proposición I.18 *Son teorema de* $\mathrm{I}\Delta_0$*:*

(1) *Si* $\mathrm{Seq}(x) \wedge \mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{Seq}(x_i) \wedge \mathrm{Seq}(y_i) \wedge \mathrm{Seq}(z_i)$, $(i = 1, 2)$, *entonces*

  (a) $x * y_1 = z_1 \wedge x * y_2 = z_2 \wedge y_1 < y_2 \rightarrow z_1 < z_2$

  (b) $x_1 * y = z_1 \wedge x_2 * y = z_2 \wedge x_1 < x_2 \rightarrow z_1 < z_2$

(2) $\mathrm{Seq}(x) \rightarrow \forall y < \mathrm{lg}(x)\,((x)_y < x)$

(3) $\mathrm{Seq}(x) \wedge \mathrm{Seq}(y) \wedge x \subseteq_e y \wedge x \neq y \rightarrow x < y$

Otra forma de codificación que también utilizaremos eventualmente, es la proporcionada por la función J de Cantor:

Definición I.19 $J(x, y) = z$ *denotará la fórmula* $2z = (x + y)(x + y + 1) + 2x$.

Lema I.20 *Son teoremas de* $\mathrm{I}\Delta_0$*:*

(1) $\forall x\,\forall y\,\exists! z\,(J(x, y) = z)$

(2) $\forall z\,\exists! x \leq z\,\exists! y \leq z\,(J(x, y) = z)$

(3) $\forall x\,\forall y\,(J(x, y) \leq (x + y)^2)$ □

Utilizando la función J podemos probar el siguiente resultado, de acuerdo con el cual a la hora de trabajar con fórmulas Σ_n o Π_n, en $\mathrm{I}\Delta_0$, podemos considerar que cada bloque de cuantificadores no acotados, está formado por una sola variable (ver [11]).

Proposición I.21 *Sea* $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in \Pi_n$. *Existe* $\theta(\vec{x}, z) \in \Pi_n$ *tal que*

$$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \exists \vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \exists z\,\theta(\vec{x}, z)$$ □

I.4 Validez. Principios de Reflexión

Consideraremos una aritmetización de la sintaxis de $\mathcal{L}$, por medio de la cual (siguiendo las ideas de Feferman en [6]) identificaremos las fórmulas de $\mathcal{L}$ con ciertos números naturales (véase [8]). De este modo a cada fórmula φ se le asigna (se identifica con) su número de Gödel, $\ulcorner\varphi\urcorner$. Sólo imponemos una restricción importante a dicha aritmetización: debe ser tal que algunos conceptos sintácticos básicos puedan ser definidos mediante fórmulas Δ_0, y sus propiedades básicas probadas en $\mathbf{I}\Delta_0$. En particular, para cada $n \in \omega$, existen fórmulas Δ_0,

$$\mathbf{Form}_{\Sigma_n}(x),\ \mathbf{Form}_{\Pi_n}(x),\ \mathbf{Sent}(x)$$

que definen los conjuntos de las fórmulas Σ_n, Π_n y cerradas, respectivamente. Esto puede conseguirse con una aritmetización conveniente, tal y como se muestra en [8], Cap. V (véase también [33]–sección 5.6).

Nota I.22 Vía la aritmetización elegida, dado $\mathfrak{A}$, utilizaremos letras griegas $\varphi, \psi, \rho, \tau, ..$ para denotar a los elementos $a \in \mathfrak{A}$ que son "fórmulas" (posiblemente no estándar). Por ejemplo, que verifican $\mathfrak{A} \models \mathbf{Form}_{\Sigma_n}(a)$. Cuando queramos resaltar que se trata de fórmulas estándar ("reales") utilizaremos la notación en términos de números de Gödel, $\ulcorner\varphi\urcorner$.

Fijada una aritmetización en las condiciones establecidas se tiene (véase [8]):

Teorema I.23 *Para cada $n \geq 1$,*

(1) *Existe una fórmula $\mathbf{Sat}_{\Sigma_n}(x,y) \in \Sigma_n$ tal que, para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$*

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathbf{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \langle\vec{x}\rangle)$$

(2) *Existe una fórmula $\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(x,y) \in \Pi_n$ tal que, para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n$*

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \langle\vec{x}\rangle) \qquad \Box$$

En el caso $n = 0$ necesitaremos un resultado más fuerte, ya que necesitaremos una definición de validez para fórmulas Δ_0, cuyas propiedades puedan probarse en $\mathbf{I}\Delta_0$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado (teoremas V.5.4, V.5.5 de [8]):

Teorema I.24 *Existe una fórmula $\mathbf{V}_0(x,y,z) \in \Delta_0$ tal que,*

(1) *Existe $c \in \omega$ tal que, para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$*

$$v \geq |\ulcorner\varphi\urcorner| \wedge |z| \geq (\max(\langle\vec{x}\rangle) + 2)^{c^v} \rightarrow [\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathbf{V}_0(\ulcorner\varphi\urcorner, \langle\vec{x}\rangle, z)]$$

(donde $|x| = (\mu y)(2^y > x)$).

(2) *Para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$, existe $k \in \omega$ tal que*

$$\mathbf{I}\Delta_0 \vdash u \geq 2^{(\max(\vec{x})+2)^k} \rightarrow [\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathbf{V}_0(\ulcorner\varphi\urcorner, \langle\vec{x}\rangle, u)] \qquad \Box$$

Definición I.25 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría recursivamente axiomatizable. El principio de* Σ_n*–reflexión para* $\mathbf{T}$ *es la fórmula, que denotaremos por* $\mathbf{Rfn}_{\Sigma_n}(\mathbf{T})$,

$$\forall x\,(\mathbf{Sent}_{\Sigma_n}(x) \wedge \mathbf{Pr}_{\mathbf{T}}(x) \to \mathbf{Sat}_{\Sigma_n}(x, \langle\rangle))$$

(donde $\mathbf{Pr}_{\mathbf{T}}(x)$ *es una fórmula que expresa: "x es demostrable en* $\mathbf{T}$*" y* $\mathbf{Sent}_{\Sigma_n}(x)$ *expresa que "x es una fórmula* Σ_n *cerrada")*

A partir de los resultados presentados en [33] se deduce fácilmente (véase también [8]):

Teorema I.26 *Para todo* $n \in \omega$

$$\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}(\mathrm{I}\Sigma_n) \qquad \square$$

I.5 Segmentos iniciales

Definición I.27 *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$. *Diremos que* $I \subseteq \mathfrak{A}$ *es un segmento inicial si*

$$\forall a \in I,\ \forall b \in \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \models b < a \Longrightarrow b \in I$$

Si I, *además, es una subestructura de* $\mathfrak{A}$, *diremos que* I *es una subestructura inicial de* $\mathfrak{A}$.

Nota I.28 Todos los modelos considerados en esta memoria son <u>numerables</u>. Además, todos los segmentos iniciales considerados a lo largo de este trabajo serán subestructuras (iniciales).

Definición I.29 *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$. *Diremos que* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ *es una subestructura* n*–elemental de* $\mathfrak{A}$, *y los notaremos* $\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}$, *si para toda* $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$,

$$\forall \vec{a} \in \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$$

Notación I.30 Dado un segmento inicial I de $\mathfrak{A}$, si $a \in \mathfrak{A}$, entonces escribiremos $a < I$ para expresar que $a \in I$, mientras que $I < a$ expresará que $a \notin I$. En particular, $a > \omega$ expresa que a es un elemento no estándar de $\mathfrak{A}$.

Escribiremos $I \subset^e \mathfrak{A}$ para expresar que I es una subestructura inicial (propia) de $\mathfrak{A}$. Análogamente, escribiremos $\mathfrak{B} \prec_n^e \mathfrak{A}$ si $\mathfrak{B}$ es una subestructura inicial, n–elemental de $\mathfrak{A}$. Por último $\mathfrak{B} \prec_n^c \mathfrak{A}$, expresa que $\mathfrak{B}$ es una subestructura n–elemental cofinal de $\mathfrak{A}$ (es decir, no acotada en $\mathfrak{A}$).

Los siguientes resultados destacan la utilidad de los esquemas de colección desde un punto de vista semántico. Para más detalles ver [8] o [11].

Proposición I.31 *Sean* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \mathbf{P}^-$. *Se verifica:*

(1) $\mathfrak{A} \subset^e \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \prec_0^e \mathfrak{B}$

(2) $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \models \mathrm{I}\Sigma_n \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$

(3) $\mathfrak{A} \prec^e_{n+1} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+2}$ □

Proposición I.32 *Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{P}^-$ tales que $\mathfrak{A} \prec^c_0 \mathfrak{B}$. Se verifica:*

(1) $\mathfrak{A} \prec^c_1 \mathfrak{B}$

(2) $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \prec^c_{n+1} \mathfrak{B}$ □

La siguiente definición introduce los principales ejemplos de subestructuras n–elementales que consideraremos.

Definición I.33 *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$, $n \in \omega$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$,*

(1) $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, X) = \{b \in \mathfrak{A} :$ *b definible en $\mathfrak{A}$ por una fórmula Σ_n con parámetros en X*$\}$.

(2) $\mathcal{I}_n(\mathfrak{A}, X)$ *es el segmento inicial determinado por $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, X)$ en $\mathfrak{A}$, es decir,*

$$\mathcal{I}_n(\mathfrak{A}, X) = \{b \in \mathfrak{A} : \text{ Existe } c \in \mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, X),\ b < c\}$$

(3) *Si X es vacío escribiremos $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A})$ e $\mathcal{I}_n(\mathfrak{A})$.*

Las propiedades básicas de estas estructuras quedan resumidas en los siguientes dos teoremas.

Teorema I.34 (Splitting en fragmentos)
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ no estándar. Para todo $X \subseteq \mathfrak{A}$, se verifica:

(1) $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I\Sigma}_n$.

(2) $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec^c_{n+1} \mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec^e_n \mathfrak{A}$ *y* $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$.

(3) *Si $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.* □

Teorema I.35 *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$, finito, tales que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \neq \omega$. Entonces*

(1) *$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$.*

(2) $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

(3) $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \not\models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. □

I.6 Saturación. Conjuntos de Scott

En esta sección resumimos algunos de los resultados básicos sobre saturación recursiva que utilizaremos en el capítulo V. Para más detalles sobre estos resultados véase [11].

Definición I.36 *Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_0$. Diremos que $X \subseteq \omega$ está codificado en $\mathfrak{A}$, si existe $a \in \mathfrak{A}$, no estándar tal que*

$$\forall k \in \omega, \quad k \in X \Longleftrightarrow (a)_k \neq 0$$

La clase de los conjuntos codificados de $\mathfrak{A}$ se denomina el sistema estándar de $\mathfrak{A}$, y se denota por $SSy(\mathfrak{A})$.

Definición I.37 *Sea $S \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Diremos que S es un conjunto de Scott si satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Si $A, B \in S$, entonces $A \cap B, A \cup B, \omega - A \in S$*

(2) *Si $A \in S$ y $B \subseteq \omega$ es Turing reducible a A, entonces $B \in S$*

(3) *Si $T \in S$ es un árbol binario infinito (adecuadamente codificado como un conjunto de números naturales), entonces existe una rama infinita R de T tal que $R \in S$.*

Teorema I.38 *Si $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0$, entonces $SSy(\mathfrak{A})$ es un conjunto de Scott.* □

Definición I.39 *Sea $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0$. Un tipo sobre $\mathfrak{A}$ es un conjunto de fórmulas $p(x, \vec{a})$ (con parámetros $\vec{a} \in \mathfrak{A}$) finitamente consistente con el diagrama elemental de $\mathfrak{A}$ ($ED(\mathfrak{A})$).*

Si Γ es una clase de fórmulas (Σ_n o Π_n, por ejemplo) y $a \in \mathfrak{A}$, el Γ–tipo realizado por $\mathfrak{A}$ es el conjunto

$$\mathrm{tp}_{\Gamma,\mathfrak{A}}(a) = \{\varphi(x) \in \Gamma : \ \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$$

Definición I.40 *Sea $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0$ y $p(x, \vec{a})$ un tipo sobre $\mathfrak{A}$. Diremos que $p(x, \vec{a})$ está codificado en $\mathfrak{A}$, y escribiremos $p(x, \vec{a}) \in SSy(\mathfrak{A})$, si*

$$\ulcorner p(x, \vec{a}) \urcorner = \{\ulcorner \varphi(x, \vec{v}) \urcorner : \ \varphi(x, \vec{a}) \in p(x, \vec{a})\} \in SSy(\mathfrak{A})$$

Diremos que $\mathfrak{A}$ es recursivamente saturado si realiza todo tipo sobre $\mathfrak{A}$ recursivo, es decir, si para todo tipo sobre $\mathfrak{A}$, $p(x, \vec{a})$, tal que $\ulcorner p(x, \vec{a}) \urcorner$ es recursivo, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\forall \varphi(x, \vec{a}) \in p(x, \vec{a}), \qquad \mathfrak{A} \models \varphi(b, \vec{a})$$

Si S es un conjunto de Scott, diremos que $\mathfrak{A}$ es S–saturado si para cada tipo (maximal) sobre $\mathfrak{A}$, $p(x, \vec{a})$, se tiene

$$\ulcorner p(x, \vec{a}) \urcorner \in S \iff \mathfrak{A} \text{ realiza } p(x, \vec{a})$$

La saturación recursiva proporciona una valiosa información sobre inmersiones entre modelos de fragmentos de la Aritmética:

Teorema I.41 *Sea $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0$. Son equivalentes:*

(1) *$\mathfrak{A}$ es recursivamente saturado.*

(2) *$\mathfrak{A}$ es $SSy(\mathfrak{A})$–saturado.* □

Teorema I.42 (Friedman)
Sean $\mathfrak{A} \models \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$, no estándar, numerable y recursivamente saturado, y $\mathfrak{B} \models \mathrm{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$, no estándar y numerable. Sean $a \in \mathfrak{A}$ y $b, c \in \mathfrak{B}$. Son equivalentes:

(1) *Existe una inmersión n–elemental, $H : \mathfrak{A} \precneqq_n^e \mathfrak{B}$, tal que $H(a) = b$ y $c \notin H(\mathfrak{B})$*

(2) *$SSy(\mathfrak{A}) = SSy(\mathfrak{B})$ y, para cada $\varphi(\vec{z}, y) \in \Pi_n$,*

$$\mathfrak{A} \models \exists \vec{z}\, \varphi(\vec{z}, a) \implies \mathfrak{B} \models \exists \vec{z} < c\, \varphi(\vec{z}, b)$$ □

I.7 Esquemas sin parámetros

En [12] y [14] se introducen varias teorías obtenidas a partir de los esquemas de inducción, minimización y colección restringiéndolos a fórmulas con una sola variable libre. Antes de pasar a definirlos de manera precisa introducimos un poco de notación:

Notación I.43 Dada una clase de fórmulas Γ y una fórmula φ, escribiremos

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma^-$$

para indicar que $\varphi \in \Gamma$ y que las únicas variables libres de φ son $x_1, \dots, x_n$.

Definición I.44 *Dada una clase de fórmulas* Γ, *las teorías de inducción y minimización para fórmulas sin parámetros son:*

- $\mathbf{I}\Gamma^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Gamma^-\}$
- $\mathbf{L}\Gamma^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Gamma^-\}$

Definición I.45 (Colección sin parámetros).
Para cada fórmula $\varphi(x, y)$, $\mathbf{B}^-_{\varphi,x,y}$ *es la fórmula:*

$$\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \rightarrow \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u \varphi(x, y)$$

Si Γ *es una clase de fórmulas, la teoría de colección sin parámetros para* Γ *es*

$$\mathbf{B}\Gamma^- = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}^-_{\varphi,x,y} : \varphi(x, y) \in \Gamma^-\}$$

Las relaciones entre estos fragmentos son distintas de las que se tienen entre los fragmentos con parámetros y que enunciamos en I.4. En concreto, en [14] se prueban las siguientes:

Teorema I.46 *Para todo* $n \in \omega$,

(1) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$

(2) $\mathbf{I}\Pi^-_{n+2} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \iff \mathbf{L}\Pi^-_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \iff \mathbf{L}\Sigma^-_{n+1}$

(3) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$

(4) $\mathbf{I}\Pi^-_1 \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_0 \iff \mathbf{I}\Delta^-_0 \iff \mathbf{L}\Delta^-_0$

(5) *Si* $n \geq 1$, $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \not\models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$ □

El esquema de colección fuerte no presenta gran interés en su versión sin parámetros, ya que se tiene el siguiente resultado:

Proposición I.47 *Para todo* $n \in \omega$, $\mathbf{S}\Pi^-_n \iff \mathbf{S}\Pi_n$

Demostración:
Bastará probar que $\mathrm{S\Pi}_n^- \Longrightarrow \mathrm{S\Pi}_n$. Lo haremos por inducción en n.

<u>$n=0$</u>: Sean $\mathfrak{A} \models \mathrm{S\Pi}_0^-$, $\varphi(x,y,z) \in \Pi_0^-$, y $a,b \in \mathfrak{A}$. Debemos probar que

$$\mathfrak{A} \models \exists z \, \forall x \leq a \, [\exists y \, \varphi(x,y,b) \rightarrow \exists y < z \, \varphi(x,y,b)]$$

Sea $\psi(x,y) \in \Pi_0^-$ la fórmula

$$\exists x_1, x_2 \leq x \, [x = \langle x_1, x_2 \rangle \wedge \varphi(x_1, y, x_2)]$$

Sea $c = \langle a, b \rangle$. Entonces, puesto que $\mathfrak{A} \models \mathrm{S\Pi}_0^-$, existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\forall x \leq c \, [\exists y \, \psi(x,y) \rightarrow \exists y < d \, \psi(x,y)]$$

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \leq a \, \forall x_2 \leq b \, (\langle x_1, x_2 \rangle \leq c)$ podemos concluir

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \, [\exists y \, \varphi(x,y,b) \rightarrow \exists y < d \, \varphi(x,y,d)]$$

lo que termina la prueba del lema.

<u>$n \rightarrow n+1$</u>: Se razona como en el caso anterior utilizando que, por hipótesis de inducción,

$$\mathrm{S\Pi}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathrm{S\Pi}_n^- \Longrightarrow \mathrm{S\Pi}_n \Longrightarrow \mathrm{B\Sigma}_{n+1} \qquad \square$$

I.8 Fórmulas Δ_{n+1}

A continuación pasamos a describir los fragmentos obtenidos al considerar los esquemas de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}. Según el tratamiento que decidamos dar a los parámetros en las fórmulas Δ_{n+1} consideradas obtendremos varios esquemas de axiomas. En primer lugar consideramos las teorías de inducción (y minimización) para fórmulas Δ_{n+1}:

$$\mathrm{I\Delta}_{n+1} = \mathbf{P}^- + \{\forall x \, (\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v})) \rightarrow \mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \ \varphi \in \Sigma_{n+1}, \ \psi \in \Pi_{n+1}\}$$

$\mathrm{L\Delta}_{n+1}$ se define de manera similar. Las relaciones básicas entre estos esquemas son (véase [8]):

Teorema I.48

(1) $\mathrm{L\Delta}_{n+1} \Longrightarrow \mathrm{I\Delta}_{n+1}$

(2) $\mathrm{L\Delta}_{n+1} \Longleftrightarrow \mathrm{B\Sigma}_{n+1}$ $\square$

En la lista de problemas abiertos sobre fragmentos de la aritmética que se ofrece en [4], la implicación $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}$ aparece como el problema número 34, y se le acredita a J. Paris. Hasta donde sabemos dicho problema permanece sin resolver. A lo largo de este trabajo nos referiremos a la equivalencia

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_{n+1}$$

como la conjetura de Friedman-Paris.

Si consideramos sólo fórmulas sin parámetros, obtenemos las teorías de inducción y minimización sin parámetros para fórmulas Δ_{n+1}:

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-} = \mathbf{P}^{-} + \{\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \mathbf{I}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^{-},\ \psi(x) \in \Pi_{n+1}^{-}\}$$

y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ que se define de manera similar. Por último, podemos obtener un tercer tipo de esquemas, que denominamos "uniformes", del siguiente modo:

$$\mathbf{UI}\Delta_{n+1} = \mathbf{P}^{-} + \{\forall\vec{v}\,\forall x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v})) \rightarrow \mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \varphi(x,\vec{v}) \in \Sigma_{n+1}^{-},\ \psi(x,\vec{v}) \in \Pi_{n+1}^{-}\}$$

El correspondiente esquema para minimización, $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$, se define de manera similar. Los esquemas uniformes fueron introducimos por Kaye en [12], donde se prueba que:

Teorema I.49 $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} \iff \mathbf{UL}\Delta_{n+1} \mathrel{|\!\!\Longrightarrow} \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ □

Teniendo en cuenta los resultados de [14] probamos que:

Proposición I.50 $(n > 0)$

(1) $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n}$

(3) $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \mathrel{|\!\!\Longrightarrow} \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$

(4) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-} \not\Longrightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$

Demostración:

(1) Trivial, teniendo en cuenta que, por I.46–**(2)**, $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1}^{-}$.

(2) Basta tener en cuenta **(1)** y I.46–**(5)**.

(3) Se deduce de **(2)**, puesto que $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n} + \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$.

(4) Bastar observar que , por **(2)**, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n}$, pero $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n}$. □

Podemos resumir los resultados acerca de los tres tipos de esquemas considerados en el siguiente cuadro:

Teorema I.51 *Para cada $n \geq 1$*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{L}\Delta^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathrm{I}\Delta^-_{n+1} \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathrm{B}\Sigma^-_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathrm{UL}\Delta_{n+1} & \Longrightarrow & \mathrm{UI}\Delta_{n+1} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathrm{B}\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathrm{L}\Delta_{n+1} & \Longrightarrow & \mathrm{I}\Delta_{n+1}
\end{array}$$

Y además,

$$\mathrm{L}\Delta^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathrm{UI}\Delta_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathrm{I}\Delta^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathrm{UL}\Delta_{n+1}$$

Nota I.52 En el caso $n = 0$, la situación es idéntica salvo por el problema abierto

$$¿\mathrm{UI}\Delta_1 \quad \models\!\!\Longrightarrow \quad \mathrm{I}\Delta^-_1?$$

Como podemos ver en el teorema, existen (hasta donde nosotros conocemos) tres problemas abiertos, correspondiendo cada uno de ellos a una versión de la conjetura de Friedman–Paris:

(1) Conjetura de Friedman–Paris:

$$\mathrm{L}\Delta_{n+1} \iff \mathrm{I}\Delta_{n+1}$$

(2) Conjetura de Friedman–Paris uniforme:

$$\mathrm{UL}\Delta_{n+1} \iff \mathrm{UI}\Delta_{n+1}$$

(3) Conjetura de Friedman–Paris sin parámetros:

$$\mathrm{L}\Delta^-_{n+1} \iff \mathrm{I}\Delta^-_{n+1}$$

Capítulo II

Inducción y Minimización $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

En este capítulo, fijada una teoría, $\mathbf{T}$, de lenguaje $\mathcal{L}$, introducimos, para cada $n \in \omega$, la clase de fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y estudiamos las relaciones entre las teorías que obtenemos al considerar los esquemas de inducción y minimización restringidos a estas colecciones de fórmulas. Estamos especialmente interesados en obtener condiciones para $\mathbf{T}$, bajo las cuales podamos garantizar la equivalencia de las teorías que proporcionan los esquemas de inducción y de minimización, es decir, la resolución de la conjetura de Friedman–Paris relativizada a dicha teoría.

II.1 Las teorías $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

Definición II.1 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría. Para cada* $n \in \omega$ *definimos los siguientes conjuntos de fórmulas de* $\mathcal{L}$*:*

(1) $\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Sigma_{n+1} :\ \text{existe } \psi \in \Pi_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$

(2) $\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Pi_{n+1} :\ \text{existe } \psi \in \Sigma_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$

Al considerar los esquemas de inducción y minimización para estas clases de fórmulas obtenemos las teorías:

$$\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi :\ \varphi \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}$$

$$\mathrm{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi :\ \varphi \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})\}$$

$$\mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_\varphi :\ \varphi \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}$$

$$\mathrm{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_\varphi :\ \varphi \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})\}$$

A partir de la definición resulta obvio el siguiente resultado:

Proposición II.2 $\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$ □

Teniendo en cuenta que si $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi \in \Pi_{n+1}$, entonces $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Pi_{n+2}$, obtenemos:

Proposición II.3 *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}'$ *teorías tales que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}')$. *Entonces*

(1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$

(2) $\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}')$

(3) $\mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}')$

(4) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$ □

Utilizando que la negación de una fórmula $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es equivalente (en $\mathbf{T}$) a una fórmula $\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ obtenemos:

Proposición II.4

(1) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$

(2) $\mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ □

Proposición II.5 *Para cada* $n \in \omega$,

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}).$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Sean $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$ tales que $\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Debemos probar que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}_\psi$. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \psi(0) \wedge \forall x\,(\psi(x) \rightarrow \psi(x+1))$, y existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\psi(a)$. Sea $\theta(z,w) \in \Sigma_{n+1}$ la fórmula

$$w < z \vee \exists u \leq w\,(z+u = w \wedge \neg\psi(u))$$

Entonces, $\mathfrak{A} \models \theta(0,a)$ y $\mathfrak{A} \models \theta(z,a) \rightarrow \theta(z+1,a)$. Además, $\theta(z,w)$ es equivalente en $\mathbf{T}$ a

$$w < z \vee \forall u \leq w\,(z+u = w \rightarrow \neg\varphi(u)).$$

Esta fórmula es Π_{n+1}, luego $\theta(z,w) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}_{\theta,z}(a)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall z\,\theta(z,a)$. En particular, $\mathfrak{A} \models \theta(a,a)$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \neg\psi(0)$, contradicción.

($\Longleftarrow$) La prueba es similar. □

La siguiente teoría resultará útil a la hora de estudiar las relaciones entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$:

Definición II.6 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría. Para cada* $n \in \omega$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es la teoría:*

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_{\varphi,x,y} :\ \varphi \in \Pi_n,\ \exists y\,\varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}$$

Naturalmente, como en el caso de los esquemas de inducción y minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, para cada $\mathbf{T}$, la teoría resultante está determinada por las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$:

Proposición II.7 *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}'$ *tales que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}')$. *Entonces*

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}') \qquad \square$$

A partir de la definición se deduce que, para cada $n \geq 1$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n$. Sin embargo, se verifica algo más:

Proposición II.8 *Para todo* $n \in \omega$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

Demostración:
La implicación $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ resulta evidente a partir de las definiciones. Para probar la otra razonaremos por inducción en $n \in \omega$.

Para $n = 0$ el resultado es trivial.

Supongamos el resultado cierto para n, es decir, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+2}(\mathbf{T})$ y $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(0) \land \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)).$$

Podemos suponer que $\varphi(x)$ es $\exists y\, \varphi_0(x,y)$, donde $\varphi_0(x,y) \in \Pi_n$. Sea $\theta(x,y) \in \Pi_{n+1}$ la fórmula

$$\varphi_0(x,y) \lor [\neg\exists y\, \varphi_0(x,y) \land y = 0]$$

Entonces $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y, por tanto,

$$\mathbf{T} \vdash \exists y\, \theta(x,y) \leftrightarrow x = x$$

En consecuencia, $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+2}(\mathbf{T})$.

Sea $a \in \mathfrak{A}$. Probaremos que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$. Puesto que $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+2}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+2}(\mathbf{T})$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y\, \theta(x,y) \to \forall x \leq a\, \exists y \leq b\, \theta(x,y).$$

Sea $\delta(x,u,v)$ la fórmula

$$u < x \lor \exists y \leq v\, \varphi_0(x,y)$$

Es fácil ver que $\delta(x,u,v) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ (para $n = 0$, $\delta(x,u,v) \in \Delta_0$) y además

$$\mathfrak{A} \models \delta(0,a,b) \land \forall x\, [\delta(x,a,b) \to \delta(x+1,a,b)]$$

Puesto que por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \delta(x,a,b)$. De este modo $\mathfrak{A} \models \delta(a,a,b)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \exists y \leq b\, \varphi_0(a,y)$, luego $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$. $\square$

II.2 Teorías con colección Δ_{n+1}

En esta sección presentaremos condiciones bajo las cuales es posible garantizar la equivalencia de las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. La siguiente definición recoge los conceptos centrales de este capítulo.

Definición II.9 *Dada una teoría* $\mathbf{T}$ *diremos que:*

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1} *si* $\mathbf{T}$ *es una extensión de* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(2) $\mathbf{T}$ *tiene inducción* Δ_{n+1} *si* $\mathbf{T}$ *es una extensión de* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(3) $\mathbf{T}$ *tiene minimización* Δ_{n+1} *si* $\mathbf{T}$ *es una extensión de* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

(4) $\mathbf{T}$ *es* Δ_{n+1}*–cerrada si* $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es cerrada en* $\mathbf{T}$ *bajo cuantificación acotada.*

Nuestro interés en la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ radica en que si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ son cerradas en $\mathbf{T}$ bajo cuantificación acotada, condición que resulta esencial a la hora de establecer la equivalencia

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

En concreto, se tienen los siguientes resultados:

Lema II.10 *La siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es cerrada en* $\mathbf{T}$ *bajo cuantificación acotada.*

(2) $\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ *es cerrada en* $\mathbf{T}$ *bajo cuantificación acotada.*

Demostración:
(1)$\Longrightarrow$(2) Sean $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$, tales que $\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Entonces, para cada término $t(y)$, existe $\theta(y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x \leq t(y)\, \neg\psi(x) \leftrightarrow \theta(y)$$

Por tanto, $\mathbf{T} \vdash \exists x \leq t(y)\, \psi(x) \leftrightarrow \neg\theta(y)$ y, en consecuencia, $\exists x \leq t(y)\, \psi(x) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$.
Análogamente, probamos que existe $\theta'(y) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x \leq t(y)\, \psi(x) \leftrightarrow \theta'(y)$$

(2)$\Longrightarrow$(1) La prueba es similar. □

Proposición II.11 *Si* $\mathbf{T}$ *es* Δ_{n+1}*–cerrada, entonces*

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Demostración:
Por II.4 y II.5, bastará probar que

$$\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$, pero

$$\mathfrak{A} \not\models \exists x\, (\varphi(x) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(y))$$

Sea $\theta(z) \in \Pi_{n+1}$ la fórmula $\forall y \leq z\, \neg\varphi(y)$. Puesto que $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada bajo cuantificación acotada, por II.10, $\theta(z) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$. Por otra parte,

$$\mathfrak{A} \models \theta(0) \wedge \forall z\, (\theta(z) \rightarrow \theta(z+1))$$

luego $\mathfrak{A} \models \forall z\, \theta(z)$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \neg\varphi(x)$, lo cual está en contradicción con $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$. □

Nota II.12 La proposición II.11 muestra la utilidad del cierre de $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (y $\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$) bajo cuantificación acotada, para garantizar la equivalencia entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Este hecho ya ha sido señalado en relación con la conjetura de Friedman-Paris (véase [32]). En concreto, en [32] se prueba que son equivalentes:

(1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}$

(2) Para cada $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ la clase de las fórmulas Δ_{n+1} en $\mathfrak{A}$ (con parámetros) es cerrada bajo cuantificación acotada.

En nuestro caso probaremos que, cuando $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, tener colección Δ_{n+1} es equivalente a que $\mathbf{T}$ sea Δ_{n+1}–cerrada (véase II.21).

Por otra parte, observemos que II.11, junto con II.4 y II.5, prueba que si $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada, entonces

$$\mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

A continuación, estudiaremos condiciones bajo las cuales se tiene la equivalencia entre estos cuatro esquemas.

Proposición II.13 *Sea $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ tal que $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces*

(1) *Existe $\theta(z) \in \Sigma_{n+1}$ tal que:*

  (a) $\mathbf{B}\Sigma_n \vdash \theta(z) \leftrightarrow \exists u \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$

  (b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \theta(z) \leftrightarrow \forall x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y)$

  (c) *Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\theta(z) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.*

(2) *Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\exists x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.*

Demostración:
Sea $\psi(x,y) \in \Sigma_n$ tal que

$$(*) \qquad \mathbf{T} \vdash \forall y\, \psi(x,y) \leftrightarrow \exists y\, \varphi(x,y)$$

(1) Puesto $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \exists u \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \forall x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y)$$

Consideremos los siguientes casos:

- Si $n = 0$, sea $\theta(z)$ la fórmula Σ_1, $\exists u \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$
- Si $n > 0$, tomamos como $\theta(z)$ una fórmula Σ_{n+1} tal que

  $$\mathbf{B}\Sigma_n \vdash \theta(z) \leftrightarrow \exists u \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$$

  (dicha fórmula existe gracias a las propiedades sobre cuantificación acotada que tenemos en $\mathbf{B}\Sigma_n$, por I.2).

Así, por la elección de $\theta(z)$ obtenemos **(a)** y **(b)**, ya que (para $n > 0$) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n$. Ahora, usando $(*)$, $\mathbf{T} \vdash \forall x \leq z \forall y\, \psi(x,y) \leftrightarrow \forall x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y)$ y, puesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, por **(b)**, obtenemos que $\mathbf{T} \vdash \theta(z) \leftrightarrow \forall x \leq z \forall y\, \psi(x,y)$, luego $\theta(z) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, ya que $\forall x \leq z \forall y\, \psi(x,y) \in \Pi_{n+1}$.

(2) Sea $\theta'(z) \in \Pi_{n+1}$ tal que $\mathbf{B}\Sigma_n \vdash \forall u \exists x \leq z \forall y \leq u\, \psi(x,y) \leftrightarrow \theta'(z)$ (para $n = 0$ tomamos como $\theta'(z)$ la fórmula $\forall u\, \exists x \leq z \forall y \leq u\, \psi(x,y)$). Puesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, las siguientes equivalencias pueden probarse en $\mathbf{T}$, razonando como en **(1)**:

$$\begin{array}{rcll} \exists x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y) & \leftrightarrow & \exists x \leq z \forall y\, \psi(x,y) & [\![(*)]\!] \\ & \leftrightarrow & \forall u\, \exists x \leq z \forall y \leq u\, \psi(x,y) & [\![\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})]\!] \\ & \leftrightarrow & \theta'(z) & [\![\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n]\!] \end{array}$$

Lo que termina la prueba del teorema. □

De manera similar se prueba el siguiente resultado.

Proposición II.14 *Sea $\psi(x,y) \in \Sigma_n$ tal que $\forall y\, \psi(x,y) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces*

(1) *Existe $\theta(z) \in \Pi_{n+1}$ tal que:*

  (a) $\mathbf{B}\Sigma_n \vdash \theta(z) \leftrightarrow \forall u\, \exists x \leq z \forall y \leq u\, \psi(x,y)$

  (b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \theta(z) \leftrightarrow \exists x \leq z \forall y\, \psi(x,y)$

  (c) *Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\theta(z) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$.*

(2) *Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\forall x \leq z \forall y\, \psi(x,y) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$.* □

Nota II.15 Observemos que en II.13 y II.14, para $n = 0$, en el apartado **(a)** no es necesario $\mathbf{B}\Sigma_0$, dado que se toma como $\theta(z)$ la propia fórmula que afirmamos que es equivalente a $\theta(z)$.

Como consecuencia de II.13 obtenemos:

Teorema II.16 *Si* $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}, *entonces* $\mathbf{T}$ *es* Δ_{n+1}*-cerrada.* $\square$

Teniendo en cuenta II.11 y II.16, si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Sin embargo, puesto que en realidad probaremos algo más que esto, introduciremos previamente algunas definiciones acerca de las relaciones que pueden tenerse entre los esquemas que estamos considerando para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Estas definiciones reflejan el grado de analogía entre el diagrama de relaciones para dichas teorías y el diagrama de Paris–Kirby para los fragmentos clásicos (ver I.4).

Definición II.17 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría y* $n \in \omega$. *Diremos que:*

(1) $\mathbf{T}$ *es débilmente PK-*Δ_{n+1} *si*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & & \\ \Uparrow & & \\ \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \end{array}$$

(2) $\mathbf{T}$ *es PK-*Δ_{n+1} *si*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & & \\ \underline{\Uparrow} & & \\ \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \end{array}$$

Teorema II.18 *Para cada teoría* $\mathbf{T}$, *extensión de* $\mathbf{I}\Sigma_n$,

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Demostración:
Basta adaptar la prueba de $\mathbf{L}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ que aparece en [8].

Sea $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ tal que $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y sea $\psi(x,y) \in \Sigma_n$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \psi(x,y).$$

Consideremos las siguientes fórmulas:

$$\theta_1(x,w) \equiv \begin{cases} x \leq w \wedge \\ \exists u \begin{cases} \varphi(x,u) \wedge \forall y < u\, \neg\varphi(x,y) \wedge \\ (\forall z)_{x \leq z \leq w}\, \exists y \leq u\, \varphi(z,y)) \end{cases} \end{cases}$$

$$\theta_2(x,w) \equiv \begin{cases} x \leq w \wedge \forall y\, \psi(x,y) \wedge \\ \forall u\, [\varphi(x,u) \rightarrow (\forall z)_{x \leq z \leq w}\, \exists y \leq u\, \varphi(z,y)] \end{cases}$$

Para $n = 0$ es fácil ver que $\theta_1 \in \Sigma_1$ y $\theta_2 \in \Pi_1$. Para $n > 0$, se tiene que $\theta_1 \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n)$ y $\theta_2 \in \Pi_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n)$. Por tanto, dado que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$, $\theta_1 \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\theta_2 \in \Pi_{n+1}(\mathbf{T})$. Además, se verifica que:

Aserto II.18.1 $\mathbf{T} \vdash \theta_1(x,w) \leftrightarrow \theta_2(x,w)$

Prueba del Aserto:
La implicación $\theta_1(x,w) \rightarrow \theta_2(x,w)$ es trivial. Para el recíproco, sean $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$ y $b,a \in \mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{B} \models \theta_2(b,a)$. Entonces $\mathfrak{B} \models \forall y\, \psi(b,y)$ luego, por la elección de ψ, $\mathfrak{B} \models \exists y\, \varphi(b,y)$. Dado que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$, existe $c \in \mathfrak{B}$, $c = (\mu y)(\varphi(b,y))$. Por tanto,

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b,c) \wedge \forall y < c\, \neg\varphi(b,y)$$

y, puesto que $\mathfrak{B} \models \forall u\, [\varphi(b,u) \rightarrow (\forall z)_{b \leq z \leq a}\, \exists y \leq u\, \varphi(z,y)]$ obtenemos

$$\mathfrak{B} \models (\forall z)_{b \leq z \leq a}\, \exists y \leq c\, \varphi(z,y))$$

y, en consecuencia, $\mathfrak{B} \models \theta_1(b,a)$. Lo que completa la prueba del aserto. □

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, $a \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y\, \varphi(x,y)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y\, \varphi(x,y)$, entonces $\mathfrak{A} \models \theta_1(a,a)$. Esto prueba que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \theta_1(x,a)$ luego, al ser $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\theta_1 \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (por el aserto), existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $b = (\mu x)(\theta_1(x,a))$. Entonces $\mathfrak{A} \models \exists u\, \varphi(b,u)$, y así, usando que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, existe $c \in \mathfrak{A}$ verificando $c = (\mu u)(\varphi(b,u))$. Se verifica entonces

$$(\bullet) \qquad \mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq c\, \varphi(x,y)$$

lo que prueba el teorema, pues tendríamos $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Para terminar probemos que se verifica $(\bullet)$.

De la definición de c y $\mathfrak{A} \models \theta_1(b,a)$, obtenemos

$$\mathfrak{A} \models (\forall z)_{b \leq z \leq a}\, \exists y \leq c\, \varphi(x,y)$$

Supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists x < b\, \forall y \leq c\, \neg\varphi(x,y)$. Entonces usando de nuevo que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$, existiría $b' = (\mu x)[x < b \wedge (\forall z)_{x<z\leq b}\, \exists u \leq c\, \varphi(z,u)]$, pero entonces $b' < b$ y $\mathfrak{A} \models \theta_1(b',a)$, en contradicción con la definición de b. □

Corolario II.19 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría tal que:*

(i) $\mathbf{T}$ *es* Δ_{n+1}*–cerrada.*

(ii) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$

Entonces $\mathbf{T}$ *es débilmente PK–*Δ_{n+1}.

Demostración:
Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, el resultado se deduce de II.18 y II.11. □

Teorema II.20 *Si* $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}, *entonces*

(1) T *es débilmente PK-*Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$

Demostración:
(1) Sea **T** una teoría con colección Δ_{n+1}. Puesto que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, **T** es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$. Además, por II.16, **T** es Δ_{n+1}–cerrada, luego el resultado es consecuencia de II.19.

(2) Puesto que T tiene colección Δ_{n+1}, por II.16, $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada en **T** bajo cuantificación acotada, luego por II.11, II.4 y II.5,

$$\mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

En consecuencia sólo debemos probar:

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\psi(x) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$, pero

$$\mathfrak{A} \not\models \exists x\, (\psi(x) \wedge \forall y < x\, \neg\psi(y))$$

Podemos suponer, además, que $\psi(x)$ es $\forall y\, \psi_0(x,y)$ con $\psi_0(x,y) \in \Sigma_n$. Entonces $\exists y\, \neg\psi_0(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, luego, por II.13, existe $\theta(z) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \theta(z) \leftrightarrow \forall x \leq z\, \exists y \neg\psi_0(x,y)$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, por **(1)**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego

$$\mathfrak{A} \models \theta(z) \leftrightarrow \forall x \leq z\, \exists y \neg\psi_0(x,y)$$

Ses $\psi_1(z)$ es la fórmula $\forall x \leq z\, \exists y\, \neg\psi_0(x,y)$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}_{\psi_1}$. Por otra parte,

$$\mathfrak{A} \models \psi_1(0) \wedge \forall z\, (\psi_1(z) \rightarrow \psi_1(z+1))$$

y, por tanto, $\mathfrak{A} \models \forall z\, \psi_1(z)$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \neg\psi(x)$, en contradicción con $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$. □

Proposición II.21 *Si* **T** *tiene inducción* Δ_{n+1}, *entonces son equivalentes:*

(1) **T** *es* Δ_{n+1}*–cerrada.*

(2) **T** *tiene colección* Δ_{n+1}.

Demostración:
(2)$\Longrightarrow$(1) Esto es el corolario II.16.

(1)$\Longrightarrow$(2) Puesto que **T** tiene inducción Δ_{n+1}, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, luego por **(1)** y II.19, **T** es débilmente PK–Δ_{n+1}. En particular,

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

y, por tanto, $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}. □

A continuación estudiaremos las relaciones entre tener colección, inducción o minimización. Comenzaremos con el siguiente resultado:

Proposición II.22 *Si* $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene inducción* Δ_{n+1}.

Demostración:
Supuesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, debemos probar que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $\varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)).$$

Podemos suponer que $\varphi(x)$ es $\exists y\, \varphi_0(x,y)$, donde $\varphi_0(x,y) \in \Pi_n$ y que existe $\psi_0(x,y) \in \Sigma_n$, tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \forall y\, \psi_0(x,y)$. Sea $\theta(x,y) \in \Pi_n$ la fórmula

$$\varphi_0(x,y) \vee \neg\psi_0(x,y)$$

Entonces, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y, en consecuencia, $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. A partir de aquí la prueba continúa como en II.8. □

Corolario II.23 *Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{T}$ *tiene inducción* Δ_{n+1} *y es* Δ_{n+1}*–cerrada.*

Demostración:
Es consecuencia de II.22 y II.21. □

Proposición II.24 *Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{T}$ *tiene minimización* Δ_{n+1}.

Demostración:
(1)$\Longrightarrow$(2) Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1} entonces, por II.22 tiene inducción Δ_{n+1}, es decir, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, luego, teniendo en cuenta II.20, $\mathbf{T}$ tiene minimización Δ_{n+1}.

(2)$\Longrightarrow$(1) Si $\mathbf{T}$ tiene minimización Δ_{n+1}, entonces $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ luego por II.18, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y, en consecuencia, $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}. □

Como es fácil ver, toda extensión de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ tiene colección Δ_{n+1} y toda extensión de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ tiene inducción (y minimización) Δ_{n+1}, sin embargo, éstas no son las únicas posibilidades, ya que el hecho de que una teoría tenga colección (inducción o minimización) Δ_{n+1} depende, esencialmente, de sus Π_{n+2}–consecuencias. Esto es lo que prueba el siguiente resultado

Teorema II.25

(1) *Si* T *tiene inducción* Δ_{n+1}, *entonces*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

(2) T *tiene inducción* Δ_{n+1} *si y sólo si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene inducción* Δ_{n+1}.

(3) *Si* T *tiene colección* Δ_{n+1}, *entonces*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

(4) T *tiene colección* Δ_{n+1} *si y sólo si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(5) *Si* T *tiene minimización* Δ_{n+1}, *entonces*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

(6) T *tiene minimización* Δ_{n+1} *si y sólo si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene minimización* Δ_{n+1}.

Demostración:

Dado que (2) es consecuencia de (1) y (4) es consecuencia de (3), solo debemos probar (1) y (3).

(1) Dadas dos fórmulas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, denotaremos por $\mathbf{I}'_{\varphi,\psi}$ la fórmula:

$$\psi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x+1)) \to \forall x\,\psi(x)$$

Entonces:

(a) Si $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$, entonces $\mathbf{I}'_{\varphi,\psi} \in \Pi_{n+2}$.

(b) Si una teoría $\mathbf{T}_0$ es tal que $\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, entonces $\mathbf{T}_0 \vdash \mathbf{I}_\varphi \leftrightarrow \mathbf{I}'_{\varphi,\psi}$.

Sean ahora $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$ tales que $\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Entonces, puesto que $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1},

$$\mathbf{T} \vdash \mathbf{I}_\varphi \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T} \vdash \mathbf{I}_\varphi \leftrightarrow \mathbf{I}'_{\varphi,\psi}.$$

Por tanto, $\mathbf{T} \vdash \mathbf{I}'_{\varphi,\psi}$ y como $\mathbf{I}'_{\varphi,\psi}$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ son fórmulas Π_{n+2} resulta

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{I}'_{\varphi,\psi}$$

luego, por (b), $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{I}_\varphi$.

(3) Sean $\exists y\,\varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, donde $\varphi(x,y) \in \Pi_n$, y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$ tales que

$$\mathbf{T} \vdash \exists y\,\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x)$$

Sea $\mathbf{B}'_{\varphi,\psi}$ la fórmula

$$\forall x \le z\,\psi(x) \to \exists v\,\forall x \le z\,\exists y \le v\,\varphi(x,y)$$

Entonces $\mathbf{T} \vdash \mathbf{B}_\varphi \leftrightarrow \mathbf{B}'_{\varphi,\psi}$. Si $n = 0$, la fórmula $\mathbf{B}'_{\varphi,\psi}$ es Π_2, y para $n \ge 1$ se trata de una fórmula $\Pi_{n+2}(\mathbf{B}\Sigma_n)$.

Ahora bien, si $n \ge 1$ entonces $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}\Sigma_n$ y, por tanto, $\mathbf{T} \implies \mathbf{B}\Sigma_n$. Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_n$ es axiomatizable por fórmulas Π_{n+2}, obtenemos que, para $n \ge 1$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}\Sigma_n$. De este modo, para cualquier $n \in \omega$ obtenemos:

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x)$

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}'_{\varphi,\psi} \leftrightarrow \mathbf{B}_{\varphi}$

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}'_{\varphi,\psi}$

y, en consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}_{\varphi}$.

(5) se sigue de **(6)** y II.3.

(6) es consecuencia de II.24 y **(4)**.

□

Usando II.25 podemos completar las relaciones entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ por una parte, e $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ por otra.

Proposición II.26 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría consistente con* $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$*, entonces*

(1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad \not\Longrightarrow \quad \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$

(2) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

Demostración:
(1) Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ no estándar y $a \in \mathfrak{A}$, $a > \omega$. Entonces $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, y por tanto, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1})$. Dado que $\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ tiene colección e inducción Δ_{n+1}, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1})$ también, luego

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1})) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}))$$

En particular, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y, por otra parte, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, lo que prueba **(1)**.

(2) es consecuencia de **(1)** ya que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. □

A continuación aplicaremos los resultados anteriores al caso $\mathbf{T} = \mathbf{I}\Sigma_n$.

Proposición II.27

(1) $\mathbf{I}\Sigma_n$ *tiene colección* Δ_{n+1}

(2) $\mathbf{I}\Sigma_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)$

(3) $\mathbf{I}\Sigma_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$

Demostración:
(1) Dado que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ tiene colección Δ_{n+1} y, por el teorema de conservación de Friedman-Paris, I.7,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n)$$

usando II.25–**(4)**, $\mathbf{I}\Sigma_n$ tiene colección Δ_{n+1}, lo que prueba **(1)**.

(2) Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_n$ tiene colección Δ_{n+1}, por II.20, es débilmente PK–Δ_{n+1}, luego

$$\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)$$

Además, por II.8, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, luego

$$\mathbf{I}\Sigma_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)$$

(3) Por el teorema de conservación de Friedman-Paris y II.3, de **(2)** se deduce que

$$\mathbf{I}\Sigma_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \qquad \square$$

Corolario II.28 *Sea* $\mathbf{T}$ *tal que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$. *Se verifica:*

$$\mathbf{I}\Sigma_n \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \qquad \square$$

Nota II.29 De acuerdo con II.20, toda teoría con colección Δ_{n+1} es débilmente PK-Δ_{n+1}. Para completar las relaciones entre estos conceptos podemos plantear las siguientes cuestiones:

(1) Si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces ¿es $\mathbf{T}$ PK-Δ_{n+1}?

(2) Si $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, entonces ¿es $\mathbf{T}$ PK-Δ_{n+1}?

(3) Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK-Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ colección Δ_{n+1}?

(4) Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK-Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ inducción Δ_{n+1}?

Como consecuencia del teorema II.27, las cuestiones **(1)** y **(2)** tienen una respuesta negativa, ya que $\mathbf{I}\Sigma_n$ tiene inducción y colección Δ_{n+1} pero no es PK-Δ_{n+1}. Además, tomando $\mathbf{T} = \mathbf{P}^-$, por II.28 obtenemos una teoría débilmente PK-Δ_{n+1} que no tiene colección ni inducción Δ_{n+1}, ya que $\mathbf{P}^- \not\Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$. En consecuencia, la respuesta a las cuestiones **(3)** y **(4)** es, en general, negativa. No obstante, podemos replantearnos estas cuestiones para extensiones de $\mathbf{I}\Sigma_n$, de este modo tenemos:

Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$

- Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK-Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ colección Δ_{n+1}?
- Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK-Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ inducción Δ_{n+1}?

Puesto que toda teoría con colección Δ_{n+1} tiene inducción Δ_{n+1}, y toda teoría débilmente PK-Δ_{n+1} que tenga inducción Δ_{n+1}, tiene colección Δ_{n+1}, ambas cuestiones son equivalentes, es decir, la respuesta habrá de ser positiva o negativa, para ambas simultáneamente.

Nota II.30 La aproximación a inducción $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, y especialmente a colección $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, presentada en este capítulo, guarda una cierta relación con el principio de inducción (o colección) visto como una regla de inferencia. En este sentido pueden consultarse los trabajos de Beklemishev ([1] y sobre todo [2]), en donde por medio de técnicas de Teoría de la Demostración, se obtienen algunos resultados similares a los presentados aquí.

Nota II.31 Otra consecuencia que podemos extraer del hecho de que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ tiene colección Δ_{n+2} es la siguiente prueba de la equivalencia entre $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ e $\mathbf{I}\Sigma_0(\Sigma_{n+1})$ (véase I.13):

Aserto II.31.1

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_0(\Sigma_{n+1})$$

Demostración:
Dada $\varphi \in \Sigma_{n+1}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ tiene colección Δ_{n+2} y usando II.13 y II.14, podemos probar por inducción sobre fórmulas de $\Sigma_0(\varphi)$ que para toda $\psi \in \Sigma_0(\varphi)$ existen $\theta_1 \in \Sigma_{n+2}$ y $\theta_2 \in \Pi_{n+2}$ tales que

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash (\psi \leftrightarrow \theta_1) \wedge (\psi \leftrightarrow \theta_2)$$

Entonces tenemos $\mathbf{I}\Delta_{n+2}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \vdash \mathbf{I}_\psi$ y, por tanto,

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{I}\Delta_{n+2}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \implies \mathbf{I}\Sigma_0(\Sigma_{n+1})$$

$\square$

Capítulo III

Esquemas uniformes y sin parámetros

III.1 Introducción

Los teoremas II.22 y II.24 establecen (respectivamente) que toda teoría con colección Δ_{n+1} tiene inducción Δ_{n+1} y que tener colección Δ_{n+1} es equivalente a tener minimización Δ_{n+1}. Queda entonces una pregunta por responder:

(**P**) Si **T** tiene inducción Δ_{n+1}, entonces ¿tiene **T** colección Δ_{n+1}?

Por II.23, sabemos que **T** tiene colección si y sólo si **T** tiene inducción y $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada en **T** bajo cuantificación acotada. Teniendo en cuenta II.21, podemos reformular (**P**) como

(**P'**) Si **T** tiene inducción Δ_{n+1}, entonces ¿es $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ cerrada en **T** bajo cuantificación acotada?

Este problema está relacionado con la resolución de la Conjetura de Friedman-Paris en su versión uniforme. En efecto, dado un modelo $\mathfrak{A}$ es fácil comprobar que

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{A} \models \mathrm{UI}\Delta_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}(\mathfrak{A}) \text{ tiene inducción } \Delta_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}(\mathfrak{A})) \\
\Uparrow & & & & \Uparrow \\
\mathfrak{A} \models \mathrm{UL}\Delta_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}(\mathfrak{A}) \text{ tiene minimización } \Delta_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \models \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}(\mathfrak{A}))
\end{array}$$

Lo que podemos expresar en otros términos mediante la siguiente proposición:

Proposición III.1 *Sea* **T** *una teoría completa.*

(**1**) *Son equivalentes:*

(–) **T** *tiene inducción* Δ_{n+1}.

(–) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathrm{UI}\Delta_{n+1}$.

(**2**) *Son equivalentes:*

(−) $\mathbf{T}$ *tiene minimización* Δ_{n+1}.

(−) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{UL}\Delta_{n+1}$. □

Como consecuencia de los razonamientos anteriores y II.24, si la respuesta a **(P)** (o **(P′)**) es afirmativa, entonces $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \Longleftrightarrow \mathbf{UL}\Delta_{n+1}$.

Respecto a teorías con colección Δ_{n+1} y la teoría $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ se tiene una situación similar a la presentada en III.1 que discutiremos más adelante (véase III.3).

En este capítulo estudiaremos las relaciones entre los esquemas introducidos en el capítulo anterior, especialmente $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, y las teorías proporcionadas por los esquemas de colección sin parámetros ($\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$) y los de minimización e inducción, sin parámetros ($\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$ e $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$). En particular, estudiaremos la existencia de condiciones sobre $\mathbf{T}$ que permitan probar que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$, o bien que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$.

III.2 Colección uniforme

Dado que para cualquier teoría $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, II.20 es válido para toda extensión de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. A continuación probaremos que dicho resultado también es cierto para extensiones de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$.

Proposición III.2 *Toda extensión de* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

Demostración:
Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ y $\varphi(x,y,\vec{v}) \in \Pi^-_n$ (véase I.43 para esta notación) tal que $\exists y\,\varphi(x,y,\vec{v}) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Sea $\psi(x,\vec{v}) \in \Pi^-_{n+1}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \exists y\,\varphi(x,y,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v})$. Consideremos la siguiente fórmula $\theta(x,y) \in \Sigma^-_{n+1}$

$$\varphi((x)_0, y, (x)_1, \ldots, (x)_m) \vee [y = 0 \wedge \neg\psi((x)_0, \ldots, (x)_m)]$$

(suponemos $\vec{v} = v_1 \ldots v_m$). Entonces $\mathbf{T} \vdash \forall x\,\exists y\,\theta(x,y)$. Dado que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ resulta:

$$(\bullet) \qquad \mathbf{T} \vdash \forall u\,\exists t\,\forall x \le u\,\exists y \le t\,\theta(x,y)$$

Veamos que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{B}_\varphi$. En efecto, sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $a, \vec{b} \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x \le a\,\exists y\,\varphi(x,y,\vec{b})$. Sea $c = \langle a, \vec{b}\rangle$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x \le c\,\exists y\,\theta(x,y)$. Por $(\bullet)$ existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \le c\,\exists y \le d\,\theta(x,y)$$

y de la definición de θ se obtiene que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \le a\,\exists y \le d\,\varphi(x,y,\vec{b})$$

lo que termina la prueba de la proposición. □

El recíproco de este resultado es falso ya que $\mathbf{I}\Sigma_n$ tiene colección Δ_{n+1} y, sin embargo, $\mathbf{I}\Sigma_n \not\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$. No obstante, si la teoría considerada es completa ambas propiedades son equivalentes.

Proposición III.3 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría completa. Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{T}$ *es una extensión de* $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^{-}$.

Demostración:
Sólo debemos probar que si $\mathbf{T}$ es una teoría completa con colección Δ_{n+1}, entonces $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^{-}$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $\theta(x,y) \in \Sigma_{n+1}^{-}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ (esta fórmula es cerrada). Puesto que $\mathbf{T}$ es completa, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y, en consecuencia, $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Por hipótesis, $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, por tanto, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}_\theta$ y, en consecuencia,

$$\mathfrak{A} \models \forall u\, \exists t\, \forall x \leq u\, \exists y \leq t\, \theta(x,y).$$

□

Definición III.4 *Para cada* $n \in \omega$, $\mathbf{UB}\Delta_{n+1}$ *(colección uniforme para fórmulas* Δ_{n+1}*) es la teoría:*

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \{\forall x\, \forall \vec{v}\, (\exists y\, \varphi(x,y,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v})) \rightarrow \mathbf{B}_{\varphi,x,y}(\vec{v}) : \varphi(x,y,\vec{v}) \in \Pi_n^{-},\ \psi(x,\vec{v}) \in \Pi_{n+1}^{-}\}$$

Corolario III.5 $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^{-} \iff \mathbf{UB}\Delta_{n+1}$

Demostración:
Basta observar que

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{UB}\Delta_{n+1} \iff \mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}(\mathfrak{A}))$$

y aplicar III.3 a la teoría $\mathbf{T} = \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$. □

Como consecuencia obtenemos la siguiente prueba de un resultado ya conocido (véase [12])

Corolario III.6 (Kaye, [12])

$$\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^{-} \iff \mathbf{UL}\Delta_{n+1}$$

Demostración:
Dado $\mathfrak{A}$ podemos razonar como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \mathrm{B}\Sigma_{n+1}^{-} &\iff \mathfrak{A} \models \mathbf{UB}\Delta_{n+1} \\
&\iff \mathbf{Th}(\mathfrak{A}) \text{ tiene colección } \Delta_{n+1} \\
&\iff \mathbf{Th}(\mathfrak{A}) \text{ tiene minimización } \Delta_{n+1} \quad [\![\text{II.24}]\!] \\
&\iff \mathfrak{A} \models \mathbf{UL}\Delta_{n+1}
\end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado. □

Nota III.7 Estos resultados muestran que, en cierto sentido, el esquema $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$ debe considerarse más bien como un esquema uniforme que como un esquema sin parámetros. De acuerdo con esto, ¿existe algún esquema de colección (para fórmulas Δ_{n+1}, sin parámetros) que sea equivalente a $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$?.

Nota III.8 Como ejemplo de una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ que no tiene colección Δ_{n+1}, consideremos $\varphi(x,y) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que $\mathbf{I}\Sigma_n \nvdash \mathbf{B}_{\varphi,x,y}^-$ (φ existe por I.46) y sea $\mathbf{T} = \mathbf{I}\Sigma_n + \neg\mathbf{B}_{\varphi,x,y}^-$. Entonces,

Aserto III.8.1 $\mathbf{T}$ no tiene colección Δ_{n+1}.

Demostración:
En efecto, puesto $\mathbf{T} \vdash \neg\mathbf{B}_{\varphi,x,y}^-$, tenemos $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$. En consecuencia, $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. De este modo $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}_{\varphi,x,y}^-$; luego, si $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, entonces $\mathbf{T} \vdash \mathbf{B}_{\varphi,x,y}^-$; lo que es absurdo. □

Para $n \geq 1$, otros ejemplos de teorías sin colección Δ_{n+1} son $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^-$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$ e $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$, véanse IV.14 y IV.15.

III.3 Minimización sin parámetros

Nota III.9 En esta sección estudiaremos las relaciones entre $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ (o $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$) por un lado, y las teorías $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$, por otro. Los siguientes resultados nos serán útiles en la exposición que sigue.

Aserto III.9.1 No existe ninguna teoría, $\mathbf{T}$, consistente y tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \subset \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T})$$

Demostración:
Se prueba fácilmente, por inducción en $n \in \omega$. □

Aserto III.9.2 $\quad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \implies \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$.

Demostración:
Puesto que

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \iff \mathbb{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$$

basta observar que $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$ es Σ_{n+2}-axiomatizable y que $\mathbb{N} \models \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$. □

Aserto III.9.3 $\quad \mathbf{I}\Delta_1(\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})) \implies \mathbf{I}\Pi_1^-$.

Demostración:
Sean $\varphi(x) \in \Pi_1^-$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_1(\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N}))$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(0) \land \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1))$$

Entonces, por inducción en n, podemos probar que $\mathbb{N} \models \varphi(n)$, para todo $n \in \omega$. Así $\mathbb{N} \models \forall x\, \varphi(x)$, luego $\varphi(x) \in \Delta_1^*(\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N}))$. De este modo, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}_\varphi$ y, por tanto, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)$. □

Lema III.10 *Sea* $\mathfrak{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura en la que todo elemento es* Σ_{n+1}*-definible (sin parámetros). Entonces,*

(1) $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \iff \mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$.

(2) $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$.

Demostración:
La demostración de **(1)** puede encontrarse en [14].
(2) Sólo debemos probar que si $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$, $\varphi(x,\vec{y}) \in \Sigma_{n+1}^-$, $\psi(x,\vec{y}) \in \Pi_{n+1}^-$ y $a_1,\ldots,a_m \in \mathfrak{A}$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x,\vec{a}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{a}).$$

Por hipótesis, para cada $i = 1,\ldots,m$ existe $\theta_i(x) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \theta_i(a_i) \wedge \forall x\,(\theta_i(x) \rightarrow x = a_i)$$

Consideremos la fórmula $\varphi_0(x) \in \Sigma_{n+1}^-$

$$\exists y_1 \ldots \exists y_m\, (\bigwedge_{k=1}^{m} \theta_k(y_k) \wedge \varphi(x,\vec{y}))$$

Puesto que φ_0 es equivalente (en $\mathfrak{A}$) a la fórmula $\psi^0(x) \in \Pi_{n+1}^-$

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m\, (\bigwedge_{k=1}^{m} \theta_k(y_k) \rightarrow \psi(x,\vec{y}))$$

tenemos $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}_{\varphi_0}$. Por último, puesto que

$$\mathfrak{A} \models \forall x\,(\varphi_0(x) \leftrightarrow \varphi(x,\vec{a}))$$

podemos probar que

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x,\vec{a}) \rightarrow \exists x\,(\varphi(x,\vec{a}) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(x,\vec{a})).$$

Lo que completa la prueba del lema. □

A continuación probaremos un resultado sobre la relación entre $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$. Posteriormente, ofreceremos versiones más fuertes de este resultado.

Proposición III.11 *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión consistente de* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$*, tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$$

Entonces, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$.

Demostración:
Supongamos que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$$

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ no estándar, tal que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar ($\mathfrak{A}$ existe por III.9.1, ya que podemos tomar $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$). Entonces $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Además, puesto que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ y todos sus elementos son Σ_{n+1}-definibles, resulta que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, ya que en caso contrario, por III.10, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}$, lo que es una contradicción, ya que $\mathbf{L\Delta}_{n+1} \iff \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. □

Nota III.12 La proposición III.11, tiene múltiples consecuencias. Entre ellas destacamos:

Aserto III.12.1 Sea $\mathbf{T}$ una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$$

Entonces,

(1) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Leftrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$

(2) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$

Demostración:
(1) Puesto que $\mathbf{T} \implies \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$, $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, luego por II.25,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$$

En consecuencia, por III.11, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$.

Para probar que $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, distinguimos dos casos:

(–) Si $n > 0$, basta tener en cuenta que $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, pero $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I\Sigma}_n$.

(–) Si $n = 0$ y $\mathbf{L\Delta}^-_1 \implies \mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{T})$, entonces, por ser $\mathbf{T}$ extensión de $\mathbf{I\Sigma}_1$, tendríamos que $\mathbf{L\Delta}^-_1 \implies \mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$, luego, por VI.2, $\mathbf{L\Delta}^-_1 \vdash \mathbf{exp}$, lo que es una contradicción, ya que $\mathbf{B\Sigma}_1 \implies \mathbf{L\Delta}^-_1$ y $\mathbf{B\Sigma}_1 \nvdash \mathbf{exp}$.

(2) Se deduce de (1), ya que $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. □

Aserto III.12.2 Si $\mathbf{T}$ es una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ recursivamente axiomatizable, entonces

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Leftrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$$ □

Como un caso particular obtenemos

Aserto III.12.3

(1) $I\Delta_1(PA) \not\Rightarrow I\Sigma_1^-$

(2) $I\Delta_1(PA) \not\Leftrightarrow I\Pi_1^-$

Demostración:
Puesto que **PA** es una extensión recursivamente axiomatizable de $\mathbf{I\Sigma_1}$, por III.12.2, se tiene $I\Delta_1(PA) \not\Rightarrow L\Delta_1^-$. Teniendo presente que

$$I\Sigma_1^- \Longrightarrow I\Pi_1^- \Longleftrightarrow L\Sigma_1^- \Longrightarrow L\Delta_1^-$$

obtenemos que

$$I\Delta_1(PA) \not\Rightarrow I\Sigma_1^- \text{ y } I\Delta_1(PA) \not\Rightarrow I\Pi_1^-$$

Finalmente, $I\Pi_1^- \not\Rightarrow I\Delta_1(PA)$ ya que, por VI.2, $\mathbf{I\Delta_1(PA)} \vdash \mathbf{exp}$ mientras que $I\Pi_1^- \nvdash \mathbf{exp}$ (véase [14]). □

Aserto III.12.4 Sea **T** una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$

(2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow I\Pi_{n+1}^-$

(3) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow L\Delta_{n+1}^-$

(4) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow L\Delta_{n+1}^-$

Demostración:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es consecuencia de III.9.2.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Trivial, ya que $I\Pi_{n+1}^- \Longleftrightarrow L\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow L\Delta_{n+1}^-$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Trivial.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Es consecuencia de III.11. □

Como consecuencia de este último aserto, obtenemos la siguiente versión de III.11 para $I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$:

Aserto III.12.5 Sea **T** una extensión de $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ tal que

$$I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow L\Delta_{n+1}^-$$

Entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$. □

Para terminar con las consecuencias que podemos extraer de III.11, probaremos el siguiente teorema:

Teorema III.13 *Se verifica:*

(1) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ *es* Σ_{n+2}*-axiomatizable pero no es* Π_{n+2}*-axiomatizable.*

(2) *Para* $n > 0$, $\mathbf{I}\Sigma_n \not\Leftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$.

(3) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ *no es finitamente axiomatizable.*

Demostración:
(1) Es fácil comprobar que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ es Σ_{n+2}-axiomatizable, sin embargo, no puede ser axiomatizada usando sólo fórmulas Π_{n+2} ya que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ y, por III.11,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$$

(2) Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_n$ es Π_{n+2}-axiomatizable y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$, resulta

$$\mathbf{I}\Sigma_n \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$$

Para probar que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-} \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{I}\Sigma_n$, basta observar que

$$\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \iff \mathbf{L}\Sigma_{n+1}^{-} \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$$

y que $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{I}\Sigma_n$ (para $n > 0$).

(3) Si $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ fuese finitamente axiomatizable, dado que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$, existiría $\mathbf{T}$ extensión consistente de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, recursivamente axiomatizable, tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$$

luego, por III.11, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T})$. Esto está en contradicción con el 2º teorema de incompletitud de Gödel, según el cual $\mathbf{T} \nvdash \mathbf{Con}(\mathbf{T})$, siendo $\mathbf{Con}(\mathbf{T}) \in \Pi_1$. □

Nota III.14 En [34], A. Wilkie pregunta si, para todo $n \geq 1$, $\mathbf{Th}_{\forall_n}(\mathbb{N})$ es la única teoría $\forall_n$–axiomatizable que extiende a $\mathbf{I}\forall_n^{-}$. Esta pregunta fué respondida afirmativamente por R. Kaye en [12]. Además, en [14] se prueba (veáse también [12]) que (salvo equivalencia) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$ es la única teoría Π_{n+1}–axiomatizable que extiende a $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$. La proposición III.11 parece sugerir que se tienen resultados similares para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$, por ejemplo:

- ¿Es $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$ la única teoría (salvo equivalencia) Π_{n+1}–axiomatizable que extiende a $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$?
- Si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_{n+2}–axiomatizable tal que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$, entonces

$$¿\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})?$$

En el resto de esta sección daremos una respuesta afirmativa a estas preguntas (para $n \geq 1$) y consideraremos otras cuestiones relacionadas.

Comenzaremos refinando los resultados obtenidos hasta aquí, especialmente III.11, para el caso $n = 0$. En primer lugar, probaremos un resultado cuya demostración nos será útil en la prueba de III.16.

Lema III.15 *Para todo* $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0$, $\mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ *es cofinal en* $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$.

Demostración:
Sean $a \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$ y $\varphi(x) \in \Sigma_1^-$ tales que $\varphi(x)$ define a a en $\mathfrak{A}$ y, por tanto, en $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$. Tomemos $\psi(x, \vec{y}) \in \Delta_0^-$ tal que $\varphi(x) \equiv \exists \vec{y}\, \psi(x, \vec{y})$. Sean $\vec{b} \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$ verificando $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \psi(a, \vec{b})$. Entonces

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \exists x\, \exists u \leq x\, \exists \vec{v} \leq x\, (x = \langle u, \vec{v} \rangle \wedge \psi(u, \vec{v}))$$

Puesto que $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$ todas las fórmulas anteriores son válidas en $\mathfrak{A}$ y, en consecuencia, si $\theta_0(x)$ es la fórmula $\exists u \leq x\, \exists \vec{v} \leq x\, (x = \langle u, \vec{v} \rangle \wedge \psi(u, \vec{v}))$, entonces existe $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta_0(c) \wedge \forall z < c\, \neg\theta_0(z)$. Entonces $c \in \mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ y $c \geq a$. □

Teorema III.16 *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión de* $\mathrm{I}\Delta_0$ *tal que* $\mathbf{T} + \exp$ *es consistente y*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}\Delta_1^-$$

Entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T} + \exp) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$.

Demostración:
Supongamos lo contrario. Sea $\varphi(x) \in \Delta_0$ tal que

$$\forall x\, \neg\varphi(x) \in \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N}) - \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T} + \exp).$$

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \exp + \exists x\, \varphi(x)$ no estándar. Entonces $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \neq \mathbb{N}$ y

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T} + \exp + \exists x\, \varphi(x)) + \neg\mathbf{L}\Delta_1^-$$

Para probar esto basta observar que $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$ y $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B}\Sigma_1$. Probemos esto último:
Sea $a \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$. Por III.15, $\mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$, luego existe $c \in \mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$, tal que $c \geq a$. De este modo fijados $d, a_0 \in \mathfrak{A}$ no estándar, por ser $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ tenemos

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \forall u \leq d+1\, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Delta_0}(w) \wedge \\ \exists x \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(w, \langle x \rangle, 2^{(\max(x,a_0)+2)^{a_0}}) \wedge \\ \forall z < x\, \neg\mathbf{V}_0(w, \langle z \rangle, 2^{(\max(z,a_0)+2)^{a_0}}) \wedge \\ u = (x)_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Podemos comprobar esto último siguiendo la prueba de III.15: dado $u \leq d+1$ si $\psi(v, \vec{y}) \in \Delta_0$ es tal que $\exists \vec{y}\, \psi(v, \vec{y})$ define a u, entonces tomando como $\theta(x) \in \Delta_0$ la fórmula

$$\exists v \leq x\, \exists \vec{y} \leq x\, [x = \langle v, \vec{y} \rangle \wedge \psi(v, \vec{y})]$$

si $w = \ulcorner \theta(x) \wedge \forall z < x\, \neg\theta(z) \urcorner \in \omega$, entonces $w \leq d$ y se satisface la fórmula.

Si $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B\Sigma_1}$, entonces existe $e \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$ tal que

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \models \forall u \leq d+1\, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Delta_0}(w) \wedge \\ \exists x < e \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(w, \langle x \rangle, 2^{(\max(x,a_0)+2)^{a_0}}) \wedge \\ \forall z < x \, \neg \mathbf{V}_0(w, \langle z \rangle, 2^{(\max(z,a_0)+2)^{a_0}}) \wedge \\ u = (x)_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lo que permite definir en $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$ una aplicación inyectiva de $\leq (d+1)$ en $\leq d$ en contradicción con el PHP para conjuntos finitos en $\mathbf{I\Delta_0} + \exp$, I.11–**(2)**.

Probamos así que $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma_1}$ y puesto que todos sus elementos son Σ_1-definibles, por III.10 y I.48, $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta_1^-}$. □

Nota III.17 El teorema III.16 nos permite reforzar los resultados obtenidos en III.12 como consecuencia de III.11.

Aserto III.17.1 Sea $\mathbf{T}$ una teoría con inducción Δ_1 tal que $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ es consistente y

$$\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T} + \exp) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$$

Entonces

(1) $\mathbf{I\Delta_1(T)} \not\Longrightarrow \mathbf{L\Delta_1^-}$

(2) $\mathbf{I\Delta_1(T)} \not\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1^-}$

Demostración:

(1) Basta observar que si $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_1, entonces, por II.25, se verifica que $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_1(T)}$ y aplicar III.16.

(2) Es consecuencia de **(1)**, ya que $\mathbf{B\Sigma_1^-}$ es una extensión de $\mathbf{L\Delta_1^-}$. □

Aserto III.17.2 Sea $\mathbf{T}$ una teoría consistente con inducción Δ_1 y tal que $\mathbf{T} \vdash \exp$. Entonces son equivalentes:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$

(2) $\mathbf{I\Delta_1(T)} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi_1^-}$

(3) $\mathbf{I\Delta_1(T)} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_1^-}$

(4) $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_1^-}$

Demostración:

(1)$\Longrightarrow$**(2)** Es consecuencia de III.9.3.

(2)$\Longrightarrow$**(3)** Trivial.

(3)$\Longrightarrow$**(4)** Puesto que $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_1, por II.25, $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_1(T)}$, luego **(4)**, se sigue de **(3)**.

(4)$\Longrightarrow$**(1)** Es consecuencia de III.16. □

Aserto III.17.3

(1) Sea **T** una teoría recursivamente axiomatizable con inducción Δ_1, tal que $\mathbf{T}+$ **exp** es consistente. Entonces

$$\mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{T}) \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{L}\Delta_1^-.$$

(2) $\mathrm{I}\Delta_0 \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{L}\Delta_1^-$

Demostración:

(1) Por reducción al absurdo, supongamos que existe una teoría **T** en las condiciones dadas y tal que $\mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_1^-$. Entonces puesto que **T** tiene inducción Δ_1, $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_1^-$. En consecuencia,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}+\mathbf{exp}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_1^-$$

Lo que está en contradicción con III.16, ya que, al ser **T** recursivamente axiomatizable $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}+\mathbf{exp}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$.

(2) Es consecuencia de (1). □

Aserto III.17.4 Sea **T** una teoría Π_2–axiomatizable, consistente y tal que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathrm{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$

(2) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathrm{I}\Pi_1^-$

(3) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_1^-$ □

Ahora obtendremos una generalización de III.11 y III.16, para extensiones de $\mathrm{I}\Sigma_n^-$, $(n \geq 1)$. En primer lugar debemos encontrar el tipo de elementos que desempeñen, con respecto a $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, un papel similar al que desempeñan los elementos Δ_0–definibles con respecto a $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$ en la prueba de III.16.

Definición III.18 *Sea $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n^-$. Diremos que $a \in \mathfrak{A}$ es Π_n–minimal si existe $\varphi(x) \in \Pi_n^-$ tal que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a) \wedge \forall x < a\, \neg\varphi(x)$$

Nota III.19 Observemos que si $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n^-$ y $a \in \mathfrak{A}$ es Π_n–minimal, entonces $a \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. En efecto, sea $\varphi(x) \in \Pi_n^-$. Entonces la fórmula

$$\varphi(x) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(y)$$

es equivalente en $\mathrm{I}\Sigma_n^-$ a una fórmula $\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_n^-)$, ya que, para $n > 0$, $\mathrm{I}\Sigma_n^-$ puede probar la siguiente versión del esquema de colección:

Para cada fórmula $\theta(x, y) \in \Pi_{n-1}^-$,

$$\mathrm{I}\Sigma_n^- \vdash \forall x < z\, \exists y\, \theta(x, y) \rightarrow \exists v\, \forall x < z\, \exists y < v\, \theta(x, y)$$

Puede encontrarse una prueba de este resultado en [12], teorema 8.7 (véase también [14], proposición 1.7)

Teorema III.20 (Kaye, [12]) *Sea $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n^-$. Entonces:*

(1) $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$

(2) $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathrm{I}\Sigma_n$

Demostración:
Para $n = 0$ basta recordar que $\mathrm{I}\Delta_0 \iff \mathrm{I}\Delta_0^-$. En el caso $n > 0$, el resultado es consecuencia del hecho reseñado en la nota III.19, según el cual los elementos Π_n–minimales de $\mathfrak{A}$ pertenecen a $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. En cualquier caso pueden consultarse los detalles de la prueba en [12] (teorema 9.1). □

Lema III.21 ($n > 0$) *Para todo $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n^-$, los elementos Π_n–minimales son cofinales en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$.*

Demostración:
Sean $a \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^-$ tales que $\varphi(x)$ define a a en $\mathfrak{A}$ y, por III.20–**(1)**, en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Tomemos $\psi(x,y) \in \Pi_n^-$ tal que $\varphi(x) \equiv \exists y\, \psi(x,y)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(a,y)$, luego $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \exists y\, \psi(a,y)$, ya que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, por III.20. Sea $b \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ verificando $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \psi(a,b)$. Entonces

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \exists x\, \forall u \leq x\, \forall v \leq x\, (x = \langle u,v\rangle \to \psi(u,v))$$

Puesto que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ todas las fórmula anteriores son válidas en $\mathfrak{A}$. En consecuencia, si $\theta_0(x) \in \Pi_n^-$ es la fórmula Π_n

$$\forall u \leq x\, \forall v \leq x\, (x = \langle u,v\rangle \to \psi(u,v)),$$

entonces, por ser $\mathfrak{A} \models \mathrm{L}\Pi_n^-$ (por I.46), existe $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta_0(c) \wedge \forall z < c\, \neg\theta_0(z)$. Por III.19, $c \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, ya que es un elemento Π_n–minimal. Para terminar, $c \geq a$. □

Nota III.22 Obviamente, este resultado generaliza III.15. Podemos enunciar ambos resultados como sigue:

> **Aserto III.22.1** Sean $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n^-$ y K el conjunto de los elementos de $\mathfrak{A}$ definibles por fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_n^-)$. Entonces K es cofinal en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$.
>
> **Demostración:**
> Para $n = 0$, sólo debemos aplicar III.15, teniendo en cuenta que $\mathrm{I}\Delta_0^- \iff \mathrm{I}\Delta_0$ y que, por IV.28, si $\varphi(x) \in \Delta_1(\mathrm{I}\Delta_0)$ entonces existe $\psi(x) \in \Delta_0$ tal que
>
> $$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x).$$
>
> Para $n > 0$, el resultado es consecuencia de III.21 teniendo en cuenta que, por III.19, todo elemento Π_n–minimal es definible por una fórmula $\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_n^-)$. □

Teorema III.23 $(n \geq 1)$ *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente* Π_{n+2}*–axiomatizable tal que*

$$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$$

Entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$.

Demostración:
Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$$

Entonces, por III.9.1, existe $\varphi(x) \in \Pi_n$ tal que

$$\forall x \, \neg\varphi(x) \in \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) - \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}).$$

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \exists x \, \varphi(x)$ no estándar. Entonces, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \neq \mathbb{N}$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^{-}$, ya que

$$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^{-}$$

Además, se verifica:

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T} + \exists x \, \varphi(x)$$

(basta observar que $\mathbf{T}$ es Π_{n+2}–axiomatizable y que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, por III.20).

Por último $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$, ya que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. Probemos esto último:

Sea $a \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Por III.21, los elementos Π_n–minimales son cofinales en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, luego existe $c \in \mathfrak{A}$, Π_n–minimal, tal que $c \geq a$. Sea $d \in \mathfrak{A}$ no estándar. Puesto que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Sigma}_n$ y $n \geq 1$, tenemos

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \forall u \leq d+1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Pi_n}(w) \wedge \\ \exists x \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x \rangle) \wedge \\ \forall z < x \, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle z \rangle) \wedge \\ u = (x)_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Podemos comprobar este hecho siguiendo la prueba de III.21: dado $u \leq d+1$ si $\psi(v, \vec{y}) \in \Pi_n$ es tal que $\exists \vec{y} \, \psi(v, \vec{y})$ define a u, entonces tomando como $\theta(x) \in \Pi_n^{-}$ la fórmula

$$\forall v \leq x \, \forall \vec{y} \leq x \, [x = \langle v, \vec{y} \rangle \to \psi(v, \vec{y})]$$

si $w = \ulcorner \theta(x) \urcorner \in \omega$, entonces $w \leq d$ y se satisface la fórmula.

Si $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ entonces existe $e \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \forall u \leq d+1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Pi_n}(w) \wedge \\ \exists x < e \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x \rangle) \wedge \\ \forall z < x \, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle z \rangle) \wedge \\ u = (x)_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lo que permite definir en $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ una aplicación inyectiva de $\leq (d+1)$ en $\leq d$ en contradicción con el PHP para conjuntos finitos en $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$, (I.11–**(2)**).

Probamos así que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ y puesto que todos sus elementos son Σ_{n+1}-definibles, por III.10, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$. Ahora bien, esto es una contradicción ya que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T}$ y, por hipótesis, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$. □

Nota III.24 Como consecuencia de III.23 obtenemos los siguientes resultados:

Aserto III.24.1 ($n \geq 1$) Sea $\mathbf{T}$ una extensión consistente de $\mathrm{I}\Sigma_n^-$ con inducción Δ_{n+1} y tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathrm{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}).$$

Entonces,

(1) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T}) \not\Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$

(2) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T}) \not\Longrightarrow \mathrm{B}\Sigma_{n+1}^-$

Demostración:
(1) Basta aplicar III.23, teniendo en cuenta que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$, puesto que $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}.

(2) es consecuencia de (1) ya que $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^-$ es una extensión de $\mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$. □

Aserto III.24.2 ($n \geq 1$) Sea $\mathbf{T}$ una teoría Π_{n+2}–axiomatizable y consistente. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathrm{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$

(2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{I}\Pi_{n+1}^-$

(3) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$

(4) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2) Es consecuencia del lema III.9.2.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Trivial ya que $\mathrm{I}\Pi_{n+1}^- \Longleftrightarrow \mathrm{L}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Trivial.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Es consecuencia de III.23. □

Aserto III.24.3 ($n \geq 1$) Sea $\mathbf{T}$ una teoría consistente con inducción Δ_{n+1} y tal que $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$, entonces,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathrm{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$$

Demostración:
Puesto que $\mathbf{T}$ tiene inducción, por II.25,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$$

Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{T}) \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}^-$; en consecuencia, el resultado buscado se sigue de III.24.2. □

Teorema III.25 ($n \geq 1$) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$ *es (salvo equivalencia) la única teoría* Π_{n+1}*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$. □

Demostración:
Es consecuencia de III.24.2. □

Nota III.26 Observemos que debido al uso de **exp** en III.16, no ha sido posible establecer III.25 en el caso $n = 0$. Por tanto, queda por responder la siguiente cuestión:

(a) ¿Es $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ (salvo equivalencia) la única teoría Π_1–axiomatizable que extiende a $\mathbf{L}\Delta_1^{-}$?

Por otra parte, resultados como III.24.1 y III.16 parecen sugerir que $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} + \mathbf{exp} \not\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$.

(b) ¿Podemos probar a partir de III.24.1 y III.16, que $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} + \mathbf{exp} \not\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$?

III.4 Inducción sin parámetros

El problema de la equivalencia entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ nos sugiere analizar si los resultados obtenidos en la sección anterior para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ son también válidos para $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$. Como veremos a continuación, los resultados obtenidos por McAloon en [21] nos proporcionan algunas respuestas parciales a esta pregunta. En dicho trabajo el autor utiliza el Teorema de Completitud Aritmetizado, junto con resultados de independencia fuertes (debidos a Mostowski y Friedman) para, dada una extensión **T** de **PA**, construir, para cada $n \in \omega$, modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ en los que la parte estándar es definible por una fórmula Δ_{n+1}. Obviamente si $\mathfrak{A}$ es uno de dichos modelos, entonces $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{I}\Delta_{n+1}$. Además, bajo ciertas condiciones, es posible conseguir una fórmula Δ_{n+1} sin parámetros, que define la parte estándar de $\mathfrak{A}$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$.

El primer resultado relevante en nuestro contexto es (esencialmente) el teorema 6.1 de [21], que enunciamos como sigue

Teorema III.27 (McAloon, [21]) *Sea* **T** *una extensión de* **PA** *y* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *tal que* **T** *está codificada en* $\mathfrak{A}$. *Entonces, para cada* $n \in \omega$, *existe* $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tal que* $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}$ *y* ω *es definible en* $\mathfrak{B}$ *por una fórmula* Δ_{n+1} *(con parámetros).* □

Este teorema nos permite probar una versión débil de III.24.1 para $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$. En concreto tenemos

Teorema III.28 *Sea* **T** *una extensión consistente recursivamente axiomatizable de* **PA**. *Entonces para cada* $n \in \omega$, *se tiene:*

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}$

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}$

Demostración:
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$. Podemos suponer que $\mathbf{T}$ está axiomatizada por un conjunto recursivo de fórmulas y, por tanto, que $\mathbf{T}$ está codificada en $\mathfrak{A}$. Por tanto, de III.27, se sigue que existe $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ tal que ω es definible en $\mathfrak{B}$ por una fórmula Δ_{n+1} (con parámetros) y, por tanto, $\mathfrak{B} \not\models \mathbf{I}\Delta_{n+1}$, lo que prueba **(1)**. Además, puesto que $\mathbf{T}$ es una extensión de PA, $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, luego por II.25 resulta que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

y en consecuencia, $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, lo que prueba **(2)**. □

Corolario III.29 *Para todo $n \in \omega$,* $\quad \mathbf{I}\Delta_{n+1} \quad \models\!\!\!\implies \quad \mathbf{I}\Sigma_n$ □

El siguiente resultado de Lessan (esencialmente es la proposición 4.2.6 de [18]) permite extender el rango de aplicación del teorema III.28 para incluir algunas teorías no recursivamente axiomatizables.

Teorema III.30 (Lessan, [18]) *Sea $\mathfrak{A} \models$ **PA** y $X \subseteq \omega$ un conjunto no recursivo. Entonces para cada $n \geq 1$ existe*

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) + \mathbf{Th}_{\Sigma_n}(\mathfrak{A}) + \mathbf{PA}$$

tal que $X \in SSy(\mathfrak{B})$. □

Corolario III.31 *Sea **T** una extensión de **PA** por fórmulas de complejidad acotada; es decir, existen $k \in \omega$ y $\Phi \subseteq \Sigma_k \cup \Pi_k$ tales que*

$$\mathbf{T} \iff \mathbf{PA} + \Phi$$

Entonces para cada $n \in \omega$:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{I}\Delta_{n+1}$

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{I}\Delta_{n+1}$

Demostración:
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, por III.30, existe $\mathfrak{B}$ tal que $\mathbf{T} \in SSy(\mathfrak{B})$ y

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathfrak{A}) + \mathbf{Th}_{\Sigma_k}(\mathfrak{A}) + \mathbf{PA}$$

Puesto que $\mathbf{T} \iff \mathbf{PA} + \Phi$ y $\Phi \subseteq \Sigma_k \cup \Pi_k$, resulta que $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$. Aplicando ahora III.27, existe $\mathfrak{C} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ tal que ω es definible en $\mathfrak{C}$ por una fórmula Δ_{n+1} (con parámetros) y, por tanto, $\mathfrak{C} \not\models \mathbf{I}\Delta_{n+1}$. Esto prueba **(1)**.

Además, dado que $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, por II.25, $\mathfrak{C} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ lo que prueba **(2)**. □

Corolario III.32 *Para cada $n \in \omega$,* $\quad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbb{N}) \;\not\Longrightarrow\; \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ □

Para eliminar los parámetros que aparecen en la definición Δ_{n+1} de ω es preciso reforzar las restricciones sobre $\mathbf{T}$. El siguiente resultado es el corolario 6.4 de [21]:

Teorema III.33 (McAloon, [21]) *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión de* $\mathbf{PA}$ *consistente con* $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ *y definible en* $\mathbb{N}$ *por una fórmula* Σ_{n+1}. *Entonces existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ *no estándar, tal que* ω *es definible en* $\mathfrak{A}$ *por una fórmula* Δ_{n+1} *sin parámetros,*. □

Naturalmente esto permite reforzar III.28 del siguiente modo:

Corolario III.34 *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión de* $\mathbf{PA}$ *consistente con* $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ *y definible en* $\mathbb{N}$ *por una fórmula* Σ_{n+1}. *Entonces*

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$

(2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ □

Corolario III.35 $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ □

Nota III.36 Observemos que toda teoría recursivamente axiomatizable es definible en $\mathbb{N}$ por una fórmula Σ_1 y, por tanto, si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{PA}$ recursivamente axiomatizable y consistente con $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$, entonces III.34 es válido para $\mathbf{T}$.

Como consecuencia de III.34 podemos establecer el análogo de III.13 para $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$:

Teorema III.37 *Se verifica:*

(1) $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ *es* Σ_{n+2}*–axiomatizable pero no es* Π_{n+2}*-axiomatizable.*

(2) *Para* $n > 0$, $\mathbf{I}\Sigma_n \not\Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$.

(3) $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ *no es finitamente axiomatizable.*

Demostración:
(1) Es fácil comprobar que $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, veamos que no es axiomatizable por fórmulas Π_{n+2}. En efecto, por III.35,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$$

luego $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ no puede ser Π_{n+2}–axiomatizable ya que $\mathbf{PA} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$.
(2) Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_n$ es Π_{n+2}–axiomatizable y, por III.35, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$, es evidente que $\mathbf{I}\Sigma_n \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$. Por último, puesto que $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, pero $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ resulta

$$\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$$

(3) Si $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ fuese finitamente axiomatizable, puesto que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^-_{n+1},$$

entonces existiría una extensión $\mathbf{T}$ de $\mathbf{PA}$, recursivamente axiomatizable, tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$$

Ahora bien, si $\mathbf{T}$ es recursivamente axiomatizable, entonces $\mathbf{T}$ es Σ_1–definible en $\mathbb{N}$, luego por III.34–(1),

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$$

lo cual es una contradicción. □

Otro resultado interesante sobre axiomatizabilidad es el siguiente.

Proposición III.38 $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ *no es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

Demostración:
En efecto, puesto que por III.35,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$$

$\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ no puede ser Π_{n+2}–axiomatizable ya que

$$\mathbf{PA} \Longrightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$$

□

Nota III.39 Este resultado es interesante en relación con $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$. Como sabemos (véase [12] o III.6)

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} \iff \mathbf{UL}\Delta_{n+1}$$

y en [14] se prueba que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$ no es Π_{n+2}–axiomatizable ni Σ_{n+2}–axiomatizable. Por tanto, los mismos resultados valen acerca de $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$. Como hemos visto $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ no es Π_{n+2}–axiomatizable. Usando un razonamiento similar al utilizado en la proposición 1.11 de [14], se demuestra que $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ tampoco es Σ_{n+2}–axiomatizable.

Proposición III.40 ($n > 0$) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría* Σ_{n+2}*-axiomatizable tal que* $\mathbb{N} \models \mathbf{T}$. *Entonces*

$$\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$$

Demostración:
Como ya hemos comentado, empleamos un razonamiento similar al utilizado en [14], proposición 1.11. Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_{n+2}-axiomatizable tal que $\mathbb{N} \models \mathbf{T}$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{N})$ no estándar y $a \in \mathfrak{A}$, $a > \omega$. Entonces $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, a) \prec_n \mathfrak{A}$, y $\mathbb{N} \prec \mathfrak{A}$, lo que nos da $\mathbb{N} \prec_{n+1} \mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, a)$, y, en consecuencia, $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbb{N})$. En particular, $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{T}$. Sin embargo, $\mathcal{K}_n(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{I}\Sigma_n$, lo que prueba el resultado. □

Teorema III.41 ($n > 0$) $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ *no es* Σ_{n+2}*-axiomatizable ni* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

Demostración:
Por III.38, $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ no es Π_{n+2}–axiomatizable. Puesto que $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$ y $\mathbb{N} \models \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$, por III.40, $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ no es Σ_{n+2}–axiomatizable. □

Nota III.42 Aunque III.34 permite obtener algunos resultados similares a los obtenidos para $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^-$, como por ejemplo III.37, la situación está lejos de ser satisfactoria, ya que sólo proporciona resultados similares a III.23 para extensiones de **PA**. Esto sugiere llevar a cabo un análisis de los resultados de [21] para determinar hasta qué punto es necesario considerar extensiones de **PA**. Por otra parte, contrasta la relativa simplicidad de la prueba de III.23 frente a la sofisticación de los métodos empleados por McAloon en [21] (teorema de completitud aritmetizado, teoremas de incompletitud de Mostowski–Friedman, ...), lo que hace interesante disponer de métodos alternativos (más simples) para probar resultados acerca de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}^-$, similares a los obtenidos para $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^-$ en la sección anterior.

Capítulo IV

Conjuntos Π_n–funcionales

En este capítulo consideramos una aproximación distinta al problema de las relaciones entre inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}. La idea central consiste en obtener condiciones para que toda fórmula $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ pueda considerarse como una fórmula acotada (en una extensión conveniente de $\mathcal{L}$). Con este fin, estudiamos las Π_{n+2}–consecuencias de una extensión, $\mathbf{T}$, de $\mathbf{I\Sigma}_n$. Para ello, desarrollando algunas construcciones bien conocidas en el contexto de las teorías de inducción acotada (por ejemplo, [35], [24]) trataremos de caracterizar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$ mediante ($\mathbf{I\Sigma}_n$ y) un conjunto de funciones no decrecientes de grafo Π_n–definible.

IV.1 Conjuntos Π_n–funcionales

Notación IV.1 Dada una fórmula $\varphi(x,y)$ denotaremos por IPF(φ) a la conjunción de los cierres de las fórmulas:

(-) $\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

(-) $x_1 \leq x_2 \wedge \varphi(x_1,y_1) \wedge \varphi(x_2,y_2) \rightarrow y_1 \leq y_2$

Es decir, IPF(φ) expresa que $\varphi(x,y)$ define una función parcial monótona creciente.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por Γ^* al conjunto:

$$\{\forall x\, \exists y\, \varphi(x,y) :\ \varphi(x,y) \in \Gamma^-\} \cup \{\mathrm{IPF}(\varphi) :\ \varphi(x,y) \in \Gamma^-\}$$

Definición IV.2

(1) *Diremos que* $\Gamma \subseteq \Pi_n$ *es un conjunto* Π_n*–funcional, si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$ *es consistente.*

(2) *Diremos que una teoría* $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional, si existe un conjunto* Π_n*–funcional,* Γ*, tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Nota IV.3 Observemos que si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional, entonces $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$ y además, existe un conjunto Γ, Π_n funcional, tal que:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Una de las propiedades fundamentales de estos conjuntos de fórmulas queda recogida en la siguiente proposición.

Proposición IV.4 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)$$

Demostración:
Sea $\theta(x,y) \in \Pi_n$ tal que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y supongamos que

$$\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* \nvdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* + \neg\forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall y\, \neg\theta(a,y)$. Sea

$$\mathbf{T} = \mathrm{ED}(\mathfrak{A}) + \mathbf{c} + \{\exists! x\, \psi(x,a) \to \exists x < \mathbf{c}\, \psi(x,a) :\ \psi(x,y) \in \Sigma_{n+1}\}$$

donde $\mathrm{ED}(\mathfrak{A})$ es el diagrama elemental de $\mathfrak{A}$ y $\mathbf{c}$ es un nuevo símbolo de constante. Por el teorema de compacidad $\mathbf{T}$ es consistente. Sea $\mathfrak{B}' \models \mathbf{T}$ y $\mathfrak{B}$ la restricción de $\mathfrak{B}'$ al lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, luego

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* + \neg\forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$$

y además, $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \prec_n \mathfrak{B}$ es una subestructura inicial propia de $\mathfrak{B}$, luego $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. Veamos que además

$$(\bullet) \qquad \mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \Gamma^*$$

En efecto, es suficiente probar que para toda $\varphi(x,y) \in \Gamma$, $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$. Dado $b \in \mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a)$, existe $b' \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{B},a)$ tal que $b \leq b'$. Puesto que $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \prec_{n+1} \mathfrak{B}$, $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \forall x\, \exists! y\, \varphi(x,y)$. Sean $d' \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{B},a)$ y $d \in \mathfrak{B}$ tales que

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \varphi(b',d') \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(b,d).$$

Puesto que Γ es un conjunto Π_n–funcional y $\mathfrak{B} \models \Gamma^*$, se tiene $\mathfrak{B} \models \mathrm{IPF}(\varphi)$; luego, $d \leq d'$ y, en consecuencia, $d \in \mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a)$ y $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \varphi(b,d)$, ya que $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \prec_n \mathfrak{B}$. Esto prueba $(\bullet)$.

Por $(\bullet)$, $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*$. Puesto que $\mathfrak{B} \models \forall y\, \neg\theta(a,y)$, $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \forall y\, \neg\theta(a,y)$, y así $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{B},a) \models \neg\forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$, lo cual es una contradicción. □

Como consecuencia de este resultado obtenemos:

Corolario IV.5 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Entonces*

(1) $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$ *tiene colección e inducción* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$ *es débilmente PK–*Δ_{n+1}.

Demostración:
(1) Por II.22 bastará probar que $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$ tiene colección Δ_{n+1}. Puesto que toda extensión de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ tiene colección Δ_{n+1}, por II.25,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*).$$

Así, por IV.4, $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)$ y como, por IV.4 y II.7

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) \iff \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

el resultado queda probado.
(2) Basta usar (1) y II.20. □

De acuerdo con este último resultado, si tenemos en cuenta la nota IV.3, podemos concluir que toda teoría Π_n–funcional es débilmente PK–Δ_{n+1}. Hemos obtenido así una nueva condición ($\mathbf{T}$ es Π_n–funcional) bajo la cual podemos probar la equivalencia entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. El siguiente resultado muestra que, en realidad, no se trata de una nueva condición.

Teorema IV.6 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente. Son equivalentes:*
(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}

(2) $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional.*

Demostración:
(1)$\Longrightarrow$(2) Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{\varphi(x,y) \in \Pi_n^- : \ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y),\ \mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathrm{IPF}(\varphi)\}$$

Probaremos que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Puesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$. Por tanto, de la definición de Γ se deduce que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$ y, en consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Para probar la inclusión contraria, sea $\theta(x,y) \in \Pi_n^-$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$. Probaremos que $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$, distinguiendo para ello los siguientes casos:

Caso 1: $n = 0$.

Sea $C_\theta(x,y)$ la fórmula

$$\forall u \leq x\, \exists v \leq y\, \theta(u,v) \wedge \forall w < y\, \exists u \leq x\, \forall v \leq w\, \neg\theta(u,v)$$

Entonces es fácil comprobar que se tiene

(i) $\mathbf{I}\Delta_0 \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) \to \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$.

(ii) $\mathbf{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{IPF}(C_\theta)$.

(iii) $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T}) \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) \leftrightarrow \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ $\qquad [\![$ya que $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_1(\mathbf{T})]\!]$.

Puesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_1 y $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$, por **(iii)**, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y)$. En consecuencia, por **(ii)**, $C_\theta(x,y) \in \Gamma$. Luego $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y)$ y por **(i)**,

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$$

Caso 2: $n > 0$.

Dado que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1} y $1 \leq n$, tenemos

$$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_1$$

Por tanto, en $\mathbf{T}$, además de toda la maquinaria de codificación para sucesiones descrita en el capítulo I (de tal modo que las propiedades necesarias acerca de la codificación pueden expresarse por fórmulas Δ_0 y probarse en $\mathbf{I}\Delta_0$) también podemos garantizar la existencia de sucesiones de longitud arbitraria.

Sea $\theta'(x,y,\vec{z}) \in \Sigma_{n-1}$ tal que $\theta(x,y)$ es la fórmula $\forall\vec{z}\,\theta'(x,y,\vec{z})$. Sea $C_\theta(x,y)$ la fórmula:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = 2 \wedge \mathrm{Seq}((y)_1) \wedge \mathrm{lg}((y)_1) = (y)_0 \wedge \\ \forall w < (y)_0\,[\mathrm{Seq}((y)_{1,w}) \wedge \mathrm{lg}((y)_{1,w}) = 2 \wedge (y)_{1,w,0} \leq x] \wedge \\ \forall u \leq x\, \exists v \leq (y)_0\, \forall\vec{z}\,\theta'(u,v,\vec{z}) \wedge \\ \forall w < (y)_0 \left\{\begin{array}{l} \forall u < (y)_{1,w,0}\, \exists v \leq w\, \forall\vec{z}\,\theta'(u,v,\vec{z}) \wedge \\ \forall v \leq w\, \exists\vec{z} \leq (y)_{1,w,1}\, \neg\theta'((y)_{1,w,0},v,\vec{z}) \wedge \\ \forall t < (y)_{1,w,1}\, \exists v \leq w\, \forall\vec{z} \leq t\, \theta'((y)_{1,w,0},v,\vec{z}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Podemos dar una descripción informal de $C_\theta(x,y)$ como sigue: La interpretación de las primeras dos líneas no presenta ningún problema, mientras que el resto puede expresarse como:

- $(y)_0 = (\mu w)[\forall u \leq x\, \exists v \leq w\, \forall\vec{z}\,\theta'(u,v,\vec{z})]$
- $\forall w < (y)_0 \left\{\begin{array}{l} (y)_{1,w,0} = (\mu u)[\neg\exists v \leq w\, \forall\vec{z}\,\theta'(u,v,\vec{z})] \\ (y)_{1,w,1} = (\mu t)[\forall v \leq w\, \exists\vec{z} \leq t\, \neg\theta'((y)_{1,w,0},v,\vec{z})] \end{array}\right.$

Es fácil ver que $C_\theta(x,y) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$. En particular, $C_\theta(x,y) \in \Pi_n(\mathbf{T}) \cap \Pi_n(\mathbf{I}\Sigma_n)$. Además podemos probar que:

(i) $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) \rightarrow \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$.

(ii) $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathrm{IPF}(C_\theta)$.

(iii) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) \leftrightarrow \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$

Resulta sencillo probar **(i)** y **(ii)** a partir de la definición de $C_\theta(x,y)$. Para probar **(iii)**, recordemos que, por II.8, $\mathbf{B}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$, luego, teniendo en cuenta **(i)**, será suficiente probar el siguiente resultado

Aserto IV.6.1 $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y) \rightarrow \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y)$

Prueba del Aserto:
Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ tal que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$ y $a \in \mathfrak{A}$. Puesto que $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, sabemos que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \forall u \leq a\, \exists v \leq y\, \theta(u,v)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Pi_n$, existe $b \in \mathfrak{A}$, tal que

$$b = (\mu y)[\forall u \leq a\, \exists v \leq y\, \theta(u,v)]$$

Para cada $d < b$, sea $c_d = (\mu u)[u \leq a \wedge \neg\exists v \leq d\, \theta(u,v)]$. Entonces, para cada $d < b$ tenemos $\mathfrak{A} \models \exists t\, \forall v \leq d\, \exists \vec{z} \leq t\, \neg\theta'(c_d, v, z)$, ya que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_{n-1}$. Sea

$$e_d = (\mu t)[\forall v \leq d\, \exists \vec{z} \leq t\, \neg\theta'(c_d, v, \vec{z})]$$

De este modo, para cada $d < b$, tenemos

(–) $\mathfrak{A} \models \forall u < c_d\, \exists v \leq d\, \theta(u,v)$

(–) $\mathfrak{A} \models \forall u \leq d\, \exists \vec{z} \leq e_d\, \neg\theta'(c_d, v, \vec{z})]$

(–) $\mathfrak{A} \models \forall t < e_d\, \exists v \leq d\, \forall \vec{z} \leq t\, \theta'(c_d, v, \vec{z})]$

Dado a debemos probar que $\mathfrak{A} \models \exists y\, C_\theta(a,y)$. Los comentarios anteriores nos muestran que un tal elemento, y, estará dado por la sucesión

$$\langle b, \langle\langle c_0, e_0\rangle, \langle c_1, e_1\rangle, \ldots, \langle c_d, e_d\rangle, \ldots, \langle c_{b-1}, e_{b-1}\rangle\rangle\rangle$$

En lo que sigue probaremos que dicha sucesión existe (como elemento de $\mathfrak{A}$).

Sea $\varphi(w,p,x) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ la fórmula:

$$\begin{cases} \mathrm{Seq}(p) \wedge \mathrm{lg}(p) = 2 \wedge (p)_0 \leq x \\ \forall u < (p)_0\, \exists v \leq w\, \forall \vec{z}\, \theta'(u,v,\vec{z}) \wedge \\ \forall v \leq w\, \exists \vec{z} \leq (p)_1\, \neg\theta'((p)_0, v, \vec{z}) \wedge \\ \forall t < (p)_1\, \exists v \leq w\, \forall \vec{z} \leq t\, \theta'((p)_0, v, \vec{z}) \end{cases}$$

Sabemos que $\mathfrak{A} \models \forall w < b\, \exists p\, \varphi(w,p,a)$, ya que para cada $w < b$ podemos tomar $p = \langle c_w, e_w\rangle$. Sea ahora $\Psi(x,y',w,p) \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n)$ la fórmula

$$\begin{cases} (y' \leq w \wedge p = 0) \vee \\ w < y' \wedge \begin{cases} (\exists y < y'\, \forall u \leq x\, \exists v \leq y\, \theta(u,v) \wedge p = 0) \vee \\ (\exists u \leq x\, \forall v \leq y'\, \neg\theta(u,v) \wedge p = 0) \vee \\ \varphi(w,p,x) \end{cases} \end{cases}$$

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \forall y'\, \forall w\, \exists p\, \Psi(x,y',w,p)$, tenemos $\exists p\, \Psi(x,y',w,p) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Por tanto, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall w < z\, \exists p\, \Psi(x,y',w,p) \rightarrow \exists q\, \forall w < z\, \exists p \leq q\, \Psi(x,y',w,p)$$

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{A} \models \forall w < b\, \exists p\, \Psi(a,b,w,p)$, existe $\tilde{q} \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall w < b\, \exists p \leq \tilde{q}\, \Psi(a,b,w,p).$$

Sean $s \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{Seq}(s) \wedge \mathrm{lg}(s) = b \wedge \forall j < b\, [(s)_j = \tilde{q}]$$

y $\delta(x,a,s,b) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ la fórmula

$$a < x \vee \exists y \leq \langle b, s\rangle\, C_\theta(x,y)$$

(s existe por ser $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_1$). Entonces se verifica que:

- $\mathfrak{A} \models \delta(0, a, s, b)$
  En efecto, si $b_0 \in \mathfrak{A}$ es tal que $b_0 = (\mu y)(\theta(0, y))$, entonces $b_0 \leq b$ y para cada $d < b_0$, con las notaciones introducidas anteriormente, se tiene $c_d = 0$, luego

$$e_d = (\mu t)[\forall v \leq d\, \exists \vec{z} \leq t\, \neg\theta'(0, v, \vec{z})].$$

  Consideremos ahora la fórmula $\sigma(t, b_0)$

$$\begin{cases} \mathrm{Seq}(t) \wedge \mathrm{lg}(t) = b_0 \wedge \\ \forall i < b_0 \begin{cases} (t)_{i,0} = 0 \wedge \\ \forall v \leq i\, \exists \vec{z} \leq (t)_{i,1}\, \neg\theta'(0, v, \vec{z}) \end{cases} \end{cases}$$

  Es fácil comprobar que es una fórmula $\Pi_n(\mathbf{I}\Sigma_n)$ y, además, $\mathfrak{A} \models \exists t\, \sigma(t, b_0)$. Por tanto, existe $\bar{s} = (\mu t)(\sigma(t, b_0))$. Sea $b_1 = \langle b_0, \bar{s}\rangle$. Entonces

$$\mathfrak{A} \models b_1 \leq \langle b, s\rangle \wedge \mathcal{C}_\theta(0, b_1)$$

- $\mathfrak{A} \models \delta(x, a, s, b) \to \delta(x + 1, a, s, b)$
  Dado $a_0 < a$ tal que $\mathfrak{A} \models \delta(a_0, a, s, b)$, sean b_0 y s_0 tales que

$$\mathfrak{A} \models \langle b_0, s_0\rangle \leq \langle b, s\rangle \wedge \mathcal{C}_\theta(a_0, \langle b_0, s_0\rangle).$$

  Distinguimos dos casos:
  <u>Caso A</u>: $\mathfrak{A} \models \exists y \leq b_0\, \theta(a_0 + 1, y)$
  Entonces, tenemos $\mathfrak{A} \models \mathcal{C}_\theta(a_0 + 1, \langle b_0, s_0\rangle)$.
  <u>Caso B</u>: $\mathfrak{A} \models \neg\exists y \leq b_0\, \theta(a_0 + 1, y)$.
  Sea $b_1 = (\mu y)(\theta(a_0 + 1, y)$. Entonces $b_0 < b_1 \leq b$ y para cada d tal que $b_0 \leq d < b_1$ se tiene que $c_d = a_0 + 1$ y por tanto,

$$e_d = (\mu t)[\forall v \leq d\, \exists \vec{z} \leq t\, \neg\theta'(a_0 + 1, v, \vec{z})].$$

  Sea $c = b_1 - b_0$ y consideremos la fórmula $\sigma(t, c)$

$$\begin{cases} \mathrm{Seq}(t) \wedge \mathrm{lg}(t) = c \wedge \\ \forall i < c \begin{cases} (t)_{i,0} = a_0 + 1 \wedge \\ \forall v \leq b_0 + i\, \exists \vec{z} \leq (t)_{i,1} \neg\theta'(a_0 + 1, v, \vec{z}) \end{cases} \end{cases}$$

  De nuevo es fácil comprobar que es una fórmula $\Pi_n(\mathbf{I}\Sigma_n)$ y además $\mathfrak{A} \models \exists t\, \sigma(t, c)$. Por tanto, existe $s_1 = (\mu t)(\sigma(t, c))$. Sea $p = \langle b_1, s_0 * s_1\rangle$. Entonces

$$\mathfrak{A} \models p \leq \langle b, s\rangle \wedge \mathcal{C}_\theta(a_0 + 1, p)$$

En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \delta(x, a, s, b)$. En particular, $\mathfrak{A} \models \delta(a, a, s, b)$, luego, puesto que $a \not< a$, $\mathfrak{A} \models \exists y \leq \langle b, s\rangle\, \mathcal{C}_\theta(x, y)$. Lo que prueba el aserto. □

Del aserto se sigue **(iii)**.

Usando (i), (ii) y (iii), probamos **(2)** como sigue,

$$\begin{array}{llll} \mathrm{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y) & \Longrightarrow & \mathrm{T} \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) & [\![\mathbf{T} \text{ tiene colección } \Delta_{n+1} \text{ y } \mathbf{(iii)}]\!] \\ & \Longrightarrow & C_\theta(x,y) \in \Gamma & [\![(\mathrm{ii})]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, C_\theta(x,y) & \\ & \Longrightarrow & \mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y) & [\![(\mathrm{i})]\!] \end{array}$$

(2)$\Longrightarrow$**(1)** Sea Γ un conjunto Π_n–funcional tal que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

En consecuencia, **T** tiene colección Δ_{n+1} ya que se verifica

$$\begin{array}{lll} \mathbf{T} & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* & [\![\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* \text{ es } \Pi_{n+2}\text{–axiomatizable y } (\bullet)]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) & [\![\mathrm{IV.5}\text{-}\mathbf{(2)}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \end{array}$$

Lo que completa la prueba del teorema. □

La demostración de este teorema es un ejemplo de la utilidad fundamental del esquema de colección, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, para obtener, dada una función total, otra monótona creciente que la acote. Podemos formular esto de manera más precisa como sigue:

Corolario IV.7 *Sea* **T** *una extensión consistente de* $\mathbf{I}\Delta_0$. *Las siguientes condiciones, son equivalentes:*

(1) **T** *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) **T** *es* Π_n*–funcional.*

(3) *Para cada* $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, *existe* $C_\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que*

- $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, C_\varphi(x,y) \wedge \mathrm{IPF}(C_\varphi)$
- $\mathbf{T} \vdash C_\varphi(x,y) \rightarrow \exists y' \leq y\, \varphi(x,y')$

Demostración:

(1)$\Longleftrightarrow$**(2)** Por IV.6.

(2)$\Longrightarrow$**(3)** Puede probarse tomando para cada fórmula $\varphi(x,y) \in \Pi_n$, tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, la fórmula C_φ construida en la prueba de IV.6.

(3)$\Longrightarrow$**(1)** Sea $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ tal que $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Sea $\psi(x,y) \in \Sigma_n$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \psi(x,y)$$

Entonces, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, (\varphi(x,y) \vee \neg\psi(x,y))$, luego por hipótesis, existe una fórmula $\theta(x,y) \in \Pi_n$ tal que

- $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, \theta(x,y) \wedge \mathrm{IPF}(\theta)$

- $\mathbf{T} \vdash \theta(x,y) \to \exists y' \leq y\,(\varphi(x,y') \vee \neg\psi(x,y'))$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y\, \varphi(x,y)$. Sea $b \in \mathfrak{A}$ verificando $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$. Entonces es fácil ver que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq b\, \varphi(x,y). \qquad \square$$

Nota IV.8 La condición IV.7–(**3**) tiene un cierto valor heurístico con respecto al problema de la equivalencia entre $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ y $\mathbf{UL\Delta}_{n+1}$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ y $\varphi(x,y) \in \Pi_n^-$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$. Sea $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ la aplicación definida por

$$F(a) = (\mu y)(\varphi(a,y))$$

Consideremos la cuestión: ¿Es total la función definida en $\mathfrak{A}$, por

$$G(x) = (\mu u)_{\leq x}[\forall v \leq x\,(F(v) \leq F(u))]?$$

Si para cada función F de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$, en las condiciones anteriores, la función G es total, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{UL\Delta}_{n+1}$. De este modo quedaría probado que $\mathbf{UI\Delta}_{n+1} \iff \mathbf{UL\Delta}_{n+1}$.

Nota IV.9 Sería interesante poder axiomatizar la propiedad de ser Π_n–funcional, es decir, encontrar una teoría $\mathbf{T}_0$ cuyas extensiones sean precisamente las teorías Π_n–funcionales. Sin embargo, como probaremos a continuación no existe tal teoría.

Aserto IV.9.1 Sea $\mathbf{T}_0$ una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma}_n$. Son equivalentes:

(**1**) Toda teoría $\mathbf{T}$, extensión de $\mathbf{T}_0$, es Π_n–funcional.

(**2**) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^- \subseteq \mathbf{T}_0$.

Demostración:

Por III.2 y IV.6, sólo será necesario probar (**1**) $\Longrightarrow$ (**2**). Razonamos por reducción al absurdo.

Sea θ un axioma de $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^-$ tal que $\mathbf{T}_0 \nvdash \theta$. Por [14], proposición 3.3, podemos suponer que θ es de la forma $\varphi \vee \psi$ con $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ y $\psi \in \Pi_{n+2}$, por tanto, la teoría

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \neg\varphi + \neg\psi$$

es consistente. Por hipótesis existe Γ, Π_n–funcional, tal que

$$\mathbf{T}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

y, puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^*)$ resulta:

$$\mathbf{T} \vdash \neg\varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^* \vdash \neg\varphi$$

Dado que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^* \vdash \varphi \vee \psi$, obtenemos

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^* \vdash \psi$$

Por tanto, $\mathbf{T} \vdash \psi$. Lo cual es una contradicción, ya que $\mathbf{T}$ es consistente y $\mathbf{T} \vdash \neg\psi$.

$\square$

Este resultado puede reformularse del siguiente modo:

Definición. Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$. Diremos que $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional minimal si para toda teoría $\mathbf{T}'$ son equivalentes:

(1) $\mathrm{T}' \Longleftrightarrow \mathrm{T}$

(2) Toda extensión consistente de $\mathbf{T}'$ es Π_n–funcional.

Ahora podemos reescribir IV.9.1 como sigue:

Aserto IV.9.2 Son equivalentes:

(1) T es una teoría Π_n–funcional minimal.

(2) $\mathrm{T} \Longleftrightarrow \mathrm{B}\Sigma_{n+1}^-$ □

Como consecuencia de este resultado no existe una teoría $\mathbf{T}_0$ tal que, para toda teoría $\mathbf{T}$, sean equivalentes

(–) $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional.

(–) $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{T}_0$.

En efecto, si existiese tal $\mathbf{T}_0$, necesariamente habría de ser Π_n–funcional minimal y, por IV.9.1, equivalente a $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^-$. Pero sabemos que $\mathbf{I\Sigma}_n$ tiene colección Δ_{n+1} y, en consecuencia es Π_n–funcional. Sin embargo, $\mathbf{I\Sigma}_n \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^-$.

Para terminar esta sección, presentamos algunas consecuencias más de IV.6

Corolario IV.10 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente tal que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}+\mathbf{B\Sigma}_{n+1})$. *Entonces* $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional.*

Demostración:
En efecto, puesto $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, es Π_n–funcional. Por tanto, existe un conjunto Π_n–funcional, Γ, tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Puesto que, por hipótesis $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T})$, resulta que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Por tanto, $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional. □

Como aplicación de este resultado podemos probar que $\mathbf{I\Pi}_1^-$ es Π_0–funcional:

Corolario IV.11 $\mathbf{I\Pi}_1^-$ *es* Π_0*–funcional.*

Demostración:
Utilizaremos que $\mathbf{I\Pi}_1^-$ es Σ_2-axiomatizable. Sea $\varphi \in \Pi_2$ tal que $\mathbf{B\Sigma}_1 + \mathbf{I\Pi}_1^- \vdash \varphi$. Sea $\psi \in \Sigma_2$ una conjunción de axiomas de $\mathbf{I\Pi}_1^-$ tal que $\mathbf{B\Sigma}_1 + \psi \vdash \varphi$. Entonces $\mathbf{B\Sigma}_1 \vdash \psi \rightarrow \varphi$ y puesto que $\psi \rightarrow \varphi \in \Pi_2$ obtenemos $\mathbf{I\Delta}_0 \vdash \psi \rightarrow \varphi$ y, por tanto, $\mathbf{I\Pi}_1^- \vdash \psi \rightarrow \varphi$. En consecuencia, $\mathbf{I\Pi}_1^- \vdash \varphi$. Este razonamiento prueba que $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{B\Sigma}_1 + \mathbf{I\Pi}_1^-) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Pi}_1^-)$. Luego, por IV.10, $\mathbf{I\Pi}_1^-$ es Π_0–funcional. □

Un razonamiento similar permite probar el siguiente resultado, más general:

Corolario IV.12 *Toda extensión consistente de* $\mathbf{I\Delta}_0$ *axiomatizable por fórmulas* Σ_2 *es* Π_0*–funcional. En particular,* $\mathbf{L\Delta}_1^-$ *e* $\mathbf{I\Delta}_1^-$ *son* Π_0*–funcionales.*

Demostración:
Si $\mathbf{I\Delta}_0 \subseteq \mathbf{T}$ es consistente y axiomatizable por fórmulas Σ_2 entonces $\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_1$ debe ser consistente ya que en caso contrario, existiría $\psi \in \Sigma_2$, conjunción finita de axiomas de $\mathbf{T}$, tal que $\mathbf{B\Sigma}_1 \vdash \neg\psi$, y puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{B\Sigma}_1) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Delta}_0)$, tendríamos $\mathbf{I\Delta}_0 \vdash \neg\psi$, lo que es absurdo, ya que por hipótesis $\mathbf{T}$ es una extensión consistente de $\mathbf{I\Delta}_0$.

Ahora, dada $\varphi \in \Pi_2$, cerrada y tal que $\mathbf{B\Sigma}_1 + \mathbf{T} \vdash \varphi$, existe $\psi \in \Sigma_2$ (conjunción finita de axiomas de $\mathbf{T}$) tal que $\mathbf{B\Sigma}_1 \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Puesto que esta última fórmula es Π_2, (de nuevo por el resultado de Π_2-conservación) resulta $\mathbf{I\Delta}_0 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, luego $\mathbf{T} \vdash \psi \rightarrow \varphi$ y, por tanto, $\mathbf{T} \vdash \varphi$. Esto prueba que $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{B\Sigma}_1 + \mathbf{T})$ y en consecuencia, por IV.10, $\mathbf{T}$ es Π_0–funcional. □

Corolario IV.13 $\mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ *tiene colección* Δ_1. □

Nota IV.14 No es posible generalizar IV.12 a $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ o a teorías Σ_{n+2}-axiomatizables, para $n > 0$. En concreto tenemos:

- $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ no es Π_n–funcional para $n > 0$, ya que si lo fuese entonces $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ debería ser una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$ y sabemos (véase [14]) que $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \not\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.
- Dado que $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ es Σ_{n+2} axiomatizable, no toda teoría Σ_{n+2}-axiomatizable es Π_n–funcional (para $n > 0$).

Sin embargo, podemos obtener un resultado aún más fuerte, utilizando la proposición III.40. Recordemos el enunciado de dicha proposición.

(–) $(n > 0)$ Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_{n+2}-axiomatizable tal que $\mathbb{N} \models \mathbf{T}$. Entonces

$$\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$$

Gracias a este resultado obtenemos:

Proposición IV.15 $(n > 0)$ *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría* Σ_{n+2}*-axiomatizable y tal que* $\mathbb{N} \models \mathbf{T}$*. Entonces* $\mathbf{T}$ *no es* Π_n*–funcional. En particular, para* $n > 0$*,* $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^-$ *e* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}^-$ *no son* Π_n*–funcionales.*

Demostración:
Si $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional, entonces $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$ en contradicción con III.40. □

En el caso de una teoría axiomatizable por fórmulas Π_{n+2} la condición dada en IV.10 se transforma en una nueva equivalencia:

Teorema IV.16 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente* Π_{n+2}*-axiomatizable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional.*

(2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$

Demostración:
Por IV.10, sólo debemos probar (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea Γ un conjunto Π_n–funcional tal que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Puesto que $\mathbf{T}$ e $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$ son Π_{n+2}-axiomatizables,

$$(\bullet) \qquad \mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^* &\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^* \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T} \qquad [\![(\bullet)]\!] \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) &= \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \\ &= \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma^*) \\ &= \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}) \end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado. □

Nota IV.17 Esta última equivalencia también es cierta para teorías Σ_{n+2}-axiomatizables, ya que puede probarse fácilmente que si $\mathbf{T}$ es una teoría consistente Σ_{n+2}-axiomatizable, entonces

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T})$$

Ahora bien, ¿existe alguna teoría Π_n–funcional que sea Σ_{n+2}-axiomatizable, ($n > 0$)?. Por IV.15 sabemos que si $\mathbf{T}$ es una tal teoría entonces $\mathbb{N} \not\models \mathbf{T}$.

Podemos intentar generalizar IV.16 a teorías que no sean Π_{n+2}-axiomatizables. Esto nos lleva a plantear el siguiente problema:

Sea $\mathbf{T}$ una teoría tal que $\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es consistente, ¿son equivalentes las siguientes condiciones?

(1) $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional

(2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$

(3) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^- + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$

IV.2 Fórmulas Δ_{n+1} como fórmulas acotadas

En esta sección y en la siguiente, proseguimos el estudio de las propiedades de los conjuntos Π_n–funcionales. En particular, veremos que, extendiendo convenientemente el lenguaje de la Aritmética, dado un conjunto Π_n–funcional, Γ, (bajo ciertas condiciones) las fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$ son equivalentes a fórmulas acotadas en el lenguaje extendido, lo que hace que esta clase de fórmulas sea cerrada bajo negación y cuantificación acotada. Esto proporciona otra prueba de la equivalencia

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*).$$

véase IV.42.

Definición IV.18 *Dado un conjunto Π_n–funcional, Γ, para cada $\varphi(x,y) \in \Gamma$ consideremos un nuevo símbolo de función 1-aria, G_φ. Denotaremos por $\mathcal{L}(\Gamma)$ al lenguaje que se obtiene al añadir al lenguaje de la Aritmética, $\mathcal{L}$, los símbolos de función G_φ, para todo $\varphi \in \Gamma$.*

Sea Δ_0^Γ la clase de las fórmulas acotadas de $\mathcal{L}(\Gamma)$. A partir de Δ_0^Γ, alternando cuantificadores de la manera habitual, se definen las clases de fórmulas Π_n^Γ, Σ_n^Γ. Sea $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ la teoría de lenguaje $\mathcal{L}(\Gamma)$ y axiomas:

$$\mathbf{P}^- + \Gamma^* + \{\mathbf{I}_\varphi : \ \varphi \in \Delta_0^\Gamma\} + \{\varphi(x,y) \leftrightarrow G_\varphi(x) = y : \ \varphi \in \Gamma\}$$

En general, si $\mathbf{T}$ es una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$, $\mathbf{T}_\Gamma$ denotará la extensión de $\mathbf{T}$ al lenguaje $\mathcal{L}(\Gamma)$ obtenida al añadir a los axiomas de $\mathbf{T}$, el conjunto de fórmulas

$$\{\varphi(x,y) \leftrightarrow G_\varphi(x) = y : \ \varphi \in \Gamma\}$$

Nota IV.19 Observemos que dados $\mathbf{T}$ y Γ como en la definición, $(\mathbf{T}+\Gamma^*)_\Gamma$ es una extensión por definiciones de $\mathbf{T}+\Gamma^*$ y, en consecuencia, se trata de una extensión conservativa.

Notación IV.20 Si Γ es un conjunto Π_n–funcional y $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}(\Gamma)$–estructuras, escribiremos $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ para indicar que $\mathfrak{A}$ es una subestructura n–elemental de $\mathfrak{B}$ con respecto al lenguaje $\mathcal{L}(\Gamma)$. Cuando queramos expresar que $\mathfrak{A}$ es una subestructura n–elemental de $\mathfrak{B}$, respecto del lenguaje de la aritmética, $\mathcal{L}$, escribiremos $\mathfrak{A} \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Con el objetivo de probar la equivalencia entre fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y fórmulas acotadas (en una extensión de $\mathcal{L}$, del tipo $\mathcal{L}(\Gamma)$), nuestro primer paso será probar el siguiente resultado:

Lema IV.21 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Se verifica:*

(1) *Para toda $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$, existen $\psi(\vec{x},z) \in \Sigma_n$, $\theta(\vec{x},z) \in \Pi_n$ y $t(\vec{x}) \in$ **Term**$(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que:*

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t(\vec{x})\,(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x},z) \leftrightarrow \theta(\vec{x},z))$$

(2) *Para todo $t(\vec{x}) \in$ **Term**$(\mathcal{L}(\Gamma))$, existe $\varphi(\vec{x},y) \in \Sigma_{n+1}$ tal que:*

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash t(\vec{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\vec{x},y)$$

(3) *Para toda* $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ *existe* $\theta \in \Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)$ *tal que:*

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

Demostración:
(1) Emplaremos un argumento similar al utilizado en [8], lema 1.30.

La prueba se realiza por inducción sobre la longitud de $\varphi(\vec{x})$. Primero consideraremos las fórmulas atómicas.

Caso 1: $s_1(\vec{x}) + s_2(\vec{x}) = y$.

Por hipótesis de inducción, para cada $i = 1, 2$, existen $\psi_i(\vec{x}, y, z) \in \Sigma_n$, $\theta_i(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ y $t_1(\vec{x}, y)$, $t_2(\vec{x}, y)$ términos de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t_i(\vec{x}, y)(s_i(\vec{x}) = y \leftrightarrow \psi_i(\vec{x}, y, z) \leftrightarrow \theta_i(\vec{x}, y, z)).$$

Sean $\psi(\vec{x}, y, z) \in \Sigma_n$ la fórmula

$$\exists u, v \leq z\, (\psi_1(\vec{x}, u, z) \wedge \psi_2(\vec{x}, v, z) \wedge u + v = y)$$

$\theta(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ una fórmula equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a

$$\exists u, v \leq z\, (\theta_1(\vec{x}, u, z) \wedge \theta_2(\vec{x}, v, z) \wedge u + v = y)$$

y $t(\vec{x})$ el término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ $s_1(\vec{x}) + s_2(\vec{x}) + t_1(\vec{x}, s_1(\vec{x})) + t_2(\vec{x}, s_2(\vec{x}))$.

Supongamos que $z \geq t(\vec{x})$. Entonces

(-) $s_i(\vec{x}),\ t_i(\vec{x}, s_i(\vec{x})) \leq t(\vec{x}) \leq z, \qquad i = 1, 2.$

(-) En $(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ tenemos que

$$\begin{aligned} s_1(\vec{x}) + s_2(\vec{x}) = y \ &\leftrightarrow\ \exists u, v \leq z\, (s_1(\vec{x}) = u \wedge s_2(\vec{x}) = v \wedge u + v = y) \\ &\leftrightarrow\ \exists u, v \leq z\, (\psi_1(\vec{x}, u, z) \wedge \psi_2(\vec{x}, v, z) \wedge u + v = y) \\ &\leftrightarrow\ \exists u, v \leq z\, (\theta_1(\vec{x}, u, z) \wedge \theta_2(\vec{x}, v, z) \wedge u + v = y) \end{aligned}$$

Caso 2: $s_1(\vec{x}) \cdot s_2(\vec{x}) = y$.

La prueba es similar a la del caso 1. Basta tomar $\psi(\vec{x}, y, z)$ como la fórmula

$$\exists u, v \leq z\, (\psi_1(\vec{x}, u, z) \wedge \psi_2(\vec{x}, v, z) \wedge u \cdot v = y)$$

y como $\theta(\vec{x}, y, z)$ una fórmula Π_n equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a

$$\exists u, v \leq z\, (\theta_1(\vec{x}, u, z) \wedge \theta_2(\vec{x}, v, z) \wedge u \cdot v = y).$$

Caso 3: $G_\varphi(s(\vec{x})) = y$.

Por hipótesis de inducción, existen $\psi'(\vec{x}, u, z) \in \Sigma_n$, $\theta'(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ y $t'(\vec{x}, u)$ término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t'(\vec{x}, u)\, (s(\vec{x}) = u \leftrightarrow \psi'(\vec{x}, u, z) \leftrightarrow \theta'(\vec{x}, u, z)).$$

Sea $\theta(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ una fórmula equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a

$$\exists u \leq z\,(\theta'(\vec{x}, u, z) \wedge \varphi(u, y))$$

$\psi(\vec{x}, y, z) \in \Sigma_n$ una fórmula equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a

$$\exists u \leq z\,(\psi'(\vec{x}, u, z) \wedge \forall v \leq z\,(\varphi(u, v) \rightarrow y = v))$$

y $t(\vec{x})$ el término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, $G_\varphi(s(\vec{x})) + s(\vec{x}) + t'(\vec{x}, s(\vec{x}))$.

Supongamos que $z \geq t(\vec{x})$ y $u = s(\vec{x})$. Entonces, en $(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ tenemos

(–) $t'(\vec{x}, u) = t'(\vec{x}, s(\vec{x})) \leq t(\vec{x}) \leq z$.

(–) $\varphi(u, y) \leftrightarrow \forall v \leq z\,(\varphi(u, v) \rightarrow y = v)$.

(–) $$\begin{aligned} G_\varphi(s(\vec{x})) = y \quad & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(\varphi(u, y) \wedge s(\vec{x}) = u) \\ & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(\theta'(\vec{x}, u, z) \wedge \varphi(u, y)) \\ & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(\psi'(\vec{x}, u, z) \wedge \forall v \leq z\,(\varphi(u, v) \rightarrow y = v)) \end{aligned}$$

Caso 4: $s_1(\vec{x}) = s_2(\vec{x})$.

Por hipótesis de inducción, para cada $i = 1,\ 2$, existen $\psi_i(\vec{x}, u, z) \in \Sigma_n$, $\theta_i(\vec{x}, u, z) \in \Pi_n$ y $t_1(\vec{x}, u)$, $t_2(\vec{x}, u)$ términos de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t_i(\vec{x}, u)\,(s_i(\vec{x}) = u \leftrightarrow \psi_i(\vec{x}, u, z) \leftrightarrow \theta_i(\vec{x}, u, z)).$$

Sean $\psi(\vec{x}, z) \in \Sigma_n$ la fórmula

$$\exists u \leq z\,(\psi_1(\vec{x}, u, z) \wedge \psi_2(\vec{x}, u, z)),$$

$\theta(\vec{x}, z) \in \Sigma_n$ una fórmula equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a

$$\exists u \leq z\,(\theta_1(\vec{x}, u, z) \wedge \theta_2(\vec{x}, u, z))$$

y $t(\vec{x})$ el término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ $s_1(\vec{x}) + s_2(\vec{x}) + t_1(\vec{x}, s_1(\vec{x})) + t_2(\vec{x}, s_2(\vec{x}))$.

Supongamos que $z \geq t(\vec{x})$. Entonces, en $(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ se tiene:

(–) $t_i(\vec{x}, s_i(\vec{x})) \leq t(\vec{x}) \leq z, \qquad i = 1, 2.$

(–) $$\begin{aligned} s_1(\vec{x}) = s_2(\vec{x}) \quad & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(s_1(\vec{x}) = u \wedge s_2(\vec{x}) = u) \\ & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(\psi_1(\vec{x}, u, z) \wedge \psi_2(\vec{x}, u, z)) \\ & \leftrightarrow \quad \exists u \leq z\,(\theta_1(\vec{x}, u, z) \wedge \theta_2(\vec{x}, u, z)) \end{aligned}$$

Caso 5: $s_1(\vec{x}) \leq s_2(\vec{x})$.

La prueba es similar a la del caso 4.

Esto prueba el resultado para fórmulas atómicas.

Caso 6: φ es $\varphi_1 \vee \varphi_2$.

Por hipótesis de inducción, para cada $i = 1,\ 2$, existen $\psi_i \in \Sigma_n$, $\theta_i \in \Pi_n$ y t_1, t_2 términos de $\mathcal{L}(\Gamma)$ verificando el resultado para φ_1 y φ_2, respectivamente. Entonces, $\psi(\vec{x}, z) \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, $\theta(\vec{x}, z) \equiv \theta_1 \vee \theta_2$ y $t_1 + t_2$ verifican el resultado para φ.

Caso 7: φ es $\neg\varphi_1$.

Por hipótesis de inducción existen $\psi \in \Sigma_n$, $\theta \in \Pi_n$ y t término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ verificando el resultado para φ_1. Entonces $\neg\psi$, $\neg\theta$ y t satisfacen el resultado para φ.

Caso 8: $\varphi(\vec{x})$ es $\exists y \leq s(\vec{x})\, \varphi'(\vec{x}, y)$.

Por hipótesis de inducción, existen $\psi'(\vec{x}, y, z) \in \Sigma_n$, $\theta'(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ y $t'(\vec{x}, y)$ término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, verificando el resultado para φ'. Sean $\psi_0(\vec{x}, y, z) \in \Sigma_n$, $\theta_0(\vec{x}, y, z) \in \Pi_n$ y $t_0(\vec{x}, y)$, un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, tales que

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t_0(\vec{x}, y)\, [y \leq s(\vec{x}) \leftrightarrow \psi_0(\vec{x}, y, z) \leftrightarrow \theta_0(\vec{x}, y, z)]$$

Sea $\psi(\vec{x}, z) \in \Sigma_n$ la fórmula $\exists y \leq z\, (\psi'(\vec{x}, y, z) \wedge \psi_0(\vec{x}, y, z))$, $\theta(\vec{x}, z) \in \Pi_n$ una fórmula equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ a $\exists y \leq z\, (\theta'(\vec{x}, y, z) \wedge \theta_0(\vec{x}, y, z))$ y $t(\vec{x})$ el término $s(\vec{x}) + t'(\vec{x}, s(\vec{x})) + t_0(\vec{x}, s(\vec{x}))$. Supongamos que $z \geq t(\vec{x})$. Entonces, en $(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ tenemos que

(–) $t'(\vec{x}, s(\vec{x})), t_0(\vec{x}, s(\vec{x})), s(\vec{x}) \leq t(\vec{x}) \leq z$

$$\begin{array}{lrcl} (-) & \exists y \leq s(\vec{x})\, \varphi'(\vec{x}, y) & \leftrightarrow & \exists y \leq z\, (y \leq s(\vec{x}) \wedge \varphi'(\vec{x}, y)) \\ & & \leftrightarrow & \exists y \leq z\, (\psi_0(\vec{x}, y, z) \wedge \psi'(\vec{x}, y, z)) \\ & & \leftrightarrow & \exists y \leq z\, (\theta_0(\vec{x}, y, z) \wedge \theta'(\vec{x}, y, z)) \end{array}$$

Esto prueba **(1)**.

(2) Es fácil por inducción sobre la longitud de $t(\vec{x})$.

(3) Sea $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$. Sean $\psi(\vec{x}, z) \in \Sigma_n$, $\theta(\vec{x}, z) \in \Pi_n$ y $t(\vec{x})$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que:

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t(\vec{x})\, (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}, z) \leftrightarrow \theta(\vec{x}, z))$$

Sea $\tau(\vec{x}, y) \in \Sigma_{n+1}$ tal que

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash t(\vec{x}) = y \leftrightarrow \tau(\vec{x}, y)$$

Entonces, en $(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$, se tiene:

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\vec{x}) & \leftrightarrow & \exists z\, (t(\vec{x}) = z \wedge \psi(\vec{x}, z)) & (\text{es decir } \psi(\vec{x}, t(\vec{x}))) \\ & \leftrightarrow & \exists z\, (\tau(\vec{x}, z) \wedge \psi(\vec{x}, z)) & (\in \Sigma_{n+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\vec{x}) & \leftrightarrow & \theta(\vec{x}, t(\vec{x})) & \\ & \leftrightarrow & \forall z\, (t(\vec{x}) = z \rightarrow \psi(\vec{x}, z)) & \\ & \leftrightarrow & \forall z\, (\tau(\vec{x}, z) \rightarrow \psi(\vec{x}, z)) & (\in \Pi_{n+1}) \end{array}$$

Por tanto, existe $\delta(\vec{x}) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)$ tal que:

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \delta(\vec{x})$$ □

En el caso $n = 0$ podemos obtener un resultado algo más fuerte con una demostración muy parecida, aunque ahora no será necesario utilizar colección ya que sólo manejamos cuantificadores acotados.

Lema IV.22 *Sea Γ un conjunto Π_0–funcional. Se verifica:*

(1) *Para toda $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ existen $\psi(\vec{x}, z) \in \Delta_0$ y $t(\vec{x}) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que:*

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t(\vec{x})\,(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}, z))$$

(2) *Para toda $t(\vec{x}) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$, existe $\varphi(\vec{x}, y) \in \Sigma_1$ tal que:*

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash t(\vec{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$$

(3) *Para toda $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ existe $\theta(\vec{x}) \in \Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$ tal que:*

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$ □

En general, si Γ es un conjunto Π_n–funcional, con $n \geq 1$, este lema podría no ser válido, aunque, como veremos más adelante, podemos obtener un resultado similar para un cierto tipo de conjuntos Π_n–funcionales.

Dado un conjunto Π_n–funcional, Γ, la teoría $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ tiene propiedades muy similares a $\mathbf{I}\Delta_0$ (en realidad, podemos considerar $\mathbf{I}\Delta_0$ como un caso particular, para $\Gamma = \emptyset$). En concreto, siguiendo razonamientos bastante típicos para teorías de inducción acotada (véase por ejemplo [8], capítulos I y V) obtenemos los siguientes resultados.

Lema IV.23 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Se verifica:*

(1) $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \iff \mathbf{L}\Delta_0^\Gamma$

(2) $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ *es Π_{n+1}^Γ-axiomatizable.*

Demostración:

(1) La prueba es similar a la demostración de $\mathbf{I}\Delta_0 \iff \mathbf{L}\Delta_0$.

(2) Por definición,

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma = \mathbf{P}^- + \Gamma^* + \{\mathbf{I}_\varphi : \ \varphi \in \Delta_0^\Gamma\} + \{\varphi(x,y) \leftrightarrow G_\varphi(x) = y : \ \varphi \in \Gamma\}$$

Sabemos que $\mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi : \ \varphi \in \Delta_0^\Gamma\}$ es Π_1^Γ-axiomatizable (la prueba es similar a la utilizada para probar que $\mathbf{I}\Delta_0$ es Π_1-axiomatizable y proporciona una teoría equivalente de la forma $\mathbf{P}^- + \{\hat{\mathbf{I}}_\varphi : \ \varphi \in \Delta_0^\Gamma\}$, con $\hat{\mathbf{I}}_\varphi \in \Pi_1^\Gamma$). Además, para cada $\varphi \in \Gamma$, la fórmula

$$\varphi(x,y) \leftrightarrow G_\varphi(x) = y$$

es Π_{n+1}^Γ y gracias a esta equivalencia IPF(φ) puede expresarse como:

$$x_1 \leq x_2 \rightarrow G_\varphi(x_1) \leq G_\varphi(x_2).$$

Entonces $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ es equivalente a la teoría $\mathbf{T}$ dada por

$$\begin{array}{rll} \mathbf{T} = \mathbf{P}^- & + & \{x_1 \leq x_2 \rightarrow G_\varphi(x_1) \leq G_\varphi(x_2) : \ \varphi \in \Gamma\} \\ & + & \{\hat{\mathbf{I}}_\varphi : \ \varphi \in \Delta_0^\Gamma\} \\ & + & \{\varphi(x,y) \leftrightarrow G_\varphi(x) = y : \ \varphi \in \Gamma\} \end{array}$$

y claramente $\mathbf{T} \subseteq \Pi_{n+1}^\Gamma$. □

Lema IV.24 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Entonces*

$$(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma.$$

Demostración:
Sean $\varphi(x) \in \Delta_0^\Gamma$ y $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$. Por IV.21, existen $\psi(x,z) \in \Sigma_n$ y un término $t(x)$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que:

$$(\mathbf{B}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall z \geq t(x)\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x,z)).$$

Sean $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ y $b = t(a)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \psi(a,b)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, existe $c \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models c = (\mu x)(\psi(x,b)).$$

Puesto que Γ es Π_n–funcional y $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$, $\mathfrak{A} \models x \leq x' \to t(x) \leq t(x')$; luego,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x,b))$$

En consecuencia, $\mathfrak{A} \models c = (\mu x)(\varphi(x))$. Así $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}_\varphi$. □

En el caso $n = 0$, este último resultado nos da:

Lema IV.25 *Sea Γ un conjunto Π_0–funcional. Entonces*

(1) $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \Longleftrightarrow (\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$

(2) $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ *es una extensión conservativa de* $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*$. □

Otro resultado es la siguiente versión en $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$, del bien conocido teorema de Parikh, (ver I.8).

Lema IV.26 *Sea Γ un conjunto Π_0–funcional y $\Theta \subseteq \Pi_1^\Gamma$ un conjunto de fórmulas cerradas. Para cada $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma + \Theta \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y}\, \varphi(\vec{x},\vec{y})$, existe un término $t(\vec{x})$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que*

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma + \Theta \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y} \leq t(\vec{x})\, \varphi(\vec{x},\vec{y})$$

Demostración:
Puede adaptarse fácilmente la prueba presentada, por ejemplo, en [8], Cap. V. En cualquier caso, véase la prueba de IV.35. □

Como consecuencia de esta versión del teorema de Parikh, obtenemos el siguiente resultado

Lema IV.27 *Sean Γ un conjunto Π_0–funcional, $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ cuyos axiomas son fórmulas Π_1^Γ y $\varphi(x) \in \Delta_1^\Gamma(\mathbf{T})$. Entonces existe una fórmula $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que*

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \theta(x)$$

Demostración:
Sean $\varphi'(\vec{x},\vec{y})$, $\psi'(\vec{x},\vec{z}) \in \Delta_0^\Gamma$ tales que $\varphi(\vec{x})$ es $\exists\vec{y}\,\varphi'(\vec{x},\vec{y})$, y

$$\mathbf{T} \vdash \exists\vec{y}\,\varphi'(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \forall\vec{z}\,\psi'(\vec{x},\vec{z})$$

Sea $\delta(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula $\varphi'(\vec{x},\vec{y}) \vee \neg\psi'(\vec{x},\vec{z})$. Entonces $\mathbf{T} \vdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\exists\vec{z}\,\delta(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Por IV.26, existe $t(\vec{x})$ término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y},\vec{z} \leq t(\vec{x})\,\delta(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

Por tanto, $\mathbf{T} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists\vec{y} \leq t(\vec{x})\,\varphi'(\vec{x},\vec{y})$. Puesto que $\exists\vec{y} \leq t(\vec{x})\,\varphi'(\vec{x},\vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$, esto completa la prueba del lema. □

Como un caso particular, obtenemos el siguiente resultado, que complementa IV.22–(3).

Lema IV.28 *Sea Γ un conjunto Π_0–funcional. Si $\varphi(x) \in \Delta_1(I\Delta_0 + \Gamma^*)$, entonces existe $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que*

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \theta(x)$$

Demostración:
Es un caso particular del lema IV.27. □

IV.3 Conjuntos fuertemente Π_n–funcionales

Para extender los resultados IV.22, IV.24–IV.28 de la sección anterior al caso $n > 0$, debemos reforzar el concepto de conjunto Π_n–funcional. Por ello en esta sección definimos un nuevo tipo de conjuntos Π_n–funcionales que permitirá extender dichos resultados y será muy útil en los capítulos siguientes.

Definición IV.29 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional. Diremos que Γ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional si, para cada $\mathfrak{A} \models I\Delta_0 + \Gamma^*$, numerable, e $I \subset^e \mathfrak{A}$, se tiene:*

$$(\forall\varphi \in \Gamma,\ \forall a \in I,\ \exists b \in I,\ \mathfrak{A} \models \varphi(a,b)) \implies I \prec_n^e \mathfrak{A}$$

Es decir,

$$I \subset^e \mathfrak{A} \text{ como } \mathcal{L}(\Gamma)\text{–estructuras} \implies I \prec_n^e \mathfrak{A} \text{ como } \mathcal{L}\text{–estructuras}$$

Nota IV.30

(1) Todo conjunto Π_0–funcional es fuertemente Π_0–funcional.

(2) Si Γ_1 es fuertemente Π_n–funcional y Γ_2 es un conjunto Π_n–funcional tal que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces Γ_2 es fuertemente Π_n–funcional.

Lema IV.31 ($n > 0$) *Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n-funcional. Entonces*

(1) $\forall k < n$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*)$

(2) $\forall k < n$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$

Demostración:
(1) Por reducción al absurdo, dada $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in \Pi_n$, tal que $\mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^* \vdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ supongamos que $\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^* \nvdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{y})$. Entonces, puesto que $(\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*)_\Gamma$ es una extensión conservativa de $\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*$,

$$(\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*)_\Gamma \nvdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{y})$$

Consideremos la teoría

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*)_\Gamma + \vec{\mathbf{c}} + \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{\mathbf{c}}, \vec{y}) + \mathbf{d} + \{t(\vec{\mathbf{c}}) < \mathbf{d} : \ t(\vec{x}) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma)\}$$

donde $\vec{\mathbf{c}}$ y $\mathbf{d}$ son nuevas constantes. Por el teorema de compacidad $\mathbf{T}$ es consistente. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $\vec{a} = \mathfrak{A}(\vec{\mathbf{c}})$. Sea $\mathfrak{B}$ el segmento inicial de $\mathfrak{A}$ determinado por el conjunto

$$\{t(\vec{a}) : \ t(\vec{x}) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma)\}$$

Por ser Γ un conjunto Π_n–funcional, $\mathfrak{B} \subset^e \mathfrak{A}$, y gracias al esquema de axiomas referentes a $\mathbf{d}$ podemos garantizar que es una subestructura propia de $\mathfrak{A}$. En consecuencia, puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*$ y Γ es fuertemente Π_n–funcional, por definición, obtenemos $\mathfrak{B} \prec^e_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$. Por tanto, $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*$. Al ser $k < n$, $\mathfrak{B} \prec^e_{k+1,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$ y como $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_k$ esto nos da $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{k+2}$. Así, $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^*$.

Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{a}, \vec{y})$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in \Pi_n$ y $\mathfrak{B} \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$, entonces

$$\mathfrak{B} \models \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{a}, \vec{y})$$

Lo que está en contradicción con $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^*$ y $\mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^* \vdash \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

(2) Por (1), para cada $k < n$ las Π_{n+2}-consecuencias de $\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*$ y las de $\mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^*$ son las mismas. Sea $\theta \in \Pi_{n+2}$ cerrada. Probaremos por inducción sobre $k < n$ que

$$\forall k < n, \quad \mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^* \vdash \theta \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \theta$$

Si $k = 0$ basta aplicar el apartado anterior.
Supuesto para $k < n$, donde $k + 1 < n$. Se tiene:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{B}\Sigma_{k+3} + \Gamma^* \vdash \theta & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_{k+1} + \Gamma^* \vdash \theta & [\![\text{por } (1),\ k+1 < n]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B}\Sigma_{k+2} + \Gamma^* \vdash \theta & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \theta & [\![\text{Hip. Ind.}]\!] \end{array}$$

Lo que prueba (2). □

Como consecuencia de este resultado obtenemos

Teorema IV.32 (Extensión de IV.24 y IV.25)
Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional. Entonces:

(1) $I\Delta_0 + \Gamma^* \iff I\Sigma_n + \Gamma^*$

(2) $I\Delta_0^\Gamma \iff (I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \iff (I\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$

(3) $I\Delta_0^\Gamma$ *es una extensión conservativa de* $I\Delta_0 + \Gamma^*$. □

Demostración:
(1) Para $n = 0$ el resultado es trivial. Si $n > 0$, por IV.31–(2), para el caso particular $k = n - 1$, dada $\theta \in \Pi_{n+2}$ cerrada

$$B\Sigma_{n+1} + \Gamma^* \vdash \theta \iff I\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \theta$$

Puesto que $I\Sigma_n + \Gamma^*$ es un conjunto de fórmulas Π_{n+2} esto nos da

$$I\Delta_0 + \Gamma^* \iff I\Sigma_n + \Gamma^*$$

(2) $(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$ y $(I\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$ son extensiones por definiciones luego, por (1),

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \iff (I\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma$$

Por IV.24, $(I\Sigma_n + \Gamma^*)_\Gamma \Longrightarrow I\Delta_0^\Gamma$. Lo que concluye la prueba de (2).
(3) se obtiene de (1) y (2) teniendo en cuenta que $(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$ es una extensión conservativa de $I\Delta_0 + \Gamma^*$. □

Gracias a este resultado podemos extender IV.22 del siguiente modo:

Lema IV.33 (Extensión de IV.22)
Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional, $n \geq 1$. Entonces

(1) *Dada $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$, existen $\psi(\vec{x}, z) \in \Sigma_n$, $\theta(\vec{x}, z) \in \Pi_n$ y $t(\vec{x}) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que:*

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \forall z \geq t(\vec{x})\, (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}, z) \leftrightarrow \theta(\vec{x}, z))$$

(2) *Dado $t(\vec{x}) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$, existe $\varphi(\vec{x}, y) \in \Sigma_{n+1}$ tal que:*

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash t(\vec{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$$

(3) *Dada $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ existe $\theta \in \Delta_{n+1}(B\Sigma_n + \Gamma^*)$ tal que:*

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

Demostración:
Es consecuencia directa de IV.21 y de IV.32. □

Corolario IV.34 (Extensión de IV.4 y IV.5)
Sea Γ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional. Entonces

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$

(2) $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)$

Demostración:
(1) Para $n = 0$ el resultado es consecuencia de IV.4. Para $n > 0$ es consecuencia de IV.31–(2) aplicado a $k = n - 1$.

(2) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*$ es débilmente PK–Δ_{n+1}, puesto que tiene colección Δ_{n+1} y, en consecuencia,

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)$$

Para probar la implicación restante, observemos que por IV.32–(1),

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^* \implies \mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$$

y por IV.5, $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$ tiene inducción Δ_{n+1}, luego por IV.4 y II.3

$$\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^* \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{T})$$

lo que termina la prueba del corolario. □

Teorema IV.35 (de Parikh, extensión de IV.26)
Sean Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional y $\Theta \subseteq \Pi_{n+1} \cup \Pi_1^\Gamma$ un conjunto de fórmulas cerradas. Para cada $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in \Pi_n \cup \Delta_0^\Gamma$ tal que $(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Theta + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y}\, \varphi(\vec{x}, \vec{y})$, existe un término $t(\vec{x})$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$(\mathbf{I}\Delta_0 + \Theta + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y} \leq t(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}, \vec{y})$$

Demostración:
Es similar a la del lema IV.31. Por reducción al absurdo, si no existe tal término, entonces, por el teorema de compacidad, la teoría $\mathbf{T}$ dada por

$$\begin{array}{rcccl} (\mathbf{I}\Sigma_k + \Gamma^*)_\Gamma + \Theta & + & \vec{\mathbf{c}} & + & \{\forall \vec{y} \leq t(\vec{\mathbf{c}})\, \neg\varphi(\vec{\mathbf{c}}, \vec{y}) :\ t(\vec{x}) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma)\} \\ & + & \mathbf{d} & + & \{t(\vec{\mathbf{c}}) < \mathbf{d} :\ t(\vec{x}) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma)\} \end{array}$$

es consistente. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $\vec{a} = \mathfrak{A}(\vec{\mathbf{c}})$. Sea $\mathfrak{B}$ el segmento inicial de $\mathfrak{A}$ determinado por el conjunto

$$\{t(\vec{a}) :\ t(\vec{x}) \text{ término de } \mathcal{L}(\Gamma)\}$$

Entonces

(a) $\mathfrak{B} \subset^e \mathfrak{A}$ propia (como $\mathcal{L}(\Gamma)$–estructuras) y

(b) $\mathfrak{B} \prec^e_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$ (por ser Γ fuertemente Π_n–funcional).

(c) $\mathfrak{B} \models \Theta$ (ya que $\Theta \subseteq \Pi_1^\Gamma \cup \Pi_{n+1}$ y $\mathfrak{A} \models \Theta$).

Puesto que $\mathfrak{A} \models I\Delta_0^\Gamma$, por IV.32, $\mathfrak{A} \models I\Sigma_n$, luego por **(b)**, $\mathfrak{B} \models B\Sigma_{n+1}$. Dado que $\mathfrak{B} \models \Gamma^*$, por **(b)** y **(c)** obtenemos que

$$(\bullet) \qquad \mathfrak{B} \models (B\Sigma_{n+1} + \Theta + \Gamma^*)_\Gamma$$

Puesto que $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_n \cup \Delta_0^\Gamma$, de la definición de $\mathfrak{B}$, junto con **(a)** y **(b)**, se deduce que $\mathfrak{B} \models \forall \vec{y}\, \varphi(\vec{a},\vec{y})$, lo que está en contradicción con $(\bullet)$. □

Lema IV.36 (Extensión de IV.27)
Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional y $\mathbf{T}$ una extensión de $I\Delta_0^\Gamma$ de la forma $I\Delta_0^\Gamma + \Theta$, donde $\Theta \subseteq \Pi_{n+1} \cup \Pi_1^\Gamma$. Sea $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_1^\Gamma$ tal que existe $\psi(\vec{x}) \in \Pi_1^\Gamma$ verificando:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}).$$

Entonces, existe $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \theta(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}).$$

Demostración:
Es similar a la de IV.27 usando ahora IV.35. □

Lema IV.37 $(n > 0)$ *Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n-funcional. Entonces*
(1) *Para cada $\varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_{n-1}$, existe un término $t(\vec{x})$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que*

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \exists \vec{y}\, \varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \exists \vec{y} \le t(\vec{x})\, \varphi_1(\vec{x},\vec{y})$$

(2) *Para cada $\varphi_2(\vec{x},\vec{y}) \in \Sigma_{n-1}$, existe un término $t(\vec{x})$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que*

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall \vec{y}\, \varphi_2(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \forall \vec{y} \le t(\vec{x})\, \varphi_2(\vec{x},\vec{y})$$

Demostración:
(1) Sean $\varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_{n-1}$ y $\psi(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_n$ la fórmula

$$\varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \vee (\forall \vec{y}\, \neg\varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \wedge \vec{y} = \vec{0}).$$

Entonces $(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y}\, \psi(\vec{x},\vec{y})$; luego, por IV.35, existe $t(\vec{x})$ término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \forall \vec{x}\, \exists \vec{y} \le t(\vec{x})\, \psi(\vec{x},\vec{y}).$$

Por tanto,

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \exists \vec{y}\, \varphi_1(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \exists \vec{y} \le t(\vec{x})\, \varphi_1(\vec{x},\vec{y})$$

(2) Si $\varphi_2(\vec{x},\vec{y}) \in \Sigma_{n-1}$, entonces $\neg\varphi_2(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_{n-1}$. Por el apartado **(1)**, existe $t(\vec{x})$ tal que

$$(I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma \vdash \exists \vec{y}\, \neg\varphi_2(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \exists \vec{y} \le t(\vec{x})\, \neg\varphi_2(\vec{x},\vec{y})$$

lo que, tomando negaciones, nos da la equivalencia buscada. □

Teorema IV.38 (Extensión de IV.28)
Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional y $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$. Entonces existe $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

Demostración:
Supongamos que $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists \vec{y}\, \varphi'(\vec{x}, \vec{y})$, con $\varphi'(\vec{x}, \vec{y}) \in \Pi_n$, y tomemos $\psi(\vec{x}) \equiv \forall \vec{y}\, \psi'(\vec{x}, \vec{y})$, con $\psi'(\vec{x}, \vec{y}) \in \Sigma_n$, tales que

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^* \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}).$$

Aplicando reiteradamente el lema IV.37 se demuestra la existencia de $\psi_1(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$ y $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$ tales que

$$(\bullet) \qquad \mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \psi'(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \psi_1(\vec{x}, \vec{y}) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi'(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \varphi_1(\vec{x}, \vec{y})$$

Para explicitar este hecho un poco más, supongamos que φ' y ψ' pueden escribirse, respectivamente, como

$$\forall \vec{z}_1\, \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n) \quad \text{y} \quad \exists \vec{z}_1\, \forall \vec{z}_2 \ldots \forall \vec{z}_n\, \psi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$$

(suponemos n par) con $\varphi_0, \psi_0 \in \Delta_0$, de tal modo que

(–) $\varphi(\vec{x})$ es $\exists \vec{y}\, \forall \vec{z}_1\, \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$

(–) $\psi(\vec{x})$ es $\forall \vec{y}\, \exists \vec{z}_1\, \forall \vec{z}_2 \ldots \forall \vec{z}_n\, \psi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$

y, por tanto,

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \exists \vec{y}\, \forall \vec{z}_1\, \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n) \leftrightarrow \forall \vec{y}\, \exists \vec{z}_1\, \forall \vec{z}_2 \ldots \forall \vec{z}_n\, \psi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$$

Entonces por IV.37, existen $t_1(\vec{x}, \vec{y})$, $t_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1), \ldots, t_n(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1})$, términos de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tales que:

(–) $\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \forall \vec{z}_1\, \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n) \leftrightarrow \forall \vec{z}_1 \leq t_1(\vec{x}, \vec{y})\, \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$

(–) $\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \exists \vec{z}_2 \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n) \leftrightarrow \exists \vec{z}_2 \leq t_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1) \ldots \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$

(–) $\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \exists \vec{z}_n\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n) \leftrightarrow \exists \vec{z}_n \leq t_n(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1})\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$

Por tanto, podemos tomar como $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula

$$\forall \vec{z}_1 \leq t_1(\vec{x}, \vec{y})\, \exists \vec{z}_2 \leq t_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_2) \ldots \exists \vec{z}_n \leq t_n(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1})\, \varphi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$$

Razonamientos similares permiten obtener la fórmula $\psi_1(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$. En consecuencia, por $(\bullet)$,

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \psi(\vec{x}) \leftrightarrow \forall \vec{y}\, \psi_1(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \exists \vec{y}\, \varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$$

donde $\exists \vec{y}\, \varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) \in \Sigma_1^\Gamma$. Por el lema IV.36, existe $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \exists \vec{y}\, \varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$$

Luego $\mathrm{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})$, donde $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$. $\square$

IV.4 Existencia de conjuntos fuertemente Π_n–funcionales

En esta sección probaremos la existencia de conjuntos fuertemente Π_n–funcionales.

Proposición IV.39 *Para cada $n \geq 1$, existe un conjunto fuertemente Π_n–funcional, $\mathbb{H}_n$, tal que:*

(1) *Para toda $\varphi \in \mathbb{H}_n$, se tiene:*
  (a) $\mathbf{I\Sigma}_{n-1} \vdash \mathrm{IPF}(\varphi)$
  (b) $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x\, \exists w\, \varphi(x,y)$

(2) $\mathbf{I\Sigma}_n \iff \mathbf{I\Sigma}_n + \mathbb{H}_n^*$

Demostración:
Para cada $\theta(v,y) \in \Pi_{n-1}$ consideremos la fórmula $\theta'(x,w)$ definida como

$$(\neg\exists v \leq x\, \exists y\, \theta(v,y) \wedge w = 0) \vee$$
$$\left\{\begin{array}{l} \exists w_1, w_2 \leq w\, (w = \langle w_1, w_2\rangle) \wedge \\ \forall w_1, w_2 \leq w \left[w = \langle w_1, w_2\rangle \to \left\{\begin{array}{l} w_1 \leq x \wedge \theta(w_1,w_2) \wedge \\ \forall v \leq x \left\{\begin{array}{l} (\exists y\, \theta(v,y) \to \exists y \leq w_2\, \theta(v,y)) \wedge \\ (\theta(v,w_2) \to \langle v, w_2\rangle \leq w) \end{array}\right. \end{array}\right. \right] \end{array}\right.$$

Una foma equivalente de expresar el significado de esta fórmula es

$$\left\{\begin{array}{l} (\neg\exists v \leq x\, \exists y\, \theta(v,y) \wedge w = 0) \vee \\ \exists w_1, w_2 \leq w \left\{\begin{array}{l} w = \langle w_1, w_2\rangle \wedge w_1 \leq x \wedge \theta(w_1,w_2) \wedge \\ \forall v \leq x \left\{\begin{array}{l} (\exists y\, \theta(v,y) \to \exists y \leq w_2\, \theta(v,y)) \wedge \\ (\theta(v,w_2) \to \langle v, w_2\rangle \leq w) \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Es fácil ver que $\theta'(x,w)$ es equivalente en $\mathbf{I\Sigma}_{n-1}$ a una fórmula $\widetilde{\theta}(x,w) \in \Pi_n$ tal que:

(i) $\mathbf{I\Sigma}_{n-1} \vdash \mathrm{IPF}(\widetilde{\theta}) \wedge \forall x \forall w\, (\theta'(x,w) \leftrightarrow \widetilde{\theta}(x,w))$.

(ii) $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x\, \exists w\, \widetilde{\theta}(x,w)$.
Para probar esto último, sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, $a \in \mathfrak{A}$. Puesto que, por I.5, $\mathfrak{A} \models \mathbf{S\Pi}_{n-1}$, entonces
$$\mathfrak{A} \models \exists w_2 \forall v \leq a\, (\exists y\, \theta(v,y) \to \exists y \leq w_2\, \theta(v,y))$$
Sea $b_2 \in \mathfrak{A}$ el menor de tales w_2 (existe pues $\mathbf{I\Sigma}_n \Longrightarrow \mathbf{L\Pi}_n$). Por otra parte,
$$\mathfrak{A} \models \forall v \leq a\, \exists w[(\theta(v,b_2) \wedge w = \langle v, b_2\rangle) \vee (\neg\theta(v,b_2) \wedge w = 0)]$$
Utilizando ahora colección Σ_n, obtenemos:
$$\mathfrak{A} \models \exists z \forall v \leq a\, \exists w \leq z[(\theta(v,b_2) \wedge w = \langle v, b_2\rangle) \vee (\neg\theta(v,b_2) \wedge w = 0)]$$
y si tomamos $b \in \mathfrak{A}$ como el menor de tales z, entonces $\mathfrak{A} \models \widetilde{\theta}(a,b)$. Lo que prueba (ii).

Si repetimos la construción anterior para cada $\theta(v,y) \in \Pi_{n-1}$, obtenemos el conjunto

$$\mathbb{H}_n = \{\widetilde{\theta}(x,w) : \theta(x,y) \in \Pi_{n-1}\}$$

Teniendo en cuenta **(i)** y **(ii)**, $\mathbb{H}_n$ es Π_n–funcional y además

$$\mathbf{I}\Sigma_n \iff \mathbf{I}\Sigma_n + \mathbb{H}_n^*.$$

Observemos también que para todo $n \geq 1$, $\mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{H}_{n+1}$.

Probemos ahora, por inducción en $n \geq 1$ que cada $\mathbb{H}_n$ es fuertemente Π_n–funcional.

Para $n = 1$, sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbb{H}_1^*$ e $I \subset^e \mathfrak{A}$. Supongamos que

$$(\star) \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_1,\ \forall a \in I,\ \exists b \in I,\ \mathfrak{A} \models \varphi(a,b)$$

Probaremos que $I \prec_1^e \mathfrak{A}$ usando el test de Tarski-Vaught. Sean $\theta(x,y) \in \Pi_0$ y $a \in I$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \theta(a,y)$ (por ser $I \models \mathbf{I}\Delta_0$, podemos suponer que θ sólo tiene un parámetro). Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists! w\, \widetilde{\theta}(x,w)$, usando $(\star)$, existe $d \in I$ (ya que $a \in I$) tal que $\mathfrak{A} \models \widetilde{\theta}(a,d)$. Por definición de $\widetilde{\theta}(x,w)$ (recordemos que $\mathbf{I}\Delta_0 \vdash \theta' \leftrightarrow \widetilde{\theta}$) existe $b \leq d$, tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$; luego, $b \in I$. En consecuencia, existe $b \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$.

Supuesto para n, sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbb{H}_{n+1}^*$ e $I \subset^e \mathfrak{A}$. Supongamos que

$$(\star\star) \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_{n+1},\ \forall a \in I,\ \exists b \in I,\ \mathfrak{A} \models \varphi(a,b)$$

Como en el caso anterior, usamos el test de Tarski-Vaught, para probar que $I \prec_{n+1}^e \mathfrak{A}$. Sean $\theta(x,y) \in \Pi_n$ y $a \in I$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \theta(a,y)$. Puesto que, por hipótesis de inducción, $\mathbb{H}_n$ es fuertemente Π_n–funcional, por IV.32–**(2)**, sabemos que $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbb{H}_n^* \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, luego por **(i)**,

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{IPF}(\widetilde{\theta}) \wedge \forall x\, \forall w\, (\theta'(x,w) \leftrightarrow \widetilde{\theta}(x,w))$$

Según esto último, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists! w\, \widetilde{\theta}(x,w)$; luego, como en el caso $n = 1$, usando ahora $(\star\star)$, existe $d \in I$ (ya que $a \in I$) tal que

$$\mathfrak{A} \models \widetilde{\theta}(a,d)$$

Por definición de $\widetilde{\theta}(x,w)$, existe $b \leq d$, tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$; luego, $b \in I$. En consecuencia, existe $b \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$. □

Teorema IV.40 (Extensión de IV.6)
Para cada teoría $\mathbf{T}$, *con colección* Δ_{n+1}, *existe* $\Gamma \subseteq \Pi_n$, *fuertemente* Π_n*–funcional tal que:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)$$

Demostración:
Para $n = 0$, teniendo en cuenta IV.6, no hay nada nuevo que probar, ya que todo conjunto Π_0–funcional es fuertemente Π_0–funcional. Por tanto, supondremos que $n \geq 1$.

Sea $\mathbb{H}_n$ el conjunto fuertemente Π_n–funcional definido en la proposición IV.39. Obsérvese que $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbb{H}_n^*$, luego, puesto que $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbb{H}_n^*$.

Sea Φ un conjunto Π_n–funcional tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Phi^*)$$

Sea $\Gamma = \Phi \cup \mathbb{H}_n$. Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbb{H}_n^*$ y Φ es Π_n–funcional, es fácil comprobar que Γ es Π_n–funcional. De hecho, por IV.30, Γ es fuertemente Π_n–funcional por serlo $\mathbb{H}_n$. Además:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*) & = & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbb{H}_n^* + \Phi^*) & \\ & = & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbb{H}_n^* + \Phi^*) & [\![\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbb{H}_n^* \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbb{H}_n^* \text{ (por IV.32)}]\!] \\ & = & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Phi^*) & [\![\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbb{H}_n^*]\!] \\ & = & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & \end{array}$$

Lo que termina la prueba del teorema. □

Usando este último teorema podemos aumentar nuestra lista de caracterizaciones de las teorías con colección Δ_{n+1}:

Teorema IV.41 (Extensión de IV.7)
Son equivalentes:

(1) $\mathbf{T}$ *tiene colección* Δ_{n+1}.

(2) $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional*

(3) *Existe* Γ *fuertemente* Π_n*–funcional tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$$

(4) *Para cada* $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, *existe* $\mathcal{C}_\varphi(x,y) \in \Pi_n$ *tal que*

- $\mathbf{T} \vdash \forall x \exists! y\, \mathcal{C}_\varphi(x,y) \wedge \mathrm{IPF}(\mathcal{C}_\varphi)$
- $\mathbf{T} \vdash \mathcal{C}_\varphi(x,y) \to \exists y' \leq y\, \varphi(x,y')$ □

Nota IV.42 Usando las propiedades de los conjuntos fuertemente Π_n–funcionales se obtiene una nueva prueba de la equivalencia,

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

para cualquier conjunto fuertemente Π_n–funcional, Γ.

En efecto, sólo debemos probar

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*) \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Sean $\varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\Sigma_n + \Gamma^*)$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{L}_\varphi$, es decir, no existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a) \wedge \forall z < a\, \neg\varphi(z)$$

Entonces, es fácil comprobar que

$$(\bullet) \qquad \mathfrak{A} \models \forall z \leq 0 \neg\varphi(z) \wedge \forall x\,(\forall z \leq x \neg\varphi(z) \rightarrow \forall z \leq x+1 \neg\varphi(z))$$

Por IV.38 existe $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \theta(x)$$

Puesto que la fórmula $\forall z \leq x \neg\theta(z) \in \Delta_0^\Gamma$, por IV.33, existe $\psi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$ tal que

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \forall z \leq x \neg\theta(z) \leftrightarrow \psi(x)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma \vdash \forall z \leq x \neg\varphi(z) \leftrightarrow \psi(x)$$

Puesto que $\mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ es una extensión conservativa de $\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*$, esto prueba que

$$\forall z \leq x \neg\varphi(z) \in \Delta_{n+1}^*(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Por II.5, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}^*(\mathbf{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$, luego teniendo en cuenta $(\bullet)$, resulta $\mathfrak{A} \models \forall x \forall z \leq x \neg\varphi(z)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x \neg\varphi(x)$, en contradicción con la hipótesis $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$.

Capítulo V

Π_n–envolturas

En el capítulo IV hemos introducido los conjuntos Π_n–funcionales para estudiar las Π_{n+2}–consecuencias de una teoría $\mathbf{T}$. Intuitivamente, se trata de caracterizar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$ a través de una familia de funciones (módulo $\mathbf{I}\Delta_0$). En este capítulo estudiaremos la existencia de conjuntos Π_n–funcionales definidos de manera uniforme. Con este fin consideramos las Π_n–envolturas. Ahora, se trata de caracterizar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$ por medio de una familia uniforme de funciones (véase V.4). Las Π_n-envolturas son una generalización de las envolturas tal y como fueron introducidas por McAloon en [20] (véase también [8]) y resultan ser una formulación equivalente del concepto de indicador en su sentido más general (ver [11]). Parte de nuestro interés en ellas radica en su utilización para construir modelos de fragmentos de la Aritmética en los que ω es definible (véase VII.11). Una de las propiedades fundamentales de las Π_n-envolturas tal y como las definimos a continuación es que, en condiciones bastante generales, proporcionan conjuntos fuertemente Π_n-funcionales.

V.1 Π_n-envolturas: definición y propiedades generales

En primer lugar recordemos la notación introducida anteriormente:

Nota V.1 Dada una fórmula $\varphi(x,y)$ denotaremos por $\mathrm{IPF}(\varphi)$ a la conjunción de los cierres de las fórmulas:

(–) $\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

(–) $x_1 \leq x_2 \wedge \varphi(x_1,y_1) \wedge \varphi(x_2,y_2) \rightarrow y_1 \leq y_2$

Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por Γ^* al conjunto:

$$\{\forall x\, \exists y\, \varphi(x,y) : \varphi(x,y) \in \Gamma^-\} \cup \{\mathrm{IPF}(\varphi) : \varphi(x,y) \in \Gamma^-\}$$

Definición V.2 *Sea $n \in \omega$. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$ teorías consistentes de lenguaje $\mathcal{L}$ y $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$.*

(1) *Diremos que φ es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ si*

(a) $\mathbf{T} \vdash \Gamma^*_\varphi$, *donde* $\Gamma_\varphi = \{\varphi(k,x,y) : k \in \omega\}$

(b) $\forall k \in \omega$, $\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k+1,x,y) \to \exists z < y\, \varphi(k,x,z)$

(2) *Diremos que* φ *satisface* Π_n*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *si para cada* $\psi(x,y) \in \Pi_n$ *(sin parámetros) tal que* $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$, *existe* $k \in \omega$ *tal que*

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,x,y) \to \exists z < y\, \psi(x,z)$$

(3) *Diremos que* φ *es una* Π_n*–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$ *si*

(–) φ *es una* Π_n*–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$ *y*

(–) φ *satisface* Π_n*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$.

Nota V.3

(–) En lo que sigue, salvo que se especifique lo contrario, al considerar una Π_n-envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ supondremos que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$ son extensiones de $\mathbf{I\Delta}_0$.

(–) Es fácil ver que si $\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n$ es consistente y $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$ es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$, entonces Γ_φ es un conjunto Π_n–funcional.

El siguiente resultado muestra cómo caracterizar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$ por medio de una Π_n–envoltura.

Lema V.4 *Sea* $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ *una* Π_n*–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Si* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}_0$, *entonces*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_0 + \Gamma^*_\varphi)$$

Demostración:
Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}_0$ y φ es una Π_n-envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ resulta que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}_0 + \Gamma^*_\varphi$ y, por tanto,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_0 + \Gamma^*_\varphi) \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$$

Para probar la inclusión restante, sea $\psi(x,z) \in \Pi_n$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists z\, \psi(x,z)$. Entonces, puesto que φ satisface Π_n–ENV, existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,x,y) \to \exists z < y\, \psi(x,z)$$

y así, $\mathbf{T}_0 + \Gamma^*_\varphi \vdash \forall x\, \exists z\, \psi(x,z)$. □

Nota V.5 La propiedad fundamental de las Π_n–envolturas queda recogida en la condición Π_n–ENV, de acuerdo con la cual toda función 1-aria de grafo Π_n, que la teoría pruebe que es total, está acotada (y esto puede probarse en $\mathbf{T}_0$) por una función de la envoltura. Esto es cierto también para funciones de grafo Σ_{n+1} y de cualquier aridad.

Aserto V.5.1 Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Para toda $\psi(\vec{x},y) \in \Sigma_{n+1}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall \vec{x}\, \exists y\, \psi(\vec{x},y)$, existe $k \in \omega$ tal que:

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k, \langle \vec{x} \rangle, y) \rightarrow \exists z < y\, \psi(\vec{x}, z)$$

Demostración:
Sean $\psi(\vec{x},y) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi_0(\vec{x},y,z) \in \Pi_n$, tales que

$$\psi(\vec{x},y) \equiv \exists z\, \psi_0(\vec{x},y,z)$$

Sea $\theta(u,v) \in \Pi_n$ la fórmula

$$\forall \vec{x} \leq u\, \forall y, z \leq v\, (u = \langle \vec{x} \rangle \wedge v = \langle y, z \rangle \wedge \psi_0(\vec{x},y,z))$$

Entonces $\mathbf{T} \vdash \exists y\, \psi(\vec{x},y) \leftrightarrow \exists v\, \theta(\langle \vec{x} \rangle, v)$ y, por tanto, $\mathbf{T} \vdash \forall u\, \exists v\, \theta(u,v)$. En consecuencia, existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,u,v) \rightarrow \exists w < v\, \theta(u,w)$$

y de la definición de θ, se deduce $\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k, \langle \vec{x} \rangle, v) \rightarrow \exists y < v\, \psi(\vec{x},y)$. □

La siguiente propiedad básica nos será útil más adelante:

Aserto V.5.2 Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Entonces

$$\exists k_0 \in \omega,\ \forall k \geq k_0,\ \mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,x,y) \rightarrow x < y$$

Demostración:
Observemos que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, (x = y)$$

luego puesto que φ satisface Π_n–ENV para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$, existe $k_0 \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k_0,x,y) \rightarrow \exists z < y\, (x = z)$$

y, en consecuencia, $\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k_0,x,y) \rightarrow x < y$. Ahora bien, puesto que φ es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$,

$$\forall k \geq k_0,\ \mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,x,y) \rightarrow x < y$$ □

Puesto que las envolturas caracterizan las Π_{n+2}–consecuencias de la teoría considerada, también pueden utilizarse para obtener resultados de incompletitud como el siguiente:

Aserto V.5.3 Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$. Entonces

$$\mathbf{T} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$$

Demostración:
Supongamos que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$. Entonces existe $k \in \omega$ tal que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{T} \vdash \varphi(k,x,y) \rightarrow \exists z < y\, \varphi(x,x,z)$$

Por ser φ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$, sabemos que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(k,x,y)$ y además

$$(\star) \qquad \mathbf{T} \vdash \varphi(k+1,x,y) \rightarrow \exists z < y\, \varphi(k,x,z)$$

En particular, usando $(\bullet)$,

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(k,k+1,y) \wedge \exists z < y\, \varphi(k+1,k+1,z)$$

y por $(\star)$ obtenemos

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(k+1,k+1,y) \rightarrow \exists z < y\, \varphi(k,k+1,z)$$

lo que es una contradicción. □

Un prueba similar a la de V.5.3 nos permite establecer el siguiente resultado:

Aserto V.5.4 Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}_0$, o bien $\mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{T}$, entonces

$$\mathbf{T} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$$ □

V.2 Π_n–envolturas y segmentos iniciales

En esta sección estudiaremos las relaciones entre las condición Π_n–ENV de la definición de Π_n–envoltura (V.2) y una nueva condición que denotaremos por Π_n–IND. Como veremos, esta última condición es una formulación semántica de la condición Π_n–ENV que relaciona las envolturas con los indicadores (véase [8] o [11]) y permite demostrar que, en cierto sentido, son conceptos equivalentes.

Definición V.6 *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *teoría consistentes y* $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$. *Diremos que* φ *satisface* Π_n*–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *si para todo* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ *no estándar, numerable, y cada* a, $b \in \mathfrak{A}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

IND–(i)	$\forall k \in \omega,\ \mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$
IND–(ii)	*Existe* $I \prec_n^e \mathfrak{A}$ *tal que* $I \models \mathbf{T}$ *y* $a < I < b$

Lema V.7 *Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ no estándar y a, $b \in \mathfrak{A}$. Entonces*

$$\text{Existe } I \prec_n^e \mathfrak{A},\ [I \models \mathbf{T} \wedge a < I < b] \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in \omega,\ \mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$$

Demostración:
Sean $I \prec_n^e \mathfrak{A}$, $I \models \mathbf{T}$ y $a < I < b$. Puesto que para todo $k \in \omega$, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(k,x,y)$, necesariamente, para cada $k \in \omega$, $I \models \exists y\, \varphi(k,a,y)$. Si tomamos $b_k \in I$, tal que $I \models \varphi(k,a,b_k)$, entonces $b_k < I < b$, luego $\mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$. □

Nota V.8 Como consecuencia del lema V.7, si φ es una Π_n–q–envoltura, entonces, con las notaciones de V.6,

$$\textbf{IND–(ii)} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{IND–(i)}$$

Por tanto, para probar que φ satisface Π_n–IND, basta probar que **IND–(i)** $\Longrightarrow$ **IND–(ii)**.

Lema V.9 *Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Si φ satisface Π_n–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$, *entonces*

(1) *φ satisface Π_n–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$.

(2) *φ es una Π_n–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$.

Demostración:
(1) Razonamos por reducción al absurdo:
Supongamos que existe $\psi(x,y) \in \Pi_n$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$ pero, para todo $k \in \omega$,

$$\mathbf{T}_0 \nvdash \varphi(k,x,y) \to \exists z < y\, \psi(x,z)$$

Entonces, para cada $k \in \omega$, existe $\mathfrak{A}_k \models \mathbf{T}_0$, numerable, y $a, b \in \mathfrak{A}_k$ tales que:

$$\mathfrak{A}_k \models \varphi(k,a,b) \wedge \forall z < b\, \neg\psi(a,z)$$

Sean $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ dos nuevas constantes y, para cada $k \in \omega$, $k > 0$, sea $\mathbf{T}_k$ la teoría:

$$\mathbf{T}_0 + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \{\exists y < \mathbf{d}\, \varphi(j,\mathbf{c},y) \wedge \forall z < \mathbf{d}\, \neg\psi(\mathbf{c},z) : \ j < k\}$$

$\mathbf{T}_k$ es consistente para todo $k \in \omega$, pues si tomamos $\mathfrak{A}_k \models \mathbf{T}_0$ (numerable), verificando, para ciertos $a, b \in \mathfrak{A}_k$,

$$\mathfrak{A}_k \models \varphi(k,a,b) \wedge \forall z < b\, \neg\psi(a,z)$$

por ser φ una Π_n–q–envoltura, se tiene, para todo $j < k$, $\mathfrak{A}_k \models \exists y < b\, \varphi(j,a,y)$. Por tanto, interpretando $\mathbf{c}$ como a y $\mathbf{d}$ como b, $\mathfrak{A}_k \models \mathbf{T}_k$.

Por el teorema compacidad, la teoría $\mathbf{T}^* = \bigcup_{k\in\omega} \mathbf{T}_k$ es consistente. Sea $\mathfrak{A}^* \models \mathbf{T}^*$, no estándar, numerable y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*_{|\mathcal{L}}$. Tomemos $a = \mathfrak{A}^*(\mathbf{c})$ y $b = \mathfrak{A}^*(\mathbf{d})$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ y, para todo $k \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \exists y < b \varphi(k,a,y)$. Por hipótesis, φ satisface Π_n–IND para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$, luego existe $I \prec_n^e \mathfrak{A}$ tal que, $a < I < b$ e $I \models \mathbf{T}$. Puesto que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$, existe

$e \in I$, tal que $I \models \psi(a,e)$. Al ser $I \prec_n^e \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \psi(a,e) \wedge e < b$, pero, por construcción, $\mathfrak{A} \models \forall z < b \neg\psi(a,z)$, lo que es una contradicción.

(2) Es consecuencia de (1). □

Teorema V.10 ($n \geq 1$) *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *tales que*

(i) $\mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$,

(ii) $\mathbf{T}$ *es una teoría recursivamente axiomatizable, y*

(iii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.

Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ *una* Π_n*–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) φ *satisface* Π_n*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *(y, por tanto,* φ *es una* Π_n*-envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$*).*

(2) φ *satisface* Π_n*–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$.

Demostración:
(2) $\Longrightarrow$ (1) Es consecuencia de V.9.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Por V.8 sólo debemos probar que **IND–(i)** $\Longrightarrow$ **IND–(ii)**. La prueba que presentamos es una adaptación del trabajo sobre indicadores que aparece en [11].

Supongamos que φ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ no estándar y $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que,

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$$

Sea $\mathbf{c}$ una nueva constante y $\mathbf{T}'$ la teoría de lenguaje $\mathcal{L} + \mathbf{c}$ dada por:

$$\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{c} + \{\forall \vec{y}\, \psi(\mathbf{c}, \vec{y}) : \ \psi(x,\vec{y}) \in \Sigma_n, \ \mathfrak{A} \models \forall \vec{y} \leq b\, \psi(a,\vec{y})\}$$

Aserto V.10.1 $\mathbf{T}'$ es consistente.

Prueba del Aserto:
En efecto, si no fuese consistente, existiría $\psi_0 \in \Sigma_n$ (ya que Σ_n es cerrado bajo conjunción) tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall \vec{y} \leq b\, \psi_0(a,\vec{y}) \quad \text{y} \quad \mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{c} \vdash \exists \vec{y} \neg\psi_0(\mathbf{c},\vec{y})$$

Por el teorema de constantes, $\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists \vec{y} \neg\psi_0(x,\vec{y})$. En particular,

$$\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists z\, \exists \vec{y} \leq z\, \neg\psi_0(x,\vec{y}).$$

Por hipótesis, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1})$, luego

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists z\, \exists \vec{y} \leq z\, \neg\psi_0(x,\vec{y})$$

Puesto que $\varphi(u,x,y)$ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$, existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,u,v) \to \exists z < v\, \exists \vec{y} \leq z\, \neg\psi_0(u,\vec{y})$$

Entonces, al ser $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$, $\mathfrak{A} \models \varphi(k,a,v) \to \exists z < v\, \exists \vec{y} \leq z\, \neg\psi_0(a,\vec{y})$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$, resulta

$$\mathfrak{A} \models \exists z < b\, \exists \vec{y} \leq z\, \neg\psi_0(a,\vec{y})$$

En particular, $\mathfrak{A} \models \exists \vec{y} \leq b\, \neg\psi_0(a,\vec{y})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathbf{T}'$ es consistente. $\square$

Denotemos al Σ_n-tipo realizado por a y b en $\mathfrak{A}$ por

$$\mathrm{tp}_{\Sigma_n,\mathfrak{A}}(a,b) = \{\theta(x,y) \in \Sigma_n :\ \mathfrak{A} \models \theta(a,b)\}$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ y $n \geq 1$, $\mathrm{tp}_{\Sigma_n,\mathfrak{A}}(a,b) \in SSy(\mathfrak{A})$ (el sistema estándar de $\mathfrak{A}$, ver sección I.6) y, por tanto,

$$\{\ulcorner \forall \vec{y}\, \psi(\mathbf{c},\vec{y}) \urcorner :\ \psi \in \Sigma_n,\ \mathfrak{A} \models \forall \vec{y} \leq b\, \psi(a,\vec{y})\}$$

también pertenece a $SSy(\mathfrak{A})$. Dado que $\mathbf{T}$ es una teoría recursivamente axiomatizable, podemos garantizar que $\mathbf{T}' \in SSy(\mathfrak{A})$. En consecuencia, existe $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}'$ numerable $SSy(\mathfrak{A})$–saturado. De este modo tenemos:

- $\mathfrak{B} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es recursivamente saturado y numerable.
- $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ es numerable.

Sea $c = \mathfrak{B}(\mathbf{c})$. Puesto que $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}'$ y, para cada $\theta(y,\vec{x}) \in \Pi_n$,

$$\mathfrak{B} \models \exists \vec{y}\, \theta(c,\vec{y}) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \exists \vec{y} \leq b\, \theta(a,\vec{y})$$

por el teorema de Friedman (véase I.42), existe $H : \mathfrak{B} \precsim_n^e \mathfrak{A}$ tal que $H(c) = a$ y $b \notin H(\mathfrak{B})$. Sea $I = H(\mathfrak{B})$. Entonces $I \models \mathbf{T}$ y además $I \prec_n^e \mathfrak{A}$, $a < I < b$. Lo que termina la prueba del teorema. $\square$

En el caso de las Π_0-envolturas el teorema V.10 también es cierto cuando $\mathbf{T}_0$ es una extensión de $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$.

Teorema V.11 *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *tales que*

(i) $\mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$

(ii) $\mathbf{T}$ *es una teoría recursivamente axiomatizable, y*

(iii) $\mathrm{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) = \mathrm{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_1)$.

Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_1$ *una* Π_0*–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) φ *satisface* Π_0*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *(y, por tanto,* φ *es una* Π_0*-envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$*).*

(2) φ *satisface* Π_0*–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$. $\square$

Si $\mathbf{T}_0$ no es una extensión de $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$ el resultado sigue siendo cierto con algunas variaciones, ya que podemos reducirnos al teorema V.11 mediante las técnicas utilizadas en [5].

Teorema V.12 *Sean* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *teorías de lenguaje* $\mathcal{L}$ *tales que*

(i) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_1 + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0$

(ii) $\mathbf{T}$ *es recursivamente axiomatizable.*

Sea $\varphi(u,x,y) \in \Delta_0$ *una* Π_0*–q–envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) φ *satisface* Π_0*–ENV para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$ *(y, por tanto,* φ *es una* Π_0*-envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}_0$*).*

(2) φ *satisface* Π_0*–IND para* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{T}_0$*.*

Demostración:
(2)$\Longrightarrow$(1) Es consecuencia de V.9.

(1)$\Longrightarrow$(2) Por V.8 sólo debemos probar **IND–(i)** $\Longrightarrow$ **IND–(ii)**.

Supongamos que $\varphi(u,x,y) \in \Delta_0$ es una Π_0–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ numerable y $a, b \in \mathfrak{A}$, $a < b$, tales que:

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k,a,y)$$

Para todo $j \in \omega$ sea $a_j < b$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(j,a,a_j)$$

Sea $2^x = y$, una fórmula Δ_0 que define la exponenciación en $\mathbf{I\Delta}_0$ (ver sección I.2) y denotemos por $2^x_u = y$ una fórmula Δ_0 que defina la iteración de la exponencial, de modo que en $\mathbf{I\Delta}_0$ pueda probarse (en los valores para los que la función está definida) que:

(–) $2^x_0 = x$

(–) $2^x_{u+1} = 2^{2^x_u}$

Observemos que se verifica:

(–) $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, (2^x = y)$

(–) $\forall k \in \omega$, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, (2^x_k = y)$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\mathbf{T}_0 \vdash \forall u\, \forall x\, \forall y_1, y_2\, [\varphi(u,x,y_1) \wedge \varphi(u,x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

ya que si no fuese así, entonces podríamos cambiar φ por la fórmula $\varphi_0(u,x,y)$

$$\varphi(u,x,y) \wedge \forall z < y\, \neg\varphi(u,x,y)$$

Puesto que $\varphi(u,x,y) \in \Delta_0$, esta fórmula es Δ_0, y es fácil comprobar que las condiciones (a) y (b) de V.2–(1) siguen verificándose para la fórmula $\varphi_0(u,x,y)$. Además, si probamos que (1) $\Longrightarrow$ (2) para φ_0, también se tendrá (1) $\Longrightarrow$ (2) para φ.

Probemos a continuación el siguiente resultado:

Aserto V.12.1

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < b\ (\varphi(k,a,y) \land \forall x \leq y\, \exists z < b\,(2_k^x = z))$$

Prueba del Aserto:
Para cada $k \in \omega$, sea $\theta_k(x,y)$ la fórmula (Δ_0), $\exists z < y\,(\varphi(k,x,z) \land 2_k^z = y)$. Entonces $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta_k(x,y)$, luego, existe $n_k \in \omega$ tal que:

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(n_k,x,y) \to \exists w < y\, \theta_k(x,w)$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ y $\mathfrak{A} \models \varphi(n_k,a,a_{n_k})$, se verifica

$$\mathfrak{A} \models \exists w < a_{n_k}\, \theta_k(a,w).$$

Por tanto,

$$\mathfrak{A} \models \exists w < a_{n_k}\, \exists z < w\ (\varphi(k,a,z) \land 2_k^z = w)$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \varphi(k,a,a_k)$ y $\mathfrak{A} \models \varphi(k,a,y_1) \land \varphi(k,a,y_2) \to y_1 = y_2$ (podemos suponerlo así), obtenemos que $\mathfrak{A} \models 2_k^{a_k} < a_{n_k}$. En consecuencia,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a_k\, \exists z < a_{n_k}\ (2_k^x = z)$$

En particular, puesto que $a_{n_k} < b$, $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a_k\, \exists z < b\ (2_k^x = z)$. Lo que termina la prueba del aserto. □

Sea $\psi(k,a,b)$ la fórmula Δ_0:

$$\exists y < b\ (\varphi(k,a,y) \land \forall x \leq y\, \exists z < b\,(2_k^x = z) \land \forall u \leq k\, \exists v < y\, \varphi(u,a,v))$$

Entonces, por el aserto, para cada $k \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \psi(k,a,b)$, luego por overspill (observemos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$ ya que $\mathbf{T}_0$ es una extensión de $\mathbf{I\Delta_0}$), existe $c \in \mathfrak{A}$, $c > \omega$, tal que $\mathfrak{A} \models \psi(c,a,b)$. Sea b^* tal que

$$(\bullet) \quad \mathfrak{A} \models b^* < b \land \varphi(c,a,b^*) \land \forall x \leq b^*\, \exists z < b\,(2_c^x = z) \land \forall u \leq c\, \exists v < b^*\, \varphi(u,a,v)$$

y, para cada $n \in \omega$, sea $b_n \in \mathfrak{A}$, tal que $\mathfrak{A} \models 2_n^{b^*} = b_n$. Por último, definamos

$$I^* = \{d \in \mathfrak{A} :\ \exists n \in \omega,\ \mathfrak{A} \models d \leq b_n\}$$

Entonces, $I^* \subset^e \mathfrak{A}$ propia. Por tanto, dado que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$, $I^* \models \mathbf{B\Sigma_1}$ y, por construcción, $I^* \models \mathbf{exp}$. En consecuencia, se tiene que $I^* \models \mathbf{B\Sigma_1} + \mathbf{exp}$. Por otra parte, $a, b^* \in I^*$, $a < b^*$ (ya que por V.5.2, existe $j_0 \in \omega$ tal que $\forall j \geq j_0$, $a < a_j$) y, por $(\bullet)$,

$$\forall n \in \omega, \quad I^* \models \exists y < b^*\, \varphi(n,a,y)$$

Por tanto, $I^* \models \mathbf{T}_0 + \mathbf{exp}$ y $\varphi(u,x,y)$ también es una Π_0–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0 + \mathbf{exp}$, luego, por V.11, existe $I \subset^e I^*$ tal que $I \models \mathbf{T}$, $a < I < b^*$, de donde concluimos que $I \subset^e \mathfrak{A}$, $a < I < b$. Esto termina la prueba del teorema. □

Nota V.13 Observemos que V.12 también se verifica si $\mathbf{T}$ es una teoría recursivamente axiomatizable tal que:

(–) $\mathbf{T} \vdash \exp$

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_1)$

Nota V.14 La condición que hemos impuesto a $\mathbf{T}$, en los teoremas V.10 y V.11,

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1})$$

no puede eliminarse ya que, de hecho, es necesaria para que una envoltura satisfaga Π_n–IND. En concreto, tenemos el siguiente resultado:

Aserto V.14.1 Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$ dos teorías tales que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}_0 \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$ y $\varphi(u, x, y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ (y, por tanto, en $\mathbf{T}$) que satisface Π_n–IND para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$. Entonces

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1}).$$

Demostración:
Sea $\psi(x, y) \in \Pi_n$ tal que $\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$. Será suficiente probar que

$$(\bullet) \quad \text{Existe } k \in \omega, \ \mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k, x, y) \rightarrow \exists z < y\, \psi(x, z)$$

En efecto, supongamos que se verifica $(\bullet)$. Puesto que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(k, x, y)$, obtenemos $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$. Lo que prueba que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

La otra inclusión es trivial.

Probemos ahora $(\bullet)$. Para ello supongamos lo contrario, es decir, para todo $k \in \omega$,

$$\mathbf{T}_0 \nvdash \varphi(k, x, y) \rightarrow \exists z < y\, \psi(x, z)$$

Entonces, para cada $k \in \omega$, existen $\mathfrak{A}_k \models \mathbf{T}_0$, no estándar, numerable, y $a, b \in \mathfrak{A}_k$ tales que:

$$\mathfrak{A}_k \models \varphi(k, a, b) \wedge \forall z < b\, \neg\psi(a, z)$$

Sean $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ dos nuevas constantes y, para cada $k \in \omega$, $k > 0$, sea $\mathbf{T}_k$ la teoría:

$$\mathbf{T}_0 + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \{\exists y < \mathbf{d}\, \varphi(j, \mathbf{c}, y) \wedge \forall z < \mathbf{d}\, \neg\psi(\mathbf{c}, z) : \ j < k\}$$

Entonces, para todo $k \in \omega$, $\mathbf{T}_k$ es consistente y, en consecuencia, por el teorema compacidad, la teoría $\mathbf{T}^* = \bigcup_{k\in\omega} \mathbf{T}_k$ es consistente. Sea $\mathfrak{A}^* \models \mathbf{T}^*$ numerable y no estándar y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*_{|\mathcal{L}}$. Tomemos $a = \mathfrak{A}^*(\mathbf{c})$ y $b = \mathfrak{A}^*(\mathbf{d})$. Entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_0$ y, para todo $k \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k, a, y)$. Por hipótesis, existe $I \prec_n^e \mathfrak{A}$ tal que, $a < I < b$ e $I \models \mathbf{T}$. En consecuencia, $I \models \mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ y puesto que $\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$, existe $e \in I$, tal que $I \models \psi(a, e)$. Al ser $I \prec_n^e \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \psi(a, e) \wedge e < b$, pero, por construcción, $\mathfrak{A} \models \forall z < b\, \neg\psi(a, z)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba $(\bullet)$ y completa la prueba del aserto. $\square$

V.3 Existencia de Π_n–envolturas

A continuación establecemos la existencia de Π_n-envolturas, para teorías recursivamente axiomatizables.

Teorema V.15 (Existencia de Π_n-envolturas)

(1) ($n \geq 1$) *Toda teoría* $\mathbf{T}$, Π_n*–funcional y recursivamente axiomatizable, tiene una* Π_n*–envoltura en* $\mathbf{I}\Sigma_n$.

(2) *Toda teoría* $\mathbf{T}$ Π_0*–funcional, recursivamente axiomatizable y tal que* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$ *tiene una* Π_0*–envoltura en* $\mathbf{I}\Delta_0$.

Demostración:
La prueba que presentamos sigue la construcción de indicadores dada en [11]. A lo largo de ella utilizaremos los convenios sobre números de Gödel y aritmetización de la sintaxis introducidos en la sección I.4.

(1) Sean $n \geq 1$ y $\mathbf{T}$ una teoría en las condiciones exigidas (en particular, $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$). Sea $\mathbf{Prf_T}(x, y)$ una fórmula Σ_1 que representa en $\mathbf{P}^-$ la relación "y es una prueba de x en $\mathbf{T}$". Consideremos la siguiente fórmula $\theta(u, x, y) \in \Pi_n$:

$$\forall p, \rho, \tau \leq u \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Prf_T}(\rho, p) \wedge \\ \rho = \ulcorner \forall v_0 \, \exists v_1 \, \tau \urcorner \wedge \mathbf{Form}_{\Pi_n}(\tau) \end{pmatrix} \rightarrow \forall x_0 \leq x \, \exists y_0 \leq y \, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau, \langle x_0, y_0 \rangle) \right]$$

Sea $\varphi(u, x, y) \in \Sigma_{n+1}$ una fórmula equivalente, en $\mathbf{I}\Sigma_n$, a la fórmula

$$\exists y' \leq y \, [y = y' + u \wedge \theta(u, x, y') \wedge \forall z < y' \, \neg\theta(u, x, z)]$$

Veamos que φ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$:

(–) $\mathbf{T} \vdash \Gamma^*_\varphi$.
De la definición de φ se deduce fácilmente que

$$\forall k \in \omega, \;\; \mathbf{T} \vdash \mathrm{IPF}(\varphi(k, x, y))$$

Por tanto, sólo resta probar que

$$\forall k \in \omega, \;\; \mathbf{T} \vdash \forall x \, \exists y \, \varphi(k, x, y)$$

Sea $k \in \omega$. Sean $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \Pi_n$ todas las fórmulas Π_n tales que para todo j, $1 \leq j \leq r$,

(–) $\mathbf{T} \vdash \forall x \, \exists y \, \psi_j(x, y)$,

(–) $\rho_j = \ulcorner \forall v_0 \, \exists v_1 \, \psi_j(v_0, v_1) \urcorner \leq k$, y

(–) existe $p_j \leq k$ tal que $\mathbb{N} \models \mathbf{Prf_T}(\rho_j, p_j)$

Puesto que $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional, $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}. Además, para cada j, $\exists y\, \psi_j(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, luego, para cada j,

$$(\star) \qquad \mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \forall x_0 \leq x\, \exists y_0 \leq y\, \psi_j(x_0, y_0)$$

De nuevo por ser $\mathbf{T}$ Π_n–funcional, $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$ y, por hipótesis, $n \geq 1$,

$$(\star\star) \qquad \mathbf{T} \vdash \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau_j, \langle x, y\rangle) \leftrightarrow \psi_j(x,y)$$

donde $\tau_j = \ulcorner \psi_j(v_0, v_1)\urcorner$.

Por $(\star)$, fijado $a \in \mathfrak{A}$, para cada j, $1 \leq j \leq r$, existe b_j tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq b_j\, \psi_j(x,y)$$

Por tanto, si $b = \max(\{b_j : 1 \leq j \leq r\})$, entonces, por $(\star)$ y $(\star\star)$, se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq b\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau_j, \langle x, y\rangle)$$

lo que prueba que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(k, x, y)$$

y, puesto que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$, podemos concluir que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x \exists y\, \varphi(k, x, y)$$

(–) $\forall k \in \omega$, $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \varphi(k+1, x, y) \to \exists z < y\, \varphi(k, x, z)$
Se deduce de la construcción de φ.

Hemos probado así que φ es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$. Sólo queda probar que φ satisface Π_n–ENV para $\mathbf{T}$ e $\mathbf{I\Sigma}_n$:

(–) Para cada $\psi(x,y) \in \Pi_n$ (sin parámetros) tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$, existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \varphi(k, x, y) \to \exists z < y\, \psi(x, z)$$

Lo que resulta obvio a partir de la definición de φ.

(2) Consideremos como en **(1)**, la fórmula $\mathbf{Prf_T}(x,y) \in \Sigma_1$ que represente en $\mathbf{P}^-$ la relación "y es una prueba de x en $\mathbf{T}$". Sea $\psi_0(x,y,w) \in \Delta_0$ tal que

$$\mathbf{Prf_T}(x,y) \equiv \exists w\, \psi_0(x,y,w)$$

Sea $\theta(u,x,y) \in \Pi_0$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \forall p, \rho, \tau, w \leq u \Bigg[&\left(\begin{array}{l} \psi_0(\rho, p, w) \wedge \\ \rho = \forall v_0\, \exists v_1\, \tau \wedge \mathbf{Form}_{\Delta_0}(\tau) \end{array} \right) \to \\ &\to \exists z, t \leq y \left(\begin{array}{l} y = \langle z, t\rangle \wedge z = 2^{(x+t+2)^{c^u}} \wedge \\ \forall x_0 \leq x\, \exists y_0 \leq t\, \mathbf{V}_0(\tau, \langle x_0, y_0\rangle, z) \end{array} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

donde $c \in \omega$ es una constante (ver sección I.4). Sea $\varphi(u,x,y) \in \Delta_0$ la fórmula

$$\exists y_0 \leq y\, [y = y_0 + u \wedge \theta(u, x, y_0) \wedge \forall z < y_0\, \neg\theta(u, x, z)]$$

Ahora podemos probar que φ es una Π_0–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Delta}_0$ como en **(1)**. □

Proposición V.16 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_n*-funcional y* $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ *una* Π_n*-envoltura de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$*. Entonces existe una* Π_n*-envoltura,* $\theta(u,x,y) \in \Pi_n$*, de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$*.*

Demostración:
Sea $\varphi(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$. Supongamos que φ es $\exists z\, \varphi_0(u,x,y,z)$, donde $\varphi_0 \in \Pi_n$. Sea $\psi(u,x,y) \in \Pi_n$ la fórmula:

$$\forall z \leq y\, \forall y_0 \leq y\, [\langle z, y_0\rangle = y \rightarrow \varphi_0(u,x,y_0,z)]$$

Entonces, para todo $k \in \omega$, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(k,x,y)$. Para cada $k \in \omega$ sea ψ_k la fórmula $\psi(k,x,y)$ y consideremos la fórmula $\mathcal{C}_{\psi_k}(x,y)$ obtenida a partir de ψ_k como en la prueba de IV.6. La definición de $\mathcal{C}_{\psi_k}$ es "uniforme" en k y, por tanto, podemos considerar la variable u de $\psi(u,x,y)$ como un parámetro en $\mathcal{C}_\psi$. De este modo obtenemos una fórmula $\mathcal{C}_\psi(u,x,y) \in \Pi_n$ a partir de la cual obtendremos la Π_n–envoltura buscada. Para ello sea $\theta(u,x,y) \in \Pi_n$ la fórmula

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = u+1 \wedge \forall j \leq u\, [\mathcal{C}_\psi(j,x,(y)_j)]$$

Ahora, es fácil probar que θ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$, teniendo en cuenta que φ lo es y que (véase la prueba de IV.6):

(–) $\forall k \in \omega$, $\quad \mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x\, \exists y\, \mathcal{C}_{\psi_k}(x,y) \rightarrow \forall x\, \exists y\, \psi_k(x,y)$.

(–) $\forall k \in \omega$, $\quad \mathbf{T} \vdash \mathrm{IPF}(\mathcal{C}_{\psi_k})$ (de hecho, $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathrm{IPF}(\mathcal{C}_{\psi_k})$).

(–) $\forall k \in \omega$, $\quad \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \forall x\, \exists y\, \mathcal{C}_{\psi_k}(x,y) \leftrightarrow \forall x\, \exists y\, \psi_k(x,y)$

(–) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ $\quad$ (puesto que $\mathbf{T}$ es Π_n-funcional). □

Teorema V.17

(1) $(n \geq 1)$ *Para cada* $m \geq n$*, existe una* Π_n*–envoltura de* $\mathbf{I\Sigma}_m$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$*,* $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$*, tal que:*

(a) $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u,x,y)$

(b) $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u,x,y_1,y_2\, [\varphi(u,x,y_1) \wedge \varphi(u+1,x,y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$

(2) *Para* $m \geq 1$ *existe una* Π_0*–envoltura de* $\mathbf{I\Sigma}_m$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_0$*,* $\varphi(u,x,y) \in \Pi_0$*, tal que:*

(a) $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u,x,y)$

(b) $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u,x,y_1,y_2\, [\varphi(u,x,y_1) \wedge \varphi(u+1,x,y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$

(3) *Para cada* $n \in \omega$*, existe una* Π_n*–envoltura,* $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$*, de* $\mathbf{PA}$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$ *tal que:*

(a) $\mathbf{Th}(\mathbb{N}) \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u,x,y)$

(b) $\mathbf{Th}(\mathbb{N}) \vdash \forall u,x,y_1,y_2\, [\varphi(u,x,y_1) \wedge \varphi(u+1,x,y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$

Demostración:
(1) Demostraremos que las envolturas proporcionadas en las pruebas de los teoremas V.15 y V.16 satisfacen **(a)** y **(b)**. Sean $m \geq n$ y $\theta(u,x,y) \in \Pi_n$ la fórmula:

$$\forall p, \rho, \tau \leq u \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_m}(\rho, p) \wedge \\ \rho = \forall v_0 \, \exists v_1 \, \tau \wedge \mathbf{Form}_{\Pi_n}(\tau) \end{pmatrix} \rightarrow \forall x_0 \leq x \, \exists y_0 \leq y \, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau, \langle x_0, y_0 \rangle) \right]$$

Bastará probar que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u \, \forall x \, \exists y \, \theta(u,x,y)$$

En efecto, una vez probado $(\bullet)$, si $\varphi_1(u,x,y) \in \Sigma_{n+1}$ es la fórmula:

$$\exists y' \leq y \, [y = y' + u \wedge \theta(u,x,y') \wedge \forall z < y' \, \neg\theta(u,x,z)]$$

entonces la prueba de V.16 nos proporciona la Π_n–envoltura buscada.

Probemos $(\bullet)$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{m+1}$, $c \in \mathfrak{A}$ y $p, \rho, \tau \leq c$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_m}(\rho, p) \wedge \rho = \forall v_0 \, \exists v_1 \, \tau \wedge \mathbf{Form}_{\Pi_n}(\tau)$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \exists y \, \mathbf{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_m}(\forall v_0 \, \exists v_1 \, \tau, y)$, se tiene,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \, \exists y \, \mathbf{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_m}(\exists v_1 \, \tau(\bar{x}), y)$$

donde $\tau(\bar{x})$ es la fórmula obtenida a partir de τ sustituyendo la variable v_0 por el numeral de x.

Por I.26, $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \mathbf{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m)$ luego

$$\mathfrak{A} \models \forall x \, \mathbf{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(\exists v_1 \, \tau, \langle x \rangle)$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \, \exists y \, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau, \langle x, y \rangle)$$

Ahora utilizando colección podemos probar que para cada $a \in \mathfrak{A}$ existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \, \exists y \leq b \, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\tau, \langle x, y \rangle)$$

Lo que prueba que $\mathfrak{A} \models \forall x \, \exists y \, \theta(c,x,y)$.

(2) y **(3)** Se prueban de manera similar a **(1)**. □

Nota V.18 En V.15 se ha demostrado que si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional recursivamente axiomatizable, entonces $\mathbf{T}$ tiene una Π_n–envoltura en $\mathbf{I\Sigma}_n$ (en el caso $n = 0$ es preciso, además, que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$).

- (-) La condición que exige que $\mathbf{T}$ sea recursivamente axiomatizable no puede eliminarse, ya que tenemos el siguiente ejemplo:

  La teoría $\mathbf{T} = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbb{N})$ es Π_0–funcional (ya que tiene colección) y además $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$. Sin embargo, no existe ninguna envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Delta}_0$.

En efecto, si $\varphi(u,x,y)$ fuese una Π_0–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Delta_0}$ entonces por V.5.3

$$(\bullet) \qquad \mathbf{T} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$$

Por otra parte, para todo $k \in \omega$, $\mathbb{N} \models \exists y\, \varphi(k,x,y)$ y, en consecuencia,

$$\mathbb{N} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$$

Por tanto, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,x,y)$, en contradicción con $(\bullet)$.

Análogamente, se prueba, que para todo $n \in \omega$, la teoría $\mathbf{Th}(\mathbb{N})$ carece de Π_n–envolturas en $\mathbf{I\Sigma}_n$,

(–) Respecto a si la condición $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$ puede eliminarse en el caso $n = 0$, consideremos el siguiente cuestión:

La teoría $\mathbf{I\Pi_1^-}$ es una teoría Π_0–funcional, recursivamente axiomatizable y $\mathbf{I\Pi_1^-} \nvdash \mathbf{exp}$. Sin embargo, no sabemos si existe una Π_0–envoltura de $\mathbf{I\Pi_1^-}$ en $\mathbf{I\Delta_0}$. Por [3], sabemos que si $\varphi(x,y) \in \Delta_0$ es tal que $\mathbf{I\Pi_1^-} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, entonces existe $k \in \omega$ tal que:

$$\mathbf{I\Pi_1^-} \vdash \exists y\, \forall x\, [x > y \rightarrow \exists z < x^k\, \varphi(x,z)]$$

Esto permite probar que la fórmula $x^u + u = y$ define una Π_0–envoltura de $\mathbf{I\Pi_1^-}$ en $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$. Sin embargo,

¿Existe una Π_0–envoltura de $\mathbf{I\Pi_1^-}$ en $\mathbf{I\Delta_0}$?

V.4 Π_n–envolturas fuertes

Definición V.19 *Sea $\varphi(u,x,y)$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Diremos que φ es una Π_n–envoltura fuerte si $\varphi \in \Pi_n$ y el conjunto Γ_φ es fuertemente Π_n–funcional.*

Nota V.20 Observemos que, en el caso $n = 0$, toda Π_0–envoltura, $\varphi(u,x,y) \in \Pi_0$, es una Π_0–envoltura fuerte.

Lema V.21 $(n \geq 1)$ *Sean $\mathbf{T}$ una teoría recursivamente axiomatizable tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1})$$

y $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$. Entonces, son equivalentes:

(1) *$\varphi(u,x,y)$ es una Π_n–envoltura fuerte.*

(2) $\mathbf{I\Delta_0} + \Gamma_\varphi^* \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.

Demostración:
(1)$\Longrightarrow$(2) Es consecuencia de IV.32.

(2)$\Longrightarrow$(1) Puesto que $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$ es una Π_n–envoltura y $\mathbf{T} + \mathrm{I}\Sigma_n$ es consistente, (de hecho $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$), por V.3, Γ_φ es un conjunto Π_n–funcional. Por tanto, $\mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^*_\varphi$ es consistente. Sean ahora $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_\varphi$ e $I \prec^e_0 \mathfrak{A}$ verificando

$$(\bullet) \qquad \forall k \in \omega,\ \forall a \in I,\ \exists b \in I,\ \mathfrak{A} \models \varphi(k,a,b)$$

Probaremos que $I \prec^e_n \mathfrak{A}$ aplicando el test de Tarski-Vaught. Sean $\theta(x,y) \in \Pi_{n-1}$ y $a \in I$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \theta(a,y)$, debemos probar que existe $b \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$. Por hipótesis $\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_\varphi \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$, luego $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n$. Además, dado $c > I$, por $(\bullet)$

$$\forall k \in \omega,\ \mathfrak{A} \models \exists y < c\, \varphi(k,a,y)$$

luego, por V.10, existe $I_1 \prec^e_n \mathfrak{A}$ tal que $I_1 \models \mathbf{T}$ y $a < I_1 < c$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \theta(a,y)$, tenemos $I_1 \models \exists y\, \theta(a,y)$ y, por tanto, $\mathfrak{A} \models \exists y < c\, \theta(a,y)$. Hemos probado así que

$$\forall c > I,\ \mathfrak{A} \models \exists y < c\, \theta(a,y)$$

luego por underspill, (recordemos que $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n$) existe $c_0 \in I$, tal que $\mathfrak{A} \models \exists y < c_0\, \theta(a,y)$ y, en consecuencia, existe $b \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a,b)$. □

Nota V.22 En [12] capítulo 9 (véase también [13]), Kaye construye para cada $n \in \omega$, una fórmula Σ_{n+1}, que denota por $g_n(x) = y$, tal que si $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_n$ y $I \subset^e \mathfrak{A}$ entonces

$$[\forall a \in I,\ \exists b \in I, \quad \mathfrak{A} \models g_n(a) = b] \quad \Longrightarrow \quad I \prec^e_n \mathfrak{A}$$

En el siguiente teorema daremos una versión de este resultado. La fórmula $\mathbb{K}_n(x) = y$ que proporcionamos es esencialmente la fórmula $g_n(x) = y$ construida por Kaye, aunque en nuestro caso se trata de una fórmula Π_n.

Teorema V.23 *($n \geq 1$) Existe una fórmula $\mathbb{E}_n(u,x,y) \in \Pi_n$, tal que:*

(1) $\forall k \in \omega, \quad \mathrm{I}\Sigma_{n-1} \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{E}_n(k,x,y))$

(2) $\mathbb{E}_n(u,x,y)$ *es una Π_n–q–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$.*

(3) $\mathrm{I}\Sigma_n \iff \mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_n}$

(4) $\Gamma_{\mathbb{E}_n}$ *es un conjunto fuertemente Π_n–funcional.*

(5) *Denotemos por $\mathbb{K}_n(x) = y$ la fórmula $\mathbb{E}_n(x,x,y)$ y sea $\Gamma_n = \{\mathbb{K}_n(x) = y\}$. Entonces,*

  (a) $\mathrm{I}\Sigma_n \vdash \Gamma^*_n$

  (b) Γ_n *es un conjunto fuertemente Π_n–funcional.*

Demostración:
La idea es utilizar predicados de validez para construir una Π_n–q–envoltura, $\mathbb{E}_n$, de modo que $\Gamma_{\mathbb{E}_n}$ sea, esencialmente, el conjunto fuertemente Π_n–funcional $\mathbb{H}_n$ construido en IV.39.

Probaremos simultáneamente **(1)**–**(5)** por inducción sobre $n \geq 1$:

<u>$n = 1$</u>: Sea $\gamma(u, x, w, z) \in \Pi_1$ la fórmula

$$(\neg \exists v \leq x\, \exists y\, \mathbf{V}_0(u, \langle v, y\rangle, z) \wedge w = 0) \vee$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Seq}(w) \wedge \mathrm{lg}(w) = 2 \wedge \\ \forall w_1, w_2 \leq w \left[w = \langle w_1, w_2\rangle \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 \leq x \wedge \mathbf{V}_0(u, \langle w_1, w_2\rangle, z) \wedge \\ \forall v \leq x \left\{ \begin{array}{l} (\exists y\, \mathbf{V}_0(u, \langle v, y\rangle, z) \rightarrow \exists y \leq w_2\, \mathbf{V}_0(u, \langle v, y\rangle, z)) \wedge \\ (\mathbf{V}_0(u, \langle v, w_2\rangle, z) \rightarrow \langle v, w_2\rangle \leq w) \end{array} \right. \end{array} \right. \right] \end{array} \right.$$

Sea $\theta(u, x, y) \in \Pi_1$ la fórmula:

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = 2 \wedge \forall z, w \leq y\, [y = \langle w, z\rangle \rightarrow z = 2^{(x+w+2)^{c^u}} \wedge \gamma(u, x, w, z)]$$

donde $c \in \omega$ es una constante que depende de la definición de $\mathbf{V}_0$ (ver sección I.4). Por último, sea $\mathbb{E}_1(u, x, y) \in \Pi_1$ la fórmula

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = u + 1 \wedge \forall j \leq u\, [\theta(j, x, (y)_j)]$$

Entonces $\mathbb{E}_1$ es una Π_1–envoltura fuerte de $\mathbf{I}\Sigma_1$ en $\mathbf{I}\Sigma_1$.

En efecto, como en IV.39 tenemos que

(i) $\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{E}_1(k, x, y))$

(ii) $\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_1(k, x, y)$

Además, de la definición de $\mathbb{E}_1$ se deduce fácilmente que

(iii) $\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \mathbb{E}_1(k + 1, x, y) \rightarrow \exists z < y\, \mathbb{E}_1(k, x, z)$

En consecuencia, $\Gamma_{\mathbb{E}_1}$ es una Π_1–q–envoltura de $\mathbf{I}\Sigma_1$ en $\mathbf{I}\Sigma_1$. De este modo, de **(i)**, **(ii)** y **(iii)** obtenemos **(1)** y **(2)** para $\mathbb{E}_1$.

Para probar **(3)** bastará establecer que:

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}\Pi_0^-$$

ya que, por I.47 y I.5, $\mathbf{S}\Pi_0^- \iff \mathbf{S}\Pi_0 \iff \mathbf{I}\Sigma_1$ y, por **(2)**, $\mathbf{I}\Sigma_1 \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$.

Aserto V.23.1 $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}\Pi_0^-$

Prueba del Aserto:
Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$, $\psi(x, y) \in \Pi_0^-$ y $a \in \mathfrak{A}$. Probaremos que

$$\mathfrak{A} \models \exists w\, \forall x \leq a\, [\exists y\, \psi(x, y) \rightarrow \exists y \leq w\, \psi(x, y)]$$

Sea $k = \ulcorner \psi(v_0, v_1) \urcorner$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbb{E}_1(k, a, b)$ y por tanto, $\mathfrak{A} \models \theta(k, a, (b)_k)$. Sean b' y b'' tales que $(b)_k = \langle b', b''\rangle$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \gamma(k, a, b', b'')$$

Sea $d \in \mathfrak{A}$ tal que $d \leq a$. De la definición de γ se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(d,y) & \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, \mathbf{V}_0(k, \langle d,y\rangle, b'') \\ & \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \leq (b')_2\, \mathbf{V}_0(k, \langle d,y\rangle, b'') \\ & \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \leq b\, \psi(d,y) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, [\exists y\, \psi(x,y) \rightarrow \exists y \leq b\, \psi(x,y)]$$

Lo que prueba el aserto. □

La prueba de **(4)**, es decir, que $\Gamma_{\mathbb{E}_1}$ es fuertemente Π_1–funcional, se obtiene siguiendo la demostración de IV.39.

Por último, probemos **(5)**.

En primer lugar, se comprueba directamente que $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{K}_1)$. Para probar que $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \forall x\, \exists y\, (\mathbb{K}_1(x) = y)$, bastará establecer que

$$(\star) \qquad \mathbf{I\Sigma_1} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \theta(u,x,y)$$

Observemos que, por I.5, $\mathbf{I\Sigma_1} \Longleftrightarrow \mathbf{S\Pi_0}$, luego

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \exists z_1\, \forall v \leq x \left[\exists y,z \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0(u, \langle v,y\rangle, z) \wedge \\ z \geq 2^{(x+\langle v,y\rangle+2)^{c^u}} \end{pmatrix} \rightarrow \exists y,z \leq z_1 \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0(u, \langle v,y\rangle, z) \wedge \\ z \geq 2^{(x+\langle v,y\rangle+2)^{c^u}} \end{pmatrix} \right]$$

Por tanto, teniendo en cuenta que (ver [8], teorema 5.4)

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash z_1, z_2 \geq 2^{(\max(v,y)+2)^{c^u}} \rightarrow [\mathbf{V}_0(u, \langle v,y\rangle, z_1) \leftrightarrow \mathbf{V}_0(u, \langle v,y\rangle, z_2)]$$

obtenemos, razonando como en IV.39, que $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \forall u,x\, \exists w,z\, \gamma(u,x,w,z)$ y, en consecuencia, $(\star)$.

Con respecto a **(b)** observemos, en primer lugar que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{I\Delta_0} \vdash \mathbb{E}_1(u,x,y) \rightarrow \forall v < u\, \exists z < y\, \mathbb{E}_1(v,x,z)$$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma_1}$ e $I \subset^e \mathfrak{A}$ tales que

$$\forall a \in I,\ \exists b \in I, \quad \mathfrak{A} \models \mathbb{K}_1(a) = b$$

Sean $k \in \omega$, $a \in I$ y $c = \max(k,a)$. Entonces $c \in I$, luego existe $d \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbb{K}_1(c) = d$, es decir,

$$\mathfrak{A} \models \mathbb{E}_1(c,c,d)$$

Por $(\bullet)$ (en el caso $c \in \omega$, es preciso tener en cuenta **(ii)** y **(iii)**), tenemos

$$\exists b \in I, \quad \mathfrak{A} \models \mathbb{E}_1(k,a,b)$$

De este modo demostramos que

$$\forall a \in I,\ \exists b \in I, \quad \mathfrak{A} \models \mathbb{E}_1(k, a, b)$$

y, puesto que por **(4)**, $\Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$ es un conjunto fuertemente Π_1–funcional y, por **(3)**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$, resulta $I \prec^e_1 \mathfrak{A}$.

$\underline{\leq n \to n+1}$: Supongamos que para cada m, $1 \leq m \leq n$, existe una Π_m–q–envoltura, $\mathbb{E}_m(u, x, y) \in \Pi_m$, de $\mathbf{I}\Sigma_m$ en $\mathbf{I}\Sigma_m$ que sastisface las propiedades **(1)**–**(5)** del enunciado.

Sea $\gamma(u, x, w) \in \Pi_{n+1}$ una fórmula equivalente en $\mathbf{I}\Sigma_n$ a la fórmula

$$\begin{array}{l}
(\neg \exists v \leq x\, \exists y\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(u, \langle v, y\rangle) \wedge w = 0) \vee \\
\left\{ \begin{array}{l}
\exists w_1, w_2 \leq w\, (w = \langle w_1, w_2\rangle) \wedge \\
\forall w_1, w_2 \leq w \left[w = \langle w_1, w_2 \rangle \to \left\{ \begin{array}{l}
w_1 \leq x \wedge \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(u, \langle w_1, w_2\rangle) \wedge \\
\forall v \leq x \left\{ \begin{array}{l}
(\exists y\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(u, \langle v, y\rangle) \to \exists y \leq w_2\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(u, \langle v, y\rangle)) \wedge \\
(\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(u, \langle v, w_2\rangle) \to \langle v, w_2\rangle \leq w)
\end{array} \right.
\end{array} \right. \right]
\end{array} \right.
\end{array}$$

Sea $\theta(u, x, y) \in \Pi_{n+1}$ la fórmula

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \lg(y) = u + 1 \wedge \forall j \leq u\, (\gamma(j, x, (y)_j))$$

Sea $\mathbb{E}_{n+1}(u, x, y) \in \Pi_{n+1}$ la fórmula

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \lg(y) = n + 1 \wedge \bigwedge_{m=1}^{n} \mathbb{E}_m(u, x, (y)_{m-1}) \ \wedge \theta(u, x, (y)_n)$$

Es fácil comprobar (como en IV.39) que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \gamma(k, x, y)$$

De este modo $\mathbb{E}_{n+1}(u, x, y)$ es una Π_{n+1}–q–envoltura de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ en $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y, además,

$$\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{E}_{n+1}(k, x, y)).$$

Lo que prueba **(1)** y **(2)** para $\mathbb{E}_{n+1}$.

Para probar **(3)** bastará demostrar que $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Comenzamos demostrando el siguiente resultado:

Aserto V.23.2 $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$

Prueba del Aserto:
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$. Por inducción sobre m, $1 \leq m \leq n$, probaremos que, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_m$.

$\underline{m = 1}$: Puesto que $\mathfrak{A} \models \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$, tenemos que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_{n+1}(k, x, y)$$

Luego, de la definición de $\mathbb{E}_{n+1}$, obtenemos

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \exists y' \, (\mathbb{E}_1(k,x,y') \wedge (y)_0 = y')$$

En consecuencia, $\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_1(k,x,y)$. Por hipótesis,

$$\forall k \in \omega, \quad \mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{E}_1(k,x,y))$$

Por tanto, $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$. Puesto que $\Gamma^*_{\mathbb{E}_1}$ es un conjunto fuertemente Π_1–funcional, por IV.32–(1), $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_1$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_1$.

<u>$m \to m+1 \leqslant n$</u>: Puesto que $\mathfrak{A} \models \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$, se verifica que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_{n+1}(k,x,y)$$

De la definición de $\mathbb{E}_{n+1}$, obtenemos que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \exists y' \, [\mathbb{E}_{m+1}(k,x,y') \wedge (y)_m = y']$$

En consecuencia, $\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_{m+1}(k,x,y)$. Por hipótesis,

$$\forall k \in \omega, \quad \mathrm{I}\Sigma_m \vdash \mathrm{IPF}(\mathbb{E}_{m+1}(k,x,y)),$$

luego $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{m+1}}$, ya que por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_m$. Como $\Gamma^*_{\mathbb{E}_{m+1}}$ es un conjunto fuertemente Π_{m+1}–funcional, de IV.32–(1), se deduce que $\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{m+1}} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{m+1}$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{m+1}$. Esto termina la prueba del aserto. □

Utilizando el aserto se prueba que

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$$

razonando como en el caso $n = 1$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$, $\psi(x,y) \in \Pi_n^-$ y $a \in \mathfrak{A}$. Veamos que

$$\mathfrak{A} \models \exists w\, \forall x \leq a [\exists y\, \psi(x,y) \to \exists y \leq w\, \psi(x,y)]$$

Sea $k = \ulcorner \psi(v_0, v_1) \urcorner$. Por ser $\mathfrak{A} \models \Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbb{E}_{n+1}(k,a,b)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \theta(k,a,(b)_n)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \gamma(k,a,(b)_{n,k})$. Sea $d \leq a$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(d,y) &\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(k, \langle d,y \rangle) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \leq (b')_{n,k,2}\, \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(k, \langle d,y \rangle) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \leq b\, \psi(d,y) \end{aligned}$$

De donde deducimos que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, [\exists y\, \psi(x,y) \to \exists y \leq b\, \psi(x,y)]$$

luego $\mathfrak{A} \models \mathrm{S}\Pi_n^-$. Puesto que, por I.5,

$$\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathrm{S}\Pi_n \iff \mathrm{S}\Pi_n^-$$

$\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Sigma_{n+1}$. Lo que prueba **(3)**.

Para probar **(4)**; es decir, $\Gamma^*_{\mathbb{E}_{n+1}}$ es un conjunto fuertemente Π_{n+1}–funcional, podemos seguir de nuevo la prueba de IV.39.

Por último, la prueba de **(5)** es similar a la dada en el caso $n = 1$. Para el apartado (a) razonamos como en IV.39, y para (b) como en el caso $n = 1$, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathbb{E}_{n+1}(u, x, y) \to \forall v < u\, \exists z < y\, \mathbb{E}_{n+1}(v, x, z)$$

Lo que completa la demostración del teorema. □

Nota V.24 Observemos que V.23 nos proporciona una Π_n–q–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$, $\mathbb{E}_n \in \Pi_n$, que NO es una Π_n–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$, aunque $\Gamma_{\mathbb{E}_n}$ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional.

En efecto, por V.23–**(4)**, sabemos que $\Gamma_{\mathbb{E}_n}$ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional; sin embargo, $\mathbb{E}_n$ no es una Π_n–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$, ya que si lo fuese, entonces, por V.5.3,

$$\mathrm{I}\Sigma_n \nvdash \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_n(x, x, y)$$

En contradicción con V.23–**(5)**, puesto que $\mathbb{K}_n(x) = y$ es la fórmula $\mathbb{E}_n(x, x, y)$.

Teorema V.25 ($n \geq 1$) *Toda teoría* **T**, *Π_n-funcional y recursivamente axiomatizable, tiene una Π_n-envoltura fuerte en $\mathrm{I}\Sigma_n$.*

Demostración:

Puesto que **T** es Π_n–funcional, por V.15 y V.16, existe una Π_n–envoltura $\theta(u, x, y) \in \Pi_n$ de **T** en $\mathrm{I}\Sigma_n$ y, además, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$. Sea $\mathbb{E}_n(u, x, y)$ la Π_n–q–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$ que proporciona V.23. Entonces, la siguiente fórmula $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = 2(u+1) \wedge \forall j \leq u\ [\mathbb{E}_n(j, x, (y)_{2j}) \wedge \theta(j, x, (y)_{2j+1})]$$

proporciona una Π_n-envoltura fuerte de **T** en $\mathrm{I}\Sigma_n$.

En efecto, es fácil ver que φ es una Π_n–envoltura, por serlo θ. Además, $\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_\varphi \vdash \Gamma^*_{\mathbb{E}_n}$. En consecuencia, por V.23–**(3)**,

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*_\varphi \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$$

luego, por V.21, φ es una Π_n–envoltura fuerte. □

Corolario V.26

(1) ($n \geq 1$) *Para cada $m \geq n$, existe una Π_n–envoltura fuerte, $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$, de $\mathrm{I}\Sigma_m$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$ tal que*

  (a) $\mathrm{I}\Sigma_{m+1} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y)$

  (b) $\mathrm{I}\Sigma_{m+1} \vdash \forall u, x, y_1, y_2\, (\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u+1, x, y_2) \to y_1 < y_2)$

(2) *Para cada* $n \in \omega$, *existe una* Π_n*–envoltura fuerte,* $\varphi(u,x,y) \in \Pi_n$, *de* **PA** *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$ *tal que*

(a) $\mathbf{Th}(\mathbb{N}) \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u,x,y)$

(b) $\mathbf{Th}(\mathbb{N}) \vdash \forall u, x, y_1, y_2\, (\varphi(u,x,y_1) \wedge \varphi(u+1,x,y_2) \rightarrow y_1 < y_2)$

Demostración:
Por V.17, sabemos que existe una Π_n–envoltura de $\mathbf{I\Sigma}_m$ en $\mathbf{I\Sigma}_m$, $\theta(u,x,y) \in \Pi_n$, verificando (a) y (b). Sea $\mathbb{E}_n(u,x,y) \in \Pi_n$ la Π_n–q–envoltura de $\mathbf{I\Sigma}_n$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$ que proporciona V.23. Entonces

$$\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \mathbb{E}_n(u,x,y)$$

luego si tomamos $\varphi(u,x,y)$, como en V.25, es decir,

$$\mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{lg}(y) = 2(u+1) \wedge \forall j \leq u\ [\mathbb{E}_n(j,x,(y)_{2j}) \wedge \theta(j,x,(y)_{2j+1})]$$

tendremos una Π_n–envoltura fuerte de $\mathbf{I\Sigma}_m$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$, que satisface las condiciones (a) y (b). □

Capítulo VI

Funciones recursivas en $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

VI.1 Introducción

Sea $\mathbf{T}$ una teoría Π_n–funcional. Por IV.6, II.22 y II.25, sabemos que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Sin embargo, en general, no se tiene una equivalencia entre estas teorías. Un ejemplo es el caso $\mathbf{T} = \mathbf{PA}$. Entonces $\mathbf{I}\Sigma_1 \implies \mathbf{I}\Delta_1(\mathbf{T})$ y, por tanto, toda función recursiva en $\mathbf{I}\Delta_1(\mathbf{T})$ es primitiva recursiva. Puesto que existen funciones recursivas en $\mathbf{PA}$ que no son primitivas recursivas, se tiene que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{PA}) \not\Longleftarrow \mathbf{I}\Delta_1(\mathbf{PA})$$

En este capítulo consideramos los siguientes problemas:

(–) ¿Bajo qué condiciones podemos garantizar la equivalencia

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})?$$

Respecto a esta cuestión debemos observar que para toda teoría $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

luego sólo será posible la equivalencia entre $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ e $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ si

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$$

(–) Dada $\mathbf{T}$, ¿cúal es la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$?

Respecto a esta cuestión cabe hacer idénticas observaciones que para la anterior. En particular, la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es siempre una subclase (en general propia) de las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$

Comenzaremos estudiando un par de ejemplos interesantes. En primer lugar, consideraremos el caso de $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$ y en la siguiente sección estudiaremos la situación para $\mathbf{I}\Sigma_1$.

Proposición VI.1 $\mathbf{I\Delta_0 + exp} \iff \mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$

Demostración:
Denotemos por $2^x = y$ a una fórmula Δ_0 que defina el grafo de la función exponencial en $\mathbb{N}$ y tal que (ver sección I.2)

(i) $\mathbf{I\Delta_0} \vdash 2^0 = 1$

(ii) $\mathbf{I\Delta_0} \vdash 2^x = y \leftrightarrow \exists z\,(2^{x+1} = z \wedge 2 \cdot y = z)$

Puesto que $\mathbf{I\Delta_0} \vdash \mathrm{IPF}(2^x = y)$, $\Gamma = \{2^x = y\}$ es un conjunto Π_0–funcional, luego por IV.5–(**1**), sabemos que

$$\mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^* \implies \mathbf{I\Delta_1}(\mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^*)$$

es decir, $\mathbf{I\Delta_0 + exp} \implies \mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$, ya que $\mathbf{I\Delta_0 + exp} \iff \mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^*$. Sólo queda probar que $\mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \implies \mathbf{I\Delta_0 + exp}$. Para ello basta observar que $\exists y\,(2^x = y) \in \Delta_1(\mathbf{I\Delta_0 + exp})$ y, por tanto, de (**i**) y (**ii**), se sigue que

$$\mathbf{I\Delta_0} \vdash \exists y\,(2^0 = y) \wedge \forall x\,(\exists y\,(2^x = y) \rightarrow \exists y\,(2^{x+1} = y))$$

En consecuencia, $\mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \vdash \forall x\, \exists y\, 2^x = y$ □

Nota VI.2 Observemos que la prueba anterior nos muestra que si $\mathbf{T}$ es una teoría Π_n–funcional tal que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$ entonces $\mathbf{I\Delta_1(T)} \vdash \mathbf{exp}$.

Nota VI.3 En relación con $\mathbf{exp}$, merece considerarse aquí la teoría $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$. Acerca de esta teoría permanece sin resolver el problema

$$¿\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \implies \mathbf{B\Sigma_1}?$$

(véase [36]). Si aplicamos a $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$ los resultados obtenidos para teorías con colección Δ_1, obtenemos:

Aserto VI.3.1 $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{B\Sigma_1} + \neg\mathbf{exp})$

Prueba del Aserto:
Si $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{B\Sigma_1} + \neg\mathbf{exp})$, entonces

$$\mathbf{B\Sigma_1} \vdash \neg\mathbf{exp} \rightarrow \varphi$$

y puesto que $\neg\mathbf{exp} \rightarrow \varphi$ es una fórmula Π_2, resulta

$$\mathbf{I\Delta_0} \vdash \neg\mathbf{exp} \rightarrow \varphi$$

luego $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \vdash \varphi$. □

Aserto VI.3.2 $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$ tiene colección Δ_1.

Prueba del Aserto:
Es consecuencia de VI.3.1 (por IV.6 y IV.12). □

Aserto VI.3.3

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{I}\Delta_0 & & \\
\Uparrow & & \\
\mathrm{B}^*\Delta_1(\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp}) & & \\
\Uparrow & & \\
\mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp}) & \Longleftrightarrow & \mathrm{L}\Delta_1(\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp}) \\
\Uparrow & & \\
\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp} & &
\end{array}$$

Prueba del Aserto:
Teniendo en cuenta VI.3.1 y VI.3.2, $\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp}$ es débilmente PK–Δ_1 y tiene inducción Δ_1. Por último, es trivial que

$$\mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathrm{exp}) \not\Longrightarrow \mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp}$$

□

VI.2 La teoría $\mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{I}\Sigma_1)$

Por recursión en $n \in \omega$, definimos la siguiente sucesión de funciones $\{F_n : n \in \omega\}$ de ω en ω.

(–) $F_0(x) = (x+1)^2$

(–) $F_{n+1}(x) = F_n^{x+2}(x+1)$
donde F_n^y denota la composición de F_n consigo misma y veces.

Sea $F : \omega^2 \to \omega$ la función definida por:

$$\forall n, m \in \omega, \quad F(n,m) = F_n(m)$$

F es esencialmente la función de Ackermann. De hecho se tiene que

(–) Para cada $n \in \omega$, F_n es primitiva recursiva

(–) F **no** es primitiva recursiva

De los resultados (mucho más generales) obtenidos por Sommer en [33], se deduce el siguiente resultado:

Teorema VI.4 *Existe una fórmula $\varphi(u,x,y) \in \Delta_0$ tal que:*

(1) $\Gamma_\varphi = \{\varphi(n,x,y) : n \in \omega\}$ *es un conjunto Π_0–funcional.*

(2) $\forall n \in \omega, \quad \mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{I}\Sigma_1) \vdash \exists y\, \varphi(n,0,y)$

(3) $\forall n \in \omega, \quad \mathrm{I}\Delta_1(\mathrm{I}\Sigma_1) \vdash \exists y\, \varphi(n,x,y) \to \exists y\, \varphi(n,x+1,y)$

(4) $\forall n, m, k \in \omega, \quad F_n(m) = k \iff \mathbb{N} \models \varphi(n, m, k)$

(5) φ *es una* Π_0*–envoltura de* $\mathbf{I\Sigma_1}$ *en* $\mathbf{I\Delta_0}$.

Demostración:
Puede probarse modificando convenientemente las técnicas desarrolladas en [33] (véase también [5]). No obstante, estos resultados son casos particulares de VI.14 y VI.15–(2). □

Denotemos por Γ_{Ack} al conjunto Π_0–funcional Γ_φ del teorema VI.4. Como consecuencia de VI.4 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario VI.5 *Se verifica:*

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Sigma_1}) = \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^*_{\text{Ack}})$

(2) $\mathbf{I\Delta_1}(\mathbf{I\Sigma_1}) \iff \mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^*_{\text{Ack}}$

(3) $\mathbf{I\Delta_1}(\mathbf{I\Sigma_1})$ *es* Π_2*–axiomatizable.*

(4) $\mathbf{I\Sigma_1}$ *e* $\mathbf{I\Delta_1}(\mathbf{I\Sigma_1})$ *tienen la misma clase de funciones recursivas.*

Demostración:
Este resultado es un caso particular de VI.16. □

Nota VI.6 En VI.5–(1) se caracterizan las Π_2–consecuencias de $\mathbf{I\Sigma_1}$ a través de una Π_0–envoltura. En general, los resultados presentados en [33] son útiles para caracterizar las Π_2–consecuencias de $\mathbf{I\Sigma_{m+1}}$ o de **PA**, a través de teorías del tipo $\mathbf{I\Delta_0} + \Gamma^*$, donde Γ es un conjunto Π_0–funcional. Esto sugiere estudiar la posibilidad de caracterizar de manera general las Π_{n+2} consecuencias de una teoría **T** mediante una teoría de la forma $\mathbf{I\Sigma_n} + \Gamma^*$ (donde Γ es un conjunto Π_0–funcional). Los resultados del capítulo VII nos muestran que esto no es posible. En concreto se tiene el siguiente resultado:

> **Aserto VI.6.1** ($n \geq 1$) No existe ningún conjunto Π_m–funcional, Γ, (con $m < n$) tal que
>
> $$\mathbf{I\Sigma_n} + \Gamma^* \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}})$$
>
> **Demostración:**
> Por reducción al absurdo, supongamos que existe un conjunto Π_m–funcional, Γ, $(m < n)$, tal que
>
> $$\mathbf{I\Sigma_n} + \Gamma^* \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}})$$
>
> Sea $\varphi(u, x, y)$ una Π_n–envoltura fuerte de $\mathbf{I\Sigma_n}$ en $\mathbf{I\Sigma_n}$ tal que
>
> $$\mathbf{I\Sigma_{n+1}} \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$$

La Π_n–envoltura φ existe por V.26–(**1**). Sean $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I\Sigma}_{n+1})_{\Gamma_\varphi}$, $a \in \mathfrak{A}$, $a < \omega$ y sea $\mathfrak{B}$ el modelo $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ considerado en VII.13. Entonces, por VII.13–(**1**),

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n)$$

y por tanto, $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n$. Además, por VII.12–(**2**),

$$(\bullet) \qquad \mathfrak{B} \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$$

Puesto que $m + 2 \leq n + 1$, Γ^* es una conjunto de fórmulas Π_{n+1}, luego, por ($\bullet$), $\mathfrak{B} \models \Gamma^*$. De este modo,

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$$

Sin embargo, por VII.13–(**1**),

$$\mathfrak{B} \not\models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$$

luego, por VI.16–(**1**),

$$\mathfrak{B} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$$

Lo que es una contradicción. □

Como consecuencia de este resultado, si $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$ caracteriza las Π_{n+2}–consecuencias de una teoría, entonces Γ ha de ser un conjunto Π_n–funcional. En el resto de este capítulo probaremos que esto es posible en el caso de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$, y estudiaremos condiciones generales bajo las cuales $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ caracteriza las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$

VI.3 Conjuntos Π_n–funcionales inductivos

Definición VI.7 *Diremos que un conjunto Π_n–funcional, Γ, es inductivo si, para cada $\varphi \in \Gamma$,*

(1) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \exists y\, \varphi(0, y)$

(2) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \exists y\, \varphi(x, y) \rightarrow \exists y\, \varphi(x + 1, y)$

(3) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \mathrm{IPF}(\varphi)$

Diremos que una Π_n–envoltura, φ, es inductiva si Γ_φ es un conjunto Π_n–funcional inductivo.

Teorema VI.8 *Sea Γ un conjunto Π_n–funcional inductivo. Entonces*

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^* \iff \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Basta tener en cuenta que por IV.5–**(1)**, $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$ tiene inducción Δ_{n+1}, es decir,

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^* \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

($\Longleftarrow$) Obviamente, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$. Para probar que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \Longrightarrow \Gamma^*$, teniendo en cuenta VI.7–**(3)**, sólo necesitaremos que, para cada $\varphi \in \Gamma$,

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$$

Ahora bien, puesto que $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^* \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$, tenemos que $\exists y\, \varphi(x, y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$. Por VI.7–**(1,2)**, resulta que

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \exists y\, \varphi(0, y) \wedge \forall x\, [\exists y\, \varphi(x, y) \rightarrow \exists y\, \varphi(x + 1, y)]$$

luego por inducción en x,

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*) \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \qquad \square$$

Definición VI.9 *Diremos que una teoría* $\mathbf{T}$ *es* Π_n*–funcional inductiva si existe un conjunto* Π_n*–funcional inductivo,* Γ*, tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Nota VI.10 Observemos que si Γ_1 y Γ_2 son conjuntos Π_n–funcionales tales que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma_i^*) \qquad [\![i = 1, 2]\!]$$

entonces, resulta que

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma_1^* \iff \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma_2^*$$

(puesto que cada teoría $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma_i$ es Π_{n+2}–axiomatizable).

Teorema VI.11 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_n*–funcional inductiva. Se verifica:*

(1) *Sea* Γ *un conjunto* Π_n*–funcional, tal que*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

Entonces, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*$

(2) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

(3) $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *tienen las mismas* Π_{n+2}*–consecuencias.*

Demostración:
(1) Puesto que **T** es uan teoría Π_n–funcional inductiva, existe un conjunto Π_n–funcional inductivo, Γ, tal que

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{I}\Sigma_n + \Gamma^*)$$

Teniendo en cuenta la nota VI.10, es suficiente probar que

$$(\bullet) \qquad I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff I\Sigma_n + \Gamma^*$$

Ahora bien, por II.3,

$$I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff I\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

luego $(\bullet)$ se deduce de VI.8.

(2) Se deduce de **(1)** ya que $I\Sigma_n + \Gamma^*$ es Π_{n+2}–axiomatizable.

(3) Es consecuencia de **(1)**. □

Nota VI.12 Sea **T** una teoría Π_n–funcional. Consideremos las siguientes propiedades:

(i) **T** es una teoría Π_n–funcional inductiva.

(ii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \iff I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

(iii) $I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es Π_{n+2}–axiomatizable.

Consideremos la cuestión de la equivalencia entre estas tres condiciones.

Aserto VI.12.1 Sea **T** una teoría Π_n–funcional. Se tiene que:

$$\text{(i)} \iff \text{(ii)} \implies \text{(iii)}$$

Demostración:
Como consecuencia de VI.11, tenemos que (i) $\implies$ (ii) y, obviamente (ii) $\implies$ (iii). Sólo resta probar que (ii) $\implies$ (i). Para ello es suficiente demostrar que si Γ es un conjunto Π_n–funcional tal que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma^*)$$

entonces Γ es inductivo.

En efecto, obsérvese que para cada $\varphi(x, y) \in \Gamma$, las fórmulas

$$\exists y\, \varphi(0, y), \quad \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists y\, \varphi(x + 1, y), \quad \mathrm{IPF}(\varphi)$$

son fórmulas Π_{n+2} demostrables en **T**. Por $(\bullet)$ y **(ii)**, también son demostrables en $I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, lo que prueba que Γ es inductivo. □

Por tanto, sólo queda abierta la cuestión relativa a la equivalencia entre **(ii)** y **(iii)**.

A continuación aplicaremos los resultados anteriores a $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$. En concreto, demostraremos que $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ es una teoría Π_n–funcional inductiva. Obtenemos de este modo, resultados de conservación entre $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ e $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$ y, como consecuencia, una caracterización de las funciones recursivas en $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$. El análisis que presentamos es similar al utilizado por R. Kaye en [12], para analizar las relaciones entre $\mathbf{I\Sigma^-_{n+1}}$ e $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$. En dicho trabajo, Kaye construye, para cada $n, k \in \omega$, una fórmula Σ_{n+1}, que denota por $F_{n,k}(x) = y$, de tal modo que, fijado n, el conjunto de fórmulas

$$\{\forall x\, \exists y, (F_{n,k}(x) = y) : \; k \in \omega\}$$

le permite caracterizar (módulo $\mathbf{I\Sigma_n}$), las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{I\Sigma^-_{n+1}}$. El desarrollo que presentamos en el resto de este capítulo (y que completamos en el apéndice A) adapta esta construción, proporcionando, para cada $n \in \omega$, un conjunto fuertemente Π_n–funcional inductivo, mediante el cual caracterizamos las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$.

Nota VI.13 Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I\Sigma_n}$ y $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ tal que

(1) $\mathbf{T} \vdash \varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

(2) $\mathbf{T} \vdash \varphi(x,y) \rightarrow x^2 < y$

es decir, $\varphi(x,y)$ define en cada modelo de $\mathbf{T}$ una función F (posiblemente parcial) tal que

$$\forall x\, (x^2 < F(x))$$

En lo que sigue utilizaremos que, para cada φ en las condiciones anteriores, existe una fórmula $\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z) \in \Pi_n$ que define la iteración $F^y(x)$ de la función F definida por φ, de tal modo que en $\mathbf{T}$ puedan probarse algunas de las propiedades básicas de dicha iteración. En el apéndice A proporcionamos una definición precisa de $\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)$ y demostramos las propiedades básicas que serán necesarias en este capítulo. El procedimiento seguido para obtener $\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)$ a partir de φ, es similar al descrito en [8] para obtener una definición Δ_0 del grafo de la función exponencial a partir (esencialmente) de la función $x \mapsto x^2$.

A continuación, enunciaremos las propiedades requeridas (ver A.19 y A.20):

Aserto VI.13.1 En las condiciones anteriores, se verifica que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z_1) \wedge \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

(2) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,0,z) \leftrightarrow x = z$

(3) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,1,z) \leftrightarrow \varphi(x,z)$

(4) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,y+1,z) \rightarrow \exists z_0\, [\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z_0) \wedge \varphi(z_0,z)]$

(5) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall y_0 < y\, \exists z_0 < z\, \mathrm{IT}_\varphi(x,y_0,z_0)$

(6) $\mathbf{T} + \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y) \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z) \rightarrow \exists z'\, [\mathrm{IT}_\varphi(x,y+1,z') \wedge \varphi(z,z')]$

(7) Sea $\varphi'(x,y)$ la fórmula $\mathrm{IT}_\varphi(x+1,x+2,y)$, entonces

(a) $\mathbf{T} \vdash \varphi'(x,y) \rightarrow x^2 < y$

(b) Si $\mathbf{T} \vdash x_1 \leq x_2 \wedge \varphi(x_1,y_1) \wedge \varphi(x_2,y_2) \rightarrow y_1 \leq y_2$ entonces

$$\mathbf{T} \vdash x_1 \leq x_2 \wedge \varphi'(x_1,y_1) \wedge \varphi'(x_2,y_2) \rightarrow y_1 \leq y_2$$

Para cada $n \in \omega$, sea $\mathbb{K}_n(x) = y$ la Π_n-fórmula obtenida en V.23 a partir de la Π_n–q–envoltura $\mathbb{E}_n$ construida en dicha proposición (en el caso $n = 0$, sea $\mathbb{K}_n(x) = y$ la fórmula $y = (x+1)^2$). Por recursión, definimos la sucesión de fórmulas $\{\mathbb{F}_{n,k}(x) = y : \ k \in \omega\}$:

- $\mathbb{F}_{n,0}(x) = y$ es la fórmula $\mathbb{K}_n(x) = y$.
- $\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y$ es la fórmula $IT_{\mathbb{F}_{n,k}}(x+1, x+2, y)$.

Sea $\Phi_n = \{\mathbb{F}_{n,k}(x) = y : \ k \in \omega\}$.

Obsérvese que de la definición de $\mathbb{E}$ se sigue que

$$I\Sigma_n \vdash \mathbb{K}_n(x) = y \rightarrow x^2 < y$$

Lema VI.14 *Con las notaciones anteriores, se verifica que:*

(1) *Para cada* $k \in \omega$,

  (a) $I\Sigma_n \vdash \mathbb{F}_{n,k}(x) \rightarrow x^2 < y$

  (b) $I\Sigma_n \vdash IPF(\mathbb{F}_{n,k})$

(2) *Para cada* $k \in \omega$, *son teorema de* $I\Sigma_n + \forall x\, \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$

  (a) $\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(0) = y)$

  (b) $\forall x\, [\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y) \rightarrow \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x+1) = y)]$

(3) $I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n + \Phi_n^*) \vdash \Phi_n^*$

Demostración:

(1) Fácil por inducción en n (y k), utilizando V.23–**(5)** y VI.13.1.

(2) Es consecuencia de las propiedades de la construcción IT enunciadas en VI.13.1, teniendo en cuenta que $\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y$ es la fórmula $IT_{\mathbb{F}_{n,k}}(x+1, x+2, y)$. Sólo probaremos que

$$I\Sigma_n + \forall x\, \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \vdash \forall x\, [\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y) \rightarrow \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x+1) = y)]$$

Sean $\mathfrak{A} \models I\Sigma_n + \forall x\, \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(a) = y)$$

Sea $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbb{F}_{n,k}^{a+2}(a+1) = b$.

Aserto VI.14.1 Para todo $d \leq a$

$$\mathfrak{A} \models \exists y_1, y_2 \leq b\, \left(\mathbb{F}_{n,k}^{d}(a+2) = y_1 \wedge \mathbb{F}_{n,k}^{d+2}(a+1) = y_2 \wedge y_1 \leq y_2\right)$$

Prueba del Aserto:
Por inducción en d.

$\underline{d=0}$: Se comprueba fácilmente, teniendo en cuenta VI.13.1–**(7)** y **(1)**, que

$$\mathfrak{A} \models \mathbb{F}^0_{n,k}(a+2) = a+2 \wedge \forall y \left(\mathbb{F}^2_{n,k}(a+1) = y \to a+2 \leq y\right)$$

$\underline{d \to d+1}$: Supongamos que $d+1 \leq a$ y que existen $b_1 \leq b_2 \leq b$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \mathbb{F}^d_{n,k}(a+2) = b_1 \wedge \mathbb{F}^{d+2}_{n,k}(a+1) = b_2 \wedge b_1 \leq b_2$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y\, \mathbb{F}_{n,k}(x) = y$, por **(1)** y VI.13.1–**(6)**, existen $b'_1, b'_2 \leq b$ verificando que

$$\mathfrak{A} \models \mathbb{F}^{d+1}_{n,k}(a+2) = b'_1 \wedge \mathbb{F}^{d+3}_{n,k}(a+1) = b'_2 \wedge b'_1 \leq b'_2$$

□

Por el aserto, tomando $d = a$, obtenemos

$$\mathfrak{A} \models \exists y \left(\mathbb{F}^a_{n,k}(a+2) = y\right)$$

luego, por VI.13.1–**(7)**,

$$\mathfrak{A} \models \exists y \left(\mathbb{F}^{a+3}_{n,k}(a+2) = y\right)$$

Es decir, $\mathfrak{A} \models \exists y \; (\mathbb{F}_{n,k+1}(a+1) = y)$.

(3) Por inducción en $k \in \omega$, probaremos que:

$$\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n) \vdash \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$$

$\underline{k=0}$: Recordemos que $\mathbb{K}_n(x) = y$ es la fórmula $\mathbb{E}_n(x,x,y)$ y que, por V.23,

$$\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x \exists y\, (\mathbb{K}_n(x) = y)$$

luego, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n) \vdash \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,0}(x) = y)$.

$\underline{k \to k+1}$: Si $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n) \vdash \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$, entonces, por **(2)**

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n) \vdash \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(0) = y) \wedge \forall x\, (\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y) \to \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x+1) = y))$$

Puesto que $\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n)$, obtenemos que

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \Phi^*_n) \vdash \forall x \exists y\, [\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y]$$

lo que termina la demostración. □

Lema VI.15 *Se verifica:*

(1) Φ_n *es un conjunto fuertemente* Π_n*–funcional inductivo.*

(2) *Existe una* Π_n*–envoltura fuerte de* $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ *en* $\mathbf{I\Sigma_n}$*,* $\psi(u,x,y) \in \Pi_n$*, tal que*

$$\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I\Sigma_n} \vdash \mathbb{F}_{n,k}(x) = y \leftrightarrow \psi(k,x,y)$$

(3) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}}) \iff \mathbf{I\Sigma_n} + \Phi_n^*$

Demostración:
(1) Debemos probar que:

(a) $\mathbf{I\Sigma_n} + \Phi_n^*$ es consistente.

(b) Φ_n es un conjunto Π_n–funcional inductivo

(c) Φ_n es fuertemente Π_n–funcional

(a) Se sigue de $\mathbb{N} \models \mathbf{I\Sigma_n} + \Phi_n^*$.
(b) Basta observar que, por VI.14–(**1,2**), son teoremas de $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n} + \Phi_n^*)$, para todo $k \in \omega$:

(–) $\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(0) = y)$

(–) $\forall x\, [\exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \to \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x+1) = y)]$

(–) $\mathrm{IPF}(\mathbb{F}_{n,k})$

(c) Se sigue de IV.30–(**2**), teniendo en cuenta que $\{\mathbb{K}_n(x) = y\} \subset \Phi_n$ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional, por V.23–(**5**).

(2) Véase el apéndice A, teorema A.41.

(3) Es consecuencia de (**2**) y V.4. □

Teorema VI.16 *Para cada* $n \in \omega$*,*

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}}) \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$.

(2) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

(3) $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ *e* $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$ *tienen las mismas funciones recursivas.*

Demostración:
(1) Por VI.15–(**3**),

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}}) \iff \mathbf{I\Sigma_n} + \Phi_n^*$$

y por VI.15–(**1**), Φ_n es un conjunto Π_n–funcional inductivo, luego por VI.11–(**1**),

$$\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} \iff \mathbf{I\Sigma_n} + \Phi_n^*$$

y, en consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma_{n+1}}) \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})}$.

(**2**) y (**3**) son consecuencias de (**1**). □

Lema VI.17 *Para cada $n, k \in \omega$, la fórmula $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$*

$$\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(x, u, y)$$

es una Π_n–envoltura inductiva fuerte de $\mathbf{I\Sigma}_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$.

Demostración:
En el caso $n = k = 0$, se tiene

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{0,0}(x) = y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I\Delta}_0$$

y el resultado se deduce a partir del teorema de Parikh, I.8. Por tanto, en lo que sigue supondremos $k \geq 1$ en el caso $n = 0$. Observemos además que si $n = 0$ y $k \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{0,k}(x) = y) \vdash \mathbf{exp}$$

ya que $\mathbb{K}_0(x) = y$ es la fórmula $y = (x+1)^2$.

Por VI.14–**(1)** y VI.13.1–**(4)**, $\varphi(u, x, y)$ es una Π_n–q–envoltura. Además es trivial comprobar que, para cada $m \in \omega$, son teoremas de $\mathbf{I\Sigma}_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$:

(–) $\exists y\, \varphi(m, 0, y)$

(–) $\exists y\, \varphi(m, x, y) \to \exists y\, \varphi(m, x+1, y)$

En consecuencia, por V.10 (y V.12 en el caso $n = 0$), para demostrar que $\varphi(u, x, y)$ es una Π_n–envoltura es suficiente probar que φ satisface Π_n–IND.

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que para todo $k \in \omega$,

$$\mathfrak{A} \models \exists y < b\, \varphi(k, a, y)$$

Para cada $k \in \omega$, sea b_k tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(k, a, b_k)$, y definamos

$$I = \{c \in \mathfrak{A} : \ c < b_k\}$$

Entonces, se verifica:

(a) $a < I < b$

(b) $I \prec_n^e \mathfrak{A}$.

En efecto, se comprueba fácilmente que, para todo $c \in I$, existe $d \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbb{K}_n(c) = d$, luego por V.23–**(5)**, $I \prec_n^e \mathfrak{A}$.

(c) $I \models \mathbf{I\Sigma}_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$.

Por **(2)**, $I \models \mathbf{I\Delta}_0$ y como acabamos de ver $I \models \forall x \exists y\, (\mathbb{K}_n(x) = y)$. Es fácil comprobar, a partir de la definición de $\mathbb{K}_n$, que

$$I \models \mathbf{I\Delta}_0 + \Gamma_n^*$$

donde $\Gamma_n = \{\mathbb{K}_n(x) = y\}$. Por V.23–**(5)**, Γ_n es un conjunto fuertemente Π_n–funcional, luego por IV.32, $\mathbf{I\Delta}_0 + \Gamma_n^* \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, y por tanto, $I \models \mathbf{I\Sigma}_n$.

Lo que termina la prueba del lema. □

Teorema VI.18 $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1})$ *no es finitamente axiomatizable.*

Demostración:
Por VI.15 y VI.16, Φ_n es un conjunto fuertemente Π_n–funcional inductivo tal que

$$\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n + \Phi_n^*$$

Si $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1})$ es finitamente axiomatizable, entonces, teniendo en cuenta VI.13.1–**(3,5)**, es fácil probar que existe $k \in \omega$, tal que

$$(\bullet) \qquad \mathrm{I}\Sigma_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1})$$

Luego $\mathrm{I}\Sigma_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \vdash \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y)$. Por VI.17, $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_n,k}(x, u, y)$ es una Π_n–envoltura de $\mathrm{I}\Sigma_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y)$ en $\mathrm{I}\Sigma_n$, luego existe $m \in \omega$ tal que

$$\mathrm{I}\Sigma_n \vdash \mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(x, m, y) \to \exists z < y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = z)$$

En particular,

$$\mathrm{I}\Sigma_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \vdash \exists y\, \big(\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(m+1, m, y) \to \exists z < y\, (\mathbb{F}_{n,k+1}(m) = z)\big)$$

y en consecuencia,

$$\mathrm{I}\Sigma_n + \forall x \exists y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = y) \vdash \exists y\, \big(\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(m+1, m, y) \to \exists z < y\, (\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(m+1, m+2, z))\big)$$

Lo que contradice VI.14–**(1,a)**. □

Capítulo VII

La jerarquía $\{\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) :\ m \in \omega\}$

Fijado $n \in \omega$, al variar $m \in \omega$ obtenemos una sucesión de teorías $\{\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) :\ m \in \omega\}$ verificando que

$$\forall m \in \omega, \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m)$$

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de estas teorías así como las relaciones que se dan entre ellas. En particular probaremos que

$$\forall m > n, \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m)$$

VII.1 Los modelos $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$

Notación VII.1 En lo que sigue, si Γ es un conjunto Π_n-funcional, $\psi(x, \vec{y})$ una fórmula de $\mathcal{L}(\Gamma)$ y $t(x)$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, denotaremos por $[\psi, t](z; \vec{y})$ a la fórmula:

$$z \leq t(\max(\vec{y})) \wedge \psi(z, \vec{y}) \wedge \forall x\, (\psi(x, \vec{y}) \to z = x)$$

Para ser más precisos, esta última fórmula puede describirse como sigue:

Supongamos que $\vec{y} = y_1, \ldots, y_m$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, sea $[\psi, t]_j(z; \vec{y})$ la fórmula

$$\vec{y} \leq y_j \to z \leq t(y_j) \wedge \psi(z, \vec{y}) \wedge \forall x\, (\psi(x, \vec{y}) \to z = x)$$

Entonces $[\psi, t](z; \vec{y})$ es la fórmula:

$$\bigwedge_{1 \leq j \leq m} [\psi, t]_j(z; \vec{y})$$

Definición VII.2 *Sean Γ un conjunto Π_n-funcional y $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I\Delta}_0 + \Gamma^*)_\Gamma$. Dado $X \subseteq \mathfrak{A}$, no vacío, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ es la subestructura de $\mathfrak{A}$ cuyo universo es el conjunto:*

$$\{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models [\psi, t](a; \vec{b}),\ \psi \in \Delta_0^\Gamma,\ t(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma)),\ \vec{b} \in X\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ al segmento inicial de $\mathfrak{A}$ determinado por $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

Lema VII.3 *Sean* Γ *un conjunto* Π_n*-funcional,* $\mathfrak{A} \models (I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$ *y* $X \subseteq \mathfrak{A}$, $X \neq \emptyset$.

(1) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ *es una subestructura de* $\mathfrak{A}$.

(2) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X))$.

Demostración:

(1) Sean a_1, $a_2 \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$. Por definición, existen $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2 \in X$, $\psi_1(x, \vec{y}_1)$, $\psi_2(x, \vec{y}_2) \in \Delta_0^\Gamma$, y $t_1(x)$, $t_2(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models [\psi_1, t_1](a_1; \vec{b}_1) \wedge [\psi_2, t_2](a_2; \vec{b}_2).$$

Veamos que $a_1 + a_2 \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

Sean $t(x)$ el término $t_1(x) + t_2(x)$ y $\psi(x, \vec{y}_1, \vec{y}_2) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula:

$$\exists x_1, x_2 \leq x\, (\psi(x_1, \vec{y}_1) \wedge \psi(x_2, \vec{y}_2) \wedge x_1 + x_2 = x).$$

Entonces, $\mathfrak{A} \models [\psi, t](a_1 + a_2; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$, luego $a_1 + a_2 \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

De manera similar, se prueba que $a_1 \cdot a_2 \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

Por último, probemos que, en las condiciones anteriores, para cada $\varphi_0 \in \Gamma$, se verifica $G_{\varphi_0}(a_1) \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

Sean $s(x)$ el término $G_{\varphi_0}(t_1(x))$ y $\theta(x, \vec{y})$ la fórmula (si $\vec{y} = y_1 \dots y_m$)

$$\exists x_1 \leq t_1(y_1 + \cdots + y_m)\, [\psi_1(x_1, \vec{y}) \wedge G_{\varphi_0}(x_1) = x].$$

Veamos que $\mathfrak{A} \models [\theta, s](G_{\varphi_0}(a_1); \vec{b}_1)$. Sea $c = \max(\vec{b}_1)$. Entonces,

$$G_{\varphi_0}(a_1) \leq G_{\varphi_0}(t_1(c)) = s(c)$$

y, además, $\mathfrak{A} \models \theta(x, \vec{b}_1) \rightarrow x = G_{\varphi_0}(a_1)$.

(2) Es evidente que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X))$. Veamos la otra inclusión:

Sea $a \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X))$. Por definición, existen $\psi(x, \vec{y}) \in \Delta_0^\Gamma$, $\vec{b} \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ y $t(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que $\mathfrak{A} \models [\psi, t](a; \vec{b})$. Si $\vec{b} = b_1 \dots b_m$, para cada $i = 1, \dots, m$, existen $\psi_i(x, \vec{v}_i) \in \Delta_0^\Gamma$, $\vec{c}_i \in X$ y $t_i(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models [\psi_i, t_i](b_i; \vec{c}_i).$$

Sea $\vec{z} = \vec{v}_1 \dots \vec{v}_m$ y $s(\vec{z})$ el término $v_{11} + v_{12} + \cdots + v_{m1} + \cdots + v_{mr}$. Sean $\theta(x, \vec{z})$ la fórmula

$$\exists y_1 \dots y_n \leq t_1(s(\vec{z})) + \cdots + t_m(s(\vec{z})) \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(y_i, \vec{v}_i) \wedge \psi(x, \vec{y}) \right)$$

y $t_0(x)$ el término $t(t_1(x) + \cdots + t_m(x))$. Sean $d = \max(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ y $e = \max(\vec{b})$ (en $\mathfrak{A}$). Entonces

$$a \leq t(e) \leq t(t_1(d) + \cdots + t_m(d)) = t_0(d)$$

y, por tanto, $\mathfrak{A} \models [\theta, t_0](a; \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$. Lo que prueba el resultado. $\square$

Nota VII.4 Es posible dar una descripción alternativa de la estructura $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ como sigue: Sea $\mathfrak{B}$ el conjunto formado por los elementos definibles en $\mathfrak{A}$ por fórmulas Δ_0^Γ con parámetros en $X \neq \emptyset$. Es fácil probar que $\mathfrak{B}$ es una substructura de $\mathfrak{A}$ y que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ es el segmento inicial determinado en $\mathfrak{B}$ por el conjunto:

$$\{t(a) : a \in X,\ t(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))\}$$

Proposición VII.5 *Sean Γ un conjunto Π_n-funcional, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$, no vacío. Entonces:*

(1) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0 \mathfrak{A}$

(2) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_1^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0^e \mathfrak{A}$

Demostración:
(1) Utilizaremos el test de Tarski-Vaught.
Sean $\theta(x, \vec{w}) \in \Delta_0^\Gamma$, $t(\vec{w})$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ y $\vec{b} \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$, tales que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq t(\vec{b})\, \theta(x, \vec{b})$$

Sea $\psi(x, \vec{w}) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula

$$\theta(x, \vec{w}) \wedge \forall y < x \, \neg\theta(y, \vec{w}).$$

Puesto que, por IV.23, $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_0^\Gamma$, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a, \vec{b})$. Si $t(\vec{w})$ es $t(w_1, \ldots, w_r)$, sea $s(x)$ el término $t(x, \ldots, x)$. Entonces $\mathfrak{A} \models [\psi, s](a; \vec{b})$, luego $a \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)) = \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ y además $\mathfrak{A} \models \theta(a, \vec{b}) \wedge a \leq t(\vec{b})$.

(2) Como $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \subseteq^e \mathfrak{A}$, resulta que $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0^e \mathfrak{A}$ (la prueba es igual que el correspondiente resultado para $\mathcal{L}$-estructuras, I.31–**(1)**). Por **(1)**, esto nos da $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0 \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ y como $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \subset^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ obtenemos que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_1^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ (como en el caso de $\mathcal{L}$-estructuras, I.34). □

Proposición VII.6 *Sean Γ un conjunto fuertemente Π_n-funcional, $\mathfrak{A} \models (\mathrm{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$, no vacío. Entonces,*

(1) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1,\mathcal{L}}^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$ *y* $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$.

(2) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$ e $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$

(3) *Si $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models (\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)_\Gamma$.*

Demostración:
En primer lugar observemos que, puesto que $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I}\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$, por IV.32, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0^\Gamma$. Además, de VII.5 y la definición de conjunto fuertemente Π_n–funcional, IV.29, se sigue que

$$(\bullet) \qquad \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$$

Veamos ahora que

$$(\star) \qquad \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models I\Delta_0^\Gamma$$

Para $n = 0$ el resultado es consecuencia de VII.5, ya que en tal caso $I\Delta_0^\Gamma$ es Π_1^Γ-axiomatizable.

Consideremos el caso $n \geq 1$. Por $(\bullet)$, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$ luego $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models I\Delta_0$. Además, para cada $\varphi \in \Gamma$, IPF(φ) es una fórmula Π_{n+1} luego $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \mathrm{IPF}(\varphi)$. Por último, si a, $b \in \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$, usando que $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0 \mathfrak{A}$, VII.5 y $(\bullet)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models G_\varphi(a) = b &\iff \mathfrak{A} \models G_\varphi(a) = b \\ &\iff \mathfrak{A} \models \varphi(a, b) \\ &\iff \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a, b) \end{aligned}$$

Así $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models (I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$. Luego $(\star)$, se sigue de IV.32–**(2)**.

A continuación probaremos

$$(\bullet\bullet) \qquad \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1,\mathcal{L}} \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$$

Sean $\varphi(x, \vec{w}) \in \Pi_n$ y $\vec{b} \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ tales que $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \exists x\, \varphi(x, \vec{b})$. Por IV.38, existe $\varphi_0(x, \vec{w}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(x, \vec{w}) \leftrightarrow \varphi_0(x, \vec{w})$$

Por $(\star)$, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models I\Delta_0^\Gamma$, luego $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \varphi(x, \vec{b}) \leftrightarrow \varphi_0(x, \vec{b})$. Entonces $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \exists x\, \varphi_0(x, \vec{b})$, luego por VII.5–**(2)**, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \exists x\, \varphi_0(x, \vec{b})$. De este modo existe $a \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$, tal que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \varphi_0(a, \vec{b})$ y, de nuevo por VII.5–**(2)**, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \varphi_0(a, \vec{b})$. Luego, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a, \vec{b})$. Por el test de Tarski-Vaught, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1,\mathcal{L}} \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$.

Ahora, por $(\bullet)$ y $(\bullet\bullet)$, tenemos

$$\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1,\mathcal{L}}^c \mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$$

y, en consecuencia, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$. Lo que prueba **(1)**.

Teniendo en cuenta $(\star)$, para probar **(2)**, sólo queda demostrar que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models I\Delta_0^\Gamma$. Esto puede probarse de manera similar a $(\star)$ teniendo en cuenta que, por **(1)**, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$ y que, por VII.5–**(1)**, $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_0 \mathfrak{A}$

Para probar **(3)**, observemos que si $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$ es un segmento propio. Dado que Γ es fuertemente Π_n–funcional, por IV.32, $I\Delta_0^\Gamma \implies I\Sigma_n$, luego $\mathfrak{A} \models I\Sigma_n$. En consecuencia, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models B\Sigma_{n+1}$ y, por el apartado **(2)**, $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models (I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$, luego $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X) \models (B\Sigma_{n+1} + \Gamma^*)_\Gamma$. □

Nota VII.7 Como puede comprobarse, las propiedades de las estructuras $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ e $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ son similares a las de $\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ e $\mathcal{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. De hecho, estas estructuras son casos particulares de las estructuras $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ e $\mathcal{I}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$. En concreto, tenemos

(1) Si $\mathfrak{A} \models I\Delta_0$, entonces $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A}) = \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, X)$, tomando $X = \mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ y $\Gamma = \emptyset$. (Basta tener en cuenta que $\mathcal{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathcal{K}_1(\mathfrak{A})$).

(2) En general, si $\mathfrak{A} \models I\Sigma_n$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$,

$$\mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{K}_0^{\Gamma}(\mathfrak{A}, Y)$$

donde $\Gamma = \Gamma_{\varphi}$ (siendo $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$ una Π_n–envoltura fuerte de $I\Sigma_n$ en $I\Sigma_n$) e Y es el conjunto de los elementos de $\mathfrak{A}$ definibles por fórmulas Δ_0^{Γ} con parámetros en X.

VII.2 Envolturas y modelos Γ–acotados

Notación VII.8 Sea φ una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$. Definimos

$$\Gamma_{\varphi} = \{\varphi(k, x, y) : k \in \omega\}$$

Para cada $k \in \omega$, denotaremos por G_k el símbolo de función 1–aria asociado a $\varphi(k, x, y)$ en $\mathcal{L}(\Gamma_{\varphi})$. Además, escribiremos $[\psi, k](z; \vec{y})$ en vez de $[\psi, G_k](z; \vec{y})$.

Definición VII.9 *Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n-funcional. Diremos que $\mathfrak{B}$ es un modelo Γ-acotado si*

(1) $\mathfrak{B} \models (I\Delta_0 + \Gamma^*)_{\Gamma}$

(2) *Existe $c \in \mathfrak{B}$ tal que $\mathcal{K}_0^{\Gamma}(\mathfrak{B}, c) = \mathfrak{B}$.*

Nota VII.10 En esta sección utilizaremos modelos Γ-acotados para probar que

$$\forall m > n, \quad I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1}) \quad \not\Longrightarrow \quad I\Delta_{n+1}(I\Sigma_m)$$

Los modelos que utilizaremos serán modelos Γ–acotados, donde $\Gamma = \Gamma_{\varphi}$ para cierta Π_n–envoltura fuerte, $\varphi \in \Pi_n$. El hecho central aquí es que si $\mathfrak{A}$ es uno de tales modelos, entonces ω es definible en $\mathfrak{A}$ por una fórmula Σ_{n+1}. Este es el contenido del siguiente lema.

Lema VII.11 *Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $I\Sigma_n$, $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$ una Π_n-envoltura fuerte de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$, $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_{\Gamma_{\varphi}}$, no estándar y $a \in \mathfrak{A}$, $a > \omega$. Entonces:*

(1) *$\{G_k(a) : k \in \omega\}$ es cofinal en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_{\varphi}}(\mathfrak{A}, a)$.*

(2) *Si*

$$\mathfrak{A} \models \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$$

entonces ω es definible en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_{\varphi}}(\mathfrak{A}, a)$ por la fórmula $\exists y\, \varphi(u, a, y)$ (una fórmula Σ_{n+1} con a como parámetro).

Demostración:
(1) Sea $b \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$. Entonces existen $\psi(x, y) \in \Delta_0^{\Gamma_\varphi}$ y un término $t(x)$ de $\mathcal{L}(\Gamma_\varphi)$ tales que $\mathfrak{A} \models [\psi, t](b; a)$.

Por IV.21, existe $\theta(x, z) \in \Sigma_{n+1}$ tal que

$$(\mathbf{T} + \Gamma_\varphi^*)_{\Gamma_\varphi} \vdash t(x) = z \leftrightarrow \theta(x, z)$$

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \Gamma_\varphi^*$, de lo anterior se sigue que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x, y)$. En consecuencia, existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(k, x, y) \to \exists z \leq y\, \theta(x, z)$$

Por tanto, $(\mathbf{T} + \Gamma_\varphi^*)_{\Gamma_\varphi} \vdash t(x) \leq G_k(x)$. En particular, $b \leq t(a) \leq G_k(a)$.

(2) Veamos que

$$\omega = \{c \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) : \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \exists y\, \varphi(c, a, y)\}$$

En efecto, $\omega \subseteq \{c \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) : \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \exists y\, \varphi(c, a, y)\}$ ya que, para todo $k \in \omega$, $G_k(a) \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$. Para probar la inclusión contraria usaremos el siguiente aserto:

Aserto VII.11.1 Sean $c > \omega$ y $d \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(c, a, d)$. Entonces

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models G_k(a) < d$$

Prueba del Aserto:
Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $k \in \omega$ tal que $\mathfrak{A} \models d \leq G_k(a)$. Entonces, al ser $c > w$,

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, [u > k \wedge \exists y \leq G_k(a)\, \varphi(u, a, y)]$$

Puesto que, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, existe $c_0 \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models c_0 = (\mu u)(u > k \wedge \exists y \leq d\, \varphi(u, a, y))$$

Se verifica que $c_0 > \omega$, pues

$$(\bullet) \quad \mathfrak{A} \models \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \to y_1 < y_2]$$

Además, $\mathfrak{A} \models \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y)$, luego existe d_0

$$\mathfrak{A} \models G_k(a) < d_0 \wedge \varphi(c_0 - 1, a, d_0))]$$

En consecuencia, teniendo presente $(\bullet)$, resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall y\, [\varphi(c_0, a, y) \to d_0 < y]$$

en contradicción con la definición de c_0. $\square$

Sea $c \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$, $c > \omega$, tal que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a) \models \exists y\, \varphi(c, a, y)$. Entonces existe $d \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$ tal que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a) \models \varphi(c, a, d)$. Por VII.6–(**1**), $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$ (recordemos que Γ_φ es fuertemente Π_n–funcional), luego $\mathfrak{A} \models \varphi(c, a, d)$. Entonces, por el aserto,

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models G_k(a) < d$$

En consecuencia, por (**1**), $d \notin \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$, en contradicción con la elección de d. □

Teorema VII.12 *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_n*–funcional (tal que* $\mathbf{T} \vdash$ **exp**, *si* $n = 0$*) y* $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$ *una* Π_n*–envoltura fuerte de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}$. *Entonces para cada* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_{\Gamma_\varphi}$ *y* $a \in \mathfrak{A}$, *no estándar, se tiene:*

(**1**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_1^c \mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_0^e \mathfrak{A}$

(**2**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n+1,\mathcal{L}}^c \mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n,\mathcal{L}}^e \mathfrak{A}$ *y* $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$

(**3**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I\Delta}_0^{\Gamma_\varphi}$ *y* $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$

(**4**) $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$

(**5**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ *no es cofinal en* $\mathfrak{A}$, *entonces* $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

(**6**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(**7**) $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.

Demostración:
(**1**) Puesto que $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$. Además φ es una Π_n–envoltura fuerte de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}$, luego Γ_φ es un conjunto fuertemente Π_n–funcional y $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma_\varphi^*$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models (\mathbf{I\Delta}_0 + \Gamma_\varphi^*)_{\Gamma_\varphi}$ y, por tanto, el resultado se deduce de VII.5–(**2**).

(**2**) Se prueba como (**1**) teniendo ahora en cuenta VII.6–(**1**).

(**3**) Por VII.6–(**2**), sólo falta comprobar que $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. Sea $b \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$. Puesto que $\mathfrak{A}$ es Γ_φ-acotado, existen $\psi \in \Delta_0^{\Gamma_\varphi}$ y $k \in \omega$ tales que $\mathfrak{A} \models [\psi, k](b; a)$. Además, Γ_φ es fuertemente Π_n–funcional luego, por IV.33 (IV.22 para $n = 0$), existen $\theta(x, y, z) \in \Pi_n$ y un término $t(x, y)$ de $\mathcal{L}(\Gamma_\varphi)$ tales que

$$\mathbf{I\Delta}_0^{\Gamma_\varphi} \vdash \forall z \geq t(x, y)\, [\psi(x, y) \leftrightarrow \theta(x, y, z)]$$

Sean $c_1, c_2 \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ tales que $c_1 \geq b$ y $c_2 \geq t(c_1, a)$. Puesto que $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a), \mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_0^{\Gamma_\varphi}$,

(–) $\mathfrak{A} \models \psi(x, a) \leftrightarrow [\theta(x, a, c_2) \wedge x \leq c_1]$

(–) $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a) \models \psi(x, a) \leftrightarrow [\theta(x, a, c_2) \wedge x \leq c_1]$

Sea $\theta'(x, y, z_1, z_2)$ la fórmula $\theta(x, y, z_2) \wedge x \leq z_1$.

Distinguimos ahora dos casos:

Si $n = 0$, entonces por ser $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$, existe $m \in \omega$ tal que

$$\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{V}_0(\ulcorner\theta'\urcorner, \langle b, a, c_1, c_2\rangle, 2^{(\max(b,a,c_1,c_2)+2)^m})$$

Sea $d \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$, $d > \omega$. Entonces en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ se verifica que

$$\exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Delta_0}(w) \wedge \\ \exists z_1 \exists z_2 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(w, \langle b, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(b,a,z_1,z_2)+2)^a}) \wedge \\ \forall x < b \, \neg \mathbf{V}_0(w, \langle x, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(x,a,z_1,z_2)+2)^a}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Puesto que b es un elemento arbitrario de $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$, entonces $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ satisface la fórmula

$$\forall u \leq d + 1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Delta_0}(w) \wedge \\ \exists z_1 \exists z_2 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(w, \langle u, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(u,a,z_1,z_2)+2)^a}) \wedge \\ \forall x < u \, \neg \mathbf{V}_0(w, \langle x, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(x,a,z_1,z_2)+2)^a}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Denotemos esta última fórmula por $\gamma(d, a)$. Entonces $\gamma(d, a)$ es Σ_1 en $\mathbf{B\Sigma}_1$. Si $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{B\Sigma}_1$, entonces, existe $e \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ tal que

$$\forall u \leq d + 1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Delta_0}(w) \wedge \\ \exists z_1, z_2 < e \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(w, \langle u, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(u,a,z_1,z_2)+2)^a}) \wedge \\ \forall x < u \, \neg \mathbf{V}_0(w, \langle x, a, z_1, z_2\rangle, 2^{(\max(x,a,z_1,z_2)+2)^a}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

lo que permite definir una aplicación inyectiva de $(\leq d + 1)$ en $(\leq d)$, en contradicción con PHP para conjunto finitos demostrable en $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$ (I.11–(**2**)).

En el caso $n \geq 1$, se procede de manera similar utilizando ahora $\mathbf{Sat}_{\Pi_n}$. Razonando como antes denotamos por $\gamma(d, a)$ la fórmula

$$\forall u \leq d + 1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Pi_n}(w) \wedge \\ \exists z_1 \exists z_2 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle u, a, z_1, z_2\rangle) \wedge \\ \forall x < u \, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x, a, z_1, z_2\rangle) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ahora γ es una fórmula Σ_{n+1} en $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$, por tanto, si $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$, entonces existe $e \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ tal que

$$\forall u \leq d + 1 \, \exists w \leq d \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Form}_{\Pi_n}(w) \wedge \\ \exists z_1, z_2 < e \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle u, a, z_1, z_2\rangle) \wedge \\ \forall x < u \, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x, a, z_1, z_2\rangle) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y obtenemos una contradicción como el caso anterior.

(**4**) Probaremos que $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_{\Gamma_\varphi}$ y, por (**2**), $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \prec_{n,\mathcal{L}} \mathfrak{A}$, se deduce que

$$\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \exists y \, \varphi(k, a, y) \wedge \forall u < k \, \exists z < y \, \varphi(u, a, z)]$$

Puesto que $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models I\Sigma_{n+1}$, por overspill, existe $c \in \mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$, $c > \omega$, tal que

$$\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \exists y\, [\varphi(c, a, y) \wedge \forall u < c\, \exists z < y\, \varphi(u, a, z)]$$

Sea $b \in \mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ tal que

$$\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \varphi(c, a, b) \wedge \forall u < c\, \exists z < b\, \varphi(u, a, z)$$

Entonces para cada $k \in \omega$, $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models G_k(a) < b$; lo cual es una contradicción, ya que, por VII.11, $\{G_k(a) : k \in \omega\}$ es cofinal en $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$.

(5) Puesto que $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$, por VII.6–**(3)**, $\mathcal{I}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models B\Sigma_{n+1}$.

(6) Sea $\psi(x, y) \in \Pi_n$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$. Entonces existe $k \in \omega$ tal que

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, \forall y\, [\varphi(k, x, y) \rightarrow \exists z \leq y\, \psi(x, y)]$$

Sea $\psi'(x, z) \in \Delta_{n+1}(B\Sigma_n)$ la fórmula $\psi(x, z) \wedge \forall w < z\, \neg\psi(x, w)$. Para cada $b \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$, existe un único $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi'(b, c)$. Es fácil ver que $\psi'(x, z) \in \Delta_{n+1}(I\Delta_0 + \Gamma_\varphi^*)$; luego, teniendo en cuenta que φ es una Π_n–envoltura fuerte, por IV.36, existe $\psi_0(x, y) \in \Delta_0^{\Gamma_\varphi}$ tal que

$$I\Delta_0^{\Gamma_\varphi} \vdash \psi'(x, y) \leftrightarrow \psi_0(x, y)$$

(Observemos que, en el caso $n = 0$, ψ' es ya Δ_0). Por otra parte $\mathfrak{A} \models [\psi_0, k](c; b)$, luego $c \in \mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$. Puesto que $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models I\Delta_0^{\Gamma_\varphi}$, esto nos da $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \psi'(b, c)$ y, dado que b era un elemento arbitrario, esto prueba que $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models \forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$.

(7) Es consecuencia de **(6)** y de II.25, ya que $\mathbf{T}$ es Π_n-funcional. □

Teorema VII.13 *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_n*–funcional, (tal que* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$*, si* $n = 0$*),* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{T}$ *y* $\varphi(u, x, y) \in \Pi_n$ *una* Π_n*–envoltura fuerte de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}$ *tales que*

$$\mathbf{T}' \vdash \forall u\, \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \rightarrow y_1 < y_2]$$

Entonces

(1) *Para todo* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}'_{\Gamma_\varphi}$ *y* $a \in \mathfrak{A}$*,* $a > \omega$*, se verifica:*

- **(a)** $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \models I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$
- **(b)** $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$

(2) $I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}') \quad \not\Longrightarrow \quad I\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$

Demostración:
(1) El apartado (a) es VII.12–**(7)**. Probemos (b):

Por VII.11–**(2)**, la fórmula $\exists y\, \varphi(u, a, y)$ define en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ el conjunto de los números naturales, ω. Puesto que $\exists y\, \varphi(u, x, y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$, por overspill, $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models I\Delta_{n+1}(\mathbf{T}')$

(2) Es consecuencia de (1). □

Como consecuencia de los resultados de existencia de Π_n–envolturas fuertes que obtuvimos en V.26 y V.17–(2) (en el caso $n = 0$), se tiene el siguiente teorema:

Teorema VII.14 *Para todo $n \geq 0$ se verifica:*
(1) *Para todo $m \leq n$,* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) \iff \mathbf{I\Sigma}_m$

(2) *Para cada $m \geq n$,* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m)$

(3) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbb{N}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})$

Demostración:
(1) Por II.28 para cada teoría $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B\Sigma}_{n+1})$ se tiene

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I\Sigma}_n$$

lo que proporciona el resultado, si $\mathbf{T} = \mathbf{I\Sigma}_m$, con $m \leq n$.

(2) Si $n \geq 1$, por V.26–(1), para cada $m \geq n$ existe una Π_n–envoltura fuerte $\varphi(u, x, y)$ de $\mathbf{I\Sigma}_m$ en $\mathbf{I\Sigma}_m$ tal que

$$\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \forall u \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \to y_1 < y_2]$$

En consecuencia, por VII.13,

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m)$$

(3) Es similar a (2) utilizando V.26–(2). □

Proposición VII.15 $(n \geq 0)$. *Para todo $m \geq n$,*

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$$

Demostración:
Para $n = 0$ el resultado es consecuencia de VI.2, ya que, para todo m

$$\mathbf{B\Sigma}_1 \nvdash \mathbf{exp} \quad \text{pero} \quad \mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \vdash \mathbf{exp}$$

Si $n \geq 1$, por V.26, existe una Π_n–envoltura fuerte $\varphi(u, x, y)$ de $\mathbf{I\Sigma}_n$ en $\mathbf{I\Sigma}_n$ tal que

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \forall u \forall x\, \exists y\, \varphi(u, x, y) \wedge \forall u, x, y_1, y_2\, [\varphi(u, x, y_1) \wedge \varphi(u + 1, x, y_2) \to y_1 < y_2]$$

Por VII.13,

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) \iff \mathbf{I\Sigma}_n$$

Por VI.16–(2), $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$ es Π_{n+2}–axiomatizable y $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es una extensión Π_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_n$, luego

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$$

Lo que termina la prueba del resultado. □

Corolario VII.16 *Dado $n \geq 0$, se verifica:*

(1) *Para cada $m \geq n$,* $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{m+1}) \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{m+1})$

(2) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$

(3) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbb{N})$

Demostración:
Observemos en primer lugar que para toda teoría $\mathbf{T}$,

$$\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Por otra parte, si $\mathbf{T}$ tiene colección, entonces, por II.20, $\mathbf{T}$ es débilmente PK–Δ_{n+1} y, en particular,

$$\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$$

Por tanto, **(1)**, **(2)** y **(3)** son consecuencias de VII.15 y de que las teorías $\mathrm{I}\Sigma_{m+1}$ $(m \geq n)$, **PA** y $\mathbf{Th}(\mathbb{N})$ tienen colección Δ_{n+1}. □

Corolario VII.17 *Las teorías $\mathrm{I}\Sigma_m$, $m > n$,* **PA** *y* $\mathbf{Th}(\mathbb{N})$ *son PK–Δ_{n+1}.* □

Nota VII.18 Observemos que, como consecuencia de II.26–**(1)**, se tiene que

$$\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \quad \models\!\!\!\Longrightarrow \quad \mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbb{N})$$

VII.3 Δ_0^Γ–tipos y ultrapotencias definibles

En esta sección caracterizamos los modelos Γ–acotados, mediante un cierto tipo de ultrapotencias definibles. La construcción que presentamos es una adaptación de las ultrapotencias recursivas definidas por Hirschfeld en [9].

Nota VII.19 A lo largo de toda esta sección consideraremos un conjunto Π_n–funcional, Γ, y un modelo $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0^\Gamma$ fijos. Comenzaremos describiendo la ultrapotencia en que estamos interesados.

Denotemos por $\mathcal{B}^\Gamma$ el álgebra de Boole de los conjuntos Δ_0^Γ–definibles (sin parámetros) en $\mathfrak{A}$.

Sea $\mathcal{F}^\Gamma$ el conjunto de las funciones de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$, cuyo grafo es Δ_0^Γ–definible (sin parámetros) y están acotadas por un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, es decir, $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ si existen $\varphi(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ y $t(x)$, término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, tales que

(1) $\forall a, b \in \mathfrak{A}, \quad f(a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(a,b)$

(2) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y \leq t(x)\, \varphi(x,y)$

Para cada ultrafiltro de U de $\mathcal{B}^\Gamma$, definimos en $\mathcal{F}^\Gamma$ la siguiente relación: sean $f, g \in \mathcal{F}^\Gamma$

$$f \sim_U g \quad \Longleftrightarrow \quad \{a \in \mathfrak{A} : f(a) = g(a)\} \in U$$

Aserto VII.19.1 $\sim_U$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}^\Gamma$. □

Sea $\mathfrak{A}^U$ el conjunto cociente de $\mathcal{F}^\Gamma$ por $\sim_U$, es decir, $\mathfrak{A}^U = \mathcal{F}^\Gamma / \sim_U$. Para cada $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ denotemos por $[f]$ la clase de f. Entonces podemos considerar $\mathfrak{A}^U$ como una $\mathcal{L}(\Gamma)$-estructura definiendo:

- $[f] + [g] = [f + g]$ y $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$
- $[f] < [g] \iff \{a \in \mathfrak{A} :\ f(a) < g(a)\} \in U$
- Las constantes **0** y **1** se interpretan como la clase de las funciones de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$ constantemente iguales a 0 y a 1 (respectivamente).
- Dada $\varphi \in \Gamma$, $G_\varphi([f]) = [G_\varphi \circ f]$

Aserto VII.19.2 $\mathfrak{A}^U$ una $\mathcal{L}(\Gamma)$–estructura. □

El siguiente resultado nos será útil más adelante:

Aserto VII.19.3 Si $t(x_1, \dots, x_k)$ es un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, y $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}^\Gamma$, entonces
$$\mathfrak{A}^U(t([f_1], \dots, [f_k])) = [g]$$
donde $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ está definida por $g(a) = \mathfrak{A}(t(f_1(a), \dots, f_k(a)))$. □

A cada Δ_0^Γ–tipo, p, podemos asociarle la familia de conjuntos definidos en $\mathfrak{A}$ por las fórmulas de p. Es fácil comprobar que la familia de subconjuntos de $\mathfrak{A}$ así obtenida es un ultrafiltro de $\mathcal{B}^\Gamma$. Recíprocamente, si U es un ultrafiltro de $\mathcal{B}^\Gamma$, entonces el conjunto fórmado por las fórmulas Δ_0^Γ que definen los elementos de U es un Δ_0^Γ–tipo. De este modo, queda establecida una biyección entre los Δ_0^Γ–tipos de $\mathfrak{A}$ y los ultrafiltros de $\mathcal{B}^\Gamma$:

Aserto VII.19.4 Sea $\mathfrak{A} \models I\Delta_0^\Gamma$. Existe una correspondencia biyectiva entre los ultrafiltros de $\mathcal{B}^\Gamma$y los Δ_0^Γ–tipos de $\mathbf{Th}(\mathfrak{A})$, dada por
$$\begin{array}{l} U \mapsto \mathrm{tp}_U = \{\varphi(x) \in \Delta_0^\Gamma :\ \varphi(\mathfrak{A}) \in U\} \\ p \mapsto \mathrm{Ultr}(p) = \{\varphi(\mathfrak{A}) :\ \varphi \in p\} \end{array}$$
donde para cada fórmula $\varphi(x)$, $\varphi(\mathfrak{A}) = \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$. □

Diremos que $\mathfrak{A}^U$ es una ultrapotencia definible acotada de $\mathfrak{A}$. La propiedad central acerca de $\mathfrak{A}^U$ queda recogida en los dos siguientes lemas (compárense con el teorema 2.3 de [9]).

Lema VII.20 *Sea* $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$. *Entonces*
$$\mathfrak{A}^U \models \varphi([f_1], \dots, [f_k]) \iff \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(f_1(a), \dots, f_k(a))\} \in U$$

Demostración:
Por inducción en $\varphi \in \Delta_0^\Gamma$.

Caso 1: φ es atómica.

Aquí debemos distinguir dos casos:

(−) $\varphi(\vec{x})$ es $t_1(\vec{x}) = t_2(\vec{x})$. Entonces

$$\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}]) \iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models t_1(\vec{f}(a)) = t_2(\vec{f}(a))\} \in U$$

Sean g_1 y g_2 las funciones definidas por:

(−) $g_1(a) = \mathfrak{A}(t_1(\vec{f}(a)))$, y

(−) $g_2(a) = \mathfrak{A}(t_2(\vec{f}(a)))$

Entonces g_1 y g_2 son Δ_0^Γ–definibles y están acotadas (en $\mathfrak{A}$) por un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$, luego $g_1, g_2 \in \mathcal{F}^U$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}]) &\iff \mathfrak{A}^U \models t_1([\vec{f}]) = t_2([\vec{f}]) \\
&\iff [g_1] = [g_2] \qquad [\![\text{VII.19.3}]\!] \\
&\iff \{a \in \mathfrak{A} : g_1(a) = g_2(a)\} \in U \\
&\iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models t_1(\vec{f}(a)) = t_2(\vec{f}(a))\} \in U \\
&\iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} \in U
\end{aligned}$$

(−) $\varphi(\vec{x})$ es $t_1(\vec{x}) < t_2(\vec{x})$. Se razona como en el caso anterior.

<u>Caso 2</u>: φ es $\neg\psi$ o bien es $\psi_1 \vee \psi_2$.

Puesto que U es un ultrafiltro el resultado se obtiene fácilmente a partir de la hipótesis de inducción.

<u>Caso 3</u>: φ es $\exists y \leq t(\vec{x})\, \psi(\vec{x}, y)$.

Consideremos la fórmula $\theta(\vec{x}, y) \in \Delta_0^\Gamma$:

$$[\exists v \leq t(\vec{x})\, \psi(\vec{x}, v) \wedge \psi(\vec{x}, y) \wedge \forall z < y\, \neg\psi(\vec{x}, z)] \vee [\forall v \leq t(\vec{x})\, \neg\psi(\vec{x}, v) \wedge y = 0]$$

Puesto que $f_1, \ldots, f_k$ son Δ_0^Γ–definibles y están acotadas en $\mathfrak{A}$ por términos de $\mathcal{L}(\Gamma)$, la función g de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$ dada por

$$g(a) = b \iff \mathfrak{A} \models \theta(f_1(a), \ldots, f_k(a), b)$$

está en $\mathcal{F}^\Gamma$ y además se verifica que

$$\mathfrak{A}^U \models [g] \leq t([f_1], \ldots, [f_k])$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} \in U &\iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \exists y \leq t(\vec{f}(a))\, \psi(\vec{f}(a), y)\} \in U \\
&\iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \psi(\vec{f}(a), g(a))\} \in U \\
&\iff \mathfrak{A}^U \models \psi([\vec{f}], [g])\} \qquad [\![\text{Hip. Ind.}]\!] \\
&\Longrightarrow \mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}])\}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}]) & \iff & \exists h \in \mathcal{F}^\Gamma,\ \mathfrak{A}^U \models [h] \leq t([\vec{f}]) \wedge \psi([\vec{f}],[h]) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{ll} \{a :\ \mathfrak{A} \models h(a) \leq t(\vec{f}(a))\} \in U & \\ \{a :\ \mathfrak{A} \models \psi(\vec{f}(a), h(a))\} \in U & [\![\text{ Hip. Ind.}]\!] \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & \{a :\ \mathfrak{A} \models h(a) \leq t(\vec{f}(a)) \wedge \psi(\vec{f}(a), h(a))\} \in U \\ & \Longrightarrow & \{a :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} \in U \end{array}$$

Esto termina la prueba del lema. □

Lema VII.21 *Sea* Γ *es un conjunto fuertemente* Π_n*-funcional. Para cada* $m \leq n$, $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Sigma_{m+1}$ *y* $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}^\Gamma$ *se verifica;*

(1) $\mathfrak{A}^U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_k]) \iff \exists\, C \in U,\ C \subseteq \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(f_1(a), \ldots, f_k(a))\}$

(2) *Si* $m < n$, *entonces*

$$\mathfrak{A}^U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_k]) \iff \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(f_1(a), \ldots, f_k(a))\} \in U$$

Demostración:
Probaremos **(1)** y **(2)**, simultáneamente, por inducción en $m \leq n$.

$\underline{m = 0}$: Sean $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_1$ y $\varphi'(\vec{x}, y) \in \Delta_0$ tales que $\varphi(\vec{x})$ es $\exists y\, \varphi'(\vec{x}, y)$. Si $\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}])$, entonces existe $h \in \mathcal{F}^\Gamma$ tal que $\mathfrak{A}^U \models \varphi'([\vec{f}], [h])$. Puesto que $\varphi' \in \Delta_0$ por VII.20,

$$\{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), h(a))\} \in U$$

y es fácil ver que

$$(\bullet) \qquad C = \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), h(a))\} \subseteq \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}$$

lo que prueba la implicación ($\Longrightarrow$) de **(1)**.

Si $m < n$, entonces, por IV.37–**(1)**, existe un término $t(\vec{x})$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \exists y\, \varphi'(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists y \leq t(\vec{x})\, \varphi'(\vec{x}, y)$$

luego

$$\{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} = \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \exists y \leq t(\vec{f}(a))\, \varphi'(\vec{f}(a), y)\} \in \mathcal{B}^\Gamma$$

y por $(\bullet)$, $\{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} \in U$. Lo que prueba la implicación ($\Longrightarrow$) de **(2)**.

Para probar la implicación restante en ambos casos, supongamos que existe $C \in U$ tal que

$$C \subseteq \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}.$$

(en el caso **(2)**, $C = \{a \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}$).

Puesto que $C \in U$, existe $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \theta(a)\}$$

Para cada $j = 1, \ldots, k$, sea $\theta_j(x, y)$ una fórmula Δ_0^Γ (sin parámetros) que define a f_j en $\mathfrak{A}$ y $t_j(x)$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ que acota a f_i en $\mathfrak{A}$. Sea $\gamma_0(x, y) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula

$$\exists y_1 \leq t_1(x) \ldots \exists y_k \leq t_k(x) \left[\bigwedge_{j=1}^{k} \theta_j(x, y_j) \wedge \varphi'(y_1, \ldots, y_k, y)\right]$$

Por último, sea $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ la función definida en $\mathfrak{A}$ por la fórmula $\gamma(x, y) \in \Delta_0^\Gamma$

$$[\theta(x) \wedge \gamma_0(x, y) \wedge \forall z < y \, \neg\gamma_0(x, z)] \vee [\neg\theta(x) \wedge y = 0]$$

Entonces, $I\Delta_0^\Gamma \vdash \forall x \, \exists y \, \gamma(x, y)$. Luego, por IV.35, existe un término $t(x)$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \forall x \, \exists y \leq t(x) \, \gamma(x, y)$$

En consecuencia, $g \in \mathcal{F}^\Gamma$. Además, por la definición de g se sigue que

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \theta(a)\} \subseteq \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} \in U$$

ya que $C \in U$ por hipótesis. En consecuencia, por VII.20,

$$\mathfrak{A}^U \models \varphi'([\vec{f}], [g])$$

luego $\mathfrak{A}^U \models \exists y \, \varphi'([\vec{f}], y)$, es decir, $\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}])$. Lo que prueba las equivalencias **(1)** y **(2)**, para $n = 0$.

$\underline{m \to m+1}$: La prueba es análoga a la del caso $m = 0$.

Sean $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_{m+2}$ y $\varphi'(\vec{x}, y) \in \Pi_{m+1}$ tales que $\varphi(\vec{x})$ es $\exists y \, \varphi'(\vec{x}, y)$.

Si $\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}])$, entonces existe $h \in \mathcal{F}^\Gamma$ tal que $\mathfrak{A}^U \models \varphi'([\vec{f}], [h])$. Puesto que $m+1 \leq n$, $\varphi'(\vec{x}, y) \in \Delta_{n+1}(I\Delta_0 + \Gamma^*)$ luego, por IV.38 existe $\varphi_0(\vec{x}, y) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}, y) \leftrightarrow \varphi_0(\vec{x}, y)$$

de este modo

$$(\star) \qquad \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \neg\varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \neg\psi(\vec{f}(a), g(a))\} \in \mathcal{B}^\Gamma$$

Obviamente $\mathfrak{A}^U \not\models \neg\varphi'([\vec{f}], [h])$, y $\neg\varphi'(\vec{x}, y) \in \Sigma_{m+1}$. Puesto que $m < n$, por hipótesis de inducción,

$$\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \neg\varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} \notin U$$

Puesto que U es un ultrafiltro de $\mathcal{B}^\Gamma$, por $(\star)$,

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} \in U$$

Ahora bien

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} \subseteq \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}$$

Lo que prueba la implicación ($\Longrightarrow$) de **(1)**.

Si $m+1 < n$, entonces, $m+2 \leq n$ y $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_{n+1}(I\Delta_0 + \Gamma^*)$, luego por IV.38, existe $\psi'(\vec{x}) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi'(\vec{x})$$

Por tanto,

$$\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \psi'(\vec{f}(a))\} \in \mathcal{B}^\Gamma$$

Puesto que $C \in U$ y $C \subseteq \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}$, tenemos

$$\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\} \in U$$

Lo que prueba la implicación ($\Longrightarrow$) de **(2)**.

Para probar la implicación restante en **(1)** y **(2)**, supongamos que existe $C \in U$ tal que

$$C \subseteq \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\},$$

(para **(2)**, $C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{f}(a))\}$). Puesto que $C \in U$, existe $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \theta(a)\}.$$

Para cada $j = 1, \ldots, k$, sea $\theta_j(x, y)$ una fórmula Δ_0^Γ (sin parámetros) que define a f_j en $\mathfrak{A}$ y sea $t_j(x)$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ que acote a f_i en $\mathfrak{A}$. Sea $\gamma_0(x, y) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula

$$\exists y_1 \leq t_1(x) \ldots \exists y_k \leq t(x) \left[\bigwedge_{j=1}^{k} \theta_j(x, y) \wedge \varphi_0(y_1, \ldots, y_k, y) \right]$$

Por último, sea $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ la función definida en $\mathfrak{A}$ por la siguiente fórmula $\gamma(x, y) \in \Delta_0^\Gamma$

$$[\theta(x) \wedge \gamma_0(x, y) \wedge \forall z < y \neg\gamma_0(x, z)] \vee [\neg\theta(x) \wedge y = 0]$$

Entonces, $I\Delta_0^\Gamma \vdash \forall x \exists y \, \gamma(x, y)$. Por IV.35, existe un término $t(x)$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ tal que

$$I\Delta_0^\Gamma \vdash \forall x \exists y \leq t(x) \, \gamma(x, y)$$

En consecuencia, $g \in \mathcal{F}^\Gamma$ y de la definición de g se sigue que

$$C = \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \theta(a)\} \subseteq \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi_0(\vec{f}(a), g(a))\} \in U$$

pues $C \in U$. Por otra parte, $I\Delta_0^\Gamma \vdash \varphi'(\vec{x}, y) \leftrightarrow \varphi_0(\vec{x}, y)$, luego

$$\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi'(\vec{f}(a), g(a))\} \in U$$

y, por hipótesis de inducción,

$$\mathfrak{A}^U \models \varphi'([\vec{f}], [g])$$

luego $\mathfrak{A}^U \models \exists y \, \varphi'([\vec{f}], y)$, es decir, $\mathfrak{A}^U \models \varphi([\vec{f}])$. □

Teorema VII.22 *Si Γ es fuertemente Π_n–funcional, entonces*

$$\mathfrak{A}^U \models I\Delta_0^\Gamma$$

Demostración:
Es consecuencia de los dos lemas anteriores usando que

$$I\Delta_0^\Gamma \iff (I\Delta_0 + \Gamma^*)_\Gamma$$

y que $I\Delta_0 + \Gamma^*$ es Π_{n+2}–axiomatizable. □

Lema VII.23 *Sea $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ la función definida por la fórmula $\varphi(x, y) \in \Delta_0^\Gamma$. Entonces*

$$\mathfrak{A}^U \models \varphi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], [f])$$

donde $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ *denota a la función identidad de* $\mathfrak{A}$.

Demostración:
En efecto, por VII.20,

$$\mathfrak{A} \models \varphi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], [f]) \iff \{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(a, f(a))\} \in U$$

Puesto que φ define a f en $\mathfrak{A}$,

$$\{a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi(a, f(a))\} = \mathfrak{A} \in U$$

y, por tanto, $\mathfrak{A}^U \models \varphi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], [f])$. □

Nota VII.24 El trabajo desarrollado hasta aquí generaliza algunos de los resultados obtenidos en [9]. En concreto, si Γ es el conjunto formado por todas las fórmulas $\varphi(x, y) \in \Delta_0$ tales que:

$$\mathbb{N} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \wedge \mathrm{IPF}(\varphi)$$

puesto que $\mathbf{Th}(\mathbb{N})$ tiene colección Δ_1, resulta que:

(1) $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbb{N}) \iff I\Delta_0 + \Gamma^*$

(2) $A \subseteq \mathbb{N}$ es recursivo si y sólo si es definible en $\mathbb{N}$ por una fórmula Δ_0^Γ.

(3) Toda función recursiva está acotada por una función definible por una fórmula de Γ.

Sea Δ_1^0 la familia de todos los subconjuntos recursivos de $\mathbb{N}$. Es sabido Δ_1^0 es un álgebra de Boole. Sea U un ultrafiltro de Δ_1^0. Entonces, con las notaciones introducidas, Hirschfeld (en [9]) llama ultrapotencias recursivas a los modelos de la forma $\mathbb{N}^U$. (Compárense los resultados obtenidos aquí con 2.3, 2.4 y 2.5 de [9]).

Teorema VII.25 *Sean* Γ *un conjunto fuertemente* Π_n*-funcional,* $\mathfrak{A} \models \mathrm{I}\Delta_0^\Gamma$, $a \in \mathfrak{A}$ *y* $U = \mathrm{Ultr}(\mathrm{tp}_{\Delta_0^\Gamma,\mathfrak{A}}(a))$. *Entonces*

$$\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a) \cong \mathfrak{A}^U$$

Demostración:
Sea a en la condiciones del enunciado. Definiremos $F : \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a) \to \mathfrak{A}^U$ de modo que $F(a) = [\mathrm{Id}_\mathfrak{A}]$.

Si $b \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$, entonces existen $\psi(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ y $s(x) \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que

$$\mathfrak{A} \models b \leq s(a) \wedge \psi(a,b) \wedge \forall y\, [\psi(a,y) \to y = b]$$

La idea para definir F es que $\psi([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], y)$ también define un elemento en $\mathfrak{A}^U$ y podemos definir $F(b)$ precisamente como dicho elemento. Para probar que esto es posible necesitamos el siguiente hecho:

> **Aserto VII.25.1** Sea $\theta(x) \in \Pi_1^\Gamma$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a)$, entonces $\mathfrak{A}^U \models \theta([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}])$.
>
> **Prueba del Aserto:**
> Podemos suponer que $\theta(x)$ es de la forma $\forall y\, \theta_0(x,y)$ con $\theta_0(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$. Entonces, por VII.20, para cada $[f] \in \mathfrak{A}^U$,
>
> $$\mathfrak{A}^U \models \theta_0([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], [f]) \iff \{c \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \theta_0(c, f(c))\} \in U$$
>
> Sean $\delta(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ una fórmula que defina a f en $\mathfrak{A}$ y $t(x)$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ que acota a f. Entonces
>
> $$\begin{aligned} \mathfrak{A}^U \models \theta_0([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], [f]) &\iff \{c \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \theta_0(c, f(c))\} \in U \\ &\iff \{c \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \exists y \leq t(c)\, [\delta(c,y) \wedge \theta_0(c,y)]\} \in U \\ &\iff \exists y \leq t(x)\, [\delta(x,y) \wedge \theta_0(x,y)] \in \mathrm{tp}_{\Delta_0^\Gamma,\mathfrak{A}}(a) \\ &\iff \mathfrak{A} \models \exists y \leq t(a)\, [\delta(a,y) \wedge \theta_0(a,y)] \end{aligned}$$
>
> Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall y\, \theta_0(a,y)$, y $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \delta(x,y)$, resulta
>
> $$\mathfrak{A} \models \exists y \leq t(a)\, [\delta(a,y) \wedge \theta_0(a,y)]$$
>
> y en consecuencia, $\mathfrak{A}^U \models \theta_0([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], [f])$. Lo que prueba que $\mathfrak{A}^U \models \forall y\, \theta_0([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], y)$. □

Sea $\psi'(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ la fórmula

$$[\exists v \leq s(x)\, \psi(x,v) \wedge \psi(x,y) \wedge \forall z < y\, \neg\psi(x,z)] \vee [\neg\exists v \leq s(x)\, \psi(x,v) \wedge y = 0]$$

Sea f la función de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$ definida por $\psi'(x,y)$. Como f está acotada por el término $s(x)$, $f \in \mathcal{F}^\Gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^U \models \psi([\mathrm{Id}_\mathfrak{A}], [f]) &\iff \{c \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \psi(c, f(c))\} \in U \\ &\iff \{c \in \mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \models \exists y \leq s(c)\, [\psi'(c,y) \wedge \psi(c,y)]\} \in U \\ &\iff \mathfrak{A} \models \exists y \leq s(a)\, [\psi'(a,y) \wedge \psi(a,y)] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi(a,b) \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{A}^U \models \psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],[f])$, lo que prueba que $\mathfrak{A}^U \models \exists y\, \psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y)$. Por otra parte,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1\, \forall y_2\, [\psi(a,y_1) \wedge \psi(a,y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

y ésta última es una fórmula Π_1^Γ luego, por el aserto anterior,

$$\mathfrak{A}^U \models \forall y_1\, \forall y_2\, [\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y_1) \wedge \psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

De este modo hemos probado que $\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y)$ define un elemento $[f]$ en $\mathfrak{A}^U$. En estas condiciones definimos $F(b) = [f]$.

Aserto VII.25.2 *F está bien definida.*

Prueba del Aserto:
Sean $b \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a)$ y $\psi_1,\psi_2 \in \Delta_0^\Gamma$ y $t_1,t_2 \in \mathbf{Term}(\mathcal{L}(\Gamma))$ tales que,

$$\mathfrak{A} \models b \leq t_i(a) \wedge (\psi_i(a,b) \wedge \forall y\, (\psi_i(a,y) \rightarrow y = b) \qquad (i=1,2)$$

Entonces,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1\, \forall y_2\, [\psi_1(a,y_1) \wedge \psi_2(a,y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

luego por el aserto

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1\, \forall y_2\, [\psi_1([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y_1) \wedge \psi_2([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

lo que demuestra que $F(b)$ no depende de la fórmula ψ elegida y termina la prueba del aserto. □

A continuación demostraremos que F es una inmersión Δ_0^Γ–elemental de $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a)$ en $\mathfrak{A}^U$.

Sean $b \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a)$, $F(b) = [f]$ y $\psi(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ tal que $\psi(a,y)$ define a b en $\mathfrak{A}$. Sea $\theta(x) \in \Delta_0^\Gamma$, probaremos que

$$(\bullet) \qquad \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a) \models \theta(b) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A}^U \models \theta([f])$$

En efecto, por VII.25.1,

$$\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a) \models \forall y\, [\psi(a,y) \rightarrow \theta(y)] \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A}^U \models \forall y\, [\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y) \rightarrow \theta(y)]$$

Puesto que b y $[f]$ están definidas en $\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a)$ y $\mathfrak{A}^U$, por $\psi(a,y)$ y $\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}],y)$, respectivamente, podemos concluir $(\bullet)$.

Teniendo en cuenta que Δ_0^Γ es cerrado bajo negación, a partir de $(\bullet)$ obtenemos fácilmente que

$$\mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A},a) \models \theta(b) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}^U \models \theta([f])$$

Por último, veremos que F es sobreyectiva.

Sea $[f] \in \mathfrak{A}^U$. Sean $\psi(x,y) \in \Delta_0^\Gamma$ una fórmula que define a f en $\mathfrak{A}$ y $t(x)$ un término de $\mathcal{L}(\Gamma)$ que acota a f. Entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1\, \forall y_2\, [\psi(a,y_1) \wedge \psi(a,y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

luego por VII.20,

$$\mathfrak{A}^U \models \forall y_1 \forall y_2 [\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], y_1) \wedge \psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$$

En consecuencia, $\psi(a, y)$ define a $f(a)$ en $\mathfrak{A}$ y $\psi([\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}], y)$ define a $[f]$ en $\mathfrak{A}^U$. Además $\mathfrak{A} \models f(a) \leq t(a)$ y, en consecuencia, $f(a) \in \mathcal{K}_0^\Gamma(\mathfrak{A}, a)$, luego $F(f(a)) = [f]$. □

Así hemos demostrado la siguiente correspondencia:

Teorema VII.26 *Sea Γ un conjunto fuertemente Π_n–funcional. Entonces, la clase de los modelos Γ–acotados coincide con la clase de las ultrapotencias definibles acotadas de modelos de* $I\Delta_0^\Gamma$. □

Apéndice A

Una Π_n–envoltura inductiva

En este apéndice presentaremos las pruebas de los resultados auxiliares utilizados en el capítulo VI. En concreto, probaremos la existencia de una Π_n–envoltura inductiva de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$.

A.1 Teoría de conjuntos en $\mathbf{I}\Delta_0$

Comenzaremos describiendo un método de codificación de conjuntos finitos similar al descrito en la sección I.2. Ahora necesitamos que algunas de las propiedades puedan probarse en $\mathbf{I}\Delta_0$ (en lugar de $\mathbf{I}\Delta_0+\mathbf{exp}$) y, en consecuencia, la fórmula $x \in u$ descrita en I.2, no nos sirve. Sin embargo, en [23] se prueba que existe una fórmula Δ_0, que también denotaremos por $x \in u$, que permite considerar algunos elementos de un modelo cualquiera de $\mathbf{I}\Delta_0$ como "conjuntos finitos", interpretando la pertenencia a uno de tales "conjuntos" por medio de dicha fórmula. El punto importante es que $\mathbf{I}\Delta_0$ puede probar que la fórmula $x \in u$ satisface algunas propiedades conjuntistas básicas y, a partir de éstas, podemos trabajar en $\mathbf{I}\Delta_0$ sin importarnos la construcción exacta de la fórmula. Por ello, enunciaremos sin demostración estas propiedades, cuya prueba en $\mathbf{I}\Delta_0$ requiere el conocimiento específico de la fórmula $x \in u$. Para la construcción concreta de la fórmula y demostraciones de las propiedades básicas, puede consultarse [23]. No obstante, a continuación daremos una descripción informal de la fórmula $x \in u$. Para ello necesitamos las siguientes definiciones:

Definición A.1 *Sea* $\mathrm{irred}(x)$ *("x es irreducible (o primo)") la fórmula*

$$2 \le x \wedge \forall y \le x\ [y|x \rightarrow y = 1 \vee y = x]$$

donde $y|x$ es la fórmula $\exists z \le x(y \cdot z = x)$.

Definición A.2 *Sea* $\mathrm{pot}_2(x)$, *("x es una potencia de 2") la fórmula:*

$$x \ge 1 \wedge \forall u \le x\ [\mathrm{irred}(u) \wedge u|x \rightarrow u = 2]$$

La fórmula $\mathrm{pot}_4(x)$, *("x es una potencia de 4") es*

$$\mathrm{pot}_2(x) \wedge \exists y \le x\, [\mathrm{pot}_2(y) \wedge y \cdot y = x]$$

Definición A.3 *Sea* $\mathrm{Lp}_2(x) = y$ *("y es la menor potencia de 2 mayor que x") la fórmula:*

$$(x = 0 \wedge y = 1) \vee [x < y \leq 2 \cdot x \wedge \mathrm{pot}_2(y) \wedge \forall z < y \neg(x < z \leq 2 \cdot x \wedge \mathrm{pot}_2(z))]$$

La fórmula $\mathrm{Lp}_4(x) = y$ *se define de manera similar cambiando 2 por 4 en la fórmula anterior.*

Lema A.4 *Para* $k = 2, 4$

(1) $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \forall x \exists! y\, (\mathrm{Lp}_k(x) = y)$

(2) $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash x \geq 1 \rightarrow \mathrm{Lp}_k(x) \leq k \cdot x$ □

Nota A.5 Las definiciones anteriores muestran como podemos expresar los conceptos: "ser potencia de 2" y "ser potencia de 4" mediante fórmulas Δ_0, sin recurrir a la exponenciación. Gracias a ello podemos hacer referencia a los desarrollos en base 2 y en base 4 de un número, utilizando potencias de 2 y de 4, para referirnos a las posiciones de los dígitos. Por ejemplo, en lugar de referirnos al dígito i–ésimo del desarrollo en base 2 de x, nos referimos al dígito que multiplica a una cierta potencia de 2 en dicho desarrollo. De este modo, usando división euclidea, podemos referirnos a segmentos de los desarrollos en base 2 y en base 4 de un elemento cualquiera. La fórmula $x \in u$ expresa que:

"el desarrollo en base 2 de x aparece en el desarrollo en base 4 de u, entre dos apariciones consecutivas del dígito 2"

Por ejemplo, si x en base 2 es 1101001 entonces en el desarrollo de u en base 4, encontramos un segmento de la forma 211010012.

Las primeras dos propiedades de $x \in u$ que enunciaremos sin demostración son (ver [23]):

Teorema A.6 *Son teoremas de* $\mathrm{I}\Delta_0$*:*

Ax1 $x \in u \rightarrow x < u$

Ax2 $x \in u \rightarrow \exists v\, [2 \cdot v < u \wedge \forall y\, (y \neq x \wedge y \in u \rightarrow y \in v)]$ □

Definición A.7 *Sea* $\mathrm{Conj}(u)$ *la fórmula ("u es un conjunto")*

$$\neg \exists v < u \forall x < u\, (x \in u \rightarrow x \in v)$$

A partir de la definición es fácil probar el siguiente resultado:

Teorema A.8 *Son teoremas de* $\mathrm{I}\Delta_0$*:*

(1) $\mathrm{Conj}(0) \wedge \forall x \neg(x \in 0)$

(2) $\mathrm{Conj}(u) \wedge \mathrm{Conj}(v) \wedge \forall x\, (x \in u \leftrightarrow x \in v) \rightarrow u = v$ □

Teorema A.9 (Σ_n-separación)
Dada $\varphi(x) \in \Sigma_n \cup \Pi_n$,

$$\mathrm{I}\Sigma_n \vdash \forall y\, \exists z \leq y\, [\mathrm{Conj}(z) \wedge \forall x\, (x \in z \leftrightarrow (x \in y \wedge \varphi(x)))] \qquad \square$$

Podemos proseguir con el desarrollo de esta teoría de conjuntos definiendo la unión, la intersección y otras operaciones conjuntistas. En este apéndice necesitaremos definir dos operaciones: la unión y el conjunto unitario. Las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [23], capítulos 10–12.

Definición A.10 *Sea* $\{x\} = z$ *como la fórmula* Δ_0*:*

$$\mathrm{Conj}(z) \wedge \forall y < z\, (y \in z \leftrightarrow y = x)$$

y sea $x \cup y = z$ *la fórmula* Δ_0*:*

$$\mathrm{Conj}(z) \wedge \forall u < z\, (u \in z \leftrightarrow (u \in x \vee u \in y))$$

Proposición A.11 *Son teoremas de* $\mathbf{I}\Delta_0$*:*

Ax3 $\forall x\, \exists! y \leq 36 \cdot (\mathrm{Lp}_2(x))^2\, (\{x\} = y)$

Ax4 $\forall x\, \forall y\, \exists! z \leq x + y \cdot \mathrm{Lp}_4(x)\, [x \cup y = z]$ $\square$

Nota A.12 Observemos que utilizando Δ_0–separación podemos definir otras operaciones conjuntistas, como la intersección o la diferencia de conjuntos, sin necesidad de nuevos resultados específicos, Por ejemplo, dados x y a podemos definir $x - \{a\}$ como:

$$y = x - \{a\} \leftrightarrow Conj(y) \wedge \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq a)$$

A.2 Iteración

A continuación probaremos que, bajo ciertas condiciones, si $f(x) = y$ es una función de grafo Π_n, entonces su iteración, $f^y(x) = z$, también tiene grafo Π_n. En esencia, nuestro tratamiento de la iteración es similar al presentado en [5], aunque en nuestro caso no utilizaremos los mismos procedimientos de codificación. En su lugar, adaptaremos el procedimiento utilizado en [8] para definir el grafo de la exponencial mediante una fórmula Δ_0, y, para la codificación de conjuntos, utilizaremos las técnicas descritas en la sección anterior.

Nota A.13 En lo que sigue consideraremos una teoría $\mathbf{T}$, extensión de $\mathrm{I}\Sigma_n$, y $\varphi(x, y)$ será una fórmula Π_n tal que:

(1) $\mathrm{T} \vdash \varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

(2) $\mathrm{T} \vdash \varphi(x, y) \rightarrow x^2 < y$

(3) $\mathrm{T} \vdash x_1 \leq x_2 \wedge \varphi(x_1, y_1) \wedge \varphi(x_2, y_2) \rightarrow y_1 \leq y_2$

Es decir, φ define en cada modelo de $\mathbf{T}$ una función monótona (posiblemente parcial) cuyo crecimiento es mayor que el de la función $x \mapsto x^2$.

De la propiedad **(2)**, se sigue otra desigualdad que también nos será útil. En concreto se tiene

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(x,y) \to (x+1)^3 < (y+1)^2$$

Esto es consecuencia de **(2)** y del siguiente resultado

Aserto A.13.1 $\quad \mathrm{I}\Delta_0 \vdash x^2 < y \to (x+1)^3 < (y+1)^2$ □

Definición A.14 *Sea* $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$ *la fórmula* Π_n *(en* $\mathrm{B}\Sigma_n$*, si* $n \geq 1$*):*

$$\left\{ \begin{array}{l} J(0,x) \in w \wedge \\ \forall y,z < w \left(J(y,z) \in w \to \left\{ \begin{array}{l} (y = 0 \wedge z = x) \vee \\ (y > 0 \wedge \exists v < w\, (\varphi(v,z) \wedge J(y-1,v) \in w)) \end{array} \right. \right) \end{array} \right.$$

Nota A.15 (Propiedades elementales de $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$)

Informalmente, si $F(x) = y$ es la función definida por la fórmula $\varphi(x,y)$ y se satisface $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$, entonces

$$J(y,z) \in w \quad \Longrightarrow \quad F^y(x) = z$$

En cierto sentido, podemos decir que w es una "aproximación finita" de F. De manera más precisa, si escribimos $f^y(x) = z$ en lugar $J(y,z) \in w$, entonces la "función" f es una aproximación finita de F y $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$ expresa que

$$f^0(x) = x \wedge \left[f^{y+1}(x) = z \to \exists v\, (f(v) = z \wedge f^y(x) = v) \right]$$

Estas propiedades pueden deducirse, directamente a partir de la definición de la fórmula $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$, sin hacer uso de ninguna de las propiedades de φ enunciadas en A.13. En concreto, se verifica:

Aserto A.15.1 Son teoremas de $\mathbf{T}$:

(1) $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(0,z) \in w \to x = z$

(2) $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(1,z) \in w \to \varphi(x,z)$

(3) $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(y+1,z) \in w \to \exists z < w\, (J(y,v) \in w \wedge \varphi(v,z))$

Demostración:

(1) y **(3)** son triviales.

(2) Supongamos que $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(1,z) \in w$, entonces existe $v < w$ tal que

$$\varphi(v,z) \wedge J(0,v) \in w$$

Por el apartado **(1)**, concluimos $x = v$, ya que $J(0,v) \in w \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(w,x)$. En consecuencia, $\varphi(x,z)$. □

Aserto A.15.2 Son teoremas de $\mathbf{T}$:

(1) $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(y,z) \in w \to (y \leq z \wedge x \leq z) \wedge (y \neq 0 \to x^2 < z)$

(2) $\mathrm{itcl}_\varphi(w,x) \wedge J(y,z) \in w \to J(y,z) \leq 4 \cdot z^2$

Demostración:
Razonaremos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.

(1) Sean $a, c \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{itcl}_\varphi(c,a)$ y sea $\psi(y,c,a)$ la fórmula:

$$\forall z < c\,[J(y,z) \in c \to (y \leq z \wedge a \leq z) \wedge (y \neq 0 \to x^2 < z)]$$

Probaremos por inducción sobre b que para todo $b \in \mathfrak{A}$, $\psi(b,c,a)$. Puesto que $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ y $\psi(y,w,x)$ es una fórmula $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ (para $n=0$, es Δ_0) esto es suficiente para probar (1).

$\underline{b=0}$: Entonces $J(0,z) \in c \to z = a$. Sea $d < c$ tal que $J(0,d) \in c$, entonces $d = a$. Por tanto, $0, a \leq d$.

$\underline{b \to b+1}$: Sea $d < c$ tal que $J(b+1,d) \in c$. Puesto que $\mathrm{itcl}_\varphi(c,a)$, existe $d_1 < c$ tal que:

$$\varphi(d_1,d) \wedge J(b,d_1) \in c$$

Por hipótesis de inducción $\psi(b,c,a)$, luego $b, a \leq d_1$. Puesto que $\varphi(d_1,d)$, por A.13–(2), se tiene $d_1^2 < d$ y, por tanto, $d_1 < d$. En consecuencia, $a, b \leq d$ y, además,

$$a^2 \leq d_1^2 < d$$

lo que prueba $\psi(b+1,c,a)$. (2) Sean a, b, c y d elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{itcl}_\varphi(c,a) \wedge J(b,d) \in c$. Por (1), $b \leq d$ luego

$$J(b,d) \leq (b+d)^2 \leq 4 \cdot d^2$$

Lo que termina la prueba del lema. □

Aserto A.15.3

$$\mathbf{T} \vdash \mathrm{itcl}_\varphi(w_1,x) \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(w_2,x) \wedge J(y,z_1) \in w_1 \wedge J(y,z_2) \in w_2 \to z_1 = z_2$$

Demostración:
Razonamos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.

Sean $a, c_1, c_2 \in \mathfrak{A}$ tales que

$$(\bullet) \qquad \mathrm{itcl}_\varphi(c_1,a) \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c_2,a).$$

Sea $\psi(y,c_1,c_2)$ la fórmula

$$\forall z_1 < c_1\, \forall z_2 < c_2\, [J(y,z_1) \in c_1 \wedge J(y,z_2) \in c_2 \to z_1 = z_2]$$

Probaremos por inducción que para todo $b \in \mathfrak{A}$, $\psi(b, c_1, c_2)$.

$\underline{b=0}$: Teniendo en cuenta (•), por A.15.1–**(1)**,

$$J(0, z_1) \in c_1 \wedge J(0, z_2) \in c_2 \to z_1 = a \wedge a = z_2$$

Luego $z_1 = z_2$.

$\underline{b \to b+1}$: Supongamos que $\psi(b, c_1, c_2)$. Sean $d_1 < c_1$ y $d_2 < c_2$ tales que

$$J(b+1, d_1) \in c_1 \wedge J(b+1, d_2) \in c_2$$

Entonces, por (•) y A.15.1–**(3)**, existen $e_1 < d_1$ y $e_2 < d_2$ tales que

$$(J(b, e_1) \in c_1 \wedge \varphi(e_1, d_1)) \wedge (J(b, e_2) \in c_2 \wedge \varphi(e_2, d_2))$$

Por hipótesis de inducción, $e_1 = e_2$ y, por tanto $d_1 = d_2$ ya que, por A.13–**(1)**,

$$\varphi(e_1, d_1) \wedge \varphi(e_2, d_2) \to d_1 = d_2$$

Lo que termina la demostración. □

Esto concluye la exposición las propiedades elementales de $\mathrm{itcl}_\varphi(w, x)$. El siguiente resultado nos permite acotar el cuantificador existencial que aparece en la definición natural (véase A.17) de la iteración $F^y(x)$, a partir de la fórmula $\mathrm{itcl}_\varphi(w, x)$

Proposición A.16

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \vdash \quad & \forall x \forall w \forall z, y < w\,[\mathrm{itcl}_\varphi(w, x) \wedge J(y, z) \in w \to \\ & \to \exists w' \leq 9 \cdot 4^3 \cdot (z+1)^{54}\,(\mathrm{itcl}_\varphi(w', x) \wedge J(y, z) \in w')] \end{aligned}$$

Demostración:
Razonaremos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.
Sean $a, c \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{itcl}_\varphi(c, a)$. Sea $\psi(y, a, c)$ la fórmula

$$\forall z < c\,[J(y, z) \in c \to \exists w' \leq 9 \cdot 4^3 \cdot (z+1)^{54}\,(\mathrm{itcl}_\varphi(w', c) \wedge J(y, z) \in w')]$$

Probaremos por inducción que, para todo $b \in \mathfrak{A}$, se tiene $\psi(b, a, c)$.

$\underline{b=0}$:
Sea d tal que $J(0, d) \in c$. Entonces $d = a$. Sea $c' = \{J(0, a)\}$. Entonces, por **Ax3**,

$$c' = \{J(0, a)\} \leq 36 \cdot (\mathrm{Lp}_2(J(0, a)))^2 \leq 36 \cdot 4 \cdot (2 \cdot (a+1)^2)^2 = 9 \cdot 4^3 \cdot (a+1)^4$$

Puesto que $d = a$, entonces $c' \leq 9 \cdot 4^3 \cdot (d+1)^{54} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c', a) \wedge J(0, d) \in c'$.

$\underline{b \to b+1}$:
Sea d tal que $J(b+1, d) \in c$. Entonces existe $d_0 < c$ tal que

$$\varphi(d_0, d) \wedge J(b, d_0) \in c$$

Puesto que $\psi(b,a,c)$, existe c_0 tal que

$$c_0 \le 9\cdot 4^3\cdot (d_0+1)^{54} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c_0,a) \wedge J(b,d_0)\in c_0$$

Sea $c' = c_0 \cup \{J(b+1,d)\}$. Entonces $J(b+1,d)\ne 0$ y, usando **Ax3** y A.4–**(2)**, se tiene que

$$\{J(b+1,d)\} \le 36\cdot(\mathrm{Lp}_2(J(b+1,d)))^2 \le 36\cdot 4\cdot (J(b+1,d))^2 \le 36\cdot 4\cdot (4\cdot d^2)^2 < 36\cdot 4^3\cdot (d+1)^4$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{rcll} c' & \le & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0)\cdot\{J(b+1,d)\} & [\![\text{por } \mathbf{Ax4}]\!] \\ & \le & c_0 + 4\cdot c_0\cdot \{J(b+1,d)\} & \\ & \le & c_0 + 4\cdot c_0\cdot 36\cdot 4^3\cdot (d+1)^4 & \\ & = & c_0\cdot (4\cdot 36\cdot 4^3\cdot (d+1)^4+1) & \\ & = & c_0\cdot (4^4\cdot 4\cdot 9\cdot (d+1)^4+1) & \\ & \le & c_0\cdot 4\cdot 4^2\cdot 4^4\cdot (d+1)^4 & \\ & = & c_0\cdot 2^{14}\cdot (d+1)^4 & \end{array}$$

Ahora bien, por A.13–**(2)**, $\varphi(d_0,d)\to d_0^2<d$, luego por A.13.1,

$$(\bullet) \qquad (d_0+1)^3 < (d+1)^2$$

En consecuencia, por $(\bullet)$, se verifica (teniendo en cuenta que $54 = 3\cdot 18$)

$$\begin{array}{rcl} c' & \le & c_0\cdot 2^{14}\cdot (d+1)^4 \\ & \le & 9\cdot 4^3\cdot (d_0+1)^{54}\cdot 2^{14}(d+1)^4 \\ & < & 9\cdot 4^3\cdot ((d+1)^{18})^2\cdot 2^{14}\cdot (d+1)^4 \\ & \le & 9\cdot 4^3\cdot (d+1)^{54} \quad [\![\text{pues } d+1\ge 2]\!] \end{array}$$

Lo que termina la prueba del lema. □

Definición A.17 *Sea* $\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)$ *la fórmula* Π_n *(en* $\mathbf{B\Sigma}_n$*, si* $n\ge 1$*):*

$$\exists w \le 9\cdot 4^3\cdot (z+1)^{54}\,[\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)\wedge J(y,z)\in w]$$

Nota A.18 Si, informalmente, denotamos por $F(x)=y$ a la función definida por $\varphi(x,y)$, entonces $\mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)$ expresa la relación $F^y(x)=z$.

Además, observemos que haciendo uso de la fórmula IT_φ, el lema A.16, puede expresarse como:

$$\mathrm{T}\vdash \forall x\,\forall w\,\forall z,y<w\,[\mathrm{itcl}_\varphi(w,x)\wedge J(y,z)\in w\to \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)]$$

En el siguiente teorema probaremos alguna de las propiedades básicas de la iteración $F^y(x)=z$.

Proposición A.19 *Son teoremas de* $\mathbf{T}$*:*

(1) $\forall x\, \forall z\, [\mathrm{IT}_\varphi(x, 0, z) \leftrightarrow x = z]$

(2) $\forall x\, \forall z\, [\varphi(x, z) \leftrightarrow \mathrm{IT}_\varphi(x, 1, z)]$

(3) $\mathrm{IT}_\varphi(x, y+1, z) \leftrightarrow \exists z_0 \le z\, [\mathrm{IT}_\varphi(x, y, z_0) \wedge \varphi(z_0, z)]$

(4) $\mathrm{IT}_\varphi(x, y, z_1) \wedge \mathrm{IT}_\varphi(x, y, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

(5) $\mathrm{IT}_\varphi(x, y, z) \rightarrow \forall y_0 < y\, \exists z_0 < z\, [\mathrm{IT}_\varphi(x, y_0, z_0)]$

Demostración:
Razonaremos en un modelo $\mathfrak{A}$ de $\mathbf{T}$.

(1) Sean $a, d \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{IT}_\varphi(a, 0, d)$. Entonces por A.15.1–**(1)**, $a = d$. Recíprocamente, si $a = d$ y $c = \{J(0, a)\}$, entonces $\mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(0, a) \in c$. Luego, por A.16, $\mathrm{IT}_\varphi(a, 0, d)$.

(2) Sean $a, d \in \mathfrak{A}$ tales que $\varphi(a, d)$. Sea $c = \{J(0, a)\} \cup \{J(1, d)\}$ entonces

$$\mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(1, d) \in c$$

Luego, por A.16 podemos concluir $\mathrm{IT}_\varphi(a, 1, d)$.

Recíprocamente, si $\mathrm{IT}_\varphi(a, 1, d)$, y c es tal que

$$c \le 9 \cdot 4^3 \cdot (d+1)^{54} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(1, d) \in c$$

entonces, por A.15.1–**(2)**, $\varphi(a, d)$.

(3) Sean $a, b, d \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{IT}_\varphi(a, b+1, d)$, entonces existe c tal que

$$c \le 9 \cdot 4^3 \cdot (d+1)^{54} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(b+1, d) \in c$$

Por A.15.1–**(3)**, existe $d_0 < c$ tal que $\varphi(d_0, d) \wedge J(b, d_0) \in c$. Entonces, por A.16, se tiene que

$$d_0 \le d \wedge \mathrm{IT}_\varphi(a, b, d_0) \wedge \varphi(d_0, d)$$

Recíprocamente, supongamos que existe $d_0 \le d$ tal que

$$\mathrm{IT}_\varphi(a, b, d_0) \wedge \varphi(d_0, d)$$

Entonces existe c tal que

$$c \le 9 \cdot 4^3 \cdot (d_0+1)^{54} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(b, d_0) \in c$$

Tomando $c' = c \cup \{J(b+1, c)\}$, tendremos $\mathrm{itcl}_\varphi(c', a) \wedge J(b+1, d) \in c'$ y de A.16 se sigue que $\mathrm{IT}_\varphi(a, b+1, d)$.

(4) Si $a, b, d_1, d_2 \in \mathfrak{A}$ son tales que $\mathrm{IT}_\varphi(a, b, d_1) \wedge \mathrm{IT}_\varphi(a, b, d_2)$, entonces existen c_1 y c_2 tales que

$$[\mathrm{itcl}_\varphi(c_1, a) \wedge J(b, d_1) \in c_1] \wedge [\mathrm{itcl}_\varphi(c_2, a) \wedge J(b, d_2) \in c_2]$$

y por A.15.3, $d_1 = d_2$.

(5) Sean $a, b, d \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{IT}_\varphi(a, b, d)$. Entonces existe c tal que

$$\mathrm{itcl}_\varphi(c, a) \wedge J(b, d) \in c$$

Entonces,

$$(\bullet) \qquad \forall y < b\, \exists z < d\, [J(y, z) \in c]$$

y, por A.16, $\forall y < b\, \exists z < d\, [\mathrm{IT}_\varphi(a, y, z)]$.

Para probar $(\bullet)$, procedemos por reducción al absurdo. Si $(\bullet)$ no se verifica, entonces existe $e < b$ tal que

$$\forall z < d\, (J(b - e, z) \notin c) \wedge \forall v < e\, \exists z < d\, (J(b - v, z) \in c)$$

Puesto que $J(b, d) \in c$, $e \neq 0$. Por hipótesis, existe $d' \leq d$ tal que $J(b - (e - 1), d') \in c$. Además de $\mathrm{itcl}_\varphi(c, a)$ y $b - (e - 1) = (b - e) + 1$, se deduce que existe $d'' < d$ tal que

$$\varphi(d'', d') \wedge J(b - e, d'') \in c$$

Lo cual está en contradicción con la elección de e. □

Proposición A.20
(1) $\mathbf{T} + \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \vdash \mathrm{IT}_\varphi(x, y, z) \rightarrow \exists z'\, [\mathrm{IT}_\varphi(x, y + 1, z')]$

(2) *Sea* $\varphi'(x, z)$ *la fórmula* $\mathrm{IT}_\varphi(x + 1, x + 2, z)$*. Entonces,*
  (a) $\mathbf{T} \vdash \varphi'(x, z) \rightarrow x^2 < z$
  (b) $\mathbf{T} \vdash x_1 \leq x_2 \wedge \varphi'(x_1, z_1) \wedge \varphi'(x_2, z_2) \rightarrow z_1 \leq z_2$

Demostración:
(1) Es consecuencia de A.19–**(3)**.

(2.a) Observemos en primer lugar que

$$(\bullet) \qquad \mathbf{T} \vdash \forall x \forall z\, [\mathrm{IT}_\varphi(x + 1, x + 1, z) \rightarrow x + 1 < z]$$

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que $\varphi'(a, b)$. Entonces $\mathrm{IT}_\varphi(a + 1, a + 2, b)$, luego existe $b_0 < b$ tal que $\mathrm{IT}_\varphi(a + 1, a + 1, b_0) \wedge \varphi(b_0, b)$. Por $(\bullet)$, $a + 1 < b_0$. En consecuencia,

$$a^2 < (a + 1)^2 < b_0^2 < b$$

(2.b) Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $a_1, a_2, b \in \mathfrak{A}$, $a_1 \leq a_2$. Entonces, por inducción en y, se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \forall y \forall z_1, z_2 < b\, [\mathrm{IT}_\varphi(a_1 + 1, y, z_1) \wedge \mathrm{IT}_\varphi(a_2 + 1, y, z_2) \rightarrow z_1 \leq z_2]$$

En particular, usando A.13–**(3)**,

$$\mathfrak{A} \models \forall z_1, z_2\, [\mathrm{IT}_\varphi(a_1 + 1, a_1 + 2, z_1) \wedge \mathrm{IT}_\varphi(a_2 + 1, a_2 + 2, z_2) \rightarrow z_1 \leq z_2]$$

lo que prueba el resultado. □

Nota A.21 Observemos que en toda esta sección, A.13–**(3)** sólo se ha utilizado para obtener A.20–**(2,b)**.

A.3 Funciones de Ackermann

Notación A.22 En lo que sigue escribiremos $\langle u, x, y, z\rangle$ para expresar $J(J(u,x), J(y,z))$.

Definición A.23 *Denotamos por* $[u,x](w) = w'$ *a la fórmula* Δ_0 *que expresa que*

$$w' = (\mu y)\,[\forall v < w\,(v \in y \leftrightarrow J(J(u,x),v) \in w)]$$

y por $w_{[u]} = w'$ *denotamos a la fórmula (también* Δ_0*) que expresa que*

$$w' = (\mu y)\,[\forall x, z < w\,(J(x,z) \in y \leftrightarrow \langle u, x, 1, z\rangle \in w)]$$

Lema A.24 *Son teoremas de* $\mathbf{I}\Delta_0$*:*

(1) $\forall u, x, w\, \exists! w'\ ([u,x](w) = w')$

(2) $\forall u, w\, \exists! w'\ \left(w_{[u]} = w'\right)$ □

Definición A.25 *Sea* $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$ *la fórmula* Π_n *(en* $\mathbf{B}\Sigma_n$*, si* $n \geq 1$*)*

$$\forall u, x, y, z < w \left\{ \langle u,x,y,z\rangle \in w \to y \geq 1 \wedge \left\{ \begin{array}{l} (u = 0 \wedge \mathrm{itcl}_\varphi([0,x](w) \cup \{J(0,x)\}, x)) \vee \\ u > 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} (y = 1 \wedge \langle u-1, x+1, x+2, z\rangle \in w) \vee \\ y \geq 2 \wedge \exists v < w \left\{ \begin{array}{l} J(y-1, v) \in [u,x](w) \\ \wedge J(v,z) \in w_{[u]} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \right.$$

Nota A.26

(–) Podemos dar una descripción informal del sentido de $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$ como sigue:

Denotemos por $F(x) = y$ la función definida por la fórmula φ. Por recursión (sobre u) definimos:

(–) $F_0(x) = F(x)$
(–) $F_{u+1}(x) = F_u^{x+2}(x+1)$

Entonces $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$ expresa que w es una "aproximación finita" de la función $F_u^y(x) = z$, de tal modo que

$$\langle u, x, y, z\rangle \in w \quad \Longrightarrow \quad F_u^y(x) = z$$

Por otra parte, si $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$, entonces

$$\begin{array}{lcl} J(x,z) \in w_{[u]} & \Longrightarrow & F_u(x) = z \\ J(y,z) \in [u,x](w) & \Longrightarrow & F_u^y(x) = z. \end{array}$$

(–) En la definición de $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$ empleamos el siguiente convenio que utilizaremos constantemente en el resto de esta sección para abreviar la descripción de fórmulas. Así la fórmula

$$\mathrm{itcl}_\varphi([u,x](w) \cup \{J(u,x)\}, x)$$

es una abreviatura de la fórmula

$$\exists y \leq t(u,x,w)\ (y = [u,x](w) \cup \{J(u,x)\} \wedge \mathrm{itcl}_\varphi(y,x))$$

donde $t(u,x,w)$ es un término de $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \forall u,x,w\, \exists w' \leq t(u,x,w)\ \big(w' = [u,x](w) \cup \{J(u,x)\}\big)$$

($t(u,x,w)$ existe por el teorema de Parikh, I.8).

Lema A.27 *Son teoremas de* **T***:*

(1) $\forall x,z < w\, (\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle 0,x,1,z\rangle \in w \to \varphi(x,z))$

(2) $\forall u,x,y,z < w \left(\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge y \geq 1 \wedge \\ \langle u,x,y+1,z\rangle \in w \end{array}\right\} \to \exists z_0 < w\, (J(z_0,z) \in w_{[u]} \wedge \langle u,x,y,z_0\rangle \in w\right)$

(3) $\forall u,x,y,z_1 < w_1\, \forall z_2 < w_2 \left(\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w_1) \wedge \mathrm{Ack}_\varphi(w_2) \wedge \\ \langle u,x,y,z_1\rangle \in w_1 \wedge \langle u,x,y,z_2\rangle \in w_2 \end{array}\right\} \to z_1 = z_2\right)$

Demostración:
Consideremos un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.
(1) Sean $a,c,d \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle 0,a,1,d\rangle \in c$. Entonces,

$$\mathrm{itcl}_\varphi([0,a](c) \cup \{J(0,a)\}, a) \wedge J(1,d) \in [0,a](c)$$

Por A.15.1–**(2)**, se tiene $\varphi(a,d)$.

(2) Sea c tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$ y supongamos que $b \geq 1 \wedge \langle e,a,b+1,d\rangle \in c$. Entonces $b+1 \geq 2$, luego, de la definición de Ack_φ se sigue que, existe $d' < c$ tal que

$$J(b,d') \in [e,a](c) \wedge J(d',d) \in c_{[e]}$$

Por tanto, $\langle e,a,b,d'\rangle \in c \wedge J(d',d) \in c_{[e]}$.

(3) Sean c y c' tales que $\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \mathrm{Ack}_\varphi(c')$. Por inducción probaremos que para todo $e \in \mathfrak{A}$:

$$\forall x,y,z_1 < c\, \forall z_2 < c'\, ((\langle e,x,y,z_1\rangle \in c \wedge \langle e,x,y,z_2\rangle \in c' \to z_1 = z_2)$$

$\underline{e=0}$: Sean $a,b,d_1,d_2 \in \mathfrak{A}$ tales que:

$$\langle 0,a,b,d_1\rangle \in c \wedge \langle 0,a,b,d_2\rangle \in c'$$

Puesto que

$$\mathrm{itcl}_\varphi([0,a](c) \cup \{J(0,a)\}, a) \wedge \mathrm{itcl}_\varphi([0,a](c') \cup \{J(0,a)\}, a)$$

resulta que

$$J(b,d_1) \in [0,a](c) \wedge J(b,d_2) \in [0,a](c')$$

Luego, por A.15.3, se tiene $d_1 = d_2$.

$e \to e+1$: Supongamos que, por hipótesis de inducción,

$$(\bullet) \qquad \forall x, y, z_1 < c \forall z_2 < c' \left(\langle e, x, y, z_1 \rangle \in c \wedge \langle e, x, y, z_2 \rangle \in c' \to z_1 = z_2 \right)$$

Por inducción probaremos que, para todo $b \in \mathfrak{A}$, se tiene

$$\forall x, z_1 < c \forall z_2 < c' \left(\langle e+1, x, b, z_1 \rangle \in c \wedge \langle e+1, x, b, z_2 \rangle \in c' \to z_1 = z_2 \right)$$

$b = 1$: Supongamos que $\langle e+1, a, 1, d_1 \rangle \in c \wedge \langle e+1, a, 1, d_2 \rangle \in c'$. Entonces, por definición de Ack_φ,

$$\langle e, a+1, a+2, d_1 \rangle \in c \wedge \langle e, a+1, a+2, d_2 \rangle \in c'$$

luego por $(\bullet)$, $d_1 = d_2$.

$b \to b+1$: Supongamos que

$$\langle e+1, a, b+1, d_1 \rangle \in c \wedge \langle e+1, a, b+1, d_2 \rangle \in c'$$

Entonces $b+1 \geq 2$ y, por el apartado **(2)**, existen $d_1' < c$ y $d_2' < c'$ tales que

$(-)$ $J(d_1', d_1) \in c_{[e+1]} \wedge \langle e+1, a, b, d_1' \rangle \in c$
$(-)$ $J(d_2', d_2) \in c'_{[e+1]} \wedge \langle e+1, a, b, d_2' \rangle \in c'$

Por hipótesis de inducción (sobre b), $d_1' = d_2'$, y además de la definición de $c_{[e+1]}$ y $c'_{[e+1]}$ se deduce

$$\langle e+1, d_1', 1, z_1 \rangle \in c \wedge \langle e+1, d_2', 1, z_2 \rangle \in c'$$

luego, según la definición de Ack_φ,

$$\langle e, d_1'+1, d_1'+2, d_1 \rangle \in c \wedge \langle e, d_2'+1, d_2'+2, d_2 \rangle \in c'$$

y en consecuencia, $d_1' + 2 = d_2' + 2 < c$, luego por $(\bullet)$, $d_1 = d_2$. □

Nota A.28 En lo que sigue demostraremos algunos resultados en los que aparece la función exponencial. Recordemos que estamos trabajando con una extensión, **T**, de $\mathbf{I}\Sigma_n$ y, por tanto, si $n = 0$, no podemos garantizar que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$. Con objeto de simplificar los enunciados de los resultados que siguen, establecemos el siguiente convenio: cuando en alguna fórmula aparezca un término exponencial debe entenderse que se afirma que tal elemento existe y que se satisfacen las condiciones expresadas por la fórmula. Por ejemplo, en el siguiente lema escribimos

$$\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u+1, x, y, z \rangle \in w \to (x+1)^{2^{(u+1+x+y)}} < z$$

debiendo leerse

$$\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u+1, x, y, z\rangle \in w \to \exists v < z \left((x+1)^{2^{(u+1+x+y)}} = v\right)$$

En consecuencia, en las demostraciones de resultados cuyo enunciado contenga términos exponenciales se probará también la existencia de dichos valores (aunque en el caso $n \geq 1$, esto sea innecesario).

Lema A.29 *Son teoremas de* $\mathbf{T}$*:*

(1) $\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u, x, y, z\rangle \in w \to u + x + y \leq z$

(2) $\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u, x, y, z\rangle \in w \to \langle u, x, y, z\rangle \leq 25 \cdot z^4$

(3) $\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u+1, x, y, z\rangle \in w \to (x+1)^{2^{(u+1+x+y)}} < z$

Demostración:
Razonemos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.
(1) Sea $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$. Por inducción probaremos que, para todo $e \in \mathfrak{A}$, se verifica

$$\forall y, x, z < c\,(\langle e, x, y, z\rangle \in c \to e + x + y \leq z)$$

$\underline{e=0}$: Sea $\psi(y, c)$ la fórmula

$$\forall z, x < c\,(\langle 0, x, y, z\rangle \in c \to u + x + y \leq z)$$

Por inducción probaremos que se verifica $\psi(b, c)$, para todo $b \geq 1$ (recordemos que si $\langle 0, a, b, d\rangle \in c$, entonces $b \geq 1$).

$\underline{b=1}$: Si $\langle 0, a, b, d\rangle \in c$, entonces por A.27–**(1)**, $\varphi(a, d)$, luego $a^2 < d$. Por tanto,

Si $a = 0$, entonces $a^2 = 0 < d$, luego $1 = 0 + 0 + 1 \leq d$.
Si $a \geq 1$, entonces $1 \leq a^2 < d$, y así, $0 + 1 + a \leq d$.

$\underline{b \to b+1}$: Supongamos que $\langle 0, a, b+1, d\rangle \in c$. Entonces

(–) $J(b+1, d) \in [0, a](c)$
(–) $\mathrm{itcl}_\varphi([0, a](c) \cup \{J(0, a)\}, a)$

Por tanto de la definición de itcl_φ, se sigue que existe d_0 tal que

$$\varphi(d_0, d) \wedge J(b, d_0) \in [0, a](c)$$

En consecuencia, $\langle 0, a, b, d_0\rangle \in c$. Por hipótesis de inducción (en b), $0 + a + b \leq d_0$. Puesto que $d_0^2 < d$, entonces $0 + a + b + 1 \leq e$.

$\underline{e \to e+1}$: Sea $e \in \mathfrak{A}$ tal que

$$(\bullet) \qquad \forall y, x, z < c\,(\langle e, x, y, z\rangle \in w \to z \geq e + x + y)$$

Sea $\psi(y, c)$ la fórmula

$$\forall z, x < c\,(\langle e+1, x, y, z\rangle \in c \to (e+1) + x + y \leq z)$$

Probemos por inducción que, para todo $b \geq 1$, $\psi(b, c)$.

$\underline{b = 1}$: Si $\langle e+1, a, 1, d\rangle \in c$, entonces $\langle e, a+1, a+2, d\rangle \in c$, luego por $(\bullet)$,

$$e + a + 1 + a + 2 \leq d$$

Por tanto, $d \geq (e+1) + a + b$.

$\underline{b \to b+1}$: Supongamos que $\langle e+1, a, b+1, d\rangle \in c$. Entonces, puesto que $b+1 \geq 2$, de la definición de Ack_φ se sigue que existe d_0 tal que:

(–) $J(b, d_0) \in [e+1, a](c)$

(–) $J(d_0, d) \in c_{[e+1]}$

Por tanto,

(a) $\langle e+1, d_0, 1, d\rangle \in c$

(b) $\langle e+1, a, b, d_0\rangle \in c$

De **(b)** y $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$ se deduce que

(c) $\langle e, d_0+1, d_0+2, d\rangle \in c$

En consecuencia,

(–) $(e+1) + a + b \leq d_0$ $\quad[\![$**(a)** e Hip. Ind. sobre $b]\!]$

(–) $e + (d_0+1) + (d_0+2) \leq d$ $\quad[\![$**(c)** e Hip. Ind. sobre $e]\!]$

Por tanto,

$$(e+1) + a + (b+1) \leq d_0 + 1 \leq e + (d_0+1) + (d_0+2) \leq d$$

(2) Sean $a, b, c, d, e \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e, a, b, d\rangle \in c$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \langle e, a, b, d\rangle & = & J(J(e,a), J(b,d)) \\ & \leq & (J(e,a) + J(b,d))^2 \\ & \leq & ((e+a)^2 + (b+d)^2)^2 \\ & \leq & (d^2 + (2\cdot d)^2)^2 \qquad [\![(1)]\!] \\ & = & 25 \cdot d^4 \end{array}$$

(3) En primer lugar observemos que:

Aserto A.29.1 $\quad \mathrm{T} \vdash \mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u, x, y, z\rangle \in w \to x^2 < z$

Prueba del Aserto:
Fácil por inducción en u, utilizando A.15.2–**(1)**. $\square$

Sea $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$. Probaremos por inducción que, para todo $e \in \mathfrak{A}$, se verifica

$$\forall x, y, z < c\ \left(\langle e+1, x, y, z\rangle \in w \to (x+1)^{2^{(e+1+x+y)}} < z\right)$$

(La prueba por inducción mostrará que los correspondientes valores de la función exponencial existen).

$\underline{e = 0}$: Sean $a, b' \in \mathfrak{A}$. Por inducción probamos que, para todo $b \in \mathfrak{A}$, se tiene que

$$(\bullet) \qquad \forall z < b'\ \left(\mathrm{IT}_\varphi(a+1, b+1, z) \to (a+1)^{2^{(b+1)}} < z\right)$$

$\underline{b = 0}$: Sea $d < b'$ tal que $\mathrm{IT}_\varphi(a+1, 1, d)$. Entonces, por A.13–**(2)**, $(a+1)^{2^1} < d$.

$\underline{b \to b+1}$: Sea $d < b'$ tal que $\mathrm{IT}_\varphi(a+1, b+2, d)$. Entonces, por A.19–**(3)**, existe $d' < d$ tal que

$$\mathrm{IT}_\varphi(a+1, b+1, d') \wedge \varphi(d', d)$$

Por hipótesis de inducción, existe $(a+1)^{2^{(b+1)}} < d'$, luego por A.13–**(2)**,

$$((a+1)^{2^{(b+1)}})^2 = (a+1)^{2^{(b+2)}} < (d')^2 < d$$

Ahora el resultado para $e = 0$, se deduce de $(\bullet)$ y A.29.1 probando por inducción que, para todo $b \geq 1$, se tiene

$$\forall x, z < c\ \left(\langle 1, x, b, z\rangle \in c \to (x+1)^{2^{(1+x+b)}} < z\right)$$

$\underline{b = 1}$: Sean $a, d < c$ tales que $\langle 1, a, 1, d\rangle \in c$. Entonces, por $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$, $\langle 0, a+1, a+2, d\rangle \in c$ y, en consecuencia, de nuevo por $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$, se tiene $\mathrm{IT}_\varphi(a+1, a+2, d)$. Luego, teniendo en cuenta $(\bullet)$,

$$(a+1)^{2^{a+3}} < d$$

$\underline{b \to b+1}$: Supongamos que

$$\forall x, z < c\,[\langle 1, x, b, z\rangle \in c \to (x+1)^{2^{(1+x+b)}} < z]$$

y sean $a, d < c$ tales que $\langle 1, a, b+1, d\rangle \in c$. Entonces, por $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$, existe $d_0 < c$ tal que

(a) $J(b, d_0) \in [1, a](c)$

(b) $J(d_0, d) \in c_{[1]}$

Por (a), $\langle 1, a, b, d_0\rangle \in c$ luego por hipótesis de inducción (sobre b)

$$(a+1)^{2^{1+a+b}} < d_0$$

Por (b), $\langle 1, d_0, 1, z\rangle \in c$, luego, por el aserto $d_0^2 < d$. En consecuencia,

$$(a+1)^{2^{1+a+b+1}} = \left((a+1)^{2^{1+a+b}}\right)^2 < (d_0)^2 < d$$

$\underline{e \to e+1}$: Sean $a, b, d < c$ tales que $\langle e+2, a, b, d\rangle \in c$. Por inducción probaremos que, para todo $b \geq 1$, se tiene que

$$\forall x, z < c \left(\langle e+2, x, b, z\rangle \in c \to (x+1)^{2^{(e+2+x+b)}} < z\right)$$

$\underline{b=1}$: Entonces $\langle e+2, a, 1, d\rangle \in c$, luego $\langle e+1, a+1, a+2, d\rangle \in c$. Por hipótesis de inducción (sobre e), (existe $(a+2)^{2^{(e+1+a+1+a+2)}}$ y)

$$(a+2)^{2^{(e+1+a+1+a+2)}} < d$$

En consecuencia, (existe $(a+1)^{2^{(e+2+a+1)}}$ y)

$$(a+1)^{2^{(e+2+a+1)}} < (a+2)^{2^{(e+1+a+1+a+2)}} < d$$

$\underline{b \to b+1}$: Sean $a, d < c$ tales que $\langle e+2, a, b+1, d\rangle \in c$. En consecuencia, existe $d' < c$ tal que $\langle e+2, a, b, d'\rangle \in c$. Por hipótesis de inducción,

$$(a+1)^{2^{e+2+a+b}} < d'$$

Luego, por A.29.1,

$$(a+1)^{2^{e+2+a+b+1}} = \left((a+1)^{2^{e+2+a+b}}\right)^2 < (d')^2 < d$$

Lo que completa la prueba de **(3)**. □

Lema A.30 *Es un teorema de* **T**:

$$\begin{array}{l} \mathrm{itcl}_\varphi(w, x) \wedge y \geq 1 \wedge J(y, z) \in w \to \\ \quad \to \exists w' \leq (z+1)^{33} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \langle 0, x, y, z\rangle \in w' \wedge \\ (\forall y')_{0<y'\leq y} \forall z < w\, (J(y', z) \in [0, x](w') \leftrightarrow J(y', z) \in w) \end{array} \right. \end{array}$$

Demostración:
Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $a, c \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{itcl}_\varphi(c, a)$. Probaremos por inducción sobre b que

$$\begin{array}{l} \forall z < c\, (b \geq 1 \wedge J(b, z) \in c \to \\ \quad \to \exists w' \leq (z+1)^{33} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \langle 0, a, b, z\rangle \in w' \wedge \\ (\forall y')_{0<y'\leq b} \forall z < c\, (J(y', z) \in [0, a](w') \leftrightarrow J(y', z) \in c) \end{array} \right. \end{array}$$

<u>$b=1$</u>: Si $J(1,d) \in c$, entonces $c' = \{\langle 0,a,1,d\rangle\}$, verifica que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge (\forall y)_{0<y\leq 1} \forall z < c\,(J(y,z) \in [0,a](c') \leftrightarrow J(y,z) \in c)$$

Veamos que además $c' \leq d^{22}$.

$$\begin{array}{rcll}
c' & = & \{\langle 0,a,1,d\rangle\} & \\
 & \leq & 36 \cdot (\mathrm{Lp}_2(\langle 0,a,1,d\rangle))^2 & [\![\mathbf{Ax3}]\!] \\
 & \leq & 36 \cdot (2 \cdot \langle 0,a,1,d\rangle)^2 & [\![\mathrm{A.4\text{–}}\mathbf{(1)}]\!] \\
 & \leq & 36 \cdot 4 \cdot 25^2 \cdot d^8 & [\![\mathrm{A.29\text{–}}\mathbf{(2)}]\!] \\
 & \leq & 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot d^8 & \\
 & \leq & (d+1)^{22} & [\![d+1 \geq 2]\!] \\
 & \leq & (d+1)^{33} &
\end{array}$$

<u>$b \to b+1$</u>: Si $J(b+1,d) \in c$, entonces existe d_0 tal que $J(b,d_0) \in c \wedge \varphi(d_0,d)$. Por hipótesis de inducción existe $c_0 \leq (d_0+1)^{33}$ tal que

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{Ack}_\varphi(c_0) \wedge \\
(\forall y)_{0<y\leq b} \forall z < c\,(J(y,z) \in [0,a](c_0) \leftrightarrow J(y,z) \in c)
\end{array}\right.$$

Observemos que $d_0^2 < d$, luego por A.13.1, $(d_0+1)^3 < (d+1)^2$, Sea $c' = c_0 \cup \{\langle 0,a,b+1,d\rangle\}$. Entonces $\mathrm{Ack}_\varphi(c')$ y

$$(\forall y)_{0<y\leq b+1} \forall z < c\,(J(y,z) \in [0,a](c') \leftrightarrow J(y,z) \in c)$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcll}
c' & = & c_0 \cup \{\langle 0,a,b+1,d\rangle\} & \\
 & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot \langle 0,a,b+1,d\rangle & [\![\mathbf{Ax4}]\!] \\
 & \leq & c_0 + 4 \cdot c_0 \cdot 25 \cdot d^4 & [\![\mathrm{A.29\text{–}}\mathbf{(2)} \text{ y } \mathrm{A.4\text{–}}\mathbf{(2)}]\!] \\
 & \leq & c_0(1 + 4 \cdot 25 \cdot d^4) & \\
 & \leq & (d_0+1)^{33}(4 \cdot 2^5 \cdot d^4) & \\
 & \leq & ((d_0+1)^3)^{11} \cdot 2^7 \cdot d^4) & \\
 & \leq & ((d+1)^2)^{11} \cdot 2^7 \cdot d^4 & \\
 & \leq & (d+1)^{22}(d+1)^7(d+1)^4 & \\
 & = & (d+1)^{33} &
\end{array}$$

Lo que termina la prueba del lema. □

Proposición A.31 *Es un teorema de* **T**:

$$\begin{array}{l}
\forall u,x,z,y < w\,[\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge x \geq 1 \wedge \langle u,x,y,z\rangle \in w \wedge \exists v((z+1)^{72(u+1)} = v) \to \\
\quad \to \exists w' \leq (z+1)^{72(u+1)}\,(\mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \langle u,x,y,z\rangle \in w')]
\end{array}$$

Demostración:
Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $c \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$. Para cada $d' \in \mathfrak{A}$, probaremos por inducción que, para todo $e \in \mathfrak{A}$,

$$\forall x, y, z < c \left(\begin{array}{l} \langle e, x, y, z\rangle \in c \wedge \\ \exists v \leq d'((z+1)^{72(e+1)} = v) \end{array} \right\} \rightarrow \exists w' \leq (z+1)^{72(e+1)} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \\ \langle e, x, y, z\rangle \in w \end{array} \right)$$

<u>$e = 0$</u>: Si $\langle 0, a, b, d\rangle \in c \wedge \exists v \leq d' \left((d+1)^{72(0+1)} = v\right)$ entonces por definición de $\mathrm{Ack}_\varphi(w)$ tenemos

$$\mathrm{itcl}_\varphi([0,a](c) \cup \{J(0,a)\}, a) \wedge J(b,d) \in [0,a](c) \cup \{J(0,a)\}$$

luego por A.30, existe

$$c' \leq (d+1)^{33} \leq (d+1)^{72(0+1)}$$

tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle 0, a, b, d\rangle \in c'$.

<u>$e \rightarrow e+1$</u>: Sea e tal que

$$(\bullet) \quad \forall x, y, z < c \left(\begin{array}{l} \langle e, x, y, z\rangle \in c \wedge \\ \exists v \leq d' \left((z+1)^{72(e+1)} = v\right) \end{array} \right\} \rightarrow \exists w' \leq (z+1)^{72(e+1)} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \\ \langle e, x, y, z\rangle \in w' \end{array} \right)$$

Por inducción probaremos que, para todo $b \geq 1$, se tiene:

$$\forall z < c \left(\begin{array}{l} \langle e+1, x, b, z\rangle \in c \wedge \\ \exists v \leq d' \left((z+1)^{72(e+1)} = v\right) \end{array} \right\} \rightarrow \exists w' \leq (z+1)^{72(e+1)} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w') \wedge \\ \langle e+1, x, b, z\rangle \in w' \end{array} \right)$$

<u>$b = 1$</u>: Si $\langle e+1, a, 1, d\rangle \in c$ y existe $(d+1)^{72(e+2)}$, entonces $\langle e, a+1, a+2, d\rangle \in c$ y existe $(d+1)^{72(e+1)}$ luego, por $(\bullet)$, existe $c_0 \leq (d+1)^{72(e+1)}$ tal que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c_0) \wedge \langle e, a+1, a+2, d\rangle \in c_0$$

Sea $c' = c_0 \cup \{\langle e+1, a, 1, d\rangle\}$, entonces $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$ y además

$$\begin{array}{rcl} c' & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_2(c_0) \cdot \{\langle e+1, a, 1, d\rangle\} \\ & \leq & c_0 + 2 \cdot c_0 \cdot 36 \cdot 4 \cdot 25^2 \cdot d^8 \\ & \leq & (d+1)^{72(e+1)} \cdot (1 + 2^6 \cdot 2^2 \cdot 2^{10} \cdot d^8) \\ & \leq & (d+1)^{72(e+1)}(d+1)^{26} \\ & \leq & (d+1)^{72(e+2)} \end{array}$$

<u>$b \rightarrow b+1$</u>: Si $\langle e+1, a, b+1, d\rangle \in c$ y existe $(d+1)^{72(e+2)}$, entonces existe $d_0 < c$ tal que

$$\langle e+1, a, b, d_0\rangle \in c \wedge \langle e+1, d_0, 1, d\rangle \in c$$

Además, pueesto que $d_0 < d$, existe $(d_0+1)^{72(e+2)}$. En consecuencia,

$$\langle e+1, a, b, d_0\rangle \in c \wedge \langle e, d_0+1, d_0+2, d\rangle \in w$$

Por hipótesis de inducción sobre b, existe c_0, tal que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c_0) \wedge c_0 \leq (d_0+1)^{72(e+2)} \wedge \langle e+1, a, b, d_0\rangle \in c_0$$

y, por ($\bullet$), existe c_1 tal que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c_1) \wedge c_1 \leq (d+1)^{72(e+1)} \wedge \langle e, d_0+1, d_0+2, d\rangle \in c_1$$

Sea $c' = c_0 \cup c_1 \cup \{\langle e+1, a, b+1, d\rangle\} \cup \{\langle e+1, d_0, 1, d\rangle\}$. Veamos que $c' \leq (d+1)^{72(e+2)}$.

$$\begin{array}{rcl} \{\langle e+1, d_0, 1, d\rangle\} & \leq & 36 \cdot \mathrm{Lp}_2(\langle e+1, d_0, 1, d\rangle)^2 \\ & \leq & 36 \cdot 4 \cdot (\langle e+1, d_0, 1, d\rangle)^2 \\ & \leq & 36 \cdot 4 \cdot 25^2 \cdot d^8 \\ & \leq & d^{26} \end{array}$$

Además,

$$\begin{array}{rcl} \{\langle e+1, a, b+1, d\rangle\} & \leq & 36 \cdot \mathrm{Lp}_2(\langle e+1, a, b+1, d\rangle)^2 \\ & \leq & 36 \cdot 4 \cdot 25^2 d^8 \\ & \leq & d^{26} \end{array}$$

Veamos ahora cómo podemos acotar c':

$$\begin{array}{rcl} c' & = & c_0 \cup c_1 \cup \{\langle e+1, a, b+1, d\rangle\} \cup \{\langle e+1, d_0, 1, d\rangle\} \\ & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot (c_1 + \mathrm{Lp}_4(c_1) \cdot (\{\langle e+1, a, b+1, d\rangle\} \cup \{\langle e+1, d_0, 1, d\rangle\})) \\ & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot \left(c_1 + \mathrm{Lp}_4(c_1) \cdot (d^{26} + 4 \cdot (d^{26})^2)\right) \\ & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot \left(c_1 + \mathrm{Lp}_4(c_1) \cdot (d^{26} + 2^2 \cdot d^{52})\right) \\ & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot \left(c_1 + \mathrm{Lp}_4(c_1) \cdot d^{55}\right) \\ & \leq & c_0 + \mathrm{Lp}_4(c_0) \cdot \left((d+1)^{72(e+1)} + (d+1)^{72(e+1)} \cdot d^{55}\right) \\ & \leq & (d_0+1)^{72(e+2)} + 4 \cdot (d_0+1)^{72(e+2)} \cdot (d+1)^{72(e+1)} \cdot (1 + d^{55}) \\ & \leq & (d_0+1)^{72(e+2)} \cdot \left(1 + 4 \cdot (d+1)^{72(e+1)} \cdot d^{56}\right) \\ & \leq & (d_0+1)^{72(e+2)} \cdot (d+1)^{72(e+1)} \cdot d^{63} \\ & \leq & (d+1)^9 \cdot (d+1)^{72(e+1)} \cdot (d+1)^{63} \quad [\![(\star)]\!] \\ & = & (d+1)^{72(e+2)} \end{array}$$

donde $(\star)$ se obtiene, teniendo en cuenta que $(d_0+1)^{8(e+2)} < d$ ya que por A.29–**(3)**,

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e+1, d_0, 1, d\rangle \in c \to (d_0+1)^{2^{(e+d_0+2)}} < d$$

y $e+2 \leq d_0$ y $2(e+2) \leq 2^{e+2}$.

Lo que termina la prueba del resultado □

Definición A.32 *Sea* Fun(w) *la fórmula*

$$\forall x, y_1, y_2 < w \; (J(x, y_1) \in w \wedge J(x, y_2) \in w \to y_1 = y_2)$$

y sea Comp(s, u, v, z) *la fórmula*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Fun}(s) \wedge J(u,v) \in s \wedge \\ \exists z_0 < z \; (J(1, z_0) \in s \wedge \mathrm{IT}_\varphi(z_0+1, z_0+2, z)) \wedge \\ \forall y \leq u \forall z' < z \left(y > 1 \wedge J(y, z') \in s \to \exists z'', w \leq z \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ack}_\varphi(w) \;\wedge J(y-1, z'') \in s \\ \langle y-1, z'+1, z'+1, z''\rangle \in w \end{array} \right. \right) \end{array} \right.$$

Nota A.33 Podemos describir informalmente el significado de $\mathrm{Comp}(s,u,v,z)$ del siguiente modo:

Escribamos $(s)_x = y$ en lugar de $J(x,y) \in s$, entonces, utilizando las notaciones de A.26, $\mathrm{Comp}(s,u,v,z)$ expresa que

$$(s)_u = v \wedge (\forall i)_{2\le i\le u}\left((s)_{i-1} = F_{i-1}^{(s)_i+1}((s)_i+1)\right) \wedge z = F_0^{(s)_1+2}((s)_1+1)$$

Lema A.34 *Es un teorema de* $\mathbf{T}$*:*

$$\forall u \ge 1\, \forall v, z\ (\exists s\, \mathrm{Comp}(s,u,v,z) \leftrightarrow \exists w\, (\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u,v,1,z\rangle \in w))$$

Demostración:
Razonaremos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.

$\underline{\longrightarrow}$: Sean $a,c,d,e \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{Comp}(c,e,a,d)$. Probaremos que

$$\exists w\, (\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle e,a,1,d\rangle \in w)$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $e = 1$.

Entonces $J(1,a) \in c$. Por tanto, de $\mathrm{Fun}(c)$ se sigue que $\mathrm{IT}_\varphi(a+1, a+2, d)$. Luego existe c_0 tal que

$$\mathrm{itcl}_\varphi(c_0, a+1) \wedge J(a+2,d) \in c_0$$

Por A.30, existe $c_1 \le (d+1)^{33}$ tal que

$$\begin{array}{l}\mathrm{Ack}_\varphi(c_1) \wedge \langle 0, a+1, a+2, d\rangle \in c_1 \wedge \\ (\forall y)_{0<y\le a+2}\, \forall z < c_0\, (J(y,z) \in [0,a](c_1) \leftrightarrow J(y,z) \in c_0)\end{array}$$

Sea $c' = c_1 \cup \{\langle 1,a,1,d\rangle\}$. Entonces

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle 1,a,1,d\rangle \in c'$$

Caso 2: $e \ge 2$.

Sabemos que $J(e,a) \in c$. Puesto que $e > 1$, por definición de la fórmula Comp, existen $c_1, d' < d$ tales que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c_1) \wedge J(e-1,d') \in c \wedge \langle e-1, a+1, a+1, d'\rangle \in c_1$$

Sea $c' = c_1 \cup \{\langle e-1, a+1, a+2, d\rangle, \langle e,a,1,d\rangle\}$. Entonces

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle e,a,1,d\rangle \in c'$$

$\underline{\longleftarrow}$: Sean $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c)$.

Aserto A.34.1 Para todo $a, d, e < c$, tales que $\langle e, a, 1, d\rangle \in c$

$$\exists s < c\,\big(\forall u \leq e \forall z < c\,(J(u,z) \in s \leftrightarrow \exists z' < d\,(\langle u, z+1, z+1, z'\rangle \in c))\big)$$

Prueba del Aserto:
Fácil por inducción sobre e. □

Como consecuencia del aserto, existe $c_0 \in \mathfrak{A}$ tal que

$$c_0 = (\mu s)\,\big(\forall u, z < c\,(J(u,z) \in s \leftrightarrow \exists z' < d\,\langle u, z+1, z+1, z'\rangle \in c)\big)$$

Sea $c' = c_0 \cup \{J(e,a)\}$. Entonces $\mathrm{Comp}(c', e, a, d)$. □

Proposición A.35 *Es un teorema en* $\mathbf{T}$*:*

$$u \geq 1 \wedge \mathrm{Comp}(s,u,v,z) \rightarrow \exists s' \leq 36 \cdot 4 \cdot z^6\,(\mathrm{Comp}(s,u,v,z))$$

Demostración:
Razonaremos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.

Sean $c, d \in \mathfrak{A}$. Probaremos por inducción que, para todo $e \geq 1$:

$$\forall z_0, v < d\left(\mathrm{Comp}(c,e,v,d) \wedge J(1,z_0) \in c \rightarrow \begin{cases} \exists v \leq d^6\,\left(((z_0+1)^{12(e+1)} = v\right) \wedge \\ \exists s' \leq 36 \cdot 4 \cdot (z_0+1)^{12(e+1)}\,(\mathrm{Comp}(s',e,v,d)) \end{cases}\right)$$

<u>$e = 1$</u>: Sean $a, c \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathrm{Comp}(c,1,a,d)$. Sea $c' = \{J(1,a)\}$. Entonces, obviamente, $\mathrm{Comp}(c',1,a,d)$. Por A.34, existe c' tal que $\mathrm{Ack}(c') \wedge \langle 1, a, 1, d\rangle \in c'$ luego, por A.29–**(1)**, $1 + a + 1 \leq d$. Por tanto,

$$\begin{array}{rcll} c' & \leq & 36 \cdot (\mathrm{Lp}_2(J(1,a)))^2 & [\![\mathbf{Ax4}]\!] \\ & \leq & 36 \cdot 4 \cdot (a+1)^4 & [\![\mathrm{A.4}\text{–}\mathbf{(2)}]\!] \\ & \leq & 36 \cdot 4 \cdot (a+1)^{12(1+1)} & \end{array}$$

Puesto que $\langle 1, a, 1, d\rangle \in c'$, por A.29–**(3)**, $(a+1)^{2^{(1+a+1)}} < d$, luego

$$(a+1)^{12(1+1)} = \left((a+1)^4\right)^6 \leq \left((a+1)^{2^{1+a+1}}\right)^6 \leq d^6$$

<u>$e \rightarrow e+1$</u>: Sea $e \geq 1$ tal que

$$\forall z_0, v < d\left(\mathrm{Comp}(c,e,v,d) \wedge J(1,z_0) \in c \rightarrow \begin{cases} \exists v \leq d^6((z_0+1)^{12(e+1)} = v) \\ \exists s' \leq 36 \cdot 4 \cdot (z_0+1)^{12(e+1)}\,(\mathrm{Comp}(s',e,v,d)) \end{cases}\right)$$

Sea $a < d$ tal que $\mathrm{Comp}(c, e+1, a, d)$.

Aserto A.35.1 $(\forall u)_{1 \leq u \leq e} \forall z < c\,(J(u,z) \in c \rightarrow z \geq e + 1 + a)$ □

Sabemos que $J(e+1,a) \in c$, luego existen $d', c_0 < d$ tales que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c_0) \wedge J(e,d') \in c_0 \wedge \langle e, a+1, a+1, d'\rangle \in c_0$$

Entonces $\mathrm{Comp}(c,e,d',d)$, siendo $d' < d$. Sea $d_0 < d$ tal que $J(1,d_0) \in c$. Entonces, por hipótesis de inducción, existe $c_1 \leq (d_0+1)^{12(e+1)} \leq d^6$ tal que $\mathrm{Comp}(c_1,e,d',d)$. Sea $c' = c_1 \cup \{J(e+1,a)\}$. Entonces $\mathrm{Comp}(c', e+1, a, d)$ y

$$\begin{array}{rcl} c' & \leq & c_1 + \mathrm{Lp}_4(x)\cdot\{J(e+1,a)\} \\ & \leq & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+1)}(1+4\cdot\{J(e+1,a)\}) \\ & \leq & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+1)}\left(1+4\cdot 36\cdot 4\cdot (a+e+1)^2\right) \\ & \leq & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+1)}\left(4\cdot 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^2\right) \\ & \leq & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+1)}\cdot 2^{10}\cdot (d_0+1)^2 \\ & \leq & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+1)}\cdot (d_0+1)^{12} \\ & = & 36\cdot 4\cdot (d_0+1)^{12(e+2)} \end{array}$$

Puesto que $\mathrm{Comp}(c,e,d',d)$ y $J(1,d_0) \in c$, se tiene $\mathrm{IT}_\varphi(d_0+1, d_0+2, d)$. Por A.30, existe c'' tal que

$$\langle 0, d_0+1, d_0+2, d\rangle \in c''$$

Luego, por A.29–**(3)**, $(d_0+2)^{2^{d_0+2}} < d$. En consecuencia,

$$(d_0+1)^{12(e+2)} \leq \left((d_0+1)^{2(e+2)}\right)^6 \leq \left((d_0+1)^{2^{d_0+2}}\right)^6 \leq \left((d_0+2)^{2^{d_0+2}}\right)^6 \leq d^6$$

Lo que prueba el resultado. □

Definición A.36 *Sea $\varphi \in \Pi_n$ en las condiciones anteriores. $F^y_{\varphi,u}(x) = z$ es la fórmula*

$$\begin{array}{l} (y=0 \wedge x=z) \vee \\ y \neq 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} (u=0 \wedge \mathrm{IT}_\varphi(x,y,z)) \vee \\ u \neq 0 \wedge \exists s,v < 36\cdot 4\cdot z^6 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (y=1 \wedge v=x) \vee \\ y \geq 2 \wedge \exists w < z\,(\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle u,x,y-1,v\rangle \in w) \end{array}\right. \\ \wedge\, \mathrm{Comp}(s,u,v,z) \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}$$

$F_{\varphi,u}(x) = z$ es la fórmula $F^1_{\varphi,u}(x) = z$. Diremos que F_φ es la función de Ackermann definida a partir de φ.

Nota A.37 Describamos informalmente el sentido de la fórmula $F^y_{\varphi,u}(x) = z$, en el caso $u \geq 1$.

Si $F^y_{\varphi,u}(x) = z$ e $y \geq 1$, entonces existe s tal que $\mathrm{Comp}(s,u,v,z)$. Con la notación de A.33, sea para cada $i = 1,\ldots,u$, $z_i = (s)_i$, entonces

$$z_u = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } y = 1 \\ F^{y-1}_{\varphi,u}(x) & \text{si } y > 1 \end{array}\right.$$

$$z_{i-1} = F^{z_i+1}_{\varphi,i-1}(z_i+1) \quad \text{para todo } i,\ 1 < i \leq u$$

De este modo para todo $i = 1, \ldots, u$, $F_{\varphi,i}(z_i) = z$. En particular, $F_{\varphi,1}(z_1) = z$, es decir, $\mathrm{IT}_\varphi(z_1 + 1, z_1 + 2, z)$.

Lema A.38 *Son teoremas de* **T**:

(1) $F_{\varphi,u+1}(x) = z \leftrightarrow F^{x+2}_{\varphi,u}(x+1) = z$

(2) $F^{y+1}_{\varphi,u}(x) = z \leftrightarrow F_{\varphi,u}(F^{y}_{\varphi,u}(x)) = z$

Demostración:
Observemos en primer lugar que, en el caso $u = 0$, ambos resultados se deducen directamente a partir de la definición (teniendo en cuenta A.19). Para probar **(1)** y **(2)** en el caso $u \geq 1$ razonaremos en un modelo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$.

(1) Sean $a, d, e \in \mathfrak{A}$, $e \geq 1$ tales que $F_{\varphi,e+1}(a) = d$ entonces, por definición, existe $c \leq 36 \cdot 4 \cdot d^6$ tal que

$$\mathrm{Comp}(c, e+1, a, d)$$

Entonces, $J(e+1, d) \in c$, luego, por $\mathrm{Comp}(c, e+1, a, d)$, existen $c', d' \leq d$ tales que

$$J(e, d') \in c \wedge \mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle e, a+1, a+1, d' \rangle \in c'$$

Ahora, es fácil ver que $\mathrm{Comp}(s, e, d', d)$, luego por A.35,

$$\exists s' \leq 36 \cdot 4 \cdot d^6\, (\mathrm{Comp}(s', e, d', d))$$

Por A.34 existe c' tal que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle e, d', 1, d \rangle \in c'$$

Luego, por A.29–**(3)**, existe $(d'+1)^{2^{e+d'+1}}$ y, además,

$$(d'+1)^{2^{e+d'+1}} < d$$

En consecuencia, existe $(d'+1)^{72(e+1)}$. Puesto que $e \geq 1$, por A.29–**(3)**,

$$(a+2)^{2^{e+a+1+a+1}} < d'$$

Luego, $72 < 2^8 < d'$. Por tanto,

$$(\bullet) \quad (d'+1)^{72(e+1)} < (d'+1)^{2^{d'} 2^{(e+1)}} < (d'+1)^{2^{e+d'+1}} < d$$

Por A.31,

$$\exists w \leq (d'+1)^{72(e+1)} \left(\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle e, a+1, a+1, d' \rangle\right)$$

lo que, junto con $(\bullet)$ nos da

$$\exists w < d \left(\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle e, a+1, a+1, d' \rangle\right)$$

Lo que prueba $F^{a+2}_{\varphi,e}(a+1) = d$.

Recíprocamente, si $F^{a+2}_{\varphi,e}(a+1) = d$, entonces, existen $c, d' \leq 36 \cdot 4 \cdot d^6$ y $c' < d$ tales que

$$\mathrm{Comp}(c, e, a, d) \wedge \mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle e, a+1, a+1, d'\rangle \in c'$$

Sea $c'' = (c - \{J(e,a)\}) \cup \{J(e+1,a),\ J(e,d')\}$. Entonces, $\mathrm{Comp}(c'', e+1, a, d)$, luego, por A.35, $F_{\varphi,e+1}(a) = d$.

(2) Sean $a, b, d, e \in \mathfrak{A}$, tales que $b, e \geq 1$ y $F^{b+1}_{\varphi,e}(a) = d$.

Aserto A.38.1 $(\forall y)_{1\leq y\leq b} \forall v, w < d\ (\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle e, a, y, v\rangle \in w \to F^y_{\varphi,e}(a) = v)$

Prueba del Aserto:

Por inducción probaremos que, para todo b_0, $1 \leq b_0 \leq b$, se tiene

$$\forall v, w < d\ \left(\mathrm{Ack}_\varphi(w) \wedge \langle e, a, y, v\rangle \in w \to F^{b_0}_{\varphi,e}(a) = v\right)$$

$\underline{b_0 = 1}$: Sean $d', c < d$ tales que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e, a, 1, d'\rangle \in c$$

Entonces, por A.34, existe c' tal que $\mathrm{Comp}(c', e, a, d')$, lo que junto con A.35, prueba que $F^1_{\varphi,e}(a) = d'$.

$\underline{b_0 \to b_0 + 1}$: Sean $c, d' < d$ tales que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e, a, b_0 + 1, d'\rangle \in c$$

Entonces, existe $d'' < d'$ tal que

(a) $\langle e, a, b_0, d''\rangle \in c$

(b) $\langle e, d'', 1, d'\rangle \in c$

Por **(b)** y A.34 existe c' tal que $\mathrm{Comp}(c', e, d'', d')$, lo que, junto con **(a)** nos da $F^{b_0+1}_{\varphi,e}(a) = d'$. □

Ahora, utilizando el aserto, podemos probar fácilmente que $F_{\varphi,e}(F^b_{\varphi,e}(a)) = d$.

Recíprocamente, si $F_{\varphi,e}(F^b_{\varphi,e}(a)) = d$, entonces existe $d' < d$ tal que

$$F_{\varphi,e}(d') = d \wedge F^b_{\varphi,e}(a) = d'$$

Aserto A.38.2 Existe c tal que $\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e, a, b, d'\rangle \in c$.

Prueba del Aserto:

Distinguimos dos casos:

<u>Caso 1</u>: $b = 1$.

El resultado es consecuencia de A.34.

<u>Caso 1</u>: $b \geq 2$.

Por definición de $F_{\varphi,e}(a)^b = d'$, existen c', c'' y d'' tales que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c') \wedge \langle e, a, b-1, d''\rangle \in c' \wedge \mathrm{Comp}(c'', e, d'', d')$$

Por A.34, existe c''' tal que

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c''') \wedge \langle e, d'', 1, d'\rangle \in c'''$$

Sea $c = c' \cup c''' \cup \{\langle e, a, b, d'\rangle\}$. Entonces

$$\mathrm{Ack}_\varphi(c) \wedge \langle e, a, b, d'\rangle \in c$$

Lo que prueba el aserto. □

A partir de este último aserto, podemos probar fácilmente que $F^{b+1}_{\varphi,e}(a) = d$. □

Nota A.39 Sea $\mathbb{K}_0(x) = y$ la fórmula $(x+1)^2 = y$. Para cada $n \geq 1$, sea $\mathbb{K}_n(x) = y$ como en V.23–(**5**). Para cada $n \in \omega$ definamos a partir de $\mathbb{K}_n$ la función de Ackermann, $F^y_{\mathbb{K}_n,u}(x) = z$. Recordemos las fórmulas $\mathbb{F}_{n,k}$ definidas en el capítulo VI como sigue:

(–) $\mathbb{F}_{n,0}(x) = y$ es la fórmula $\mathbb{K}_n(x) = y$

(–) $\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y$ es la fórmula $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(x+1, x+2, y)$.

Teorema A.40 *Para cada $n \in \omega$,*

(**1**) $\forall k \in \omega, \quad \mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathbb{F}_{n,k}(x) = z \leftrightarrow F_{\mathbb{K}_n,k}(x) = z$

(**2**) $F^1_{\mathbb{K}_n,u}(x) = y$ *es una Π_n–q–envoltura de* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ *en* $\mathbf{I\Sigma}_n$.

Demostración:
(**1**) Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$. Probaremos por inducción sobre $k \in \omega$, que

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(x, y, z) \leftrightarrow F^y_{\mathbb{K}_n,k}(x) = z$$

$\underline{k = 0}$: El resultado es consecuencia directa de las definiciones de $\mathbb{F}_{n,0}$ y $F_{\mathbb{K}_n,0}$.

$\underline{k \to k+1}$: Sea $d \in \mathfrak{A}$. Por inducción sobre $b \geq 1$ probaremos que:

$$\forall x, z < d\,[\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k+1}}(x, b, z) \leftrightarrow F^b_{\mathbb{K}_n,k+1}(x) = z]$$

$\underline{b = 1}$: Sean $a, d' < d$ tales que $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k+1}}(a, 1, d')$ entonces, por definición,

$$\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(a+1, a+2, d')$$

Por hipótesis de inducción, $F^{a+2}_{\mathbb{K}_n,k}(a+1) = d'$, luego, por A.38, $F_{\mathbb{K}_n,k+1}(a) = d'$.

Recíprocamente, si $F_{\mathbb{K}_n,k+1}(a) = d'$. Entonces, por A.38–(**1**), $F^{a+2}_{\mathbb{K}_n,k}(a+1) = d'$. Por hipótesis de inducción, $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(a+1, a+2, d')$. Luego, por definición, de $\mathbb{F}_{n,k+1}$, resulta que $\mathbb{F}_{n,k+1}(a) = d'$.

$\underline{b \to b+1}$: Sean $a, d' < d$ tales que

$$\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k+1}}(a, b+1, d')$$

Entonces, por definición, existe $d'' < d'$ tal que

(a) $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_n, k+1}(a, b, d'')$

(b) $\mathbb{F}_{n,k+1}(d'') = d'$

Entonces, por definición de $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k+1}}$ y de **(a)** se sigue que

(c) $\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(d''+1, d''+2, d')$

Entonces,

(–) $F^{b}_{\mathbb{K}_n, k}(a) = d''$ $\quad$ $[\![$(a) e Hip. Ind. sobre $b]\!]$

(–) $F^{d''+2}_{\mathbb{K}_n, k}(d''+1) = d'$ $\quad$ $[\![$(c) e Hip. Ind. sobre $k]\!]$

por A.38–(1),

$$F^{b}_{\mathbb{K}_n, k}(a) = d'' \wedge F_{\mathbb{K}_n, k}(d'') = d'$$

y, en consecuencia, por A.38–(2), $F^{b+1}_{\mathbb{K}_n, k+1}(a) = d'$.

Recíprocamente, si $F^{b+1}_{\mathbb{K}_n, k+1}(a) = d$. Entonces, por A.38–(2),

$$F_{\mathbb{K}_n, k}(F^{b}_{\mathbb{K}_n, k}(a)) = d'$$

es decir, existe $d'' < d'$ tal que

$$F_{\mathbb{K}_n, k+1}(d'') = d' \wedge F^{b}_{\mathbb{K}_n, k+1}(a) = d''$$

Por las hipótesis de inducción (sobre b y k), de un razonamiento similar al anterior se obtiene que

$$\mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(d''+1, d''+2, d') \wedge \mathrm{IT}_{\mathbb{F}_{n,k}}(a, b, d'')$$

Luego por definición, de $\mathbb{F}_{n,k+1}$, resulta que $\mathbb{F}_{n,k+1}(d'') = d'$ y $\mathbb{F}^{b}_{n,k+1}(a) = d''$. En consecuencia, $\mathbb{F}^{b+1}_{n,k+1}(a) = d''$.

(2) Por VI.15–**(1)** el conjunto

$$\Phi_n = \{\mathbb{F}_{n,k} : k \in \omega\}$$

es un conjunto fuertemente Π_n–funcional. Además, por VI.14–**(3)**,

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \Phi_n^*$$

Por tanto, teniendo en cuenta **(1)**, para probar que $F_{\mathbb{K}_n, u}(s) = y$ es una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$ bastará probar que, para cada $k \in \omega$

$$(\bullet) \qquad \mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y \to \exists z < y\, (\mathbb{F}_{n,k}(x) = z)$$

Puesto que $\mathbb{F}_{n,k+1}(x) = y$ es la fórmula $\mathrm{IT}_{\mathbb{K}_n}(x+1, x+2, y)$, el resultado es consecuencia de A.19–(**5**). □

El siguiente teorema constituye, junto con A.40, la prueba de VI.15–(**2**).

Teorema A.41 *Para cada $n \in \omega$, $F_{\mathbb{K}_n,u}(x) = z$ es una Π_n–envoltura fuerte de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$.*

Demostración:
Por comodidad, escribiremos $F_u(x) = y$ en lugar de $F_{\mathbb{K}_n,u}(x) = y$.

Teniendo en cuenta A.40, sólo debemos probar que si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ y $a, b \in \mathfrak{A}$, $\omega < a < b$ son tales que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < b\,(F_k(a) = y)$$

entonces existe $I \prec_n^e \mathfrak{A}$ tal que $I \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $a < I < b$.

Supongamos entonces que

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < b\,(F_k(a) = y)$$

Por overspill, existe $c > \omega$ tal que $\mathfrak{A} \models \exists y < b\,(F_{c+1}(a) = y)$. Además, podemos suponer $c < a$. Sea $d = F_{c+1}(c)$. Entonces

$$\forall k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \exists y < d\,(F_k(c) = y)$$

Vamos a construir el segmento inicial pedido siguiendo la prueba del lema 4.6 de [33].

Sea $\{\psi_i : i \in \omega\}$ una enumeración de todas las fórmulas Π_n, en la que cada fórmula se repite una infinidad de veces. Definiremos dos sucesiones de elementos de $\mathfrak{A}$, $\{a_k : k \in \omega\}$ y $\{b_k : k \in \omega\}$, verificando:

$(\mathbf{1})_k$ $k \neq 0 \implies (a_{k-1})^2 < a_k$

$(\mathbf{2})_k$ $a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_0$

$(\mathbf{3})_k$ Si $k \neq 0$ y $\langle \vec{y} \rangle \leq a_{k-1}$, entonces $(\mu w)\psi_{k-1}(w, \vec{y}) \notin (a_k, b_k]$

$(\mathbf{4})_k$ $b_k = F_{c-k+1}(a_k)$

Haremos la construcción de los a_k y los b_k, y la prueba de que se verifican, $(\mathbf{1})_k$, $(\mathbf{2})_k$ y $(\mathbf{3})_k$, por inducción sobre k.

<u>$k = 0$</u>: Sea $a_0 = c$ y $b_0 = d$. Entonces, $(\mathbf{1})_0$, $(\mathbf{2})_0$ y $(\mathbf{3})_0$, se verifican trivialmente.

<u>$k \to k+1$</u>: Supongamos definidos a_i y b_i para cada $i \leq k$, de modo que se verifican $(\mathbf{1})_i$, $(\mathbf{2})_i$, $(\mathbf{3})_i$ y $(\mathbf{4})_i$. Puesto que $b_k = F_{c-k+1}(a_k) = F_{c-k}^{a_k+2}(a_k+1)$, podemos expresar el intervalo $(a_k, b_k]$ como

$$(a_k, b_k] = \bigcup_{j=0}^{a_k+1} (F_{c-k}^{j}(a_k+1), F_{c-k}^{j+1}(a_k+1)]$$

El conjunto $M = \{(\mu w)\psi_k(w,\vec{e}) : \langle\vec{e}\rangle \leq a_k\}$ tiene a lo sumo $a_k + 1$ elementos, luego, usando PHP, existe $j \leq a_k + 1$ tal que el intervalo $(F^j_{c-k}(a_k+1), F^{j+1}_{c-k}(a_k+1)]$ es disjunto con M. Sean

$$a_{k+1} = F^j_{c-k}(a_k+1) \quad \text{y} \quad b_{k+1} = F^{j+1}_{c-k}(a_k+1)$$

Entonces $(\mathbf{2})_{k+1}$, $(\mathbf{3})_{k+1}$ y $(\mathbf{4})_{k+1}$, son evidentes y $(\mathbf{1})_{k+1}$ se tiene por la definición de F.

Sea I el segmento determinado por los a_k, es decir,

$$I = \{b \in \mathfrak{A} : \exists k \in \omega,\ b < a_k\}$$

Entonces, de la definición de I deducimos que I es una subestructura inicial de $\mathfrak{A}$ (recordar la propiedad $(\mathbf{1})_k$) y, por tanto, $I \models \mathbf{I\Delta_0}$. Puesto que I es cerrado bajo la fomula $\mathbb{K}_n(x) = y$ podemos garantizar que $I \prec^e_n \mathfrak{A}$. Por tanto, sólo nos queda probar el siguiente resultado:

Aserto A.41.1 $I \models \mathbf{L\Sigma_{n+1}}$

Prueba del Aserto:

Sean $e_0, e_1, \ldots, e_m \in I$ y $\varphi \in \Sigma_n$ tales que $I \models \exists w\, \varphi(w, e_0, \vec{e})$. Puesto que $I \models \mathbf{I\Delta_0}$ podemos garantizar que $\langle e_0, \ldots, e_m\rangle \in I$, luego existe k tal que

$$\mathfrak{A} \models \langle e_0, \ldots, e_m\rangle < a_k$$

Puesto que en $\{\psi_k : k \in \omega\}$ cada fórmula se repite una infinidad de veces, podemos elegir k de modo que $\varphi = \psi_k$.

Entonces $I \models \exists w\, \psi_k(w, e_0, \vec{e})$ y además $I < b_{k+1}$. Por tanto,

$$\mathfrak{A} \models \exists w \leq b_{k+1}\, \psi_k(w, e_0, \vec{e})$$

ya que $I \prec^e_n \mathfrak{A}$. Puesto que $\psi_k \in \Pi_n$, existe

$$e' = (\mu v)[\exists w \leq b_{k+1}\, \psi_k(w, v, \vec{e})]$$

Además,

$$\langle e', e_1 \ldots, e_m\rangle \leq \langle e_0, \ldots, e_m\rangle < a_k$$

Por $(\mathbf{3})_{k+1}$, resulta que $\mathfrak{A} \models \exists w \leq a_{k+1}\, \psi_k(w, e', \vec{e})$, luego usando de nuevo que $I \prec^e_n \mathfrak{A}$, obtenemos $I \models \exists w\, \psi_k(w, \hat{e}_0, \vec{e})$. Sólo queda comprobar que

$$I \models e' = (\mu v)(\exists w \psi_k(w, v, \vec{e}))$$

Esto es fácil de comprobar ya que si $I \models \exists w\, \psi_k(w, e'', \vec{e})$ y $e'' < e_0$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists w \leq b_{k+1}\, \psi(w, e'', \vec{e})$, en contradicción con el hecho de que e' es mínimo en $\mathfrak{A}$. □

La prueba de este aserto concluye la demostración del teorema. □

Apéndice B

Problemas abiertos

En este apéndice recogemos las cuestiones que se han ido planteando a lo largo de este trabajo y que, finalmente, han quedado sin resolver. Junto a éstas incluimos también algunos problemas sugeridos por los resultados presentados en esta memoria.

B.1 Inducción y colección

El problema central es la conjetura de Friedman–Paris en sus tres versiones:

(a) Conjetura de Friedman–Paris:

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1}$$

(b) Conjetura de Friedman–Paris uniforme:

$$\mathbf{UL}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$$

(c) Conjetura de Friedman–Paris sin parámetros:

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-} \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$$

No obstante podemos añadir algunos problemas estrechamente relacionados con éstos últimos:

(1) En el capítulo II se han estudiado las relaciones entre las propiedades:

- **(a)** $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}.
- **(b)** $\mathbf{T}$ tiene colección Δ_{n+1}.
- **(c)** $\mathbf{T}$ tiene minimización Δ_{n+1}.
- **(d)** $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada.

A este respecto la principal pregunta es la siguiente (ver II.29), que puede considerarse una versión más de la conjetura de Friedman–Paris:

Si $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ colección Δ_{n+1}?

Equivalentemente (ver sección III.1),

Si $\mathbf{T}$ tiene inducción Δ_{n+1}, entonces ¿es $\mathbf{T}$ Δ_{n+1}–cerrada?

(2) Otro problema relacionado con el anterior es el siguiente (véase II.29):

Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$.

(a) Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK–Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ colección Δ_{n+1}?

(b) Si $\mathbf{T}$ es (débilmente) PK–Δ_{n+1}, entonces ¿tiene $\mathbf{T}$ inducción Δ_{n+1}?

B.2 Inducción uniforme y sin parámetros

En el capítulo III se estudian las teorías $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ y $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. Las principales cuestiones pendientes de solución son, por una parte, las relaciones entre $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ y $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, y por otra, la extensión a $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ de los resultados obtenidos para $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. De este modo, se consideran los siguientes problemas:

(1) En III.26–(**b**) se plantea la cuestión

¿$\mathbf{UI\Delta}_{n+1} + \mathbf{exp} \implies \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$?

(2) Por III.25, si $n \geq 1$, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$ es (salvo equivalencia) la única teoría Π_{n+1}–axiomatizable que extiende a $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. En el caso $n = 0$, sólo se tiene un resultado similar (véase III.17.4) módulo la función exponencial. En consecuencia, en III.26 se considera el problema

¿Es $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ la única teoria (salvo equivalencia) Π_1–axiomatizable que extiende a $\mathbf{L\Delta}^-_1$?

(3) Parte de los resultados obtenidos en el capítulo III acerca de la teoría $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, pueden probarse también para $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ utilizando el trabajo de McAloon [21]. Sin embargo, como se comenta en III.42, existe una notable diferencia entre los métodos utilizados en esta memoria y los de [21]. Más aún, la aplicación directa de los resultados de [21] no proporciona la correspondiente versión para $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ de los resultados previamente obtenidos para $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. En concreto, queda abierta la siguiente cuestión:

Sean $\mathbf{T}$ una teoría Π_{n+2}–axiomatizable tal que

$$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$$

¿Se tiene entonces que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$? Véase también la sección B.5.

B.3 Π_{n+2}–consecuencias

En el capítulo IV se ha probado (ver IV.6) que una teoría tiene colección Δ_{n+1} si y sólo si es Π_n–funcional. Además, la condición

$$(\bullet) \qquad \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$$

es suficiente (véase IV.10) para garantizar que $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional. Más aún, si $\mathbf{T}$ es Π_{n+2}–axiomatizable, entonces (ver IV.16) la condición $(\bullet)$ es equivalente a que $\mathbf{T}$ sea Π_n–funcional. Como consecuencia planteamos los siguientes problemas:

(1) (Véase IV.17) Sea $\mathbf{T}$ una teoría tal que $\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ es consistente, ¿son equivalentes las siguientes condiciones?

- **(a)** $\mathbf{T}$ es Π_n–funcional.
- **(b)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
- **(c)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{B}\Sigma^{-}_{n+1} + \mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(2) En IV.17 se señala con respecto a la cuestión anterior que si $\mathbf{T}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, entonces $(\bullet)$ es equivalente a que $\mathbf{T}$ sea Π_n–funcional. Se plantea entonces el siguiente problema, para $(n > 0)$,

¿Existe alguna teoría Π_n–funcional que sea Σ_{n+2}–axiomatizable?

Por IV.15 sabemos que si $\mathbf{T}$ es una tal teoría entonces $\mathbb{N} \not\models \mathbf{T}$.

(3) La condición $(\bullet)$ juega un papel importante en el tratamiento que hemos dado a las envolturas. En el capítulo V se ha probado (ver V.10 y V.11) que si $\mathbf{T}$ es una teoría recursivamente axiomatizable que satisface $(\bullet)$, $\mathbf{T}_0$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ (o de $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$, si $n = 0$) y φ una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$, entonces

$$\varphi \text{ satisface } \Pi_n\text{–ENV} \iff \varphi \text{ satisface } \Pi_n\text{–IND}$$

Además, teniendo en cuenta V.14, la condición $(\bullet)$ no puede eliminarse. Esto nos lleva a plantear el siguiente problema.

Sea $\mathbf{T}$ una teoría Π_n–funcional, recursivamente axiomatizable, $\mathbf{T}_0$ una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$ ($\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$, si $n = 0$) y φ una Π_n–q–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$.

¿Son equivalentes las siguientes condiciones?

- **(a)** φ satisface Π_n–ENV.
- **(b)** φ satisface Π_n–IND.

Observemos que, por V.9, (b) $\Longrightarrow$ (a).

(4) En el capitulo VI hemos estudiado condiciones bajo las cuales se tiene que

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$$

En VI.12, hemos considerado las siguentes condiciones:

(i) T es una teoría Π_n–funcional inductiva.

(ii) $\mathrm{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathrm{T}) \Longleftrightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$.

(iii) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{T})$ es Π_{n+2}–axiomatizable.

Como se prueba en VI.12, **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)**. Por tanto, se plantea la cuestión de la equivalencia

$$¿\textbf{(ii)} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{(iii)}?$$

(5) En V.18 hemos considerado si las condiciones del teorema de existencia de Π_n–envolturas, V.15, son necesarias. La cuestión sobre la necesidad de la condición $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$ en V.15–**(1)**, para la existencia de Π_0–envolturas, nos llevó a plantear esta otra:

$$¿\text{Existe una } \Pi_0\text{–envoltura de } \mathbf{I\Pi_1^-} \text{ en } \mathbf{I\Delta_0}?$$

B.4 Las teorías $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$

(1) En el capítulo VII se han introducido los modelos Γ–acotados para separar los fragmentos $\{\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_m)} : m \geq n\}$. Sin embargo, la correspondiente cuestión para las teorías $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_m)}$ no ha sido resuelta. Como hemos visto,

$$\mathrm{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbb{N}) \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(PA)} \Longrightarrow \cdots \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)}$$

¿Se trata de una jerarquía estricta?

(2) En el capítulo II, se ha introducido el concepto de teoría (débilmente) PK–Δ_{n+1}. Podemos intentar reforzar este concepto del siguiente modo:

Diremos que $\mathbf{T}$ es fuertemente PK-Δ_{n+1} si

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I\Sigma_n} & & \\ \not\Uparrow & & \\ \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} & & \\ \not\Uparrow & & \\ \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{L\Delta_{n+1}(T)} \end{array}$$

En general, por II.8, $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$ y en II.27 se ha probado que

$$\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I\Sigma_n}$$

Además, puesto que $\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ es débilmente PK–Δ_{n+1}, teniendo en cuenta VII.16–**(1)**, resulta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I\Sigma_n} & & \\ \Uparrow & & \\ \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} & & \\ \not\Uparrow & & \\ \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} & \Longleftrightarrow & \mathbf{L\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} \end{array}$$

Sin embargo, ¿existe alguna teoría fuertemente PK–Δ_{n+1}?

B.5 Definiciones de ω en modelos Γ–acotados

Como ya hemos comentado en B.2, en el capítulo III se han utilizado los resultados de McAloon [21] para obtener diversos resultados acerca de $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$, similares a los obtenidos para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$. En III.42 hemos comentado el contraste entre la relativa simplicidad de la prueba que presentamos de, por ejemplo, III.23, y la sofisticación de los métodos empleados en el trabajo de McAloon. Esto hace interesante disponer de métodos alternativos (más simples) para probar resultados como III.23 en el caso de $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ (a ser posible con la misma generalidad con la que han sido obtenidos para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$). Los modelos Γ–acotados podrían ser útiles para tal fin.

Esencialmente, los resultados contenidos en [21] se basan en la construcción de modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ (para una extensión $\mathbf{T}$ de $\mathbf{PA}$) en los que la parte estándar es definible por una fórmula Δ_{n+1} (con o sin parámetros). Como se ha visto en VII.11, existen modelos Γ–acotados en los que la parte estándar es definible por una fórmula Σ_{n+1}. Podemos, por tanto, considerar la posibilidad de construir modelos Γ–acotados en los que ω sea también Δ_{n+1}–definible y, por medio de estos modelos, obtener las versiones correspondientes para $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ de los resultados obtenidos en la sección III.4 para $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$.

Observemos que si $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ es un modelo Γ_φ–acotado, en las condiciones establecidas en VII.11, entonces ω es definible en $\mathfrak{A}$ por una fórmula Σ_{n+1} con a como parámetro. De este modo, si a es definible en $\mathfrak{A}$ (por ejemplo, $a \in \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$), entonces podemos conseguir una fórmula Σ_{n+1} <u>sin parámetros</u>, que define a ω en $\mathfrak{A}$. Por tanto, en las condiciones anteriores, si ω es definible en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ por una fórmula Π_{n+1} (sin parámetros), entonces ω es definible en $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a)$ por una fórmual Δ_{n+1} sin parámetros, lo que probaría que $\mathcal{K}_0^{\Gamma_\varphi}(\mathfrak{A}, a) \not\models \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$. Debido a esto, resulta intersesante estudiar la existencia de modelos Γ–acotados en los que ω es definible por una fórmula Π_{n+1}.

A este respecto, puede resultar útil el trabajo de A. Macintyre y H. Simmons [19], así como [7] y [10]. En este último, J. Hirschfeld introduce, a partir de la definición clásica del conjunto simple de Post, una fórmula Π_1 que define a ω en ciertos modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbb{N})$ (los existencialmente cerrados). Por su parte, D. Goldrei, A. Macintyre y H. Simmons estudian en [7] la cuestión de la definibilidad de ω en modelos existencialmente cerrados de $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{PA})$, obteniendo resultados similares a los de Hirschfeld. Como continuación de este trabajo, Macintyre y Simmons adaptan en [19] la construcción de Hirschfeld mostrando que, con alguna modificación, puede llevarse a cabo en $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{PA})$.

El análisis de los resultados de [19] muestra que dichas construcciones se pueden realizar en $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I}\Sigma_1)$, proporcionando condiciones suficientes para que en un modelo de $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I}\Sigma_1)$ (cuyos elementos son todos Σ_1–definibles sin parámetros) pueda definirse ω por una fórmula Π_1 sin parámetros. El estudio de la existencia de modelos Γ–acotados en los que ω es definible por una fórmula Δ_1, constituye, así, una continuación natural del trabajo presentado en esta memoria.

Bibliografía

[1] Beklemishev, L. D. *Induction rules, reflection principles, and provably recursive functions.* **Annals of Pure and Applied Logic**, Vol. 85 (1997) pags. 193–242.

[2] Beklemishev, L. D. *A proof-theoretic analysis of collection.* **Archive for Mathematical Logic**, Vol. 37 (1998) pags. 275–296.

[3] Bigorajska, T. *On Σ_1-definable Functions Provably Total en* $\mathrm{I}\Pi_1^-$. **Mathematical Logic Quarterly**. 41 (1995) pags. 135–137.

[4] Clote, P.; Krajíček, J. *Open Problems.* **Arithmetic, Proof Theory and Computational Complexity.** Oxford Logic Guides, 23. Clarendon Press, Oxford (1993) pags. 1–19.

[5] D'Aquino, P. *A sharpened version of McAloon's theorem on initial segments of models of $I\Delta_0$.* **Annals of Pure and Applied Logic**, Vol. 61 (1993) pags. 49–62.

[6] Feferman S. *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* **Fundamenta Mathematicae**, Vol. 49, (1960), pags. 35–92.

[7] Goldrei, D. C.; Macintyre, A,; Simmons, H. *The forcing companions of number theories.* **Israel Journal of Mathematics**, Vol. 14, (1973), pags. 317–337.

[8] Hájek, P.; Pudlak, P. **Metamathematics of First-Order Arithmetic**. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag (1993)

[9] Hirschfeld, J. *Models of arithmetic and recursive functions.* **Israel Journal of Mathematics**, Vol. 20, Number 2 (1975) pags. 111–126.

[10] Hirschfeld, J.; Wheeler, W. **Forcing, Arithmetic, Division Rings**. Lecture Notes in Mathematics, 454. Springer-Verlag (1975).

[11] Kaye, R. **Models of Peano Arithmetic.** Oxford Logic Guides 15. Clarendon Press, Oxford (1991).

[12] Kaye, R. **Diophantine and Parameter-free Induction.** Ph. D. Thesis. University of Manchester (1987).

[13] Kaye, R. *Model-theoretic properties characterizing Peano Arithmetic.* **The Journal of Symbolic Logic**, Vol. 56, Number 3 (September 1991) pags. 949–963.

[14] KAYE, R.; PARIS J. B.; DIMITRACOPOULOS C. *On parameter free induction schemas.* **The Journal of Symbolic Logic**, Vol. 53, Number 4 (December 1988) pags. 1082–1097.

[15] KIRBY, L. A. S. **Initial segments of models of arithmetic**. Ph. D. Thesis. University of Manchester (1977).

[16] KIRBY, L. A. S.; PARIS J.B. *Initial segments of models of Peano's axioms.* **Lecture Notes in Mathematics**, Vol. 619, Springer-Verlag (1976), pags. 221–226.

[17] KIRBY L. A. S.; PARIS J. B. *Accesible independence results for Peano Arithmetic.* **Bulletin of the London Mathematical Society**, Vol. 4 (1986), pags. 285–293.

[18] LESSAN H. **Models of Arithmetic.** Ph. D. Thesis. University of Machester, 1978.

[19] MACINTYRE, A.; SIMMONS, H. *Algebraic properties of number theories.* **Israel Journal of Mathematics**, Vol. 22, Number 1, (1975), pags. 7–27.

[20] MCALOON, K. *Models of arithmetic and complexity theory.* **Studies in Complexity Theory**, Ed. R. Book (1986), pags. 119–221.

[21] MCALOON, K. *Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic.* **Transactions of the American Mathematical Society**, Vol. 239 (May 1978), pags. 253–277.

[22] MCALOON, K. *On the complexity of models of Arithmetic.* **The Journal of Simbolic Logic**, Vol. 47, Number 2 (June 1982), pags. 403–415.

[23] NELSON, E. **Predicative Arithmetic.** Mathematical Notes, Number 32, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1986).

[24] PARIKH, R. *Existence and feasibility in arithmetic.* **The Journal of Simbolic Logic**, Vol. 36 (1971), pags. 494–508.

[25] PARIS, J. B. *Some independence results for Peano Arithmetic.* **The Journal of Symbolic logic**, Vol. 43 (1978), pags. 725–731.

[26] PARIS, J. B.; HARRINGTON, L. *An incompleteness in PA.* **Handbook of mathematical logic**, (J. Barwise, editor), North–Holland (1977), pags. 1133–1142.

[27] PARIS J. B.; KIRBY L. A. S. *Σ_n-collection schemas in arithmetic.* **Logic Colloquium'77**, North–Holland (1978), pags. 199–209.

[28] PARIS, J. B.; WILKIE, A. J. *Δ_0-sets and induction.* **Opens days in model theory and set theory** (Proceedings of the 1981 Logic Conference, Poland) (W. Guzicki, W. Marek, A. Relc and C. Rauszer, editors) (1981) pags. 237–248.

[29] PARIS, J. B.; WILKIE, A. J. *On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas.* **Annals of Pure and Applied Logic,** 35 (1987), pags. 261–302.

[30] PARSONS, C. *On a Number Theoretic Choice Schema and its relation to Induction.* **Intuitionism and Proof Theory**. Kino, Myhill, Vesley (Eds.) North–Holland, Amsterdam (1970), pags. 459–473.

[31] PARSONS, C. *On n–quantifier–induction.* **The Journal of Symbolic Logic**, Vol. 37 (1972), pags. 466–482.

[32] PÉREZ JIMÉNEZ, M. **Esquemas del máximo en la Aritmética**. Tesis, Universidad de Sevilla, 1992.

[33] SOMMER, R. D. **Transfinite induction and hierarchies generated by transfinite recursion within Peano arithmetic**. Ph. D. Thesis. University of California, Berkeley, 1990.

[34] WILKIE, A. J. *Some Results and Problems on Weak Systems of Arithmetic.* **Logic Colloquium '77**, A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris (Eds.), North–Holland (1978), pags. 285–296.

[35] WILKIE, A. J. *On sentences interpretable in systems of Arithmetic.* **Logic Colloquium '84**, J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (Eds.), North–Holland (1986), pags. 329–342.

[36] WILKIE, A.J.; PARIS, J.B. *On the existence of end–extensions of models of bounded induction.* **Proceedings of the Eight International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Sciences, Moscow 1987**, J. E. Fenstad et al. (editores), North–Holland, Amsterdam, 1989, pags. 143–163.

[37] WRATHALL, C. *Rudimentary predicates an relative computation.* **SIAM Journal of Computation**, Vol. 7, (1978) pags. 194–209.

Francisco Félix Lara Martín

Inducción y Recursión: Las teorías $I\Delta_{n+1}(T)$.

Sobresaliente Cum Laude

25 Febrero 2000