

Bifurcaciones de Hopf: Análisis Cualitativo y Aplicación a un Modelo Bioeconómico de Pesquerías

Hopf Bifurcations: Qualitative Analysis and Application to a Bioeconomic Model of Fisheries

Ma. Luisa Vilchez Lobato¹, Francisco Velasco Morente², Luis González Abril² y Juan Antonio Ortega³

¹Departamento de Economía General y Estadística, Universidad de Huelva, España, Plaza de la Merced s/n

²Departamento de Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla, España, Avda. Ramón y Cajal no. 1

³Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos, Universidad de Sevilla, España, Avda. Reina Mercedes

E-mail: lobato@uhu.es, {velasco, luisgon}@us.es, ortega@lsi.us.es

Artículo recibido en Mayo 05, 2002; aceptado en Abril 18, 2003

Resumen

Realizamos en este trabajo un estudio cualitativo de las trayectorias del sistema dinámico resultante de aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin a un problema de control óptimo para la gestión económica de una pesquería. Analizamos la estabilidad de las soluciones de equilibrio estacionario en función de los parámetros del sistema, para posteriormente investigar sobre la existencia de bifurcaciones de codimensión uno. En este sentido, centramos particularmente nuestra atención en la bifurcación de Hopf y en la consiguiente aparición de trayectorias cerradas de tipo ciclo límite. Los resultados obtenidos a nivel teórico son ilustrados empíricamente asignando a los parámetros del sistema las estimaciones realizadas para el caso de la pesquería de "chamelea gallina" del litoral suratlántico español. Los valores de bifurcación se obtienen mediante el uso de los softwares Content y Vensim y se da una descripción del comportamiento cualitativo de las órbitas del sistema en los entornos de los valores de bifurcación.

Palabras clave: Estabilidad, Bifurcaciones, Teorema de Hopf, Ciclo Límite, Control Óptimo.

Abstract

This paper deals with the theory of codimension one bifurcations applied to a dynamical system derived from applying Pontryagin's maximum principle to an optimal control problem for economic fisheries management. Changes in the number and/or the stability of stationary states as well as the appearance of closed orbits, are analyzed. Some necessary and/or sufficient conditions are established for the existence of Hopf bifurcations, according to the biological and economic parameters of the model. We focus our attention on the resulting limit cycles which can be candidates for solutions of the optimal control problem. The method is applied to the South Atlantic "chamelea gallina" fishery. To obtain the bifurcation values, we have made numerical computations by the use of Content and Vensim software. So, we make a qualitative description of the trajectories behaviour around the stationary states.

Keywords: Stability, Bifurcations, Hopf Theorem, Limit Cycle, Optimal Control.

1 Introducción

La estructura cualitativa del flujo de un sistema dinámico no lineal puede cambiar si se modifican los parámetros del mismo. En particular, pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas cerradas, o desaparecer los que ya existen, o bien ver alteradas sus propiedades de estabilidad. Un sistema donde esto ocurre recibe el nombre de sistema estructuralmente inestable, o se dice equivalentemente que una bifurcación ha ocurrido para algunos valores de los parámetros.

Los estudios cualitativos aplicados a los sistemas socioeconómicos se han desarrollado de forma extraordinaria últimamente. Cabe destacar a investigadores como Feichtinger (1992), Day (1994), Hilborn (1994), Gandolfo (1997), Lorenz (1997), Landa y Velasco (1997), Vilchez y Velasco (1999), Barucci (2001), Vilchez y Velasco (2002) o Velasco et al (2002), que han estudiado las propiedades de estabilidad local de las soluciones de equilibrio estacionario de sistemas que dependen de varios parámetros económicos y han descrito el comportamiento de las trayectorias conforme a que uno o más de los parámetros del sistema varíen. Hoy en día conceptos como bifurcaciones, codimensión o equivalencia topológica son usados frecuentemente en la investigación económica.

En este trabajo pretendemos, fundamentalmente, interpretar la teoría sobre bifurcaciones locales dentro del contexto de los sistemas dinámicos con aplicación a la pesca, como herramienta importante que permite un análisis cualitativo pormenorizado del comportamiento de las trayectorias del sistema en un entorno de los puntos de equilibrio estacionario. Concretamente, analizamos el sistema de ecuaciones diferenciales resultante de aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin a un problema de control óptimo. Tales sistemas se han caracterizado tradicionalmente en la literatura por la presencia de un punto de silla, lo que implica estabilidad condicional, esto es, las trayectorias del sistema alcanzan el equilibrio

estacionario siempre y cuando las condiciones iniciales la sitúen sobre la variedad estable del mismo. Ahora bien, no es éste el único comportamiento observable en modelos de crecimiento económico óptimo, pues se demuestra también la existencia de órbitas cerradas en modelos dinámicos caracterizados por la presencia de trayectorias más o menos monótonas y, en consecuencia, los ciclos pueden surgir como resultado de un proceso de optimización. Así lo han establecido diversos autores tales como Benhabib y Nishimura (1979), Wirl (1995, 1996), Feichtinger y Sorger (1986), Feichtinger et al (1992) y Dokner y Feichtinger (1991), entre otros, los cuales identifican a nivel teórico distintos mecanismos que pueden generar los ciclos en problemas de control óptimo aplicados a distintos campos de la Economía, si bien, la mayoría reconoce la dificultad de llevar los resultados a la práctica encontrando modelos que reflejen la realidad. En este sentido nuestro trabajo introduce en el campo de los recursos pesqueros la utilización de datos reales disponibles de pesca para la obtención de los valores de los parámetros a partir de los cuales se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica de los sistemas estudiados, es decir, el cálculo de los valores de bifurcación.

2 Metodología

Para la consecución del objetivo propuesto, es necesario establecer una metodología que permita plasmar, mediante expresiones matemáticas, todos los aspectos del análisis. En este sentido, hemos seleccionado los últimos resultados existentes ya en la bibliografía al respecto¹ que, de manera más efectiva, resuelven nuestros problemas.

Los sistemas dinámicos que hemos estudiado son no lineales, formulados con una concepción del tiempo como conjunto continuo. Además, son disipativos y pueden poseer así atractores en forma de puntos fijos, ciclos límites, órbitas cuasi-periódicas o incluso atractores extraños.

Como los cambios cualitativos a los que se refiere la teoría sobre bifurcaciones locales ocurren en un entorno de un punto fijo u órbita cerrada, nos hemos centrado en el estudio de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, es decir, aquéllos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee autovalores nulos o con parte real nula, pues sabemos por el teorema de Hartman-Grobman que los equilibrios hiperbólicos son estructuralmente estables. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad centro que establece la existencia de una variedad invariante² pasando por el punto fijo (no hiperbólico) a la

cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los autovectores asociados a autovalores nulos o con parte real nula.

Cuando el punto de equilibrio es no hiperbólico, debido a la presencia de al menos un autovalor real simple nulo, la restricción del sistema original a la variedad centro es un sistema de dimensión uno y si es consecuencia de la presencia de un par de autovalores imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (llamada *forma normal topológica*) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación.

En el caso de las bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple nulo, se identifican tres tipos de bifurcaciones: *nodo-silla*, *transcrítica* y *pitchfork*.

El análisis de la forma normal topológica asociada a cada tipo de bifurcación permite comprender qué tipo de cambio se produce en el sistema cuando el parámetro rebasa el valor de bifurcación. Así, la bifurcación nodo-silla puede identificarse como el mecanismo básico de creación-destrucción de puntos fijos: conforme el parámetro del sistema varía, dos puntos fijos se mueven uno hacia el otro, colisionan (cuando el parámetro toma el valor de bifurcación) y desaparecen. En la bifurcación transcrítica, los puntos fijos colisionan igualmente, pero no desaparecen sino que intercambian su estabilidad. En la bifurcación *pitchfork*, los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos.

En el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de autovalores imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\alpha = \alpha_0$, la restricción del sistema original a la variedad centro es un sistema bidimensional, el cual presentará una bifurcación de Hopf para $\alpha = \alpha_0$, si se verifica que los autovalores $\lambda(\alpha)$ que son imaginarios puros en α_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\alpha)}{d \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf³ asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de α_0 . La estabilidad de las mismas viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado *primer coeficiente de Liapunov*, ℓ_1

¹ Kutnetsov (1997), Guckenheimer et al (1997), Govaerts et al (1997), Govaerts (2000).

² Para el caso que nos ocupa y tal como aclara Wiggins (1990), p. 15, cuando usemos el término *variedad* es suficiente pensar en dos situaciones: un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n en el caso lineal o una superficie m-dimensional incrustada en \mathbb{R}^n en el caso no lineal.

³ Hopf (1942). Hay una traducción al inglés en Marsden y McCracken (1976) y distintas versiones en Guckenheimer y Holmes (1986), Wiggins (1990) o Lorenz (1993).

(α_0), el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente⁴.

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1(\alpha_0) < 0$, y si $l_1(\alpha_0) > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf *super crítica* y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro α mayor que α_0 y lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf *sub crítica* y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Entonces, dado un sistema n -dimensional con un equilibrio no hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad centro pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensiones uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes. Ahora bien, la realización de estos cálculos no es sencilla. En la mayoría de los casos un tratamiento simbólico del problema resulta inabordable y hay que recurrir a técnicas numéricas de resolución. No obstante, hemos seguido la metodología desarrollada por Kuznetsov (1997), el cual realiza un tratamiento de la cuestión utilizando variable compleja, lo que simplifica los cálculos, y a su vez propone dos procedimientos para el cálculo de la variedad centro y la posterior restricción del sistema.

Establecidos por tanto los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan la investigación, pasamos a formular en la siguiente sección el modelo de control óptimo del cual deriva el sistema dinámico que vamos a estudiar.

3 Formulación del Modelo

El modelo que analizamos es una ampliación del modelo lineal básico de gestión de pesquerías presentado originalmente por Schaefer (1957) y desarrollado con posterioridad por Crutchfield y Zellner (1962), consistente en controlar el esfuerzo de pesca⁵ a lo largo del tiempo de manera que sea máxima la utilidad social proporcionada por el recurso o, en términos del stock, se trata de determinar la trayectoria óptima de la biomasa, $x(t)$, de modo que sea máximo el funcional que expresa los beneficios netos descontados derivados de la explotación del recurso.

⁴ Ver Kuznetsov (1997)

⁵ Se suele definir como esfuerzo de pesca el producto del poder de pesca (entendido éste como el poder de captura en la terminología de Beverton y Holt (1957)) de un barco individual por el tiempo de operación efectivo. El esfuerzo total anual desplegado por una flota será la suma de los esfuerzos mensuales de cada embarcación. La unidad que emplearemos para cuantificar el esfuerzo será el número de días de pesca (adecuada si la flota es homogénea), si bien puede venir expresado en número de barcos, sedales, redes, etc.

La formulación matemática consiste en maximizar el funcional:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} (pqE(t)x(t) - cE(t)) dt \quad (1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{L} \right) - h(t) \\ x(0) &= x_0, x(t) \geq 0 \\ 0 &\leq E \leq E_{\max} \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x(t)$ representa el nivel de biomasa en el instante t (medido en T_m), $E(t)$ es el esfuerzo de pesca (medido en días de pesca) y $h(t)$ es la tasa instantánea de capturas totales de la flota. Los parámetros r y L en la ecuación de estado, representan respectivamente la tasa de crecimiento intrínseca de la población de peces y la capacidad de carga respectiva o nivel de biomasa máximo que se alcanzaría en ausencia de explotación. Dicha ecuación indica que la variación en el tiempo de los niveles de biomasa es igual a la diferencia entre la función que expresa el crecimiento natural de la población (de acuerdo a una ley logística) y la tasa total de capturas de la flota.

Así mismo, los parámetros p y c representan el precio neto por unidad de captura y el coste por unidad de esfuerzo respectivamente, y δ es la tasa continua de descuento que actualiza la corriente de beneficios y que es fijada por el gestor de la pesquería.

En el modelo de Schaefer, $h(t) = qE(t)x(t)$, con q el coeficiente de capturabilidad de la especie. Al ser el Hamiltoniano para este problema:

$$H(x, E, t, \mu) = pqEx - cE + \mu \left[rx \left(1 - \frac{x}{L} \right) - pqEx \right] \quad (3)$$

lineal en la variable de control, de la condición de optimalidad, $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$, no puede deducirse el control

óptimo, E^* , de forma directa, por lo que la solución al problema es una solución de tipo "bang-bang"⁶ establecida en forma de "feedback", es decir, el esfuerzo óptimo $E(t)$ se especifica en función de la variable de estado actual como una combinación de controles "bang-bang" y óptimos. Sólo se necesita conocer el nivel actual del stock, $x(t)$, y los valores de los parámetros para deducir la política óptima para el presente y el futuro de la pesquería. Pero como ya hemos comentado, la condición para que se dé una solución de este tipo es bastante irreal: la linealidad en los costes.

Una manera de evitar estas soluciones llamadas también de "traqueteo", consiste en introducir en el funcional unos *costes de ajuste* o de *nueva capacidad* que hagan continuo el control, de manera que éste (el nivel de esfuerzo en nuestro caso) vaya ajustándose al coste en cada momento.

⁶ Llamada así por establecerse en valores extremos. Ver Kamien y Schwartz (1991), p. 202.

La idea es considerar una nueva variable de control, $v(t)$, definida como la tasa de variación del esfuerzo, esto es:

$$v(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad (4)$$

y una función de costes de ajuste⁷ (cuadrática):

$$k(v) = \beta v^2, \beta > 0 \quad (5)$$

Así, el esfuerzo de pesca que antes era la variable de control, pasa ahora a ser una variable de estado que se rige por la ecuación diferencial $\dot{E} = v$. La función de utilidad social incorpora la nueva función de costes y el problema de control que estudiamos consiste en⁸:

$$\max_v \int_0^\infty e^{-\delta t} (ph - cE - \beta v^2) dt \quad (6)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - h \\ \dot{E} &= v \end{aligned}$$

$$x(0) = x_0, E(0) = E_0, v \in [-d, d], 0 < d < \infty$$

4 Aplicación del Principio del Máximo y Análisis de la Estabilidad de los Equilibrios Estacionarios

El problema (6) es un problema de control óptimo no lineal en los costes con dos variables de estado y un control. La aplicación de las condiciones necesarias de optimalidad del Principio del Máximo a un problema como éste, da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión cuatro en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - h \\ \dot{E} &= v \\ \dot{\mu}_1 &= \delta \mu_1 - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{\mu}_2 &= \delta \mu_2 - \frac{\partial H}{\partial E} \end{cases} \quad (7)$$

donde H es el Hamiltoniano del problema y μ_1, μ_2 son las variables de coestado.

⁷ Este coste de ajuste puede interpretarse como lo que cuesta incorporar/cesar un barco en la pesquería. Así, controlamos la variación del esfuerzo en función de lo costoso que resulte el alta/baja de una embarcación.

⁸ Omitimos la dependencia explícita con respecto al tiempo por simplicidad.

Dockner y Feichtinger (1991) establecieron la posibilidad de que un sistema como el anterior derivado de un problema de control óptimo con dos variables de estado y un control, admitiera como soluciones trayectorias oscilatorias cerradas de tipo ciclo límite, las cuales según avanzaba Hartl (1987) sólo son posibles si hay más de una variable de estado. Concretamente, dado un equilibrio estacionario, P , del sistema anterior, si se considera el sistema lineal asociado, $\dot{y} = Jy$, con J la matriz Jacobiana evaluada en P , Dockner (1985) probó que los autovalores asociados pueden calcularse mediante la expresión:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 4 \det J}} \quad (8)$$

donde $K = B - \delta^2$, con B la suma de los menores diagonales de orden dos de la matriz Jacobiana J .

A la vista de la ecuación (8), es posible establecer una clasificación de los autovalores anteriores en función de $\det J$ y K , tal y como se muestra en la Figura 1 y así determinar la estabilidad de los estados estacionarios.

Está claro que la estabilidad completa es imposible y que la única estabilidad de la que puede hablarse es de la estabilidad condicional del punto de silla. Dockner y Feichtinger (1991) probaron además que una condición necesaria y suficiente para que los autovalores anteriores fuesen imaginarios puros⁹ es:

$$\det J > \left(\frac{K}{2}\right)^2, \det J = \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \quad (9)$$

Obsérvese en la Figura 1 que el plano aparece dividido en 5 regiones paramétricas en cada una de las cuales el comportamiento cualitativo del sistema dinámico es diferente. Así, en la región (I), los equilibrios son puntos de silla, con variedades estable e inestable asociadas de dimensión 2. De esta manera, si las condiciones iniciales sitúan a la trayectoria correspondiente sobre la variedad estable, se producirá un acercamiento hacia el equilibrio. En caso contrario, se alejará de él. Al pasar a la región (II), el comportamiento es el mismo, pero las trayectorias sobre la variedad estable se acercan en espiral al equilibrio que, en este caso, es un foco. En la frontera entre las regiones (II) y (III) surge una bifurcación de Hopf, pues los autovalores $\lambda_{3,4}$ atraviesan el eje imaginario al pasar de un lado a otro de la curva representada con trazo discontinuo. Si se considera la tasa de descuento social como parámetro del sistema, los valores δ_0 de δ para los cuales se cumplen las condiciones anteriores son candidatos a valores de bifurcación de Hopf, y un ciclo límite se bifurca a partir de ellos si los autovalores complejos que son imaginarios puros en δ_0 , atraviesan el eje imaginario con velocidad no nula¹⁰, es decir, si:

⁹ Condición necesaria para que exista una bifurcación de Hopf.

¹⁰ Según el Teorema de Hopf. Ver Hopf (1942) o una traducción al inglés en Marsden y McCracken (1976).

$$\frac{d}{d\delta}(\text{Re}(\lambda)) \Big|_{\delta=\delta_0} \neq 0 \quad (10)$$

Para estos valores, δ_0 , y sobre la variedad centro, si el punto fijo pasa de ser estable a inestable rodeado por un ciclo límite estable, entonces se dice que la bifurcación es supercrítica y ello queda justificado por el hecho de que el primer coeficiente de Liapunov, $\ell_1(\delta_0)$, es negativo. Ahora bien, si dicho coeficiente es positivo, entonces un punto de equilibrio (foco) inestable pasa a ser estable rodeado por un ciclo límite inestable. Es lo que ocurre al pasar de la región (III) a la (II) en el gráfico. Se dice en tal caso que la bifurcación de Hopf es subcrítica.

Al pasar a la región (III) aparece una variedad inestable de dimensión 4, desapareciendo la variedad centro, con lo que el equilibrio es inestable. La variedad inestable en (IV) sigue siendo de dimensión 4. Sin embargo, al pasar el punto fijo a la región (V), la variedad inestable es de dimensión 3, surgiendo a su vez una variedad estable de dimensión 1. En consecuencia, el equilibrio es un punto de silla. En el origen, es decir, para $\det J = K = 0$, los autovalores son $\lambda_{1,2} = \delta$, $\lambda_{3,4} = 0$, con lo cual, si la matriz jacobiana es de rango 3, estaríamos ante una bifurcación de Takens-Bogdanov¹¹ de codimensión 2.

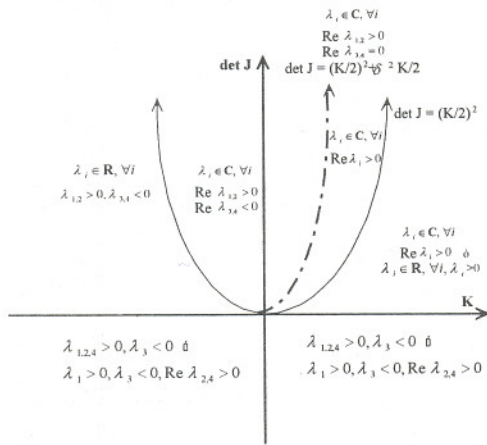


Figura 1. Clasificación de los autovalores de J en función de $\det J$ y K .

Hemos estudiado el problema de control anterior considerando como tasa de capturas la función $h(t) = qE(t)^2$, la cual estaría justificada en casos en los que el stock inicial estuviese tan levemente explotado que pudieran considerarse en cada instante las capturas independientes de la biomasa, siendo realista desde luego en situaciones a corto plazo y en las primeras fases de la explotación¹².

La existencia de controles óptimos está garantizada si tenemos en cuenta que el integrando en el funcional a maximizar es cóncavo con respecto a la variable de control¹ (Berkovitz (1974) así lo establece). Pero las condiciones de optimalidad del principio del máximo son sólo necesarias y únicamente puede demostrarse la suficiencia en algunos casos excepcionales. Entonces, lo más que sabremos es que si sólo existe una solución verificando las condiciones necesarias, ésta será la solución óptima; si hay varias, hablaremos entonces de “candidatos” a solución.

Las condiciones necesarias de optimalidad que se derivan de la aplicación del principio del máximo de Pontryagin, nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - qE^2 \\ \dot{E} &= v \\ \dot{\mu}_1 &= \left(\delta - r + \frac{2rx}{L}\right) \mu_1 \\ \dot{v} &= \delta v - \frac{q(p - \mu_1)}{\beta} + \frac{c}{2\beta} \end{cases} \quad (11)$$

El sistema (11) posee cuatro puntos de equilibrio ($P_i = (x_i, E_i, \mu_i^i, v_i)$, $i = 1, \dots, 4$), cuyas coordenadas vienen dadas por:

$$x_1 = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{c^2 L}{4 p^2 q r}}, E_1 = \frac{c}{2 p q}, \mu_1^1 = v_1 = 0 \quad (12)$$

$$x_2 = \frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{c^2 L}{4 p^2 q r}}, E_2 = \frac{c}{2 p q}, \mu_1^2 = v_2 = 0 \quad (13)$$

$$x_3 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right), E_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{q r} (r^2 - \delta^2)}, \quad (14)$$

$$\mu_1^3 = p - \frac{c r}{L(\delta^2 - r^2)} \sqrt{\frac{L}{q r} (r^2 - \delta^2)}, v_3 = 0$$

$$x_4 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right), E_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{q r} (r^2 - \delta^2)}, \quad (15)$$

$$\mu_1^4 = p + \frac{c r}{L(\delta^2 - r^2)} \sqrt{\frac{L}{q r} (r^2 - \delta^2)}, v_4 = 0$$

Sobre la existencia de los mismos en un contexto económico, hay que decir que una condición necesaria y suficiente para que existan los dos primeros equilibrios es:

$$q > \frac{c^2}{L p^2 r} \quad (16)$$

El tercero de los equilibrios no tiene sentido en el contexto en el que nos encontramos, pues la coordenada

¹¹ Ver Guckenheimer (1993) o Govaerts (2000)

¹² El estudio teórico del problema de control (6) formulado con la función de capturas habitual de Schaefer, revela la presencia del tradicional punto de silla de los modelos de control óptimo, lo que implica que el equilibrio (único) es condicionalmente estable.

correspondiente al esfuerzo es negativa. Y el cuarto equilibrio P_4 existe si y sólo si:

$$\delta^2 \leq r^2 - \frac{c^2 r}{qp^2 L} \left(\text{i.e., } 0 < \delta \leq \sqrt{r^2 - \frac{c^2 r}{qp^2 L}} = \delta \right) \quad (17)$$

Respecto de la estabilidad de los mismos, se tiene el siguiente resultado¹³.

Teorema. Dados los equilibrios (12), (13) y (15) del sistema (11), sea J_i , $i = 1,2,4$, la matriz jacobiana del campo vectorial correspondiente, evaluada en cada uno de ellos y $K_i = B_i \cdot \delta^2$, $i = 1,2,4$, con B_i la suma de los menores

diagonales de orden 2 de J_i . Sea $\delta_1 = \sqrt{r^2 - \frac{c^2 r}{qp^2 L}}$.

Entonces, para cualesquiera valores positivos de los parámetros del sistema, se verifica que:

- 1) i) Si $\delta \geq \delta_1$, entonces $K_1 > 0$ y $\det J_1 \geq 0$
 ii) Si $\delta < \delta_1$, entonces $\det J_1 < 0$
- 2) $\det J_2 < 0$
- 3) $K_4 > 0$ y $\det J_4 \geq 0$

En consecuencia, y según la clasificación de la Figura 1, el equilibrio P_2 es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión uno, y P_1 y P_4 pueden ser sendos puntos de silla o equilibrios totalmente inestables, o pueden surgir alrededor de ellos trayectorias cerradas de tipo ciclo límite para los valores de δ que verifiquen:

$$\det J = \left(\frac{K}{2} \right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \quad (18)$$

y bajo las hipótesis del teorema de Hopf.

5 Aplicación a la Pesquería de *Chamelea Gallina* de la Región Suratlántica Española

Los resultados anteriores, deducidos a nivel teórico, han sido ilustrados empíricamente asignando a los parámetros biológicos y económicos del modelo (6) las estimaciones numéricas realizadas para la pesquería de moluscos bivalvos de la Región Suratlántica española, la cual está dirigida fundamentalmente hacia la captura de chirla (*chamelea gallina*). Esta pesquería ha sido analizada en profundidad por García Ordaz (1996, 1999), García Ordaz y García del Hoyo (1998) y García del Hoyo et al (2000), a través del estudio de una serie específica de esfuerzo pesquero y capturas correspondiente a los años 1961 a 2000. A principios de la década de los 60 existían unos caladeros de chirla apenas explotados, y los datos de

esfuerzo y capturas correspondientes a esos años conforman a la función $h(t) = qE(t)^2$ como una buena estimación para la tasa instantánea de capturas totales de la flota. Hemos elegido, pues, esta etapa para ilustrar empíricamente los resultados anteriores.

Se han asignado entonces a los parámetros biológicos y económicos del problema de control (6) los valores numéricos de la Tabla 1, estimados en el trabajo de García del Hoyo et al (1998, 2000) y García Ordaz (1999). Los autores estiman estos valores a partir de la serie de esfuerzo pesquero y capturas para la especie en cuestión, empleando técnicas de estimación bayesianas basadas en el algoritmo de Gibbs. Hay que decir que hemos realizado computaciones con el programa Vensim, y hemos hecho una calibración a partir de la misma serie numérica, llegando a idénticas estimaciones mediante un proceso de optimización por mínimos cuadrados.

Parámetro	Valor
r	0,456146
q	0,0001049
L	30.000Tm
p	24,04€/Tm
c	7,29€/día de pesca
β	11,39€/barcos ²

Tabla 1. Estimaciones para los parámetros del modelo. Fuentes: García H. et al (1998, 2000), García O. (1999).

Tras aplicar el principio del máximo, llegamos a las siguientes conclusiones sobre los estados estacionarios y trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales (11).

Dados $\delta_1 = 0,441293$, $\delta_0 = 0,381547$ y las expresiones de los equilibrios (12) a (15), se tiene:

- 1) Si $\delta > \delta_1$, el sistema posee un equilibrio inestable en el punto $P_1 = (488,417 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$ y un punto de silla en $P_2 = (29511 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$. En este caso, una idea aproximada de cómo es el comportamiento de las trayectorias del sistema puede observarse en la Figura 2.

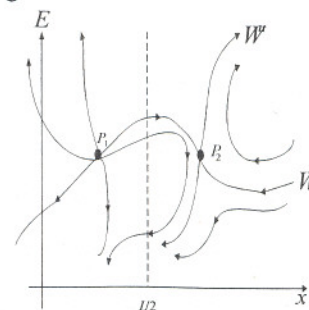


Figura 2. Una aproximación¹⁴ a las trayectorias del sistema (11) cuando $\delta > \delta_1$.

- 2) Si $\delta < \delta_1$, los equilibrios anteriores P_1 y P_2 situados en los mismos niveles de biomasa, esfuerzo y precio sombra, son sendos puntos de silla con una variedad estable

¹³ Ver Vilchez (2001)

¹⁴ Por W^s y W^u denotamos las variedades estable e inestable, respectivamente, del punto de silla.

asociada de dimensión uno. Además existe un tercer equilibrio en un punto P_4 tal que:

2.1) Para $\delta = \delta_0 = 0.381547$ se sitúa en los niveles: $P_4 = (2453.1 \text{ Tm}, 3129 \text{ días de pesca}, 12,94\text{€}, 0)$, y los autovalores $\lambda_{3,4}$ de la matriz Jacobiana asociada son imaginarios puros. Además, $\left. \frac{d}{d\delta} (\text{Re } \lambda_{3,4}) \right|_{\delta=\delta_0} > 0$, con lo

cual el teorema de Hopf garantiza la existencia de un ciclo límite bifurcándose a partir de δ_0 , el cual es inestable pues se ha obtenido un coeficiente de Liapunov, $l_1(\delta_0) > 0$. La detección numérica del valor de bifurcación se ha realizado con el software Content que, entre otras cosas, permite la integración numérica de las órbitas del sistema y el cálculo del primer coeficiente de Liapunov. En las figuras 3 y 4 puede observarse esta detección (H) y el ciclo límite emergente.

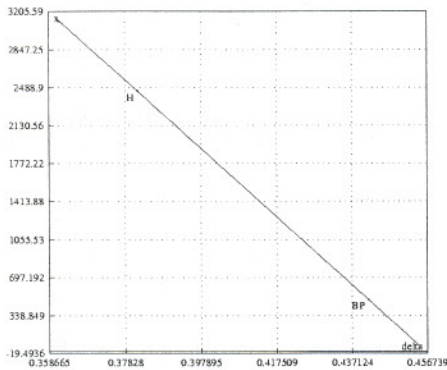


Figura 3. Detección de la bifurcación de Hopf (H).

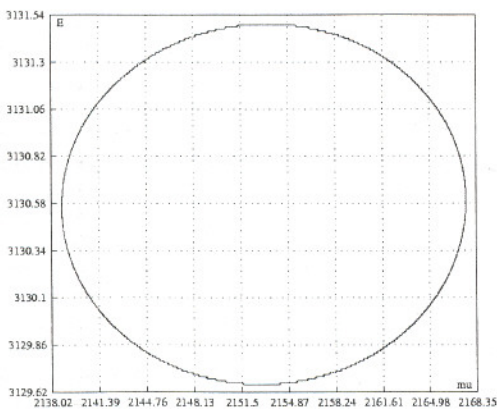


Figura 4. El ciclo límite.

Con el mismo software se ha realizado la continuación del ciclo límite, como puede observarse en la figura 5.

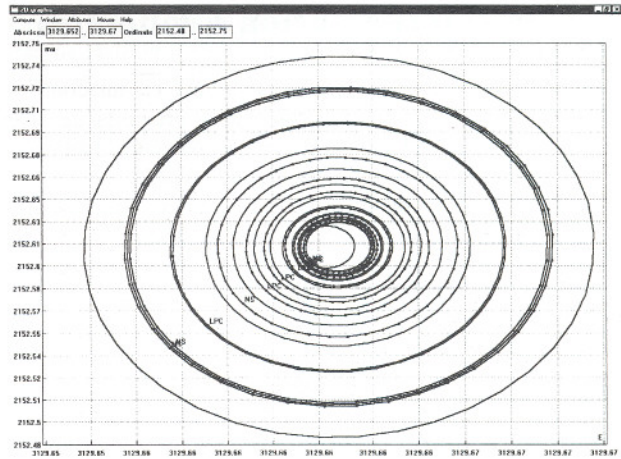


Figura 5. Continuación del ciclo límite. Se observan bifurcaciones de Neimark-Sacker (NS).

2.2) Para cada $\delta_0 < \delta < \delta_1$, P_4 es un foco completamente inestable.

2.3) Para cada $\delta < \delta_0$ lo suficientemente próximo a δ_0 , y sobre la variedad centro, el equilibrio P_4 aparece rodeado por un ciclo límite inestable. En el interior del ciclo, el equilibrio P_4 se comporta como un foco estable. Fuera de la variedad centro, para cada $\delta < \delta_0$, P_4 es un punto de silla con autovalores complejos asociados, dos con $\text{Re } \lambda > 0$ y dos con $\text{Re } \lambda < 0$. Una representación aproximada del comportamiento de las trayectorias en un entorno de δ_0 es la que se muestra en las figuras 6 y 7.

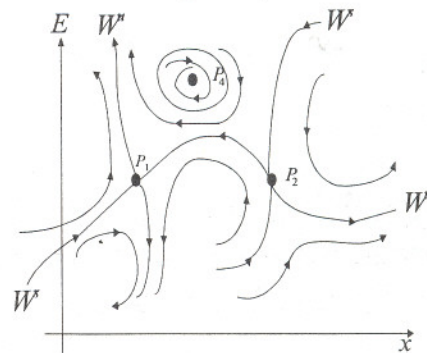


Figura 6. Una aproximación a las trayectorias del sistema (11) cuando $\delta < \delta_0$ ($\delta < \delta_1$)¹⁵.

3) Si $\delta = \delta_1$, entonces $P_1 = P_4$ y la matriz Jacobiana asociada posee un autovalor real simple igual a cero, lo cual hace pensar en la posibilidad de que exista una bifurcación nodo-silla, transcritical o “pitchfork”, pero un estudio de la estabilidad de los equilibrios a ambos lados de dicho valor del parámetro revela que no es así. Este punto es lo que se denomina un “branching point” o punto de ramificación¹⁶, en el cual se cortan al menos dos curvas de puntos de equilibrio del sistema.

¹⁵ La situación representada en esta Figura y en la siguiente en un entorno de P_4 , es la que tiene lugar sobre la variedad centro. No refleja en ningún momento el comportamiento global del sistema.

¹⁶ Ver Kuznetsov (1997), p.495.

6 Una Interpretación Económica

Para interpretar los resultados obtenidos en un contexto económico y responder por tanto a la pregunta de si el problema de control óptimo (6) tiene solución, hemos de decir que los niveles de biomasa y esfuerzo en los equilibrios P_1 y P_2 no reflejan una solución óptima desde ningún punto de vista pues, siendo el esfuerzo igual en ambos, la biomasa en el primero se encuentra en una situación de sobreexplotación¹⁷ y en el segundo está próxima a la capacidad máxima soportable. Lógicamente, siendo P_1 y P_2 puntos de silla, el que se alcance uno u otro equilibrio, depende de que las condiciones iniciales sitúen a la trayectoria correspondiente sobre la variedad estable de uno u otro punto.

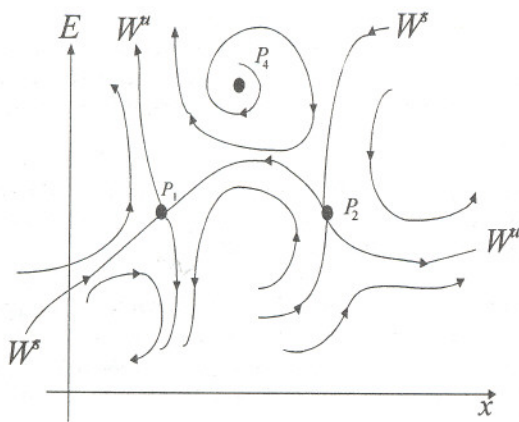


Figura 7. Una aproximación a las trayectorias del sistema (11) cuando $\delta > \delta_0$ ($\delta < \delta_1$).

Los niveles en P_1 reflejan un esfuerzo que supone un conjunto de aproximadamente 7 barcos (suponiendo un período operativo de unos 200 días al año) operando en la pesquería, frente a los más de 150 que faenaban durante los primeros años de la década de los 60. Además, la sociedad no otorga ningún valor al pez no capturado (pues el precio sombra es cero). Esta situación fue de hecho la existente durante los años 1973-1974 en los que la pesquería se colapsó y se cerró, no observándose niveles significativos de capturas hasta principios de los 80. La situación reflejada en el equilibrio P_2 no tuvo lugar en la realidad. El hecho de que parezca igualmente probable que el sistema evolucione hacia P_1 o P_2 puede estar motivado por haber incorporado al modelo el mismo coste de entrada que de salida, lo cual es una circunstancia poco realista si se tiene en cuenta que para un armador es más fácil invertir para entrar en una pesquería que desinvertir para salir de la misma, especialmente en una situación de sobreexplotación. No obstante, hemos de considerar

¹⁷ Prácticamente extinguido si tenemos en cuenta que los niveles correspondientes a la situación de Rendimiento Máximo Sostenible (RMS) son en este caso de 15000 Tm para la biomasa y de 5710 días de pesca, el esfuerzo pesquero.

también que el modelo está planteado desde la óptica del gestor social de la pesquería para el cual, los costes de entrada y salida no tienen porqué coincidir con los del armador, aunque en nuestro caso se han considerado idénticos. Desde luego, ninguna de las dos situaciones parece ser óptima desde el punto de vista económico.

Respecto del equilibrio dado por P_4 , hemos comprobado que para el valor de la tasa de descuento $\delta_0 = 0,381547$, existe una bifurcación de Hopf, con la consiguiente aparición de un ciclo límite en un entorno de dicho punto, ciclo que resulta ser inestable ya que $\ell_1(\delta_0) > 0$. Sobre la variedad centro y en el interior de dicho ciclo, el equilibrio P_4 es atractivo. Aunque desde el punto de vista matemático este resultado es interesante, determinar en la realidad unas condiciones iniciales que conduzcan hacia ese estado estacionario es complicado, por no decir imposible. Además, los niveles en el equilibrio para δ_0 ($x_4 = 2.453,1$ Tm, $E_4 = 3.129,66$ días de pesca, $\delta_1 = 12,94\%$) no reflejan una situación óptima desde ningún punto de vista, y la aplicación de una tasa de descuento de aproximadamente un 38% no es factible desde luego en un caso real.

No obstante, puede comprobarse (ver Tabla 2) que para una tasa de descuento en torno al 1%, los niveles de biomasa y esfuerzo en el equilibrio P_4 se aproximan a los correspondientes al RMS.

Por tanto, en la búsqueda de solución para el problema de control correspondiente, la política óptima a seguir debería ser aquella que, aplicando una tasa de descuento apropiada, conduzca a las trayectorias del sistema hacia el equilibrio P_4 , el cual para $\delta < \delta_0$ es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión dos.

δ	Biomasa (Tm)	Esfuerzo de pesca (días)	Precio sombra (euros)
0.01	14.671,2	5.709	17,9542
0.03	14.013,5	5.698	17,9424
0.05	13.355,8	5.676	17,9188
0.08	12.369,3	5.622	17,8599
0.1	11.711,6	5.571	17,8040
0.2	8.423,1	5.132	17,2703
0.3	5.134,7	4.301	15,9629

Tabla 2. Niveles en el equilibrio P_4 . Fuente: elaboración propia.

7 Conclusiones

La introducción de unos costes de ajuste en el modelo lineal de gestión de pesquerías de Schaefer (1957) tiene dos consecuencias inmediatas: por una parte, la existencia de un control continuo (en contraposición a la solución "bang-bang" del modelo habitual y por otra, la posibilidad de soluciones cerradas con comportamiento oscilatorio de tipo ciclo límite que en modelos de este tipo eran tradicionalmente excluidas en pro de la solución habitual del punto de silla. La existencia de tales soluciones se pone de manifiesto a través del teorema de bifurcación de Hopf en el problema de control estudiado. No obstante, dichos ciclos son inestables y aunque sobre la variedad centro, el equilibrio que rodean es atractivo, conseguir en la realidad unas condiciones iniciales que sitúen a las trayectorias del sistema sobre la variedad es difícil y la aplicación de tasas de descuento tan elevadas tampoco es factible en un caso real. Por otra parte, se observa que para tasas bajas (aproximadamente un 1%), los niveles de biomasa y esfuerzo en dicho equilibrio se aproximan a los correspondientes a la situación de máximo rendimiento sostenible, concluyendo que una política adecuada conduciría a las trayectorias del sistema hacia tal equilibrio estacionario, el cual en dicha situación es el habitual punto de silla de los problemas de control análogos.

El estudio del sistema nos ha revelado que existe una bifurcación de Takens-Bogdanov de codimensión 2. En este caso, los comportamientos del sistema pasan por trayectorias cíclicas, puntos de equilibrio estables e inestables y puntos de silla.

No obstante, la bifurcación de Takens-Bogdanov puede dar lugar también a la posibilidad de bifurcaciones homoclínicas, las cuales son bifurcaciones globales, ya que el sistema encontrado en este caso es un sistema hamiltoniano. La búsqueda de los lazos de silla la abordaremos mediante el método de Melnikov.

Agradecimientos:

Este trabajo ha sido soportado parcialmente por la ayuda de la Junta de Andalucía (ACC-354-SEJ-2001) (ACC-944-SEJ-2002).

Bibliografía

Benhabib, J., and Nishimiura, K., "The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth", *Journal of Economic Theory*, 21, 1979, pp. 421-444.

Berkovitz, L. D., *Optimal Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1974.

Crutchfield, J. and Zellner, A., "Economic Aspects of the Pacific Halibut Fishery". *Fishery Industrial Research*, 1 (I), 1963, pp.1-173.

Day, R. H., *Complex Economic Dynamics. An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*. Massachusetts Institute of Technology, 1994.

Dockner, E. J., "Local Stability Analysis in Optimal Control Problems with two State Variables", En Feichtinger, G., editor, *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2*, Amsterdam North-Holland, 1985, pp.89-103.

Dockner, E.J. and Feichtinger, G., "On the Optimality of Limit Cycles in Dynamic Economic Systems", *Journal of Economics* 53, 1991, pp. 31- 50.

Feichtinger, G. and Sorger, G., "Optimal Oscillations in Control Models: How can Constant Demand Lead to Cyclical Production?", *Operations Research Letters*, 5, 1986, pp.270- 281.

Feichtinger, G., "Hopf Bifurcation in an Advertising Diffusion Model". *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 17, 1992, pp. 401-411.

Feichtinger, G., Kaitala, V. and Novak, A. J., "Stable Resource-Employment Limit Cycles in an Optimally Regulated Fishery", en Feichtinger, G., editor, *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, Elsevier Science, 1992, pp. 163-184.

Gandolfo, G., *Economic Dynamics*. Springer-Verlag, 1997.

García Del Hoyo, J.J. et al, *Análisis de la comercialización de bivalvos y de la chirla suratlántica*. Documento de trabajo elaborado por el grupo de Investigación MEMPES de la Universidad de Huelva en colaboración con la Dirección General de Pesca de la Consejería de Agricultura y Pesca de la Junta de Andalucía, 2000.

García Ordaz, F., *Innovación tecnológica en la pesquería de chirla de la Región Suratlántica Española: conflictos entre artes y propuestas para la gestión del recurso*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva. Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, 1999.

García Ordaz, F., "Análisis Económico de la Pesquería de Chirla Suratlántica", *Revista de Estudios Regionales*, 55, 1999, pp.15-46.

García Ordaz, F. and García Del Hoyo, J.J., "Un modelo bioeconómico para la pesquería de chamelea gallina de la Región Suratlántica Española", *Estudios Agrosociales y Pesqueros*, 184, 1998, pp. 183-211.

Hartl, P. F., "A Simple Proof of the Monotonicity of the State Trajectories in Autonomous Control Problems", *Journal of Economic Theory*, 40, 1987.

Hilborn, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press. New York, 1994.

Hopf, E., "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential- Systems", *Berichte der Mathematisch- Physikalischen Koniglich-Sachsischen Academie der Wissenschaften Leipzig*, 94, 1942, pp.1- 22.

Kuznetsov Yu. A. and Levitin V.V., *CONTENT:A Multiplatform Environment for Analyzing Dynamical Systems*, 2000, (<ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>).

Kuznetsov, Y., *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 1997.

Landa, F. J. and Velasco, F., "Función de demanda y caos", *Esic-Market. Revista Internacional de Economía y Empresa*, 98, 1997, pp. 9-30.

Landa, F. J. and Velasco, F., "Análisis dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, (por aparecer).

Lorenz, H. W., *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1997.

Marsden, J.E. and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

Schaefer, M.B., "Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries", *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 14, 1957, pp. 669-681.

Velasco, F., Begines, F., Nadal, P., Chamizo, C. and Vilchez M. L., "Continuación de los equilibrios de un sistema dinámico económico con bifurcaciones de codimensión 1 y 2", *Computación y Sistemas*, Vol 5, No 3, 2002, pp. 169-179.

Vensim® Version 5. Documentation Revision Date September 3, 2002. Copyright © 2002 Ventana Systems, Inc.

Vilchez, M.L. and Velasco, F., "Some types of bifurcations in a bioeconomic model", en Mastorakis, N. E., editor, *Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and Electronic Devices and Systems*, World Scientific and Engineering Society Press, 1999, pp. 58-68

Vilchez, M. L., "Bifurcaciones en Modelos Dinámicos y de Control Óptimo aplicados a Pesquerías". Tesis Doctoral. Universidad de Huelva, 2001.

Vilchez, M.L., Velasco, F. and García, J. J., "Bifurcaciones transcricas y ciclos limites en un modelo dinámico de competición entre dos especies. Una aplicación a la pesquería de engraulis encrasicolus de la región Suratlántica Española", *Revista de Estudios de Economía Aplicada*, Vol. 20-No 3, 2002, pp 651-6 76.

Vilchez, M.L., Velasco, F. and Herrero, Inés A., "An optimal control problem with Hopf bifurcations. An application to the striped venus fishery Gulf of Cádiz", *Fisheries Research*, (por aparecer).

Wirl, F., "Pathways to Hopf bifurcations in dynamic continuous-time optimization problems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 91, 2, 1996, pp. 299-320.

Wirl, F., "The cyclical exploitation of renewable resource stocks may be optimal", *Journal of Environmental Economics and Management* 29, 1995, pp.252-261.



Mª Luisa Vílchez Lobato, es Profesora Asociada en el Dpto., de Economía General y Estadística de la Universidad de Huelva. Es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Dra. en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Huelva. Sus líneas de investigación son: Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos y Modelos de Control Óptimo, ambas con aplicación a problemas económicos de gestión de pesquerías.



Francisco Velasco Morente, es Profesor Titular en el Dpto., de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla. Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Sus líneas de investigación son: Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos y Modelos de Control Óptimo, ambas con aplicación a problemas económicos.



Luis González Abril, es Profesor Asociado en el Dpto., de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla. Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Dr. en Ciencias Económicas por la Universidad de Sevilla. Sus líneas de investigación son: Máquinas de Aprendizajes y Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos con aplicación a problemas económicos.



Juan Antonio Ortega, es Ingeniero en Informática desde 1992 y Doctor en Informática desde el año 2000, ambos títulos obtenidos en la Universidad de Sevilla. Es profesor del Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos de la citada Universidad desde el año 1992. Sus principales campos de investigación se centran en los Patrones Cualitativos de Sistemas Dinámicos, Diagnosis, Domótica y "E-learning".

