SEUDOSUPERFICIES Y ECONOMÍA.

Luis Boza Prieto[1]

Eugenio M. Fedriani Martel[2]

Flor Mª Guerrero Casas[2]

[1] Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla.

[2] Departamento de Economía y Empresa. Universidad Pablo de Olavide.

Resumen: Por su propia naturaleza, la Topología presenta dificultades de comprensión que se acompañan a menudo de críticas por su supuesta poca utilidad. Sin embargo, la aplicación de la Teoría de Grafos a la Economía (como en Informática, Arquitectura,...) empieza a resultar útil y transformadora, convirtiéndose en una herramienta versátil y con amplias posibilidades. De momento, no obstante, las aplicaciones económicas de la Teoría de Grafos son poco conocidas y se centran, casi exclusivamente, en los resultados que se relacionan directamente con las redes neuronales o con el modelo de Leontief.

La Teoría de Grafos se está desarrollando ampliamente hacia la resolución de nuevos problemas que surgen de diferentes áreas de conocimiento. De hecho, en ocasiones, se ha visto desbordada por las previsiones al presentarse insuficiente para modelizar algunas situaciones, que pueden aparecer al enfrentarse con modelizaciones económicas. Al menos, ésa es la impresión que puede sacarse al utilizar los grafos en Economía.

En esta comunicación, se propone un modo original y novedoso de solventar algunas de estas dificultades. Además, se motiva el planteamiento de un problema topológico (la clasificación de las seudosuperficies compactas) y se resuelve parcialmente, utilizando las conclusiones de un Teorema clásico (la clasificación de las superficies compactas).

Palabras clave: grafos, seudosuperficies, flujo circular de la renta.

1 Introducción (topológica).

Todo el que estudia Topología debe plantearse su relación con la abstracción. Una comprensión superficial de lo abstracto puede impedir el desarrollo del pensamiento lógico matemático. No obstante, el que se deja seducir por su apariencia de perfección, suele alejarse de las aplicaciones de lo que investiga.

La palabra *topología* proviene de la griega $\tau o\pi o\varsigma$, que significa *lugar*. En Matemáticas, se define la Topología como el estudio de la situación, empleándose también el término *Análisis situs*. Esta materia surgió como una rama de la Geometría; por esto, no nos debe extrañar que le corresponda estudiar, por ejemplo, las superficies y clasificarlas (cuestión, ésta, que ha ocupado a los geómetras durante toda la Historia).

Esta clasificación (de "tipos" o "clases" de superficies) se basa en la equivalencia topológica u homeomorfismo, que se pasa a explicar someramente:

Una sección importante de la Geometría Euclídea Elemental trata de la congruencia de triángulos y otras figuras. La congruencia es un tipo de equivalencia entre figuras geométricas y expresa el hecho de que dos figuras sean idénticas exceptuando su posición en el espacio. Una clasificación general utilizando la congruencia es, evidentemente, una pérdida de tiempo, ya que siempre tropezaremos con el problema de la infinitud de formas, tamaños,...

La semejanza es otro tipo de equivalencia que se encuentra en la Geometría Euclídea Elemental. Las figuras que son semejantes tienen la misma forma, pero no tienen necesariamente el mismo tamaño. La semejanza es una forma más débil de equivalencia que la congruencia, pues todo par de figuras semejantes son equivalentes, pero no al contrario.

En Geometría Proyectiva, una forma completamente distinta de equivalencia, basada en las perspectividades, es fundamental. En este caso, las formas y dimensiones de las figuras equivalentes no necesitan ser las mismas, pero las figuras tienen determinadas propiedades comunes; por ejemplo, una línea recta en una figura corresponde a una línea recta en una figura equivalente.

Finalmente, el tipo fundamental de equivalencia en Topología se llama homeomorfismo. Dos figuras geométricas se dicen topológicamente equivalentes u homeomorfas (también se dice que son del mismo tipo topológico), si cada una de ellas puede ser transformada en la otra, vía deformaciones continuas.

Por ejemplo, si se moldea un trozo de plastilina en diferentes formas sin producir roturas ni uniones, entonces todas las figuras obtenidas serán homeomorfas. Así, las superficies de una esfera, de un elipsoide, de un cubo y de un tetraedro son todas homeomorfas, pero ninguna de estas figuras es topológicamente equivalente a la superficie de un toro (figura en forma de rosquilla).

Se sabe que la Topología trata de las propiedades intrínsecas de las figuras; es decir, de las propiedades de las figuras mismas y no de las propiedades concernientes a su relación con el espacio circundante en el que puedan estar incluidas. Conviene decir esto porque los experimentos descritos en el párrafo anterior se han realizado en el espacio físico, que desempeña un papel esencial y dan, por tanto, una descripción incompleta de la idea de equivalencia topológica. Por ejemplo, aunque no es posible dar una demostración práctica de la deformación continua de una circunferencia en cualquier lazo (1-dimensional), los dos son homeomorfos pues, en un espacio cuatridimensional, el lazo se puede deformar en una circunferencia de forma continua (representaciones de lazos se pueden encontrar en cualquier texto básico de Topología general, como el de Patterson (1961)).

2 Modelización mediante grafos.

Resulta absolutamente natural e intuitivo representar situaciones de la realidad económica mediante diagramas, de modo análogo a como se tiende a hacer en cualquier otra materia digna de estudio (un ejemplo bastante representativo lo conforman los organigramas -diagramas de flujo- en Informática). En estos diagramas, lo más habitual es que se asigne a cada entidad (sector, empresa, proveedor, organización, factor productivo, bien...) una figura (por ejemplo, un círculo) en cuyo interior se escribirá su nombre (o un signo que lo identifique). Si dos de estos elementos están relacionados (habrá que determinar en cada caso la naturaleza de las relaciones a considerar), pueden unirse por una línea (o, en ocasiones, por una flecha).

La explicación anterior puede parecer innecesaria, pero ayuda a caer en la cuenta de que un diagrama es un objeto eminentemente topológico, por cuanto prescinde del significado de características de índole geométrica (en qué lugar se ha colocado cada elemento o a qué distancia están unos de otros). También se prescinde de la cuantificación de las relaciones, pero esto es algo que puede solucionarse etiquetando cada relación (ver los textos de Kauffmann (1995) y de Morillas (1983)).

Así, se justifica la introducción del lenguaje formal en el estudio de diagramas:

Definición 2.1 Un *grafo* es un conjunto de puntos (a los que se llama vértices) y unas líneas que unen algunos de esos puntos (llamadas aristas). Formalmente, un grafo G es un par de conjuntos $G = (V, A)$, donde A tiene por elementos pares de elementos distintos elegidos en el conjunto V.

Asignando un vértice a cada elemento y una arista a cada relación, el diagrama (que modelizaba nuestra situación) se puede haber convertido en un grafo. Pero, en ocasiones, se necesita del concepto de multigrafo e, incluso, del de seudografo:

Definición 2.2 Un *multigrafo* G es un par (V, A), donde V es el conjunto de vértices de G y A es el conjunto de aristas de G, las cuales están formadas por dos vértices distintos entre sí. Se permite que varias aristas distintas tengan los mismos vértices. Cuando entre dos vértices hay más de una arista, se dice que hay una *arista múltiple*.

Definición 2.3 Un *seudografo* G es un par (V, A), donde V es el conjunto de vértices de G y A es el conjunto de aristas de G, las cuales están formadas por dos vértices (o uno repetido). Cuando una arista sólo tiene un vértice, se la llama *bucle*.

Es más, puede que nos interese conservar el sentido en el que se producían las relaciones (cuando las representábamos necesariamente por flechas). Para esos casos en que los elementos relacionados no juegan el mismo papel, se utilizan los digrafos:

Definición 2.4 Un *grafo dirigido* o *digrafo*, D, es un conjunto $(V(D))$ de elementos que llamaremos vértices y otro conjunto de pares ordenados $(A(D))$ que llamaremos aristas dirigidas.

3 Limitaciones de la modelización.

De lo que se ha expuesto hasta ahora, se deducen varias limitaciones, aunque subsanables, de las representaciones de relaciones binarias mediante grafos. Sin embargo, hay situaciones en las que la solución no parece tan sencilla:

Utilizando la representación que hemos considerado natural, intentemos representar una situación en la que dos empresas (A y B) mantienen sendas relaciones con una tercera empresa (C). En este caso, las relaciones de A con C y de B con C pueden ser de igual naturaleza o de índole muy distinta y el grafo utilizado será el mismo: $G = (A(G), V(G))$, con $V(G) = \{A, B, C\}$ y $A(G) = \{AC, BC\}$.

Pero éste no es el principal problema. Supongamos ahora que las empresas A y B poseen una relación conjunta con C. En este caso, el grafo anterior de aristas $A(G)$ no representa que la relación con C es sólo una y no dos (como antes); el grafo de aristas $\{AB, AC, BC\}$ parece representar que A y B tienen una relación fuera de la conjunta con C y ni siquiera esta última queda bien representada; si se introduce un nuevo vértice (D), el grafo de aristas $\{AD, BD, CD\}$, además de otorgar a las tres empresas el mismo papel en la relación (aunque esto podría arreglarse utilizando digrafos), utiliza un vértice que no representa a una empresa (sino una relación), por lo que no es un vértice con las mismas propiedades de los demás...

Estos problemas, que se acaban de describir, se deben a que en el paso de un diagrama de flujo económico (por ejemplo) a un grafo, se contraen a puntos (vértices) los círculos que representaban a los elementos; así, se identifican los puntos del mismo círculo, aunque varios puntos reflejasen la existencia de varias relaciones diferentes.

Fracasan las posibles soluciones que puedan orientarse hacia la representación de la situación real mediante grafos cuyos vértices sean las relaciones y de forma que exista una arista entre dos de estos vértices cuando comparten al menos uno de los elementos que participan de ella. Aunque esto puede parecer suficiente para resolver nuestras dificultades, surgen otras nuevas de semejante importancia y desaparece (en gran parte) la facilidad con la que se interpretaban las representaciones más intuitivas. Esto no quiere decir que no se pueda modelizar colocando las relaciones como vértices y los elementos como aristas, sino que tampoco se resuelven las dificultades que se han descrito.

La solución que se va a proponer, se basa en la contracción de las aristas de los diagramas y en la sustitución de sus círculos por esferas. Se sigue perdiendo información, pues no se distingue entre la situación que reflejábamos por los grafos de aristas $\{AC, BC\}$ y $\{AB, AC, BC\}$ (cuando ambos representaban una única relación, por lo que el problema no es tal), pero se abren nuevas posibilidades en la representación y se evitan los inconvenientes más importantes (desde el punto de vista económico, al menos) de los ya señalados.

Por contra, se está dando lugar a unos nuevos entes topológicos cuya naturaleza no está suficientemente estudiada, por el momento. Nuestro siguiente objetivo, por eso, será estudiarlos (clasificándolos, incluso) utilizando Topología (en la sección siguiente) y, posteriormente, Teoría de Grafos. Finalmente, se propone el estudio de los resultados topológicos a fin de obtener información adicional de la modelización inicial y justificar su utilización.

4 Clasificación de superficies compactas.

Definición 4.1 Dado un entero positivo, n, una *variedad n-dimensional* (o *n-variedad*) es un espacio de Haussdorf, T_2, tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n-dimensional $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

A las 2-variedades conexas se las suele llamar *superficies.* Esfera, S^2; toro, B_0, y plano proyectivo, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, son superficies. De hecho, a partir de estos tres ejemplos, podemos construir todas las superficies compactas mediante la *suma conexa.* Una descripción de la suma conexa y la demostración de los 4 teoremas que siguen puede encontrarse en el texto de Massey (1972).

Teorema 4.2 (Teorema de clasificación de superficies compactas): *Toda superficie compacta M es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Teorema 4.3 *Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera o a la suma conexa de n toros. Toda superficie compacta no orientable es homeomorfa a la suma conexa de una superficie compacta orientable, bien con un plano proyectivo, o bien con una botella de Klein.*

A continuación, se da una breve referencia sobre la clasificación de las superficies compactas con borde:

Definición 4.4 Una *variedad n-dimensional con borde* es un espacio de Hausdorff (i.e., T_2), tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo al disco abierto U^n o, en su defecto, al espacio $\{(x_1, \ldots, x_n) \in U^n : x_1 \geq 0\}$.

El conjunto de todos los puntos que tienen un entorno abierto homeomorfo a U^n se denomina el *interior* de la variedad[1]; y el conjunto de puntos p que tienen un entorno abierto V tal que existe un homeomorfismo h de V sobre $\{\mathbf{x} \in U^n : x_1 \geq 0\}$ con $h(p) = (0, \ldots, 0)$, se llama el *borde* de la variedad. Así, se tiene:

[1]Evidentemente, se trata de una n-variedad, en el sentido ya explicado.

Teorema 4.5 *Sean M_1 y M_2 superficies compactas con borde. Supongamos que sus bordes tienen el mismo número de componentes conexas. Entonces, M_1 y M_2 son homeomorfas si y sólo si lo son las superficies M_1^* y M_2^* (obtenidas pegando un disco a cada componente del borde).*

Teorema 4.6 *Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes del borde, son ambas orientables o ambas no orientables y tienen la misma característica de Euler*[2].

Nota 4.7 Análogamente, se puede enunciar un teorema de clasificación de superficies compactas con borde.

5 Concepto de seudosuperficie.

No se debe confundir el concepto de seudosuperficie con el de seudovariedad (seudovariedades 0-dimensionales son un único punto, las seudovariedades 1-dimensionales son poligonales de aristas cerradas y sin puntos dobles, las seudovariedades 2-dimensionales son la triangulación de las superficies cerradas, la 2-esfera, el toro, etc.). Se puede encontrar una definición rigurosa de seudovariedad en el manual de Franz (1968).

Tampoco se trata de cuasi-superficies (poliedros de dimensión 2 en que cada punto tiene un entorno de uno de tres tipos característicos: un disco, un libro con 3 hojas o un libro de 3 hojas con una nueva hoja ortogonal a las anteriores).

En cuanto a lo que sí se llama seudosuperficie, normalmente es una superficie salvo por "unos cuantos" puntos (llamados puntos singulares) en los que no existe un entorno homeomorfo a una bola abierta.

[2]La característica de Euler de una superficie triangulable con borde se define exactamente igual que en el caso de una superficie sin borde, verificando, a su vez, la independencia por triangulaciones. Este invariante puede utilizarse para demostrar, por ejemplo, el Teorema 4.2, aunque resultan mucho más atractivas demostraciones como la de Massey (1972).

Conviene aclarar que estos puntos singulares no son los que aparecen habitualmente en Álgebra (puntos en los que se intenta resolver un sistema de ecuaciones a pesar de que no se verifiquen las hipótesis del Teorema de las Funciones Implícitas) ni en Geometría (donde se produce una perturbación de la tangencia que, en superficies, "se ve" en que hay puntos en los que no hay un único plano tangente a la seudosuperficie).

Ejemplos básicos de seudosuperficies son los toros "estrangulados" por n puntos:

Definición 5.1 Si $n \in \mathbb{N}$, B_n es la seudosuperficie obtenida al contraer a puntos n meridianos distintos de un toro. En general, B_n posee n puntos singulares.

Pero es fácil generar otras seudosuperficies identificando puntos de varias superficies o seudosuperficies. Ejemplos de esto son los que resultan de unir dos esferas por tres puntos o tres esferas por dos puntos que pertenecen a todas ellas.

No se encuentran, en la literatura especializada, descripciones de los tipos de seudosuperficies, aunque algunas de ellas se utilicen en resolución de problemas concretos. Con relación a los grafos, éstos se pueden "dibujar" en superficies y seudosuperficies (inmersiones de grafos) y, además, se pueden utilizar propiedades de los grafos y trasladarlas al problema modelizado. Pero ahora no se trata de esto, sino de intentar resolver nuestras dificultades de modelización utilizando las seudosuperficies:

A cada elemento del problema económico le asociaremos una esfera (aunque, posiblemente, fuera más interesante asociar cualquier superficie permitiendo la representación de varios tipos de elementos) y a dos elementos relacionados les asociaremos dos esferas pegadas por un punto. De este modo, una relación que implique a varios elementos no será más que un punto que pertenece a varias esferas.

Las empresas A, B y C de los ejemplos anteriormente expuestos pasan a ser tres esferas unidas por 1, 2 ó 3 puntos singulares, según la situación.

Así, sólo se necesita de seudosuperficies formadas por esferas pegadas entre sí por un número finito de puntos. Pero, ¿cuántas seudosuperficies hay de este tipo? ¿Se pueden caracterizar? ¿Habrá propiedades comunes a las seudosuperficies de esta familia?

6 Clasificación de seudosuperficies compactas.

El problema de la clasificación de seudosuperficies compactas no se ha resuelto nunca, posiblemente debido a la inmensa casuística que puede presentarse. En virtud de lo anteriormente expuesto, conviene obtener, al menos, una caracterización parcial de las seudosuperficies:

Consideremos una seudosuperficie de las obtenidas al modelizar una situación económica; está formada, necesariamente, por esferas pegadas por puntos entre sí. Podemos asociar a esta seudosuperficie un grafo con dos tipos de vértices: unos representarán a las esferas y otros a los puntos singulares. En este grafo, las aristas relacionarán los puntos singulares con las esferas a las que pertenecen. Ninguno de los vértices de un tipo se relaciona con otro del mismo tipo; esto es lo que se suele denominar *grafo bipartito.*

Recíprocamente, y de manera natural, puede enunciarse el siguiente lema:

Lema 6.1 *Existe una correspondencia que a cada grafo bipartito le asocia una seudosuperficie resultado de identificar puntos de esferas.*

Aquí, es pertinente explicar alguna posible interpretación de las seudosuperficies resultantes:

- Si un vértice de los que representan a los puntos singulares tiene valencia 0, no es punto de ninguna esfera, luego es un punto aislado que, probablemente, no tenga utilidad para nuestros propósitos.
- Si un punto singular tiene valencia 1, sólo pertenece a una esfera luego, topológicamente, no es un verdadero punto singular, aunque pueda ser un punto distinguido de la esfera.

- Si un punto singular tiene valencia $n > 1$, pertenece a $n - 1$ esferas, luego, en el problema de partida, hay $n - 1$ elementos que participan de esta relación.
- En cuanto a la valencia de los vértices que representan a los elementos que intervienen en las relaciones, coincide con el número de relaciones diferentes en las que participa dicho elemento.

Como se utilizan los grafos bipartitos para caracterizar las seudosuperficies que representan situaciones modelizadas, la representación del modelo inicial vuelve a ser un grafo, cuyas propiedades (bien estudiadas) pueden resultar de utilidad para resolver los posibles problemas planteados sobre la situación económica inicial (además, a cada situación se le asocia un grapo distinto). Aunque nunca antes se hayan relacionado con las seudosuperficies ni con la Economía, se pueden consultar algunas de estas propiedades en textos generales de Teoría de Grafos, como el de Harary (1969).

7 Algunos problemas abiertos.

Sólo hemos clasificado las seudosuperficies formadas por esferas unidas por una cantidad finita de "puntos singulares". Se obtienen al estrangular una superficie orientable contrayendo los puntos de una curva cerrada y simple. Desde el punto de vista topológico, puede ser muy interesante dar una clasificación exhaustiva de todas las seudosuperficies compactas, para lo que habría que contemplar más posibilidades:

- Se pueden utilizar seudosuperficies no formadas sólo por esferas, sino uniendo por puntos diversas superficies (orientables o no)... Para clasificarlas, podemos ayudarnos, por ejemplo, de las coloraciones de grafos.
- También hay seudosuperficies formadas por superficies compactas con borde (o, incluso, no compactas) con una cantidad finita de puntos singulares.
- Por supuesto, quedan por clasificar las seudosuperficies con una cantidad infinita (numerable o no) de puntos singulares; por ejemplo,

porque unamos dos superficies por infinitos puntos (por una arista o una curva cerrada), o porque utilizamos una curva (o arista) para unir dos (seudo)superficies o una (seudo)superficie con un punto.

- También se pueden combinar las generalizaciones del punto anterior con el hecho de que posean borde.

Pero estos últimos intentos de clasificación exhaustiva de las seudosuperficies, interesantes desde el punto de vista topológico, no parecen tener aplicaciones en Economía; al menos, por ahora... Sin duda, sería más conveniente ocupar esfuerzos en trasladar a esta nueva teoría (la modelización mediante seudosuperficies y éstas vistas como ciertos grafos) los resultados que se utilizan, normalmente, de Teoría de Grafos, Digrafos, Redes Neuronales... La modelización propuesta en este trabajo será tanto más útil cuantas más propiedades de los grafos bipartitos se les puedan asociar a las situaciones económicas modelizadas.

Bibliografía.

Franz, W. (1968): *Topología general y algebraica.* Selecciones científicas. Madrid.

Harary, F. (1969): *Graph Theory.* Addison Wesley Reading Mass.

Kaufmann, A; Gil, J. (1995): *Grafos neuronales para la Economía y la Gestión de empresas.* Ed. Pirámide. Madrid.

Massey, W. S. (1972): *Introducción a la Topología algebraica.* Ed. Reverté. Barcelona.

Morillas, A. (1983): *La Teoría de Grafos en el Análisis Input-Output.* Univ. de Málaga.

Patterson, E.M. (1961): *Topología.* University Mathematical Texts. Ed. Dossat.S.A. Madrid.