

i 18324538

043/369

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Álgebra

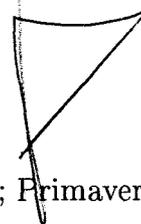
Aspectos locales de
singularidades de superficies:
Superficies de Puiseux

Vº Bº del Director



Fdo. José Luis Vicente Córdoba
Catedrático de Universidad
Universidad de Sevilla

Memoria presentada por
José María Tornero Sánchez
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas



Sevilla; Primavera, 2.001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio 186 número 32 del libro
correspondiente.

Sevilla, 29 MAYO 2001

El Jefe del Negociado



“Verrà presto il continuatore dell’opera delle scuole italiana e francese il quale riesca a dare alla teoria delle superficie algebriche la perfezione che ha raggiunto la teoria delle curve algebriche? Lo spero ma ne dubito...”

GUIDO CASTELNUOVO (1949).

Tratándose éste de un trabajo de varios años resulta complicada la tarea de agradecer la ayuda prestada, por ser la lista de tal magnitud que, paradójicamente, siempre deja la sensación de ignorar a alguien. Si es el caso, vayan por delante mis disculpas.

En primer lugar es justo (y necesario) reconocer al Director de esta memoria, José Luis Vicente, el apoyo personal y científico que siempre me ha mostrado, su disponibilidad y atención y, por supuesto, la confianza que depositó en mí y que espero vea recompensada con este trabajo que, en lo que de bueno pueda tener, es tan suyo como mío.

Muchos han sido los compañeros del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla que han colaborado de una u otra forma en este trabajo: con discusiones, comentarios o cubriendo mis tareas docentes cuando la situación lo requería. Por mencionar sólo algunos debo citar a Juan, Félix, Maribel, Miguel Ángel, Jesús y José María. Sin embargo, reseñaré que todos los miembros del Departamento (especialmente aquéllos con los que he compartido obligaciones docentes) han estado a mi disposición cuando los he necesitado y es algo que desde aquí agradezco.

El Departamento de Álgebra de la Universidad de Valladolid me acogió durante la etapa final de este trabajo y estoy sinceramente agradecido a su hospitalidad. En particular José Manuel Aroca me ofreció su tiempo, su atención y el incontenible caudal de ideas, problemas y posibles soluciones que en él es habitual (sin esfuerzo aparente). Gracias a Santiago, Felipe, José, Jesús, Guillaume y Pepa por su interés y amabilidad.

Mi estancia en el Laboratorio de Topología de la Universidad de Provence durante dos semanas en el marco del programa Sócrates fue de inestimable ayuda. Especialmente agradecido debo estar al Profesor Lê Dũng Tráng por su estímulo y atención, así como a Romain, sin duda alguna el mejor huésped que uno podría desear.

Este reconocimiento estaría incompleto sin mencionar a otros profesores, que han sugerido ideas y caminos decisivos para este trabajo. Es obligado para mí mencionar al profesor Ángel Granja de la Universidad de León, por su paciencia en oír mis desvaríos, así como a todos los miembros del Seminario Wayland Smithers, que han sido de fundamental ayuda.

Por último, en el plano estrictamente personal, debo recordar en primer lugar a mis padres, que me dieron la posibilidad de desarrollar mi vocación de trabajador mal remunerado, y que tenían, al menos, tantas ganas como yo, de ver este trabajo finalizado. Por supuesto debo agradecer a Bleda, Iago, Mi, Aníbal y Wilma su ayuda para mantener el equilibrio necesario y no perder la perspectiva. No creo que sepan leer, pero por si acaso. Finalmente, no podría usar palabras sin que me resultaran escasas para agradecer a mi esposa Gemma lo mucho que ha hecho (y espero siga haciendo) por mí. Quizá lo único que le haga justicia sea, simplemente, dedicarle este trabajo, junto con todas las horas de ausencia a las que su realización nos condenó.

Índice

Introducción	vii
Descripción de la memoria.	vii
I. Superficies algebroides. Explosiones	1
I.A. Variedades algebroides. Explosiones.	2
I.B. Explosiones de una variedad algebroides lisa de dimensión 3.	9
I.C. Explosiones de una superficie algebroides sumergida.	14
I.D. Ecuación WT y polígono de Newton–Hironaka.	24
I.E. Algunos aspectos de las explosiones de una superficie algebroides sumergida.	28
Transformaciones monoidales	29
Transformaciones cuadráticas	38
II. Singularidades. Algoritmo de reducción local	45
II.A. El problema de la resolución en superficies.	46
II.B. Reducción de singularidades (I): Eliminación de curvas permitidas.	48
II.C. Reducción de singularidades (II): El caso del cono tangente no plano.	56
II.D. Reducción de singularidades (III): El caso del cono tangente plano.	61
II.E. Algunas propiedades del algoritmo de reducción.	70
Finitud del proceso de reducción	71
Normalización y reducción de singularidades	78
Curvas singulares equimúltiples	80
Extensiones del algoritmo de reducción	84

III. Reducción de singularidades en superficies de Puiseux	87
III.A. Series de Puiseux. Exponentes distinguidos.	88
III.B. Cono tangente y curvas permitidas de una superficie de Puiseux.	95
El cono tangente de una superficie de Puiseux.	96
Curvas permitidas sobre una superficie de Puiseux.	104
III.C. Explosiones (I).	109
Transformaciones monoidales.	109
Transformaciones cuadráticas. Cono tangente plano.	110
Transformaciones cuadráticas. Cono tangente no plano.	113
III.D. Explosiones (II).	115
El caso ν -cuasi-ordinario.	117
El paso al caso ν -cuasi-ordinario.	122
III.E. Resolución de singularidades en superficies de Puiseux.	130
 Bibliografía	 135

Introducción

Las variedades algebroides y sus explosiones son el modelo puntual, con utilidad algebraica, de las variedades algebraicas y los espacios complejos, sus explotados y las fibras en un punto del divisor excepcional. Mantener el carácter algebroide implica completar después de explotar en forma de ecuaciones. Sin embargo, esta compleción no afecta a características algebraicas esenciales como la multiplicidad, y tiene la enorme ventaja de introducir la maquinaria algebraica de las series formales. Es desde este punto de vista de donde hay que contemplar los explotados formales. Así pues, la traducción geométrica es obvia: dirección de explosión algebroide es lo mismo que elección de punto de divisor excepcional.

Éste es el marco genérico en el que se inscribe el presente trabajo, cuyo contenido pasamos a resumir.

Descripción de la memoria.

La presente memoria se articula en tres capítulos de naturaleza y propósito claramente diferenciados.

El capítulo I ofrece pocas novedades al lector familiarizado con la materia: en él se exponen las bases teóricas de la geometría de las superficies algebroides sumergidas y de sus explosiones, para posteriormente justificar la “versión práctica” de estas transformaciones; preparando el camino para las siguientes secciones.

Toda esta parte es deudora notable de los trabajos previos de los profesores Sánchez Giralda ([20]) y Piedra Sánchez ([18]): el primero de ellos en el ámbito de la característica cero, y exclusivamente centrada en las transformaciones cuadráticas por lo que a explosiones se refiere, y el segundo en el contexto más amplio de la característica positiva y conteniendo todo tipo de transformaciones estrictas, aunque esta amplitud de contenidos está, sin embargo, basada en muchos aspectos del trabajo previo del profesor Sánchez Giralda.

Las definiciones de los objetos (variedades algebroides y, más concretamente, superficies algebroides sumergidas) parten de la teoría de la equisingularidad de Zariski ([25]) y no presentan novedades de ningún tipo, así como tampoco las definiciones y primeras propiedades de las explosiones (en el lenguaje de la memoria, transformaciones cuadráticas y/o monoidales), para las cuales se ha escogido, siguiendo las fuentes anteriormente citadas, el lenguaje intrínseco de Grothendieck ([6]). Así mismo, la definición de centros permitidos (para lo que nos concierne, curvas permitidas) de explosión es heredada (como no podía ser de otra manera) de los trabajos de Aroca, Hironaka y Vicente sobre resolución de variedades analíticas.

Sin embargo, de cara a un trabajo como el que ahora presentamos, de corte indudablemente “efectivo” (entiéndase con la debida reserva, por tratarse de series formales el objeto habitual de manejo), es imprescindible traducir el planteamiento terso de *les EGAs* a objetos más manejables: ecuaciones y transformaciones dadas en función de unas determinadas variables. A esta necesidad se responde en las últimas secciones del capítulo.

Por un lado fijando un cierto tipo de ecuación (no única), que denominamos *ecuación WT* (i.e.: de Weierstrass–Tchirnhausen) cuyo nombre es prácticamente autoexplicativo; y adjuntamos una tal ecuación de un objeto combinatorio que nombramos *polígono de Newton–Hironaka*, cuya ascendencia puede trazarse a los estudios de Newton sobre lo que hoy conocemos por Teorema de Puiseux, pero que aparece por vez primera, con la forma que adoptamos en este trabajo, en la memoria de Hironaka sobre desingularización de superficies excelentes redactada por Bennett ([11]).

Por otro lado, y para finalizar el capítulo, estudiamos ciertos aspectos prácticos de las explosiones que nos serán de utilidad más adelante. En concreto podemos destacar dos preguntas que luego cobrarán interés:

(i) ¿Cómo varían las ecuaciones de una transformación cuadrática (resp. monoidal) si realizamos previamente un cambio de variables?

(ii) ¿Pueden aparecer curvas permitidas tras una transformación cuadrática (resp. monoidal)? Y, en caso afirmativo, ¿de qué tipo?

La respuesta a estas dos preguntas ofrece los primeros resultados originales del presente texto; si bien su originalidad se circunscribe al hecho de no existir precedentes formales en la literatura, puesto que se trata de fenómenos ampliamente conocidos para el experto, por más que no exista una versión escrita rigurosa y detallada.

El capítulo II se centra en un resultado concreto, el denominado en la sección II.A. *teorema de reducción de singularidades de una superficie algebroides sumergida*. Grosso modo el teorema responde a la siguiente pregunta: si, partiendo de una superficie algebroides sumergida, realizamos explosiones escogiendo siempre centros permitidos de dimensión maximal y sin escoger direcciones concretas del cono tangente, ¿llegamos necesariamente a un modelo liso?

Esta pregunta requiere ni más ni menos que tres secciones para dar una respuesta satisfactoria (en este caso afirmativa). Siguiendo los trabajos precedentes (los ya citados de Sánchez Giralda y Piedra, así como la tesis doctoral del profesor Luengo ([14])), el esquema de la prueba queda a grandes rasgos como sigue:

(i) En primer lugar nos ocupamos de las transformaciones monoidales (i.e.: explosiones con centro en curvas permitidas) y cómo afectan éstas a la singularidad. En concreto, el resultado que probamos es que, si el cono tangente no es un plano múltiple, hacemos descender la multiplicidad de la superficie (resultado a todas luces óptimo) y, si el cono tangente es un plano múltiple, entonces o bien reducimos la multiplicidad, o bien desembocamos en una nueva superficie, de igual multiplicidad a la original, pero sin curvas permitidas. Es más, en este último caso, la elección de centros y direcciones en las sucesivas etapas es indistinta, pues la superficie que obtenemos al final es, esencialmente, única y determinada por la superficie de partida. Esto no implica, sin embargo, que no volvamos a tener que preocuparnos de las curvas permitidas hasta que baje la multiplicidad. En efecto; a partir de

los resultados de I.E. sabemos que las curvas permitidas pueden volver a aparecer tras una transformación cuadrática, pero al menos tenemos una forma “canónica” (en sentido coloquial) de eliminarlas.

(ii) Supuesta entonces nuestra superficie sin curvas permitidas, en virtud de los resultados anteriores, pasamos a ocuparnos del caso en el cual la superficie tiene un cono tangente que no es un plano múltiple. Este caso se revela como bastante cómodo y, en efecto, un primer resultado sencillo es que explotar en una dirección del cono tangente nos conduce a una superficie de multiplicidad, a lo más, la multiplicidad, en el cono tangente, del punto que nos determina la dirección. Esto nos deja únicamente como casos a tratar la situación de explotar en una dirección del cono tangente que, como punto de dicho cono, tiene multiplicidad maximal; esto es, la propia multiplicidad de la superficie. Un primer resultado técnico, en este sentido, que nos ayuda a limitar el alcance del problema, es que una tal circunstancia se puede suponer que responde a un cono tangente “cilíndrico”; esto es, que, salvo cambio de variables, la ecuación del cono tangente es independiente de una de las variables y el punto en cuestión es, obviamente, aquél cuyas coordenadas son ceros en todas las componentes, excepto en la relativa a esta variable. Con esta simplificación podemos atacar el problema directamente y probar que, en un número finito de pasos, es inevitable que la multiplicidad de la superficie descienda.

(iii) La última situación por atacar es, pues, cuando el cono tangente es un plano múltiple y nos encontramos en ausencia de curvas permitidas. Aquí entra en juego un proceso habitual en la literatura: asociar a la situación un objeto combinatorio (en nuestro caso el ya comentado polígono de Newton–Hironaka) y estudiar su comportamiento por las sucesivas transformaciones. En nuestro caso, fijamos la atención en la ordenada del vértice de menor abscisa (llamémosle M , como en el texto) y calculamos su variación por los diversos tipos de transformaciones que podemos realizar (obviamente, hemos de tener en cuenta la posibilidad de que algunas de éstas sean monoidales). Como es evidente de la propia definición del polígono, basta para nuestros propósitos con probar que, en un número finito de pasos, M se ve impelido a bajar. Eso es lo que se prueba en la sección II.D., si bien se requiere para ello un estudio bastante fino del comportamiento del polígono en casos, a priori, excepcionalmente incómodos para nuestros propósitos¹.

¹ “La resolución de singularidades es la teoría del caso particular”, J.L. Vicente *dixit*.

Una vez probado el teorema, queda la necesidad de extraer cuánta información sea posible del resultado. En concreto, nos hemos planteado varias cuestiones que juzgamos de interés:

(i) Es cierto que hemos probado que todo “camino” (para un sentido preciso del término, ver [14]) que escojamos para reducir la singularidad es finito, pero ¿es posible hablar de finitud del proceso completo? O, dicho de otro modo, a pesar de ser todos los caminos finitos, ¿pueden darse casos de caminos de longitud arbitrariamente larga? Bien, la respuesta es no y la prueba consiste básicamente en ahondar algo más en la demostración del teorema; muy particularmente en los aspectos combinatorios, que nos permiten asegurar que podemos acotar el número de transformaciones que se pueden realizar, siguiendo el esquema planteado en el teorema, sin reducir la multiplicidad de la superficie. Para finalizar con esta subsección, probamos de forma simple un resultado que facilita mucho la comprensión del proceso más complicado; esto es, la transformación cuadrática en el caso del cono tangente plano. En este caso, demostramos que, salvo un número finito de direcciones, todas las demás conducen a una superficie con curvas permitidas que, además, verifican que al eliminarlas ven descendida su multiplicidad.

(ii) El proceso de normalización ha estado estrechamente vinculado a la resolución de singularidades (cabe mencionar aquí de manera especial los trabajos de Zariski sobre el tema; ver, por ejemplo [25] (II)) y, de hecho, forma parte integrante de algunos de los procesos descritos en la literatura (entre ellos la resolución del profesor Piedra Sánchez). Aunque en nuestro proceso la normalización no juega un papel destacado sí que podemos probar, de forma bastante sencilla, que, salvo un número finito de opciones, el proceso del teorema nos conduce a la normalización de la superficie. Para ello se usan los habituales criterios discriminantales, obra del propio Zariski.

(iii) Por último, nos planteamos qué sucede con las curvas singulares, de multiplicidad igual a la de la superficie, e inmersas en ésta. Esta cuestión conduce a una nueva lectura del fenómeno de la aparición de curvas permitidas tras una transformación cuadrática. De hecho, el resultado que probamos en esta parte es que, hablando informalmente, si aparece una curva permitida tras una transformación cuadrática y *no se trata del divisor excepcional* es porque la transformación cuadrática ha “resuelto” una curva singular equimúltiple para convertirla en la curva permitida que aparece. Un resultado no por esperado carente de sentido geométrico.

Finalizamos el capítulo con ciertas consideraciones acerca de posibles avances en un sentido similar, que reproducimos aquí de forma resumida. Evidentemente hay dos frentes de generalización para nuestro proceso: ampliar el espectro de acción en la dimensión o en la característica.

Por lo que se refiere a aplicar el proceso a variedades de dimensión superior, ya ha quedado patente ([22]) que el éste, en su forma actual, no funciona en dimensión tres. Se impone; por tanto, una mayor precisión a la hora de escoger el centro de explosión de forma que, si bien los centros de dimensión mayor sean los primeros en ser explotados (para poder considerar este trabajo como un caso particular), exista una prelación que evite los bucles infinitos puestos de manifiesto por Spivakovsky en la referencia citada.

En cuanto a la característica positiva, el trabajo del profesor Piedra Sánchez se aproxima mucho a una versión de nuestro resultado. Las dificultades son, como de costumbre, de índole técnica, en especial en lo referente al manejo de los objetos combinatorios, cuyo comportamiento en característica positiva bien podrían calificarse de pérfido.

El capítulo III investiga una cuestión bien distinta, aunque evidentemente emparentada con todo lo anterior: el problema de la resolución en las superficies de Puiseux, esto es, aquéllas que admiten una parametrización del tipo

$$X = u^m, \quad Y = v^m, \quad Z = \psi(u, v).$$

Este tipo de parametrizaciones, a pesar de su aparente sencillez, están lejos de ser bien comprendidas a fecha de hoy. Únicamente las series cuasi-ordinarias (un tipo muy particular y concreto de series de Puiseux) han sido estudiadas en profundidad: primeramente en los trabajos pioneros de Lipman ([13]) y con posterioridad en otros como la tesis del profesor Herrera Govantes ([9]), en el aspecto combinatorio y los del propio Lipman y su alumno Gao, en el aspecto topológico.

Nuestro trabajo con estas series comienza por lo más básico: a saber, el estudio de las extensiones de cuerpos que generan. El principal resultado en este sentido es que, dada una serie de Puiseux, podemos hallar ciertos monomios (que aparecen no trivialmente en el desarrollo de la serie) que son suficientes para generar la misma extensión de cuerpos que la propia

serie. Por analogía con el caso cuasi-ordinario (y porque éste se puede entender como un caso particular de nuestros razonamientos) calificamos a estos monomios (mejor dicho, a sus exponentes) de *distinguidos*. Sin embargo, al contrario que en el caso cuasi-ordinario, la información residente en estos monomios dista mucho de ser completa y satisfactoria, a efectos de resolución.

Para empezar con la geometría propiamente dicha estudiamos las distintas formas que pueden presentar tanto el cono tangente como el lugar singular (i.e.: el conjunto de curvas permitidas) de una superficie de Puiseux. Ya en el primer caso tendremos que hacer una distinción que arrastraremos durante todo el resto del capítulo: a saber, entre superficies definidas por series transversales y no transversales. Esta distinción se lee en las series únicamente viendo si su orden es mayor o menor que uno (resp. caso transversal o no transversal). Desde el punto de vista geométrico, el caso transversal (resp. el caso no transversal) se corresponde con que, al proyectar la superficie dada por una ecuación, pongamos $F(Z) \in \mathbb{C}[[X, Y]][[Z]]$ sobre el plano (X, Y) , el cardinal de la fibra genérica es exactamente la multiplicidad de la superficie (resp. es estrictamente menor).

Por lo que al plano tangente se refiere, esta distinción ofrece resultados claramente distintos (aunque no disjuntos). Por un lado, si la superficie es transversal, entonces el cono tangente puede ser un plano múltiple ($Z = 0$ en las condiciones anteriores) o bien un cono tangente no plano. En este caso, dicho cono tangente no plano es exactamente el mismo que el de la superficie definida por la forma inicial de nuestra serie, salvo que puede aparecer con multiplicidad mayor que uno. Esta multiplicidad se puede leer en unos exponentes distinguidos.

Por contra, en el caso no transversal, el cono tangente es siempre un producto de planos (eventualmente múltiples). Para conocer la estructura de este cono no bastan con los exponentes distinguidos: es necesario conocer la descomposición en factores irreducibles de la forma inicial de la serie. Con estos datos (y los exponentes distinguidos) sí es posible reproducir con toda precisión el cono tangente. Como contraposición al caso cuasi-ordinario, donde el cono tangente es un plano o un producto de dos planos (todo ello deducible de los exponentes distinguidos), exhibimos algunos ejemplos de complejidad variable para probar, entre otras cosas, que no es posible acotar (de forma universal) el número de planos *distintos* que pueden aparecer y

que no es posible dar una definición más restrictiva de exponente distinguido de forma que contenga toda la información sobre el cono tangente.

El caso del lugar singular también requiere un estudio separado. El caso no transversal es relativamente sencillo, ya que las curvas permitidas son de la forma $(Z, c(X, Y))$, donde $c(X, Y)$ divide a la serie de Puiseux. Esto, en particular, implica que en principio no podemos acotar el número de curvas permitidas que puede tener nuestra superficie (cotejar con el caso cuasiordinario donde hay, a lo más, dos curvas permitidas). Sin embargo, en el caso no transversal, se produce un hecho significativo: si existe alguna curva permitida, entonces podemos realizar un cambio de variables y escribir nuestra superficie de forma que sea transversal. Esto es cuando menos curioso, ya que una de las razones por la cual las superficies de Puiseux son tan incómodas de manejar es precisamente su sensibilidad a los cambios de variables: incluso los más simples e inofensivos (no triviales, claro) suelen resultar en una pérdida de la parametrización. Sin embargo, gracias a esto, podemos asegurar que en presencia de curvas permitidas, nuestra serie puede ser tomada como transversal.

Una vez probado esto, pasamos a centrarnos en el estudio de cómo afectan las explosiones a las parametrizaciones. El caso transversal es objeto de observación en la sección III.C. El resultado es que, tanto las transformaciones monoidales (caso de que procedan) como las cuadráticas (en cualquier circunstancia) y tanto si el cono tangente es un plano como si no, mantenemos una parametrización de tipo Puiseux tras explotar. Además, se ha estudiado con cierto detalle el problema de, partiendo de una superficie irreducible, cuándo se conserva esta irreducibilidad. En este sentido hemos probado que, en ciertas direcciones (concretamente $(1 : 0 : 0)$ y $(0 : 1 : 0)$, si tienen sentido como direcciones del cono tangente) la irreducibilidad se mantiene. En los demás casos, dicha irreducibilidad puede o no conservarse, *dependiendo únicamente de la superficie de partida, y en ningún caso de la dirección escogida*. Es posible, además, conocer a priori si se produce o no la pérdida de irreducibilidad, a partir de unos exponentes distinguidos.

El caso no transversal, sin embargo, muestra dificultades mucho más complejas. De hecho, la sección III.D. comienza con un ejemplo de superficie no transversal en la cual, tras explotar en una dirección, perdemos de vista la parametrización de Puiseux. Por supuesto, esto no quiere decir que la superficie no sea de Puiseux; bien podría serlo en un sistema de parámetros

adecuado. Sin embargo, la existencia de tales ejemplos nos llevaron a intentar abordar el problema desde otro punto de vista: la utilización de las series ν -cuasi-ordinarias.

Las series ν -cuasi-ordinarias son las de la forma

$$X^{a/m}Y^{b/m}u(X^{1/m}, Y^{1/m}), \text{ con } u(0,0) \neq 0.$$

Estas series, sean o no transversales, tienen la ventaja (como se prueba en III.D.) de mantener la forma bajo todo tipo de explosiones (aunque a veces sea necesario un cambio de variables sencillo para expresar correctamente el resultado). Por tanto, para cerrar el círculo, nos resta un procedimiento para convertir toda serie no transversal en ν -cuasi-ordinaria. Esto lo hemos logrado mediante las denominadas en la memoria *transformaciones especiales* que no son sino transformaciones monoidales *totales* centradas en la curva (X, Y) .

El efecto de tales transformaciones es que, en direcciones distintas de $(1 : 0 : 0)$ y de $(0 : 1 : 0)$, convierten en ν -cuasi-ordinaria cualquier serie no transversal. Para el caso transversal, hemos de excluir a lo más, un número finito de direcciones. En las dos direcciones anteriormente mencionadas se tiene que (tanto en el caso transversal como en el no transversal) existe un número entero $p > 0$ tal que, tras p transformaciones en una de tales direcciones caemos forzosamente al caso ν -cuasi-ordinario. Este número p puede ser hallado (al menos acotado) a partir de la ecuación de la superficie (o, más concretamente, de su polígono de Newton-Hironaka), sin necesidad de calcular las series en sí.

La memoria se cierra con un resultado que resume todo lo anterior dando un proceso que resuelve las singularidades de una superficie de Puiseux de tal forma que, en todo paso, se mantiene (y, en cierto sentido, se "controla") la forma de la parametrización.

Este campo es, con diferencia, el más inexplorado de los que hemos trabajado en la presente memoria, y son muy numerosos los problemas abiertos que quedan. Desde luego el problema más sobresaliente sigue siendo el caracterizar de manera precisa aquéllas ecuaciones que definen superficies que admitan una parametrización de Puiseux, a la manera del famoso Teorema de Jung-Abhyankar para el caso cuasi-ordinario. Pero, a pesar de los nuevos resultados en este sentido, espoleados por el trabajo de McDonald ([16]), en-

tre los que cabe mencionar los de F. Aroca y J. Cano (cuya implementación ha sido de inestimable ayuda en la confección de este trabajo) un tal resultado aún parece lejano. Sí parece más asequible, a corto o medio plazo, tratar de obtener un conocimiento más exhaustivo y detallado del comportamiento de estas singularidades por explosiones y de sus aspectos topológicos y geométricos. Termina con esta desiderata la presente introducción.

I. Superficies algebroides. Explosiones

Este primer capítulo es de naturaleza puramente introductoria y sienta definiciones y notaciones que regirán durante el resto de la memoria. Además presenta los resultados más sobresalientes que se utilizarán, así como algunos recursos técnicos que, de aparecer cuando se necesitaran, oscurecerían innecesariamente el razonamiento.

La mayor parte del material de las tres primeras secciones procede de los trabajos [20] y [18]. Utilizaremos libremente los resultados de [29], [17] y [15] (este último en especial en todo lo referente a anillos Cohen–Macaulay), a menudo sin mención concreta. La estructura del capítulo es como sigue:

- (A) Definimos las variedades algebroides (haciendo especial reseña en superficies) y sus explosiones: formales, locales y globales.
- (B–C) Las dos siguientes secciones están dedicadas a probar, en primer lugar, que la inmersión de nuestras superficies no se ve afectada por una explosión y, con posterioridad, a dar ecuaciones concretas para las explosiones formales de una superficie.
- (D–E) Por último fijaremos un tipo concreto de ecuación, cómodo para trabajar, para las superficies y veremos, ya usando ecuaciones concretas, ciertos aspectos técnicos de las explosiones que nos serán necesarios para estudiar la evolución de las singularidades.

I.A. Variedades algebroides. Explosiones.

La primera sección introduce los objetos básicos de nuestro estudio: las variedades algebroides y sus explosiones. Estos conceptos provienen básicamente del trabajo de Zariski en su serie *Studies in equisingularity* ([25], ver fundamentalmente los dos primeros artículos) para la geometría local y su aplicación al estudio de las singularidades (que el propio Zariski completó para el caso de las curvas).

En lo que nos concierne, seguiremos básicamente la excelente introducción de [20], donde pueden hallarse todos los detalles que dejaremos incompletos.

Definición.— Un *esquema (variedad) algebroides* \mathcal{S} es el espectro de un anillo local noetheriano completo reducido \mathcal{R} . Si K es un cuerpo de representantes de \mathcal{R} diremos que \mathcal{S} está *definido sobre* K .

Para todo lo que nos interesa en este trabajo, K será el cuerpo de los números complejos, aunque las únicas propiedades que utilizaremos de \mathbf{C} serán que es algebraicamente cerrado y de característica nula. De cualquier modo casi todos los resultados de este capítulo son perfectamente extensibles a característica p (ver [18]).

Como es bien sabido todo anillo local noetheriano completo es imagen homomorfa de un anillo de series formales de potencias, por lo que podemos suponer

$$\mathcal{R} = \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_m]]/I,$$

donde $I \subset \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_m]]$ es un ideal radical.

Definición.— Una variedad algebroides $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$ se dice *lisa* si \mathcal{R} es un anillo regular. En caso contrario se dice *singular*.

La *dimensión de* \mathcal{S} es la dimensión de Krull del anillo \mathcal{R} . La variedad \mathcal{S} se dirá *sumergida* cuando el ideal maximal de \mathcal{R} tenga un sistema generador de $\dim(\mathcal{R}) + 1$ elementos. La *multiplicidad de* \mathcal{S} es la multiplicidad de \mathcal{R} como anillo local.

Las variedades en las que nos centraremos en un futuro serán de dos tipos:

- (a) Variedades de dimensión 2 sumergidas, que denominaremos superficies algebroides sumergidas (o simplemente superficies algebroides o simplemente superficies). Podemos entonces representar \mathcal{R} como

$$\mathcal{R} = \mathbf{C}[[X, Y, Z]]/\mathfrak{p},$$

donde \mathfrak{p} ha de ser de altura 1, por ser $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$ un anillo Cohen-Macaulay y local (*ergo* catenario), y ser \mathcal{R} de dimensión 2. Esto impone que \mathfrak{p} sea un ideal principal, $\mathfrak{p} = (F)$, donde F es una serie de $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$ sin factores múltiples. Una tal serie F , que desde luego no tiene por qué ser única, se denominará una ecuación de \mathcal{S} .

- (b) Variedades de dimensión 3 lisas. En las condiciones anteriores podemos identificar \mathcal{R} con $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$.

Probaremos a continuación una serie de resultados puramente algebraicos relativos a las superficies algebroides sumergidas que nos serán de posterior utilidad.

Lema.— Sea $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$ una superficie algebroides sumergida. Entonces \mathcal{R} es Cohen-Macaulay.

Demostración.— Elemental, por serlo $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$. Obsérvese que esto es válido para hipersuperficies algebroides en general. *Q.E.D.*

Lema.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroides sumergida definida por una ecuación $F(X, Y, Z)$. Entonces la multiplicidad de \mathcal{S} es el orden usual de F .

Demostración.— Supongamos que F tiene orden $n > 0$. Hemos de calcular, para $N \gg 0$, la dimensión como \mathbf{C} -espacio vectorial de $\mathcal{R}/\mathfrak{m}^{N+1}$. Tenemos la sucesión exacta de \mathbf{C} -espacios vectoriales

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^N/\mathfrak{m}^{N+1} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathfrak{m}^{N+1} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathfrak{m}^N \rightarrow 0,$$

por lo que tenemos

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{R}/\mathfrak{m}^{N+1}) = \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{R}/\mathfrak{m}^N) + \dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{m}^N/\mathfrak{m}^{N+1})$$

y, por inducción,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/\mathfrak{m}^{N+1}) = \sum_{i=0}^N \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}).$$

Ahora bien, un simple cálculo combinatorio arroja que, para $0 \leq l < n$ y para $j \geq 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}^l/\mathfrak{m}^{l+1}) = \binom{3+l-1}{l},$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}^{n+j}/\mathfrak{m}^{n+j+1}) = \binom{3+n+j-1}{n+j} - \binom{3+j-1}{j},$$

por lo que, operando, tenemos para $N > 2n$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/\mathfrak{m}^{N+1}) = \frac{n}{2}N^2 + \frac{n(n-4)}{2}N + \frac{n(n^2-3n+11)}{6},$$

y la multiplicidad de \mathcal{R} es precisamente n . *Q.E.D.*

Lema.— En las condiciones anteriores \mathcal{S} es lisa si y sólo si $n = 1$.

Demostración.— Directa: es bien conocido que un anillo local Cohen-Macaulay es regular si y sólo si tiene multiplicidad 1. *Q.E.D.*

Vamos a recordar ahora el concepto de explosión (formal) de un anillo local noetheriano, básicamente siguiendo los trabajos de Grothendieck ([6]). Nuestra situación es la siguiente: sea (A, \mathfrak{m}) un anillo local noetheriano, $I \subset A$ un ideal. Consideramos el A -álgebra de Rees asociada a I ,

$$B = \bigoplus_{m \geq 0} I^m,$$

que es graduada y de tipo finito.

Observación.— Los homomorfismos

$$A/I \xleftarrow{\pi} A \hookrightarrow B$$

inducen los morfismos de esquemas

$$\text{Proj}(B) \xrightarrow{\Pi} \text{Spec}(A) \leftarrow \text{Spec}(A/I).$$

Definición.— El morfismo de esquemas Π se denomina *explosión de A con centro I* . El esquema $\text{Proj}(B)$ se denomina el *explotado global de A con centro I* y se denotará $\text{Bl}_I(A)$. Cuando I es primo Π se denomina una *transformación monooidal global* (de A , con centro I). Cuando $I = \mathfrak{m}$ el morfismo Π se denomina la *transformación cuadrática global* (de A).

Observación.— Supongamos que $I = (f_1, \dots, f_s)$. Entonces podemos escribir

$$B = A[f_1, \dots, f_s],$$

y un recubrimiento finito de $\text{Bl}_I(A)$ por esquemas afines es el dado por

$$\text{Bl}_I(A) = \bigcup_{i=1}^s \text{Spec}(B_{(f_i)}) \simeq \bigcup_{i=1}^s D_+(f_i),$$

donde $B_{(f_i)}$ denota la parte homogénea de grado cero del anillo de fracciones B_{f_i} .

Si consideramos el morfismo graduado (de grado 0)

$$\begin{aligned} \varphi : B &\longrightarrow \text{gr}_I(A) = \bigoplus_{r \geq 0} I^r / I^{r+1} \\ x \in I^s &\longmapsto x + I^{s+1} \end{aligned}$$

es inmediato que induce una inmersión cerrada

$$\text{Proj}(\text{gr}_I(A)) \hookrightarrow \text{Bl}_I(A)$$

y no es complicado ver que su imagen resulta $\Pi^{-1}(\text{Spec}(A/I))$, por lo que

$$\Pi^{-1}(\text{Spec}(A/I)) \simeq \text{Proj}(\text{gr}_I(A)),$$

como A/I -esquemas. Esta identificación se utilizará sin mención explícita en lo sucesivo. Las ecuaciones locales de este subesquema en cada $D_+(f_i)$ son, precisamente, $f_i = 0$.

Proposición.– ([20]) El morfismo de esquemas

$$\Pi_{|\mathrm{Bl}_I(A) \setminus \Pi^{-1} \mathrm{Spec}(A/I)} : \mathrm{Bl}_I(A) \setminus \Pi^{-1} \mathrm{Spec}(A/I) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{Spec}(A/I)$$

es un isomorfismo. El subesquema $\Pi^{-1} \mathrm{Spec}(A/I) \subset \mathrm{Bl}_I(A)$ se denomina el divisor excepcional de la explosión (o de A , si el resto se sobreentiende).

El siguiente concepto a definir es el de transformado estricto de un ideal $J \subset A$ por la explosión Π . Consideremos el ideal (homogéneo) de B dado por

$$B_J = \bigoplus_{m \geq 0} (I^m \cap J).$$

El ideal B_J determina un ideal coherente \hat{J} sobre $\mathrm{Bl}_I(A)$. De hecho B_J puede definirse directamente de la siguiente manera: consideramos en $B_{(f_i)}$ los ideales

$$J_i = \left\{ \frac{a}{f_i^r} \mid a \in J \cap I^r, a \notin I^{r+1} \right\}, \quad i = 1, \dots, s;$$

y sean \hat{J}_i los haces de ideales inducidos por éstos sobre las piezas $D_+(f_i)$. Entonces \hat{J} puede entenderse como el pegamiento (o “*recollement*”, en el lenguaje original de *les EGA*s) de los haces de ideales \hat{J}_i .

Definición.– Definimos el *transformado estricto del ideal J por la explosión Π* como el ideal \hat{J} . El subesquema que este ideal determina en $\mathrm{Bl}_I(A)$ se denomina el *transformado estricto por Π de $\mathrm{Spec}(A/J) \subset \mathrm{Spec}(A)$* .

En [20] se demuestra que el transformado estricto de $\mathrm{Spec}(A/J)$ es isomorfo al subesquema de $\mathrm{Bl}_I(A)$ definido por la explosión global de A/J con centro $\langle I/J \rangle \subset A/J$, lo cual es completamente razonable. Además se demuestran ciertas propiedades universales de tipo topológico pero, como no las necesitaremos en lo sucesivo, no las veremos aquí.

Sin embargo, no son las explosiones globales las transformaciones que utilizaremos en nuestro desarrollo, sino unas que se derivan de éstas: las explosiones formales y las explosiones locales.

Definición.— Un *explotado local* de un anillo local noetheriano A con centro un ideal I es una fibra del haz estructural de $\text{Bl}_I(A)$ en un punto cerrado de $\Pi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Un *explotado formal* de un anillo local noetheriano A con centro un ideal I es la complección con respecto a su ideal maximal de un explotado local de A con centro I .

Por supuesto, la terminología se traslada a transformaciones monoidales y cuadráticas. De hecho, en lo sucesivo, cuando hablemos de transformaciones monoidales y/o cuadráticas, sin más detalle, nos referiremos a las versiones formales de estas explosiones.

Por último, restringiremos las posibles explosiones de A a las centradas en un tipo concreto de ideales: los primos permitidos. Como es bien sabido ([2]), sea $(\mathcal{R}, \mathfrak{n})$ un anillo local tal que existe (A, \mathfrak{m}) , anillo local regular, y J , ideal de A , con $\mathcal{R} = A/J$. Entonces, si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{R})$ e $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, con $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}/J$, se tiene una equivalencia entre las dos condiciones siguientes:

- (1) \mathcal{R}/\mathfrak{p} es regular y $\text{gr}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R})$ es \mathcal{R}/\mathfrak{p} -libre.
- (2) Existe una base de J , que notaremos $\{f_1, \dots, f_r\}$ verificando las siguientes propiedades:
 - (2.A.) Para todo $i = 1, \dots, r$ $\nu_{\mathfrak{m}}(f_i) = \nu_{\mathfrak{q}}(f_i)$ donde $\nu_{\mathfrak{m}}$ y $\nu_{\mathfrak{q}}$ representan, como es usual, el orden de un elemento en las filtraciones \mathfrak{m} y \mathfrak{q} -ádica, respectivamente.
 - (2.B.) El conjunto de \mathfrak{m} -formas iniciales de los f_i generan el ideal homogéneo generado por las \mathfrak{m} -formas iniciales de los elementos de J .

Definición.— Un ideal que verifique cualquiera de las dos condiciones anteriores se dice un *ideal permitido* o, equivalentemente, un *centro permitido de explosión para \mathcal{R}* . Las transformaciones con centro en un ideal permitido se dicen *transformaciones permitidas*. En el caso concreto de superficies algebroides los primos permitidos que definen una variedad algebroides de dimensión 1 se denominarán *curvas permitidas*.

Observación.— Como es evidente, \mathfrak{m} siempre es permitido, ya que A/\mathfrak{m} es el cuerpo residual de A y obviamente $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ es A/\mathfrak{m} -libre por ser A local regular.

En la situación $\mathcal{R} = \mathbf{C}[[X, Y, Z]]/(F)$, cuando hablemos de primos permitidos abusaremos habitualmente de la notación y escribiremos los elementos de \mathfrak{p} (en concreto los sistemas de generadores) como series de $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$, cuando en realidad son evidentemente residuos módulo F .

Lema.— Sea $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$ una superficie algebroide sumergida de multiplicidad n dada por una ecuación F . Son equivalentes:

(i) El ideal \mathfrak{p} es un primo permitido en \mathcal{R} , con $\dim(\mathcal{R}/\mathfrak{p}) = 1$.

(ii) El ideal \mathfrak{p} posee un sistema generador formado por dos series de orden 1 con formas iniciales \mathbf{C} -linealmente independientes y $F \in \mathfrak{q}^n$ (donde, como antes, $\mathfrak{q}/(F) = \mathfrak{p}$).

En particular, tras un cambio de variables, podemos suponer $\mathfrak{p} = (X, Z)$.

Demostración.— En nuestro caso, con las notaciones previas, $A = \mathbf{C}[[X, Y, Z]]$ y $J = (F)$, por lo que de manera inmediata, si existe un sistema generador verificando las condiciones 2.A. y 2.B., el sistema generador $\{F\}$ también debe verificarlas. Supongamos entonces que \mathfrak{p} es permitido en \mathcal{R} . La condición $\nu_{\mathfrak{m}}(F) = \nu_{\mathfrak{q}}(F)$ se traduce a que $F \in \mathfrak{q}^n$, ya que la multiplicidad de \mathcal{S} coincide con el orden usual de F .

Por otro lado, si consideramos la composición de proyecciones

$$A \longrightarrow A/(F) = \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathfrak{p},$$

es claro que el núcleo es \mathfrak{q} y, así, $A/\mathfrak{q} \simeq \mathcal{R}/\mathfrak{p}$, por lo que la dimensión de $A/\mathfrak{q} = 1$. Al ser A un anillo Cohen–Macaulay y local (y, por tanto, catenario), tenemos que la altura de \mathfrak{q} verifica

$$\text{ht}(\mathfrak{q}) = \dim(A) - \dim(A/\mathfrak{q}) = 2.$$

Además, al ser A/\mathfrak{q} regular, podemos asegurar (ver [15], T.26) que existen $\{G_1, G_2, G_3\}$ en A verificando:

(i) $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle = \mathfrak{m}$.

(ii) $\langle G_1, G_2 \rangle = \mathfrak{q}$.

Tomando entonces G_1 y G_2 módulo F obtenemos el conjunto de generadores buscado para \mathfrak{p} . La implicación restante es bastante más sencilla. *Q.E.D.*

Las curvas (o sea, los ideales primos no maximales) \mathfrak{p} que verifiquen $F \in \mathfrak{p}^n$ se denominarán en lo sucesivo curvas equimúltiples. Obviamente curva equimúltiple lisa es equivalente a curva permitida.

I.B. Explosiones de una variedad algebroide lisa de dimensión 3.

Dado que las variedades que nos interesan son las superficies algebroides sumergidas, es evidente que el espacio ambiente no debe ser perdido de vista, de cara a mantener la inmersión. Sea, en lo sucesivo, X una variedad algebroide lisa de dimensión 3. Esto es, $X = \text{Spec}(A)$ donde el anillo local (A, \mathfrak{m}) , al ser noetheriano, regular y completo es de la forma

$$A = \mathbf{C}[[X_1, X_2, X_3]], \quad \mathfrak{m} = (X_1, X_2, X_3).$$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema.— ([20], [18]) Sea X en las condiciones anteriores y sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal permitido de altura 2. Entonces se verifica lo siguiente:

(1.1) Todo transformado cuadrático local de A es regular, de dimensión 3 y tiene a \mathbf{C} como cuerpo de coeficientes.

(1.2) Todo transformado cuadrático formal de A es isomorfo al anillo A .

(2.1) Todo transformado monoidal local de A de centro \mathfrak{p} es regular, de dimensión 3 y tiene a \mathbf{C} como cuerpo de coeficientes.

(2.2) Todo transformado monoidal formal de A de centro \mathfrak{p} es isomorfo al anillo A .

Demostración.— Desde luego, por la propia definición de explosión formal, tanto (1.2) como (2.2) se siguen de manera inmediata de (1.1) y (2.1), respectivamente. Vamos a comenzar probando (1.1).

Para ello consideremos $B = \bigoplus_n \mathfrak{m}^n$ que, como es ampliamente conocido, podemos identificar como A -álgebra graduada con

$$B \simeq A[z_1, z_2, z_3] = A[Z_1, Z_2, Z_3]/\mathfrak{a},$$

donde

$$\mathfrak{a} = (Z_1X_2 - Z_2X_1, Z_1X_3 - Z_3X_1, Z_2X_3 - Z_3X_2).$$

En estas condiciones la transformada cuadrática global es

$$\Pi : \text{Bl}_{\mathfrak{m}}(A) = \text{Proj}(A[z_1, z_2, z_3]) \longrightarrow \text{Spec}(A),$$

y el divisor excepcional es, precisamente,

$$\Pi^{-1}(\mathfrak{m}) = \text{Proj}(\text{gr}_{\mathfrak{m}}(A)) = \text{Proj}(\mathbf{C}[Y_1, Y_2, Y_3]) = \mathbf{P}^2(\mathbf{C}),$$

por ser A local regular.

Tomemos entonces un punto del divisor excepcional, $P(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ y calculemos la fibra del haz estructural de $\text{Bl}_{\mathfrak{m}}(A)$ sobre P . Para ello hemos de situarnos en una carta afín que lo contenga. Supongamos pues, sin pérdida de generalidad, $\alpha \neq 0$.

El ideal de P en $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ es

$$\mathfrak{n}_P = (\alpha Y_2 - \beta Y_1, \alpha Y_3 - \gamma Y_1, \beta Y_3 - \gamma Y_2),$$

o, teniendo en cuenta $\alpha \neq 0$,

$$\mathfrak{n}_P = (\alpha Y_2 - \beta Y_1, \alpha Y_3 - \gamma Y_1).$$

Siguiendo la sección anterior, tenemos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : B &\longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \\ a &\longrightarrow a + \mathfrak{m}, \quad a \in A \\ z_i &\longmapsto Y_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

que nos induce la inclusión $\text{Proj}(\text{gr}_m(A)) \hookrightarrow \text{Bl}_m(A)$ y nos identifica el divisor excepcional con $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ por contracción de ideales. En concreto, la contracción de n_P (esto es un cálculo bastante tedioso que omitimos) viene dada por

$$\mathfrak{q} = (\alpha z_2 - \beta z_1, \alpha z_3 - \gamma z_1, X_1, X_2, X_3).$$

Estamos en la carta

$$D_+(z_1) \simeq \text{Spec}(B_{(z_1)}) = \text{Spec}\left(A\left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right]\right),$$

donde \mathfrak{q} se corresponde con el ideal

$$\mathfrak{q}' = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{z_3}{z_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, X_1, X_2, X_3\right),$$

y entonces claramente la fibra del haz estructural sobre P será el anillo local $A[z_2/z_1, z_3/z_1]_{\mathfrak{q}'}$.

Para estudiar este anillo consideraremos, siguiendo a [20], el homomorfismo sobreyectivo

$$\begin{aligned} \sigma : A[T_2, T_3] &\longrightarrow A\left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right] \\ T_i &\longmapsto \frac{z_i}{z_1} \end{aligned}$$

cuyo núcleo resulta

$$\ker \sigma = (X_1 T_2 - X_2, X_1 T_3 - X_3) \subset A[T_2, T_3],$$

y que verifica así mismo

$$\mathfrak{q}'' = \sigma^{-1}(\mathfrak{q}') = \left(T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, X_1, X_2, X_3\right).$$

En estas condiciones

$$A\left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right]_{\mathfrak{q}'} = (A[T_2, T_3]/\ker \sigma)_{\mathfrak{q}''/\ker \sigma} = (A[T_2, T_3]_{\mathfrak{q}''})/(\ker \sigma)_{\mathfrak{q}''}.$$

Entonces tenemos que, al ser el anillo $A[T_2, T_3]$ un anillo Cohen–Macaulay de dimensión 5, y ser $\mathfrak{q}'' \subset A[T_2, T_3]$ un ideal maximal generado por 5 elementos, podemos deducir que $A[T_2, T_3]_{\mathfrak{q}''}$ es local regular de dimensión 5.

Pero observemos que una forma alternativa de generar \mathfrak{q}'' es

$$\mathfrak{q}'' = \left(T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1, Z_1T_2 - Z_2, Z_1T_3 - Z_3 \right),$$

a partir de la cual es trivial ver que

$$(A[T_2, T_3]_{\mathfrak{q}''}) / (\ker \sigma)_{\mathfrak{q}''}$$

es local regular de dimensión 3, viendo que un sistema regular de parámetros es, precisamente,

$$\left\{ T_2 - \frac{\beta}{\alpha}, T_3 - \frac{\gamma}{\alpha}, Z_1 \right\}.$$

Por tanto el anillo local $A[z_2/z_1, z_3/z_1]_{\mathfrak{q}'}$ es regular, de dimensión 3 y obviamente tiene a \mathbf{C} como cuerpo de coeficientes. Esto prueba (1.1) y una simple completación prueba entonces (1.2).

Para ver los resultados concernientes a las transformaciones monoidales, observemos, en primer lugar que por ser \mathfrak{p} permitido y de altura 2, A/\mathfrak{p} es local regular de dimensión 1 y, por tanto, su ideal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ es principal. En concreto, modificando levemente lo apuntado en la pasada sección para curvas permitidas en superficies, podemos suponer $\mathfrak{p} = (X_1, X_2)$.

A partir de esta simplificación la prueba discurre por caminos paralelos a los del caso cuadrático, por lo que daremos sólo las indicaciones necesarias para seguir el razonamiento, sin pararnos en los detalles. En nuestro caso, B es de la forma

$$B = A[z_1, z_2] = A[Z_1, Z_2]/\mathfrak{a}, \text{ con } \mathfrak{a} = (Z_1X_2 - Z_2X_1).$$

De forma similar, el graduado de A respecto de \mathfrak{p} verifica

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1} \simeq (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2],$$

y un punto cerrado del divisor excepcional será un ideal primo de $\text{gr}_{\mathfrak{p}}(A)$, homogéneo, distinto del irrelevante (en este caso $(X_3 + \mathfrak{p}, Y_1, Y_2)$) y maximal de entre los que verifican estas condiciones.

Veamos con algo más de profundidad cómo ha de ser este ideal, pongamos \mathfrak{n} . En concreto debe verificar

$$\mathfrak{n} \cap (A/\mathfrak{p}) = (X_3 + \mathfrak{p}),$$

por lo que

$$(X_3 + \mathfrak{p}) \cdot (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2] \subset \mathfrak{n}.$$

Ahora bien, al ser

$$(A/\mathfrak{p})/(X_3 + \mathfrak{p}) = (A/\mathfrak{p})/(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) \simeq A/\mathfrak{m} = \mathbf{C},$$

tenemos de igual forma que

$$\frac{(A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2]}{(X_3 + \mathfrak{p}) \cdot (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2]} \simeq \mathbf{C}[Y_1, Y_2],$$

esto es, en el homomorfismo natural

$$\text{gr}_{\mathfrak{p}}(A) = (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2] \longrightarrow \mathbf{C}[Y_1, Y_2] = (A/\mathfrak{m})[Y_1, Y_2]$$

el núcleo, $(X_3 + \mathfrak{p}) \subset (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2]$ está contenido en \mathfrak{n} . Esto implica que \mathfrak{q} se extiende a un maximal no irrelevante de $\mathbf{C}[Y_1, Y_2]$, que ha de ser de la forma $(\alpha Y_2 - \beta Y_1)$, con $(\alpha : \beta) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. En particular, esto prueba que \mathfrak{n} puede escribirse

$$\mathfrak{n} = (X_3 + \mathfrak{p}, \alpha Y_2 - \beta Y_1).$$

Veamos ahora la contracción de \mathfrak{n} por el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : A[z_1, z_2] = B &\longrightarrow (A/\mathfrak{p})[Y_1, Y_2] = \text{gr}_{\mathfrak{p}}(A) \\ a &\longmapsto a + \mathfrak{p}, a \in A \\ z_i &\longmapsto Y_i, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Esta contracción resulta, tras un largo cálculo,

$$\mathfrak{q} = (\alpha z_2 - \beta z_1, X_1, X_2, X_3),$$

y, si suponemos $\alpha \neq 0$ e identificamos como antes

$$D(z_1) \simeq \text{Spec} \left(B_{(z_1)} \right) \simeq \text{Spec} \left(A \left[\frac{z_2}{z_1} \right] \right),$$

el ideal de $A[z_2/z_1]$ correspondiente a \mathfrak{q} viene dado por

$$\mathfrak{q}' = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, X_1, X_2, X_3 \right).$$

Nuevamente hemos de estudiar la fibra del haz estructural de $\text{Bl}_p(A)$ sobre \mathfrak{q}' ; esto es, quedamos reducidos a probar que $A[z_2/z_1]_{\mathfrak{q}'}$ es un anillo local regular de dimensión 3 con \mathbf{C} como cuerpo de coeficientes. Una vez más consideramos para ello el morfismo natural

$$\sigma : A[T] \longrightarrow A \left[\frac{z_2}{z_1} \right]$$

cuyo núcleo resulta $\ker \sigma = (X_1 T - X_2)$ y donde

$$\sigma^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'' = \left(T - \frac{\beta}{\alpha}, X_1, X_2, X_3 \right).$$

Es inmediato ver que $A[T]$ es un anillo Cohen–Macaulay de dimensión 4 y que \mathfrak{q}'' es un ideal maximal con un sistema generador de 4 elementos, por lo que $A[T]_{\mathfrak{q}''}$ es un anillo local regular de dimensión 4. Ahora bien, como

$$A \left[\frac{z_2}{z_1} \right]_{\mathfrak{q}'} = (A[T]/\ker \sigma)_{\mathfrak{q}''/\ker \sigma} = (A[T]_{\mathfrak{q}''})/\ker \sigma_{\mathfrak{q}''},$$

ya tenemos que $A[z_2/z_1]_{\mathfrak{q}'}$ es local, regular y de dimensión 3. Obviamente \mathbf{C} es un cuerpo de coeficientes y, de nuevo, basta tomar la completión para probar (2.2). *Q.E.D.*

I.C. Explosiones de una superficie algebroide sumergida.

El objetivo de esta sección es dar una forma algo menos intrínseca (y, consecuentemente, algo más manejable) de hallar los transformados cuadráticos

y monoidales formales de una superficie algebroide sumergida. Como en las secciones anteriores, dejamos para [20] y [18] los detalles a los que no descendemos y utilizaremos libremente los resultados de [29] y [6].

Tenemos entonces una superficie $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R}, \mathfrak{m})$, dada por una ecuación $F(X_1, X_2, X_3)$,

$$\mathcal{R} = \mathbf{C}[[X_1, X_2, X_3]]/(F) = \mathbf{C}[[x_1, x_2, x_3]], \mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3),$$

y denotaremos el anillo correspondiente al espacio ambiente por (A, \mathfrak{n}) ,

$$A = \mathbf{C}[[X_1, X_2, X_3]], \mathfrak{n} = (X_1, X_2, X_3).$$

Como ya hemos visto, si notamos

$$B = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{n}^n, B' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n,$$

tenemos que ambas son álgebras (sobre A y \mathcal{R} , respectivamente) graduadas y generadas por 3 elementos, que denotaremos $\{z_1, z_2, z_3\}$ e $\{y_1, y_2, y_3\}$. Esto es, tenemos morfismos sobreyectivos

$$\begin{array}{ccc} \varpi : A[Z_1, Z_2, Z_3] & \longrightarrow & B \\ Z_i & \longmapsto & z_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varpi' : \mathcal{R}[Y_1, Y_2, Y_3] & \longrightarrow & B' \\ Y_j & \longmapsto & y_j \end{array}$$

Así mismo tenemos otro morfismo sobreyectivo: la extensión de la reducción módulo F :

$$\begin{array}{ccc} \sigma : A[Z_1, Z_2, Z_3] & \longrightarrow & \mathcal{R}[Y_1, Y_2, Y_3] \\ a \in A & \longmapsto & a + (F) \in \mathcal{R} \\ Z_j & \longmapsto & Y_j \end{array}$$

que induce un morfismo sobreyectivo σ' entre B y B' haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A[Z_1, Z_2, Z_3] & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{R}[Y_1, Y_2, Y_3] \\
\varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\
B & \xrightarrow{\sigma'} & B'
\end{array}$$

El núcleo de σ' no es difícil (aunque sí algo largo, ver [20]) de hallar: notemos ν el orden usual en A (esto es, el orden n -ádico) y, si $\nu(F) = n$, escribiremos para cada entero p con $1 \leq p \leq n$

$$F_p(X_1, X_2, X_3) = \sum_{a+b+c=p} \alpha_{abc}(X_1, X_2, X_3) X_1^a X_2^b X_3^c,$$

expresión que designaremos $F_p(X_1, X_2, X_3)$. Nótese que F_p no es única para un mismo p , en general. En esta situación escribiremos

$$F_p(z_1, z_2, z_3) = \sum_{a+b+c=p} \alpha_{abc}(X_1, X_2, X_3) z_1^a z_2^b z_3^c.$$

Entonces se tiene que

$$\ker \sigma' = (F(X_1, X_2, X_3), F_1(z_1, z_2, z_3), \dots, F_n(z_1, z_2, z_3)) \subset B,$$

y no influye para nada cómo hallamos escogido las series $F_p(X_1, X_2, X_3)$. En efecto, como para cualquier p entre 0 y n , y para cualquier elección de F_p , se tiene que

$$F_p(X_1, X_2, X_3) = F(X_1, X_2, X_3),$$

dos elecciones distintas siempre inducen, en B , la misma clase módulo $\ker \sigma'$.

Nosotros queremos estudiar el transformado cuadrático formal de \mathcal{S} en la carta (pongamos) $y_1 \neq 0$. Pero, si $z_1 \notin \sqrt{\ker \sigma'}$ podemos extender σ' a un homomorfismo entre los anillos de fracciones

$$\hat{\sigma} : B_{z_1} \longrightarrow B_{y_1},$$

ya que $\sigma'(z_1) = y_1$. Por supuesto, al provenir de σ' (de forma natural), $\hat{\sigma}$ ha de ser graduado y de grado cero. Entonces se puede restringir a la parte homogénea de grado cero, precisamente

$$\hat{\sigma}|_{B_{z_1}} = \Sigma : B_{(z_1)} \longrightarrow B_{(y_1)}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 A[Z_1, Z_2, Z_3] & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{R}[Y_1, Y_2, Y_3] \\
 \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\
 B = A[z_1, z_2, z_3] & \xrightarrow{\sigma'} & B' = \mathcal{R}[y_1, y_2, y_3] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A[z_1, z_2, z_3]_{z_1} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \mathcal{R}[y_1, y_2, y_3]_{y_1} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 A[z_2/z_1, z_3/z_1] & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{R}[y_2/y_1, y_3/y_1]
 \end{array}$$

El morfismo Σ es sobreyectivo por serlo σ' y su núcleo es

$$\ker \Sigma = \left(\frac{F(Z_1, Z_2, Z_3)}{1}, \frac{F_1(z_1, z_2, z_3)}{z_1}, \dots, \frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right).$$

Pero, como $X_1 z_2 - X_2 z_1 = X_1 z_3 - X_3 z_1 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
 F(X_1, X_2, X_3) &= \sum_{a+b+c=n} \alpha_{abc}(X_1, X_2, X_3) X_1^a X_2^b X_3^c \\
 &= \sum_{a+b+c=n} \alpha_{abc}(X_1, X_2, X_3) X_1^a \left(X_1 \frac{z_2}{z_1} \right)^b \left(X_1 \frac{z_3}{z_1} \right)^c \\
 &= X_1^n \frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n},
 \end{aligned}$$

de forma que

$$F(Z_1, Z_2, Z_3) \in \left(\frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right) \subset B_{(z_1)}.$$

y análogamente para los $F_i(z_1, z_2, z_3)/z_1^i$, de manera que

$$\ker \Sigma = \left(\frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right),$$

y, en consecuencia,

$$B'_{(x_1)} = \mathcal{R} \left[\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right] = B_{(z_1)} \left/ \left(\frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right) \right.$$

Vamos a fijar ahora nuestra atención en una fibra del haz de B' . Obviamente σ , al ser sobreyectivo, induce una inmersión cerrada de esquemas

$$\Omega : \text{Proj}(B') \hookrightarrow \text{Proj}(B),$$

y se tiene el diagrama conmutativo, donde las flechas horizontales corresponden a las inmersiones naturales y las verticales son las explosiones globales centradas en \mathfrak{m} y \mathfrak{n} .

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{R}) & \xrightarrow{i} & \text{Spec}(A) \\ \uparrow \Pi & & \uparrow \Pi' \\ \text{Proj}(B') & \xrightarrow{\Omega} & \text{Proj}(B) \end{array}$$

En particular tenemos que $\Pi^{-1}(\mathfrak{m}) = (\Pi')^{-1}(\mathfrak{n}) \cap \text{Proj}(B')$. Pero además, de forma análoga a I.B.,

$$\Pi^{-1}(\mathfrak{m}) = \text{Proj}(\text{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{R})) = \text{Proj}(\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/(\overline{F})),$$

donde \overline{F} representa la forma inicial de F . Esto permite interpretar $\Pi^{-1}(\mathfrak{m})$ como una curva en el plano proyectivo complejo.

Si tomamos ahora un punto $P(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, pongamos $\alpha \neq 0$, que esté, en el sentido que acabamos de darle, en $\Pi^{-1}(\mathfrak{m})$, su ideal en B' está en $D(y_1)$: en concreto (ver I.B.: no hay nada esencialmente diferente en este razonamiento) se trata de

$$\mathfrak{q} = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{z_3}{z_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, X_1, X_2, X_3 \right).$$

Para ver la ecuación local del transformado cuadrático hay que traducir esto al anillo cociente

$$B_{(z_1)} \Big/ \left(\frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right),$$

pero aquí el ideal correspondiente a P es

$$\mathfrak{q}' = \Sigma^{-1}\mathfrak{q} = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{z_3}{z_1} - \frac{\gamma}{\alpha}, X_1 \right),$$

con lo que

$$\left(B'_{(x_1)} \right)_{\mathfrak{q}} = \left(\mathcal{R} \left[\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \end{array} \right] \right)_{\mathfrak{q}} = \left(B_{(z_1)} \right)_{\mathfrak{q}'} \Big/ \left(\frac{F_n(z_1, z_2, z_3)}{z_1^n} \right)_{\mathfrak{q}'}$$

Podemos cambiar ahora las z_i por variables, para hacer más sencilla la completación. De hecho, como es fácil de comprobar

$$B_{(z_1)} = A[X_2/X_1, X_3/X_1]_{\mathfrak{q}'}$$

y, como sabemos (ver I.B.) éste es un anillo local, regular, de dimensión 3 y que admite como sistema regular de parámetros a

$$\left\{ X_1, \frac{X_2}{X_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{X_3}{X_1} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\},$$

luego al completar obtenemos $\widehat{B_{(z_1)}} = \mathbf{C}[[X'_1, X'_2, X'_3]]$, donde

$$X'_1 = X_1, \quad X'_2 = \frac{X_2}{X_1} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad X'_3 = \frac{X_3}{X_1} - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Interpretemos por último, en el completado, quién es el ideal proveniente de $(F_n(z_1, z_2, z_3)/z_1^n)$. En concreto, al pasar a $A[X_2/X_1, X_3/X_1]$ obtenemos $(F(X_1, X_2, X_3)/X_1^n)$. Si escribimos entonces F como suma de formas

$$F(X_1, X_2, X_3) = \sum_{j \geq n} F_j(X_1, X_2, X_3),$$

(obsérvese el nuevo sentido de F_n) tenemos, en el completado,

$$\begin{aligned} \frac{F(X_1, X_2, X_3)}{X_1^n} &= \sum_{j \geq n} (X'_1)^{n-j} F_j \left(X'_1, X'_1 \left(X'_2 - \frac{\beta}{\alpha} \right), X'_1 \left(X'_3 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \right) \\ &= F^{(1)}(X'_1, X'_2, X'_3). \end{aligned}$$

Así podemos interpretar el transformado cuadrático formal de \mathcal{R} , en el punto $P(\alpha : \beta : \gamma)$, en la carta $\alpha \neq 0$, como la superficie algebroides sumergida

$$\mathcal{S}^{(1)} = \text{Spec} \left(\mathbf{C}[[X'_1, X'_2, X'_3]] / \left(F^{(1)}(X'_1, X'_2, X'_3) \right) \right).$$

Observación.— Para que $F^{(1)}$ no sea una unidad es necesario y suficiente que $F_n(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Esto es, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del divisor excepcional y la variedad proyectiva definida por F_n .

Definición.— La variedad proyectiva definida por F_n en $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ se denomina el *cono tangente de \mathcal{S}* y sus puntos se denominan *direcciones* de dicho cono (o, por abuso de lenguaje, del divisor excepcional).

El morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \Pi_P^{(1)} : \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3] &\longrightarrow \mathbf{C}[[X'_1, X'_2, X'_3]] \\ X_1 &\longmapsto X'_1 \\ X_2 &\longmapsto X'_1 \left(X'_2 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ X_3 &\longmapsto X'_1 \left(X'_3 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

se denominará el *morfismo de anillos asociado a la explosión* (en la dirección $(\alpha : \beta : \gamma)$ en la carta $\alpha \neq 0$). La acción de este morfismo sobre X_1, X_2

y X_3 se denominará, habitualmente, unas *ecuaciones de la transformación cuadrática*.

Observación.— Obviamente, si β o γ son no nulos podemos obtener de la misma forma los transformados cuadráticos formales en las otras cartas. En cualquier caso, todos los transformados son isomorfos entre sí como esquemas afines, independientemente de en qué carta los miremos.

Veamos ahora las transformaciones monoidales. Como hicimos en la sección previa, nos limitaremos en este caso a señalar las líneas generales de razonamiento y los escasos puntos en que nos apartamos del caso cuadrático.

La situación ahora es la siguiente: tenemos como antes los anillos locales (A, \mathfrak{n}) y $(\mathcal{R}, \mathfrak{m})$, donde

$$A = \mathbf{C}[[X_1, X_2, X_3]], \quad \mathcal{R} = \mathbf{C}[[X_1, X_2, X_3]]/(F),$$

con $\nu(F) = n$ y sea ahora $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{R})$ un ideal primo permitido de altura uno. Como ya vimos en I.A. podemos de hecho suponer, salvo cambio de coordenadas

$$\mathfrak{p} = (X_1, X_2)/(F) \text{ y } F \in (X_1, X_2)^n.$$

Nuestro objetivo es calcular los transformados monoidales formales de $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$ que tienen centro en \mathfrak{p} . Denotaremos en lo sucesivo $\mathfrak{q} = (X_1, X_2) \subset A$. En nuestro caso tenemos

$$B = \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{q}^m, \quad B' = \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{p}^m,$$

o, mediante los homomorfismos análogos a los notados ϖ y ϖ' ,

$$B = A[z_1, z_2], \quad B' = \mathcal{R}[y_1, y_2].$$

Así mismo tenemos el morfismo sobreyectivo de anillos

$$\begin{aligned} \sigma' : A[z_1, z_2] &\longrightarrow \mathcal{R}[y_1, y_2,] \\ a \in A &\longmapsto a + (F) \in \mathcal{R} \\ Z_j &\longmapsto Y_j \end{aligned}$$

proveniente del morfismo natural σ entre los anillos $A[Z_1, Z_2]$ y $\mathcal{R}[Y_1, Y_2]$ que, recordemos, consiste únicamente en tomar módulo (F) para los coeficientes y, para las variables, simplemente en cambiar de nombre.

Dado que $F \in \mathfrak{p}^n$ podemos hacer, para cada $p \in \{0, \dots, n\}$

$$F_i(X_1, X_2, X_3) = \sum_{a+b=n} \alpha_{ab}(X_1, X_2, X_3) X_1^a X_2^b,$$

y, de manera análoga,

$$\ker \sigma' = (F(X_1, X_2, X_3), F_1(z_1, z_2), \dots, F_n(z_1, z_2)) \subset B.$$

Entonces, si $z_1 \notin \sqrt{\ker \sigma'}$ podemos definir los morfismos

$$\hat{\sigma} : B_{z_1} \longrightarrow B'_{y_1}, \quad \Sigma : B_{(z_1)} \longrightarrow B'_{(y_1)},$$

siendo este último un homomorfismo sobreyectivo de núcleo

$$\ker \Sigma = \left(\frac{F_n(z_1, z_2)}{z_1^n} \right) \subset B_{(z_1)}.$$

Haciendo entonces las identificaciones convenientes obtenemos

$$\mathcal{R}[x_2/x_1] = A[z_2/z_1] / \left(\frac{F_n(z_1, z_2)}{z_1^n} \right).$$

Siguiendo con el paralelismo con el caso cuadrático, tenemos ahora que σ' induce una inmersión cerrada de esquemas que, junto con las explosiones globales de centros \mathfrak{p} y \mathfrak{q} y la inmersión natural de $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$ en $\text{Spec}(A)$ nos dan el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{R}) & \xrightarrow{i} & \text{Spec}(A) \\ \uparrow \Pi_{\mathfrak{p}} & & \uparrow \Pi'_{\mathfrak{q}} \\ \text{Proj}(B') & \xrightarrow{\Omega} & \text{Proj}(B) \end{array}$$

Recordemos (I.B.) que los puntos del divisor excepcional estaban en correspondencia con los ideales del anillo

$$\text{gr}_{\mathfrak{q}}(A) = (A/\mathfrak{q})[T_1, T_2],$$

concretamente con los de la forma

$$\mathfrak{a} = (X_3 + \mathfrak{q}, \alpha T_2 - \beta T_1),$$

donde $(\alpha : \beta) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (sea $\alpha \neq 0$, por fijar ideas). Así mismo vimos que este ideal, en $B_{(z_1)}$ era

$$\mathfrak{a}' = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\beta}{\alpha}, X_1, X_2, X_3 \right),$$

y, por Σ , obtenemos en $B'_{(x_1)}$ el ideal

$$\mathfrak{a}'' = \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{\alpha}{\beta}, X_1, X_3 \right).$$

En este caso la interpretación del divisor excepcional como variedad proyectiva es como sigue: tenemos

$$\text{gr}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R}) = \text{gr}_{\mathfrak{q}}(A) / \left(\overline{F}(T_1, T_2, X_3 + \mathfrak{p}) \right),$$

donde \overline{F} es la forma inicial \mathfrak{q} -ádica de F ; esto es, la suma de los monomios cuyos grados en X_1 y X_2 es exactamente ν . En estas condiciones, para que el ideal \mathfrak{a} represente un punto del divisor excepcional deberá tenerse

$$\mathfrak{a} \subset \left(\overline{F}(T_1, T_2, X_3 + \mathfrak{p}) \right),$$

o, dicho de otro modo $\overline{F}(\alpha, \beta, 0) = 0$.

Análogamente al caso cuadrático tenemos que

$$\mathcal{R}[z_2/z_1]_{\mathfrak{a}''} = A[X_2/X_1]_{\mathfrak{a}} / \left(\frac{F_n(X_1, X_2, X_3)}{X_1^n} \right)_{\mathfrak{a}},$$

pero, como $A[X_2/X_1]_{\mathfrak{a}}$ es un anillo local, regular y de dimensión 3 que admite como sistema regular de parámetros a

$$\left\{ \frac{X_2}{X_1} - \frac{\beta}{\alpha}, X_1, X_3 \right\},$$

podemos completar haciendo la identificación $A[\widehat{X_2/X_1}]_a = \mathbf{C}[[X'_1, X'_2, X'_3]]$, donde

$$X'_1 = X_1, X'_2 = \frac{X_2}{X_1} - \frac{\beta}{\alpha}, X'_3 = X_3.$$

Por tanto, para calcular el transformado monoidal de \mathcal{S} en la dirección dada por el punto $(\alpha : \beta : 0)$ del divisor excepcional sólo hay que considerar la superficie

$$\mathcal{S}^{(1)} = \text{Spec} \left(\mathbf{C}[[X'_1, X'_2, X'_3]] / (F^{(1)}) \right),$$

donde

$$F^{(1)}(X'_1, X'_2, X'_3) = \frac{1}{(X'_1)^n} F \left(X'_1, X'_1 \left(X'_2 + \frac{\beta}{\alpha} \right), X'_3 \right).$$

La terminología de cono tangente, homomorfismos de anillos asociados y ecuaciones se traslada sin cambios del caso cuadrático al monoidal. Nótese que, al igual que en el caso cuadrático, podemos tener más de una carta para elegir, si tanto α como β son no nulos. De nuevo todas las ecuaciones nos dan superficies isomorfas como esquemas afines.

I.D. Ecuación WT y polígono de Newton–Hironaka.

Comenzamos en esta sección a presentar ciertos resultados técnicos, completamente circunscritos al alcance de nuestro problema. En concreto nos centraremos en dos aspectos: hallar una ecuación de la superficie que sea “simple” y definir un objeto combinatorio que posteriormente utilizaremos.

En la situación que hemos planteado entonces, partimos de una superficie algebroide sumergida no regular, esto es,

$$\mathcal{S} = \mathbf{C}[[X, Y, Z]] / (F(X, Y, Z)),$$

donde $\nu(F) = n > 1$. Vamos a escribir la ecuación de \mathcal{S} de una forma algo más cómoda para nuestros propósitos. En primer lugar, supongamos que la forma inicial de F es $\overline{F}(X, Y, Z)$, y sea $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{A}^3(\mathbf{C})$, con $\gamma \neq 0$ y tal que

$$\overline{F}(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0.$$

Observemos que un tal punto de $\mathbf{A}^3(\mathbf{C})$ siempre existe. Consideramos entonces el isomorfismo dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} X \mapsto X_0 + \alpha Z_0 \\ Y \mapsto Y_0 + \beta Z_0 \\ Z \mapsto \gamma Z_0 \end{cases}$$

Tras este cambio de variables que, por supuesto, conserva el grado y las partes homogéneas, la forma inicial de F tiene un monomio algo especial:

$$\overline{F}(X_0, Y_0, Z_0) = \overline{F}(\alpha, \beta, \gamma)Z_0^n + (\text{términos de grado } < n \text{ en } Z_0),$$

esto es, la serie $F(X_0, Y_0, Z_0)$ es regular en Z_0 . Además, no es difícil darse cuenta de que el resto de los monomios han de contener alguna de las otras variables, ya que \overline{F} es homogéneo, de manera que podemos afirmar que $F(X_0, Y_0, Z_0)$ es regular de orden n en Z_0 (en nomenclatura clásica, $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ son un sistema transversal de parámetros en \mathcal{R}).

El Teorema Preparatorio de Weierstrass nos asegura entonces que existe un asociado de $F(X_0, Y_0, Z_0)$, que denotaremos $F_0(X_0, Y_0, Z_0)$ de la forma:

$$F_0(X_0, Y_0, Z_0) = Z_0^n + a_{n-1}(X_0, Y_0)Z_0^{n-1} + \dots + a_0(X_0, Y_0),$$

donde $a_i(X_0, Y_0) \in \mathbf{C}[[X_0, Y_0]]$. Como el orden es invariante por asociados, podemos de hecho asegurar que $\nu(a_i) \geq n - i$. Una ecuación de \mathcal{S} en esta forma se denominará *ecuación de Weierstrass*.

Podemos afinar aún más la ecuación de \mathcal{S} haciendo, en la serie anterior, el cambio

$$\begin{cases} X_0 \mapsto X_1 \\ Y_0 \mapsto Y_1 \\ Z_0 \mapsto Z_1 - \frac{1}{n}a_{n-1}(X_1, Y_1) \end{cases}$$

que hace desaparecer el término en Z_1^{n-1} . Por lo tanto, a partir de ahora, supondremos, renombrando las variables, que la superficie \mathcal{S} nos viene dado por una ecuación de la forma

$$F(X, Y, Z) = Z^n + a_{n-2}(X, Y)Z^{n-2} + \dots + a_0(X, Y),$$

con $\nu(a_i) \geq n - i$. A una ecuación de este tipo la denominaremos *ecuación de Weierstrass - Tschirnhausen* o, simplemente, ecuación WT.

Observación.— Notemos que esta ecuación tiene algunos puntos de interés: por ejemplo en el caso de que el cono tangente sea un plano múltiple, éste ha de ser $Z = 0$ ya que, si la forma inicial de F es potencia de una forma lineal donde intervengan las variables X y/o Y , aparecería un término en Z^{n-1} .

Así mismo, si existiese una curva permitida, pongamos por caso $C = (G(X, Y, Z), H(X, Y, Z))$, tiene que verificarse $F \in (G, H)^n$, esto es, ha de ser de la forma

$$F = \sum_{i+j=n} a_{ij}(X, Y, Z)G^iH^j.$$

En particular, Z ha de aparecer en la forma lineal de G o en la de H , ya que ambas series son no unidades y Z^n es un monomio de F . Cambiando G y H si fuera preciso por combinaciones lineales podemos de hecho suponer que Z aparece en una sola forma lineal, pongamos la de $G(X, Y, Z)$. Entonces el par $(i = n, j = 0)$ ha de estar en la suma anterior, porque todos los demás monomios de la suma han de tener X e Y . Más aún, debe verificar que $a_{n0}(X, Y, Z)$ es una constante, porque F contiene el monomio Z^n y ningún otro con exponente en Z mayor o igual que n . Como, además, no existe término en Z^{n-1} esto fuerza a que $G(X, Y, Z) = Z$.

En realidad, modificando ligeramente el razonamiento anterior podemos deducir que si $F \in (G, H)^n$ con G y H no unidades, podemos suponer que $G = Z$. Esto es, las llamadas curvas equimúltiples (que pueden, eventualmente, ser singulares) han de ser de la forma $(Z, H(X, Y))$ para una cierta $H(X, Y)$ no unidad.

De forma similar podemos probar que la curva (X, Y) nunca puede ser permitida. En realidad, para ver esto es suficiente con considerar el monomio Z^n , que obviamente no se puede crear con monomios de grado n en X e Y .

Observación.— La ecuación WT es estable por los siguientes morfismos:

- Transformaciones cuadráticas en las direcciones $(\alpha : \beta : 0)$ (donde, obviamente, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).
- Cambios de variable que sean del tipo

$$\begin{cases} X \mapsto g(X', Y') \\ Y \mapsto h(X', Y') \\ Z \mapsto Z' \end{cases}$$

En consecuencia ya tenemos una forma más cómoda para nuestra ecuación, a la que podemos aplicarle las transformaciones que hemos visto en el capítulo anterior.

Por último, vamos a introducir un concepto bien conocido y recurrente en la literatura dedicada al tema: el diagrama de Newton. Este concepto depende fuertemente de la ecuación considerada y puede variar de forma bastante anárquica con los cambios de variables, pero nos será de utilidad.

Definición.— Dada una ecuación $F(X, Y, Z)$ de una superficie \mathcal{S} definimos el *diagrama de Newton* de dicha ecuación (NO de la superficie) como el conjunto

$$N(F) = \left\{ (i, j, k) \in \mathbf{N}^3 \mid X^i Y^j Z^k \text{ tiene coeficiente no nulo en } F \right\}.$$

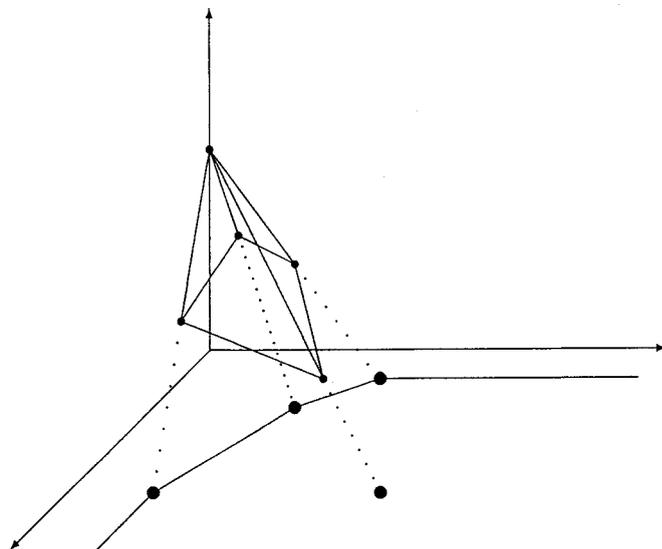
Si consideramos la envolvente convexa del conjunto resultante de sumar el octante \mathbf{N}^3 a cada punto de $N(F)$ obtendremos el objeto denominado *poliedro de Newton*, que se denotará por $P(F)$.

Observación.— En las mismas condiciones, podemos definir otros conjuntos convexos asociados a la ecuación. En concreto, uno que utilizaremos y que aparece frecuentemente en la “tradición oral” de la teoría de resolución de singularidades (ver [11]) es el conjunto que llamaremos *polígono de Newton–Hironaka* de F , que se define como sigue: consideremos el conjunto

$$N'(F) = \left\{ \left(\frac{i}{n-k}, \frac{j}{n-k} \right) \in \mathbf{N}^2 \mid (0, 0, n) \neq (i, j, k) \in N(F) \right\},$$

y definimos el polígono de Newton–Hironaka, denotado $\Delta(F)$, como la envolvente convexa del conjunto obtenido al unir todos los cuadrantes de la forma $(a, b) + \mathbf{N}^2$, con $(a, b) \in N'(F)$.

Podemos definir $\Delta(F)$ a partir de $N(F)$ de la siguiente forma: para cada $(i, j, k) \in N(F)$ distinto del $(0, 0, n)$ tomamos su proyección desde el $(0, 0, n)$ sobre el plano $Z = 0$. A continuación dividimos las coordenadas del punto resultante por n y obtenemos el correspondiente punto de $\Delta(F)$.



Observación.— Como anotación marginal notemos que si tenemos un punto de $\Delta(F)$ en el segmento que une $(1, 0)$ con $(0, 1)$ nuestra superficie tiene un cono tangente no plano. De la misma forma, cualquier punto $(a, b) \in \Delta(F)$ que verifique $a + b < 1$ implica necesariamente que la multiplicidad de la superficie es menor estrictamente que n .

I.E. Algunos aspectos de las explosiones de una superficie algebroide sumergida.

Vamos a estudiar ahora en profundidad los dos tipos de transformaciones para comprender posteriormente los efectos de su aplicación. En concreto vamos a estudiar la eventual aparición de curvas permitidas tras las explosiones y otros resultados más técnicos.

En primer lugar veamos que ambos tipos de transformaciones conservan la propiedad de ser reducido. Con posterioridad (III.D.) veremos sin embargo

ejemplos en los que, partiendo de una superficie de ecuación irreducible, una ecuación de la transformada puede tanto permanecer irreducible como dejar de serlo.

Lema.— Si \mathcal{R} es un anillo local noetheriano reducido, todo transformado cuadrático o monoidal (formal) es también reducido.

Demostración.— Básicamente la demostración es análoga para los casos cuadrático y monoidal, por tanto veremos sólo el primero de estos casos. Al ser \mathcal{R} reducido lo es el anillo notado en las secciones I.A., I.B. y I.C. como $B' = \mathcal{R}[y_1, y_2, y_3]$. Entonces lo es su anillo localizado en y_1 y, por supuesto, la parte homogénea de este anillo.

Así pues el transformado cuadrático local de \mathcal{R} es reducido. Pero, además de ello, es excelente (ver [6], [15], [17]) por serlo \mathcal{R} y, por tanto, su completación es reducida. *Q.E.D.*

Transformaciones monoidales.

Vamos a comenzar nuestro estudio diferenciado por las transformaciones monoidales: veamos en primer lugar una forma muy sencilla de calcular el transformado monoidal de una superficie en un caso concreto.

Proposición.— (TM-1) Sea \mathcal{S} una superficie definida por una ecuación WT

$$F(X, Y, Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y)Z^k,$$

cuyo cono tangente sea un plano único (esto es, $Z = 0$). Sea $(Z, G(X, Y))$ una curva permitida. Entonces tenemos una ecuación local única del transformado monoidal y, salvo cambio de variables, dicha ecuación es

$$F^{(1)}(X, Y, Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k(X, Y)}{G(X, Y)^{n-k}} Z^k.$$

Demostración.— Para calcular el transformado hemos de comenzar llevando la curva de ideal (Z, G) a la de ideal (X, Z) . Consideremos entonces φ un cambio de variables dado por

$$\begin{cases} \varphi(G(X, Y)) = X_0 \\ \varphi(H(X, Y)) = Y_0 \\ \varphi(Z) = Z_0 \end{cases}$$

donde $H(X, Y)$ es una forma de orden uno, \mathbf{C} -linealmente independiente con la forma inicial de $G(X, Y)$, que podemos elegir de manera arbitraria. Si denotamos

$$a'_k(X_0, Y_0) = \varphi(a_k(X, Y)),$$

tenemos que

$$\varphi(F) = F_0 = Z_0^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X_0, Y_0) Z_0^k.$$

Por otro lado, como (Z, G) era curva permitida en F , se tenía que existían series $b_k(X, Y) \in \mathbf{C}[[X, Y]]$ tales que

$$a_k(X, Y) = G(X, Y)^{n-k} b_k(X, Y),$$

con lo que

$$a'_k(X_0, Y_0) = X_0^{n-k} \varphi(b_k).$$

En estas condiciones, como el cono tangente viene dado por $Z_0^n = 0$, existe una única ecuación local para la transformada monoidal: la dada por la dirección $(1 : 0 : 0)$, que tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} X_0 \mapsto X_1 \\ Y_0 \mapsto Y_1 \\ Z_0 \mapsto X_1 Z_1 \end{cases}$$

y nos lleva a

$$F_0^{(1)} = Z_1^n + \sum_{k=0}^{n-2} \varphi(b_k(X_1, Y_1)) Z_1^k.$$

Deshaciendo el cambio φ se obtiene entonces la ecuación propuesta en el enunciado. *Q.E.D.*

Corolario.— (TM-2) En las condiciones anteriores, una transformación monoidal que no haga descender la multiplicidad no puede crear una curva permitida. Esto es, si $(Z, G(X, Y))$ es una curva permitida y $(Z, H(X, Y))$ no lo es, entonces el transformado de F por la transformación monoidal de centro $(Z, G(X, Y))$ no tiene a $(Z, H(X, Y))$ como curva permitida.

Demostración.— La prueba es obvia, a la vista del resultado anterior: al no caer la multiplicidad, la transformada de la ecuación es una ecuación WT de la transformada de la superficie. En esta situación una condición necesaria y suficiente para que una curva $(Z, H(X, Y))$ sea permitida en $\mathcal{S}^{(1)}$ es (en la notación de la demostración) que

$$H(X, Y)^{n-k} \mid \frac{a_k(X, Y)}{G(X, Y)^{n-k}}$$

para todo k y esto no es posible, ya que $H(X, Y)^{n-k} \nmid a_k(X, Y)$. Q.E.D.

Observación.— Como veremos más adelante, para que una transformación monoidal no haga descender la multiplicidad es necesario que el cono tangente sea un plano múltiple, con lo que esta condición es superflua en el enunciado del corolario.

Es posible que, si la multiplicidad desciende, se obtengan curvas permitidas que antes no lo eran. Baste como ejemplo sencillo la superficie

$$F = Z^4 + X^2YZ^2 + X^4Y^3,$$

cuyo transformado monoidal con centro (X, Z) tiene por ecuación

$$F^{(1)} = Z^4 + YZ^2 + XY^3,$$

donde (Y, Z) es curva permitida. Observemos que (Y, Z) es una curva de multiplicidad constante igual a 3 a lo largo de \mathcal{S} .

Corolario.— (TM-3) No es posible realizar una cantidad infinita de transformados monoidales sobre una superficie sin que la multiplicidad descienda.

Demostración.— La prueba es inmediata a partir de la proposición. *Q.E.D.*

El caso del cono tangente plano parece ser bastante cómodo. En el caso del cono tangente no plano, si (X, Z) es curva permitida, como todo $(i, j, k) \in N(F)$ debe verificar $i + k \geq n$ es inmediato ver que la forma inicial de F no puede depender de Y . Recordemos también que, en este caso, tenemos una cantidad finita de ecuaciones locales (no necesariamente una), en correspondencia biunívoca con los puntos de la forma $(\beta_1 : 0 : \beta_3)$ que anulan la forma inicial de F . Aunque no resulte tan sencillo el cálculo de las ecuaciones en este caso, vamos a dar un resultado que nos permitirá, en ocasiones, simplificar estas cuentas.

Lema.— (TM-4) (Cfr. [20], lema 3.1.1.) Sea \mathcal{S} una superficie dada por una ecuación WT, $F(X, Y, Z)$ y sea (Z, X) una curva permitida. Consideremos un cambio de variables φ dado por

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= A_1X' + A_3Z' + \varphi_1(X', Z') \\ \varphi(Y) &= Y' \\ \varphi(Z) &= B_1X' + B_3Z' + \varphi_3(X', Z')\end{aligned}$$

y sea $G = \varphi(F)$.

Supongamos que tenemos dos puntos $P = (\alpha_1 : 0 : \alpha_3)$ y $P' = (\beta_1 : 0 : \beta_3)$ verificando que

$$\begin{aligned}A_1\beta_1 + A_3\beta_3 &= \alpha_1 \\ B_1\beta_1 + B_3\beta_3 &= \alpha_3.\end{aligned}$$

Supongamos así mismo que P anula la forma inicial de F , y sean $\Pi_P^{(i)}$ y $\Pi_{P'}^{(j)}$ los homomorfismos inducidos por las ecuaciones locales de las transformaciones monoidales dadas por P y P' , respectivamente (ver I.C.). Entonces existe un único cambio de variables ψ verificando que

$$\psi\Pi_P^{(i)} = \Pi_{P'}^{(j)}\varphi.$$

En particular, $F_{(i)}^{(1)}$ y $G_{(j)}^{(1)}$, ecuaciones locales de los transformados monomiales dados por P y P' , respectivamente, son asociados salvo cambio de variables.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[[X', Y', Z']] \\
\downarrow \Pi_P^{(i)} & & \downarrow \Pi_{P'}^{(j)} \\
\mathbb{C}[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]
\end{array}$$

Demostación.— Una primera comprobación elemental consiste en ver que P' anula la forma inicial de $G = \varphi(F)$. Supongamos entonces que la forma inicial de F , que no puede depender de Y por ser (X, Z) curva permitida, viene dada por

$$\bar{F} = Z^n + \sum_{k \in K} \sigma_k X^{n-k} Z^k,$$

donde $\sigma_k \in \mathbb{C}$, $K \subset \{0, \dots, n-2\}$. Como P anula esta forma se tiene que

$$\alpha_3^n + \sum_{k \in K} \sigma_k \alpha_1^{n-k} \alpha_3^k = 0.$$

Aplicando entonces φ obtenemos que

$$\bar{G} = (B_1 X' + B_3 Z')^n + \sum_{k \in K} \sigma_k (A_1 X' + A_3 Z')^{n-k} (B_1 X' + B_3 Z')^k,$$

de donde

$$\bar{G}(\beta_1 : 0 : \beta_3) = \bar{F}(\alpha_1 : 0 : \alpha_3) = 0.$$

Así mismo hay que comprobar que (X', Z') es curva permitida en G . Pero esto es elemental, ya que, como $F \in (X, Z)^n$ se tiene que $G \in (\varphi(X), \varphi(Z))^n = (X, Z)^n$ (por el Teorema Preparatorio de Weierstrass), lo cual es necesario y suficiente para que (X, Z) sea permitida en G .

Vamos a suponer $i = j = 1$ (o sea α_1 y β_1 son distintos de 0) y notaremos las transformaciones Π_P y $\Pi_{P'}$ para mayor claridad. Vamos a suponer también en principio que β_3 y α_3 son distintos de 0. Con las notaciones del diagrama, es obvio que ψ tiene que verificar las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\psi \Pi_P(X) &= \psi(X_1) &= \Pi_{P'}(\varphi(X)) \\
\psi \Pi_P(Y) &= \psi(Y_1) &= \Pi_{P'}(\varphi(Y)) \\
\psi \Pi_P(Z) &= \psi(X_1 Z_1) &= \Pi_{P'}(\varphi(Z))
\end{aligned}$$

o lo que es igual, de forma más explícita,

$$\begin{aligned}\psi(X_1) &= A_1 X'_1 + A_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1(X'_1, Z'_1) \\ \psi(Y_1) &= Y'_1 \\ \psi \left(X_1 \left(Z_1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \right) &= B_1 X'_1 + B_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_3(X'_1, Z'_1)\end{aligned}$$

donde tanto ψ_1 como ψ_3 son series en $\{X'_1, Z'_1\}$ con orden total y orden en X'_1 mayor o igual que 2.

Aplicando las igualdades primera y tercera obtenemos que, para que ψ verifique la conmutatividad del diagrama, hemos de definir forzosamente

$$\psi(Z_1) = \frac{B_1 X'_1 + B_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_3(X'_1, Z'_1)}{A_1 X'_1 + A_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1(X'_1, Z'_1)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}.$$

Multiplicando numerador y denominador por β_1 y teniendo en cuenta que $\varphi(P') = P$, tenemos que ha de cumplirse

$$\psi(Z_1) = \frac{\alpha_3 X'_1 + B_3 \beta_3 Z'_1 X'_1 + \beta_3 \psi_3(X'_1, Z'_1)}{\alpha_1 X'_1 + A_3 \beta_3 Z'_1 X'_1 + \beta_3 \psi_1(X'_1, Z'_1)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}.$$

Si efectuamos la división siguiendo el Teorema Preparatorio de Weierstrass, obtenemos

$$\psi(Z_1) = \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\beta_3}{\alpha_1^2} (\alpha_1 B_3 - \alpha_3 A_3) Z'_1 + h(X'_1, Z'_1) \right) - \frac{\alpha_3}{\alpha_1},$$

de forma que

$$\psi(Z_1) = \frac{\beta_3}{\alpha_1^2} (\alpha_1 B_3 - \alpha_3 A_3) Z'_1 + H(X'_1, Z'_1), \text{ con } \nu(H) \geq 2.$$

Nuestra forma de hallar ψ sobre X_1 , Y_1 y Z_1 nos aseguran directamente tanto la conmutatividad de diagrama como la unicidad. Para ver que ψ es realmente un cambio de variables hemos de demostrar aún que las formas

iniciales de $\psi(X_1)$, $\psi(Y_1)$ y $\psi(Z_1)$ son \mathbf{C} -linealmente independientes. Pero la forma inicial de $\psi(X_1)$ es precisamente

$$\overline{\psi(X_1)} = \left(A_1 + A_3 \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) X'_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} X'_1 \neq 0.$$

La segunda variable no experimenta cambio alguno en los morfismos del diagrama (salvo cambios de subíndice o superíndice) y la forma inicial de $\psi(Z_1)$ es

$$\overline{\psi(Z_1)} = \frac{\beta_3}{\alpha_1^2} (\alpha_1 B_3 - \alpha_3 A_3) Z'_1,$$

con lo que demostrar la \mathbf{C} -independencia lineal, es equivalente a probar que

$$\Sigma = \beta_3(\alpha_1 B_3 - \alpha_3 A_3) \neq 0.$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \beta_3 \alpha_1 B_3 - \beta_3 \alpha_3 A_3 \\ &= \alpha_1 (\alpha_3 - B_1 \beta_1) - \alpha_3 (\alpha_1 - A_1 \beta_1) \\ &= \beta_1 (B_1 \alpha_1 - A_1 \alpha_3) \end{aligned}$$

Como, por otro lado, φ es un cambio de variables, se tiene que

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

lo que permite decir que son no nulos los siguientes determinantes

$$\begin{aligned} 0 \neq \begin{vmatrix} A_1 \alpha_3 & A_3 \alpha_3 \\ B_1 \alpha_1 & B_3 \alpha_1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{\beta_1 \beta_3} \begin{vmatrix} A_1 \alpha_3 \beta_1 & A_3 \alpha_3 \beta_3 \\ B_1 \alpha_1 \beta_1 & B_3 \alpha_1 \beta_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\beta_1 \beta_3} \begin{vmatrix} A_1 \alpha_3 \beta_1 & A_3 \alpha_3 \beta_3 \\ (B_1 \alpha_1 - A_1 \alpha_3) \beta_1 & (B_3 \alpha_1 - A_3 \alpha_3) \beta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta_1 \beta_3} \begin{vmatrix} A_1 \alpha_3 \beta_1 & A_3 \alpha_3 \beta_3 \\ \Sigma & \Sigma \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

con lo que $\Sigma \neq 0$.

Hemos dejado aparte los casos $\beta_3 = 0$ y $\alpha_3 = 0$. Son casos en los que el razonamiento no es posible, aunque no representan problema, porque su

solución es muy simple. Supongamos que $\beta_3 = 0$. Entonces todo el proceso es idéntico hasta que se tiene que

$$\psi(Z_1) = \frac{B_1 X'_1 + B_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_3(X'_1, Z'_1)}{A_1 X'_1 + A_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1(X'_1, Z'_1)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}.$$

que, en este caso, resulta

$$\psi(Z_1) = \frac{B_1 X'_1 + B_3 X'_1 Z'_1 + \psi_3(X'_1, Z'_1)}{A_1 X'_1 + A_3 X'_1 Z'_1 + \psi_1(X'_1, Z'_1)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1},$$

y, dividiendo como en el caso general obtenemos que

$$\psi(Z_1) = \left[\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_3 A_1 - B_1 A_3}{A_1^2} Z'_1 + H(X'_1, Z'_1) \right] - \frac{\alpha_3}{\alpha_1},$$

con $\nu(H) \geq 2$. Observemos que, en este caso, como $\beta_3 = 0$ tenemos que

$$A_1 \beta_1 = \alpha_1, \quad B_1 \beta_1 = \alpha_3,$$

de donde

$$\psi(Z_1) = -\frac{B_3 A_1 - B_1 A_3}{A_1^2} Z'_1 + H(X'_1, Z'_1).$$

Análogamente al caso general, para ver que ψ es isomorfismo basta ver que $\psi(Z_1)$ tiene orden 1. En nuestro caso eso es evidente pues el coeficiente de orden 1 es precisamente el determinante de las formas iniciales de $\varphi(X)$ y $\varphi(Z)$ (que han de ser \mathbf{C} -linealmente independientes) dividido por A_1^2 que no puede ser 0 (de serlo tendríamos $\alpha_1 = 0$).

Veamos entonces el caso $\alpha_3 = 0$. Nuevamente el proceso es análogo al caso general hasta llegar a la definición "forzosa" de $\psi(Z_1)$ que, en este caso, sería

$$\psi(Z_1) = \frac{B_1 X'_1 + B_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_3(X'_1, Z'_1)}{A_1 X'_1 + A_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1(X'_1, Z'_1)}.$$

Multiplicando entonces por β_1 numerador y denominador y, teniendo en cuenta que

$$A_1 \beta_1 + A_3 \beta_3 = \alpha_1, \quad B_1 \beta_1 + B_3 \beta_3 = 0,$$

obtenemos que

$$\psi(Z_1) = \frac{B_3\beta_3 X'_1 Z'_1 + \beta_1 \psi_3(X'_1, Z'_1)}{\alpha_1 X'_1 + A_3\beta_3 X'_1 Z'_1 + \beta_1 \psi_1(X'_1, Z'_1)}.$$

Y, finalmente, por Weierstrass,

$$\psi(Z_1) = \frac{B_3\beta_3}{\alpha_1} Z'_1 + H(X'_1, Z'_1), \text{ con } \nu(H) \geq 2.$$

Ahora bien, si $\beta_3 = 0$ ya sabemos que el problema está resuelto por el camino arriba indicado (donde no hemos usado en ningún momento $\alpha_3 \neq 0$). Y, como $\beta_1 \neq 0$ y $B_1\beta_1 + B_3\beta_3 = 0$, B_3 no puede ser 0 porque, de serlo, lo sería B_1 y φ no sería isomorfismo. Por tanto $\psi(Z_1)$ tiene orden 1 y, de la misma manera que en el caso general, esto es suficiente para probar todos los asertos del enunciado.

Veamos, por último, que $F^{(1)}$ y $G^{(1)}$ difieren únicamente en un cambio de variables (seguimos en $i = j = 1$). En efecto, siguiendo el diagrama obtenemos que

$$\psi \Pi_P(F) = \Pi_{P'} \varphi(F),$$

esto es,

$$\psi(X_1^n F^{(1)}) = (X'_1)^n G^{(1)}.$$

Aplicando la definición de ψ obtenemos que

$$\psi(F^{(1)}) \left[A_1 X'_1 + A_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1(X'_1, Z'_1) \right]^n = (X'_1)^n G^{(1)}$$

y, finalmente, eliminando $(X'_1)^n$ (recordemos que $\nu_{X'_1}(\psi_1) \geq 2$) llegamos a

$$\psi(F^{(1)}) \left(A_1 + \frac{A_3\beta_3}{\beta_1} + \frac{a_3\beta_3}{\beta_1} Z'_1 + \dots \right)^n = G^{(1)},$$

lo que demuestra el lema en el caso $i = j = 1$. Los demás no presentan dificultades esencialmente distintas. *Q.E.D.*

Transformaciones cuadráticas.

Vamos a realizar ahora un estudio paralelo al hecho para las transformaciones monoidales, pero para las transformaciones cuadráticas. En concreto queremos saber:

- Cómo afecta a la ecuación WT una transformación de este tipo. Para esto simplemente invocaremos un lema de [20] que nos facilitará, en ciertos casos futuros, la labor.
- Las curvas permitidas que puede aparecer en una ecuación local del explotado. Cuáles son y cuándo aparecen.

Lema.– (TC–1) Sea \mathcal{S} una superficie definida por una ecuación, $F(X, Y, Z)$. Consideremos un cambio de variables φ dado por

$$\begin{cases} \varphi(X) &= a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + \varphi_1(X, Y, Z) \\ \varphi(Y) &= b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + \varphi_2(X, Y, Z) \\ \varphi(Z) &= c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + \varphi_3(X, Y, Z) \end{cases}$$

y definimos $\varphi(F) = G$.

Supongamos que tenemos dos puntos $P = (\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ y $P' = (\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ tales que P anula la forma inicial de F , con

$$\begin{cases} \alpha_1 &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 \\ \alpha_2 &= b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \\ \alpha_3 &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 \end{cases}$$

y sean $\Pi_P^{(i)}$ y $\Pi_{P'}^{(j)}$ los homomorfismos inducidos por las ecuaciones locales de los transformados cuadráticos de F y G respectivamente dados por P y P' , en cada caso. Entonces existe un único cambio de variables ψ verificando que

$$\psi \Pi_P^{(i)} = \Pi_{P'}^{(j)} \varphi.$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[[X', Y', Z']] \\
\downarrow \Pi_P^{(i)} & & \downarrow \Pi_{P'}^{(j)} \\
\mathbb{C}[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]
\end{array}$$

Demostración.— Ver [20], lema 3.1.1. *Q.E.D.*

Corolario.— (TC-2) En las condiciones del enunciado, las ecuaciones de los transformados cuadráticos locales $F^{(1)}$ y $G^{(1)}$ son asociados salvo cambio de variables.

Demostración.— Pongamos el caso $i = j = 1$, ya que los demás se obtienen por permutación de forma análoga. Del diagrama obtenemos que

$$\psi \Pi_P(F) = \Pi_{P'} \varphi(F),$$

esto es,

$$\psi \left(X_1^n F^{(1)} \right) = (X'_1)^n G^{(1)}.$$

Aplicando la única definición posible de ψ (esto puede hacerse de manera completamente análoga a (TM-4), obtenemos que

$$\psi \left(F^{(1)} \right) \left[a_1 X'_1 + a_2 X'_1 \left(Y'_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) + a_3 X'_1 \left(Z'_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) + \psi_1 \right]^n = (X'_1)^n G^{(1)}$$

y finalmente, simplificando (ya que $\nu_{X'_1}(\psi_1) \geq 2$), llegamos a

$$\psi \left(F^{(1)} \right) \left(A_1 + \frac{A_3 \beta_3}{\beta_1} + \frac{a_3 \beta_3}{\beta_1} Z'_1 \right)^n = G^{(1)},$$

lo que demuestra el corolario en este caso. *Q.E.D.*

A continuación veamos qué sucede con las curvas permitidas. No estudiaremos aquí, por razones que resultarán después evidentes, el caso de

una superficie con curvas permitidas a la que aplicamos una transformación cuadrática. En lugar de ello, estudiaremos el caso de una superficie donde no tenemos curvas permitidas y, por tanto, la transformación cuadrática es forzosa. Los resultados que siguen no tienen precedente preciso en la literatura, aunque existe un tratamiento completamente riguroso en [18], sección 3.2., para el caso de característica p . Es en estas demostraciones donde nos hemos basado en líneas generales, con las evidentes adaptaciones al caso que nos ocupa.

Nos restringiremos entonces a la siguiente situación: Sea \mathcal{S} una superficie algebroide, sin curvas permitidas, dada por una ecuación WT, $F(Z)$, verificando que $\overline{F} = Z^n$. Sea $F^{(1)}$ la ecuación del transformado cuadrático de \mathcal{S} en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, que verifica $\overline{F^{(1)}} = Z^n$.

Proposición.— (TC-3) (Cfr. [18], sección 3.2.) En la situación anteriormente descrita, la superficie definida por $F^{(1)}$ (que denotaremos $S^{(1)}$) puede tener dos tipos de curvas permitidas:

- (a) La curva (X, Z) , i.e. el divisor excepcional.
- (b) Curvas del tipo $(Z, X + \alpha Y + G(Y))$, con $\nu_Y(G) \geq 2$, i.e. curvas cuya tangente (en el lenguaje clásico, ver II.E.) viene dada por la dirección de explosión.

Además, si aparecieran curvas del tipo (b) también debe aparecer la curva del tipo (a).

Demostración.— Realizaremos primero la demostración para $\alpha = 0$ (y, por supuesto, el caso $(0 : 1 : 0)$ será simétrico). Es elemental que, tras una transformación cuadrática donde no haya bajado la multiplicidad, las ecuaciones de la transformación dadas en I.C. nos dan una ecuación WT de $S^{(1)}$. Esto es, si

$$F = Z^n + \sum_{k=0}^n a_k(X, Y)Z^k, \text{ con } a_k(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ijk}X^iY^j$$

entonces podemos considerar

$$F^{(1)} = Z^n + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i,j} a_{ijk}X^{i+j+k-n}Y^j \right) Z^k.$$

En estas condiciones podemos asegurar (ver I.D.) que las posible curvas permitidas de $S^{(1)}$ son de la forma $(Z, \gamma X + \delta Y + G(X, Y))$, con $\nu(G) \geq 2$. Sólo hay que probar que $\delta = 0$.

Si no fuera así, podemos aplicar el Teorema Preparatorio a $\delta Y + \gamma X + G(X, Y)$ para dejar la curva en la forma $(Z, Y + H(X))$, con $\nu(H) \geq 1$. Pero esto implica que \mathcal{S} posee curvas permitidas. Veamos por qué.

Aplicando (TC-1) construimos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[[X', Y', Z']] \\
 \downarrow \pi_{(1:0:0)} & & \downarrow \pi_{(1:0:0)} \\
 \mathbb{C}[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]
 \end{array}$$

donde los isomorfismos φ y ψ vienen dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(X) = X' \\ \varphi(Y) = Y' - X'H(X) \\ \varphi(Z) = Z' \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(X_1) = X' \\ \psi(Y_1) = Y' - H(X) \\ \psi(Z_1) = Z' \end{array} \right.$$

El diagrama es evidentemente conmutativo. Ahora bien, como en $\mathcal{S}^{(1)}$ (definida por $F^{(1)}(X_1, Y_1, Z_1)$) aparece la curva permitida $(Z_1, Y_1 + H(X_1))$, al cambiar por ψ de ecuación de $\mathcal{S}^{(1)}$ y hallar la que notaremos $(F')^{(1)}(X'_1, Y'_1, Z'_1)$, aparecerá la curva permitida (Z, Y) tras una transformación cuadrática en la dirección $(1 : 0 : 0)$.

Sea la ecuación

$$F'(X', Y', Z') = (Z')^n + \sum_{k=0}^n (a'_{ijk} (X')^i (Y')^j) (Z')^k$$

definiendo a \mathcal{S} en $\mathbb{C}[[X', Y', Z']]$. Igual que antes, tenemos entonces

$$(F')^{(1)}(X'_1, Y'_1, Z'_1) = (Z'_1)^n + \sum_{k=0}^n (a'_{ijk} (X'_1)^{i+j+k-n} (Y'_1)^j) (Z'_1)^k.$$

Como por una transformación en la dirección $(1 : 0 : 0)$ aparece (Z'_1, Y'_1) como curva permitida se ha de tener $j + k \geq n$ para todo $(i, j, k) \in N((F')^{(1)})$, lo que obliga claramente a que (Y', Z') fuera permitida para F' y, en consecuencia, a que $(Z, Y + XH(X))$ lo fuera para F , contradiciendo las hipótesis.

Una vez probado esto, veamos que, de aparecer $(Z, X + G(Y))$ como curva permitida, también lo hace el divisor excepcional. Para ello situémonos en la situación anterior, concretamente en las expresiones de F y $F^{(1)}$ donde podemos ya usar las mismas variables, al no haber cambios de por medio. En concreto, ha de ser

$$F^{(1)} = Z^n + \sum_{k=0}^n a_k^{(1)}(X, Y)Z^k, \text{ con } a_k^{(1)}(X, Y) = (X + G(Y))^{n-k} b_k^{(1)}(X, Y).$$

Consideremos en $a_k^{(1)}(X, Y)$ el monomio $\sigma X^i Y^j$ con orden minimal en X y, de entre éstos, el de menor orden en Y . Como $(X + G(Y))^{n-k}$ es un factor de $a_k^{(1)}$ ha de tenerse

$$i \geq t, j \geq \nu(G)(n - k - t), \text{ para algún } t \in \{0, \dots, n - k\}.$$

En estas condiciones, observemos que la transformación cuadrática de dirección $(1 : 0 : 0)$ tiene una característica particular: puede hacerse "monomio a monomio", sin riesgos de cancelación de ningún tipo. Dicho de manera más formal: existe $(i, j, k) \in N(F^{(1)})$ si y sólo si existe $(i - j - k + n, j, k) \in N(F)$.

Por tanto, para que exista nuestro monomio $\sigma X^i Y^j Z^k$ ha de verificarse

$$\begin{aligned} i &\geq j + k - n \geq \nu(G)(n - k - t) + k - n \\ &= (\nu(G) - 1)n - (\nu(G) - 1)k - \nu(G)t \\ &\geq n - k, \end{aligned}$$

ya que $\nu(G) \geq 2$. Por tanto, para todo $(i, j, k) \in N(F^{(1)})$ se tiene $i \geq n - k$ y (X, Z) es permitida.

Para atacar los enunciados correspondientes para la dirección $(1 : \alpha : 0)$ con $\alpha \neq 0$, basta considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}[[X, Y, Z]] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C}[[X', Y', Z']] \\
\downarrow \pi_{(1:\alpha:0)} & & \downarrow \pi_{(1:0:0)} \\
\mathbf{C}[[X_1, Y_1, Z_1]] & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}[[X'_1, Y'_1, Z'_1]]
\end{array}$$

con φ dado por

$$\begin{cases} \varphi(X) = X' \\ \varphi(Y) = Y' - \alpha X' \\ \varphi(Z) = Z' \end{cases}$$

y ψ definido de manera unívoca por (TC-1). A partir del caso de la dirección $(1 : 0 : 0)$, simplemente hay que transformar los resultados obtenidos por ψ^{-1} .
Q.E.D.

II. Singularidades. Algoritmo de reducción local

Toda vez que hemos sentado las bases teóricas necesarias y conocemos ciertos aspectos geométricos y algebraicos de las transformaciones monoidales y cuadráticas, nos ocuparemos en este capítulo del resultado que llamaremos Teorema de Resolución de Singularidades para superficies algebroides sumergidas. El enunciado informal puede ser el siguiente:

“Dada una superficie algebroides sumergida singular, si explotamos curvas permitidas cuando las hay, y el origen en ausencia de ellas, reducimos las singularidades de la superficie.”

En [20] se demuestra un resultado bastante general (denominado Primer Teorema de Estructura de las Singularidades de Superficies Algebroides) que es un primer acercamiento a este teorema.

La estructura del capítulo es la siguiente:

- (A) En primer lugar situaremos nuestro estudio en el contexto de la resolución de singularidades de una superficie algebraica proyectiva, y daremos un enunciado formal del teorema.
- (B–D) Posteriormente nos dedicaremos durante las tres secciones siguientes a la demostración del resultado. Como se verá, algunos de los enunciados parciales que hallaremos no serán válidos en característica positiva.
- (E) Una vez demostrado el algoritmo estudiaremos algunos aspectos que, en una primera demostración, no son evidentes. Por ejemplo qué sucede

con las curvas singulares sumergidas en la superficie o si podemos predecir (o, al menos, acotar) cuántos pasos serán necesarios para reducir la multiplicidad de la superficie.

II.A. El problema de la resolución en superficies.

El problema original, como indicamos en la introducción, es resolver las singularidades de una superficie algebraica $X \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, donde nuevamente \mathbf{C} puede ser sustituido por cualquier cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero. En este contexto, podemos localizar la cuestión en el entorno de un punto $x \in X$ considerando, en lugar del haz estructural de X , $\mathcal{O}(X)$, su fibra en el punto, $\mathcal{O}_{X,x}$. Entonces, si completamos, obtenemos $\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$, que define una superficie algebroide sumergida.

El paso al completado debe entenderse como una visión aún más local de la geometría en un entorno del punto $x \in X$ que la proporcionada por $\mathcal{O}_{X,x}$. En concreto, la idea original de Zariski era utilizar este instrumento local para definir de manera coherente el concepto de “equisingularidad”, problema al que dedicó sus últimos años de producción científica. Para más información acerca de la visión geométrica de los esquemas formales (en particular las variedades algebroides) ver, por ejemplo, [8]. El uso de Zariski de las variedades algebroides en conexión con el problema de la equisingularidad tiene su mejor introducción, probablemente, en [27].

Numerosos autores posteriores a Zariski se han ocupado de seguir su estudio de las singularidades algebroides, aunque los trabajos difieren notablemente en dos cuestiones fundamentales:

- 1.– Variedades a las que se aplica: dimensión y característica.
- 2.– Criterio de resolución (esto es: cómo se elige el centro de explosión).

Un trabajo fundamental en este sentido es [2] donde se prueba un teorema de resolución para variedades algebroides (y analíticas) de dimensión cualquiera en característica nula. El criterio de explosión se basa en la función

de Hilbert–Samuel, en la línea de los trabajos de Bennett ([3]), alumno de Hironaka, quien sustituyó el (algo oscuro) criterio original de Hironaka ([10]) para la resolución de variedades algebraicas.

La aportación de Abhyankar es también muy destacable en este sentido. Su trabajo sobre puntos buenos en superficies (ver [19]), posteriormente generalizado a hipersuperficies de dimensión arbitraria en [1] está cargado de contenido geométrico aunque no haya cumplido (por ahora) el objetivo que se proponía: la resolución de singularidades en característica positiva. La elección de centros de explosión se realiza como sigue: en primer lugar se efectúan transformaciones cuadráticas para eliminar los denominados “puntos malos” de la superficie (el ejemplo característico de punto malo es el punto singular de una curva equimúltiple singular). En ausencia de puntos malos la resolución es esencialmente la de una superficie del tipo $Z^n - X^p Y^q$.

En los últimos años se ha experimentado un creciente interés por la resolución “efectiva” de singularidades: los trabajos de Bierstone–Millman (por ejemplo, [4]) o de Encinas–Villamayor (ver [7]) así lo atestiguan. Sin embargo, estos trabajos atacan el problema en su vertiente n -dimensional, lo cual hace necesariamente difícil seguir de forma geométrica el razonamiento (centros de explosión, invariantes,...) en el caso de las superficies.

En lo referente a superficies algebroides sumergidas caben citar tres trabajos que consideramos fundamentales, aunque de (lamentablemente) difícil acceso:

(i) La Tesis Doctoral de Tomás Sánchez Giralda ([20]; Univ. Complutense, 1974), quizá el único lugar donde se pueden encontrar todas las pruebas y referencias adecuadas (anteriores a 1976) en todo lo tocante a superficies algebroides. El problema fundamental (no el único) que se trata es el de los caminos estacionarios: básicamente sucesiones de transformaciones cuadráticas que no alteran la multiplicidad de la superficie. Tiene su continuación natural en [21].

(ii) La Tesis Doctoral de Ramón Piedra Sánchez ([18]; Univ. Sevilla, 1978), donde los resultados del trabajo anterior se extienden, con las numerosas modificaciones pertinentes, al caso de característica positiva.

(iii) La Tesis Doctoral de Ignacio Luengo Velasco ([14]; Univ. Complutense, 1980) donde se formaliza el complejo objeto combinatorio denominado *árbol de singularidades infinitamente próximas*, con aplicaciones a casos

concretos (puntos dobles, singularidades cuasi-ordinarias,...).

En este orden de cosas, y pensando en un nuevo proceso de reducción, nos planteamos si un criterio tan sencillo como explotar el centro permitido de la mayor dimensión posible resolvería eventualmente las singularidades de una superficie algebroide (para variedades algebraicas de dimensión arbitraria es sabido que no es así, ver [22]). En concreto, nos propusimos demostrar el siguiente resultado:

Teorema.— (Teorema de reducción de singularidades de una superficie algebroide sumergida) Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida. Consideremos el siguiente procedimiento:

(A) Si existe alguna curva permitida, realizamos la transformación monoidal centrada en ella (para cualquier curva y para cualquier dirección posible del cono tangente).

(B) Si no existen curvas permitidas, realizamos una transformación cuadrática en cualquier dirección del cono tangente.

Entonces, en un número finito de pasos, la multiplicidad de la superficie decrece.

Este enunciado generaliza el teorema de Beppo Levi ([12]) (teorema que puede llamarse “clásico” con total rigor) y, aunque no hemos hallado una prueba en la literatura, pertenece al más que considerable conjunto de teoremas que se agrupan en la “tradición oral” de la disciplina. Dicho de otro modo, los investigadores relacionados con la materia tienen una vaga sensación de *dejà vu* ante el resultado, a pesar de que, aparentemente, no existe en ningún sitio una demostración precisa. Una tal demostración comienza ahora.

II.B. Reducción de singularidades (I): Eliminación de curvas permitidas.

Nos encontramos entonces en la situación general: \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida, dada por una ecuación WT, pongamos F , que posee curvas permitidas. El objetivo es probar que, mediante la aplicación de todas

las transformaciones monoidales posibles, si no tenemos un descenso de multiplicidad, al menos seremos capaces de eliminar las curvas permitidas de forma casi canónica.

Vamos a comenzar este estudio con un caso muy concreto: cuando el cono tangente no es un plano múltiple. Tenemos entonces la ecuación WT con una forma inicial distinta de Z^n y una sola curva permitida, dado que de haber más, la forma inicial no podría contener más monomios que Z^n . Supondremos ya de un principio que esta curva permitida es (X, Z) . Recordemos que la forma inicial de F no depende de Y , dado que, para todo $(i, j, k) \in N(F)$, $i + k \geq n$.

Proposición.— En la situación anterior la transformación monoidal de centro (X, Z) siempre hace descender la multiplicidad, sea cual sea la ecuación local que consideremos.

Demostración.— Si consideramos (aunque este caso podría no darse) la ecuación dada por la dirección $(1 : 0 : 0)$ el descenso de multiplicidad es inmediato, pues si

$$F(X, Y, Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y) X^{n-k} Z^k,$$

sabemos por hipótesis que algún a'_k es una unidad. Entonces la ecuación del transformado en la dirección $(1 : 0 : 0)$ tiene por ecuación

$$F^{(1)}(X, Y, Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y) Z^k,$$

con lo que la multiplicidad cae al menor k tal que a'_k es una unidad. Análogo tratamiento se puede dar al caso $(0 : 0 : 1)$.

El caso de otra dirección es esencialmente igual. Sea el punto $(1 : 0 : \alpha)$ tal que $\bar{F}(1, 0, \alpha) = 0$, con $\alpha \neq 0$. Las ecuaciones entonces de la transformación son

$$\begin{cases} X & \mapsto X' \\ Y & \mapsto Y' \\ Z & \mapsto X'(Z' + \alpha) \end{cases}$$

y el transformado es por tanto

$$F^{(1)}(X, Y, Z) = (Z + \alpha)^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y)(Z + \alpha)^k.$$

Nótese ahora que aparece un término $(n-1)\alpha Z^{n-1}$, del binomio $(Z + \alpha)^n$, incancelable con los demás de manera obvia. El descenso de multiplicidad queda entonces asegurado.

En realidad podemos asegurar que la multiplicidad del transformado es estrictamente menor que $n - 1$. En efecto, por (TM-4), explotar en la dirección $(1 : 0 : \alpha)$ es lo mismo (salvo cambio de variables) que realizar el cambio

$$\begin{cases} X \mapsto X' \\ Y \mapsto Y' \\ Z \mapsto Z' + \alpha X' \end{cases}$$

seguido de la explosión en $(1 : 0 : 0)$. Entonces, si tenemos la ecuación $F(Z)$ como antes, la transformada por el cambio de variables será

$$F'(Z) = (Z + \alpha X)^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y)X^{n-k}(Z + \alpha X)^k,$$

donde algún a'_k ha de ser una unidad. Al realizar ahora la explosión en la dirección $(1 : 0 : 0)$ es inmediato que los monomios de $(Z + \alpha X)^k$ no pueden cancelar, de donde la multiplicidad del transformado es, a lo más, k ; esto es, ha de ser estrictamente menor que $n - 1$. *Q.E.D.*

Por ilustrar debidamente la situación, vamos a dar un resultado que traduce geoméricamente este caso que nos ocupa. El resultado puede hallarse en [20], demostrado siguiendo los mismos pasos que aquí. En cualquier caso, para evitar al lector la traducción de nomenclatura, lo demostraremos aquí con todo detalle.

Proposición.— En la situación anterior, \mathcal{S} es la unión de un número finito de superficies cuyos conos tangentes son planos múltiples distintos dos a dos. Todos los planos anteriores pertenecen al haz de base (X, Z) y la curva (X, Z) es permitida en todas las superficies.

Demostración.— Tomemos la superficie en la ecuación WT de costumbre

$$F = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y)X^{n-k}Z^k,$$

donde la forma inicial de F es

$$\bar{F} = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(0, 0)X^{n-k}Z^k = \prod_{i=1}^s (\alpha_i X + Z)^{m_i},$$

y donde $s > 1$ (puesto que el cono tangente no es un plano múltiple), los α_i son distintos dos a dos y $\sum m_i = n$.

Consideramos ahora el polinomio $g(Z_0) \in \mathbf{C}[[X, Y]][[Z_0]]$ definido por

$$g(Z_0) = \frac{1}{X^n} F(X, Y, Z_0 X) = Z_0^n + \sum_{k=0}^{n-2} a'_k(X, Y)Z_0^k,$$

que verifica

$$g(X = 0, Y = 0, Z_0) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i + Z_0)^{m_i}.$$

Obsérvese que $g(Z_0)$ sería la ecuación del transformado monoidal de F en la dirección $(1 : 0 : 0)$ si esto tuviese sentido, cosa que no tiene por qué suceder. En cualquier caso, las condiciones de $g(Z_0)$ hacen posible que se aplique el Lema de Hensel: por cada factor mónico (sin contar las potencias) del polinomio en $X = 0, Y = 0$ existe un factor mónico del polinomio original. Entonces existen

$$g_i(Z_0) \in \mathbf{C}[[X, Y, Z_0]], \quad i = 1, \dots, s,$$

verificando las siguientes propiedades

1. $g_i(0, 0, Z_0) = (\alpha_i + Z_0)^{m_i}$. En particular, el grado de g_i en Z_0 es m_i (recordemos que son factores mónicos).
2. $g(Z_0) = \prod g_i(Z_0)$.

Por clarificar la exposición, escribiremos los g_i en la forma

$$g_i(Z_0) = Z_0^{m_i} + \sum_{k=0}^{m_i-1} b_k^i(X, Y)Z_0^k,$$

donde $b_k^i \in \mathbf{C}[[X, Y]]$, para todos los i, k donde tiene sentido. Dado que $\sum m_i = n$ tenemos que

$$X^n g(Z_0) = \prod X^{m_i} g_i = F(X, Y, XZ_0),$$

donde

$$X^{m_i} g_i = X^{m_i} Z_0^{m_i} + \sum_{k=0}^{m_i-1} X^{m_i} b_k^i(X, Y) Z_0^k.$$

Hacemos ahora $Z = XZ_0$ y obtenemos

$$F_i(Z) = Z^{m_i} + \sum_{k=0}^{m_i-1} X^{m_i-k} b_k^i(X, Y) Z^k.$$

verificando

$$F(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^s F_i(Z).$$

Obviamente las superficies del enunciado son las definidas por los F_i . Observemos, además, que todas ellas tienen a (X, Z) como curva permitida y que sus conos tangentes vienen dados por

$$\overline{F}_i = (Z + \alpha_i X)^{m_i},$$

que pertenecen al haz de base la recta (X, Z) . *Q.E.D.*

Para finalizar la sección nos ocuparemos de estudiar el paso (A) en presencia de un cono tangente plano; esto es, cuando se puede necesitar de iteradas aplicaciones. Comenzaremos definiendo unas cantidades que nos servirán para acotar el número de pasos (A) que vamos a dar. Todo lo que sigue se puede aplicar por supuesto al caso ya estudiado, pero entonces los resultados alcanzados forman parte trivialmente de los ya expuestos. Partimos de una superficie \mathcal{S} dada por una ecuación WT

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y) Z^k.$$

Definición.— En esta situación, dada una curva \mathcal{C} definida por un ideal $(Z, G(X, Y))$ denominaremos *valencia de \mathcal{C}* al número

$$v_F(\mathcal{C}) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\nu_G(a_k)}{n-k} \right\rfloor \mid k = 0, \dots, n-2 \right\},$$

donde $\lfloor - \rfloor$ es la parte entera y $\nu_G(s)$ es el orden (G)-ádico en $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Observación.— Es inmediato, por las condiciones dadas en el capítulo I, que (Z, G) es una curva permitida si y sólo si $v_F(\mathcal{C}) \geq 1$. Así mismo, cuando $v_F(\mathcal{C}) > 1$, se tiene forzosamente que $\bar{F} = Z^n$. En estas condiciones hay una única ecuación para el transformado monoidal: la dada por $(1 : 0 : 0)$. Y dado (ver (TM-1)) que realizar la transformación monoidal centrada en (Z, G) equivale a eliminar $G(X, Y)^{n-k}$ de cada a_k , es claro que

$$v_{F(1)}(\mathcal{C}) = v_F(\mathcal{C}) - 1.$$

Lema.— El número $v_F(\mathcal{C})$ representa el número máximo de transformaciones monoidales centradas en (Z, G) que podemos aplicar a \mathcal{S} salvo que descienda la multiplicidad (lo cual sólo puede suceder en la última transformación).

Demostración.— En efecto, dada la observación anterior es suficiente demostrar que, si $v_F(\mathcal{C}) = 2$, se tiene el resultado. Por la observación previa, $v_{F(1)}(\mathcal{C}) = 1$. Esto quiere decir que (Z, G) es permitida pero existe un a_k tal que

$$G^{n-k} \mid a_k(X, Y) \text{ pero } G^{2(n-k)} \nmid a_k(X, Y),$$

con lo que el coeficiente de Z^k en el transformado no es divisible por G^{n-k} . Esto imposibilita que (Z, G) sea permitida, salvo que hayamos tenido descenso de multiplicidad. *Q.E.D.*

Supongamos entonces que vamos a comenzar nuestro algoritmo en una superficie \mathcal{S} arbitraria, realizando las posibles transformaciones monoidales. Sea F una ecuación WT como de costumbre y supongamos que tenemos como curvas permitidas $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t$ dadas por ideales

$$(G_1(X, Y), Z), \dots, (G_t(X, Y), Z).$$

El resultado que queremos probar ahora es que las diversas formas de realizar transformaciones monoidales centradas en estas curvas permitidas no influyen decisivamente en el resultado bajo ciertas hipótesis adicionales. Dicho de forma más precisa:

Lema.— En las condiciones anteriores, si al realizar las $v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t)$ posibles transformaciones monoidales, no hacemos descender la multiplicidad, entonces salvo cambio de coordenadas, la superficie que resulta de realizar las $v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t)$ transformaciones monoidales es única.

Demostración.— Por abreviar notaremos

$$v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t) = p.$$

Es una observación obvia que mientras sea posible realizar dos transformaciones monoidales (centradas, por fijar ideas en (G_i, Z) y (G_j, Z) , el cono tangente ha de venir dado por $\overline{F} = Z^n$, ya que todos los coeficientes de Z^k , con $k = 0, \dots, n-2$ tienen, al menos a G_i^{n-k} y a G_j^{n-k} como factores. En estas condiciones, (TM-1) nos dice que realizar la transformación monoidal (por ejemplo, de centro (G_k, Z)) sólo nos da una ecuación, consistente en dividir entre G_k^{n-k} cada $a_k(X, Y)$. Así pues, habiendo realizado $p-1$ transformaciones cualesquiera (por ejemplo, faltando una en (G_i, Z)), obtendremos una ecuación única del transformado, en la forma

$$F^{(p-1)} = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k(X, Y)}{G_1^{n-k} \dots G_i^{n-k-1} \dots G_t^{n-k}} Z^k.$$

Ahora bien, sabemos que realizar la transformación monoidal que falta no va a hacer descender la multiplicidad. Esto implica que $\overline{F^{(1)}} = Z^n$, como sabemos. Por tanto, nos vemos de nuevo en las condiciones de (TM-1) y podemos asegurar que existe una única ecuación para el transformado y que, salvo cambio de variables, podemos tomarla como

$$F^{(p)} = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k(X, Y)}{G_1^{n-k} \dots G_i^{n-k} \dots G_t^{n-k}} Z^k,$$

lo que finaliza la demostración. *Q.E.D.*

Observación.— El número $v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t)$ puede acotarse fácilmente a partir del polígono de Newton–Hironaka de F (cfr. II.E. para los detalles).

Como conclusión a los resultados exhibidos en esta parte, resumimos en la siguiente proposición.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida que tiene como curvas permitidas $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t$ dadas por ideales

$$(G_1(X, Y), Z), \dots, (G_t(X, Y), Z).$$

Entonces se pueden realizar $v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t)$ transformaciones monoidales y, tras hacerlo, se tiene una de las siguiente situaciones:

- a) Hacemos descender la multiplicidad.
- b) Obtenemos una superficie de la misma multiplicidad y sin curvas permitidas.

Es más, sabemos así mismo que:

- a') Si realizamos $v_F(\mathcal{C}_1) + \dots + v_F(\mathcal{C}_t) - 1$ transformaciones y llegamos a una superficie con cono tangente no plano, estamos en la situación a).
- b') La superficie obtenida si estamos en la situación b) es independiente del orden en que hagamos las transformaciones monoidales.

Demostración.— Todo está demostrado en la presente sección, excepto que, en la situación b), la superficie transformada carece de curvas permitidas, lo cual es aplicación directa de (TM-2). *Q.E.D.*

II.C. Reducción de singularidades (II): El caso del cono tangente no plano.

Vamos entonces a estudiar qué sucede cuando nos encontramos con una superficie algebroide que, por lo demostrado hasta ahora, podemos ya suponer carente de curvas permitidas. Siguiendo nuestro algoritmo (y, de hecho, es la única posibilidad), tenemos que realizar transformaciones cuadráticas. En principio, tenemos una cantidad infinita de posibles ecuaciones locales, concretamente

$$\begin{cases} X \mapsto X' \\ Y \mapsto X' \left(Y' + \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ Z \mapsto X' \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \end{cases}$$

para los puntos $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, con $\alpha \neq 0$ que anulen la forma inicial de F . En concreto vamos a estudiar en esta sección un primer caso: cuando el cono tangente no es un plano. Si partimos de la ecuación WT (en la forma usual) esto quiere decir que tenemos

$$\overline{F} \neq Z^n,$$

o, dicho de otro modo,

$$\#\{(i, j, k) \in N(F) \mid i + j + k = n\} \geq 2.$$

Proposición.— En la situación anterior, si P es un punto cuya multiplicidad en la superficie definida por \overline{F} es menor que n , la ecuación de la transformada cuadrática en la dirección dada por P tiene orden menor que n (concretamente, tiene orden, a lo más $\text{mult}_P(\overline{F})$).

Demostración.— Sea un punto en las condiciones del enunciado, de multiplicidad $r < n$. Este punto no puede ser el $(0 : 0 : 1)$ porque dicho punto no anula el cono tangente, debido a nuestros cambios de variables. Por tanto podemos suponer (intercambiando si es necesario X e Y) que es de la forma

$(1 : \beta : \gamma)$ sin pérdida de generalidad. Las ecuaciones de la explosión correspondiente a este punto son

$$\begin{cases} X \mapsto X_0 \\ Y \mapsto X_0(Y_0 + \beta) \\ Z \mapsto X_0(Z_0 + \gamma) \end{cases}$$

con lo que la ecuación local del transformado estricto de \bar{F} es, precisamente, $\bar{F}(1, Y_0 + \beta, Z_0 + \gamma)$.

Aplicando el Teorema de Taylor obtenemos que

$$\bar{F}(1, Y_0 + \beta, Z_0 + \gamma) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\sum_{a+b=j} \frac{\partial^j \bar{F}}{\partial Y_0^a \partial Z_0^b} \Big|_{(1, \beta, \gamma)} Y_0^a Z_0^b \right).$$

Como sabemos, por hipótesis, uno de esos sumandos (concretamente uno para $j = r$) es no nulo, por lo que la multiplicidad del transformado estricto del cono tangente es ahora $r < n$. Observemos que, de hecho, la multiplicidad del transformado estricto de \mathcal{S} es menor o igual que r , por que los elementos del transformado de forma inicial son incancelables con los de formas de grado superior (éstos tienen X_0 y aquéllos no). *Q.E.D.*

Lema.— En la situación anterior, si P es un punto tal que $\text{mult}_P(\bar{F}) = n$, se puede suponer, salvo cambio de variables, que $\bar{F}(X, 0, Z) = \bar{F}(X, Y, Z)$ y que $P = (0 : 1 : 0)$.

Demostración.— Vamos a comenzar suponiendo que las tres variables aparecen en \bar{F} . De no ser así, es evidente la existencia de un punto de multiplicidad máxima, por ejemplo, el $(1 : 0 : 0)$ si X no aparece en \bar{F} .

Entonces consideramos los planos definidos por

$$\frac{\partial^{n-1} \bar{F}}{\partial X^a \partial Y^b \partial Z^c} = 0,$$

obtendremos, con total seguridad:

1. Para la terna $(a, b, c) = (0, 0, n - 1)$ el plano $Z = 0$ (recordemos que, en nuestra situación, $a_{n-1}(X, Y) = 0$).

2. Para alguna otra terna (no cualquiera), otro plano distinto. Por ejemplo, si aparece $a_{ijk}X^iY^jZ^k$ la parcial $\partial X^{i-1}\partial Y^j\partial Z^k$ nos da un sumando kX que aparecerá en otro de estos n^2 planos (de hecho, puede haber menos planos). Llamemos a uno de estos planos

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0.$$

Obviamente, de existir un punto de multiplicidad máxima, este ha de anular a ambos planos, por lo que debe venir definido por

$$Z = 0, \lambda X + \mu Y = 0.$$

Esto nos da un primer método de saber si existe un tal punto, a saber: calcular todos estos planos y comprobar que se reducen a un haz generado por dos. De no ser así, no puede existir el punto de multiplicidad máxima.

Volviendo a la prueba, podemos entonces efectuar el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} X \mapsto \frac{1}{\lambda}X' - \frac{\mu}{\lambda}Y' \\ Y \mapsto Y' \\ Z \mapsto Z' \end{cases}$$

con los arreglos evidentes cuando $\lambda = 0$.

Ahora, si nuestro punto es de multiplicidad máxima, todos los planos anteriores han de reducirse a $Z' = 0$ y $X' = 0$. Pero esto es equivalente al hecho de que Y' no aparezca en \bar{F} , ya que, de no ser así, por un razonamiento análogo al anterior, una de las ecuaciones de los planos contendría un sumando de la forma kY' . Por tanto, la existencia de un punto de multiplicidad máxima, en el supuesto de que \bar{F} no sea $(Z')^n = 0$ es equivalente a que, salvo cambio de variables, $\bar{F}(X, 0, Z) = \bar{F}(X, Y, Z)$ y el único punto de multiplicidad n en estas condiciones es $(0 : 1 : 0)$. *Q.E.D.*

Proposición.— En la situación anterior, la transformación cuadrática dada por la dirección $(0 : 1 : 0)$ verifica las siguientes propiedades:

- 1.- La aplicación iterada de dicha transformación conduce a un descenso de la multiplicidad o a una ecuación WT con cono tangente no plano y sin puntos de multiplicidad máxima.

2.- Si no se produce un descenso de multiplicidad, la transformación no crea curvas permitidas.

Demostración.— Como hemos hecho notar en el lema, si existe un tal punto, podemos suponer que

$$\bar{F}(X, Y, Z) = \bar{F}(X, 0, Z),$$

y que el punto en cuestión es $P = (0 : 1 : 0)$. La explosión correspondiente es la que tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} X \mapsto X'Y' \\ Y \mapsto Y' \\ Z \mapsto Y'Z' \end{cases}$$

La ecuación del transformado estricto de F es, renombrando las variables,

$$F^{(1)} = Z^n + \sum a_{ijk} X^i Y^{i+j+k-n} Z^k,$$

con lo que al menos un monomio (en realidad, todos aquellos que verifiquen $i + k < n$, que existen porque (X, Z) no es curva permitida), descienden de grado. En esta situación tenemos las siguientes posibilidades:

a) Descender la multiplicidad. Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$F(X, Y, Z) = Z^4 + XY^3Z + X^4.$$

b) Crear alguna curva permitida sin descender la multiplicidad. Esto no es posible, ya que, de ser así, sabemos que la curva (Y, Z) , por (TC-3), habría de ser permitida. Esto claramente no es posible porque, sin ir más lejos, los monomios de la forma inicial de permanecen invariantes y no verifican todos (de hecho, sólo lo hace Z^n) que $j + k \geq n$.

c) Cambiar el divisor excepcional. Esto puede ocurrir, desde luego. Basta considerar, por ejemplo, el caso de la superficie definida por

$$F = Z^3 + XY^2Z + X^3,$$

pero lo que no sucede es que el nuevo divisor excepcional tenga puntos de multiplicidad máxima. Veámoslo.

Como es obvio a partir las ecuaciones, en este caso los monomios de la forma inicial permanecen invariantes. Por tanto, tenemos que la nueva forma inicial es

$$\overline{F^{(1)}} = \overline{F} + F_1, \text{ donde } F_1(X, 0, Z) \neq F_1,$$

ya que obviamente los nuevos monomios tienen que depender de Y . Vamos a escoger dos monomios en concreto cuya existencia está asegurada:

-) Un monomio con exponentes $(i_0, 0, k_0)$, con $i_0 \neq 0$; esto es, uno que ya estuviera en la forma inicial antes de explotar.

-) Un monomio con exponentes (i_1, j_1, k_1) con $j_1 \neq 0$; esto es, uno de los nuevos monomios que aparecen tras la explosión.

Siguiendo el proceso conocido para localizar puntos de multiplicidad máxima, vamos a estudiar los planos que surgen al hacer derivadas parciales de orden $n - 1$ a la ecuación del cono tangente. Recordemos que un punto de multiplicidad máxima debe verificar todas las ecuaciones resultantes. Pero, en particular, si consideramos

$$\frac{\partial^{n-1} \overline{F^{(1)}}}{\partial X^\alpha \partial Y^\beta \partial Z^\gamma},$$

obtendremos:

1. Para $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, n - 1)$ el plano $Z = 0$.
2. Para $(\alpha, \beta, \gamma) = (i_0 - 1, 0, k_0)$ el plano $X = 0$.
3. Para $(\alpha, \beta, \gamma) = (i_1, j_1 - 1, k_1)$ el plano $Y = 0$.

En consecuencia no tenemos puntos de multiplicidad máxima en el nuevo divisor excepcional y cualquier explosión descenderá forzosamente la multiplicidad.

Por último, notemos que puede que no tengamos ni a) ni c) y que la multiplicidad y el cono tangente continúen invariantes. Sin embargo, al no ser permitida (X, Z) , existe $(i, j, k) \in N(F)$ tal que $i + k < n$. Este monomio, tras la transformación cuadrática se convierte en uno de exponentes $(i, i + j + k - n, k)$. Esto es, algún monomio ha descendido de grado.

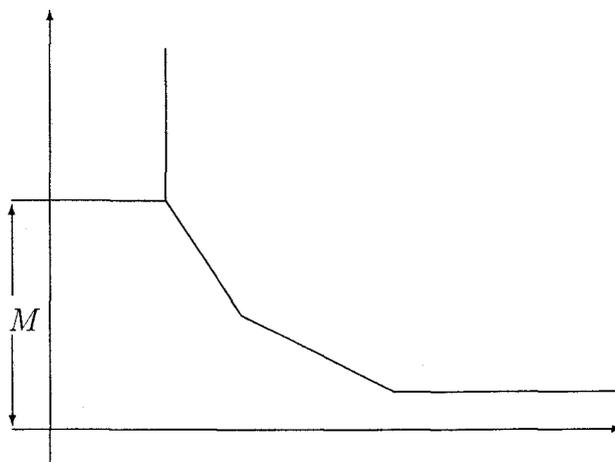
Notemos que la situación de *invarianza* de la multiplicidad y el cono tangente sólo puede darse una cantidad finita de explosiones, ya que los monomios que descienden de grado en una explosión vuelven a descender en la siguiente, debido a que el descenso se debe a condiciones sobre los grados en X y Z , que no varían tras explotar. Por tanto, eventualmente, estos monomios nos llevarán, bien a la situación a), bien a la situación c) tras un número finito de explosiones. *Q.E.D.*

Corolario.— Si \mathcal{S} es una superficie algebroide sumergida con cono tangente no plano y sin curvas permitidas, la aplicación del algoritmo conduce invariablemente a un descenso de la multiplicidad.

II.D. Reducción de singularidades (III): El caso del cono tangente plano.

Veamos entonces el caso que nos queda para completar el teorema: tenemos una superficie algebroide \mathcal{S} de multiplicidad n definida por una ecuación WT F , sin curvas permitidas, y con un cono tangente que es un plano múltiple de ecuación $Z = 0$.

Consideramos entonces $\Delta(F)$, el polígono de Newton–Hironaka de F , ya introducido en I.D. Veamos como afectan las diferentes transformaciones a $\Delta(F)$. Nuestro objetivo es lograr que, tras una cantidad finita de explosiones, al menos un monomio baje del orden n , o lo que es igual, que el polígono de Newton–Hironaka de una ecuación de la superficie transformada tenga intersección no vacía con el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$. Para ello, vamos a fijar un primer control numérico: va a ser la altura del vértice que se encuentre más a la izquierda de $\Delta(F)$, que denotaremos M .



Obsérvese que la curva (X, Z) es permitida si y sólo si no hay puntos en $\Delta(F)$ con abscisa menor que 1. Análogamente, podemos saber si (Y, Z) es permitida simplemente comprobando que todos los puntos tienen ordenada mayor o igual que 1.

Veamos entonces cómo afectan a $\Delta(F)$ las diferentes transformaciones:

Cambios de variables. Es importante conocer qué cambios de variables podemos realizar para que M no crezca, para conocer el grado de versatilidad de que disponemos. Evidentemente Z debe quedar invariante, para asegurarnos que un monomio $a_{ijk}X^iY^jZ^k$ se convierte en otro(s) que siguen en el coeficiente de Z^k . Nos quedamos entonces con los cambios

$$\begin{cases} X \mapsto \alpha X' + \beta Y' + \varphi(X', Y') \\ Y \mapsto \delta X' + \gamma Y' + \psi(X', Y') \\ Z \mapsto Z' \end{cases}$$

donde $\varphi(X, Y)$ y $\psi(X, Y)$ tiene orden mayor que 1.

Sin embargo, un monomio $a_{ijk}X^iY^jZ^k$ se transforma mediante este cambio en una expresión de la forma

$$a_{ijk}(\alpha X' + \beta Y' + \varphi(X', Y'))^i (\delta X' + \gamma Y' + \psi(X', Y'))^j Z^k,$$

donde todos los monomios tienen grado mayor o igual que $i + j + k$, pero podemos encontrarnos con monomios de grado en X menor que i . En el caso concreto del monomio que nos define M , esto significa que podríamos estar creando monomios del mismo grado, pero menor grado en X . Esto es, M crece. Para evitar esto hemos de asegurar que, si el grado total no crece, el grado en X no decrece. Esto se consigue si imponemos que X no varíe, esto es, si nos reducimos a cambios de variables del tipo

$$\begin{cases} X \mapsto X' \\ Y \mapsto Y' + \delta X' + \tau(X', Y') \\ Z \mapsto Z' \end{cases}$$

con $\nu(\tau) \geq 2$.

Transformaciones monoidales. Si tenemos (X, Z) como curva permitida (aplíquese el razonamiento de manera simétrica a (Y, Z)), dado que el cono tangente es un plano múltiple, tenemos una única ecuación, a saber

$$X \mapsto X', \quad Y \mapsto Y', \quad Z \mapsto X'Z';$$

que, como es obvio, aplicado a monomios (y renombrando las variables para mayor comodidad) se resume en

$$c_{ijk}X^iY^jZ^k \mapsto c_{ijk}X^{i+k-n}Y^jZ^k,$$

lo cual, a nivel del conjunto $\Delta(F)$, se traduce en una traslación de vector $(-1, 0)$ (resp. de vector $(0, -1)$ si estamos en el caso (Y, Z)) que no hace descender M (resp. hace descender M).

Si tenemos otra curva permitida, definida por un ideal $(H(X, Y), Z)$, para aplicar la transformación monoidal realizaremos en primer lugar un cambio de variables tal que deje invariantes a X y a Z y que lleve H en Y . Como se ha visto con anterioridad, un tal cambio no afecta a M . Después podemos realizar la transformación monoidal centrada en (Y, Z) que, ya es sabido, hace descender M .

Se tiene por tanto que las transformaciones monoidales, cuando se den (i.e.: cuando se puedan dar) van a mejorar M (caso de que el centro sea distinto de (X, Z)) o lo dejarán como está.

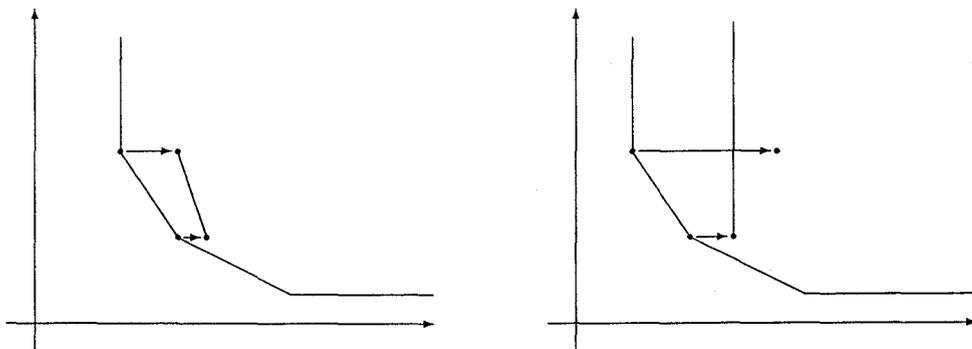
Transformaciones cuadráticas centradas en $(1 : 0 : 0)$. Las ecuaciones en este caso son

$$X \mapsto X', \quad Y \mapsto X'Y', \quad Z \mapsto X'Z';$$

que inducen en $\Delta(F)$ la transformación

$$\left(\frac{i}{n-k}, \frac{j}{n-k} \right) \mapsto \left(\frac{i+j+n-k}{n-k}, \frac{j}{n-k} \right).$$

Es claro que M no empeora por esta transformación. Pero, aún más, si nos fijamos en cómo varían los monomios por la transformación centrada en $(1 : 0 : 0)$, veremos que experimentan una traslación en sentido horizontal, más a la izquierda (o menos a la derecha) cuanto menor sea el grado en Y del monomio en cuestión. Por tanto el segundo vértice por la izquierda se mueve más a la izquierda (o menos a la derecha) que el primero. En esta situación, bien M desciende porque el primer vértice pierde la condición de vértice, bien el ángulo que forma el primer segmento no vertical de $\Delta(F)$ con el eje de abscisas decrece.



Transformaciones cuadráticas centradas en $(0 : 1 : 0)$. Las ecuaciones en este caso son

$$X \mapsto X'Y', \quad Y \mapsto Y', \quad Z \mapsto Y'Z';$$

que, análogamente a lo anterior, induce en $\Delta(F)$ la transformación

$$\left(\frac{i}{n-k}, \frac{j}{n-k} \right) \mapsto \left(\frac{i}{n-k}, \frac{i+j+k-n}{n-k} \right).$$

Ahora bien, como en el caso anterior, sólo aplicaremos esta transformación si carecemos de curvas permitidas. Esto quiere decir que (X, Z) no es curva

permitida, por lo que hemos de tener al menos un monomio $c_{ijk}X^iY^jZ^k$ verificando $i + k < n$, esto es, hemos de tener al menos un punto en $\Delta(F)$ con abscisa estrictamente menor que 1. Como M es la altura del vértice más a la izquierda, para el monomio (o los monomios) que define(n) M , su abscisa ha de ser menor que 1. De la expresión anterior se deduce entonces inmediatamente que este monomio pierde altura, esto es, hacemos descender M .

Transformaciones cuadráticas centradas en $(1 : \alpha : 0)$. Las ecuaciones de estas transformaciones son

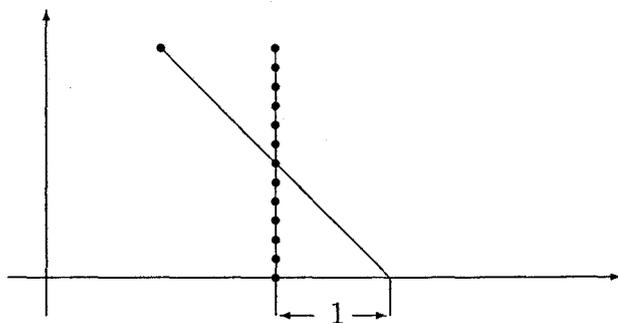
$$X \mapsto X', \quad Y \mapsto X'(Y' + \alpha), \quad Z \mapsto X'Z';$$

o, equivalentemente, podemos entenderlas como un cambio de variables, seguido de una transformación monoidal centrada en $(1 : 0 : 0)$, de la forma

$$\begin{array}{ll} X \mapsto X' & X' \mapsto X'', \\ Y \mapsto Y' + \alpha X' & Y' \mapsto X''Y'', \\ Z \mapsto Z' & Z' \mapsto X''Z''; \end{array}$$

Si traducimos entonces las ecuaciones de la transformación cuadrática a su efecto en $\Delta(F)$, veremos que cada monomio se transforma en toda una serie de monomios, a saber:

$$\left(\frac{i}{n-k}, \frac{j}{n-k} \right) \mapsto \left(\frac{i+j+k-n}{n-k}, \frac{0 \leq t \leq j}{n-k} \right) = \left(\frac{i+j}{n-k} - 1, \frac{0 \leq t \leq j}{n-k} \right).$$



Al punto $((i + j)/(n - k) - 1, j/(n - k))$, esto es, al de mayor ordenada de este conjunto lo llamaremos el transformado superior de (i, j, k) o de $(i/(n - k), j/(n - k))$. Con estas notas podemos ya probar el siguiente resultado.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroides sumergida cuyo cono tangente es un plano múltiple. Entonces la aplicación del algoritmo conduce a un descenso de la multiplicidad.

Demostración.— Fijemos una ecuación WT, $F(Z)$ y consideremos su polígono de Newton–Hironaka, $\Delta(F)$. Notemos dos hechos sencillos:

(a) Si, en cada paso, obtenemos el polígono de Newton–Hironaka de una ecuación del transformado, bastará demostrar que, en una cantidad finita de pasos, hacemos descender el número que antes hemos notado M .

(b) Podemos suponer que no tenemos curvas permitidas ya que, al eliminarlas no hacemos aumentar M ni la multiplicidad y esta eliminación sólo supone una cantidad finita de explosiones. Además, recordemos que, si no descende la multiplicidad, la superficie resultante de esta eliminación es, esencialmente, única.

Apliquemos entonces una transformación cuadrática en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, con $\alpha \neq 0$ y sea $F^{(1)}$ una ecuación del transformado. Para estudiar el posible descenso de M nos fijaremos en el ángulo que forma el primer segmento no vertical (en adelante, primer segmento, a secas) con el eje de abscisas.

Supongamos en primer lugar que el primer segmento de $\Delta(F)$ forma con el eje de abscisas un ángulo mayor de $3\pi/4$ grados. Entonces es claro los monomios que crea el (los) vértice(s) que define M no se pueden anular con otros, dada la situación de la que hemos partido.

Además son claramente los puntos más a la izquierda del nuevo polígono, por lo que $\Delta(F^{(1)})$ es un cuadrante cuyo vértice tiene abscisa 0: por tanto la multiplicidad descende de manera obvia por transformaciones monoidales centradas en (X, Z) . En efecto, al ser traslaciones de vector $(-1, 0)$ y ser $\Delta(F^{(1)})$ un cuadrante, cuando eliminemos (X, Z) como curva permitida, forzadamente tendremos el vértice en el triángulo limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$.

Si el ángulo formado por el primer segmento es menor de $3\pi/4$ consideremos (A, B) , el único vértice de $\Delta(F)$ tal que es extremo de dos segmentos: uno que forme un ángulo menor que $3\pi/4$ con el eje de abscisas y otro mayor o igual que $3\pi/4$. Entonces se tiene que $B < M$ por hipótesis y, aunque los monomios que crea (A, B) , aunque pueden cancelar entre sí (y esto sólo en el caso extremo de que el segmento que comienza en (A, B) forme $3\pi/4$), el transformado superior no sólo no puede cancelar, sino que ha de ser el punto más a la izquierda de $\Delta(F^{(1)})$ y, evidentemente, su abscisa es menor que la del transformado superior del primer vértice de $\Delta(F)$. Por tanto M desciende.

Este razonamiento es claramente extensible a la situación en la cual $B = 0$. En este caso, como sucedía anteriormente, el polígono de Newton-Hironaka de la ecuación $F^{(1)}$ es un cuadrante y, por tanto, descendemos de multiplicidad por transformaciones monoidales.

La única situación incómoda para explotar en una dirección $(1 : \alpha : 0)$, con $\alpha \neq 0$, parece ser, por tanto, aquélla en la que tengamos un ángulo de $3\pi/4$. Por ejemplo, podemos preguntarnos si cabe la posibilidad de realizar infinitas transformaciones cuadráticas sin que esta situación varíe.

De igual modo, si tuviéramos algunas transformaciones monoidales entre dos de tales transformaciones cuadráticas, o bien son traslaciones a izquierda, que no afectan la pendiente del primer segmento, o bien hacen descender M , lo cual nos beneficia. Por tanto, por ponernos en el peor caso, podemos suponer que tenemos una cadena de transformaciones cuadráticas en direcciones (eventualmente distintas) $(1 : \alpha : 0)$, $\alpha \neq 0$ que, ni hacen descender M ni varían la pendiente del primer segmento. Veamos que esto no es posible; tenemos el siguiente resultado:

Lema.— Si el primer segmento de $\Delta(F)$ forma un ángulo de $3\pi/4$ con el eje de abscisas y, tras realizar una transformación cuadrática en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ no desciende M ni varía la pendiente, entonces el primer segmento no vertical viene dado por los monomios del desarrollo de

$$\lambda X^i (Y - \alpha X)^j Z^k$$

Demostración.— Cada punto del primer segmento se transforma, como en los casos anteriores, en una serie de monomios en un segmento vertical. Obviamente, si alguno de esos monomios (fuera del transformado superior) no se anula tras realizar la suma, M desciende, pues son los que están más a la izquierda en $\Delta(F^{(1)})$. Por tanto, todos esos monomios deben anularse entre sí. Simplemente hay que comprobar que esto ocurre si y sólo si los monomios originales son los del desarrollo de $X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$. *Q.E.D.*

(Continuación de la demostración de la proposición): Por tanto tenemos algo de la forma $X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$ cuyos monomios determinan el único segmento de $\Delta(F)$ no paralelo a los ejes. Además, al hacer la transformada cuadrática centrada en $(1 : \alpha : 0)$, nos queda de nuevo una situación en la cual el único segmento no paralelo a los ejes de $\Delta(F^{(1)})$ ha de venir determinado por los monomios provenientes de una expresión de la forma $\mu X^l(Y - \beta X)^m Z^k$.

Los monomios de $X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$ se transforman en el monomio $X^{i+j+k-n} Y^j Z^k$, con lo que $\mu X^l(Y - \beta X)^m Z^k$ debe ser realmente de la forma $\mu X^{i+j+k-n} (Y - \beta X)^j Z^k$, ya que, de otro modo, M habría crecido, lo cual es imposible en cualquier caso, o decrecido, lo cual es imposible por hipótesis. Los monomios que han entrado entonces en el segmento son, aparte del que proviene del segmento original, los dados por

$$\mu X^{i+j+k-n} Z^k \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} \beta^l Y^{j-l} X^l + (\mu - 1) X^{i+j+k-n} Y^j Z^k.$$

Si deshacemos la transformación cuadrática centrada en $(1 : 0 : 0)$ y el cambio de variables, veremos que estos monomios deben provenir de monomios de la forma

$$\mu Z^k \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} \beta^l (Y - \alpha X)^{j-l} X^{i+2l} + (\mu - 1) X^i (Y - \alpha X)^j Z^k,$$

o, agrupando,

$$\mu X^i (Y - \alpha X + \beta X^2)^j Z^k - X^i (Y - \alpha X)^j Z^k,$$

lo cual es imposible porque entonces el segundo sumando habría anulado los términos que nos daban el segmento no paralelo a alguno de los ejes al principio.

Así pues, si el ángulo entre el primer segmento y el eje de abscisas es $3\pi/4$, tras realizar una transformación cuadrática ha de dejar de serlo. Por tanto (tras realizar las transformaciones monoidales de rigor y, suponiendo que no hayan hecho descender M) la próxima transformación cuadrática de dirección $(1 : \gamma : 0)$ (con $\gamma \neq 0$) hará descender M .

Con lo que hemos probado hasta ahora podemos asegurar lo siguiente: si tenemos una sucesión infinita

$$\dots \longrightarrow \mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(n-1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{S}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{S}$$

de explosiones que no hace descender M en ningún paso podemos suponer que son de uno de los dos tipos siguientes:

(I) Tal que todas las transformaciones cuadráticas vienen dadas por la dirección $(1 : 0 : 0)$ y todas las monoidales están centradas en (X, Z) .

(II) Tal que todas las monoidales están centradas en (X, Z) y las cuadráticas pueden ser en las direcciones $(1 : 0 : 0)$ y $(1 : \alpha : 0)$, pero de tal forma que:

(II.a) Antes de realizar la transformación en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ el polígono de Newton tiene un solo segmento no paralelo a los ejes dado por los monomios del desarrollo de $X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$.

(II.b) Después de una transformación en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ forzosa-mente explotaremos en la dirección $(1 : 0 : 0)$.

Claramente la primera posibilidad no se puede dar, ya que la transformación cuadrática centrada en $(1 : 0 : 0)$ hace descender el ángulo que forman el primer segmento y el eje de abscisas. Como los puntos de $\Delta(F^{(n)})$ siempre están en el retículo $\mathbf{Z}(1/n!) \times \mathbf{Z}(1/n!)$ en algún momento hemos de hacer descender M .

En cuanto a la segunda, veamos una forma de asegurar, en las condiciones antes mencionadas, realizar una transformación en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, con $\alpha \neq 0$, seguida de una en la dirección $(1 : 0 : 0)$, hace descender forzosa-mente M . Nótese que, una vez más, es irrelevante si hemos de realizar transformaciones monoidales entre ambas o no.

En lugar de considerar el habitual cambio previo a la transformación en la dirección consideraremos otro (igualmente válido por (TC-1)); el dado

por:

$$\begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto Y + \alpha X + \gamma X^2 \\ Z \mapsto Z \end{cases}$$

con $\gamma \neq 0$. Como indicamos arriba, estos cambios no afectan a M . Entonces el sumando de $F X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$ se convierte en $X^i(Y + \gamma X^2)^j Z^k$, y claramente podemos escoger γ de forma que los monomios que surgen de esta expresión no se anulen con los restantes de F tras el cambio de variables.

Ahora hemos de aplicar dos transformaciones cuadráticas en la dirección $(1 : 0 : 0)$. Como estas transformaciones cuadráticas pueden tomarse con ecuaciones

$$X \mapsto X', \quad Y \mapsto X'Y' \quad Z \mapsto X'Z',$$

no puede haber cancelaciones de monomios de ningún tipo, y la expresión $X^i(Y + \gamma X^2)^j Z^k$ va, tras ambas explosiones, en $X^{i+2j+2k-2n}(Y + \gamma)^j Z^k$.

Ahora bien, si M no ha descendido es porque hay un punto en el polígono del transformado de ordenada M y abscisa menor estrictamente que $(i + 2j + 2k - 2n)/(n - k)$. Sin embargo, como hicimos notar con anterioridad, un punto se mueve tanto más a la derecha cuanto mayor es su ordenada. Como este punto tiene ordenada M el efecto de las transformaciones sobre él ha debido ser el mismo que sobre $(i/(n - k), j/(n - k))$. En consecuencia, si ahora está más a la izquierda es que también lo estaba antes, lo cual contradice las hipótesis. Esto termina la demostración de la proposición. *Q.E.D.*

Con esta proposición termina la demostración del Teorema de Reducción de Singularidades.

II.E. Algunas propiedades del algoritmo de reducción.

Una vez probado el resultado anterior, sabemos bastantes cosas acerca de cómo reducir las singularidades de una superficie \mathcal{S} . Vamos ahora a fijarnos en otras preguntas que surgen de manera natural a raíz del teorema que hemos probado. En concreto, responderemos a las siguientes:

- (a) ¿Podemos asegurar ahora que la cantidad de transformaciones que hemos de realizar para reducir la singularidad de \mathcal{S} está acotada?
- (b) ¿Qué podemos decir de la normalización de \mathcal{S} ?
- (c) ¿Qué sucede con las curvas (singulares) equimúltiples?

Finitud del proceso de reducción.

Observemos que el teorema anteriormente probado no es enteramente satisfactorio: hemos probado que no es posible seguir nuestro algoritmo y realizar una cantidad infinita de explosiones, pero aún podríamos tener una situación inadecuada: que la longitud de las sucesiones de resolución pueda ser arbitrariamente grande. En principio, si sólo tenemos en cuenta el resultado anterior, esto es posible.

Teorema.— El algoritmo de resolución no puede dar origen a sucesiones de resolución arbitrariamente largas sin que se produzca un descenso de multiplicidad.

Previo a la demostración, daremos un resultado eminentemente técnico.

Lema.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida de ecuación WT $F(Z)$ y sea (N, M) el primer vértice por la izquierda de $\Delta(F)$. Entonces el número máximo de transformaciones monoidales que se pueden realizar en \mathcal{S} está acotado en función de N y M .

Demostración.— Observemos que el número M es el mismo que en la sección anterior. Entonces las transformaciones monoidales, como vimos en II.D. no hacen aumentar M , antes bien, las centradas en curvas otras que (X, Z) la hacen descender en 1 y la centrada en (X, Z) es simplemente una traslación a izquierda que, por tanto, no varía M .

Como el orden en que se hagan las transformaciones monoidales es indiferente (salvo que caiga la multiplicidad, en cuyo caso no hay problema del

que preocuparse) podemos en primer lugar realizar todas las que podamos centradas en (X, Z) . Evidentemente, al ser una traslación de vector $\overrightarrow{(-1, 0)}$, las transformaciones podrán tener lugar hasta que el primer vértice por la izquierda tenga su abscisa en $[0, 1)$. Esto es, la cantidad total es $[N]$.

Realizando un razonamiento análogo con los demás posibles centros (observemos que estas transformaciones monoidales no hacen variar N) tenemos que la cantidad máxima es $[M]$. Por tanto tenemos, a lo más $[N] + [M]$ transformaciones monoidales. *Q.E.D.*

Demostración del Teorema.— Una vez más resulta cómodo separar los razonamientos en función de si el cono tangente es o no un plano múltiple. En efecto, si lo es, el resultado es inmediato: basta con seguir los razonamientos de II.C. En concreto la única posibilidad que permitía que la multiplicidad no descendiera en una explosión era que explotásemos en una dirección del cono tangente de multiplicidad (en el cono) igual a la multiplicidad de \mathcal{S} . En un tal caso, recordemos que podíamos suponer que el punto era $(1 : 0 : 0)$ y que el cono tangente no dependía de Y .

Pero en este caso basta comprobar que, si (i, j, k) es un punto de $N(F)$ con $i + k < n$ (necesariamente ha de existir un tal punto), entonces la transformación cuadrática lo llevaba en el punto $(i, i + j + k - n, k)$. Por tanto el grado en Y de este monomio desciende, así como el de sus transformados por sucesivas explosiones. Trivialmente el número máximo de explosiones que es posible realizar está acotado por la parte entera de $j/(n - i - k)$.

Partimos entonces de una superficie \mathcal{S} , con cono tangente un plano múltiple; de ecuación WT $F(Z)$ y sea (N, M) el primer vértice de $\Delta(F)$ por la izquierda. Vamos a comenzar por acotar, en función de M y N , el número máximo de transformaciones para que M descienda, así como las coordenadas del nuevo primer vértice tras el descenso de M .

Sabemos que el número de transformaciones monoidales que podemos realizar hasta vernos abocados a las transformaciones cuadráticas es, a lo más $[M] + [N]$, luego supondremos que hemos realizado ya todas las posibles y que, por tanto, carecemos de curvas permitidas (abusando de la notación seguiremos llamando F a la ecuación).

Pongamos que explotamos en una dirección $(1 : \alpha : 0)$ y que el ángulo que forma el primer segmento de $\Delta(F)$ (ver II.D.) con el eje de abscisas no

es $3\pi/4$. Entonces, como vimos, la transformación cuadrática hace descender M . Veamos cómo acotar la abscisa del nuevo primer vértice.

Cuando el ángulo es mayor que $3\pi/4$, el nuevo vértice tenía la abscisa $A + B - 1$, donde (A, B) era el vértice donde los segmentos pasaban de formar un ángulo mayor que $3\pi/4$ con el eje de abscisas a formar uno menor o igual. Claramente $A + B < M + N$, por lo que la abscisa del nuevo primer vértice está acotada por $N + M - 1$.

Cuando el ángulo es menor que $3\pi/4$, el nuevo vértice era, precisamente $(N + M - 1, 0)$ por lo que la cota anterior nos vale.

Cuando el ángulo era precisamente $3\pi/4$ sabemos que, tras una primera transformación cuadrática tenemos dos posibilidades: o bien pasa como en el caso de ángulo menor que $3\pi/4$ (ya lo tenemos resuelto), o bien M no varía, el vértice que lo define es ahora $(N + M - 1, M)$ y el ángulo ya no puede ser $3\pi/4$. Aplicando entonces lo anterior a $(N + M - 1, M)$ en lugar de a (N, M) tenemos también acotado el caso.

Nos quedan los casos complicados: por un lado una sucesión de transformaciones en la dirección $(1 : 0 : 0)$, por otro el caso de explotar en las direcciones $(1 : 0 : 0)$ y $(1 : \alpha : 0)$, con las restricciones que vimos en II.D. Y, por supuesto, entre transformación cuadrática y transformación cuadrática hay que contar todas las monoidales que pueden aparecer eventualmente.

Comenzaremos por explotar siempre en la dirección $(1 : 0 : 0)$. En lugar de explotar directamente haremos primero un cambio que respetará M y que nos permitirá luego explotar de nuevo en la dirección $(1 : 0 : 0)$; en concreto (cfr. II.D.)

$$\begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto Y + \gamma X^2 \\ Z \mapsto Z \end{cases}$$

Con este cambio, si el monomio que definía M era $X^i Y^j Z^k$ ahora lo hemos convertido en $X^i (Y + \gamma X^2)^j Z^k$ y, si escogemos γ para que ningún sumando de la expresión anterior se anule al hacer el cambio, tenemos, en el polígono de Newton–Hironaka, los puntos

$$\left\{ \left(\frac{i + 2t}{n - k}, \frac{j - t}{n - k} \right) \mid 0 \leq t \leq j \right\}.$$

Ahora podemos realizar las transformaciones cuadráticas de dirección $(1 : 0 : 0)$. En concreto, al realizar la segunda, los puntos anteriores devienen al conjunto

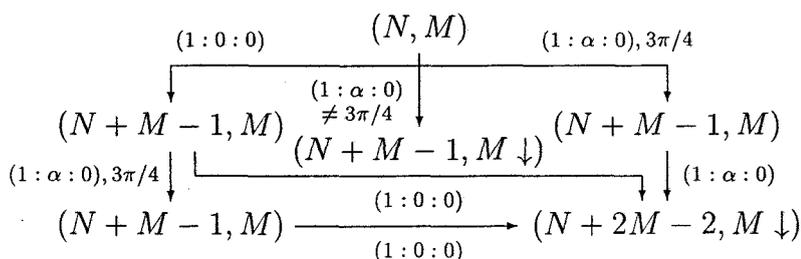
$$\left\{ \left(\frac{i+2j}{n-k} - 2, \frac{j-t}{n-k} \right) \mid 0 \leq t \leq j \right\}.$$

Esto es, como estas transformaciones no pueden cancelar monomios entre sí, M tiene que descender forzosamente. La abscisa del nuevo vértice que define M está acotada por $(i+2j)/(n-k) - 2 = N + 2M - 2$. Observemos que podríamos haber hecho este razonamiento ya en II.D., pero era innecesario para nuestros intereses entonces y no habría hecho sino alargar una prueba ya de por sí extensa.

Una vez que hemos probado que no podemos realizar dos transformaciones en la dirección $(1 : 0 : 0)$ sin que descienda M el único caso complicado que nos queda por tanto el caso de tres transformaciones cuadráticas en las direcciones $(1 : 0 : 0)$, $(1 : \alpha : 0)$ y $(1 : 0 : 0)$. Recordemos que, para que sean imprescindibles las tres es necesario que antes de explotar en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, el único segmento no vertical del polígono de Newton–Hironaka esté formado por los puntos correspondientes a los monomios del desarrollo de $X^i(Y - \alpha X)^j Z^k$.

Entonces, si procedemos como en II.D., vemos que podemos hallar una ecuación del transformado (precisamente en la que podemos asegurar el descenso de M) tal que todos estos puntos se convierten en puntos del segmento vertical que une $((i+2j)/(n-k) - 2, j/(n-k)$ con $((i+2j)/(n-k) - 2, 0)$. Esto quiere decir M desciende y que nos sirve para la abscisa del nuevo vértice que define M la misma cota que en el caso anterior, $N + 2M - 2$.

Si recapitulamos entonces obtenemos el siguiente cuadro sinóptico de posibilidades, donde aparecen todos los casos en que puede no descender M y, en cada caso, hemos indicado el vértice que define M .



Obviamente el símbolo $M \downarrow$ indica que necesariamente M debe bajar tras la transformación. Observemos que, entre dos transformaciones cuadráticas consecutivas en el diagrama no pueden haber tantas transformaciones monoidales como calculamos en el lema previo. En efecto: si las hay han de estar centradas en (X, Z) (las demás hacen descender M) por lo que sólo puede haber tantas como indique la parte entera de la abscisa.

Por tanto el número máximo de pasos que hemos de dar para hacer descender M es

$$[N] + [M] + 1 + [N + M - 1] + 1 + [N + M - 1] + 1 = [N] + [M] + 2[N + M] + 1,$$

y la abscisa del nuevo primer vértice está acotada por $N + 2M - 2$ (la ordenada lo está, evidentemente, por $M - (1/n)$).

Una vez acotado en función de M y N el número de transformaciones necesarias para hacer descender M , así como las coordenadas del nuevo vértice de menor abscisa, basta aplicar el mismo razonamiento (a lo sumo, nM veces). Esto termina la demostración del teorema. *Q.E.D.*

Observación.— La acotación dista mucho de ser precisa. Por poner un ejemplo simple, consideremos la superficie definida por

$$Z^3 + XY^2Z - XY^3 + X^3Y,$$

donde $(N, M) = (1/3, 1)$, por lo que la cota es

$$[1/3] + [1] + 2[4/3] + 1 = 4,$$

aunque cualquier transformación (forzosamente cuadrática) hace descender M , como se puede comprobar de manera inmediata.

A priori nuestra acotación parece pues predecir un proceso notablemente largo. Sin embargo, el próximo resultado que vamos a demostrar nos ilustrará un hecho curioso: de hecho, una vez eliminadas la curvas permitidas, casi todas las posibles transformaciones nos llevan a una situación muy cómoda:

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida dada por una ecuación WT

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y)Z^k,$$

sin curvas permitidas y tal que $\bar{F} = Z^n$. Entonces, si la forma inicial de cada a_k no se anula en el punto $(1 : \alpha)$, la ecuación local de la transformada cuadrática dada por el punto $(1 : \alpha : 0)$ tiene, al menos, al divisor excepcional como curva permitida. Además, al realizar todas las transformaciones monoidales posibles la superficie obtenida tiene multiplicidad estrictamente menor que n .

Demostración.— En nuestra situación vamos a escribir

$$a_k(X, Y) = g_k(X, Y) + a'_k(X, Y) = g_k(X, Y) + \sum_{j>m_k} a_k^j(X, Y),$$

esto es, designaremos por $g_k(X, Y)$ a la forma inicial de a_k y diremos que tiene orden m_k (evidentemente $m_k > n - k$). Suponemos entonces que $g_k(1, \alpha) \neq 0$ en todo k y aplicamos la transformación cuadrática dada por

$$\begin{cases} X & \mapsto X' \\ Y & \mapsto X'(Y' + \alpha) \\ Z & \mapsto X'Z' \end{cases}$$

que, renombrando las variables, nos deja una ecuación del transformado, a saber:

$$F^{(1)}(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \left[X^{k+m_k-n} g_k(1, Y + \alpha) + \sum_{j>m_k} X^{j+k-n} a_k^j(1, Y + \alpha) \right] Z^k.$$

Observemos algunos detalles dignos de mención en la ecuación de $F^{(1)}$:

1. La forma inicial del coeficiente de Z^k (llamemos $a_k^{(1)}$ a dicho coeficiente a partir de ahora) es

$$X^{k+m_k-n} g_k(1, \alpha),$$

pues todos los demás monomios tienen mayor grado en X o igual, pero con términos en Y .

2. La forma inicial respecto de X es

$$X^{k+m_k-n} g_k(1, Y + \alpha).$$

Estas dos condiciones implican de manera necesaria que (X, Z) es curva permitida en la superficie transformada. En efecto, si no fuera así, tendríamos un monomio $X^i Y^j Z^k$ con $i+k < \nu(F^{(1)})$. Pero, en $a_k^{(1)}$, el monomio de menor grado sólo depende de X , lo cual está en contradicción con la hipótesis.

Vemos ahora qué pasa cuando realizamos la transformación monoidal correspondiente. En principio tenemos tres posibilidades:

- (a) La transformación cuadrática ha hecho descender la multiplicidad. Entonces hemos terminado.
- (b) La transformación cuadrática nos deja una superficie con cono tangente no plano. Este caso, como hemos visto en II.B., al tener una curva permitida, conduce por la transformación monoidal a un descenso de multiplicidad de forma inevitable.
- (c) La transformación cuadrática lleva a una superficie con cono tangente Z^n de nuevo. Veamos entonces que las condiciones 1 y 2 se mantienen por la transformación monoidal centrada en (X, Z) .

En efecto, de (TM-1) se desprende que la transformación monoidal sobre $F^{(1)}$ tiene ecuación única, a saber,

$$F^{(2)} = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \left[X^{2k+m_k-2n} g_k(1, Y + \alpha) + \sum_{j>m_k} X^{j+2k-2n} a_k^j(1, Y + \alpha) \right] Z^k,$$

que verifica 1 y 2 (con los cambios de exponentes obvios) de manera automática.

En estas condiciones (X, Z) sigue siendo permitida en $F^{(2)}$. Si $F^{(2)}$ no tiene multiplicidad estrictamente menor o cono tangente no plano, podemos aplicar el mismo razonamiento y continuar así *ad nauseam*. Por (TM-3), no podemos tener una sucesión infinita de transformaciones monoidales sin que la multiplicidad descienda, lo cual implica que en algún momento hemos de llegar a un descenso de multiplicidad o a un cono tangente no plano (*ergo* a un descenso en el siguiente paso). En cualquier caso, se tiene el resultado. *Q.E.D.*

Corolario.— En las condiciones anteriores, si $(1 : \alpha)$ no anula a las formas iniciales de los a_k y $\mathcal{S}^{(1)}$ es el transformado cuadrático de \mathcal{S} en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, el número de transformaciones monoidales necesarias para reducir la multiplicidad de $\mathcal{S}^{(1)}$ no depende de α , sino de \mathcal{S} .

Demostración.— Es elemental; ya que de II.A. y de la expresión hallada para $F^{(1)}$ se tiene que dicho número es precisamente

$$\min \left\{ \left[\frac{m_k}{n-k} \right] - 1 \mid k = 0, \dots, n-2 \right\},$$

donde m_k es el orden usual de a_k . *Q.E.D.*

Normalización y reducción de singularidades.

Recordemos que $\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathcal{R})$, superficie algebroide sumergida, se dice normal cuando \mathcal{R} es íntegramente cerrado. Las variedades normales presentan algunos hechos notables que no expondremos aquí por no ser nuestro objetivo. Baste decir que las variedades normales no pueden tener subvariedades singulares de codimensión 1 (esto es, de dimensión la misma que la variedad menos uno). Por esto la normalización ha sido utilizada (desde el propio Zariski, ver [25] (II)) en numerosas ocasiones para eliminar directamente del lugar singular de una variedad las componentes “grandes” (ver, por ejemplo, [18], en el contexto del problema de las singularidades de superficies algebroides).

Lamentablemente no podemos decir tanto como que nuestro algoritmo conduzca a la superficie \mathcal{S} a la normalización (se puede hablar de la normalización). Pero podremos probar que, para ciertos estadios intermedios, es así de hecho.

Lema.— Sea \mathcal{S} una superficie dada por una ecuación

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y)Z^k,$$

y sea $\Delta(X, Y)$ el discriminante de F como polinomio en Z . Entonces, si aplicamos una transformación cuadrática en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, y denominamos $\Delta^{(1)}$ al discriminante de la ecuación del transformado, $F^{(1)}$, se tiene que

$$\Delta^{(1)}(X, Y) = \frac{1}{X^{n!}} \Delta(X, X(Y + \alpha)).$$

Demostración.— Los monomios de Δ (en función de los a_i) son de la forma

$$a_0^{l_0} a_1^{l_1} \dots a_{n-2}^{l_{n-2}}, \text{ con } nl_0 + (n-1)l_1 + \dots + 2l_{n-2} = n!.$$

Aplicando esto a $\Delta^{(1)}$ y teniendo en cuenta que los coeficientes de $F^{(1)}$ son

$$a_k^{(1)}(X, Y) = \frac{1}{X^{n-k}} a_k(X, X(Y + \alpha))$$

se tiene el resultado. *Q.E.D.*

Necesitamos los siguientes resultados de [25] (II).

Teorema.— Sea \mathcal{S} una superficie (hipersuperficie) algebroide sumergida definida por una ecuación $F(Z)$ de discriminante $\Delta = X^l u(X, Y)$, con $u(X, Y)$ unidad. Entonces

- (i) La normalización de \mathcal{S} se puede hallar a partir de \mathcal{S} mediante transformaciones monoidales.
- (ii) La normalización de \mathcal{S} es producto de superficies lisas (tantas como formen \mathcal{S} , ver II.B.).

A partir de esto tenemos el siguiente resultado (ver [14]).

Corolario.— Sea \mathcal{S} una superficie sin curvas permitidas definida por una ecuación $F(Z)$ de discriminante $\Delta(X, Y)$. Entonces, si $(1 : \alpha : 0)$ es una dirección del cono tangente que no anula la forma inicial de Δ , la transformada cuadrática en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ se normaliza por transformaciones monoidales, convirtiéndose en producto de superficies lisas.

Demostración.— Es aplicación directa de los resultados precedentes. *Q.E.D.*

Curvas singulares equimúltiples.

Sea como de costumbre \mathcal{S} una superficie de ecuación $F(Z)$ y multiplicidad n . Veremos ahora qué sucede con las curvas $\mathfrak{p} = (G, H)$ tales que $F \in \mathfrak{p}^n$, que hemos denominado curvas equimúltiples. Como es lógico sólo nos interesan las curvas singulares: las lisas son precisamente las curvas permitidas y ya hemos estudiado con profusión cómo varían con el proceso de reducción.

En primer lugar, recordemos de I.D. que podemos suponer, de hecho, $\mathfrak{p} = (Z, G(X, Y))$ con $G(X, Y)$ irreducible de orden $\nu(G) \geq 2$. Tenemos entonces una serie de curvas singulares equimúltiples

$$\mathcal{C}_1 = (Z, G_1), \dots, \mathcal{C}_r = (Z, G_r),$$

y cada una de ellas verifica

$$\overline{G}_i = (\alpha_i X + \beta_i Y)^{\nu_i}.$$

Observación.— Es obvio que la existencia de curvas singulares equimúltiples obliga a que el cono tangente sea un plano múltiple. En concreto, si tenemos una ecuación WT

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y)Z^k,$$

y una curva equimúltiple $(Z, G(X, Y))$, dado que $G^{n-k} | a_k$ es forzoso que el orden de cada a_k sea, cuando menos $2(n-k)$ y eso hace imposible que en la ecuación del cono tangente haya otros monomios que Z^n .

Definición.— Denominaremos, en consonancia con la nomenclatura habitual (ver [25] (I)), a $\alpha_i X + \beta_i Y$ la *tangente de \mathcal{C}_i* y diremos que \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_j son *tangentes* cuando $(\alpha_i : \beta_i) = (\alpha_j : \beta_j)$ en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Dada una curva \mathcal{C}_i denominaremos la *transformada cuadrática de \mathcal{C}_i* en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ a la curva definida por

$$\mathfrak{p}'_i = \left(Z, \frac{1}{X^{\nu_i}} G_i(X, X(Y + \alpha)) \right),$$

y análogamente para la dirección $(0 : 1 : 0)$.

Lema.— En las condiciones anteriores se tiene:

(i) Las transformaciones monoidales no hacen desaparecer ni crean nuevas curvas equimúltiples singulares, salvo que impliquen un descenso de multiplicidad.

(ii) Tras una transformación cuadrática en la dirección $(\alpha : \beta : 0)$, si no hay descenso de multiplicidad, sólo permanecen como curvas equimúltiples (eventualmente singulares) las transformadas cuadráticas de aquéllas \mathcal{C}_i que tengan a $\beta X - \alpha Y$ como tangente.

Demostración.— La primera afirmación es consecuencia directa de (TM-1). En cuanto a la segunda, es inmediato comprobar que, si explotamos una curva equimúltiple en una dirección distinta a la dada por su tangente, su transformada es una unidad. *Q.E.D.*

De hecho, este resultado conecta directamente con el fenómeno descrito en (TC-3), vía el siguiente aserto.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida sin curvas permitidas y cono tangente un plano múltiple. Supongamos que, tras realizar una transformación cuadrática en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ permanece invariante la multiplicidad y aparece una curva permitida $(Z, X + \alpha Y + G(Y))$ (y, por tanto, (X, Z) por (TC-3)). Entonces existe \mathcal{C} , curva equimúltiple singular en \mathcal{S} cuya transformada cuadrática es precisamente $(Z, X + \alpha Y + G(Y))$.

Demostración.— Claramente basta probar el enunciado para el caso $\alpha = 0$, siendo el caso general resultado directo de aplicar (TC-1) (y el caso $(0 : 1 : 0)$ deducible por una simple permutación).

Fijemos entonces una ecuación WT para \mathcal{S}

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^n a_k(X, Y) Z^k = Z^n + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i,j} a_{ijk} X^i Y^j \right) Z^k,$$

de donde (ver I.E.) una ecuación WT para la transformada cuadrática $\mathcal{S}^{(1)}$ es, precisamente,

$$F^{(1)}(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^n a_k^{(1)}(X, Y) Z^k, \text{ donde } a_k^{(1)}(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ijk} X^{i+j+k-n} Y^j.$$

Fijemos entonces un $k \in \{0, \dots, n-2\}$ y escribamos

$$a_k^{(1)}(X, Y) = X^{r_k} (X + G(Y))^{s_k} b_k^{(1)}(X, Y),$$

donde han de ser $r_k, s_k \geq n - k$. Lo que queremos probar es que, en estas condiciones, existe una serie $H(X, Y)$ verificando

$$\frac{1}{X^\lambda} H(X, XY) = u(X, Y)(X + G(Y)),$$

con $\lambda = \nu(H) = \nu(G)$ y H regular de orden λ en Y .

Veamos, antes de probar la existencia de $H(X, Y)$, que esto es suficiente, en concreto que (Z, H) era curva equimúltiple en \mathcal{S} . Como es obvio basta probar que

$$(X + G(Y)) \mid a_k^{(1)}(X, Y) \implies H(X, Y) \mid a_k(X, Y),$$

para $k = 0, \dots, n-2$. Supongamos que no es así; entonces por el Teorema Preparatorio de Weierstrass, y dado que H es regular en Y , podremos escribir

$$a_k(X, Y) = Q(X, Y)H(X, Y) + \sum_{j=0}^{\lambda-1} \sigma_j(X)Y^j.$$

Aplicamos ahora el homomorfismo inyectivo de anillos (ver I.D.)

$$\begin{aligned} \Pi_{(1:0:0)} : \mathbf{C}[[X, Y, Z]] &\longrightarrow \mathbf{C}[[X, Y, Z]] \\ X &\longmapsto X \\ Y &\longmapsto XY \\ Z &\longmapsto XZ \end{aligned}$$

y obtenemos

$$X^a a_k^{(1)}(X, Y) = X^b Q'(X, Y)(X + G(Y)) + \sum_{j=0}^{\lambda-1} (\sigma_j(X)X^j) Y^j.$$

Ahora bien, como $X + G(Y)$ divide a $a_k^{(1)}(X, Y)$ también divide a $X^a a_k^{(1)}(X, Y)$, luego la unicidad de cociente y resto en el Teorema Preparatorio implican que

$$\sigma_j(X)X^j = 0, \text{ para todo } j = 0, \dots, \lambda - 1,$$

y, consecuentemente $H(X, Y)|_{a_k(X, Y)}$.

Probemos entonces la existencia de $H(X, Y)$ con las condiciones pedidas. Para ello escribiremos la serie $X + G(Y)$ de la siguiente forma

$$X + G(Y) = X + \sum_{i \geq \lambda} \alpha_i Y^i$$

y pondremos así mismo

$$H(X, Y) = \sum_{i+j=k \geq \lambda} \beta_{ij} X^i Y^j.$$

Al tiempo de hallar $H(X, Y)$ hemos de hallar una unidad

$$u(X, Y) = \sum_{i+j=k} \gamma_{ij} X^i Y^j,$$

verificando

$$\sum_{i+j=k} \beta_{ij} X^{k-\lambda} Y^j = \left(\sum_{i+j=k} \gamma_{ij} X^i Y^j \right) \cdot \left(X + \sum_{k \geq \lambda} \alpha_k Y^k \right).$$

En grado 0 la igualdad anterior se reduce a

$$\beta_{\lambda 0} = \gamma_{00} 0 = 0,$$

mientras que, en grado 1 tenemos

$$\beta_{(\lambda+1)0} X + \beta_{(\lambda-1)1} Y = \gamma_{00} X,$$

esto es, $\beta_{(\lambda-1)1} = 0$ y $\beta_{(\lambda+1)0} = \gamma_{00}$ cuyo valor podemos fijar en 1 (por ejemplo).

En grado 2 tenemos la siguiente identidad

$$\beta_{(\lambda+2)0} X^2 + \beta_{\lambda 1} XY + \beta_{(\lambda-2)2} Y^2 = \gamma_{00} \alpha_2 Y^2 + \gamma_{10} X^2 + \gamma_{01} XY,$$

esto es $\beta_{(\lambda-2)2} = \alpha_2$ y podemos elegir valores para $\beta_{(\lambda+2)0} = \gamma_{10}$ y $\beta_{\lambda 1} = \gamma_{01}$. (Entre otras cosas, esto fuerza a que $\lambda \geq 2$).

Obsérvense entonces los siguientes hechos:

(a) Cada β_{ij} sólo aparece, obviamente, en un grado (concretamente en el grado $i + 2j - \lambda$).

(b) En cada grado k aparecen los γ_{ij} con $i + j < k$, pero nunca deben verificar relaciones entre sí, sólo relaciones del tipo

$$\beta_{ab} = \sum \gamma_{cd} \alpha_e.$$

Es entonces claro que, dado que podemos elegir tanto los γ_{ij} como los β_{ij} , la elección de aquéllos define a éstos pero en ningún momento una elección determinada se verá sujeta a cumplir condiciones algebraicas con posterioridad. Por tanto, podemos definir tanto $H(X, Y)$ como $u(X, Y)$ sin problemas.

Para finalizar la prueba sólo resta ver que $H(X, Y)$ puede escogerse de forma que $H(0, Y)$ tenga grado λ . Para ello volvamos a la identidad $H = u(X + G(Y))$. El coeficiente $\beta_{0\lambda}$ aparece en grado $0 + 2\lambda - \lambda = \lambda$ acompañando al monomio Y^λ , luego, en la identidad, hay que estudiar la parte homogénea de grado λ , concretamente los coeficientes de Y^λ . Pero, como $\lambda = \nu(G)$, se tiene simplemente

$$\beta_{0\lambda} Y^\lambda = \gamma_{00} \alpha_\lambda Y^\lambda, \neq 0$$

por lo que $\beta_{0\lambda} \neq 0$. Esto concluye la prueba. *Q.E.D.*

Un ejemplo claro de este fenómeno lo tendremos si consideramos la superficie definida por

$$F = Z^3 + (Y^3 + X^4 + Y^8)^2 Z + (Y^3 + X^4 + Y^8)^3,$$

que, tras una transformación cuadrática en la dirección $(1 : 0 : 0)$ resulta

$$F^{(1)} = Z^3 + X^3 (X + Y^3 + X^5 Y^8)^2 Z + X^6 (X + Y^3 + X^5 Y^8)^3.$$

Extensiones del algoritmo de reducción.

El proceso de reducción que hemos presentado en este capítulo tiene dos extensiones naturales, a saber: el caso de característica p y las variedades de dimensión superior. Para finalizar esta sección comentaremos brevemente lo que sabemos y lo que no sabemos acerca de ambos problemas.

El estudio de la resolución de superficies algebroides en característica positiva no tiene muchos antecedentes, siendo el más importante el trabajo de R. Piedra, [18], ya mencionado en numerosas ocasiones. En lo referente al proceso de reducción, en dicho trabajo se prueba un resultado algo menos preciso que el equivalente aquí probado, por lo que se presenta como un estudio no carente de interés el tratar de extender los resultados (especialmente los de esta sección) a característica arbitraria. El problema fundamental es, como de costumbre, que el manejo de las estructuras combinatorias asociadas al problema es mucho más complejo.

El caso de hipersuperficies de dimensión mayor que 2 tiene un problema ya mostrado por M. Spivakovsky en [22]. En concreto, si consideramos la hipersuperficie definida por

$$F(W, X, Y, Z) = Z^2 + X^2Y^2 + WXY^3 + WX^3Y,$$

tenemos que las variedades permitidas de dimensión máxima son las rectas

$$X = Y = Z = 0, W = X = Z = 0, W = Y = Z = 0.$$

Explotando entonces la segunda recta en la dirección $(1 : 0 : 0 : 0)$ obtenemos

$$F^{(1)} = Z^2 + X^2Y^2 + XY^3 + W^2X^3Y^2,$$

que a su vez tiene como curvas permitidas las rectas

$$X = Y = Z = 0, W = Y = Z = 0.$$

Si explotamos ahora la segunda recta en la dirección $(0 : 0 : 1 : 0)$, obtenemos de nuevo F , por lo que podemos entrar en un proceso infinito sin mejorar la singularidad de ninguna manera.

Obviamente esto hace necesario un criterio algo más selectivo a la hora de escoger el centro de explosión. Esta línea no parece haber sido estudiada (cuando menos, publicada) hasta el momento y creemos que puede dar lugar a resultados interesantes. Al fin y al cabo, son muchos los especialistas que comparten la idea de que la resolución de singularidades “no puede ser tan complicada”. Es simplemente que nos cuesta un enorme trabajo comprender su simplicidad, que es tanto como decir su belleza.

III. Reducción de singularidades en superficies de Puiseux

El objetivo de este capítulo es estudiar un tipo muy específico de variedades: superficies algebroides definidas por series de Puiseux. Como indicamos en la introducción, sólo las series de Puiseux cuasi-ordinarias han sido objeto de un estudio profundo ([13], [9]). El caso general adolece de un tratamiento (incluso superficial) en la bibliografía, probablemente por la ausencia de un teorema de caracterización de polinomios cuyas raíces son series de Puiseux *à la* Jung–Abhyankar.

Nuestro objetivo, sin embargo, no es dar una tal caracterización, sino estudiar las singularidades de este tipo de superficies. Para ello daremos los siguientes pasos:

- (A) En primer lugar trataremos de, en la línea de los trabajos en series cuasi-ordinarias, definir un conjunto finito de datos que nos ofrezcan información relevante acerca de la serie.
- (B) Con posterioridad estudiaremos las posibilidades que hay para el cono tangente de estas superficies y la existencia de curvas permitidas en ellas, datos fundamentales a la hora de reducir las singularidades.
- (C–D) Las dos próximas secciones están dedicadas a estudiar los efectos de las transformaciones cuadráticas y monoidales sobre las superficies de Puiseux; particularmente aquéllas que son irreducibles. En concreto,

el problema que nos interesa fundamentalmente es cómo resolver la superficie manteniendo el carácter de estar definida por series de Puiseux. Veremos que siguiendo el proceso determinado en el capítulo anterior esto no es sencillo, de forma que introduciremos ciertas variantes.

- (E) Para finalizar, agruparemos resultados y salvaremos los tecnicismos relacionados con la reducibilidad para dar un proceso de resolución de singularidades de superficies definidas por series de Puiseux.

III.A. Series de Puiseux. Exponentes distinguidos.

Consideremos como hasta ahora \mathbf{C} (o un cuerpo cualquiera siempre que sea algebraicamente cerrado y de característica nula) y sean X e Y variables formalmente independientes sobre \mathbf{C} y $m \in \mathbf{N}$ un natural fijado en lo que sigue. Consideraremos los siguientes cuerpos:

$$K = \mathbf{C}((X, Y)) \subset L = \mathbf{C}((X^{1/m}, Y^{1/m})).$$

Esta extensión de cuerpos es trivialmente normal y finita, y tiene como grupo de Galois a $G \simeq C_m \times C_m$. Notaremos los automorfismos de G por

$$\begin{aligned} (a, b) : L &\longrightarrow L \\ X^{1/m} &\longmapsto \delta^a X^{1/m} \\ Y^{1/m} &\longmapsto \delta^b Y^{1/m} \end{aligned}$$

o bien por $\sigma_{a,b}$, donde δ (fijado en lo sucesivo) es un generador de $\mathcal{R}(m)$, el conjunto de raíces m -ésimas de la unidad.

Sea entonces $\zeta \in R = \mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$, de la forma

$$\zeta = \sum_{(i,j) \in \Delta \subset \mathbf{N}^2} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m},$$

con $c_{ij} \in \mathbf{C}$. El conjunto Δ se denominará la nube de puntos asociada a (o simplemente de) ζ . Por abuso de lenguaje denominaremos a los pares $(i, j) \in \Delta$ los exponentes de ζ , cuando en realidad éstos son los pares $(i/m, j/m)$.

Obviamente, si retiramos de ζ todos aquéllos monomios con ambos exponentes enteros (esto es, los determinados por $\Delta \cap (\mathbf{Z}m)^2$), la extensión permanece invariante por lo que supondremos desde un principio y durante toda esta sección que no tenemos este tipo de exponentes en ζ .

Consideremos entonces \prec un orden total en \mathbf{N}^2 (por ejemplo, el tradicional grlex) y tomemos la matriz

$$M_0 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

cuyo máximo común divisor de los menores de orden 2 es, obviamente, m^2 .

Sea (i_1, j_1) el mínimo de Δ para \prec y sea la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} m & 0 & i_1 \\ 0 & m & j_1 \end{pmatrix},$$

cuyo máximo común divisor de los menores de orden 2, pongamos d_1 , ha de ser estrictamente menor que m^2 , dado que, bien i_1 , bien j_1 , no son múltiplos de m . Definimos entonces Δ'_1 como el conjunto de pares $(i, j) \in \Delta$ tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & i \\ 0 & m & j_1 & j \end{pmatrix},$$

sigue siendo d_1 . Tomamos entonces $\Delta_1 = \Delta \setminus \Delta'_1$ y repetimos el proceso con M_1 y Δ_1 .

Como en cada paso tenemos asegurada la caída del máximo común divisor de los menores de orden 2, sólo puede haber una cantidad finita de dichos pasos, de manera que el proceso termina, habiendo hallado un conjunto de pares

$$\{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\},$$

verificando las siguientes propiedades:

- (a) $(i_k, j_k) \in \Delta$ para $k = 1, \dots, t$.
- (b) $(i_1, j_1) \prec \dots \prec (i_t, j_t)$.

Observación.— Notemos que este proceso, de estar en el caso cuasi-ordinario y de ser \prec graduado, nos da los llamados pares distinguidos (en la notación de Lipman) o característicos (en la de Herrera) de ζ . En concreto, queremos seguir buscando analogías entre estos pares y los que surgen de manera natural en el caso cuasi-ordinario. Para ello, lo siguiente es probar que todo par $(i, j) \in \Delta$ es combinación lineal con coeficientes enteros de los exponentes que hemos hallado.

Lema.— Sean $\sigma \in G$ y $\eta \in L$. Si $\sigma(\eta) = \eta$ entonces, para todo $(i, j) \in \Delta$ es

$$\sigma \left(X^{i/m} Y^{j/m} \right) = X^{i/m} Y^{j/m}.$$

Demostración.— Obvia, dado que σ no puede cambiar los exponentes de un monomio. *Q.E.D.*

Observación.— Sea el conjunto de monomios

$$S = \left\{ X^{i_1/m} Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_s/m} Y^{j_s/m} \right\},$$

y sea $D = \text{m.c.d.}(m, j_1, \dots, j_s)$.

Entonces se tiene la siguiente igualdad de extensiones

$$K(S) \left(X^{1/m} \right) = K \left(X^{1/m}, Y^{D/m} \right).$$

Además el orden del grupo de Galois de la extensión

$$K(S) \subset K(S) \left(X^{1/m} \right)$$

es un divisor de m .

La primera afirmación es sencilla: desde luego todos los monomios de S están en la extensión de la derecha, y usando la identidad de Bezout es inmediato poner $Y^{D/m}$ en función de los monomios de S y de $X^{1/m}$.

Para probar la segunda afirmación, consideremos un polinomio que tenga a $X^{1/m}$ como raíz, por ejemplo,

$$F = Z^m - X \in K(S)[Z].$$

Si éste no es el polinomio mínimo de X sobre $K(S)$ (en cuyo caso la extensión tiene grado m y hemos acabado), eso quiere decir que podemos hallar una descomposición en factores irreducibles

$$F = \prod P_k(Z), \text{ con } P_k(Z) \in K(S)[Z],$$

donde de hecho podemos asegurar que los P_k están en $K[S][Z]$, por el Lema de Gauss.

En particular, si denotamos al término independiente de P_k por c_k^0 , tenemos que

$$\prod c_k^0 = X,$$

y, al ser $K[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$ un dominio de factorización única, los c_k^0 han de ser de la forma $X^{\alpha_k/m} \in K[S]$. Consideremos a el m.c.d. de m y los α_k . Claramente (por Bezout una vez más) $X^{a/m} \in K(S)$, de donde un polinomio que verifica $X^{1/m}$ sobre $K(S)$ es

$$G = Z^a - X^{a/m}.$$

De serlo, tenemos que el grado de la extensión es a , que divide a m . Si no lo fuera, podemos repetir el proceso y encontrar un monomio $X^{b/m} \in K(S)$ con $b < a$, pero esto no puede ocurrir indefinidamente, y en todos los casos el grado de la extensión dividirá a m .

Supongamos ahora que tenemos la siguiente situación: sean los conjuntos de monomios

$$S_1 = \{X^{i_1/m}Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_s/m}Y^{j_s/m}\}, \quad S_2 = S_1 \cup \{X^{i_0/m}Y^{j_0/m}\},$$

tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_s \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

(pongamos d) coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_s & i_0 \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s & j_0 \end{pmatrix}.$$

Lema.— En las condiciones anteriores $K(S_1) = K(S_2)$.

Demostración.— Claramente $K(S_1) \subset K(S_2)$, por lo que basta demostrar que, si denotamos

$$G = \text{Gal}(L/K) \simeq (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m)^2, \quad G_1 = \text{Gal}(L/K(S_1))$$

entonces G_1 es precisamente el grupo de Galois de L sobre $K(S_2)$.

Para ello definimos el conjunto

$$H_1 = \left\{ (i, j) \in (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m)^2 \mid X^{i/m} Y^{j/m} \in K(S_1) \right\}.$$

Esto es, H_1 representa, salvo múltiplos de m , los monomios que quedan fijos por todos los automorfismos de G_1 . Escribiendo estos automorfismos en la forma (a, b) obtenemos que $(i, j) \in H_1$ si y sólo si

$$ia + jb = 0 \pmod{m}, \quad \forall (a, b) \in G_1.$$

En particular se tiene que

$$H_1 = \langle (i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s) \rangle,$$

tomando clases modulo m .

El conjunto H_1 es claramente un subgrupo de G (identificado de forma no canónica con $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m)^2$). Pero tiene una interpretación algo más sofisticada. De hecho

$$H_1 \simeq \text{Hom}(G/G_1, \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m),$$

identificando

$$(i, j) \longleftrightarrow f_{ij} : \begin{array}{ll} G/G_1 & \longrightarrow \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m \\ (x, y) + G_1 & \longmapsto ix + jy \end{array}$$

Como $G \simeq (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m)^2$ es evidente que G/G_1 se puede escribir como producto de grupos cíclicos, $G/G_1 = C_{a_1} \oplus \dots \oplus C_{a_r}$, con $a_i \mid m$ para todo i .

Ahora bien, con esta escritura tenemos que

$$\text{Hom}(G/G_1, \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}(C_{a_i}, \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m) \simeq \bigoplus_{i=1}^r C_{a_i},$$

ya que, como $a_i|m$ tenemos una inmersión natural (no canónica) $C_{a_i} \hookrightarrow \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m$. En esta situación cada homomorfismo desde C_{a_i} queda unívocamente determinado por la imagen del generador, que puede ser cualquier elemento de la copia de C_{a_i} inmersa en $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m$.

Se tiene entonces

$$H \simeq \text{Hom}(G/G_1, \mathbf{Z}/\mathbf{Z}m) \simeq G/G_1,$$

de donde el número de elementos de H_1 es el orden de G/G_1 , que es precisamente $[K(S_1) : K]$. Por simetría entonces ha de tenerse que el orden de G_1 es el de G/H_1 .

Ahora bien, es sabido ([5], ch. VII) que, si tenemos un subgrupo $H \subset G \simeq (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m)^2$, el orden de G/H es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ 0 & m & \beta_1 & \dots & \beta_r \end{pmatrix},$$

para cualquier conjunto $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ de generadores de H . En particular, en nuestro caso quiere decir que el orden de G_1 es d . Pero si tomamos como conjunto de partida S_2 , realizando el mismo razonamiento llegaremos a que su grupo de Galois tiene también orden d , por lo que se tiene el resultado. *Q.E.D.*

Corolario.— $[K(S_1) : K] = m^2/d$.

Corolario.— Un cuerpo K' verificando $K \subset K' \subset L$ está generado sobre K por una serie de Puiseux si y sólo si está generada por un conjunto finito de monomios (esto es, si y sólo si es una extensión de Kummer de K).

De este último lema obtenemos más propiedades de los exponentes que nos da el algoritmo, pongamos $\{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\}$, a partir de una serie ζ , a saber:

$$(c) \quad K(\zeta) = K(X^{i_1/m}Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_t/m}Y^{j_t/m}).$$

(d) Para todo elemento $(i, j) \in \Delta$, se tiene una expresión

$$(i, j) = \alpha_1(i_1, j_1) + \dots + \alpha_t(i_t, j_t), \text{ mod } (\mathbf{Z}m)^2$$

con los $\alpha_k \in \mathbf{Z}$.

Para ver (c), notemos que la inclusión inversa es el primer lema y la directa es ahora obvia, toda vez que los monomios que no hacen decrecer el máximo común divisor de los menores de la matriz no aportan nada a la extensión.

A la hora de probar (d), notemos que sólo hay que demostrar lo siguiente: un monomio $X^{i/m}Y^{j/m}$ está en una extensión generada por monomios $K[X^{a_1/m}Y^{b_1/m}, \dots, X^{a_t/m}Y^{b_t/m}]$ si y sólo si tenemos una expresión con coeficientes enteros

$$(i, j) = \beta_1(a_1, b_1) + \dots + \beta_t(a_t, b_t) \text{ mod } (\mathbf{Z}m)^2.$$

Desde luego la condición es suficiente. Pero además es necesaria, sin más que recordar que con ciertos productos de los monomios podemos formar una base de la extensión como K -espacio vectorial. Nótese, de igual modo, que decir que un conjunto de exponentes de $\Delta(\zeta)$ verifica esta propiedad equivale a decir que sus monomios generan la extensión $K(\zeta)$.

Estas son las propiedades más sobresalientes que verifican los exponentes que hemos hallado, y son análogas a las mostrados por los pares distinguidos en el caso cuasi-ordinario, con la salvedad de que en esa situación se puede sustituir el orden total \prec por el orden parcial natural en \mathbf{Z}^2 de manera consistente. Pero observemos dos grados de libertad que tenemos en la elección de estos monomios:

- (i) El orden que hemos tomado sólo tiene que ser total y graduado (en realidad lo de graduado es para que generalice el caso cuasi-ordinario).
- (ii) Si ampliamos el conjunto de exponentes, seguiremos teniendo todas las propiedades intactas.

Definición.— Dada una serie de Puiseux $\zeta = \sum c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m}$, diremos que el conjunto $E = \{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\} \subset \Delta$ forman un *conjunto de exponentes privilegiados* si verifican

$$K(\zeta) = K(X^{i_1/m} Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_t/m} Y^{j_t/m}).$$

Observación.— Con anterioridad hemos dado un procedimiento constructivo para hallar un posible E , demostrando además que siempre existe. Notemos que algunos monomios de la forma inicial de ζ pueden no aparecer entre los exponentes privilegiados. De hecho, esto puede suceder de manera inevitable; si tenemos por ejemplo

$$\zeta = X^{1/3} Y^{2/3} + X^{2/3} Y^{1/3},$$

sea cual sea la elección de \prec que tomemos, uno de los monomios será el escogido por el algoritmo, y el otro no.

III.B. Cono tangente y curvas permitidas de una superficie de Puiseux.

A partir de ahora nos centraremos en un tipo muy concreto de superficies algebroides sumergidas: aquéllas que se pueden definir a partir de polinomios mínimos de series de Puiseux y productos de éstos.

Definición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide sumergida. Entonces \mathcal{S} se dirá una superficie de Puiseux cuando exista una ecuación de \mathcal{S} cuyas raíces sean series de Puiseux.

Si \mathcal{S} es de Puiseux y F es una ecuación de \mathcal{S} que es el polinomio mínimo de una serie de Puiseux ζ diremos, por abuso de lenguaje, que \mathcal{S} está determinada por ζ .

Se trata, en esta sección, de estudiar cómo puede ser el cono tangente y cuáles pueden ser las curvas permitidas en una superficie de Puiseux.

El cono tangente de un superficie de Puiseux.

En lo referente al cono tangente podemos comenzar por suponer, sin pérdida de generalidad, que la superficie es irreducible. En efecto, si no es así, y F es un ecuación cuyas raíces son series de Puiseux, conocer el cono tangente de \mathcal{S} equivale a conocer la forma inicial de F , que es el producto de las formas iniciales de sus factores irreducibles.

Observación.— Sea pues \mathcal{S} una superficie de Puiseux determinada por ζ . Un conjunto de exponentes distinguidos y el orden de ζ caracterizan la multiplicidad de la superficie. Esto es claro, ya que una ecuación de la superficie viene dada por

$$F(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - \zeta_i),$$

donde $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_n$ son los posibles conjugados de ζ , esto es $n = m^2/d$. Entonces tenemos dos posibilidades:

- (I) La serie ζ tiene orden $\lambda < 1$ (clásicamente denominado “caso no transversal”). Entonces el orden de F es

$$\nu(F) = \lambda n = \lambda \frac{m^2}{d},$$

fácilmente calculable a partir de los exponentes distinguidos, con sólo tomar un orden graduado.

- (II) La serie ζ tiene orden $\lambda \geq 1$ (“caso transversal”). En este caso el orden de F es precisamente $n = m^2/d$. Obsérvese que, en este caso, F es una ecuación de Weierstrass, y WT si además imponemos que $\Delta(\zeta) \cap (\mathbf{Z}m)^2 = \emptyset$. En efecto, en este último caso, el orden del polinomio es su grado en la variable Z y no puede haber término con Z^{n-1} ya que de haberlo, tendría por coeficiente $\sum \zeta_i$ que, al no ser 0, sería una serie con exponentes racionales, lo cual es imposible. Recordemos que, por hipótesis, suponemos de partida que ζ (y, por tanto, ζ_2, \dots, ζ_n) no tienen monomios con ambos exponentes enteros.

Observación.— La forma inicial de ζ determina el cono tangente de la superficie. Para verlo, sea de nuevo λ el orden usual de ζ en $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$,

sea la forma inicial de ζ respecto de este orden dada por

$$\bar{\zeta} = \sum_{i/m+j/m=\lambda} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m},$$

y sean $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ los conjugados distintos de ζ (todos ellos con orden λ , por supuesto), donde recordemos $n = m^2/d$.

Recordemos que el cono tangente viene dado por la forma inicial de una ecuación que defina la superficie. En particular, por el polinomio mínimo de ζ ,

$$F(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - \zeta_i)$$

Si tenemos $\lambda > 1$, entonces tenemos un polinomio de Weierstrass donde claramente la forma inicial viene dada por Z^n , esto es, el caso del cono tangente plano.

Si tenemos $\lambda = 1$, entonces la forma inicial viene dada por

$$\bar{F} = \prod_{i=1}^n (Z - \bar{\zeta}_i),$$

que es el caso del cono tangente no plano, salvo que la forma inicial de ζ esté en $\mathbf{C}[[X, Y]]$.

Si tenemos $\lambda = \mu/m < 1$, esto es, el caso no transversal, la situación es bastante menos clara. La forma inicial de F es

$$\bar{F} = \prod_{i=1}^n \bar{\zeta}_i,$$

que es una forma de orden $\lambda m^2/d = \mu m/d$. Al ser un polinomio homogéneo en dos variables con coeficientes en \mathbf{C} , es producto de formas lineales,

$$\bar{F} = G_1^{a_1} \dots G_r^{a_r}, \text{ con } G_i \neq G_j,$$

esto es, el cono tangente es intersección de planos. Puede suceder de hecho, que sea un único plano, como ocurre en el caso

$$\zeta = X^{2/3} + Y^{5/3},$$

cuyo polinomio mínimo es

$$Z^9 - (3Y^5 + 3X^2)Z^6 + (3X^4 + 3Y^{10} - 21X^2Y^5)Z^3 - X^6 - 3X^4Y^5 - 3X^2Y^{10} - Y^{15}.$$

Y puede suceder que sea un producto de planos, como por ejemplo en la situación

$$\zeta = X^{3/8}Y^{1/8} + X^{1/8}Y^{3/8},$$

que da como polinomio mínimo

$$Z^8 - 12XYZ^4 - (8X^2Y + 8Y^2X)Z^2 - X^3Y + 2X^2Y^2 - Y^3X$$

y tiene como cono tangente a $C(S) = XY(X - Y)^2$.

En el caso cuasi-ordinario, un permutación entre las variables nos podía evitar el caso del plano único (distinto de $Z^n = 0$). En nuestro caso, sin embargo, esto no es posible y el ejemplo anterior es adecuado para comprobarlo. Otra propiedad de las series cuasi-ordinarias no generalizable es el hecho de que, en el caso no transversal, podemos asegurar que el número de planos que se cortan para formar el cono tangente es, a lo más de dos.

Observación.— No es posible dar una cota universal para la cantidad de planos que pueden intervenir en el cono tangente. Veámoslo con un ejemplo: supongamos que tenemos la siguiente descomposición

$$\bar{\zeta} = \sum_{i+j=\mu} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m} = L_1 \dots L_\mu,$$

donde cada L_k es de la forma

$$L_k = X^{1/m} + m^k Y^{1/m}.$$

Las formas iniciales de los distintos conjugados de ζ son productos de conjugados de los L_k ,

$$\overline{\sigma(\zeta)} = \sigma(L_1) \dots \sigma(L_\mu), \quad \forall \sigma \in G.$$

Ahora bien, supongamos que tenemos r conjugados $\sigma(L_k)$ que, al multiplicarlos, nos dan una forma lineal de $\mathbf{C}[[X, Y]]$:

$$\sigma_{(a_1, b_1)}(L_{i_1}) \dots \sigma_{(a_r, b_r)}(L_{i_r}) = C(X, Y),$$

donde

$$\sigma_{(a_k, b_k)}(L_{i_k}) = (\delta^{a_k} X^{1/m} + m^{i_k} \delta^{b_k} Y^{1/m}).$$

Sea $M = \max\{i_1, \dots, i_r\}$. Para que no haya término en $Y^{1/m}$ es imprescindible que

$$\delta^{b_1} m^{i_1} + \dots + \delta^{b_r} m^{i_r} = 0,$$

y, como los δ^{b_k} son unimodulares, es necesario que M se alcance al menos en dos i_k , puesto que de otro modo el término con m^M mayor a la suma de todos los demás (recordemos que $r < m$). Procediendo de igual forma, si M sólo se alcanza en dos i_k , el producto de los coeficientes de $Y^{1/m}$ inducidos por éstos dominaría a todos los demás dobles productos y el coeficiente de $Y^{2/m}$ sería no nulo. Por tanto M debe alcanzarse al menos en tres i_k , y así sucesivamente.

Así podemos deducir que, para el producto de conjugados dé una forma lineal de $\mathbf{C}[[X, Y]]$ todos los L_{i_k} han de ser el mismo. Por tanto, en la descomposición de \bar{F} aparece al menos un plano por cada L_k (obviamente todos han de ser distintos por elección), de donde el cono tangente de la superficie definida por ζ es producto de, al menos, μ planos distintos.

Observación.— Vamos a estudiar con un poco más de profundidad cómo los exponentes distinguidos contienen información acerca del cono tangente: en concreto veremos qué podemos conocer de la descomposición de éste a partir de los monomios que nos dan los exponentes de grado minimal.

Los casos interesantes son, por supuesto, aquéllos en los que el cono no es plano. Si pensamos en el caso transversal, recordemos que la forma inicial de F venía dada por

$$\bar{F} = \prod_{i=1}^n (Z - \bar{\zeta}_i)$$

Supongamos que los exponentes de la forma inicial son $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ y sea D el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_k \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$$

El número m^2/D es la cantidad de conjugados distintos de la forma inicial de ζ . Como hay $n = m^2/d$ conjugados distintos de ζ , se tiene que la forma

inicial es una potencia D/d -ésima de una forma de grado m^2/D . Esto es todo lo que podemos decir en este caso, ya que la forma de grado m^2/D ha de ser irreducible (ya que es el polinomio mínimo de $\bar{\zeta}$). Por ejemplo, si escogemos

$$\zeta = X^{1/3}Y^{2/3} + X^{2/3}Y^{1/3} + X^{4/3},$$

obtendremos $m = 3$, $d = 1$, $D = 3$ y, como cono tangente,

$$C(\mathcal{S}) = (Z^3 - 3XYZ - X^2Y - XY^2)^3,$$

que es irreducible por el criterio de Eisenstein (por ejemplo).

El caso no transversal, cuando $\lambda = \mu/m < 1$, se presenta, como era de esperar, más confuso. Comenzaremos por un ejemplo muy particular y concreto.

Lema.— Sea $\zeta = X^{1/m} + \alpha Y^{1/m}$, $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$. Entonces la forma inicial del polinomio mínimo de ζ (que es, obviamente, su término independiente) es

$$\bar{F} = \pm (X - \alpha^m Y)^m.$$

Demostración.— Sabemos que ζ tiene m^2 conjugados distintos, concretamente

$$\zeta_{a,b} = \delta^a X^{1/m} + \alpha \delta^b Y^{1/m},$$

por lo que el término independiente es

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \prod_{(a,b) \in \{0, \dots, m-1\}} (\delta^a X^{1/m} + \alpha \delta^b Y^{1/m}) \\ &= \prod_{(a,b) \in \{0, \dots, m-1\}} \delta^a (X^{1/m} + \alpha \delta^{b-a} Y^{1/m}) \\ &= \pm \prod_{0 \leq c \leq m-1} (X^{1/m} + \alpha \delta^c Y^{1/m})^m \\ &= \pm (X - \alpha^m Y)^m, \end{aligned}$$

sin más que usar las fórmulas de Cardano para el caso ciclotómico. *Q.E.D.*

Observación.— De lo anterior podemos deducir que el número mínimo de conjugados de $X^{1/m} + \alpha Y^{1/m}$ que necesitamos multiplicar para obtener una serie en $\mathbf{C}[[X, Y]]$ es, obviamente, m . De hecho,

$$\prod_{\delta \in \mathcal{R}(m)} (X^{1/m} + \delta \alpha Y^{1/m}) = X - \alpha^m Y.$$

A estas m series las llamaremos conjugadas mónicas de ζ .

Volviendo al caso general no transversal, supongamos que los exponentes de la forma inicial son $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ y sea D el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_k \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$$

Como en el caso transversal, sabemos que hay m^2/D conjugados distintos para $\bar{\zeta}$ y m^2/d para ζ , por lo que con total seguridad la forma inicial de F será una potencia D/d -ésima. Pero podemos afinar un poco más en su descomposición.

Supongamos que la forma inicial de ζ tiene una descomposición

$$\bar{\zeta} = L_1^{(1)} \dots L_{r_1}^{(1)} L_1^{(2)} \dots L_{r_2}^{(2)} \dots L_1^{(k)} \dots L_{r_k}^{(k)},$$

en formas lineales

$$L_b^{(a)} = X^{1/m} - \alpha_b^a Y^{1/m},$$

agrupadas de tal manera que dos formas comparten el superíndice si y sólo existe una raíz m -ésima de la unidad que multiplicada por el coeficiente de $Y^{1/m}$ en una de ella nos da el de la otra. De manera obvia, $r_1 + \dots + r_k = \mu$.

Claramente al calcular un conjugado de ζ , por un elemento $\sigma_{(a,b)} \in G$, tenemos que $L_1^{(1)}$ debe ir (salvo producto por una constante) en una conjugada mónica suya, así como todos los $L_j^{(1)}$, para $j = 2, \dots, r_1$. De hecho, cuando hayamos calculado los m^2/d conjugados de ζ necesarios para hallar F , entre los transformados de los $L_j^{(1)}$ deben aparecer las m conjugadas mónicas de $L_1^{(1)}$ y todos ellos la misma cantidad de veces.

En efecto, de no ser así, tendríamos con las formas sobrantes, tras agrupar conjuntos completos de conjugadas mónicas, un producto

$$\prod_{i=1}^q (X^{1/m} - \alpha_i Y^{1/m}) = s(X, Y) \in \mathbf{C}[[X, Y]].$$

Este producto debe quedar invariante por cada elemento $\sigma \in G$. Sacando las constantes para dejar las formas mónicas en $X^{1/m}$, la factorización única

de $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$ nos asegura que todas las conjugadas mónicas de cada forma deben estar en el producto.

Entonces, el número total de conjugadas mónicas de las formas $L^{(j)}$ que tenemos es $m^2 r_j / d$ y aparecen las m el mismo número de veces. Junto con el lema anterior, hemos probado que la descomposición del cono tangente es precisamente

$$C(\mathcal{S}) = (X - \alpha_1^m Y)^{mr_1/d} \dots (X - \alpha_k^m Y)^{mr_k/d},$$

con las precisiones obvias cuando uno de los factores de la forma inicial sea $X^{1/m}$ o $Y^{1/m}$.

Por ejemplo, consideremos la serie

$$\zeta = X^{3/4} + 2X^{2/4}Y^{1/4} - X^{1/4}Y^{2/4} - 2Y^{3/4} + X^{6/4},$$

que tiene por polinomio mínimo una serie de orden $\lambda m^2 / d = 12$, de la forma

$$\begin{aligned} F = & Z^{16} + (\text{términos de grado } > 12) \\ & + X^{12} - 72X^{11}Y + 2076Y^2X^{10} - 30520X^9Y^3 + 243270X^8Y^4 \\ & - 1073592X^7Y^5 + 2863644X^6Y^6 - 4904712X^5Y^7 + 5548545X^4Y^8 \\ & - 4141120X^3Y^9 + 1967616X^2Y^{10} - 540672XY^{11} + 65536Y^{12}, \end{aligned}$$

cuya forma inicial factoriza en

$$(X - Y)^8 (X - 16Y)^4.$$

En efecto, en este caso la descomposición de la forma inicial de ζ en $\mathbf{C}((X^{1/m}, Y^{1/m}))$ es

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= X^{3/4} + 2X^{2/4}Y^{1/4} - X^{1/4}Y^{2/4} - 2Y^{3/4} \\ &= (X^{1/4} - Y^{1/4})(X^{1/4} + Y^{1/4})(X^{1/4} + 2Y^{1/4}), \end{aligned}$$

por lo que, en la notación anterior, tendríamos

$$L_1^{(1)} = X^{1/4} - Y^{1/4}, \quad L_2^{(1)} = X^{1/4} + Y^{1/4}, \quad r_1 = 2$$

$$L_1^{(2)} = X^{1/4} + 2Y^{1/4}, \quad r_2 = 1$$

Y la descomposición esperada sería

$$[(X - Y)^4]^2 [(X - 2^4 Y^4)]^1.$$

Observemos que el razonamiento anterior se puede aplicar a conocer la descomposición de la forma inicial del término independiente de F , incluso en el caso transversal.

Obviamente no podemos conocer los planos que intervienen en el cono tangente a partir de los exponentes distinguidos ni el número de planos distintos que aparecen. En efecto, por poner un ejemplo sencillo, las series

$$\zeta_1 = X^{2/4} + (1 + i)X^{1/4}Y^{1/4} + iY^{2/4}, \quad \zeta_2 = X^{2/4} + 2X^{1/4}Y^{1/4} + 2Y^{2/4}$$

tienen los mismos exponentes distinguidos (los mismos exponentes, de hecho), pero la primera tiene como cono tangente un plano múltiple (concretamente $(X - Y)^4$) y la segunda un producto de planos (de hecho $(X - Y)^2(X - 4Y)^2$). Esto en particular muestra que la composición del cono tangente (y, por tanto, el graduado de R) es opaca a cualquier tipo de caracterización mediante exponentes.

Todas las observaciones anteriores demuestran el siguiente resultado.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie de Puiseux definida por ζ , y sean d y D los números enteros definidos anteriormente. Entonces:

- (a) En el caso transversal el cono tangente de \mathcal{S} es una potencia D/d -ésima de una forma irreducible de grado D/d . Este forma es el polinomio mínimo de $\bar{\zeta}$.
- (b) En el caso no transversal el cono tangente de \mathcal{S} es un producto de planos, caracterizados a partir de la descomposición en factores irreducibles de $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$ de la forma inicial de ζ . Puede haber hasta $m - 1$ planos.

Curvas permitidas sobre una superficie de Puiseux.

Vamos a ocuparnos ahora de un problema diferente: cuándo aparecen curvas permitidas en una superficie de Puiseux. En el caso cuasi-ordinario es bien conocido que existen pocas posibilidades: un máximo de dos curvas pueden aparecer, y han de cortarse transversalmente. En la situación que nos ocupa las posibilidades son, de nuevo, muchas más.

Observación.— De nuevo podemos suponer para empezar que nuestra superficie está determinada por una serie ζ (i.e.: que es irreducible). En efecto, es sencillo ver que \mathcal{C} es curva permitida en una superficie $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_r$ si y sólo si lo es en cada \mathcal{S}_i (no es necesario que $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r$ sean de Puiseux).

Para demostrarlo supongamos F es una ecuación de Weierstrass (no WT) de \mathcal{S} , que su descomposición en factores irreducibles es $F = F_1 \dots F_r$ y que la curva en cuestión es (Z, X) . Todo esto se puede suponer sin pérdida de generalidad. Así mismo, si \mathcal{S}_k no tiene a (Z, X) como curva permitida, podemos también suponer que hay un monomio $X^{a_k} Y^{b_k}$ en el término independiente de F_k que verifica $a_k < \nu(F_k)$. De la misma forma, con cambios de variables adecuados, podemos lograr que, si (X, Z) es permitida en \mathcal{S}_k , el monomio $X^{\nu(F_k)}$ aparezca en el término independiente de F_k .

Así las cosas es ya obvio que, si (X, Z) no es permitida en alguna de las superficies de la descomposición, el orden en X del término independiente de F es menor que $\nu(F) = \sum \nu(F_k)$, por lo que (X, Z) no puede ser permitida en \mathcal{S} .

Por tanto, partamos directamente de una superficie de Puiseux \mathcal{S} y pongámonos en el caso transversal, con $\zeta = \sum c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m}$, y veamos cuándo es (X, Z) curva permitida. El polinomio mínimo de ζ es de la forma

$$F(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - \zeta_i) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(X, Y) Z^k,$$

y es un polinomio WT, por lo que (X, Z) será curva permitida si y sólo si $X^k | a_{n-k}(X, Y)$ para $k = 2, \dots, n$. Pero los monomios de cada a_{n-k} son de la forma

$$\alpha X^{(i_1 + \dots + i_k)/m} Y^{(j_1 + \dots + j_k)/m} Z^{n-k},$$

para todas las elecciones posibles de $\{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)\} \subset \Delta$. En particular, si fijamos un exponente $(i, j) \in \Delta$ cualquiera y tomamos $i_1 = \dots = i_k =$

$i; j_1 = \dots = j_k = j$, tendremos el monomio

$$\alpha X^{ik/m} Y^{jk/m} Z^{n-k},$$

por lo que ha de ser $ik/m > k$, esto es, $i > m$; y esto para todo $(i, j) \in \Delta$. Claramente la condición es suficiente, y también es necesaria. En efecto, si tuviésemos un monomio dado por $(i, j) \in \Delta$, con $i < m$, la m -ésima potencia de ese monomio estaría en el término independiente de F , ya que no puede cancelar con otro monomio de ζ , y su exponente en X sería menor que m . Por supuesto, otro tanto se puede decir para caracterizar el hecho de que (Y, Z) es curva permitida.

Observación.— Para saber si (X, Z) es o no curva permitida puede que los exponentes distinguidos no nos sirvan. Por ejemplo, si $\zeta = X^{6/4}Y^{6/4} + X^{7/4}Y^{6/4} + Y^{18/4}$ los exponentes distinguidos (para grlex, por ejemplo) serían $\{(6, 6), (7, 6)\}$, ambos con la primera coordenada mayor que 4, pero (X, Z) no es curva permitida. Sin embargo, si se escoge el orden (por supuesto no graduado) de manera que haga menor el monomio con menos exponente en X , sí que podremos conocer si (X, Z) es o no curva permitida, sólo mirando el primer exponente distinguido.

En el caso no trasversal, supongamos que tenemos $\lambda = \nu(\zeta) < 1$, por lo que el orden de F es $\lambda m^2/d$ y (X, Z) es permitida si, en cada monomio de F , pongamos $\alpha X^i Y^j Z^k$, se tiene $i + k > \lambda m^2/d$.

Obviamente es necesario que la forma inicial de ζ sólo dependa de $X^{1/m}$, por un razonamiento análogo al anterior. Sin embargo esto no es suficiente, como se puede comprobar para $\zeta = X^{2/3} + Y^{5/3}$. En este caso la condición necesaria y suficiente es que ζ sea de la forma

$$\zeta = X^{\lambda u} (X^{1/m}, Y^{1/m}).$$

Desde luego esto es suficiente, simplemente mirando los exponentes de los monomios de F , y es necesario de nuevo porque un monomio $\alpha X^{i/m} Y^{j/m}$ en ζ , con $i < \lambda$ nos da un término $\beta X^{m^2 i/d} Y^{m^2 j/d}$ incancelable en el término independiente de F , que impide que (X, Z) sea curva permitida.

Lema.— En el caso no transversal, si (X, Z) es curva permitida, podemos hallar un polinomio \widehat{F} , asociado a F , tal que sus raíces son series de Puiseux transversales.

Demostración.— Pongamos $\lambda = \mu/m < 1$. Tenemos por lo anterior que ζ es de la forma

$$\zeta = X^{\mu/m} u(X^{1/m}, Y^{1/m}),$$

por lo que F será, además de regular en Z , regular en X de orden $\lambda m^2/d$. Llamemos \widehat{F} al polinomio de Weierstrass asociado a F respecto de X .

Sea ahora T una nueva indeterminada. Como las unidades en el anillo $\mathbf{C}[[X, Y]]$ tienen todas raíces μ -ésimas dentro del propio anillo, la serie

$$X^\mu u(X, Y) - T^\mu \in \mathbf{C}[[X, Y, T]]$$

tiene un factor $Xu'(X, Y) - T$, donde u' es la raíz μ -ésima de u . Existe pues (por el Teorema Preparatorio de Weierstrass) una unidad $u''(X, Y, T)$ tal que

$$u''(X, Y, T)(Xu'(X, Y) - T) = X - R(Y, T).$$

Haciendo $X = 0$ podemos hallar fácilmente $R(Y, T) = Tu''(0, Y, T)$. Definimos entonces $G(Y, T) = u''(0, Y, T)$, que es una unidad en $\mathbf{C}[[Y, T]]$. Si en la fórmula resultante del Teorema Preparatorio hacemos $X = R(Y, T)$, obtenemos

$$0 = u''(R(Y, T), Y, T) [R(Y, T)u'(R(Y, T), Y) - T],$$

de donde, recordando que $R(Y, T) = TG(Y, T)$, obtenemos

$$TG(Y, T)u'(TG(Y, T), Y) - T = 0.$$

Esto quiere decir que $X = TG(Y, T)$ anula un factor de la primera ecuación, por lo que

$$(TG(Y, T))^\mu u(TG(Y, T), Y) - T^\mu = 0.$$

Si cambiamos ahora X por $X^{1/m}$, Y por $Y^{1/m}$ y T por $Z^{1/\mu}$, resulta que hemos hallado una unidad $G(Y^{1/m}, Z^{1/\mu})$ tal que, haciendo $X^{1/m} = Z^{1/\mu}G(Y^{1/m}, Z^{1/\mu})$, obtenemos

$$\zeta \left(Z^{1/\mu}G \left(Y^{1/m}, Z^{1/\mu} \right), Y^{1/m} \right) = Z.$$

Pero, al ser

$$F \left(X, Y, \zeta \left(X^{1/m}, Y^{1/m} \right) \right) = 0,$$

si hacemos $X^{1/m} = Z^{1/\mu}G(Z^{1/\mu}, Y^{1/m})$, tendremos

$$F \left(Z^{m/\mu}G^m \left(Z^{1/\mu}, Y^{1/m} \right), Y, Z \right) = 0,$$

por lo que hemos hallado una raíz de F (como polinomio en la variable X), y por tanto una raíz de Puiseux del polinomio \hat{F} . *Q.E.D.*

Corolario.— En las condiciones del lema, la serie cuyo polinomio mínimo es \hat{F} vuelve a ser un monomio por una unidad.

Observación.— Este resultado es una generalización del proceso conocido como normalización de una serie cuasi-ordinaria. En la tesis de Lipman puede encontrarse el resultado análogo relativo a este caso, pero las restricciones sobre las series que maneja la hacen innecesariamente complicada para nuestros propósitos.

Veamos ahora si podemos tener otras curvas permitidas más generales. Supongamos pues que estamos en el caso transversal y sea $(Z, c(X, Y))$ una curva permitida (i.e.: el orden de $c(X, Y)$ es 1). Entonces se tiene que dar

$$c(X, Y)^k | a_{n-k}(X, Y), \quad k = 2, \dots, n,$$

pero los $a_{n-k}(X, Y)$ no son sino la suma de todos los posibles productos de k factores escogidos de $\{\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$

Desde luego es suficiente que $c(X, Y) | \zeta$. Obsérvese que, como $c(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ esto es equivalente a que $c(X, Y) | \zeta_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Veamos que, como era de esperar, esto también es necesario.

La otra posibilidad es que $c(X, Y)$ no divida a ningún conjugado de ζ . Para comprobar que esto no puede darse, sea

$$c(X, Y) = c_1 \left(X^{1/m}, Y^{1/m} \right) \dots c_s \left(X^{1/m}, Y^{1/m} \right)$$

la descomposición de $c(X, Y)$ en factores irreducibles en $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$. Si $c(X, Y)$ no divide a ζ existirá un c_i que no divida a ζ . Sean ζ_1, \dots, ζ_j los conjugados de ζ que no son divisibles por c_i . Entonces, al calcular el término

$$a_j(X, Y) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-j} \in \{1, \dots, n\}} \zeta_{k_1} \dots \zeta_{k_{n-j}},$$

veremos que $c_i(X, Y)$ divide a todos los términos menos a $\zeta_{j+1} \dots \zeta_n$, lo cual es imposible pues divide a a_j .

Aún podría suceder, siendo $(Z, c(X, Y))$ permitida, ningún conjugado de ζ sea divisible por c_i . Sin embargo c_i debe dividir al término independiente de F , $a_0(X, Y) = \zeta_1 \dots \zeta_n$, con lo cual hemos llegado a una contradicción. Así, ha de ser $c(X, Y) | \zeta$.

Este razonamiento, levemente modificado, nos permite también probar que no puede haber este tipo de curvas permitidas en el caso no transversal. En efecto, la única diferencia con el caso transversal es que ahora lo que tenemos que exigir es que una potencia menor de $c(X, Y)$ divida a los coeficientes de F . Pero en los razonamientos anteriores sólo hemos usado que $c(X, Y)$ dividía a los coeficientes, lo cual sigue siendo cierto. Entonces tendría que darse $c(X, Y) | \zeta$, lo cual es imposible porque el orden de ζ es menor que 1.

Por último, como no tenemos curvas permitidas de la forma $(Z, c(X, Y))$ la única posibilidad que nos resta es que la curva (X, Y) sea permitida. Pero, aunque F no sea ecuación WT, al tener el monomio Z^n , esto no es posible (ver I.D.).

Resumimos entonces todo lo anteriormente expuesto.

Proposición.— Sea S una superficie de Puiseux definida por ζ . Entonces:

- (a) En el caso transversal $(Z, c(X, Y))$ es curva permitida si y sólo si $c(X, Y) | \zeta$.
 - (b) En el caso no transversal podemos suponer que no hay curvas permitidas.
-

III.C. Explosiones (I).

Nos ocupamos en esta sección del comportamiento de las superficies de Puiseux por explosiones en un caso muy concreto: cuando la superficie viene definida por una única serie ζ , y ésta es transversal.

Transformaciones monoidales.

Supongamos que vamos a aplicar el algoritmo de reducción de singularidades que, recordemos, consistía simplemente en explotar el centro permitido de la mayor dimensión. En principio, esto implica explotar curvas permitidas si las hubiera. Entonces las propiedades demostradas en el punto anterior junto con un resultado previo referente a las transformaciones monoidales nos dan el resultado esperado.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie de Puiseux, con ecuación $F(Z)$, definida por ζ . Supongamos que \mathcal{S} tiene como cono tangente un plano múltiple y que tiene una curva permitida $(Z, c(X, Y))$. Entonces la transformada monoidal de \mathcal{S} con centro $(Z, c(X, Y))$ es una superficie de Puiseux definida por la serie $\zeta/c(X, Y)$.

Demostración.— Por diversos resultados anteriores, podemos suponer que estamos en el caso transversal (si no, no habría curvas permitidas) y que el cono tangente es $Z^n = 0$ (si no, podemos lograrlo eliminando por un cambio de variables los monomios de ζ con exponentes enteros).

En estas condiciones (TM-1) nos asegura que una ecuación basta para describir la transformada monoidal de \mathcal{S} con centro $(Z, c(X, Y))$ y es la correspondiente al punto $(1 : 0 : 0)$, que da

$$F^{(1)}(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k(X, Y)}{c(X, Y)^{n-k}} Z^k.$$

Simplemente basta poner

$$F(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - \zeta_i)$$

y recordar que cada ζ_i tiene que verificar

$$\zeta_i = c(X, Y)\zeta'_i$$

para obtener el resultado. Sólo resta verificar que $F^{(1)}$ es irreducible, pero al ser sus raíces cocientes de las de F por elementos del cuerpo de coeficientes esto es trivial. *Q.E.D.*

Podemos, a priori, tener un caso algo más complejo: cuando el cono tangente no es plano. Sin embargo esto no es posible (en el caso que nos ocupa), puesto que una superficie con cono tangente no plano y una curva permitida es unión de varias superficies (II.A.): esto es, F sería reducible lo que no es posible al ser el polinomio mínimo de ζ .

Transformaciones cuadráticas. Cono tangente plano.

Veamos ahora qué sucede en ausencia de curvas permitidas; esto es, cuando las transformaciones que tenemos que realizar son cuadráticas. Por fijar ideas, pongamos que estamos en el caso transversal, con las notaciones habituales, y supongamos que el cono tangente de \mathcal{S} es un plano único, $Z^m = 0$. Las transformaciones cuadráticas posibles son, entonces, las centradas en los puntos $(1 : a : 0)$, con $a \in \mathbf{C}$ y $(0 : 1 : 0)$.

Veamos primero el caso $(0 : 1 : 0)$. Sea $\lambda > 1$ el orden de ζ . La ecuación de la transformada de \mathcal{S} es, en este caso

$$F^{(1)} = \frac{F(XY, Y, YZ)}{Y^n},$$

o, en forma factorizada en $\mathbf{C}((X^{1/m}, Y^{1/m}))[Z]$,

$$F^{(1)} = \frac{1}{Y^n} \prod_{i=1}^n (YZ - \zeta_i(X^{1/m}Y^{1/m}, Y^{1/m})),$$

ya que sustituir X por XY es igual, formalmente, a sustituir $X^{1/m}$ por $X^{1/m}Y^{1/m}$.

Tenemos entonces

$$F^{(1)} = \frac{1}{Y^n} \prod_{i=1}^n Y \left[Z - \frac{1}{Y} \zeta_i(X^{1/m}Y^{1/m}, Y^{1/m}) \right],$$

donde $\zeta_i(X^{1/m}Y^{1/m}, Y^{1/m})/Y$ es una serie, ya que estamos en el caso transversal.

Observación.— Veamos qué podemos decir de la irreducibilidad de $F^{(1)}$. Escribamos

$$\zeta = \sum_{i,j} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m}.$$

Entonces la imagen de ζ (esto es, para ser precisos, la raíz de $F^{(1)}$ correspondiente a ζ) por la transformación cuadrática es precisamente

$$\eta = \sum_{i,j} c_{ij} X^{(i+j-m)/m} Y^{j/m}.$$

Se trata de comprobar ahora que η tiene, como poco, tantos conjugados como ζ ya que, al verificar un polinomio del grado del polinomio mínimo de ζ esto es suficiente para ver que tienen el mismo número de conjugados. Sean $(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)$ un conjunto de exponentes distinguidos de ζ . Entonces todo exponente $(i, j) \in \Delta(\zeta)$ verifica una relación

$$(i, j) = \alpha_1(i_1, j_1) + \dots + \alpha_s(i_s, j_s) \pmod{(\mathbf{Z}m)^2},$$

con $\alpha_i \in \mathbf{Z}$.

Los exponentes de η son, precisamente, los de la forma $(i + j - m, j)$ con $(i, j) \in \Delta(\zeta)$, por lo que un tal exponente verifica la relación

$$(i + j - m, j) = \alpha_1(i_1 + j_1 - m, j_1) + \dots + \alpha_s(i_s + j_s - m, j_s) \pmod{(\mathbf{Z}m)^2}.$$

En particular, esto prueba que los monomios transformados de aquéllos que nos daban los exponentes distinguidos generan la extensión de cuerpos. Ahora bien, el grado de la extensión $K \subset K(\zeta)$ era el máximo común divisor de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_s \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

Análogamente entonces el grado de $K \subset K(\eta)$ es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 - m & \dots & i_s + j_s - m \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

Pero como ambas matrices se diferencian en una transformación elemental por filas y $s-1$ transformaciones elementales por columnas, el máximo común divisor de sus menores de orden 2 coinciden. En consecuencia hemos probado que ζ y η tienen el mismo número de conjugados, por tanto las raíces de $F^{(1)}$ son, precisamente las conjugadas de η , de donde $F^{(1)}$ ha de ser irreducible y, por tanto, η define la superficie de Puiseux de ecuación $F^{(1)}$.

En el caso $(1 : a : 0)$ podemos en principio actuar de forma similar. Como ahora el cambio es

$$\begin{cases} X \mapsto X' \\ Y \mapsto X'(Y' + a) \\ Z \mapsto X'Z' \end{cases}$$

sólo hemos de considerar una raíz m -ésima de $Y + a$ (que siempre existe por ser unidad en $\mathbf{C}((X, Y))$), pongamos

$$\xi(Y)^m = Y + a,$$

y, operando como antes, tendremos que las raíces de $F^{(1)}$ son, precisamente,

$$\frac{1}{X} \zeta_i \left(X^{1/m}, X^{1/m} \xi(Y) \right),$$

que son series de Puiseux.

Observación.— Ahora tenemos un problema algo más complicado con la irreducibilidad cuando $a \neq 0$ (el caso $(1 : 0 : 0)$ es obviamente simétrico al caso $(0 : 1 : 0)$). En particular, al cambiar de manera drástica el conjunto de exponentes no podemos aplicar un razonamiento similar al anterior. De hecho, no es posible asegurar irreducibilidad tras una transformación de este tipo. Por ejemplo, tomemos

$$\zeta = X^{3/2}Y^{1/2} + X^{1/2}Y^{3/2},$$

cuyo polinomio mínimo es

$$F(Z) = Z^2 - X^3Y - 2X^2Y^2 - XY^3.$$

Si hacemos la transformada cuadrática correspondiente a $(1 : 1 : 0)$ obtenemos

$$F^{(1)}(Z) = Z^2 - X^2(Y + 1)(Y + 2)^2,$$

que es claramente reducible (amén del hecho de que es una superficie con cono tangente no plano que posee una curva permitida).

Estudiemos con algo más de detalle el problema de cuándo se cae en la reducibilidad. Notemos como de costumbre

$$\zeta = \sum_{i,j} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m},$$

y sea $\xi(Y)^m = Y + a$. Entonces la serie correspondiente a ζ por la transformada cuadrática de dirección $(1 : a : 0)$ es

$$\eta = \sum_{i,j} c_{ij} X^{(i+j-m)/m} \xi(Y)^j,$$

esto es, los exponentes de η son de la forma $(i+j-m, km)$ donde $(i, j) \in \Delta(\zeta)$ y $k \in \mathbf{N}$.

En particular, si $(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)$ era un conjunto de exponentes distinguidos de ζ , para generar la extensión $K(\eta)$ nos bastan los exponentes $(i_1 + j_1, 0), \dots, (i_s + j_s, 0)$. Entonces el número de conjugados de η es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

(i.e., $m \cdot \text{m.c.d.}\{m, i_1 + j_1, \dots, i_s + j_s\}$). Esto, además de dar un criterio sencillo para detectar cuando caemos en el caso reducible (sólo hay que ver si el máximo común divisor de los menores de orden 2 decrece o no), demuestra que esta situación depende por completo de ζ y en ningún caso de la dirección escogida.

Transformaciones cuadráticas. Cono tangente no plano.

Nos falta, por último, el caso del cono tangente no plano cuando hemos de explotar en direcciones que anulan \bar{F} . Sin embargo, observemos que, en nuestra situación, el cono tangente es

$$\bar{F} = \prod_{i=1}^n (Z - \bar{\zeta}_i),$$

esto es, tiene que haber monomios del término independiente en la forma inicial de F . Dicho de otro modo, $(0 : 0 : 1)$ no es una dirección permitida. Supongamos por tanto que explotamos en una dirección $(1 : \alpha : \beta)$ (y análogo tratamiento se dará al caso $(\gamma : 1 : \omega)$).

Las ecuaciones de la explosión son

$$\begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto X(Y + \alpha) \\ Z \mapsto X(Z + \beta) \end{cases}$$

por lo que, análogamente al caso anterior, si consideramos la serie

$$\xi(Y^{1/m}) \text{ con } \xi(Y^{1/m})^m = Y + \alpha,$$

una ecuación del transformado de la superficie es

$$F^{(1)}(Z) = \prod_{i=1}^n \left[Z + \beta - \frac{1}{X} \zeta_i(X^{1/m}, X^{1/m} \xi(Y^{1/m})) \right].$$

Algunas de las series

$$\zeta_i^{(1)} = \beta - \frac{1}{X} \zeta_i(X^{1/m}, X^{1/m} \xi(Y^{1/m}))$$

pueden ser unidades. De hecho sabemos (II.C.) que sólo son no unidades $\text{mult}_{(1:\alpha:\beta)}(F)$, por lo que la ecuación del transformado puede tomarse como

$$F_0^{(1)}(Z) = \prod_{i \mid \nu(\zeta_i^{(1)}) \neq 0} [Z - \zeta_i^{(1)}].$$

Observación.— Los razonamientos acerca de la reducibilidad o irreducibilidad de $F_0^{(1)}$ son completamente análogos a los del caso del cono tangente plano, como es inmediato de comprobar.

Finaliza así el estudio de las posibles transformaciones de una superficie de Puiseux definida por series transversales. Recogemos los resultados parciales que hemos hallado en el siguiente enunciado:

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie de Puiseux definida por una serie ζ transversal. Entonces:

- (a) Si realizamos una transformación monoidal de centro $(Z, c(X, Y))$ la superficie transformada es de Puiseux, definida por $\zeta/c(X, Y)$.
 - (b) Si realizamos una transformación cuadrática en las direcciones $(1 : 0 : 0)$ ó $(0 : 1 : 0)$ la superficie transformada es de Puiseux, definida por una serie fácilmente calculable a partir de ζ .
 - (c) Si realizamos una transformación cuadrática en otra dirección la superficie obtenida es de Puiseux, aunque podría ser reducible. El que esto ocurra o no depende sólo de \mathcal{S} (o sea, de ζ) y no de la dirección. Es posible predecir este fenómeno a partir de ζ (más concretamente, a partir de un conjunto de exponentes distinguidos de ζ).
-

III.D. Explosiones (II).

El caso no transversal presenta, como era previsible, muchas más dificultades; incluso suponiendo que la superficie está definida por una sola serie y a pesar de que, en virtud de los resultados de III.B., podemos suponer que no tenemos curvas permitidas y, por tanto, sólo hemos de ocuparnos de las transformaciones cuadráticas. Para comprender mejor la complejidad del problema comenzaremos por un ejemplo.

Observación.— Consideremos la siguiente serie de Puiseux,

$$\zeta = X^{2/5} + Y^{2/5},$$

cuyo polinomio mínimo es F , dado por

$$Z^{25} + a_{20}(X, Y)Z^{20} + a_{15}(X, Y)Z^{15} + a_{10}(X, Y)Z^{10} + a_5(X, Y)Z^5 + a_0(X, Y),$$

donde

$$\begin{aligned}
a_{20}(X, Y) &= -5X^2 - 5Y^2 \\
a_{15}(X, Y) &= 10X^4 + 10Y^4 - 605X^2Y^2 \\
a_{10}(X, Y) &= -10X^6 - 10Y^6 - 1905X^4Y^2 - 1905X^2Y^4 \\
a_5(X, Y) &= 5X^8 + 5Y^8 - 605X^6Y^2 - 605X^2Y^6 + 1905X^4Y^4 \\
a_0(X, Y) &= -X^{10} - Y^{10} - 5X^8Y^2 - 5X^2Y^8 - 10X^4Y^6 - 10X^6Y^4
\end{aligned}$$

Si efectuamos la transformación cuadrática en la dirección $(0 : 0 : 1)$ (que, obsérvese, es la única dirección que es válida para cualquier serie no transversal), obtenemos una superficie $\mathcal{S}^{(1)}$ de ecuación

$$Z^{15} + a_{20}(X, Y)Z^{12} + a_{15}(X, Y)Z^9 + a_{10}(X, Y)Z^6 + a_5(X, Y)Z^3 + a_0(X, Y)$$

que es polinomio de Weierstrass tanto respecto de Z como de X e Y .

Si hallamos ahora las raíces de $F^{(1)}$ obtenemos, como polinomio en Z , la solución

$$\eta = Y^{2/3} + \frac{5}{3}X^{2/5}Y^{4/15} + \frac{5}{9}\frac{X^{4/5}}{Y^{2/15}} - \frac{5}{81}\frac{X^{6/5}}{Y^{8/15}};$$

y como polinomio en X la solución

$$\varsigma = Z^{3/2} - \frac{5}{2}Z^{9/10}Y^{2/5} + \frac{15}{8}Z^{3/10}Y^{4/5} - \frac{5}{16}\frac{Y^{6/5}}{Z^{3/10}},$$

y análogamente para $F^{(1)}$ como polinomio en Y . Todos estos cálculos se han llevado a cabo usando la implementación de F. Aroca y J. Cano de los algoritmos creados por ellos mismos (aún sin publicar) generalizando los trabajos de McDonald para los anillos de series de potencias con exponentes en conos de \mathbf{R}^n ([16]).

Así pues, si bien no podemos asegurar taxativamente que $F^{(1)}$ no define una superficie de Puiseux, sí es obvio que, a diferencia del caso transversal, no podemos garantizar la preservación del carácter de Puiseux mediante explosiones de manera directa. Por tanto, en lugar de utilizar el algoritmo de resolución desarrollado en II, hemos de crear algo de maquinaria *ad hoc* para trabajar con este tipo especial de superficies algebroides.

Para abordar entonces el problema, que aparece más intrincado y complejo, comenzaremos por un caso sencillo, que generaliza de manera más débil a las series cuasi-ordinarias.

El caso ν -cuasi-ordinario.

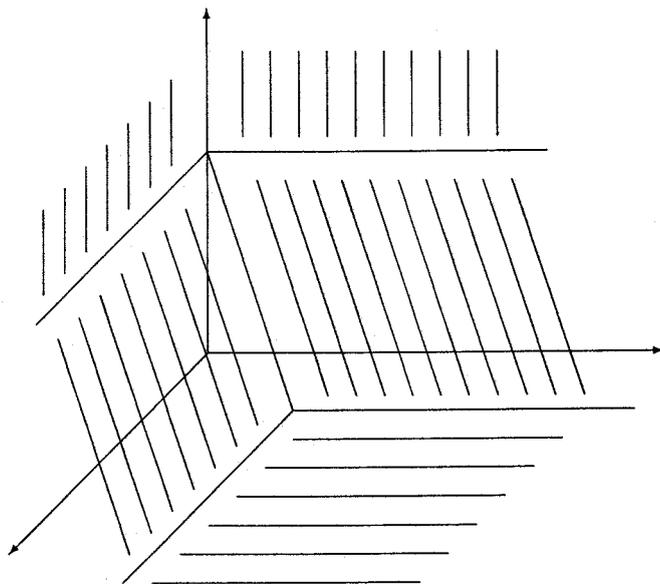
Comenzamos definiendo el concepto de serie ν -cuasi-ordinaria, ya utilizada con anterioridad por Hironaka y Luengo, entre otros.

Definición.— Sea $\zeta \in \mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$. La serie ζ se dice ν -cuasi-ordinaria cuando ζ se puede escribir de la forma

$$\zeta = X^{a/m} Y^{b/m} u(X^{1/m}, Y^{1/m}), \text{ con } u(0,0) \neq 0.$$

Una superficie de Puiseux definida por series ν -cuasi-ordinarias se dice así mismo una *superficie ν -cuasi-ordinaria*.

Obviamente ser ν -cuasi-ordinaria es equivalente a que la nube de puntos de ζ (y, por tanto, de todas sus conjugadas), se encuentre encerrada en el cuadrante de vértice (a, b) . Esto en particular implica que el diagrama de Newton de F , al ser la suma de Minkowsky de los diagramas de los polinomios $Z - \zeta_i$ es necesariamente de la forma:



Otra forma de describir el mismo fenómeno es decir que ζ es ν -cuasi-ordinaria si y sólo si

$$\min_{\nu_X} \Delta(\zeta) \cap \min_{\nu_Y} \Delta(\zeta) \neq \emptyset,$$

donde ν_X y ν_Y son los órdenes usuales en las variables X e Y (con valores racionales, por supuesto).

Observación.— Cuando trabajemos con series ν -cuasi-ordinarias no podremos suponer que no tienen exponentes enteros. De hecho, un cambio de variables que elimine estos exponentes puede también eliminar el carácter ν -cuasi-ordinario. Esto no representa ningún problema, ya que el hecho de que no aparezcan exponentes enteros se ha utilizado con anterioridad para abreviar razonamientos, sin que en ningún caso fuese esencial para los resultados hallados.

Observación.— Como hemos notado anteriormente, las series ν -cuasi-ordinarias generalizan las cuasi-ordinarias pero forman un conjunto bastante más amplio. Por ejemplo, la serie

$$X^{2/3}Y^{1/3}(1 + X^{1/3} + Y^{1/3})$$

es ν -cuasi-ordinaria, pero no cuasi-ordinaria. En concreto, el discriminante de su polinomio mínimo es

$$\Delta = X^{48}Y^{24}(X + Y)^6 \cdot u(X, Y).$$

Sea entonces $\zeta = X^{a/m}Y^{b/m}u(X, Y)$ una serie ν -cuasi-ordinaria no transversal y F su polinomio mínimo, siendo \mathcal{S} la superficie que define. Entonces el cono tangente de \mathcal{S} ha de ser forzosamente de la forma

$$\overline{F} = X^{(m^2/d)(a/m)}Y^{(m^2/d)(b/m)},$$

donde, como de costumbre, d es el m.c.d. de los menores de orden 2 de la matriz cuyas columnas son $(m, 0)$, $(0, m)$ y unos exponentes privilegiados de ζ .

En estas condiciones, las direcciones a explotar son $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 0 : \alpha)$ y $(0 : 1 : \alpha')$, donde α y α' recorren \mathbf{C} . Siguiendo entonces a ([13]) veamos qué podemos decir de las superficies resultantes de explotar en estas direcciones.

Lema.— En las condiciones anteriores, la transformación cuadrática de \mathcal{S} en la dirección $(1 : 0 : \alpha)$ es nuevamente una superficie de Puiseux ν -cuasi-ordinaria. Lo mismo se puede decir de la transformación cuadrática en la dirección $(0 : 1 : \alpha)$.

Demostración.— Fijemos en primer lugar las notaciones: tenemos $F(Z)$ el polinomio mínimo de ζ , dado por

$$F(Z) = Z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X, Y)Z^k = \prod_{i=1}^n (Z - \zeta_i),$$

donde notemos

$$\zeta_1 = \zeta = X^{a/m}Y^{b/m}u_1(X^{1/m}, Y^{1/m}), \quad \zeta_i = X^{a/m}Y^{b/m}u_i(X^{1/m}, Y^{1/m})$$

y el orden usual de F es $n(\lambda/m)$, con $\lambda/m = a/m + b/m$ el orden de ζ . El término independiente de F , que es donde se halla la forma de menor grado, es

$$a_0 = \prod_{i=1}^n \zeta_i = X^{na/m}Y^{nb/m}u(X, Y).$$

En estas condiciones el resultado de aplicar a F la transformación cuadrática de dirección $(1 : 0 : \alpha)$ es

$$F^{(1)} = \frac{1}{X^{n(a+b)/m}} F(X, XY, X(Z + \alpha)),$$

en cuyo término independiente hallamos

$$Y^{nb/m}u(X, XY).$$

Esto nos indica, por un lado, que $\mathcal{S}^{(1)}$ tiene menor multiplicidad que \mathcal{S} , ya que la única forma de que la multiplicidad no descienda es que $a = 0$, pero, en este caso, ya hemos probado con anterioridad que la serie puede ser considerada transversal. Por otra parte, $F^{(1)}$ es regular en Y . De hecho, es probable que sólo sea regular en Y (y no en X ni en Z). Por tanto, de cara a estudiar si $\mathcal{S}^{(1)}$ es o no de Puiseux, conviene calcular (si es posible) el

polinomio de Weierstrass asociado a $F^{(1)}$, distinguiendo la variable Y . Nótese que este polinomio es único. Lo denotaremos por G .

La ventaja fundamental del caso ν -cuasi-ordinario es la extraordinaria versatilidad que nos permite. En concreto, podemos definir las series $s_i(X^{1/m}, Y^{1/m}), t(Z^{1/b})$ verificando

$$(s_i(X^{1/m}, Y^{1/m}))^b = u_i(X^{1/m}, Y^{1/m}), \quad (t(Z^{1/b}))^b = Z + \alpha.$$

Si escribimos F en la forma

$$F = \prod_{i=1}^n (Z - X^{a/m} Y^{b/m} u_i(X^{1/m}, Y^{1/m})),$$

entonces $F^{(1)}$ resulta

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \frac{1}{X^{n(a+b)/m}} \prod_{i=1}^n (X(Z + \alpha) - X^{(a+b)/m} Y^{b/m} u_i(X^{1/m}, X^{1/m} Y^{1/m})) \\ &= \frac{1}{X^{n(a+b)/m}} \prod_{i=1}^n ([X^{1/b} t]^b - X^{(a+b)/m} Y^{b/m} s_i^b) \\ &= \prod_{i=1}^n ([X^{(1/b)-(a+b)/mb} t]^b - Y^{b/m} s_i^b) \\ &= \prod_{i=1}^n ([X^{(m-a-b)/mb} t]^b - [Y^{1/m} s_i]^b) \\ &= \prod_{\delta \in \mathcal{R}(b)} \prod_{i=1}^n (\delta X^{(m-a-b)/mb} t - Y^{1/m} s_i) \end{aligned}$$

Ahora, operando en $\mathbb{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}, Z^{1/b}]]$, tenemos que la serie

$$\frac{1}{\delta} X^{(m-a-b)/b} t - Y^{1/m} s_i$$

es regular en $Y^{1/m}$ de orden $1/m$, por lo que podemos hallar series $u'_i, w_i \in \mathbb{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}, Z^{1/b}]]$ tales que w_i no depende de $Y^{1/m}$ y además verifican

$$u'_i(X^{(m-a-b)/b} t - Y^{1/m} s_i) = Y^{1/m} + w_i.$$

Llevando todas esas igualdades a $F^{(1)}$ obtenemos que, para cierta unidad u' (el producto de las u'_i),

$$F^{(1)} = u' \prod_{\delta \in \mathcal{R}(b)} \prod_{i=1}^n (Y^{1/m} + \delta w_i).$$

Por tanto el doble producto de la izquierda es necesariamente el polinomio de Weierstrass asociado a $F^{(1)}$ como elemento de $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}, Z^{1/b}]]$. Por unicidad del polinomio de Weierstrass, ha de ser necesariamente G , el polinomio de Weierstrass como elemento de $\mathbf{C}[[X, Y, Z]]$. Las raíces de G como ecuación en Y son series de Puiseux. Por supuesto el caso $(0 : 1 : \alpha)$ es simétrico.

Observemos por último que las raíces de G son potencias de δw_i . Pero w_i es una unidad por un monomio en X (o en X, Z si $\alpha = 0$), por lo que las raíces de $G(Y)$ son de nuevo ν -cuasi-ordinarias. *Q.E.D.*

Lema.— En las condiciones anteriores, la transformación cuadrática de \mathcal{S} en la dirección $(0 : 0 : 1)$ es nuevamente una superficie de Puiseux ν -cuasi-ordinaria.

Demostración.— Ahora lo que podemos asegurar, por analogía con el resultado anterior, es que $F^{(1)}$ va a ser regular en Z , concretamente de orden $n(m - a - b)/m$. Si mantenemos las notaciones de la demostración anterior, escribimos ahora $F^{(1)}$ de la forma

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \frac{1}{Z^{n(a+b)/m}} F(XZ, YZ, Z) \\ &= \frac{1}{Z^{n(a+b)/m}} \prod_{i=1}^n (Z - X^{a/m} Y^{b/m} Z^{(a+b)/m} u_i (X^{1/m} Z^{1/m}, Y^{1/m} Z^{1/m})) \\ &= \frac{1}{Z^{n(a+b)/m}} \prod_{i=1}^n (Z - X^{a/m} Y^{b/m} Z^{(a+b)/m} u_i (X^{1/m} Z^{1/m}, Y^{1/m} Z^{1/m})) \\ &= \prod_{i=1}^n (Z^{(m-a-b)/m} - X^{a/m} Y^{b/m} u_i (X^{1/m} Z^{1/m}, Y^{1/m} Z^{1/m})) \\ &= \prod_{i=1}^n \left([Z^{1/m}]^{m-a-b} - [X^{a/(m^2-am-bm)} Y^{b/(m^2-am-bm)} t_i]^{m-a-b} \right), \end{aligned}$$

donde las series t_i son unidades: de hecho son las raíces $(m - a - b)$ -ésimas de las unidades $u_i (X^{1/m} Z^{1/m}, Y^{1/m} Z^{1/m})$.

Tenemos entonces de nuevo $F^{(1)}$ escrito como producto de series regulares de orden $1/m$, en concreto

$$F^{(1)} = \prod_{\delta \in \mathcal{R}(m-a-b)} \prod_{i=1}^n \left(\delta Z^{1/m} - X^{a/(m^2-am-bm)} Y^{b/(m^2-am-bm)} t_i \right).$$

Aplicando ahora el Teorema Preparatorio de Weierstrass a los factores de $F^{(1)}$ en el anillo $\mathbf{C} \left[\left[X^{1/(m^2-am-bm)}, Y^{1/(m^2-am-bm)}, Z^{1/m} \right] \right]$, obtenemos series w_i, u'_i en este anillo de tal forma que

$$u'_i \left(Z^{1/m} - X^{a/(m^2-am-bm)} Y^{b/(m^2-am-bm)} t_i \right) = Z^{1/m} + w_i,$$

y las w_i no dependen de $Z^{1/m}$. Nuevamente podemos calcular entonces de forma explícita (es una forma de hablar...) el polinomio de Weierstrass asociado a $F^{(1)}$ (con respecto a Z) ahora y, claramente sus raíces son series de Puiseux. Además, como $w_i = X^\alpha Y^\beta u'_i t_i$, para ciertos racionales α, β , tenemos que, de hecho, las raíces de este polinomio son ν -cuasi-ordinarias. *Q.E.D.*

Observación.— Si repasamos los resultados de la sección anterior podremos comprobar de manera inmediata que, si tenemos una superficie definida por una serie ν -cuasi-ordinaria transversal la transformada (monoidal o cuadrática, tanto da) no sólo está definida por series de Puiseux, sino que podemos hallar series que la definen y que son ν -cuasi-ordinarias.

El paso al caso ν -cuasi-ordinario.

Vamos a describir ahora cómo podemos transformar una superficie de Puiseux, particularmente si está definida por una serie no transversal, en una superficie de Puiseux ν -cuasi-ordinaria. Para ello hemos de introducir un nuevo tipo de transformación.

Observación.— Si, al calcular una transformada (cuadrática o monoidal) de una superficie no se divide por la ecuación del divisor excepcional, obtenemos una superficie que recibe el nombre de *transformada total* (local, en la

dirección que sea). Se puede hacer un tratamiento paralelo al llevado a cabo en I.B. para este tipo de transformaciones, pero alargaría innecesariamente la sección, máxime cuando se trata de una transformación muy estudiada en la literatura (ver, por ejemplo, [2]).

Definición.— Sea \mathcal{S} una superficie algebroide definida por una ecuación WT $F(Z)$. Definimos una *transformación especial* como la transformación monoidal total de \mathcal{S} con centro (X, Y) .

Nótese que la terminología “transformación especial” aparece en [13] para expresar otro tipo de transformaciones; concretamente las monoidales y/o cuadráticas con direcciones $(1 : 0 : 0)$ o $(0 : 1 : 0)$. Sin embargo esta denominación no es estándar: ni siquiera aparece de nuevo en otros trabajos del mismo autor, de forma que, por no haber posibilidad de confusión, utilizaremos el mismo término.

Hasta ahora no hemos utilizado estas transformaciones porque, como vimos en I.D., (X, Y) nunca es curva permitida, por lo que esta transformación carecía de interés para el algoritmo desarrollado en II. Sin embargo, ahora podemos probar un resultado que dota de cierta utilidad a estas transformaciones.

Proposición.— Sea \mathcal{S} una superficie de Puiseux definida por una serie no transversal ζ , $F(Z)$ el polinomio mínimo de ζ en $\mathbf{C}((X, Y))$. Entonces existe un $p \in \mathbf{Z}_+$ tal que en cualquier sucesión de la forma

$$\mathcal{S}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(p-1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{S}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{S},$$

donde los morfismos sean transformaciones especiales siempre en la misma dirección, se ha de tener que $\mathcal{S}^{(p)}$ está definida por series de Puiseux ν -cuasi-ordinarias.

Demostración.— Una transformación especial, pongamos en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, tiene ecuaciones (tras renombrar las variables para mayor comodidad)

$$\begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto X(Y + \alpha) \\ Z \mapsto Z \end{cases}$$

que también podemos expresar así

$$\begin{cases} X^{1/m} \mapsto X^{1/m} \\ Y^{1/m} \mapsto X^{1/m}\xi(Y^{1/m}) \\ Z^{1/m} \mapsto Z^{1/m} \end{cases}$$

donde ξ es una unidad de $\mathbf{C}[[X, Y]]$, a menos que $\alpha = 0$. En concreto, si nuestro polinomio se escribe de la forma habitual

$$F(Z) = \prod_{i=1}^n [Z - \zeta_i(X^{1/m}, Y^{1/m})],$$

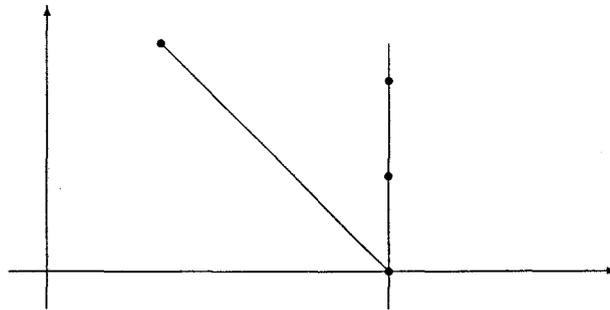
el transformado especial será

$$F^{(1)}(Z) = \prod_{i=1}^n [Z - \zeta_i(X^{1/m}, X^{1/m}\xi(Y^{1/m}))].$$

Pongámonos primero en el caso $\alpha \neq 0$. Denotemos

$$\zeta_i^{(1)} = \zeta_i(X^{1/m}, X^{1/m}\xi(Y)).$$

Entonces los puntos $(i, j) \in \Delta(\zeta)$ se convierten en puntos de $\Delta(\zeta^{(1)})$ de la forma $(i + j, mr)$, para algún $r \in \mathbf{N}$.



Esto quiere decir que la primera línea vertical de $\Delta(\zeta)$ va a venir dada, a priori, por los monomios que surgen de los $(i, j) \in \Delta(\zeta)$ con orden minimal.

En efecto, estos monomios claramente se transforman en monomios sobre la recta $X = i + j$, y no puede haber puntos de $\Delta(\zeta^{(1)})$. Por ello, si queremos demostrar que $\zeta^{(1)}$ es ν -cuasi-ordinaria, bastará probar que el punto $(i + j, 0)$ está en la nube de puntos de $\zeta^{(1)}$.

Pero podemos lograr que esto ocurra. En efecto, si sumamos todos los monomios que proceden de la forma inicial de ζ obtenemos

$$\sum_{(i,j) \in \Delta(\zeta), i+j=\nu(\zeta)} X^{(i+j)/m} \zeta^j(Y).$$

Si denotamos γ el término independiente de $\xi(Y)$, la situación a evitar es que

$$\sum_{(i,j) \in \Delta(\zeta), i+j=\nu(\zeta)} \gamma^j = 0.$$

Pero esto equivale a que γ verifique un polinomio de grado $m\nu_Y(\zeta) < m$, puesto que ζ es no transversal. Como tenemos m posibles opciones para γ (las m raíces m -ésimas de α), todas ellas igualmente válidas para los razonamientos anteriores, forzosamente $F^{(1)}$ tiene como raíces series ν -cuasi-ordinarias.

Veamos ahora el caso de dirección $(1 : 0 : 0)$, que es evidentemente análogo al caso $(0 : 1 : 0)$. En esta situación el transformado especial de $F(Z)$ viene dado por

$$F^{(1)}(Z) = \prod_{i=1}^n [Z - \zeta_i (X^{1/m}, X^{1/m}Y^{1/m})],$$

por lo que la transformación a nivel de nube de puntos resulta

$$(i, j) \in \Delta(\zeta) \mapsto (i + j, j) \in \Delta(\zeta^{(1)}).$$

Esta transformación es claramente un aplicación inyectiva, por lo que no debemos preocuparnos ya de problemas de cancelación.

Si aplicamos k veces la transformación especial de dirección $(1 : 0 : 0)$ obtenemos en los monomios

$$(i, j) \in \Delta(\zeta) \mapsto (i + kj, j) \in \Delta(\zeta^{(k)}).$$

Sea entonces

$$(i_0, j_0) = \min_{\nu_X} \left(\min_{\nu_Y} \Delta(\zeta) \right).$$

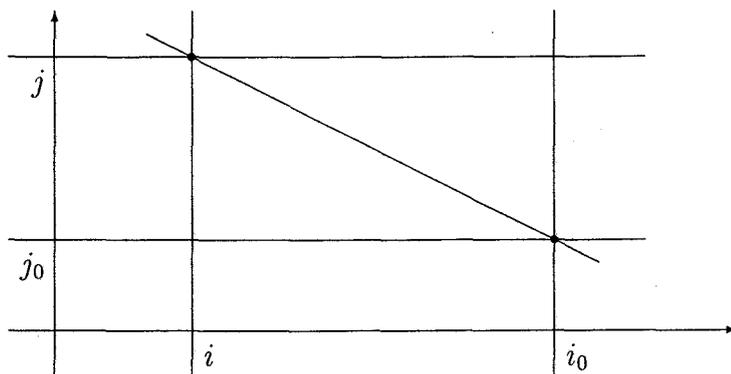
Es claro que, no importa cuántas transformaciones especiales en la dirección $(1 : 0 : 0)$ hagamos, (i_0, j_0) va a seguir estando en los sucesivos $\min_{\nu} \Delta(\zeta^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$. Entonces, para todo $(i, j) \in \Delta(\zeta)$, si denotamos

$$v(i, j) = \left\lceil \frac{i - i_0}{j_0 - j} \right\rceil,$$

tenemos que, si hacemos k transformaciones, con $k > v(i, j)$, el monomio (i, j) se transforma en $(i + kj, j)$, donde $j \leq j_0$ por definición de j_0 y

$$k > \frac{i - i_0}{j_0 - j} \implies i + kj < i_0 + k_0 j.$$

Por tanto, todo monomio queda, tras un cierto número de pasos, en el cuadrante determinado por el transformado de (i_0, j_0) . Para acabar de mostrar lo que queremos sólo resta probar que podemos dar una cota para ese número de pasos, independiente del monomio en cuestión. Para ello veamos quién es $v(i, j)$ en $\Delta(\zeta)$.



Como es obvio de la figura, $v(i, j)$ es la parte entera de la tangente del ángulo formado por (i, j_0) , (i, j) e (i_0, j_0) (en este orden). Por tanto, acotar $v(i, j)$ es tanto como acotar dicho ángulo. Para ello basta con observar lo siguiente:

- (i) Por definición de (i_0, j_0) el ángulo no puede ser $\pi/2$.

(ii) Como todos los puntos de $\Delta(\zeta)$ tienen coordenadas enteras, el ángulo en cuestión tiene como cota superior, forzosamente, el caso $i = 0, j = j_0 + 1$.

Por tanto el $v(i, j)$ admite una cota independiente de (i, j) y el resultado queda probado. Para finalizar, notemos un hecho de interés: la cota se puede hallar a partir de $\Delta(\zeta)$ muy fácilmente: basta con hallar el punto que, al unirse con (i_0, j_0) nos da la recta de menor pendiente.

Pero, por las propiedades elementales de los conjuntos convexos y la suma de Minkowsky, el diagrama de Newton de F cortado con el plano $Z = 0$ reproduce exactamente $\Delta(\zeta)$, luego podemos hallar el número de transformaciones especiales en la dirección $(1 : 0 : 0)$ directamente a partir de F , sin pasar por ζ (aunque, por supuesto, para que todo esto tenga sentido es imprescindible saber a priori que F es un polinomio cuyas raíces son series de Puiseux).

Esto finaliza la demostración. *Q.E.D.*

Corolario.— El resultado anterior es válido para superficies de Puiseux definidas por una serie transversal ζ , con excepción de, a lo más, un número finito de direcciones que se pueden deducir a partir de ζ .

Demostración.— En el caso de que nuestra serie sea transversal y ν -cuasi-ordinaria, el mismo razonamiento prueba que una transformación especial en la dirección $(1 : \alpha : 0)$ preserva el carácter ν -cuasi-ordinario. En efecto, si escribimos

$$\zeta = X^{a/m} Y^{b/m} u(X^{1/m}, Y^{1/m}),$$

al quedar todos los exponentes dentro del cuadrante generado (a, b) , los monomios resultantes de éste, que son de la forma $(a + b, mr)$, no pueden cancelar con ningún otro. En particular, el monomio $(a + b, 0)$ determina un cuadrante que encierra a todos los demás.

Si la serie es transversal no podemos decir, en general, que una transformación especial de este tipo nos vaya a dar como resultado una superficie de Puiseux ν -cuasi-ordinaria. Por ejemplo, basta considerar la serie

$$\zeta = X^{2/6} Y^{5/6} - X^{3/6} Y^{4/6} + X^{4/6} Y^{3/6}.$$

Si realizamos una transformación especial en la dirección $(1 : 1 : 0)$, tendremos que ζ se transforma (abusando del lenguaje) en una serie cuyos

términos de menor grado empezarían con

$$X^{7/6} (\gamma^5 - \gamma^4 + \gamma^3),$$

donde γ puede ser cualquier raíz sexta de 1. Pero todas ellas anulan al polinomio $Y^5 - Y^4 + Y^3 = Y^3\Phi_6(Y)$. Lo que sí es evidente es que, tras una transformación de este tipo, seguimos teniendo una superficie de Puiseux y que sólo un número finito de direcciones provocan esta situación; de hecho lo podemos acotar por el número de raíces del polinomio $\sum X^j = 0$, donde j verifica que existe un exponente (i, j) en la forma inicial de ζ .

Para finalizar, notemos que, en el razonamiento relativo a la dirección $(1 : 0 : 0)$ no se ha hecho uso en ningún momento de que ζ es no transversal, por lo que el resultado que se puede inferir es válido para cualquier serie de Puiseux de la que partamos. *Q.E.D.*

Observación.— Veamos qué sucede con la irreducibilidad de F tras realizar transformaciones especiales: para empezar consideramos el caso de la dirección $(1 : \alpha : 0)$, con $\alpha \neq 0$. Si tomamos un conjunto de exponentes distinguidos (minimal) $\{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}$, sabemos de III.A. que el número de conjugados de ζ es m^2/d , donde d es el m.c.d. de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_s \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}.$$

Sea $\zeta' = \zeta (X^{1/m}, X^{1/m}\xi (Y^{1/m}))$ y sean $p_k m$, $k = 1, \dots, s$ los menores enteros verificando que

$$(i_k + j_k, p_k m) \in \Delta(\zeta').$$

Sea ahora $(i, j) \in \Delta(\zeta)$. Existen enteros β_1, \dots, β_s verificando

$$(i, j) = \sum_{k=1}^s \beta_k (i_k, j_k), \quad \text{mod } (\mathbf{Z}m)^2$$

de donde podemos escribir

$$i + j = \sum \beta_k (i_0 + j_0) \quad \text{mod } (\mathbf{Z}m)^2.$$

Los monomios que surgen de (i, j) tras la transformación especial son, como ya vimos, de la forma $(i + j, rm)$, con $r \in \mathbb{N}$. Por tanto, el m.c.d. de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s \\ 0 & m & p_1 m & \dots & p_s m \end{pmatrix}$$

coincide trivialmente con el m.c.d. de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s & i + j \\ 0 & m & p_1 m & \dots & p_s m & rm \end{pmatrix},$$

ya que la última columna es combinación lineal (de coeficientes enteros) de las anteriores.

Por tanto, para probar que el conjunto $\{(i_1 + j_1, p_1 m), \dots, (i_s + j_s, p_s m)\}$ son un conjunto de exponentes distinguidos de ζ' (en la notación de la prueba), basta verificar que realmente son exponentes de $\Delta(\zeta')$. Pero esto es trivialmente cierto, por definición de los p_i .

Por tanto el número de conjugados de ζ' es m^2/d' , donde d' es el m.c.d. de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s \\ 0 & m & p_1 m & \dots & p_s m \end{pmatrix}$$

que evidentemente es el mismo que el m.c.d. de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como $F^{(1)}$ es irreducible si y sólo si $d' = d$, tenemos que la irreducibilidad de $F^{(1)}$ se puede conocer a priori; a partir de unos exponentes distinguidos de ζ . Así mismo, el hecho de que $F^{(1)}$ sea o no irreducible no depende de la dirección escogida para explotar.

El caso de la dirección $(1 : 0 : 0)$ es más simple. En efecto, es trivial probar que, si $\{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}$ son un conjunto de exponentes distinguidos de ζ , entonces $\{(i_1 + j_1, j_1), \dots, (i_s + j_s, j_s)\}$ lo es de $\zeta' = \zeta(X^{1/m}, X^{1/m}Y^{1/m})$, ya que son exponentes (recordemos la aplicación inyectiva entre $\Delta(\zeta)$ y $\Delta(\zeta')$)

y claramente cualquier otro de $\Delta(\zeta')$ es combinación lineal con coeficientes enteros de estos exponentes.

En consecuencia, dado que el m.c.d. de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & \dots & i_s \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

coincide trivialmente con el m.c.d. de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 + j_1 & \dots & i_s + j_s \\ 0 & m & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix},$$

ya que ésta matriz se obtiene de aquélla por transformaciones elementales de filas y columnas, el número de conjugados de ζ y ζ' es el mismo, de donde $F^{(1)}$ ha de ser irreducible.

III.E. Resolución de singularidades en superficies de Puiseux.

En esta sección, más que probar resultados, trataremos de ordenar los resultados parciales que hemos ido hallando, de cara a establecer un proceso de reducción de singularidades para una superficie definida por series de Puiseux. Una vez hecho esto, y de cara al futuro, se plantean multitud de nuevas preguntas e incógnitas acerca del comportamiento de estas series. Este trabajo no es más que un primer paso hacia la comprensión del fenómeno de las series de Puiseux y, de hecho, se puede afirmar sin duda que plantea más preguntas de las que responde.

Establecemos entonces como punto de partida una superficie \mathcal{S} definida por series de Puiseux. Dicho de otra forma, si F es una ecuación de \mathcal{S} , descompuesta en factores primos como

$$F = F_1 \dots F_r, \quad F_i \in \mathbf{C}[[X, Y]][[Z]],$$

entonces cada una de las superficies \mathcal{S}_i determinadas por las ecuaciones $F_i = 0$ son superficies de Puiseux definidas por una serie de Puiseux.

En estas condiciones, aplicar una transformación (cuadrática, monoidal o especial) a F no es sino el resultado de aplicarla a cada F_i y multiplicar los resultados. En efecto: el caso de las transformaciones especiales es trivial, pues se reducen a aplicar un homomorfismo de anillos. En el caso de las transformaciones cuadráticas y/o monoidales la transformación opera sobre la ecuación en dos pasos: primero se aplica el correspondiente homomorfismo y posteriormente se divide entre una variable elevada a $\nu(F) = \sum \nu(F_i)$. La afirmación es entonces trivial de comprobar.

Comenzaremos con un resultado sencillo relativo al comportamiento de las series ν -cuasi-ordinarias.

Lema.— Sea \mathcal{S} una superficie de Puiseux definida por series ν -cuasi-ordinarias. Entonces la aplicación del algoritmo dado en II resuelve las singularidades de \mathcal{S} . En cada paso, la superficie resultante es de nuevo ν -cuasi-ordinaria.

Demostración.— Todo está ya probado: simplemente hay que recomponer el razonamiento. Partimos de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_r$ de ecuación $F = F_1 \dots F_r$. Tanto da que las superficies \mathcal{S}_i (todas ellas ν -cuasi-ordinarias) sean o no transversales: en cualquier caso realizar una transformación cuadrática o monoidal sobre \mathcal{S} equivale a hacerlo sobre cada \mathcal{S}_i y el resultado es, bien una superficie ν -cuasi-ordinaria, bien una unidad. Este caso puede darse si explotamos en una dirección del cono tangente de \mathcal{S}_i que no pertenece al cono de \mathcal{S}_j ; como resultado (ver I.C.) la ecuación F_j se transforma en una unidad.

En consecuencia, aplicar literalmente el algoritmo de II en ningún caso elimina el carácter de ser de Puiseux. Como hemos visto, este algoritmo necesariamente conduce a una reducción de la multiplicidad, por lo que el resultado queda probado. *Q.E.D.*

Observación.— Hagamos notar que, si ζ es una serie ν -cuasi-ordinaria, no transversal y con una curva permitida, ha de ser de la forma

$$\zeta = X^{a/m} u \left(X^{1/m}, Y^{1/m} \right),$$

como vimos en III.B. Sin embargo, estos casos los convertíamos directamente en series transversales. Pero, como hicimos notar, la serie obtenida también

es ν -cuasi-ordinaria. Así no perdemos generalidad si queremos suponer que en este proceso no tenemos nunca el caso no transversal con transformaciones monoidales.

Con este resultado podemos ya establecer dos métodos diferentes para resolver las singularidades de una superficie de Puiseux. En todos los casos partimos de una superficie de Puiseux $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_r$, con ecuación $F = F_1 \dots F_r$.

Algoritmo de reducción para superficies de Puiseux. Este método consiste básicamente en pasar cuanto antes al caso ν -cuasi-ordinario, donde ya sabemos que todo funciona bien.

Paso 1.— Escoger, bien $\alpha \in \mathbf{C}$ de tal forma que se verifique:

$$\overline{F(X, X(Y + \alpha), 0)} = \beta X^{\nu(F)}, \quad \beta \in \mathbf{C},$$

bien $\alpha = 0$, sin necesidad de comprobar nada.

Paso 2.— Aplicar una transformación especial en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, si $\alpha \neq 0$ o bien tantas como sean necesarias para caer al caso ν -cuasi-ordinario si $\alpha = 0$, siguiendo III.D.

Paso 3.— Aplicar el algoritmo de II.

Estamos en condiciones de enunciar el último resultado de la presente memoria.

Teorema.— Con las notaciones anteriores, el algoritmo conduce necesariamente a una reducción de singularidades de \mathcal{S} .

Demostración.— Basta demostrar que la condición impuesta en el paso 1 implica necesariamente que los F_i se transforman en polinomios con raíces ν -cuasi-ordinarias, ya que a partir de aquí basta aplicar el lema anterior.

Para ello fijemos un factor irreducible de F , pongamos F_i , polinomio mínimo de $\zeta_{1,i} \in \mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$, que factoriza sobre el anillo de series de Puiseux de la forma

$$F_i = \prod_{j=i}^{s_i} (Z - \zeta_{j,i}).$$

La condición que debía verificar α para que, tras una transformación especial en la dirección $(1 : \alpha : 0)$, F_i se transformase en un polinomio $F_i^{(1)}$ de raíces ν -cuasi-ordinarias era, simplemente, que existiera γ , raíz m -ésima de α , con

$$X^{\nu(\zeta_{1,i})} \sum_{(i,j) \in \Delta(\zeta_{1,i}), i+j=\nu(\zeta_{1,i})} \gamma^j \neq 0.$$

Pero, claramente, de ser esto así, ése es precisamente el monomio de menor grado al aplicar a $\zeta_{1,i}$ la transformación especial. Por tanto, se tendría la condición (A).1. Pero tenemos también la implicación inversa, ya que si alguna $\zeta_{i,j}$ no es ν -cuasi-ordinaria, es que su forma inicial, bien no depende únicamente de X , bien es un monomio en $X^{1/m}$ pero de grado mayor que $\nu(F_i)$. En cualquiera de ambos casos, no tenemos la condición del paso 1.

Nótese que la condición impuesta se puede verificar sobre el polinomio F , no es necesario descomponerlo en factores primos, ni mucho menos hallar las raíces de los F_i . *Q.E.D.*

Bibliografía

- [1] Abhyankar, S.S.: *Good points of a hypersurface*. Adv. in Math., 68 (1988), 87–256.
- [2] Aroca, J.M.; Hironaka, H.; Vicente, J.L.: *Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces*. Notas de los autores (próxima publicación)².
- [3] Bennett, B.M.: *On the characteristic function of a local ring*. Ann. of Math., 91 (1970), 25–87.
- [4] Bierstone, E.; Millman, P.: *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximal strata of a local invariant*. Inv. Math., 128(2) (1997), 207–302.
- [5] Bourbaki, N.: *Algèbre*. Actalités Scientifiques et Industrielles, 1179. Hermann, 1952.
- [6] Dieudonné, J.; Grothendieck, A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I – IV*. Publications Mathématiques, I.H.E.S. Presses Universitaires, 1960 – 1964.
- [7] Encinas, S.; Villamayor, O.: *Constructive desingularization*. En *Resolution of Singularities*, Progress in Mathematics, 181. Birkhauser, 1999.

²El contenido de estas notas es una revisión y ampliación de los resultados contenidos en las obras de los mismos autores *The theory of the maximal contact* y *Desingularization theorems*, Memorias de Matemáticas del Instituto Jorge Juan, nos. 29 y 30, C.S.I.C., Madrid, 1976.

- [8] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer Verlag, 1977.
- [9] Herrera, F.J.: *Ramificación de valoraciones sobre superficies algebroides*. Tesis Doctoral, Univ. de Sevilla, 1981.
- [10] Hironaka, H.: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero (I, II)*. Ann. of Math., 79 (1964), 109–326.
- [11] Hironaka, H.: *Desingularization of excellent surfaces*. Notas de B.M. Bennet sobre un curso del autor en Bowdoin College (Advanced Science Seminar in Algebraic Geometry), 1967. Facsímil en *Resolution of Surface Singularities*, Lecture Notes in Mathematics, 1101. Springer Verlag, 1984.
- [12] Levi, B.: *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche*. Atti Acad. Sci. Torino, 33 (1897), 66–86.
- [13] Lipman, J.: *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. Tesis Doctoral, Harvard Univ., 1965.
- [14] Luengo, I.: *Sobre la estructura de las singularidades de superficies algebroides sumergidas*. Tesis Doctoral, Univ. Complutense, 1981.
- [15] Matsumura, H.: *Commutative Algebra*. Mathematics Lecture Notes Series, 56. Benjamin, 1970.
- [16] McDonald, J.: *Fiber polytopes and fractional power series*. J. Pure App. Algebra, 104 (1995), 213–233.
- [17] Nagata, M.: *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 13. Interscience, 1962.
- [18] Piedra, R.: *Estudio local de singularidades de superficies sobre cuerpos base de característica cualquiera*. Tesis Doctoral, Univ. Sevilla, 1978.

- [19] Orbanz, U.: *Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar (characteristic 0)*, en *Resolution of Surface Singularities*. Lecture Notes in Mathematics, 1101. Springer Verlag, 1984.
- [20] Sánchez, T.: *Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas*. Tesis Doctoral, Univ. Complutense, 1974.
- [21] Sánchez, T.: *Caminos estacionarios en superficies algebroides sumergidas*. Actas del VI Encuentro de la R.S.M.E., Málaga, 1976.
- [22] Spivakovsky, M.: *A counterexample to the theorem of Beppo Levi in three dimensions*. Inv. Math., 96 (1989), 181–183.
- [23] Zariski, O.: *The reduction of singularities of an algebraic surface*. Ann. of Math., 40 (1939), 639–689.
- [24] Zariski, O.: *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*. Ann. of Math., 48 (1942), 583–593.
- [25] Zariski, O.: *Studies in equisingularity (I, II, III)*. Amer. J. Math., 87 (1965), 507–536; 87 (1965), 972–1006; 90 (1968), 961–1023.
- [26] Zariski, O.: *A new proof of the total embedded resolution theorem for algebraic surfaces (based on the theory of quasi-ordinary singularities)*. Amer. J. Math. 100 (1978), 411–442.
- [27] Zariski, O.: *Foundations of a general theory of equisingularity on r -dimensional algebroid and algebraic varieties of embedding dimension $r+1$* . Amer. J. Math. 101 (1979), 453–514
- [28] Zariski, O.: *Collected papers (4 vols.)*. The MIT Press, 1973 – 1979.
- [29] Zariski, O.; Samuel, P.: *Commutative Algebra (2 vols.)*. Graduate Texts in Mathematics, 28 – 29. Springer Verlag, 1975.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resolución del Tribunal competente por los señores doctores
en el día de la fecha, para otorgar la Tesis Doctoral de
D. JOSE M^e TORNERO SANCHEZ
sobre ASPECTOS LOCALES DE SINGULARIDADES
DE SUPERFICIES: SUPERFICIES DE PUISEUX

según el informe de calificación es SOBRESALIENTE CUM
LAUDE (POR UNANIMIDAD)

fecha, 13 de JULIO de 2001

El Vocal
[Signature]
El Secretario

El Vocal
[Signature]
El Secretario

El Vocal
[Signature]
El Secretario

[Signature]

[Signature]

[Signature]

