R. 26684

i18714183

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Depositado en Dpto Algebra
de esta Universidad desde el día 11-01-0
hasta el día 29-01-02
Sevilla 11 de Enero de 2001
EL DIRECTOR DE Departamento

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Álgebra

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Álgebra y Combinatoria de las Singularidades

043
380

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL
Se ha dado entrada en este Centro Doctoral
al folio 176 número 74 del libro
correspondiente.
Sevilla, 8 de enero de 2002
El Jefe de Negociado de Tesis

Memoria presentada por
Manuel Jesús Soto Prieto
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas

Visto Bueno del Director

Fdo. José Luis Vicente Córdoba
Catedrático de Universidad
Universidad de Sevilla

Sevilla, a 27 de Diciembre de 2.001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

A Ana, David y Paula.

Agradecimientos

A lo largo de estos años, el número de personas que me han ayudado a terminar esta memoria, bien científicamente, bien en lo personal, es grande.

Debo agradecer a mi director, Profesor José Luis Vicente Córdoba la paciencia y disposición que ha tenido al ofrecerse a dirigirme.

Debo también agradecer al Director del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, Profesor Luis Narváez Macarro, por su labor científica y personal conmigo. Él fue mi primer director, con la tesina de licenciatura.

Los profesores José Luis Bueso Montero y José Manuel Aroca Hernández-Ros me han dado valiosas sugerencias para esta memoria, y también se han tomado la molestia de contestar mis numerosas preguntas.

Quisiera agradecer al conjunto de mis colegas del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla todo el apoyo prestado. Desde escuchar versiones previas de esta memoria, pasando por sugerencias científicas y hasta un excelente ambiente de compañerismo, su aportación ha sido enorme. Quizás deba señalar especialmente a José María Tornero, Juan González-Meneses, Miguel Ángel Olalla y Emilio Briales; y a algunas personas que no son del departamento, como son Maribel, Pacosan, y Uri.

Otras personas que me ayudaron en los malos momentos, y que no puedo dejar de mencionar aquí son Isa, Diego, Virginia, Daniel, María, Enrique y Marinela.

Finalmente, debo agradecer a mi familia, su comprensión y paciencia por las interminables horas que he pasado lejos de ellos.

Índice General

Agradecimientos v

Prólogo 1
Observaciones preliminares 1
Anillos analíticos 3
Anillos de series con exponentes en pirámides 7

1 Planitud normal y función de Hilbert 17
1.1 Variaciones sobre el TPWH 17
1.2 Planitud normal 26
1.3 Interpretaciones geométricas 37

2 Explosiones y técnicas relacionadas 53
2.1 Definiciones 53
2.2 Explosiones analíticas 59
2.3 El transformado estricto en el caso analítico 63

3 Pirámides y redes 67
3.1 Cálculo baricéntrico 67
3.2 Convexos: pirámides 73
3.3 Redes y pirámides 82
3.4 Semigrupos 89

4 Anillos de series 99
4.1 Introducción 99
4.2 Explosiones y matrices 110
4.3 Explosiones y pirámides racionales 113
4.4 Matrices en optimización lineal 118
4.5 Optimización lineal y explosiones 123

Prólogo

■ Observaciones preliminares

La presente memoria trata de álgebra. Esta afirmación puede parecer obvia, pero hay que ponerla en el dominio de las intenciones, es decir, la memoria está escrita así intencionadamente. El álgebra que se desarrolla aquí viene directamente de la Geometría, sobre todo la de las singularidades: tan directamente que, ni siquiera, hay generalizaciones de conceptos.

Hemos querido rellenar una cierta laguna. Los estudiantes de Geometría Algebraica utilizamos, en general, el álgebra como una herramienta, que nos interesa sólo en cuanto que tiene aplicaciones a nuestro campo. Esta memoria es un intento de reflexionar sobre el álgebra de la Geometría como tal álgebra, es decir, independientemente de las aplicaciones. La primera sorpresa que encontramos es la riqueza de las estructuras que manejamos. Es esta riqueza la que nos permite obtener resultados nuevos, que un uso meramente instrumental no detecta.

Quede claro que toda nuestra afición va hacia las aplicaciones geométricas. Sin embargo, hemos creído conveniente examinar la herramienta con todo detalle, casi "a nivel molecular". Cuando usamos algo como herramienta tendemos a pensar que, conocida su utilidad para nosotros, ya sabemos todo sobre ella. Esto nos ha pasado en esta memoria, sobre todo en su primera parte. Cuando nos propusimos estudiar a fondo los anillos e ideales analíticos, la primera reacción que tuvimos fue de escepticismo. Después del manuscrito de Teissier, *Quelques calculs utiles* ... (véase [LJT71]) y el también manuscrito de Aroca-Hironaka-Vicente (véase [AHV00]) pensamos que todo estaba dicho sobre la utilización de las bases estándard de Hironaka (de Gröbner para otros). Pero, como todo estudiante de doctorado, nuestra misión de comprender estos textos fundamentales nos hizo ver sus carencias, sus lagunas y, por qué no decirlo, la incorrección de algunas de sus demostraciones. Desde ese

momento pensamos que había cosas nuevas que decir, desde el punto de vista de la corrección y desde el punto de vista de los resultados.

La situación de la segunda parte es completamente distinta. Se trata de un campo algebraico íntimamente ligado a la Geometría, pero mucho más inexplorado, salvo algún tímido esfuerzo aquí y allá, como por ejemplo el artículo de McDonald [McD95] y la tesis de F. Aroca (Universidad de Valladolid, Dic. 2000), [Aro00].

¿Qué tienen de común ambas partes de la memoria? La aplicación de una única filosofía: la construcción de un diccionario práctico entre combinatoria y álgebra. En otras palabras, se trata de poner en un primer plano, tanto conceptual como operativo, la estructura combinatoria subyacente a muchas partes del álgebra. El axioma es utilizar la combinatoria en todo lo que se pueda, sustituyendo en la medida de lo posible los grandes teoremas estructurales del álgebra. *Esto no quiere decir que los grandes teoremas del álgebra se puedan sustituir por razonamientos combinatorios.* Ni siquiera la formulación de una tal frase tiene sentido. Lo que quiere decir es que, en ciertas categorías de anillos (como son los analíticos o los de series con exponentes en ciertos dominios de $\mathbb{Z}^n$), la aplicación de los teoremas generales se puede sustituir por técnicas combinatorias o, lo que es lo mismo, por algoritmos, implementables o no en computador.

La memoria tiene, pues dos partes, de las que hacemos resumen separadamente. La primera trata de combinatoria y anillos de series convergentes. La segunda trata de anillos de series con exponentes enteros dentro de pirámides de $\mathbb{R}^n$.

Una advertencia final a esta observaciones es la siguiente. Detrás de esta memoria hay cientos de horas de programación MAPLE y algoritmos que implementan casi cada paso que se da en ella. En la primera parte, referente a los anillos analíticos, los algoritmos actúan sobre ideales engendrados por polinomios que se tratan como series. En la segunda actúan sobre pirámides e ideales monomiales. Baste decir aquí que esos algoritmos existen. No les hemos dedicado espacio en esta memoria *para no oscurecer los teoremas algebraicos, geométricos y combinatorios detrás del inmenso bosque del cálculo explícito.* También hay que reconocer que la mayoría de esos algoritmos están incompletos, es decir, no documentados aún, lo que sólo los hace útiles para su autor. Irán saliendo poco a poco en el futuro, conforme se vayan necesitando para ilustrar o demostrar otros resultados teóricos.

■ Anillos analíticos

La idea base se remonta a un seminario no publicado del Prof. Vicente en la Facultad de Ciencias de Orsay (Francia) en Noviembre de 1982, y está incluída en el manuscrito [AHV00]. Tenemos un anillo $R = \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}$ de series convergentes en las variables $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_c)$ y $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ y fijamos el ideal $\mathfrak{p} = (\boldsymbol{z})$ y un ideal $I \subset Z$. Designamos por $\mathfrak{m}$ al ideal maximal de R.

Consideremos el anillo graduado

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}[\tilde{\boldsymbol{z}}],$$

donde $\tilde{\boldsymbol{z}} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_c)$, con $\tilde{z}_j = z_j + \mathfrak{p}^2$, para $1 \leq j \leq c$. Sea $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$ el ideal inicial de I en $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R)$, designemos por $\tilde{f}$ a la forma inicial de f respecto de $\mathfrak{p}$, que se la llama también la forma inicial respecto de $\boldsymbol{z}$, o la $\boldsymbol{z}$-forma inicial. Al $\mathfrak{p}$-orden de f (o el $\boldsymbol{z}$-orden) y se le representa por $\nu_{\mathfrak{p}}(f) = \nu_{\boldsymbol{z}}(f)$.

Sea

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c} f_A(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{z}^A \neq 0 \quad f_A(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$$

una no unidad de R. Escribiremos

$$\overline{u}(f) = \{A \in \mathbb{Z}_0^c \mid |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f) \text{ y } f_A(\boldsymbol{0}) \neq 0\}.$$

y definiremos el símbolo $u(f) = \sup_{<_{\mathrm{lex}}} \overline{u}(f)$, donde $\sup_{<_{\mathrm{lex}}}$ significa el supremo para el orden lexicográfico. Finalmente, pondremos

$$u(I) = \{u(f) \mid f \in I,\ \overline{u}(f) \neq \varnothing\}.$$

Como I es un ideal se tiene que $U(I) + \mathbb{Z}_0^c = U(I)$,

Nos va a interesar el anillo graduado

$$\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I) = \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}[\tilde{\boldsymbol{z}}]/\,\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I) = \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}[\boldsymbol{z}^*],$$

donde $z_j^* = \tilde{z}_j + \mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$, para $1 \leq j \leq c$. La situación de *planitud normal* se da cuando $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre (o, equivalentemente, plano) como módulo sobre $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\} = R/\mathfrak{p}$; esto ocurre si y sólo si

$$\Gamma = \{(\boldsymbol{z}^*)^A \mid A \notin u(I)\}$$

es una base libre.

Ésta es la situación inicial de [AHV00]. La de [LJT71] no es así, sino mucho más clásica. Bien es verdad que trata de planitud normal y función de Hilbert,

pero con métodos clásicos, en el que las demostraciones están muy claras en el caso algebraico, pero mucho menos en el analítico. Nuestro trabajo, respecto de [LJT71], representa un adelanto muy evidente en formulación, en técnicas de demostración y en logro de nuevos resultados que clarifican la estructura de la planitud normal, la función de Hilbert y la estratificación de Samuel. A su vez, [AHV00] representa un avance importante sobre [LJT71]. Nuestro trabajo, respecto de [AHV00] representa varias cosas:

1. Demostraciones correctas y completas, allí donde [AHV00] adolece de un aspecto o del otro.

2. Automatización de los procesos de división a la Hironaka, lo que permite dividir sin cuidados especiales por familias de series que verifiquen unas mínimas condiciones de "generalidad combinatoria".

3. Utilización exhaustiva del objeto combinatorio $u(I) \subset \mathbb{Z}_0^c$ para simplificar demostraciones y obtener resultados nuevos, bien intuidos a partir de [AHV00], bien corrección de enunciados de él.

4. Utilización del objeto combinatorio $u(I) \subset \mathbb{Z}_0^c$ para poner de relieve la estructura combinatoria de los conceptos básicos para la resolución de singularidades. Así se evita el tener que recurrir a teoremas algebraicos muy generales, que enmarañan todo.

La Sección 1.1 está dedicada, por una parte, a la automatización de los procesos de división. El resultado clave es la Proposición 1.1.5, que dice lo siguiente: supongamos que

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c)$$

es una unión irredundante, y sea $I = (g_1, \ldots, g_r)$ con $u(g_i) = A_i$. Entonces $(g_1, \ldots, g_r)$ es una base de división de I, esto es, se puede dividir aplicando el Teorema de Weierstrass-Hironaka. De esta forma ya no habremos de procuparnos de demostrar las hipótesis del Teorema de división de Weierstrass-Hironaka para la clase de familias que utilizaremos.

El segundo resultado clave de esta sección, y el principal, es la Proposición 1.1.7, utilizada implícitamente en [AHV00] pero no demostrada, que afirma que el conjunto Γ definido más arriba es, en cualquier caso (es decir, no necesariamente en la situación de planitud normal), un sistema minimal de generadores de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ como $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\} = R/\mathfrak{p}$-módulo. Demostrar esto revierte a probar que todo monomio $\boldsymbol{z}^A$ con $A \in u(I)$ es combinación lineal

de un número finito de monomios de con exponentes en Γ módulo el ideal inicial correspondiente. Para ser más precisos, para cada $A \in u(I)$ existe una serie $h_{A,0}$ tal que $\mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(h_{A,0})$ tiene intersección vacía con $u(I)$, $\boldsymbol{z}^A - h_{A,0} \in I$, $\nu_{\boldsymbol{z}}(h_{A,0}) \geq |A|$, y, además, todas las series $h_{A,0}$ tienen un campo de convergencia común, independientemente de A. Este resultado es utilizado ampliamente por [AHV00], pero lo da como evidente, y lo hace de forma parcial: sólo le interesa la convergencia de cada $h_{A,0}$. No es evidente; en preparar la demostración hemos empleado las once páginas de esta sección.

La Sección 1.2 estudia el caso de planitud normal. El primer resultado clave es el Teorema 1.2.7, que afirma que la condición de planitud normal es equivalente a la existencia de una base estándar equimúltiple para I. La condición de estándar significa que las formas iniciales ordinarias de los elementos de la base generan el ideal inicial ordinario. La condición de equimúltiple para una serie significa que tiene el mismo orden en $\boldsymbol{z}$ que en todas las variables. Este teorema está contenido en [AHV00] pero la demostración es ampliamente incompleta. La clave de esta demostración está en la demostración de la Proposición 1.2.8 que es ignorada por [AHV00].

El segundo resultado clave es el Teorema 1.2.11 que afirma que planitud normal es equivalente a constancia local de la función de Hilbert. Este resultado es ampliamente conocido desde los principios de la moderna resolución de singularidades, es decir, desde el trabajo de Hironaka de 1964, [Hir64]. ?ïQué hay, pues de nuevo, en nuestra memoria respecto de este resultado? La demostración, que se hace por los métodos combinatorios ya introducidos. Más que de una demostración se podría hablar de una interpretación gráfica de $u(I)$. Es decir, la simple visualización mental de la nube $u(I)$ hace que el resultado parezca como evidente. Naturalmente, nosotros lo describimos con palabras y fórmulas por razón de precisión, pero es visual o intuitivo. En otras palabras, éste es un ejemplo de que nuestro esquema combinatorio vuelve intuitivas nociones conseguidas duramente en términos abstractos.

La Sección 1.3 suministra más ejemplos de visión intuitiva de nociones abstractas. Se comienza interpretando en términos combinatorios la función de Hilbert. El objeto clave aquí es el diagrama de Newton $e(I)$ en todas las variables, que se define como indicamos a continuación. Si tomamos una no unidad distinta de cero $f \in R$ y escribimos

$$f = \sum_{(A,B)\in\mathbb{Z}_0^c\times\mathbb{Z}_0^d} f_{A,B}\boldsymbol{z}^A\boldsymbol{w}^B \quad f_{A,B} \in \mathbb{C}$$

definimos el diagrama de Newton como el conjunto

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}}(f) = \{(A,B) \in \mathbb{Z}_0^c \times \mathbb{Z}_0^d \mid f_{A,B} \neq 0\}.$$

Naturalmente, los monomios que están fuera de $e(I)$ son los que determinan, en cada grado, el valor de la función de Hilbert para ese grado.

El resultado principal es el Teorema 1.3.11, cuya parte más importante consiste en demostrar que la condición de planitud normal se da si y sólo si el diagrama de Newton respecto de todas las variables es cilíndrico de base $u(I)$, es decir que $e(I) = u(I) \times \mathbb{Z}_0^d$. Dentro de la misma técnica de mostrar lo intuitivo tenemos el Teorema 1.3.14 que dice, esencialmente, que la planitud normal se da siempre, aunque de forma genérica es decir, no donde nosotros queramos, pero de manera abierta y lo suficientemente cerca. Finalmente, el Teorema 1.3.18 da una prueba casi inmediata de la semicontinuidad superior de la función de Hilbert.

El Capítulo 2 contiene en su mayor parte lenguaje conocido. Está dedicado a describir las explosiones analíticas. A pesar de ser un tema muy conocido, hemos perseguido aquí los objetivos que describimos a continuación.

La primera idea conductora de la redacción de este capítulo ha sido una meramente formal: realizar las comprobaciones analíticas que [AHV00] da como evidentes y que algunas no lo son en absoluto. Las demostraciones completas que suministramos aquí no deparan ninguna sorpresa: lo enunciado en [AHV00] es correcto.

Un segundo objetivo ha consistido en dar una demostración completa del Teorema 2.3.2 que, si se permite una expresión informal, todo el mundo da por sentado pero nadie demuestra y casi nadie enuncia. Este teorema está en el origen de la noción de base estándar equimúltiple. El problema consiste en dar un conjunto razonable de ecuaciones para el transformado estricto de un espacio analítico porque la teoría general suministra un número exagerado de ecuaciones redundantes. El teorema dice que un sistema de ecuaciones para el transformado estricto por una explosión permitida (es decir, con centro normalmente plano) es el conjunto de los transformados estrictos de los elementos de una base estándar equimúltiple.

El tercer objetivo de esta sección conecta estrechamente con lo anterior. Se trata de suministrar un sistema mecánico para razonar a través de una serie finita de explosiones. El sistema está ahí, pero no lo seguimos. ¿Cuál es el sistema? Una suma de conocimientos combinatorios y un algoritmo de un paso, para ir de unas ecuaciones de un espacio a las del explotado. A poco que se reflexione ya se puede ver que son abordables cuestiones fundamentales, como son:

1. ¿Qué ha de ocurrir para que se conserve la planitud normal después de una explosión?

2. ¿Qué ocurre cuando se pierde la planitud normal después de una explosión?

3. ¿Cómo evolucionan los diagramas de Newton y/o la función de Hilbert por explosiones permitidas?

No hemos querido entrar por este camino para no repetir más resultados que ya se conocen de forma teórica. La novedad en este caso es la técnica de tratamiento y demostración. Para no repetir más, nos hemos detenido en el lugar en que ya aparece razonable que nuestras técnicas combinatorias reemplazan a las clásicas.

■ Anillos de series con exponentes en pirámides

La utilización de los anillos de series o polinomios con exponentes dentro de unos ciertos objetos geométricos adecuados no es nueva. Los dos campos clásicos han sido las singularidades de superficies y las variedades tóricas, por usar el orden cronológico. De las variedades tóricas diremos sólo un par de frases. Son variedades con paramétricas monomiales o, equivalentemente, con ecuaciones binomiales. La referencia imprescindible en el libro de Tadao Oda [Oda88]. Los monomios que parametrizan a este tipo de variedades están contenidos en conos estrictamete convexos. La combinatoria de estos conos produce resultados geométricos. Por ejemplo, las explosiones de las variedades tóricas dan lugar a abanicos, que describen las cartas de la explosión. Nosotros no tratamos ese campo, relativamente bien trillado.

En singularidades de superficies se trabaja con anillos de series con exponentes en un sector del plano, o un cono estrictamente convexo en dimensión 2. No se trata de singularidades cualesquiera, sino jungianas, por H Jung (véase [Jun08]). En pocas palabras, las singularidades jungianas aparecen en la forma que describimos. Sea $f : X \to S$ un morfismo finito de superficies (algebraicas o analíticas) con S lisa y sea $S_0 \subset S$ el lugar de ramificación de f. Se puede considerar la resolución sumergida $\varphi : S' \to S$ de S_0, es decir, que S' es una superficie lisa y φ un morfismo propio, donde $\varphi^{-1}(S_0)$ es un divisor S'_0 con cruzamientos normales. En esta situación el producto fibrado $g : X' \to X$ nos produce un morfismo $f' : X' \to S'$ cuyo lugar de ramificación es S'_0. En el entorno de cada punto singular de S'_0 la singularidad de X' puede ser descrita en términos de paramétricas de Puiseux casi-ordinarias. La normalización $\overline{X}'$ de X' tiene un número finito de puntos singulares y es una variedad tórica en el entorno de cada uno de ellos.

Se puede obtener combinatoriamente, para cada punto, el conjunto de monomios que determinan esta variedad tórica. Se puede, bien hacer un cálculo explícito a través de los pares característicos de la serie casi-ordinaria de partida, bien pasar por los anillos de las singularidades de Hirzebruch-Jung (de la forma $Z^q - XY^p$, m.c.d$(p,q) = 1$). Sea de una forma u otra, el famoso trabajo de Hirzebruch [Hir53] produce una resolución automática de estas singularidades tóricas bidimensionales. La referencia exhaustiva en este campo es el manuscrito de Kiyek-Vicente [KV02], a publicar.

En todos los problemas y técnicas que hemos podido revisar (¡y esto incluye el libro de Oda!) se echa en falta un tratamiento sistemático de los anillos de series o polinomios *desde el punto de vista exclusivamente algebraico.* Se trata de anillos con propiedades muy interesantes. A fuerza de buscar el diccionario que traduzca el lenguaje combinatorio al geométrico, se ha olvidado el diccionario entre el lenguaje combinatorio y el algebraico. Nuestra aportación de la segunda mitad de la memoria construye buenas partes de este diccionario. Ésta es la intención que hemos perseguido y de cuyos resultados damos un resumen a continuación.

En primer lugar necesitamos un subsemigrupo Σ de $\mathbb{Z}^n$ para tomar monomios con exponentes en él. Esto revierte a convertir Σ en un semigrupo multiplicativo Σ_X, monomios en $X = (X_1, \ldots, X_n)$, que se tomará luego, bien como base del k-espacio vectorial de los polinomios (k = cuerpo arbitrario), bien como dominio de definición de funciones arbitrarias $f : \Sigma_X \to k$ que son las series en esos monomios. Este semigrupo Σ va a ser el conjunto de puntos de coordenadas enteras contenidos en un objeto geométrico que llamamos *pirámide.*

Una pirámide en en un espacio euclídeo n-dimensional X es algo más que un cono estrictamente convexo; necesita "tener cuerpo" y necesitamos un concepto operativo de *hiperplano transversal* a una pirámide. Ambos problemas se resuelven definiendo la pirámide en la siguiente forma: el dato de entrada es un hiperplano H de X, un punto exterior $O \notin H$ y un convexo $\Delta \subset H$, compacto y de interior no vacío en H; entonces la pirámide $\Gamma(\Delta)$ es la unión de las semirrectas de origen O que contienen a un punto de Δ.

En el Capítulo 3, Sección 3.1, introducimos un poco de lenguaje de convexos. El objetivo prioritario de esta sección es entresacar de la literatura unos hechos (¡muy pocos!) básicos y esenciales en lo que sigue. Son conocidas de sobra las complicaciones y, ¿por qué no decirlo?, las dificultades de la geometría o el análisis convexo. Hay hechos básicos, que jamás se citan explícitamente, pero que subyacen a una inmensa mayoría de razonamien-

tos en geometría convexa. Son estos hechos, mantenidos en silencio, los que hacen posibles los razonamientos elegantes y sintéticos en esta rama. Destacamos en nuestra Sección 3.1 el Teorema de Carathéodory, 3.1.5, que es el substrato de la mayoría de razonamientos sobre convexos cerrados.

En la Sección 3.2 entramos en materia sobre las pirámides que definimos antes. Un convexo dentro de un espacio euclídeo tiene interior no vacío en él si y sólo si lo engendra como variedad afín, es decir, está contenido minimalmente en él. Lo que es esencial en la definición es que Δ tenga interior no vacío y sea acotado. Lo de cerrado lo ponemos por comodidad en algún punto concreto o, si se quiere, por brevedad. Lo mismo se podrían escribir nuestros desarrollos sin poner la hipótesis de cerrado, sólo acotado y de interior no vacío.

Es esta sección hay una función que da mucho jugo: la proyección estereográfica π de centro O, que lleva el semiespacio H_1^+ de borde el hiperplano H_1 paralelo a H por O y que contiene a H, sobre H. Esta proyección estereográfica es la que permite trasladar a la pirámide $\Gamma(\Delta)$ propiedades topológicas del convexo Δ. Por ejemplo, un resultado crucial en lo que sigue refleja el comportamiento de π: que si Γ_1 es una subpirámide *propia* de $\Gamma(\Delta)$ tal que existe un punto interior a $\Gamma(\Delta)$ no perteneciente a Γ_1, entonces existe una bola abierta contenida en $\Gamma(\Delta)$ que no corta a Γ_1 (Proposición 3.2.19). Como decimos, este resultado va a ser la clave de la no generación finita de semigrupos o la no noetherianidad de anillos.

Un concepto básico es el de pirámide poliédrica: la que proyecta a un poliedro $\Gamma \subset H$, entendiendo éste como el cierre convexo de un número finito de puntos de H que generen H como hiperplano. Una clase de pirámides poliédricas, las racionales, va a marcar la frontera entre la finitud algebraica y la no finitud. La sección concluye con un denso comentario sobre transversalidad, en las Notas 3.2.23. Dicho en pocas palabras, un hiperplano transversal es uno que corte a todas las semirrectas que constituyen la pirámide. La importancia de los hiperplanos transversales es que, mediante ellos, vamos a obtener funciones de grado sobre monomios y polinomios, así como funciones de orden sobre series. De hecho, si H es un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$, de ecuación $f = 0$, donde f es una función afín tal que $f(O) < 0$, entonces $\vec{f}$ es una forma lineal positiva sobre todos los puntos de $\Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$.

En la Sección 3.3 introducimos los semigrupos Σ. El dato de entrada es una red, que es un par (O, G) donde $O \in X$ y G es un subgrupo abeliano libre del espacio vectorial subyacente V, engendrado por una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V. Los puntos de la red son los $O + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in G$. Los puntos de la red contenidos

en $\Gamma(\Delta)$ forman un subsemigrupo Σ de G, siempre que se identifique V con el conjunto de vectores fijos de origen O. Tomando coordenadas respecto de $(O;\mathcal{B})$, los puntos de Σ son los puntos de coordenadas enteras contenidos en $\Gamma(\Delta)$.

Tomando una forma lineal positiva sobre $\Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$, por ejemplo la parte vectorial de una función afín f tal que $f(O) < 0$ y $f = 0$ defina H, se puede asignar un grado a los elementos de Σ y se pueden ordenar éstos mediante el orden diagonal: por grados y desempata el orden lexicográfico.

Como resultados finales de esta sección vemos que todo compacto Ω contiene un número finito de puntos de la red (Teorema 3.3.6). Esta observación, aparentemente sin importancia, tiene una aplicación estrella: el conjunto de monomios de grado menor o igual que una constante dada es finito. Esto sirve para definir grados de polinomios y órdenes de series y es gracias a este resultado que el producto de series va a tener sentido.

Finalizamos la Sección 3.3 con la noción de pirámide poliédrica racional: es una pirámide poliédrica en la cual las aristas (proyección de los vértices de Δ) contienen puntos de Σ. Considerando coordenadas demostramos que una pirámide es poliédrica racional si y sólo si existe un hiperplano transversal K, con una ecuación afín con coeficientes enteros, que la corta en un poliedro con vértices enteros (Teorema 3.3.12).

La Sección 3.4 está dedicada a la demostración de un resultado clave: el semigrupo Σ está finitamente generado si y sólo si la pirámide $\Gamma(\Delta)$ es poliédrica racional (Teorema 3.4.7). La demostración discurre de la manera natural, aunque es bastante difícil. Se descompone en dos proposiciones, 3.4.4 y 3.4.5, que demuestran cada una de las implicaciones. Las ideas son como se explica a continuación. Si $\Gamma(\Delta)$ es poliédrica racional, tenemos unos vértices $\{B_1, \ldots, B_m\}$ enteros de un poliedro Δ_1 contenido en un hiperplano tranversal K a $\Gamma(\Delta)$ de modo que $\Gamma(\Delta) = \Gamma(\Delta_1)$. Consideremos la "celda"

$$\Lambda = O + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OB_i}, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m;$$

entonces los trasladados de Λ por el grupo de traslaciones engendrado por las τ_i de vector $\overrightarrow{OB_i}$, $i = 1, \ldots, m$ cubren $\Gamma(\Delta)$. Como dentro de la celda hay sólo un número finito de puntos de Σ, resulta de ahí la generación finita.

El recíproco es más sutil. Si ahora $\Gamma(\Delta)$ no es racional, observamos que todo subsemigrupo de Σ finitamente generado está contenido en una subpirámide poliédrica racional Γ_1 de $\Gamma(\Delta)$. Como consecuencia de la Proposición 3.2.19, que afirma que hay una bola abierta dentro de $\Gamma(\Delta) \setminus \Gamma_1$, y de la invariancia

de este conjunto por homotecias de centro O, deducimos la existencia de un punto de Σ fuera de Γ_1. Y, no olvidemos, esto para cualquier Γ_1 o subsemigrupo finitamente generado de Σ. Esto implica automáticamente que Σ no puede estar finitamente generado.

Se termina la Sección 3.4 con dos ejemplos que son muy ilustrativos. El primero hace ver cómo el semigrupo Σ dentro de una pirámide no racional no está finitamente generado. Se considera la pirámide poliédrica no racional dentro de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma(\Delta) = \{O + \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,\exp(1)) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}, \quad \Delta = \overline{(1,0)(1,\exp(1))}.$$

El ejemplo hace ver que el considerar subpirámides poliédricas racionales dentro de $\Gamma(\Delta)$ que contengan a semieje positivo de abcisas revierte a considerar aproximaciones racionales de $\exp(1)$. De ahí queda patente la no generación finita de Σ.

El segundo ejemplo está inspirado en técnicas, no iguales pero sí parecidas, a las utilizadas en [KV02] para la resolución de las singularidades de superficies de Jung-Hirzebruch. Dada una pirámide poliédrica racional plana calculamos explícitamente el semigrupo Σ. El procedimiento es construir un cambio de base en $\mathbb{Z}^2$ de manera que $\Gamma(\Delta)$ se transforme en la pirámide generada por los vectores $(1,0)$ y (p,q) donde $p,q \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p < q$, m.c.d $(p,q) = 1$. En este caso, un sistema de generadores (redundande en general) de Σ está constituido por los puntos (x,y) con $1 \leq x \leq p$ y

$$\frac{q}{p+1}x \leq y \leq \frac{q}{p}x.$$

Para quitar las redundancias basta fijarnos en las segundas coordenadas de los puntos: cuando alguna de ellas (en el orden que salen) es pertenece al subsemigrupo de $\mathbb{Z}$ engendrada por las anteriores, entonces se puede eliminar el punto. Así por ejemplo, para $p = 6$, $q = 25$ un sistema minimal de generadores de Σ es

$$(1,4), (3,11), (5,18), (6,25).$$

El Capítulo 4 contiene el diccionario básico entre combinatoria y álgebra, entre geometría convexa y álgebra. A veces la traducción de los conceptos no opera por analogía esencial sino funcional. Un ejemplo clarísimo de esto es el siguiente: cuando hablemos de series veremos que no es lo mismo semigrupo finitamente generado que ideal monomial finitamente generado, pero esto en el terreno del concepto. En el funcional veremos cómo ambos conceptos se

implican mutuamente: es decir un cierto ideal monomial, básico en nuestros estudios, es finitamente generado si y sólo si Σ lo es. El ideal a que nos referimos es, por supuesto, el engendrado por los monomios

$$\{X^A \mid A \in \Sigma\}.$$

Mantenemos los datos básicos que venimos utilizando. En la Sección 4.1 se introducen los conceptos primarios de polinomios y series con exponentes en Σ. Dada una colección de variables $X = (X_1, \ldots, X_n)$ los monomios con exponentes en Σ son los X^A con $A \in \Sigma$. Las series en X con exponentes en Σ son las funciones $f : \Sigma \to k$, donde k es el cuerpo base, arbitrario por demás. Los polinomios son las series de soporte finito. El hecho, visto más arriba, de que, elegida una forma lineal positiva sobre $\Gamma(\Delta)$ para marcar un grado, el conjunto de los monomios de grado menor o igual que una costante es finito, implica que la multiplicación ordinaria de series está bien definida. Por supuesto, en el anillo de series $k[\![\Sigma_X]\!]$ las unidades son las series con término independiente distinto de cero. Esto significa que $k[\![\Sigma_X]\!]$ es un anillo casi-local, es decir, con un ideal maximal (no necesariamente noetheriano) que es el ideal N formado por las series de orden positivo. Este ideal contiene propiamente, en general, al ideal M generado por los monomios con exponentes en Σ. Más aún, $k[\![\Sigma_X]\!]$ es completo con respecto a la topología N-ádica, luego será noetheriano si y sólo si N está finitamente generado como ideal. Esto ocurre en un solo caso, como veremos en un momento.

El resultado clave para comenzar el diccionario es la Proposición 4.1.5, que afirma que el ideal M está finitamente generado si y sólo si el semigrupo Σ está finitamente generado o, equivalentemente, si y sólo si $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide poliédrica racional (Teorema 3.4.7). Sin embargo, los dos conceptos no son idénticos: si Σ_1 es un subsemigrupo finitamente generado e I es el ideal engendrado por los monomios con exponentes en Σ_1 es evidente que en I hay más monomios que aquéllos que tienen exponentes en Σ_1. Por tanto, ideal monomial no es la traducción exacta de subsemigrupo.

El teorema principal de la Sección 4.1 es el 4.1.7 que afirma que son equivalentes:

1. El anillo $k[\Sigma_X]$ es noetheriano.
2. El anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es noetheriano.
3. $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide racional.
4. Los ideales M y N de $k[\![\Sigma_X]\!]$ coinciden.

Éste es un teorema enormemente fuerte, que tiene unas implicaciones casi filosóficas: la finitud algebraica está ligada estrechamente a la finitud geométrica, entendiendo por finitud geométrica lo constructible racionalmente a partir de lo entero o racional. En otras palabras, dentro de este esquema las condiciones de finitud del álgebra conmutativa son la contrapartida de lo algorítmico con datos iniciales enteros.

Terminamos la Sección 4.1 con dos observaciones. Una de ellas es sencilla, y construye los anillos $k[\![\Sigma_X]\!]$ y $k[\Sigma_X]$ como cocientes de anillos del mismo tipo en argumentos variables. Por supuesto, en el caso noetheriano, el anillo $k[\Sigma_X]$ es el de una variedad tórica. En general, la dimensión es n, la del espacio ambiente X de la pirámide.

La última obervación es más fuerte. En el caso no noetheriano, los anillos de series no tienen ni siquiera la otra característica de finitud más débil: la coherencia. En otras palabras, cuando falla la finitud, falla hasta sus últimas consecuencias. La dificultad del tema ha hecho que no podamos demostrar que los anillos no noetherianos $k[\![\Sigma_X]\!]$ *no son nunca coherentes*, como sopechamos que ocurre. Nos hemos tenido que contentar con un ejemplo, sin dejar ni mucho menos de lado la idea de una futura vuelta sobre el tema. El ejemplo lo damos en la pirámide plana proyección desde el origen del segmento $\overline{(1,0)(1,\exp(1))}$. El desarrollo en fracción continua infinita de $\exp(1)$ nos permite dar un ideal monomial cuyo módulo de sicigias no está finitamente generado. La técnica es extraordinariamente complicada, lo suficientemente para no haberla podido generalizar hasta el presente. Sin embargo, la idea no puede ser en sí complicada: se debe poder jugar con el hecho de encontrar puntos de Σ fuera de cualquier subpirámide racional de $\Gamma(\Delta)$, en el caso en que ésta no sea poliédrica racional.

Las secciones que restan de este capítulo abordan unos problemas que me han sido transmitidos por tradición oral. Apenas unas líneas hay escritas sobre el tema. La referencia más cercana es la tesis de Fuensanta Aroca, [Aro00], en la Universidad de Valladolid, Diciembre de 2000, en la que se trata el caso bidimensional exclusivamente, por supuesto como herramienta para otra finalidad. Pero expliquemos de qué tratan los problemas.

Cuando las explosiones monomiales se interpretan en función de los exponentes entramos en el álgebra lineal. Esto se ve muy bien en la Sección 4.2. La explosión monomial

$$X_l \to X_l \quad \forall l \neq j \quad X_j \to X_i X_j$$

actúa sobre lo exponentes de los monomios de esta manera:

$$(a_1,\ldots,a_n) \to (a_1,\ldots,a_i \overset{i)}{+} a_j,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_n)M_{ij}$$

donde M_{ij} es la matriz $n \times n$ que tiene ceros en todas las posiciones, salvo unos en la diagonal principal y un 1 posición (j,i). La llamaremos *matriz de explosión*. La inversa de M_{ij} se llama *matriz de implosión* y es la matriz $n \times n$ que tiene ceros en todas las posiciones, salvo unos en la diagonal principal y un -1 posición (j,i).

No hay ningún problema entonces en considerar las explosiones como automorfismos de V, que actúan post-multiplicando matrices de coordenadas por matrices M_{ij}. Un primer problema, esta vez débil, es el siguiente: dado que las matrices de implosiones e implosiones son enteras de determinante 1, ¿generarán el grupo especial lineal sobre $\mathbb{Z}$? La respuesta es afirmativa, como se prueba en el Teorema 4.2.5, cuya demostración es algorítmica, es decir que se puede tranformar en un algoritmo implementable en computador que realice la descomposición de una matriz entera de determinante 1 en producto de matrices de explosiones e implosiones. Por supuesto que no hay ni que pensar en unicidad del proceso.

En la Sección 4.3 entramos ya un poco en el problema fuerte. Éste consiste en partir de una pirámide poliédrica racional $\Gamma(\Delta)$ y ver cómo se transforma por explosiones, no implosiones. Las explosiones se "portan bien" con respecto a las pirámides poliédricas racionales: si $\{A_1,\ldots,A_m\}$ son los vértices de Δ y π es una explosión monomial, entonces $\pi(\Gamma(\Delta))$ es una pirámide poliédrica racional, proyección desde O del poliedro de vértices $\{\pi(A_1),\ldots,\pi(A_m)\}$. El enunciado del problema fuerte es el siguiente: ¿hasta qué punto una pirámide poliédrica racional puede ser llevada al primer cuadrante por explosiones? Entendemos por primer cuadrante el conjunto

$$O + \langle \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\rangle_+ = \left\{ O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n \right\}.$$

y por opuesto del primer cuadrante

$$O + \langle \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\rangle_- = \left\{ O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \lambda_i \leq 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n \right\}.$$

Con el problema así planteado salta a la vista una primera observación. Tanto el primer cuadrante como el opuesto del primer cuadrante son estables por explosiones; por tanto, para que una pirámide poliédrica racional pueda ser llevada al primer cuadrante por explosiones es necesario que sólo

contenga el punto O del opuesto del primer cuadrante. A esta condición la denominamos con la frase: $\Gamma(\Delta)$ *no entra en el opuesto del primer cuadrante.* La solución final es el teorema que afirma que la pirámide poliédrica racional $\Gamma(\Delta)$ puede ser llevada por explosiones al primer cuadrante si y sólo si no entra en el opuesto del primer cuadrante (Teorema 4.3.3).

La demostración de la suficiencia es todo un logro, por ser de una dificultad intrínseca muy grande. La génesis de esta demostración fue como explicamos a continuación. Comenzamos por hacer una nueva demostración del teorema cuando $n = 2$, que ya había sido publicada en [Aro00]. Nuestra demostración es mucho más breve y algorítmica (Notas 4.3.7). Notemos que en ella se consideran pirámides engendradas por dos vectores, lo que abarca todas las pirámides poliédricas planas, por definición de pirámide. Notemos también que el camino hacia el primer cuadrante para una pirámide dada no es único. Esto contradice lo que parece indicar [Aro00] con una referencia a la canonicidad, que no hemos entendido en su totalidad.

El siguiente paso fue intentar generalizar de alguna manera los métodos del caso plano. Enseguida nos convencimos que esto no era posible. El siguiente paso fue buscar un método que siguiese la filosofía de la resolución de singularidades: un algoritmo y una medida. Todos los intentos fallaron. Un algoritmo de este tipo pasa por encontrar "explosiones permitidas", o "adecuadas" que mejoren la situación o que no la empeoren y a la larga la puedan mejorar. Estas explosiones sólo pueden consistir en sustituir una columna de una matriz por ella más otra columna de tal modo que el resultado tenga menor suma de términos negativos que la primera. La medida tiene que versar sobre la suma de los términos negativos de cada matriz intermedia. El fracaso fue total: tenemos más de 40 algoritmos y ejemplos implementados en MAPLE que demustran que todos los marcos razonables fallan.

El siguiente paso fue, en cierto modo natural y en otro artificial. Buscamos un criterio para que la pirámide engendrada por los vectores filas de una matriz no entrase dentro del opuesto del primer cuadrante. Esto nos condujo a limitar la pirámide por un hiperplano transversal (o sea, trabajar con un poliedro en X), para intentar averiguar si dentro de ese poliedro había vectores del opuesto del primer cuadrante. El procedimiento para averiguar esto fue el método del símplex, utilizado en optimización lineal e implementado en un paquete de MAPLE, lo cual ya era una ayuda nada desdeñable. La idea es que, si el poliedro entra dentro del opuesto del primer cuadrante, un extremal del método del símplex debe estar dentro del opuesto del primer cuadrante. Con esto tenemos un algoritmo sólido para verificar cuándo estamos en esa

situación. Entrando ya en optimización lineal, la utilización del teorema de Farkas-Minkowsky nos permite resolver sistemas de desigualdades, cosa que nos viene muy bien. Una concienzuda reflexión nos llevó a darnos cuenta de que, dada una matriz A cuyas vectores filas engendran la pirámide poliédrica de partida, la existencia de un camino hacia el primer cuadrante por post-multiplicación por matrices de explosiones venía implicada por la existencia de una solución positiva del sistema $Ay > 0$, donde y es una matriz columna de incógnitas. Este hecho no es trivial, pero es cierto y clave para nuestros propósitos. En esta situación, una variante del teorema de Farkas-Minkowski (Corolario 4.4.6) nos dice que, si la pirámide no entra en el opuesto del primer cuadrante, entonces esa solución existe. Por tanto, nuestra prueba está completa.

No damos ya detalles técnicos de la demostración porque no son más que desarrollos formales de esta idea conductora cuya génesis hemos detallado. Se encuentran en las tres últimas secciones de la memoria.

Capítulo 1

Planitud normal y función de Hilbert

1.1 Variaciones sobre el TPWH

Ante todo, comenzamos diciendo que las siglas TPWH significan el *teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka*, tal como se contiene en [AHV00]. Para poder aplicar este teorema es necesario encontrar una forma lineal tal que el orden respecto de ella verifique las propiedades requeridas en las hipótesis. Comenzamos haciendo unos cálculos abstractos que enseguida aplicaremos.

También hay que decir, antes de entrar en materia, que nuestros desarrollos son muchísimo más simples que los de [AHV00] y, además, son constructivos, es decir, se da explícitamente una familia de formas lineales cuyos órdenes asociados verifican las hipótesis del Teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka. Esta familia se obtiene por una pequeña perturbación de la función de orden y permite aplicar el Teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka hasta una profundidad mucho mayor que la utilizada en [AHV00].

■ **Proposición 1.1.1** *Operamos con el espacio de multi-índices $\mathbb{Z}_0^c$. Sean $m, t \in \mathbb{Z}_+$ enteros fijos y consideremos la forma lineal*

$$L = \sum_{i=1}^{c} \left(1 - \frac{1}{10^{i(m+t)}}\right) x_i,$$

donde m es fijo pero muy grande en comparación con t, por ejemplo $m = 10^{10^t}$. Entonces,

1. *Para todo $A \in \mathbb{Z}_0^c$; es $|A| > L(A)$. Más aún,*

$$L(A) \leq t \iff |A| \leq t.$$

2. *Sean $|A| = |B| \leq t$, con $A >_{<\text{lex}} B$, entonces es $L(A) < L(B)$.*

3. *Si* $|A| = |B| \leq t$, *con* $A >_{<\text{lex}} B$, *entonces*

$$L(B) - L(A) < \frac{1}{10^m}.$$

4. *Sea* $|A| \leq t$. *Se tiene*

$$|A| - L(A) < \frac{1}{10^m}$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $A \in \mathbb{Z}_0^c$; está claro que $|A| > L(A)$. Vamos a probar que

$$L(A) \leq t \iff |A| \leq t$$

Desde luego, si $|A| \leq t$ entonces $L(A) \leq t$; vamos a probar el recíproco. Sea $A = (a_1, \ldots, a_c)$; se tiene que

$$L(A) = |A| - \sum_{i=1}^{c} \frac{a_i}{10^{i(m+t)}} \geq |A| - \sum_{i=1}^{c} \frac{a_i}{10^{m+t}} = |A| \left(1 - \frac{1}{10^{(m+t)}}\right)$$

El hecho de que $L(A) \leq t$ implica que

$$|A| \left(1 - \frac{1}{10^{m+t}}\right) \leq t$$

luego que

$$|A| \leq \frac{t}{1 - \frac{1}{10^{m+t}}}$$

Como m es muy grande con respecto a t, entonces el número

$$\frac{t}{1 - \frac{1}{10^{m+t}}}$$

es sólo ligeramente superior a t y estrictamente menor que $t + 1$. Así, $|A| \leq t$.

2. Sean A, $B \in \mathbb{Z}_0^c$, con $|A| = |B| \leq t$, $A >_{<\text{lex}} B$; vamos a probar que $L(A) < L(B)$, o, equivalentemente, que $L(A - B) < 0$. En efecto, sean $A = (a_1, \ldots, a_c)$ y $B = (b_1, \ldots, b_c)$, y sea i_0 el primer índice i tal que $a_i - b_i \neq 0$. Entonces $a_{i_0} - b_{i_0} > 0$. Además, para todo $i = 1, \ldots, c$, es $|a_i - b_i| \leq t$. Tenemos

$$\begin{aligned} L(A - B) &= \sum_{i=i_0}^{c} \left(1 - \frac{1}{10^{i(m+t)}}\right)(a_i - b_i) \\ &= \sum_{i=i_0}^{c} -\frac{1}{10^{i(m+t)}}(a_i - b_i) \end{aligned}$$

porque $\sum_{i=i_0}^{c}(a_i - b_i) = 0$. Como $a_{i_0} - b_{i_0} > 0$ el primer sumando

$$\frac{-1}{10^{i_0(m+t)}}(a_{i_0} - b_{i_0})$$

es negativo y su valor absoluto es

$$\frac{1}{10^{i_0(m+t)}}(a_{i_0} - b_{i_0}) \geq \frac{1}{10^{i_0(m+t)}}.$$

Por tanto, para demostrar que $L(A - B) < 0$ basta ver que

$$\left| \sum_{i=i_0+1}^{c} -\frac{1}{10^{i(m+t)}}(a_i - b_i) \right| < \frac{1}{10^{i_0(m+t)}}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=i_0+1}^{c} -\frac{1}{10^{i(m+t)}}(a_i - b_i) \right| &\leq \sum_{i=i_0+1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}}|a_i - b_i| \\ &\leq t \sum_{i=i_0+1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}} < \frac{t}{10^{(i_0+1)(m+t)}} \\ &= \frac{t}{10^{m+t}} \cdot \frac{1}{10^{i_0(m+t)}} < \frac{1}{10^{i_0(m+t)}} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

3. Sean $A, B \in \mathbb{Z}_0^c$, con $|A| = |B| \leq t$, $A >_{<\text{lex}} B$; vamos a dar una cota superior para $L(B) - L(A) = L(B - A)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} L(B - A) &= \sum_{i=1}^{c}\left(1 - \frac{1}{10^{i(m+t)}}\right)(b_i - a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}}(a_i - b_i) \leq \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}}|a_i - b_i| \\ &\leq t \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}} < \frac{t}{10^{m+t-1}} \leq \frac{1}{10^m} \end{aligned}$$

4. Sea $A \in \mathbb{Z}_0^c$, con $|A| \leq t$; vamos a obtener una cota superior para $|A| - L(A)$. Tenemos

$$\begin{aligned} |A| - L(A) &= \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}} a_i \leq t \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{10^{i(m+t)}} \\ &< \frac{t}{10^{m+t-1}} \leq \frac{1}{10^m} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ **NOTACIÓN 1.1.2** 1.1.2.1. Partimos del anillo $R = \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}$ de las series convergentes en las variables $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_c)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_d)$. Como es normal, utilizaremos la notación simbólica para monomios: si $A = (a_1, \ldots, a_c)$ y $B = (b_1, \ldots, b_d)$, se escribirá

$$\boldsymbol{z}^A = z_1^{a_1} \cdots z_c^{a_c}, \quad \boldsymbol{w}^B = w_1^{b_1} \cdots w_d^{b_d}.$$

Hablaremos indistintamente de multi-índices y de exponentes de monomios. El grado del multi-índice A es el del monomio correspondiente, y se representa por $|A| = a_1 + \cdots + a_c$.

1.1.2.2. Cada serie $f \in R$ se escribirá en las formas:

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c} f_A \boldsymbol{z}^A = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ B \in \mathbb{Z}_0^d}} f_{A,B} \boldsymbol{z}^A \boldsymbol{w}^B$$

donde $f_A \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$ y $f_{A,B} \in \mathbb{C}$.

1.1.2.3. Para cada $f \in R$ como antes se pondrá:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(f) = \{A \in \mathbb{Z}_0^c \mid f_A \neq 0\}$$

y también

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}}(f) = \{(A, B) \in \mathbb{Z}_0^c \times \mathbb{Z}_0^d \mid f_{A,B} \neq 0\}$$

Vamos a definir ahora un objeto combinatorio $u(I)$, que se llama la escalera de I, en la forma que explicamos a continuación.

■ **NOTACIÓN 1.1.3** Sea

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c} f_A(\boldsymbol{w}) \boldsymbol{z}^A \neq 0$$

una no unidad de R.

1.1.3.1. Escribiremos

$$\bar{u}(f) = \{A \in \mathbb{Z}_0^c \mid |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f) \text{ y } f_A(\mathbf{0}) \neq 0\}.$$

Es inmediato que se verifica lo siguiente:

- $\bar{u}(f) = \emptyset \iff \tilde{f} \in (\boldsymbol{w}) \cdot \mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R)$.
- $\bar{u}(f) \neq \emptyset \iff \nu_{\mathfrak{p}}(f) = \nu_{\mathfrak{m}}(f)$, donde $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ es el ideal maximal de R.

1.1.3.2. Si $\bar{u}(f) \neq \emptyset$ se escribirá $u(f) = \sup_{<_{\text{lex}}} \bar{u}(f)$, donde $\sup_{<_{\text{lex}}}$ significa el supremo para el orden lexicográfico.

1.1.3.3. Sea $I \subset (z)R$ un ideal; se pondrá

$$u(I) = \{u(f) \mid f \in I,\ \bar{u}(f) \neq \emptyset\}.$$

Como I es un ideal se tiene que $U(I) + \mathbb{Z}_0^c = U(I)$, luego, por el lema de Dickson (véase [CLO97], página 69), $u(I)$ tiene un número finito de vértices, es decir, es una unión finita irredundante de la forma

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c).$$

En general supondremos a los A_i ordenados de menor a mayor por el orden diagonal $<_{\text{diag}}$, que se define así: si $A, B \in \mathbb{Z}_0^c$, es $A <_{\text{diag}} B$ si y sólo si, bien $|A| < |B|$, o bien $|A| = |B|$ y $A >_{<_{\text{lex}}} B$

1.1.3.4. En la situación anterior, ponemos

$$\begin{aligned}
\square_0 &= \mathbb{Z}_0^c \setminus u(I) \\
\square_1 &= A_1 + \mathbb{Z}_0^c \\
\square_{j+1} &= (A_{j+1} + \mathbb{Z}_0^c) \setminus \bigcup_{i=1}^{j} (A_i + \mathbb{Z}_0^c), \quad 1 \leq j \leq c-1.
\end{aligned}$$

■ **NOTACIÓN 1.1.4** Sea

$$L = \sum_{i=1}^{c} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{d} \beta_j y_j, \qquad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}_0$$

una forma lineal con no todas las α_i iguales a cero.

1.1.4.1. Para todo $0 \neq f \in R$ se pondrá

$$\nu_L(f) = \min\{L(A, B) \mid (A, B) \in \mathcal{E}_{z,w}(f)\}.$$

Se verifica que

$$\begin{aligned}
\nu_L(f+g) &\geq \min\{\nu_L(f), \nu_L(g)\} \\
\nu_L(fg) &= \nu_L(f) + \nu_L(g)
\end{aligned}$$

1.1.4.2. A partir de L se puede definir un orden en los monomios en $\mathbb{C}\{z\}$ (lo que equivale a un orden en los exponentes) semejante al orden diagonal poniendo, para $A, A' \in \mathbb{Z}_0^c$, $A <_L A'$ si y sólo si $L(A) < L(A')$ ó $L(A) = L(A')$ y $A >_{<_{\text{lex}}} A'$

■ **PROPOSICIÓN 1.1.5** *Supongamos que*

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c)$$

es una unión irredundante, y sea $\{g_1, \ldots, g_r\}$ *una familia con* $u(g_i) = A_i$. *Entonces* $\{g_1, \ldots, g_r\}$ *es una base de división, esto es, se puede dividir aplicando el Teorema de Weierstrass-Hironaka.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $u(g_i) = A_i$. Si fuera necesario, dividiendo por el coeficiente de z^{A_i}, que es una unidad en $\mathbb{C}\{w\}$, se puede suponer que este coeficiente es 1. Sea

$$t = \max\{|A_i| \mid i = 1, \ldots, r\},$$

y sea m muy grande con respecto a t, como en la Proposición 1.1.1. Sea

$$L' = L + \frac{1}{10^m} \sum_{j=1}^{d} y_j.$$

Vamos a demostrar que, para todo $i = 1, \ldots, r$, es

$$\nu_{L'}(g_i) = L(A_i) \quad \text{y} \quad \nu_{L'}(g_i - z^{A_i}) > L(A_i)$$

En efecto, fijemos i, $1 \leq i \leq r$ y pongamos $g = g_i$ para abreviar. Sabemos que $\nu_z(g) = |A_i|$. Sea $A \in \mathcal{E}_z(g)$, $|A| > |A_i|$. Si $|A| > t$, entonces

$$L(A) > t \geq |A_i| > L(A_i)$$

por 1. Supongamos que $|A| \leq t$; entonces $|A| - L(A) < 10^{-m}$ por 4, luego

$$L(A) > |A| - \frac{1}{10^m} > |A| - 1 \geq |A_i| > L(A_i).$$

Supongamos ahora que $|A| = |A_i|$. Si $A <_{<\text{lex}} A_i$ es $L(A_i) < L(A)$. Si $A >_{<\text{lex}} A_i$, entonces $g_A(\mathbf{0}) = 0$ y $\nu_{L'}(g_A) \geq 10^{-m}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nu_{L'}(g_A z^A) &= \nu_{L'}(g_A) + L(A) \geq \frac{1}{10^m} + L(A) \\ &> \frac{1}{10^m} + L(A_i) - \frac{1}{10^m} = L(A_i) \end{aligned}$$

Esto prueba la proposición. ■

■ **LEMA 1.1.6** *Sea* $\{g_1, \ldots, g_r\}$ *una base de división de división como en la Proposición* 1.1.5, *con* $u(g_i) = A_i$. *Entonces, la división de Weierstrass-Hironaka*

$$g = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i g_i$$

verifica que

$$\nu_z(h_i) \geq \nu_z(g) - |A_i|.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este lema es bastante técnica (y larga). Comenzaremos por describir 'algorítmicamente' la división de Weierstrass-Hironaka para poder seguir la formación de cocientes y restos. A continuación demostraremos la desigualdad por recurrencia, estableciendo cotas parciales en cada paso de la recurrencia.

El proceso formal de la división es como sigue. Fijemos $g \in \mathbb{C}\{z, w\}$, que será el dividendo. Los exponentes de g se clasifican en $\square_0, \square_1, \ldots, \square_r$. Poniendo $A_0 = \mathbf{0}$, se denota por $h_i^{(0)}$, para $i \leq i \leq r$, a la suma de todos los términos del tipo $g_A z^{A-A_i}$, donde $A \in \mathcal{E}_z(g)$ y $A \in \square_i$.

Entonces tenemos:

1. $g = h_0^{(0)} + h_1^{(0)} z^{A_1} + \cdots + h_r^{(0)} z^{A_r} = h_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} z^{A_i}$.

2. $\nu_z(h_i^{(0)}) \geq \nu_z(g) - |A_i|$, para todo $1 \leq i \leq r$, y la igualdad se debe dar en, al menos, un caso.

Pongamos $g_i = z^{A_i} + p_i$, con $1 \leq i \leq r$. Entonces, la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} g &= h_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} (g_i - p_i) \\ &= h_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} g_i - \sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} p_i, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nu_z\Big(-\sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} p_i\Big) &\geq \min_{1 \leq i \leq r} \Big\{\nu_{L'}(h_i^{(0)}) + \nu_{L'}(p_i)\Big\} \\ &> \min_{1 \leq i \leq r} \Big\{\nu_{L'}(h_i^{(0)}) + L(A_i)\Big\} \end{aligned}$$

Ahora clasificamos los z-exponentes de

$$g^{(1)} = -\sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} p_i$$

en las partes contenidas en $\square_0, \square_1, \ldots, \square_r$. Para cada $1 \leq i \leq r$, se denota por $h_i^{(1)}$ a la suma de todos los términos del tipo $g_A^{(1)} Z^{A-A_i}$, donde $A \in \mathcal{E}_z(g^{(1)})$ y $A \in \square_i$. Entonces tenemos

1. la igualdad

$$-\sum_{i=1}^{r} h_i^{(0)} p_i = h_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(1)} z^{A_i},$$

luego

$$g = \left[h_0^{(0)} + h_0^{(1)}\right] + \sum_{i=1}^{r} \left[h_i^{(0)} + h_i^{(1)}\right] g_i - \sum_{i=1}^{r} h_i^{(1)} p_i,$$

2. y la cota

$$\begin{aligned} \nu_z(h_i^{(1)}) &\geq \nu_z(g^{(1)}) - |A_i| \\ &\geq \min_{1\leq j\leq r} \{\nu_z(h_j^{(0)}) + \nu_z(p_j)\} - |A_i| \\ &\geq \min_{1\leq j\leq r} \{\nu_z(g) - |A_j| + |A_j|\} - |A_i| \\ &= \nu_z(g) - |A_i|. \end{aligned}$$

Antes de continuar con los siguientes pasos, pretendemos probar dos cosas:

1. Que en cada paso recurrente $\nu_z(h_i^{(n)}) \geq \nu_z(g) - |A_i|$.
2. Que las sucesiones $\{h_i^{(n)}\}_{n\geq 0}$ son sumables formalmente, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. Para ello, basta ver que lo son para $i = 1, \ldots, r$, y para demostrar este último aserto, es suficiente ver que los L'-órdenes crecen estrictamente. El problema de la convergencia es muy complejo y está resuelto en [AHV75].

Para demostrar el crecimiento estricto de L' usaremos los cálculos que acabamos de hacer. La demostración del caso inicial $\nu_{L'}(h_i^{(1)}) > \nu_{L'}(h_i^{(0)})$ es particularmente sencilla. En efecto, para calcular los términos de $h_i^{(1)}$ se toma

$$-\sum_{i=1} h_i^{(0)} p_i$$

luego hemos multiplicado todos los términos de todas las $h_i^{(0)}$ por términos de L'-orden mayor que $L(A_i)$. A continuación, esto tñérminos se clasifican en cada $\square_i$ y se dividen por z^{A_i}. Esto prueba que necesariamente, $\nu_{L'}(h_i^{(1)}) > \nu_{L'}(h_i^{(0)})$, para todo $1 \leq i \leq r$.

Demostraremos ahora el paso recurrente, mediante unos cálculos formales.

1. Supongamos escritas unas expresiones

$$-\sum_{i=1}^{r} h_i^{(n)} p_i = h_0^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+1)} z^{A_i},$$

que nos permite poner

$$g = \sum_{j=0}^{n+1} h_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n+1} h_i^{(j)}\right) g_i - \sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+1)} p_i.$$

2. $\nu_z(h_i^{(n+1)}) \geq \nu_z(g) - |A_i|$.

3. $\nu_{L'}(h_i^{(n+1)}) > \nu_{L'}(h_i^{(n)})$.

Ahora clasificamos los z-exponentes de

$$g^{(n+2)} = -\sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+1)} p_i$$

en las partes contenidas en $\square_0, \square_1, \ldots, \square_r$. Se denota por $h_i^{(n+2)}$, para $1 \leq i \leq r$, a la suma de todos los términos del tipo $g_A^{(n+2)} z^{A-A_i}$, donde $A \in \mathcal{E}_z(g^{(n+2)})$ y $A \in \square_i$. Entonces tenemos

1. una expresión

$$-\sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+1)} p_i = h_0^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+2)} z^{A_i},$$

luego

$$g = \sum_{j=0}^{n+2} h_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n+2} h_i^{(j)} \right) g_i - \sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+2)} p_i,$$

2. la cota

$$\begin{aligned} \nu_z(h_i^{(n+2)}) &\geq \nu_z(g^{(n+2)}) - |A_i| \\ &\geq \min_{1 \leq j \leq r} \left\{ \nu_z(h_j^{(n+1)}) + \nu_z(p_j) \right\} - |A_i| \\ &\geq \min_{1 \leq j \leq r} \{ \nu_z(g) - |A_j| + |A_j| \} - |A_i| \\ &= \nu_z(g) - |A_i|, \end{aligned}$$

3. y, finalmente, $\nu_{L'}(h_i^{(n+2)}) > \nu_{L'}(h_i^{(n+1)})$ por construcción.

Como $h_i^{(n)}$ son formalmente convergentes, se puede escribir

$$h_i = \sum_{n=0}^{\infty} h_i^{(n)}, \qquad 0 \leq i \leq r,$$

y se tiene

$$g = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i g_i$$

porque los restos

$$-\sum_{i=1}^{r} h_i^{(n+2)} p_i$$

tienden formalmente a cero. La condición 2 de la recurrencia implica que

$$\nu_z(h_i) \geq \nu_z(g) - |A_i|, \qquad 0 \leq i \leq r.$$

Como queríamos demostrar. ■

■ **PROPOSICIÓN 1.1.7** *Para cada $A \in u(I)$ existe una serie $h_{A,0}$ tal que $\mathcal{E}_z(h_{A,0}) \subset \square_0$, $z^A - h_{A,0} \in I$, $\nu_z(h_{A,0}) \geq |A|$, y, además, todas las series $h_{A,0}$ tienen un campo de convergencia común, independientemente de A.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $g_1, \ldots, g_r \in I$ tales que $u(g_i) = A_i$, $1 \leq i \leq r$, y consideremos la forma lineal de la Proposición 1.1.5. Entonces, para todo $A \in u(I)$, existen $h_{A,i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$ tales que

1. $z^A = h_{A,0} + \sum_{i=1}^{r} h_{A,i} g_i$
2. $\mathcal{E}_z(h_{A,0}) \subset \square_0$, $\mathcal{E}_z(h_{A,i} z^{A_i}) \subset \square_i$.
3. $\nu_{L'}(h_{A,i}) \geq L(A) - \nu_{L'}(g_i) = L(A) - L(A_i)$
4. Si $g_1, \ldots, g_r$ convergen en el cierre $\bar{K}_\rho$ del polidisco de radio ρ centrado en el origen, y si $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < \sigma < \rho$, entonces $h_{A,i}$ converge en K_σ, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. La razón es la tesis del Teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka y el hecho de que z^A converge en todas partes.

Por el Lema 1.1.6, se tiene que $\nu_z(h_{A,0}) \geq |A|$ y ,por tanto,

$$\nu_z\left(\sum_{i=1}^{r} h_{A,i} g_i\right) \geq |A|.$$

Como $A \in u(I)$ y $\mathcal{E}_z(h_{A,0}) \subset \square_0$, debe ser

$$\nu_z\left(\sum_{i=1}^{r} h_{A,i} g_i\right) = |A|$$

y z^A debe aparecer en la forma inicial de esa suma.

Por lo anterior, para cada $A \in u(I)$ existe una serie $h_{A,0}$ tal que $\mathcal{E}_z(h_{A,0}) \subset \square_0$, $z^A - h_{A,0} \in I$ y, además, todas las series $h_{A,0}$ tienen un campo de convergencia común, independientemente de A. ■

■ 1.2 Planitud normal

En esta sección vamos a dar la noción de planitud normal y dos caracterizaciones de ella: existencia de una base estándar equimúltiple y constancia local de la función de Hilbert. La temática de esta sección coincide con [AHV00], sección 4, Capítulo 2, en los enunciados. Las demostraciones son mucho más simples, completamente constructivas y detalladas. Precisamente [AHV00] omite detalles esenciales que hace que sus demostraciones sean incorrectas.

Uno de los grandes detalles omitidos es el campo de convergencia común de las series $z^A - h_{A,0}$ de 1.1.7, sin el cual hay pocas demostraciones de [AHV00], loc. cit., que sean correctas.

■ **NOTACIÓN 1.2.1** Mantenemos las notaciones empleadas en la sección anterior para estudiar al anillo $R = \mathbb{C}\{z, w\}$ y el objeto combinatorio $u(I)$ asociado al ideal $I \subset (z)R$. Designamos por $\mathfrak{m}$ al ideal maximal de R.

1.2.1.1. En lo sucesivo vamos a designar por $\mathfrak{p}$ al ideal $\mathfrak{p} = (z) = (z_1, \ldots, z_c)$ y vamos a fijar el ideal $I \subset \mathfrak{p}$. Consideremos el anillo graduado

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1} = \mathbb{C}\{w\}[\tilde{z}],$$

donde $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_c)$, con $\tilde{z}_j = z_j + \mathfrak{p}^2$, para $1 \leq j \leq c$. Sea $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$ el ideal inicial de I en $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R)$, o sea, el ideal de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R)$ engendrado por las $\mathfrak{p}$-formas iniciales de los elementos de I. Esto quiere decir lo siguiente: si $0 \neq f \in I$, y designamos por q a

$$q = \min\{|A| \mid A \in \mathcal{E}_z(f)\},$$

la $\mathfrak{p}$-forma inicial de f es

$$\tilde{f} = \sum_{|A|=q} f_A(w)\tilde{z}^A \in \mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R).$$

A esta forma inicial se la llama también la forma inicial de f respecto de z, o la z-forma inicial de f, y se la designa por $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(f)$ o por $\mathrm{in}_z(f)$. Al número q se le llama el $\mathfrak{p}$-orden de f (o el z-orden) y se le representa por $\nu_{\mathfrak{p}}(f) = \nu_z(f)$.

1.2.1.2. Nos va a interesar el anillo graduado

$$\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I) = \mathbb{C}\{w\}[\tilde{z}]/\,\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I) = \mathbb{C}\{w\}[z^*],$$

donde $z_j^* = \tilde{z}_j + \mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$, para $1 \leq j \leq c$. El punto crucial va a ser estudiar cuándo $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre como módulo sobre $\mathbb{C}\{w\} = R/\mathfrak{p}$.

1.2.1.3. Llamaremos Γ al siguiente conjunto, que jugará un papel de suma importancia en nuestro trabajo:

$$\Gamma = \{(z^*)^A \mid A \notin u(I)\}$$

1.2.1.4. Sea W definida en un entorno del origen de $\mathbb{C}^{c+d}$ por el ideal $\mathfrak{p}$ y X el espacio analítico complejo definido en un entorno del origen por el ideal I. Es claro que $W \subset X$.

1.2.1.5. Para cada $A \in u(I)$ consideremos la serie $z^A - h_{A,0} \in I$ con las propiedades: $\mathcal{E}_z(h_{A,0}) \subset \square_0$ y $\nu_z(h_{A,0}) \geq |A|$ (véase 1.1.7). Sabemos que hay

un polidisco abierto $K \subset \mathbb{C}^{c+d}$ centrado en el origen en el cual todas las series $h_{A,0}$ son convergentes, independientemente de A. Si Δ' es la proyección de K sobre $\mathbb{C}^d$ entonces Δ' se puede considerar como un polidisco dentro de W centrado en el origen.

■ **Observación 1.2.2** Para todo lo que sigue fijaremos una base de división, como la de la demostración de la Proposición 1.1.5. Vamos a considerar la nueva base de división $\{f_1, \ldots, f_r\}$, dada por la Proposición 1.1.7, definidas como

$$f_i = z^{A_i} - h_{A_i,0},$$

que verifica las mismas condiciones formales que $\{g_1, \ldots, g_r\}$, es decir,

$$u(f_i) = A_i,$$

y el coeficiente de z^{A_i} es 1, para $1 \leq i \leq r$. Podemos repetir los razonamientos de la demostración de 1.1.7 para esta base, y volvemos a escribir

$$z^A = h_{A,0} + \sum_{i=1}^{r} h_{A,i} f_i, \qquad A \in u(I),$$

conservando la notación para el campo de convergencia común.

■ **Proposición 1.2.3** *El conjunto*

$$\Gamma = \{(z^*)^A \mid A \notin u(I)\}$$

es un sistema minimal de generadores de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ *como* $(R/\mathfrak{p})$*-módulo.*

Demostración. Como

$$\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I) \simeq \mathbb{C}\{w\}[z^*],$$

está claro que todos los monomios en z^* son un sistema de generadores suyo como $\mathbb{C}\{w\}$-módulo. Sea $A \in u(I)$ y consideremos la serie $z^A - h_{A,0}$. Como $\nu_z(h_{A,0}) \geq |A|$, la forma inicial de $z^A - h_{A,0}$, tomada módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$ nos expresa $(z^*)^A$ como combinación lineal de elementos de $\square_0$. Aunque esto es evidente, vamos a detallar un poco la primera vez, en la inteligencia de que no lo volveremos a hacer. Si $\nu_z(h_{A,0}) > |A|$, entonces la $\mathfrak{p}$-forma inicial de $z^A - h_{A,0}$ es $\tilde{z}^A$, luego $(z^*)^A = 0$. Si $\nu_z(h_{A,0}) = |A|$, entonces la $\mathfrak{p}$-forma inicial de $z^A - h_{A,0}$ es $\tilde{z}^A - \tilde{h}_{A,0}$ luego $(z^*)^A - \tilde{h}_{A,0}(z^*, w) = 0$ y así $(z^*)^A = \tilde{h}_{A,0}(z^*, w)$.

Probemos que el sistema es minimal. Si no lo fuese, existiría un $B \notin u(I)$ tal que

$$(z^*)^B = \sum_{\substack{C \notin u(I) \\ |C|=|B| \\ C \neq B}} \phi_C(w)(z^*)^C$$

porque los generadores son homogéneos. Entonces

$$\tilde{z}^B - \sum_{\substack{C \notin u(I) \\ |C|=|B| \\ C \neq B}} \phi_C(w)\tilde{z}^C$$

sería la forma inicial de una serie de I, lo que no es posible porque ningún exponente está en $u(I)$. ■

Nos interesa estudiar cuándo $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es un $R/\mathfrak{p}$-módulo plano. Damos un par de observaciones generales.

■ **Observación 1.2.4** 1.2.4.1. $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es plano como $(R/\mathfrak{p})$-módulo si y sólo si es libre. En efecto, $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es plano como $(R/\mathfrak{p})$-módulo si y sólo si lo son sus componentes homogéneas porque planitud y suma directa conmutan. Como las componentes homogéneas son de tipo finito, plano es equivalente a libre, de donde la conclusión.

1.2.4.2. Si $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es $(R/\mathfrak{p})$-plano entonces el sistema minimal de generadores de la Proposición 1.2.3 es una base, y recíprocamente. En efecto, como $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}/I}(R/I)$ es suma directa de sus componentes homogéneas bastaría ver que todo sistema minimal de generadores de un $(R/\mathfrak{p})$-módulo de tipo finito es una base. Pero esto es cierto en general para todo módulo M de tipo finito sobre un anillo local noetheriano $(T, \mathfrak{n})$.

Introducimos ahora el concepto de planitud normal.

■ **Definición 1.2.5** *Si $f \in R$ es una no unidad distinta de cero, se dirá que f es* $\mathfrak{p}$-equimúltiple *(o simplemente* equimúltiple*) si $\nu_{\mathfrak{p}}(f) = \nu_{\mathfrak{m}}(f)$ donde $\nu_{\mathfrak{m}}(f)$ es el orden usual de la serie f. Una base $(g_1, \ldots, g_s)$ de I se dice equimúltiple si todas las g_i son equimúltiples. Se dirá que la base es además estándar si las formas iniciales ordinarias $(\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s)$ de las g_i engendran el ideal inicial ordinario* $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I)$.

■ **Definición 1.2.6** *Se dirá que X* es normalmente plana a lo largo de W en el origen *si $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es un $(R/\mathfrak{p})$-módulo libre (o equivalementemente, plano).*

El objetivo inmediato de esta sección es demostrar el siguiente

■ **Teorema 1.2.7 (Caracterización de la planitud normal)** *En la situación anterior, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *X es normalmente plano a lo largo de W en $(\mathbf{0})$.*

2. *I tiene una base estándar equimúltiple.*

(véase [AHV00])

Demostración (primera parte del Teorema 1.2.7). Supongamos que X es normalmente plano a lo largo de W en $(\mathbf{0})$, es decir, que $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre sobre $R/\mathfrak{p}$. Por 1.2.4.2,

$$\Gamma = \{(z^*)^A \mid A \notin u(I)\}$$

es una base de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$. Vamos a demostrar que la familia $\{f_1, \ldots, f_r\}$ de la Observación 1.2.2 es una base estándar equimúltiple.

Sea $f \in I$, por el Teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka aplicado a la familia $\{f_1, \ldots, f_r\}$, se puede escribir

$$f = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i f_i,$$

donde $\mathcal{E}_z(h_0) \subset \square_0$, $\mathcal{E}_z(h_i z^{A_i}) \subset \square_i$, y $\nu_{L'}(h_i) \geq \nu_{L'}(f) - \nu_{L'}(f_i)$ para $i = 1, \ldots, r$. Como $h_0 \in I$, $\mathcal{E}_z(h_0) \subset \square_0$, y Γ es una base de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ se deduce que $h_0 = 0$. En efecto, si fuera $h_0 \neq 0$, su forma inicial $\tilde{h}_0$ sería nula módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$, luego tiene que tener todos sus coeficientes cero. Así tenemos

$$f = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i,$$

lo que significa que $(f_1, \ldots, f_r)$ es una base de I.

Sean $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_r$ las formas iniciales ordinarias de las h_i y $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$ las de las f_i; es claro que $\bar{f}_i \in \mathbb{C}[z]$ y que

$$\bar{f}_i = z^{A_i} + \text{términos menores en el orden lexicográfico.}$$

Si las formas iniciales $\bar{h}_i \bar{f}_i$ tienen todas grados distintos es evidente que la forma inicial $\bar{f}$ es igual a aquélla $\bar{h}_i \bar{f}_i$ de menor grado. Supongamos que hay varias formas iniciales $\bar{h}_i \bar{f}_i$ de grado mínimo, digamos $\bar{h}_{i_1} \bar{f}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_s} \bar{f}_{i_s}$. Sean

$$\alpha_{i_1}(w) z^{B_{i_1}}, \ldots, \alpha_{i_s}(w) z^{B_{i_s}}$$

los mayores términos en z para el orden lexicográfico de $\bar{h}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_s}$, respectivamente. Entonces,

$$\alpha_{i_1}(w)z^{B_{i_1}+A_{i_1}}, \ldots, \alpha_{i_s}(w)z^{B_{i_s}+A_{i_s}}$$

son los mayores términos en z para el orden lexicográfico de $\bar{h}_{i_1}\bar{f}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_s}\bar{f}_{i_s}$. Entonces, el mayor de ellos, $\alpha_{ij}(w)z^{B_{i_j}+A_{i_j}}$ no puede cancelar con nadie por la condición de ser $\mathcal{E}_z(h_i z^{A_i}) \subset \square_i$. Esto prueba que las formas iniciales de las $h_i f_i$ de grado mínimo no cancelan, luego que $\bar{f} = \sum_{i=1}^{r} \bar{h}_i \bar{f}_i$. Así la base es estándar, lo que concluye la demostración de esta parte. ■

La demostración del recíproco de este teorema se apoya en el resultado siguiente, que es de una gran dificultad intrínseca.

■ **Proposición 1.2.8** *Sea $I = (g_1, \ldots, g_s)$ una base estándar equimúltiple. Para todo $f \in I$, $f \neq 0$, si $A = \inf_{\text{diag}}(\mathcal{E}_z(\bar{f}))$, entonces $A \in u(I)$ y existe $g \in I$ equimúltiple tal que $u(g) = A$.*

Demostración. Como $g_1, \ldots, g_s \in I$ forman una base estándar equimúltiple, se verifica que $\bar{g}_i \in \mathbb{C}[z]$ y

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{s} \phi_i \bar{g}_i, \qquad \phi_i \in \mathbb{C}[z, w],$$

donde las ϕ_i son, bien cero, bien polinomios homogéneos en (z, w) de grado grado$(\bar{f})$ − grado$(\bar{g}_i)$.

Descompongamos cada ϕ_i distinta de cero en suma de sus componentes homogéneas respecto de z:

$$\phi_i = \sum_{j=n_i}^{n_i'} \phi_{i,j}, \qquad \phi_{i,n_i} \neq 0, \quad n_i' \geq n_i.$$

Si fuese

$$\sum_{i=1}^{s} \phi_{i,n_i} \bar{g}_i = 0,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{j=n_i+1}^{n_i'} \phi_{i,j} \Big) \bar{g}_i = \bar{f}$$

y se pueden sustituir las ϕ_i por

$$\sum_{j=n_i+1}^{n_i'} \phi_{i,j}$$

allí donde sea posible. Tiene que ser posible para al menos una de las ϕ_i. Procediendo así sucesivamente nos damos cuenta de que este proceso debe tener fin por ser

$$0 \neq \bar{f} = \sum_{i=1}^{s} \phi_i \bar{g}_i.$$

Por tanto, se puede suponer desde el principio que

$$g' = \sum_{i=1}^{s} \phi_{i,n_i} \bar{g}_i \neq 0$$

Consideremos la serie

$$h = \sum_{i=1}^{s} \phi_i g_i;$$

se verifica lo siguiente:

1. $\bar{h} = \bar{f}$. Esto no requiere aclaración.

2. $\nu_{\boldsymbol{z}}(h) = \nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{h}) = \nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{f})$. En efecto, por construcción

$$\nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{h}) = \nu_{\boldsymbol{z}}(g') = \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu \boldsymbol{z}(\phi_i) + \nu_{\boldsymbol{z}}(g_i)\}.$$

Sea i un índice cualquiera, $1 \leq i \leq s$, tal que hay algún término de $\phi_{i,n_i}\bar{g}_i$ que parece en g'. Entonces $\nu_{\boldsymbol{z}}(\phi_i) + \nu_{\boldsymbol{z}}(g_i) = \nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{h})$. Si $A'_i \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(g_i)$ y $|A'_i| > \nu_{\boldsymbol{z}}(g_i)$ entonces

$$\nu_{\boldsymbol{z}}(\phi_i \boldsymbol{z}^{A'_i}) = \nu_{\boldsymbol{z}}(\phi_i) + |A'_i| > \nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{h}).$$

Si $|A'_i| = \nu_{\boldsymbol{z}}(g_i)$ y el término inicial de $(g_i)_{A'_i}$ no está en $\bar{g}_i$ (lo que sucede sólo cuando $(g_i)_{A'_i}(\mathbf{0}) = 0$), su orden total es mayor que $\nu_{\mathfrak{m}}(g_i) = \nu_{\boldsymbol{z}}(g_i)$, luego ningún término de $\phi \cdot (g_i)_{A'_i} \cdot \boldsymbol{z}^{A'_i}$ puede cancelar con ninguno de $\phi_i \bar{g}_i$. Esto prueba que $\nu_{\boldsymbol{z}}(h) = \nu_{\boldsymbol{z}}(\bar{h})$.

Por definición de A, es $|A| = \nu_{\boldsymbol{z}}(h)$. Sea $B \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{w}}[(\bar{h})_A]$ un multi-índice y sea

$$D = \frac{1}{B!} \frac{\partial^{|B|}}{\partial \boldsymbol{w}^B}.$$

Como $(\bar{h})_A$ es un polinomio homogéneo en $\boldsymbol{w}$, es $D[(\bar{h})_A] = h_{A,B} = f_{A,B} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para los monomios de la forma inicial, y

$$\begin{aligned} D(\bar{h}) &= \sum_{A' \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(\bar{h})} D[(\bar{h})_{A'}] \boldsymbol{z}^{A'} = \sum_{\substack{A' \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(\bar{h}) \\ |A'| = |A|}} D[(\bar{h})_{A'}] \boldsymbol{z}^{A'} \\ &= \sum_{\substack{A' \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(h) \\ |A'| = |A|}} f_{A',B} \boldsymbol{z}^{A'} = \sum_{i=1}^{s} D(\phi_i) \bar{g}_i \in \mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I) \end{aligned}$$

porque, si $A' \in \mathcal{E}_z(\bar{h})$, $|A'| > |A|$, la derivación D anula todos los términos de $(\bar{f})_{A'}$. Además, no puede ser $|A| < |A'|$ por definición de A.

Si

$$g = \sum_{i=1}^{s} D(\phi_i) g_i$$

es claro que $\bar{g} = D(\bar{h}) \in \mathbb{C}[z]$, $u(g) = A$ y g es equimúltiple por un razonamiento análogo al efectuado arriba para ver que $\nu_z(h) = \nu_z(\bar{h})$. Esto prueba la proposición. ■

■ **Corolario 1.2.9** En las condiciones del Teorema 1.2.7, la condición 2 implica 1.

Demostración. Sea $I = (g_1, \ldots g_s)$ una base estándar equimúltiple. Para demostrar que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}/I}(R/I)$ es libre sobre $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$ basta probar que todas las componentes homogéneas lo son. Fijemos un grado $n > 0$; se trata de demostrar que

$$\Gamma_n = \{(z^*)^A \mid A \notin u(I),\ |A| = n\}$$

es un conjunto linealmente independiente sobrej$\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$. Operemos por reducción al absurdo, y sea

$$\sum_{A \in \Gamma_n} \alpha_A(\boldsymbol{w})(z^*)^A = 0$$

una relación no trivial. Existe $0 \neq f \in I$ tal que

$$\tilde{f} = \sum_{A \in \Gamma_n} \alpha_A(\boldsymbol{w}) \tilde{z}^A.$$

Entonces es claro que la forma incial ordinaria $\bar{f}$ de f es igual a la forma inicial ordinaria de $\tilde{f}$. Por la Proposición 1.2.8, $\inf_{\mathrm{diag}}(\mathcal{E}_z(\bar{f})) \in u(I)$, lo que supone una contradicción en nuestro caso, pues $\inf_{\mathrm{diag}}(\mathcal{E}_z(\bar{f})) \in \Gamma_n$. Esto prueba el corolario. ■

■ **Corolario 1.2.10** Si I admite una base estándar equimúltiple, entonces la famila $(f_1, \ldots, f_r)$ es una base estándar equimúltiple.

Demostración. Si I admite una base estándar equimúltiple, entonces, por el Teorema 1.2.7, $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre sobre $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$, y por la demostración de la primera parte del Teorema 1.2.7, las series $(f_1, \ldots, f_r)$ son una base estándar equimúltiple. ■

Vamos ahora a movernos en un entorno del origen dentro de W. Si no se da la condición de planitud normal, no podemos afirmar que $(f_1, \ldots, f_r)$

sea una base de I. Sí podemos afirmar, en cambio, que existe una base $I = (f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$ de I y un polidisco abierto $K \subset \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$ de convergencia común de todas las series f_i, g_j, $z^A - h_{A,0}$ para todo $A \in u(I)$. Sea Δ' la proyección de K sobre $\mathbb{C}^d$.

Para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta'$ se pondrá $I' = (f'_1, \ldots, f'_r, g'_1, \ldots, g'_s)$ donde

$$f'_i = f_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{\alpha}), \quad g'_j = g_j(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{\alpha}),$$

que es un ideal del anillo $R' = \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}'\}$. Ponemos $\mathfrak{p} = (\boldsymbol{z}) \cdot R'$ y designamos con tildes a las formas iniciales de los elementos de

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R') = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1}.$$

Entonces $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I')$ es un ideal de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(R')$ y designamos por asteriscos a las clases de los elementos de ese anillo módulo ese ideal. La notación es la misma que para el caso de R e I, pero no hay peligro de confusión. Si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ponemos $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}$.

Para cada entero $n \geq 0$, consideremos el $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}'\}$-módulo

$$M_n = \mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I')}(R/I')_n$$

que es de tipo finito. Sea

$$T_{\boldsymbol{\alpha}} \colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$$

la función definida por

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(n) = \dim_{\mathbb{C}} M_n / (\boldsymbol{w}') \cdot M_n,$$

que coincide con el número de elementos de cualquier sistema minimal de generadores de M_n como $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}'\}$-módulo (por el lema de Nakayama). En estas circunstancias tenemos el siguiente:

■ **Teorema 1.2.11 (Teorema fundamental de planitud normal)** *Sea X normalmente plano a lo largo de W en $\mathbf{0}$. Entonces se verifica:*

1. *Para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta'$, X es normalmente plano a lo largo de W en $\boldsymbol{\alpha}$. En otras palabras, la condición de planitud normal es abierta.*

2. *La función $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ es constante, es decir, no depende de $\boldsymbol{\alpha}$.*

Recíprocamente, si existe un polidisco $\Delta \subset \Delta'$ tal que $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ es constante sobre Δ, entonces X es normalmente plano a lo largo de W en $\mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN. Sin hipótesis de planitud normal, tenemos que las expresiones

$$z^A - h_{A,0}(z, w' + \alpha) = \sum_{i=1}^{r} h_{A,i}(z, w' + \alpha) f_i(z, w' + \alpha), \qquad \forall A \in u(I)$$

tienen sentido y $\tilde{h}_{A,0}(z, w' + \alpha)$ es una forma en z de grado $|A|$ (o cero). Así, $z^A - \tilde{h}_{A,0}(z, w' + \alpha)$ es la forma inicial en z de $z^A - h_{A,0}(z, w' + \alpha)$, luego

$$(z^*)^A - \tilde{h}_{A,0}(z^*, w' + \alpha) = 0$$

en $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I')}(R'/I')$. Esto prueba que Γ es un sistema de generadores homogéneos de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I')}(R'/I')$.

Supongamos ahora que $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre sobre $R/\mathfrak{p}$ y veamos que Γ es libre. Supongamos que existiese una combinación lineal no trivial

$$\sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi'_A(w')(z^*)^A = 0$$

donde n es un grado fijo. Existe $f' \in I'$ tal que

$$(\tilde{f}') = \sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi'_A(w') \tilde{z}^A.$$

Sea

$$f' = \sum_{i=1}^{r} h'_i(z, w') f_i(z, w' + \alpha);$$

si $h''_i(z, w')$ es el truncamiento de $h'_i(z, w')$ en z hasta grado $n + 1$ y

$$f'' = \sum_{i=1}^{r} h''_i(z, w') f_i(z, w' + \alpha),$$

es $\widetilde{(f'')} = \widetilde{(f')}$. Por otra parte, si m es el máximo de los órdenes de los coeficientes no nulos de los términos en z de $(\tilde{f}')$ y $h_i(z, w')$ es el truncamiento de $h''_i(z, w')$ en z hasta grado $m + 1$ en w', es evidente que

$$f = \sum_{i=1}^{r} h_i(z, w') f_i(z, w' + \alpha) \tag{1.2.1}$$

es tal que

$$\tilde{f} = \sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi_A(w') \tilde{z}^A,$$

verificándose que si $\phi'_A(\boldsymbol{w}') \neq 0$, entonces, es $\phi_A(\boldsymbol{w}') \neq 0$. Como en los polinomios no hay problema de convergencia, se puede deshacer el cambio $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{\alpha}$ en la ecuación (1.2.1) obteniéndose

$$f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha}) f_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}),$$

cuya $\mathfrak{p}$-forma inicial es

$$\sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi_A(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha}) \tilde{\boldsymbol{z}}^A,$$

si algún $\phi_A(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$. Pero esto siempre ocurre. En efecto, consideremos el anillo de polinomios $S = \mathbb{C}[\boldsymbol{w}]$ y, para cada $n \geq 0$, designemos por $S_{\leq n}$ al conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n. Las sustituciones $\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha}$ inducen $\mathbb{C}$-automorfismos de $S_{\leq n}$. Como estas sustituciones llevan la suma parcial de $\phi_A(\boldsymbol{w})$ hasta el orden n en la suma parcial de $\phi_A(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\alpha})$ hasta el orden n, la conclusión es ya evidente. Esto prueba la parte directa del teorema. Veamos el recíproco.

Supongamos que $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ es constante sobre Δ. Por la Proposición 1.2.3 sabemos que Γ es un sistema minimal de generadores de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$, luego

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(n) = \mathrm{Card}(\Gamma_n),$$

para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ y todo $n \in \mathbb{Z}_0$. Al principio de la demostración de este teorema hemos visto que Γ es un sistema de generadores homogéneos de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I')}(R'/I')$. Vamos a demostrar que Γ es $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$-libre.

Supongamos que no, y sea $n > 0$ un entero tal que existe una relación no trivial

$$\sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi_A(\boldsymbol{w})(\boldsymbol{z}^*)^A = 0.$$

Por la minimalidad de Γ como generador de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ debe ser $\phi_A(\boldsymbol{0}) = 0$ para todo $A \in \square_0$, con $|A| = n$. Sea B un índice tal que $\phi_B(\boldsymbol{w}) \neq 0$ y sea $\Delta'' \subset \Delta$ un polidisco centrado en el origen tal que $\phi_A(\boldsymbol{w})$ sea convergente en Δ'' para todo $A \in \square_0$, con $|A| = n$. Existe un $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta''$ tal que $\phi_B(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$. Entonces la expresión

$$\sum_{\substack{A \in \square_0 \\ |A| = n}} \phi_A(\boldsymbol{w}' + \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{z}^*)^A$$

tiene sentido y $\phi_A(\boldsymbol{w}' + \boldsymbol{\alpha})$ es una unidad en $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}'\}$. Esto permite despejar $(\boldsymbol{z}^*)^B$ como combinación lineal, con coeficientes en $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}'\}$, de los elementos de $\Gamma_n \setminus \{(\boldsymbol{z}^*)^B\}$. Esto implicaría que

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(n) < \mathrm{Card}(\Gamma_n),$$

lo que no es posible. Esto concluye la demostración del teorema. ■

■ 1.3 Interpretaciones geométricas

En esta sección damos algunos conceptos y resultados que están contenidos en [AHV00], pero clasificándolos desde el punto de vista algebraico y simplificando la técnica al máximo que, en [AHV00] es innecesariamente complicada.

■ **Notación 1.3.1** Operamos, como en las secciones anteriores una situación $\boldsymbol{x} \in W \subset X \subset Z$, donde Z es una variedad analítica, X es un subespacio cerrado de Z, W un espacio liso de X (se entiende que W es liso en Z) y $\boldsymbol{x}$ un punto de W. Como siempre, nuestro interés estará centrado en la planitud normal de X a lo largo de W en $\boldsymbol{x}$. Si $\mathcal{O}_X$ es el haz estructural de X, $\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{x}}$ es su fibra en $\boldsymbol{x}$ y $\mathfrak{m}_{X,\boldsymbol{x}}$ es el ideal maximal de $O_{X,\boldsymbol{x}}$, se tiene una función

$$H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}} \colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$$

definida por

$$H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}^n_{X,\boldsymbol{x}}/\mathfrak{m}^{n+1}_{X,\boldsymbol{x}}).$$

Es decir, si pasamos al graduado

$$G_{X,\boldsymbol{x}} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n_{X,\boldsymbol{x}}/\mathfrak{m}^{n+1}_{X,\boldsymbol{x}},$$

el entero $H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}(n)$ es la dimensión, como $\mathbb{C}$-espacio vectorial de la componente homogénea de grado n de $G_{X,\boldsymbol{x}}$.

■ **Definición 1.3.2** *Para cada $\boldsymbol{x} \in X$ se llamará* función de Hilbert *a $H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}$. A veces se utilizarán por conveniencia las funciones $H^{(p)}_{X,\boldsymbol{x}}$, con $p \in \mathbb{Z}^*_+$ definidas recurrentemente así:*

$$H^{(p)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \sum_{i=0}^{n} H^{(p-1)}_{X,\boldsymbol{x}}(i).$$

En particular, en álgebra conmutativa es clásica la función $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}$, para la cual

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \sum_{i=0}^{n} \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}^i_{X,\boldsymbol{x}}/\mathfrak{m}^{i+1}_{X,\boldsymbol{x}}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{x}}/\mathfrak{m}^{n+1}_{X,\boldsymbol{x}}).$$

■ **Observación 1.3.3** Hay que hacer notar que, para cada $\boldsymbol{x} \in X$, las funciones $H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}$ y $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}$ se determinan mutuamente. Efectivamente, se verifican las relaciones

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \sum_{i=0}^{n} H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}(i)$$

y

$$H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) - H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n-1).$$

Por otra parte, si t es una variable, las función $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}$ coincide con la función $H^{(0)}$ relativa al anillo $G_{X,\boldsymbol{x}}[t]$, es decir,

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \dim_{\mathbb{C}} G_{X,\boldsymbol{x}}[t]_n$$

donde se considera sobre $G_{X,\boldsymbol{x}}$ la graduación natural con t de grado 1.

■ **Observación 1.3.4** Elijamos un sistema de coordenadas locales

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (z_1, \ldots, z_c, w_1, \ldots, w_d)$$

de Z centrado en $\boldsymbol{x}$ de tal manera que W está definido en un entorno de $\boldsymbol{x}$ por el ideal $\mathfrak{p} = (\boldsymbol{z})$ de $\mathcal{O}_{Z,\boldsymbol{x}} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}$, que notaremos R por brevedad. Sea $I \subset R$ el ideal que define X en un entorno de $\boldsymbol{x}$. Para cada $0 \neq f \in I$, sea

$$e(f) = \min_{\text{diag}}\{(A, B) \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}}(f)\},$$

y escribamos

$$e(I) = \{e(f) \mid f \in I \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

Si $0 \neq f \in I$, entonces $e(f)$ es el mayor para el orden lexicográfico de los exponentes de los términos de la forma inicial $\bar{f}$ de f. Evidentemente,

$$e(I) + \mathbb{Z}_0^{c+d} = e(I)$$

luego $e(I)$ tiene un número finito de vértices, $\{(A_1, B_1), \ldots, (A_s, B_s)\}$, es decir,

$$e(I) = \bigcup_{i=1}^{s} [(A_i, B_i) + \mathbb{Z}_0^{c+d}],$$

donde la unión es irredundante. Por brevedad, escribiremos $C_i = (A_i, B_i) \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$ y operaremos con exponentes genéricos $C \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$.

■ **Proposición 1.3.5** *Para cada $n \in \mathbb{Z}_0$,*

$$H^{(0)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \operatorname{Card}\{C \in \mathbb{Z}_0^{c+d} \mid |C| = n, C \notin e(I)\}.$$

Demostración. En la situación anterior, es

$$G_{X,\boldsymbol{x}} = \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{w}}]/\operatorname{in}_{\mathfrak{m}}(I) = \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{z}}^*, \bar{\boldsymbol{w}}^*],$$

donde $\bar{z}_i + \mathfrak{m}^2$, $\bar{w}_j = w_j + \mathfrak{m}^2$, $\bar{z}_i^* = \bar{z}_i + \mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I)$, $\bar{w}_j^* = \bar{w}_j + \mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I)$. Entonces, probar el enunciado de la Proposición equivale a demostrar que el conjunto de monomios

$$\bar{\Gamma} = \{(\bar{\boldsymbol{z}}^*)^A(\bar{\boldsymbol{w}}^*)^B \mid (A,B) \notin e(I)\}$$

forman una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $G_{X,\boldsymbol{x}}$, o lo que es lo mismo, que para todo $n \in \mathbb{Z}_0$,

$$\bar{\Gamma}_n = \{(\bar{\boldsymbol{z}}^*)^A(\bar{\boldsymbol{w}}^*)^B \mid |A| + |B| = n, (A,B) \notin e(I)\}$$

forman una base de la componente homogénea $(G_{X,\boldsymbol{x}})_n$, de grado n de $G_{X,\boldsymbol{x}}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

La independencia lineal de $\bar{\Gamma}$ es muy sencilla de ver. Sea

$$\sum_{\substack{(A,B)\notin e(I)\\ |A|+|B|=n}} \alpha_{(A,B)}(\bar{\boldsymbol{z}}^*)^A(\bar{\boldsymbol{z}}^*)^B = 0, \qquad \alpha_{(A,B)} \in \mathbb{C}.$$

Si hubiera algún $\alpha_{(A,B)}$ distinto de cero, existiría una serie $0 \neq f \in I$ tal que

$$\bar{f} = \sum_{\substack{(A,B)\notin e(I)\\ |A|+|B|=n}} \alpha_{(A,B)}\bar{\boldsymbol{z}}^A\bar{\boldsymbol{z}}^B,$$

lo que es imposible pues sería $e(f) \notin e(I)$.

El hecho de que $\bar{\Gamma}_n$ es un sistema de generadores de $(G_{X,\boldsymbol{x}})_n$ es una consecuencia del algoritmo de división general de polinomios (véase [CLO97], Teorema 3, página 61). Sean $g_1, \ldots, g_s \in I$ tales que $e(g_i) = (A_i, B_i)$, para $i \leq i \leq s$ y consideremos sus formas iniciales $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s$ como base de división. Si $f \in R$, con $\nu(f) = n$ se puede escribir por el algoritmo de división de polinomios

$$\bar{f} = \phi_0 + \sum_{i=1}^{s} \phi_i\bar{g}_i, \qquad \mathcal{E}_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}}(\phi_0) \cap e(I) = \varnothing,$$

donde ϕ_j son, bien cero, bien polinomios homogéneos para $0 \leq j \leq s$. La relación anterior implica que

$$\bar{f} + \mathrm{in}_m(I) = \phi_0 + \mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I) = \sum_{\substack{(A,B)\notin e(I)\\ |A|+|B|=n}} \alpha_{(A,B)}(\bar{\boldsymbol{v}}^*)^A(\bar{\boldsymbol{w}}^*)^B,$$

lo que prueba nuestra proposición. ■

■ **Corolario 1.3.6** Sean $g_1, \ldots, g_s \in I$ tales que $e(g_i) = (A_i, B_i)$, $1 \leq i \leq s$. Entonces, $I = (g_1, \ldots, g_s)$ e $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I) = (\bar{g}_i, \ldots, \bar{g}_s)$.

DEMOSTRACIÓN. Si en la demostración anterior fuera $f \in I$, debería ser $\phi_0 = 0$ porque, en caso contrario, sería la forma inicial de $f - \sum \phi_i g_i$ y eso es imposible. El hecho de que $I = (g_1, \ldots, g_s)$ es una consecuencia del lema general que damos a continuación. ■

■ **OBSERVACIÓN 1.3.7** Sea $\mathfrak{q} \neq (0), 1$ un ideal arbitrario de $R = \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$. Para cada serie $0 \neq f \in R$, sea $\nu_{\mathfrak{q}}(f)$ el orden de f para la filtración $\{\mathfrak{q}^n\}_{n \geq 0}$, es decir, el máximo entero n tal que $f \in \mathfrak{q}^n$. Nótese que este entero siempre existe pues $\cap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n = 0$, como es evidente razonando sobre el mínimo orden usual de las series de $\mathfrak{q}^n$. Sea

$$S = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^{n+1}$$

el anillo graduado asociado a la filtración y designemos por $\mathrm{in}_{\mathfrak{q}}(f) = f'$ a la forma inicial de f, que es por definición, el elemento de

$$S_{\nu_{\mathfrak{q}}(f)} = \mathfrak{q}^{\nu_{\mathfrak{q}}(f)} / \mathfrak{q}^{\nu_{\mathfrak{q}}(f)+1}$$

dado por $f + \mathfrak{q}^{\nu_{\mathfrak{q}}(f)+1}$. Sea $J \subset R$ un ideal y sea $\mathrm{in}_{\mathfrak{q}}(J)$ el ideal de J engendrado por las formas iniciales de los elementos de J.

■ **LEMA 1.3.8** *Sean $g_1, \ldots, g_s \in J$ tales que $\mathrm{in}_{\mathfrak{q}}(J) = (\mathrm{in}_{\mathfrak{q}}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\mathfrak{q}}(g_s))$. Entonces $J = (g_1, \ldots, g_s)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \neq f \in J$ y escribamos $\nu = \nu_{\mathfrak{q}}(f)$, y $\nu_i = \nu_{\mathfrak{q}}(q_i)$, para $i = 1, \ldots, s$. Existen series $h_{11}, \ldots, h_{1s} \in R$ tales que

$$f + \mathfrak{q}^{\nu+1} = \sum_{i=1}^{s} (h_{1i} + \mathfrak{q}^{\nu-\nu_i+1})(g_i + \mathfrak{q}^{\nu_i+1}) = \left(\sum_{i=1}^{s} h_{1i} g_i\right) + \mathfrak{q}^{\nu+1}.$$

Consideremos la siguiente construcción, recurrente si no acaba. Sea $t \geq 1$ un entero y pongamos

$$f_t = f - \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{t} h_{ji}\right) g_i, \qquad n_t = \nu_{\mathfrak{q}}(f_t).$$

La construcción se para si $f_t = 0$ y continúa si $f_t \neq 0$.

Existen $h_{t+1,1}, \ldots, h_{t+1,s} \in R$, con $h_{t+1,i} \in \mathfrak{q}^{n_t - \nu_i}$ ó $h_{t+1,i} = 0$ si $n_t < \nu_i$ tales que

$$f_t + \mathfrak{q}^{n_t+1} = \sum_{i=1}^{s} (h_{t+1,i} + \mathfrak{q}^{n_t-\nu_i+1})(g_i + \mathfrak{q}^{\nu_i+1}) = \left(\sum_{i=1}^{s} h_{t+1,i} g_i\right) + \mathfrak{q}^{n_t+1}.$$

En estas circunstancias, poniendo

$$f_{t+1} = f_t - \sum_{i=1}^{s} h_{t+1,i} g_i = f - \sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{t+1} h_{ji} \Big) g_i,$$

es $n_{t+1} = \nu_{\mathfrak{q}}(f_{t+1}) > n_t = \nu_{\mathfrak{q}}(f_t)$.

Si la construcción para es claro que $f \in (g_1, \ldots, g_s)$. Supongamos que no para. Al ser $\nu < n_1 < n_2 < \cdots$, y $\nu_{\mathfrak{q}}(h_{t+1,i}) \geq n_t - \nu_i$ es claro que, para todo $i = 1, \ldots, s$, los órdenes usuales de $h_{t,i}$ van creciendo conforme t aumenta. Esto significa que existe una serie formal

$$h_i = \sum_{t=1}^{\infty} h_{t,i} \in \hat{R} = \mathbb{C}[\![\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}]\!].$$

Como $\hat{R}$ es fielmente plano sobre R es $(g_1, \ldots, g_s)\hat{R} \cap R = (g_1, \ldots, g_s)R$, y como $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i \in (g_1, \ldots, g_s)\hat{R} \cap R$, es $f \in (g_1, \ldots, g_s)R$, como queríamos demostrar. ■

■ **Lema 1.3.9** *Sea $(g_1, \ldots, g_s)$ una base estándar de I, es decir, tal que $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I) = (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s)$ (una tal base existe por el Lema 1.3.8). Sea*

$$e(I) = \bigcup_{i=1}^{s} [(A_i, B_i) + \mathbb{Z}_0^{c+d}],$$

unión irrededundante. Para cada $i = 1, \ldots, s$, existe j, con $1 \leq j \leq t$ tal que $(A_i, B_i) = e(g_j)$.

Demostración. Fijemos i, con $1 \leq i \leq s$, y sea $f \in I$ tal que $e(f) = (A_i, B_i)$. Entonces,

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{s} \phi_i \bar{g}_j,$$

combinación lineal homogénea. Como (A_i, B_i) es un vértice de $e(I)$, el término de f

$$\bar{\boldsymbol{z}}^{A_i} \bar{\boldsymbol{w}}^{B_i}$$

tiene que provenir de un $\phi_j \bar{g}_j$ donde ϕ_j es constante. Esto prueba el lema. ■

■ **Corolario 1.3.10** Para cada $n \in \mathbb{Z}_0$ es

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \mathrm{Card}\{C \in \mathbb{Z}_0^{c+d} \mid |C| \leq n,\ C \notin e(I)\}.$$

■ **Teorema 1.3.11** *Supongamos que W es de dimensión positiva localmente en $\boldsymbol{x}$. Las condiciones siguientes son equivalentes*

1. *X es normalmente plano a lo largo de W en $\boldsymbol{x}$.*

2. $e(I) = u(I) \times \mathbb{Z}_0^d$.

3. *$H_{X,\boldsymbol{x}}^{(0)}$ es constante sobre $W \cap \Delta$, donde Δ es un polidisco de $\mathbb{C}^{c+d}$ centrado en $\boldsymbol{x}$ en el cual todas las series de una base de I convergen.*

4. *$H_{X,\boldsymbol{x}}^{(1)}$ es constante sobre $W \cap \Delta$, donde Δ es un polidisco de $\mathbb{C}^{c+d}$ centrado en $\boldsymbol{x}$ en el cual todas las series de una base de I convergen.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es normalmente plano a lo largo de W en x, entonces las series

$$f_i = \boldsymbol{z}^{A_i} - h_{A_i,0}$$

de 1.2.2 forman una base estándar equimúltiple. Como $\bar{f}_i \in \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{z}}]$ para $i = 1, \ldots, r$, es $u(I) \times \mathbb{Z}_0^d \subset e(I)$. Recíprocamente, sea (A, B) un vértice de $e(I)$. Por el Lema 1.3.9, existe un i, $1 \leq i \leq r$ tal que $(A, B) = e(f_i) = (A_i, \mathbf{0})$. Así, $e(I) \subset u(I) \times \mathbb{Z}_0^d$ y se tiene la igualdad.

Veamos que la segunda condición implica la primera. Por hipótesis,

$$e(I) = \bigcup_{i=1}^{r} [(A_i, \mathbf{0}) + \mathbb{Z}_0^{c+d}],$$

unión irredundante. Por el Corolario 1.3.6, $(f_1, \ldots, f_r)$ es una base estándar. Es equimúltiple porque si $(A, B) \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}}(f)$ es

$$(A, B) = (A_i, \mathbf{0}) + (A', B'),$$

luego $|A| \geq |A_i|$.

Veamos que la primera condición implica la tercera. Demostraremos, en primer lugar cómo la función T_0 del Teorema 1.2.11 determina unívocamente la función $H_{X,\boldsymbol{x}}^{(0)}$. Sabemos que $e(I) = u(I) \times \mathbb{Z}_0^d$. Fijado un grado n y un monomio $\boldsymbol{z}^A$ con $A \notin u(I)$, el conjunto de los monomios $\boldsymbol{z}^A \boldsymbol{w}^B$ de grado n en el término $\boldsymbol{z}^A$ fijo tiene el mismo cardinal que el conjunto de los monomios de grado $n - |A|$, que es

$$\binom{n - |A| + d - 1}{n - |A|}$$

Por tanto,

$$H_{X,\boldsymbol{x}}^{(0)}(n) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{A \notin u(I) \\ |A| = m}} \binom{n - m - d - 1}{n - m}$$

Esto significa que T_0 determina $H^{(0)}_{X,x}$. Por el Teorema 1.2.11, para todo $y \in \Delta$, X es normalmente plano a lo largo de W en y, y $T_y = T_0$. Por lo anterior es $H^{(0)}_{X,x} = H^{(0)}_{X,y}$.

La equivalencia entre los enunciados tres y cuatro es trivial, pues las funciones $H^{(0)}_{X,x}$ y $H^{(1)}_{X,x}$ se determinan mutuamente, como hemos visto en 1.3.3

Veamos que la tercera condición implica la primera por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ no es libre sobre $R/\mathfrak{p}$. Existe $0 \neq f \in I$ tal que $\mathcal{E}_z(\tilde{f}) \subset \square_0$. Tomemos las series $\{f_1, \ldots, f_r\}$ y una forma lineal L' como de costrumbre y dividamos por el Teorema Preparatorio de Weiestrass-Hironaka:

$$f = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i f_i$$

donde $\mathcal{E}_z(h_0) \subset \square_0$. Aplicando el método de construcción de cocientes y resto del Teorema Preparatorio como en la demostración de 1.1.7, vemos que $\tilde{f} = \tilde{h}_0$. Por tanto, se puede suponer directamente que $0 \neq f \in I$ es tal que $\mathcal{E}_z \subset \square_0$. Entonces, todos los términos de la forma inicial ordinaria $\tilde{f}$ de f tiene los exponentes de z en $\square_0$.

Sea n el menor entero tal que existe una serie f de I de orden n cuya forma inicial ordinaria tiene todos sus términos con exponentes en z dentro de $\square_0$. Sea $m < n$. Si $m < \nu(I)$, no hay relaciones módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I)$ entre los monomios de grado m en (z, s). Supongamos que $m \geq \nu(I)$ y sea $u(I)_m = \{B_1, \ldots, B_s\}$. Tenemos s series

$$g_i = z^{B_i} - h_{B_i,0}$$

tales que $u(g_i) = B_i$, para $i \leq i \leq s$. Estas series son equimúltiples y por tanto, $\nu(g_i) = m$, para $1 \leq i \leq s$. Escribimos sus formas iniciales en la manera

$$\left.\begin{array}{lcl} \bar{g}_1 = z^{B_1} & & +g'_1 \\ & \ddots & \\ \bar{g}_s = & z^{B_s} & +g'_s \end{array}\right\} \tag{1.3.2}$$

donde $g'_i = h_{B_i,0}(z, 0)$, luego $\mathcal{E}_z(g'_i) \subset \square_0$. Si hubiera una relación lineal más, linealmente independiente de las anteriores, entre monomios en (z, w) de grado m, aplicando el método de eliminación de Gauss a esta relación haciendo base en las anteriores, obtendríamos una relación lineal no trivial, módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}}(I)$ tal que los exponentes en z de todos sus términos estarían en $\square_0$, lo que no es posible. Así pues,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^m/\mathfrak{m}^{m+1} = \binom{c + d + m - 1}{m} - \mathrm{Card}\, u(I)_m$$

Sea ahora

$$\phi(z^*, w^*) = \sum_{\substack{|C|+|D|=n \\ C \notin u(I)}} \alpha_{C,D} (\bar{z}^*)^C (\bar{w}^*)^D = 0$$

una relación no trivial. Sea $f \in I$ tal que $\bar{f} = \phi(z, w)$ y escribamos por el Teorema Preparatorio

$$f = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i f_i.$$

Por la construcción de cocientes y resto del Teorema Preparatorio, es $\bar{f} = \bar{h}_0$ y por tanto, se puede suponer directamente que $\mathcal{E}_z(f) \subset \square_0$. Entonces,

$$\nu_{\mathfrak{p}}(f) \leq \min\{|C| \mid C \in \mathcal{E}_z(\phi(z, w))\} \leq n.$$

Si fuese $\nu_{\mathfrak{p}}(f) = n$ tendría que existir en ϕ un coeficiente $\alpha_{C,0} \neq 0$, lo que no es posible pues $C \notin u(I)$. Así pues, $\nu_{\mathfrak{p}}(f) < m$. Escribamos

$$\tilde{f} = \sum_{|A|=\nu_{\mathfrak{p}}(f)} \phi_A(w) z^A.$$

Tomando $y \in W \cap \Delta$ tal que $\phi_A(y) \neq 0$ para algún $A \in \mathbb{Z}_0$ con $|A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)$ se deduce de ahí una relación lineal no trivial módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{m}_{X,y}}(I')$, donde I' es el ideal que se obtiene haciendo la sustitución $w' = w + y$ en una base convergente en Δ de I. Esa relación depende sólo de $\bar{z}^*$ y tiene todos sus exponentes en $\square_0$. Si aprovechamos las notaciones de antes con $m = \nu_{\mathfrak{p}}(f)$, las relaciones (1.3.2) se conservan en grado m al sustituir w por $w + y$. Esto prueba que la dimensión de la parte homogénea de grado m en el graduado cae al hacer la sustitución $w \to w + y$, lo que contradice el que $H^{(0)}_{X,x}$ sea constante. ■

El Lema 1.3.9 y el Teorema 1.3.11 nos permiten obtener consecuencias importantes sobre los cambios de base estándar equimúltiples.

■ **Observación 1.3.12** Supongamos que $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}(I)}(R/I)$ es plano sobre $R/\mathfrak{p}$, y

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c),$$

unión irredundante.

Entonces,

1. Toda base estándar equimúltiple tiene $s \geq r$ elementos, de los que se puede extraer una base estándar equimúltiple de exactamente r elementos.

2. Si $(g_1, \ldots, g_r)$ es una base estándar equimúltiple (reordenada si fuera preciso), es $u(g_i) = A_i$, para $i = 1, \ldots, r$.

DEMOSTRACIÓN. Por el apartado 2 del Teorema 1.3.11 nos dice que si

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c)$$

es una unión irredundante, también lo es

$$e(I) = \bigcup_{i=1}^{r} [(A_i, \mathbf{0}) + \mathbb{Z}_0^c].$$

Consideremos la base estándar equimúltiple que hemos estado tratando en la Proposición 1.1.7 de la Sección anterior,

$$I = (f_1, \ldots, f_r), \qquad f_i = \mathbf{z}^{A_i} - h_{A,0},$$

para la cual $u(f_i) = A_i$. Sea

$$I = (g_1, \ldots, g_s)$$

otra base estándar equimúltiple. Por el Lema 1.3.9, previa reordenación de las g_i si fuera necesario, debe ser $s \geq r$, y para todo $i = 1, \ldots, r$,

$$(A_1, \mathbf{0}) = e(g_i),$$

de donde

$$u(g_i) = A_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Entonces, $I = (g_1, \ldots, g_r)$ es otra base estándar equimúltiple de I. Es decir, si $s > r$ sobran los $r - s$ últimas series. En efecto, yendo al principio de la demostración de la Proposición 1.1.7 vemos que $(g_1, \ldots, g_r)$ verifican la condición de aplicación del Teorema Preparatorio de Weirestrass. Si $g \in I$, la división de Weierstrass da una expresión

$$g = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i g_i,$$

donde $\mathcal{E}_z(h_0) \subset \square_0$. Como $h_0 \in I$, debe ser $h_0 = 0$. De lo contrario, si $h_0 \neq 0$, su z-forma inicial $\tilde{h}_0$ daría, módulo $\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I)$ una combinación lineal no trivial de monomios de $\square_0$, lo que es imposible. ■

La siguiente Proposición generaliza [AHV00] (Proposición 3.19, Capítulo 2) de una forma no trivial.

■ **PROPOSICIÓN 1.3.13** *Si* $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ *es libre sobre* $R/\mathfrak{p}$, *e* $I = (g_1, \ldots, g_r)$ *es una base estándar equimúltiple obtenida como en la Observación* 1.3.12, *entonces*

$$\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I) = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_r).$$

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer que el coeficiente de $\boldsymbol{z}^{A_i}$ en g_1 es 1, para todo $1 \leq i \leq r$.

Para cada $A \in u(I)$, pongamos $f_A = \boldsymbol{z}^A - h_{A,0}$, como en la Proposición 1.1.7 de la Sección anterior. Veamos primero que

$$\mathrm{in}_{\mathfrak{p}}(I) = (\{\tilde{f}^A \mid A \in u(I)\}).$$

En efecto, sea $0 \neq f \in I$ y sea

$$\tilde{f} = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A \tilde{\boldsymbol{z}}^A, \qquad \sigma_A \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}.$$

Consideremos el elemento

$$g = f - \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma \cdot f_A \in I,$$

tomando los términos de menor grado en $\boldsymbol{z}$ de $\tilde{g}$ tenemos

$$\tilde{f} - \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A(\tilde{\boldsymbol{z}}^A - \tilde{h}_{A,0}) = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A \cdot \tilde{h}_{A,0}.$$

Si fuera

$$\sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A \cdot \tilde{h}_{A,0} \neq 0,$$

entonces, tendríamos $g \in I$,

$$\tilde{g} = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A \cdot \tilde{h}_{A,0},$$

y $\mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(\tilde{g}) \subset \square_0$, lo que no es posible por la condición de planitud normal. Así pues,

$$\tilde{f} - \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c \\ |A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \sigma_A \tilde{f}_A = 0,$$

lo que prueba nuestro primer aserto.

Fijemos ahora un grado n y sean $B_1 >_{<\text{lex}} \cdots >_{<\text{lex}} B_t$ todos los multiíndices de $u(I)$ de grado n. Sea $\sigma\colon \{1,\dots,t\} \to \{1,\dots,r\}$ tal que $B_i \in \square_{\sigma(i)}$ y pongamos $B_i = A_{\sigma(i)} + B_i'$, para $1 \le i \le r$. Para todo índice $j = 1,\dots,t$ pongamos

$$\tilde{h}_j = \tilde{z}^{B_j'}\tilde{g}_{A_{\sigma(j)}},$$

y escribamos esos elementos en la forma

$$\tilde{h}_j = \gamma_{j,1}\tilde{z}^{B_1} + \cdots + \gamma_{j,t}\tilde{z}^{B_t} - \sum_{\substack{B\in\square_0\\|B|=n}} \gamma_{j,B}\tilde{z}^{B},$$

donde $\gamma_{j,k}, \gamma_{j,B} \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$, $\gamma_{j,k} \in (\boldsymbol{w})\cdot\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$ para $j > k$, y $\gamma_{j,j} = 1$. Poniendo

$$\tilde{h}_j' = \sum_{\substack{B\in\square_0\\|B|=n}} \gamma_{j,B}\tilde{z}^{B}$$

se tiene

$$\begin{pmatrix}\tilde{h}_1\\ \vdots\\ \tilde{h}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \gamma_{t1} & \cdots & \gamma_{tt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{z}^{B_1}\\ \vdots\\ \tilde{z}^{B_t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tilde{h}_1'\\ \vdots\\ \tilde{h}_t'\end{pmatrix}.$$

Para abreviar, designaremos por M a la matriz cuadrada de la expresión anterior, notando que es invertible en $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$ pues su determinante es una unidad. Tenemos

$$M^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{h}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{z}^{B_1}\\ \vdots\\ \tilde{z}^{B_t}\end{pmatrix} + M^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{h}_1'\\ \vdots\\ \tilde{h}_t'\end{pmatrix}.$$

Por unicidad de las expresiones en $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es

$$M^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{h}_1\\ \vdots\\ \tilde{h}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{f}_{B_1}\\ \vdots\\ \tilde{f}_{B_t}\end{pmatrix}$$

luego $\tilde{f}_{B_1},\dots,\tilde{f}_{B_t} \in (\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_r)$, lo que concluye la demostración de la proposición. ■

■ **Teorema 1.3.14** *Existe un ideal principal $J \subset \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\}$ con una base convergente en un polidisco $\Delta' \subset W$ centrado en el origen tal que X es normalmente plano a lo largo de W en $\boldsymbol{y} \in \Delta'$ tal que $\boldsymbol{y}$ no anule a todas las funciones del ideal J.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema es trivialmente cierto si $W = \{\boldsymbol{x}\}$, pues en este caso, es $R = \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_{c+d})$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ y $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I) = \mathrm{gr}_{(\mathfrak{m}/I)}(R/I)$ que es libre sobre $R/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$, porque éste es un cuerpo. Así pues, supondremos que $d = \dim W \neq 0$.

Para cada $0 \neq f \in R$ pondremos

$$\exp(f) = \min_{\mathrm{diag}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(f)$$

y

$$E(I) = \{\exp(f) \mid 0 \neq f \in I\}.$$

Como $E(I) + \mathbb{Z}_0^c = E(I)$ este conjunto tiene un número finito de vértices

$$E(I) = \bigcup_{i=1}^{s} (B_i + \mathbb{Z}_0^c),$$

unión irredundante. Sean $g_1, \ldots, g_s \in I$ tales que $\exp(g_i) = B_i$, $1 \leq i \leq s$. Sea $\Delta \subset \mathbb{C}^{c+d}$ un polidisco donde sean convergentes una base de I y las series $g_1, \ldots, g_s$, y sea $\Delta' = \Delta \cap W$. Sea

$$V = \left\{ \boldsymbol{y} \in \Delta' \;\middle|\; \prod_{i=1}^{s} (g_i)_{B_I}(\boldsymbol{y}) \neq 0 \right\},$$

y vamos a probar que para todo $\boldsymbol{y} \in V$, es X normalmente plano a lo largo de W en $\boldsymbol{y}$. Sea $I = (q_1, \ldots, q_{s'})$ una base convergente en Δ, y consideremos el cambio $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}$ y sea $I' = (q_1', \ldots, q_{s'}')$, con $q_j' = q_j(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{y})$.

Sean $g_i' = g_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{y})$, $1 \leq i \leq s$; entonces $B_1, \ldots, B_s \in u(I')$, luego

$$E(I) = \bigcup_{i=1}^{s} (B_i + \mathbb{Z}_0^c) \subset u(I').$$

Por tanto, $\mathbb{Z}_0^d \setminus u(I) \subset \mathbb{Z}_0^c \setminus E(I)$ y como

$$\Gamma' = \{(\boldsymbol{z}^*)^A \mid A \notin E(I)\}$$

generan $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I')}(R'/I')$ como $(R'/\mathfrak{p})$-módulo, también lo generan

$$\Gamma'' = \{(\boldsymbol{z}^*)^A \mid A \notin E(I)\}.$$

Por eso, para demostrar lo que queremos, basta ver que Γ'' es un conjunto de monomios linealmente independientes sobre $\mathbb{C}\{\boldsymbol{w}'\}$.

Supongamos que no, y sea $f' \in I'$ tal que

$$\tilde{f}' = \sum_{\substack{|A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f') \\ A \notin E(I)}} f_A'(\boldsymbol{w}')^A \boldsymbol{z}^A,$$

con algún $f_A(\boldsymbol{w}') \neq 0$. Sea

$$f' = \sum_{i=1}^{s} p'_i q'_i;$$

es evidente que se pueden truncar las series p'_i a polinomios en $\boldsymbol{z}$ sin variar la forma inicial respecto de $\boldsymbol{z}$ de $\sum_{i=1}^{s} p'_i q_i$. Por otra parte, también se pueden truncar los p'_i a polinomios p''_i en $\boldsymbol{w}$ de tal manera que la forma inicial respecto de $\boldsymbol{z}$ de $f'' = \sum_{i=1}^{s} p''_i q'_i$ verifique lo siguiente: para cada $A \notin E(I)$, $|A| = \nu_{\mathfrak{p}}(f')$ es

$$f'_A(\boldsymbol{w}') \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f''_A(\boldsymbol{w}'') \neq 0$$

(c.f. demostración del Teorema 1.2.11). Como en los polinomios no hay problema de convergencia y como las sustituciones $\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}$ inducen un isomorfismo de los polinomios en $\boldsymbol{w}'$ de grado menor o igual que una cantidad fija en los mismos polinomios en $\boldsymbol{w}$, tenemos

$$f''(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{s} p''_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}) g_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in I$$

y f'' tiene todos los exponentes de su forma inicial respecto de $\boldsymbol{z}$ fuera de $\mathcal{E}(I)$. Esto no puede ocurrir, y queda probado el teorema. ■

■ **Definición 1.3.15** *Sea Z una variedad analítica compleja, $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Z$ un ideal coherente, X el subespacio analítico de Z definido por $\mathcal{J}$. Sea $W \subset X$ un subespacio analítico liso en Z definido por un ideal $\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$. Se dirá que X* es normalmente plano a lo largo de *W si lo es para todo punto $\boldsymbol{x} \in W$.*

■ **Definición 1.3.16** *Para las funciones $H\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$ se considerarán normalmente dos órdenes: el lexicográfico y el orden del producto, definido por*

$$H \geq H' \iff H(n) \geq H'(n), \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}_0.$$

El orden lexicográfico será designado, como de costumbre por $\geq_{<\text{lex}}$.

Si $U \subset X$ se llamará el conjunto de las funciones de Hilbert sobre *U a*

$$\mathcal{H}_U = \{H\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0 \mid \exists \boldsymbol{x} \in U,\ H = H_{X,\boldsymbol{x}}\}.$$

Las definiciones anteriores son clásicas en geometría analítica. Los dos resultados siguientes también lo son, aunque los incluimos aquí para ser exhaustivos.

■ **Proposición 1.3.17 ([AHV00], Lema 4.2, Capítulo 2)** *Sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado reducido, y $x \in Y$. Existe un entorno U de x en Y tal que el número de funciones de Hilbert sobre U es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Operamos por recurrencia sobre la dimensión de Y. Si fuera $\dim Y = 0$, el resultado no necesita explicación. Supongamos que $\dim Y = m > 0$. El Teorema 1.3.14 nos dice que el conjunto U_0 de los puntos $\boldsymbol{y} \in X$ tales que X es normalmente plano a lo largo de Y en $\boldsymbol{y}$ es un abierto denso de Y. Nótese que el hecho de que Y sea normalmente plano a lo largo de Y en $\boldsymbol{y} \in Y$ implica que Y es liso localmente en un entorno de $\boldsymbol{y}$. Además, por ser Y reducido, el conjunto de los puntos lisos de Y es un abierto denso. Por tanto, si $\boldsymbol{y} \in U_0$, por la condición de se abierta la planitud normal y por el Teorema 1.3.11, tenemos una única función de Hilbert en un cierto entorno de $\boldsymbol{y}$. Si $\boldsymbol{y} \notin U_0$, el Teorema 1.3.14 nos dice que el complementario de U_0 es localmente una hipersuperficie $Y_0 \subset Y$, luego de dimensión menor. Aplicando la hipótesis de recurrencia el resultado es ya obvio. ■

■ **TEOREMA 1.3.18** *[Semicontinuidad superior de la función de Hilbert] Sea $H\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$ una función. El conjunto*

$$\mathcal{H}_H = \{\boldsymbol{x} \in X \mid H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}} \geq H\} \qquad \textit{(orden de producto)}$$

es cerrado en X (véase [AHV00], Lema 4.13, Capítulo 2).

DEMOSTRACIÓN. El teorema estará probado si se demuestra que dado un punto $\boldsymbol{x} \notin X \setminus \mathcal{H}_H$ existe un entorno U de $\boldsymbol{x}$ en X tal que

1. Para todo $\boldsymbol{y} \in U$, $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{y}}$ no es mayor o igual que H.
2. El conjunto de los puntos $\boldsymbol{y} \in U$ tales que $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{y}} \geq H$ tiene ecuaciones analíticas.

Como $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{H}_H$ existe $n \geq 0$ tal que $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) < H(n)$; tomemos el mínimo.

Sea $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ un sistema de coordenadas locales de Z centrado en $\boldsymbol{x}$, sea $R = \mathbb{C}\{\boldsymbol{t}\}$, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal e I la restricción de $\mathcal{J}$ al sistema de coordenadas locales. Escribiremos

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{t}}], \qquad \bar{t}_i = t_i + \mathfrak{m}^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

y

$$\mathrm{gr}_{(\mathfrak{m}/I)}(R/I) = \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{t}}]/\operatorname{in}_{\mathfrak{m}}(I) = \mathbb{C}[\bar{\boldsymbol{t}}^*], \quad \bar{t}_i^* = \bar{\boldsymbol{t}}_i + \operatorname{in}_{\mathfrak{m}}(I).$$

Sea $\operatorname{in}_{\mathfrak{m}}(I) = (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s)$, luego $I = (g_1, \ldots, g_s)$ por el Corolario 1.3.6. Sea U' un entorno de $\mathbf{0}$ donde converjan $g_1, \ldots, g_s$ y sea $U = U' \cap X$. Sea $q\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$ tal que, para todo p, es $q(p)$ la dimensión del espacio de relaciones de los monomios

$$\{(\bar{\boldsymbol{t}}^*)^B \mid |B| \leq p\}.$$

Entonces

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(p) = \binom{m+p}{p} - q(p)$$

y

$$H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) = \binom{n+p}{p} - q(n) \leq H(n).$$

Efectuemos un cambio genérico $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t} + \boldsymbol{y}$. Entonces las sumas parciales de las series en $\boldsymbol{t}$ hasta un grado determinado se transforman en sumas parciales hasta mismo grado. Tomemos $q(n)$ series de I tales que den $q(n)$ relaciones linealmente independientes de los monomios de grado menor o igual que n. Dichas series serán de la forma

$$k_i = \sum_{i=1}^{s} h_{ij} g_j, \qquad 1 \leq i \leq q(n).$$

Como lo que nos interesa es el truncamiento de esas series hasta grado n, podemos suponer que las h_{ij} son polinomios y así las k_i son convergentes en U'.

Efectuando el cambio genérico $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \in U$, y escribiendo las relaciones entre los monomios en $\bar{\boldsymbol{t}}^*$ a que dan lugar las k_i, tenemos que los menores de orden $q(n)$ de la matriz resultante no son todos identicamente nulos porque hay uno que es distinto de cero al poner $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Eligiendo un $\boldsymbol{y} \in X$ que no lo anule, tenemos que el rango de las nuevas relaciones es mayor o igual que $q(n)$, luego mayor que

$$\binom{n+p}{p} - q(n)$$

y así $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}}(n) < H(n)$.

Por otra parte, para disminuir el número de relaciones linealmente independientes hasta grado n hay que anular menores, lo que da lugar a ecuaciones analíticas en U. Una vez conseguido que $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{y}}(n) \geq H(n)$, podemos saltar al siguiente n' para el cual $H^{(1)}_{X,\boldsymbol{y}}(n') < H(n')$ y hacer lo mismo. El resultado es un conjunto definido por ecuaciones analíticas. Esto prueba el teorema. ■

■ **Corolario 1.3.19** Si X es compacto, entonces hay sólo un número finito de funciones de Hilbert sobre X.

Demostración. Para cada función de Hilbert H sobre X consideremos el abierto $X \setminus \mathcal{H}_H$. Así se tiene un recubrimiento por abiertos del que se puede extraer un subrecubrimiento finito. Esto prueba el corolario. ■

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

■ **Definición 1.3.20** *Se llama* estrato de Samuel de X correspondiente a la función H *a*

$$S_H = \{\boldsymbol{x} \in X \mid H^{(1)}_{X,\boldsymbol{x}} = H\}$$

Capítulo 2

Explosiones y técnicas relacionadas

2.1 Definiciones

Sean $c, d \in \mathbb{Z}_+$, con $c > 1$, $d \geq 0$ y

$$\pi_0 \colon (\mathbb{C}^c \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d$$

la aplicación producto de la proyección canónica

$$\mathbb{C}^c \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^{c-1}$$

del proyectivo por la identidad en $\mathbb{C}^d$. Identificaremos $\mathbb{P}^{c-1}$ con la radiación de $\mathbb{C}^c$ de base el origen. El grafo Λ de π_0 es un subconjunto

$$\Lambda \subset (\mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d) \times (\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d)$$

formado por los pares de pares $((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{b}))$ donde $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^c$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^d$ y $\boldsymbol{\rho}$ es la recta que une $\mathbf{0}$ con $\boldsymbol{a}$ en $\mathbb{C}^c$. Equivalemente, si $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_c) \in \mathbb{C}^c$, $\boldsymbol{\rho}$ se identifica con el punto proyectivo $(a_1 : \ldots : a_c) \in \mathbb{P}^{c-1}$. Para mayor comodidad, podemos suprimir un factor $\mathbb{C}^d$ y suponer que

$$\Lambda \subset \mathbb{C}^c \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d = \Omega.$$

Podemos considerar sobre Ω la topología de Zariski, que se describe algebraicamente de forma muy breve. Sean $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_c)$ y $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ las coordenadas de los puntos genéricos de $\mathbb{C}^c$ y $\mathbb{C}^d$ respectivamente, y $\boldsymbol{z}' = (z'_1 : \ldots : z'_c)$ las coordenadas homogéneas del punto genérico de $\mathbb{P}^{c-1}$. Consideremos el anillo $S = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}]$, con la $\boldsymbol{z}'$-graduación. Los cerrados de Zariski de $\mathbb{C}^c \times \mathbb{P}^{c-1}$ son las variedades de los ideales $\boldsymbol{z}'$-homogéneos de S.

Con estas notaciones tenemos que

$$\Lambda = \{((z_1, \ldots, z_c), (\lambda z_1 : \cdots : \lambda z_c), (w_1, \ldots, w_d)) \mid \lambda \neq 0, \quad (z_1, \ldots, z_c) \neq \mathbf{0}\}.$$

■ **Definición 2.1.1** *Sea $\bar{\Lambda}$ el cierre de Zariski de Λ en Ω y $\pi\colon \bar{\Lambda} \to \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$ la proyección 'natural'. Llamaremos* explosión de $W = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}^d$ en $Z = \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$, *o* explosión de Z con centro W, *o* transformación monoidal de Z con centro W *a la proyección π. Si $d = 0$ se suele llamar 'transformación cuadrática' en lugar de 'monomial'.*

Se puede hacer un cálculo explícito de $\bar{\Lambda}$ usando los recursos del Álgebra. Comenzaremos con el teorema clave.

■ **Teorema 2.1.2** *El ideal $I(\bar{\Lambda}) = I(\Lambda)$ de las funciones polinómicas que se anulan sobre $\bar{\Lambda}$, es el ideal $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}')$-homogéneo generado por los menores de orden dos de la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_c \\ z'_1 & z'_2 & \cdots & z'_c \end{pmatrix}.$$

Demostración. El punto clave es un resultado bien conocido, aunque difícil de demostrar (véase [Abh84]): que el ideal generado por los menores de orden fijo de una matriz de indeterminadas es primo. Sea pues, $\mathfrak{p}$ el ideal generado por los menores de orden dos de la matriz M. Demostraremos que $\mathfrak{p} = I(\Lambda)$, lo que concluirá el teorema. Es claro que $\mathfrak{p} \subset I(\Lambda)$, por la construcción de Λ.

Para la inclusión contraria, consideremos el recubrimiento afín de Ω que describimos a continuación y que es esencial para lo que sigue. Para todo $i = 1, \ldots, c$, consideremos la pieza afín de Ω definida por

$$U_i = \{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}) \mid z'_i \neq 0\} = \{(\boldsymbol{z}, (z'_1 : \ldots : z'_{i-1} : 1 : z'_{i+1} : \ldots : z'_c), \boldsymbol{w})\}.$$

La pieza U_i es isomorfa a $\mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^{c-1} \times \mathbb{C}^d$, y su anillo es

$$S_i = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, z'_1, \ldots, z'_{i-1}, z'_{i+1}, \ldots, z'_c, \boldsymbol{w}].$$

Consideremos el conjunto $\Lambda \cap U_i$, para $1 \leq i \leq c$. Este conjunto está formado por las ternas cuya primera componente es un punto de $\mathbb{C}^c$ distinto del origen con la coordenada i-ésima distinta de cero, la segunda es la recta que une el origen con el punto, y la tercera es un punto de $\mathbb{C}^d$. Es decir, $\Lambda \cap U_i$ es el conjunto de las ternas cuya primera componente es un punto fuera del hiperplano $z_i = 0$, la segunda es la recta que une el origen con el punto, y la tercera es un punto de $\mathbb{C}^d$. En virtud de la identificación que hacemos de $\mathbb{P}^{c-1}$ con la radiación, las coordenadas homogéneas de un punto de $\mathbb{P}^{c-1}$ son las componentes del vector de dirección de la recta correspondiente. Si $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}) \in \Lambda \cap U_i$ entonces es $z_i \neq 0 \neq z'_i$ y recíprocamente.

Sea $f \in I(\Lambda)$, y consideremos la pieza afín U_1 fija. Entonces, la deshomogeneización ${}^a f$ de f con respecto a z_1' pertenece a $I(\Lambda \cap U_1)$.

Por otra parte, tenemos los polinomios

$$z_2 - z_2' z_1, \ldots, z_c - z_c' z_1 \in I(\Lambda \cap U_1),$$

y diviendo sucesivamente, podemos escribir

$${}^a f = q_2 \cdot (z_2 - z_2' z_1) + \cdots + q_c \cdot (z_c - z_c' z_1) + r(z_1, z_2', \ldots, z_c'),$$

donde el resto r no depende más de que las variables $z_1, z_2', \ldots, z_c'$. Como ${}^a f \in I(\Lambda \cap U_1)$, y por la descripción de $\Lambda \cap U_1$, el polinomio r se anula para todos los valores de las variables, excepto posiblemente, para $z_1 = 0$. Entonces, se anula para todos los valores de las variables y, por tanto, $r = 0$. Volviendo a homogeneizar respecto de z_1', tenemos una expresión de la forma

$$z_1'^m f = q_2^h \cdot (z_1' z_2 - z_2' z_1) + \cdots + q_c^h \cdot (z_1' z_c - z_c' z_1),$$

lo que demuestra que $z_1'^m f \in \mathfrak{p}$. Ahora bien, $z_1'^m$ no puede pertenecer a $\mathfrak{p}$, pues si perteneciera, también se tendría $z_1' \in \mathfrak{p}$, y no existe nigún polinomio homogéneo de primer grado en $\mathfrak{p}$. Esto demuestra que $f \in \mathfrak{p}$ y que $I(\Lambda) \subset \mathfrak{p}$. ■

■ **Corolario 2.1.3** Se verifica

$$\bar{\Lambda} = \Lambda \cup (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d),$$

donde la unión es disjunta.

Demostración. Claramente,

$$\Lambda \cup (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d) \subset \bar{\Lambda}$$

porque $\Lambda \subset \bar{\Lambda}$ y, si en M hacemos la primera fila igual a cero, cualquier menor de orden dos es cero. Se trata entonces de probar la inclusión contraria, porque el hecho de que la unión sea disjunta es consecuencia de la descripción de Λ. Si $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}) \in \bar{\Lambda}$ y $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$, (digamos $z_1 \neq 0$), el hecho de que

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = \cdots = z_1 z_c' - z_c z_1' = 0$$

implica que $z_1' \neq 0$ (de lo contrario, *todas* las z_i' serían nulas, lo que no es posible) y

$$\frac{z_2'}{z_1'} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \ldots, \quad \frac{z_c'}{z_1'} = \frac{z_c}{z_1}.$$

Esto demuestra que el punto proyectivo $\boldsymbol{z}'$ está determinado por $\boldsymbol{z}$ y corresponde a la recta que une el origen con $\boldsymbol{z}$. Así, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}) \in \Lambda$. ■

■ **Definición 2.1.4** *El conjunto*

$$\Delta = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d \subset \bar{\Lambda}$$

se llamará el divisor excepcional de la explosión π. *Nótese que*

$$\Delta = \pi^{-1}(\{\mathbf{0}\} \times W) = \pi^{-1}(W).$$

■ **Observación 2.1.5** Tiene sentido llamar 'divisor' a Δ: fijemos un i, con $1 \leq i \leq c$, y veamos quién es $\Delta \cap U_i$. Como $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$ y como $\Lambda \cap U_i$ es el conjunto de ternas cuya primera componente es un punto fuera del hiperplano $z_i = 0$, entonces $\Delta \cap U_i$ debe estar contenido en el conjunto de ternas cuya primera componente está en $z_i = 0$. Pero sólo hay una primera compontente de puntos de $\bar{\Lambda}$ que verifique esa condición, que es el origen. En efecto, del Teorema 2.1.2 tenemos las ecuaciones

$$z_1 z_i' - z_1' z_i = \cdots = z_{i-1} z_i' - z_{i-1}' z_i = z_{i+1} z_i' - z_{i+1}' z_i = \cdots = z_c z_i' - z_c' z_i,$$

y como $z_i = 0$, $z_i' \neq 0$, debe ser $z_1 = \cdots = z_c = 0$. En resumen,

1. $\Delta \cap U_i$ tiene como ecuación $z_i = 0$ en U_i, de donde el nombre de divisor.
2. $\Delta \cap U_i$ consta de las ternas cuya primera componente es el origen y cuya segunda componente es una recta fuera del hiperplano $z_i = 0$.

Globalmente, si $d = 0$, es $\Delta = \mathbb{P}^{c-1}$, la radiación completa. Si $d > 0$, entonces Δ es una familia de radiaciones $\mathbb{P}^{c-1}$ parametrizada por los puntos de $W = \mathbb{C}^d$.

■ **Corolario 2.1.6** El conjunto $\bar{\Lambda} \cap U_i$ es un espacio afín con anillo de coordenadas

$$S_i = \mathbb{C}[z_i, z_1', \ldots, z_{i-1}', z_{i+1}', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}],$$

y Δ es el hiperplano de ecuación $z_i = 0$.

Demostración. Vamos a demostrarlo para $i = 1$, y se demuestra de igual forma para los índices restantes. Al deshomogeneizar las ecuaciones de $I(\bar{\Lambda})$ respecto de z_1', se obtienen los polinomios

$$z_2 - z_2' z_1, \ldots, z_c - z_c' z_1 \in {}^a\mathfrak{p}.$$

Por otra parte, si $i, j \neq 1$, es

$$z_i' z_j - z_j' z_i = z_i'(z_j - z_j' z_1) - z_j'(z_i - z_i' z_1),$$

luego ${}^a\mathfrak{p} = (z_2 - z_2'z_1, \ldots, z_c - z_c'z_1)$. Así, el anillo de coordenadas de $\bar{\Lambda} \cap U_1$ es

$$\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]/{}^a\mathfrak{p} = \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}],$$

lo que prueba la primera parte. La segunda parte es trivial. ■

■ **Teorema 2.1.7** *La aplicación* $\pi\colon \bar{\Lambda} \to \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$ *de la Definición* 2.1.1 *es un morfismo de variedades, y*

$$\pi' = \pi|_{\Lambda}\colon \Lambda \to \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d \setminus (\{\mathbf{0}\} \times W) = Z \setminus W$$

es un isomorfismo de variedades, es decir, π *es un isomorfismo de variedades fuera del centro de explosión.*

Demostración. La primera afirmación se demuestra viendo que

$$\pi_i = \pi|_{\bar{\Lambda} \cap U_i}\colon \bar{\Lambda} \cap U_i \to Z$$

es un morfismo de variedades afines, para todo $i = 1, \ldots, c$. Fijemos por simplicidad $i = 1$. Es intuitivo que π_1 corresponde al homomorfismo de anillos

$$\phi_1\colon \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}] \to \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]$$

definido por las sustituciones

$$\begin{aligned} \phi_1(z_1) &= z_1, & & \\ \phi_1(z_i) &= z_1 z_i', & & i = 2, \ldots, c, \\ \phi_1(w_j) &= w_j, & & j = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Podemos explicarlo con detalle, aunque es largo. Tenemos una sucesión de aplicaciones

$$\bar{\Lambda} \cap U_1 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow \mathbb{C}^c \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$$

que corresponden a los homomorfismos de anillos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}] \leftarrow \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}] = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}]/(z_1' - 1) \\ \leftarrow \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}] \hookleftarrow \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]. \end{aligned}$$

La composición de todas la aplicaciones es π_1 y el homomorfismo correspondiente es ϕ_1, que es la composición de los homomorfismos de anillos.

Equivalementemente, se ve de forma geométrica estudiando la contracción de los ideales maximales de $\mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c']$ como sigue.

- Todos los ideales maximales de la forma

$$\mathfrak{m} = (z_1, z_2' - \alpha_2', \ldots, z_c' - \alpha_c', w_1 - \beta_1, \ldots, w_d - \beta_d)$$

se contraen mediante ϕ_1 a $(z_1, z_2, \ldots, z_c, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta})$ porque

$$z_1(z_i' - \alpha_i) + \alpha_i z_1 = z_1 z_i'.$$

Puesto en lenguaje geométrico, esto significa que todos los puntos del divisor excepcional en U_1 se proyectan sobre $W = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}^d$, que es lo que debe ocurrir.

- Tomemos ahora un punto de $\Lambda \cap U_1$. Al expresarlo como ideal maximal de $\mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]$ lo escribimos como

$$\mathfrak{n} = (z_1 - \alpha_1, z_2' - \alpha_2, \ldots, z_c' - \alpha_c', \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}),$$

donde $\alpha_1 \neq 0$ es la primera coordenada del punto de $\mathbb{C}^c$ que constituye la primera componente y $(1, \alpha_2', \ldots, \alpha_c')$ es la dirección de la recta que constituye la segunda componente. Así,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_c) = (\alpha_1, \alpha_1\alpha_2', \ldots, \alpha_1\alpha' c).$$

Para todo $i = 2, \ldots, c$, es

$$z_1 z_i' - \alpha_1\alpha_i' = z_1(z_i' - \alpha_i') + \alpha_i'(z_1 - \alpha_1).$$

Por tanto, $\mathfrak{n}$ se contrae al ideal

$$\mathfrak{n}^c = (z_1 - \alpha_1, z_2 - \alpha_1\alpha_2', \ldots, z_c - \alpha_1\alpha_c', \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}).$$

Veamos la segunda parte del Teorema. Como $(\mathbb{C}^c \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{C}^d$ no es en general una variedad afín, vamos a tomar un recubrimiento por abiertos afines,

$$V_i = \{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d \mid z_i \neq 0\}, \qquad 1 \leq i \leq c.$$

Naturalmente, V_i es una variedad afín de anillo de coordenadas

$$\mathbb{C}[z, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]/(zz_i - 1) = \mathbb{C}\left[\frac{1}{z_i}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\right] = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]_{z_i}.$$

Por otra parte, es claro que $\pi_i' = \pi|_{\Lambda \cap U_i}$ lleva $\Lambda \cap U_i$ biyectivamente sobre V_i. El problema está en probar que esa biyección es isomorfismo algebraico.

Para simplificar la notación ponemos $i = 1$. Tenemos un diagrama de aplicaciones

$$\begin{tikzcd} \bar{\Lambda} \cap U_1 \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d \\ \Lambda \cap U_1 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_1'"] & V_1 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones naturales. Correlativo a éste, tenemos un diagrama de homomorfismos de anillos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}] \arrow[l, "\phi_1"'] \arrow[d, hook] \\ \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]_{z_1} & \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]_{z_1} \arrow[l, dotted, "\phi_1'"'] \end{tikzcd}$$

donde ϕ_1' es el único homomorfismo que hace el cuadrado conmutativo y corresponde a π_1'.

Veamos que ϕ_1 es inyectivo (lo que implica que ϕ_1' también lo es). Sea $0 \neq f \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]$ y consideremos la descomposición de f en suma de $\boldsymbol{z}$-formas

$$f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=r}^{r+s} f_i(\boldsymbol{z}), \qquad f_r(\boldsymbol{z}) \neq 0.$$

donde cada f_i es homogénea de grado i en $\boldsymbol{z}$. Entonces,

$$\phi_1(f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})) = \sum_{i=r}^{r+s} z_1^i f_i(1, z_2, \ldots, z_c, \boldsymbol{w}).$$

Como $f_r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ es una forma no nula, es necesariamente

$$f_i(1, z_2, \ldots, z_r, \boldsymbol{w}) \neq 0,$$

luego $\phi_1(f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})) \neq 0$ y así ϕ_1 es inyectivo.

Queda demostrar que ϕ_1' es sobre. Sea

$$\omega = \frac{f(z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w})}{z_1^m};$$

es claro que existe un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $z_1^n \omega \in \operatorname{Img} \phi_1$, luego $\omega \in \operatorname{Img} \phi_1'$. ■

■ 2.2 Explosiones analíticas

Sea $Z = \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$, con $c > 1$, $d \geq 0$, $W = \{\boldsymbol{0}\} \times \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^d$ y consideremos

$$\pi : \bar{\Lambda} \to Z$$

la explosión de Z con centro en W. Podemos considerar, tanto a $\bar{\Lambda}$ como a Z, como variedades analíticas con las cartas afines respectivas

$$\{U_i\}_{1\le i\le c}, \qquad \{V_i\}_{1\le i\le c}.$$

Para ello, hay que ver que los cambios de coordenadas en la intersección de las cartas son analíticos.

Para fijar ideas, tomaremos U_1 y U_2 y estudiaremos el cambio de coordenadas en la intersección. En $U_1 \cap U_2$ es $z_1' \neq 0 \neq z_2'$, las coordenadas locales sobre U_1 son

$$(z_1, z_2'/z_1', \ldots, z_c'/z_1', \boldsymbol{w})$$

y sobre U_2 son

$$(z_2, z_1'/z_2', z_3'/z_2', \ldots, z_c'/z_2', \boldsymbol{w}).$$

De la ecuación $z_1'z_2 - z_2'z_1 = 0$ se deduce que $z_2 = (z_2'/z_1')z_1$. Así, tenemos que el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned}
z_2 &= (z_2'/z_1')z_1 \\
z_1'/z_2' &= \frac{1}{z_2'/z_1'} \\
z_3'/z_2' &= \frac{z_3'/z_1'}{z_2'/z_1'} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_c'/z_2' &= \frac{z_c'/z_1'}{z_2'/z_1'} \\
w_1 &= w_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w_d &= w_d.
\end{aligned}$$

Tomando el jacobiano, respetando el orden de las variables, se tiene

$$\begin{vmatrix}
\frac{z_2'}{z_1'} & z_1 & & & & & \\
 & -\frac{1}{(z_2'/z_1')^2} & & & & & \\
 & -\frac{z_3'z_1'}{(z_2'/z_1')^2} & \frac{1}{z_2'z_1'} & & & & \\
 & \vdots & & \ddots & & & \\
 & -\frac{z_c'z_1'}{(z_2'/z_1')^2} & & & \frac{1}{z_2'z_1'} & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & 1
\end{vmatrix} = \frac{1}{(z_2'/z_1')^c} \neq 0.$$

En cuanto a Z, para fijar ideas tomaremos V_1 y V_2 y estudiaremos el cambio de coordenadas en la intersección. En $V_1 \cap V_2$ es $z_1 \neq 0 \neq z_2$ y el cambio de coordenadas es la identidad. Esto deja sentado que $\bar{\Lambda}$ y Z son variedades analíticas.

Consideraremos a Λ y a $Z \setminus W$ como subvariedades analíticas de $\bar{\Lambda}$ y de Z de la forma natural por ser abiertos de variedades analíticas. Es en este sentido en el que hablaremos de isomorfismos analíticos.

■ **TEOREMA 2.2.1** *La aplicación*

$$\pi' = \pi|_{\Lambda} : \Lambda \to Z \setminus W$$

es un isomorfismo analítico.

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que π' es biyectiva. Operando dentro de U_1 y V_1 como hemos hecho arriba, y utilizando las mismas coordenadas locales, vemos que un punto $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in Z \setminus W$, con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_c)$ y $\alpha_1 \neq 0$, se transforma mediante $(\pi')^{-1}$ en el punto

$$\left(\boldsymbol{\alpha}, \left(1 : \frac{\alpha_2}{\alpha_1} : \ldots : \frac{\alpha_c}{\alpha_1}\right), \boldsymbol{w}\right) = \left(\left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_c}{\alpha_1}\right), \boldsymbol{w}\right).$$

Así, algebraicamente, el homomorfismo de anillos correspondiente a $\pi : \bar{\Lambda} \to Z$, que es $\phi : \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}] \to \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]$, está definido por las sustituciones

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= z_1, \\ \phi(z_i) &= z_1 z_i', && \leq i \leq c, \\ \phi(w_j) &= w_j, && \leq j \leq d. \end{aligned}$$

Restringiéndonos a U_1 y V_1, tenemos como homomorfismo correspondiente la extensión del anterior a

$$\phi_1 : \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]_{z_1} \to \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]_{z_1}.$$

El ideal maximal $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta})$ se exiende a un ideal maximal $\mathfrak{m}_1$ del anillo $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]_{z_1}$ porque $z_1 \notin \mathfrak{m}$. Lo mismo ocurre con

$$\mathfrak{n} = \left(z_1 - \alpha_1, z_2' - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, z_c' - \frac{\alpha_c}{\alpha_1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}\right),$$

que se extiende a $\mathfrak{n}_1$. Por otra parte, $\phi(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{n}_1$ porque, para todo $i = 2, \ldots, c$, es

$$\phi_1(z_i - \alpha_i) = z_1 z_i' - \alpha_i = z_1\left(z_i' - \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_1}(z_1 - \alpha_1) \in \mathfrak{n}_1,$$

y

$$z_i' - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} = \frac{1}{z_1}(z_1 z_i' - \alpha_i)\frac{\alpha_i}{z_1\alpha_1}(z_1 - \alpha_1) \in \phi_i(\mathfrak{m}_1).$$

Estas relaciones demuestran también que pasando a los anillos cocientes, se tiene un isomorfismo

$$\theta\colon \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]_{\mathfrak{m}_1} \to \mathbb{C}[z_1, z_2', \ldots, z_c', \boldsymbol{w}]_{\mathfrak{n}_1},$$

extensión del anterior ϕ_1. Ambos anillos son locales regulares. Además, un sistema regular de parámetros del primero es $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta})$, y tenemos dos sistemas regulares de parámetros del segundo, que son

$$\left(z_1 - \alpha_1, z_2' - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, z_c' - \frac{\alpha_c}{\alpha_1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}\right)$$

y

$$(z_1 - \alpha_1, z_1 z_2' - \alpha_2, \ldots, z_1 z_c' - \alpha_c, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}).$$

Este último sistema regular de parámetros tiene una ventaja característica: que es la imagen mediante θ de $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta})$.

Por tanto, podemos extender θ a la compleción

$$\hat{\theta}\colon \mathbb{C}[\![\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}]\!] \to \mathbb{C}[\![z_1 - \alpha_1, z_1 z_2' - \alpha_2, \ldots, z_1 z_c' - \alpha_c, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}]\!],$$

donde $\hat{\theta}$ está definido por las sustituciones

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(z_1 - \alpha_1) &= z_1 - \alpha_1, \\ \hat{\theta}(z_i - \alpha_i) &= z_1 z_i' - \alpha_i, && 2 \le i \le c, \\ \hat{\theta}(w_j - \beta_j) &= w_j - \beta_j, && 1 \le j \le d. \end{aligned}$$

En estas sustituciones es

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(z_1) &= z_1, \\ \hat{\theta}(z_i) &= z_1 z_i', && 2 \le i \le c, \\ \hat{\theta}(w_j) &= w_j, && 1 \le j \le d. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}[\![z_1 - \alpha_1, z_1 z_2' - \alpha_2, \ldots, z_1 z_c' - \alpha_c, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}]\!] \\ &\qquad = \mathbb{C}\left[\!\!\left[z_1 - \alpha_1, z_2' - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, z_c' - \frac{\alpha_c}{\alpha_1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}\right]\!\!\right], \end{aligned}$$

lo anterior se traduce a un isomorfismo

$$\theta_{\mathrm{an}}\colon \mathbb{C}\{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}\} \to \mathbb{C}\left\{z_1 - \alpha_1, z_2' - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, z_c' - \frac{\alpha_c}{\alpha_1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\beta}\right\}$$

definido por

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathrm{an}}(z_1 - \alpha_1) &= z_1 - \alpha_1, \\
\theta_{\mathrm{an}}(z_i - \alpha_i) &= z_1\left(z_i' - \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_1}(z_1 - \alpha_1), && 2 \le i \le c, \\
\theta_{\mathrm{an}}(w_j - \beta_j) &= w_j - \beta_j, && 1 \le j \le d.
\end{aligned}$$

Esto prueba el terema. ■

■ 2.3 El transformado estricto en el caso analítico

Para hablar del transformado estricto necesitamos la condición de planitud normal. Sea $(1) \neq I \subset \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}$ un ideal, $\mathfrak{p} = (\boldsymbol{z})$, y supongamos que tenemos la condición de planitud normal, es decir, que $I \subset \mathfrak{p}$ y que $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ es libre sobre $R/\mathfrak{p}$. Consideremos la escalera asociada a I,

$$u(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (A_i + \mathbb{Z}_0^c),$$

escrita como unión irredundante, y sea $I = (f_1, \ldots, f_r)$ una base estándar equimúltiple arbitratria tal que $u(f_i) = A_i$, y tal que el coeficiente de $\boldsymbol{z}^{A_i}$ en f_i es 1.

Designemos por K un polidisco en el que las series f_1, f_2, ..., f_r sean convergentes, y pongamos

$$X = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in K \mid f_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0\}.$$

En ocasiones pensaremos en X como en el germen de espacio analítico complejo determinado por él y en las series de $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}$ como gérmenes de funciones analíticas.

■ **Definición 2.3.1** *Sea $\bar{\pi}\colon \bar{\Lambda} \to Z = \mathbb{C}^c \times \mathbb{C}^d$ la explosión de W en Z y $\pi'\colon \Lambda \to Z \setminus W$ su restricción. Como π' es un isomorfismo analítico, tiene sentido hablar del cierre de Zariski X' de $(\pi')^{-1}(X \setminus W)$ en $\bar{\Lambda}$ como el conjunto de ceros en $\bar{\Lambda}$ de las funciones analíticas sobre Λ que son preimágenes de las de I por π'. Entonces, X' así definido se denomina el* transformado estricto de X por π.

Para hallar unas ecuaciones del transformado estricto X' de X basta determinar las preimágenes de las funciones $f \in I$ por π'. Calculamos a continuación las ecuaciones de X', en forma de Teorema.

Fijaremos el abierto afín U_1 de $\bar{\Lambda}$ y haremos los cálculos en U_1, haciéndose de forma análoga en las otras piezas afines. Sabemos que

$$\pi_1' = \pi\,|_{U_1\cap\Lambda} \colon U_1 \cap \Lambda \to V_1$$

es un isomorfismo analítico. Tomemos $0 \neq f \in I$ y escribámoslo en la forma

$$f = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ |A|\geq\nu}} f_A(\boldsymbol{w})\boldsymbol{z}^A, \qquad f_A(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{w}\},$$

donde

$$0 \neq \tilde{f} = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ |A|=\nu}} f_A(\boldsymbol{w})\boldsymbol{z}^A.$$

Sea $\boldsymbol{z}' = (z_2', \ldots, z_c')$ y, si $A = (a_1, \ldots, a_c)$, sea $A' = (a_2, \ldots, a_c)$. Podemos escribir f en la forma

$$f = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ |A|\geq\nu}} f_A(\boldsymbol{w}) z_1^{|A|}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{A_2} \cdots \left(\frac{z_c}{z_1}\right)^{A_c},$$

donde la preimagen de f por π_1' es

$$z_1^\nu \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ |A|\geq\nu}} f_A(\boldsymbol{w}) z_1^{|A|-\nu}(\boldsymbol{z}')^{A'}.$$

Como $z_1 \neq 0$ sobre todo V_1, es una unidad, luego lo es sobre $\Lambda \cap U_1$ y así, da lo mismo considerar la preimagen estricta de f que la función

$$f' = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ |A|\geq\nu}} f_A(\boldsymbol{w}) z_1^{|A|-\nu}(\boldsymbol{z}')^{A'}.$$

Hay que comprobar la convergencia de f' en $\mathbb{C}\{z_1, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}\}$. La convergencia de f implica (véase [ZS60]) que existen μ, $\rho \in \mathbb{R}_+$ tales que, si se escribe

$$f = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ B\in\mathbb{Z}_0^d}} f_{A,B}\boldsymbol{z}^A\boldsymbol{w}^B,$$

es

$$|f_{A,B}| \leq \frac{\mu}{\rho^{|A|+|B|}}.$$

Por otra parte,

$$f' = \sum_{\substack{A\in\mathbb{Z}_0^c\\ B\in\mathbb{Z}_0^d}} f_{A,B} z_1^{|A|-\nu}(\boldsymbol{z}')^{A'}\boldsymbol{w}^B.$$

Siempre se puede suponer que $\rho < 1$. En este caso, $|A| + |A'| + |B| \geq |A| + |B|$ y así, $\rho^{|A|+|A'|+|B|} \leq \rho^{|A|+|B|}$, luego

$$|f_{A,B}| < \frac{\mu}{\rho^{|A|+|B|}} \leq \frac{\mu}{\rho^{|A|+|A'|+|B|}} = \frac{(\mu/\rho^{\nu})}{\rho^{|A|-\nu+|A'|+|B|}},$$

lo que prueba que f' es convergente en un polidisco de centro el origen y radio ρ.

Sea I_1' el ideal de $\mathbb{C}\{z_1, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{w}\}$ generado por todos los f' con $f \in I$. Entonces, $X' \cap U_1$ es el conjunto de los ceros de I_1', que es el conjunto de ceros de los f' con $f \in I$.

■ **Teorema 2.3.2** *Sea $I = (f_1, \ldots, f_r)$ una base estándar equimúltiple que verifica las condiciones del principio de esta sección. Entonces, $I' = (f_1', \ldots, f_r')$.*

Demostración. Basta probar que, para todo $0 \neq f \in I$, es $f' \in (f_1', \ldots, f_r')$. Estamos en las condiciones de la Proposición 1.1.5 para efectuar la división de Weierstrass por $(f_1, \ldots, f_r)$. Así tenemos que

$$f = h_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i f_i.$$

Como $h_0 \in I$ y $\mathcal{E}_{\boldsymbol{z}}(h_0) \subset \square_0 = \mathbb{Z}_0^c \setminus u(I)$, debe ser $h_0 = 0$, pues de lo contrario, su $\boldsymbol{z}$-forma inicial daría una relación entre monomios de $\mathrm{gr}_{(\mathfrak{p}/I)}(R/I)$ con coeficientes en $R/\mathfrak{p}$, que no es posible por tratarse de un módulo libre.

Por otra parte, por el Lema 1.1.6, se tiene que $\nu_{\boldsymbol{z}}(h_i) \geq \nu_{\boldsymbol{z}}(f) - |A_i|$, es decir,

$$\begin{aligned} \nu_{\boldsymbol{z}}(f) &\geq \min\{\nu_{\boldsymbol{z}}(h_i) + \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i)\} \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq r} \{\nu_{\boldsymbol{z}}(f) - \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i) + \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i)\} \\ &= \nu_{\boldsymbol{z}}(f), \end{aligned}$$

luego

$$\nu_{\boldsymbol{z}}(f) = \min_{1 \leq i \leq r} \{\nu_{\boldsymbol{z}}(h_i f_i)\}.$$

Sean $i_1, \ldots, i_s$, los índices en los que se alcanza ese mínimo, y pongamos $\nu = \nu_{\boldsymbol{z}}(f)$ en lo sucesivo.

Tenemos

$$f(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w}) f_i(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w}).$$

Por otra parte, $f(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w})$ es divisible (de forma exacta) por z_1^{ν}, y al dividirla, obtenemos f'. Lo mismo ocurre con $h_{i_1} f_{i_1}, \ldots, h_{i_s} f_{i_s}$. Si existe un j tal que $j \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$, con $1 \leq j \leq r$, entonces

$$h_i(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w}) f_i(z_1, z_1 z_2', \ldots, z_1 z_c', \boldsymbol{w}).$$

es divisible exactamente por $z_1^{\alpha_j}$, con $\alpha_j > \nu$. Por tanto,

$$f' = \sum_{l=1}^{s} h'_{i_l} f'_{i_l} + \sum_{j \notin \{i_1,\dots,i_s\}} z_1^{\alpha_j - \nu} h'_j f'_j,$$

y $f' \in (f'_1, \dots, f'_r)$, lo que prueba el teorema. ■

Siguiendo dentro de la pieza afín U_1, si $\Delta = \pi^{-1}(W)$ es el divisor excepcional de la transformación monoidal $\pi\colon \bar{\Lambda} \to Z$, la ecuación de $\Delta \cap U_1$ en $\mathbb{C}\{z_1, z'_1, \dots, z'_c, \boldsymbol{w}\}$ es $z_1 = 0$. Por otra parte, $X' \cap U_1$ viene definido por el ideal $I'_1 = (f'_1, \dots, f'_r)$.

■ **Definición 2.3.3** *El conjunto* $\Delta \cap X'$ *se llamará el* divisor excepcional del transformado estricto.

■ **Corolario 2.3.4** El divisor excepcional del transformado estricto, $\Delta \cap X'$ tiene ecuaciones globales

$$(\tilde{f}_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w}), \dots, \tilde{f}_r(z'_1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w})).$$

Demostración. Calcularemos en primer lugar el ideal que define $\Delta \cap X'$ en U_1. Si

$$f_i = \sum_{j \geq \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i)} f_i(j)$$

es la descomposición de f_i en z-formas, entonces

$$f'_i = \sum_{j \geq \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i)} z_1^{j - \nu_{\boldsymbol{z}}(f_i)} f_i^{(j)}(1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w}),$$

luego el ideal que define $\Delta \cap X'$ en U_1 es

$$I'_1 + (z_1) = (z_1, f_1^{(\nu_{\boldsymbol{z}}(f_1))}(1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w}), \dots, f_r^{(\nu_{\boldsymbol{z}}(f_r))}(1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w})).$$

Se verifica una fórmula análoga para las otras piezas afines.

Globalmente, donde hay que definir el divisor excepcional es su anillo, que es

$$\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\}[z'_1, \dots, z'_c]/J,$$

donde J es el ideal de los menores de orden 2 de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & \cdots & z'_c \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_c \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta \cap X'$ está definido en cada pieza afín por la deshomogeneización de $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$, con las sustituciones pertinentes, vemos que $\Delta \cap X'$ viene definido globalmente por

$$(\tilde{f}_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w}), \dots, \tilde{f}_r(z'_1, z'_2, \dots, z'_c, \boldsymbol{w})).$$

Capítulo 3

Pirámides y redes

Éste es un capítulo que trata de lenguaje geométrico. Las secciones primera y segunda contienen una terminología y unos resultados preliminares, más o menos estándares, que nosotros adaptaremos a nuestras necesidades. Creemos que estas dos secciones se deben incluir aquí, no sólo por fijar un lenguaje, sino en cualquier caso porque las demostraciones suministradas son muy sucintas.

Las siguientes secciones contienen resultados mucho menos comunes sobre pirámides.

Tomamos un espacio ambiente euclídeo de dimensión $n \geq 2$ y comenzamos con los poliedros. Por decirlo brevemente: un poliedro es el cierre convexo **de un número finito de puntos** que generan el espacio ambiente. Hay un teorema elemental que es arduo de demostrar: todo poliedro es intersección finita compacta de semiespacios cerrados, y recíprocamente. En los poliedros más sencillos, los símplices, este teorema es prácticamente inmediato debido a la independencia lineal afín de sus vértices. En poliedros generales, la dificultad de la demostración se origina precisamente porque no hay esta independencia. Después de estudiar los poliedros, lo hacemos con las pirámides, que son proyecciones de poliedros contenidos en un hiperplano desde un punto exterior al hiperplano.

El espacio ambiente será un espacio euclídeo $(X, V, +)$ de dimensión $n > 1$.

■ 3.1 Cálculo baricéntrico

En esta sección recordamos algunas formalidades elementales de cálculo baricéntrico, sobre todo para fijar la terminología.

■ **NOTAS 3.1.1** Sean $E = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ un conjunto de puntos de X y $O \in X$ un origen fijo.

3.1.1.1. La variedad lineal afín L engendrada por ellos es

$$L = \left\{ P \in X \;\middle|\; \overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\,, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Los λ_i sumando 1 no dependen del origen, y la combinación lineal anterior se llama una *combinación lineal baricéntrica.* Si los puntos A_i son afínmente independientes, estos λ_i son únicos, y se llaman las *coordenadas baricéntricas* de P respecto de E. Una combinación lineal baricéntrica con coeficientes no negativos se llama una *combinación lineal convexa.* El *poliedro* determinado por E es el conjunto de las combinaciones lineales convexas de E. Si E es un sistema de referencia afín, al poliedro de le llama un *símplex.*

3.1.1.2. Un poliedro Δ es un conjunto convexo. En efecto, sean $P, Q \in \Delta$ y fijemos un origen $O \in X$; entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\,, \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\,, \quad \lambda_i \geq 0\,, \ \forall i = 0, 1, \ldots, m \\ \overrightarrow{OQ} &= \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OA_i}\,, \quad \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1\,, \quad \mu_i \geq 0\,, \ \forall i = 0, 1, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

Si $R \in \overline{PQ}$ será

$$\overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OP} + (1-\lambda)\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=0}^{m} [\lambda\lambda_i + (1-\lambda)\mu_i] \overrightarrow{OA_i}\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,.$$

Los coeficientes de la última suma son, evidentemente, nonegativos y

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda\lambda_i + (1-\lambda)\mu_i = \lambda \sum_{i=0}^{m} \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1\,.$$

Por tanto $R \in \Delta$, lo que prueba que $\overline{PQ} \subset \Delta$ y que Δ es convexo.

■ **Proposición 3.1.2** *El poliedro Δ determinado por E es el cierre convexo de E, que se denota por $[E]$.*

Demostración. Ya hemos demostrado en 3.1.1.2 que un poliedro es convexo, por tanto $\Delta \supset [E]$. Sea Δ' un convexo que contenga a E y vamos a probar que $\Delta' \supset \Delta$, con lo que nuestra demostración quedará concluida. Desde luego, Δ' contiene a todas las combinaciones lineales convexas de cualquier par de puntos distintos $\{A_i, A_j\}$ porque forman el segmento $\overline{A_iA_j}$. Supongamos, por recurrencia, que contiene a todas las combinaciones lineales convexas de t puntos, $t < m$, de entre $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$, y vamos a probar que contiene a

todas las de $t+1$ puntos. Basta probar este aserto para $\{A_0, A_1, \ldots, A_t\}$. Sea Γ el conjunto de las combinaciones lineales convexas de esos $t+1$ puntos, y Γ' el de las de $\{A_1, \ldots, A_t\}$. Sea $P \in \Gamma$, $P \neq A_0$,

$$\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 0 < \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \leq 1.$$

Un punto $R \in A_0P$ verifica que $\overrightarrow{A_0R} = \alpha\overrightarrow{A_0P}$, y basta tomar

$$\alpha = 1 / \sum_{i=1}^{t} \lambda_i$$

para que $R \in \Gamma'$. En este caso,

$$\overrightarrow{A_0P} = \left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i\right)\overrightarrow{A_0R},$$

lo que prueba que $P \in \overline{A_0R}$ y así que $P \in \Delta'$, luego $\Delta' \supset \Gamma$. Esto prueba que $\Delta' \supset \Delta$ y el resultado. ■

La última parte de la demostración de la Proposición 3.1.2 nos prueba el siguiente

■ **Corolario 3.1.3** Sea $E \subset X$ un conjunto finito no vacío. Entonces, para todo $P \in E$ es

$$[E] = \bigcup_{Q \in [E \setminus \{P\}]} \overline{PQ}$$

El siguiente resultado es extremadamente útil, pues define los vértices de un poliedro.

■ **Teorema 3.1.4** *Sea $E \subset X$ un conjunto finito con más de un elemento tal que, para todo $P \in E$, es $P \notin [E \setminus \{P\}]$ (esto se expresa diciendo que E es* irredundante*). Entonces E está unívocamente determinado por $[E]$ en el sentido de que E es el conjunto de los puntos $P \in [E]$ tales que $[E] \setminus \{P\}$ es convexo. A los elementos de este conjunto E se les llama los vértices del poliedro $[E]$. Más aún, si E es un conjunto finito arbitrario, se puede extraer de él un subconjunto E' irredundante tal que $[E] = [E']$.*

Demostración. Sea $P \in E$ y vamos a demostrar que $[E] \setminus \{P\}$ es convexo. Sean $R, S \in [E] \setminus \{P\}$; por el Corolario 3.1.3 existen $Q_1, Q_2 \in [E \setminus \{P\}]$ tales que $R \in \overline{PQ_1}$, $S \in \overline{PQ_2}$. Como $P \notin [E \setminus \{P\}]$ es $P \neq Q_1$ y $P \neq Q_2$. Se puede

escribir $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ_1}$, $\overrightarrow{PS} = \mu\overrightarrow{PQ_2}$ con $0 < \lambda, \mu \leq 1$. Vamos a probar que $\overline{RS} \subset [E] \setminus \{P\}$. Sea $T \in \overline{RS}$; entonces

$$\overrightarrow{PT} = \delta_1\overrightarrow{PR} + \delta_2\overrightarrow{PS} = \delta_1\lambda\overrightarrow{PQ_1} + \delta_2\mu\overrightarrow{PQ_2},$$

con $\delta_1, \delta_2 \geq 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 1$. Así,

$$0 < \delta = \delta_1\lambda + \delta_2\mu \leq \delta_1 + \delta_2 = 1\,.$$

Sea Q definido por $\overrightarrow{PQ} = (1/\delta)\overrightarrow{PT}$; es evidente que $Q \in \overline{Q_1Q_2} \subset [E \setminus \{P\}]$ (luego $Q \neq P$ por irredundancia) y $T \in \overline{PQ} \subset [E]$. Como no puede ser $T = P$ porque esto implicaría que $Q = P \in [E \setminus \{P\}]$ es $T \in [E] \setminus \{P\}$. Esto prueba que $[E] \setminus \{P\}$ es convexo.

Sea ahora $A \in [E] \setminus E$; hay que demostrar que $[E] \setminus \{A\}$ no es convexo. Para ello basta ver que A siempre es un punto interior de un segmento con extremos en $[E]$. Esto se hace por recurrencia sobre el número de elementos m de E. Si $m = 2$ está claro porque $[E]$ es un segmento. Supongamos que $m > 2$ y el resultado cierto para menos de m elementos. Sea $P \in E$; entonces

$$[E] = \bigcup_{Q \in [E \setminus \{P\}]} \overline{PQ}\,.$$

Si $A \in [E \setminus \{P\}]$ el resultado está claro por recurrencia. Si $A \notin [E \setminus \{P\}]$ entonces A está en un segmento uno de cuyos extremos es P y el otro un punto de $[E \setminus \{P\}]$, luego es interior a ese segmento.

Para probar la segunda afirmación basta demostrar que, si $P \in [E \setminus \{P\}]$, entonces $[E] \subset [E \setminus \{P\}]$ porque, sentado esto, podemos someter a los puntos de E a un procedimiento de prueba y error. Sea $E = \{P = A_0, A_1, \ldots, A_m\}$, $O \in X$ un origen fijo y $Q \in [E]$; tenemos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i\overrightarrow{OA_i}\,, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1\,, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \\
\overrightarrow{OQ} &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\overrightarrow{OA_i}\,, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1\,, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \mu_i\overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\overrightarrow{OA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_0\mu_i + \lambda_i)\overrightarrow{OA_i}\,.
\end{aligned}$$

Además, $\lambda_0\mu_i + \lambda_i \geq 0$ y

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_0\mu_i + \lambda_i) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\,,$$

lo que prueba que $Q \in [E \setminus \{P\}]$ y el teorema. ■

El resultado final de esta sección, que es clave, se enuncia así:

■ **Teorema 3.1.5 (Teorema de Carathéodory)** *Sea $E \subset X$ un subconjunto arbitrario. Entonces, todo punto de $[E]$ se puede escribir como una combinación lineal convexa de puntos de E afínmente independientes.*

Demostración. Observamos primero que $[E]$ coincide con el conjunto Γ de las combinaciones lineales convexas de subconjuntos finitos de E. En efecto, un cálculo baricéntrico elemental nos muestra que Γ es convexo: si $P, Q \in \Gamma$, $P \in [E_1]$, $Q \in [E_2]$ con E_1, E_2 subconjuntos finitos de E, entonces es sencillo ver que $\overline{PQ} \subset [E_1 \cup E_2]$ por la Proposición 3.1.2. Así $\Gamma \supset [E]$ y como el otro contenido es trivial, se tiene la igualdad.

Tomemos un origen O para toda la demostración. Fijemos $P \in [E]$, y escribamos

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\,, \quad 1 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\,, \quad \lambda_i \geq 0\,, \quad A_i \in E\,. \tag{3.1.1}$$

Si $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ son afínmente independientes, no hay nada que probar. Supongamos que no lo son. Los vectores $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ son linealmente dependientes y así existen $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_0}) \\ &= \left(-\sum_{i=1}^{m} \mu_i\right) \overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OA_i}, \end{aligned}$$

donde

$$\mu_0 = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i\,.$$

Cambiando de orden los índices, si preciso fuera, se puede suponer que $\mu_m > 0$ y que λ_m/μ_m es el menor de los cocientes λ_i/μ_i tales que $\mu_i > 0$. Despejando $\overrightarrow{OA_m}$ se obtiene

$$\overrightarrow{OA_m} = \sum_{i=0}^{m-1} -\frac{\mu_i}{\mu_m} \overrightarrow{OA_i}$$

y, sustituyendo en (3.1.1), da

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\lambda_i - \frac{\mu_i}{\mu_m}\lambda_m\right) \overrightarrow{OA_i}.$$

En esta igualdad se tiene que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left(\lambda_i - \frac{\mu_i}{\mu_m}\lambda_m\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i - \lambda_m \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mu_i}{\mu_m} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1.$$

Además, si $\mu_i < 0$, es

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m \mu_i}{\mu_m} > 0,$$

y si $\mu_i > 0$, es

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m \mu_i}{\mu_m} \geq \lambda_i - \frac{\lambda_i \mu_i}{\mu_i} = 0.$$

Esto implica que P es combinación lineal convexa de $\{A_0, \ldots, A_{m-1}\}$. Repitiendo este proceso cuantas veces haga falta, se tiene el teorema. ■

■ **Corolario 3.1.6** Si $E \subset X$ es un conjunto finito, entonces $[E]$ es cerrado.

Demostración. El Teorema 3.1.5 nos dice que, si $\mathcal{E}$ es el conjunto de las partes de E formadas por puntos afínmente independientes, entonces

$$[E] = \bigcup_{E' \in \mathcal{E}} [E'].$$

Cada una de estas partes es cerrada, por ser homeomorfa a un conjunto de la forma

$$\left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{R}_0^q \;\middle|\; \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1\right\}.$$

Por tanto, $[E]$ es cerrado. ■

■ **Proposición 3.1.7** *Si $E \subset X$ es un conjunto finito, entonces $[E]$ es compacto.*

Demostración. En el Corolario 3.1.6 hemos visto que $[E]$ es cerrado; resta demostrar que es acotado. Si $E = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$, por la Proposición 3.1.2, es

$$[E] = \left\{P \in X \;\middle|\; \overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \quad 0 \leq \lambda_i \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \leq 1\right\}.$$

Así, tomando el módulo del vector $\overrightarrow{A_0P}$ con $P \in [E]$, tenemos

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_0P}| &= \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i |\overrightarrow{A_0A_i}| \\ &\leq m \max(\{|\overrightarrow{A_0A_i}| \mid i = 1, \ldots, m\}), \end{aligned}$$

lo que prueba que $[E]$ es acotado. ■

■ **NOTAS 3.1.8** Supongamos que $E = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ es un sistema de referencia afín; así $[E]$ es un símplex. Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ designaremos por H_i al hiperplano generado por $E \setminus \{A_i\}$, por $H_i^{\geq 0}$ al semiespacio cerrado de borde H_i que contiene a A_i y por H_i^+ al abierto.

3.1.8.1. Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ sabemos que H_i es el conjunto de los puntos de X cuya i-ésima coordenada baricéntrica respecto de E es cero, $H_i^{\geq 0}$ es el de los que tienen su i-ésima coordenada baricéntrica no negativa y H_i^+ el de los que la tienen positiva. Por tanto, los tres son convexos.

3.1.8.2. De lo anterior resulta evidente que

$$[E] = \bigcap_{i=0}^{n} H_i^{\geq 0}.$$

3.1.8.3. Un punto muy importante aquí es que el interior topológico de $[E]$ coincide con su interior baricéntrico Γ', definiendo éste así:

$$\Gamma' = \left\{ O + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Por tanto, un símplex tiene interior no vacío. En efecto, por lo anterior es claro que

$$\Gamma' = \bigcap_{i=0}^{n} H_i^+,$$

que es abierto. Un punto de $[E] \setminus \Gamma'$ no puede ser interior a $[E]$ porque debe pertenecer a un hiperplano H_i al tener una coordenada baricéntrica cero, luego en todo entorno suyo hay puntos de H_i^+ y del otro semiespacio H_i^-.

■ 3.2 Convexos: pirámides

Sea $(X, V, +)$ un espacio euclídeo de dimensión $n \geq 2$. Las semirrectas serán designadas por la notación $\underline{AB}$ donde A es su origen y $B \neq A$. Vamos a estudiar conjuntos convexos más generales dentro de X.

■ **Proposición 3.2.1** *Sea $\Delta \subset X$ un convexo; las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Δ tiene interior no vacío.*
2. *Δ engendra X como espacio afín, es decir, X es el mínimo subespacio que contiene a Δ*

Demostración. Si Δ tiene interior no vacío y $P \in \Delta$ es un punto interior, existe una bola cerrada $B(P, \varepsilon)$ de centro P y radio ε contenida en Δ. Como $B(P, \varepsilon)$ engendra X, también lo engendra Δ. Supongamos ahora que Δ engendra X; entonces existe un sistema de referencia afín $E = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\} \subset \Delta$, luego el símplex $[E]$ está contenido en Δ. Por 3.1.8.3, $[E]$ tiene interior no vacío, luego Δ tiene interior no vacío. Esto prueba la proposición. ■

■ **Proposición 3.2.2** *Sea $\Delta \subset X$ un convexo cerrado, acotado y de interior no vacío, $P \in \Delta$ un punto interior, L una variedad lineal afín que pasa por P; entonces $L \cap \Delta$ es un convexo cerrado, acotado y de interior no vacío dentro de L, cuya frontera está contenida en la de Δ y su interior es $\Delta' \cap L$. En particular, si L es una recta, $L \cap \Delta$ es un segmento cuyos extremos son puntos frontera de Δ y el resto de los puntos son interiores.*

La demostración es inmediata.

■ **Definición 3.2.3** *Sea $O \in X$; una pirámide $\Gamma(\Delta)$ de vértice O es la proyección desde O de un convexo acotado Δ contenido en un hiperplano H que no pasa por O y con interior no vacío dentro de él, es decir,*

$$\Gamma(\Delta) = \bigcup_{A \in \Delta} \underline{OA}.$$

■ **Observación 3.2.4** Para una semirrecta ϱ de origen O sólo hay dos posibilidades:

1. o bien está contenida en la pirámide $\Gamma(\Delta)$, en cuyo caso corta al hiperplano H en un punto de Δ,
2. o bien $\varrho \cap \Gamma(\Delta) = \{O\}$.

■ **Notación 3.2.5** Designaremos consistentemente por H_1 al hiperplano paralelo a H por O y por H_1^+ al semiespacio abierto de borde H_1 que contiene a H. Sea ϱ una semirrecta de origen O; la condición necesaria y suficiente para que ϱ corte a H es que $\varrho \subset H_1^+$. Esto permite definir una función suprayectiva $\pi : H_1^+ \to H$ poniendo, para $P \in H_1^+$, $\pi(P) = \underline{OP} \cap H$. Esta función π es la proyección estereográfica o central. Con esta notación, $\Gamma(\Delta) = \pi^{-1}(\Delta) \cup \{O\}$.

■ **LEMA 3.2.6** *Sean $A, B, C, D \in H_1^+$ puntos distintos de O tales que $C \in \underline{OA}$, $D \in \underline{OB}$ y $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ son linealmente independientes. Entonces, para todo $R \in \overline{AB}$, la semirrecta $\underline{OR}$ corta a $\overline{CD}$ en un único punto.*

DEMOSTRACIÓN. Nos podemos restringir al plano que contiene a los puntos O, A, B, C, D, donde $\{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ es un sistema de referencia afín. Sea f la afinidad de ese plano definida por las relaciones $f(O) = O$, $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC}$, $\vec{f}(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OD}$. Sea $R \in \overline{AB}$, $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$; entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Of(R)} &= \vec{f}(OR) = \lambda\vec{f}(\overrightarrow{OA}) + (1-\lambda)\vec{f}(\overrightarrow{OB}) \\ &= \lambda\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OD}, \end{aligned}$$

lo que prueba el enunciado. ■

■ **LEMA 3.2.7** *Si $P, Q \in H_1^+$, entonces $\pi(\overline{PQ}) = \overline{\pi(P)\pi(Q)}$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, el resultado es trivial si $\pi(P) = \pi(Q)$. Supongamos, pues, que $\pi(P) \neq \pi(Q)$ lo que implica, en particular, que $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ son linealmente independientes. Entonces el resultado es consecuencia evidente del Lema 3.2.6. ■

■ **PROPOSICIÓN 3.2.8** *La función π es racional y homogénea, luego continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{A_1, \ldots, A_n\}$ puntos de H afínmente independientes tales que $\{\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}\}$ sea una base ortogonal de V. Poniendo

$$\boldsymbol{u}_i = \overrightarrow{OA_i}/|\overrightarrow{OA_i}|,$$

$i = 1, \ldots, n$ vemos que $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base ortonormal de V. Respecto del sistema de referencia métrico $\{O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ el punto A_i tiene todas sus coordenadas cero, salvo la i-ésima que es $a_i > 0$. Así, H tiene como ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & 1 \\ a_1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = p(y_1) + \cdots + p(y_n) - p$$

donde $p = a_1 \cdots a_n$ y $p(y_i)$ es el resultado de sustituir en este monomio a_i por y_i. Por otra parte, elegimos para H_1 la ecuación $p(y_1) + \cdots + p(y_n) = 0$ y así H_1^+ viene definido por la desigualdad $\sum_{i=1}^n p(y_i) > 0$. Sea, pues,

$(x_1, \ldots, x_n) \in H_1^+$; la semirrecta $y_i = \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda \geq 0$ corta a H en el punto

$$\left(\frac{p(x_1)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}, \ldots, \frac{p(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)} \right).$$

Esto prueba el resultado. ■

■ **Proposición 3.2.9** *Si $\emptyset \neq \Delta \subset H$ es un cerrado, $\pi^{-1}(\Delta) \cup \{O\}$ es un cerrado.*

Demostración. Nótese que, por continuidad, $\pi^{-1}(\Delta)$ es un cerrado de H_1^+. Sea $P \notin \pi^{-1}(\Delta) \cup \{O\}$. Podemos considerar varias posibilidades. La primera es que $P \in H_1^+$; como $\pi^{-1}(\Delta)$ es un cerrado de H_1^+ y H_1^+ es abierto en X, debe existir una bola abierta de centro P, contenida en H_1^+ y que no corte a $\pi^{-1}(\Delta)$. La segunda posibilidad es que $P \in H_1^-$, el semiespacio abierto opuesto a H_1^+. Entonces existe una bola abierta de centro P que está contenida en H_1^-, luego no corta a $\pi^{-1}(\Delta)$.

La tercera posibilidad, que tiene más discusión, es que $P \in H_1$. Sea B' la bola cerrada de centro P y radio $d(P, Q)$, la distancia de P a Q, donde $Q \in \pi^{-1}(\Delta)$. Entonces $B' \cap \pi^{-1}(\Delta)$ es un cerrado de $\pi^{-1}(\Delta)$, luego la función distancia a P, $d(P, -) : \pi^{-1}(\Delta) \to \mathbb{R}_0$ alcanza en él un mínimo $\varepsilon > 0$, en un punto $Q_1 \in \pi^{-1}(\Delta)$. Ninguna bola abierta de centro P y radio menor que ε corta a $\pi^{-1}(\Delta)$. Esto prueba la proposición. ■

■ **Corolario 3.2.10** Sea $\Delta \subset H$ un convexo cerrado de interior no vacío dentro de H y $\Gamma(\Delta)$ la pirámide correspondiente; entonces ésta es cerrada.

■ **Corolario 3.2.11** Si $\Delta \subset H$ es arbitrario y $\overline{\Delta}$ es el cierre topológico de Δ en H, entonces $\pi^{-1}(\overline{\Delta}) \cup \{O\}$ es el cierre topológico de $\pi^{-1}(\Delta) \cup \{O\}$

■ **Proposición 3.2.12** *π es abierta y cerrada.*

Demostración. Basta probar que es abierta. Sea U un abierto de H_1^+ y sea

$$U' = \bigcup_{P \in U} \underline{OP} \setminus \{O\}.$$

Sea $Q \in U'$ y sea $P \in U$ tal que $Q \in \underline{OP}$; existe una bola abierta B de centro P contenida en U. Sea h la homotecia (de razón positiva) que lleva P sobre Q; entonces $h(B)$ es una bola abierta de centro Q contenida en U'. Esto prueba que U' es abierto, luego que $\pi(U) = U' \cap H$ es un abierto de H. ■

■ **Corolario 3.2.13** π y π^{-1} transforman interior en interior.

■ **Observación 3.2.14** Sea $S \subset X$ una hipersuperficie esférica, Q un punto exterior (es decir, tal que su hiperplano polar L respecto de S corta a S en una hipersuperficie esférica S_L dentro de L que sea real). Sea C_Q el cono de tangentes trazadas desde Q (cuyo lugar de puntos de tangencia es S_L). Consideremos el hiperplano L_1 paralelo a L por Q y designemos por L_1^+ al semiespacio abierto de borde L_1 que contiene a S. Consideremos la función usual $\pi : L_1^+ \to L$. La imagen inversa Λ mediante π del interior de S_L es un abierto que contiene puntos arbitrariamente cercanos a Q. Todas las semirrectas de origen Q y contenidas en Λ proyectan puntos de S. Las que están contenidas en el cono son tangentes a S y las interiores al cono entran en S todo un segmento.

■ **Lema 3.2.15** *El conjunto $\Delta \subset H$, que es convexo, acotado y de interior no vacío verifica:*

1. *$\overline{\Delta}$ es el cierre topológico del interior de Δ.*
2. *Supongamos que Δ no es el cierre convexo de un número finito de puntos. Sea $\Delta_1 \subset \Delta$ un poliedro, cierre convexo de un número finito de puntos. Existe un punto interior de Δ que no pertenece a Δ_1.*

Demostración. Operamos en este lema con H como espacio ambiente. Para demostrar el primer punto, operaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existiese un punto $P \in \Delta$ que no fuese de acumulación del interior; entonces debe existir una bola abierta B de centro P que no contiene ningún punto del interior de Δ. Sea P' un punto interior a Δ y sea B' una bola cerrada de centro P' contenida en el interior de Δ. En el interior del cono de tangentes desde P a B' hay segmentos con origen en P extremos en B'. Todos esos segmentos deben estar contenidos en Δ. La situación está descrita en la Nota 3.2.14. En esos segmentos hay, pues, puntos interiores a Δ arbitrariamente próximos a P, lo que no es posible.

La demostración del segundo punto es consecuencia del primero. Si el interior de Δ estuviese contenido en Δ_1, entonces, por el punto anterior, $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Delta_1$, luego $\Delta = \Delta_1$, lo que no es posible por hipótesis. ■

■ **Definición 3.2.16** *Sea $\Delta \subset X$ un convexo cerrado, acotado y de interior no vacío; se llamará simplemente frontera de Δ a su frontera topológica. En otras palabras, si Δ' es el interior de Δ, su frontera es $\Delta \setminus \Delta'$.*

■ **Proposición 3.2.17** *Sea $\Delta \subset H$ un convexo cerrado acotado y de interior no vacío dentro de H y sea $\varrho \subset \Gamma(\Delta)$ una semirrecta de origen O. Entonces, una y sólo una de las condiciones siguientes se verifica para ϱ:*

1. *todo punto de* $\varrho \setminus \{O\}$ *es interior a* $\Gamma(\Delta)$,
2. *todo punto de* ϱ *es frontera de* $\Gamma(\Delta)$.

Entonces se dirá que ϱ *es, respectivamente, una semirrecta interior o frontera de* $\Gamma(\Delta)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \varrho \cap H$. Supongamos que A es interior a Δ; por el Corolario 3.2.13, todo punto de $\varrho \setminus \{O\}$ es interior a $\Gamma(\Delta)$. Si A es un punto frontera de Δ y $P \in \varrho \setminus \{O\}$, entonces en todo entorno de P hay puntos de $\Gamma(\Delta)$ y puntos que no están en $\Gamma(\Delta)$ por la Proposición 3.2.12. ■

■ **PROPOSICIÓN 3.2.18** *Sean* $A, C \subset X$, *donde* $A \neq \emptyset$ *es abierto,* $C \neq \emptyset$ *es cerrado y* $A \setminus C \neq \emptyset$. *Existe una bola abierta* $B \subset A$ *tal que* $B \cap C = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. La técnica es muy similar a la que ya hemos usado en esta sección, en la demostración de 3.2.9. Tomando $P \in A \setminus C$, existe un punto $Q \in C$ tal que $d(P,Q) \leq d(P,Q')$, para todo $Q' \in C$, y este Q es único para esa condición. Tomando ahora una bola abierta B de centro P y radio $\varepsilon < d(P,Q)$ lo suficientemente pequeño para que $B \subset A$, tenemos la proposición. ■

■ **PROPOSICIÓN 3.2.19** *Sea* $\Delta \subset H$ *un conjunto de interior* Δ' *no vacío,* $\Gamma = \pi^{-1}(\Delta) \cup \{O\}$. *Sea* $\Delta_1 \subset \Delta$ *un cerrado no vacío tal que* $\Delta' \setminus \Delta_1 \neq \emptyset$ *y sea* $\Gamma_1 = \pi^{-1}(\Delta_1) \cup \{O\} \subset \Gamma$. *Entonces* Γ *contiene a una bola abierta* B *tal que* $B \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.2.18 existe una bola abierta B' dentro de H y contenida en $\Delta' \setminus \Delta_1$. Entonces $\pi^{-1}(B') \subset \Gamma \setminus \Gamma_1$ es un abierto por la Proposición 3.2.8 y así contiene a una bola abierta B. ■

■ **DEFINICIÓN 3.2.20** *Sea* $\Delta \subset H$ *un convexo cerrado acotado de interior no vacío. La pirámide* $\Gamma(\Delta)$ *se llama una pirámide poliédrica si* Δ *es un poliedro, es decir, si existe un conjunto finito* E *tal que* $\Delta = [E]$.

■ **PROPOSICIÓN 3.2.21** *Sea* $E = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset H$ *que engendra* H; *entonces*

$$\Gamma([E]) = \left\{ O + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Γ' el conjunto de la derecha y sea $O \neq P \in \Gamma([E])$; existe $A \in [E]$ tal que $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA}$ con $\lambda \geq 0$. Como las combinaciones lineales baricéntricas no dependen del origen que se tome, se tiene que

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{OA_i}, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Así,

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda\mu_i)\overrightarrow{OA_i}, \quad \lambda\mu_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

luego $P \in \Gamma'$. Recíprocamente, sea $O \neq P \in \Gamma'$ con

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Sea

$$A = O + \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i};$$

entonces $A \in [E]$ y $P \in \underline{OA}$, luego $P \in \Gamma([E])$. Esto prueba la igualdad de ambos conjuntos. Esto termina la demostración de la proposición. ■

■ **Proposición 3.2.22** *Sea $\Delta \subset H$ un poliedro. Las únicas semirrectas $\underline{OA}$ con $A \in \Delta$ tales que $\Gamma(\Delta) \setminus \underline{OA}$ es convexo son aquéllas para las que A es un vértice de Δ. Se les llama las aristas de $\Gamma(\Delta)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.4 basta demostrar que $\Gamma(\Delta) \setminus \underline{OA}$ es convexo. Como $\Gamma(\Delta) \setminus \underline{OA} = \pi^{-1}(\Delta) \setminus \{A\}$, basta probar que éste es convexo. Sean $P, Q \in \pi^{-1}(\Delta \setminus \{A\})$; por el Lema 3.2.7 $\pi(\overline{PQ}) = \overline{\pi(P)\pi(Q)} \subset \Delta \setminus \{A\}$ luego $\overline{PQ} \subset \pi^{-1}\pi(\overline{PQ}) \subset \pi^{-1}(\Delta \setminus \{A\})$. Esto prueba nuestro aserto. ■

■ **Notas 3.2.23** Sea H un hiperplano de X, consideremos un punto $O \notin H$, un convexo cerrado acotado de interior no vacío $\Delta \subset H$ y la pirámide $\Gamma(\Delta)$.

3.2.23.1. Un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$ es un hiperplano K tal que corta a toda semirrecta de $\Gamma(\Delta)$ en un punto distinto de O. Por ejemplo, un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$ es el mismo H.

3.2.23.2. Sea K un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$; entonces $K \cap \Gamma(\Delta)$ es un convexo cerrado acotado de interior no vacío $\Delta' \subset K$ y $\Gamma(\Delta') = \Gamma(\Delta)$. En la demostración de la Proposición 3.2.22 hay un argumento, que se puede repetir con toda generalidad, que prueba que $\pi^{-1}(\Delta)$ es convexo; esto implica que $K \cap \Gamma(\Delta) = K \cap \pi^{-1}(\Delta)$ es convexo. Por la Proposición 3.2.9, $\Gamma(\Delta)$ es cerrado, luego lo es $K \cap \Gamma(\Delta)$. Si Δ_1 es el interior de Δ en H, $\pi^{-1}(\Delta_1)$ es un abierto no vacío, luego $K \cap \pi^{-1}(\Delta_1) \subset K \cap \Gamma(\Delta)$ tiene interior no vacío en K. Probamos finalmente que $K \cap \Gamma(\Delta)$ es acotado en K. Si π_1 es la proyección desde O sobre el hiperplano K, la composición $\pi_1\pi^{-1} : \Delta \to \Delta'$ es una función biyectiva y bicontinua, luego $\Delta' = K \cap \Gamma(\Delta)$ es compacto en K, luego acotado. La última afirmación es evidente.

3.2.23.3. Sea Δ_1 la intersección de $\Gamma(\Delta)$ con el semiespacio cerrado de borde K que contiene al origen; entonces Δ_1 es un convexo cerrado. Vamos a demostrar que es acotado. En efecto, la función distancia al origen sobre K alcanza un máximo sobre Δ' por 3.2.23.2. Si $M \in \mathbb{R}$ es un número mayor que ese máximo y S es la esfera de centro O y radio M, entonces $\Delta' \subset S$, luego $\Delta_1 \subset S$ y así Δ_1 es acotado.

3.2.23.4. Supongamos que Δ es un poliedro de vértices $E = \{A_1, \ldots, A_m\}$ y sea K un hiperplano. La condición necesaria y suficiente para que K sea transversal a $\Gamma([E])$ es que, para todo $i = 1, \ldots, m$, la intersección $\underline{OA_i} \cap K$ sea un punto $B_i \neq O$. En este caso $K \cap \Gamma(\Delta)$ es el poliedro de vértices $\{B_1, \ldots, B_m\}$.

En efecto, la condición es claramente necesaria; veamos que es suficiente. Consideremos un sistema de referencia afín de origen O respecto del cual tomamos ecuaciones. Sea $f = 0$ una ecuación de K; la hipótesis significa que, para todo $i = 1, \ldots, m$ la ecuación en λ

$$0 = f(O + \lambda \overrightarrow{OA_i}) = f(O) + \lambda \vec{f}(\overrightarrow{OA_i}),$$

tiene una única solución positiva o, lo que es lo mismo, que

$$0 \neq f(O) = -\vec{f}(\overrightarrow{OA_i}),$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Sea $A \in [E]$, y

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1} \lambda_i = 1.$$

La ecuación en λ

$$\begin{aligned} 0 &= f(O + \lambda \overrightarrow{OA}) = f(O) + \lambda \vec{f}(\overrightarrow{OA}) \\ &= f(O) + \lambda \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right) = f(O) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{OA_i}) \end{aligned}$$

tiene como solución

$$\lambda = \frac{-f(O)}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{OA_i})} > 0,$$

lo que tiene sentido porque, al ser $\vec{f}(\overrightarrow{OA_i})$ de signo constante, la suma del denominador tiene el mismo signo que cada $\vec{f}(\overrightarrow{OA_i})$. El punto de intersección

$\underline{OA} \cap K$ es entonces

$$\begin{aligned} B &= O + \frac{-f(O)}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{OA_i})} \overrightarrow{OA} = O + \sum_{j=1}^{m} \frac{-f(O)\lambda_j}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{OA_i})} \overrightarrow{OA_j} \\ &= O + \sum_{j=1}^{m} \frac{-f(O)\lambda_j}{\vec{f}(\overrightarrow{OA})} \overrightarrow{OA_j} = O + \sum_{j=1}^{m} \frac{-f(O)}{\vec{f}(\overrightarrow{OA_j})} \frac{\lambda_j \vec{f}(\overrightarrow{OA_j})}{\vec{f}(\overrightarrow{OA})} \overrightarrow{OA_j} \\ &= O + \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j \vec{f}(\overrightarrow{OA_j})}{\vec{f}(\overrightarrow{OA})} \overrightarrow{OB_j} \in [B_1, \ldots, B_m] \end{aligned}$$

porque $\vec{f}(\overrightarrow{OA_j}) / \vec{f}(\overrightarrow{OA}) > 0$, $\lambda_j \geq 0$ y

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j \vec{f}(\overrightarrow{OA_j})}{\vec{f}(\overrightarrow{OA})} = \frac{1}{\vec{f}(OA)} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{f}(\overrightarrow{OA_j}) = 1 .$$

El hecho de que los B_i sean los vértices de $K \cap \Gamma(\Delta)$ es consecuencia trivial de la Proposición 3.2.22.

3.2.23.5. En la situación de 3.2.23.4, la intersección de $\Gamma([E])$ con el semiespacio cerrado de borde K que contiene al origen es el poliedro de vértices $\{O, B_1, \ldots, B_m\}$. En efecto, elegimos f de tal manera que $f(O) = -1$; entonces el semiespacio cerrado de borde K que contiene al origen viene definido por la desigualdad $f \leq 0$ y lo denotamos por $K_{\leq 0}$. Sea $P \in \Gamma([E])$; tenemos:

$$\begin{aligned} P \in K_{\leq 0} &\iff 0 \geq f(P) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP}) = -1 + \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \\ &\iff 1 \geq \vec{f}(\overrightarrow{OP}) = \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OB_i}\right) \\ &\iff 1 \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{OB_i}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . \end{aligned}$$

Esto prueba que $K_{\leq 0} \cap \Gamma([E])$ es el conjunto de las combinaciones lineales convexas de los puntos $\{O, B_1, \ldots, B_m\}$. La irredundancia de estos puntos proviene de que:

1. al quitar O entramos dentro del hiperplano K.
2. al quitar un B_i quitamos la semirrecta $\underline{OB_i}$, luego quitamos en H el punto A_i y así el poliedro Δ disminuye.

3.2.23.6. Volvemos al caso en que Δ es cualquiera. Si K es un hiperplano tranversal a $\Gamma(\Delta)$ y $P \in \Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$, el hiperplano K_1 paralelo a K por P es transversal a $\Gamma(\Delta)$.

En efecto, tomamos una ecuación $f = 0$ de K. La transversalidad de K implica que, para todo $A \in \Delta$, la ecuación

$$0 = f(O + \lambda\overrightarrow{OA}) = f(O) + \lambda\vec{f}(\overrightarrow{OA})$$

tiene solución positiva. Esto significa que $0 \neq f(O) = -\vec{f}(\overrightarrow{OA})$ y así el signo de $\vec{f}(\overrightarrow{OA})$ es constante. Un hiperplano paralelo a K que no pase por O tiene una ecuación $g = 0$ donde $\vec{g} = \vec{f}$, luego $f(O)g(O) > 0$. Así, la ecuación

$$0 = g(O + \lambda\overrightarrow{OA}) = g(O) + \lambda\vec{f}(\overrightarrow{OA})$$

tiene siempre solución positiva. Esto prueba nuestro aserto.

■ 3.3 Redes y pirámides

En esta sección vamos a trabajar con un espacio euclídeo $(X, V, +)$ de dimensión $n > 1$. Por supuesto, se considera fijado el producto escalar sobre V y, cuando sea necesario, se considerará un sistema de referencia ortonormal.

■ **Definición 3.3.1** *Una* red *en X es un par $\mathcal{R} = (O, G)$ formado por un punto $O \in X$ y un subgrupo abeliano libre del grupo aditivo de V engendrado por n vectores $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ linealmente independientes. Al punto O se le llama el* origen de la red. *Los puntos de la red son los de la forma $P + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in G$, y su conjunto se designará por $Y(\mathcal{R})$.*

■ **Observación 3.3.2**

3.3.2.1. En general trabajaremos con una red $\mathcal{R} = (O, G)$ fija. También fijaremos dentro de ella una base $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, que siempre supondremos ortonormal o, lo que es lo mismo, que consideraremos sobre V el producto escalar que hace de $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ una base ortonormal.

3.3.2.2. La red $\mathcal{R}$ determina unívocamente el conjunto $Y(\mathcal{R})$ de sus puntos. Recíprocamente, $Y(\mathcal{R})$ determina unívocamente G como el conjunto de vectores de V correspondientes al grupo de las traslaciones τ de V tales que $\tau(Y(\mathcal{R})) = Y(\mathcal{R})$.

■ **Definición 3.3.3** *La* celda base *de la red $\mathcal{R} = (O, G)$ es el conjunto de 2^n puntos*

$$\left\{ O + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta_i \boldsymbol{u}_i} \;\middle|\; \delta_i = 0, 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Una celda *de la red es el conjunto de* 2^n *puntos*

$$\left\{P + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta_i \boldsymbol{u}_i} \;\middle|\; \delta_i = 0, 1\,, \quad \forall i = 1, \ldots, n\right\}.$$

donde P *es un punto de la red, que se llama* origen de la celda. *Evidentemente toda celda de la red es una trasladada de la celda base. Si* C *es una celda de origen* P*, se llama* paralelepípedo *asociado a* C *al conjunto*

$$\Delta(C) = \left\{P + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1\,, \quad \forall i = 1, \ldots, n\right\}$$

■ **Proposición 3.3.4** *Sea* C *una celda de origen* P *y designemos por* $\Delta(C)$ *al paralelepípedo asociado. El punto de* $\Delta(C)$ *más alejado de* P *es* $P + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i$. *Más aún, la distancia entre esos dos puntos es la máxima distancia entre puntos del paralelepípedo, y se le llama el* diámetro *del paralelepípedo.*

Demostración. Sea $Q = P + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i$, $Q' = P + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ con $0 \le \lambda_i \le 1$; entonces

$$d(P, Q')^2 = |\overrightarrow{PQ'}|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le n = |\overrightarrow{PQ}|^2 = d(P, Q)^2\,.$$

Más aún, si $Q'' = P + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{u}_i$ es otro punto del paralelepípedo, con $0 \le \mu_i \le 1$, es

$$d(Q', Q'')^2 = |\overrightarrow{Q'Q''}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \lambda_i|^2 \le n = d(P, Q)^2\,.$$

Esto prueba el resultado. ■

■ **Proposición 3.3.5** *El paralelepípedo asociado a una celda es el cierre convexo de sus puntos, por tanto es un poliedro. Sus vértices son los puntos de la celda.*

Demostración. Vamos a demostrar primero que toda combinación lineal convexa de los puntos de C está en $\Delta(C)$. Puesto que

$$C = \left\{P + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \delta_i = 0, 1\,, \quad 1 \le i \le n\right\}$$

designamos por W al conjunto de las n-uplas de coeficientes de esas combinaciones lineales, es decir,

$$W = \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \mid \delta_i = 0, 1\,, \quad 1 \le i \le n\}\,.$$

Una combinación lineal convexa de los puntos de C es una expresión del tipo

$$Q = P + \sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in W} \lambda_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \boldsymbol{u}_i \right),$$

con $0 \leq \lambda_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \leq 1$ para todo $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ y $\sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in W} \lambda_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \leq 1$. Entonces podemos escribir

$$Q = P + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in W} \lambda_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \delta_i \right) \boldsymbol{u}_i,$$

y

$$0 \leq \sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in W} \lambda_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \delta_i \leq 1, \forall i = 1,\ldots,n,$$

con lo que $Q \in \Delta(C)$.

Recíprocamente, vamos a demostrar que todo punto de $\Delta(C)$ es combinación lineal convexa de C. Consideremos un punto fijo

$$Q = P + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \in \Delta(C)$$

y sea $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ una biyección tal que, poniendo $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_{\sigma(i)}$, $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}$, $i = 1,\ldots,n$, es

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n .$$

Entonces tenemos que

$$Q = P + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{v}_i$$

y se verifica, evidentemente, que

$$Q = P + \mu_1 \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i + (\mu_2 - \mu_1) \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{v}_i + (\mu_3 - \mu_2) \sum_{i=3}^{n} \boldsymbol{v}_i + \cdots + (\mu_n - \mu_{n-1}) \boldsymbol{v}_n$$

donde todos los coeficientes son ≥ 0 y su suma vale

$$0 \leq \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) + (\mu_3 - \mu_2) + \cdots + (\mu_n - \mu_{n-1}) = \mu_n \leq 1 .$$

Finalmente hemos de demostrar que los vértices del paralelepípedo son los puntos de C. Como esta demostración se hace viendo que un conjunto es convexo o que un conjunto no es convexo, podemos aplicar cualquier traslación conveniente y razonar en el conjunto trasladado.

Probamos primero que, si a $\Delta(C)$ se le quita un punto de C, el resultado es un conjunto convexo. Como todo punto de la red es origen de una celda

y cualesquiera dos celdas son trasladadas una de la otra, podemos suponer que el punto que quitamos es el propio P. En este caso, el demostrar que $\Delta(C) \setminus \{P\}$ es convexo es consecuencia de un cálculo baricétrico trivial, como hemos hecho varios en la Sección 3.1.

Resta por probar que, si a $\Delta(C)$ se le quita un punto Q que no sea de C, el conjunto resultante no es convexo. Comenzamos demostrándolo para $n = 2$. Si Q es un punto interior a uno de los segmentos $\overline{P(P+\boldsymbol{u}_1)}$ o $\overline{P(P+\boldsymbol{u}_2)}$ el resultado es claro. Si $Q = P + \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2$ no está en ninguno de esos segmentos, es $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ y al menos uno de los dos, digamos λ_2, es distinto de 1. Sea Δ' el transformado de $\Delta(C)$ por la traslación τ de vector $-\lambda_1\boldsymbol{u}_1$; entonces $\overline{P(P+\boldsymbol{u}_2)} \subset \Delta'$ y $\tau(Q)$ es un punto interior a este segmento. Así, $\Delta' \setminus \{\tau(Q)\}$ no es convexo luego $\Delta(C) \setminus \{Q\}$ tampoco. Supongamos ahora que $n > 2$ y supongamos cierto que, para $n-1$, todo punto $Q \in \Delta(C)$ que no pertenezca a C es interior a un segmento contenido en $\Delta(C)$. Sea $Q = P + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\boldsymbol{u}_i \notin C$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\forall i = 1,\ldots,n$. Si algún $\lambda_i = 0$, la hipótesis de recurrencia nos dice que Q es interior a un segmento contenido en el paralelepípedo correspondiente (que está contenido en $\Delta(C)$), luego $\Delta(C)$ no puede ser convexo. Si todos los λ_i son distintos de cero alguno debe ser distinto de 1, por ejemplo, $\lambda_1 \neq 1$. Sea Δ' el transformado de $\Delta(C)$ por la traslación τ de vector $-\sum_{i\geq 2}\lambda_i\boldsymbol{u}_i$; entonces $\overline{P(P+\boldsymbol{u}_1)} \subset \Delta'$ y $\tau(Q)$ es un punto interior a este segmento. Así, $\Delta' \setminus \{\tau(Q)\}$ no es convexo luego $\Delta(C) \setminus \{Q\}$ tampoco. Esto concluye nuestra demostración. ■

El siguiente es un resultado importante.

■ **Teorema 3.3.6** *Sea (O,G) una red y $\Omega \subset X$ un compacto. Entonces Ω está contenido en una unión finita de paralelepípedos asociados a celdas de la red. En particular, Ω contiene sólo un número finito de paralelepípedos asociados a celdas de la red, o a un número finito de puntos de la red.*

Demostración. La función distancia al origen $d(O,-) : \Omega \to \mathbb{R}_0$ es continua sobre Ω, luego tiene un máximo $M > 0$. Tomamos un entero positivo N tal que $N > M$, para todo $i = 1,\ldots,n$, consideramos la celda base y le aplicamos todas las traslaciones con vectores del tipo $\sum_{i=1}^{n} p_i\boldsymbol{u}_i$ donde $p_i \in \mathbb{Z}$ y $|p_i| \leq N$. Esto nos da un número finito de celdas, luego de paralelepípedos, y llamamos Ω' la unión de todos ellos. Si $P = O + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{u}_i$, entonces $P \notin \Omega'$ si y sólo si existe un índice i, $1 \leq i \leq n$ tal que $|\lambda_i| \geq N+1$. En este caso,

$$d(O,P)^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \geq (N+1)^2 > N^2 > M^2,$$

luego $\Omega \subset \Omega'$. ■

■ **NOTAS 3.3.7** Sea $\mathcal{R} = (O, G)$ una red y $\Gamma(\Delta)$ una pirámide de vértice O, con $\Delta \subset H$ un convexo compacto de interior no vacío.

3.3.7.1. Obsérvese que en una red todas las celdas tienen el mismo diámetro. Por eso, a veces, lo llamaremos el *diámetro* de la red.

3.3.7.2. Todo punto del espacio pertenece a un paralelepípedo asociado a una celda de la red. Esto es consecuencia del Teorema 3.3.6.

3.3.7.3. El interior Γ' de $\Gamma(\Delta)$ es $\pi^{-1}(\Delta')$, donde Δ' es el interior de Δ, por el Corolario 3.2.13. Se verifica que Γ' contiene una celda de $\mathcal{R}$. En efecto, sea d el diámetro de la red y sea $P \in \Gamma'$, $B(P, \varepsilon)$ una bola abierta de centro P y radio $\varepsilon > 0$ contenida en Γ'. Sea h una homotecia de centro O' y razón r tal que $r\varepsilon > d$; entonces $h(B(P, \varepsilon)) = B(h(P), r\varepsilon) \subset \Gamma'$ y esta bola debe contener a un punto Q de la red. Como $Q \in \Gamma'$, existe una bola abierta $B(Q, \delta)$ de centro Q y radio $\delta > 0$ contenida en Γ'. Sea h' una homotecia de centro O' y razón r' tal que $r'\delta > d$; entonces $h'(B(Q, \delta)) = B(h(Q), r'\delta) \subset \Gamma'$ y esta bola debe contener a un paralelepípedo de la red, luego a una celda.

3.3.7.4. El interior Γ' de Γ contiene infinitos puntos de $\mathcal{R}$. La demostración es evidente: basta tomar una semirrecta interior que contenga a un punto de $\mathcal{R}$ y una sucesión de bolas abiertas disjuntas, con centros en la semirrecta, contenidas en Γ' y con radios mayores que d.

■ **OBSERVACIÓN 3.3.8** A partir de ahora vamos a trabajar con dos objetos fijos:

1. Una red $\mathcal{R} = (O, G)$, donde G está generado por una base de V que denotaremos $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$.

2. Una pirámide $\Gamma(\Delta)$ de vértice O, proyección de un convexo compacto de interior no vacío Δ dentro de un hiperplano H que no pasa por O.

Como tenemos un origen fijo O se pueden identificar los puntos de X con los vectores de V en la forma usual. En este sentido hablaremos de suma de puntos de $\mathcal{R}$. Es evidente que los puntos de $\mathcal{R}$ contenidos en $\Gamma(\Delta)$ constituyen un subsemigrupo Σ de G. Para hablar así hemos identificado $\mathcal{R}$ con G, ya que está fijado el origen O. Además, aritméticamente, se puede identificar cada punto de $\mathcal{R}$ con sus coordenadas (enteras) respecto de $\{O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$.

■ **NOTAS 3.3.9**

3.3.9.1. Sea K un hiperplano transversal a Γ (véase Notas 3.2.23); sabemos que $K \cap \Gamma$ es un convexo compacto Δ_1 de interior no vacío dentro de K. Más

aún, si Δ es un poliedro y $\{A_1, \ldots, A_m\}$ son sus vértices, entonces Δ_1 es un poliedro de vértices $B_i = \underline{OA_i} \cap K$. También sabemos que la intersección de $\Gamma(\Delta)$ con el semiespacio de borde K que contiene al origen es un poliedro, por tanto compacto. Por el Teorema 3.3.6, este poliedro contiene sólo un número finito de puntos de $\mathcal{R}$.

3.3.9.2. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función afín tal que $f = 0$ es una ecuación de K. Para todo $P \in K$ es $0 = f(P) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$ luego $\vec{f}(\overrightarrow{OP}) = -f(O) \neq 0$. Así, $\vec{f}$ es una forma lineal constante sobre los vectores de posición de los puntos de K. Cambiando $\vec{f}$ por $-\vec{f}$ si preciso fuera se puede suponer que $\ell_K = \vec{f}$ es una forma lineal positiva y constante sobre todos los vectores de posición de los puntos de K (luego $f(O) < 0$). A una forma lineal obtenida de esta manera se le llama *una forma de orden.* Vamos a ver cómo se asocia un grado y un orden a los puntos de $\Sigma = Y(\mathcal{R}) \cap \Gamma(\Delta)$ mediante la función ℓ_K, que se llamarán el *ℓ_K-grado,* ó *K-grado* y el *ℓ_K-orden diagonal,* ó *K-orden diagonal.*

3.3.9.3. La clave de cómo varía $\ell_K(P)$ cuando $P \in \Gamma(\Delta)$ nos la da la observación que damos a continuación. Desde luego, $\ell_K(O) = 0$. Si $O \neq P \in \Gamma(\Delta)$ y $Q = \underline{OP} \cap K$, $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{OP}$, es $\alpha > 0$ y así

$$\ell_K(\overrightarrow{OP}) = \ell_K\left(\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{OQ}\right) > 0,$$

luego ℓ_K es positiva sobre cualquier vector de posición de cualquier punto de $\Gamma(\Delta)$. Si ahora Q es un punto cualquiera de $\underline{OP}$, es $\ell_K(\overrightarrow{OQ}) = \alpha\ell_K(\overrightarrow{OP})$, que es menor que $\ell_K(\overrightarrow{OP})$ si $Q \in \overline{OP} \setminus \{P\}$ y mayor si $Q \notin \overline{OP}$. Para abreviar esta propiedad diremos que *ℓ_K es positiva en* $\Gamma(\Delta)$. Más concretamente, una forma lineal ℓ sobre V es positiva en $\Gamma(\Delta)$ si para todo $P \in \Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$ es $\ell(P) > 0$. Esto implica que, si $P \in \Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$ y $Q \in \underline{OP}$, entonces $\ell(Q) < \ell(P)$ si $Q \in \overline{OP} \setminus \{P\}$ y $\ell(Q) > \ell(P)$ si $Q \notin \overline{OP}$.

Recíprocamente, sea ℓ una forma lineal creciente en $\Gamma(\Delta)$, sea $P \in \Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$ fijo y consideremos la función afín $f = \ell - \ell(\overrightarrow{OP})$; entonces $f = 0$ es la ecuación de un hiperplano K que es transversal a $\Gamma(\Delta)$. En efecto, sea $Q \in \Delta$; la ecuación en λ dada por

$$0 = f(O + \lambda\overrightarrow{OQ}) = f(O) + \lambda\vec{f}(\overrightarrow{OQ}) = -\ell(\overrightarrow{OP}) + \lambda\ell(\overrightarrow{OQ})$$

tiene su solución positiva. Esto prueba que K es transversal a $\Gamma(\Delta)$.

3.3.9.4. El resumen de 3.3.9.3 es que una forma lineal es positiva sobre todos los vectores de posición de puntos de $\Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$ si y sólo si es la parte vectorial de una función afín f tal que $f = 0$ es la ecuación de un hiperplano

transversal a $\Gamma(\Delta)$. Para una tal forma lineal ℓ y para todo $P \in \Gamma(\Delta)$, pondremos $\ell(P) = \ell(\overrightarrow{OP})$ habiendo identificado puntos con vectores de posición de origen en O.

3.3.9.5. Sea ℓ una forma lineal positiva sobre $\Gamma(\Delta)$; para todo $P \in \Sigma = \Gamma(\Delta) \cap Y(\mathcal{R})$, se llamará el ℓ-grado de P (o simplemente el grado, si no hay lugar a confusión) al número real $\ell(P)$. Nótese que el grado es una función aditiva, en el sentido de que $\ell(P + Q) = \ell(P) + \ell(Q)$.

3.3.9.6. Se puede definir sobre Σ el *ℓ-orden diagonal* poniendo, para $P, Q \in \Sigma$:

$$P <_{\text{diag}} Q \iff \begin{cases} \ell(P) < \ell(Q) \\ \text{ó} \\ \ell(P) = \ell(Q) \text{ y } P <_{\text{lex}} Q \end{cases}$$

donde $<_{\text{lex}}$ es el orden lexicográfico contado coordenadas respecto de

$$(O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

3.3.9.7. Sea $\emptyset \neq \Sigma' \subset \Sigma \setminus \{O\}$; vamos a demostrar que el conjunto Σ' tiene un mínimo para el orden diagonal. Sea $P \in \Sigma'$, consideremos la función afín $f = \ell - \ell(P)$ y el hiperplano K de ecuación $f = 0$, que pasa por P y es transversal a $\Gamma(\Delta)$. Sea Δ_1 la intersección de $\Gamma(\Delta)$ con el semiespacio de borde K que contiene a O; se verifica que Δ_1 es compacto por 3.2.23.3 luego contiene sólo un número finito de puntos de Σ' por el Teorema 3.3.6.

Si $P \in \Sigma' \setminus \Delta_1$ y $Q = \underline{OP} \cap K$ es $\ell(P) > \ell(Q) \geq \ell(R)$, $\forall R \in \Delta_1$. Así, el conjunto

$$\{\ell(P) \mid P \in \Sigma'\}$$

alcanza un mínimo en $\Sigma' \cap \Delta_1$ y este mínimo se alcanza sólo en un número finito de puntos; de ahí la conclusión.

3.3.9.8. Lo dicho en 3.3.9.7 significa que Σ es un conjunto bien ordenado para el orden diagonal respecto de una forma lineal ℓ positiva sobre $\Gamma(\Delta)$.

■ **Definición 3.3.10** *Una pirámide poliédrica* $\Gamma(\Delta)$, $\Delta = [E] \subset H$ *con* $E = \{A_1, \ldots, A_m\}$ *se llama* racional *si existen puntos* $B_i \in \underline{OA_i} \cap \Sigma$ *distintos todos del origen.*

■ **Proposición 3.3.11** *Supongamos que* $\Gamma(\Delta)$ *es una pirámide racional. Existe un hiperplano* K *transversal a* $\Gamma(\Delta)$ *con una ecuación respecto de*

$$(O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

con coeficientes enteros y que corta a cada una de las semirrectas $\underline{OA_i}$ *en puntos de* $\Sigma = \Gamma(\Delta) \cap Y(\mathcal{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f = 0$ una ecuación de H como las que usamos normalmente, es decir, que $\vec{f} = \ell_H$ es una forma positiva y escribamos $\ell_H = \sum_{i=1}^n u_i x_i$. Sea $\ell' = \sum_{i=1}^n u'_i x_i$ una forma lineal con coeficientes en principio indeterminados; existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $(u'_1, \ldots, u'_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que:

1. $|u'_i| < \delta$, $\forall i = 1, \ldots, n$,

2. $u_i + u'_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, \ldots, n$ y

3. $\ell(A_i) > 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, luego $\ell = \ell_H + \ell'$ es positiva sobre $\Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$. Como todos los coeficientes de ℓ son racionales, se puede sustituir ℓ por un múltiplo entero positivo de ella, obteniéndose una nueva ℓ con coeficientes enteros y positiva sobre $\Gamma(\Delta) \setminus \{O\}$.

Por 3.3.9.4, ℓ es la parte vectorial de una función afín que define un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$. Por 3.2.23.6, el hiperplano K de ecuación $0 = f = \ell - \ell(pB_1)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, es transversal a $\Gamma(\Delta)$. Para todo $i = 2, \ldots, m$ la ecuación

$$0 = f(O + \lambda\overrightarrow{OB_i}) = f(O) + \lambda\vec{f}(\overrightarrow{OB_i}) = -p\ell(B_1) + \lambda\ell(\overrightarrow{OB_i})$$

tiene la solución racional $\lambda = p\ell(B_1)/\ell(B_i)$. Eligiendo p convenientemente se puede suponer que esta solución es entera. Esto dice que K es un hiperplano transversal a $\Gamma(\Delta)$, con coeficientes enteros, que corta a las semirrecta $\underline{OA_i}$ en puntos enteros. ■

■ **TEOREMA 3.3.12** *Sea $\Gamma(\Delta)$ una pirámide poliédrica. La condición necesaria y suficiente para que sea racional es que exista un hiperplano transversal a ella, con coeficientes enteros, que corte a las aristas en puntos enteros.*

DEMOSTRACIÓN. Si es racional, la existencia de ese hiperplano viene garantizada por la Proposición 3.3.11. Recíprocamente, la existencia de ese hiperplano implica que la pirámide es racional, por definición. ■

■ 3.4 Semigrupos

A lo largo de esta sección vamos a considerar los siguientes datos fijos:

1. Un punto $O \in X$, un hiperplano H que no pase por O, un convexo compacto $\Delta \subset H$ de interior no vacío en H; designaremos por $\Gamma(\Delta)$ a la pirámide correspondiente.

2. Una red $\mathcal{R} = (O, G)$ donde G está generado como grupo abeliano libre por una base ortonormal $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$; consideraremos coordenadas y ecuaciones respecto del sistema de referencia métrico

$$(O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

El conjunto de los puntos de $\mathcal{R}$ se designará por $Y(\mathcal{R})$. Los puntos de X se identificarán con los vectores de posición de origen O.

3. Escribiremos $\Sigma = Y(\mathcal{R}) \cap \Gamma(\Delta)$; sabemos que Σ es un subsemigrupo de G.

■ **Proposición 3.4.1** *Sean $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ semirrectas de origen O; las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *X es el mínimo subespacio lineal que las contiene.*

2. *Toda familia de puntos $\{O, B_1, \ldots, B_m\}$, $O \neq B_i \in \varrho_i$, $i = 1, \ldots, m$, genera a X como espacio afín.*

3. *Existe una familia de puntos $\{O, B_1, \ldots, B_m\}$, $O \neq B_i \in \varrho_i$, $i = 1, \ldots, m$, que genera a X como espacio afín.*

Por esta razón se dice que las semirrectas $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_m\}$ generan X, o que son generadoras de X.

Demostración. Que la primera condición implica la segunda es claro: si existiese una familia $\{O, B_1, \ldots, B_m\}$, $O \neq B_i \in \varrho_i$, $i = 1, \ldots, m$, contenida en un subespacio lineal propio todas las semirrectas ϱ_i estarían contenidas en ese subespacio lineal. La segunda implica obviamente la tercera y ésta implica evidentemente la primera. ■

■ **Proposición 3.4.2** *Sean $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ semirrectas de origen O contenidas en $\Gamma(\Delta)$ que generan X. Existe una subpirámide Γ_1 de $\Gamma(\Delta)$ que contiene a todas esas semirrectas y que es la mínima que verifica esta condición. Esta subpirámide Γ_1 es poliédrica y sus aristas están entre las semirrectas dadas.*

Demostración. Vamos a definir un subconjunto Γ_1 de $\Gamma(\Delta)$ en la forma siguiente: elijamos puntos $O \neq B_i \in \varrho_i$, $i = 1, \ldots, m$, y pongamos

$$\Gamma_1 = \left\{ O + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OB_i} \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \right\}.$$

Este conjunto no depende de la elección de los B_i. En efecto, si $O \neq B'_i \in \varrho_i$, $i = 1, \ldots, m$ y $\overrightarrow{OB'}_i = \alpha_i \overrightarrow{OB}_i$, $\alpha_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, es

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OB}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \overrightarrow{OB'}_i,$$

lo que prueba la afirmación.

Elijamos ahora los puntos $B_i = \varrho_i \cap H$; como las semirrectas generan X, entonces $E = \{B_1, \ldots, B_m\}$ generan H. Por la Proposición 3.2.21 es $\Gamma([E]) = \Gamma_1$, luego Γ_1 es una pirámide poliédrica. El resto de las afirmaciones son evidentes.

■

■ **NOTAS 3.4.3** Sea ℓ una forma lineal positiva sobre $\Gamma(\Delta)$.

3.4.3.1. Para cada $\alpha \in \ell(\Sigma) \setminus \{0\}$, el conjunto $\ell^{-1}(\alpha)$ es finito. En efecto, existe un $P \in \Sigma$ tal que $\ell(P) = \alpha$. Consideremos el hiperplano K definido por la función afín $f = -\alpha + \ell$; por el razonamiento en 3.3.9.7, $K \cap \Gamma(\Delta)$ contiene sólo un número finito de puntos de Σ

3.4.3.2. Todo subconjunto no vacío F de $\ell(\Sigma) \setminus \{0\}$ está bien ordenado. Esto es consecuencia de la buena ordenación de Σ.

3.4.3.3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}_+$; entonces el conjunto

$$\Sigma_{\leq \alpha} = \{A \in \Sigma \mid \ell(A) \leq \alpha\}$$

es finito. En efecto, sea $B \in \Sigma \setminus \{O\}$; entonces $\ell(B) > 0$. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n\ell(B) = \ell(nB) > \alpha$. Sea K el hiperplano de ecuación $0 = \ell - \ell(nB)$; entonces $\Sigma_{\leq \alpha}$ está contenido en la intersección Δ_1 de $\Gamma(\Delta)$ con el semiespacio de borde K que contiene al origen. Por el razonamiento en 3.3.9.7, $\Sigma \cap \Delta_1$ es finito, de donde la conclusión.

■ **PROPOSICIÓN 3.4.4** *Supongamos que $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide poliédrica racional. Entonces Σ es un semigrupo finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ las aristas de $\Gamma(\Delta)$; como ésta es racional, por la Proposición 3.3.11 existe un hiperplano K transversal a $\Gamma(\Delta)$ que corta a cada ϱ_i en un punto $B_i \in \Sigma \setminus \{O\}$. Es ahora trivial el ver que $E = \{B_1, \ldots, B_m\}$ es el conjunto de vértices de un poliedro Δ_1 en K y que $\Gamma(\Delta_1) = \Gamma(\Delta)$. El conjunto E determina un subconjunto $\Lambda \subset \Gamma(\Delta)$ definido por

$$\Lambda = O + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OB}_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Sea τ_i la traslación de vector $\overrightarrow{OB_i}$, $i = 1, \ldots, m$; se verifica que

$$\Gamma(\Delta) = \bigcup_{C \in \mathbb{Z}_0^m} \tau_1^{c_1} \cdots \tau_m^{c_m}(\Lambda).$$

En efecto, lo primero que hay que tener en cuenta es que las traslaciones conmutan, luego podemos agrupar un producto finito de ellas en forma monomial. En segundo lugar observamos que, para todo subconjunto $\Gamma_1 \subset \Gamma(\Delta)$ y toda traslación τ_i es $\tau_i(\Gamma_1) \subset \Gamma$. En efecto, tomemos, por ejemplo, $\tau_i = \tau_1$ y sea $P \in \Gamma_1$, $P = O + \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{OB_i}$ con $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Entonces

$$\tau_1(P) = O + (\lambda_1 + 1)\overrightarrow{OB_1} + \sum_{i=2}^m \lambda_i \overrightarrow{OB_i},$$

que, evidentemente, pertenece a Γ, lo que prueba que $\tau_1(\Gamma_1) \subset \Gamma$. Con esta observación es ya claro que

$$\Gamma \supset \bigcup_{C \in \mathbb{Z}_0^m} \tau_1^{c_1} \cdots \tau_m^{c_m}(\Lambda).$$

Recíprocamente, sea $P = O + \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{OB_i} \in \Gamma$ con $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$ y sea $c_i \geq 0$ la parte entera de λ_i. Sea $P' = O + \sum_{i=1}^m (\lambda_i - c_i)\overrightarrow{OB_i}$; entonces $P' \in \Lambda$ y $P = \tau_1^{c_1} \cdots \tau_m^{c_m}(P')$. Esto prueba la igualdad.

El punto crucial que nos resta por probar es que dentro de Λ hay sólo un número finito de puntos de Σ. Esto va a implicar automáticamente que Σ está finitamente generado, precisamente por los monomios correspondientes a los puntos dentro de Λ. En efecto, al recubrir Γ todos los trasladados de Λ, todo elemento de Σ está dentro de un trasladado de Λ. Esto significa que todo punto de Σ es suma de uno de Λ con uno del tipo $\sum_{i=1}^m u_i B_i$, $u_i \in \mathbb{Z}_0$. Así pues nos concentramos en probar que dentro de Λ hay sólo un número finito de puntos de Σ.

Sea $f = 0$ una ecuación de K tal que $\ell_K = \vec{f}$ es positiva; el valor de ℓ_K sobre K es constante y positivo, digamos λ. Para todo $P \in \Lambda$ es

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{OB_i}, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

por tanto

$$\ell_K(\overrightarrow{OP}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \ell_K(\overrightarrow{OB_i}) = \lambda \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq m\lambda.$$

Así pues, todos los elementos de $\Sigma \cap \Lambda$ tienen grado acotado por $m\lambda$, luego sólo hay un número finito, por 3.4.3.3. Esto prueba la proposición. ■

■ **PROPOSICIÓN 3.4.5** *Si $\Gamma(\Delta)$ no es racional, Σ no está finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \{B_1, \ldots, B_m\} \subset \Sigma$; si no generan X las semirrectas $\{\underline{OB_1}, \ldots, \underline{OB_m}\}$ está claro que E no puede generar Σ porque Σ genera X por 3.3.7.3. Supongamos, pues, que esas semirrectas engendran X. Por la Proposición 3.4.2, si $A_i = \underline{OB_i} \cap H$, $i = 1, \ldots, m$, y $\Delta_1 = [A_1, \ldots, A_m]$, entonces $\Gamma_1 = \Gamma(\Delta_1)$ es una pirámide poliédrica racional que contiene a las semirrectas $\underline{OB_i}$. Sea Δ' el interior de Δ; si $\Delta' \subset \Delta_1$ sería $\Delta = \overline{\Delta'} \subset \Delta_1$ (cierre topológico, Lema 3.2.15) y eso no es posible porque $\Gamma(\Delta)$ no es racional. Así $\Delta' \setminus \Delta_1 \neq \emptyset$ luego, por la Proposición 3.2.19, $\Gamma(\Delta)$ contiene una bola abierta B tal que $B \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Aplicando una hometecia de razón conveniente se puede agrandar B, siempre dentro de $\Gamma(\Delta)$ y fuera de Δ_1, de tal manera que contenga un punto de Σ. Esto prueba que Σ no está finitamente generado. ■

■ **COROLARIO 3.4.6** Si $\Gamma(\Delta)$ no es racional, para cualquier subpirámide poliédrica racional $\Gamma_1 \subset \Gamma(\Delta)$ existe $P \in \Sigma$ que no pertenece a Γ_1.

Las proposiciones 3.4.4 y 3.4.5 se resumen en el

■ **TEOREMA 3.4.7** *El semigrupo Σ está finitamente generado si y sólo si $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide poliédrica racional.*

■ **EJEMPLO 3.4.8** Consideremos en el plano la pirámide no racional de vértice el origen que proyecta el segmento $\overline{PQ}$ con $P = (1, 0)$, $Q = (1, \exp(1))$ contenido en la recta H correspondiente. El hecho de que esta pirámide no sea racional es evidente: no hay ningún número entero que multiplicado por $\exp(1)$ dé entero. Para cualquier subpirámide racional de ella que podamos construir, existen puntos de la pirámide no contenidos en la subpirámide. Esto significa, en nuestro caso particular, que podemos encontrar una serie de puntos enteros que se aproximen por abajo a la recta $y = \exp(1) * x$ cuanto se desee, que corresponden a las aproximaciones racionales de $\exp(1)$. Se puede calcular con MAPLE una lista. En la sesión siguiente, la función `punto` toma un entero positivo como cota y da como salida el punto entero con abcisa menor o igual que la cota que más cerca está de la recta $y = \exp(1) * x$. Las diversas salidas son listas de tres números: los dos últimos son las coordenadas del punto entero más cercano a la recta y el primero es la pendiente de la recta que pasa por el origen y por ese punto entero (es decir, una aproximación racional de $\exp(1)$). Para cada punto entero la función `comprobacion` dictamina si está fuera de la pirámide racional de vértice el origen determinada por $(1, 0)$ y el punto anterior. La sesión es como sigue:

```
> A100:=punto(100);
        A100 := [2.7179487179487179487, 39, 106]

> A200:=punto(200);comprobacion([subsop(1=NULL,A100),\
        subsop(1=NULL,A200)]);
        A200 := [2.7182320441988950276, 181, 492]
                                    true

> A300:=punto(300);comprobacion([subsop(1=NULL,A200),\
        subsop(1=NULL,A300)]);
        A300 := [2.7182539682539682540, 252, 685]

                                    true

> A400:=punto(400);comprobacion([subsop(1=NULL,A300),\
        subsop(1=NULL,A400)]);
        A400 := [2.7182741116751269036, 394, 1071]

                                    true

> A500:=punto(500);comprobacion([subsop(1=NULL,A400),\
        subsop(1=NULL,A500)]);
        A500 := [2.7182795698924731183, 465, 1264]

                                    true

> A1000:=punto(1000);comprobacion([subsop(1=NULL,A500),\
         subsop(1=NULL,A1000)]);
         A1000 := [2.7182795698924731183, 465, 1264]

                                   false

> A5000:=punto(5000);comprobacion([subsop(1=NULL,A1000),\
         subsop(1=NULL,A5000)]);
         A5000 := [2.7182817182817182817, 1001, 2721]

                                    true

> A10000:=punto(10000);comprobacion([subsop(1=NULL,A5000),\
          subsop(1=NULL,A10000)]);
          A10000 := [2.7182818229439497119, 9545, 25946]
```

```
                                true

> A100000:=punto(100000);comprobacion([subsop(1=NULL,A10000),\
          subsop(1=NULL,A100000)]);
          A100000 := [2.7182818281828182818, 99990, 271801]

                                true
```

La mera inspección de la lista prueba la lentitud progresiva de la convergencia.

■ **NOTAS 3.4.9** Vamos a calcular un sistema de generadores de Σ en el caso en que $n = 2$.

3.4.9.1. Una pirámide en dimensión 2 con vértice en el origen viene dada por un par de vectores linealmente independientes $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ y es

$$\Gamma = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2\}.$$

Si Γ es racional se pueden tomar esos vectores enteros, que es lo que hacemos.

3.4.9.2. Como la pirámide no depende de los vectores que tomemos, uno dentro de cada una de las semirrectas

$$O + \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle_+, \quad O + \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle_+,$$

podemos tomar $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ enteros y primitivos, es decir que el máximo común divisor de sus componentes sea 1. Si forman una base de $\mathbb{Z}^2$, entonces ellos mismos generan a Σ como semigrupo. En lo que sigue vamos a suponer que no son una base de $\mathbb{Z}^2$.

3.4.9.3. Sea $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\beta v_{11} - \alpha v_{12} = 1$; entonces $\{\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12}), \boldsymbol{w} = (\alpha, \beta)\}$ es una base de $\mathbb{Z}^2$, con la que podemos operar en vez de operar con la canónica (que es la que viene de tomar coordenadas respecto de la base prefijada $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ de la red). Respecto de esta base las coordenadas de $\boldsymbol{v}_2$ son (a, q), donde necesariamente $q \neq 0$. Si $q < 0$ cambiamos $\boldsymbol{w}$ por $-\boldsymbol{w}$ (lo que no altera la condición de base de $\mathbb{Z}^2$), luego se puede suponer $q > 0$. Desde luego, a, q son primos entre sí y no puede ser $a = 0$ porque $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ no forman una base de $\mathbb{Z}^2$. Si $a < 0$ y $a = cq + p$ con $c \in \mathbb{Z}$ y $0 < p < q$, el cambio de la base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}\}$ a $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w} - c\boldsymbol{v}_1\}$ nos transforma el vector (a, q) en (p, q) con $0 < p < q$ y primos entre sí.

3.4.9.4. Así pues tenemos la pirámide engendrada por los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (p, q)$ y tratamos de calcular un sistema de generadores de Σ. La

demostración de la Proposición 3.4.4 nos dice que Σ está engendrado por los puntos enteros dentro del conjunto

$$\Lambda = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\},$$

luego lo que hay que determinar es el conjunto de puntos enteros dentro del cuadrilátero $(0,0), (1,0), (p+1,q), (p,q)$. Éstos son fáciles de describir explícitamente: los distintos del origen (que, en todo caso, no cuenta) son los puntos de la forma (x,y) donde $0 \leq x \leq p+1$ y

$$\frac{q}{p}x \geq y \geq \frac{q}{p+1}x.$$

Si se quiere obtener un sistema minimal de generadores hay que suprimir las redundancias, que vienen de puntos de abcisas menores, jamás de puntos de la misma abcisa. Para expurgar los puntos basta considerar el subsemigrupo de $\mathbb{Z}_+$ formado por las ordenadas, pues si

$$\begin{array}{ccccc} \frac{q}{p+1}x & \leq & y & \leq & \frac{q}{p}x \\ \frac{q}{p+1}x' & \leq & y' & \leq & \frac{q}{p}x', \end{array}$$

es

$$\frac{q}{p+1}(x+x') \leq (y+y') \leq \frac{q}{p}(x+x').$$

3.4.9.5. Lo anterior se puede automatizar en un algoritmo fijo que se puede implementar. Nosotros lo hemos escrito en MAPLE. Con él elaboramos los ejemplos siguientes, que son ilustrativos de lo que decimos.

Hay dos funciones:`pq` y `expurgar`. La primera crea todos los pares $(x,y) \neq (0,0)$ tales que $x \leq p$ y

$$\frac{q}{p}x \geq y \geq \frac{q}{p+1}x.$$

La segunda deja el conjunto anterior reducido a lo irredundante.

■ **Ejemplo 3.4.10** La sesión de MAPLE

```
lr:=pq(6,25);
  lr := [[1, 4], [2, 8], [3, 11], [3, 12], [4, 15], [4, 16],
         [5, 18],[5, 19], [5, 20], [6, 22], [6, 23], [6, 24],
         [6, 25]]

> expurgar(lr);
```

```
[[1, 4], [3, 11], [5, 18], [6, 25]]

> lr:=pq(9,25);
  lr := [[3, 8], [4, 11], [5, 13], [6, 16], [7, 18], [7, 19],
         [8, 21],[8, 22], [9, 23], [9, 24], [9, 25]]

> expurgar(lr);
       [[3, 8], [4, 11], [5, 13], [7, 18], [9, 23], [9, 25]]

> lr:=pq(13,25);
  lr := [[5, 9], [6, 11], [7, 13], [8, 15], [9, 17], [10, 18],
        [10, 19], [11, 20], [11, 21], [12, 22], [12, 23],
        [13, 24], [13, 25]]

> expurgar(lr);
  [[5, 9], [6, 11], [7, 13], [8, 15], [9, 17], [10, 19],
  [11, 21],[12, 23], [13, 25]]

> lr:=pq(19,25);
  lr := [[7, 9], [10, 13], [11, 14], [13, 17], [14, 18],
         [15, 19], [16, 21], [17, 22], [18, 23], [19, 24],
         [19, 25]]

> expurgar(lr);
  [[7, 9], [10, 13], [11, 14], [13, 17], [15, 19], [16, 21],
  [19, 24], [19, 25]]
```

significa:

1. Para $p = 6$, $q = 25$ un sistema minimal de generadores de Σ es

$$(1,4)\,,(3,11)\,,(5,18)\,,(6,25)\,,$$

2. Para $p = 9$, $q = 25$ un sistema minimal de generadores de Σ es

$$(3,8)\,,(4,11)\,,(5,13)\,,(7,18)\,,(9,23)\,,(9,25)\,,$$

3. Para $p = 13$, $q = 25$ un sistema minimal de generadores de Σ es

$$(5,9)\,,(6,11)\,,(7,13)\,,(8,15)\,,(9,17)\,,(10,19)$$
$$(11,21)\,,(12,23)\,,(13,25)\,,$$

4. Para $p = 19$, $q = 25$ un sistema minimal de generadores de Σ es

$$(7,9)\,,(10,13)\,,(11,14)\,,(13,17)\,,(15,19)\,,(16,21)$$
$$(19,24)\,,(19,25)\,,$$

Capítulo 4

Anillos de series

La situación en este capítulo, a la que nos referiremos siempre implícitamente, será la siguiente: sea $\Gamma(\Delta)$ una pirámide, proyección desde O de un convexo compacto de interior no vacío Δ contenido en un hiperplano H que no pase por O. Se considerará además el semigrupo Σ de los puntos contenidos en $\Gamma(\Delta)$ que tienen coordenadas enteras respecto de un sistema de referencia métrico fijado, de origen O, que viene de una red (O, G). La expresión *puntos enteros* querrá decir puntos de coordenadas enteras. Cuando Δ sea un poliedro consideraremos además los vértices (irredundantes) de Δ, que designaremos por $\{A_1, \ldots, A_m\}$. También emplearemos una forma lineal ℓ, positiva sobre $\Gamma(\Delta)$, que consideramos fija.

■ 4.1 Introducción

En esta sección introducimos los anillos de series con exponentes en Σ, que es el conjunto de los puntos de la red (O, G) contenidos en $\Gamma(\Delta)$.

■ **Notas 4.1.1** Sea k un cuerpo, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una colección de indeterminadas sobre k y $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \Sigma$; pondremos $X^A = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \in k(X)$. También escribiremos

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= \{X^A \mid A \in \Sigma\} \\ k[\![\Sigma_X]\!] &= \{f : \Sigma_X \to k\}, \end{aligned}$$

y designaremos por $k[\Sigma_X]$ al conjunto de las funciones de $k[\![\Sigma_X]\!]$ con soporte finito.

4.1.1.1. Se considera sobre Σ_X la estructura de semigrupo heredada de Σ, que se define poniendo

$$X^A X^B = X^{A+B};$$

entonces $k[\Sigma_X]$ es la k-álgebra libre engendrada por Σ.

4.1.1.2. El grado de un monomio $X^A \in \Sigma_X$ será, por definición, $\ell(A)$ y se considerará sobre los monomios el orden diagonal determinado por ℓ sobre los exponentes. En otras palabras, se pondrá, para todo $X^A, X^B \in \Sigma_X$,

$$X^A <_{\text{diag}} X^B \iff A <_{\text{diag}} B\,.$$

4.1.1.3. Sea $A \in \Sigma$; el conjunto

$$D(A) = \{B \in \Sigma \mid \exists B' \in \Sigma \quad B + B' = A\}$$

es finito. En efecto, $B \in D(A)$, $B + B' = A$, implica que $\ell(A) = \ell(B + B') = \ell(B) + \ell(B') \geq \ell(B)$ ya que ℓ es una forma lineal. Por 3.4.3.3 sabemos que sólo hay un número finito de puntos B que verifican esto.

4.1.1.4. Se puede dotar a $k[\![\Sigma_X]\!]$ (y a $k[\Sigma_X]$) de una estructura de anillo definiendo la adición como la adición de funciones y la multiplicación en la forma siguiente: si $f, g \in k[\![\Sigma_X]\!]$, será para todo $A \in \Sigma$

$$(fg)(X^A) = \sum_{\substack{B,B' \in \Sigma \\ B+B'=A}} f(X^B)g(X^{B'})\,.$$

Con estas operaciones, $k[\![\Sigma_X]\!]$ es un anillo conmutativo con elemento unidad. También estas operaciones inducen en $k[\Sigma_X]$ una estructura de subanillo de $k[\![\Sigma_X]\!]$. Las comprobaciones son meramente automáticas.

4.1.1.5. Aligeramos la notación y la hacemos semejante a la clásica. El cuerpo k se puede considerar como subconjunto de $k[\![\Sigma_X]\!]$ mediante la inyección $k \hookrightarrow k[\![\Sigma_X]\!]$ que lleva $\alpha \in k$ sobre $f_\alpha : \Sigma_X \to k$ definida por:

$$\begin{cases} f_\alpha(1) = \alpha \\ f_\alpha(X^A) = 0 \quad \forall A \in \Sigma \setminus \{0\} \end{cases}$$

Además, si $f \in k[\![\Sigma_X]\!]$ escribimos:

$$f = \sum_{A \in \Sigma} f_A X^A\,, \quad f_A = f(X^A) \in k\,.$$

Con estas notaciones, la adición y multiplicación en $k[\![\Sigma_X]\!]$ se escriben así:

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{A \in \Sigma} (f_A + g_A) X^A \\ fg &= \sum_{A \in \Sigma} \Big(\sum_{\substack{B,B' \in \Sigma \\ B+B'=A}} f_B g_{B'} \Big) X^A\,. \end{aligned}$$

4.1.1.6. Para una serie $0 \neq f \in k[\![\Sigma_X]\!]$ se define el *ℓ-orden* en la forma

$$\nu_\ell(f) = \min\{\ell(A) \mid A \in \Sigma, f_A \neq 0\}.$$

Se llama *forma inicial* de f a la suma de los términos de orden mínimo. Evidentemente, la forma inicial de un producto de series es el producto de las respectivas formas iniciales. De ahí se deduce que el anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es un dominio de integridad y que ν_ℓ se extiende a una valoración del cuerpo de fracciones.

4.1.1.7. Para un polinomio $0 \neq f \in k[\Sigma_X]$ se define el *ℓ-grado* así:

$$\text{grado}_\ell(f) = \max\{\ell(A) \mid A \in \Sigma, f_A \neq 0\}.$$

Se llama *forma líder* de f a la suma de los términos de grado máximo. Evidentemente, la forma líder de un producto de polinomios es el producto de las respectivas formas líderes. De ahí se deduce que el anillo $k[\Sigma_X]$ es un dominio de integridad, cosa que, por otra parte, es evidente puesto que $k[\![\Sigma_X]\!]$ lo es.

4.1.1.8. Hay dos ideales notables en $k[\![\Sigma_X]\!]$. Uno de ellos es el ideal N de todas las series de orden positivo. Otro es el ideal M engendrado por todos los monomios distintos de 1, es decir el ideal engendrado por

$$\{X^A \mid A \in \Sigma \setminus \{O\}\}.$$

Estos dos ideales no coinciden en general, como veremos más adelante.

■ **Lema 4.1.2** *Las unidades son las siguientes:*

1. *En $k[\Sigma_X]$ sólo las constantes no nulas.*
2. *En $k[\![\Sigma_X]\!]$ las series con término independiente distinto de cero.*

Demostración. El caso de los polinomios es trivial. Como la forma líder de un producto es el producto de las formas líderes, si una de éstas tiene grado positivo, el producto tiene también grado positivo y no puede ser 1. Así pues, las unidades son necesariamente las constantes no nulas.

En las series la situación es ya distinta. El orden diagonal tiene la ventaja de que se pueden montar demostraciones por recurrencia del tipo de paso inductivo de "cierto para menores que A implica cierto para A". Sea $f = \sum_{A\in\Sigma} f_A X^A$, $f_A \in k$, $f_O \neq 0$. Sea $g = \sum_{A\in\Sigma} g_A X^A$, de momento con coeficientes indeterminados; queremos hallar estos coeficientes para que sea $fg = 1$.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Desde luego, $g_O = 1/f_O$. Supongamos que $A \neq O$ y supongamos calculados todos los coeficientes para puntos de Σ estrictamente menores que A. Se tiene que verificar que

$$0 = (fg)_A = f_O g_A + \sum_{\substack{B,C <_{\mathrm{diag}} A \\ B+C=A}} f_B g_C .$$

Como ya hemos hallado todos los g_C anteriores, es

$$g_A = -\frac{1}{f_O}\Big(\sum_{\substack{B,C <_{\mathrm{diag}} A \\ B+C=A}} f_B g_C \Big) .$$

Esto prueba el segundo aserto y el lema. ■

■ **Corolario 4.1.3** El anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es casi-local con ideal maximal N, el ideal de las series con término independiente cero.

■ **Proposición 4.1.4** *El anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es completo para la topología N-ádica y*

$$\bigcap_{i \geq 0} N^i = (0)$$

La demostración es trivial, estándar en este tipo de casos, usando el orden diagonal respecto de ℓ.

■ **Proposición 4.1.5** *El ideal M está finitamente generado si y sólo si el semigrupo Σ está finitamente generado o, equivalentemente, si y sólo si $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide poliédrica racional (Teorema 3.4.7).*

Demostración. Está claro que, si Σ está finitamente generado como semigrupo, entonces M está finitamente generado como ideal: en efecto, si la familia $\{B_1, \ldots, B_p\}$ es un sistema de generadores de Σ, entonces $\{X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}\}$ es una base del ideal M de $k[\![\Sigma_X]\!]$. Supongamos que Σ no está finitamente generado como semigrupo; entonces $\Gamma(\Delta)$ no es una pirámide poliédrica racional por el Teorema 3.4.7. Sea $I = (X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}) \subset M$ un ideal finitamente generado; se puede suponer que las semirrectas $\underline{OB_i}$ generan una subpirámide poliédrica racional Γ_1 de $\Gamma(\Delta)$. Por el Corolario 3.4.6 existe un punto $Q \in \Sigma \setminus \Gamma_1$, pudiendo suponer que Q es el menor para el orden diagonal. El monomio X^Q no puede pertenecer al ideal $(X^{B_1}, \ldots, X^{B_p})$. En efecto, si perteneciera, se podría escribir $X^Q = X^{Q'} X^{B_j}$ para un cierto j. Por minimalidad no puede ser $Q' \in \Sigma \setminus \Gamma_1$, luego $Q' \in \Sigma \cap \Gamma_1$, luego $Q \in \Gamma_1$, lo que es imposible. Así hemos visto que todo ideal monomial finitamente generado deja fuera al menos un monomio,

lo que significa que M no puede estar finitamente generado como ideal de $k[\![\Sigma_X]\!]$.

Esto prueba que M está finitamente generado si y sólo si lo está el semigrupo Σ, lo que equivale a que Σ_X lo esté. Por el Teorema 3.4.7 esto ocurre si y sólo si $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide racional. ■

■ **Proposición 4.1.6** *Para el anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *M está finitamente generado.*
2. *$M = N$.*

Demostración. Se verifica siempre que $M \subset N$. Supongamos que M está finitamente generado. Partimos de un sistema finito de generadores, digamos $\{X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}\}$ de M; para todo punto $A \in \Sigma$ existen puntos $B_{\sigma(A)}$, $A' \in \Sigma$, $1 \leq \sigma(A) \leq p$ tales que $A = A' + B_{\sigma(A)}$. Por el Axioma de Zermelo podemos elegir para cada $A \in \Sigma$ un $B_{\sigma(A)}$, que dejamos fijado. Así, cada serie $f \in N$ se puede escribir en la forma

$$f = \sum_{i=1}^{p} f_i X^{B_i}$$

simplemente escribiendo los monomios X^A que aparecen en ella en la forma $X^A = X^{A'} X^{B_{\sigma(A)}}$ y sacando factor común los X^{B_i}. Esto prueba que $N \subset M$ luego la igualdad.

Supongamos ahora que M no está finitamente generado como ideal de $k[\![\Sigma_X]\!]$. Supongamos demostrado el siguiente

Aserto: Existe una cadena ascendente de ideales generados por un número finito de monomios que no está contenida en un ideal generado por un número finito de monomios.

Una tal cadena ascendente no puede ser estacionaria, luego tiene una subcadena infinita estrictamente ascendente

$$(X^{B_1}) \subsetneq (X^{B_1}, X^{B_2}) \subsetneq \cdots \subsetneq (X^{B_1} \ldots, X^{B_p}) \subsetneq \cdots$$

con $B_p \neq O$, $\forall p$. Consideremos la serie $f = \sum_{p \geq 1} X^{B_p}$; esta serie no puede pertenecer a M porque, si perteneciera, estaría en un ideal $I = (X^{C_1}, \ldots, X^{C_r})$ engendrado por un número finito de monomios. Esto implicaría que la cadena entera estaría contenida en I, lo que no es posible por el aserto.

Así pues, para concluir, hay que probar el aserto. Supongamos que el aserto no se verificase, es decir, que toda cadena ascendente de ideales monomiales

estuviese contenida en un ideal monomial finitamente generado. Entonces el conjunto de los ideales monomiales finitamente generados sería inductivo, luego poseería un elemento maximal $\mathfrak{m}$ por el lema de Zorn. Si fuese $\mathfrak{m} \neq M$ existiría un monomio $X^B \notin \mathfrak{m}$; así, $\mathfrak{m} + (X^B)$ sería un ideal monomial finitamente generado mayor que $\mathfrak{m}$, lo que no es posible. Esto demuestra que $M = \mathfrak{m}$ es finitamente generado, contrariamente a nuestra hipótesis. Esto concluye la demostración de la proposición. ■

■ **Teorema 4.1.7** *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *El anillo $k[\Sigma_X]$ es noetheriano.*
2. *El anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es noetheriano.*
3. *$\Gamma(\Delta)$ es una pirámide racional.*
4. *Los ideales M y N de $k[\![\Sigma_X]\!]$ coinciden.*

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$:
Si $k[\Sigma_X]$ es noetheriano, el ideal de $k[\Sigma_X]$ engendrado por todos los monomios es finitamente generado. Por la estructura multiplicativa de los monomios, el ideal M de $k[\![\Sigma_X]\!]$ está finitamente generado. Por la Proposición 4.1.6 es entonces $M = N$.

En esta situación, el Corolario 4.1.3 y el Teorema 4.1.4 nos dicen que $k[\![\Sigma_X]\!]$ es un anillo casi-local, completo, con el ideal maximal finitamente generado. Esto implica que $k[\![\Sigma_X]\!]$ es noetheriano.

$2 \Longrightarrow 3$:
Es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.5.

$3 \Longrightarrow 1$:
El Eeorema 3.4.7 nos dice que, bajo nuestra hipótesis, Σ está finitamente generado, luego el ideal M de $k[\![\Sigma_X]\!]$ está finitamente generado. Así lo está también el ideal $M \cap k[\Sigma_X]$ de $k[\Sigma_X]$ engendrado por todos los monomios. Sea $\{B_1, \ldots, B_p\}$ un sistema finito de generadores de Σ; entonces $\{X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}\}$ es un sistema finito de generadores de $M \cap k[\Sigma_X]$. Sea $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)$ una colección de indeterminadas y

$$\begin{array}{ccc} k[Y] & \xrightarrow{\varphi} & k[\Sigma_X] \\ Y_i & \longrightarrow & X^{B_i}, \end{array}$$

$i = 1, \ldots, p$ el homomorfismo de sustitución correspondiente; vemos que el estar Σ_X finitamente generado por los monomios $\{X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}\}$ implica que

φ es sobre. En efecto, todo monomio de Σ_X es un monomio en $\{X^{B_1}, \ldots, X^{B_p}\}$, luego imagen de un monomio de $k[Y]$. Así, $k[\Sigma_X]$ es imagen homomórfica de un anillo noetheriano, luego es noetheriano.

Finalmente, la equivalencia de las tres primeras condiciones con la cuarta es consecuencia de la Proposición 4.1.6, a la vista de que $k[\![\Sigma_X]\!]$ es un anillo casi-local completo de ideal maximal N, que es noetheriano si y sólo si el ideal maximal está finitamente generado. ■

Vamos ahora a resolver otro problema, que tiene dos aspectos íntimamente relacionados: determinar la dimensión de los anillos $k[\Sigma_X]$ y $k[\![\Sigma_X]\!]$ en el caso noetheriano y hallar relaciones para estos anillos, es decir, expresarlos como cocientes de anillos en variables por ideales.

Una técnica importante en el estudio del anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es construir homomorfismos desde un anillo de series formales ordinarias hasta él. Vamos a ver qué sentido tiene esto.

■ **NOTAS 4.1.8** Sea $Y = (Y_i)_{i\in I}$ una colección de indeterminadas y $\boldsymbol{h} = (h_i)_{i\in I}$ una familia de series de N. Sea $R_Y = k[\![Y]\!]$ el anillo de series formales ordinarias en la familia de indeterminadas Y. Por definición, R_Y es la compleción $\mathfrak{m}$-ádica del anillo de polinomios $k[Y]$ donde $\mathfrak{m} = (Y)$. Vamos a definir qué se entiende por el homomorfismo de sustitución $\varphi_{\boldsymbol{h}} : R_Y \to k[\![\Sigma_X]\!]$ tal que $\varphi(Y_i) = h_i$, $\forall i \in I$.

4.1.8.1. Sea $\mathbb{Z}_0^I$ la suma directa de copias de $\mathbb{Z}_0$ con índices los elementos $i \in I$. Si $A = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}_0^I$ tienen sentido las expresiones $|A| = \sum_{i\in I} a_i$ e $Y^A = \prod_{i\in I} Y_i^{a_i}$ porque todas las componentes de A son cero salvo un número finito. Si $p(Y) \in R_Y$ escribiremos usualmente

$$\begin{aligned} p(Y) &= \sum_{A\in\mathbb{Z}_0^I} p_A Y^A, \quad p_A \in k, \\ \mathcal{E}(p(Y)) &= \{A \in \mathbb{Z}_0^I \mid p_A \neq 0\}, \\ \nu(p(Y)) &= \min\{|A| \mid A \in \mathcal{E}(p(Y))\}, \end{aligned}$$

llamando a $\nu(p(Y))$ el orden de $p(Y)$.

4.1.8.2. En $k[\![\Sigma_X]\!]$ operaremos con el ℓ-orden, poniendo para $h \in k[\![\Sigma_X]\!]$

$$\begin{aligned} h &= \sum_{B\in\Sigma} h_B X^B \quad h_B \in k, \\ \mathcal{E}(h) &= \{B \in \Sigma \mid h_B \neq 0\}, \\ \nu_\ell(h) &= \min\{\ell(B) \mid B \in \mathcal{E}(h)\}, \end{aligned}$$

llamando a $\nu_\ell(h)$ el ℓ-orden de h.

4.1.8.3. Para cada monomio Y^A con $A = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}_0^I$ hay asociado un elemento $\boldsymbol{h}^A = \prod_{i\in I} h_i^{a_i} \in k[\![\Sigma_X]\!]$, que tiene sentido pues se obtiene por un número finito de multiplicaciones entre un número finito de h_i. Más aún se tiene que

$$\nu_\ell(\boldsymbol{h}^A) = \sum_{i\in I} a_i \nu_\ell(h_i)\,.$$

Por tanto, si

$$\mu = \min\{\nu_\ell(h_i) \mid i \in I\}\,,$$

es

$$\nu_\ell(\boldsymbol{h}^A) = \sum_{i\in I} a_i \nu_\ell(h_i) \geq \sum_{i\in I} a_i \mu = |A|\mu\,.$$

Esto garantiza que, si $c \in \mathbb{R}_+$ es una cota, será $\nu_\ell(\boldsymbol{h}^A) > c$ siempre que $|A| > c/\mu$.

4.1.8.4. Lo anterior implica que, dada una serie $p(Y) \in R_Y$, está bien definido un elemento

$$p(\boldsymbol{h}) = \sum_{A\in\mathbb{Z}_0^I} p_A \boldsymbol{h}^A\,.$$

En efecto, pensemos en la descomposición de $p(Y)$ en suma de formas y en las sumas parciales. Si se establece una cota $c \in \mathbb{R}_+$, todas las formas de $p(Y)$ de grado mayor que c/μ van a dar con seguridad, por sustitución de Y_i por h_i, elementos de $k[\![\Sigma_X]\!]$ con ℓ-orden mayor que c. Así, para un ℓ-orden determinado c, la ℓ-forma de $p(\boldsymbol{h})$ de ℓ-grado c va a provenir de sustituciones en un polinomio, lo que está bien definido porque implica un número finito de operaciones aritméticas con un número finito de series. Esto define al elemento $p(\boldsymbol{h})$.

4.1.8.5. Sea, pues $\varphi_{\boldsymbol{h}} : R_Y \to k[\![\Sigma_X]\!]$ la función que a cada $p(Y) \in R_Y$ hace corresponder $\varphi_{\boldsymbol{h}}(p(Y)) = p(\boldsymbol{h})$. Claramente $\varphi_{\boldsymbol{h}}$ es un k-homorfismo local de anillos.

4.1.8.6. La familia $\boldsymbol{h}$ será *formalmente independiente* si el homomorfismo de sustitución $\varphi_{\boldsymbol{h}}$ es inyectivo. La familia $\boldsymbol{h}$ será *algebraicamente independiente* si la restricción al anillo de polinomios $k[Y]$ del homomorfismo de sustitución $\varphi_{\boldsymbol{h}}$ es inyectiva.

■ **Proposición 4.1.9** *Sea $\boldsymbol{h} = (h_i)_{i\in I}$ una familia de monomios de $\Sigma_X \setminus \{1\}$ con $h_i = X^{B_i}$, $O \neq B_i \in \Sigma$, $\forall\, i \in I$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\boldsymbol{h}$ es formalmente independiente.*

2. ***h*** *es algebraicamente independiente.*

3. $\{B_i\}_{i\in I}$ *es* $\mathbb{Z}$*-linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que la segunda condición implica la tercera y que ésta implica la primera. Supongamos que $\{B_i\}_{i\in I}$ fuese $\mathbb{Z}$-linealmente dependiente. Entonces existiría un subconjunto finito $E \subset I$ y una familia de enteros $\{\alpha_e\}_{e\in E}$ no todos nulos tales que $\sum_{e\in E} \alpha_e B_{i_e} = \mathbf{0}$. Como $B_i \neq O$, $\forall i \in I$, debe haber al menos dos α_e no nulos. Se aquí se deduce que

$$1 = X^{\sum_{e\in E} \alpha_e B_{i_e}} = \prod_{e\in E} (X^{B_{i_e}})^{\alpha_e} = \prod_{e\in E} (h_{i_e})^{\alpha_e}.$$

Sean $E_+, E_- \subset E$ los conjuntos de índices correspondientes a los α positivos o negativos, respectivamente, y sea $p(Y) = \prod_{i\in E_+} Y_i^{\alpha_i} - \prod_{j\in E_-} Y_j^{-\alpha_j}$. Como

$$1 = \frac{\prod_{i\in E_+} h_i^{\alpha_i}}{\prod_{j\in E_-} h_j^{-\alpha_j}}$$

es claramente $p(\boldsymbol{h}) = 0$, lo que prueba que $\boldsymbol{h}$ es algebraicamente dependiente y, así, que la segunda condición implica la tercera.

Probemos ahora que la tercera condición implica la primera, lo que terminará la demostración de la proposición. Sea $0 \neq p(Y) \in R_Y$ tal que $p(\boldsymbol{h}) = 0$. Esto implica que debe haber una suma finita de términos de $p(Y)$, que denotamos por

$$q(Y) = \sum_{j=1}^{u} \omega_j Y^{A_j},$$

con al menos dos términos con exponentes distintos, tal que los $\boldsymbol{h}^{A_j}$ coinciden y $\omega_j \neq 0$, para todo $j = 1, \ldots, u$, $\sum_{i=1}^{u} \omega_j = 0$. Tomemos dos de esos monomios, Y^{A_1}, Y^{A_2}, sean $A_j = (a_{ji})_{i\in I}$, $j = 1, 2$; la relación anterior significa que

$$\prod_{i\in I} (X^{B_i})^{a_{1i}} = \prod_{i\in I} (X^{B_i})^{a_{2i}},$$

luego

$$\prod_{i\in I} (X^{B_i})^{a_{1i}-a_{2i}} = 1,$$

de donde

$$\sum_{i\in I} (a_{1i} - a_{2i}) B_i = 0,$$

lo que significa una relación $\mathbb{Z}$-lineal no trivial entre los B_i porque $A_1 \neq A_2$. ■

■ **Corolario 4.1.10** El grado de trascendencia sobre k del cuerpo de fracciones de $k[\Sigma_X]$ es n. Si Γ es una pirámide poliédrica racional, $k[\Sigma_X]$ es el anillo de una variedad monomial.

Demostración. La primera afirmación es trivial a la vista de la Proposición 4.1.9; veamos la segunda. En esa situación, el ideal M_1 engendrado por todos los monomios de Σ_X está finitamente generado. Sea $\{m_1, \ldots, m_q\}$ una colección de monomios distintos de 1 que genere M_1.

Sea $\eta : k[Y_1, \ldots, Y_q] \to k[\Sigma_X]$ la k-sustitución que lleva Y_i sobre m_i, $i = 1, \ldots, q$. Como los monomios $\{m_1, \ldots, m_q\}$ generan M_1, el homomorfismo η es sobre. Su núcleo tiene que estar engendrado por polinomios del tipo $\mu - \mu' = 0$ donde μ, μ' son monomios en Y. ■

■ **Ejemplo 4.1.11** Si consideramos dentro del plano la pirámide engendrada por las semirrectas con origen en el de coordenadas y que contienen a los puntos $(1,2), (2,10)$, respectivamente, el semigrupo Σ está engendrado por

$$\Sigma = \langle (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) \rangle .$$

Una base de Gröbner del núcleo (calculada con MAPLE) es

$$\{-Y_3^2 + Y_2Y_4, Y_1Y_4 - Y_3Y_2, -Y_2^2 + Y_1Y_3\} .$$

Finalmente vamos a hacer una observación sobre el caso no noetheriano. La pregunta natural que surge para el caso no noetheriano es si el anillo $k[\![\Sigma_X]\!]$ es coherente. La respuesta es que no. Desdicamos las últimas líneas de esta sección a demostrarlo.

Así tendremos el

■ **Teorema 4.1.12** *El anillo de series con exponentes en una pirámide, en el caso no noetheriano, no es coherente en general.*

Demostración. Consideremos la situación del Ejemplo 3.4.8, es decir, la pirámide Γ de vértice el origen y determinada por el par de puntos $(1,0)$ y $(1, \exp(1))$. Tomemos el desarrollo de $\exp(1)$ en fracción continua infinita y, de él, las reducidas impares. Sean $A_i = (a_{i1}, a_{i2})$ $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$ tales que a_{i1} es el denominador de la reducida i-ésima y a_{i2} su numerador. Sabemos dos cosas importantes, por aritmética elemental:

1. Las primeras coordenadas (resp. las segundas) de los puntos A_i forman una sucesión monótona creciente de número enteros positivos. Más aún, las dos coordenadas de un puntos son primas entre sí.

2. La sucesión a_{i2}/a_{i1}, $i = 1, 3, 5, \ldots$ es monótona creciente, acotada por $\exp(1)$.

Por otra parte, observamos que, si $A = (a_1, a_2)$ es un punto de coordenadas enteras positivas tales que $a_2/a_1 < \exp(1)$, entonces, para todo $i = 1, 3, 5, \ldots$ tal que $a_{i2}/a_{i1} > a_2/a_1$, es

$$\frac{a_2 + a_{i2}}{a_1 + a_{i1}} - \frac{a_{i2}}{a_{i1}} = \frac{a_2 a_{i1} - a_1 a_{i2}}{a_{i1}(a_1 + a_{i1})} = \frac{a_1 a_{i1}\left(\dfrac{a_2}{a_1} - \dfrac{a_{i2}}{a_{i1}}\right)}{a_{i1}(a_1 + a_{i1})} < 0,$$

luego $(a_1 + a_{i1}, a_2 + a_{i1}) \in \Sigma$.

Sentado esto, tomamos los puntos $(1, 0)$ y $(1, 2)$, o sea, los monomios $m_1 = X_1$, $m_2 = X_1 X_2^2$. Para todo $i = 5, 7, \ldots$ es $a_{i1} > 1$, $a_{i2} > 2$ y $a_{i2}/a_{i1} > 2$; así, si

$$s_{i1} = X_1^{a_{i1}} X_2^{a_{i2}} \quad s_{i2} = X_1^{a_{i1}} X_2^{a_{i2}-2},$$

se verifica que $\boldsymbol{s}_i = (s_{i1}, s_{i2})$ es una sicigia de (m_1, m_2). Resta por probar que el $k[\![\Sigma_X]\!]$-submódulo de $k[\![\Sigma_X]\!] \times k[\![\Sigma_X]\!]$ no está finitamente generado. En efecto, si lo estuviera, estaría generado por un número finito de vectores $\boldsymbol{s}_i$. Así existiría un entero $2n + 1$ tal que $\{\boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{s}_7, \ldots, \boldsymbol{s}_{2n+1}\}$ generarían el módulo de sicigias. Esto implicaría que, para cualquier entero impar $i > 2n + 1$, el vector $\boldsymbol{s}_i$ es un múltiplo de $\boldsymbol{s}_{2n+1}$, o sea que

$$(a_{i1} - a_{2n+1,1}, a_{i2} - a_{2n+1,2}) \in \Sigma.$$

Pero, por otra parte,

$$\exp(1) - \frac{a_{i2} - a_{2n+1,2}}{a_{i1} - a_{2n+1,1}} = \frac{(\exp(1)a_{i1} - a_{i2}) - (\exp(1)a_{2n+1,1} - a_{2n+1,2})}{a_{i1} - a_{2n+1,1}},$$

con

$$0 < \exp(1)a_{i1} - a_{i2} < \exp(1)a_{2n+1,1} - a_{2n+1,2},$$

luego

$$\exp(1) - \frac{a_{i2} - a_{2n+1,2}}{a_{i1} - a_{2n+1,1}} < 0,$$

de donde

$$\exp(1) < \frac{a_{i2} - a_{2n+1,2}}{a_{i1} - a_{2n+1,1}},$$

lo que implica que

$$(a_{i1} - a_{2n+1,1}, a_{i2} - a_{2n+1,2}) \notin \Sigma,$$

y esto es una contradicción. Así queda probado el teorema. ■

■ 4.2 Explosiones y matrices

Vamos a estudiar ciertas biyecciones de la red (O, G), que son las asociadas a transformaciones monoidales. Para ello utilizamos los recursos del álgebra lineal.

■ **Definición 4.2.1** *Dados dos índices $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ designaremos por M_{ij} a la matriz $n \times n$ que tiene ceros en todas las posiciones, salvo unos en la diagonal principal y un* 1 *en la posición (j, i). La llamaremos* matriz de explosión. *La inversa de M_{ij} se llama* matriz de implosión *y es la matriz $n \times n$ que tiene ceros en todas las posiciones, salvo unos en la diagonal principal y un* -1 *en la posición (j, i).*

■ **Observación 4.2.2** Vamos a explicar por qué el nombre de *matriz de explosión* o el de *matriz de implosión.* Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una n-upla de variables. Sea $i \neq j$ y consideremos la explosión formal monomial

$$X_l \to X_l \quad \forall l \neq j \quad X_j \to X_i X_j$$

Fijándonos en cómo se transforman los monomios de exponentes enteros, tenemos que

$$X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \to X_1^{a_1} \cdots X_i^{a_i + a_j} \cdots X_n .$$

Quedándonos con los exponentes, es decir, con los puntos de la red, éstos se tranforman en la manera:

$$(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_i \overset{i)}{+} a_j, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n) M_{ij}$$

Ésta es la razón del nombre de matrices de explosión. En cuanto a las de implosión, es

$$(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_i \overset{i)}{-} a_j, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n) M_{ij}^{-1} ,$$

o sea que en monomios la transformación funciona en la forma

$$X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \to X_1^{a_1} \cdots X_i^{a_i - a_j} \cdots X_n^{a_n} = X_1^{a_1} \cdots \frac{X_i^{a_i}}{X_i^{a_j}} \cdots X_n^{a_n} ,$$

que es lo que en inglés se conoce con el nombre de *blowing-down.* Esto, naturalmente, con la salvedad de operar en un anillo donde tal transformación tenga sentido.

■ **NOTAS 4.2.3** Vamos a estudiar unas cuantas propiedades de las matrices de explosión.

4.2.3.1. Tanto M_{ij} como M_{ij}^{-1} pertenecen al grupo especial sobre $\mathbb{Z}$, que es grupo multiplicativo $\mathrm{Sl}\,(n, \mathbb{Z})$ de las matrices sobre $\mathbb{Z}$ con determinante 1.

4.2.3.2. Sea A una matriz entera $n \times n$; entonces AM_{ij} es la matriz que se obtiene de A sustituyendo su columna i-ésima por ella más la columna j-ésima. Además, AM_{ij}^{-1} es la matriz que se obtiene de A sustituyendo su columna i-ésima por ella menos la columna j-ésima. Por otra parte, $M_{ij}A$ es la matriz que se obtiene de A sustituyendo su fila j-ésima por ella más la fila i-ésima. Además, $M_{ij}^{-1}A$ es la matriz que se obtiene de A sustituyendo su fila j-ésima por ella menos la fila i-ésima.

4.2.3.3. En resumen, los efectos de la pre- y post-multiplicación por las matrices de explosión o implosión son sustituir una fila por ella más o menos otra y una columna por ella más o menos otra.

Ahora hay dos problemas planteados. El primero, de menor entidad, es averiguar si las matrices de explosiones generan $\mathrm{Sl}\,(n, \mathbb{Z})$. El segundo es estudiar el efecto de las explosiones sobre una pirámide y el anillo de series correspondiente. Para el primero hay una respuesta afirmativa, que elaboramos en las notas siguientes.

■ **NOTAS 4.2.4** Sea $A \in \mathrm{Sl}\,(n, \mathbb{Z})$, que consideramos como punto de partida de nuestro razonamiento.

4.2.4.1. Sea

$$m = \min\{|a_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{ij} \neq 0\}.$$

Supongamos que $m \neq 1$ y que $m = |a_{ij}|$ para una cierta posición (i, j) determinada. Llamamos *cruz* centrada en (i, j) a todas las posiciones (i, l) y (l, j) distintas de (i, j). Pues bien, si en la cruz centrada en (i, j) hay un elemento, digamos a_{il} que no es múltiplo de a_{ij}, tomando la división euclídea $a_{il} = qa_{ij} + r$ donde $0 < r < |a_{ij}|$, se ve que $|q|$ aplicaciones de sustituir la columna l-ésima por ella más o menos la j-ésima nos conducen a poner r en la posición (i, l) y así a hacer que m disminuya.

4.2.4.2. Volvemos a llamar (i, j) a la posición en que se alcanza el nuevo m y repetimos lo anterior cuantas veces sea necesario. Como m puede disminuir sólo un número finito de veces, tiene que llegar un momento en que la cruz centrada en (i, j) contenga sólo múltiplos del elemento en la posición (i, j). Por aplicación reiterada de sustituciones de filas y columnas por ellas más o menos la fila i-ésima o la columna j-ésima, ponemos ceros en la cruz centrada

en (i, j). Nótese que, llegado este momento, $|a_{ij}| = 1$ necesariamente porque $\det(A) = 1$ y las transformaciones son a determinante constante.

4.2.4.3. Si $i \neq 1$ sustituimos la primera fila por ella más o menos la i-ésima, poniendo 1 en la posición $(1, j)$. Por operaciones de columnas ponemos ceros en toda la primera fila salvo en la posición $(1, j)$. Si preciso fuera, se sustituye la primera columna por ella más la j-ésima y luego ésta por ella menos la primera. El resultado es un 1 en la posición $(1, 1)$ y ceros en toda la primera fila. Por operaciones de filas ponemos ceros en toda la primera columna salvo en la posición $(1, 1)$ que hay un 1.

4.2.4.4. Sea ahora A_{11} la submatriz que se obtiene de A suprimiendo su primera fila y columna. Podemos aplicar a A_{11} el mismo procedimiento de antes para poner un cero en su primera posición, es decir en la posición $(2, 2)$ de A. Si esas transformaciones las vemos como transformaciones de A entera no se altera nada de lo conseguido antes, es decir, de los ceros en la primera fila y columna.

4.2.4.5. Siguiendo así sucesivamente vemos que, por un número finito de pasos, se transforma A en la matriz identidad. En otras palabras pre- y post-multiplicando A por matrices del tipo M_{ij} y M_{ij}^{-1} se obtiene la identidad. Esto prueba que A es producto finito de matrices del tipo M_{ij} y M_{ij}^{-1}.

4.2.4.6. Este producto no está unívocamente determinado. Esto se intuye fácilmente porque el algoritmo que hemos aplicado antes se puede usar de otra manera: en vez de proceder de arriba abajo se puede ir de abajo arriba, y de cualquier posición de la diagonal principal extendiéndose. Sin embargo, aquí tenemos un ejemplo concreto de no unicidad: si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= M_{12}^2 A M_{21}^{-1} M_{12}^2 M_{21}^{-1} \\ &= M_{21}^2 A M_{12}^{-1} M_{21}^2 M_{12}^{-1} \end{aligned}$$

Las Notas 4.2.4 prueban el

■ **Teorema 4.2.5** *Las matrices de explosiones e implosiones generan el grupo* $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$

■ 4.3 Explosiones y pirámides racionales

Vamos ahora a abordar el problema fuerte anunciado en la Sección 4.2 que es, como hemos dicho, estudiar la variación, por explosiones (no implosiones), del semigrupo Σ_X de los puntos de la red (O, G) contenidos en una pirámide $\Gamma(\Delta)$, proyección de un convexo compacto Δ de interior no vacío, contenido en un hiperplano H que no pase por el origen O. Utilizamos, como siempre, el sistema de referencia afín asociado a G, es decir $\{O; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, donde $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base libre de G, que es también una base ortonormal de V.

Consideramos el caso en que $\Gamma(\Delta)$ es una pirámide no necesariamente racional, pero sí proyección desde el origen de un poliedro Δ dentro de un hiperplano H que no pasa por O. Suponemos, desde luego, que Δ es el cierre convexo de un número finito de puntos $\{A_1, \ldots, A_m\}$ que engendran H. Si fuera necesario, se podrá suponer que estos puntos son los vértices de Δ.

■ **Definición 4.3.1** *Se llama* el primer cuadrante *de X respecto del sistema de referencia afín dado al conjunto*

$$O + \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle_+ = \left\{ O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

El opuesto del primer cuadrante *es el conjunto de los puntos*

$$O + \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle_- = \left\{ O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \lambda_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

■ **Notas 4.3.2** Aunque el conjunto de acción natural de las explosiones sean los puntos de coordenadas enteras, se les puede hacer actuar sobre todo V (es decir, sobre X fijado O) como isomorfismos lineales, ya que son postmultiplicación por matrices cuadradas con determinante 1.

4.3.2.1. Como

$$(a_1, \ldots, a_n) M_{ij} = (a_1, \ldots, a_i \overset{i)}{+} a_j, \ldots, a_n)$$

se ve que, tanto el primer cuadrante como su opuesto, son estables por explosiones, es decir, que todo punto de uno de ellos se transforma en otro punto del mismo por toda sucesión finita de explosiones.

4.3.2.2. Fácilmente se puede comprender que todo vector de V con una coordenada positiva se puede transformar, por sucesivas explosiones, en un vector con coordenadas $\mathbb{R}_0^n$. Esta condición es necesaria y suficiente en el sentido de que un vector puede ser transformado en un vector con coordenadas en

$\mathbb{R}_0^n$ por un conjunto finito de explosiones (que puede ser ninguna) si y sólo si tiene una coordenada positiva.

4.3.2.3. Sea $\pi : X \to X$ una explosión y sean $P_1, \ldots, P_n \in X \setminus \{O\}$. Como las explosiones son isomorfismos lineales de V, los $\pi(P_1), \ldots, \pi(P_n)$ son afínmente independientes si y sólo si lo son $P_1, \ldots, P_n$. En particular, una explosión π lleva el hiperplano H sobre un hiperplano $\pi(H)$ que no pasa por el origen.

4.3.2.4. Consideremos los puntos $\{A_1, \ldots, A_m\}$ del poliedro Δ y sea $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, m$. En lo sucesivo designaremos por A a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Un punto $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma(\Delta)$ es de la forma

$$(p_1, \ldots, p_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Al transformar todo por una explosión π, P va dentro de la pirámide cierre convexo de $\underline{O\pi(A_1)}, \ldots \underline{O\pi(A_m)}$ porque

$$\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} M_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} M_{ij}$$

4.3.2.5. El problema a estudiar puede ser enunciado ahora de forma muy clara: averiguar bajo qué condiciones existe una sucesión finita de explosiones que lleva Σ_X dentro del primer cuadrante. Para que una sucesión haga eso es necesario y suficiente que lleve los puntos $\{A_1, \ldots, A_m\}$ (o, equivalentemente, todo $\Gamma(\Delta)$) dentro del primer cuadrante. También hablaremos de sucesión de explosiones que lleva A dentro del primer cuadrante.

El teorema a demostrar es el siguiente:

■ **Teorema 4.3.3** *Sea $\Gamma(\Delta)$ una pirámide, proyección desde O de un poliedro Δ contenido en un hiperplano H y con vértices $A_1, \ldots, A_m$. Sea (O, G) una red tal que G esté generado por una base ortonormal $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, y tomemos coordenadas respecto del sistema de referencia métrico asociado. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una sucesión finita de explosiones que lleva dentro del primer cuadrante los puntos* $\{A_1, \ldots, A_m\}$.

2. *La pirámide* $\Gamma(\Delta)$ *no entra dentro del opuesto del primer cuadrante, es decir,* O *es el único punto de* $\Gamma(\Delta)$ *que pertenece al opuesto del primer cuadrante.*

■ **Observación 4.3.4** Es evidente que la primera condición implica la segunda. En efecto, como el opuesto del primer cuadrante es estable por explosiones, si hubiese un vector no nulo de $\Gamma(\Delta)$ dentro del opuesto del primer cuadrante, cualquier cadena de explosiones lo transformaría en un vector no nulo del transformado de $\Gamma(\Delta)$, dentro del opuesto del primer cuadrante, luego no podríamos llevar $\Gamma(\Delta)$ al primer cuadrante por ninguna sucesión de explosiones. Así pues, el problema consiste realmente en demostrar que la segunda condición implica la primera.

El intento de demostrar algorítmicamente el teorema conduce a enormes complicaciones. Ignoramos si hay una demostración algorítmica explícita. Para ilustrar la dificultad de este punto, hacemos una demostración en dimensión 2 que simplifica notablemente la de [Aro00].

■ **Observación 4.3.5** Como en las Notas 4.3.2 podemos poner las coordenadas de los puntos en las filas de una matriz A. Una observación muy simple, pero esencial, es darse cuenta de que, si la matriz A tiene una columna de elementos positivos, entonces la matriz (o lo que es lo mismo, los puntos) puede ser llevada dentro del primer cuadrante por una sucesión finita de explosiones: basta sumar la columna de elementos positivos sucesivamente a todas las que haga falta.

■ **Definición 4.3.6** *Dada una matriz* A *con* n *columnas, diremos que una explosión* π *es* adecuada *a* A *si* A *tiene dos elementos de una misma fila en posiciones distintas (digamos los que están en las posiciones* (l, i) *y* (l, j), $i \neq j$*) tales que el de la posición* (l, i) *es positivo, el de la* (l, j) *negativo, y* π *es la post-multiplicación por* M_{ji}. *Evidentemente no hay explosiones adecuadas a* A *si todos los elementos de cada fila son, bien no negativos, bien no positivos.*

■ **Notas 4.3.7** Vamos a demostrar el Teorema 4.3.3 para una pirámide plana engendrada por dos puntos, es decir cuando la matriz A de los puntos en filas es 2×2, lo que nos dará idea de las dificultades. Tomaremos como hipótesis que la pirámide correspondiente no está dentro del primer cuadrante porque, en ese caso, no hay nada que demostrar.

4.3.7.1. La matriz A debe tener las dos filas distintas de cero. Además, cada fila debe tener un elemento positivo. Entonces, los casos posibles, son:

CASO 1: En una columna hay dos elementos positivos.

CASO 2: En una columna hay un cero y un positivo.

CASO 3: En cada columna hay un positivo y un negativo.

En el caso 1, el resultado está claro por la Nota 4.3.5. En cuanto al caso 2 sea, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{21} > 0$. Entonces debe ser $a_{12} > 0$ y es evidente que, sucesivas explosiones M_{21} llevan a A dentro del primer cuadrante. Resta por estudiar el caso 3, que es lo que hacemos hasta el fin de estas notas.

4.3.7.2. Salvo permutaciones de columnas, que no hacen al caso, se puede suponer que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$.

4.3.7.3. ¿Cuándo habrá una combinación lineal de filas con coeficientes no negativos dentro del opuesto del primer cuadrante? Cuando haya un punto del opuesto del primer cuadrante dentro del segmento de extremos $(a_{11}, -a_{12})$ y $(-a_{21}, a_{22})$. Veamos una condición necesaria y suficiente para que ocurra esto. Como

$$\begin{aligned} &\lambda(a_{11}, -a_{12}) + (1-\lambda)(-a_{21}, a_{22}) \\ &\qquad = (\lambda a_{11} - a_{21} + \lambda a_{21}, -\lambda a_{12} + a_{22} - \lambda a_{22}) \\ &\qquad\qquad = [-a_{21} + \lambda(a_{11} + a_{21}), a_{22} - \lambda(a_{12} + a_{22})] \end{aligned}$$

habrá un punto en el opuesto del primer cuadrante si y sólo si

$$-a_{21} + \lambda(a_{11} + a_{21}) \leq 0\,, \quad a_{22} - \lambda(a_{12} + a_{22}) \leq 0\,,$$

o sea, si y sólo si

$$\lambda(a_{11} + a_{21}) \leq a_{21}\,, \quad \lambda(a_{12} + a_{22}) \geq a_{22}\,,$$

lo que equivale a que

$$\frac{a_{22}}{a_{12} + a_{22}} \leq \lambda \leq \frac{a_{21}}{a_{11} + a_{21}}\,.$$

Esto se verifica, evidentemente, si y sólo si

$$\frac{a_{22}}{a_{12}+a_{22}} \leq \frac{a_{21}}{a_{11}+a_{21}}$$

(recordemos que $a_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, 2$). Entonces, por negación, la matriz A no tiene ninguna combinación lineal de filas con coeficientes no negativos dentro del opuesto del primer cuadrante si y sólo si

$$\frac{a_{22}}{a_{12}+a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{11}+a_{21}} > 0,$$

lo que equivale a que

$$\frac{a_{11}a_{22}+a_{21}a_{22}-a_{21}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{12}+a_{22})(a_{11}+a_{21})} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{12}+a_{22})(a_{11}+a_{21})} > 0,$$

o sea a que

$$\frac{\det(A)}{(a_{12}+a_{22})(a_{11}+a_{21})} > 0$$

lo que se verifica si y sólo si $\det(A) > 0$.

Sólo como referencia posterior escribimos las dos explosiones de A:

$$AM_{12} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & -a_{12} \\ -a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \quad AM_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}-a_{12} \\ -a_{21} & -a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}.$$

4.3.7.4. La condición de que $\det(A) > 0$ implica que no puede ser cada positivo menor que el opuesto del negativo de su fila. Entonces cabe considerar sólo tres subcasos:

SUBCASO 3.1: hay un positivo igual al opuesto del negativo de su fila,

SUBCASO 3.2: cada positivo es mayor que el opuesto del negativo de su fila y

SUBCASO 3.3: un positivo es mayor que el opuesto del negativo de su fila y el otro menor.

El subcaso 3.1 conduce indirectamente hacia la salida. Supongamos, por ejemplo, que $a_{11} = a_{21}$. El hecho de que $\det(A) > 0$ implica que $a_{22} > a_{21}$. Es evidente que AM_{12} entra en el opuesto del primer cuadrante y

$$AM_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ -a_{21} & -a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}$$

tiene una columna con elementos no negativos

El subcaso 3.2 lleva indirectamente a la salida. Es evidente que AM_{12} y AM_{21} tienen una columna de positivos, luego están en el caso 1 y, por tanto,

el resultado ya se consigue automáticamente por aplicación de un número finito de explosiones.

El subcaso 3.3. es un poco más complicado. Para fijar ideas, supondremos que $a_{11} > a_{12}$ y $a_{21} > a_{22}$. Entonces la unica transformada de A que no entra en el opuesto del primer cuadrante es AM_{12}. Si ésta ya no está en el subcaso 3.3, debe estar en el 3.1 ó 3.2 por conservación del determinante. Desde ellos hay salida. Si está en el subcaso 3.3, cada elemento de una columna ha disminuido en valor absoluto con respecto al correspondiente en A. Entonces se le aplica el mismo proceso y así sucesivamente. Es evidente que este proceso debe ser finito, por el decrecimiento en los valores absolutos. Esto prueba el resultado.

■ **Observación 4.3.8** El camino al primer cuadrante, si existe, no es canónico, es decir, hay caminos distintos para una misma matriz. Por ejemplo, si partimos de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$AM_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AM_{21}M_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$AM_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad AM_{12}M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

■ 4.4 Matrices en optimización lineal

En esta sección vamos a dar unos cuantos resultados de teoría de matrices reales que se emplean en problemas de optimización lineal, método del símplex, etc[1]. En las secciones siguientes veremos cómo, sorprendentemente, estos teoremas de optimización lineal resuelven nuestros problemas de explosiones. Lo que damos en esta sección lo hacemos por razones de autocontenido. Se trata de una puesta al día de un extracto de [Gal60].

■ **Proposición 4.4.1** *Sea A una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo k, $b \in k^n$ un vector fila y $c \in k \setminus \{0\}$. Entonces una y sólo una de las posibilidades siguientes se da:*

[1]Mi agradecimiento al Prof. Vicente, que llamó mi atención hacia la optimización lineal, y al Prof. Bueso que me apuntó el teorema de Farkas-Minkowski

1. *El sistema lineal $xA = b$ tiene solución.*

2. *El sistema*
$$\begin{cases} Ay &= 0 \\ by &= c \end{cases}$$
tiene solución, donde by significa producto escalar.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que no se pueden dar las dos posibilidades a la vez. En efecto, si así fuera se tendría:

$$xAy = 0 = by = c\,,$$

lo que no es posible.

Supongamos ahora que no se da la primera posibilidad. Entonces el vector b no puede pertenecer al subespacio L de k^n engendrado por las filas de A. Por tanto, en el dual, $(L + \langle b\rangle)^* \subsetneq L^*$. Si $y' \in L^* \setminus (L + \langle b\rangle)^*$, entonces $Ay' = 0$ y $by' = c' \neq 0$. Así, $y = (c/c')y'$ verifica el sistema de la segunda condición. ■

■ **NOTACIÓN 4.4.2** A partir de ahora vamos a considerar vectores y matrices sobre $\mathbb{R}$. Cuando hablemos de vectores de $\mathbb{R}^r$ consideraremos sobre ellos el orden producto, es decir, componente a componente. Así tienen sentido, por ejemplo, las expresiones "vector positivo", "vector no negativo", etc.

■ **TEOREMA 4.4.3 (TEOREMA DE FARKAS-MINKOWSKI)** *Sea A una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector fila. Entonces una y sólo una de las posibilidades siguientes se da:*

1. *El sistema lineal $xA = b$ tiene solución no negativa.*

2. *El sistema de desigualdades*
$$\begin{cases} Ay &\geq 0 \\ by &< 0 \end{cases}$$
tiene solución.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que no se pueden dar ambas posibilidades. En efecto, si se dieran tendríamos que, para la solución no negativa de la primera y la de la segunda, sería

$$\begin{array}{lll} Ay \geq 0 & \Longrightarrow & xAy \geq 0 \Longrightarrow by \geq 0 \\ by < 0 & & , \end{array}$$

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

que son claramente incompatibles. Vamos a demostrar que, si no se da la primera, se da la segunda.

Si el sistema primero no tuviese solución, entonces la Proposición 4.4.1 nos dice que existe una solución al sistema

$$\begin{cases} Ay &= 0 \\ by &= -1 \end{cases}$$

lo que cumple las condiciones requeridas. Así pues, vamos a suponer que $xA = b$ tiene solución, aunque no la tiene no negativa. En este caso se procede por recurrencia sobre m, el número de filas de A. Los vectores fila de A los designaremos por a_i.

Si $m = 1$, debe ser $x \in \mathbb{R}_-$ y $xa_1 = b$. En este caso, debe ser $a_1 \neq 0$ porque $a_1 = 0$ obligaría a que $b = 0$ y el sistema $xA = b$ tendría como solución $x = 1$. Por tanto, $a_1 \neq 0$, luego $b \neq 0$ porque $xa_1 = b$ y $a_1 \neq 0$, $x < 0$. Entonces, poniendo $y = a_1^t$, es $Ay = a_1^2 > 0$ y $by = xa_1y = xa_1^2 < 0$, luego el sistema segundo tiene solución.

Supongamos, pues, el resultado cierto para menos de m filas y vamos a demostrarlo para m. Si $xA = b$ no tiene solución no negativa, entonces tampoco la tiene $xA_{m-1} = b$, donde A_{m-1} es la matriz que se obtiene de A suprimiendo su última fila. Por hipótesis de recurrencia, existe $y' \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_{m-1}y' \geq 0$ y $by' < 0$. Si $a_my' \geq 0$, entonces la solución y' nos sirve para terminar nuestra demostración.

Supongamos, pues, que $a_my' < 0$, y pongamos

$$\begin{aligned} a_i' &= (a_iy')a_m - (a_my')a_i\,, \quad i = 1,\dots,m-1 \\ b' &= (by')a_m - (a_my')b\,. \end{aligned}$$

Sea A' la matriz $(m-1) \times n$ cuyas filas son a_i', $i = 1,\dots,m-1$. Se verifica que el sistema $xA' = b'$ no puede tener solución no negativa. En efecto, si existiera un $x = (x_1,\dots,x_{m-1}) \geq 0$ tal que $xA' = b'$, sería

$$\begin{aligned} b' &= \sum_{i=1}^{m-1} x_ia_i' = (by')a_m - (a_my')b \\ &= \left[\sum_{i=1}^{m-1} x_i(a_iy')\right] a_m - (a_my') \sum_{i=1}^{m-1} x_ia_i\,, \end{aligned}$$

luego

$$-(a_my')b = -(a_my') \sum_{i=1}^{m-1} x_ia_i \left[\sum_{i=1}^{m-1} x_i(a_iy') - by'\right] a_m\,,$$

de donde

$$b = \sum_{i=1}^{m-1} x_i a_i + \left(\frac{1}{-a_m y'}\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1} x_i(a_i y') - by'\right] a_m .$$

En el último sumando tenemos que $x_i \geq 0$ y $a_i y' \geq 0$ $\forall i = 1, \ldots, m-1$, que $-by' > 0$ y que $-a_m y' > 0$, luego

$$x = \left(x_1, \ldots, x_{m-1}, \left(\frac{1}{-a_m y'}\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1} x_i(a_i y') - by'\right]\right)$$

sería una solución no negativa de $xA = b$, lo que no es posible.

Esto prueba que el sistema $xA' = b'$ no puede tiene solución no negativa. Por hipótesis de recurrencia, existe un vector $y_1' \in \mathbb{R}^n$ tal que $A'y_1' \geq 0$ y $b'y_1' < 0$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} a_i y &= (a_m y_1')(a_i y') - (a_m y')(a_i y_1') = a_i' y_1' \geq 0 \\ &\quad \forall i = 1, \ldots, m-1 \\ a_m y &= (a_m y_1')(a_m y') - (a_m y')(a_m y_1') = 0 \\ by &= (a_m y_1')(by') - (a_m y')(by_1') = b'y_1' < 0, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. ■

■ **Corolario 4.4.4** Sea A una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector fila. Entonces una y sólo una de las posibilidades siguientes se da:

1. El sistema de desigualdades $xA \leq b$ tiene solución no negativa.

2. El sistema de desigualdades

$$\begin{cases} Ay & \geq & 0 \\ by & < & 0 \end{cases}$$

tiene solución no negativa.

Demostración. Es fácil ver que no se pueden dar ambas posibilidades. En efecto, si se dieran tendríamos que, para las soluciones no negativas de la primera y la de la segunda, sería $0 \leq xAy$. Ahora bien, si $xA = (z_1, \ldots, z_n)$, como $z_i \leq b_i$, $y_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, es $0 \leq xAy \leq by$, lo que no puede ser. Vamos a ver que si no se da la primera se da la segunda.

Sea A' la matriz que se obtiene al añadir debajo de A la matriz unidad $n \times n$. La no existencia de solución no negativa para $xA \leq b$ implica la no existencia

de solución no negativa para $x'A' = b$. Por el Teorema 4.4.3, existe un vector y tal que $A'y \geq 0$ y $by < 0$. La multiplicación por y de las últimas n filas de A' indica que todas las componentes de y son no negativas, de donde el resultado. ■

■ **COROLARIO 4.4.5** Sea A una matriz $m \times n$; entonces se da una y sólo una de las posibilidades siguientes:

1. Existe un vector no nulo $x \geq 0$ tal que $xA \leq 0$.

2. El sistema de desigualdades $Ay > 0$ tiene una solución no negativa.

DEMOSTRACIÓN. Fácilmente se ve que no se pueden dar las dos posibilidades a la vez. En efecto, como el vector xA tiene todas sus componentes menores o iguales que cero y el vector y tiene todas sus componentes mayores o iguales que cero, no puede ser $xAy > 0$. Vamos a ver que, si no se da la primera posibilidad, se da la segunda.

Sea A' la matriz que se obtiene de A añadiéndole a la derecha una columna compuesta por menos unos, y sea $b' \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector que tiene todas sus componentes cero salvo la última que es -1. Por hipótesis, el sistema de desigualdades $xA' \leq b'$ no puede tener una solución no negativa. Por el Corolario 4.4.4, existe un vector $y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0$, y un número $\upsilon \geq 0$, tales que, designado por a_i, $i = 1, \ldots, m$, a las filas de A, es $a_i y - \upsilon \geq 0$ y $-\upsilon < 0$. Así,

$$a_i y \geq \upsilon > 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

lo que significa que $Ay > 0$ y esto prueba el corolario. ■

■ **COROLARIO 4.4.6** Sea A una matriz $m \times n$; entonces se da una y sólo una de las posibilidades siguientes:

1. Existe un vector no nulo $x \geq 0$ tal que $xA \leq 0$.

2. El sistema de desigualdades $Ay > 0$ tiene una solución entera positiva.

DEMOSTRACIÓN. A la vista de la demostración del Corolario 4.4.5, lo único que hay que probar es que la existencia de una solución real no negativa a $Ay > 0$ implica la de una entera positiva. Para ello basta ver que existe una racional positiva: quitando denominadores se obtiene la entera. Sean a_i las filas de A, $i = 1, \ldots, m$ y sea $a_i y = \alpha_i > 0$. Sea $0 < \varepsilon < \min\{\alpha_i\}$ y sea K un polidisco centrado en y tal que, para todo $z \in K$, es $|-\alpha_i + a_i z| < \varepsilon$. Entonces,

$$-\varepsilon < a_i z - \alpha_i < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i - \varepsilon < a_i z < \varepsilon + \alpha_i$$

lo que implica que $a_i z > 0$. Como dentro del polidisco K hay, necesariamente, vectores racionales mayores que y, queda probado el corolario. ■

■ 4.5 Optimización lineal y explosiones

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 4.3.3 que, para mayor facilidad, volvemos a enunciar aquí:

■ **Teorema 4.5.1** *Sea $\Gamma(\Delta)$ una pirámide, proyección desde O de un poliedro Δ contenido en un hiperplano H y con vértices $A_1, \ldots, A_m$. Sea (O, G) una red tal que G esté generado por una base ortonormal $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, y tomemos coordenadas respecto del sistema de referencia métrico asociado. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una sucesión finita de explosiones que lleva dentro del primer cuadrante los puntos $\{A_1, \ldots, A_m\}$.*
2. *La pirámide $\Gamma(\Delta)$ no entra dentro del opuesto del primer cuadrante, es decir, O es el único punto de $\Gamma(\Delta)$ que pertenece al opuesto del primer cuadrante.*

Recordemos que lo que hay que demostrar es que la condición segunda implica la primera. Recordemos, también, que ponemos los puntos A_i en las filas de una matriz A. Finalmente, recordemos que, si una matriz tiene una columna completa de elementos positivos, entonces puede ser llevada dentro del primer cuadrante por una sucesión finita de explosiones.

■ **Proposición 4.5.2** *Sea $n > 1$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un vector de enteros positivos con máximo común divisor igual a 1. Existe una matriz Y de dimensiones $n \times n$, de enteros no negativos con determinante 1, tal que y es una de sus columnas.*

Demostración. Pongamos el vector y como una matriz columna. Consideremos las operaciones de filas dentro de y como pre-multiplicación por una matriz elemental $n \times n$ que, como bien se sabe, es igual a la matriz unidad con un elemento cero sustituido por un número. Designemos por $E_{ij}(a)$ a la matriz elemental con a en la posición (i, j), $i \neq j$.

Si todos los y_j son múltiplos de uno de ellos, digamos y_i, entonces debe ser $y_i = 1$. Multiplicando por matrices de la forma $E_{ji}(-y_j)$ convertimos el vector columna y en una columna con todos ceros salvo un 1 en la posición j.

Nótese que todas las matrices elementales usadas tienen un entero *negativo* fuera de la diagonal principal. Supongamos que esto no ocurre.

Sea y_i el menor de todos los y_j. Como no todos son múltiplos de y_i, debe existir un j tal que, en la división euclídea, $y_j = q_j y_i + r_j$ con $0 < r_j < y_i$. La multiplicación por $E_{ji}(-q_j)$ pone r_j en la posición j dejando invariables a los demás. Así, el mínimo de los y_j ha decrecido en este proceso que es, de nuevo, multiplicar por una matriz elemental con un entero negativo fuera de la diagonal principal. Es evidente que este proceso sólo puede llevarse a cabo un número finito de veces, con lo que caemos en la situación anterior.

En resumen, con esto probamos que, multiplicando a izquierda la matriz columna y por un número finito de matrices elementales *con enteros negativos fuera de la diagonal principal*, se llega a una matriz que es una columna de la matriz unidad. Como $n > 1$ se pueden añadir a ésta las restantes columnas de la matriz unidad, a derecha o a izquierda, en un orden adecuado, de tal manera que la matriz $n \times n$ resultante U tenga determinante 1. Desde luego, U es la matriz unidad con las columnas permutadas de una cierta forma. Las inversas de las matrices elementales anteriores son matrices elementales *con elementos positivos* fuera de la diagonal principal. Su producto P en el orden correcto tiene todos sus elementos mayores o iguales que cero y es tal que $Y = PU$ contiene a la columna y. Además, $\det(PU) = 1$. Esto prueba la proposición. ■

La proposición siguiente refina enormemente el Teorema 4.2.5.

■ **PROPOSICIÓN 4.5.3** *Sea Y una matriz de enteros no negativos, con determinante 1. Entonces Y es producto de un número finito de matrices de explosiones, no implosiones, por una matriz de permutación, por otro producto finito de matrices de explosiones, no implosiones.*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente basta probar que se puede llevar Y a una matriz de permutación multiplicando a derecha y a izquierda por matrices de implosiones. Se opera de manera muy semejante a la de la Proposición 4.5.2, teniendo en cuenta que, si q es un entero positivo, entonces

$$E_{ij}(-q) = \prod_{k=1}^{q} E_{ij}(-1)\,.$$

Así, $E_{ij}(-q)$ es producto de matrices de implosiones.

Localicemos el elemento y_{ij} de Y distinto de cero más pequeño. Si todos los elementos de su columna son múltiplos de él, ponemos ceros en todas las

posiciones salvo en la (i,j) pre-multiplicando por matrices de implosiones, como en la Proposición 4.5.2. Al hacer esto, el hecho de que $\det(Y) = 1$ implica que $y_{ij} = 1$. Si hay elementos de la columna j que no son múltiplos de y_{ij} hacemos disminuir el mínimo pre-multiplicando por matrices de implosiones, como en la Proposición 4.5.2. Como este proceso de disminuir el mínimo debe tener un fin, caemos en el caso en que el mínimo es 1 y en su columna hay ceros salvo en su posición. Todo esto se logra por pre-multiplicación por matrices de implosiones. Supongamos que $y_{ij} = 1$ y en su columna hay ceros, aparte de él. Por simetría resulta evidente que se pueden poner ceros en todas las posiciones de la fila i-ésima post-multiplicando por matrices de implosiones.

El razonamiento básico está hecho. Es evidente que podemos repetirlo para la matriz que se obtiene de Y suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima, y así sucesivamente, sin afectar a lo anterior. Con esto queda clara la demostración de la proposición. ■

■ **Lema 4.5.4** *En la situación del Teorema 4.5.1, es*

$$0 \neq \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{OA_i}\,, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_0^m \setminus \{(0, \ldots, 0)\}\,.$$

Demostración. Sea f una función lineal tal que $f(\overrightarrow{OA_i}) > 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces,

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(\overrightarrow{OA_i}) > 0\,,$$

de donde la conclusión. ■

Demostración del teorema 4.5.1. Supongamos que O es el único punto de $\Gamma(\Delta)$ dentro del opuesto del primer cuadrante. Por el Lema 4.5.4, para cualquier $x \in \mathbb{R}_0^m \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, el vector xA es distinto de cero. Por hipótesis, no puede ser $xA \leq 0$. Por el Corolario 4.4.6, existe un vector $y \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que, puesto como vector columna, es $Ay > 0$. Se puede suponer que el máximo común divisor de las componentes de y es 1. Por la Proposición 4.5.2, existe una matriz Y con sus elementos enteros positivos y determinante 1 tal que y es una de sus columnas. Así, una de las columnas de AY es $Ay > 0$, lo que implica que AY puede ser llevada dentro del primer cuadrante por una sucesión finita de explosiones. Por la Proposición 4.5.3, AY se obtiene aplicando a A una sucesión finita de explosiones, luego permutando sus columnas y luego aplicando otra sucesión finita de explosiones. A poco que se piense se dará

uno cuenta de que esta permutación de columnas es irrelevante: si se puede llevar dentro del primer cuadrante la matriz con las columnas permutadas, también la original. Esto prueba el teorema. ■

Bibliografía

[Abh84] ABHYANKAR, S. S. (1984) *Combinatoire des tableaux de young, variétés déterminantielles et calcul de fonctions de hilbert. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **42**(3), págs. 65–88.

[AHV75] AROCA, J. M., HIRONAKA, H. y VICENTE, J. L. (1975) *The theory of the maximal contact.* Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid. Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juan", No. 29. [Mathematical Memoirs of the "Jorge Juan" Institute, No. 29].

[AHV77] — (1977) *Desingularization theorems.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid. ISBN 84-00-03602-6.

[AHV00] — (2000) *Bimeromorphic smoothing of a complete-analytic space.* Próxima aparición.

[AM69] ATIYAH, M. F. y MACDONALD, I. G. (1969) *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.

[Aro00] AROCA, F. (2000) *Métodos algebraicos en ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo complejo.* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

[Ben70] BENNET, B. M. (1970) *On the characteristic functions of a local ring. Annals of Mathematics*, **91**(2), págs. 25–87.

[CGO84] COSSART, V., GIRAUD, J. y ORBANZ, U. (1984) *Resolution of surface singularities.* Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-13904-4. With an appendix by H. Hironaka.

[CLO97] COX, D., LITTLE, J. y O'SHEA, D. (1997) *Ideals, Varieties and Algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, segunda edición. ISBN 0-387-94680-2.

[Coh84] COHN, P. M. (1984) *Puiseux's theorem revisited. J. Pure Appl. Algebra*, **31**(1-3), págs. 1–4. ISSN 0022-4049.

[Duv89] DUVAL, D. (1989) *Rational Puiseux expansions. Compositio Math.*, **70**(2), págs. 119–154. ISSN 0010-437X.

[Ful93] FULTON, W. (1993) *Introduction to toric varieties.* Princeton University Press, Princeton, NJ. ISBN 0-691-00049-2. The William H. Roever Lectures in Geometry.

[Gal60] GALE, D. (1960) *The theory of Linear Economic Models.* McGraw-Hill Book Company, New York. ISBN 07-022728-4.

[Gir77] GIRAUD, J. (1977) *Géométrie algébrique élémentaire.* Département de Mathématique, Université de Paris-Sud, Orsay. Cours de troisième cycle (1975–76), Publications Mathématiques d'Orsay, No. 77-75.

[Har77] HARTSHORNE, R. (1977) *Algebraic Geometry*, tomo 52 de *Graduate texts in Mathematics.* Springer Verlag.

[Her85] HERRERA, J. (1985) *Series de Puiseux en dos variables.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

[Hir53] HIRZEBRUCH, F. (1953) *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann.*, **126**, págs. 1–22.

[Hir64] HIRONAKA, H. (1964) *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203; ibid. (2)*, **79**, págs. 205–326.

[Hir77] — (1977) *Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space. Acta Math. Vietnam.*, **2**(2), págs. 103–168.

[Hir89] — (1989) *On the presentations of resolution data.* En *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, 135–151. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD. Noted and with an appendix by T. T. Moh.

[HK71] HERZOG, J. y KUNZ, E. (1971) *Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension* 1. *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math. Natur. Kl.*, 27–67.

[Jun08] JUNG, H. W. E. (1908) *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$. J. reine angew. Math.*, **133**, págs. 289–314.

[KKMSD73] KEMPF, G., KNUDSEN, F. F., MUMFORD, D. y SAINT-DONAT, B. (1973) *Toroidal embeddings. I.* Springer-Verlag, Berlin. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339.

[KV02] KIYEK, K.-H. y VICENTE, J. L. (2002) *Auflösung des Flächen Singularitäten.* Próxima aparición.

[Lau71] LAUFER, H. B. (1971) *Normal two-dimensional singularities.* Princeton University Press, Princeton, N.J. Annals of Mathematics Studies, No. 71.

[Lip65] LIPMAN, J. (1965) *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces.* Tesis Doctoral, Harvard University.

[Lip69] — (1969) *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36), págs. 195–279.

[Lip75] — (1975) *Introduction to resolution of singularities.* En *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, 187–230. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[LJT71] LEJEUNE-JALABERT, M. y TEISSIER, B. (1971) *Quelques calculs utiles pour la resolution des singularités.* Centre de Mathématiques, École Polytechnique, Paris. Rédigés par Lê D ung Tráng et J. J. Risler, Exposés faits au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, No. M72.1171.

[Mat81] MATSUMURA, H. (1981) *Commutative Algebra*, tomo 56 de *Mathematics Lecture Notes Series.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Massachussets, segunda edición. ISBN 0-8053-7026-9.

[McD95] McDonald, J. (1995) *Fiber polytopes and fractional power series. J. Pure Appl. Algebra*, **104**(2), págs. 213–233. ISSN 0022-4049.

[Nag75] Nagata, M. (1975) *Local Rings*, tomo 13 de *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics.* Interscience Publishers, New York.

[Oda88] Oda, T. (1988) *Convex bodies and algebraic geometry.* Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-17600-4. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.

[Rie74] Riemenschneider, O. (1974) *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann.*, **209**, págs. 211–248.

[Rie81] — (1981) *Zweidimensionale Quotientensingularitäten: Gleichungen und Syzygien. Arch. Math. (Basel)*, **37**(5), págs. 406–417. ISSN 0003-889X.

[Roc01] Rockafellar, R. T. (2001) *Convex analysis in the calculus of variations.* En *Advances in convex analysis and global optimization (Pythagorion, 2000)*, 135–151. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[Sch86] Schrijver, A. (1986) *Theory of linear and integer programming.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester. ISBN 0-471-90854-1. A Wiley-Interscience Publication.

[Sin74] Singh, B. (1974) *Effect of the permissible blowing-up on the local Hilbert functions. Inventiones Mathematicae*, **26**, págs. 201–212.

[Sin76] — (1976) *A numerical criterion for the permissibility of a blowing-up. Compositio Math.*, **33**(1), págs. 15–28.

[Vas94] Vasconcelos, W. V. (1994) *Arithmetic of blowup algebras.* Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-45484-0.

[Vic73] Vicente, J. L. (1973) *Singularidades de curvas algebroides alabeadas.* Tesis Doctoral, Madrid.

[Vic77] — (1977) *The Weierstrass-Hironaka preparation theorem. Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4)*, **37**(1-2), págs. 51–81.

[Zar71a] ZARISKI, O. (1971) *General theory of saturation and of saturated local rings. I. Saturation of complete local domains of dimension one having arbitrary coefficient fields (of characteristic zero). Amer. J. Math.*, **93**, págs. 573–648.

[Zar71b] — (1971) *General theory of saturation and of saturated local rings. II. Saturated local rings of dimension* 1. *Amer. J. Math.*, **93**, págs. 872–964.

[Zar75] — (1975) *General theory of saturation and of saturated local rings. III. Saturation in arbitrary dimension and, in particular, saturation of algebroid hypersurfaces. Amer. J. Math.*, **97**, págs. 415–502.

[ZS60] ZARISKI, O. y SAMUEL, P. (1960) *Commutative Algebra*, tomo 2 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-90171-X.

Manuel Jesús Soto Prieto

ALGEBRA Y COMBINATORIA DE LAS SINGULARIDADES

Sobresaliente cum laude

por unanimidad

8 Marzo 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

600028151