Estudios de Economía Aplicada
Nº 6, 1996. Págs. 5 - 24.

La programación fraccionada múltiple: tratamiento del problema de la producción

AREVALO QUIJADA, Mª TERESA
ZAPATA REINA, ASUNCION
Universidad de Sevilla

Esta nueva versión incluye todas las correcciones sugeridas por el censor, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidas.

RESUMEN

En el ámbito de la economía de la empresa, la política de gestión se puede abordar desde diversos puntos de vista, entre los que se encuentra la programación matemática. Esta política de gestión empresarial pretende alcanzar múltiples objetivos, por lo que un método apropiado para estudiar este problema es la programación multiobjetivo. Este trabajo describe un método para determinar soluciones eficientes de un problema de programación fraccionada multiobjetivo con idénticos denominadores, lo que permite al empresario adoptar decisiones bajo fundamentos científicos. Presentamos un algoritmo interactivo basado en la programación fraccionada lineal y los juegos bipersonales de suma cero. Una vez encontradas las soluciones eficientes haciendo uso del método de las ponderaciones, hacemos un análisis de sensibilidad de los pesos. Finalmente, consideramos un problema de producción particular y obtenemos soluciones usando este algoritmo.

Palabras clave: Soluciones eficientes, programación multiobjetivo ponderada, programación fraccionada, teoría de juegos.

Clasificación AMS: 90C29, 90C32.

Artículo recibido en febrero de 1996. Revisado en abril de 1996.

ABSTRACT

In the area of the economy, the management policy can be considered from different viewpoints. One of them is mathematical programming. This management policy try to reach multiple objectives. A suitable method to study this problem is multiobjective programming. This paper describes an approach for determining efficient solutions to a multiobjective fractional programming problem with identic denominators. This determination permits the manager to adopt the decisions on scientific basis. We present an interactive algorithm based on fractional linear programming and bipersonal games of zero sum. Then, we study sensitivity analysis of the weights for the efficient solutions found using the weighted-sum approach. Further, we consider a particular production problem and we determine its solutions using this algorithm.

Keywords: Efficient solutions, weighting multiobjective programming, fractional programming, game theory.

1.- Introducción

Una empresa debe seguir unas normas de conducta para definir su política de gestión. Además, para que esta política de gestión empresarial sea la adecuada debe tener como finalidad alcanzar el comportamiento más cercano al óptimo posible, o, en el caso más favorable, el comportamiento óptimo. En este estudio deben cumplirse ciertas condiciones: considerar simultáneamente las distintas alternativas posibles, tener en cuenta todas las circunstancias externas y optimizar la función de utilidad de la empresa sujeta a un conjunto de restricciones.

Sin embargo, en el contexto empresarial es difícil construir una función de utilidad que refleje la realidad debido a los distintos objetivos que se pretenden alcanzar. En general, cualquier tipo de empresa lucrativa se plantea dos objetivos fundamentales y prioritarios. Estos son la obtención de un máximo beneficio basándose en los principios de economicidad, rentabilidad y productividad y el desarrollo económico de la empresa bajo las condiciones de solvencia y estabilidad, y el equilibrio socio-económico entre las fuerzas productivas.

Los modelos de programación matemática permiten representar la estructura de la empresa, estableciendo de forma analítica las relaciones existentes entre las diversas variables que influyen en dicha empresa. De este modo, el empresario se convierte en el decisor, persona o entidad que ha de tomar una decisión, con una base científica en este caso, dado que se apoya en los resultados que proporciona la programación matemática. Las dificultades que se presentan al llevar a cabo esta modelización estriban en:

- la definición matemática de las variables que intervienen en el modelo, que se clasifican en dos tipos, exógenas o independientes, y endógenas o dependientes, que vienen determinadas por las relaciones que aparecen en el modelo.

- la estimación de los parámetros del problema, esto es, cualquiera de los coeficientes que aparecen en el problema, cuya determinación no es trivial. De ahí la trascendencia del análisis de sensibilidad o estudio del problema cuando alguno de los parámetros se modifica.

- la construcción de una función de utilidad que se adecue a la situación real de la empresa. En un principio podría pensarse en una función de utilidad lineal que represente los beneficios. En tal caso se considera la programación lineal para la que existen algoritmos de resolución muy eficaces como el algoritmo del simplex, que proporciona una o varias soluciones óptimas, es decir, con estas alternativas se obtiene el máximo beneficio. Tras este primer paso se podría afinar más quizás con alguna función de utilidad no lineal. Puede ocurrir y, de hecho, es lo que ocurre en las situaciones de la vida real, que la función a optimizar no sea una sino varias. En este caso se plantea un problema de programación múltiple, o sea, con varias funciones objetivos. Estas funciones pueden ser lineales, cuadráticas, fraccionadas o de otro tipo, lo que conlleva una mayor dificultad.

Muchos indicadores importantes para la evaluación de actividades económicas vienen medidos a través de un cociente, como por ejemplo, output por empleado, inventario por ventas, beneficios por costes, liquidez, productividad, etc. En muchas aplicaciones de problemas de programación no lineales la función que se optimiza viene caracterizada por uno o varios cocientes de funciones dadas[1]. Estos problemas de optimización reciben el nombre de problemas de programación fraccionada, la cual ha sido reconocida como un caso particular con entidad propia dentro de la programación por International Abstracts in Operations Research and Mathematical Reviews ya que presenta métodos específicos de resolución.

Nos centraremos en la programación múltiple ya que refleja más fielmente la realidad empresarial. Y nos ceñiremos al caso de la programación fraccionada multiobjetivo, puesto que permite evaluar de forma más correcta las actividades económicas.

1. Para ver ejemplos, consultar Ashton y Atkins (1979 pp. 259-270), Mjelde (1978 pp. 116-124) y Ziemba, Parkan y Brooks-Hill (1974 pp. 209-222).

ÍNDICE

En el apartado dos vemos qué tipo de problema vamos a intentar resolver mediante un algoritmo que exponemos más adelante, y qué tipo de solución obtendremos. En el apartado tres desarrollamos el algoritmo que conjuga la programación multiobjetivo y los juegos bipersonales de suma cero, en el que se considera una suma ponderada de los objetivos, para obtener soluciones eficientes de un problema de programación fraccionada lineal con idénticos denominadores. En la ponderación de objetivos, no se exige al decisor información de los pesos a priori, dada la dificultad que ello representa. Para encontrar dichos pesos usaremos los juegos bipersonales de suma nula. Con esto se soslaya uno de los mayores inconvenientes de la programación ponderada. Tras esto, en el siguiente apartado se hace un análisis de la sensibilidad de los pesos considerados en el algoritmo ponderado. Y, finalmente, aplicamos todos estos resultados teóricos en un problema de producción de una empresa.

2.- Formulación del modelo

Un problema de programación fraccionada multiobjetivo (MOFP) se define como sigue:

$$(1) \qquad \max \left[q_1(x) = \frac{l_1(x)}{m_1(x)},\ q_2(x) = \frac{l_2(x)}{m_2(x)},\ \ldots,\ q_p(x) = \frac{l_p(x)}{m_p(x)} \right] \quad s.a.\ x \in X$$

donde $p \geq 2$, l_k y m_k son funciones reales y continuas, $m_k(x)$ es no nula en todos los puntos de X para todo $k=1,\ldots,p$ y

$$X = \left\{ x \in R^n /\ h_i(x) \leq b_i,\ \ i=1,\ldots,n \right\}$$

con h_i, $i=1,\ldots,m$, funciones reales y continuas. Se puede distinguir entre diferentes tipos de problemas de (MOFP): lineal, cuadrático, cóncavo-convexo, etc.

Al igual que en la programación lineal multiobjetivo, la "solución" al problema anterior es el conjunto de todas las soluciones eficientes, ya que generalmente no existe un punto en el que dicha función vectorial q(x) sea superior a todos los demás.

Definición.- Se definen como soluciones eficientes o no dominadas los puntos

$$x^* \in X \text{ tales que } \nexists\ x \in X /\ q_j(x) \geq q_j(x^*),\ j=1,\ldots,p$$
$$\exists\ i \in \{1,\ldots,p\} /\ q_i(x) > q_i(x^*)$$

El conjunto de las soluciones eficientes lo notamos E(X).

Si en un problema multiobjetivo, se asocia un peso no negativo a cada objetivo y se agregan todos los objetivos, la optimización de dicha función agregada y ponderada genera una solución eficiente para cada conjunto de pesos. De este modo, sea un conjunto de pesos no negativos

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^{p} / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ j=1,\ldots,p \right\}$$

y sea el problema: (P(λ)) $\quad \max\ \lambda_1 q_1(x) + \ldots + \lambda_p q_p(x)$

$\quad$ s.a. $h_i(x) \leq b_i$, $i=1,\ldots,m$, $\lambda>0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1$

Teorema.- Si x^* es solución óptima de (P(λ)), entonces

a) si $\lambda_k>0$ para todo k, x^* es solución eficiente del problema multiobjetivo.

b) si x^* es la única solución de P(λ), x^* es solución eficiente del problema multiobjetivo.

Demostración.-

a) Sea x^* solución de P(λ) para algún $\lambda \in \Lambda$, $\lambda>0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(q_j(x) - q_j(x^*) \right) \leq 0, \quad \forall x \in X$$

Por reducción al absurdo, supongamos que x^* no es solución eficiente del problema multiobjetivo, entonces $\exists x^0 \in X$ (región factible) tal que $q_k(x^0) > q_k(x^*)$, $q_j(x^0) \geq q_j(x^*)$ para $j \neq k$.

Como por hipótesis $\lambda_k>0$ y $\lambda_j>0$ $\forall j \neq k$, entonces

$$\lambda_k \left(q_k(x^0) - q_k(x^*) \right) + \sum_{j \neq k} \lambda_j \left(q_j(x^0) - q_j(x^*) \right) > 0$$

lo cual está en contradicción con la primera desigualdad de esta demostración. Luego x^* es solución eficiente del problema multiobjetivo.

b) Si x^* es la única solución de P(λ) para algún $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(q_j(x) - q_j(x^*) \right) < 0, \quad \forall x \in X$$

Por reducción al absurdo, supongamos que x^* no es solución eficiente del problema multiobjetivo, entonces $\exists x^0 \in X$ tal que $q_k(x^0) > q_k(x^*)$, $q_j(x^0) \geq q_j(x^*)$ para $j \neq k$.

Como $\lambda \geq 0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(q_j(x^0) - q_j(x^*) \right) \geq 0$$

lo cual está en contradicción con la desigualdad anterior. Luego x^* es solución eficiente del problema multiobjetivo.

En este trabajo sólo trataremos problemas cuya forma general es:

$$(2) \quad \max \left[q_1(x) = \frac{c_1^t x + \alpha_1}{d^t x + \beta}, \; \ldots, \; q_p(x) = \frac{c_p^t x + \alpha_p}{d^t x + \beta} \right]$$

$$s.a. \; x \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \; Ax \leq b, \; x \geq 0, \; A \in M_{m \cdot n}, \; b \in \mathbb{R}^m \right\}$$

donde X es no vacío, acotado y tal que no hay en él ningún punto que anule los denominadores, y c_j, $d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_j, \beta \in \mathbb{R}$, $j=1,\ldots,p$..

Utilizando los métodos ponderados para la programación multiobjetivo, podemos hacer uso de un problema escalar para obtener una solución del problema fraccionado múltiple. Para cada $\lambda \in \Lambda$, se puede plantear el siguiente problema:

$$(3) \quad \max \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{c_j^t x + \alpha_j}{d^t x + \beta} \quad s.a. \; x \in X$$

el cual es un problema fraccionado uniobjetivo que se puede resolver utilizando métodos de programación fraccionada. De esta forma, podemos generar un subconjunto del conjunto de soluciones eficientes del problema múltiple. Por ello, este tipo de planteamiento suele utilizarse para generar una solución eficiente inicial con el fin de aplicar otro método.

Para resolver el problema (2) mediante el método de las ponderaciones tenemos que elegir un vector de pesos, i.e., ponderar cada objetivo con un peso asociado, el cual vendrá dado de acuerdo con su importancia para el decisor (ya sea una persona, una empresa o un estado). En principio, esta elección de pesos no es nada trivial. Para ello, el decisor debe basarse en una información a priori y dará a cada objetivo un peso en relación con su importancia. Estos métodos presentan el inconveniente de que el sujeto decisor no siempre dispone de la información requerida hasta que no tenga una idea acerca del proceso de resolución del problema. Por este motivo, proponemos el método de programación interactiva fraccionada en el que el decisor sólo elige en cada iteración la solución más preferida, o descarta una de las soluciones obtenidas.

3.- Método de programación interactiva fraccionada

Evren (1987 pp. 163-172) introdujo en su artículo titulado Programación compromiso interactiva un método de resolución para los problemas de programación lineal multiobjetivo. Nosotros lo generalizamos al caso de la programación fraccionada lineal multiobjetivo con idénticos denominadores. Este método pretende reducir la complejidad de información requerida del decisor, lo cual representa una de las mayores dificultades de los métodos interactivos. Para ello se combinan las ideas básicas de los métodos de programación y los juegos bipersonales de suma cero.

En el caso lineal, pueden existir muchas soluciones del problema (3) debido a que puede haber muchos conjuntos eficientes de pesos que satisfacen esas condiciones. Este algoritmo reduce el número de soluciones eficientes presentadas introduciendo una medida de distancia

$$(4) \qquad d_i(x) = \frac{q_i(x) - q_i^L}{q_i^u - q_i^L}$$

siendo q_i^u y q_i^L los valores máximo y mínimo respectivamente de q en X. Introduciendo esta medida de distancia, se determinan los valores:

$$d_{ij} = d_i(x^j) = \frac{q_i(x^j) - q_i^L}{q_i^u - q_i^L}$$

luego el problema (3) es equivalente a

$$\max \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_i(x) \quad s.a. \ x \in X$$

Los pesos "óptimos" en el sentido minimax de las funciones objetivo se generan automáticamente usando los juegos bipersonales de suma cero. Si llamamos λ_i a la probabilidad de que el jugador I use la estrategia i,i=1,...,m y μ_j a la probabilidad de que el jugador II use la estrategia j,j=1,...,n, estos valores deben ser no negativos y sumar 1 pues son probabilidades. Se desarrolla la tabla de pagos, donde cada elemento d_{ij} representa el pago para el jugador I si selecciona la estrategia i y el jugador II la j. De acuerdo con el teorema minimax, el jugador I elige cada λ_i para maximizar el pago mínimo esperado, y el jugador II elige cada μ_j minimizando la máxima pérdida esperada. Los jugadores se plantean estos dos problemas:

$$\text{I:}\max d_{m+1} \qquad\qquad \text{II:}\min d_{n+1}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_{ij} \geq d_{m+1},\ j=1,\dots,n \qquad\qquad \text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} \mu_j d_{ij} \leq d_{n+1},\ i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1,\ \mu_j \geq 0$$

cuyos valores óptimos coinciden, puesto que son un par de problemas primal-dual.

Los pasos algorítmicos del procedimiento se pueden resumir como sigue:

1.-Determinar x^{iu}, q_i^u, x^{iL} y q_i^L como soluciones respectivas de los problemas:

$$\max q_i(x) \ \text{s.a.}\ x \in X \quad \text{y} \quad \min q_i(x) \ \text{s.a.}\ x \in X.$$

Hay que resolver 2p problemas de programación fraccionada; podemos utilizar, por ejemplo, Charnes y Cooper (1962 pp. 181-185) o el método de Gilmore y Gomory (1963 pp. 863-888).

2.-Considerar las soluciones $x^{iu} = x^j$, i=1,...,m, como soluciones iniciales y determinar las distancias usando la siguiente expresión:

$$d_{ij} = d_i(x^j) = \frac{q_i(x^j) - q_i^L}{q_i^u - q_i^L}$$

3.-Resolver el siguiente problema de programación lineal uniobjetivo y encontrar los pesos óptimos de las funciones distancia (4):

$$
\begin{aligned}
\max \quad & d_{p+1} \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_{i1} \geq d_{p+1} \\
& \dots \\
& \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_{ip} \geq d_{p+1} \\
& \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \\
& \lambda_i \geq 0 \quad i=1,\dots,p
\end{aligned}
$$

4.- Establecer la función d_{p+1} y resolver el siguiente problema de programación fraccionada para obtener la nueva solución compromiso x^{p+1}:

$$\max d_{p+1}(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_i(x) \quad s.a. \ x \in X$$

5.- Determinar los valores de las distancias de la nueva solución al máximo valor posible de las funciones objetivo $d_{p+1,i}$, $i=1,\dots,p$.

6.- Presentar al decisor las p+1 soluciones. Si el decisor prefiere estrictamente una solución sobre las demás, parar. Si no, rechazar la solución menos preferida y volver al paso 3.

Se espera que la convergencia del método sea rápida, porque la nueva solución presentada es la más deseable en el sentido minimax. No es necesario generar todas las soluciones no dominadas ya que el área de decisión se reduce tras cada iteración. Así están garantizadas la eficiencia y factibilidad de las soluciones obtenidas.

En este método no se necesita información a priori del decisor. En otros algoritmos se precisa la determinación previa de los pesos o, en el mejor de los casos, cierta información acerca de ellos. En el algoritmo que se presenta en este trabajo, los pesos se determinan automáticamente de manera que el decisor no interviene en dicha determinación. Además la información requerida de éste en cada iteración es fácil de conseguir. Se le presentan al decisor las soluciones en función de su cercanía a la solución ideal y se le pregunta la preferida. Esto permite aplicar el algoritmo aún en el caso, bastante frecuente, en el que el decisor no dispone de ninguna información a priori, sino que, a posteriori, y entre las soluciones obtenidas ponderando las funciones objetivo con los pesos óptimos en el sentido minimax, debe elegir. Para ello no se necesita nada más que la programación fraccionada lineal y la programación lineal, ambas en el caso uniobjetivo, para las que existen algoritmos adecuados de resolución y paquetes informáticos que trabajan con problemas de grandes dimensiones.

4.- Estudio de la sensibilidad

Gal (1977 pp. 307-322) en el artículo mencionado en la bibliografía para la programación lineal multiobjetivo proporciona un conjunto de pesos asociado a un vértice de la región factible, de manera que cuando los pesos pertenecen a esta región, dicho vértice es solución eficiente del problema multiobjetivo. Aunque Gal realiza este estudio para un problema lineal múltiple, se trata de un resultado que podemos generalizar a la programación fraccionada lineal múltiple ya que el procedimiento se basa en una tabla del simplex múltiple.

La amplitud de la región asociada a un vértice indica la estabilidad de dicho vértice como solución eficiente, i.e., si la región es amplia ha de producirse una modificación muy grande en los pesos para que el vértice considerado deje de ser solución no dominada.

A continuación detallamos la notación a usar. Sea x_s una solución eficiente del problema propuesto, B_s la base asociada a x_s e I_s el conjunto de índices básicos asociados a dicha solución. Notaremos por

$$\Lambda^s\nabla_j^k = [\nabla_B q_k(x_s)]^t B_s^{-1} P_j - [\nabla_B q_k(x_s)]_j \qquad j \notin I_s \quad k=1,\dots,p.$$

las componentes del vector gradiente reducido para la k-ésima función objetivo en la tabla relativa a la base B_s, donde P_j es la columna j-ésima de coeficientes de las restricciones y $[\nabla_B q_k(x_s)]_j$ es la componente j-ésima del vector $\nabla_B q_k(x_s)$.

La región que proporciona el procedimiento en este caso es la siguiente:

$$R_s = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p / \quad \sum_{k=1}^{p} \Lambda^s\nabla_j^k \lambda_k \leq 0,\ \lambda_k > 0,\ k=1,\dots,p,\ j \notin I_s \right\}$$

que define el conjunto de pesos tales que para todo elemento de R_s la solución x_s es eficiente para el problema fraccionado múltiple y óptima para el problema uniobjetivo asociado a estos pesos.

5.- Un problema de producción múltiple

Consideramos una compañía que fabrica dos productos P_1 y P_2. Por hipótesis, los costes y las demandas de capital requeridas son proporcionales a las actividades individuales. En el programa de producción a determinar, hay unos costes fijos que ascienden a 200 dólares y una demanda fija de capital de 400 dólares. Además, por exigencias de mercado, la producción de P_2 supera a la de P_1 como mucho en 200 unidades. Los datos se fijan en la tabla 1:

Tabla 1. *Demanda por unidad de producto*

	Capacidad disponible	P_1	P_2
Máquinas (horas)	800 horas	1 hora	3 horas
Capital propio	1400 $	4 $	2 $
Beneficio por unidad		1 $/unidad	2 $/unidad
Empleo		5 horas/unidad	3 horas/unidad
Contaminación		3 mg/unid.	2,5 mg/unid.

El objetivo de la compañía es la maximización de la rentabilidad del capital propio empleado. Dada una demanda fija de capital (400), se dejan 1000 $ para la demanda variable. Llamando x_1 a la producción de P_1 y x_2 a la producción de P_2, resulta el problema fraccionado:

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1+2x_2-200)/(4x_1+2x_2+400) \\ \text{s.a} \quad & -x_1+x_2 \leq 200 \\ & x_1+3x_2 \leq 800 \\ & 4x_1+2x_2 \leq 1000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para poder recibir ayudas para el desarrollo empresarial por parte del Estado, la compañía debe maximizar el porcentaje de empleo por capital propio, por lo que el problema se convierte en el siguiente, teniendo en cuenta un nivel de empleo fijo de mantenimiento de 100 horas.

$$\max \quad [(x_1+2x_2-200)/(4x_1+2x_2+400),(5x_1+3x_2+100)/(4x_1+2x_2+400)]$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a}\quad & -x_1 + x_2 \leq 200\\
& x_1 + 3x_2 \leq 800\\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 1000\\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

En la nueva normativa en vigor dictada por la Mancomunidad en la que se sitúan las instalaciones de la compañía, se penaliza la contaminación teniendo en cuenta el tamaño de la empresa, por lo que se debe minimizar la contaminación por capital propio. El problema queda:

$$
\begin{aligned}
\max\ & (x_1+2x_2-200)/(4x_1+2x_2+400),(5x_1+3x_2+100)/(4x_1+2x_2+400),\\
& (-3x_1-2{,}5x_2)/(4x_1+2x_2+400)\\
\text{s.a}\quad & -x_1 + x_2 \leq 200\\
& x_1 + 3x_2 \leq 800\\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 1000\\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Luego el problema, que en principio se modelizó como un programa fraccionado lineal uniobjetivo, queda finalmente como un problema de programación fraccionada lineal triobjetivo con idénticos denominadores. Para resolverlo, aplicamos el algoritmo propuesto anteriormente, el procedimiento interactivo fraccionado.

En primer lugar, optimizamos cada uno de los objetivos individualmente. Notaremos por $q_i(x)$ la función objetivo i-ésima y obtenemos los siguientes resultados:

max $q_1(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{1u}=(50,250)$,	$q_1^u=7/22$
min $q_1(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{1L}=(0,0)$,	$q_1^L=-1/2$
max $q_2(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{2u}=(140,220)$,	$q_2^u=73/70$
min $q_2(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{2L}=(0,0)$,	$q_2^l=-1/4$
max $q_3(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{3u}=(0,0)$,	$q_3^u=0$
min $q_3(x)$ s.a. $x \in X$, con solución	$x^{3L}=(50,250)$,	$q_3^L=-31/44$.

lo que significa que el objetivo de máxima rentabilidad se consigue fabricando 50 unidades del producto I y 250 unidades del producto II; el objetivo de la proporción de empleo se maximiza con 140 unidades del producto I y 220 del producto II; y, por último, se obtiene una mínima contaminación si no se fabrica nada, lo cual es bastante lógico. Estos problemas se han resuelto haciendo uso de la transformación de Charnes y Cooper (1962 pp.181-185) o mediante el algoritmo de Gilmore y Gomory (1963 pp. 863-888).

A continuación, construimos la matriz de pagos del problema incluyendo en la fila i las distancias normalizadas del valor de cada función objetivo en el punto x^{iu} al mínimo posible de dicha función en la región factible. De este modo, tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 33/35 & 0 \\ 105/111 & 1 & 0 \\ 0 & 18/1085 & 1 \end{vmatrix}$$

Con esta matriz se plantea un problema de programación lineal, que resuelve el juego bipersonal de suma cero considerado en el algoritmo, para hallar los pesos óptimos en el sentido minimax.

$$\begin{aligned} &\max d \\ &\text{s.a. } \lambda_1 + 105/111\lambda_2 \geq d \\ &\qquad 33/35\lambda + \lambda_2 + 18/1085\lambda_3 \geq d \\ &\qquad \lambda_3 \geq d \\ &\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ &\qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d \geq 0 \end{aligned}$$

Los pesos que se obtienen como solución óptima son $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0.5$.

De este modo, consideramos una función objetivo que es combinación lineal de las tres funciones objetivos del problema planteado. Nos queda el problema:

$$\begin{aligned} &\max \quad (-x_1-0.25x_2-100)/(4x_1+2x_2+400) \\ &\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 200 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \leq 800 \\ &\qquad 4x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Mediante alguno de los dos métodos antes expuestos, se resuelve este problema de programación fraccionada lineal uniobjetivo y su solución es $x^4=(0,200)$. Una vez obtenida esta nueva solución eficiente, se presentan al decisor las cuatro soluciones obtenidas hasta el momento:

$x^1=(50,250)$,	$q_1=7/22$	$q_2=1$	$q_3=-31/44$
$x^2=(140,220)$,	$q_1=19/70$	$q_2=73/70$	$q_3=-97/140$
$x^3=(0,0)$,	$q_1=-1/2$	$q_2=1/4$	$q_3=0$
$x^4=(0,200)$,	$q_1=1/4$	$q_2=7/8$	$q_3=-15/28$

Si el decisor considera que esta cuarta solución es satisfactoria, el algoritmo se da por terminado. Si no, se le pide que elija la solución menos preferida.

En este caso, supongamos que la solución que el decisor rechaza es la primera. Luego, nos quedamos con tres soluciones, igual número que teníamos al principio. Con ellas construimos una nueva matriz de pagos, de igual modo que en la iteración anterior:

$$\begin{bmatrix} 33/35 & 0 & 11/12 \\ 1 & 0 & 175/222 \\ 18/1085 & 1 & 7/62 \end{bmatrix}$$

Para hallar los pesos óptimos en el sentido minimax, resolvemos el problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} & \max d \\ & \text{s.a. } 33/35\lambda_1+\lambda_2+18/1085\lambda_3 \geq d \\ & \quad \lambda_3 \geq d \\ & \quad 11/12\lambda_1+175/222\lambda_2+7/62\lambda_3 \geq d \\ & \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1 \\ & \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,d \geq 0 \end{aligned}$$

Los pesos óptimos son $\lambda_1=0.259591$, $\lambda_2=0.228971$, $\lambda_3=0.511438$. Así, obtenemos una función objetivo como combinación lineal de las tres funciones objetivos del problema planteado anteriormente:

$$\begin{aligned} & \max\ (-0.129873x_1-0.072443x_2-29.0211)/(4x_1+2x_2+400) \\ & \text{s.a} \quad -x_1+x_2 \leq 200 \\ & \qquad x_1+3x_2 \leq 800 \\ & \qquad 4x_1+2x_2 \leq 1000 \\ & \qquad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve este problema de programación fraccionada lineal uniobjetivo y $x^5=(250,0)$ es su solución. Se presentan al decisor las cuatro últimas soluciones obtenidas hasta el momento:

$x^2=(140,220)$,	$q_1=19/70$	$q_2=73/70$	$q_3=-97/140$
$x^3=(0,0)$,	$q_1=-1/2$	$q_2=1/4$	$q_3=0$
$x^4=(0,200)$,	$q_1=1/4$	$q_2=7/8$	$q_3=-15/28$
$x^5=(250,0)$,	$q_1=5/28$	$q_2=27/28$	$q_3=-15/28$

Si el decisor considera que esta nueva solución es satisfactoria, el algoritmo ha terminado. Si no, se le pide que elija la solución menos preferida.

Supongamos que la solución que el decisor rechaza es x^3. Luego, nos quedamos con tres soluciones, con las que construimos una nueva matriz de pagos, como en la iteración anterior:

$$\begin{vmatrix} 33/35 & 11/12 & 209/252 \\ 1 & 175/222 & 100/111 \\ 18/1085 & 7/62 & 52/217 \end{vmatrix}$$

Hallamos los pesos óptimos en el sentido minimax, resolviendo el problema lineal.

$$\begin{aligned} &\max d \\ &\text{s.a. } 33/35\lambda_1+\lambda_2+18/1085\lambda_3 \geq d \\ &\quad 11/12\lambda_1+175/222\lambda_2+7/62\lambda_3 \geq d \\ &\quad 209/252\lambda_1+100/111\lambda_2+52/217\lambda_3 \geq d \\ &\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1 \\ &\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,d \geq 0 \end{aligned}$$

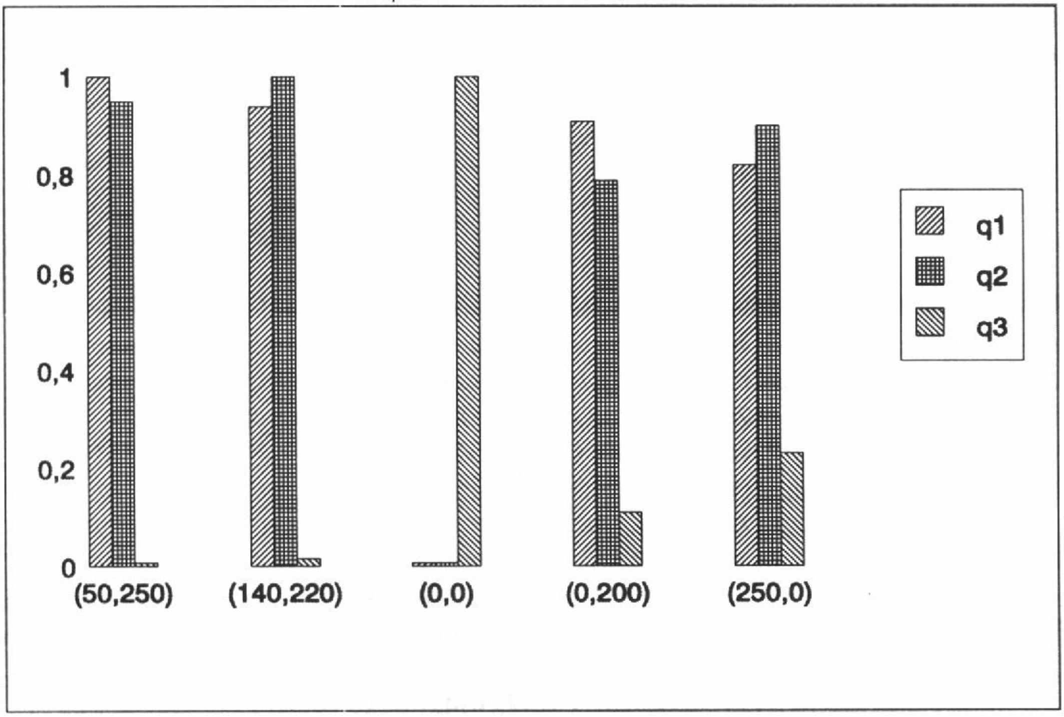
Los pesos óptimos son $\lambda_1=0.507124$, $\lambda_2=0.492876$, $\lambda_3=0$. Así, obtenemos una función objetivo como combinación lineal de las tres funciones objetivos del problema planteado. Tenemos el problema:

$$\begin{aligned} &\max\ (1.492876x_1-2.492876x_2-52.1372)/(4x_1+2x_2+400) \\ &\text{s.a}\quad -x_1+x_2 \leq 200 \\ &\qquad x_1+3x_2 \leq 800 \\ &\qquad 4x_1+2x_2 \leq 1000 \\ &\qquad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este problema de programación fraccionada lineal uniobjetivo es $x^5=(50,250)$. Como hemos obtenido una de las soluciones que han aparecido con anterioridad, concluimos el algoritmo.

Consideramos las distancias de los valores de cada función objetivo en las soluciones eficientes al mínimo valor posible de dicha función objetivo, una vez normalizadas dividiendo por la amplitud del intervalo en el que se pueden mover estas funciones. Esto es necesario para realizar, en la gráfica 1, una comparación relativa de los logros que alcanza cada una de las cinco soluciones eficientes determinadas. Puede observarse en ella que, conforme el algoritmo avanza, las soluciones obtenidas empeoran ligeramente en algunos objetivos mientras en otros tienden a mejorar considerablemente.

Gráfica 1: Comparación de las soluciones eficientes.



Una vez encontradas las soluciones eficientes, podemos realizar el análisis de sensibilidad de dichas soluciones. Usando el resultado de la sección 4, hemos descrito en el apartado anterior una región de pesos asociada a cada una de las soluciones eficientes obtenidas mediante el método de las ponderaciones. Según esto, $x^1=(50,250)$ es solución eficiente del problema de (MOFP) propuesto si los pesos pertenecen a la región:

$$R_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^3 / \ -12\lambda_1+11\lambda_2+3\lambda_3 \leq 0, \ -6\lambda_1-11\lambda_2+7\lambda_3 \leq 0, \ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0 \right\}.$$

$x^2=(140,220)$ es solución eficiente del problema si los pesos están en la región:

$$R_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^3 / \ -3\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3 \leq 0, \ 12\lambda_1-11\lambda_2-3\lambda_3 \leq 0, \ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 > 0 \right\}.$$

Análogamente, $x^3=(0,0)$ es solución eficiente o no dominada del problema cuando los pesos permanecen en la región:

$$R_3 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^3 /\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 < 0,\ 6\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5\lambda_3 \leq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \right\}.$$

La solución $x^4 = (0,200)$ es solución no dominada del problema cuando los pesos están en la siguiente región:

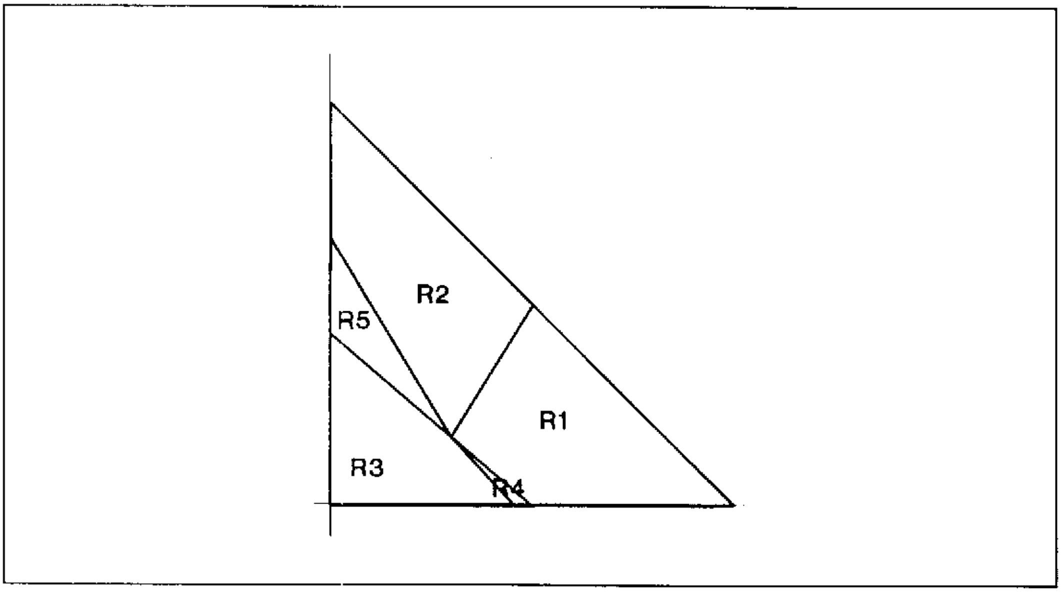
$$R_4 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^3 /\ 6\lambda_1 + 11\lambda_2 - 7\lambda_3 \leq 0,\ 6\lambda_1 - 5\lambda_2 + 5\lambda_3 < 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}.$$

y $x^5 = (250,0)$ es solución eficiente si los pesos permanecen en la región:

$$R_5 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^3 /\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \leq 0,\ -6\lambda_1 - 7\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \right\}.$$

Para hacer un estudio gráfico, nos ceñiremos al plano $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. En este plano, para recubrir todo el espacio posible al que pueden pertenecer los pesos habría que cubrir el triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (0,1).Con esto, encontraríamos todas las soluciones efiecientes que pueden encontrar con un método ponderado.

Gráfica 2: Regiones de pesos, análisis de sensibilidad.



Teniendo en cuenta la representación de la gráfica 2, observamos que con las cinco soluciones obtenidas se cubre todo el espacio de pesos, luego no hay más soluciones eficientes que estas cinco considerando la suma ponderada de los objetivos. Las soluciones eficientes que optimizan cada uno de los tres objetivos del problema, x^1, x^2 y x^3, tienen una gran estabilidad dado que la región de pesos asociada a cada una de ellas es muy grande. Las soluciones no dominadas x^4 y x^5 tienen unas regiones asociadas más pequeñas, por lo que dichas soluciones son menos estables a pequeñas variaciones en los pesos.

6.- Conclusiones

A la vista de todo lo desarrollado anteriormente, en este trabajo concluimos que:

- Los modelos de programación multiobjetivo permiten representar más fielmente la estructura de la empresa que los modelos uniobjetivos, estableciendo de forma analítica las relaciones existentes en ella. Así, el empresario ha de tomar las decisiones, una vez que el analista le presente las posibles soluciones al problema planteado. Las dificultades que se presentaban en la programación matemática tradicional se soslayan aquí considerando diversos objetivos, debido a que la empresa no tiene un único objetivo, y modelizando las funciones objetivo como cocientes de funciones lineales, lo que permite generalizar la típica función lineal y acercarse mejor a las situaciones reales.

- En el estudio realizado anteriormente usamos un método en el que ponemos en juego la programación multiobjetivo y los juegos bipersonales de suma cero, los cuales nos proporcionan los pesos "óptimos" en el sentido minimax, y con ello, la convergencia rápida del método. Para este procedimiento sólo es necesario resolver problemas de programación lineal uniobjetivo, para lo que podemos hacer uso del algoritmo del simplex, mediante el paquete LINDO, por ejemplo; y problemas de programación fraccionada uniobjetivo, para los que podemos utilizar el algoritmo de Gilmore y Gomory (1963 pp. 863-888), o el método de Charnes y Cooper (1962 pp. 181-185), entre otros.

- Para evitar en lo posible la dificultad que representa la estimación de los pesos, se realiza un análisis de sensibilidad o estudio del problema cuando alguno de los pesos se modifica. En el análisis de la sensibilidad, generalizamos el resultado de Gal que asocia a cada vértice del conjunto factible una región de pesos de forma que dicho vértice es solución óptima del problema para tales pesos y, al mismo tiempo, solución eficiente del problema múltiple. Este resultado, al igual que el método de búsqueda de soluciones eficientes aplicado, lo hemos generalizado al caso de la programación fraccionada lineal multiobjetivo ya que ambos estudios se referían a problemas lineales.

- Puesto que no siempre es posible la construcción a priori de una función de utilidad que se adecue a la situación real de la empresa, ya que el decisor no suele disponer de la información suficiente para ello, este algoritmo presenta la ventaja de no necesitar información previa. En él se requiere del decisor, en cada iteración, una información muy fácil de conseguir, con lo que se solventa uno de los mayores problemas de los métodos interactivos. Dicha información consiste en seleccionar de entre varias soluciones eficientes cuál es la satisfactoria, en el caso favorable de que ésta se encuentre entre las presentadas, o, en caso contrario, seleccionar cuál es la menos preferida, es decir, la solución que se descarta para continuar iterando en el algoritmo.

Bibliografía

ARÉVALO, M.T. Y ZAPATA, A. (1994), "Un estudio de la sensibilidad de los pesos en la programación fraccionada múltiple". *Actas de la VIII Reunión Asepelt-España*, Palma.

ASHTON, D.J.Y ATKINS, D.R. (1979), "Multicriteria programming for financial planning", *Journal of Operational Research Society* 30, 259-270.

CHARNES, A. Y COOPER, W.W. (1962). "Programming with linear fractional functionals". *Naval Research Logistics Quaterly* 9, 181-185.

CHARNES, A., COOPER, W.W. Y RHODES, E. (1978), "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.

DUTTA, D., RAO, J.R. Y TIWARI, R.N. (1993). " A restricted class of multiobjective fractional programming problems". *European Journal of Operational Research* 68, 352-355.

EVREN, R. (1987), "Interactive Compromise Programming", *Journal of Operational Research Society* 38, 163-172.

GAL, T. (1977), "A general method for determining the set of all efficient solutions to a Linear Vector Maximum Problem", *European Journal of Operational Research* 1, 307-322.

GILMORE, P.C. Y GOMORY, R.E. (1963), "A linear programming approach to the cutting stock problem", *Operations Research* 11, 863-888.

MJELDE, K.M. (1978), "Allocation of resources according to a fractional objective", *E.J.O.* 2, 116-124.

STEUER, R.E. (1986). 'Multiple criteria optimization: Theory, Computation and Application", John Wiley & Sons, New York.

ZIEMBA, W.T., PARKAN, C. Y BROOKS-HILL, R. (1974), "Calculation of investments portfolios with risk free borrowing and leading", *Management Science* 21, 209-222.