

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

**DESCRIPCIÓN EXPLÍCITA  
DE  $t$ -ESTRUCTURAS  
SOBRE ESPACIOS  
ESTRATIFICADOS**

043  
169

Memoria presentada por Félix Gudiel Rodríguez  
para optar al grado de Doctor en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº del Director



Fdo. Luis Narváez Macarro  
Catedrático de Álgebra

El doctorando



Félix Gudiel Rodríguez

Sevilla, Octubre 2000

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
NEGOCIADO DE TESIS

---

Queda registrado este Título de Doctor al  
folio 84 número 135 del libro  
correspondiente.

Sevilla, **3 NOV. 2000**

El Jefe del Negociado

*Flora Raffetto*

Hago constar mi agradecimiento a Luis Narváez Macarro, sin cuya ayuda y dirección no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

---

# Introducción

A finales de la década de los 70 se producen dos descubrimientos independientes de enormes consecuencias en la Teoría Co-homológica de Variedades:

Por una parte, M. Goresky y R. MacPherson, movidos por la generalización de la dualidad de Poincaré al caso de los espacios singulares, introdujeron una variante de la (co)homología singular sobre las pseudovariedades estratificadas que consistía esencialmente en tomar aquellas cadenas singulares que verificasen ciertas condiciones de incidencia con los distintos estratos. Estas condiciones se expresaban numéricamente a través de la asignación a cada uno de los estratos de un número entero, que bautizaron como "perversidades". A la teoría de (co)homología resultante la bautizaron como "(co)homología de intersección".

A imagen de lo que ocurría con la cohomología singular, Deligne y Verdier propusieron la construcción de un complejo de haces cuya hipercohomología calculase la (co)homología de intersección. Dicho complejo de haces, bautizado como *complejo de intersección*, era constructible y estaba unívocamente determinado como objeto de la correspondiente categoría derivada mediante ciertas propiedades de soporte y de anulación que guardaban sentido en situaciones más generales, como por ejemplo las variedades algebraicas en característica positiva con la topología étale y los coeficientes  $\ell$ -ádicos constructibles. Además, el complejo de intersección era autodual en el sentido de la dualidad de Verdier, lo que explicaba que la (co)homología de intersección satisficiera el formalismo de la dualidad de Poincaré.

Por otra parte, la teoría de los módulos holónomos sobre

el haz  $\mathcal{D}_X$  de los operadores diferenciales lineales en una variedad analítica compleja lisa  $X$  había logrado el suficiente desarrollo como para que Mebkhout y Kashiwara, apoyados en los resultados previos de Grothendieck y Deligne (teoremas de comparación), lograran probar la denominada “correspondencia de Riemann-Hilbert”. Este resultado afirma que el funtor “de Rham”:

$$DR_X : \mathcal{D}_{hr}^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathcal{D}_{cons}^b(\mathbb{C}_X)$$

definido en la categoría derivada de los complejos acotados de  $\mathcal{D}_X$ -módulos con cohomología holónoma regular, y con valores en la categoría derivada de los complejos acotados de haces de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales con cohomología analíticamente constructible, es una equivalencia de categorías (trianguladas).

Dado que cada una de las categorías derivadas anteriores contiene como subcategoría plena a la categoría abeliana de los  $\mathcal{D}_X$ -módulos holónomos regulares,  $Holreg(X)$ , y a la de los haces analíticamente constructibles de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales,  $Cons(\mathbb{C}_X)$ , respectivamente, y dado que el funtor de Rham no envía  $Holreg(X)$  en  $Cons(\mathbb{C}_X)$ , se plantea la cuestión de caracterizar la imagen esencial por  $DR_X$  de  $Holreg(X)$ , que será una subcategoría abeliana “nueva” de  $\mathcal{D}_{cons}^b(\mathbb{C}_X)$ .

Deligne, apoyándose en resultados previos de Mebkhout sobre la dualidad, dio una caracterización de los objetos de la imagen esencial anterior en términos de condiciones de soporte y de dualidad. Es aquí donde se conectan las dos líneas de investigación al constatarse el hecho sorprendente de que las propiedades descubiertas por Deligne eran satisfechas por los complejos de intersección de cualquier subespacio analítico (eventualmente singular) de  $X$ , convenientemente desplazado. Aparecían así los primeros ejemplos no triviales de objetos de la imagen esencial anterior. De aquí proviene la denominación de “haces perversos” para estos objetos, y de  $Perv(X)$  para la imagen esencial de  $Holreg(X)$

---

Puesto que los funtores de Rham conmutan con las restricciones a un abierto, la categoría  $Perv(X)$ , además de ser abeliana, está formada por objetos de carácter local, i.e. por objetos que se pueden reconstruir a partir de sus restricciones a los abiertos de un recubrimiento, o si se quiere, se comportan como si de haces se tratara, aun siendo objetos de una categoría derivada.

La cuestión ahora era comprender directamente, con independencia del problema de Riemann-Hilbert, las propiedades de los haces perversos y de la categoría  $Perv(X)$ , y poder así extender la teoría al contexto general de las categorías trianguladas, y en particular al de variedades algebraicas en característica positiva, donde no existía una teoría satisfactoria de  $\mathcal{D}$ -módulos. Este proyecto se materializa en la noción de *t-estructura* sobre una categoría triangulada, de manera que las condiciones que caracterizan a los haces perversos resultan ser un caso particular del proceso de “pegado” de *t-estructuras*, todos ellos recogidos en la obra [BBD83].

Una vez establecida la importancia de los haces perversos como objetos de una categoría abeliana muy especial, surge de manera natural el interés por su manipulación explícita, intentando describir las distintas operaciones geométricas y calcular los invariantes numéricos que le están asociados. La propia correspondencia de Riemann-Hilbert podría aportar un camino para ello, pero nos topamos con la dificultad de que, aunque los  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos regulares admitan representaciones y tratamientos efectivos mediante los cálculos de bases de Gröbner, la aplicación del funtor De Rham conlleva de una forma u otra la resolución de SELDP con coeficientes polinomiales o analíticos, que dista mucho de ser un problema efectivo.

Los esfuerzos se dirigen, pues, a la descripción de los haces perversos, y más generalmente, de las distintas categorías de haces perversos, mediante objetos o categorías más “explícitas”, como por ejemplo categorías de representaciones de “carcajes” (“quivers” en inglés, “carquois” en francés). Esto se produce desde principios de los

80 en numerosos trabajos, aunque todos ellos se concentran en distintas situaciones geométricas más o menos sencillas donde la topología de las singularidades es bien conocida (ver [Del], [GM84], [GGM85], [NM84], [NM85], [GK85], [MV86], [Mai87], [Mai88], [NM88], [MV88], [NM94], [GMV96], [BG99], [Pol97], etc.)

A título de ejemplo recordemos el caso revelador del disco [Del]: la categoría de los haces perversos sobre la recta compleja  $\mathbb{C}$  (o sobre un disco abierto centrado en el origen) que son *analíticamente constructibles* respecto de la estratificación formada por el origen  $\{0\}$  y por el complementario del origen  $\mathbb{C} - \{0\}$  es equivalente a la categoría de los diagramas de espacios vectoriales complejos de dimensión finita

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} F$$

tales que  $1_E + \nu u$  es un automorfismo de  $E$ .

En el presente trabajo abordamos la cuestión anterior de la descripción de las categorías de haces perversos desde un punto de vista general y puramente topológico, desarrollando el método iniciado en [NM94], y poniendo pues el acento en el proceso de “pegamiento” de  $t$ -estructuras.

Aunque los resultados y técnicas son claramente generalizables al caso de un número cualquiera de estratos, nos hemos centrado en el caso de dos estratos, i.e. consideramos un espacio topológico  $X$ ,  $F \subset X$  un cerrado y  $U = X - F$  el abierto complementario. En determinadas ocasiones, en especial aquellas en las que se consideran condiciones de finitud o constructibilidad sobre los haces en juego, hemos de suponer que los datos topológicos satisfacen propiedades de trivialidad topológica local, aunque todo guarda sentido en el caso abstracto y general, donde  $X$  es una variedad analítica compleja y  $F \subset X$  es un subespacio analítico cerrado de codimensión  $d$ .

Dados,  $* = X, U, F = X - U$  y un haz de anillos  $\mathcal{O}$ , sean  $\mathcal{D}_*$  la subcategoría plena de complejos con cohomología en  $\mathcal{A}_*$  de la cate-

---

goría derivada de haces de  $\mathcal{O}$ -módulos sobre  $*$ , donde  $\mathcal{A}_*$  son unas subcategorías espesas adecuadas. Dado un entero  $d$  consideremos la subcategoría de haces  $d$ -perversos sobre  $X$  con respecto a la estratificación  $\{F, U\}$ , notada  $\text{Perv}^d(X)$  como el corazón de la  $t$ -estructura sobre  $\mathcal{D}_X$  obtenida por pegamiento de la  $t$ -estructura natural sobre  $\mathcal{D}_U$  y la  $t$ -estructura natural desplazada  $d$  lugares sobre  $\mathcal{D}_F$ .

Nos planteamos la siguiente cuestión: dado que nuestros objetos restringidos a  $U$  son haces en el sentido clásico, qué datos se necesitan para describirlos de manera que el carácter de categoría abeliana salte a la vista.

Para responder a esta cuestión, y como hemos dicho anteriormente, analizamos en detalle el proceso de pegamiento de  $t$ -estructuras.

## ANTECEDENTES

- [DK73] donde se aborda el formalismo de los ciclos evanescentes y, en particular, la construcción del funtor  $\Omega$ .
- [BBD83] en el que se estudian las  $t$ -estructuras y el modo de obtenerlas por pegamiento de otras definidas en los estratos.
- [MV86] donde se construye la categoría de los haces perversos en el marco de la Geometría Analítica Compleja.
- [Ver85] donde se reescriben los haces perversos con el formalismo de los ciclos evanescentes.
- [NM94] donde se estudia el caso de la  $t$ -estructura cónica, punto de partida de esta memoria e inspiración de muchas de las técnicas utilizadas.



## RESULTADOS ORIGINALES CONTENIDOS EN LA MEMORIA

- Generalizamos las construcciones de [NM94], definiendo un funtor  $\Phi$  que nos una caracterización inductiva de los haces perversos,  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^d \iff \Phi(\mathcal{K}) \in \text{Perv}^{d-1}(X)$ , que “reduce” la perversidad del haz inicial. Esto, unido a que  $\text{Perv}^0(X)$  se identifica a la categoría de los haces usuales sobre el espacio  $X$ , nos permitirá expresar los haces perversos de manera más sencilla.
- A partir de la descripción inductiva anterior, construimos unas categorías abelianas en términos de haces usuales definidos sobre los estratos y unos funtores (exactos) entre dichas categorías y demostramos que dichas categorías son equivalentes a la de los haces perversos. En particular obtenemos unos modelos concretos de complejos que representan los haces perversos y con los que se puede trabajar explícitamente.
- La prueba de los resultados anteriores se basa en una inducción sobre la perversidad de los haces y la relación entre los diversos funtores “reconstructores” de haces perversos.
- Se discute la funtorialidad del cono de un morfismo, para algunas categorías de las manejadas (cuando en principio no se puede definir en la categoría derivada). Se incluye un contraejemplo para hacer notar que, incluso en nuestro caso, en el que está definido, no está unívocamente determinado.
- Se estudia el caso de los haces perversos “negativos”, donde (si bien nuestra construcción es igualmente válida) la descripción de los haces perversos es tan trivial, que el resultado es más general, de lo que se adjunta una prueba.
- Retomando la situación de [NM94], se describen los haces perversos cónicos sobre un espacio  $K(\pi, 1)$  (para llegar al mismo resultado de allí que para el caso  $d = 1$ ), e incluso generalizar-

---

lo para un  $d$  cualquiera.

- Se estudia un espacio que no es  $K(\pi, 1)$ , dando una demostración de un resultado de Kashiwara-Kawai para el caso de que  $X$  sea el cono sobre un espacio con  $\pi_1$ ,  $h^1$  y  $h^2$  nulos.

## DESARROLLOS POSTERIORES

A pesar de habernos centrado en el caso de dos estratos los resultados y construcciones son generalizables al caso de un número cualquiera de estratos, en el que intervendrán otras inclusiones que verifican las mismas condiciones que las consideradas.

Otro aspecto interesante es poder describir operaciones entre haces perversos utilizando su descripción en términos de haces usuales, mucho más simples de estudiar y donde hay trabajo adelantado.

Otro paso a dar sería colocarnos en el marco de la Geometría Analítica Compleja, aplicando los resultados a estratificaciones concretas.

## DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO DE LA MEMORIA

El capítulo I está dedicado a recordar las definiciones y resultados básicos de la teoría de categorías trianguladas, necesarios para la definición de categoría derivada de una categoría abeliana cualquiera, lo que se lleva a cabo en el capítulo II.

La noción de  $t$ -estructura sobre una categoría y el proceso de obtención de  $t$ -estructuras sobre espacios topológicos a partir de otras definidas sobre sus estratos siguiendo [BBD83] se introduce en el capítulo III, prestando especial atención al caso de los haces perversos constructibles con respecto a una estratificación del espacio en un cerrado y su complementario; caso particular de la situación en que nos encontramos.

La construcción de los funtores y categorías necesarias para describir las  $t$ -estructuras en términos “clásicos” y las propiedades que verifican se realiza en el capítulo IV.

En el capítulo V se define y estudia el funtor cono en una cierta subcategoría donde tiene sentido, se muestra un contraejemplo para ver que no es único, y se exhibe un funtor casi-inverso del construido en el capítulo anterior, y se prueba la equivalencia de categorías por recurrencia sobre la perversidad.

El capítulo VI trata el caso en que la perversidad del cerrado es menor que la del abierto, obteniéndose una descripción análoga al caso tratado anteriormente.

Por último, y como aplicación de los resultados obtenidos se describen, por una parte los haces perversos sobre espacios  $K(\pi, 1)$ , obteniéndose el resultado de [NM94], y por otra un caso particular del teorema de Kashiwara-Kawai para el cono sobre un espacio compacto, de grupo fundamental nulo, y con  $h^1$  y  $h^2$  nulos, se establece que los haces 2-perversos cónicos definidos sobre él son suma directa de un espacio vectorial y un haz definido en el cerrado.

---

---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Índice General</b>	<b>9</b>
<b>I Categorías trianguladas</b>	<b>11</b>
I-A Primeras definiciones . . . . .	11
I-B La categoría $K(A)$ . . . . .	23
<b>II Categorías derivadas</b>	<b>27</b>
II-A Localización en categorías trianguladas . . . . .	27
II-B La categoría derivada . . . . .	29
<b>III t-estructuras</b>	<b>33</b>
III-A Los haces perversos . . . . .	38
<b>IV Categorías y funtores en juego</b>	<b>43</b>
IV-A Construcciones generales . . . . .	43
IV-B El funtor $\Psi$ . . . . .	53
El funtor $\Omega$ . . . . .	53
El funtor $\mathbb{R}\psi$ . . . . .	59
IV-C Construcción de categorías abelianas . . . . .	62
<b>V El teorema</b>	<b>79</b>
V-A Un casi-isomorfismo natural . . . . .	79
V-B El funtor cono . . . . .	88
V-C No unicidad del cono . . . . .	92
Un caso concreto . . . . .	98
V-D El funtor casi-inverso . . . . .	101
Ingredientes . . . . .	101

Definiciones . . . . .	104
La equivalencia de categorías . . . . .	117
<b>VI Los haces perversos “negativos”</b>	<b>121</b>
VI-A Los haces perversos negativos . . . . .	121
VI-B El funtor . . . . .	123
VI-C El funtor inverso . . . . .	124
<b>VII Aplicaciones</b>	<b>127</b>
VII-A Descripción de los haces perversos cónicos sobre un espacio $K(\pi, 1)$ . . . . .	127
Sistemas locales y haces . . . . .	127
Haces 1-perversos cónicos . . . . .	130
Haces 2-perversos cónicos . . . . .	132
Descripción de los haces $n + 1$ -perversos . . . . .	135
Estructura de $H$ -módulo de $F$ . . . . .	137
VII-B Un ejemplo sobre un espacio no $K(\pi, 1)$ . . . . .	138
<b>Bibliografía</b>	<b>141</b>

---

---

# CAPÍTULO I

## Categorías trianguladas

En esta sección recordaremos el concepto de categoría triangulada, además de algunas propiedades. Se omitirá lo referente a funtores contravariantes y categoría opuesta. Unas referencias para esta parte [Ver96, Wei94, Gri87, Ive86, KS90].

### I-A PRIMERAS DEFINICIONES

---

**Definición I-A.1** ■ Una categoría  $D$  consiste en los siguientes datos:

1. Una clase no vacía  $Ob(D)$ , cuyos elementos se llaman objetos de  $D$ .
2. Para cada par de objetos  $X, Y \in Ob(D)$ , un conjunto  $Hom_D(X, Y)$ , llamado conjunto de morfismos de  $X$  en  $Y$ .
3. Para cada tres objetos  $X, Y, Z \in Ob(D)$  una aplicación de  $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \rightarrow Hom(X, Z)$ , llamada composición de morfismos que, a cada par  $(\psi, \phi)$  le asocia  $\phi \circ \psi : X \rightarrow Z$

Este conjunto de datos debe satisfacer las condiciones siguientes:

- Cualquier morfismo  $\phi$ , determina los objetos de salida y llegada (es decir, los conjuntos de morfismos son disjuntos).

- Para todo  $X \in \text{Ob}(D)$ ,  $1_X \in \text{Hom}(X, X)$
- La composición de morfismos es asociativa.

Al conjunto de todos los morfismos entre objetos de una categoría lo notaremos  $\text{Mor}(D)$ .

---

**Definición I-A.2** ■ Si  $D$  es una categoría, se define la categoría opuesta, notada  $D^{op}$ , cuyos objetos son los mismos que los de  $D$  y  $\text{Hom}_{D^{op}}(A, B)$  es  $\text{Hom}_D(B, A)$  y la composición de  $\psi$  y  $\phi$  en  $D^{op}$  se define como la composición de  $\phi$  y  $\psi$  en  $D$ .

---

**Definición I-A.3** ■ Un functor covariante  $F$  entre dos categorías  $C$  y  $D$  consiste en dos aplicaciones  $\text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$  y  $\text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(D)$  tales que si  $\phi \in \text{Hom}_C(X, Y) \Rightarrow F(\phi) \in \text{Hom}_D(F(X), F(Y))$ , de tal modo que  $F(1_X) = 1_{F(X)}$  y  $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$  cuando la composición tenga sentido.

---

**Definición I-A.4** ■ Sean  $F, G : C \rightarrow D$  funtores entre categorías. Una transformación natural  $\eta : F \rightarrow G$  es una colección de morfismos  $\{\eta_A\}_{A \in \text{Ob}(C)}$ , con  $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ , de tal forma que para todo  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$  el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Si, además, cada  $\eta_A$  es un isomorfismo, diremos que  $\eta$  es un isomorfismo natural.

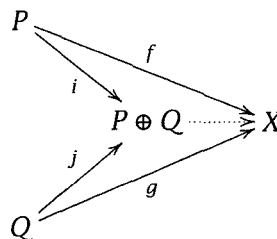
---

**Definición I-A.5** ■ Diremos que un functor  $F : C \rightarrow D$  es una equivalencia de categorías si existe un functor  $G : D \rightarrow C$  y unos isomorfismos naturales verificando

que  $id_C \simeq G \circ F$  y  $id_D \simeq F \circ G$ .

**Definición I-A.6** ■ Sea  $C$  una categoría, diremos que un  $O \in Ob(C)$  es objeto nulo de la categoría si y sólo si es inicial y final a la vez, es decir, si  $\forall B \in Ob(C)$  se tiene que  $Hom(O, B) = \{0\} = Hom(B, O)$  (aunque dicho objeto no sea único, todos son isomorfos, pues entre cada dos de ellos sólo existe un homomorfismo, uno inverso del otro).

**Definición I-A.7** ■ Definimos la suma directa de dos objetos  $P, Q$  de una categoría como otro objeto  $P \oplus Q$  junto con unos morfismos  $i : P \rightarrow P \oplus Q$  y  $j : Q \rightarrow P \oplus Q$  tales que para todo objeto  $X$  y todo par de morfismos  $f : P \rightarrow X$  y  $g : Q \rightarrow X$  se puede completar el siguiente diagrama de manera única de tal forma que sea conmutativo



esto es, existe un único  $h : P \oplus Q \rightarrow X$  tal que  $h \circ i = f$  y  $h \circ j = g$ .

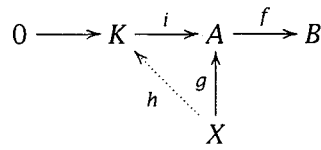
**Definición I-A.8** ■ Se dice que una categoría es aditiva si para todo par de objetos  $A, B$ ,  $Hom(A, B)$  tiene estructura de grupo abeliano, la composición de morfismos es bilineal, existe un objeto nulo y la suma directa de objetos de la categoría existe.

La categoría opuesta de una categoría aditiva lo es.

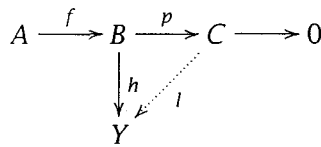
**Definición I-A.9** ■ Sea un morfismo  $f : A \rightarrow B$ ; un núcleo, notado  $Ker f$ , es un par  $(K, i)$  donde  $K$  es un objeto,  $i$  es un monomorfismo con  $f \circ i = 0$  y tal que



si  $g : X \rightarrow A$  verifica  $f \circ g = 0$ , entonces factoriza de manera única a través de  $i$ , es decir, existe un único  $h : X \rightarrow K$  tal que  $g = i \circ h$ .

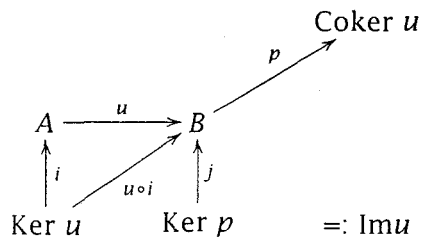


Un conúcleo, notado  $\text{Coker } f$ , es un par  $(C, p)$ , donde  $C$  es un objeto,  $p$  es un epimorfismo con  $p \circ f = 0$  y tal que si  $h : B \rightarrow Y$  verifica  $h \circ f = 0$ , entonces factoriza de manera única a través de  $p$ , es decir, existe un único  $l : C \rightarrow Y$  tal que  $h = l \circ p$ .



**Definición I-A.10** ■ Una categoría  $D$  aditiva se dice abeliana si verifica además las condiciones siguientes:

1. Todo morfismo admite un núcleo y un conúcleo.
2. Para todo  $u \in \text{Mor}(D)$ , se verifica el teorema de isomorfía: podemos considerar el núcleo  $(\text{Ker } u, i)$  y el conúcleo  $(\text{Coker } u, p)$  de  $u$  y también el núcleo de  $p$ , que llamaremos imagen de  $u$ ,  $\text{Im } u$ , quedando un diagrama como el siguiente:



$$p \circ u = 0 \implies p \circ u \circ i = 0$$

El teorema de isomorfía dice que el único  $\bar{u} : \text{Ker } u \rightarrow \text{Ker } p$  que hace conmutativo el triángulo inferior es un isomorfismo.

**Definición I-A.11** ■ Para cualquier categoría  $D$  podemos definir la categoría de las flechas de  $D$ , notada  $Fl(D)$ , cuyos objetos son ternas  $(A, B, u)$  donde  $A, B \in \text{Ob}(D)$  y  $u \in \text{Hom}_D(A, B)$ , y cuyos morfismos  $(A, B, u) \rightarrow (A', B', u')$  son pares  $(f_1, f_2) \in \text{Hom}_D(A, A') \times \text{Hom}_D(B, B')$ , que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

**Definición I-A.12** ■ Para cualquier categoría  $D$ , podemos definir unos funtores “source” y “end” de  $Fl(D)$  en  $D$ , definidos de la forma siguiente:

$$s(A, B, u) := A \quad e(A, B, u) := B$$

**Proposición I-A.13** ■ Si una categoría es aditiva (resp. abeliana) la categoría de sus flechas también es aditiva (resp. abeliana).

**Demostración.**

$D$  aditiva  $\implies Fl(D)$  aditiva .

Para ello debemos probar que  $\text{Hom}_{Fl(D)}$  es grupo abeliano, la bilinealidad de la composición de morfismos, la existencia de elemento nulo y la de la suma directa de objetos;

- $\text{Hom}_{Fl(D)}((A, B, u), (A', B', u'))$  tiene estructura de grupo abeliano, sin más que definir la suma componente a componente y tener en cuenta que  $D$  es aditiva,  $(f_1, f_2) + (g_1, g_2) := (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$ .

- La composición de morfismos viene dada por el diagrama: si  $(f_1, f_2) : (A, B, u) \rightarrow (A', B', u')$  y  $(g_1, g_2) : (A', B', u') \rightarrow (A'', B'', u'')$  tendríamos

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 A' & \xrightarrow{u'} & B' \\
 \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\
 A'' & \xrightarrow{u''} & B''
 \end{array}$$

la composición sería  $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2) : (A, B, u) \rightarrow (A'', B'', u'')$ , que es un morfismo en la categoría de las flechas ya que se verifica  $u'' \circ g_1 \circ f_1 = g_2 \circ u' \circ f_1 = g_2 \circ f_2 \circ u$ . Ahora, como la composición se hace componente a componente y la categoría  $D$  es aditiva, se tiene la bilinealidad de la composición de morfismos.

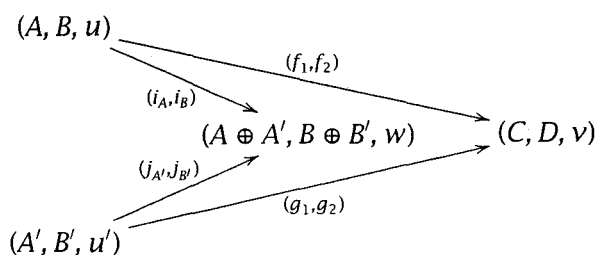
- Como  $D$  es aditiva, la terna  $(0, 0, u)$ , donde  $0$  es el objeto nulo de  $D$  y  $u$  el único morfismo entre  $0$  y sí mismo, es el objeto nulo de la categoría de las flechas, ya que cualquier morfismo que parta o llegue a este par es único en cada componente, y la condición de conmutatividad se tiene de manera automática, ya que cualquier composición que tomemos partirá o llegará al objeto nulo de  $D$ .
- Suma directa de objetos. Sean  $(A, B, u), (A', B', u')$  dos objetos de  $Fl(D)$  y veamos que existe su suma directa; como  $D$  es categoría aditiva se tiene garantizada la existencia de  $A \oplus A'$  y de  $B \oplus B'$ , con sus correspondientes  $i_A, j_{A'}, i_B, j_{B'}$ , consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B \\
 \searrow i_A & & \downarrow i_B \\
 & & A \oplus A' \xrightarrow{\quad} B \oplus B' \\
 \nearrow j_{A'} & & \uparrow j_{B'} \\
 A' & \xrightarrow{u'} & B'
 \end{array}$$

por la propiedad universal de la suma directa existe un único

$w : A \oplus A' \rightarrow B \oplus B'$ , que hace conmutativo el diagrama, con lo que tenemos definido un objeto de la categoría de flechas  $(A \oplus A', B \oplus B', w)$ , y unos morfismos  $(i_A, i_B), (j_{A'}, j_{B'})$  que verifican  $w \circ i_A = i_B \circ u$  y  $w \circ j_{A'} = j_{B'} \circ u'$ , que probaremos verifican la propiedad universal de la suma directa.

Sean  $(C, D, v)$  otro objeto de  $Fl(D)$  y  $(f_1, f_2) : (A, B, u) \rightarrow (C, D, v)$ ,  $(g_1, g_2) : (A', B', u') \rightarrow (C, D, v)$  dos morfismos de objetos, se tiene

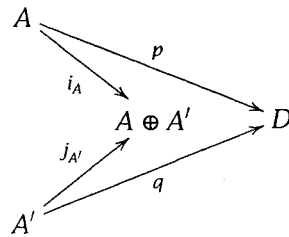


La propiedad universal de la suma directa nos garantiza la unicidad y existencia de  $h_1 : A \oplus A' \rightarrow C$  y  $h_2 : B \oplus B' \rightarrow D$  con  $h_1 \circ i_A = f_1$ ,  $h_1 \circ j_{A'} = g_1$ ,  $h_2 \circ i_B = f_2$  y  $h_2 \circ j_{B'} = g_2$ ; sólo queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de la categoría de las flechas, es decir, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \oplus A' & \xrightarrow{w} & B \oplus B' \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\
 C & \xrightarrow{v} & D
 \end{array}$$

$(f_1, f_2)$  es un morfismo de flechas, con lo que  $f_2 \circ u = v \circ f_1$ , luego  $h_2 \circ i_B \circ u = v \circ h_1 \circ i_A$  y, por tanto,  $h_2 \circ w \circ i_A = v \circ h_1 \circ i_A := p$ , y de manera análoga se deduce  $h_2 \circ w \circ j_{A'} = v \circ h_1 \circ j_{A'} := q$ ,

ahora si consideramos



y tanto  $h_2 \circ w$  como  $v \circ h_1$  completan el diagrama a uno conmutativo, luego deben ser iguales por la propiedad universal de la suma directa de objetos.

$D$  abeliana  $\implies Fl(D)$  abeliana .

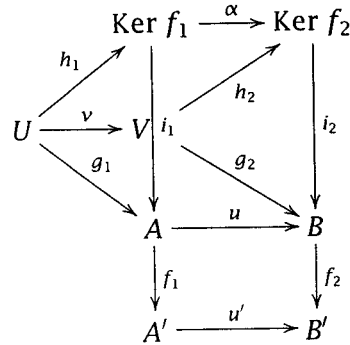
Para ello debemos probar la existencia de núcleo y conúcleo de cada morfismo y el teorema de isomorfía:

- Sea  $(f_1, f_2) : (A, B, u) \rightarrow (A', B', u')$  un morfismo de flechas, podemos considerar el diagrama

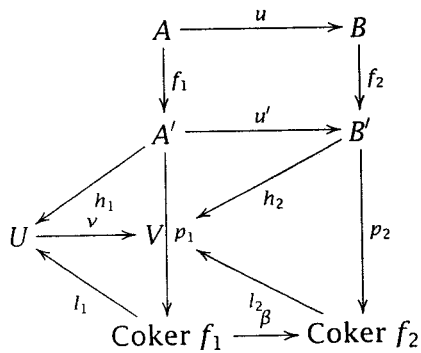
$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{f_1} & A' & \xrightarrow{p_1} & \text{Coker } f_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow u & & \downarrow u' & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{i_2} & B & \xrightarrow{f_2} & B' & \xrightarrow{p_2} & \text{Coker } f_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

para definir el núcleo consideramos  $\alpha : \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  definida de la siguiente manera; sea  $u \circ i_1 : \text{Ker } f_1 \rightarrow B$ , su composición con  $f_2$  es nula, pues  $f_2 \circ u \circ i_1 = u' \circ f_1 \circ i_1 = u' \circ 0$ , luego este morfismo factoriza a través del núcleo de  $f_2$ , es decir, existe  $\alpha : \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  tal que  $i_2 \circ \alpha = u \circ i_1$ , luego el candidato a núcleo sería  $((\text{Ker } f_1, \text{Ker } f_2, \alpha), (i_1, i_2))$ , la composición con  $f$  es nula, falta ver la propiedad universal; sea  $(g_1, g_2) : (U, V, v) \rightarrow (A, B, u)$  tal que  $f_i \circ g_i = 0$ , la propiedad universal del núcleo garantiza la existencia de  $(h_1, h_2)$  verificando

que  $i \circ h = g$

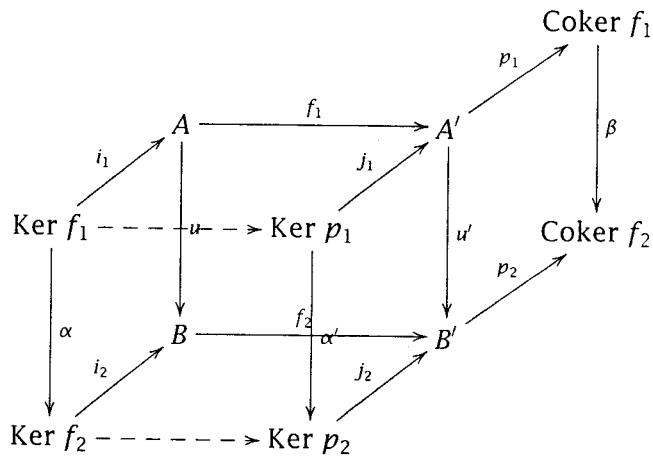


queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $\alpha \circ h_1 = h_2 \circ v$ ; sabemos, por ser  $(g_1, g_2)$  morfismo de flechas, que  $g_2 \circ v = u \circ g_1$ , lo que implica  $i_2 \circ h_2 \circ v = u \circ i_1 \circ h_1 = i_2 \circ \alpha \circ h_1$  que, unido a que  $i_2$  es monomorfismo, nos da  $h_2 \circ v = \alpha \circ h_1$ . Para el conúcleo, consideramos  $\beta : \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$  definida como sigue: sea  $p_2 \circ u' : A' \rightarrow \text{Coker } f_2$ , su composición con  $f_1$  es 0, por  $p_2 \circ u' \circ f_1 = p_2 \circ f_2 \circ u = 0$ , luego por la propiedad universal del conúcleo, este morfismo factoriza a través del  $\text{Coker } f_1$ , es decir existe  $\beta$  tal que  $p_2 \circ u' = \beta \circ p_1$ , luego el candidato a conúcleo será  $((\text{Coker } f_1, \text{Coker } f_2, \beta), (p_1, p_2))$ , la composición con  $f$  es nula, veamos que verifica la propiedad universal, sea  $(h_1, h_2) : (A', B', u') \rightarrow (U, V, v)$  tal que  $h \circ f = 0$ , la propiedad universal del conúcleo garantiza la existencia de  $(l_1, l_2)$  tales que  $h = l \circ p$



queda ver que  $(l_1, l_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $l_2 \circ \beta = \nu \circ l_1$ ; sabemos  $\nu \circ h_1 = h_2 \circ u'$ , pero esto significa que  $\nu \circ l_1 \circ p_1 = l_2 \circ p_2 \circ u' = l_2 \circ \beta \circ p_1$ , lo que unido a que  $p_2$  es epimorfismo nos da  $l_2 \circ \beta = \nu \circ l_1$ .

- Teorema de isomorfía. Si consideramos  $f : (A, B, u) \rightarrow (A', B', u')$  y el diagrama



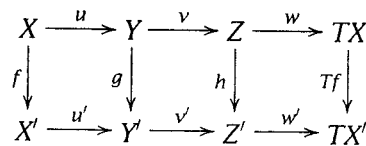
Las flechas discontinuas resultan ser isomorfismos porque el teorema de isomorfía se verifica en  $D$ .

---

**Definición I-A.14** ■ Sea  $D$  una categoría aditiva y  $T : D \rightarrow D$  un automorfismo. Un triángulo (para  $T$ ) en  $D$  de vértices  $(X, Y, Z) \in D$  es una terna de morfismos  $(u, v, w)$ , donde  $u : X \rightarrow Y, v : Y \rightarrow Z$  y  $w : Z \rightarrow T(X)$ .

---

**Definición I-A.15** ■ Un morfismo entre triángulos  $(X, Y, Z)$  y  $(X', Y', Z')$  es una terna  $(f, g, h)$



que hace conmutativos todos los cuadrados del diagrama.

---

Un tal morfismo se dice isomorfismo si los  $f, g, h$  lo son.

---

**Definición I-A.16** ■ ([Wei94] 10.2.1. p. 374) Una categoría aditiva  $D$  se dice triangulada si está provista de un automorfismo  $T : D \rightarrow D$  (llamado funtor de traslación) y de una familia de triángulos distinguidos (llamados triángulos exactos de  $D$ ), verificando los siguientes axiomas:

- (TR 1) Todo morfismo  $u : A \rightarrow B$  de objetos de  $D$  se puede incluir en un triángulo exacto. Si  $A = B$  y  $C = 0$ , entonces el triángulo  $(id_A, 0, 0)$  es exacto. Si  $(u, v, w)$  es un triángulo de vértices  $(A, B, C)$  isomorfo a un triángulo exacto  $(u', v', w')$  de vértices  $(A', B', C')$ , entonces  $(u, v, w)$  también es exacto.
- (TR 2) (Rotación) Si  $(u, v, w)$  es un triángulo exacto de vértices  $(A, B, C)$ , sus dos rotados  $(v, w, -Tu)$  y  $(-T^{-1}w, u, v)$  de vértices  $(B, C, TA)$  y  $(T^{-1}C, A, B)$  también son exactos.
- (TR 3) (Morfismos) Dados dos triángulos exactos  $(u, v, w)$  y  $(u', v', w')$  de vértices respectivos  $(A, B, C)$  y  $(A', B', C')$  y unos morfismos  $f : A \rightarrow A'$  y  $g : B \rightarrow B'$  tales que  $gu = u'f$ , existe un morfismo  $h : C \rightarrow C'$  tal que  $(f, g, h)$  es un morfismo de triángulos.
- (TR 4) (Octaedro) Dados tres triángulos exactos  $(u, j, \partial)$  de vértices  $(A, B, C')$ ;  $(v, x, i)$  de vértices  $(B, C, A')$  y  $(vu, y, \delta)$  de vértices  $(A, C, B')$ , existe un cuarto triángulo exacto  $(f, g, (Tj)i)$  de vértices  $(C', B', A')$  de tal manera que las caras del octaedro cuyos vértices son los objetos anteriores son triángulos distinguidos y conmutativos alternadamente; es decir  $\partial = \delta f : C' \rightarrow TA$





**Definición I-A.18** ■ Sean  $D$  una categoría triangulada y  $A$  una categoría abeliana. Un functor  $H : D \rightarrow A$  se llama functor cohomológico si para todo triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

el diagrama

$$HX \xrightarrow{Hu} HY \xrightarrow{Hv} HZ \xrightarrow{Hw} H(X[1])$$

es una sucesión exacta en  $A$ .

**Definición I-A.19** ■ Sean  $D$  y  $D'$  categorías trianguladas. Un  $\delta$ -functor de  $D$  en  $D'$  es un functor covariante que conmuta con el automorfismo de traslación y envía triángulos exactos de  $D$  en triángulos exactos de  $D'$ .

**Proposición I-A.20** ■ (Propiedades de las categorías trianguladas) ([Ver96] II.1.2 p. 97)

1. La composición de dos morfismos consecutivos en un triángulo es nula.
2. Si  $D$  es una categoría triangulada y  $M$  es un objeto de  $D$ , entonces  $\text{Hom}_D(M, -)$  y  $\text{Hom}_D(-, M)$  son funtores cohomológicos sobre  $D$ .
3. Si  $(f, g, h)$  es un morfismo de triángulos distinguidos y  $f, g$  son isomorfismos, también lo es  $h$ .

## I-B LA CATEGORÍA $K(A)$

**Definición I-B.1** ■ Sea  $A$  categoría abeliana. Un complejo de objetos de  $A$  es una colección  $X^\bullet = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de objetos de  $A$  junto con unos morfismos entre ellos  $d^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$  (que llamaremos derivaciones) tales que  $d^{n+1}d^n = 0$  para todo  $n$ . Un morfismo de complejos  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  consiste en una

colección de morfismos  $f^n : X^n \rightarrow Y^n$  que conmutan con las derivaciones,

$$f^{n+1} d_X^n = d_Y^n f^n$$

para todo  $n$ . Definimos la categoría  $C(A)$  como aquella que tiene como objetos los complejos de objetos de  $A$  y como morfismos los morfismos de complejos de objetos de  $A$ . Notaremos  $C^+(A)$ ,  $C^-(A)$ ,  $C^b(A)$  las subcategorías plenas de  $C(A)$  firmadas por los complejos acotados inferiormente, superiormente y acotados, respectivamente.

**Nota I-B.2** ■ La categoría de las flechas de complejos de  $A$  se identifica a la de los complejos de flechas de  $A$ .

**Definición I-B.3** ■ Dos morfismos  $f, g : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  se dicen homotópicos si existe una colección de morfismos  $k^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$  tales que

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} k^n + k^{n+1} d_X^n$$

para todo  $n$ . Ser homotópico es una relación de equivalencia y las composiciones de morfismos homotópicos son homotópicas.

**Definición I-B.4** ■ Definimos  $K(A)$  como la categoría cuyos objetos son los complejos de objetos de  $A$ , y cuyos morfismos son clases de equivalencia de morfismos de complejos módulo homotopía. Un complejo  $X^\bullet$  se dice acotado inferiormente (resp. superiormente) si  $X^n = 0$  para  $n$  suficientemente pequeño (resp. grande), y acotado a secas si lo es superior e inferiormente. Notaremos  $K^+(A)$ ,  $K^-(A)$ ,  $K^b(A)$  las subcategorías plenas de  $K(A)$  formadas por los complejos acotados inferiormente, superiormente y acotados respectivamente.

Vamos a definir una estructura de categoría triangulada en cada una de las categorías anteriores, y para ello definimos el funtor traslación

como  $T(X)^n = X^{n+1}$  y  $d_{T(X)} = -d_X$ , mientras que para definir los triángulos necesitaremos utilizar el llamado cono de un morfismo, definido de la siguiente manera:

**Definición I-B.5** ■ Sea  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  un morfismo de complejos. Definimos el complejo cono  $(f)$  como aquel cuyos objetos son  $Y^i \oplus X^{i+1}$  en grado  $i$  y cuyas derivaciones son  $\begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Y^{i+1} \oplus X^{i+2}$

Esta construcción nos proporciona una sucesión exacta, por inclusión y proyección

$$0 \rightarrow Y^\bullet \rightarrow \text{cono}(f) \rightarrow X^\bullet[1] \rightarrow 0$$

y por tanto un triángulo  $X \rightarrow Y \rightarrow \text{cono}(f)$ .

**Nota I-B.6** ■ Podemos considerar esta construcción del cono de un morfismo de complejos como un functor de  $Fl(C(A)) \rightarrow C(A)$

**Definición I-B.7** ■ Un triángulo  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  se dice que es distinguido en  $K(A)$ , si existe un morfismo  $f : X' \rightarrow Y'$  de objetos de  $K(A)$  y un isomorfismo de triángulos  $(X, Y, Z) \simeq (X', Y', \text{cono}(f))$ .

**Proposición I-B.8** ■ Con esta definición de triángulos distinguidos,  $K(A)$  (y sus subcategorías plenas de complejos acotados definidas anteriormente) es una categoría triangulada ([Ver96] I.3.1 p. 78-83)

**Nota I-B.9** ■ Aunque todas estas categorías son trianguladas, no todas las trianguladas son de esta forma. Para un ejemplo, la categoría triangulada de los  $\Lambda$ -módulos ([GM96] IV.3 p. 267).

**Definición I-B.10** ■ Una subcategoría de una categoría triangulada se dice espesa si para cualquier  $f \in \text{Hom}(X, Y)$  se tiene que el tercer vértice del triángulo distinguido que se puede construir sobre este homomorfismo pertenece también a dicha subcategoría.

---

---

---

# CAPÍTULO II

## Categorías derivadas

En esta sección recordamos la construcción de la categoría derivada de una categoría abeliana arbitraria, comenzando por localización en categorías abelianas. Las referencias [Har66, Gri87, Bor87, Ver96].

### II-A LOCALIZACIÓN EN CATEGORÍAS TRIANGULADAS

**Definición II-A.1** ■ ([Gri87] I.1.1 p. 7) Sea  $A$  una categoría. Un conjunto  $S$  de morfismos de  $A$  se dirá que es un sistema multiplicativo si verifica las propiedades siguientes:

(SM1)  $S$  cerrado para la composición.  $1_X \in S$  para todo  $X \in \text{Ob}(A)$ .

(SM2) Dados  $C, D, E \in \text{Ob}(A)$ ,  $f : D \rightarrow E$  morfismo en  $A$  y  $s : C \rightarrow E$  morfismo de  $S$ , existen  $B \in \text{Ob}(A)$ ,  $g : B \rightarrow C$  morfismo en  $A$  y  $t : B \rightarrow D$  tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ D & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

con las flechas verticales en  $S$ . Análogamente si los datos de

partida son  $g, t$ .

(SM3) Para todo par de morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$ , se tiene que existe un  $s : Y \rightarrow Z$  en  $S$  tal que  $sf = sg$  si y sólo si existe un  $t : W \rightarrow X$  en  $S$  tal que  $ft = gt$

---

**Definición II-A.2** ■ Un tal sistema multiplicativo se dice saturado si verifica

(SM4) Si  $f, g, h$  morfismos con  $fg, gh \in S$  entonces se tiene que  $g \in S$

---

**Teorema II-A.3** ■ ([Gri87] I.1.2 p. 8-14) Si  $A$  es una categoría y  $S$  un sistema multiplicativo en ella, entonces existen una categoría  $A_S$  y un funtor  $P_S : A \rightarrow A_S$  verificando

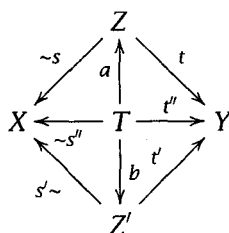
1. Si  $s \in S$  entonces  $P_S(s)$  es un isomorfismo en  $A_S$ .
2. Si  $F : A \rightarrow B$  es un funtor que lleva elementos de  $S$  en isomorfismos de  $B$ , entonces existe un único funtor  $G : A_S \rightarrow B$  verificando  $F = G \circ P_S$

La categoría  $A_S$  se llama la localización de  $A$  relativa al sistema multiplicativo  $S$ .

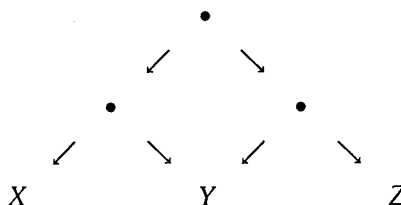
---

**Nota II-A.4** ■ Los objetos de la categoría  $A_S$  son los de  $A$ , mientras que los morfismos entre objetos  $X, Y \in Ob(A)$  son las clases de equivalencia de diagramas del tipo  $X \xleftarrow{s} \bullet \xrightarrow{t} Y$  donde  $s \in S$  y dos diagramas  $(Z, s, t), (Z', s', t')$  son equivalentes si existe un tercer diagrama  $(T, s'', t'')$  y unos morfismos

$a : T \rightarrow Z, b : T \rightarrow Z'$  que hacen conmutativo el diagrama siguiente



y la composición de morfismos viene dada por el esquema siguiente



## II-B LA CATEGORÍA DERIVADA

**Definición II-B.1** ■ ([Gri87] I.2.14 p. 32) Sea  $A$  una categoría triangulada, diremos que un sistema multiplicativo  $S$  de  $A$  es compatible con la triangulación si verifica las siguientes propiedades:

(SM5)  $S$  es estable por traslación, es decir,  $s \in S \Leftrightarrow s[n] \in S \forall n$ .

(SM6) Para todo par  $(X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', z')$  de triángulos distinguidos y todo par de morfismos de  $S, s : X \rightarrow X', s' : Y \rightarrow Y'$  verificando  $s'u = u's$ , existe un morfismo  $s'' : Z \rightarrow Z'$  en  $S$ , que completa un morfismo de triángulos.

**Nota II-B.2** ■ Si  $A$  es una categoría triangulada y  $S$  un sistema multiplicativo compatible con la triangulación, la localización de  $A$  relativa a  $S$  también es triangulada.



**Proposición II-B.3** ■ ([Gri87] I.6.2 p. 52) Sea  $A$  una categoría abeliana, y  $K(A)$  la categoría de complejos de objetos de  $A$  módulo homotopía. Consideremos la familia de morfismos en  $K(A)$  que inducen isomorfismo en homología; esta familia es un sistema multiplicativo saturado, compatible con la estructura triangulada de  $K(A)$ .

**Definición II-B.4** ■ Definimos la categoría derivada de una categoría abeliana  $A$  como la localización de  $K(A)$  respecto del sistema multiplicativo de los morfismos de complejos que inducen isomorfismo en homología. Notaremos dicha categoría por  $D(A)$ , y llamaremos casi-isomorfismos a los morfismos con respecto a los cuales localizamos.

**Teorema II-B.5** ■ ([Gri87] I.6.5 p. 54) La categoría  $D(A)$  es aditiva y triangulada. El funtor canónico de paso al cociente  $P : K(A) \rightarrow D(A)$  es aditivo y es un  $\delta$ -funtor, que transforma los isomorfismos homológicos de  $K(A)$  en isomorfismos de  $D(A)$  y es universal para esta propiedad.

**Proposición II-B.6** ■ Toda sucesión exacta corta de complejos de objetos de una categoría abeliana  $0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$  nos da un triángulo en la categoría derivada:

$$C_1^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow C_1^\bullet[1]$$

**Demostración.** Consideremos el siguiente morfismo de complejos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{v^\bullet} & C_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow 1 & & \uparrow \rho^\bullet = v^\bullet \oplus 0 & & \\ & & C_1^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & \text{cono}(u^\bullet) & \xrightarrow{\pi^\bullet} & C_1^\bullet[1] \end{array}$$

donde  $\text{cono}(u^\bullet) = K^\bullet$  con  $K^n = C_2^n \oplus C_1^{n+1}$  y  $p^n(x) = (x, 0)$ .

Consideremos sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 h^i(C_1) & \longrightarrow & h^i(C_2) & \longrightarrow & h^i(C_3) & \xrightarrow{\delta} & h^{i+1}(C_1) & \longrightarrow & h^{i+1}(C_2) \\
 \parallel & \# & \parallel & \# & \uparrow & & \parallel & \# & \parallel \\
 h^i(C_1) & \longrightarrow & h^i(C_2) & \longrightarrow & h^i(K) & \longrightarrow & h^i(C_1[1]) & \longrightarrow & h^i(C_2[1])
 \end{array}$$

Si probamos que el tercer cuadrado es conmutativo, aplicando el lema de los cinco, obtendremos isomorfismos en homología, esto es,  $\rho^\bullet$  casi-isomorfismo y tendremos un morfismo  $C_3^\bullet \rightarrow C_1^\bullet[1]$ .

De hecho, es suficiente ver que los morfismos inducidos por  $\rho^\bullet$  en homología son compatibles con el morfismo de conexión  $\delta$

$$\begin{array}{ccc}
 C_2^i \oplus C_1^{i+1} & \xrightarrow{d_i} & C_2^{i+1} \oplus C_1^{i+2} \\
 (\alpha, \beta) & \longrightarrow & (u^{i+1}(\beta) - d_i^2 \alpha, d_{i+1}^1 \beta)
 \end{array} \quad h^i(K^\bullet) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$$

Sean  $\overline{(\alpha, \beta)} \in h^i(K^\bullet)$ ,  $\pi_* \overline{(\alpha, \beta)} = \overline{\beta} \in h^{i+1}(C_1^\bullet)$ . Por otra parte,  $\rho^i \overline{(\alpha, \beta)} = \overline{v^i(\alpha)} \in h^i(C_3^\bullet)$ , pero

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \alpha & \longrightarrow & v(\alpha) & & \\
 & & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1^i & \xrightarrow{u^i} & C_2^i & \longrightarrow & C_3^i \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow d_2^i & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1^{i+1} & \longrightarrow & C_2^{i+1} & \longrightarrow & C_3^{i+1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & d_i^2(\alpha) \\
 \beta & \searrow & \parallel \\
 & & u^{i+1}(\beta)
 \end{array}$$

Luego el morfismo de conexión envía  $v(\alpha)$  sobre  $\beta$  y la clase de  $(\alpha, \beta)$  va sobre  $\overline{\beta}$  a través de los dos caminos.

---

---

# CAPÍTULO III

## t-estructuras

En esta sección recordamos el concepto de t-estructura sobre una categoría triangulada y recordaremos la construcción de Beilinson, Bernstein y Deligne para obtener t-estructuras sobre un espacio topológico por pegamiento de otras definidas sobre los estratos de dicho espacio. La referencia fundamental es [BBD83]

---

**Proposición III-7** ■ ([BBD83] 1.1.9) Sean  $(X, Y, Z), (X', Y', Z')$  triángulos distinguidos en una categoría triangulada y  $g : Y \rightarrow Y'$  morfismo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{d} \\ & & (1) & g \downarrow & (2) & \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{d'} \end{array}$$

Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $v' \circ g \circ u = 0$
- (b) Existe  $f \in \text{Hom}(X, X')$  que hace conmutativo el cuadrado (1) (resp.  $h \in \text{Hom}(Z, Z')$  que hace conmutativo el cuadrado (2)).
- (c) Existe un morfismo de triángulos  $(f, g, h)$ .

Si estas condiciones se verifican y  $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$ , el morfismo

$f$  (resp.  $h$ ) es único.

**Demostración.** (a)  $\Leftrightarrow$  (b) Consideremos la sucesión exacta

$$\rightarrow \text{Hom}^{-1}(X, Z') \rightarrow \text{Hom}(X, X') \xrightarrow{\circ u'} \text{Hom}(X, Y') \xrightarrow{\circ v'} \text{Hom}(X, Z') \rightarrow$$

y el morfismo  $g \circ u \in \text{Hom}(X, Y')$ ; si  $v' \circ g \circ u = 0$ , se tiene que existe un  $f \in \text{Hom}(X, X')$  del que procede  $g \circ u$ . Este  $f$  es único si  $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$ , por inyectividad del morfismo composición con  $u'$

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) Aplicando el axioma (TR2) de las categorías trianguladas, dadas  $(f, g)$  se puede extender a un morfismo de triángulos  $(f, g, h)$ .

(c)  $\Leftrightarrow$  (b) Trivial.

**Corolario III-8** ■ ([BBD83] 1.1.10) Sea  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d}$  triángulo distinguido. Si  $\text{Hom}^{-1}(X, Z) = 0$ , entonces:

- (1) El cono de  $u$  es único salvo isomorfismo único.
- (2)  $d$  es el único morfismo  $x : Z \rightarrow X[1]$  tal que el triángulo  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{x}$  es distinguido.

**Demostración.**

- (1) Consideremos el siguiente diagrama de triángulos

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \rightarrow & \text{cono}(u) \\ 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

la proposición anterior nos asegura la existencia y unicidad de un morfismo  $\text{cono}(u) \rightarrow Z$ , que resulta ser isomorfismo porque las dos identidades de  $X$  e  $Y$  lo son.

- (2) Supongamos que existe otro  $x : Z \rightarrow X[1]$  que haga distin-

guido al triángulo en cuestión y comparemos

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{d} \\ 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{x} \end{array}$$

la existencia y unicidad de un morfismo  $Z \rightarrow Z$  está garantizada como antes, y la identidad es un buen candidato, luego  $d = x$  forzosamente.

---

**Definición III-9** ■ ([BBD83] 1.3.1) Una *t*-categoría es una categoría triangulada  $D$ , provista de dos subcategorías estrictamente plenas  $D^{\leq 0}$  y  $D^{\geq 0}$  tales que, si notamos

$D^{\leq n} := D^{\leq 0}[-n]$  y  $D^{\geq n} := D^{\geq 0}[-n]$ , se tiene:

- (i) para  $X \in D^{\leq 0}, Y \in D^{\geq 1}, \text{Hom}_D(X, Y) = 0$ .
- (ii)  $D^{\leq 0} \subset D^{\leq 1}$  y  $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 1}$ .
- (iii) para todo  $X \in D$ , existe un triángulo distinguido  $(A, X, B)$  con  $A \in D^{\leq 0}$  y  $B \in D^{\geq 1}$ .

Se dirá también que  $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$  es una *t*-estructura sobre  $D$ . Su corazón es la categoría plena  $C := D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$

---

**Definición III-10** ■ Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana cualquiera. La *t*-estructura natural sobre la categoría derivada de  $\mathcal{A}$  es aquella tal que  $D(\mathcal{A})^{\leq n}$  (respectivamente  $D(\mathcal{A})^{\geq n}$ ) es la subcategoría de complejos  $K$  tales que  $h^i K = 0$  si  $i > n$  (respectivamente  $i < n$ ).

---

**Definición III-11** ■ ([Wei94] 1.2.7. p. 9) Para todo complejo  $C : \dots \rightarrow C^{-1} \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \dots$  de objetos de una categoría abeliana, notaremos  $\tau_{\geq n} C$  al subcomplejo de  $C$  definido por

$$(\tau_{\geq n} C)^i := \begin{cases} 0 & i < n \\ \text{Ker } d_C^i & i = n \\ C^i & i > n \end{cases}$$

Se tiene que  $H^i(\tau_{\geq n}C) = 0$  para  $i < n$ , mientras que  $H^i(\tau_{\geq n}C) = H^i(C)$  para  $i \geq n$ . El complejo  $\tau_{\geq n}C$  se denomina la (buena) truncación de  $C$  por debajo de  $n$ , y el complejo cociente  $\tau_{< n}C = C/(\tau_{\geq n}C)$  se llama la (buena) truncación de  $C$  por encima de  $n$ ;  $H^i(\tau_{< n}C) = H^i(C)$  para  $i < n$  y  $0$  para  $i \geq n$ .

Otras truncaciones de menos utilidad son las truncaciones brutales  $\sigma_{< n}C$  y  $\sigma_{\geq n}C = C/(\sigma_{< n}C)$ . Por definición  $(\sigma_{< n}C)^i$  es  $C^i$  si  $i < n$  y  $0$  en el resto.

Nota III-.12 ■ Algunos ejemplos:

1. Si  $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$  es una  $t$ -estructura sobre  $D$ , para todo entero  $n$ , se tiene que  $(D^{\leq n}, D^{\geq n})$  es otra. Se dice que la segunda se obtiene de la primera por traslación.
2. Si  $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$  es  $t$ -estructura sobre  $D$ , entonces  $(D^{\leq 0 \text{ op}}, D^{\geq 0 \text{ op}})$  también es una  $t$ -estructura (llamada dual), sobre la categoría triangulada opuesta  $D^{\text{op}}$ .

Proposición III-.13 ■ ([BBD83] 1.3.3) Sea  $D$  una  $t$ -categoría

- 1) La inclusión  $D^{\leq n} \rightarrow D$  admite un adjunto a derecha  $\tau_{\leq n}$ .
- 2) La inclusión  $D^{\geq n} \rightarrow D$  admite un adjunto a izquierda  $\tau_{\geq n}$ .
- 3) Para todo  $X \in D$  hay un único morfismo  $d \in \text{Hom}^1(\tau_{\geq 1}X, \tau_{\leq 0}X)$ , tal que el triángulo  $\tau_{\leq 0}X \rightarrow X \rightarrow \tau_{\geq 1}X \xrightarrow{d}$  es distinguido. Este triángulo es (salvo isomorfismo único) el único distinguido  $(A, X, B)$  con  $A \in D^{\leq 0}$  y  $B \in D^{\geq 1}$ .

**Demostración.**

Por dualidad y traslación, basta probar (1) para  $n = 0$  y tendremos los dos primeros apartados probados.



## III-A LOS HACES PERVERSOS

Los haces perversos sobre un espacio topológico son un ejemplo básico de corazón de una  $t$ -estructura obtenida por pegamiento, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente.

Sea  $X$  un espacio topológico, provisto de un haz de anillos, que notaremos  $\mathcal{O}$ ,  $U \subset X$  un abierto y  $F = X - U$  el cerrado complementario, con las inclusiones

$$F \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$$

Notaremos  $M(-, \mathcal{O})$  la categoría de haces de  $\mathcal{O}$ -módulos sobre  $-$ .

Las categorías  $M(X, \mathcal{O})$ ,  $M(U, \mathcal{O})$  y  $M(F, \mathcal{O})$  están relacionadas a través de los funtores:

$j_! : M(U, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$  prolongación por 0 (exacto).

$j^! = j^* : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(U, \mathcal{O})$  restricción (exacto).

$j_* : M(U, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$  imagen directa (exacto a izquierda).

$i^* : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(F, \mathcal{O})$  restricción (exacto).

$i_! = i_* : M(F, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$  imagen directa (exacto).

$i^! : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(F, \mathcal{O})$  secciones con soporte en  $F$  (exacto).

$$M(F, \mathcal{O}) \begin{array}{c} \xrightarrow{i_* = i_!} \\ \xleftarrow{i^*, i^!} \end{array} M(X, \mathcal{O}) \begin{array}{c} \xrightarrow{j^* = j^!} \\ \xleftarrow{j_*, j_!} \end{array} M(U, \mathcal{O})$$

Dentro de cada una de estas categorías consideramos unas subcategorías abelianas espesas  $\mathcal{A}_* \subset M(*, \mathcal{O})$ , entre las que los funtores anteriores también están definidos y además los funtores derivados también definidos entre las categorías derivadas correspondientes.

Si ahora notamos  $\mathcal{D}_*$  a la subcategoría plena  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_*}^+(M(*, \mathcal{O}))$  de la categoría derivada de  $M(*, \mathcal{O})$  de los complejos con cohomología en  $\mathcal{A}_*$ , subcategoría que tiene como objetos a los complejos acotados inferiormente, o incluso a la subcategoría de complejos acotados (caso de que los funtores tengan dimensión cohomológica finita), tenemos:



$$\mathcal{D}_F \begin{array}{c} \xrightarrow{i_* = i_!} \\ \xleftarrow{i^*, \mathbb{R}^!} \end{array} \mathcal{D}_X \begin{array}{c} \xrightarrow{j^* = j^!} \\ \xleftarrow{\mathbb{R}j_*, j_!} \end{array} \mathcal{D}_U$$

Estos funtores satisfacen:

- Los pares  $(j_!, j^*)$ ,  $(j^*, \mathbb{R}j_*)$ ,  $(i^*, i_*)$ ,  $(i_*, \mathbb{R}^!)$  son funtores adjuntos.
- $j^*i_* = i^*j_! = \mathbb{R}^!\mathbb{R}j_* = 0$ .
- Si  $A \in \mathcal{D}_F$ ,  $B \in \mathcal{D}_U$ , entonces  $\text{Hom}(j_!B, i_*A) = \text{Hom}(i_*A, j_*B) = 0$ .
- Para todo  $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$ , existen  $d : i_*i^*\mathcal{K} \rightarrow j_!j^*\mathcal{K}[1]$  (respectivamente  $d' : \mathbb{R}j_*j^*\mathcal{K} \rightarrow i_*\mathbb{R}^!\mathcal{K}[1]$ ) únicas tales que el triángulo  $j_!j^*\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow i_*i^*\mathcal{K} \xrightarrow{d}$  (respectivamente  $i_*i^*\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}j_*j^*\mathcal{K} \xrightarrow{d'}$ ) sean distinguidos.
- $i_*, j_!$  y  $j^*$  son plenamente fieles: los morfismos de adjunción  $i^*i_* \rightarrow Id \rightarrow \mathbb{R}^!i_*$  y  $j^*\mathbb{R}j_* \rightarrow Id \rightarrow j^*j_!$  son isomorfismos.

Luego verifican las condiciones para poder efectuar el pegamiento de *t*-estructuras

**Nota III–A.1** ■ Algunos ejemplos:

- si la subcategoría espesa elegida es la propia  $M(*, \mathcal{O})$ , no hay condiciones, la subcategoría elegida es la de los complejos acotados inferiormente, o la de complejos acotados.
- si el haz de anillos es el haz constante en cada espacio topológico y elegimos la subcategoría de haces constructibles (aquellos cuya cohomología es de dimensión finita en cada estrato), en el caso de que la estratificación  $\{F, U\}$  hace de  $X$  una pseudovariedad ([MNM93] trivialidad topológica de  $X$ )

**Definición III–A.2** ■ Consideremos en el espacio topológico  $X$ , la estratificación  $\Sigma = \{F, U\}$ . Consideramos la *t*-estructura natural sobre  $\mathcal{D}_U$  y la *t*-estructura sobre

$D_F$  obtenida de la natural trasladándonos  $d$  lugares (con  $d > 0$ ). El pegamiento de ambas  $t$ -estructuras nos da una sobre  $D_X$ . Esta definición generaliza la de  $t$ -estructura cónica de [NM94] 2.1. p. 292), que daba lugar a los haces perversos cónicos sobre  $X$ , en el caso de que  $X$  fuera un cono.

**Definición III-A.3** ■ [BBD83] Consideremos en el espacio topológico  $X$ , la estratificación  $\Sigma$  que consiste en  $\{F, U\}$ . Definimos la categoría de los haces  $d$ -perversos (con  $d \geq 0$ ) sobre  $X$  con respecto a la estratificación  $\Sigma$ , notada  $Perv^{(d)}(X, \Sigma)$  como el corazón de la  $t$ -estructura definida sobre  $D_X$  en la definición anterior.

En primer lugar vamos a caracterizar los  $d$ -haces perversos con respecto a la estratificación  $\Sigma = \{F, U\}$  (cf [BBD83] 2.1.2).

**Proposición III-A.4** ■ (de caracterización) Un objeto  $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$  pertenece a  $Perv^{(d)}(X, \Sigma)$  si y sólo si el complejo  $\mathcal{K}$  está concentrado en grados  $[0, d]$ ,  $j^* \mathcal{K}$  concentrado en grado 0 y  $h^n i^! \mathcal{K} = 0$  si  $n < d$ .

**Demostración.** Si llamamos  $i_S : S \hookrightarrow X$  a la inclusión de cada estrato  $S$  en  $X$  tenemos, aplicando [BBD83] que  $\mathcal{K} \in Perv^{(d)}(X)$  equivale a

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^n i_S^* \mathcal{K} = 0 & n > p(S) \\ h^n i_S^! \mathcal{K} = 0 & n < p(S) \end{array} \right. \forall S \text{ estrato}$$

En nuestro caso, tenemos dos estratos, el abierto  $U$ , de perversidad 0 y el cerrado  $F$  de perversidad  $d$ , con lo que se deduce:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet S = U \quad \left. \begin{array}{l} h^n j^* \mathcal{K} = 0 \quad n > 0 \\ h^n j^* \mathcal{K} = 0 \quad n < 0 \end{array} \right\} \iff h^n(j^* \mathcal{K}) = 0 \forall n \neq 0, \text{ luego} \\ \quad \quad \quad j^* \mathcal{K} \text{ concentrado en grado 0.} \\ \bullet S = F \quad \left. \begin{array}{l} h^n i^* \mathcal{K} = 0 \quad n > d \\ h^n i^! \mathcal{K} = 0 \quad n < d \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Si consideramos las sucesiones largas de cohomología de los

triángulos distinguidos definidos por  $\mathcal{K}$  tendremos

1.  $j_!j^*\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow i_*i^*\mathcal{K}$  induce

$$h^l(j_!j^*\mathcal{K}) \rightarrow h^l(\mathcal{K}) \rightarrow h^l(i_*i^*\mathcal{K}) \rightarrow h^{l+1}(j_!j^*\mathcal{K})$$

para todo  $l > 1$  se tiene que  $h^l(\mathcal{K}) \simeq h^l(i_*i^*\mathcal{K})$ , que vale 0 si  $l > p(F)$ , por definición.

2.  $i^*i^!\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow j_*j^*\mathcal{K}$  induce

$$h^{l-1}(j_*j^*\mathcal{K}) \rightarrow h^l(i^*i^!\mathcal{K}) \rightarrow h^l(\mathcal{K}) \rightarrow h^l(j_*j^*\mathcal{K})$$

para todo  $l < 0$  se tiene que  $h^l(i^*i^!\mathcal{K}) \simeq h^l(\mathcal{K})$  y la parte de la izquierda vale 0 para todos los  $l < p(F)$ , que es positivo, luego  $h^l(\mathcal{K})$  es nulo para valores negativos de  $l$ .

Luego esto equivale a que el complejo  $\mathcal{K}$  está concentrado en grados  $[0, d]$ ,  $j^*\mathcal{K}$  concentrado en grado 0 y  $h^n i^!\mathcal{K} = 0$  si  $n < d$ .

---

**Corolario III-A.5** ■ La categoría  $\text{Perv}^{(0)}(X, \Sigma)$  coincide con la de los complejos cuya cohomología está concentrada en grado cero, y por tanto es equivalente a la categoría de los haces sobre  $X$ ,  $\mathcal{A}_X$ .

---

---

---

# CAPÍTULO IV

## Categorías y funtores en juego

La idea fundamental es proyectar lo hecho en [NM94] a una situación más general que la de allí, utilizando unas categorías y funtores que pasamos a definir. Por coherencia mantendremos la notación y los objetos utilizados, aunque vamos a prescindir de algunos, como por ejemplo de la acción del grupo  $H$ , que puede ser recuperada a partir de otros datos.

### IV-A CONSTRUCCIONES GENERALES

De ahora en adelante  $H$  es un grupo y  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva.

---

**Definición IV-A.1** ■ La categoría  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)$  es la categoría cuyos objetos son 4-uplas  $(U, V, \alpha, \rho)$ , donde  $U, V \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $\alpha : U \rightarrow V$  es un morfismo en  $\mathcal{A}$  y  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(V)$  son morfismos de grupos (representaciones) con  $\rho(h) \circ \alpha = \alpha \forall h \in H$ . Los morfismos entre objetos de  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)$  se definen de la siguiente forma, un morfismo  $f : (U, V, \alpha, \rho) \rightarrow (U', V', \alpha', \rho')$  entre dos objetos de esta categoría es un par de morfismos de  $\mathcal{A}$ ,  $f_1 : U \rightarrow U'$

y  $f_2 : V \rightarrow V'$  verificando

- $\alpha' \circ f_1 = f_2 \circ \alpha.$
- $f_2 \circ \rho(h) = \rho'(h) \circ f_2 \quad \forall h \in H.$

**Definición IV-A.2** ■ Si  $H$  es el grupo trivial, podemos considerar la categoría  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A})$  como la categoría de flechas entre objetos de  $\mathcal{A}$ ,  $Fl(\mathcal{A})$ , como en I-A.11 y considerar unas aplicaciones “source” y “end” de  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ , y a la flecha como una transformación *arrow* : *source*  $\rightarrow$  *end*.

**Definición IV-A.3** ■ La categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; H)$  es la categoría cuyos objetos son  $(E, F, u, \{\nu_h\}_{h \in H})$ , donde  $E, F \in Ob(\mathcal{A})$ ,  $u : E \rightarrow F$ ,  $\nu_h : F \rightarrow E$  morfismos de  $\mathcal{A}$  verificando:

- $\nu_{hh'} = \nu_h \circ u \circ \nu_{h'} + \nu_h + \nu_{h'}.$
- $1_E + \nu_h \circ u$  automorfismo.
- $1_F + u \circ \nu_h$  automorfismo.

para todos  $h, h' \in H$ . Los morfismos entre objetos se definen de la forma siguiente: dados dos objetos  $(E, F, u, \{\nu_h\}_{h \in H})$  y  $(E', F', u', \{\nu'_h\}_{h \in H})$ , un morfismo entre ellos es un par  $f_1 : E \rightarrow E'$ ,  $f_2 : F \rightarrow F'$  de morfismos en  $\mathcal{A}$  verificando:

- $u' \circ f_1 = f_2 \circ u.$
- $f_1 \circ \nu_h = \nu'_h \circ f_2 \quad \forall h \in H.$

**Proposición IV-A.4** ■ Las categorías anteriormente definidas son aditivas, y también abelianas si  $\mathcal{A}$  lo es.

**Demostración.**

$\mathcal{A}$  aditiva  $\implies \mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)$  aditiva .

Para ello debemos probar que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)}$  es grupo abeliano, la

bilinealidad de la composición de morfismos, la existencia de elemento nulo y la de la suma directa de objetos;

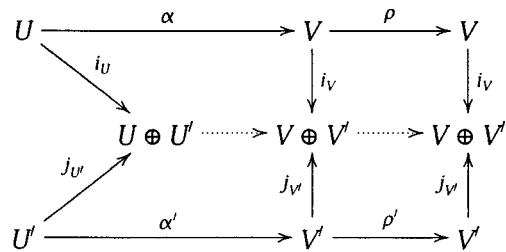
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)}((U, V, \alpha, \rho), (U', V', \alpha', \rho'))$  tiene estructura de grupo abeliano, sin más que definir la suma componente a componente  $(f_1, f_2) + (g_1, g_2) := (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$  y tener en cuenta que  $\mathcal{A}$  es aditiva.
- La composición de morfismos viene dada por el diagrama, si  $(f_1, f_2) : (U, V, \alpha, \rho) \rightarrow (U', V', \alpha', \rho')$  y  $(g_1, g_2) : (U', V', \alpha', \rho') \rightarrow (U'', V'', \alpha'', \rho'')$  tendríamos

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\alpha} & V & \xrightarrow{\rho} & V \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_2 \\
 U' & \xrightarrow{\alpha'} & V' & \xrightarrow{\rho'} & V' \\
 \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_2 \\
 U'' & \xrightarrow{\alpha''} & V'' & \xrightarrow{\rho''} & V''
 \end{array}$$

la composición  $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2) : (U, V, \alpha, \rho) \rightarrow (U'', V'', \alpha'', \rho'')$  es un morfismo en la categoría de las flechas ya que se tiene  $\alpha'' \circ g_1 \circ f_1 = g_2 \circ \alpha' \circ f_1 = g_2 \circ f_2 \circ \alpha$ , y por otra parte  $g_2 \circ f_2 \circ \rho = g_2 \circ \rho' \circ f_2 = \rho'' \circ g_2 \circ f_2$ . Ahora, como la composición se hace componente a componente y la categoría  $\mathcal{A}$  es aditiva, se tiene la bilinealidad de la composición de morfismos.

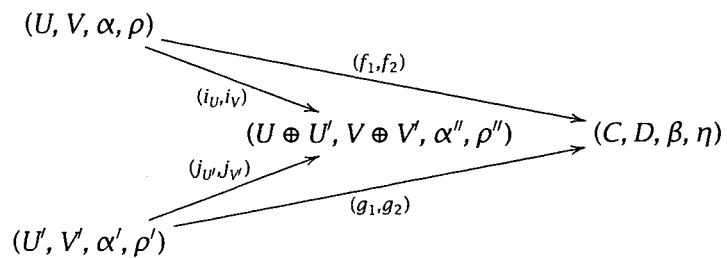
- Como  $\mathcal{A}$  es aditiva, la cuaterna  $(0, 0, u, u)$ , donde  $0$  es el objeto nulo de  $\mathcal{A}$  y  $u$  el único morfismo entre  $0$  y sí mismo, es el objeto nulo de la categoría de las flechas, ya que cualquier morfismo que parta o llegue a este par es único en cada componente, y la condición de conmutatividad se tiene de manera automática, ya que cualquier composición que tomemos partirá o llegará al objeto nulo de  $\mathcal{A}$ .
- Sean  $(U, V, \alpha', \rho'), (U', V', \alpha', \rho')$  dos objetos de  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)$  y veamos que existe su suma directa; como  $\mathcal{A}$  es categoría aditiva se

tiene garantizada la existencia de  $U \oplus U'$  y de  $V \oplus V'$ , con sus correspondientes  $i_U, j_{U'}, i_V, j_{V'}$ , consideremos el diagrama



por la propiedad universal de la suma directa existe un único  $\rho'' : V \oplus V' \rightarrow V \oplus V'$ , que hace conmutativo la parte derecha del diagrama, y un  $\alpha'' : U \oplus U' \rightarrow V \oplus V'$  que hace conmutativa la parte izquierda, con lo que tenemos definido un objeto de la categoría  $(U \oplus U', V \oplus V', \alpha'', \rho'')$ , y unos morfismos  $(i_U, i_V), (j_U, j_V)$  con  $\alpha'' \circ i_U = i_V \circ \alpha$  y  $\alpha'' \circ j_{U'} = j_{V'} \circ \alpha'$ , y también  $i_V \circ \rho = \rho'' \circ i_V$  y  $j_{V'} \circ \rho' = \rho'' \circ j_{V'}$  por la definición de  $\rho$  (a partir de la propiedad universal de la suma directa), que probaremos verifican la propiedad universal de la suma directa.

Sean  $(C, D, \beta, \eta)$  otro objeto y  $(f_1, f_2) : (U, V, \alpha, \rho) \rightarrow (C, D, \beta, \eta)$ ,  $(g_1, g_2) : (U', V', \alpha', \rho') \rightarrow (C, D, \beta, \eta)$  dos morfismos de objetos, se tiene

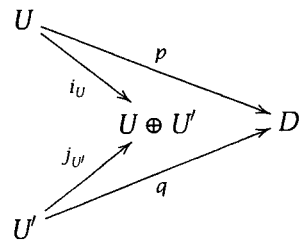


La propiedad universal de la suma directa nos garantiza la unicidad y existencia de  $h_1 : U \oplus U' \rightarrow C$  y  $h_2 : V \oplus V' \rightarrow D$  con  $h_1 \circ i_U = f_1$ ,  $h_1 \circ j_{U'} = g_1$ ,  $h_2 \circ i_V = f_2$  y  $h_2 \circ j_{V'} = g_2$ ; sólo queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de la categoría, es decir, que

hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 U \oplus U' & \xrightarrow{\alpha''} & V \oplus V' & \xrightarrow{\rho''} & V \oplus V' \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_2 \\
 C & \xrightarrow{\beta} & D & \xrightarrow{\eta} & D
 \end{array}$$

$(f_1, f_2)$  es un morfismo de flechas, luego  $f_2 \circ \alpha = \beta \circ f_1$ , con lo que  $h_2 \circ i_V \circ \alpha = \beta \circ h_1 \circ i_U$  y, por tanto,  $h_2 \circ \alpha'' \circ i_U = \beta \circ h_1 \circ i_U := p$ , y de manera análoga se deduce  $h_2 \circ \alpha'' \circ j_{U'} = \beta \circ h_1 \circ j_{U'} := q$ , ahora si consideramos



y tanto  $h_2 \circ \alpha''$  como  $\beta \circ h_1$  completan el diagrama a uno conmutativo, luego deben ser iguales por la propiedad universal de la suma directa de objetos. Razonamiento análogo para  $h_1 \circ \rho'' = \eta \circ h_2$ , ya que  $f_2 \circ \rho = \eta \circ f_2$ , pero la parte de la izquierda vale  $h_2 \circ i_V \circ \rho = h_2 \circ \rho'' \circ i_V$  y la de la derecha vale  $\eta \circ h_2 \circ i_V$  y volviendo a aplicar la propiedad universal de la suma directa se tiene el resultado.

$\mathcal{A}$  abeliana  $\implies \mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)$  abeliana.

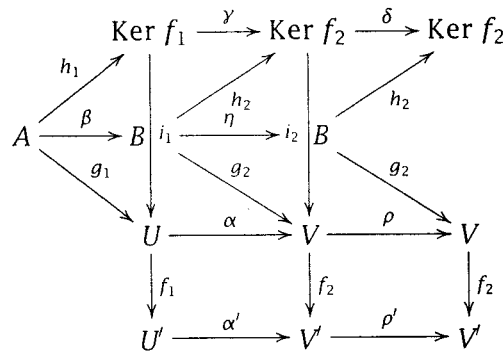
Para ello debemos probar la existencia de núcleo y conúcleo de cada morfismo y el teorema de isomorfía:

- Sea  $(f_1, f_2) : (U, V, \alpha, \rho) \longrightarrow (U', V', \alpha', \rho')$  un morfismo, podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{i_1} & U & \xrightarrow{f_1} & U' & \xrightarrow{p_1} & \text{Coker } f_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{i_2} & V & \xrightarrow{f_2} & V' & \xrightarrow{p_2} & \text{Coker } f_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$



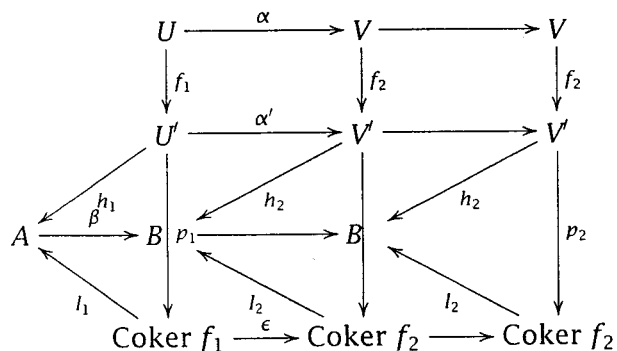
para definir el núcleo consideramos  $\gamma : \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  definida de la siguiente manera; sea  $\alpha \circ i_1 : \text{Ker } f_1 \rightarrow V$ , la composición de este morfismo con  $f_2$  es nula, pues  $f_2 \circ \alpha \circ i_1 = \alpha' \circ f_1 \circ i_1 = \alpha' \circ 0$ , luego este morfismo factoriza a través del núcleo de  $f_2$ , es decir, existe  $\gamma : \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  tal que  $i_2 \circ \gamma = \alpha \circ i_1$ , y un razonamiento análogo nos daría la existencia de  $\delta : \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_2$  luego el candidato a núcleo sería  $((\text{Ker } f_1, \text{Ker } f_2, \gamma, \delta), (i_1, i_2))$ , la composición con  $f$  es nula, falta ver la propiedad universal; sea  $(g_1, g_2) : (A, B, \beta, \eta) \rightarrow (U, V, \alpha, \rho)$  tal que  $f_i \circ g_i = 0$ , la propiedad universal del núcleo garantiza la existencia de  $(h_1, h_2)$  verificando que  $i \circ h = g$



queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $\gamma \circ h_1 = h_2 \circ \beta$ ; sabemos  $g_2 \circ \beta = \alpha \circ g_1$ , lo que implica  $i_2 \circ h_2 \circ \beta = \alpha \circ i_1 \circ h_1 = i_2 \circ \gamma \circ h_1$ , lo que unido a que  $i_2$  es monomorfismo nos da  $h_2 \circ \beta = \gamma \circ h_1$ .

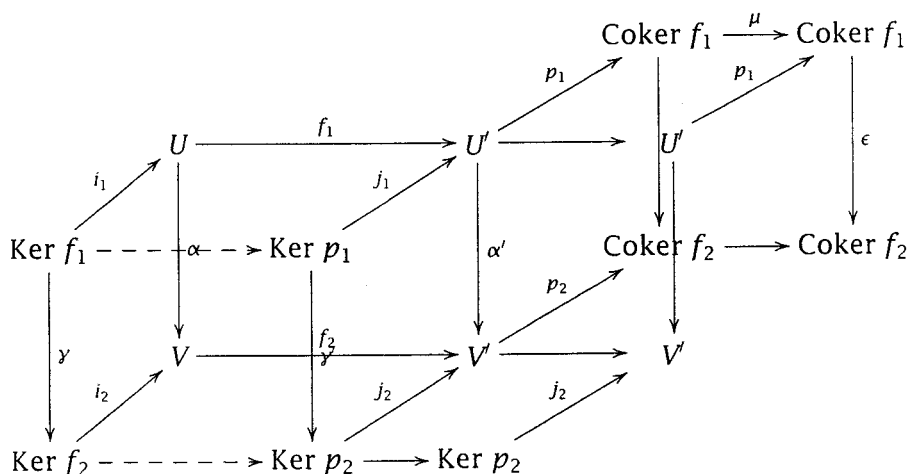
Para el conúcleo, consideramos  $\epsilon : \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$  definida de la siguiente manera; sea  $p_2 \circ \alpha' : U' \rightarrow \text{Coker } f_2$ , la composición con  $f_1$  es nula, pues  $p_2 \circ \alpha' \circ f_1 = p_2 \circ f_2 \circ \alpha = 0 \circ \alpha$ , luego por la propiedad universal del conúcleo, este morfismo factoriza a través del  $\text{Coker } f_1$ , es decir existe  $\epsilon$  tal que  $p_2 \circ \alpha' = \epsilon \circ p_1$ , y lo mismo con  $\mu : \text{Coker } f_2 \rightarrow \text{Coker } f_2$ , luego el candidato a conúcleo será  $((\text{Coker } f_1, \text{Coker } f_2, \epsilon, \mu), (p_1, p_2))$ , la composición con  $f$  es nula, veamos la propiedad universal, sea  $(h_1, h_2) : (U', V', \alpha', \rho') \rightarrow (A, B, \beta, \eta)$  tal que  $h \circ f = 0$ , la

propiedad universal del conúcleo garantiza la existencia de  $(l_1, l_2)$  tales que  $h = l \circ p$



queda ver que  $(l_1, l_2)$  es un morfismo, es decir que  $l_2 \circ \epsilon = \beta \circ l_1$  y que  $\eta \circ l_2 = l_2 \circ \mu$ ; sabemos  $\beta \circ h_1 = h_2 \circ \alpha'$ , lo que implica  $\beta \circ l_1 \circ p_1 = l_2 \circ p_2 \circ \alpha' = l_2 \circ \beta \circ p_1$ , lo que unido a que  $p_2$  es epimorfismo nos da  $l_2 \circ \epsilon = \beta \circ l_1$ .

- Teorema de isomorfía. Sea  $f : (U, V, \alpha, \rho) \rightarrow (U', V', \alpha', \rho')$  y el diagrama



Las flechas discontinuas resultan ser isomorfismos porque el teorema de isomorfía se verifica en  $\mathcal{A}$ .

Donde pone  $\rho$  se quiere decir cada  $\rho_h$  para cada  $h \in H$ , así que

la demostración de la otra es igual, sólo que poniendo  $v_h = V \rightarrow U$  en lugar de  $V$ .

**Nota IV-A.5** ■ Si  $H$  es el grupo trivial las dos categorías  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  y  $\mathcal{C}_0(\mathcal{A})$  son la misma, pues debe verificarse  $v_1 = v_1 \circ u \circ v_1 + v_1 + v_1$ , esto es,  $(1 + u \circ v_1) \circ v_1 = 0$ , con lo que  $v_1 = 0$  por ser  $(1 + u \circ v_1)$  automorfismo.

**Proposición IV-A.6** ■ Si  $H$  es el grupo trivial, los objetos inyectivos de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  son los  $(U, V, \alpha)$  con  $A, B$  inyectivos en  $\mathcal{A}$  y tal que  $\alpha$  admite una escisión ( $\exists \beta : V \rightarrow U$  tal que  $\beta \circ \alpha = 1_U$ ).

**Demostración.** Un objeto  $E = (U, V, \alpha)$  es inyectivo si el funtor  $\text{Hom}(-, E)$  es exacto; consideremos pues una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

y apliquémosle este funtor

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U_A & \xrightarrow{i_1} & U_B & \xrightarrow{p_1} & U_C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_B & & \downarrow \alpha_C & & \\ 0 & \longrightarrow & V_A & \xrightarrow{i_2} & V_B & \xrightarrow{p_2} & V_C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- exactitud a la izquierda

El morfismo  $\text{Hom}(C, E) \rightarrow \text{Hom}(B, E)$  viene dado por

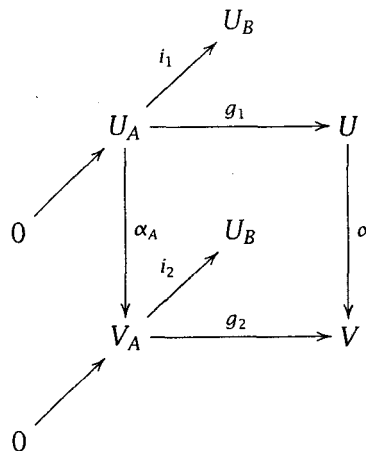
$$\begin{array}{ccccc} & & U_C & \xrightarrow{f_1} & U \\ & p_1 \nearrow & \downarrow \alpha_C & \downarrow \bar{f}_1 & \downarrow \alpha \\ U_B & & & & \\ & & V_C & \xrightarrow{f_2} & V \\ & p_2 \nearrow & \downarrow \alpha_B & \downarrow \bar{f}_2 & \downarrow \alpha \\ V_B & & & & \end{array}$$

donde  $\bar{f}_i = f_i \circ p_i$ , que realmente definen un morfismo de objetos, ya que  $\alpha \circ \bar{f}_1 = \alpha \circ f_1 \circ p_1 = f_2 \circ \alpha_C \circ p_1 = f_2 \circ p_2 \circ \alpha_B = \bar{f}_2 \circ \alpha_B$ , luego  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \in \text{Hom}(B, E)$

Ahora, si  $0 = \bar{f}_i = f_i \circ p_i$ , como  $p_i$  es sobreyectiva, se tiene que  $f_i = 0$ , de donde la inyectividad del morfismo.

- exactitud a la derecha

De forma análoga, el morfismo  $\text{Hom}(B, E) \rightarrow \text{Hom}(A, E)$  viene dado por  $(f_1, f_2) \rightarrow (f_1 \circ i_1, f_2 \circ i_2)$ , que también define un morfismo de objetos, ya que  $\alpha \circ f_1 \circ i_1 = f_2 \circ \alpha_B \circ i_1 = f_2 \circ i_2 \circ \alpha_A$ . Queda ver la sobreyectividad de este morfismo, así que sea  $(g_1, g_2) \in \text{Hom}(A, E)$



por inyectividad de  $V$ , existe  $f_2 : V_B \rightarrow V/f_2 \circ i_2 = g_2$ , ahora debemos completar el triángulo de arriba (por inyectividad de  $U$ ), de tal forma que obtengamos un morfismo de objetos, es decir, que  $f_2 \circ \alpha_B = \alpha \circ f_1$ , lo que equivale a la existencia de  $\beta : V \rightarrow U$  tal que  $\beta \circ \alpha = 1_U$  ya que quedaría  $f_1 = \beta \circ \alpha f_1 = \beta \circ f_2 \circ \alpha_B$ , que define un morfismo de objetos junto con  $f_2$  y además verifica  $f_1 \circ i_1 = \beta \circ f_2 \circ \alpha_B \circ i_1 = \beta \circ f_2 \circ i_2 \circ \alpha_A =$

$$\beta \circ g_2 \circ \alpha_A = \beta \circ \alpha \circ g_1 = g_1.$$

**Corolario IV-A.7** ■ Si la categoría  $\mathcal{A}$  tiene suficientes inyectivos,  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  también.

**Demostración.** Sea  $(U, V, \alpha)$  un objeto, veamos que se puede inyectar en uno inyectivo de la categoría, por tener  $\mathcal{A}$  suficientes inyectivos, existen  $(C, f_1)$  y  $(A, f_2)$  con

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\alpha} & V \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ C & & A \end{array}$$

el problema ahora es construir un objeto inyectivo de la categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ; para ello utilizaremos la propiedad universal del producto; así podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & V \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ & C \oplus A & \\ \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 \\ C & & A \end{array}$$

si ahora ponemos

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & f_1 & \nearrow \\ U & & C \oplus A \\ & \searrow f_2 \circ \alpha & \\ & & A \end{array}$$

la propiedad universal del producto nos garantiza la existencia y unicidad de  $h : U \rightarrow C \oplus A$  que hace conmutativo el diagrama. Como  $\pi_1 \circ h = f_1$  y  $f_1$  es inyectivo, también debe serlo  $h$ ; por otra parte

$\pi_2 \circ h = f_2 \circ \alpha$ , luego tenemos un morfismo inyectivo de objetos de  $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U & \xrightarrow{\alpha} & V \\
 \downarrow h & & \downarrow f_2 \\
 C \oplus A & \xrightarrow{\pi_2} & A
 \end{array}$$

donde el objeto de llegada es inyectivo.

---

**Nota IV-A.8** ■ Obsérvese que, si  $H = 1$  la categoría de complejos de objetos de  $\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}, H)$  (resp.  $\mathfrak{C}(\mathcal{A}; H)$ ) se identifica a la categoría  $\mathfrak{C}_0$  (resp.  $\mathfrak{C}$ ) de los complejos de objetos de  $\mathcal{A}$

$$C(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A})) \cong \mathfrak{C}_0(C(\mathcal{A}))$$


---

---

**Nota IV-A.9** ■ Todo funtor aditivo  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  induce funtores aditivos  $\mathfrak{C}_0(f)$  y  $\mathfrak{C}(f)$  entre las categorías correspondientes. Esto se aplica por ejemplo al funtor traslación y a los funtores de cohomología  $h_{\mathcal{A}}^n$  sobre las categorías de complejos de objetos de  $\mathcal{A}$

---

## IV-B EL FUNTOR $\Psi$

Vamos a definir el funtor  $\Psi$  ([NM94]) como composición de dos funtores, un  $\Omega_{\mathcal{A}} : D(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}; H)) \rightarrow \mathfrak{C}(D(\mathcal{A}); H)$  y un  $\mathbb{R}\psi : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}; H))$ .

### ■ El funtor $\Omega$

---

**Definición IV-B.1** ■ Si  $\mathcal{A}$  es una categoría abeliana, definimos un funtor aditivo

$$\Omega_{\mathcal{A}} : D(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}; H)) \rightarrow \mathfrak{C}(K(\mathcal{A}); H)$$

siguiendo la construcción de [NM94, DK73] de la siguiente forma:

Dado un complejo  $\mathbf{F} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \alpha, \rho) \in C(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H))$  Con los morfismos  $\alpha : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  y  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{V})$  verificando  $\rho(h) \circ \alpha = \alpha \forall h \in H$ .

Sea ahora  $\tilde{\alpha} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U})$  el monomorfismo inducido por  $\alpha$  y la inclusión de  $\mathbf{U}$  en el cono  $\mathbf{U}$

Sea  $\tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U}) \rightarrow \mathbf{Q}$  el conúcleo de este monomorfismo y consideremos  $\tilde{\mathbf{v}}_h : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U})$  verificando  $1_{\mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U})} + \tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} = \rho(h) \oplus 1$  cono  $\mathbf{u}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{U} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}}} & \mathbf{Q} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow (\rho(h) \oplus 1) & \swarrow \tilde{\mathbf{v}}_h & \\ & & & & \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U}) & & \end{array}$$

utilizando la propiedad universal del conúcleo.

Veamos que se verifica  $\tilde{\mathbf{v}}_{hh'} = \tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} \circ \tilde{\mathbf{v}}_{h'} + \tilde{\mathbf{v}}_h + \tilde{\mathbf{v}}_{h'} \quad \forall h, h' \in H$ , sin más que componer a la derecha con  $\tilde{\mathbf{u}}$ , que es sobreyectiva.

Por una parte  $\tilde{\mathbf{v}}_{hh'} \circ \tilde{\mathbf{u}} = (\rho(hh') - 1) \oplus 1$  cono  $\mathbf{u}$ .

Por otra  $(\tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} \circ \tilde{\mathbf{v}}_{h'} + \tilde{\mathbf{v}}_h + \tilde{\mathbf{v}}_{h'}) \circ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} \circ \tilde{\mathbf{v}}_{h'} \circ \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{v}}_{h'} \circ \tilde{\mathbf{u}} = [(\rho(h) - 1) \circ (\rho(h') - 1) + (\rho(h) - 1) + (\rho(h') - 1)]$ , pero esto vale  $(\rho(h)\rho(h') - 1)$  que es igual a lo anterior por ser  $\rho$  automorfismo.

La idea es hacer que  $\alpha$  se "haga" inyectivo sin serlo al principio, añadiendo un objeto nulo en la categoría derivada, en este caso el cono, lo que se hace de manera funtorial.

Ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &: \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U}) \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{Q} \\ \mathbf{v}_h &: \mathbf{Q} \xrightarrow{\tilde{\mathbf{v}}_h} \mathbf{V} \oplus \text{cono}(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathbf{V} \end{aligned}$$

con lo que  $\Omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{F}) := (\mathbf{V}, \mathbf{Q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$  es un objeto de  $\mathcal{C}(K(\mathcal{A}); H)$  (la categoría de complejos de objetos de  $\mathcal{A}$  módulo homotopia), y esta correspondencia se extiende naturalmente a un funtor aditivo

$$\Omega_{\mathcal{A}} : C(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)) \longrightarrow \mathcal{C}(K(\mathcal{A}); H)$$

Proposición IV-B.2 ■ Este functor pasa al cociente módulo homotopía, es decir, induce

$$\Omega_{\mathcal{A}} : K(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}; H)) \longrightarrow \mathfrak{C}(K(\mathcal{A}); H)$$

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} C(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}, H)) & \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{A}}} & \mathfrak{C}(K(\mathcal{A})) \\ & \nearrow & \\ K(\mathfrak{C}_0(\mathcal{A}, H)) & & \end{array}$$

Veamos que si dos objetos son homotópicos entonces sus imágenes también lo son; si  $(f_1, f_2) : (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \alpha, \rho) \longrightarrow (\mathbf{U}', \mathbf{V}', \alpha', \rho')$  es un morfismo en la categoría

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{V} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{V} \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_2 \downarrow \\ \mathbf{U}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathbf{V}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathbf{V}' \end{array}$$

verificando  $f_2^n \circ \alpha^n = \alpha'^n \circ f_1^n$  y  $\rho'^n \circ f_2^n = f_2^n \circ \rho^n$ . Como este morfismo es homotópicamente nulo, sean  $h^n : U^n \longrightarrow U'^{n-1}$  y  $l^n : V^n \longrightarrow V'^{n-1}$  dos operadores de homotopía, verificando

$$d_{U'}^{n-1} h^n + h^{n+1} d_U^n = f_1^n$$

$$d_{V'}^{n-1} l^n + l^{n+1} d_V^n = f_2^n$$

Calculando la imagen de estos objetos por el functor tendríamos que  $\tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{V} \oplus \text{cono } \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{Q}$  viene dado por  $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , mientras que el  $\tilde{\mathbf{v}}_h$  que cumple la condición  $1_{\mathbf{V} \oplus \text{cono } \mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{v}}_h \circ \tilde{\mathbf{u}} = \rho(h) \oplus 1$  cono  $\mathbf{u}$  viene dado por  $\begin{pmatrix} \rho(h) - 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ahora

$$\mathbf{u} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \oplus \text{cono } (\mathbf{U}) \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{v}_h : \mathbf{Q} \xrightarrow{\tilde{\mathbf{v}}_h} \mathbf{V} \oplus \text{cono } (\mathbf{U}) \longrightarrow \mathbf{V}$$



con lo que  $\Omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{F}) := (\mathbf{V}, \mathbf{Q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$

$$V^n \xrightarrow{(1 \ 0)^t} V^n \oplus U^{n+1} \xrightarrow{(\rho(h)-1 \ 0)} V^n$$

Por otra parte, el morfismo  $(f_1, f_2)$  induce un morfismo entre los conos respectivos (en este caso, entre los conos de los opuestos de los morfismos), que coinciden con los conúcleos que estamos calculando; cualquier morfismo de matriz  $\begin{pmatrix} f_2^n & s^{n+1} \\ 0 & f_1^{n+1} \end{pmatrix}$  de tal forma que  $s$  verifique la relación

$$s^{n+2} \circ d_U^{n+1} + d_V^n \circ s^{n+1} = 0 \quad \forall n$$

ya que

$$\begin{pmatrix} f_2^{n+1} & s^{n+2} \\ 0 & f_1^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_V^n & \alpha^{n+1} \\ 0 & -d_A^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^{n+1} d_V^n & f_2^{n+1} \alpha^{n+1} - s^{n+2} d_U^{n+1} \\ 0 & -f_1^{n+2} d_U^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_V^n & \alpha^{n+1} \\ 0 & -d_U^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^n & s^{n+1} \\ 0 & f_1^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_V^n f_2^n & d_V^n s^{n+1} + \alpha^{n+1} f_1^{n+1} \\ 0 & -d_U^{n+1} f_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

Las dos composiciones son iguales, con las condiciones exigidas a  $s$ , así que se define un morfismo entre los conos, digamos  $f_3$ , con lo que tendríamos

$$\begin{array}{ccccc} V^n & \xrightarrow{(1 \ 0)^t} & V^n \oplus U^{n+1} & \xrightarrow{(\rho(h)-1 \ 0)} & V^n \\ [f_2] \downarrow & & [f_3] \downarrow & & [f_2] \downarrow \\ V^n & \xrightarrow{(1 \ 0)^t} & V^n \oplus U^{n+1} & \xrightarrow{(\rho'(h)-1 \ 0)} & V^n \end{array}$$

un morfismo en la categoría  $\mathcal{C}(K(\mathcal{A}); H)$  (de hecho sería un morfismo en  $\mathcal{C}(C(\mathcal{A}); H)$  si  $(\rho'(h) - 1) \circ s$  valiese cero).

Ahora, el operador de homotopía sería  $l^n : V^n \rightarrow V^{n-1}$  para  $[f_2]$  como al principio, y  $l^n \oplus -h^{n+1} : V^n \oplus U^{n+1} \rightarrow V^{n-1} \oplus U^n$ , pues

$$\begin{pmatrix} d_V^{n-1} & \alpha^n \\ 0 & -d_U^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^n & 0 \\ 0 & -h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_V^{n-1} l^n & -\alpha^n h^{n+1} \\ 0 & d_U^n h^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l^{n+1} & 0 \\ 0 & -h^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_V^n & \alpha^{n+1} \\ 0 & -d_A^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^{n+1} d_V^n & l^{n+1} \alpha^{n+1} \\ 0 & h^{n+2} d_U^{n+1} \end{pmatrix}$$

Sumando estas dos expresiones, tendremos

$$\begin{pmatrix} f_2^n & -\alpha'^n h^{n+1} + l^{n+1} \alpha^{n+1} \\ 0 & f_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

con lo que el resultado estará probado si  $-\alpha'^n h^{n+1} + l^{n+1} \alpha^{n+1}$  verifica las condiciones exigidas a  $s^{n+1}$ , pero esta suma es nula por ser morfismo de pares, luego está en las condiciones requeridas.

**Proposición IV-B.3** ■ El funtor construido anteriormente induce un funtor aditivo entre las categorías derivadas, que notaremos también

$$\Omega_{\mathcal{A}} : D(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H)) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}); H)$$

**Demostración.** Para probar este resultado, utilizaremos la propiedad universal de las categorías derivadas, cualquier funtor que transforme casi-isomorfismos en isomorfismos factoriza de manera única a través del paso a la categoría derivada.

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}, H)) & \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{A}}} & \mathcal{C}(K(\mathcal{A})) \\ & & \downarrow \mu \\ D(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}, H)) & \dashrightarrow & \mathcal{C}(D(\mathcal{A})) \end{array}$$

Si  $(f_1, f_2) : (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \alpha, \rho) \longrightarrow (\mathbf{U}', \mathbf{V}', \alpha', \rho')$  es un morfismo en la categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}, H))$  que induce isomorfismo en homología, podemos considerar los triángulos distinguidos asociados a las sucesiones exactas que construimos tendremos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ \downarrow [f_1] & & \downarrow [f_2] & & \\ \mathbf{U}' & \longrightarrow & \mathbf{V}' & \longrightarrow & \mathbf{Q}' \end{array}$$

aplicando el axioma (TR 3) de las categorías trianguladas, existe un  $[f_3] : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}'$  que completa un morfismo de triángulos. Este morfismo induce isomorfismo en homología aplicando el lema de los cinco a las sucesiones exactas largas de homología, de donde el resultado.

**Nota IV-B.4** ■ Obsérvese que si  $\mathbf{F} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \alpha, \rho) \in D(\mathcal{C}_0(\mathcal{A}; H))$  y  $\Omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{F}) = (\mathbf{V}, \mathbf{Q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ , se tiene un triángulo funtorial con respecto a  $\mathbf{F}$  en la categoría  $D(\mathcal{A})$ , utilizando II-B.6

$$\mathbf{U} \xrightarrow{[\alpha]} \mathbf{V} \xrightarrow{[\mathbf{u}]} \mathbf{Q} \xrightarrow{+1}$$

**Definición IV-B.5** ■ Cuando el grupo  $H$  sea el grupo trivial, podemos definir otro funtor  $\Omega_0$  de manera más sencilla, así  $\Omega_0(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \alpha) := (\mathbf{V}, \mathbf{Q}, \mathbf{u})$  donde  $\mathbf{Q}$  es el cono de  $-\alpha$ , y  $\mathbf{u}$  la inclusión de  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{Q}$ .

**Proposición IV-B.6** ■ Cuando el grupo  $H$  sea el trivial, los funtores  $\Omega_{\mathcal{A}}$  y  $\Omega_0$  son equivalentes.

**Demostración.** El conúcleo que calculamos para construir  $\Omega_{\mathcal{A}}$  es, aplicando IV-B.8 precisamente el cono de  $-\alpha$  el el paso al conúcleo la inclusión. Cuando el grupo  $H$  sea el grupo trivial, no tiene sentido definir las  $\mathbf{v}_h$  (variaciones), que es para lo que nos hacía falta aplicar la propiedad universal del conúcleo.

**Nota IV-B.7** ■ Como ya dijimos al principio, utilizaremos ambos funtores indistintamente, pues la acción de  $H$  podrá ser recuperada en los casos que vamos a tratar.

**Proposición IV-B.8** ■ Sea  $\alpha : A^* \rightarrow B^*$  un morfismo de complejos y  $\tilde{\alpha} : A^* \rightarrow B^* \oplus \text{cono}(A^*)$  el monomorfismo inducido por  $\alpha$  y la inclusión  $A^* \hookrightarrow \text{cono}(A^*)$ . Entonces el conúcleo de  $\tilde{\alpha}$  es el cono de  $-\alpha$ .

Demostración.

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow A^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & B^n \oplus A^n \oplus A^{n+1} \\
 & \downarrow d_A^n & \downarrow d_B^n \oplus \begin{pmatrix} d_A^n & 1 \\ 0 & -d_A^{n+1} \end{pmatrix} \\
 0 \longrightarrow A^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & B^{n+1} \oplus A^{n+1} \oplus A^{n+2}
 \end{array}$$

El conúcleo en el nivel  $n$  es  $B^n \oplus A^{n+1}$ , siendo la aplicación de paso al conúcleo  $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & B^n \oplus A^n \oplus A^{n+1} & \longrightarrow & B^n \oplus A^{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow d_B^n \oplus \begin{pmatrix} d_A^n & 1 \\ 0 & -d_A^{n+1} \end{pmatrix} & & \\
 0 & \longrightarrow & A^{n+1} & \longrightarrow & B^{n+1} \oplus A^{n+1} \oplus A^{n+2} & \longrightarrow & B^{n+1} \oplus A^{n+2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (b^n, 0, a^{n+1}) & \longrightarrow & (b^n, a^{n+1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} d_B^n & -\alpha^{n+1} \\ 0 & -d_A^{n+1} \end{pmatrix} \\
 (d_B^n(b^n), a^n, -d_A^{n+1}) & \longrightarrow & (d_B^n(b^n), -\alpha^{n+1}(a^{n+1}), -d_A^{n+1}(a^{n+1}))
 \end{array}$$

■ El funtor  $\mathbb{R}\psi$

Recordemos que habíamos considerado unas subcategorías abelianas  $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{B}_* = M(*, \mathcal{O})$  y unos funtores que estaban definidos entre ellas. Para construir este funtor  $\mathbb{R}\psi$  nos harán falta:

1. un funtor  $\mathbb{F} : \mathcal{B}_U \longrightarrow \mathcal{B}_U$  exacto y una transformación natural  $\alpha : 1 \hookrightarrow \mathbb{F}$ , con  $\alpha$  inyectiva.
2. que  $(\mathbb{R}^i j_*)(\mathbb{F}(A)) = 0$  para  $i > 0, A \in \mathcal{A}_U$ .

3. para  $H$  grupo una acción de  $H$  sobre el grupo de los automorfismos de  $\mathbb{F}$ , es decir  $h \mapsto T_h \in \text{Aut}(\mathbb{F})$  tales que  $T_h \circ \alpha = \alpha$ .

En el caso de los haces perversos como en III-A.1 podemos, por ejemplo:

- a) Considerar  $\mathbb{F} = p_*p^*$  como la composición de los funtores imagen directa e imagen inversa por el revestimiento universal  $p : \tilde{U} \rightarrow U$ .
- b) Considerar  $\mathbb{F} = \Delta_*\Delta^*$  como la composición de la imagen directa e imagen inversa por el morfismo  $\Delta : U_{dis} \rightarrow U$ , que es la identidad de  $U$  con la topología discreta en  $U$  (en este caso lo que se obtiene es la resolución de Godement del haz) [God58].

---

**Definición IV-B.9** ■ Definimos  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{A}, H)$  [NM94] como  $\psi(K) := (K, j_*\mathbb{F}j^*K, adj_{\mathbb{F}}, \rho)$ , donde  $adj_{\mathbb{F}}$  es la adjunción,  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}j_*\mathbb{F}j^*K$  la acción inducida por la de  $H$  en  $\text{Aut}(\mathbb{F})$ , y sea  $\mathbb{R}\psi$  su derivado a la derecha.

---



---

**Definición IV-B.10** ■ La composición del funtor  $\Omega$  con el  $\mathbb{R}\psi$  nos da un funtor, que notaremos  $\Psi_{\mathbb{F}} : D_X \rightarrow \mathcal{C}(D_X)$ , y cuya restricción a la categoría de los haces perversos resultará ser una equivalencia de categorías.

---



---

**Nota IV-B.11** ■ Se tiene una equivalencia  $s \circ \Psi_{\mathbb{F}} \simeq \mathbb{R}j_* \circ \mathbb{F} \circ j^*$ , y además un triángulo funtorial  $1 \rightarrow s \circ \Psi_{\mathbb{F}} \rightarrow e \circ \Psi_{\mathbb{F}}$ .

---



---

**Teorema IV-B.12** ■ (de relación entre diferentes tipos de perversidad)(cf. [NM94] 2.3.3)

Sea  $\mathcal{K} \in D(\mathcal{A})$  y  $\Psi : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$  como antes. Son equivalentes:

$$\mathcal{K} \mapsto (\mathcal{E}, \mathcal{F}, u, v_h)$$

- 1.-  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^{(d)}(X)$ .

2.-  $\mathcal{E} \in \text{Perv}^{(0)}$  y  $\mathcal{F} \in \text{Perv}^{(d-1)}(X)$ .

**Demostración.**

Consideremos el triángulo funtorial

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

inducido por la sucesión corta  $0 \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V} \oplus \mathbf{Q} \rightarrow 0$ , su sucesión exacta larga de cohomología asociada es

$$\rightarrow h^{i-1}(\mathcal{F}) \rightarrow h^i(\mathcal{K}) \rightarrow h^i(\mathcal{E}) \rightarrow h^i(\mathcal{F}) \rightarrow h^{i+1}(\mathcal{K}) \rightarrow$$

$\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}j_* \mathbb{F}j^* \mathcal{K} \equiv j_* \mathbb{F}j^* h^0(\mathcal{K})$ ; como  $h^i(\mathcal{E}) = 0$  para todo  $i \neq 0 \iff h^i(\mathcal{F}) \simeq h^{i+1}(\mathcal{K})$  si  $i \neq 0$ , entonces, en principio  $\mathcal{F}$  estaría concentrado en grados  $[-1, d-1]$ . Si  $i = -1$  tenemos  $h^{-1}(\mathcal{F}) \rightarrow h^0(\mathcal{K}) \rightarrow h^0(\mathcal{E})$ , luego  $h^{-1}(\mathcal{F}) = 0$  ( $h^0(\mathcal{K})$  se inyecta en  $j_* j^* h^0(\mathcal{K})$  porque  $\mathcal{K}$  no tiene secciones en el cerrado; a su vez  $j_* j^* h^0(\mathcal{K})$  lo hace en  $h^0(\mathcal{E})$ , por inyectividad de la transformación  $\alpha$ ), luego  $\mathcal{F}$  está concentrado en grados  $[0, d-1]$ . Por otra parte  $j^*(\mathcal{F})$  está concentrado en grado 0 por estarlo tanto  $j^*(\mathcal{K})$  como  $j^*(\mathcal{E})$ . Finalmente, aplicando el funtor  $i^!$  al triángulo tendríamos

$$i^! \mathcal{K} \rightarrow i^! \mathcal{E} (= 0) \rightarrow i^! \mathcal{F} \rightarrow$$

luego  $h^n i^! \mathcal{K} \simeq h^{n-1} i^! \mathcal{F}$ , con lo que  $h^i(i^! \mathcal{F}) = 0$  si  $i < d-1$ , lo que hace que  $\mathcal{F} \in \text{Perv}^{(d-1)}$ .

**Nota IV-B.13** ■ Se tiene, pues, que al aplicar nuestro funtor a un haz  $d$ -perverso obtenemos unos datos que son, un haz 0-perverso y uno  $d-1$ -perverso, lo que simplifica la situación.

**Nota IV-B.14** ■ Si  $\mathcal{L}$  es un haz sobre  $U$ , entonces  $j_* \mathbb{F}\mathcal{L} = \mathbb{R}j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \in \text{Perv}^d(X)$  para todo  $d \geq 0$ ,

## IV-C CONSTRUCCIÓN DE CATEGORÍAS ABELIANAS

Vamos a considerar un funtor conúcleo, notado  $\mathbb{Q}$ , que completa la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

este funtor verifica la siguiente propiedad:

**Proposición IV-C.1** ■ Sean  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{Q}$  funtores definidos como al principio. Entonces  $\mathbb{F}$  es exacto si y sólo si  $\mathbb{Q}$  lo es.

**Demostración.** Consideremos una sucesión exacta de objetos

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \xrightarrow{u} \mathcal{L} \xrightarrow{v} \mathcal{L}'' \longrightarrow 0$$

y el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}' & \xrightarrow{u} & \mathcal{L} & \xrightarrow{v} & \mathcal{L}'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{\mathcal{L}'} & & \downarrow \alpha_{\mathcal{L}} & & \downarrow \alpha_{\mathcal{L}''} \\
 & & \mathbb{F}\mathcal{L}' & \xrightarrow{\mathbb{F}u} & \mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{\mathbb{F}v} & \mathbb{F}\mathcal{L}'' \\
 & & \downarrow q_{\mathcal{L}'} & & \downarrow q_{\mathcal{L}} & & \downarrow q_{\mathcal{L}''} \\
 & & \mathbb{Q}\mathcal{L}' & \xrightarrow{\mathbb{Q}u} & \mathbb{Q}\mathcal{L} & \xrightarrow{\mathbb{Q}v} & \mathbb{Q}\mathcal{L}'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Veamos que la segunda fila es exacta si y sólo si la tercera lo es:  
 $\implies$ )

- $\mathbb{Q}u$  inyectivo.

Sea  $x \in \mathbb{Q}\mathcal{L}'$  tal que  $\mathbb{Q}u(x) = 0$ , por ser  $q_{\mathcal{L}'}$  sobreyectivo tenemos que existirá un  $y \in \mathbb{F}\mathcal{L}'$  verificando  $q_{\mathcal{L}'}(y) = x$ ; así  $0 = \mathbb{Q}uq_{\mathcal{L}'}(y) = q_{\mathcal{L}}\mathbb{F}u(y)$ , con lo que  $\mathbb{F}u(y) \in \text{Im } \alpha_{\mathcal{L}}$ , por tanto hay un  $z \in \mathcal{L}$  con  $\alpha_{\mathcal{L}}(z) = \mathbb{F}u(y)$ .

Ahora  $\alpha_{L'}v(z) = \mathbb{F}v\alpha_L(z) = 0$  lo que, por inyectividad de  $\alpha_{L'}$  implica que  $v(z) = 0$  y existirá un único  $w \in L'$  tal que  $u(w) = z$ .  $\mathbb{F}u\alpha_{L'}(w) = \alpha_L u(w) = \mathbb{F}u(y)$  que, por inyectividad de  $\mathbb{F}u$ , implica  $y = \alpha_{L'}(w) \in \text{Im}\alpha_{L'}$ , con lo que su imagen por  $q_{L'}$  (que vale  $x$ ) es cero.

- $\mathbb{Q}v$  sobreyectivo.

Sea  $x \in \mathbb{Q}L''$ , la sobreyectividad de  $q_{L''}$  nos asegura la existencia de un  $y \in \mathbb{F}L''$  con  $q_{L''}(y) = x$ .

$\mathbb{F}v$  también es sobreyectivo, luego existe un  $z \in \mathbb{F}L$  verificando  $\mathbb{F}v(z) = y$ ; ahora  $x = q_{L''}\mathbb{F}v(z) = \mathbb{Q}vq_L(z)$ , de donde la sobreyectividad de  $\mathbb{Q}v$ .

- $\text{Ker } \mathbb{Q}v = \text{Im } \mathbb{Q}u$

$\mathbb{Q}v \circ \mathbb{Q}u = \mathbb{Q}0 = 0$ , luego bastaría ver la otra contención: sea  $x \in \text{Ker } \mathbb{Q}v$ , la sobreyectividad de  $q_L$  asegura la existencia de  $y \in \mathbb{F}L$  con  $q_L(y) = x$ .

$0 = \mathbb{Q}vq_L(y) = q_{L'}\mathbb{F}v(y)$  luego  $\mathbb{F}v(y) \in \text{Im}\alpha_{L'}$ , con lo que existirá un único  $z \in L'$  tal que  $\alpha_{L'}(z) = \mathbb{F}v(y)$ . Ahora la sobreyectividad de  $v$  asegura la existencia de un  $w \in L$  tal que  $v(w) = z$ .

$\mathbb{F}v(y) = \alpha_{L'}v(w) = \mathbb{F}v\alpha_L(w)$  luego  $y - \alpha_L(w) \in \text{Ker } \mathbb{F}v = \text{Im } \mathbb{F}u$ , con lo que existe un  $t \in \mathbb{F}L'$  con  $\mathbb{F}u(t) = y - \alpha_L(w)$ .

Ahora  $\mathbb{Q}uq_{L'}(t) = q_L\mathbb{F}u(t) = q_L(y - \alpha_L(w)) = q_L(y) = x$ , luego pertenece a la imagen de  $\mathbb{Q}u$ .

$\iff$ )

- $\mathbb{F}u$  inyectivo.

Sea  $x \in \mathbb{F}L$  tal que  $\mathbb{F}u(x) = 0$ ,  $\mathbb{Q}uq_{L'}(x) = q_L\mathbb{F}u(x) = 0$ ; la inyectividad de  $\mathbb{Q}u$  implica que  $q_{L'}(x) = 0$ , luego  $x \in \text{Im}\alpha_{L'}$ ; por tanto existirá un único  $y \in L'$  tal que  $\alpha_{L'}(y) = x$ .

Ahora  $0 = \mathbb{F}u\alpha_{L'}(y) = \alpha_{L''}u(y)$  con  $\alpha_{L''}$  y  $u$  inyectivas, luego  $y = 0$  y, por tanto  $x$ .

- $\mathbb{Q}v$  sobreyectivo.



Sea  $x \in \mathbb{F}\mathcal{L}'$ , por ser  $\mathbb{Q}\nu$  sobreyectivo, existe  $y \in \mathbb{Q}\mathcal{L}$  tal que  $\mathbb{Q}\nu(y) = q_{\mathcal{L}'}(x)$ .

Sea  $z \in \mathbb{F}\mathcal{L}$  tal que  $q_{\mathcal{L}}(z) = y$ , tenemos  $q_{\mathcal{L}'}(x) = \mathbb{Q}\nu q_{\mathcal{L}}(z) = q_{\mathcal{L}'}\mathbb{F}\nu(z)$  con lo que  $x - \mathbb{F}\nu(z) \in \text{Ker } q_{\mathcal{L}'} = \text{Im } \alpha_{\mathcal{L}'}$ , luego existirá  $w \in \mathcal{L}'$  con  $\alpha_{\mathcal{L}'}(w) = x - \mathbb{F}\nu(z)$ .

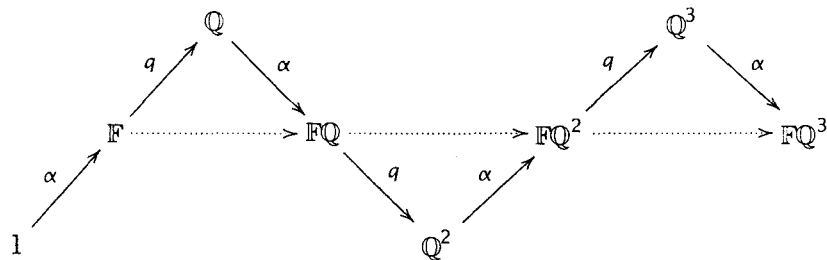
Como  $\nu$  es sobreyectivo, existe  $t \in \mathcal{L}$  con  $\nu(t) = w$  con lo que  $x - \mathbb{F}\nu(z) = \mathbb{F}\nu \alpha_{\mathcal{L}}(t) = \mathbb{F}\nu(z + \alpha_{\mathcal{L}}(t))$  y  $\mathbb{F}\nu$  sobreyectivo.

- $\text{Ker } \mathbb{F}\nu = \text{Im } \mathbb{F}u$ .

$\mathbb{F}\nu \circ \mathbb{F}u = 0$  como antes, luego basta ver la otra inclusión. Sea  $x \in \text{Ker } \mathbb{F}\nu$ ,  $\mathbb{Q}\nu q_{\mathcal{L}}(x) = 0$ , luego  $q_{\mathcal{L}}(x) \in \text{Im } \mathbb{Q}u$ , con lo que existirá un  $y \in \mathbb{Q}\mathcal{L}'$  tal que  $\mathbb{Q}u(y) = q_{\mathcal{L}}(x)$ . Como  $q_{\mathcal{L}}$  es sobreyectivo, habrá un  $z \in \mathbb{F}\mathcal{L}'$  con  $q_{\mathcal{L}}(z) = y$ . Ahora  $q_{\mathcal{L}}\mathbb{F}u(z) = \mathbb{Q}y q_{\mathcal{L}}(z) = q_{\mathcal{L}}(x)$ , con lo que  $\mathbb{F}u(z) - x \in \text{Ker } q_{\mathcal{L}} = \text{Im } \alpha_{\mathcal{L}}$ .

Existe pues un  $w \in \mathcal{L}$  cuya imagen por  $\alpha_{\mathcal{L}}$  es  $\mathbb{F}u(z) - x$ , pero  $0 = \mathbb{F}\nu \alpha_{\mathcal{L}}(w) = \alpha_{\mathcal{L}'} \nu(w)$ , lo que implica que  $\nu(w) = 0$  y que existe  $t \in \mathcal{L}$  tal que  $u(t) = w$ . Por tanto,  $\mathbb{F}u \alpha_{\mathcal{L}}(t) = \alpha_{\mathcal{L}'} u(t) = \mathbb{F}u(z) - x$  y  $x = \mathbb{F}u(\alpha_{\mathcal{L}}(t) - z) \in \text{Im } \mathbb{F}u$ .

**Definición IV-C.2** ■ Estos funtores así definidos nos permiten construir resoluciones que llamaremos de tipo Godement, siguiendo el siguiente esquema



donde los morfismos  $g_{\mathcal{Q}^i} : \mathbb{F}\mathcal{Q}^i \rightarrow \mathbb{F}\mathcal{Q}^{i+1}$  para  $i \geq 0$ , están definidos como la composición de  $\mathbb{F}\mathcal{Q}^i \xrightarrow{q_{\mathcal{Q}^i}} \mathcal{Q}^{i+1} \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{Q}^{i+1}}} \mathbb{F}\mathcal{Q}^{i+1}$ , el paso al conúcleo y la transformación natural  $\alpha$ , obteniendo así resoluciones de longitud

arbitraria

$$1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F} \xrightarrow{g} \mathbb{F}Q \xrightarrow{g_Q} \dots \xrightarrow{g_{Q^{i-1}}} \mathbb{F}Q^i \xrightarrow{g_{Q^i}} \mathbb{F}Q^{i+1} \longrightarrow$$

**Definición IV-C.3** ■ Definimos la categoría  $\mathcal{B}^d$  como aquella cuyos objetos son cuaternas de la forma  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$ , donde  $\mathcal{L}$  es un haz sobre  $U$ ,  $\mathcal{F}$  es un haz sobre  $X$ ,  $u : j_*\mathbb{F}Q^{d-1}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$  es tal que  $u \circ j_*g_{Q^{d-2}} = 0$  y  $\sigma : \mathbb{Q}^d\mathcal{L} \simeq j^*\mathcal{F}$ , haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}Q^{d-1}\mathcal{L} & \xrightarrow{j^*u} & j^*\mathcal{F} \\ q_{Q^{d-1}} \searrow & \# & \nearrow \sigma \\ & \mathbb{Q}^d\mathcal{L} & \end{array}$$

Los morfismos de objetos  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma')$  de esta categoría son pares  $(f_1, f_2)$  donde  $f_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  y  $f_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  haciendo conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} j_*\mathbb{F}Q^{d-1}\mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{F} & & \mathbb{Q}^d\mathcal{L} \xrightarrow{\sigma} j^*\mathcal{F} \\ j_*\mathbb{F}Q^{d-1}f_1 \downarrow & & \mathbb{Q}^df_1 \downarrow \\ j_*\mathbb{F}Q^{d-1}\mathcal{L}' \xrightarrow{u'} \mathcal{F}' & & \mathbb{Q}^d\mathcal{L}' \xrightarrow{\sigma'} j^*\mathcal{F}' \end{array}$$

**Nota IV-C.4** ■ La construcción de esta categoría, que resultará ser equivalente a la de los haces  $d$ -perversos, es un caso particular de construcción de categorías abelianas (cf. [MV86] 1. p. 405), siguiendo el esquema

$$\begin{array}{ccc} j_*\mathbb{F}Q^{d-1} & \xrightarrow{j_*q_{Q^{d-1}}} & \mathbb{Q}^d \\ & \searrow u & \nearrow \sigma^{-1}j^* \\ & Id & \end{array}$$

donde es necesario únicamente que  $j_*\mathbb{F}Q^{d-1} : \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{A}_X$  exacto a la izquierda, y  $\mathbb{Q}^d : \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{A}_X$  exacto a la derecha.

Proposición IV-C.5 ■  $\mathcal{B}^d$  es una categoría abeliana.

**Demostración.**

•  $\mathcal{B}^d$  aditiva .

Para ello debemos probar que  $\text{Hom}_{\mathcal{B}^d}$  es grupo abeliano, la bilinealidad de la composición de morfismos, la existencia de elemento nulo y la de la suma directa de objetos;

- $\text{Hom}_{\mathcal{B}^d}((\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma), (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma'))$  tiene estructura de grupo abeliano, sin más que definir la suma componente a componente y tener en cuenta que la categoría de los haces es aditiva,  $(f_1, f_2) + (g_1, g_2) := (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$ .
- La composición de morfismos viene dada por el siguiente diagrama, si  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{B}, u, \sigma) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{B}', u', \sigma')$  es un morfismo y  $(g_1, g_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma') \rightarrow (\mathcal{L}'', \mathcal{F}'', u'', \sigma'')$  otro tendríamos

$$\begin{array}{ccc}
 j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \xrightarrow{u} & \mathcal{F} & \\
 j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
 j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}' \xrightarrow{u'} & \mathcal{F}' & \\
 j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}'' \xrightarrow{u''} & \mathcal{F}'' & 
 \end{array}$$

la composición sería  $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \rightarrow (\mathcal{L}'', \mathcal{F}'', u'', \sigma'')$ , que es un morfismo en la categoría  $\mathcal{B}^d$  ya que  $u'' \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} g_1 \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} f_1 = g_2 \circ u' \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} f_1 = g_2 \circ f_2 \circ u$ . Ahora, como la composición se hace componente a componente y la categoría de los haces es aditiva, se tiene la bilinealidad de la composición de morfismos.

- Como la categoría de los haces es aditiva, la cuaterna  $(0_U, 0_X, u, \sigma)$ , donde  $0_U$  (resp.  $0_X$ ) es el objeto nulo en la categoría de los haces sobre  $U$  (resp.  $X$ ) y  $u$  el único morfismo entre  $j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} 0_U$  y  $0_X$ , es el objeto nulo de la categoría  $\mathcal{B}^d$ .

- Suma directa de objetos. Sean  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma), (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma')$  dos objetos de  $\mathcal{B}^d$  y veamos que existe su suma directa; la aditividad de la categoría de los haces garantiza la existencia de  $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$  y de  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ , con sus correspondientes  $i_{\mathcal{L}}, j_{\mathcal{L}}, i_{\mathcal{F}}, j_{\mathcal{F}}$ , en tal caso, la sucesión  $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow 0$  es exacta, si aplicamos el funtor (exacto)  $j_* \mathbb{FQ}^{d-1}$  tendremos que la suma directa de  $j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}$  y  $j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}'$  sería  $j_* \mathbb{FQ}^{d-1} (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}')$ .

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 & \searrow^{i_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}}} & \downarrow i_{\mathcal{F}} \\
 & & j_* \mathbb{FQ}^{d-1} (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \cdots \cdots \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' \\
 & \nearrow_{j_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}'}} & \uparrow j_{\mathcal{F}'} \\
 j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{F}'
 \end{array}$$

por la propiedad universal de la suma directa existe un único  $w : j_* \mathbb{FQ}^{d-1} (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ , que hace conmutativo el diagrama; por otra parte, comparando las sucesiones exactas

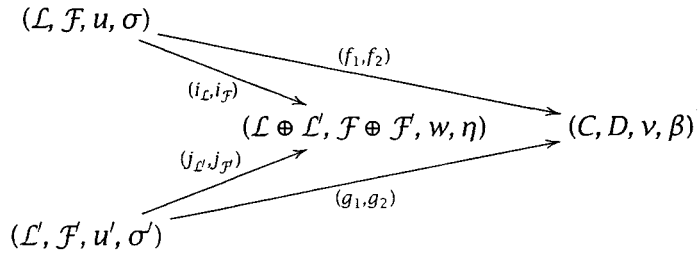
$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{FQ}^d \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{FQ}^d (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') & \longrightarrow & \mathbb{FQ}^d \mathcal{L}' \longrightarrow 0 \\
 & & \sigma \downarrow & & \downarrow & & \sigma' \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & j^* \mathcal{F} & \longrightarrow & j^* (\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') & \longrightarrow & j^* \mathcal{F}' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

que lo son por ser el resultado de aplicar funtores exactos a sucesiones exactas, y aplicando el lema de los cinco se obtiene un isomorfismo  $\eta : \mathbb{Q}^d (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \simeq j^* (\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$ .

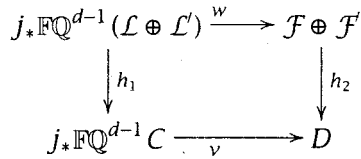
Así, tenemos definido un objeto de  $\mathcal{B}^d$   $(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}', \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}', w, \eta)$ , y unos morfismos  $(i_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}}, i_{\mathcal{F}}), (j_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}'}, j_{\mathcal{F}'})$  con  $w \circ i_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}} = i_{\mathcal{F}} \circ u$  y  $w \circ j_{j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}'} = j_{\mathcal{F}'} \circ u'$ , que probaremos verifican la propiedad universal de la suma directa.

Sean  $(C, D, v, \beta)$  otro objeto de  $\mathcal{B}^d$  y  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \rightarrow (C, D, v, \beta), (g_1, g_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma') \rightarrow (C, D, v, \beta)$  dos morfismos

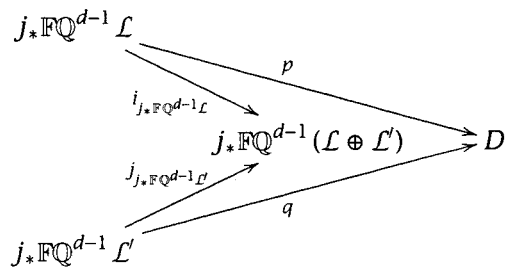
de objetos, se tiene



La propiedad universal de la suma directa nos garantiza la existencia de  $h_1 : \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \rightarrow C$  y  $h_2 : \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' \rightarrow D$  únicos verificando  $h_1 \circ i_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}} = f_1$ ,  $h_1 \circ j_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}'} = g_1$ ,  $h_2 \circ i_{\mathcal{F}} = f_2$  y  $h_2 \circ j_{\mathcal{F}'} = g_2$ ; sólo queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo, es decir, que hace conmutativo el diagrama



como  $(f_1, f_2)$  es un morfismo de flechas, se tiene que  $f_2 \circ u = v \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} f_1$ , luego  $h_2 \circ i_{\mathcal{F}} \circ u = v \circ h_1 \circ i_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}}$  y, por tanto,  $h_2 \circ w \circ i_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}} = v \circ h_1 \circ i_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}} := p$ , y de manera análoga se deduce  $h_2 \circ w \circ j_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}'} = v \circ h_1 \circ j_{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L}'} := q$ , ahora si consideramos



y tanto  $h_2 \circ w$  como  $v \circ h_1$  completan el diagrama a uno conmutativo, luego deben ser iguales por la propiedad universal de la suma directa de objetos.

- $\mathcal{B}^d$  abeliana.

Para ello debemos probar la existencia de núcleo y conúcleo de cada morfismo y el teorema de isomorfía:

- Sea  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma')$  un morfismo, podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1} & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L} & \xrightarrow{j_*\mathbb{FQ}^{d-1} f_1} & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}' & \xrightarrow{j_*\mathbb{FQ}^{d-1} p_1} & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Coker } f_1 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \\
 \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{F} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{F}' & \xrightarrow{p_2} & \text{Coker } f_2
 \end{array}$$

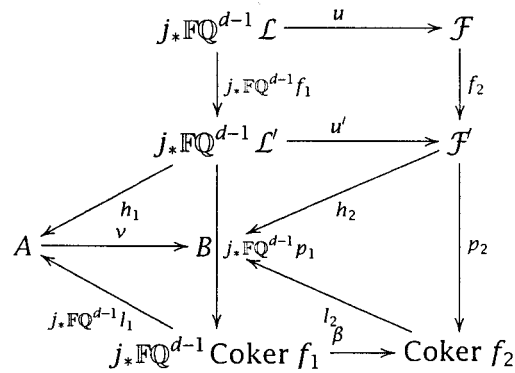
para definir el núcleo consideramos  $u_1 : j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  de la siguiente manera; sea  $u \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1 : j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Ker } f_1 \rightarrow \mathcal{F}$ , la composición de este morfismo con  $f_2$  es nula, pues  $f_2 \circ u \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1 = u' \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} f_1 \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1 = u' \circ 0$ , luego este morfismo factoriza a través del núcleo de  $f_2$ , es decir, existe  $\alpha : j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  tal que  $i_2 \circ \alpha = u \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1$ ; luego el candidato a núcleo sería  $((\text{Ker } f_1, \text{Ker } f_2, \alpha, \sigma_{|\mathbb{Q}^d \text{Ker } f_1}), (i_1, i_2))$ , la composición con  $f$  es nula, falta ver la propiedad universal; sea  $(g_1, g_2) : (A, B, v, \eta) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$  tal que  $f_i \circ g_i = 0$ , la propiedad universal del núcleo garantiza la existencia de  $(h_1, h_2)$  verificando que  $i \circ h = g$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ker } f_2 \\
 & \nearrow h_1 & \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow i_2 \\
 j_*\mathbb{FQ}^{d-1} A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{j_*\mathbb{FQ}^{d-1} i_1} & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}' \\
 & \searrow g_1 & \downarrow & \searrow g_2 & \downarrow u' \\
 & & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 & & \downarrow j_*\mathbb{FQ}^{d-1} f_1 & & \downarrow f_2 \\
 & & j_*\mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{F}'
 \end{array}$$

queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $\alpha \circ h_1 = h_2 \circ v$ ; sabemos  $g_2 \circ v = u \circ j_*\mathbb{FQ}^{d-1} g_1$ , lo que implica

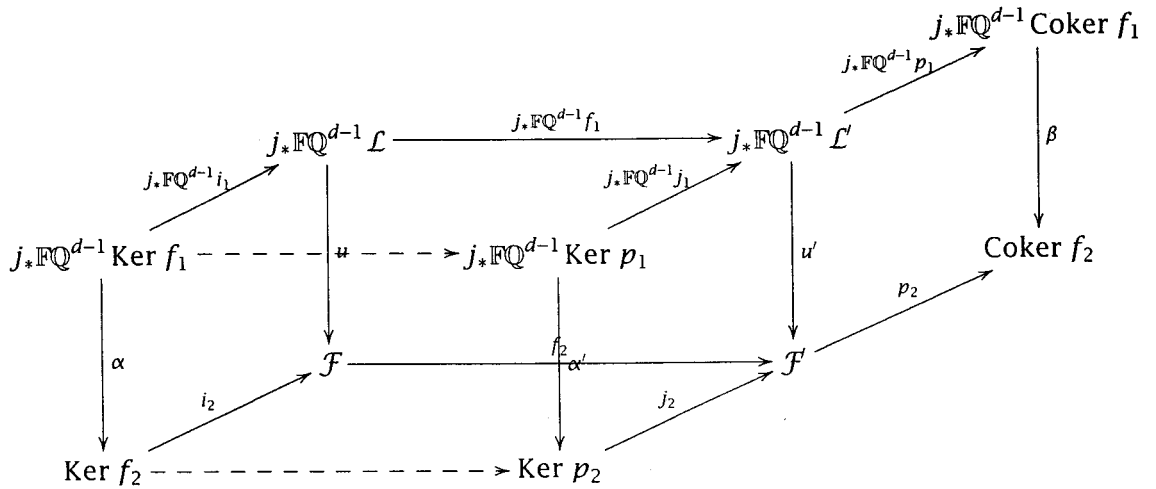
$i_2 \circ h_2 \circ v = u \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} i_1 \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} h_1 = i_2 \circ \alpha \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} h_1$ , lo que unido a que  $i_2$  es monomorfismo nos da  $h_2 \circ v = \alpha \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} h_1$ .

Para el conúcleo, sea  $\beta : j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$  definido de la siguiente manera; sea  $p_2 \circ u' : j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \mathcal{L}' \rightarrow \text{Coker } f_2$ , la composición de este morfismo con  $f_1$  es nula, pues  $p_2 \circ u' \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} f_1 p_2 \circ f_2 \circ u = 0 \circ u$ , luego por la propiedad universal del conúcleo, este morfismo factoriza a través del  $j_* \mathbb{FQ}^{d-1} \text{Coker } f_1$ , es decir existe  $\eta$  tal que  $p_2 \circ u' = \eta \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} p_1$ , luego el candidato será  $((\text{Coker } f_1, \text{Coker } f_2, \eta, \sigma'_{|\mathbb{Q}^d \mathcal{L}'}) , (p_1, p_2))$ , la composición con  $f$  es nula, veamos que verifica la propiedad universal, sea  $(h_1, h_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma') \rightarrow (A, B, v, \nu)$  con  $h \circ f = 0$ , la propiedad universal del conúcleo garantiza la existencia de  $(l_1, l_2)$  tales que  $h = l \circ p$



queda ver que  $(l_1, l_2)$  es un morfismo, es decir que  $l_2 \circ \beta = v \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} l_1$ ; sabemos  $v \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} h_1 = h_2 \circ u'$ , lo que implica  $v \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} l_1 \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} p_1 = l_2 \circ p_2 \circ u' = l_2 \circ \beta \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} p_1$ , lo que unido a que  $p_2$  es epimorfismo nos da  $l_2 \circ \beta = v \circ j_* \mathbb{FQ}^{d-1} l_1$ .

- Teorema de isomorfía. Sea  $f : (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{F}', u', \sigma')$  un morfismo y consideremos el diagrama



Las flechas discontinuas resultan ser isomorfismos porque el teorema de isomorfía se verifica en la categoría de los haces.

**Definición IV-C.6** ■ Definimos la categoría  $\mathcal{B}^d$  como aquella cuyos objetos son cuaternas de la forma  $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau)$ , donde  $\mathcal{L} \in \mathcal{A}_U$ ,  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^{d-1}$ ,  $u : j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  y  $\tau : \mathbb{Q}\mathcal{L} \simeq j^* \mathcal{K}$ , haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{j^* u} & j^* \mathcal{K} \\
 q_{\mathcal{L}} \searrow & \# & \nearrow \sigma \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{L} &
 \end{array}$$

Los morfismos de objetos  $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau')$  de esta categoría son pares  $(f_1, f_2)$  donde  $f_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  y  $f_2 : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  haciendo conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 j_* \mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{K} \\
 j_* \mathbb{F}f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
 j_* \mathbb{F}\mathcal{L}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{K}'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}\mathcal{L} & \xrightarrow{\tau} & j^* \mathcal{K} \\
 q_{\mathcal{L}} \downarrow & & \downarrow j^* f_2 \\
 \mathbb{Q}\mathcal{L}' & \xrightarrow{\tau'} & j^* \mathcal{K}'
 \end{array}$$



**Nota IV-C.7** ■ En principio el  $u : j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$  que aparece en la definición anterior es un morfismo en la categoría derivada; pero tiene la particularidad de que va de un complejo nulo salvo en grado 0, el  $j_*\mathbb{F}\mathcal{L}$ , en un objeto concentrado en grado mayor o igual que 0 como es un el haz  $d-1$  perverso  $\mathcal{K}$ . En esta situación, podemos considerarlo como un verdadero morfismo de complejos en lugar de como una clase de diagramas en la categoría derivada.

Consideremos  $u \in \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(j_*\mathbb{F}\mathcal{L}, \mathcal{K})$ , pero para todo  $T \in D^{\leq 0}$  (y  $j_*\mathbb{F}\mathcal{L}$  lo está) se tiene que  $\text{Hom}(T, X) \simeq \text{Hom}(T, \tau_{\leq 0}X)$  ([BBD83]), luego tenemos que  $u \in \text{Hom}(j_*\mathbb{F}\mathcal{L}, \tau_{\leq 0}\mathcal{K})$ . Es más, como está concentrado únicamente en grado 0, este morfismo se puede visualizar como un morfismo (en la categoría  $\mathcal{A}$ ) de  $h^0(j_*\mathbb{F}\mathcal{L})$  en  $h^0(\mathcal{F})$  (cf. [BBD83] 1.3.6. caso 1: para  $U \in D^{\leq 0}$  y  $V \in D^{\geq 0}$ , se tiene  $h^0(U) = \tau_{\geq 0}U$ ,  $h^0(V) = \tau_{\leq 0}V$  y  $\text{Hom}(h^0(U), h^0(V)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(U, h^0(V)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(U, V)$ , con lo que  $h^0(u) : h^0(j_*\mathbb{F}\mathcal{L}) \rightarrow h^0(\mathcal{K})$  y  $h^0(\mathcal{K})$  se inyecta en  $\tau_{\geq 0}\mathcal{K}$ )

**Proposición IV-C.8** ■ Si  $\text{Perv}^{d-1}$  es una categoría abeliana, entonces  $'\mathcal{B}^d$  es una categoría abeliana.

**Demostración.**

•  $'\mathcal{B}^d$  aditiva .

Para ello debemos probar que  $\text{Hom}_{'\mathcal{B}^d}$  es grupo abeliano, la bilinealidad de la composición de morfismos, la existencia de elemento nulo y la de la suma directa de objetos;

- $\text{Hom}_{'\mathcal{B}^d}((\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau), (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau'))$  es grupo abeliano, sin más que definir la suma  $(f_1, f_2) + (g_1, g_2) := (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$ .
- La composición de morfismos viene dada por el siguiente diagrama, si  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau')$  es un morfismo

$\gamma(g_1, g_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau') \rightarrow (\mathcal{L}'', \mathcal{K}'', u'', \tau'')$  otro, tendríamos

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{K} \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}f_1 & & \downarrow f_2 \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{L}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{K}' \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}g_1 & & \downarrow g_2 \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{L}'' & \xrightarrow{u''} & \mathcal{K}''
 \end{array}$$

la composición  $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (\mathcal{L}'', \mathcal{K}'', u'', \tau'')$ , que es un morfismo ya que  $u'' \circ j_*\mathbb{F}g_1 \circ j_*\mathbb{F}f_1 = g_2 \circ u' \circ j_*\mathbb{F}f_1 = g_2 \circ f_2 \circ u$ . Ahora, por definición de la composición y aditividad de las categorías, se tiene la bilinealidad de la composición de morfismos.

- La cuaterna  $(0_U, 0_{d-1}, u, \tau)$ , donde  $0_U$  es el objeto nulo de  $\mathcal{A}_U$  y  $0_{d-1}$  el objeto nulo en  $\text{Perv}^{d-1}$  es el objeto nulo en  $\mathcal{B}^d$
- Suma directa de objetos. Sean  $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau), (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau')$  dos objetos y veamos que existe su suma directa; por aditividad de las categorías existen  $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$  y de  $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}'$ , con sus correspondientes  $i_{\mathcal{L}}, j_{\mathcal{L}}, i_{\mathcal{K}}, j_{\mathcal{K}}$ , por la exactitud del funtor  $j_*\mathbb{F}$  la suma directa de  $j_*\mathbb{F}\mathcal{L}$  y  $j_*\mathbb{F}\mathcal{L}'$  resulta ser  $j_*\mathbb{F}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}')$ .

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{K} \\
 \searrow j_*\mathbb{F}i_{\mathcal{L}} & & \downarrow i_{\mathcal{K}} \\
 & & \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\quad} \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \\
 j_*\mathbb{F}i_{\mathcal{L}'} \nearrow & & \uparrow j_{\mathcal{K}'} \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{L}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{K}'
 \end{array}$$

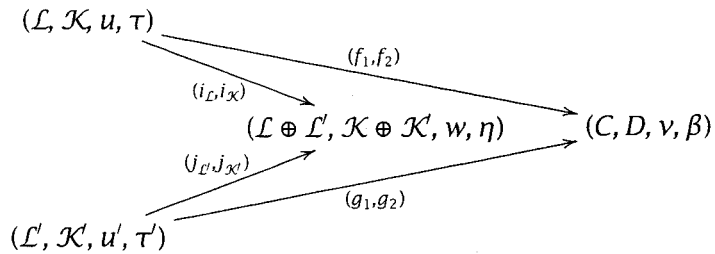
por la propiedad universal de la suma directa existe un único  $w : j_*\mathbb{F}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \rightarrow \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}'$ , que hace conmutativo el diagrama; junto con un isomorfismo  $\eta : \mathbb{Q}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \simeq j^*(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}')$ , aplicando

el lema de los cinco al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') & \longrightarrow & \mathbb{Q}\mathcal{L}' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau & & \downarrow & & \downarrow \tau' \\
 0 & \longrightarrow & j^*\mathcal{K} & \longrightarrow & j^*(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}') & \longrightarrow & j^*\mathcal{K}' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

con lo que tenemos definido un objeto de la categoría de flechas  $(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}', \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}', w, \eta)$ , y unos morfismos  $(i_{\mathcal{L}}, i_{\mathcal{K}}), (j_{\mathcal{L}}, j_{\mathcal{K}})$  con  $w \circ j_*\mathbb{F}i_{\mathcal{L}} = i_{\mathcal{K}} \circ u$  y  $w \circ j_*\mathbb{F}j_{\mathcal{L}} = j_{\mathcal{K}} \circ u'$ , que probaremos verifican la propiedad universal de la suma directa.

Sean  $(C, D, v, \beta)$  otro objeto y  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (C, D, v, \beta)$ ,  $(g_1, g_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau') \rightarrow (C, D, v, \beta)$  dos morfismos de objetos, se tiene

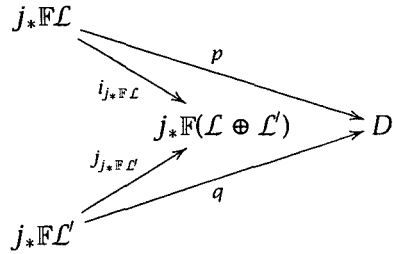


La propiedad universal de la suma directa nos garantiza la existencia de  $h_1 : \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \rightarrow C$  y  $h_2 : \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \rightarrow D$  únicos verificando  $j_*\mathbb{F}h_1 \circ i_{j, \mathbb{F}A} = j_*\mathbb{F}f_1$ ,  $j_*\mathbb{F}h_1 \circ j_{j, \mathbb{F}L} = j_*\mathbb{F}g_1$ ,  $h_2 \circ i_{\mathcal{K}} = f_2$  y  $h_2 \circ j_{\mathcal{K}} = g_2$ ; sólo queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de la categoría, es decir, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') & \xrightarrow{w} & \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}h_1 & & \downarrow h_2 \\
 j_*\mathbb{F}C & \xrightarrow{v} & D
 \end{array}$$

como  $(f_1, f_2)$  es un morfismo de flechas, se tiene que  $f_2 \circ u = v \circ j_*\mathbb{F}f_1$ , luego  $h_2 \circ i_{\mathcal{K}} \circ u = v \circ j_*\mathbb{F}h_1 \circ i_{j, \mathbb{F}L}$  y, por tanto,  $h_2 \circ w \circ i_{j, \mathbb{F}L} = v \circ j_*\mathbb{F}h_1 \circ i_{j, \mathbb{F}L} := p$ , y de manera análoga se deduce

$h_2 \circ w \circ j_{j_*\mathbb{F}\mathcal{L}'} = v \circ j_*\mathbb{F}h_1 \circ j_{j_*\mathbb{F}\mathcal{L}'} := q$ , ahora si consideramos



y tanto  $h_2 \circ w$  como  $v \circ j_*\mathbb{F}h_1$  completan el diagrama a uno conmutativo, luego deben ser iguales por la propiedad universal de la suma directa de objetos.

•  $\mathcal{B}^d$  abeliana.

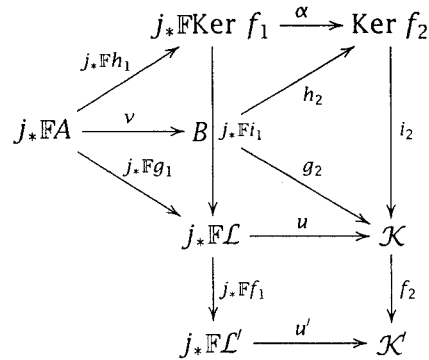
Para ello debemos probar la existencia de núcleo y conúcleo de cada morfismo y el teorema de isomorfía:

- Sea  $(f_1, f_2) : (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau')$  un morfismo, podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\text{Ker } f_1 & \xrightarrow{j_*\mathbb{F}i_1} & j_*\mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{j_*\mathbb{F}f_1} & j_*\mathbb{F}\mathcal{L}' & \xrightarrow{j_*\mathbb{F}p_1} & j_*\mathbb{F}\text{Coker } f_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow u & & \downarrow u' & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{K} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{K}' & \xrightarrow{p_2} & \text{Coker } f_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

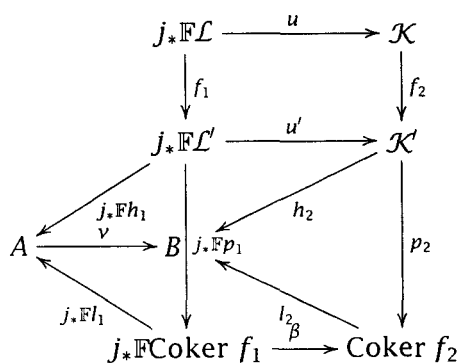
para definir el núcleo consideramos  $\alpha : j_*\mathbb{F}\text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  definida como sigue; sea  $u \circ j_*\mathbb{F}i_1 : j_*\mathbb{F}\text{Ker } f_1 \rightarrow \mathcal{K}$ , la composición de este morfismo con  $f_2$  es nula, pues  $f_2 \circ u \circ j_*\mathbb{F}i_1 = u' \circ j_*\mathbb{F}f_1 \circ j_*\mathbb{F}i_1 = u' \circ 0$ , luego este morfismo factoriza a través del núcleo de  $f_2$ , es decir, existe  $\alpha : j_*\mathbb{F}\text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$  tal que  $i_2 \circ \alpha = u \circ j_*\mathbb{F}i_1$ , junto con  $\eta : \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$ , luego el candidato a núcleo sería  $((\text{Ker } f_1, \text{Ker } f_2, \alpha, \eta), (i_1, i_2))$ , la composición con  $f$  es nula, falta ver la propiedad universal; sea  $(g_1, g_2) : (A, B, v, \beta) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau)$  tal que  $f_i \circ g_i = 0$ , la propiedad universal del núcleo garantiza la existencia de  $(h_1, h_2)$  verifi-

cando que  $i \circ h = g$



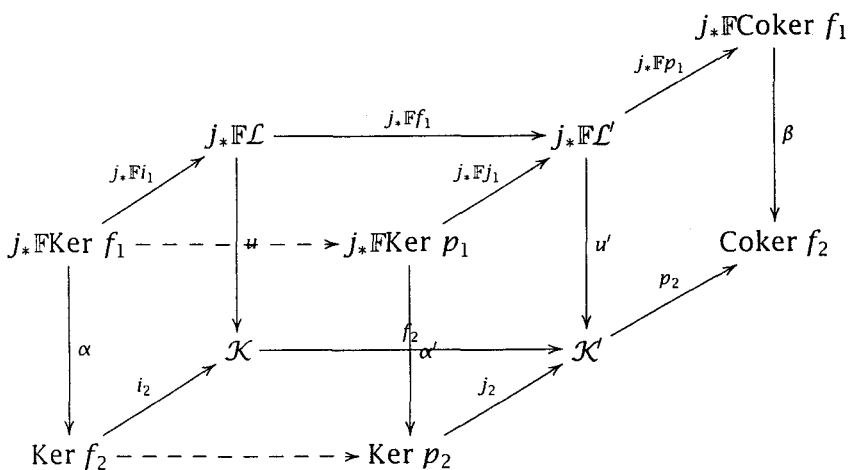
queda ver que  $(h_1, h_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $\alpha \circ j_*\mathbb{F}h_1 = h_2 \circ v$ ; sabemos  $g_2 \circ v = u \circ j_*\mathbb{F}g_1$ , lo que implica  $i_2 \circ h_2 \circ v = u \circ j_*\mathbb{F}i_1 \circ j_*\mathbb{F}h_1 = i_2 \circ \alpha \circ j_*\mathbb{F}h_1$ , lo que unido a que  $i_2$  es monomorfismo nos da  $h_2 \circ v = \alpha \circ j_*\mathbb{F}h_1$ .

Para el conúcleo, consideramos  $\beta : \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$  definida de la siguiente manera; sea  $p_2 \circ u' : j_*\mathbb{F}\mathcal{L}' \rightarrow \text{Coker } f_2$ , la composición de este morfismo con  $j_*\mathbb{F}f_1$  es nula, pues  $p_2 \circ u' \circ j_*\mathbb{F}f_1 = p_2 \circ f_2 \circ u = 0 \circ u$ , luego por la propiedad universal del conúcleo, este morfismo factoriza a través del  $j_*\mathbb{F}\text{Coker } f_1$ , es decir existe  $\beta$  tal que  $p_2 \circ u' = \beta \circ j_*\mathbb{F}p_1$ , lo que, unido a  $\eta : \mathbb{Q}\text{Coker } f_1 \simeq j_*\mathbb{F}\text{Coker } f_2$  nos da un objeto, que será luego el conúcleo  $((\text{Coker } f_1, \text{Coker } f_2, \beta, \eta), (p_1, p_2))$ , la composición con  $f$  es nula, veamos que verifica la propiedad universal, sea  $(h_1, h_2) : (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau') \rightarrow (A, B, v, \mu)$  tal que  $h \circ f = 0$ , la propiedad universal del conúcleo garantiza la existencia de  $(l_1, l_2)$  tales que  $h = l \circ p$



queda ver que  $(l_1, l_2)$  es un morfismo de flechas, es decir que  $l_2 \circ \beta = v \circ j_*Fl_1$ ; sabemos  $v \circ j_*Fh_1 = h_2 \circ u'$ , lo que implica  $v \circ j_*Fl_1 \circ j_*Fp_1 = l_2 \circ p_2 \circ u' = l_2 \circ \beta \circ j_*Fp_1$ , lo que unido a que  $p_2$  es epimorfismo nos da  $l_2 \circ \beta = v \circ j_*Fl_1$ .

- Teorema de isomorfía. Sea  $f : (\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) \rightarrow (\mathcal{L}', \mathcal{K}', u', \tau')$  y el diagrama



Las flechas discontinuas resultan ser isomorfismos porque el teorema de isomorfía se verifica en cada una de las categorías

---

Corolario IV-C.9 ■  $\mathcal{B}^d$  es una categoría abeliana para  $d \geq 0$ .

**Demostración.** Por III-A.5 se tiene el resultado para  $d = 1$ , pues  $Perv^0$  es abeliana, con lo que  $'\mathcal{B}^1$  también. Por V-B,  $'\mathcal{B}^1$  es equivalente a  $Perv^1$ , con lo que la proposición anterior garantiza la abelianidad de  $'\mathcal{B}^2$ . Se tiene pues, por recurrencia, el resultado.

---

**Nota IV-C.10 ■** Nos interesa estudiar estas categorías debido al comportamiento de los haces perversos bajo la acción de  $\Psi$ , por el teorema de relación entre diferentes tipos de perversidad IV-B.12, y probaremos que este funtor  $\Psi$  es una equivalencia de categorías exhibiendo explícitamente un casi-inverso.

---

---

---

# CAPÍTULO V

## El teorema

En esta sección se demuestra la equivalencia de categorías, con la ayuda del funtor casi-inverso y de una transformación natural que se construye.

### V-A UN CASI-ISOMORFISMO NATURAL

En primer lugar veamos que el funtor cono, definido entre las categorías  $Fl(C(\mathcal{A}))$  y  $C(\mathcal{A})$  también está definido en una cierta subcategoría de flechas de complejos módulo homotopía.

---

**Definición V-A.1** ■ Sea la categoría  $Fl(K(\mathcal{A}))$  y en ella la subcategoría plena  $Q_0$  cuyos objetos son las ternas  $(A^*, B^*, [u^*])$  verificando  $A^n = 0$  si  $n \neq 0$  y  $B^n = 0$  si  $n < 0$ .

---

---

**Proposición V-A.2** ■ En la subcategoría  $Q_0 \subset Fl(K(\mathcal{A}))$ , la construcción del funtor cono de un morfismo de complejos nos da un funtor  $Q_0 \rightarrow K(\mathcal{A})$ .

---

**Demostración.**

Los morfismos que aparecen en los objetos de  $Q_0$  (donde  $A$  es



nulo en todas partes salvo en grado 0) se reducen a un único morfismo  $u^0 : A^0 \rightarrow B^0$ .

Además, cada clase de morfismos  $[u^*]$  contiene un sólo elemento, ya que si  $[u^*] = [v^*] : A^* \rightarrow B^*$  ambos morfismos deben ser homotópicos, pero

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & B^1
 \end{array}$$

(Dashed arrows in the original image represent the homotopy  $u^0 - v^0 = 0$ .)

cualquier homotopía nos dará  $u^0 - v^0 = 0$ .

Ahora, a cada objeto  $(A^*, B^*, u^*)$  le podemos asociar el complejo cono  $u^* := A^0 \xrightarrow{u^0} B^0 \xrightarrow{d_B^0} B^1 \dots \in C(\mathcal{A})$  definiéndose de esta manera un functor cono  $: Q_0 \rightarrow K(\mathcal{A})$ , ya que si  $[f_1, f_2] : (A, B, u) \rightarrow (A', B', u')$  es un morfismo en  $Q_0$  tendríamos

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{[u]} & B \\
 [f_1] \downarrow & & \downarrow [f_2] \\
 A' & \xrightarrow{[u']} & B'
 \end{array}$$

con  $[u' \circ f_1] = [f_2 \circ u]$  en  $K(\mathcal{A})$ , pero esto equivale a que  $u' \circ f_1^0 = f_2^0 \circ u$  como morfismo entre objetos de  $A$ , luego el morfismo  $[f_1, f_2]$  induce un morfismo entre los conos respectivos dado por

$$\begin{array}{ccccc}
 A^0 & \xrightarrow{u} & B^0 & \xrightarrow{d_B^0} & B^1 \\
 f_1 \downarrow & & f_2^0 \downarrow & & f_2^1 \downarrow \\
 A'^0 & \xrightarrow{u'} & B'^0 & \xrightarrow{d_{B'}^0} & B'^1
 \end{array}$$

y que podemos notar  $(f_1 | f_2)$ .

Si tenemos otro  $(g_1, g_2)$  con  $[f_1], [f_2] = [g_1], [g_2]$ , entonces claramente  $f_1 = g_1$  y  $[f_2] = [g_2]$ , sean  $h^i : B^i \rightarrow B'^{i-1}$  una homotopía entre

$f_2 - g_2$  y 0, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & B^0 & \xrightarrow{d_B^0} & B^1 & \xrightarrow{d_B^1} & B^2 \\
 & & \searrow 0 & & \downarrow f_2^0 - g_2^0 & \swarrow h_1^1 & \downarrow f_2^1 - g_2^1 & \swarrow h_2^2 \\
 0 & \longrightarrow & B'^0 & \xrightarrow{d_{B'}^0} & B'^1 & \xrightarrow{d_{B'}^1} & B'^2
 \end{array}$$

verificándose que  $f_2^0 - g_2^0 = h^1 d_B^0$  y  $f_2^i - g_2^i = d_{B'}^{i-1} h^i + h^{i+1} d_B^i$ .

En tal caso, los conos también son homotópicos, pues

$$\begin{array}{ccccccc}
 A^0 & \xrightarrow{u} & B^0 & \xrightarrow{d_B^0} & B^1 & \xrightarrow{d_B^1} & B^2 \\
 \downarrow 0 & & \searrow 0 & & \downarrow f_2^0 - g_2^0 & \swarrow h_1^1 & \downarrow f_2^1 - g_2^1 & \swarrow h_2^2 \\
 A'^0 & \xrightarrow{u'} & B'^0 & \xrightarrow{d_{B'}^0} & B'^1 & \xrightarrow{d_{B'}^1} & B'^2
 \end{array}$$

Luego  $[(f_1|f_2)] = [(g_1|g_2)]$ .

**Proposición V-A.3** ■ Sea  $P_0$  la subcategoría plena de  $K(Fl(\mathcal{A}))$  tal que la imagen por  $\Omega$  de cada objeto pertenece a  $Q_0$  (es decir,  $P_0 = \Omega^{-1}(Q_0)$ ). Entonces existe una transformación natural cono  $[-1] \circ \Omega_0 \rightarrow s$  que, compuesta con el functor  $\mu : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$  de paso a la categoría derivada es un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 P_0 & \xrightarrow{\Omega} & Fl(K(\mathcal{A})) \\
 & \searrow s & \swarrow \text{cono } [-1] \\
 & & K(\mathcal{A})
 \end{array}$$

**Demostración.**

Sea  $F = (\mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n, \alpha^n)$  un objeto perteneciente a la subcategoría  $P_0$ . Vamos a construir un morfismo natural cono  $q[-1] \rightarrow \mathbf{U}$

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V} \oplus \text{cono } \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

Por la proposición IV-B.8 se tiene  $\mathbf{Q} = \text{cono } -\alpha = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}[-1]$  y la derivación viene dada por la matriz  $\begin{pmatrix} d_V^n & -\alpha^{n+1} \\ 0 & -d_U^{n+1} \end{pmatrix}$ , tendremos un

diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & U^n & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & V^n \oplus U^n \oplus U^{n+1} & \longrightarrow & V^n \oplus U^{n+1} \\
 & & & & \uparrow i & & \uparrow 1 \\
 \text{cono } q[-1] : & & V^{n-1} \oplus U^n \oplus V^n & \xrightarrow{p} & V^n & \xrightarrow{q^n} & V^n \oplus U^{n+1}
 \end{array}$$

Ahora, para todo elemento del cono  $q[-1]$  existirá un único (por inyectividad de  $\tilde{\alpha}$ ) elemento de  $U^n$  que hace conmutativo el primer cuadrado.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{V} \oplus \text{cono } \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow i^{n+1} & & \\
 & & \text{cono } q[-1] & \xrightarrow{p^n} & \mathbf{V} & \xrightarrow{q} & \mathbf{Q}
 \end{array}$$

Este morfismo así definido  $h_n : V^{n-1} \oplus U^n \oplus U^{n+1} \rightarrow U^n$  es un morfismo de complejos, pues si notamos  $d_U$  la derivación en  $U$  y  $d'$  la derivación en  $\text{cono } q[-1]$  debe verificarse que  $d'_U \circ h_n = h_{n+1} \circ d'^n$  para todo  $n$ . Como  $\tilde{\alpha}$  inyectiva, la igualdad buscada se verificará si y sólo si  $\tilde{\alpha}^{n+1} \circ d'_U \circ h_n = \tilde{\alpha}^{n+1} h_{n+1} \circ d'^n$

- $\tilde{\alpha}^{n+1} h_{n+1} \circ d'^n = i^{n+1} \circ p^{n+1} \circ d'^n = i^{n+1} \circ d'_V \circ p^n = d_{V \oplus \text{cono } U} \circ i^n \circ p^n$
- $\tilde{\alpha}^{n+1} \circ d'_U \circ h_n = d_{V \oplus \text{cono } U} \circ \tilde{\alpha}^n \circ h_n$ , que es igual a lo anterior por construcción de  $h_n$ .

La unicidad de este morfismo implica su naturalidad, veamos que es casi-isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{V} \oplus \text{cono } \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{cono } q[-1] & \longrightarrow & \mathbf{V} & \xrightarrow{q} & \mathbf{Q}
 \end{array}$$

es el morfismo de triángulos que ya construimos, si pasamos a las

sucesiones exactas largas tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 h^{i-1}(\mathbf{V} \oplus \text{cono}\mathbf{U}) & \longrightarrow & h^{i-1}\mathbf{Q} & \longrightarrow & h^i\mathbf{U} & \longrightarrow & h^i(\mathbf{V} \oplus \text{cono}\mathbf{U}) & \longrightarrow & h^i\mathbf{Q} \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 h^{i-1}\mathbf{V} & \longrightarrow & h^{i-1}\mathbf{Q} & \longrightarrow & h^i(\text{cono}q[-1]) & \longrightarrow & h^i\mathbf{V} & \longrightarrow & h^i\mathbf{Q}
 \end{array}$$

con lo que, aplicando el lema de los cinco, se tiene que el morfismo  $h^i(\text{cono } q[-1]) \rightarrow h^i\mathbf{U}$  es un isomorfismo.

**Definición V-A.4** ■ El functor truncación  $\tau_{\geq 0}$  de complejos induce otro, que también llamaremos truncación (y lo notaremos igual) en la categoría de las flechas de  $K(\mathcal{A})$  definido de la siguiente forma:

$$\tau_{\geq 0}(A, B, u) := (\tau_{\geq 0}A, \tau_{\geq 0}B, \tau_{\geq 0}u)$$

donde

$$(\tau_{\geq 0}u)^i = \begin{cases} u^i & i > 0 \\ u^0 : A^0/\text{Im}d_A^{-1} \rightarrow B^0/\text{Im}d_B^{-1} & u^0(a^0) = \overline{u^0(a^0)} \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

**Proposición V-A.5** ■ Si nos restringimos a la subcategoría  $Q_0$ , existe una transformación natural  $\text{cono} \rightarrow \text{cono} \circ \tau_{\geq 0}$  que, compuesta con  $\mu : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$  es un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 Fl(K(\mathcal{A})) \supset Q_0 & \xrightarrow{\tau_{\geq 0}} & Fl(K(\mathcal{A})) \\
 \searrow \text{cono} & & \swarrow \text{cono} \\
 & & K(\mathcal{A})
 \end{array}$$

**Demostración.**

En primer lugar, vamos a construir un morfismo natural  $\text{cono } q[-1] \rightarrow \text{cono } \tau_{\geq 0}q[-1]$

Ahora tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \text{cono } q[-1] & \longrightarrow & \mathbf{V} & \xrightarrow{q} & \mathbf{Q} \\ & & \downarrow \tau_{\geq 0} & & \downarrow \tau \\ \text{cono } (\tau_{\geq 0}q)[-1] & \longrightarrow & \tau_{\geq 0}\mathbf{V} & \xrightarrow{\tau_{\geq 0}q} & \tau_{\geq 0}\mathbf{Q} \end{array}$$

Cómo funciona  $\tau_{\geq 0}q$  ?

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\geq 0}\mathbf{U} : & 0 & \longrightarrow & V^0/\text{Im}d_V^{-1} & \xrightarrow{\overline{d_V^0}} & V^1 & \xrightarrow{d_V^1} & V^2 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q^1 & & \downarrow q^2 \\ \tau_{\geq 0}\mathbf{Q} : & 0 & \longrightarrow & Q^0/\text{Im}d_Q^{-1} & \xrightarrow{\overline{d_Q^0}} & Q^1 & \xrightarrow{d_Q^1} & Q^2 \end{array}$$

donde  $\overline{d^0}(\bar{x}) = d^0(x)$  para cualquier elemento  $x$  representante de la clase. Si tomamos dos representantes de la misma clase,  $x, y$  tales que  $x - y \in \text{Im}d^{-1}$ , se tiene que  $d^0(x - y) = 0$  por ser complejo, con lo que está bien definido.

Por otra parte,  $q^0$  induce un  $\overline{q^0} : V^0/\text{Im}d_V^{-1} \rightarrow Q^0/\text{Im}d_Q^{-1}$  de la forma  $\overline{q^0}(x + \text{Im}d_V^{-1}) = q^0(x) + \text{Im}d_Q^{-1}$ , que está bien definido, pues si  $x, y$  tales que  $x - y \in \text{Im}d_V^{-1}$ , se tiene  $q^0(x - y) = q^0 d_V^{-1}(z) = d_Q^{-1} q^{-1}(z)$ , que da la clase del cero en  $Q^0/\text{Im}d_Q^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\geq 0}\mathbf{U} : & 0 & \longrightarrow & V^0/\text{Im}d_V^{-1} & \xrightarrow{\overline{d_V^0}} & V^1 & \xrightarrow{d_V^1} & V^2 \\ & \downarrow & & \downarrow \overline{q^0} & & \downarrow q^1 & & \downarrow q^2 \\ \tau_{\geq 0}\mathbf{Q} : & 0 & \longrightarrow & Q^0/\text{Im}d_Q^{-1} & \xrightarrow{\overline{d_Q^0}} & Q^1 & \xrightarrow{d_Q^1} & Q^2 \end{array}$$

Ahora, el cono de  $q$  es un complejo de la forma

$$Q^{-1} \oplus V^0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^{-1} & q^0 \\ 0 & -d_V^0 \end{pmatrix}} Q^0 \oplus V^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^0 & q^1 \\ 0 & -d_V^1 \end{pmatrix}} Q^1 \oplus V^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^1 & q^2 \\ 0 & -d_V^2 \end{pmatrix}} Q^2 \oplus V^3$$

mientras que el de  $\tau_{\geq 0}$  es de la forma:

$$0 \oplus V^0/\text{Im}d_V^{-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \overline{q^0} \\ 0 & -d_V^0 \end{pmatrix}} Q^0/\text{Im}d_Q^{-1} \oplus V^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \overline{d_Q^0} & q^1 \\ 0 & -d_V^1 \end{pmatrix}} Q^1 \oplus V^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^1 & q^2 \\ 0 & -d_V^2 \end{pmatrix}} Q^2 \oplus V^3$$

Para definir un morfismo de cono  $q[-1] \rightarrow \text{cono } \tau_{\geq 0}q[-1]$

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q^{-2} \oplus V^{-1} & \longrightarrow & Q^{-1} \oplus V^0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^{-1} & q^0 \\ 0 & -d_V^0 \end{pmatrix}} & Q^0 \oplus V^1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^0 & q^1 \\ 0 & -d_V^1 \end{pmatrix}} & Q^1 \oplus V^2 \\
 \downarrow 0 & & & & & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & 0 \oplus V^0 / \text{Im}d_V^{-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \overline{q^0} \\ 0 & -d_V^0 \end{pmatrix}} & Q^0 / \text{Im}d_Q^{-1} \oplus V^1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Q^0 & q^1 \\ 0 & -d_V^1 \end{pmatrix}} & Q^1 \oplus V^2
 \end{array}$$

Como el cono de abajo es 0 a la izquierda del lugar 0, todos los morfismos en esos lugares serán el 0, a partir del lugar 2, los dos conos son idénticos, luego basta definir la identidad. Los únicos lugares a estudiar son los grados 0 y 1

Siendo  $\pi_V : V^0 \rightarrow V^0 / \text{Im}d_V^{-1}$  y  $\pi_Q : Q^0 \rightarrow Q^0 / \text{Im}d_Q^{-1}$  las aplicaciones de paso al cociente, definimos los morfismos

$$0 \oplus \pi_V : Q^{-1} \oplus V^0 \rightarrow 0 \oplus V^0 / \text{Im}d_V^{-1} \text{ y}$$

$\pi_Q \oplus 1 : Q^0 \oplus V^1 \rightarrow Q^0 / \text{Im}d_Q^{-1} \oplus V^1$  y veamos que todos estos morfismos juntos definen un morfismo de complejos:

Commutatividad del primer cuadrado

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & \pi_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Q^{-2} & -q^{-1} \\ 0 & d_V^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi_V d_V^{-1} \end{pmatrix} = 0$$

Commutatividad del segundo cuadrado

$$\begin{pmatrix} \pi_Q & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Q^{-1} & -q^0 \\ 0 & d_V^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_Q d_Q^{-1} & -\pi_Q q^0 \\ 0 & d_V^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{-q^0} \\ 0 & \overline{d_V^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & \pi_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{-q^0} \pi_V \\ 0 & \overline{d_V^0} \pi_V \end{pmatrix}$$

Commutatividad del tercer cuadrado

$$\begin{pmatrix} \overline{-d_Q^0} & -q^1 \\ 0 & d_V^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_Q & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{-d_Q^0} \pi_Q & -q^1 \\ 0 & d_V^1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -d_Q^0 & -q^1 \\ 0 & d_V^1 \end{pmatrix}$$

Es, pues, un morfismo de cono  $q[-1] \rightarrow \text{cono } (\tau_{\geq 0}q)[-1]$

Este morfismo nos completa un morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 Q^{-1} & \xrightarrow{i_1} & Q^{-1} \oplus V^0 & \xrightarrow{p_2} & V^0 & \xrightarrow{q^0} & Q^0 & \xrightarrow{i_1} & Q^0 \oplus V^1 & \xrightarrow{p_2} & V^1 \\
 \downarrow & & \downarrow 0 \oplus \pi_V & & \downarrow \pi_V & & \downarrow \pi_Q & & \downarrow \pi_Q \oplus 1 & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & 0 \oplus V^0 / \text{Im} d_V^{-1} & \xrightarrow{p_2} & V^0 / \text{Im} d_V^{-1} & \xrightarrow{\bar{q}^0} & Q^0 / \text{Im} d_Q^{-1} & \xrightarrow{i_1} & Q^0 / \text{Im} d_Q^{-1} \oplus V^1 & \xrightarrow{p_2} & V^1
 \end{array}$$

Naturalidad

Si tenemos  $f_1^n : V^n \rightarrow V'^n$ ,  $f_2^n : Q^n \rightarrow Q'^n$  morfismo de objetos, con  $f_2^n \circ q^n = q'^n \circ f_1^n$

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{cono } q'[-1] & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{V}' & \xrightarrow{q'} & \mathbf{Q}' \\
 \downarrow & & \nearrow f_1 & & \nearrow f_2 \\
 \text{cono } q[-1] & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{V} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Q} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1] & \xrightarrow{\quad} & \tau_{\geq 0} \mathbf{V} & \xrightarrow{\tau_{\geq 0} q} & \tau_{\geq 0} \mathbf{Q} \\
 \downarrow & & \nearrow \tau_{\geq 0} f_1 & & \nearrow \tau_{\geq 0} f_2 \\
 \text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1] & \xrightarrow{\quad} & \tau_{\geq 0} \mathbf{V} & \xrightarrow{\quad} & \tau_{\geq 0} \mathbf{Q}
 \end{array}$$

Este morfismo induce otros:

- cono  $q[-1] \rightarrow$  cono  $q'[-1]$  definido como

$$f_2^j \oplus f_1^{j+1} : Q^j \oplus V^{j+1} \rightarrow Q'^j \oplus V'^{j+1}$$

- cono  $\tau_{\geq 0} q[-1] \rightarrow$  cono  $\tau_{\geq 0} q'[-1]$  dado por

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \oplus V^0 / \text{Im} d_V^{-1} & \longrightarrow & Q^0 / \text{Im} d_Q^{-1} \oplus V^1 & \longrightarrow & Q^1 \oplus V^2 \\
 \uparrow 0 \oplus \bar{f}_1^0 & & \uparrow \bar{f}_2^0 \oplus f_1^1 & & \uparrow f_2^1 \oplus f_1^2 \\
 0 \oplus V^0 / \text{Im} d_V^{-1} & \longrightarrow & Q^0 / \text{Im} d_Q^{-1} \oplus V^1 & \longrightarrow & Q^1 \oplus V^2
 \end{array}$$

siendo 0 a la izquierda del diagrama y  $f_2^j \oplus f_1^{j+1}$  a derecha.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{cono } q[-1] & \longrightarrow & \text{cono } q'[-1] \\
 \downarrow & \# & \downarrow \\
 \text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1] & \longrightarrow & \text{cono } \tau_{\geq 0} q'[-1]
 \end{array}$$

Queda ver que Solamente hay que comprobar los cuadrados que aparecen en el diagrama, ya que a la izquierda se pasa por el cero y a la derecha la propiedad de ser  $(f_1^n, f_2^n)$  morfismo de pares nos da el resultado.

- En el lugar 0

$$\begin{array}{ccc} Q^{-1} \oplus V^0 & \xrightarrow{f_2^{-1} \oplus f_1^0} & Q^{-1} \oplus V^0 \\ \downarrow 0 \oplus \pi_V & & \downarrow 0 \oplus \pi_V \\ 0 \oplus V^0 / \text{Im} d_V^{-1} & \xrightarrow{0 \oplus f_1^0} & 0 \oplus V^0 / \text{Im} d_V^{-1} \end{array}$$

- En el lugar 1

$$\begin{array}{ccc} Q^0 \oplus V^1 & \xrightarrow{f_2^0 \oplus f_1^1} & Q^0 \oplus V^1 \\ \downarrow \pi_Q \oplus 1 & & \downarrow \pi_Q \oplus 1 \\ Q^0 / \text{Im} d_Q^{-1} \oplus V^1 & \xrightarrow{f_2^0 \oplus f_1^1} & Q^0 / \text{Im} d_{q'}^{-1} \oplus V^1 \end{array}$$

- En el lugar 2

$$\begin{array}{ccc} Q^1 \oplus V^2 & \xrightarrow{f_2^1 \oplus f_1^2} & Q^1 \oplus V^2 \\ \downarrow 1 \oplus 1 & & \downarrow 1 \oplus 1 \\ Q^1 \oplus V^2 & \xrightarrow{f_2^1 \oplus f_1^2} & Q^1 \oplus V^2 \end{array}$$

Este morfismo es un casi-isomorfismo, pues

$$\begin{array}{ccccc} \text{cono } q[-1] & \longrightarrow & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \tau_{\geq 0} & & \downarrow \tau_{\geq 0} \\ \text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1] & \longrightarrow & \tau_{\geq 0} \mathbf{V} & \xrightarrow{\tau_{\geq 0} q} & \tau_{\geq 0} \mathbf{Q} \end{array}$$

es el morfismo de triángulos que ya construimos, si pasamos a las sucesiones exactas largas tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} h^{n-1} \mathbf{V} & \longrightarrow & h^{n-1} \mathbf{Q} & \longrightarrow & h^n \text{ cono } q[-1] & \longrightarrow & h^n \mathbf{V} & \longrightarrow & h^n \mathbf{Q} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ h^{n-1} \tau_{\geq 0} \mathbf{V} & \longrightarrow & h^{n-1} \tau_{\geq 0} \mathbf{Q} & \longrightarrow & h^n(\text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1]) & \longrightarrow & h^n \tau_{\geq 0} \mathbf{V} & \longrightarrow & h^n \tau_{\geq 0} \mathbf{Q} \end{array}$$

el morfismo  $h^n(\text{cono } q[-1]) \rightarrow h^n(\text{cono } \tau_{\geq 0} q[-1])$  es un isomorfismo por el lema de los cinco.



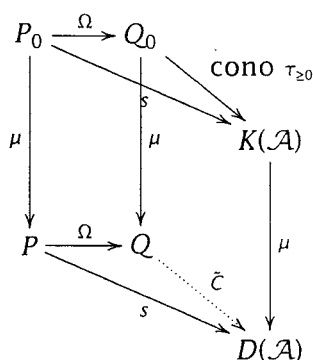
## V-B EL FUNTOR CONO

**Definición V-B.1** ■ Dada la categoría de flechas de  $D(\mathcal{A})$ , consideramos la subcategoría plena  $Q \subset Fl(D(\mathcal{A}))$  cuyos objetos son las ternas  $(A, B, u) \in Ob(Fl(D(\mathcal{A})))$  tales que

- $A$  está concentrado en grado 0.
- $B$  está concentrado en grados mayores o iguales que 0.

Y  $P \subset D(Fl(\mathcal{A}))$  la subcategoría cuyos objetos son aquellos tales que su imagen por  $\Omega$  pertenece a  $Q$  ( $P := \Omega^{-1}(Q)$ )

**Proposición V-B.2** ■ Consideremos el diagrama



Existe un funtor  $\tilde{C} : Q \rightarrow D(\mathcal{A})$  que hace conmutativos los diagramas.

**Demostración.**

Consideremos un objeto  $(C, D, q) \in Q$ , con  $q \in \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(C, D)$ , pero  $\text{Hom}(T, X) \simeq \text{Hom}(T, \tau_{\leq 0}X) \forall T \in D^{\leq 0}$  ([BBD83]), luego, si  $C$  está concentrado en grado menor o igual que 0, tenemos que  $q \in \text{Hom}(C, \tau_{\leq 0}D)$ . Es más, como  $C$  está concentrado en grado 0, este morfismo de  $C$  en  $\tau_{\leq 0}D$  se puede considerar como un morfismo (en la categoría  $\mathcal{A}$ ) de

$h^0(C)$  en  $h^0(D)$ , y a su vez  $h^0(D)$  se inyecta en  $\tau_{\geq 0}D$

$$\begin{array}{ccccc} h^0(C) & \xrightarrow{h^0(q)} & h^0(D) & \longrightarrow & \tau_{\geq 0}D \\ & & \downarrow \tilde{c} & & \\ h^0(C) & \longrightarrow & D^0 & \longrightarrow & D^1 \end{array}$$

y el cono de un morfismo de objetos de este tipo se obtiene poniendo a continuación de  $h^0(C)$  el complejo  $\tau_{\geq 0}$

Esto en lo que respecta a los objetos, quedaría ver el comportamiento de los morfismos:

sea  $(\alpha, \beta) : (C, D, q) \rightarrow (C', D', q')$  un morfismo entre objetos de  $\mathcal{Q}$ , lo que nos daría un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & C' \\ \downarrow q & & \downarrow q' \\ D & \xrightarrow{\beta} & D' \end{array}$$

con  $q' \circ \alpha = \beta \circ q$  donde esta igualdad se verifica en la categoría derivada.

El morfismo  $\alpha$  está definido entre objetos concentrados en grado 0, luego se puede considerar como un auténtico morfismo de complejos nulos fuera de grado 0,  $h^0(\alpha) : h^0(C) \rightarrow h^0(C')$  sin ninguna dificultad. En cuanto al morfismo  $\beta$ , es una clase de equivalencia de diagramas  $D \xleftarrow{s} E \xrightarrow{t} D'$ . Tomando los truncados  $\tau_{\geq 0}\beta : \tau_{\geq 0}D \dashrightarrow \tau_{\geq 0}D'$  como la clase de un diagrama  $\tau_{\geq 0}D \xleftarrow{\tau_{\geq 0}s} \tau_{\geq 0}E \xrightarrow{\tau_{\geq 0}t} \tau_{\geq 0}D'$ , donde  $\tau_{\geq 0}s$  es casi-isomorfismo por serlo  $s$  y estar  $D$  (y por tanto  $E$ ) concentrado en grado mayor que 0. Ahora  $\tau_{\geq 0}s \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\tau_{\geq 0}E, \tau_{\geq 0}D)$ , mientras que  $\tau_{\geq 0}t \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\tau_{\geq 0}E, \tau_{\geq 0}(D'))$ , con lo que se tiene una situación

$$\begin{array}{ccccc} h^0(C) & \xrightarrow{h^0(q)} & \tau_{\geq 0}D & : & D^0 \longrightarrow \\ \uparrow 1 & & \uparrow \tau_{\geq 0}s & & \\ h^0(C) & \dashrightarrow & \tau_{\geq 0}E & : & E^0 \longrightarrow \\ \downarrow h^0(\alpha) & & \downarrow \tau_{\geq 0}t & & \\ h^0(C') & \longrightarrow & \tau_{\geq 0}D' & : & D'^0 \longrightarrow \end{array}$$

si construimos el cono de estos morfismos de complejos quedaría

$$\begin{array}{ccccc}
 h^0(C) & \xrightarrow{h^0(q)} & h^0(D) & \longrightarrow & D^0 \\
 \uparrow 1 & & \uparrow \simeq h^0(s) & & \\
 h^0(C) & \xrightarrow{h^0(s)^{-1}h^0(q)} & h^0(E) & \longrightarrow & E^0 \\
 \downarrow h^0(\alpha) & & \downarrow h^0(\beta)h^0(s) & & \\
 h^0(C') & \xrightarrow{h^0(q')} & h^0(D') & \longrightarrow & D'^0
 \end{array}$$

que es un diagrama en  $D(\mathcal{A})$ , pues el morfismo que va en sentido descendente es un morfismo de complejos, mientras que el ascendente es un casi-isomorfismo, pues el único sitio para mirar es en grado cero, donde los dos núcleos son iguales, ya que  $h^0(s)$  isomorfismo y la inclusión es inyectiva.

Por tanto tenemos una situación

$$\begin{array}{ccccc}
 h^0(C) & \xrightarrow{i \circ h^0(q)} & D^0 & \xrightarrow{d_D^0} & D^1 \\
 \uparrow 1 & & \uparrow s^0 & & \uparrow \\
 h^0(C) & \xrightarrow{i \circ h^0(s)^{-1}h^0(q)} & E^0 & \xrightarrow{d_E^0} & E^1 \\
 \downarrow h^0(\alpha) & & \downarrow t^0 & & \downarrow \\
 h^0(C') & \xrightarrow{i \circ h^0(q')} & D'^0 & \xrightarrow{d_{D'}^0} & D'^1
 \end{array}$$

Luego un diagrama  $D \leftarrow E \rightarrow D'$  nos da un diagrama en  $D(\mathcal{A})$ . Ahora, si  $D \leftarrow F \rightarrow D'$  es un diagrama equivalente al anterior, existe un tercero  $D \leftarrow G \rightarrow D'$  verificándose

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & s \sim & \swarrow & & \searrow t \\
 & & D & \longleftarrow & G & \longrightarrow & D' \\
 & & \swarrow \sim s'' & & \searrow t'' & & \\
 & & F & & & & \\
 & & \swarrow s' \sim & & \searrow t' & & 
 \end{array}$$

esto nos da un diagrama similar con los truncados  $\tau_{\geq 0}$  donde se conservan los casi-isomorfismos, ya que los objetos están concentrados en grados mayores o iguales que cero, y al final

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & h^0(C) & \longrightarrow & E^0 & & \\
 & \swarrow & \uparrow & & \searrow & & \\
 & (1|\tau_{\geq 0}s) \sim & (1|\tau_{\geq 0}a) & & (h^0(\alpha)|\tau_{\geq 0}t) & & \\
 h^0(C) & \longrightarrow & D^0 & \xleftarrow{\sim(1|\tau_{\geq 0}s'')} & h^0(C) & \longrightarrow & G^0 \xrightarrow{(h^0(\alpha)|\tau_{\geq 0}t'')} \longrightarrow h^0(C') \longrightarrow D'^0 \\
 & \swarrow & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & (1|\tau_{\geq 0}s') \sim & (1|\tau_{\geq 0}b) & & (h^0(\alpha)|\tau_{\geq 0}t') & & \\
 & & h^0(C) & \longrightarrow & F^0 & & 
 \end{array}$$

Por lo tanto, se induce un funtor entre las categorías  $Q$  y  $D(\mathcal{A})$ , que a cada terna  $(C, D, q)$  le asocia la clase del complejo  $\text{cono } q[-1]$ , construido como ya se dijo, y que notamos  $\tilde{C}$ .

---

**Proposición V-B.3** ■ Los funtores  $s$  y  $\tilde{C} \circ \Omega : P \rightarrow D(\mathcal{A})$  son naturalmente casi-isomorfos.

---

**Demostración.** Tenemos unas transformaciones naturales

$$s \longleftarrow \text{cono } [-1] \circ \Omega \longrightarrow \text{cono } [-1] \circ \tau_{\geq 0} \circ \Omega$$

que son casi-isomorfismos en la categoría que estamos considerando, luego el primer y el tercer funtor lo son.

---

**Corolario V-B.4** ■  $\text{cono } [-1] \circ \Psi \simeq Id_{\text{per} \mathcal{A}}$

---

**Demostración.** Sólo hay que tener en cuenta que  $\Psi = \Omega \circ \mathbb{R}\psi$  y que el "source" de  $\psi$  es la identidad.

Volvemos ahora a la situación anterior (haces perversos sobre un espacio topológico):

---

**Definición V-B.5** ■ Sea  $\mathbf{A}$  la subcategoría plena de  $D_X$  formada por los objetos tales que su imagen por  $\mathbb{R}\psi$  pertenece a  $P$ .

---

Nota V-B.6 ■ Se tiene que:

1.  $\text{Perv}^{(d)}(X) \subset \mathbf{A}$  si  $d \geq 1$ .
2.  $\Psi(\mathbf{A}) = \Omega \circ \mathbb{R}\psi(\mathbf{A}) \subset Q$ .

## V-C NO UNICIDAD DEL CONO

Aunque en el caso de las subcategorías anteriores la construcción del cono de un morfismo nos produce un funtor entre las categorías derivadas, el cono de un morfismo no está definido de manera única, ni siquiera en el caso, que nos ocupa, de los triángulos naturalmente asociados a los haces perversos. Veamos un contraejemplo.

Sea  $X = \mathbb{C}$ ,  $U$  un abierto y  $Y$  el cerrado complementario (en nuestro caso un punto), con las inclusiones habituales  $j : U \rightarrow X$ ,  $i : Y \rightarrow X$ , y sea  $p : \tilde{U} \rightarrow U$  el revestimiento universal.

Una cuaterna  $(E, F, u, \{v_h\})$ , donde  $E$  es un  $H$ -módulo,  $F$  un espacio vectorial  $u : E \rightarrow F$  y  $v_h : F \rightarrow E$  son morfismos verificando

- $v_{hh'} = v_h \circ u \circ v_{h'} + v_h + v_{h'}$
- $1_E + v_h \circ u$  y  $1_F + u \circ v_h$  automorfismos para  $h \in H$

determinan un haz 1-perverso, que se reconstruye de la siguiente forma:

1.-  $\mathcal{L}$  es sistema local en el abierto, dado por el módulo  $E$  y la acción de  $H$  sobre él, que es  $h \cdot e := e + v_h u(e)$ .

$$\mathcal{L} \longleftrightarrow (E, \{1 + v_h u\})$$

2.-  $\mathcal{E} = j_* p_* p^* \mathcal{L}$  haz sobre  $X$  con una acción de  $H$  sobre él, que podemos expresar, utilizando la estratificación (Un haz  $\mathcal{H}$  sobre un espacio topológico estratificado por un abierto y su complementario viene dado por sus restricciones  $j^* \mathcal{H}$ ,  $i^* \mathcal{H}$  y por el morfismo de adjunción  $\alpha_{j^* \mathcal{H}} : i^* \mathcal{H} \rightarrow i^* j_* j^* \mathcal{H}$  (cf. [NM94] p. 303) ) de  $X$  de la siguiente

forma:

- $\mathcal{E}|_U = p_*p^*\mathcal{L}$ , que viene dado por  $E^H$  y la acción de  $H$  sobre  $E^H$ ,  $\{A(h)\}_{h \in H}$ .  $E^H$ , cuyos elementos son uplas de elementos de  $E$ ,  $\{e_\sigma\}_{\sigma \in H}$  tiene estructura de  $H$ -módulo a la izquierda, de la forma:  $h \cdot \{\sigma \mapsto e_\sigma\} := \{\sigma \mapsto e_{\sigma h}\}$ , mientras que  $A : H \rightarrow \text{Aut}(E^H)$  es una representación,  $A(h)(\{\sigma \mapsto e_\sigma\}) = \{\sigma \mapsto h e_{h^{-1}\sigma}\}$

$$\mathcal{E}|_U = p_*p^*\mathcal{L} \longleftrightarrow E^H \overset{A(h)}{\curvearrowright}$$

- $\mathcal{E}|_Y$  que viene dado por  $(E^H)^{\text{inv}}$ , el conjunto de elementos invariantes por la acción de  $H$ , y que podemos identificar con  $E$  a través de  $c : E \rightarrow E^H$ , aplicación constante que a cada  $e \in E$  le hace corresponder  $\{\sigma \mapsto e\}$  y la acción de  $H$  sobre él por  $\{1 + v_h u\}_{h \in H}$ .

$$\mathcal{E}|_Y \longleftrightarrow E \overset{(1+v_h u)}{\curvearrowright}$$

y el morfismo de pegado es la inclusión de  $(E^H)^{\text{inv}}$  en  $E^H$ .

3.-  $\mathcal{F}$  también expresado respecto de la estratificación anterior, de la forma

- $\mathcal{F}|_U = \text{Coker}(\mathcal{L} \xrightarrow{\lambda} p_*p^*\mathcal{L})$ , que viene dado por  $\text{Coker}(E \xrightarrow{\lambda} E^H)$ , donde  $\lambda : E \rightarrow E^H$  es el morfismo que a cada  $e \in E$  le hace corresponder el elemento  $\{\sigma \mapsto \sigma e\}$ .
- $\mathcal{F}|_Y = F$

y el morfismo de pegado  $\mathcal{F}|_Y \rightarrow i^*j_*\mathcal{F}|_U$  viene dado por  $F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{\text{inv}}$  con  $V(f) = \{q(\sigma \mapsto -v_\sigma(f))\}$ , siendo  $q$  el paso al Coker  $\lambda$ .

4.-  $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  que vale

- $\mathcal{U}|_U : p_*p^*\mathcal{L} \rightarrow \text{Coker } \lambda$ , que viene dado por  $E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda$ , la aplicación de paso al conúcleo.
- $\mathcal{U}|_Y = u : E \rightarrow F$

5.-  $\mathcal{V} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F} : \mathcal{V}_h$

- $\mathcal{V}_{h|U} : p_*p^*\mathcal{L} \leftarrow \text{Coker } \lambda$  dado por  $E^H \xleftarrow{\omega_h} \text{Coker } \lambda$ , donde  $1 + \omega_h \circ q = A(h)$ .

- $\mathcal{V}_{h|Y} : E \leftarrow F$  dados por  $v_h$ .

y tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}|_Y & & E & \xrightarrow{u} & F & & \mathcal{F}|_Y \\
 & & \downarrow c & & \downarrow v & & \\
 (j_*j^* \mathcal{E})|_Y & & (E^H)^{inv} & \xrightarrow{q} & (\text{Coker } \lambda)^{inv} & & (j_*j^* \mathcal{F})|_Y \\
 & & \leftarrow \omega_h & & & & 
 \end{array}$$

verificándose  $\omega_h(V(f)) = \omega_h(q(\{\sigma \mapsto -v_\sigma(f)\})) = \omega_h(q(e)) = A(h)(e) - e =$   
 $= \{\sigma \mapsto he_{h^*\sigma} - e_\sigma\} = \{\sigma \mapsto -hv_{h^*\sigma}(f) + v_\sigma(f)\},$   
 pero  $-hv_{h^*\sigma}(f) + v_\sigma(f) = v_\sigma(f) - [v_h u(v_{h^*\sigma}(f)) + v_{h^*\sigma}(f)] =$   
 $= v_\sigma(f) - [(v_h u v_{h^*\sigma})(f) + v_{h^*\sigma}(f)] = v_\sigma(f) - [v_{hh^*\sigma}(f) - v_h(f)] = v_h(f),$   
 con lo que se tiene  $\omega_h(V(f)) = c(v_h(f)).$

Sea  $(\varphi, h) : (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u)$  tenemos un diagrama de triángulos

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{K} & \rightarrow & j_*p_*p^*\mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{F} \\
 & & \tilde{g} \downarrow & & \tilde{h} \downarrow \\
 \mathcal{K} & \rightarrow & j_*p_*p^*\mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{F}
 \end{array}$$

con  $\tilde{g} = j_*p_*p^*\varphi$  y  $\tilde{h} = h$ . Aplicando el axioma (TR3) de triángulos, sabemos que existe un  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  morfismo que completa un morfismo de triángulos; el problema es que este axioma nos determina la existencia del  $f$ , pero no la unicidad o, al menos, la "naturalidad" de  $f$ .

Veamos si en este caso particular podemos probar la unicidad. Supongamos  $f'$  otro morfismo que completa a un morfismo de triángulos y estudiemos si  $f = f'$  en la categoría derivada.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{K} & \rightarrow & j_*p_*p^*\mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{F} \\
 f \Downarrow f' & & \tilde{g} \downarrow & & \tilde{h} \downarrow \\
 \mathcal{K} & \rightarrow & j_*p_*p^*\mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{F}
 \end{array}$$

Si consideramos la diferencia entre diagramas tendremos una situación

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{K} & \longrightarrow & j_* p_* p^* \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{+1} \\
 \xi \downarrow & * & 0 \downarrow & & 0 \downarrow & ** \\
 \mathcal{K} & \longrightarrow & j_* p_* p^* \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{+1}
 \end{array}$$

en la que tendríamos que probar que  $\xi = 0$  en la categoría derivada.

Como  $\mathcal{K} = \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F}$  en grados 0 y 1 respectivamente, la conmutatividad del cuadrado  $*$  nos dice que el morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 \xi^0 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

es homotópicamente nulo, es decir, existe un  $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$

tal que  $\sigma \circ \mathcal{U} = \xi^0$ . Análogamente, la conmutatividad de  $**$  nos da

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \xi^1 \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{-u} & \mathcal{F}
 \end{array}$$

otro morfismo de complejos homotópicamente nulo

decir,  $\sigma' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  tal que  $-\mathcal{U} \circ \sigma' = \xi^1$ .<sup>1</sup>

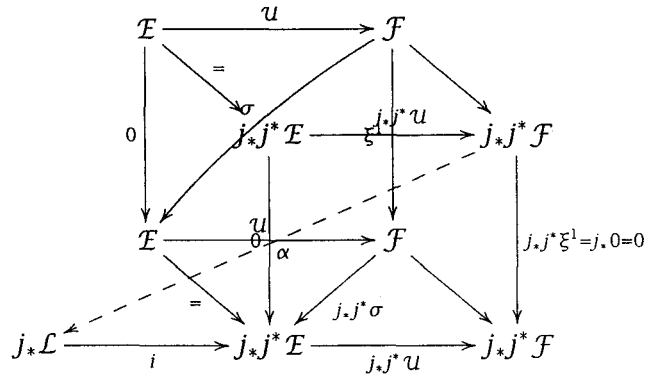
La clase de equivalencia módulo homotopía del morfismo  $\xi$  es la misma que la del  $(\xi^0, \xi^1) - (\sigma \circ \mathcal{U}, \mathcal{U} \circ \sigma)$ , pues esta última es homotópicamente nula (un operador de homotopía es precisamente  $\sigma$ ), pero esto vale  $(0, \xi^1 - \mathcal{U} \circ \sigma)$  luego, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\xi^0 = 0$ ; con lo que la situación que nos queda es la siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 0 \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \xi^1 \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}
 \end{array}$$

de tal forma que  $\xi^1 \circ \mathcal{U} = 0$   
 $\exists \sigma' / (-\mathcal{U}) \circ \sigma' = \xi^1$  Luego la cuestión se reduce a si  $\mathcal{U} \circ \sigma' \circ \mathcal{U}$  es nulo o no.

<sup>1</sup>La restricción al abierto  $U$  del morfismo  $\mathcal{U}$  es sobreyectivo, con lo que la restricción del operador de homotopía  $\sigma$  nos solucionaría la cuestión, aunque sólo en el abierto





$\sigma'$  determina  $j_*j^*\sigma'$ , que se factoriza a través de  $j_*\mathcal{L}$ , luego existe  $\alpha : j_*j^*F \rightarrow j_*\mathcal{L}$  tal que  $i \circ \alpha = j_*j^*\sigma'$ , pero como  $\alpha$  va de imagen directa en imagen directa, queda determinada a su vez por su valor en el abierto, esto es por  $j^*\alpha : j^*F \rightarrow \mathcal{L}$ .

Veamos la condición sobre  $\alpha$  (o sobre  $j^*\alpha$ ) para que  $\mathcal{U} \circ \sigma' \circ \mathcal{U} = 0$ , para ello reconstruyamos los elementos que determinan los haces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &\longleftrightarrow ((E^H)^{inv}, E^H, -) \\
 \mathcal{F} &\longleftrightarrow (F, \text{Coker } \lambda, V) \\
 \mathcal{U} &\longleftrightarrow (\bar{u}, q) \\
 j^*\alpha &\longleftrightarrow \mu : \text{Coker } \lambda \rightarrow E \\
 \alpha &\longleftrightarrow (\mu|_{inv}, \mu) \\
 \sigma' &\longleftrightarrow \begin{cases} F & \xrightarrow{v} & (\text{Coker } \lambda)^{inv} & \xrightarrow{\mu|_{inv}} & E^{inv} & \xrightarrow{\lambda} & (E^H)^{inv} \\ \text{Coker } \lambda & \xrightarrow{1} & \text{Coker } \lambda & \xrightarrow{\mu} & E & \xrightarrow{\lambda} & E^H \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\mathcal{U}\sigma'\mathcal{U}$  viene dado, pues, por la composición

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} (E^H)^{inv} & \xrightarrow{\bar{u}} & F & \xrightarrow{v} & (\text{Coker } \lambda)^{inv} & \xrightarrow{\mu|_{inv}} & E^{inv} & \xrightarrow{\lambda} & (E^H)^{inv} & \xrightarrow{\bar{u}} & F \\ E^H & \xrightarrow{q} & \text{Coker } \lambda & \xrightarrow{1} & \text{Coker } \lambda & \xrightarrow{\mu} & E & \xrightarrow{\lambda} & E^H & \xrightarrow{q} & \text{Coker } \lambda \end{array} \right.$$

Para que  $\mathcal{U}\sigma'\mathcal{U}$  sea nulo, sólo lo hay que tener en cuenta la primera línea, ya que la segunda es nula por serlo la composición de  $\lambda$

y  $q$ ; luego lo que buscamos es un  $\mu : \text{Coker } \lambda \rightarrow E$  (pues  $\sigma'$  viene dado por  $V, \lambda$  y por él) que sea  $H$ -morfismo y verifique

$$0 \equiv (E^H)^{inv} \xrightarrow{\bar{u}} F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \xrightarrow{\mu} E^{inv} \xrightarrow{\lambda} (E^H)^{inv} \xrightarrow{\bar{u}} F$$

o lo que es equivalente

$$0 \equiv E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \xrightarrow{\mu} E^{inv} \rightarrow E \xrightarrow{u} F$$

$$\boxed{u \circ \mu \circ V \circ u = 0}$$

Una vez encontrado el morfismo de representación  $\mu$ , y por tanto  $\sigma'$ , hay que ver si  $(0, \xi^1 = \mathcal{U} \circ \sigma')$  es homotópicamente nulo, es decir, si existe  $\tau : \mathcal{F} \rightarrow E$  verificando  $\xi^1 = \mathcal{U} \circ \tau$  y  $\tau \circ \mathcal{U} = 0$ .

Como antes, esta  $\tau$  también viene determinada por su restricción al abierto  $j^*\tau$ , y corresponde a un  $\nu : \text{Coker } \lambda \rightarrow E$  morfismo de representación verificando las condiciones de  $\mu$  y además

$$\begin{cases} \tau \circ \mathcal{U} = 0 & (a) \\ \mathcal{U} \circ \tau = \mathcal{U} \circ \sigma' & (b) \end{cases}$$

La condición (a) implica:

- en el abierto es  $E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda \xrightarrow{1} \text{Coker } \lambda \xrightarrow{\nu} E \xrightarrow{\lambda} E^H$ , que vale  $j^*\tau \circ q$ , luego  $\boxed{\lambda \circ \nu \circ q = 0}$
- en el cerrado es  $(E^H)^{inv} \xrightarrow{\bar{u}} F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \xrightarrow{\nu} E^{inv} \xrightarrow{\lambda} (E^H)^{inv}$ , que vale  $i^*\tau \circ \bar{u}$ , luego  $\boxed{\lambda \circ \nu \circ V \circ \bar{u} = 0}$

La condición (b):

- en el abierto es  $\text{Coker } \lambda \xrightarrow{1} \text{Coker } \lambda \xrightarrow{\nu} E \xrightarrow{\lambda} E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda$ , que vale cero siempre.
- en el cerrado corresponde a  $\boxed{\bar{u} \circ \lambda \circ \nu \circ V = \bar{u} \circ \lambda \circ \mu \circ V}$

De hecho, estas condiciones implican que  $\tau = 0$ , pues  $j^*\tau$  es nulo (por ser  $j^*\mathcal{U}$  sobre) y por ser  $E = j_*j^*E$  se tiene que  $j^*\tau$  determina  $\tau$ . Esto prueba que, en realidad, el hecho de que  $\xi$  sea homotópicamente nulo equivale a que  $\xi$  sea nulo.

Viéndolo trozo a trozo,  $\lambda \circ \nu \circ q = 0$  junto con la sobreyectividad de  $q$  y la inyectividad de  $\lambda$  nos da  $\nu = 0$ , luego esta  $\nu$ , si existe, debe ser 0, con lo que  $\bar{u} \circ \lambda \circ \mu \circ V$  sería 0.

### ■ Un caso concreto

Para construir un contraejemplo, partamos del par  $E \rightrightarrows F$  siguiente:  $H$  grupo cíclico de orden 2 y

$$E = F = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^2 \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nu_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} \\ 0 & n_{22} \end{pmatrix}$$

El sistema local en el abierto viene dado por  $E$  y la acción de  $H$ , que en este caso es  $1 + \nu_{-1} \circ u = Id$

El haz  $\boxed{\mathcal{E}}$  =  $j_* p_* p^* \mathcal{L}$  que ,expresado respecto de la estratificación  $\{U, 0\}$  vale:

$$\bullet \mathcal{E}|_U = p_* p^* \mathcal{L} \longleftrightarrow E^H \quad \{A(h)\}_{h \in H}$$

$$A(-1)(\sigma \mapsto e_\sigma) = \{\sigma \mapsto -1e_{(-1)\sigma}\}, \text{ es decir,}$$

$$A(-1)(e_1, e_{-1}) = (-1e_{-1}, -1e_1) = (e_{-1}, e_1)$$

$$\bullet \mathcal{E}_0 \longleftrightarrow (E^H)^{inv} \cong E \text{ donde } (E^H)^{inv} = \{(e_1, e_{-1}) \in E^H / e_1 = e_{-1}\} \longleftrightarrow E$$

donde la acción de  $H$  es la identidad.

El haz  $\boxed{\mathcal{F}}$  también expresado respecto de la estratificación

$$\bullet \mathcal{F}|_U = \text{Coker} (\mathcal{L} \xrightarrow{\lambda} p_* p^* \mathcal{L}) \longleftrightarrow \text{Coker} (E \xrightarrow{\lambda} E^H)$$

$$E \xrightarrow{\lambda} E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda = \{\underline{e} \in E^H / e_1 = 0\}$$

donde  $\lambda(e) = \{e, (-1)e\} = \{e, e\}$ , y siempre podemos identificar el conúcleo de  $\lambda$  con  $E^{\#(H)-1}$

$$\bullet \mathcal{F}_0 = F$$

y el morfismo de pegado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 \longrightarrow i^* j_* \mathcal{F}|_U &\longleftarrow F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \\ &f \mapsto q(\sigma \mapsto -\nu_\sigma(f)) \\ &q(0, -\nu_{-1}(f)) \end{aligned}$$

Ahora el morfismo  $\boxed{\mathcal{U}}$  :  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  viene dado por

$$\bullet \text{ en } U, q : E^H \rightarrow \text{Coker } \lambda$$

- en 0,  $u : E \rightarrow F$   
y los morfismos  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F} : \boxed{\mathcal{V}_h}$
- en  $U$ ,  $(p_* p^* \mathcal{L} \leftarrow \text{Coker } \lambda) \longleftrightarrow (E^H \xleftarrow{\omega_h} \text{Coker } \lambda)$   
 $\omega_h(e) = A(h)e - e$ , esto es  $\omega_{-1}(0, e) = (e, 0) - (0, e) = (e, -e)$
- en 0,  $E \xleftarrow{v_h} F$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}_0 & & E & \xrightarrow{u} & F & & \mathcal{F}_0 \\
 & & \downarrow c & & \downarrow v & & \\
 (j_* j^* \mathcal{E})_0 & & (E^H)^{inv} & \xrightarrow{q} & (\text{Coker } \lambda)^{inv} & & (j_* j^* \mathcal{F})_0 \\
 & & & & \xleftarrow{\omega_{-1}} & & 
 \end{array}$$

$$\omega_{-1}(V(f)) = \omega_{-1}(q\{\sigma \mapsto -v_\sigma(f)\}) = \omega_{-1}(e) = A(-1)e - e = \{\sigma \mapsto -1e_{-1\sigma} - e_\sigma\} = (e_{-1}, -e_{-1}) = (-v_{-1}(f), v_1(f)) = c(v_1(f)).$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 \xi^0=0 \downarrow & \searrow \sigma & \downarrow \mathcal{U}\sigma=\xi^1 \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}
 \end{array}$$

donde el morfismo  $\sigma$  viene dado por

- $\sigma|_U \quad \text{Coker } \lambda \xrightarrow{1} \text{Coker } \lambda \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\lambda} E^H$
- $\sigma_0 \quad F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \xrightarrow{\mu_{inv}} E^{inv} \xrightarrow{\lambda} (E^H)^{inv}$

El morfismo  $\mathcal{U} \circ \sigma$  viene dado por

$$\left. \begin{array}{l}
 (\mathcal{U} \circ \sigma)|_U : \text{Coker } \lambda \xrightarrow{1} \text{Coker } \lambda \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\lambda} E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda \\
 (\mathcal{U} \circ \sigma)_0 : F \xrightarrow{V} (\text{Coker } \lambda)^{inv} \xrightarrow{\mu_{inv}} E^{inv} \xrightarrow{\lambda} (E^H)^{inv} \xrightarrow{\bar{u}} F
 \end{array} \right\}$$

Pero la fibra en el origen  $(\mathcal{U} \circ \sigma)_0$  vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_{12} \\ 0 & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ que}$$

no es nulo, luego  $\xi^1 \neq 0$  por no ser homotópicamente nulo.

Ahora bien, el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\ 0 \downarrow & & \downarrow \mathcal{U} \circ \sigma \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \end{array}$$

es 0 en la categoría derivada ?  $\xi^* : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$  es cero en la categoría derivada si y sólo si existe un  $s^* : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$  casi-isomorfismo tal que  $\xi^* \circ s^* \sim 0$

El complejo  $\mathcal{C}^*$  lo podemos suponer acotado superiormente por su grado 1, pues  $\mathcal{K}$  concentrado en grados 0 y 1; así podemos considerar  $\sigma_{\leq 1} \mathcal{C}^*$

$$\mathcal{C}^* : \dots \rightarrow C^0 \xrightarrow{d_C^0} C^1 \rightarrow 0$$

con  $j^* d_C^0$  sobreyectivo (por ser  $s$  casi-isomorfismo).

Ya hemos visto que si  $\xi \circ s$  es homotópicamente nulo, se tiene que es nulo. Así, si la fibra en 0 no es nula,  $\xi \circ s$  no puede ser 0 en la categoría derivada. Si consideramos la fibra en el 0

$$\begin{array}{ccc} C_0^0 & \xrightarrow{(d_C^0)_0} & C_0^1 \\ s_0^0 \downarrow & \# & \downarrow s_0^1 \\ E & \xrightarrow{u} & F \\ 0 \downarrow & \# & \downarrow \xi_0^1 \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

$$\overline{s}_0^1 : C_0^1 / \text{Im}(d_C^0)_0 \xrightarrow{\sim} F / \text{Im}u$$

como  $\overline{s}_0^1$  es sobre, para todo  $y \in F$  existirá un  $z \in C_0^1$  tal que  $y - s_0^1(z) \in \text{Im}u$ , luego  $y - s_0^1(z) = u(x)$  para un  $x \in E$ , con lo que  $y - u(x) = s_0^1(z) \in \text{Im}s_0^1$ .

Si la fibra en 0 de  $\xi \circ s$  fuese cero, tendríamos  $0 = \xi_0^1(y - u(x)) = \xi_0^1(y) - \xi_0^1 u(x) = \xi_0^1(y)$ , con lo que sería  $\xi_0^1 = 0$ , lo que es contradictorio con la expresión de  $\xi_0$  que hemos calculado.

## V-D EL FUNTOR CASI-INVERSO

Para poder definir un funtor casi-inverso de  $\mathcal{Y}$  necesitamos construir haces perversos cuya imagen por el funtor antes descrito sea la requerida, y para ello vamos a utilizar los siguientes:

### ■ Ingredientes

**Definición V-D.1** ■ Definimos el funtor  $\mathbb{F}$  de antes como la composición de  $F : \mathcal{C}_U \rightarrow \mathcal{A}_U$  y  $G : \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{C}_U$ , donde  $\mathcal{C}_U$  es una categoría adecuada y los funtores son tales que  $F$  es exacto a la izquierda,  $G$  exacto y  $F$  es el adjunto a derecha de  $G$ , verificando que el funtor derivado de  $j_* \circ F \circ G$  sea la composición de los funtores derivados respectivos (por ejemplo si cada uno de ellos envía los objetos inyectivos en objetos inyectivos para el funtor situado a su izquierda) y que  $\mathbb{R}^i j_* \mathbb{F}(A) = 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}_U$ .

**Definición V-D.2** ■ Definimos el funtor conúcleo  $\mathbb{Q} = \text{Coker } \alpha$ , exacto si  $\mathbb{F}$  lo es (ver proposición IV-C.1), como el que hace que la sucesión siguiente sea exacta

$$0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

**Definición V-D.3** ■ El morfismo  $\gamma : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{F}$  es el que verifica  $\gamma \circ q = \alpha_{\mathbb{F}} - \mathbb{F}\alpha$

Este morfismo se construye utilizando la propiedad universal del conúcleo, de la siguiente manera; si a la sucesión exacta anterior le aplicamos el funtor  $\mathbb{F}$  tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_{\mathbb{F}} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F} & \xrightarrow{\mathbb{F}\alpha} & \mathbb{F}\mathbb{F} & \xrightarrow{\mathbb{F}q} & \mathbb{F}\mathbb{Q} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

la conmutatividad del primer cuadrado nos da que la composición de  $\alpha_{\mathbb{F}} - \mathbb{F}\alpha$  con  $\alpha$  es nulo, luego debe factorizar a través del conúcleo, de donde la existencia y unicidad de  $\gamma$ .

**Definición V-D.4** ■ Llamamos resolución truncada de longitud  $d$  de un objeto  $A$  a una resolución construida según el método IV-C.2 hasta grado  $d - 1$ , y completada con el conúcleo de orden  $d$ ,

$$\mathbb{F}A \xrightarrow{g} \mathbb{F}QA \xrightarrow{g_Q} \dots \xrightarrow{g_{Q^{d-2}}} \mathbb{F}Q^{d-1}A \xrightarrow{q_{Q^{d-1}}} Q^d$$

**Nota V-D.5** ■ Un complejo de este tipo sólo tiene homología en grado 0, pues el núcleo de  $g_{Q^{i+1}}$  se identifica con el de  $q_{Q^{i+1}}$  por la inyectividad de  $\alpha_{Q^{i+2}}$ , mientras que la imagen de  $g_{Q^i}$  se identifica con la de  $\alpha_{Q^{i+1}}$  por sobreyectividad de  $q_{Q^i}$ , pero ambos objetos son iguales, con lo que grupo vale 0; por último, la sobreyectividad de  $q$  nos garantiza el resultado en el grado  $d$ . Así, está concentrado en grado 0.

**Proposición V-D.6** ■ Consideremos un par de funtores entre categorías abelianas  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tales que  $F$  es exacto a la izquierda,  $G$  es exacto y adjunto a la izquierda de  $F$  ( $\text{Hom}(A, F(B)) \simeq \text{Hom}(G(A), B)$ ) para todo  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ . Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{G(\alpha)} GFG \xrightarrow{G(q)} GQ \rightarrow 0$$

es escindida, de escisión  $\mu$  y de retracción  $\nu : GFG \rightarrow G$  verificándose que  $\nu \circ G(\alpha) = 1_G$ , lo que implica que

$$0 \rightarrow \mathbb{F} \xrightarrow{\mathbb{F}(\alpha)} \mathbb{F}\mathbb{F} \xrightarrow{\mathbb{F}(q)} \mathbb{F}Q \rightarrow 0$$

también es escindida, y  $F(\nu) \circ \mathbb{F}(\alpha) = 1_{\mathbb{F}}$ . Además también es escindida la

$$0 \rightarrow \mathbb{F} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{F}}} \mathbb{F}\mathbb{F} \xrightarrow{q_{\mathbb{F}}} Q\mathbb{F} \rightarrow 0$$

cuya retracción es la misma que la de la anterior, es decir,  $F(\nu) \circ \alpha_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}$  (cf. [HY77])

**Demostración.** Sean  $\alpha : 1 \rightarrow F \circ G$  y  $\beta : G \circ F \rightarrow 1$  las transformaciones naturales en las categorías  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  respectivamente.

Para todos  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  se tiene

$$\text{Hom}(A, F(B)) \simeq \text{Hom}(G(A), B)$$

de la forma siguiente:

$$h \rightarrow \beta_B \circ G(h)$$

$$F(g) \circ \alpha_A \leftarrow g$$

Como estos morfismos son uno el inverso del otro,

$$\forall h \in \text{Hom}(A, F(B)) \text{ se tiene } F(\beta_B) \circ FG(h) \circ \alpha_A = h$$

$$\forall g \in \text{Hom}(G(A), B) \text{ se tiene } \beta_B \circ GF(g) \circ G(\alpha_A) = g$$

En esta segunda expresión, haciendo  $B = G(A)$  y  $g = 1_{G(A)}$ , se tiene  $\beta_{G(A)} \circ 1 \circ G(\alpha_A) = 1$ , luego la retracción  $\nu$  buscada es, precisamente  $\beta_{G(A)}$ , luego la primera sucesión es ya escindida.

Aplicando  $F$  a lo anterior tenemos  $F(\beta_{G(A)}) \circ FG(\alpha_A) = 1$ , luego la segunda sucesión también es escindida, y retracción es  $F(\beta) = F(\nu)$ .

Si ponemos  $h = 1_{FG(A)}$ ,  $F(\beta_{G(A)}) \circ FG(1) \circ \alpha_{FG(A)} = 1$ , luego la misma retracción de  $\mathbb{F}(\alpha)$  sirve también para  $\alpha_{\mathbb{F}}$ .

---

**Corolario V-D.7** ■ Se tienen las dos siguientes propiedades de  $\mathbb{F}(q)$

1.  $\mathbb{F}(q) \circ \gamma = \alpha_{\mathbb{Q}}$
2.  $\mathbb{F}(q) \circ F(\mu) = 1_{\mathbb{F}\mathbb{Q}}$  donde  $\mu$  es la escisión anterior.

---

**Demostración.** Para el primer resultado basta componer a la derecha con  $q$ , que es sobreyectivo, y el segundo se tiene aplicando  $F$  a la igualdad  $G(q) \circ \mu = 1_{G\mathbb{Q}}$



■ Definiciones

**Definición V-D.8** ■ Definimos el funtor  $\Phi$  como la composición de  $\Psi$  y el funtor “end”. Este funtor va de  $Perv^d(X)$  en  $Perv^{d-1}(X)$  y figura en un triángulo funtorial

$$1 \longrightarrow s \circ \Psi \longrightarrow \Phi$$

Además, si comparamos

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & j^* \mathcal{K} & \longrightarrow & j^* s \Psi \mathcal{K} & \longrightarrow & j^* \Phi \mathcal{K} \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow \alpha & & \uparrow \simeq & & \\
 & & & & \mathbb{E} j^* \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{Q} j^* \mathcal{K}
 \end{array}$$

tenemos un isomorfismo  $\sigma : \mathbb{Q} j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi \mathcal{K}$ ; si aplicamos dos veces este funtor tendríamos  $j^* \Phi^2 \mathcal{K} \simeq \mathbb{Q} j^* \Phi \mathcal{K} \simeq \mathbb{Q} \mathbb{Q} j^* \mathcal{K}$ , e iterando el proceso tendríamos un isomorfismo (construido como composición de los obtenidos en cada paso), que notaremos

$$\sigma^d : \mathbb{Q}^d j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi^d(\mathcal{K})$$

**Definición V-D.9** ■ Para probar que  $\Psi_F$  es una equivalencia de categorías utilizaremos los siguientes funtores:

1. Consideremos el funtor  $D_d : Perv^d(X) \rightarrow \mathcal{B}^d$  que a  $\mathcal{K}$  le hace corresponder:

$$(s\Psi(\mathcal{K}), \Phi^d(\mathcal{K}), w : j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} j^* \mathcal{K} \rightarrow \Phi^d(\mathcal{K}), \sigma^d : \mathbb{Q}^d j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi^d(\mathcal{K}))$$

Este funtor “deshace” el haz  $d$ -perverso, produciendo una cuaterna formada por dos haces y dos morfismos, el segundo de los cuales es isomorfismo.

2. Definimos el funtor  $B_d : \mathcal{B}^d \rightarrow Perv^d$ , que a cada elemento  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$  de la categoría  $\mathcal{B}^d$  le asocia el complejo

$$j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \xrightarrow{j_* g} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \xrightarrow{j_* g_{\mathbb{Q}}} \dots \longrightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \mathcal{L} \xrightarrow{j_* g_{\mathbb{Q}^{d-2}}} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{F}$$

Este funtor reconstruye un haz perverso a partir de la cuaterna inicial.

3. Definimos el funtor  $A_d : \text{Perv}^d \rightarrow {}'\mathcal{B}^d$ , como

$$A_d(\mathcal{K}) := (j^* \mathcal{K}, \Phi(\mathcal{K}), q, \sigma)$$

que coincide con el funtor  $\Psi$  en sus tres primeras componentes, y  $\sigma$  es el isomorfismo de antes  $\mathbb{Q}j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi \mathcal{K}$ .

4. Definimos  $C_d : {}'\mathcal{B}^d \rightarrow \text{Perv}^d$ , como el funtor cono  $[-1]$  de V-B

5. Definimos el funtor  $E_d : {}'\mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d$ , con

$$E_d(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) := (\mathcal{L}, \Phi^{d-1}(\mathcal{K}), q : j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \rightarrow \Phi^{d-1}(\mathcal{K}), \sigma)$$

donde  $\sigma : \mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \simeq j^* \Phi^{d-1} \mathcal{K}$ . Este funtor actúa sobre la segunda componente del objeto de partida como el  $D_{d-1}$ , deshaciendo sólomente el haz  $d-1$ -perverso de la cuaterna de partida.

6. Definimos  $F_d : \mathcal{B}^d \rightarrow {}'\mathcal{B}^d$ , con

$$F_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) := (\mathcal{L}, B_{d-1}(\mathbb{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma), j_* g, q)$$

Este funtor reconstruye un haz  $d-1$ -perverso como segundo elemento de la cuaterna.

**Teorema V-D.10** ■ Sea  $d \geq 1$  y  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \in \mathcal{B}^d$ , Entonces  $\mathcal{K} := B_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \in \text{Perv}^d(X)$  y  $D_d(\mathcal{K})$  es casi-isomorfo naturalmente al objeto de partida.

**Demostración.**

En primer lugar veamos que este objeto es un haz  $d$ -perverso; para ello utilizaremos el teorema de caracterización de los haces perversos III-A.4

- El complejo vale 0 fuera de los grados  $[0, d]$ , luego su cohomología es nula fuera de ellos, con lo que está concentrado en grados  $[0, d]$ .

- Si consideramos su restricción al abierto tenemos

$$\mathbb{F}\mathcal{L} \xrightarrow{g} \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2}\mathcal{L} \xrightarrow{g_{\mathbb{Q}^{d-2}}} \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}\mathcal{L} \xrightarrow{j^*u} j^*\mathcal{F}$$

que es la resolución truncada de longitud  $d$  de  $\mathcal{L}$ , por el isomorfismo  $\sigma : \mathbb{Q}^d \mathcal{L} \simeq j^*\mathcal{F}$ .

- $h^n \mathbb{R}i^! \mathcal{K} = 0$  si  $n < d$ , ya que podemos considerar una resolución inyectiva de  $I$  de  $\mathcal{K}$  que coincide con  $\mathcal{K}$  hasta grado  $d-1$ ; ahora, como  $i^! j_* = 0$ , se tiene que  $i^! I$  vale cero hasta grado  $d-1$ . Este complejo verifica que  $h^n i^! I = 0$  si  $n < d$ .
- En cuanto a la nulidad de  $h^n i^* \mathcal{K}$  para  $n > d$ , queda garantizada porque el complejo en cuestión ya es nulo desde grado  $d$  en adelante, luego lo mismo le ocurre a su restricción al cerrado.

Por tanto, este objeto

$$j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \xrightarrow{j_*g} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow \dots \longrightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2}\mathcal{L} \xrightarrow{j_*g_{\mathbb{Q}^{d-2}}} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}\mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{F}$$

es realmente un haz  $d$ -perverso con respecto a la estratificación  $\Sigma$ .

Ahora vamos a calcular la imagen de este complejo por  $\Psi$ , y para ello empezamos construyendo la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow j_* \mathbb{F}j^*(\mathcal{K}) \oplus \text{cono}(\mathcal{K})$$

que, omitiendo  $\mathcal{L}$  en todos los casos detrás de la última  $\mathbb{F}$  o  $\mathbb{Q}$ , sería de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K} & & j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K}) \oplus \text{cono}(\mathcal{K}) \\
 \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \oplus (0 \oplus j_*\mathbb{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 j_*\mathbb{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*\alpha_{\mathbb{F}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \oplus (j_*\mathbb{F} \oplus j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}) \\
 \downarrow j_*g & & \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathcal{Q}} \oplus \begin{pmatrix} j_*g & 1 \\ 0 & -j_*g_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{Q} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathcal{Q}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathcal{Q} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathcal{Q} \oplus j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^2) \\
 \downarrow j_*g_{\mathcal{Q}} & & \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathcal{Q}^2} \oplus \begin{pmatrix} j_*g_{\mathcal{Q}} & 1 \\ 0 & -j_*g_{\mathcal{Q}^2} \end{pmatrix} \\
 \vdots & & \vdots \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-2} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-2} \oplus j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-1}) \\
 \downarrow j_*g_{\mathcal{Q}^{d-2}} & & \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathcal{Q}^{d-1}} \oplus \begin{pmatrix} j_*g_{\mathcal{Q}^{d-2}} & 1 \\ 0 & -u \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-1}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-1} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F}) \\
 \downarrow u & & \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathcal{Q}^{d-1}} \oplus \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*\alpha_{\mathcal{Q}^d} \circ \text{adj} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathcal{Q}^d \oplus (\mathcal{F} \oplus 0)
 \end{array}$$

Si ahora calculamos el conúcleo  $\mathcal{Q}$  con sus correspondientes derivaciones (según la proposición IV-B.8) obtendremos

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{K} & & j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K}) \oplus \text{cono}(\mathcal{K}) & & \mathcal{Q} \\
 \\
 0 & \longrightarrow & 0 \oplus (0 \oplus j_*\mathbb{F}) & \longrightarrow & 0 \oplus j_*\mathbb{F} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -j_*\alpha_{\mathbb{F}} \\ 0 & -j_*g \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F} & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \oplus (j_*\mathbb{F} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}) & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}} \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q} & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathbb{Q} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^2) & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^2} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}^2} \end{pmatrix} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}) & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-3}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2}} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}^{d-2}} \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus (j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F}) & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 0 & -u \end{pmatrix} \\
 \mathcal{F} & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^d \oplus (\mathcal{F} \oplus 0) & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^d \oplus 0 \\
 & & & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-1}} & -j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Por tanto, el par obtenido al aplicar el funtor a nuestro complejo  $\mathcal{K}$  sería  $(j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K}), \mathcal{Q}, q)$ , con  $q$  el morfismo inducido por la inclusión de  $j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K})$  en  $j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K}) \oplus \text{cono}(\mathcal{K})$  y el paso al conúcleo.

Obsérvese que el conúcleo  $\mathcal{Q}$  es exactamente el cono del morfismo  $-j_*\alpha_{\mathbb{F}} : \mathcal{K} \rightarrow j_*\mathbb{F}j^*\mathcal{K}$

La inclusión viene dada por una matriz  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , mientras que el

paso al cociente es  $\begin{pmatrix} 1 & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  para  $0 \leq i \leq d-1$ , mientras que en el nivel  $-1$  es  $(0, 0, 1)$  y en el  $d$  es  $(1, -j_*(\alpha_{\mathbb{Q}^d}) \circ \text{adj})$ , con lo que en todos los casos obtenemos la primera columna de las matrices de paso

al cociente, así:

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K}) & \xrightarrow{q} & \mathcal{Q} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \oplus j_*\mathbb{F} \\
 \downarrow & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow \left( \begin{array}{cc} 0 & -j_*\alpha_{\mathbb{F}} \\ 0 & -j_*g \end{array} \right) \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{F} & \xrightarrow{\quad} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q} \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}g & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow \left( \begin{array}{cc} j_*\mathbb{F}g & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}} \end{array} \right) \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^2 \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}} & & \downarrow \left( \begin{array}{cc} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^2} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}^2} \end{array} \right) \\
 \vdots & & \vdots \\
 j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-3}} & \downarrow \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow \left( \begin{array}{cc} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-3}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2}} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}^{d-2}} \end{array} \right) \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} & \xrightarrow{\quad} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow \left( \begin{array}{cc} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 0 & -u \end{array} \right) \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\quad} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F} \\
 \downarrow j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-1}} & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \downarrow \left( \begin{array}{cc} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-1}} & -j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^d & \xrightarrow{\quad} & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^d \oplus 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Ahora vamos a probar que este par obtenido es casi-isomorfo a uno obtenido separando el término de grado 0 del resto, lo que nos daría un complejo como el del principio, pero referido a  $\mathcal{QL}$  y, por tanto, con longitud una unidad menor:

$$j_*\mathbb{F}\mathcal{QL} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F} = B_{d-1}(\mathcal{QL}, \mathcal{F}, u, \sigma)$$

Iterando el proceso llegaríamos al extremo tras  $d-1$  pasos adicionales.

En primer lugar veamos que el complejo que vale únicamente  $j_*\mathbb{F}$  en grado cero, es casi isomorfo a  $j_*\mathbb{F}j^*(\mathcal{K})$ . Como ambos están centrados en grado 0 podemos definir un casi-isomorfismo que vale 0

en todos los niveles y  $j_*\mathbb{F}\alpha$  en el nivel 0, obteniendo así

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 j_*\mathbb{F} & \xrightarrow{j_*\mathbb{F}\alpha} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \\
 \downarrow & & \downarrow j_*\mathbb{F}g \\
 0 & \xrightarrow{0} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}Q \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

de manera trivial es morfismo de complejos, pues  $j_*\mathbb{F}g \circ j_*\mathbb{F}\alpha = j_*\mathbb{F}(\alpha_Q \circ q \circ \alpha) = j_*\mathbb{F}(\alpha_Q \circ 0) = 0$  y el núcleo de  $j_*\mathbb{F}g$  es, por inyectividad de  $\alpha_Q$ , el de  $j_*\mathbb{F}q$ , que se identifica con  $j_*\mathbb{F}$  a través de  $j_*\mathbb{F}\alpha$

Queda ver que

$$0 \longrightarrow j_*\mathbb{F}Q \longrightarrow j_*\mathbb{F}Q^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow j_*\mathbb{F}Q^{d-2} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

es casi-isomorfo a

$$\mathcal{Q} : j_*\mathbb{F} \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathbb{F} \oplus j_*\mathbb{F}Q \longrightarrow \dots \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathbb{F}Q^{d-1} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow j_*\mathbb{F}Q^d \oplus 0$$

calculado antes, y para ello definimos un morfismo de complejos según la proposición V-D.12 que nos da isomorfismo en homología.

---

**Definición V-D.11** ■ Definimos  $\mathcal{Q} : \mathcal{B}^{d-1} \longrightarrow \text{Perv}^{d-1}(X)$  el funtor conúcleo (calculado según el teorema V-D.10) de  $\mathcal{K} \longrightarrow j_*\mathbb{F}j^*\mathcal{K} \oplus$  cono  $\mathcal{K}$ , que a cada cuaterna  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$  le hace corresponder el complejo como el de antes

$$j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathcal{L} \oplus j_*\mathbb{F}Q\mathcal{L} \longrightarrow \dots \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathbb{F}Q^{d-1}\mathcal{L} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow j_*\mathbb{F}Q^d\mathcal{L} \oplus 0$$


---

---

**Proposición V-D.12** ■ Para todo complejo  $\mathcal{K}$  construido según el teorema V-D.10, Existe un casi-isomorfismo natural  $B_{d-1}(\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \simeq \mathcal{Q}(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$

---

**Demostración.**

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow (j_* \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} - j_* \alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ adj) \\
 0 & \longrightarrow & j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^d \oplus 0
 \end{array}$$

Consideremos la sucesión  $0 \rightarrow \mathbb{Q}^{d-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}$ , completando con el conúcleo obtendremos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}^{d-1} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}} \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \xrightarrow{q_{\mathbb{Q}^{d-1}}} \mathbb{Q}^d \rightarrow 0$$

Si a esta sucesión exacta aplicamos el funtor (exacto)  $\mathbb{F}$  tendremos

$$0 \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^d \rightarrow 0$$

inyectando la primera sucesión exacta en la segunda obtendríamos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{q_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{Q}^d \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} & & \downarrow \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} & & \downarrow \alpha_{\mathbb{Q}^d} \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{F}\mathbb{Q}^d \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Se tiene  $\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} = \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}$ , con lo que

$$[\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} - \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}] \circ \alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} = 0$$

entonces existe una única  $\gamma_{\mathbb{Q}^d} : \mathbb{Q}^d \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}$  que hace conmutativo el triángulo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{q_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{Q}^d \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} - \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} & \nearrow \gamma_{\mathbb{Q}^d} & \\
 \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & & 
 \end{array}$$

$$\gamma_{\mathbb{Q}^d} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-1}} = \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} - \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}$$

Sea  $\mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} : \mathcal{F} \rightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}$ , donde  $adj : \mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F}$ .  
 $f \mapsto j_*(\gamma_{\mathbb{Q}^d}) \circ adj$



tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{q_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \mathbb{Q}^d \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \searrow^{j^*u} & \downarrow \sigma \\
 & & & & & & j^*\mathcal{F} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

con lo que identificando  $\mathbb{Q}^d$  con  $j^*\mathcal{F}$  y

$$\begin{array}{ccc}
 \text{adj: } \mathcal{F} & \longrightarrow & j_*j^*\mathcal{F} \equiv j_*\mathbb{Q}^d \\
 & \searrow^{\mu_{\mathbb{Q}^{d-1}}} & \downarrow j_*(\gamma_{\mathbb{Q}^d}) \\
 & & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}
 \end{array}$$

Para que

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow (j_*\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} - j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj}) \\
 0 & \longrightarrow & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^d \oplus 0
 \end{array}$$

sea parte de un morfismo de complejos debe verificar que

$$0 = j_*\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} - j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} \circ 1 = (*)$$

Pero  $j_*\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} = j_*\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ (j_*\gamma_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj}) = j_*(\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \gamma_{\mathbb{Q}^d}) \circ \text{adj}$ .

Por otra parte

$$\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \gamma_{\mathbb{Q}^d} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-1}} = \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} - \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} = \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} = \alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-1}},$$

luego la sobreyectividad de  $q_{\mathbb{Q}^{d-1}}$  implica que  $\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \gamma_{\mathbb{Q}^d} = \alpha_{\mathbb{Q}^d}$

$$(*) = j_*(\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ \gamma_{\mathbb{Q}^d}) \circ \text{adj} - j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} = j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} - j_*\alpha_{\mathbb{Q}^d} \circ \text{adj} = 0$$

Ahora vamos a definir el siguiente nivel

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*? \\ -1 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \\
 \downarrow u & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 0 & -u \end{pmatrix} \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F}
 \end{array}$$

$j_* \mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} \circ j_*? + j_* \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} = \mu_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ u$ , como este morfismo parte de imagen directa a imagen directa, queda determinado por su restricción  $j^*$  y teniendo en cuenta que  $j^*u = q_{\mathbb{Q}^{d-1}}$ , necesitamos que

$$\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-2}} \circ? + \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} = \gamma_{\mathbb{Q}^d} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-1}} = \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}} - \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}$$

$$\mathbb{F}(\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-2}}) \circ? = -\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}$$

luego debe verificarse que  $\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}} (\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-2}} \circ? + 1) = 0$  lo que, unido a la inyectividad de  $\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-1}}$  nos da  $(\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-2}} \circ? + 1) = 0$ , luego  $? = -F(\mu_{\mathbb{Q}^{d-2}})$ , donde  $\mu$  es la escisión definida al principio.

Con lo que tendríamos

$$j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -j_* F\mu_{\mathbb{Q}^{d-2}} \\ -1 \end{pmatrix}} j_* \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \oplus j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}$$

En general, la situación sería:

$$\begin{array}{ccc} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} & \xrightarrow{(-1)^i \begin{pmatrix} j_*? \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i-1} \oplus j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} \\ \downarrow j_* g_{\mathbb{Q}^{d-i}} & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} & -j_* \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} \\ 0 & -j_* g_{\mathbb{Q}^{d-i}} \end{pmatrix} \\ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i+1} & \xrightarrow{(-1)^{i-1} \begin{pmatrix} j_* F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} \oplus j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i+1} \end{array}$$

Para completar a morfismo de complejos necesitaremos que  $(-1)^i [j_* \mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} \circ j_*? - j_* \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}}] = (-1)^{i-1} j_* F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ j_* g_{\mathbb{Q}^{d-i}}$ , lo que se cumple si y sólo si sus restricciones respectivas lo hacen, es decir:  $\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} \circ j_*? - \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} = (-1)F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ g_{\mathbb{Q}^{d-i}}$ , pero el segundo término de esta igualdad es igual a  $-F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \alpha_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-i}}$ , que por funtorialidad de  $\mathbb{F}$  vale  $-F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}}$ , con lo que nuestra igualdad quedaría  $\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} \circ j_*? = \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} - F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} = [1 - F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-i}}] \circ \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}}$

Ahora el término entre corchetes vale  $\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ Fv_{\mathbb{Q}^{d-i}}$ , por las propiedades de  $v$ , luego  $\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i+1}} \circ? = \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ Fv_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} = \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}}$  porque  $v$  es retracción tanto de  $\alpha_{\mathbb{F}}$  como de  $\mathbb{F}\alpha$

Sustituyendo  $g_{\mathbb{Q}^{d-i-1}}$  por su valor,  $\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ q_{\mathbb{Q}^{d-i-1}}$  tenemos  $\mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}} \circ \mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-i-1}} \circ ? = \mathbb{F}\alpha_{\mathbb{Q}^{d-i}}$  lo que, por inyectividad de  $\mathbb{F}\alpha$  nos da  $\mathbb{F}q_{\mathbb{Q}^{d-i-1}} \circ ? = 1$ , luego el morfismo desconocido ha de ser por fuerza la escisión  $F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i-1}}$ , quedando

$$\begin{array}{ccc}
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} & \xrightarrow{(-1)^i \begin{pmatrix} j_*F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i-1}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i-1} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} \\
 \downarrow j_*g_{\mathbb{Q}^{d-i}} & & \downarrow \begin{pmatrix} j_*\mathbb{F}g_{\mathbb{Q}^{d-i-1}} & -j_*\alpha_{\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i}} \\ 0 & -j_*g_{\mathbb{Q}^{d-i}} \end{pmatrix} \\
 j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i+1} & \xrightarrow{(-1)^{i-1} \begin{pmatrix} j_*F\mu_{\mathbb{Q}^{d-i}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i} \oplus j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-i+1}
 \end{array}$$

Con lo que ya tenemos definido un morfismo entre complejos; queda ver ahora que es casi-isomorfismo; como es inyectivo de manera evidente, vamos a calcular el conúcleo de este morfismo de complejos, si es casi-isomorfo a 0 tendremos el casi-isomorfismo buscado:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \oplus j_* \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -j_* \alpha_{\mathcal{F}} \\ 0 & -j_* g \end{pmatrix} \\
 j_* \mathcal{F} \mathcal{Q} & \xrightarrow{(-1)^{d-1} \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} \mu \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathcal{F} \mathcal{F} \oplus j_* \mathcal{F} \mathcal{Q} \\
 j_* g_{\mathcal{Q}} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} g & -j_* \alpha_{\mathcal{F} \mathcal{Q}} \\ 0 & -j_* g_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} \\
 j_* \mathcal{F} \mathcal{Q}^2 & \xrightarrow{(-1)^{d-2} \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} \mu_{\mathcal{Q}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{Q} \oplus j_* \mathcal{F} \mathcal{Q}^2 \\
 j_* g_{\mathcal{Q}^2} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} g_{\mathcal{Q}} & -j_* \alpha_{\mathcal{F} \mathcal{Q}^2} \\ 0 & -j_* g_{\mathcal{Q}^2} \end{pmatrix} \\
 \vdots & & \vdots \\
 j_* g_{\mathcal{Q}^{d-2}} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} g_{\mathcal{Q}^{d-3}} & -j_* \alpha_{\mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-2}} \\ 0 & -j_* g_{\mathcal{Q}^{d-2}} \end{pmatrix} \\
 j_* \mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-1} & \xrightarrow{(-1)^1 \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} \mu_{\mathcal{Q}^{d-2}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-2} \oplus j_* \mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-1} \\
 j_* g_{\mathcal{Q}^{d-1}} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} g_{\mathcal{Q}^{d-2}} & -j_* \alpha_{\mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-1}} \\ 0 & -u \end{pmatrix} \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mu_{\mathcal{Q}^{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}} & j_* \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{Q}^{d-1} \oplus \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} j_* \mathcal{F} g_{\mathcal{Q}^{d-1}} & -j_* \alpha_{\mathcal{Q}^d} \circ adj \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & j_* \mathcal{F} \mathcal{Q}^d \oplus 0
 \end{array}$$

Si ahora calculamos el conúcleo de esta inyección, según la proposición IV-B.8 tendremos

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \oplus j_*F & \xrightarrow{(0,1)} & j_*F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_*F\alpha_F \\
 j_*FQ & \longrightarrow & j_*FF \oplus j_*FQ & \xrightarrow{(1,-j_*F\mu)} & j_*FF \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_*Fg \\
 j_*FQ^2 & \longrightarrow & j_*FFQ \oplus j_*FQ^2 & \xrightarrow{(1,-j_*F\mu_Q)} & j_*FFQ \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \downarrow j_*g_{Q,d-3} \\
 j_*FQ^{d-1} & \longrightarrow & j_*FFQ^{d-2} \oplus j_*FQ^{d-1} & \xrightarrow{(1,-j_*F\mu_{Q^{d-2}})} & j_*FFQ^{d-2} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_*Fg_{Q,d-2} \\
 \mathcal{F} & \longrightarrow & j_*FFQ^{d-1} \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{(1,-\mu_{Q^{d-1}})} & j_*FFQ^{d-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_*Fq_{Q,d-1} \\
 0 & \longrightarrow & j_*FQ^d \oplus 0 & \xrightarrow{(1,0)} & j_*FQ^d
 \end{array}$$

Este conúcleo solamente se diferencia de  $j_*Fj^*(\mathcal{K})$  en que hemos agregado un término en el grado  $-1$ , concretamente  $j_*F$ . Como  $j_*Fj^*(\mathcal{K})$  estaba concentrado en grado  $0$ , este nuevo complejo sólo puede tener cohomología no nulo en grados  $-1$  y  $0$ . La inyectividad de  $j_*F\alpha$  implica que en grado  $-1$  es nulo, y en cuanto al grado  $0$ , el núcleo de  $j_*Fg$  es, por exactitud a la derecha de  $j_*F$  y por ser  $g = \alpha \circ q$  igual al núcleo de  $j_*Fq$ , que coincide con la imagen de  $j_*F\alpha$ , con lo que el  $0$ -ésimo grupo de cohomología vale  $0$  y hemos terminado.

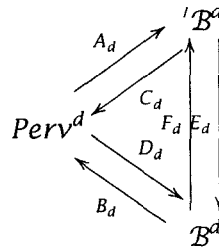
De hecho, este conúcleo es  $j_*Fj^*$  de la resolución de Godement de  $\mathcal{L}$  truncada en grado  $d$ .

Corolario V-D.13 ■ Con las notaciones de V-D el teorema V-D.10 se escribe como

$$A_d \circ B_d \cong F_d$$

■ La equivalencia de categorías

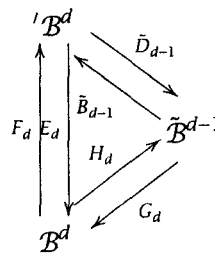
Recordemos que disponemos de tres categorías relacionadas entre sí por los funtores definidos en V-D:



verificándose lo siguiente:

1.  $C_d \circ A_d \simeq Id_{Perv^d}$  por V-B
2.  $A_d \circ B_d \simeq F_d$  por V-D.13
3.  $E_d \circ A_d \simeq D_d$  ya que es igual aplicar el funtor  $\Psi$   $d$  veces a un haz perverso, que hacerlo una sola vez y posteriormente  $d-1$  veces.

**Definición V-D.14** ■ Definimos la categoría auxiliar  $\tilde{\mathcal{B}}^{d-1}$ , cuyos objetos son ternas  $(\mathcal{L}, \mathcal{O}, \epsilon)$  donde  $\mathcal{L}$  es un haz sobre  $U$ ,  $\mathcal{O} = (S, \mathcal{G}, w, \omega) \in \mathcal{B}^{d-1}$ ,  $\epsilon : \mathbb{Q}\mathcal{L} \simeq S = \mathcal{O}_1$  siendo  $\mathcal{O}_1$  la primera componente de la cuaterna  $\mathcal{O}$ ; los morfismos entre objetos se definen de la forma natural. Se tiene un diagrama



donde

- $\tilde{D}_{d-1}(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) := (\mathcal{L}, D_{d-1}(\mathcal{K}), \tau)$ , morfismo inducido por

$$D_{d-1}(\mathcal{K}) = (j^* \mathcal{K}, \Phi^{d-1}(\mathcal{K}), w : j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \mathcal{L} \rightarrow j^* \mathcal{K}, \omega : \mathbb{Q}^{d-1} j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi^{d-1} \mathcal{K}).$$

- $\tilde{B}_{d-1}(\mathcal{L}, \mathcal{O} = (S, \mathcal{G}, w, \omega), \epsilon) := (\mathcal{L}, B_{d-1}(\mathcal{O}), u, \tau)$ , morfismo inducido por  $B_{d-1}(\mathcal{O}) = j_* \mathbb{F}S \rightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}S \rightarrow \dots \rightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} S \xrightarrow{w} \mathcal{G}$ , donde  $u$  es la composición  $j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \rightarrow j_* \mathbb{Q}\mathcal{L} \xrightarrow{j_* \epsilon} j_* S \rightarrow j_* \mathbb{F}S$  y  $\tau$  es la composición  $\mathbb{Q}\mathcal{L} \simeq S \simeq j^* B_{d-1}(\mathcal{O})$ .
- $G_d(\mathcal{L}, \mathcal{O} = (S, \mathcal{G}, w, \omega), \epsilon) := (\mathcal{L}, \mathcal{G}, u, \tau)$ , donde  $u$  es la composición  $j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \xrightarrow{j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2}} j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} S \xrightarrow{w} \mathcal{G}$  y  $\tau$  es la de  $\mathbb{Q}^d \mathcal{L} \xrightarrow{\mathbb{Q}^{d-1} \epsilon} \mathbb{Q}^{d-1} S \xrightarrow{\omega} \mathcal{G}$ .
- $H_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau) := (\mathcal{L}, (\mathbb{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau), 1)$ .

**Proposición V-D.15** ■ Con las notaciones anteriores se verifica

$$\text{a) } F_d \simeq \tilde{B}_{d-1} \circ H_d.$$

$$\text{b) } E_d \simeq G_d \circ \tilde{D}_{d-1}.$$

**Demostración.**

$$\text{a) } F_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) = (\mathcal{L}, j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \rightarrow \dots \xrightarrow{u} \mathcal{F}, j_* g, q)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{B}_{d-1} \circ H_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) = \tilde{B}_{d-1}(\mathcal{L}, (\mathbb{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma), Id) = \\ & = (\mathcal{L}, j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}, j_* \alpha j_* Id j_* q, q). \end{aligned}$$

$$\text{b) } E_d(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) =$$

$$= (\mathcal{L}, \Phi^{d-1}(\mathcal{K}), u : j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} \mathcal{L} \rightarrow \Phi^{d-1}(\mathcal{K}), \sigma : \mathbb{Q}^d \mathcal{L} \simeq j^* \Phi^{d-1} \mathcal{K})$$

$$G_d \circ \tilde{D}_{d-1}(\mathcal{L}, \mathcal{K}, u, \tau) =$$

$$= G_d(\mathcal{L}, (j^* \mathcal{K}, \Phi^{d-1} \mathcal{K}, w : j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} j^* \mathcal{K} \rightarrow \Phi^{d-1} \mathcal{K}, \omega : \mathbb{Q}^{d-1} j^* \mathcal{K} \simeq j^* \Phi^{d-1} \mathcal{K}), \tau) =$$

$$= (\mathcal{L}, \Phi^{d-1}, w \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} \tau, \omega \circ \mathbb{Q}^{d-1} \tau)$$

**Proposición V-D.16** ■ Los funtores  $H_d$  y  $G_d$  son casi-inversos

$$\text{Demostración. } G_d \circ H_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau) = G_d(\mathcal{L}, (\mathbb{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau), Id) =$$

$$(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u \circ j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-2} Id, \tau \circ \mathbb{Q}^{d-1} Id) = (\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau)$$

$$H_d \circ G_d(\mathcal{L}, (S, \mathcal{G}, w, \omega), \epsilon) = H_d(\mathcal{L}, \mathcal{G}, u, \tau) =$$

donde  $u = w \circ j_* \mathbb{F}Q^{d-2} \epsilon$  y  $\tau = \omega \circ Q^{d-1} \epsilon$ , siendo  $\epsilon : \mathcal{QL} \simeq S$   
 $= (\mathcal{L}, (\mathcal{QL}, \mathcal{G}, w \circ j_* \mathbb{F}Q^{d-2} \epsilon, \omega \circ Q^{d-1} \epsilon))$  que es isomorfo al objeto de partida  
 utilizando el morfismo  $(Id_{\mathcal{L}}, (\epsilon, Id_{\mathcal{G}}))$

**Teorema V-D.17** ■ Los funtores  $(E_d, F_d)$  y  $(B_d, D_d)$  son dos pares de funtores casi-inversos.

**Demostración.** Probaremos este resultado por inducción sobre  $d$ .

Para  $d = 1$  las categorías  $\mathcal{B}^1$  y  $\mathcal{B}^1$  son la misma, y los funtores  $E_1$  y  $F_1$  son la identidad, con lo que se tiene que  $D_1$  y  $B_1$  son casi-inversos el uno del otro. Ahora

$$\underline{d = 2}$$

$$F_2 \circ E_2 \simeq \tilde{B}_1 \circ H_2 \circ G_2 \circ \tilde{D}_1 \simeq \tilde{B}_1 \circ \tilde{D}_1 \simeq Id$$

$$E_2 \circ F_2 = G_2 \circ \tilde{D}_1 \circ \tilde{B}_1 \circ H_2 \simeq G_2 \circ H_2 \simeq Id$$

$$\underline{d \Rightarrow d + 1}$$

Supongamos cierto el resultado para  $d$

$$D_d \circ B_d \simeq E_d \circ A_d \circ B_d \simeq E_d \circ F_d \simeq Id_{\mathcal{B}^d}$$

$$B_d \circ D_d \simeq B_d \circ E_d \circ A_d \simeq C_d \circ A_d \circ B_d \circ E_d \circ A_d \simeq$$

$$\simeq C_d \circ F_d \circ E_d \circ A_d \simeq C_d \circ A_d \simeq Id_{\text{Perv}^d}$$

Con lo que los funtores  $D_d$  y  $B_d$  son casi-inversos. Por tanto  $\tilde{D}_d$  y  $\tilde{B}_d$  también.

Ahora

$$F_{d+1} \circ E_{d+1} \simeq \tilde{B}_d \circ H_{d+1} \circ G_{d+1} \circ \tilde{D}_d \simeq \tilde{B}_d \circ \tilde{D}_d \simeq Id$$

$$E_{d+1} \circ F_{d+1} = G_{d+1} \circ \tilde{D}_d \circ \tilde{B}_d \circ H_{d+1} \simeq G_{d+1} \circ H_{d+1} \simeq Id$$

Luego  $F_{d+1}$  y  $E_{d+1}$  son casi-inversos.

**Corolario V-D.18** ■ Los funtores  $D_d$  y  $B_d$  definen, pues, una equivalencia de categorías entre  $\text{Perv}^d$  y  $\mathcal{B}^d$ .



---

---

# CAPÍTULO VI

## Los haces perversos “negativos”

En esta sección consideraríamos los haces perversos que se obtienen al otorgar al cerrado una perversidad negativa. Sin embargo, a pesar de que se puede efectuar una construcción paralela al caso de perversidad positiva obteniéndose una expresión de los haces en términos de otros de perversidad “menor” (de hecho las definiciones y demostraciones son prácticamente idénticas), la simplicidad de ésta proviene de un resultado más general, que demostramos también.

### VI-A LOS HACES PERVERSOS NEGATIVOS

---

**Definición VI-A.1** ■ Consideremos un  $d > 0$  y definimos la categoría  $Perv^{-d}(X)$  como el corazón de la t-estructura definida sobre  $X$  por pegamiento de la natural sobre el abierto  $U$  y de la natural desplazada  $d$  sobre el cerrado (la perversidad del abierto es 0, como siempre, mientras que  $p(F) = -d$  es la del cerrado).

Por definición (cf. [BBD83])  $K \in Perv^{-d}(X)$  cuando

1.  $h^n(j^*K) = 0$  si  $n \neq 0$  (concentrado en grado 0)
2.  $h^n(i^*K) = 0$  si  $n > -d$  (concentrado en grados  $(-\infty, -d]$ )
3.  $h^n(i^!K) = 0$  si  $n < -d$  (concentrado en grados  $[-d, +\infty)$ )

También disponemos de una caracterización, análoga a III-A.4

**Proposición VI-A.2** ■ (de caracterización) Un objeto  $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$  pertenece a  $Perv^{-d}(X)$  si y sólo si el complejo  $\mathcal{K}$  está concentrado en grados  $[-d, 0]$ ,  $j^*\mathcal{K}$  concentrado en grado 0 y  $h^n i^*\mathcal{K} = 0$  si  $n < -d$ .

**Demostración.** Si llamamos  $i_S : S \hookrightarrow X$  a la inclusión de cada estrato  $S$  en  $X$  tenemos, aplicando [BBD83] que  $\mathcal{K} \in Perv^{-d}(X)$  equivale a

$$\begin{cases} h^n i_S^* \mathcal{K} = 0 & n > p(S) \\ h^n i_S^! \mathcal{K} = 0 & n < p(S) \end{cases} \quad \forall S \text{ estrato}$$

En nuestro caso, tenemos dos estratos, el abierto  $U$ , de perversidad 0 y el cerrado  $F$  de perversidad  $-d$ , con lo que se deduce:

- $S = U \quad \left. \begin{array}{l} h^n j^* \mathcal{K} = 0 \quad n > 0 \\ h^n j^* \mathcal{K} = 0 \quad n < 0 \end{array} \right\} \iff h^n(j^* \mathcal{K}) = 0 \forall n \neq 0$ , luego  $j^* \mathcal{K}$  concentrado en grado 0.
- $S = F \quad \left. \begin{array}{l} h^n i^* \mathcal{K} = 0 \quad n > -d \\ h^n i^! \mathcal{K} = 0 \quad n < -d \end{array} \right\}$

Si consideramos las sucesiones largas de cohomología de los triángulos distinguidos definidos por  $\mathcal{K}$  tendremos

1. Consideremos el triángulo distinguido

$$j j^* K \longrightarrow K \longrightarrow i_* i^* K$$

se tiene la sucesión larga de homología

$$\longrightarrow h^l(j j^* K) \longrightarrow h^l(K) \longrightarrow h^l(i_* i^* K) \longrightarrow h^{l+1}(j j^* K) \longrightarrow$$

para  $l > 0$ , como  $j^* K$  concentrado en grado 0, se tiene

$$h^l(K) \simeq h^l(i_* i^* K) = 0$$

2. Ahora consideremos el triángulo distinguido

$$i_* i^! K \longrightarrow K \longrightarrow j_* j^* K$$

y su sucesión correspondiente

$$\rightarrow h^{l-1}(j_*j^*K) \rightarrow h^l(i_*i^*K) \rightarrow h^l(K) \rightarrow h^l(j_*j^*K) \rightarrow$$

para  $l < -d$  se tiene  $0 = h^l(i_*i^*K) \simeq h^l(K)$

Luego esto equivale a que el complejo  $\mathcal{K}$  está concentrado en grados  $[-d, 0]$ ,  $j^*\mathcal{K}$  concentrado en grado 0 y  $h^n i^*\mathcal{K} = 0$  si  $n > -d$ .

---

**Corolario VI-A.3** ■ Si  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^{-d}(X)$ , se tiene, además, que  $i^*\mathcal{K}$  está concentrado exactamente en grado  $-d$ , con lo que podemos escribir  $i^*\mathcal{K} = \mathcal{F}[d]$  donde  $\mathcal{F} = h^{-d}(i^*\mathcal{K})$ .

---

**Demostración.** En principio, el complejo  $\mathcal{K}$  está concentrado en grados  $[-d, 0]$ , pero la condición de perversidad negativa nos da  $h^n(i^*\mathcal{K}) = 0$  si  $n < -d$ , lo que unido a la exactitud de  $i^*$  implica que el único sitio donde, eventualmente,  $i^*\mathcal{K}$  es no nulo debe ser el  $-d$ .

## VI-B EL FUNTOR

---

**Nota VI-B.1** ■ En principio, asociaríamos a  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^{-d}$  el par  $(jj^*\mathcal{K}, i_*i^*\mathcal{K})$ . No existe ningún morfismo entre las dos componentes del par obtenido, pues  $\text{Hom}_D(jj^*\mathcal{K}, i_*i^*\mathcal{K}) = 0$  para  $j^*\mathcal{K} \in D_U$ ,  $i^*\mathcal{K} \in D_F$ , mientras que  $\text{Hom}_D(i_*i^*\mathcal{K}, jj^*\mathcal{K})$  es nulo porque va de un complejo concentrado en grados negativos en uno concentrado en grado 0. Por otra parte  $jj^*\mathcal{K}$  queda determinado por  $j^*\mathcal{K}$ , que es un  $\mathcal{L}$  haz sobre  $U$ . Además, por el corolario anterior,  $i_*i^*\mathcal{K}$  viene dado por un haz  $\mathcal{F}$  sobre el cerrado

---

**Definición VI-B.2** ■ Definimos, pues,  $\Psi^- : \text{Perv}^{-d}(X) \rightarrow \mathcal{A}_U \times \mathcal{A}_F$  como

$$\Psi^-(\mathcal{K}) := (j_*\mathcal{K}, i^*\mathcal{K}[-d])$$


---

**Nota VI-B.3** ■ Si  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^{-d}(X)$  y  $\Psi^-(\mathcal{K}) = (\mathcal{L}, \mathcal{F})$  se tiene una sucesión exacta (y por

ende un triángulo distinguido):

$$j_! \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow i_* \mathcal{F}[d] \xrightarrow{\delta}$$

## VI-C EL FUNTOR INVERSO

El funtor inverso obtenido en el caso anterior se traduce aquí de igual forma en el cono de un morfismo, que va a coincidir con la suma directa de los complejos de partida y llegada, ya que el morfismo en cuestión es el nulo.

**Lema VI-C.1** ■ En el triángulo anterior, el morfismo  $\delta[-1] : i_* i^* \mathcal{K}[-1] \rightarrow j_! j^* \mathcal{K}$  es nulo, y por tanto su cono es isomorfo a la suma directa  $i_* i^* \mathcal{K}[-1] \oplus j_! j^* \mathcal{K}$ .

**Demostración.** El morfismo trasladado  $\delta : i^* i_* \mathcal{K} \rightarrow j_! j^* \mathcal{K}[1]$  pertenece a  $\text{Hom}(D^{<0}, D^{\geq 0}) = 0$ , luego es nulo. El cono de un morfismo nulo de complejos es isomorfo a la suma directa del trasladado del complejo de partida y del complejo de llegada (el cambio de signo en la derivación del cono se compensa con el cambio de signo de la traslación).

Veamos ahora que, de hecho,  $\mathcal{K}$  es canónicamente isomorfo a la suma directa:

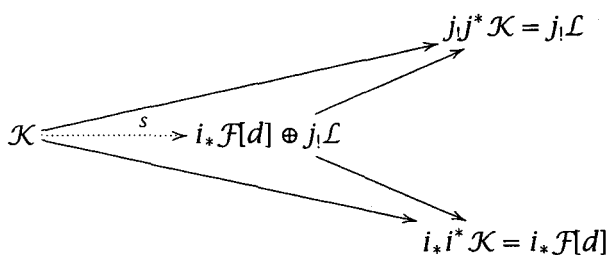
**Proposición VI-C.2** ■ Sea  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^-(X)$  y  $\Psi^-(\mathcal{K}) = (\mathcal{L}, \mathcal{F})$ , entonces  $\mathcal{K}$  es canónicamente casi-isomorfo a la suma directa  $i_* \mathcal{F}[d] \oplus j_! \mathcal{L}$

**Demostración.** Comparemos los triángulos

$$\begin{array}{ccccc} j_! \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & i_* \mathcal{F}[d] \\ \downarrow 1 & & & & \downarrow 1 \\ j_! \mathcal{L} & \longrightarrow & i_* \mathcal{F}[d] \oplus j_! \mathcal{L} & \longrightarrow & i_* \mathcal{F}[d] \end{array}$$

$\mathcal{K}$  se envía sobre su truncación  $\tau_{\geq 0} \mathcal{K}$ , que es casi-isomorfa a  $\tau_{\geq 0} j_! j^* \mathcal{K}$  (por el triángulo  $\tau_{\geq 0} j_! j^* \mathcal{K} \rightarrow \tau_{\geq 0} \mathcal{K} \rightarrow \tau_{\geq 0} i_* i^* \mathcal{K} = 0$ ); esta truncación, a su vez, es casi isomorfa a  $j_! j^* \mathcal{K}$  por estar el complejo en grado 0, con

lo que construimos unos morfismos  $\mathcal{K} \rightarrow j_1\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{K} \rightarrow i_*\mathcal{F}[d]$ , que por la propiedad universal del producto directo (que coincide con la suma directa), nos da un morfismo  $s : \mathcal{K} \rightarrow i_*\mathcal{F}[d] \oplus j_1\mathcal{L}$  que hace conmutativo el diagrama



Este morfismo  $s$  completa un morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccc}
 j_1\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & i_*\mathcal{F}[d] \\
 \downarrow 1 & & \downarrow s & & \downarrow 1 \\
 j_1\mathcal{L} & \longrightarrow & i_*\mathcal{F}[d] \oplus j_1\mathcal{L} & \longrightarrow & i_*\mathcal{F}[d]
 \end{array}$$

que es casi-isomorfismo por el lema de los cinco.

---

**Corolario VI-C.3** ■ La categoría  $\text{Perv}^{-d}(X)$  es suma directa de la de haces sobre  $U$  y la de haces sobre  $F$ .

---

---

---

# CAPÍTULO VII

## Aplicaciones

### VII-A DESCRIPCIÓN DE LOS HACES PERVERSOS CÓNICOS SOBRE UN ESPACIO $K(\pi, 1)$

En esta sección utilizaremos la equivalencia de categorías anteriormente demostrada para efectuar la descripción de los “haces perversos cónicos” como en [NM94]

#### ■ Sistemas locales y haces

Consideremos  $k$  un cuerpo y  $S$  un espacio topológico compacto simplemente conexo, cuyo revestimiento universal  $p : \tilde{S} \rightarrow S$  es contráctil. Sea  $X$  el cono sobre  $S$  de vértice  $\{0\}$  y consideremos la estratificación de  $X$  dada por  $F = \{0\}$ ,  $U = X - \{0\} \simeq S \times (0, 1]$ , siendo las inclusiones respectivas  $i : F \hookrightarrow X \hookrightarrow U$ . Sea  $x$  un punto base en  $S$  y  $H = \pi_1(S, x)$ . Sea ahora  $D_\Sigma := D_\Sigma^+(k_X)$  la subcategoría plena de la categoría derivada  $D^+(k_X)$ , cuyos objetos son los complejos constructibles con respecto a la estratificación  $\Sigma = \{F, U\}$ , es decir, los complejos tales que la restricción de su haz de cohomología a  $U$  resulta ser un sistema local en  $U$  (un haz localmente constante de  $k$ -espacios vectoriales).

En esta situación hay una forma de describir los ingredientes

que intervienen en nuestros funtores:

1.- Sistemas locales

Si  $\mathcal{L}$  es un sistema local, la correspondencia  $\mathcal{L} \rightarrow \Gamma(U, p_* p^* \mathcal{L})$  es funtorial y establece una equivalencia de categorías entre la categoría de los sistemas locales sobre  $U$  y la de los  $k[H]$ -módulos (cf. [Ive86]). Sea pues  $E$  el  $k[H]$ -módulo asociado a  $\mathcal{L}$  por esta correspondencia, sobre el que actúa el grupo  $H$ .

$$\mathcal{L} \longleftrightarrow E \begin{array}{c} \curvearrowright \\ H \end{array}$$

Como el revestimiento universal  $\tilde{S}$  es contráctil, podemos tomar el functor  $\mathbb{F} = p_* p^*$ . Así  $\mathbb{F}\mathcal{L} = p_* p^* \mathcal{L}$  viene dado por

$$E^H := \{f : H \rightarrow E\}$$

cuya estructura de  $H$ -módulo (inducida por la de  $E$ ) es

$$(hf)(\sigma) := f(\sigma h) \quad \forall h, \sigma \in H, \forall f \in E^H$$

La transformación inyectiva  $1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F}$  viene dada por un morfismo  $\lambda_E : E \rightarrow E^H$  con

$$\lambda(e) := \{\sigma \mapsto \sigma e\}$$

Ahora,  $\mathbb{Q}E$  vendrá dado por  $\text{Coker } \lambda$ , que se puede identificar con los elementos de  $E^H$  que toman un valor fijo en un determinado elemento del grupo, por ejemplo aquellos que se anulan en el elemento neutro de  $H$

$$E_0^H = \{f \in E^H \mid f(1) = 0\}$$

La aplicación  $q : E^H \rightarrow \text{Coker } \lambda$  de paso al cociente viene dada por

$$q(f) := f - \lambda(f(1))$$

que anula la imagen de  $\lambda$  (pues  $q(\lambda(e)) = \lambda(e) - \lambda(\lambda(e)(1)) = 0$ ), y si  $f \in E_0^H$  se tiene que  $q(f) = f$ .

Por otra parte,  $H$  también actúa sobre  $\text{Coker } \lambda$  de la siguiente forma, para cada  $\bar{f} \in E_0^H$ , debe ser  $h * \bar{f} = q(hf)$ , pero  $hf(\sigma) = f(\sigma h)$ , que

en el 1 toma el valor  $f(h)$ , luego  $\overline{hf} = \overline{hf - \lambda(f(h))}$ , quedando

$$h * f(\sigma) = f(\sigma h) - \sigma f(h)$$

La fibra en el cero de  $j_*\mathcal{L}$  es  $(E^H)^{inv}$ , los invariantes de  $E^H$  por la acción de  $H$ , que podemos identificar con  $E$  a través de la aplicación constante  $c(e)$ , que vale  $e$  en cada elemento de  $H$ .

Así, la sucesión  $0 \rightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F}\mathcal{L} \xrightarrow{q} \mathbb{Q}\mathcal{L} \rightarrow 0$  quedaría representada por

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} E^H \xrightarrow{q} E_0^H \rightarrow 0$$

Análogamente  $\mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L}$  vendría dado por  $(E_0^H)^H = \{g : H \rightarrow E_0^H\}$  y el conúcleo  $\mathbb{Q}^2\mathcal{L}$  por  $\{g : H \times H \rightarrow E / g(\sigma, 1) = g(1, \sigma) = 0\}$ , lo que nos daría una fórmula general para  $\mathbb{Q}^n\mathcal{L}$ ,

$$E^n : \{\varphi : H \times \dots \times H \rightarrow E / g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0 \text{ si } g_i = 1\}$$

**Lema VII-A.1** ■ Sean  $\varphi^n \in E^n$  y  $g_{n+1} \in H$ , entonces la acción de  $g_{n+1}$  sobre  $\varphi^n$  viene dada por la expresión:  $(g_{n+1} \bullet_n \varphi^n)(g_1, \dots, g_n) = (-1)^n [g_1 \varphi^n(g_1, \dots, g_n) + (\sum_1^n (-1)^i \varphi^n(\dots, g_i g_{i+1}, \dots))]$

**Demostración.** Por inducción en  $n$

$$\boxed{n=1} (g_2 \bullet_1 \varphi^1(g_1)) = \varphi^1(g_1 g_2) - g_1 \varphi^1(g_2)$$

$$\boxed{n=2} (g_3 \bullet_2 \varphi^2)(g_1, g_2) = \varphi^2(g_1, g_2 g_3) - g_2 \bullet_1 \varphi^2(g_1, g_3),$$

pero  $g_2 \bullet_1 \varphi^2(g_1, g_3) = \varphi^2(g_1 g_2, g_3) - g_1 \varphi^2(g_2, g_3)$ , considerando  $\varphi^2(g_1, g_3)$  como  $\varphi_{g_3}^2(g_1) \in E^1$ , con lo que tendríamos

$$(g_3 \bullet_2 \varphi^2)(g_1, g_2) = g_1 \varphi^2(g_2, g_3) - \varphi^2(g_1 g_2, g_3) + \varphi^2(g_1, g_2 g_3)$$

$$\boxed{n-1 \Rightarrow n} (g_{n+1} \bullet_n \varphi^n)(g_1, \dots, g_n) =$$

$\varphi^n(g_1, \dots, g_n g_{n+1}) - (g_n \bullet_{n-1} \varphi^n)(g_1, \dots, g_{n-1}, g_{n+1})$ , que vale, por inducción  $\varphi^n(g_1, \dots, g_n g_{n+1}) - (-1)^{n-1} [g_1 \varphi^n(g_2, \dots, g_n, g_{n+1}) + (\sum_1^{n-1} (-1)^i \varphi^n(\dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}))]$ , de donde el resultado.

2.- Haces.

Un haz sobre un espacio topológico estratificado por un abierto y su complementario viene dado por sus restricciones  $j^* \mathcal{F}, i^* \mathcal{F}$  al abier-



to y al cerrado y por el morfismo de adjunción  $\alpha_{\mathcal{F}} : i^* \mathcal{F} \rightarrow i^* j_* j^* \mathcal{F}$ , puesto que el siguiente diagrama es cartesiano [NM94]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & i_* i^* \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow i_* \alpha_{\mathcal{F}} \\ j_* j^* \mathcal{F} & \longrightarrow & i_* i^* j_* j^* \mathcal{F} \end{array}$$

### ■ Haces 1-perversos cónicos

La categoría de los haces perversos cónicos sobre  $X$  con respecto a  $\Sigma$  es el corazón de la  $t$ -estructura sobre  $X$  obtenida por pegamiento de la natural sobre  $U$  y de la natural sobre  $F$  desplazada  $-1$  (cf [BBD83] con  $p(U) = 0, p(F) = 1$ ).

Un  $\mathcal{K} \in \text{Perv}^1(X, \Sigma)$  se describe como una cuaterna  $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \tau)$ , siendo  $\mathcal{L}$  un sistema local en  $U$ ,  $\mathcal{F}$  un haz  $\Sigma$ -constructible sobre  $X$ ,  $u : j_* p_* p^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$  y  $\tau$  un isomorfismo  $\mathbb{Q}\mathcal{L} \simeq j^* \mathcal{F}$ . Por tanto, describir estas cuaternas es equivalente a describir los haces perversos:

- $\mathcal{L}$  el sistema local, dado como se dijo más arriba, por un  $H$ -módulo  $E$ .
- $\mathcal{F}$  haz, vendrá dado por una terna  $(E', F, \alpha : F \rightarrow E'^{\text{inv}})$  donde
  1.  $E'$  es  $H$ -módulo, representando al sistema local  $j^* \mathcal{F}$ .
  2.  $F$  es un  $k$ -espacio vectorial ( $\mathcal{F}_0$ , la fibra de  $\mathcal{F}$  en el cero).
  3.  $\alpha : F \rightarrow E'^{\text{inv}}$  inducido por la adjunción donde  $E'^{\text{inv}}$  representa la fibra en el cero de  $j_* j^* \mathcal{F}$ .
- $u : j_* p_* p^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$  es morfismo de haces, cada uno de ellos dado por una terna, luego tendremos  $\mathcal{F} \longleftrightarrow (E', F, \alpha)$  como vimos más arriba, y  $j_* p_* p^* \mathcal{L} \longleftrightarrow (E^H, (E^H)^{\text{inv}}, \text{Id})$ .

Ahora  $u : (E^H, E, c) \rightarrow (E', F, \alpha)$  también estará determinada por sus restricciones;  $j^* u = q_{\mathcal{L}} : E^H \rightarrow E'$ , con lo que teniendo en cuenta la sucesión

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} E^H \xrightarrow{q} \text{Coker } \lambda \rightarrow 0$$

$E'$  debe ser  $\text{Coker } \lambda$ . Por otra parte  $i^*u : E \rightarrow F$ , la fibra de  $u$  en el cero, que notaremos igualmente  $u$ , con lo que tendremos un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 j_*p_*p^*\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\
 \\
 i^*u : & \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{u} & F \\
 \downarrow c & & \downarrow \alpha \\
 (E^H)^{inv} & & (\text{Coker } \lambda)^{inv} \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\
 E^H & \xrightarrow{q} & \text{Coker } \lambda \equiv E_0^H
 \end{array} & \\
 j^*u : & & 
 \end{array}$$

Con esto tenemos descrito el haz perverso  $\mathcal{K}$ , descripción que es equivalente a la dada en [NM94] de la forma siguiente; como este diagrama debe ser conmutativo, para cada  $e \in E$ , debe ser  $q \circ c(e) = \alpha \circ u(e)$ , pero  $q(c(e)) = c(e) - \lambda(c(e)(1)) = c(e) - \lambda(e)$ , que a cada  $\sigma$  le hace corresponder  $e - \sigma e$ ; luego  $\alpha(u(e))(\sigma) = e - \sigma e$  con lo que si definimos  $v_\sigma : F \rightarrow E$  de tal forma que  $v_\sigma(y) := -\alpha(y)(\sigma)$  tendremos una familia de morfismos verificando:

1.  $\sigma e = e + v_\sigma u(e)$ , pues  $v_\sigma(u(e)) = -\alpha(u(e))(\sigma) = -(e - \sigma e)$
2.  $v_{\sigma\tau} = v_\sigma + v_\tau + v_\sigma u v_\tau$ , pues  $v_{\sigma\tau}(y) = -\alpha(y)(\sigma\tau) \in (E^H)^{inv}$ , pero los elementos de  $(E^H)^{inv}$  verifican  $f(\sigma) = (h * f)(\sigma) = f(\sigma h) - \sigma f(h)$ , esto es,  $f(\sigma h) = f(\sigma) + \sigma f(h)$  para todos  $\sigma, h \in H$ , lo que implica que  $v_{\sigma\tau}(y) = -\alpha(y)(\sigma\tau) = -\alpha(y)(\sigma) + \sigma(-\alpha(y)(\tau)) = -\alpha(y)(\sigma) + (-\alpha(y)(\tau) + v_\sigma u(-\alpha(y)(\tau))) = -\alpha(y)(\sigma) - \alpha(y)(\tau) - v_\sigma u \alpha(y)(\tau) = v_\sigma(y) + v_\tau(y) + v_\sigma u v_\tau(y)$ .

La descripción del haz perverso se reduce, pues, a un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{u} & \\
 E & & F \\
 & \xleftarrow{v_\sigma} & 
 \end{array}$$

siendo  $E$  un  $k[H]$ -módulo,  $F$  un  $k$ -espacio vectorial,  $u, \{v_\sigma\}_{\sigma \in H}$  verifican-

do las condiciones

1.  $\sigma e = e + v_\sigma u(e)$  para todo  $e \in E$ .
2.  $v_{\sigma\tau} = v_\sigma + v_\tau + v_\sigma u v_\tau$ .

Recíprocamente, dada una familia  $v_\sigma : F \rightarrow E$  verificando las dos condiciones anteriores, podemos definir  $\alpha(y) = -v_\sigma(y)$ , que hace conmutativo el diagrama anterior por 1. y que pertenece a  $E_0^H$ , pues  $v_1 = v_1 + v_1 + v_1 u v_1$  implica  $0 = (1 + v_1 u)v_1$  que, unido a la inyectividad de  $(1 + v_1 u)$  nos da  $v_1 = 0$ , luego  $\alpha(y) \in E_0^H$ . Además  $\alpha(y)$  pertenece a  $(\text{Coker } \lambda)^{inv}$ , ya que  $h(\alpha(y))(\sigma) = \alpha(y)(\sigma h) - \sigma\alpha(y)(h) = -v_{\sigma h}(y) - (\alpha(y)h + v_\sigma u\alpha(y)(h)) = -v_{\sigma h}(y) + v_h(y) + v_\sigma u v_h(y) = -v_\sigma(y) = \alpha(y)(\sigma)$ .

■ Haces 2-perversos cónicos

En las condiciones anteriores, sean las perversidades respectivas  $p(U) = 0$  y  $p(F) = 2$ . Un  $K \in \text{Perv}^2(X)$  se describe por una cuaterna  $(\mathcal{L}, \mathcal{K}', u, \tau)$  con  $\mathcal{L}$  sistema local sobre  $U$ ,  $\mathcal{K}' \in \text{Perv}^1(X)$ ,  $u : j_* p_* p^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}'$  y  $\tau$  el isomorfismo  $\mathcal{L}' \simeq \mathbb{Q}\mathcal{L}$ .

El haz perverso  $\mathcal{K}'$  se describe por  $(\mathcal{L}', \mathcal{F}, u', \tau')$  y nos da un diagrama (de forma análoga al caso anterior) del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 u' : & j_* p_* p^* \mathcal{L}' & \longrightarrow \mathcal{F} \\
 \\
 i^* u : & \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{u'} & F \\ c' \downarrow & & \downarrow \alpha \\ (E'^H)^{inv} & & (\text{Coker } \lambda')^{inv} \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ E^H & \xrightarrow{q'} & \text{Coker } \lambda' \equiv E_0^H \end{array} \\
 j^* u' : & & 
 \end{array}$$

A su vez, el sistema local  $\mathcal{L}$  está representado por un  $H$ -módulo  $E$ , con

lo que tenemos:

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{\quad} & E' & \xrightarrow{u'} & F \\
 \downarrow c & & \downarrow c' & & \downarrow \alpha \\
 E^H & \xrightarrow{q} & E' & \xrightarrow{\lambda'} & E'^H \xrightarrow{q'} \text{Coker } \lambda'
 \end{array}$$

podemos identificar  $E'$  al  $\text{Coker } \lambda$ , puesto que la restricción al abierto de  $u$  es la aplicación de paso al cociente; a su vez  $\text{Coker } \lambda \equiv E_0^H$  tiene estructura de  $H$ -módulo, siendo la acción de  $H$

$$\sigma * f(h) = f(h\sigma) - hf(\sigma)$$

Ahora tenemos

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\lambda'} E'^H \xrightarrow{q'} \text{Coker } \lambda' \rightarrow 0$$

con  $\lambda'(f)(\sigma) = \sigma * f \in E'$

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{u'} & F \\
 \downarrow c & & \downarrow c' & & \downarrow \alpha \\
 (E^H)^{inv} & & (E'^H)^{inv} & & (\text{Coker } \lambda')^{inv} \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\
 E^H & \xrightarrow{\lambda' \circ q} & E'^H & \xrightarrow{u'} & \text{Coker } \lambda' \equiv E_0^H
 \end{array}$$

verificándose

- a)  $q' \circ c' = \alpha \circ u'$
- b)  $\lambda' \circ q \circ c = c' \circ u$

a) Sea  $f \in E'$ , se tiene  $\alpha \circ u'(f) = q' \circ c'(f) = c'(f) - \lambda'(c'(f)(1))$ , que vale  $c'(f) - \lambda'(f)$ , y que aplicado a  $\sigma$  nos da  $f - \sigma * f$ , con lo que hemos deducido que  $\alpha \circ u'(f) = f - \sigma * f$ , así que definiendo  $\alpha(y)(\sigma) := -v'_\sigma(y)$  tenemos para cada  $\sigma$  de  $H$  un  $v'_\sigma : F \rightarrow E'$  verificando

1.  $v'_\sigma u'(f) = -\alpha(u'(f))(\sigma) = -(f - \sigma * f)$ , esto es

$$\sigma * f = f + v'_\sigma u'(f)$$

2.  $v'_{\sigma\tau}(y) = -\alpha(y)(\sigma\tau) \in (E'^H)^{inv}$ , pero  $\varphi \in E^H$  es invariante si y sólo si  $\varphi(\sigma\tau)\varphi(\sigma) + \sigma * \varphi(\tau)$ , con lo que  $-\alpha(y)(\sigma\tau) = -[\alpha(y)(\sigma) + \sigma * \alpha(y)(\tau)] = -[\alpha(y)(\sigma) + \alpha(y)(\tau) + v'_\sigma u' \alpha(y)(\tau)] = v'_\sigma(y) + v'_\tau(y) + v'_\sigma u' v'_\tau(y)$ , luego

$$v'_{\sigma\tau} = v'_\sigma + v'_\tau + v'_\sigma u' v'_\tau$$

O de otra forma  $v'(\sigma\tau) = \sigma * v'(\tau) + v'(\sigma)$

$$\sigma * v'(\tau) = v'(\sigma\tau) - v'(\sigma)$$

b) Sea  $e \in E$ ,  $c' \circ u(e) = \lambda' \circ q \circ c(e) = \lambda'(e - \sigma e)$ , que verifica  $\lambda'(e - \sigma e)(h) = h * (e - \sigma e)$ , con lo que  $u(e) = u(e)(\tau) = h * (e - \sigma e)(\tau) = (e - \sigma e)(\tau h) - \tau(e - \sigma e)(h) = e - \tau h e - \tau(e - h e) = e - \tau e$ , esto es

$$u(e)(\tau) = e - \tau e$$

quedando

$$E \xrightarrow{u} E' \begin{matrix} \xrightarrow{u'} \\ \xleftarrow{v'_\sigma} \end{matrix} F \quad (1)$$

con

- $u' \circ u = 0$
- $u(e)(\tau) = e - \tau e$
- $1 + v'_\sigma u'(f) = \sigma * f$
- $v'_{\sigma\tau} = v'_\sigma + v'_\tau + v'_\sigma u' v'_\tau$

Estos datos nos determinan el haz perverso del principio, pero aún los podemos simplificar más considerando  $v(\sigma, \tau) : F \rightarrow E$  definidos por

$$v(\sigma, \tau)(y) = [v'_\tau(y)](\sigma) \in E$$

con lo que tendríamos

$$(2) \quad \begin{matrix} E & \xrightarrow{qc=u} & E' \\ & \swarrow v(\sigma, \tau) & \downarrow u' \\ & & F \end{matrix}$$

con

- $u' \circ (q \circ u) = 0$
- $v(\sigma, \tau)(u'(f)) = f(\sigma\tau) - \sigma f(\tau) - f(\sigma)$
- $v(\sigma, \tau\tau') = v(\sigma\tau, \tau') - \sigma v(\tau, \tau') + v(\sigma, \tau)$

Veamos (1)  $\iff$  (2)

$\Rightarrow$ ) Sea  $f \in E'$

$$v(\sigma, \tau)(u'(f)) = [v'_\tau u'(f)](\sigma) = (\tau * f - f)(\sigma) = f(\sigma\tau) - \sigma f(\tau) - f(\sigma)$$

$$\begin{aligned} v(\sigma, \tau\tau')(y) &= [v'_{\tau\tau'}(y)](\sigma) = v'_\tau(y)(\sigma) + v'_{\tau'}(y)(\sigma) + v'_\tau u' \hat{v}'_{\tau'}(y)(\sigma) = \\ &= v'_\tau(y)(\sigma) + \tau * v'_{\tau'}(y)(\sigma) = v'_\tau(y)(\sigma) + v'_{\tau'}(y)(\sigma\tau) - \sigma v'_{\tau'}(y)(\tau) = v(\sigma, \tau)(y) - \\ &= \sigma v(\tau, \tau')(y) + v(\sigma\tau, \tau')(y), \text{ luego } v(\sigma, \tau\tau') = v(\sigma, \tau) - \sigma v(\tau, \tau') + v(\sigma\tau, \tau'). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Sea  $f \in E'$

$$(1 + v'_\sigma u')(f)(h) = f(h) + v(h, \sigma)(u'(f)) = f(h) + f(h\sigma) - hf(\sigma) - f(h) = f(h\sigma) - hf(\sigma) = \sigma * f(h)$$

$$\begin{aligned} v'_{\sigma\tau}(f)(h) &= v(h, \sigma\tau)(f) = v(h\sigma, \tau)(f) - hv(\sigma\tau)(f) + v(h, \sigma)(f), \text{ por otra} \\ \text{parte } v'_{\sigma\tau}(f)(h) &= v'_\sigma(f)(h) + v'_\tau(f)(h) + v'_\sigma u' v'_\tau(f)(h) = v(h, \sigma)(f) + v(h, \tau)(f) + \\ &= v(h, \sigma)(u' v'_\tau(f)) = v(h, \sigma)(f) + v(h\sigma, \tau)(f) - hv(\sigma, \tau)(f). \end{aligned}$$

Luego son equivalentes.

■ Descripción de los haces  $n + 1$ -perversos

En el caso general, tendremos una situación del tipo

$$E \xrightarrow{u} E' \longrightarrow \dots \xrightarrow{u^{n-1}} E^n$$

$\begin{matrix} \uparrow v_\sigma^n \\ \downarrow u^n \\ F \end{matrix}$

donde el par  $(E^n, F)$  representa el haz 1-perverso obtenido tras aplicar el funtor al haz  $n + 1$  perverso  $n$  veces y  $E$  es el  $k[H]$ -módulo que representa el sistema local sobre  $U$  que aparecía la primera vez que aplicábamos el funtor al haz primitivo. En realidad para  $i > 0$ , todos los  $E^i$  están determinados por el primer  $k[H]$ -módulo  $E$ , ya que son los  $(E^{i-1})_0^H$ , conúcleo de los  $\lambda : E^i \rightarrow (E^i)^H$ , como en el caso anterior.

Además los morfismos verifican:

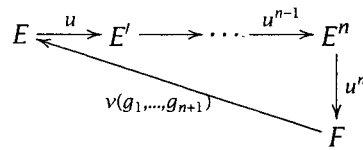
1.  $u^i \circ u^{i-1} = 0 \ \forall i$ .
2.  $u^i(e^i)(\tau) = e^i - \tau \bullet_i e^i$  para  $0 \leq i \leq n - 1$ .
3.  $(1 + v_\sigma^n u^n)(e^n) = \sigma \bullet_{n-1} e^n$ .
4.  $v_{\sigma\tau}^n = v_\sigma^n + v_\tau^n + v_\sigma^n u v_\tau^n$ .

El módulo  $E^i = \{f : H \rightarrow E^{i-1} / f(1) = 0\}$  y la acción del grupo  $H$  viene dada por  $(\sigma \bullet_i e^i)(h) = e^i(h\sigma) - h \bullet_{i-1} e^i(\sigma) \in E^{i-1}$

**Definición VII-A.2** ■ En esta situación podemos considerar  $v(g_1, \dots, g_{n+1}) : F \rightarrow E$ , definido de la siguiente forma:

$$v(g_1, \dots, g_{n+1})(y) := [v_{g_{n+1}}^n(y)](g_n) \dots (g_1) \in E$$

y lo notaremos  $v_{g_{n+1}}^n(y)(g_1, \dots, g_n)$



Estos  $v(g_1, \dots, g_{n+1})$  verifican las siguientes dos propiedades:

**Proposición VII-A.3** ■ Sea  $\varphi^n \in E^n$ , entonces  $v(g_1, \dots, g_{n+1})u^n(\varphi^n) = (-1)^n [g_1 \varphi^n(g_2, \dots, g_{n+1}) + (\sum_1^n (-1)^i \varphi^n(\dots, g_i g_{i+1}, \dots)) + (-1)^{n+1} \varphi^n(g_1, \dots, g_n)]$

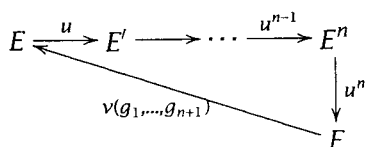
**Demostración.**  $v(g_1, \dots, g_{n+1})u^n(\varphi^n) = [v_{g_{n+1}}^n u^n(\varphi^n)](g_1, \dots, g_n) = (g_{n+1} \bullet_n \varphi^n - \varphi^n)(g_1, \dots, g_n)$ , que aplicando el lema anterior nos da el resultado, pues el  $-\varphi^n(g_1, \dots, g_n)$  (siempre negativo) entra en el corchete como  $(-1)^{n+1} \varphi^n(g_1, \dots, g_n)$ .

**Proposición VII-A.4** ■ Los  $v$  son cociclos (cf [Wei94]), esto es

$$v(g_1, \dots, g_{n+1} g'_{n+1}) = (-1)^n [g_1 v(g_2, \dots, g_{n+1}, g'_{n+1}) + (\sum_1^n (-1)^i v(\dots, g_i g_{i+1}, \dots, g'_{n+1})) + (-1)^{n+2} v(g_1, \dots, g_{n+1})]$$

**Demostración.**  $\boxed{n=1}$   $v(g_1, g_2 g'_2) = -g_1 v(g_2, g'_2) + v(g_1 g_2, g'_2) - v(g_1, g_2)$   
 $\boxed{n=2}$   $v(g_1, g_2, g_3 g'_3) = g_1 v(g_2, g_3, g'_3) - v(g_1 g_2, g_3, g'_3) +$   
 $v(g_1, g_2 g_3, g'_3) + v(g_1, g_2, g_3)$   
 $\boxed{n-1 \Rightarrow n}$   $v(g_1, \dots, g_{n+1} g'_{n+1})(y) = [v_{g_{n+1} g'_{n+1}}^n(y)](g_1, \dots, g_n) =$   
 $= [v_{g_{n+1}}^n(y) + v_{g'_{n+1}}^n(y) + v_{g_{n+1}}^n u^n v_{g'_{n+1}}^n(y)](g_1, \dots, g_n) = [v_{g_{n+1}}^n(y) + g_{n+1} \bullet_n$   
 $v_{g'_{n+1}}^n(y)](g_1, \dots, g_n)$  que, por el lema anterior vale  $v_{g_{n+1}}^n(y)(g_1, \dots, g_n) +$   
 $(1)^n [g_1 v_{g'_{n+1}}^n(y)(g_2, \dots, g_{n+1}) + (\sum_i^n (-1)^i v_{g_{n+1}}^n(\dots, g_i g_{i+1}, \dots, g'_{n+1}))] =$   
 $= (-1)^n [g_1 v(g_2, \dots, g_{n+1}, g'_{n+1}) + (\sum_i^n v(\dots, g_i g_{i+1}, \dots, g'_{n+1})) +$   
 $(-1)^{n+2} v(g_1, \dots, g_{n+1})]$

**Corolario VII-A.5** ■ Un haz  $n + 1$ -perverso se describe por un diagrama del tipo



donde  $E$  es un  $k[H]$ -módulo,  $F$  es un espacio vectorial, los  $E^i$  son conúcleos construidos a partir del anterior y los  $v$  verifican las dos propiedades VII-A.3 y VII-A.4

■ Estructura de  $H$ -módulo de  $F$

**Proposición VII-A.6** ■ La estructura de  $H$ -módulo de  $E^n$ , dada por  $\mu e^n = e^n + v_\mu^n u^n e^n$  induce otra sobre  $F$  de la siguiente forma:

$$\mu f := f + u^n v_\mu^n(f) \quad \mu \in H$$

**Demostración.** Se verifica  $v(\mu f) = (v\mu)f$ , puesto que  $v(f + u^n v_\mu^n(f)) = f + u^n v_\mu^n(f) + u^n v_\mu^n(f + u^n v_\mu^n(f)) = f + u^n (v_\mu^n + v_\mu^n + v_\mu^n u^n v_\mu^n)(f) = f + u^n v_\mu^n(f) = (v\mu)f$

Además la acción de cada elemento del grupo  $H$  es un automorfismo de  $F$ , ya que  $\mu^{-1}(\mu f) = \mu^{-1}(f + u^n v_\mu^n(f)) = (f + u^n v_\mu^n(f)) + u^n v_{\mu^{-1}}^n(f) + u^n v_{\mu^{-1}}^n u^n v_\mu^n(f) = f + u^n [(v_\mu^n + v_{\mu^{-1}}^n + v_{\mu^{-1}}^n u^n v_\mu^n)(f)] = f + u^n v_{\mu^{-1}\mu}^n(f) = f + u^n v_1^n(f) = f$



VII-B UN EJEMPLO SOBRE UN ESPACIO NO  $K(\pi, 1)$ 

Consideremos el cono  $X$  sobre un espacio  $S$  que no sea  $K(\pi, 1)$ , por ejemplo el cono sobre la esfera  $S^3$ , cuyo revestimiento universal no es contráctil, y vamos a describir los 2-haces perversos cónicos sobre este espacio, estratificados con respecto al vértice y a su complementario  $U$ , que es homeomorfo a  $S$ . Sean  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{Q}$  los funtores que intervenían en el funtor casi-inverso que definimos en V-D.

**Lema VII-B.1** ■ Si  $X$  es el cono sobre un espacio  $S$  tal que  $\pi_1(S) = H^1(S) = H^2(S) = 0$ , y  $\mathcal{L}$  es un sistema local sobre  $U$ , se tiene que las siguientes sucesiones

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow j_*\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow j_*\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

son exactas.

**Demostración.** La exactitud de la sucesión  $0 \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ , aplicada a  $\mathcal{L}$  y a  $\mathbb{Q}\mathcal{L}$  y la exactitud a la izquierda de  $j_*$ , nos asegura que las dos sucesiones son exactas salvo, eventualmente, en su último término. De hecho, el único lugar en el que pueden no ser exactas es en el vértice del cono, ya que su restricción al abierto lo es.

Como el  $\pi_1$  del espacio es nulo, el sistema local es constante, digamos un espacio vectorial  $V$ .

Si  $B$  es un entorno cónico de 0,  $H^i(B, \mathbb{R}j_*\mathcal{L})$  se envía sobre la fibra  $(\mathbb{R}^i j_*\mathcal{L})_0$ , de manera isomorfa para  $i \geq 0$  (por [MNM93] I.4.11 p. 65), como consecuencia de la trivialidad topológica del espacio.

Si consideramos la primera sucesión, el término siguiente a  $j_*\mathbb{Q}\mathcal{L}$  sería el  $\mathbb{R}^1 j_*\mathcal{L}$ ; la fibra en el cero de  $\mathbb{R}^1 j_*\mathcal{L}$  vale entonces  $H^1(U, \mathcal{L})$ , que es  $H^1(U, V) = H^1(S, V) = 0$ , nulo por hipótesis, de lo que se tiene la exactitud de la primera sucesión, y además  $\mathbb{R}^2 j_*\mathcal{L} \simeq \mathbb{R}^1 j_*\mathbb{Q}\mathcal{L}$ .

En cuanto a la segunda, su continuación sería  $\mathbb{R}^1 j_*\mathbb{Q}\mathcal{L}$ , que es isomorfo a  $\mathbb{R}^2 j_*\mathcal{L}$ , pero este vale, por un razonamiento análogo al anterior,  $H^2(S, V) = 0$ , de donde el resultado.

Como aplicación de la descripción de haces perversos cónicos se tiene la siguiente:

**Proposición VII-B.2** ■ Si  $X$  es un espacio en las condiciones anteriores, la categoría de haces 2-perversos cónicos sobre  $X$  equivale a la de pares  $(V, \mathcal{F})$  donde  $V$  es un espacio vectorial y  $\mathcal{F}$  es un haz sobre  $X$ .

**Demostración.** Un haz 2-perverso cónico sobre un espacio estratificado de esta forma queda determinado por una cuaterna

$$(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u : j_*\mathbb{F}Q\mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{F}, \sigma)$$

donde  $\mathcal{L}$  es un sistema local,  $\mathcal{F}$  un haz,  $u \circ j_*g = 0$  y  $\sigma : \mathbb{Q}^2\mathcal{L} \simeq j^*\mathcal{F}$  isomorfismo. Si reconstruimos el haz perverso en cuestión, tendremos:

$$j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \xrightarrow{j_*g} j_*\mathbb{F}Q\mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{F}$$

Si completamos el morfismo  $j_*g$  con su conúcleo

$$\begin{array}{ccccc} j_*\mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{j_*g} & j_*\mathbb{F}Q\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\ & \searrow q_{\mathcal{L}} & \nearrow j_*\alpha_{\mathbb{Q}} & \searrow q_{Q\mathcal{L}} & \nearrow s \\ & & j_*\mathbb{Q}\mathcal{L} & & \text{Coker } j_*g \end{array}$$

aplicando la propiedad universal del conúcleo se tiene la existencia de  $s : \text{Coker } j_*g \rightarrow \mathcal{F}$  tal que  $s \circ q_{Q\mathcal{L}} = u$ .

La exactitud de la primera sucesión (sobreyectividad de  $j_*q_{\mathcal{L}}$ ) del lema anterior implica  $\text{Coker } j_*g := \text{Coker } j_*\alpha_{\mathbb{Q}} \circ j_*q_{\mathcal{L}} = \text{Coker } j_*\alpha_{\mathbb{Q}}$ , y la exactitud de la segunda implica que  $\text{Coker } j_*\alpha_{\mathbb{Q}} = j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L}$ , con lo que  $s : j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ ,

$$\begin{array}{ccccc} j_*\mathbb{F}\mathcal{L} & \xrightarrow{j_*g} & j_*\mathbb{F}Q\mathcal{L} & \xrightarrow{u} & \mathcal{F} \\ & & \searrow & \nearrow s & \\ & & j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L} & & \end{array}$$

Por otra parte, el isomorfismo  $\sigma^{-1} : j^*\mathcal{F} \simeq \mathbb{Q}^2\mathcal{L}$  nos proporciona, por adjunción, un  $t : \mathcal{F} \rightarrow j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L}$ , con  $t \circ s = \text{Id}_{j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L}}$ , con lo que tendríamos

$$j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L} \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{t} j_*\mathbb{Q}^2\mathcal{L} \rightarrow 0$$

con lo que podemos escribir  $\mathcal{F} \approx j_* \mathbb{Q}^2 \mathcal{L} \oplus \text{Ker } t$  y el haz perverso  $\mathcal{K}$  es suma directa de

$$j_* \mathbb{F}\mathcal{L} \longrightarrow j_* \mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \longrightarrow j_* \mathbb{Q}^2 \mathcal{L}$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Ker } t$$

donde el primer complejo está determinado por el sistema local (y por tanto por el espacio vectorial  $V$ ), mientras que el segundo se reduce a un haz sobre  $X$ , colocado en el lugar 2

---

**Nota VII-B.3** ■ Este resultado es una prueba para este caso del teorema de Kashiwara y Kawai, inicialmente demostrado con técnicas microlocales ó en el marco de la topología de las singularidades complejas ([MV86] 6.5 p. 427).

---

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [BBD83] A.A. Beilinson, J. Bernstein, y P. Deligne. *Faisceaux pervers*, volumen 100 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1983.
- [BG99] T. Braden y M. Grinberg. Perverse sheaves on rank stratifications. *Duke Math. J.*, 96(2):317–362, 1999.
- [Bor87] A. Borel. *Algebraic D-Modules*, volumen 2 de *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, 1987.
- [Del] P. Deligne. Lettre à R. MacPherson. 1981.
- [DK73] P. Deligne y N. Katz. *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7 II)*, volumen 340 de *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, 1973.
- [GGM85] A. Galligo, M. Granger, y Ph. Maisonobe.  $\mathcal{D}$ -Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal. *Ann. Inst. Fourier*, 35:1–48, 1985.
- [GK85] S. I. Gelfand y S. M. Khoroshkin. Algebraic description of certain categories of  $D_X$ -Modules. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(3):56–57, 1985.
- [GM84] M. Granger y Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers relativement à un point de rebroussement. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(12):567–570, 1984.
- [GM96] S.I. Gelfand and Y.I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer, 1996.

- [GMV96] S. Gelfand, R. MacPherson, y K. Vilonen. Perverse sheaves and quivers. *Duke Math. J.*, 83(3):621–643, 1996.
- [God58] R. Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des faisceaux*, volumen XIII de *Publ. de l'Inst. de Math. de l'Univ. de Strasbourg*. Hermann, Paris, 1958.
- [Gri87] P.P. Grivel. Catégories dérivées et foncteurs dérivés. En A. Borel, editor, *Algebraic D-Modules*, pag. 1–108, New York, 1987. Academic Press.
- [Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J.*, 9:119–221, 1957.
- [Har66] R. Hartshorne. *Residues and Duality*, volumen 20 de *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, 1966.
- [HY77] P. Hilton y Wu Y.C. *Curso de Algebra Moderna*. Reverte, 1977.
- [Ive86] B. Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, 1986.
- [KS90] M. Kashiwara y P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volumen 292 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
- [Mai87] Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane. *Comp. Math.*, 62:215–261, 1987.
- [Mai88] Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers sur  $\mathbb{C}$  relativement à  $\{0\}$  et couple  $E \dashv F$ . En Lê Dũng Tráng, editor, *Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels*, pag. 135–146. Hermann, Paris, 1988. (Travaux en cours, vol. 34).
- [MNM93] Z. Mebkhout y L. Narváez-Macarro. Le Théorème de constructibilité de Kashiwara. En P. Maisonobe y C. Sabbah, ed., *Images directes et constructibilité*, volumen 46 de *Travaux en cours*, pages 47–98, Paris, 1993. Hermann.

- [MV86] R. MacPherson y K. Vilonen. Elementary construction of perverse sheaves. *Invent. Math.*, 84:403–436, 1986.
- [MV88] R. MacPherson y K. Vilonen. Perverse sheaves with singularities along the curve  $y^n = x^m$ . *Comment. Math. Helv.*, 63(1):89–102, 1988.
- [NM84] L. Narváez-Macarro. *Faisceaux pervers dont le support singulier est le germe d'une courbe plane irréductible*. PhD thesis, Univ. Paris VII, October 1984.
- [NM85] L. Narváez-Macarro. Un calcul de cycles évanescents par rapport aux courbes planes irréductibles. Applications aux faisceaux pervers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(5):197–200, 1985.
- [NM88] L. Narváez-Macarro. Cycles évanescents et faisceaux pervers: cas des courbes planes irréductibles. *Comp. Math.*, 65:321–347, 1988.
- [NM94] L. Narváez-Macarro. Cycles évanescents et faisceaux pervers. II. Cas des courbes planes réductibles. En J.P. Brasselet, editor, *Singularities (Lille, 1991)*, volumen 201 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pag. 285–323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [Pol97] A. Polishchuk. Perverse sheaves on a triangulated space. *Math. Res. Lett.*, 4(2-3):191–199, 1997.
- [Ver85] J.L. Verdier. Extension of a perverse sheaf over a closed subspace. *Astérisque*, 130:210–217, 1985.
- [Ver96] J.L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, volumen 239 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1996.

- [Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volumen 38 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1994.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. FELIX GUDIEL RODRÍGUEZ  
titulada Descripción explícita de t-estructuras  
sobre especies estructuradas

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALLENTE CUM LAUDE

Sevilla, 9 de febrero 2001


El Vocál.



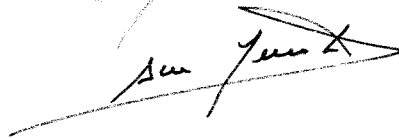
El Presidente



El Vocál.



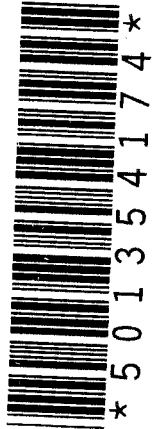
El Secretario.



El Vocál.



El Doctorado



\* 5 0 1 3 5 4 1 7 4 \*

FMA C 043/169