

# Inmersiones condicionadas de grafos en superficies y pseudosuperficies.

Luis BOZA PRIETO y Eugenio M. FEDRIANI MARTEL

---

L.B.: Departamento de Matemática Aplicada I. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Univ. Sevilla. Avda Reina Mercedes 1, 41012-SEVILLA

E-mail: boza@cica.es

E.M.F: Departamento de Economía y Empresa. Área de Métodos Cuantitativos. Univ. Pablo de Olavide. Ctra. de Utrera, Km.1. 41013-SEVILLA

E-mail: efedmar@dee.upo.es

---

## Resumen:

En este trabajo se procede a recapitular resultados conocidos sobre el problema de caracterizar los grafos que admiten inmersiones en superficies y en pseudosuperficies con todos los vértices en la misma cara y se da una caracterización original de los grafos con dicha propiedad en pseudosuperficies que surgen de manera natural y que han sido tratadas en la literatura especializada.

Se comienza desarrollando algunos conceptos necesarios para la exposición de los problemas que se tratan, pero se suponen conocidos otros básicos de la Teoría de Grafos.

Los resultados relacionados llevan de forma consecuente al planteamiento de otros problemas cuyas resoluciones originales también se incluyen.

En cuanto a los objetivos finales que se pretenden lograr con esta comunicación, se basan, sobre todo, en aprovechar los resultados obtenidos por la Teoría de Grafos para resolver otros problemas pertenecientes a otras áreas, como la Economía.

Se termina exponiendo un motivo topológico por el que estos estudios sobre las inmersiones y las inmersiones  $peri-S$  se hallan próximas a la Economía.

**Palabras clave:** Grafo, Inmersión, Pseudosuperficie, Periplanaridad.

**Keywords:** Graph, Embedding, Pseudosurface, Outerplanar.

# Inmersiones condicionadas de grafos en superficies y pseudosuperficies.

## 1 Introducción y preliminares.

Desde la primera mitad del siglo XVIII, los grafos han sido utilizados para modelizar casi cualquier tipo de problemas; en particular, son especialmente destacables en la actualidad las aplicaciones de la Teoría de Grafos en campos como el diseño de circuitos impresos, Arquitectura y Economía.

Una forma (topológica) de definir un grafo es utilizar puntos (que llamaremos *vértices* o *nodos*) y líneas que unen esos puntos (a las que se conoce por *aristas*). Aunque esto no sea una definición formal para los grafos, aporta un modo de representarlos. No obstante, suelen hacerse necesarias otro tipo de definiciones (combinatorias) que pueden ser consultadas en textos relativos a la Teoría de Grafos: Harary (1969).

Se supondrá en adelante que el conjunto de vértices es finito y que una arista viene biunívocamente definida por dos vértices. Hay otras definiciones de grafo que se utilizan asiduamente y de las que se comentará algo más adelante.

Entroncadas con la necesidad de simplificar los problemas, surgen las siguientes:

**Definición 1.1.**  $G = (V, A)$  es subgrafo de  $G' = (V', A')$  si  $V \subseteq V'$  y  $A \subseteq A'$ .

**Definición 1.2.** Una subdivisión de un grafo  $G$  es un grafo que se obtiene de  $G$  por una sucesión finita de sustituciones de aristas por arcos.

**Definición 1.3.** Un grafo  $G_1$  es un menor de otro  $G_2$ , si se puede llegar desde  $G_1$  hasta  $G_2$  mediante borrado de vértices o aristas o contracciones de aristas.

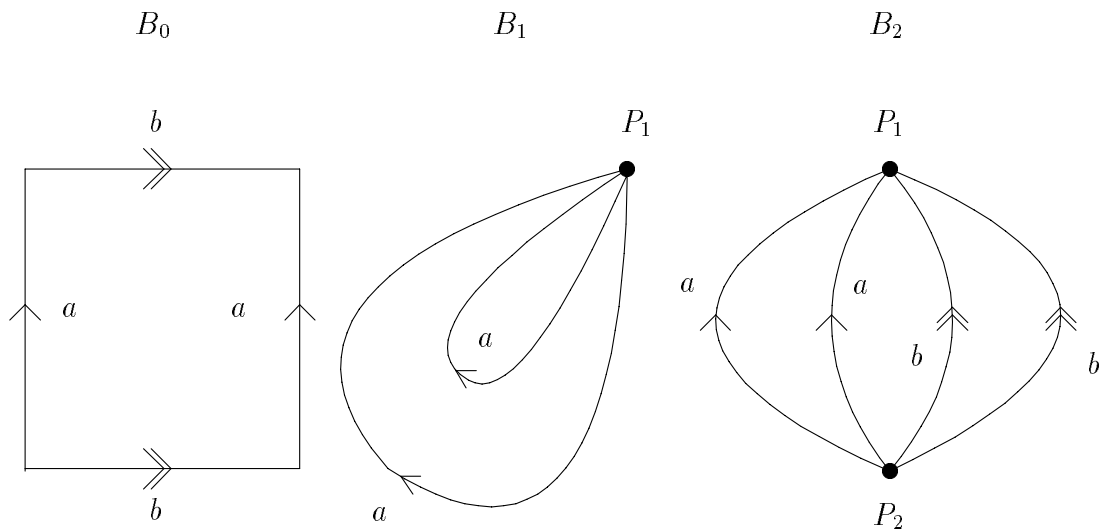
Representar gráficamente cada vértice por un punto y cada arista por una línea con extremos en dichos puntos permitirá decir que un punto pertenece a un grafo cuando es un vértice o pertenece a una arista. Esto facilita hablar de grafos homeomorfos entre sí y definir una *cara* como cada una de las componentes conexas del complementario del grafo, supuesto éste inmerso en una superficie o en una pseudosuperficie.

A las 2-variedades conexas se las suele llamar *superficies*. Esfera ( $S^2$ ), toro ( $B_0$ ) y plano proyectivo ( $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ) son superficies. De hecho, a partir de estos tres ejemplos, podemos construir todas las superficies compactas mediante la *suma conexas* descrita por Massey (1972).

En cuanto a las pseudosuperficies, normalmente son superficies salvo por *unos cuantos* puntos (llamados puntos singulares) en los que no existe un entorno homeomorfo a una bola abierta. Como ejemplos, tenemos los siguientes:

**Definición 1.4.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  es la pseudosuperficie obtenida al contraer a puntos  $n$  meridianos distintos de un toro. En general,  $B_n$  posee  $n$  puntos singulares a los que se denotará en lo sucesivo por  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

**Ejemplo 1.5.**  $B_0$  es el toro,  $B_1$  es el toro estrangulado y  $B_2$  es la ‘bananas surface’ (que se puede obtener al unir dos esferas por dos puntos distintos).

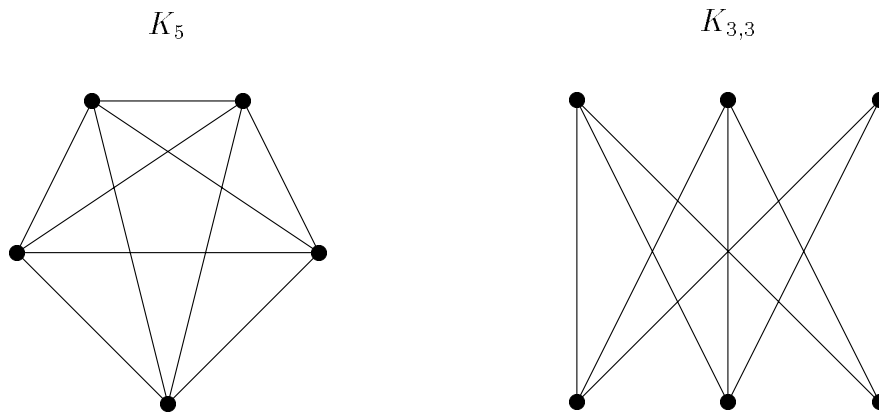


Los lados que se identifican están indicados con la misma letra del alfabeto y con el mismo tipo de flecha; la identificación ha de hacerse de modo que coincidan los sentidos de las flechas. Nótese, además, que varios puntos podrían, en este tipo de representaciones de una pseudosuperficie, ir al mismo punto tras hacer la identificación.

## 2 Inmersiones de grafos.

La parte más importante de la Teoría de Grafos es la que se conoce como Teoría de Grafos Topológicos, que trata de inmersiones de grafos en superficies y pseudosuperficies (evitando que se corten las aristas). Precisamente, el resultado matemático más citado de este siglo (por encima del Teorema de Gödel) es el Teorema de Kuratowski, que caracteriza los grafos planos:

**Teorema 2.1.** [Kuratowski, 1930] *Un grafo finito es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ó  $K_{3,3}$ .*

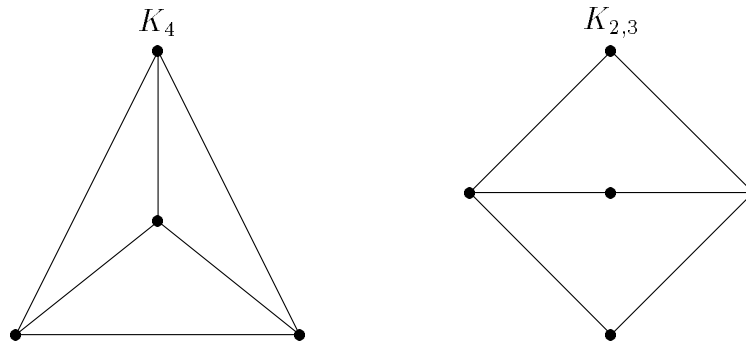


Únicamente se conocen teoremas de este tipo, es decir, que caracterizan grafos con inmersiones en superficies, en el caso del plano proyectivo, dado por Archdeacon y Kuratowski (1981) con una lista de 35 menores prohibidos y otra lista de 103 subgrafos prohibidos.

Aunque no se han dado explícitamente otras listas de subgrafos o de menores prohibidos, Robertson y Seymour (1990) demuestran que éstas son finitas para cualquier superficie. Sin embargo, Širáň y Gvozdjak (1992) prueban que es infinita para la pseudosuperficie  $B_2$ .

A continuación, se trata un caso especial de inmersión, la *inmersión peri*; es aquella en que todos los vértices están en la misma cara. Surgen, así, los grafos periplanos, que son los que admiten una inmersión peri en el plano y que están caracterizados:

**Teorema 2.2.** [Chartrand y Harary, 1967] *Un grafo finito es periplano si y sólo si no tiene un subgrafo que sea una subdivisión de  $K_4$  ó  $K_{2,3}$ .*



El concepto de grafo periplano se puede extender a otras superficies, con lo que un grafo es *peri- $S$ -representable* (o *peri- $S$* ) si admite una inmersión en  $S$  con todos sus vértices en una misma cara. Esta definición es válida también si  $S$  es una pseudosuperficie.

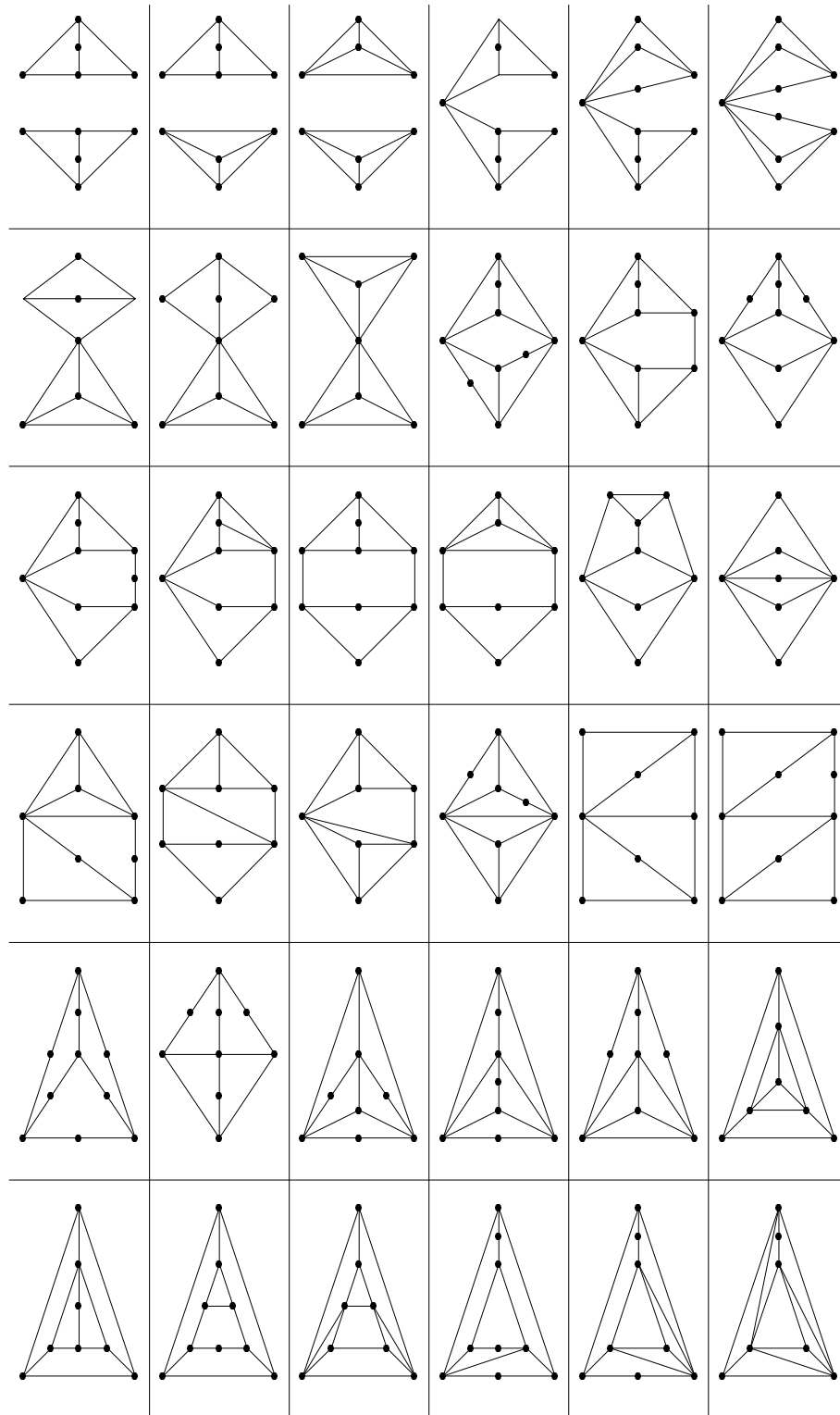
Una vez conocida la caracterización mediante subgrafos prohibidos para los grafos con inmersión en  $S$ , se puede obtener la caracterización para los grafos con inmersión peri en  $S$  como hace Cáceres (1996).

Así se obtiene la clasificación de los grafos periprojectivos (peri- $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ ) Cáceres (1996), Archdeacon y otros (1998) y Revuelta (1999) en términos de 32 menores prohibidos y 45 subgrafos prohibidos.

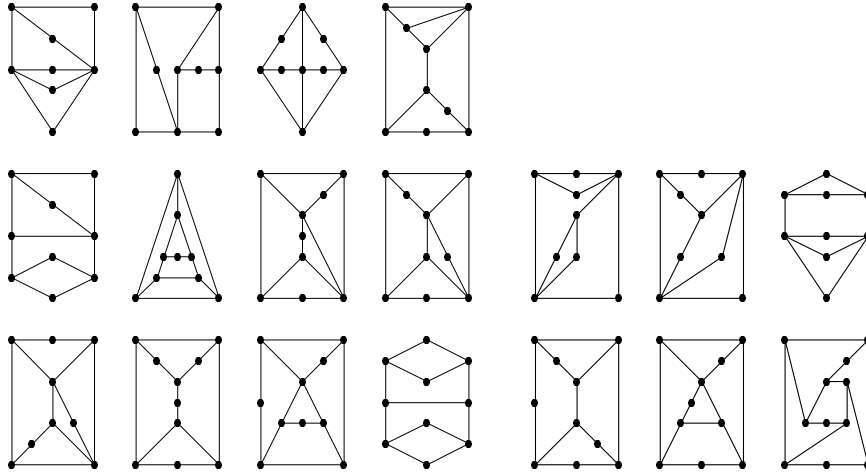
**Definición 2.3.** *Si  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , se conoce como grafo  $k$ -periplano a cualquier grafo que admita una inmersión plana con todos sus vértices en, a lo sumo,  $k$  caras.*

Los grafos 2-periplanos también fueron caracterizados por Cáceres (1996), Mohar (Archdeacon y otros (1998)) y Revuelta (1999) mediante 38 menores y mediante 56 subgrafos prohibidos.

Los 38 menores son  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  y los de la siguiente figura:



Los 56 subgrafos prohibidos son los 38 menores anteriores más los 18 siguientes:



En la siguiente sección se relacionan los grafos 2-periplanos con los grafos peri en ciertas pseudosuperficies, caracterizándose los grafos peri en algunas pseudosuperficies.

### 3 Grafos peri- $B_n$ y generalizaciones de éstos.

Se prepara ahora el resultado principal de este trabajo, que caracteriza los grafos peri- $B_2$ :

**Proposición 3.1.** *Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces,  $G$  es peri- $B_2$  si y sólo si  $G$  es 2-periplano.*

*Demostración:*

Comenzando con la condición suficiente para ser peri- $B_2$ , sea  $G$  un grafo 2-periplano. Entonces existe una representación de  $G$  en la esfera con todos los vértices situados en una o dos caras (distinguidas).

Para que la representación sea una inmersión en  $B_2$  sólo hay que “pegarle” por dos puntos distintos una esfera a la que ya teníamos. Basta elegir dichos puntos en el interior topológico de cada una de las caras distinguidas para que  $G$  esté inmerso en  $B_2$  con todos sus vértices en la misma cara.

En cuanto a la condición suficiente, sea  $G$  un grafo peri- $B_2$ . Si  $P_1$  y  $P_2$  son los puntos singulares de  $B_2$  y se llama  $C$  a la cara en la que están todos los vértices de  $G$ , se pueden distinguir los siguientes casos exhaustivos y mutuamente excluyentes:

1) Ni  $P_1$  ni  $P_2$  son de  $G$ . En este caso,  $G$  está representado en una esfera con todos los vértices en una o en dos caras (dependiendo de si ni  $P_1$  ni  $P_2$  son de  $C$  o si ambos son de  $C$ ).

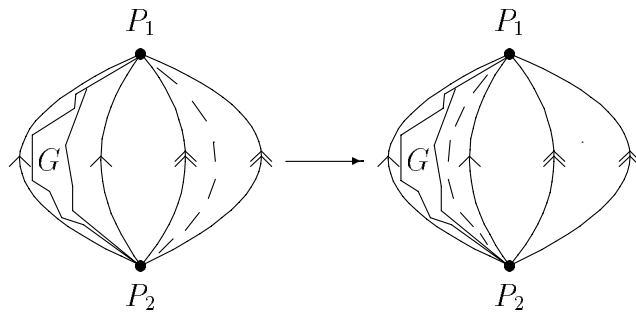
2)  $P_1$  es de  $G$  y  $P_2$  no (o recíprocamente). Así, en cada una de las dos esferas se tiene representado un grafo peri-esférico y, por tanto, periplano. Si se unen ambos grafos identificando el  $P_1$  de cada uno de ellos (que se puede suponer en la cara exterior de ambos) se obtiene un grafo periplano, por lo que también es 2-periplano.

3)  $P_1$  y  $P_2$  son de  $G$ ; sin pérdida de generalidad se pueden suponer vértices. Como ahora  $C$  está totalmente contenida en una de las dos esferas, en la otra no puede haber otros vértices que  $P_1$  y  $P_2$ .

Considérense aquí dos subcasos:

a) Si  $P_1$  y  $P_2$  no son adyacentes, se tiene representado  $G$  en una esfera con todos los vértices en una sola cara.

b) Si  $P_1P_2$  son adyacentes, esta arista es lo único que puede estar fuera de la esfera del resto de los vértices de  $G$ . Salvo el caso trivial en que  $G$  está en una sola esfera,  $C$  estaría en la esfera en la que no esté  $P_1P_2$ .



Pero, como tanto  $P_1$  como  $P_2$  están en  $C$ , existen arcos de curva en el interior topológico de  $C$  que van de  $P_1$  a  $P_2$  y cualquiera de ellos se puede utilizar para afirmar que  $G$  es representable en una esfera con todos los vértices en dos caras (las que surgen de  $C$  al añadir ese arco como  $P_1P_2$ ).

□

Sigue el caso general:

**Teorema 3.2.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces,  $G$  es peri- $B_2$  si y sólo si  $G$  es 2-periplano.*



*Demostración:* Se pueden eliminar las componentes conexas periplanas de  $G$  sin que eso altere el carácter de 2-periplano ni el de  $\text{peri-}B_2$ .

De este modo, sólo resta notar que un grafo no puede ser 2-periplano si posee más de una componente no periplana, con lo que la demostración de este teorema se reduce a la del caso en que sólo existe una componente conexas. □

**Corolario 3.3.** *Sea  $G$  un grafo. Son equivalentes:*

1.  $G$  es  $\text{peri-}B_2$ ;
2.  $G$  no tiene como menor a  $K_5$ , a  $K_{3,3}$ , ni a uno de los 36 menores anteriormente relacionados;
3.  $G$  no tiene ningún subgrafo que sea una subdivisión de de uno de los 38 menores anteriores, ni de uno de los 18 subgrafos anteriormente relacionados.

Conviene hacer notar aquí que, aunque la lista de subgrafos prohibidos para la planaridad en  $B_2$  es infinita, es finita para la  $\text{peri-}B_2$ -representabilidad.

A partir de los resultados anteriores es fácil caracterizar los grafos  $\text{peri-}B_n$ :

**Teorema 3.4.** *Sea  $G$  un grafo plano.  $G$  es  $\text{peri-}B_n$  con  $n \geq 2$  si y sólo si  $G$  es 2-periplano.*

*Demostración:*

La primera implicación resulta idéntica a la demostración anterior salvo porque en lugar de “pegar una esfera por dos puntos distintos” hay que “pegar una sucesión finita de esferas que están unidas cada una con la anterior por un punto y con la posterior por otro distinto”.

En cuanto al recíproco, ahora hay que distinguir si ninguno de los puntos singulares es de  $G$ , si sólo lo es uno o si dos o más lo son. En cualquier caso, el proceso es el mismo de antes. □

Tampoco resulta difícil generalizar el Teorema 3.2 considerando los grafos  $\text{peri-}L_{n,2}$ , siendo  $L_{n,2}$  la seudosuperficie unión de  $n$  esferas por dos únicos puntos singulares ( $P_1$  y  $P_2$ ) que pertenezcan a todas ellas.

**Teorema 3.5.** (*Caracterización de los grafos peri- $L_{n,2}$* ). Sea  $G$  un grafo plano.  $G$  es peri- $L_{n,2}$ , con  $n \geq 2$  si y sólo si  $G$  es 2-periplano.

*Demostración:* Siguiendo los pasos de las demostraciones anteriores, no se presenta ninguna dificultad más que el que  $G$  se pueda obtener como la unión por un punto de no más de  $n$  grafos periplanos en el paso **2**). □

Utilizando el mismo procedimiento que ofrecen las demostraciones anteriores, se pueden obtener teoremas similares a éstos para otras pseudosuperficies más complicadas que se obtengan como unión finita de esferas *encadenadas* (como en  $B_n$ ) con otras del tipo de las  $L_{n,2}$ .

## 4 Generalizaciones a otros tipos de grafos. Grafos en Economía.

Al modelizar problemas en Economía (y en otras áreas) pueden aparecer objetos como los multigrafos, pseudografos y digrafos íntimamente relacionados con los grafos.

**Definición 4.1.** Un multigrafo  $G$  es un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices de  $G$  y  $A$  es el conjunto de aristas de  $G$ , las cuales están formadas por dos vértices distintos entre sí. Se permite que varias aristas distintas tengan los mismos vértices. Cuando entre dos vértices hay más de una arista, se dice que hay una arista múltiple.

**Definición 4.2.** Un pseudografo  $G$  es un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices de  $G$  y  $A$  es el conjunto de aristas de  $G$ , las cuales están formadas por dos vértices (o uno repetido). Cuando una arista sólo tiene un vértice, se la llama bucle o lazo.

**Definición 4.3.** Un grafo dirigido  $D$  o digrafo es un conjunto  $(V(D))$  de elementos que llamaremos vértices y un conjunto de pares ordenados  $(A(D))$  que llamaremos aristas dirigidas.

Estas aristas dirigidas se suelen representar gráficamente por una flecha que va de un vértice (llamado *cabeza* de la arista) al otro (llamado *cola* de la arista).

En Economía se está haciendo bastante habitual asumir que la representación de un modelo resulta más conveniente utilizando lo que se llaman *redes neuronales*.

Tradicionalmente, las redes neuronales utilizadas en Economía eran grafos no orientados pero en las que cada vértice se solían considerar umbrales “de entrada” y “de salida” (posiblemente difusos o no Booleanos). Últimamente, se están desarrollando trabajos en los que se reúnen las características de las redes neuronales con las de los digrafos, como en Kaufmann (1995). Por esto, resulta de interés conocer si los resultados anteriores son generalizables a digrafos.

La definición de grafo  $k$ -periplano puede extenderse sin modificación alguna a los grafos en los que se permiten aristas múltiples (multigrafos) y aristas con un sólo vértice (seudografos). De hecho, un grafo  $k$ -periplano admite que se le añada cualquier número finito de aristas múltiples a una ya existente o de lazos sin variar su carácter de  $k$ -periplano.

Ese es el motivo de que los resultados obtenidos en las secciones precedentes sean ciertos para seudografos y, por tanto, para multigrafos y digrafos, los cuales pueden considerarse un caso particular de los primeros. Por ejemplo, estudiar los digrafos incluye asumir que los grafos pueden tener aristas dobles e, incluso, aristas con un sólo extremo.

Para fundamentar estas relaciones entre objetos que parecen poco comunes, se define el *grafo subyacente* de un grafo dirigido al grafo que se obtiene de eliminar las flechas de las aristas.

De este modo, el grafo subyacente a un grafo dirigido no tiene que ser un grafo en el sentido de las secciones anteriores; puede que sea un multigrafo o un seudografo. De ahí el interés de generalizar las inmersiones peri a multigrafos o seudografos.

Finalmente, es conveniente tener en cuenta que, en ocasiones, trabajar con multigrafos o con seudografos no siempre permite utilizar resultados que podrían ser de utilidad, pero esto no debe ocurrir con las inmersiones ni con las inmersiones peri- $S$ .

## Bibliografía.

Archdeacon, D; Bonnington, C. P; Dean, N; Hartsfield, N; Scott, K. (1997): "Obstruction Sets for Outer-Cylindrical Graphs". Pendiente de publicación.

Archdeacon, D; Hartsfield, N; Little, C. H. C; Mohar, B. (1998): "Obstruction Sets for Outer-Projective-Planar Graphs". *Ars Combinatoria*. 49, pp. 113-127.

Archdeacon, D; Kuratowski, A. (1981): "Theorem for the Projective Plane". *Journal of Graph Theory* 5, pp. 243-246.

Cáceres, J. (1996): "Diversos tipos de planaridad en grafos". *Tesis Doctoral*. Dpto. de Geometría, Topología y Q. O. Universidad de Almería. Almería.

Chartrand, G; Harary, F. (1967): "Planar Permutation Graphs". *Ann. Inst. H. Poincaré*. Sect. B. 3, pp. 433-438.

Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Addison Wesley Reading Mass.

Kaufmann, A; Gil, J. (1995): *Grafos neuronales para la Economía y la Gestión de empresas*. Ed. Pirámide. Madrid.

Kuratowski, K. (1930): "Sur le problème des courbes gauches en topologie". *Fund. Math.* 15. pp. 271-283.

Massey, W. S. (1972): *Introducción a la Topología algebraica*. Ed. Reverté. Barcelona.

Revuelta, M. P. (1999): "Inmersiones de grafos en superficies tubulares de género finito". *Tesis Doctoral*. Dpto. de Matemática Aplicada I. Univ. de Sevilla. Sevilla.

Robertson, N; Seymour, P. D. (1990): "Graph Minors VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces". *J. Combinatorial Theory*. Serie B, 48. pp. 255-288.

Širáň, J; Gvozdjak, P. (1992): "Kuratowski-Type Theorems Do Not Extend to Pseudosurfaces". *Journal of Combinatorial Theory*. Serie B 54, pp. 209-212.