

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Civil

Efecto de la torsión en el comportamiento dinámico de puentes esviados calculados con modelos tipo viga

Autor: Elías Sánchez García

Tutor: Pedro Galvín Barrera

**Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría
de Estructuras**
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2024



Proyecto Fin de Grado
Ingeniería Civil

Efecto de la torsión en el comportamiento dinámico de puentes esviados calculados con modelos tipo viga

Autor:
Elías Sánchez García

Tutor:
Pedro Galvín Barrera
Catedrático de Universidad

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2024

Trabajo fin de grado: Efecto de la torsión en el comportamiento dinámico de puentes esviados calculados con modelos tipo viga

Autor: Elías Sánchez García

Tutor: Pedro Galvín Barrera

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2024

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mi tutor

A mis amigos

Agradecimientos

En primer lugar, quería agradecer a mi familia todo el apoyo mostrado durante estos cuatro años. En especial a mis padres, por toda la ayuda incondicional mostrada. Sin ellos, nada de esto hubiese sido posible. Por todas las veces que me han ayudado y acompañado en estos años.

A mis amigos, tanto a los de Huelva como a los de Sevilla. Gracias por todo vuestro cariño y vuestra comprensión. Espero de todo corazón que os vaya bien.

A mi tutor Pedro por el gran honor de haber trabajado y aprendido con él gracias a este trabajo. Por su infinita paciencia en momentos donde parecía que se acababa el mundo y por todo el apoyo mostrado durante estos meses. También por su gran paciencia conmigo en todo momento.

Y a mi Cristo del Perdón y a mi Virgen de los Dolores. Pilares fundamentales en este proceso.

Gracias de corazón.

Sevilla, 2024.

Resumen

El presente trabajo se fundamenta en el desarrollo de las respuestas de puentes oblicuos definidos a partir de modelos tipo viga, con ambos extremos apoyados y considerando únicamente un único vano. Al definir puentes con un determinado esviaje en planta, una de las principales consideraciones es el efecto conjunto de los modos de vibración de torsión y flexión en la propia respuesta de la estructura. Dicha respuesta puede ser en términos de desplazamientos, giros, velocidades o aceleraciones. Los modelos que se desarrollan son puentes ferroviarios, por tanto, las cargas consideradas son un eje singular que circula a una determinada velocidad y un conjunto de ejes simulando un vehículo ferroviario. Además, se muestran diferentes puentes con diversas longitudes, con sus respectivas características: amortiguamiento estructural, frecuencias o rigideces a considerar, canto de la sección o punto donde obtener cada respuesta, entre otros. Todo esto, permite definir cada una de las respuestas que se presentan.

Además, lo considerable en el presente desarrollo es mostrar diversas respuestas, considerando varios esviajes. Es decir, se busca analizar las diferencias entre puentes de esviaje nulo y esviaje no nulo, para mostrar qué conlleva considerar un puente oblicuo, como si no lo fuese. También, como se ha comentado se definen varios esviajes para poder definir conclusiones claras y precisas.

Abstract

The present work is based on the development of the responses of oblique bridges defined from beam-type models, with both ends supported and considering only a single span. When defining bridges with a given plan skew, one of the main considerations is the joint effect of torsional and bending vibration modes on the response of the structure itself. This response can be in terms of displacements, twists, velocities or accelerations. The models developed are railway bridges, therefore, the loads considered are a singular axle running at a certain speed and a set of axles simulating a railway vehicle. In addition, different bridges with different lengths are shown, with their respective characteristics: structural damping, frequencies or stiffnesses to be considered, section edge or point where to obtain each response, among others. All this allows defining each of the responses presented.

In addition, what is important in the present development is to show different responses, considering several deflections. That is, we seek to analyze the differences between zero skew and non-zero skew bridges, in order to show what it entails to consider an oblique bridge, as if it were not. Also, as mentioned above, several deflections are defined in order to define clear and precise conclusions.

ÍNDICE

Agradecimientos	5
Resumen	6
Abstract	7
Índice de Tablas	9
Índice de Figuras	10
1 Introducción	12
1.1. <i>EL FENÓMENO DE TORSIÓN Y FLEXIÓN</i>	12
1.2. <i>ESTADO DEL ARTE</i>	14
1.3. <i>OBJETIVO</i>	15
2 Problema numérico	17
2.1. <i>INTRODUCCIÓN</i>	17
2.2. <i>SUPERPOSICIÓN MODAL</i>	17
2.3. <i>EXPRESIONES ANALÍTICAS DE MODOS DE FLEXIÓN Y TORSIÓN</i>	18
2.4. <i>ANÁLISIS DE MODOS</i>	21
2.5. <i>ANÁLISIS TEMPORAL</i>	22
2.5.1. <i>EJE SINGULAR</i>	22
2.5.2. <i>CONJUNTO DE EJES</i>	23
3 Modelos de estudio	24
3.1. <i>MODELOS ESTRUCTURALES</i>	24
3.2. <i>MODELOS DE CARGA</i>	28
4 Resultados	30
4.1. <i>INTRODUCCIÓN</i>	30
4.2. <i>CONSIDERACIONES PREVIAS</i>	30
4.3. <i>RESULTADOS</i>	33
4.3.1. <i>LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO</i>	33
4.3.2. <i>RIGIDEZ INTERMEDIA</i>	45
4.3.3. <i>RIGIDEZ SUPERIOR</i>	56
5 Conclusión y desarrollos futuros	67
5.1. <i>CONCLUSIÓN</i>	67
5.2. <i>DESARROLLOS FUTUROS</i>	68
6 Referencias	69
7 ANEXO	71
<i>ANEXO I: Códigos de MATLAB</i>	71

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Amortiguamiento crítico según el tipo de puente.....	25
Tabla 2. Modelo de carga de trenes HSLMA.....	28

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Puente para ferrocarril. Osera de Ebro. Javier Manterola.....	12
Figura 2. Viaducto de Archidona. Línea de Alta Velocidad Granada-Antequera.....	13
Figura 3. Sistema de coordenadas locales de viga biapoyada.....	17
Figura 4. Representación tridimensional de viga biapoyada con esviaje.....	19
Figura 5. Definición de momentos en extremo de viga.....	19
Figura 6. Esquema de carga puntual móvil.....	22
Figura 7. Esquema de conjunto de ejes móviles.....	23
Figura 8. Rango de frecuencias según Eurocódigo.....	24
Figura 9. Representación de los cinco primeros modos de flexión.....	26
Figura 10. Diferencia de modos para caso sin esviaje y con esviaje.....	27
Figura 11. Modelo de carga de trenes HSLMA.....	29
Figura 12. Representación sección genérica.....	30
Figura 13. Aceleración respecto al tiempo.....	31
Figura 14. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 10 metros, frecuencia inferior.....	35
Figura 15. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 15 metros, frecuencia inferior.....	37
Figura 16. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 20 metros, frecuencia inferior.....	39
Figura 17. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia inferior.....	41
Figura 18. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 10 metros, frecuencia intermedia.....	46
Figura 19. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 15 metros, frecuencia intermedia.....	48
Figura 20. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 20 metros, frecuencia intermedia.....	50
Figura 21. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia intermedia.....	52
Figura 22. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia intermedia.....	57
Figura 23. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia intermedia.....	59
Figura 24. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia intermedia.....	61
Figura 25. Aceleración respecto a velocidad. Todos los casos de carga, longitud de 25 metros, frecuencia intermedia.....	63

1 INTRODUCCIÓN

1.1. EL FENÓMENO DE TORSIÓN Y FLEXIÓN

Al realizar un estudio dinámico sobre una estructura [1], la característica más importante para tener en cuenta es la dependencia del tiempo de todas las variables implicadas. Dichas variables pueden ser tensiones, esfuerzos, desplazamientos, velocidades o aceleraciones. Esto implica que dichas variables presentan una determinada evolución desde un punto de vista temporal. Si en vez de un estudio dinámico, se realizase un estudio estático, no existiría el mencionado análisis temporal de variables. De esta manera, no sería posible realizar una observación evolutiva de las variables antes mencionadas. Resulta así que, en estructuras sometidas a cargas móviles, como puentes de carreteras o puentes ferroviarios, los análisis dinámicos ayudan a realizar predicciones que evitan daños estructurales y, por tanto, a asegurar la seguridad de la estructura.

En cualquier estudio dinámico las frecuencias naturales, inversa del periodo en la que cualquier estructura experimenta una situación deformada entre dos posiciones de equilibrio [1], en condición de vibración libre, es decir, cuando no se encuentra aplicada ninguna carga externa, y los modos de vibración, diversas formas que adquiere la estructura cuando no se encuentra sometida a ninguna carga, juegan un papel muy importante. De forma genérica, la respuesta de una estructura se define a partir de sus modos de vibración. Es lo conocido como superposición modal. Cuando se habla de respuesta, se hace referencia a desplazamientos, velocidades o aceleraciones.

La principal diferencia entre un puente de carretera y un puente de ferrocarril se encuentra en el tipo de carga aplicada. En este trabajo, únicamente se desarrollan modelos de puentes ferroviarios, por tanto, se realizan dos consideraciones, desde el punto de vista de la excitación externa. Por un lado, un modelo de carga puntual simulando un único eje que circula a una determinada velocidad y, por otro lado, diferentes modelos de conjunto de ejes simulando diversos trenes. Esto implica que estos modelos aplican a la estructura una carga muy elevada que la correspondiente a cualquier otro vehículo que circule por un puente de carretera.

No obstante, independiente de la carga aplicada por cada vehículo ferroviario, las velocidades alcanzadas por cada uno de estos son muy elevadas. Por ejemplo, en España, los trenes AVE pueden circular hasta 350 km/h, actualmente. Aun así, el objetivo es aumentar estas velocidades de circulación con el objetivo de desarrollar un transporte más eficiente y rápido. Para poder cumplir con este propósito es necesario desarrollar estudios dinámicos de las diferentes estructuras. Un fenómeno muy importante, en estos casos, es la resonancia, para velocidades de paso de los vehículos superiores a 200 km/h.



Figura 1: Puente para ferrocarril. Osera de Ebro. Javier Manterola.

El fenómeno de la resonancia tiene lugar cuando una frecuencia natural de la estructura coincide con una frecuencia de la carga externa. La principal característica es la amplificación de la respuesta del puente, alcanzándose máximos valores. La principal consecuencia se encuentra en el confort de los propios pasajeros, además de afectar a la seguridad del propio puente. Analizando este fenómeno con las velocidades de circulación de los vehículos ferroviarios, surgen velocidades de cancelación y velocidades de resonancia. Esto es, existen velocidades de paso para las cuales, la respuesta de la estructura (generalmente en términos de aceleraciones) se hace mínima o máxima. Además, las velocidades de resonancia pueden del vehículo circulante o de la propia estructura. En el caso de las velocidades de cancelación, solo pueden ser debidas al propio puente.

La mayoría de los estudios que analizan este fenómeno, se basan en puentes rectos en planta (véase figura 1). En esta consideración, únicamente se deben tener en cuenta los modos de flexión para obtener la respuesta. Además, los modelos de trenes utilizados y definidos en la norma (HSLM) [3] se basan en dicha suposición [2]. Sin embargo, cada vez son más las estructuras que, por razones de conectividad o eficacia en su trazado, son oblicuos, es decir, presentan un determinado esviaje. Por ejemplo, en estudios realizados por Soriano Muñoz [6], se identifican 50 pasos inferiores de 108 pórticos de losa en Línea de Alta Velocidad entre Madrid y Zaragoza.

Estos puentes, debido al esviaje presentado (ver ejemplo en la figura 2), desarrollan fenómenos torsionales que deben ser tenidos en cuenta a la hora de obtener respuestas estructurales. Esto es, con la introducción de la torsión, no solamente se puede obtener desplazamientos, velocidades o aceleraciones, sino que los giros también asumen una gran importancia.



Figura 2: Viaducto de Archidona. Línea de Alta Velocidad Granada-Antequera.

Por tanto, a la hora de obtener la respuesta de cualquier puente oblicuo, se debe considerar los modos de vibración tanto de torsión como de flexión. Sin embargo, en algunas situaciones la interacción entre ambos no es tenida en cuenta en puentes que sí tienen un determinado esviaje. Esto es, se calculan considerando únicamente los modos de flexión, lo que puede llevar a errores que podrían provocar falta de rigor en los resultados obtenidos.

En el presente trabajo se realiza un estudio dinámico de estructuras, basado fundamentalmente en la influencia del efecto de la torsión y de la flexión. Llegados aquí, se hace la siguiente cuestión: ¿qué sucede si un puente con esviaje se calculase como si no lo fuese? Existen muchos factores que hay que tener en cuenta antes de poder responder a esta pregunta, pero lo que sí tiene que quedar claro es que, todas las respuestas que se obtienen en este presente trabajo se basan en resultados analíticos considerando modos de flexión y modos de torsión. Una vez que se obtengan las aceleraciones correspondientes, estas deben ir ajustándose a una serie de condiciones (punto de observación e instante de tiempo a considerar) de manera que se puedan desarrollar de dos maneras diferentes. Por un lado, considerando la influencia o efecto de la flexión y torsión y por el otro, teniendo en cuenta únicamente el efecto de la flexión.

Además, esa pregunta conduce a otras cuestiones que pueden ser significativas de cara a la seguridad de la estructura y es que, como se verá en los resultados de este trabajo, las aceleraciones obtenidas considerando la flexión, pueden ser menores que las obtenidas de flexión y torsión. Por tanto, otra pregunta podría ser: el no considerar el efecto de la torsión, ¿puede hacer que la estructura se calcule para aceleraciones inferiores a las reales? Como se anticipaba, en la conclusión se intentará responder a estas preguntas.

Antes de describir los objetivos del presente trabajo y definir la hoja de ruta a seguir en el mismo, se determina los estudios previos relacionados y las conclusiones obtenidas.

1.2. ESTADO DEL ARTE

La resolución de diferentes puentes oblicuos ha sido objetivo de diversos desarrollos previos. En primer lugar, se puede destacar los trabajos realizados sobre casos concretos de puentes que presentan un determinado esviaje. Pierre-Louis Chausée en [4] realiza un análisis dinámico de un puente que presenta un determinado esviaje en sus tres últimos vanos. Para ello, se emplea una herramienta informática que permite obtener las respuestas estructurales en términos de desplazamientos, aceleraciones o velocidades. Concluye con una comparación de los resultados obtenidos con otros modelos, de Elementos Finitos. Por su parte, P. Ryjáček et al., en [16] muestra los resultados basados en las diferentes pruebas de carga realizadas a un puente ferroviario en la República Checa. Dicho desarrollo termina estableciendo que el ángulo de inclinación de los puentes esviados debe ser inferior a 60° para mantener las vibraciones de los apoyos en valores razonables. En el caso de José Joaquín Soriano Muñoz [6], establece, en su Trabajo Fin de Máster, cómo la consideración de esviajes muy elevados provoca que la respuesta dinámica de las estructuras de pasos inferiores, de alta velocidad, sea mayor. Sin embargo, a la hora de obtener resultados, los esviajes tenidos en cuenta son pequeños, para que la respuesta dinámica sea lo más similar posible a la de estructuras no oblicuas. Jaime Domínguez Barbero [14], introduce el fenómeno de la torsión considerando que las cargas se aplican con una determinada excentricidad, desde el eje de simetría de la sección estructural. Los resultados obtenidos presentan la peculiaridad de haber sido calculados de forma independiente, es decir, se realizan dos cálculos separados (uno asociado al fenómeno de la torsión y otro, al fenómeno de flexión). M. Díaz Arancibia y P. Okumus en [20] realizan un estudio sobre puentes inclinados para obtener conclusiones respecto a características del propio puente y a la influencia de dicha inclinación en el desplazamiento de la superestructura. Una de las conclusiones más importantes se establece en el aumento de los rodamientos de la estructura en la dirección transversal del puente al considerar un mayor ángulo de inclinación. Por último, otros estudios se centran en poder proporcionar modelos 3D de elementos finitos y modelos de puente simplificados, para aquellos que presenten un determinado esviaje. Es el estudio llevado a cabo por J. Meng et al., en [26]. Se trató de un desarrollo muy significativo ya que se presentaron resultados de desplazamientos estáticos, frecuencias naturales, modos de vibración y amortiguamiento estructural procedentes de un puente oblicuo de acero. Se concluyó mediante una comparación de los resultados con aquellos obtenidos mediante la teoría de elementos finitos, lo que estableció que los modelos utilizados eran útiles y describían correctamente el comportamiento de la estructura.

Otros autores han desarrollado estudios desde un punto de vista más teórico. Es el caso de Javier Manterola en [11]. Realiza una aportación sobre tableros curvos en cajón, donde destaca aspectos, desde un punto de vista de la resistencia. Así, concluye que las secciones que se encuentran sometidas a cargas uniformes repartidas sufren una distorsión. Este efecto resulta más notable cuando el puente presenta un radio de curvatura mayor, es decir, cuando se considere un esviaje mayor. Khanh Nguyen, en [2] define la contribución de modos de torsión junto con modos de flexión mediante coeficientes dependientes de las condiciones de contorno de la estructura. Además, ambos modos se encuentran relacionados con el ángulo de esviaje considerado. Esto es, se requiere conocer el valor del ángulo para poder obtener, en primer lugar, las frecuencias naturales y, en segundo lugar, los modos de vibración. Los autores concluyen la dependencia entre la torsión y la flexión para puentes oblicuos y la influencia significativa de la rigidez torsional en la vibración del puente. Otros diversos autores como J. C. Sánchez-Quesada et al., exponen en [10] el incremento de la frecuencia fundamental debido a la consideración de un tablero oblicuo. Además, concluyen que las aceleraciones máximas alcanzadas disminuyen debido a la oblicuidad del propio tablero. Desde el punto de vista del análisis ferroviario, Y. Bao et al., en [23], estudian las relaciones de acoplamiento entre un puente curvo en planta y trenes monorraíles. Es decir, se analizan la interacción vehículo-puente desde un punto de vista geométrico y mecánico. Además, la influencia de

parámetros del sistema, como el peralte, el radio de curvatura o la velocidad del vehículo, se tienen en consideración. Una de las conclusiones más destacadas es la asociación de la respuesta lateral del puente con el radio de curvatura. También se concluye con una existencia no específica que relacione la velocidad del vehículo con la respuesta dinámica de la estructura. Si se requiere el estudio de un puente esviado mediante métodos de calibración, entonces es necesario destacar el artículo realizado por A. E. Abdelnaby et al. en [25]. En este estudio se realiza un procedimiento de calibración de del modelo numérico de puentes oblicuos para poder obtener unos resultados más fiables de las estructuras. Se concluye demostrando que algunas suposiciones realizadas normalmente en el cálculo de puentes son poco realistas, lo que puede conllevar a respuestas analíticas con poca exactitud.

Por otro lado, desde un punto de vista de la interacción con el suelo adyacente, A. A. Ghobarah y W. K. Tso [12], realizaron los primeros estudios sobre la consideración conjunta de los modos de torsión y flexión para puentes con esviajes con sustentación intermedia. Posteriormente, otros autores como Mallick y Raychowdhury, en [13], realizan un análisis sobre el efecto del ángulo de esviaje en la respuesta sísmica de un sistema estructural teniendo en cuenta una interacción no lineal entre ambos, llegando a la conclusión de que la inclinación del puente afecta a la capacidad de las fuerzas cortantes y momentos de los pilares. E. Özşahin y G. Pekcan desarrollan en [17] los posibles efectos de los componentes torsionales del suelo en la respuesta sísmica de puentes oblicuos de carretera. En este artículo, se obtiene que dicha respuesta se amplifica con los nombrados componentes torsionales del suelo. Aunque no implica una interacción real con el suelo colindante, se pueden señalar estudios sobre el comportamiento del pavimento del tablero en puentes oblicuos. Es el caso de [24], donde M. Gong et al. En este estudio se recoge el modelado, basado en la teoría de elementos finitos, del pavimento del tablero sometido a la carga de neumáticos. Una de las conclusiones más destacadas se fundamenta en la relación entre el radio de curvatura y la velocidad de circulación del vehículo. Esto es, se verifica que un daño local del pavimento puede ser más significativo a menor radio de curvatura y mayor velocidad de paso.

También destacan algunos artículos, centrados en respuesta sísmica. E. G. Dimitrakopoulos en [18] presenta un análisis sobre la respuesta sísmica de puentes oblicuos de longitud reducida, con juntas de tablero-estribo. Concluye que los desplazamientos transversales y rotaciones que puede experimentar el propio puente dependen en mayor medida de la fricción presentada y de la geometría en planta de la estructura, no siendo muy significativa la contribución del ángulo de esviaje. P. Kaviani et al., estudian en [19] una metodología probabilística que aborda el comportamiento de puentes oblicuos considerando una excitación sísmica. La conclusión más importante alcanzada reside en el efecto significativo de la resistencia a cizallamiento en la respuesta sísmica de puentes oblicuos. Otros artículos abordan la introducción de modelos tridimensionales que tengan en cuenta los movimientos sísmicos del terrero adyacente para puentes esviados. Es el caso de [21], donde sus autores, Y. Wanga, et al., estudian puentes de varios vanos con diversos esviajes para evaluar sus propias capacidades de colapso y fallo. Dicho estudio finaliza con el establecimiento de una estimación de la capacidad de deterioro y colapso de puentes oblicuos con tirantes. Otros desarrollos, cuyo propósito se centra tanto en respuesta sísmica como en la interacción con el suelo, han sido elaborados por Q. Zeng y E. G. Dimitrakopoulos en [22]. En este estudio, se procede a analizar un sistema vehículo-puente durante la acción sísmica del suelo. En este caso, se presentan puentes con un determinado esviaje en planta y vehículos ferroviarios. Las conclusiones logradas ponen de manifiesto el problema de sincronización entre vehículos, puentes y terremotos, lo que provoca un tratamiento probabilístico del desarrollo.

1.3. OBJETIVO

El principal objetivo del presente trabajo es poder observar las diferencias de respuestas que existen entre un puente que presenta un determinado esviaje y un puente, con las mismas características, que no sea oblicuo. Por ello, se requiere definir y explicar cada uno de los aspectos que permitan obtener las respuestas de cada uno de las estructuras. Así, se desarrolla el problema numérico en el siguiente capítulo. Este se basa en el cálculo de forma analítica, de las frecuencias naturales y el posterior desarrollo de los modos de flexión y los modos de torsión, lo que provoca la definición de cada uno de los grados de libertad presentes en el puente (giros y desplazamientos verticales). Además, se establecen los dos modelos de carga externa que se utilizan con sus respectivos tiempos de paso por la estructura.

Posteriormente, se presentan todas las características de los modelos estructurales a estudiar. En concreto, se

realizarán cuatro modelos de cuatro longitudes diferentes. Por cada uno de esos modelos, se estudia tres esviajes diferentes (nulo, 25° y 45°) según tres valores de rigideces o frecuencias, definidas en el Eurocódigo [3]. Además, se exponen propiedades como la masa por unidad de longitud o expresiones necesarias para calcular las inercias tanto a flexión como a torsión. Por último, se muestra los valores de las cargas que serán utilizados en cada modelo de excitación externa.

Con todo ello, es posible obtener las respuestas de cada puente expresadas en términos de aceleraciones. Estas se pueden definir considerando el efecto conjunto de la flexión y la torsión o considerando únicamente el efecto de la flexión. Sin embargo, la primera forma de mostrar los resultados solamente es posible si el puente presenta un esviaje diferente de cero. Si el esviaje se considera nulo, la aceleración obtenida únicamente considera el efecto de la flexión. Teniendo en cuenta la misma estructura con esviaje nulo y esviajes diferentes de cero, es posible establecer, mediante resultados gráficos, qué diferencias de aceleración experimentada en los tres casos de esviaje, en función de la velocidad de circulación de la carga externa por la estructura, existen entre cada uno de los casos estructurales. Así, se podrán obtener las conclusiones oportunas sobre las divergencias y similitudes presentadas entre los modelos.

2 PROBLEMA NUMÉRICO

2.1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este apartado es desarrollar las expresiones analíticas de los modos de vibración, tanto de torsión como de flexión, y su posterior análisis. Además, se presentan los modelos de carga externa que definen cada uno de los tiempos a considerar.

Previamente, se desarrolla una propiedad fundamental en el análisis dinámico de cualquier estructura: la superposición modal.

Todo el desarrollo que se expone a continuación se encuentra basado en el siguiente esquema de una estructura de longitud L , de un solo vano y apoyada en sus dos extremos:

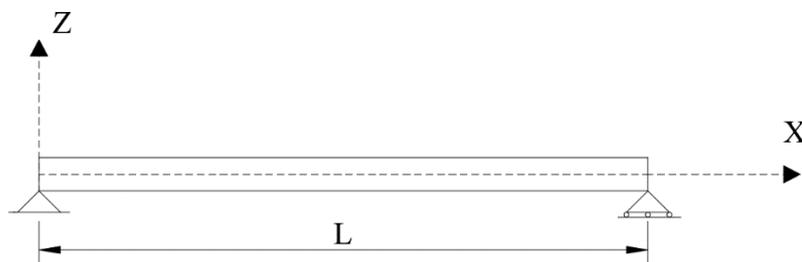


Figura 3: Representación del sistema local para una viga isostática biapoyada.

Como se puede observar, se define un sistema local de coordenadas de tal manera que el eje vertical es Z , el eje longitudinal X y el eje perpendicular a ambos, el eje Y . Esta definición de ejes ayuda a entender las formas que adquiere la estructura cuando no se encuentra sometida a ninguna carga externa. Es lo que se conoce como modos de vibración.

Tal y como se muestra definido el sistema de coordenadas en la Figura 3, los modos de flexión tendrían lugar en el plano XZ , esto es, según el eje Y . Por otro lado, los modos de torsión se desarrollarían como un giro alrededor del eje longitudinal, X . No obstante, para tener en cuenta los modos de torsión, se debería estar ante una estructura que presentase un determinado esviaje o bien, si sobre la sección, de la estructura, se aplicase una carga puntual localizada a una determinada excentricidad de su propio eje de simetría [14]. Sin embargo, esta última consideración no será objeto de estudio en el presente trabajo. Por tanto, la razón de introducir los modos de torsión se basa en la consideración de puentes que presenten una planta oblicua.

2.2. SUPERPOSICIÓN MODAL

Tal como se comentó anteriormente, cualquier estructura se caracteriza por las frecuencias naturales y los modos de vibración. Son los denominados parámetros modales [1]. Las frecuencias naturales son aquellas a las que vibra una estructura en condición de vibración libre, es decir, cuando no tiene aplicada ninguna carga externa. Así, las formas que adquiere la estructura, bajo esa condición, son los modos de vibración.

Los modos de vibración juegan un papel muy importante en la resolución de un problema dinámico, ya que la respuesta de una estructura se puede expresar como una combinación lineal de estos, siempre que se verifique un comportamiento lineal de la estructura. Es lo que se conoce como superposición modal:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N Y_i(t) \cdot \phi_i(x)$$

donde $Y_i(t)$ representan cada una de las amplitudes modales, $\phi_i(x)$ son cada uno de los modos y N el número total de modos de vibración a considerar.

La amplitud modal define la contribución de cada modo a la respuesta total de la estructura. De forma general, dependiendo del punto del puente donde se esté realizando el estudio, existen modos que contribuyen en mayor medida a la respuesta de la estructura.

Debido al acoplamiento entre la flexión y la torsión en puentes oblicuos, la anterior expresión permite obtener todos los grados de libertad de la estructura, ya sean giros o desplazamientos.

Para obtener la respuesta en forma de velocidad o aceleración, se establecen las siguientes expresiones donde la principal diferencia es la variación, respecto del tiempo, de las amplitudes modales:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^N \dot{Y}_i(t) \cdot \phi_i(x)$$

$$a(x,t) = \sum_{i=1}^N \ddot{Y}_i(t) \cdot \phi_i(x)$$

2.3. EXPRESIONES ANALÍTICAS DE MODOS DE FLEXIÓN Y TORSIÓN

Debido al modelo tipo viga que se emplea, presentado en la Figura 3 y según [2], para obtener cada uno de los modos se recurre a las ecuaciones analíticas de Clough and Penzien [15].

Para los modos de flexión:

$$\phi_n(x) = C_{n,1} \cdot \sin(\beta_n \cdot x) + C_{n,2} \cdot \cos(\beta_n \cdot x) + C_{n,3} \cdot \sinh(\beta_n \cdot x) + C_{n,4} \cdot \cosh(\beta_n \cdot x)$$

Siendo:

β_n : Parámetro dependiente de la masa por unidad de longitud del puente (\bar{m}), frecuencia natural (w_n), y rigidez a flexión ($E \cdot I$): $\beta_n^4 = \frac{\bar{m} \cdot w_n^2}{E \cdot I}$

$C_{n,i}$: Constantes definidas a partir de las condiciones de contorno.

Para los modos de torsión:

$$\varphi_n(x) = C_{n,5} \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) + C_{n,6} \cdot \cos(\lambda_n \cdot x)$$

Siendo:

λ_n : Variable dependiente de cada frecuencia natural cuya expresión se define como: $\lambda_n = r \cdot \beta_n^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{G \cdot J}}$

Donde r es el radio de giro considerado en [m], dependiente del ángulo de esviaje y $G \cdot J$ es la rigidez a torsión.

El subíndice n se corresponde con los valores que pueden tomar los modos, según cada una de las frecuencias naturales.

No obstante, antes de calcular los modos de vibración, se necesita conocer las frecuencias naturales. Para ello, se sigue el siguiente desarrollo.

Para definir cada una de las constantes, se deben establecer las condiciones de contorno. Como se comentó previamente, estas se definen según la Figura 3, es decir, considerando ambos extremos apoyados. Sin embargo, en la siguiente figura, además de mostrar una representación de los apoyos, se expone la idea de puente oblicuo en planta, introduciendo el ángulo α y el cambio de ejes X' e Y' mediante dicho ángulo.



Figura 4: Representación tridimensional de viga biapoyada con esviaje y condiciones de contorno [2].

Con la consideración del nuevo sistema de ejes se cumple que en un puente simplemente apoyado de un vano tanto el desplazamiento vertical (u) como el giro ($\theta_{x'}$) y el momento ($M_{y'}$), alrededor del eje longitudinal (X'), son nulos en ambos extremos. Se muestra un esquema que hace referencia a los momentos una vez realizado el cambio de coordenadas:

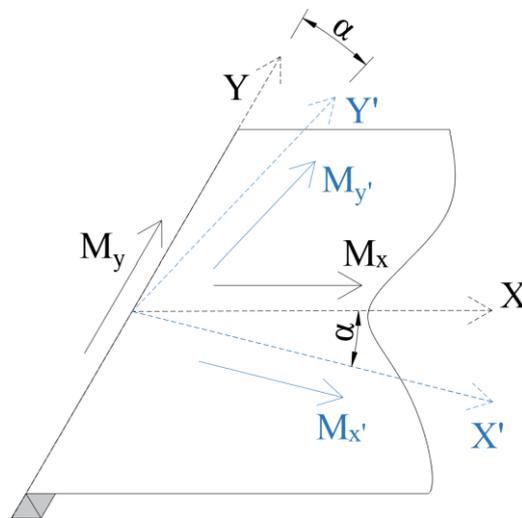


Figura 5: Representación tridimensional de viga biapoyada con esviaje. Definición de momentos según los nuevos ejes X' e Y' [2].

De forma analítica, lo antes mencionado se puede escribir de la siguiente manera:

$$\theta_{x'} = \theta \cdot \cos(\alpha) - u' \cdot \sin(\alpha)$$

$$M_{y'} = M_x \cdot \sin(\alpha) + M_y \cdot \cos(\alpha) = G \cdot J \cdot \theta' \cdot \sin(\alpha) + E \cdot I \cdot u'' \cdot \cos(\alpha)$$

Siendo G el módulo de rigidez transversal, J la inercia a torsión, u' la variación del desplazamiento respecto al tiempo, es decir, velocidad a considerar, u'' la variación de la velocidad respecto al tiempo y θ' la variación temporal de la rotación torsional.

De esta manera, las condiciones de contorno pueden expresarse en término de los modos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \phi(L) = 0 \\ \varphi(0) \cdot \cos(\alpha) - \phi'(0) \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ \varphi(L) \cdot \cos(\alpha) - \phi'(L) \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ G \cdot J \cdot \varphi'(0) \cdot \sin(\alpha) - E \cdot I \cdot \phi''(0) \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ G \cdot J \cdot \varphi'(L) \cdot \sin(\alpha) - E \cdot I \cdot \phi''(L) \cdot \cos(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Dónde φ representa al modo de torsión y ϕ al modo de flexión.

Agrupando todas las condiciones de contorno, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$A \cdot c = 0$$

Siendo:

- A: Matriz característica que permite obtener las frecuencias naturales.
- c: Vector que contiene las constantes necesarias que aparecen en las expresiones de los modos de vibración.

La matriz se define de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & & a_7 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & -a_1 & & 0 & 0 & \cos(\alpha) \\ -a_1 a_5 & a_1 a_4 & -a_1 a_7 & -a_1 a_6 & a_8 \cos(\alpha) & a_9 \cos(\alpha) & \\ 0 & -a_2 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & \\ -a_2 a_4 & -a_2 a_5 & a_2 a_6 & a_2 a_7 & a_3 a_9 & -a_3 \sin(\lambda L) & \end{pmatrix}$$

Donde el valor de cada a_i es:

$$\begin{aligned}a_1 &= \beta_n \cdot \sin(\alpha) \\ a_2 &= E \cdot I \cdot \beta_n^2 \cdot \cos(\alpha) \\ a_3 &= G \cdot J \cdot \lambda_n \cdot \sin(\alpha) \\ a_4 &= \sin(\beta_n \cdot L) \\ a_5 &= \cos(\beta_n \cdot L) \\ a_6 &= \sinh(\beta_n \cdot L) \\ a_7 &= \cosh(\beta_n \cdot L) \\ a_8 &= \sin(\lambda_n \cdot L) \\ a_9 &= \cos(\lambda_n \cdot L)\end{aligned}$$

El vector c se establece de la siguiente manera:

$$c = \begin{bmatrix} C_{n,1} \\ C_{n,2} \\ C_{n,3} \\ C_{n,4} \\ C_{n,5} \\ C_{n,6} \end{bmatrix}$$

Una vez definidos los valores a_i , y haber obtenido la matriz A, al resolver el siguiente determinante $\det(A) = 0$ es posible obtener las frecuencias naturales. Como es lógico, al haber introducido de forma directa el ángulo α en las expresiones anteriores, todas las frecuencias naturales se encuentran calculadas considerando el efecto conjunto de la flexión y torsión.

En resumen, la propia matriz A permite obtener las frecuencias naturales. Para calcular los modos de vibración, se necesita conocer cada uno de los valores contenidos en el vector c, los cuales deben obtenerse mediante la operación comentada anteriormente del sistema homogéneo. Sin embargo, la matriz A es singular, esto es, no puede invertirse. Por tanto, se fija un valor del autovector c lo que conlleva que, a la hora de obtener los modos de vibración, estos se encuentren normalizados. Es decir, por sí solos, únicamente proporcionan información cualitativa de la estructura, esto es, no interesan los valores numéricos, sólo tiene importancia la forma de la estructura que se alcanza con dichos valores.

Posteriormente a la obtención de cada uno de los modos, se normalizan a la matriz de masa. Para ello, se agrupan los dos modos formando una matriz: Φ . Se emplea la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi' \cdot M \cdot \Phi}}$$

Donde M es la matriz de masa, calculada a partir de la masa por unidad de longitud (\bar{m}). Descomponiendo dicha matriz Φ , se consigue obtener cada vector de modo normalizado.

Esta operación se realiza con el propósito de reducir el coste computacional a la hora de obtener finalmente cada uno de los modos de vibración [1]. Además, es necesaria para posteriormente aplicar superposición modal.

Como la obtención de los modos de vibración se realiza de forma numérica, es necesario eliminar los denominados modos falsos. Esto es, al realizar alguna iteración se comprueba cómo alguna forma de algún modo no se corresponde con las condiciones de contorno definidas, por tanto, si se incluyese dicho modo de vibración, las respuestas obtenidas no serían las esperadas. Para eliminar esos modos, se comprueba que los desplazamientos verticales son ceros en los apoyos. Además, se impone una tolerancia de $1 \cdot 10^{-8}$ m en su cálculo. Esto es, si el desplazamiento vertical del modo calculado es mayor a dicha tolerancia, en el apoyo, entonces se considera no compatible con las condiciones de contorno, por tanto, no se tiene en cuenta para obtener las respuestas de la estructura.

2.4. ANÁLISIS DE MODOS

Las ecuaciones presentadas en el apartado previo permiten obtener los modos de flexión y torsión para desarrollar la respuesta de la estructura en cada punto. A su vez, el origen de dicha obtención está en la matriz A, la cual depende, de forma directa, de la variable α que define el esviaje de cada puente. Por tanto, tanto los modos de flexión como los de torsión están relacionados con el ángulo de esviaje que presente el puente. Esto implica que las frecuencias naturales logradas dependen, a su vez, de dicha variable α . En otras palabras, se establecería que las frecuencias naturales corresponden a la influencia del fenómeno de la torsión y de la flexión, de manera conjunta.

Para considerar los modos de torsión la variable α debe ser distinta de cero. Si esta variable es cero entonces, únicamente se tiene en cuenta el fenómeno de la flexión para obtener las frecuencias naturales.

Considerando que $\alpha \neq 0$, se obtienen todos los grados de libertad de la estructura, a partir de los modos de torsión y flexión:

- Los modos de flexión, normalizados a la matriz de masa, como desplazamientos verticales (según el eje local Z).
- Los modos de torsión, también normalizados a la matriz de masa, se definen como giros según el eje longitudinal de la estructura (eje local X).
- Al realizar el gradiente a los modos de flexión, se obtienen las rotaciones alrededor del eje vertical Y.

De esta manera, es posible utilizar la propiedad de superposición modal y obtener la respuesta de la estructura.

Asimismo, se deben presentar cada uno de los modelos de excitación externa actuante, junto con sus respectivos tiempos de paso, los cuales juegan un papel muy importante, como se va a desarrollar a continuación, en el presente trabajo.

2.5. ANÁLISIS TEMPORAL

A continuación, se analizan y presentan los modelos de cargas externas utilizados. Teniendo en cuenta, de forma genérica, una estructura ferroviaria [5], las cargas consideradas deben ser un eje singular y un conjunto de ejes simulando un tren. No obstante, el presente capítulo tiene el objetivo de mostrar las expresiones de los tiempos de paso de cada caso de carga sobre la estructura.

2.5.1. EJE SINGULAR

Para el caso del eje singular, este se modeliza suponiendo una carga puntual P , de valor constante, que circula a una determinada velocidad, v . De forma sencilla, el esquema correspondiente se define de la siguiente manera:

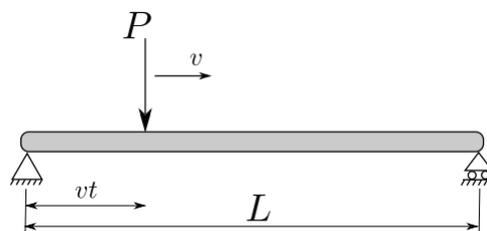


Figura 6: Representación de carga móvil singular sobre estructura [2].

El tiempo de paso del eje debe tener en cuenta la respuesta de la estructura en vibración libre. Es decir, el presente estudio se desarrolla una vez que el eje singular abandona la estructura. Por tanto, el tiempo máximo, en [s], que el eje está en la estructura es:

$$t_{\text{máx}} = \frac{L}{v_i}$$

Donde: L es la longitud del puente, en [m] y v_i cada una de las velocidades de paso del eje en [m/s].

Esta última expresión del tiempo es la necesaria para obtener los resultados. Sin embargo, como se ha indicado, en este caso se debe satisfacer la condición de vibración libre, lo que equivale a imponer un tiempo de paso del eje mayor. Esto es, se debe alargar el tiempo de cálculo para obtener los resultados en el instante $t_{\text{máx}}$. Por tanto, se muestra una expresión que permite recoger 20 ciclos con el objetivo de que la respuesta del puente se haya amortiguado debido al amortiguamiento modal (al igual que las frecuencias naturales y los modos de vibración, se trata de un parámetro modal). Así, el tiempo de paso que realmente se considera es:

$$t_{\text{paso}} = t_{\text{máx}} + \frac{20}{F_N}$$

Donde: F_N corresponde a una frecuencia natural de la estructura, en [Hz] dependiente del punto de observación.

De aquí en adelante, se estudiará la respuesta del punto central de la viga. Es decir, aquel que satisface la condición geométrica $x=L/2$. Así, la frecuencia natural será la primera. Se considera así porque se supone que el primer modo de vibración de flexión, con amplitud máxima en $L/2$, es el que contribuye fundamentalmente a la respuesta de la estructura (véase la Figura 9 y 10 (a)). Además, tal como se puede apreciar en dichas figuras, en todos los modos de flexión pares, se considera que el centro de la viga es un nodo, es decir, un punto con desplazamiento nulo, por ello, la contribución de estos modos es nula en este punto considerado. Esta hipótesis suele cumplirse en la mayor parte de puentes que pueden modelizarse como elementos viga. Por otro lado, habría que estudiar distintos puntos de la viga y considerar el caso más desfavorable, que dependerá de la contribución de todos los modos de vibración del puente.

2.5.2. CONJUNTO DE EJES

En el caso del conjunto de ejes se modela un conjunto de cargas puntuales de valor constante conforme [2]. Las cargas se encuentran separadas una determinada distancia d_k [6], simulando un vehículo ferroviario (véase Tabla 2). Se representan según el siguiente esquema:

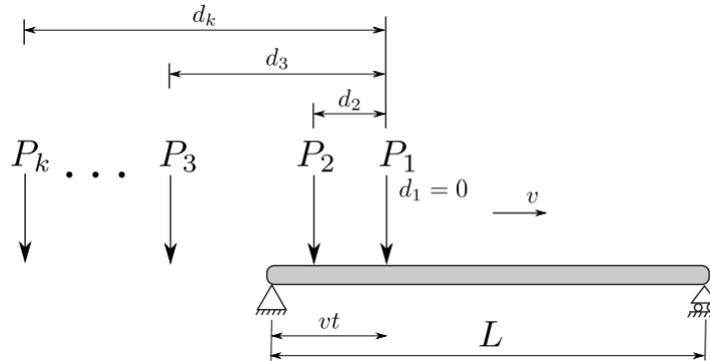


Figura 7: Representación de carga móvil conjunta sobre estructura [2].

Desde el punto de vista de los tiempos a considerar, se debe tener en cuenta la longitud de cada uno de los trenes. Sin embargo, los resultados que se obtienen no pueden ser en términos de vibración libre, ya que, al considerar un conjunto de ejes, se debe considerar vibración forzada. Esto es, aunque el primer eje abandone la estructura, siguen circulando los restantes ejes. El instante de tiempo de circulación del tren en la estructura se define como:

$$t_{\text{máx}} = \frac{L + L_{\text{tren}}}{v_i}$$

Donde L_{tren} es la longitud del tren, L la longitud de la estructura, ambas en [m] y v_i la velocidad de paso a considerar, en [m/s].

Para el tiempo de paso, se obtiene:

$$t_{\text{paso}} = t_{\text{máx}} + \frac{20}{F_N}$$

Donde F_N la primera frecuencia natural en [Hz].

Véase que mediante esta expresión se vuelve a recoger 20 periodos naturales correspondientes a la frecuencia F_N en vibración libre para obtener la mitigación de la respuesta como consecuencia del amortiguamiento.

Como se puede apreciar en estas últimas expresiones, a diferencia del eje singular, existe una dependencia con la longitud de cada tren considerado.

Como se aprecia en cada una de las expresiones presentadas, las velocidades muestran un subíndice i . Esto indica que se van a considerar diversas velocidades de circulación del vehículo o del eje, con el objetivo de observar la evolución de la respuesta de la estructura. Además, los valores tanto de las velocidades consideradas como de las longitudes estructurales se desarrollan en el siguiente apartado.

3 MODELOS DE ESTUDIO

Para la obtención de resultados, es necesario definir cada uno de los modelos a utilizar. Por un lado, cada una de las estructuras con sus respectivas condiciones (geométricas, de rigidez, amortiguamiento...). Por otro lado, los valores numéricos necesarios de cada uno de los modelos de carga.

3.1. MODELOS ESTRUCTURALES

En el presente trabajo se realizan varios modelos estructurales que precisan de diferentes características tales como amortiguamiento, anchura, canto de la sección, etc. Cada uno de estos parámetros deben ir modificándose y ajustándose, según las diversas longitudes consideradas. Esta dependencia con la longitud de cada puente se debe a que, en todo momento, se estudian estructuras isostáticas [14].

Respecto a las longitudes, con el objetivo de poder desarrollar diferentes casos y ver la variación de resultados, se definen cuatro diferentes: diez, quince, veinte y veinticinco metros.

Para cada una de las longitudes, según el Eurocódigo, [3], se deben tener en cuenta tres frecuencias naturales:

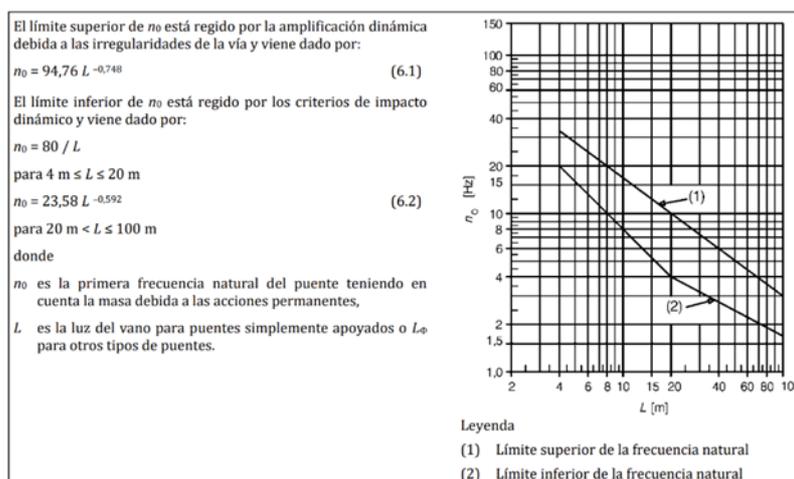


Figura 8: Rango de frecuencias a considerar. [3]

Tal como se indica en la imagen, se estudian la menor (definida según la línea 2), la mayor (valor de la línea 2 más el 70% de la diferencia entre los valores límites de la línea 1 y la línea 2) y un valor intermedio (valor de la línea 2 más el 35% de la diferencia entre los valores límites de la línea 1 y la línea 2). Cada uno de los valores de la frecuencia, definen una rigidez a flexión ($E \cdot I$) diferente, lo que posteriormente conlleva a valores variables en función de la frecuencia considerada. La expresión que permite calcular cada una de las tres frecuencias o rigideces es el siguiente:

$$n_0 = n_{0,i} + \frac{n_{0,s} - n_{0,i}}{100} \cdot f_p$$

Donde:

- $n_{0,i}$: Límite inferior, definido según la línea 2, en [Hz].
- $n_{0,s}$: Límite superior, definido según la línea 1, en [Hz].
- f_p : Rango de frecuencia. Variable que puede adquirir valores de 0, 35 o 70. Al proporcionar dichos valores es posible obtener el valor de la frecuencia correspondiente en cada caso.

La rigidez a flexión ($E \cdot I$) se calcula de la siguiente forma, en $[N \cdot m^2]$:

$$E \cdot I = \frac{(n_0 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4} \cdot m$$

Siendo:

- \bar{m} : Masa por unidad de longitud en $[kg/m]$.

Para obtener el valor de la inercia a flexión (I), se resuelve la siguiente ecuación:

$$I = \frac{E \cdot I}{E}$$

Donde E se corresponde con el módulo de elasticidad.

Asimismo, una vez obtenida la inercia a flexión en $[m^4]$, se calcula la inercia a torsión como:

$$J = 2 \cdot I$$

Es decir, dos veces la inercia a flexión. La inercia a torsión, por tanto, se muestra en $[m^4]$. Para el presente desarrollo, se introduce esta expresión de la inercia a torsión como una suposición y, por tanto, los resultados se encuentran limitados a esta hipótesis, aunque se ha comprobado que las conclusiones obtenidas con este valor son representativas.

Esto conlleva que, al igual que la inercia a flexión, la correspondiente a torsión también varía dependiendo de cada una de las frecuencias consideradas.

Respecto al amortiguamiento estructural, según [3], se expone la siguiente tabla dependiendo del tipo de puente considerado.

Tipo de puente	ξ Límite inferior del porcentaje de amortiguamiento crítico [%]	
	Luz $L < 20$ m	Luz $L \geq 20$ m
Acero y mixto	$\zeta = 0,5 + 0,125 (20 - L)$	$\zeta = 0,5$
Hormigón pretensado	$\zeta = 1,0 + 0,07 (20 - L)$	$\zeta = 1,0$
Vigas prefabricadas y hormigón armado	$\zeta = 1,5 + 0,07 (20 - L)$	$\zeta = 1,5$

Tabla 1: Amortiguamiento crítico según el tipo de puente. [3]

Como se puede apreciar en la tabla, independientemente del tipo de puente a considerar, los valores de amortiguamiento crítico dependen de la longitud de la estructura. Buscando una simplificación, se utilizan las expresiones correspondientes a hormigón pretensado en todos los modelos estructurales.

Por otro lado, la masa lineal (\bar{m}) a considerar también es dependiente de cada una de las luces de la estructura. Se define según la siguiente expresión, en $[kg/m]$:

$$\bar{m} = 1000 \cdot L$$

Siendo L cada una de las longitudes a considerar, en $[m]$.

Para el canto de cada puente, se ha seguido la recomendación publicada en la referencia [11], de Javier Manterola. Así, de una manera genérica, el canto de la sección se encuentra limitado entre dos valores:

$$\frac{L}{30} < h < \frac{L}{10}$$

Con el objetivo de precisar un único valor, se define la siguiente aproximación, en metros:

$$h = \frac{L}{15}$$

Donde L es cada una de las luces consideradas, en [m].

Respecto a los esviajes, con el objetivo de alcanzar una mayor precisión en los resultados, se consideran tres situaciones; esviaje nulo, esviaje de 25° y esviaje de 45°. Al establecer cada uno de estos esviajes, se definen los tres parámetros α en el desarrollo analítico. No obstante, cada esviaje debería tener asociado un radio de giro (r) tal como se ha definido en el apartado 2.3. Aun así, con el propósito de simplificar los cálculos y una vez comprobado que prácticamente no sufre afección los resultados, se decide adoptar para todos los casos oportunos, un radio de giro de 0.5967 m.

Las velocidades de cálculo se establecen de 100 km/h a 500 km/h, con un paso de 10 km/h. Se han elegido ese rango de velocidades, buscando un análisis realista del problema [8].

Por último, a la hora de resolver la respuesta del puente debemos tener en cuenta una serie de consideraciones, desde el punto de vista de los modos a considerar. Esto es, el punto de observación de todos los resultados será el punto intermedio ($L/2$), como ya se comentó anteriormente. A partir del modo segundo, se deben tener en cuenta los nodos existentes. Los nodos son puntos donde la deformación es nula, por tanto, al considerar ese punto intermedio, los modos pares presentan la singularidad de que en esos puntos existe un nodo, por tanto, la contribución de dichos modos a la respuesta total es nula. De esta manera, en todos los puentes de estudio, solo se consideran los modos primero, tercero, quinto y séptimo para obtener los resultados. Se presenta la siguiente imagen para apreciar la forma de los cinco primeros modos de flexión de un puente sin esviaje, por tanto, sin tener en cuenta la torsión. Así, a partir del segundo modo, se pueden visualizar los puntos con desplazamiento nulo, nodos:

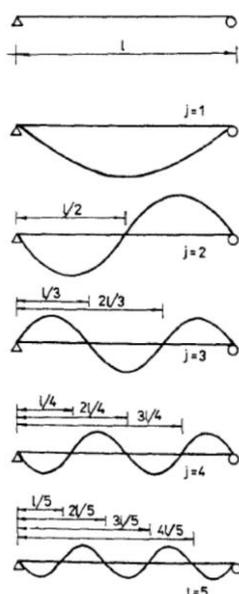
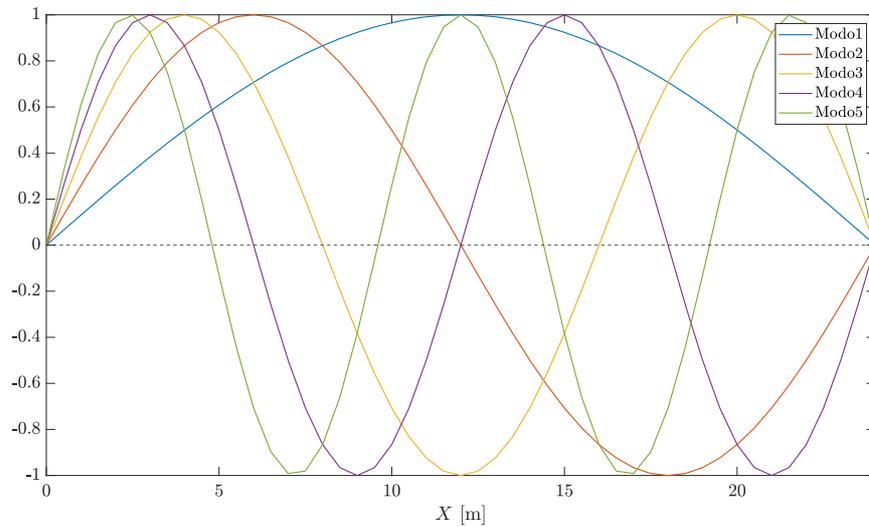


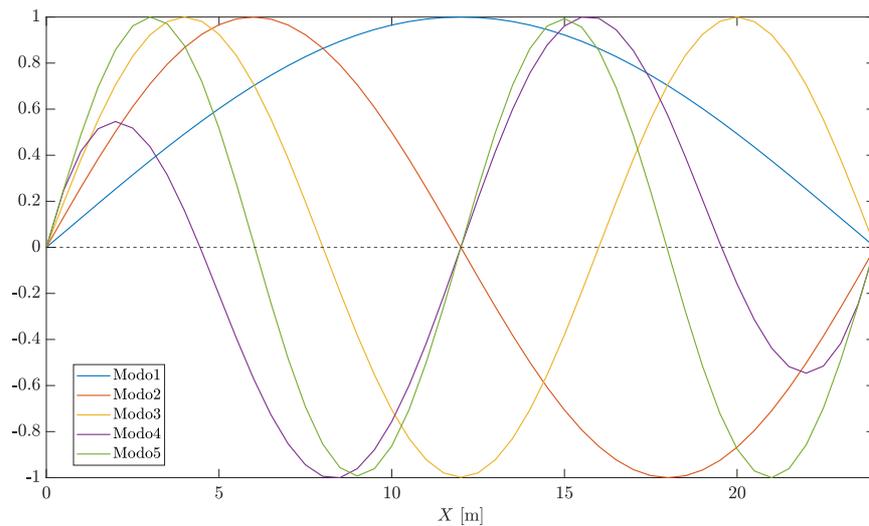
Figura 9: Representación, de forma genérica, de los cinco primeros modos de flexión que se obtienen en el caso de una viga simplemente apoyada.

Como se aprecia en la figura, y tal como se ha comentado previamente, a partir del segundo modo se suceden puntos de la estructura que no presentan ninguna deformación. Se suceden de manera uniforme, es decir, el nodo del segundo modo se encuentra a $L/2$ de ambos extremos, los nodos del tercer modo ocurren cada $L/3$ y sucesivamente en los siguientes casos. Por tanto, al observar tanto el segundo como el cuarto modo de vibración, se pueden distinguir nodos en el punto medio de la estructura, lo que conlleva que dichos modos no realicen contribución en la respuesta de la estructura.

Si se representan los modos de flexión, para un caso particular, por ejemplo, de longitud de 25 metros, considerando esvía nulo y un esvía de 25°, entonces se obtienen las siguientes figuras:



(a)



(b)

Figura 10: Representación, de forma genérica, de los cinco primeros modos de flexión que se obtienen en el caso de una viga simplemente apoyada. Caso (a): Esvía nulo. Caso (b): Esvía de 25°.

Como se puede apreciar, el caso (a) se corresponde con la Figura 9. Sin embargo, en el caso (b), considerando un esvía no nulo, aunque la forma y los valores de los diferentes modos se siguen manteniendo, la diferencia más notable se observa a partir del modo 4. Por un lado, se puede observar cómo el modo 4 posee una menor amplitud para puntos que se encuentran próximos a ambos extremos si se compara con el caso (a). Por otro lado, el modo 5 presenta la peculiaridad de poseer un nodo en $L/2$, por tanto, la contribución de este modo a la respuesta de la estructura en dicho punto es nula. También es necesario destacar que los modos primeros, segundos y terceros son idénticos a los expuestos en el caso sin esvía.

También es necesario señalar que los valores alcanzados tanto en un caso como en el otro se deben a la normalización realizada a valor 1.

Algunas variables genéricas que se utilizan para desarrollar los diferentes análisis son:

Coficiente de Poisson: $\nu = 0.20$

Módulo de deformación transversal, en [N/m²]:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

3.2. MODELOS DE CARGA

Una vez presentados los dos modelos de excitación externa (Figura 6 y Figura 7), se introducen los valores numéricos de las cargas de cada uno de ellos junto con las distancias características o distancia entre ejes.

En primer lugar, para la carga puntual, el valor constante que se adopta, de P , es de 100 kN.

En segundo lugar, para el conjunto de ejes, los modelos de trenes se han definido según [3]. De esta manera, se trabaja con los modelos de carga HSLM, según el Eurocódigo [3], que representan cargas de trenes para pasajeros cuya velocidad es superior a 200 km/h.

Existen dos modelos HSLM: HSLM-A y HSLM-B. Todos los modelos estructurales poseen una luz superior a 7 metros. Además, solo se considera un vano, por tanto, el modelo de carga elegido es HSLM-A [3]. El modelo de carga de HSLM-A comprende diez tipos de trenes; desde A1 hasta A10.

A continuación, se muestra una tabla con todas las características que se deben tener en cuenta a la hora de desarrollar los resultados:

Tren Universal	Número de coches intermedios N	Longitud del coche D [m]	Separación entre los ejes del bogie d [m]	Carga puntual P [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

Tabla 2: Modelo de carga de trenes HSLMA [3].

Esta tabla resulta de gran importancia para poder obtener los resultados numéricos. Por un lado, cada uno de los valores de separación entre ejes de bogie (cuarta columna), son las distancias d_k que se han presentado en la Figura 7, en el apartado 2.5.2. Por otro lado, la longitud del coche (tercera columna) es la denominada longitud característica del tren que se debe tener en cuenta en el capítulo 4.2. Asimismo, en la última columna se exponen cada uno de los valores que se adoptan de la carga de cada tren.

De una forma más explícita, cada uno de los modelos de trenes imitan el siguiente esquema:

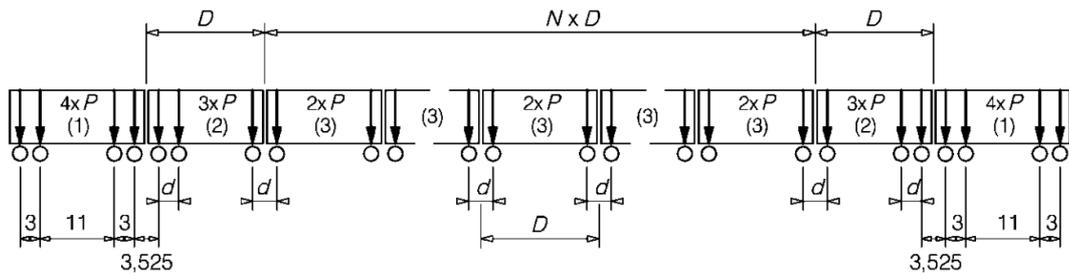


Figura 11: Modelo de carga de trenes HSLMA [3].

4 RESULTADOS

4.1. INTRODUCCIÓN

Tal como se indicó inicialmente, el objetivo principal del presente trabajo es mostrar las diferencias o similitudes que existen entre modelos de puentes oblicuos y sin esviaje. Para ello, se han presentado tanto los modelos estructurales como los modelos de carga. En el presente capítulo se exponen las respuestas de todos esos modelos, en términos de aceleraciones. No obstante, antes de desarrollar cada uno de los resultados, se debe considerar algunas consideraciones previas.

4.2. CONSIDERACIONES PREVIAS

En primer lugar, como se explicó en el apartado 2.4., los modos de flexión permiten definir los desplazamientos verticales y los modos de torsión los giros alrededor del eje longitudinal de la estructura. No obstante, los desplazamientos verticales también pueden ser calculados a partir del giro de torsión. Esto se muestra en la siguiente expresión:

$$v(x) = v_1(x) + \theta(x) \cdot \text{brazo}$$

Siendo:

v : Desplazamiento vertical total considerando el efecto conjunto de la flexión y de la torsión, en [m].

v_1 : Desplazamiento vertical obtenido a partir de los modos de flexión, en [m].

θ : Giro de torsión calculado según los modos de torsión, en [rad].

brazo: Variable que considera la distancia desde el centro hasta el extremo de la sección que permite obtener la componente del desplazamiento vertical asociada al fenómeno de la torsión. La expresión que se utiliza es la siguiente:

$$\text{brazo} = -\frac{B}{2}$$

Donde B es el ancho considerado de la sección, en [m]. En la siguiente figura se puede observar, de forma gráfica, la distancia que se tiene en cuenta de forma genérica:

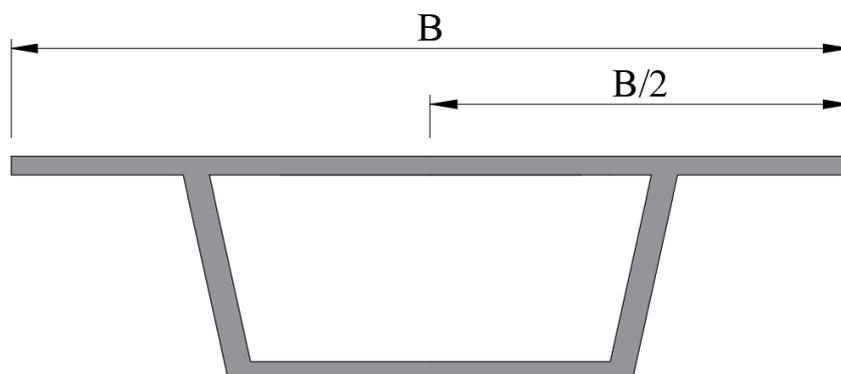


Figura 12: Representación de sección genérica.

Como se puede apreciar en la expresión, se debe introducir el signo negativo, como caso particular. Esto se debe a la normalización que se realiza para poder obtener cada uno de los valores de los modos de vibración. Por tanto, el signo se establece con el objetivo de mostrar la situación más favorable en los resultados. En otras palabras, los modos de torsión se producen sobre el eje local X, por consiguiente, existe la posibilidad de obtener resultados negativos en un lado y positivos en el otro.

No obstante, la forma más habitual de obtener resultados dinámicos es en términos de aceleraciones. En este caso, se define la siguiente expresión:

$$a_C = a_F + a_T$$

Siendo:

a_F : Parte correspondiente a la flexión en $[m/s^2]$.

a_T : Componente correspondiente a la torsión, en $[m/s^2]$.

De aquí hacia delante, siempre que se mencione la respuesta o aceleración conjunta, se hará referencia a esta expresión. Asimismo, cuando se mencione respuesta individual se realiza la referencia a a_F . A su vez, cada una de ellas se obtiene de la siguiente manera:

$$a_F = (A(m, t > t_{m\acute{a}x}))$$

$$a_T = (A(m + 1, t > t_{m\acute{a}x}) \cdot \text{brazo})$$

Donde:

A: Aceleración de la estructura, calculada mediante superposición modal, en $[m/s^2]$.

Esta aceleración está definida en cada uno de los nudos en los que se discretiza a la estructura y en cada instante de tiempo hasta el tiempo de paso considerado ($t_{m\acute{a}x}$ correspondiente). Por ejemplo, se puede representar la aceleración del punto central, respecto al tiempo:

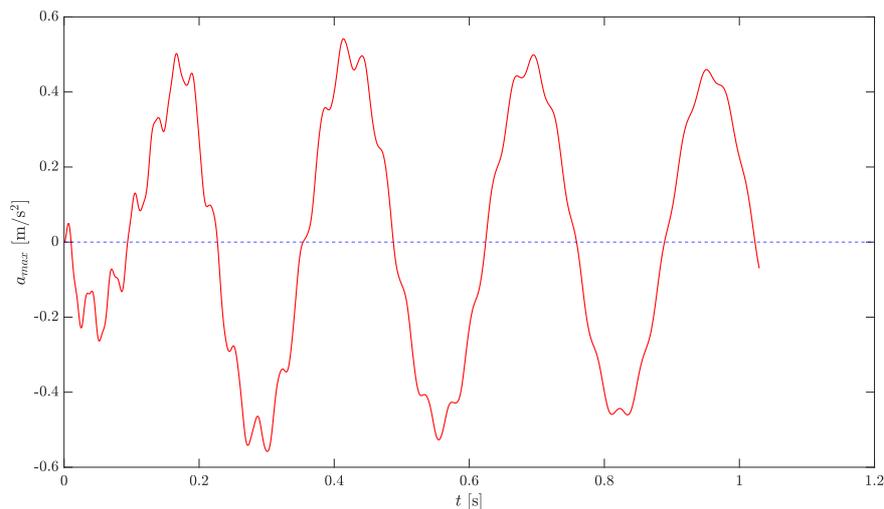


Figura 13: Representación de la aceleración experimental por el punto medio, para caso general, respecto al tiempo.

Como se observa, la aceleración experimental por el punto medio oscila conforme el instante de tiempo considerado es mayor. Esto significa que la respuesta de la estructura tiende a disminuir con el tiempo hasta alcanzar la situación de equilibrio (reposo). La razón de este suceso se fundamenta en el amortiguamiento modal considerado, el cual puede entenderse como un disipador de energía de la estructura [1].

Si se observa detenidamente la expresión de las dos componentes de las aceleraciones, se puede establecer algunas consideraciones sobre la relación con la expresión primera de desplazamiento vertical. Por un lado,

A(m) procede, en definitiva, de los modos de flexión, por tanto, este valor de la aceleración se puede expresar como:

$$A(m) = \frac{d^2(v_1)}{dt^2}$$

Por otro lado, A(m+1) es el valor de la aceleración por el que hay que multiplicar el brazo. Esto conlleva una correspondencia directa con los modos de torsión. Por ello, esta aceleración puede ser expresada de la siguiente manera:

$$A(m + 1) = \frac{d^2(\theta)}{dt^2}$$

m: Grado de libertad de desplazamiento vertical situado en L/2, para todos los casos. En el caso de la componente asociada a la torsión, debe ser m+1.

t_{máx}: Tiempo de paso o cálculo, variable según se considere tipo de excitación, en [s]. Tal como se mostró previamente, dependiendo de la consideración de carga externa, la expresión utilizada será diferente.

En definitiva, los resultados pueden obtenerse mediante el valor de a_c o mediante a_F. En el primer caso, se tendrá en cuenta el efecto de la torsión y de la flexión. En el segundo, únicamente se considera la flexión.

A la hora de definir los resultados, es necesario indicar que cualquier componente de la aceleración (a_F y a_T), se muestra su valor máximo. Es decir, mediante el valor de t_{máx} es posible obtener la aceleración máxima correspondiente al paso del eje singular o conjunto de ejes por la estructura.

En segundo lugar, a la hora de obtener los resultados, se observará un fenómeno común en las respuestas de estructuras ante excitaciones externas móviles: el fenómeno de la resonancia. Se encuentra asociado con las frecuencias naturales de los vehículos y de la estructura. Si se hace pasar sobre cualquier estructura, a una determinada velocidad de paso, un eje o un conjunto de ejes con una frecuencia que coincida con alguna frecuencia natural de la estructura, entonces, se produce el fenómeno de la resonancia. Esto es, se origina una amplificación de la respuesta de la estructura. Es fundamental el control de este fenómeno ya que puede originar problemas de conservación de la estructura.

Asociado a este fenómeno, existen dos tipos de velocidades, en situación de vibración libre, es decir, una vez que la carga abandona el puente: la velocidad de cancelación y la velocidad de resonancia [7].

Las velocidades de cancelación son todas aquellas en las que la respuesta de la estructura es nula. Las velocidades de resonancia (se asocian al fenómeno antes descrito), son aquellas donde la respuesta de la estructura alcanza un máximo.

Para el caso de vibración forzada, las respuestas máximas se van a dar en velocidades de resonancia y los mínimos, según velocidades de cancelación. No obstante, la forma de la respuesta no es similar al caso de vibración libre.

No obstante, vamos a tener más de una velocidad de cancelación y de resonancia. El objetivo es definir todos los valores de ambas velocidades para fijar los límites de velocidad de paso del eje.

Para el caso de la velocidad de cancelación se utiliza la siguiente expresión:

$$V_{cancelación} = \frac{F_N \cdot L}{(j - 0.5)} \quad \forall j = 2, 3, \dots, 10$$

Donde F_N es la primera frecuencia natural del puente, en [Hz] y L, longitud del puente, en [m].

Para el caso de la velocidad de resonancia:

$$V_{resonancia,puente} = \frac{F_N \cdot L}{j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, 10$$

Donde F_N es la primera frecuencia natural del puente en [Hz] y L, longitud del puente en [m].

Al representar la respuesta de la estructura, mediante las aceleraciones, según diferentes velocidades de paso de una carga móvil, se alcanzará una gráfica de mínimos y máximos. No obstante, estos máximos pueden deberse a una velocidad de resonancia en función del tipo de tren. Si esta se corresponde con una velocidad de resonancia del puente, la respuesta será mayor. Esto último se desarrolla debido a que la propia frecuencia de la carga móvil puede coincidir con un múltiplo de la frecuencia natural de la estructura.

La expresión de la velocidad de resonancia del vehículo es la siguiente:

$$V_{\text{resonancia,tren}} = \frac{F_N \cdot L_{\text{tren}}}{j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, 10$$

Donde F_N es la primera frecuencia natural del puente en [Hz] y L , longitud característica del tren considerado en [m], según la tabla 2.

4.3. RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con todas las consideraciones que se han expuesto previamente. En cada una de las figuras, se representan todos los casos de vibración forzada (todos los trenes HSLMA) y el caso de carga puntual o en situación de vibración libre. Lo que muestra cada gráfica que se define a continuación es la aceleración máxima experimentada por el punto medio en función de las diversas velocidades de circulación de la carga externa. Se observan cinco respuestas en cada una de las gráficas: la asociada a la situación sin esviaje (color negro), las correspondientes a un esviaje de 25° (en rojo) y las debida a un esviaje de 45° (representadas en azul). Existen dos respuestas, tal como se ha comentado previamente, para los casos con esviaje, una asociada a la contribución de la flexión y torsión (línea continua) y la otra, únicamente teniendo en cuenta la contribución de flexión (línea discontinua). Además, se muestran, según cada color correspondiente y en formato vertical, las velocidades características de cada caso para observar dónde se producen las respuestas máximas y mínimas. De esta manera, en línea discontinua se exponen las velocidades de resonancia del puente, en línea de puntos las velocidades de cancelación y en línea de punto raya, las velocidades de resonancia del puente para ese vehículo.

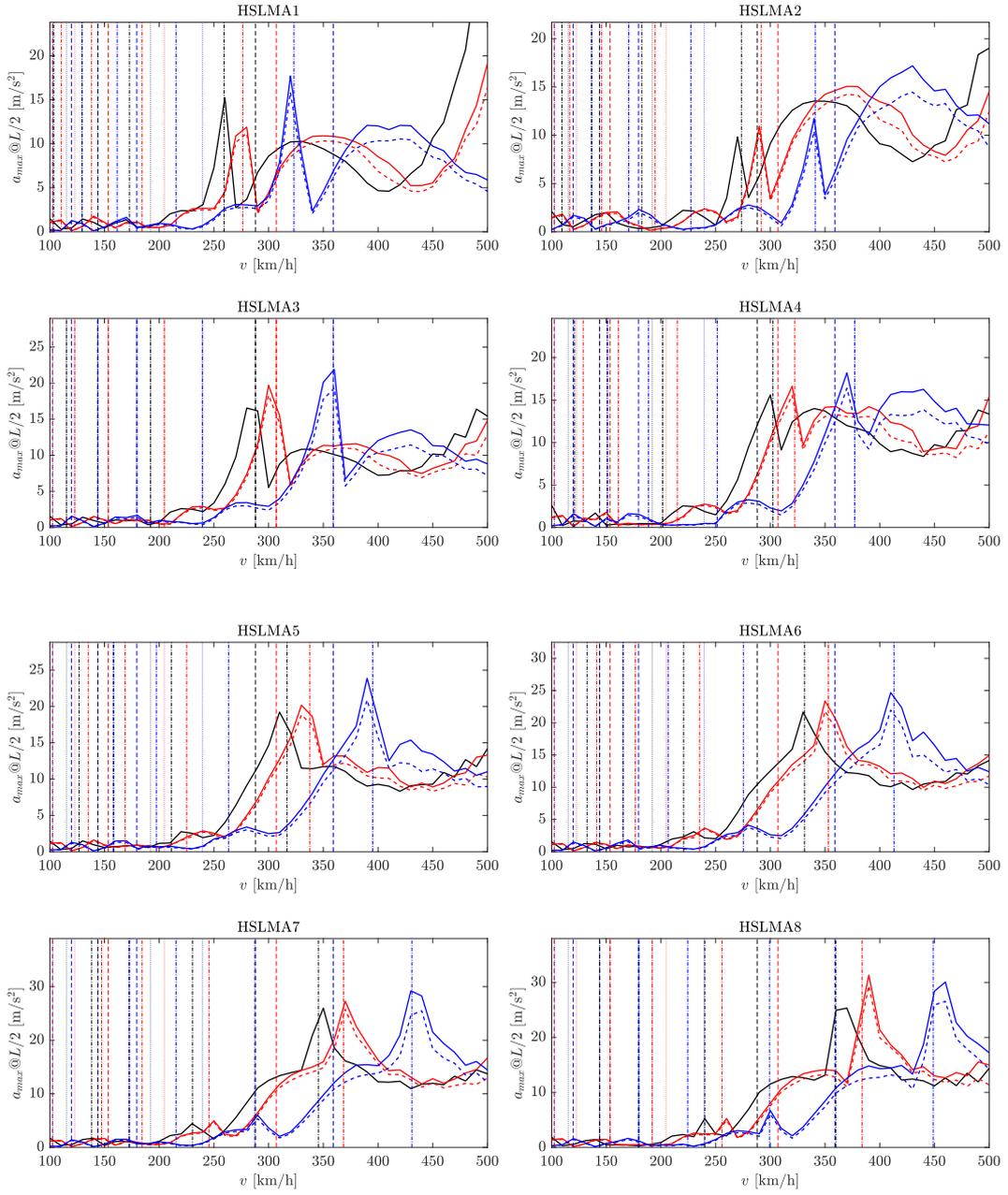
En el caso de las velocidades de resonancia del puente para los vehículos, se observa que a medida que aumenta la longitud característica de cada tren, los máximos se desplazan hacia la derecha. Es decir, se alcanzan para velocidades de paso cada vez mayores. Esto sucede en todos los casos que se muestran a continuación.

El objetivo de representar las soluciones de esta manera es ver qué diferencias o similitudes se aprecian entre las respuestas del puente, sin tener en cuenta ningún esviaje y considerando dos esviajes diferentes. Se exponen los resultados según los valores de las rigideces [3] de todos los puentes de forma conjunta.

4.3.1. LÍMITE INFERIOR DEL EUROCÓDIGO

Los resultados que se muestran a continuación se encuentran expuestos para el valor límite inferior definido en [3]. Es decir, el rango de frecuencia toma el valor de cero: $f_p = 0$.

Se presentan cuatro figuras, cada una de ellas correspondiente a un puente con una determinada longitud. Así, la Figura 14, muestra los once gráficos para el caso de una longitud de 10 metros. La Figura 15 expone los resultados para una longitud de 15 metros. La Figura 16 presenta los resultados para el caso de longitud de 20 metros y la Figura 17 expone los resultados para la situación de longitud de 25 metros.



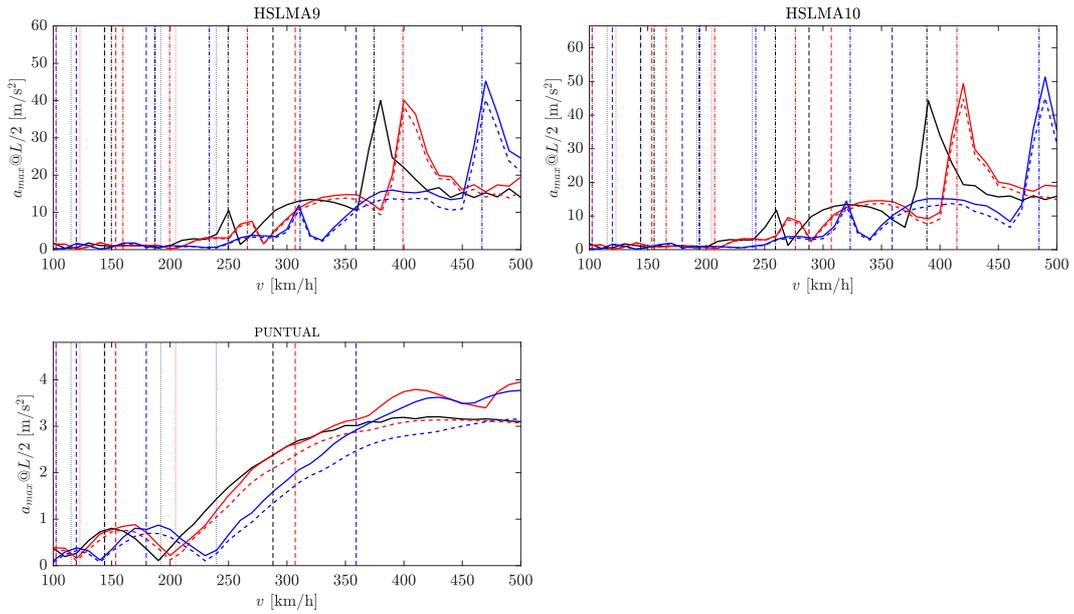
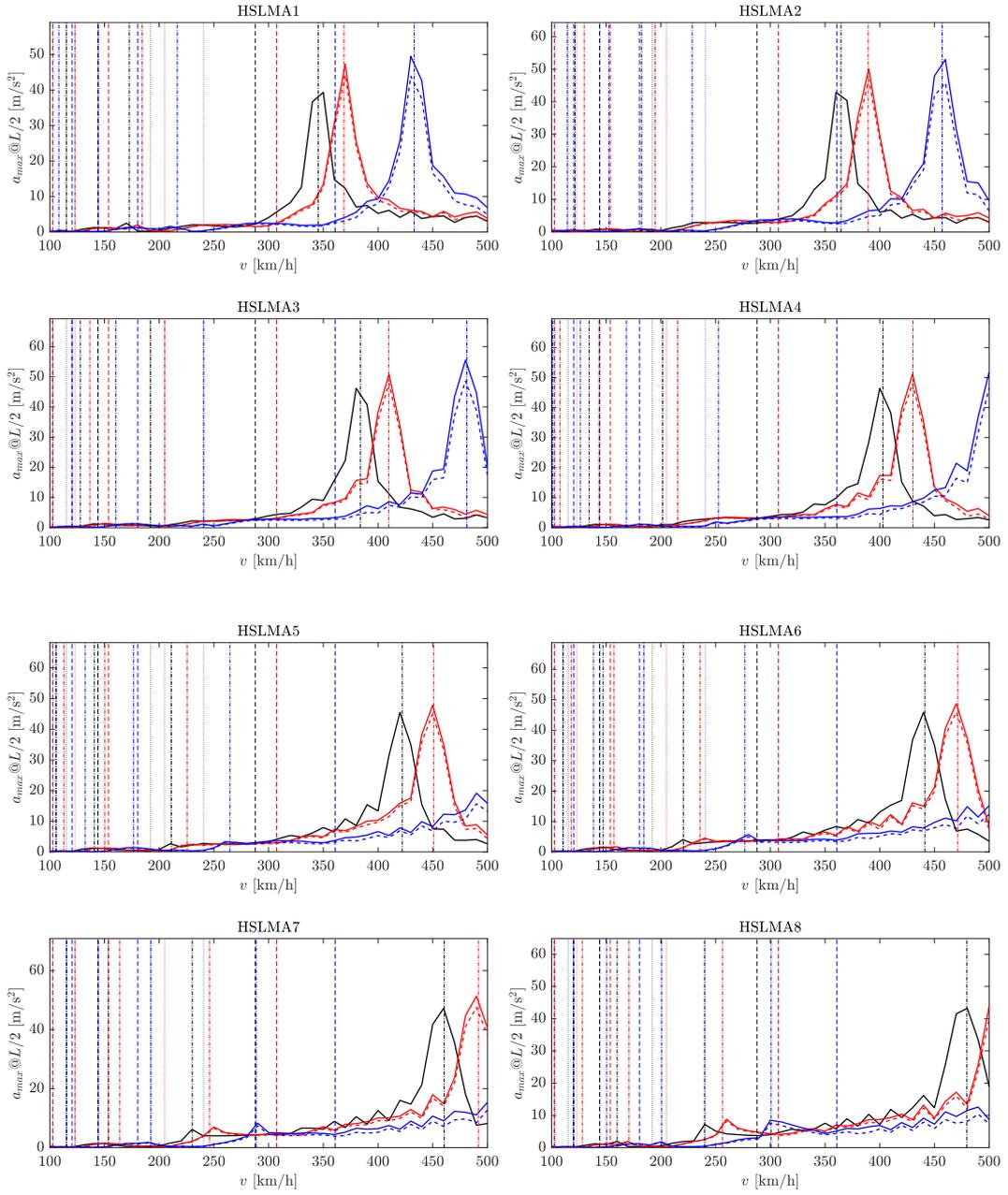


Figura 14: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 10 metros, todos los esviajes y rigidez correspondiente al límite inferior según [3]. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



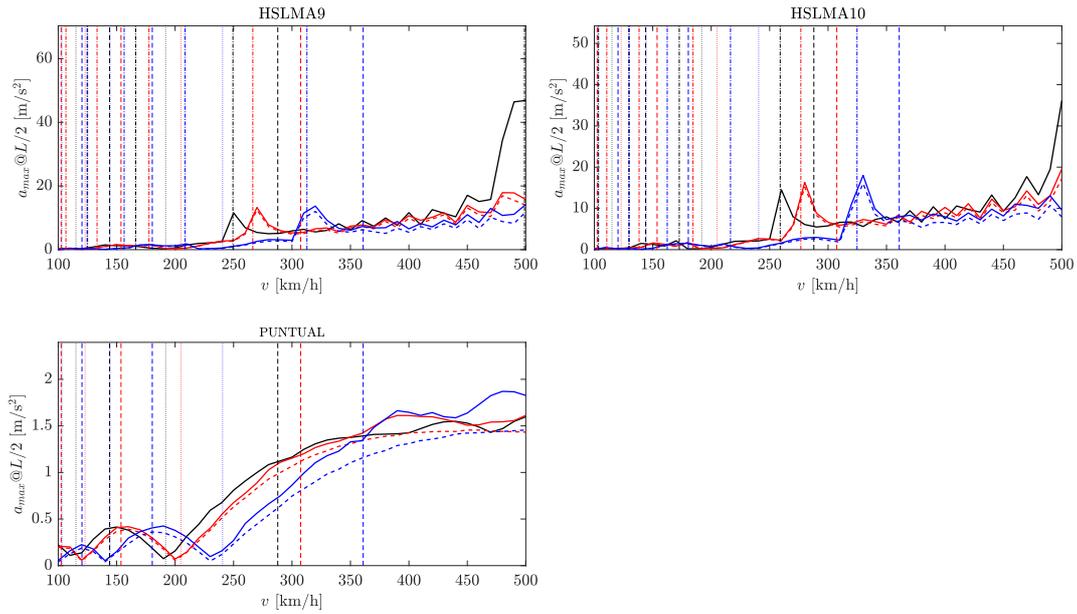
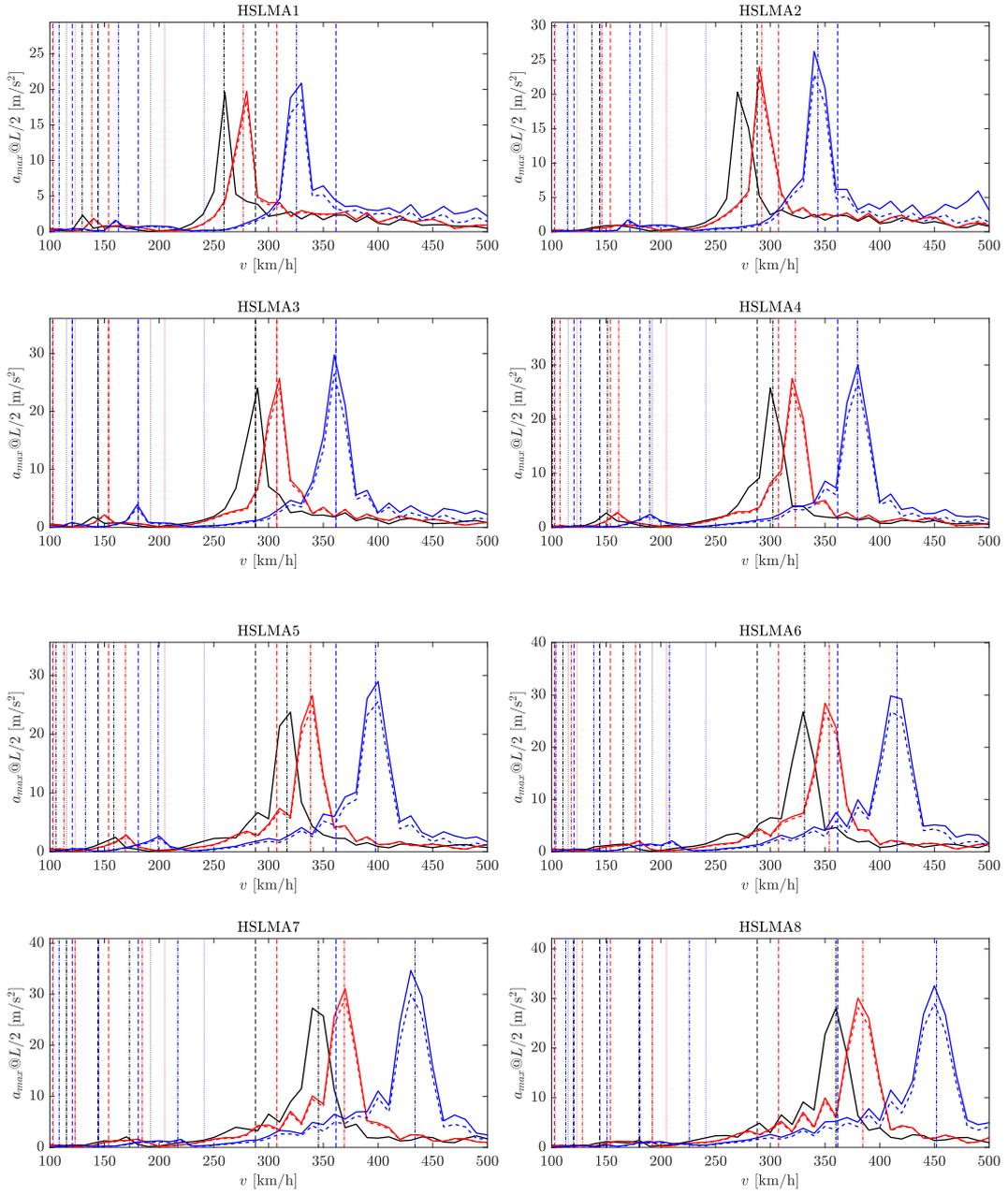


Figura 15: Aceleración del punto medio del puente, en [m/s²], respecto a velocidad de paso, en [km/h] para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 15 metros, todos los esviajes y rigidez correspondiente al límite inferior según [3]. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



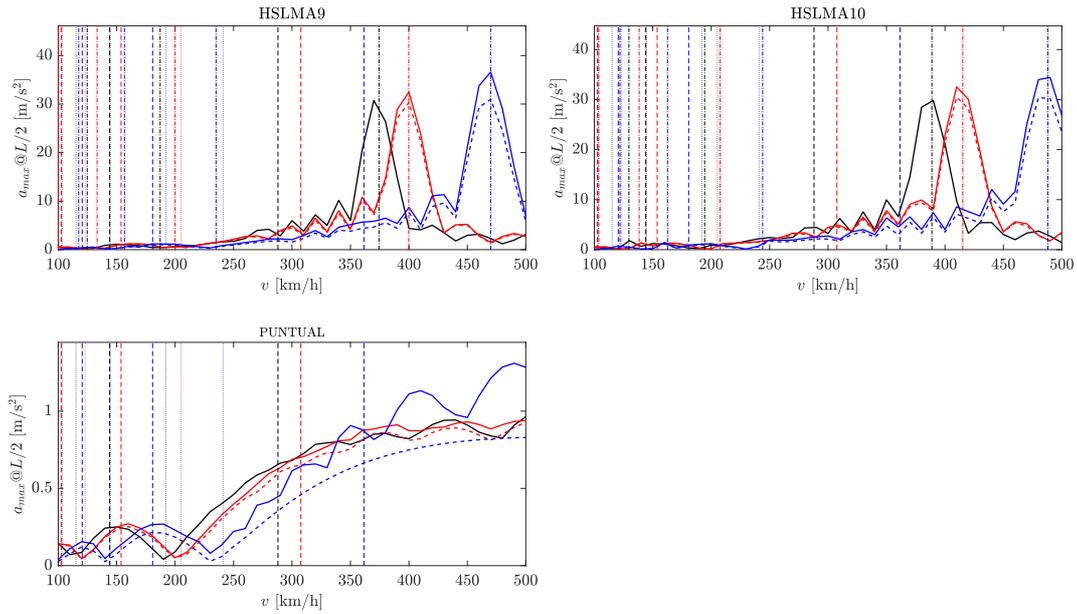
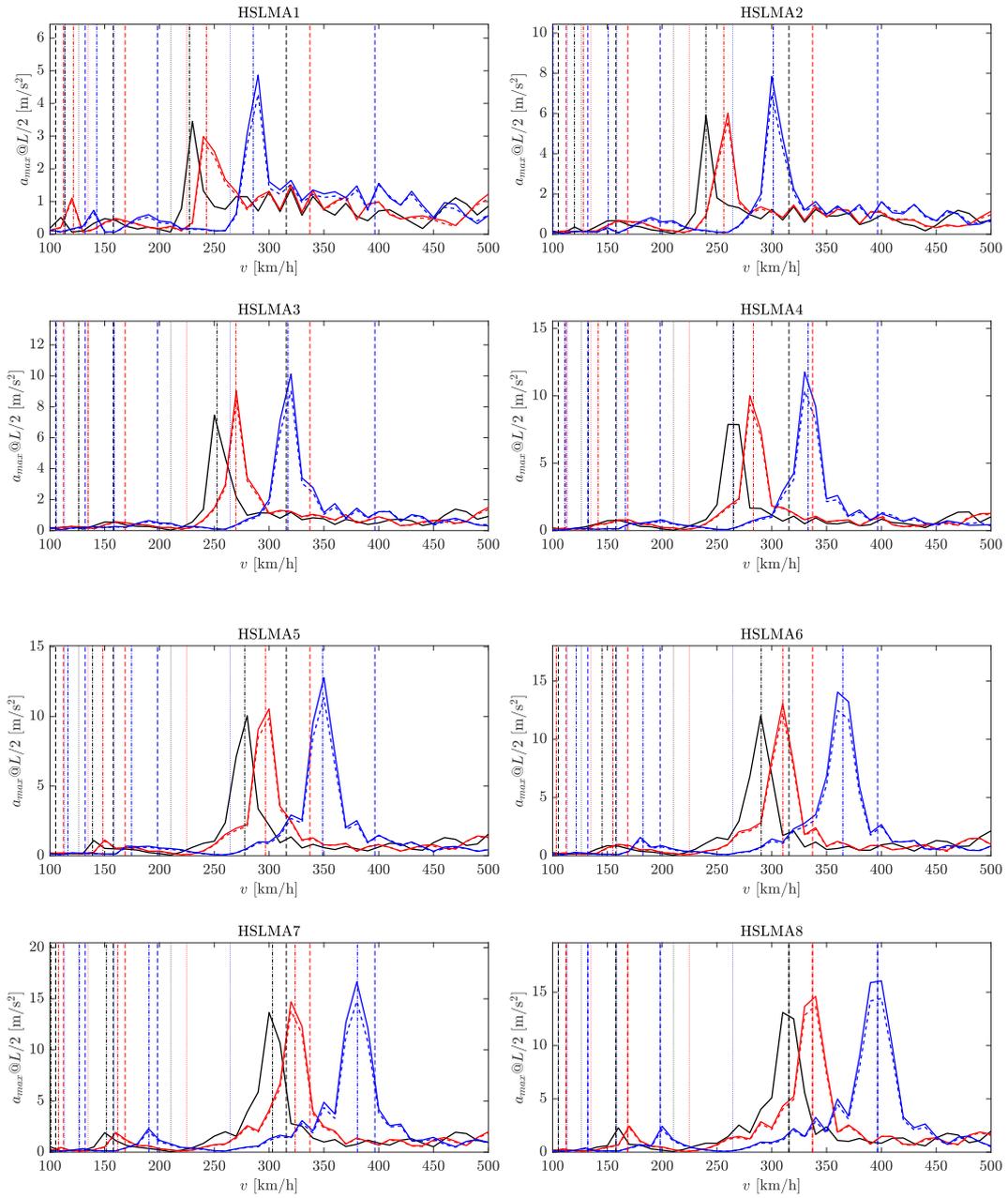


Figura 16: Aceleración del punto medio del puente, en [m/s²], respecto a velocidad de paso, en [km/h] para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 20 metros, todos los esviajes y rigidez correspondiente al límite inferior según [3]. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



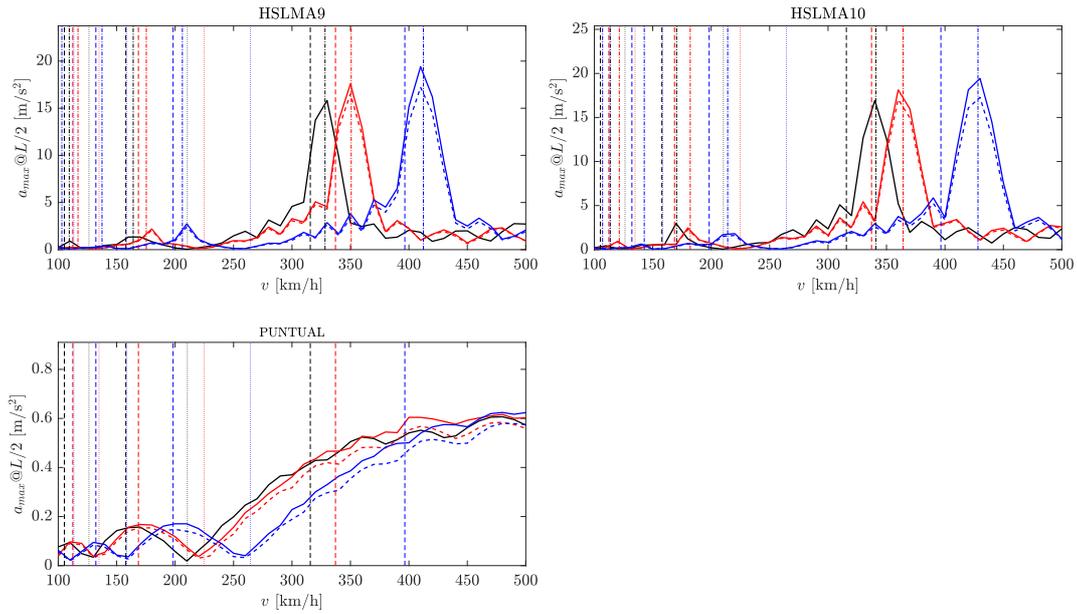


Figura 17: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 25 metros, todos los esviajes y rigidez correspondiente al límite inferior según [3]. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.

4.3.1.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En primer lugar, como se aprecia en todas las figuras expuestas sucede que las respuestas representadas tienen la misma forma. Es decir, se muestran gráficas con mínimos y máximos según diferentes velocidades de cancelación y resonancia de la estructura. Sin embargo, dichas velocidades características no coinciden en los tres casos representados de esviaje. Es más, conforme aumenta el esviaje considerado, en cada puente, los mínimos y máximos alcanzados se desplazan hacia velocidades superiores. La razón de dicho desplazamiento se fundamenta en la propia definición de dichas velocidades. Para un mismo puente con una determinada longitud, a medida que aumenta el esviaje considerado, las frecuencias fundamentales son mayores, por tanto, mayores serán las velocidades de resonancia y cancelación. Ese desplazamiento hacia la derecha origina que se sucedan divergencias y convergencias entre las respuestas.

También sucede en todos los casos cómo las respuestas entre un esviaje nulo y un esviaje de 25° están más próximas entre sí. Si se observa cualquier caso de las aceleraciones para un esviaje de 45° y un esviaje nulo, se muestra una mayor divergencia en los resultados. Además, conforme aumenta el esviaje considerado, la respuesta se hace mayor, considerando siempre el efecto de torsión y flexión. También se expone cómo los máximos relativos alcanzados en cada situación se logran para velocidades de circulación elevadas (generalmente superiores a 250 km/h). Esto último pone en evidencia que para velocidades de circulación inferiores a 200 km/h, aproximadamente, los fenómenos de resonancia no se desarrollan de forma tan importante [9].

Sin embargo, dichos máximos alcanzados (independientemente del esviaje y longitud considerado) no cumple con el límite máximo (5 m/s^2 o 3.5 m/s^2) exigido por el Eurocódigo para la situación de vía en placa o vía sobre balasto, en el caso de los trenes. Únicamente se satisface dicho límite para velocidades de circulación reducidas (entre 100 y 250 km/h, aproximadamente). No obstante, el caso de HSLMA1 de la Figura 17, correspondiente a una longitud de 25 metros, sí se cumple en los resultados de esviaje nulo y esviaje intermedio (25°). Para los tres casos de carga puntual (ver Figuras 15, 16 y 17 caso de carga puntual), sí cumplen con la normativa. Sin embargo, para la situación de menor longitud, 10 metros, (Figura 14), el límite correspondiente a 3.5 m/s^2 no se cumple para los dos casos de esviaje considerado. Para un esviaje nulo, la aceleración máxima mostrada sí se encuentra por debajo del límite.

Para todas las situaciones que se desarrollan a continuación, todas las referencias de las respuestas de esviajes de 25° y 45° tienen en cuenta la contribución conjunta de la flexión y torsión (líneas continuas). Además, a la hora de exponer la diferencia, en términos porcentuales, de los valores alcanzados se hará referencia a los máximos logrados en cada situación de esviaje. Posteriormente, se realizarán algunos comentarios sobre las diferencias y similitudes que presentan las dos respuestas representadas para los casos con esviaje.

En el caso de una longitud de 10 metros (Figura 14), para la situación de un esviaje de 25° se pueden observar las semejanzas y diferencias que presentan estas respuestas respecto a las correspondientes sin esviaje. En primer lugar, para longitudes características reducidas, según Tabla 2, (véase caso de HSLMA1 hasta HSLMA4), ambas respuestas son muy similares para velocidades de circulación reducidas (entre 100 y 250 km/h, aproximadamente). Conforme aumenta la longitud característica de los trenes, se van sucediendo una mayor divergencia entre los dos resultados. Esto significa que las respuestas de esviaje de 25° son mayores que las de esviaje nulo. Analizando los máximos obtenidos, ya que resultan los más sencillos de estudiar, se puede establecer que las respuestas de esviaje de 25° son superiores que las de esviaje nulo en un 9%. Por ejemplo, desde HSLMA7 hasta HSLMA10, se suceden dos velocidades de resonancia para ambos esviajes que provocan dos máximos en las repuestas, en el intervalo entre 200 y 300 km/h (véase la evolución de ambos máximos). Como se puede apreciar, para los casos de HSLMA9 y HSLMA10, el valor alcanzado con esviaje nulo es inferior al valor desarrollado con esviaje de 25°. Respecto a velocidades de circulación más elevadas, sucede que los máximos debidos a velocidades de resonancia se encuentran muy próximos. Conforme aumenta la longitud característica, los valores se logran para velocidades de circulación más elevadas. Al observar la diferencia de velocidades de resonancia mayores entre HSLMA1 y HSLMA10, se pone de manifiesto que conforme aumenta la longitud característica, mayor es la diferencia entre valores de velocidades características. Para la situación de esviaje de 45°, sucede lo comentado anteriormente, pero de forma más pronunciada. Esto es, la diferencia que presentan con respuestas sin esviaje es mayor y más notable. De forma general, los valores logrados para un esviaje de 45° son mayores en un 18%, en términos medios, que los alcanzados para un esviaje nulo. Respecto a los resultados de esviaje de 25°, estos son menores que los de esviaje máximo, en un 13%. En esta comparación, se pueden exponer dos ejemplos donde se produce una proximidad muy cercana entre

velocidades características. Por un lado, en HSLMA7, una velocidad de resonancia para esviaje de 45° con otra velocidad de resonancia para un esviaje nulo. Aunque ambas sean velocidades de resonancia, la respuesta correspondiente a un esviaje nulo es mayor. Por otro lado, en el caso de HSLMA8, se produce de nuevo la coincidencia de dos velocidades de resonancia, alrededor de 350 km/h.

Para la situación de carga puntual, sucede lo comentado anteriormente. Aunque los máximos y mínimos se sigan logrando, las velocidades características son mayores a mayor esviaje. Se puede observar una alternancia consecutiva de máximos y mínimos de cada una de las situaciones, para velocidades de circulación entre 100 y 250 km/h. En este rango, se puede desarrollar la variación de valores alcanzados en los diferentes máximos. Así, la respuesta de esviaje de 25° es superior a la de esviaje nulo en un 10%. Por su parte, los valores de esviaje de 45° son mayores que los de esviaje nulo en un 9%. Además, conforme aumenta la velocidad de circulación, las tres respuestas se asemejan, produciéndose una mayor diferencia entre la respuesta de esviaje de 45° con respecto a las demás, cuando se alcanzan velocidades de paso próximas a 500 km/h.

En el siguiente caso, longitud de 15 metros (Figura 15), al comparar los resultados correspondientes con esviaje nulo y esviaje de 25°, se puede observar cómo las formas adquiridas de máximos y mínimos se encuentran muy próximas. Además, si se equiparan los máximos desarrollados en cada una de las dos situaciones, los valores de la aceleración correspondiente a un esviaje de 25° son mayores que en el caso sin esviaje. En estos casos, los valores de la aceleración de esviaje de 25° son un 12% superior, en términos medios, a los valores de esviaje nulo. Siendo las respuestas a HSLMA1 las que presentan una mayor divergencia (aproximadamente un 20%). No obstante, en los dos últimos casos, HSLMA9 y HSLMA10, la aceleración que experimenta el punto medio en el caso sin esviaje es mayor que en el caso de esviaje de 25°, para velocidades de circulación cercanas a 500 km/h.

Si se realiza la comparación entre las respuestas de esviaje nulo y esviaje de 45°, entonces el análisis es más diferente, ya que entre ambas respuestas existe una mayor divergencia. Sucede, por un lado, que las aceleraciones alcanzadas son mayores, tal como se observa tanto en los máximos relativos (en torno a un 23%) como en los demás máximos alcanzados (aproximadamente un 24% superior), véase HSLMA1, HSLMA2 y HSLMA3, para velocidades de paso elevadas, y HSLMA7 y HSLMA10, en el intervalo entre 200 y 300 km/h y entre 250 y 350 km/h, respectivamente. Sin embargo, debido al desarrollo de máximos y mínimos hacia velocidades de circulación más elevadas, al tener en cuenta un esviaje mayor, se puede observar cómo en la mayoría de los trenes (desde HSLMA6 hasta HSLMA10), las aceleraciones experimentadas por el punto medio son menores para el caso de máximo esviaje, ya que el máximo que lograría la respuesta de esviaje de 45° superaría los 500 km/h.

En el caso puntual, vuelve a suceder que los valores máximos o mínimos, según velocidades características, son diferentes para cada caso de esviaje. Esto provoca, para velocidades de circulación entre 100 y 250 km/h, una alternancia de máximos y mínimos entre respuestas de esviajes diferentes. Aun así, se puede observar cómo las aceleraciones alcanzan valores superiores al considerar un esviaje más elevado. Alrededor de 150 km/h, sucede que se alcanzan dos máximos asociados a un esviaje nulo y a un esviaje de 25°. Se muestra cómo la respuesta considerando este último, es ligeramente superior que para el caso primero, alrededor de un 5%. Si se compara con el máximo logrado correspondiente a un esviaje de 45°, cercano a 200 km/h, entonces la diferencia aumenta a un 10%. Además, para una velocidad de circulación cercana a 500 km/h, la respuesta de esviaje de 45° se hace mucho mayor que la debida a un esviaje nulo y a un esviaje de 25°.

Para el caso de una longitud de 20 metros, se muestra en la Figura 16, cómo los resultados correspondientes al caso sin esviaje son menores que los restantes, concretamente difieren en un 9% de los valores de esviaje intermedio y un 19% de los resultados correspondientes a un esviaje de 45°. Se puede observar en cada máximo relativo de cada tren. La situación donde existe una mayor similitud parece ser HSLMA1 ya que parecen alcanzarse máximos y mínimos semejantes entre esviaje nulo y esviaje intermedio (en ese caso, la diferencia es de 1% entre los máximos relativos alcanzados). Como se puede observar en cada gráfica, la forma que presenta cada resultado es similar. Desde HSLMA1 hasta HSLMA6 primero ocurre un máximo entre 100 y 200 km/h y, posteriormente, se alcanza el máximo relativo entre 250 y 450 km/h, aproximadamente. Por otro lado, para HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9 y HSLMA10, sucede que antes de alcanzar el máximo local se produce oscilaciones en cada respuesta.

Para la situación de vibración libre, sucede lo comentado anteriormente. Las tres respuestas alcanzan valores máximos y mínimos similares para velocidades de circulación reducidas (aproximadamente en el intervalo entre 100 y 250 km/h). La diferencia de valores se establece alrededor de 13% entre los tres máximos que se observan.

Mientras que las respuestas asociadas a un esviaje nulo y de 25° son muy similares, siendo esta última relativamente mayor, para el caso de esviaje de 45° se produce una diferencia muy considerable que alcanza su mayor ejemplo para velocidades de circulación comprendidas entre 450 y 500 km/h. Como se observa, en este caso, la forma es diferente a los restantes ya que la respuesta parece oscilar de manera contundente.

Por último, se analiza el caso de una longitud de 25 metros (Figura 17). Si se comparase cada caso mostrado con cada homólogo anterior (Figuras 14, 15 o 16), se podría establecer que las aceleraciones alcanzadas (independiente del esviaje considerado) son inferiores. Aun así, tal como se comentó previamente, se sigue obteniendo que las respuestas de esviaje máximo son superiores a las restantes. Si se observa los máximos relativos, se puede apreciar cómo el caso de HSLMA1 es el único donde la aceleración de esviaje de 25° es inferior a la aceleración de esviaje nulo. Concretamente la diferencia se establece sobre un 13%. Para esta longitud parece desarrollarse una mayor diferencia de valores si se comparan cada una de las tres respuestas (véase cualquier caso de tren HSLMA), ya que, en términos de datos, la diferencia entre resultados se encuentra en un 11%, para el caso de esviaje nulo y esviaje de 25°, y un 28%, de media, para las situaciones de esviaje máximo y sin esviaje. Los casos de HSLMA2 y HSLMA10 podrían presentarse, al igual que HSLMA1, como casos excepcionales entre divergencia de resultados. Por un lado, en HSLMA2 la diferencia de respuestas entre esviaje de 25° y esviaje nulo se encuentra en un 2%. Por otro lado, en HSLMA10, las tres aceleraciones máximas alcanzadas no difieren en gran medida, siendo esa diferencia de un 7% y un 15% entre valores de esviaje intermedio y esviaje nulo y entre estos y esviaje máximo, respectivamente. Finalmente, se muestra cómo la forma de máximos y mínimos se siguen desarrollando, aunque no coincidan numéricamente.

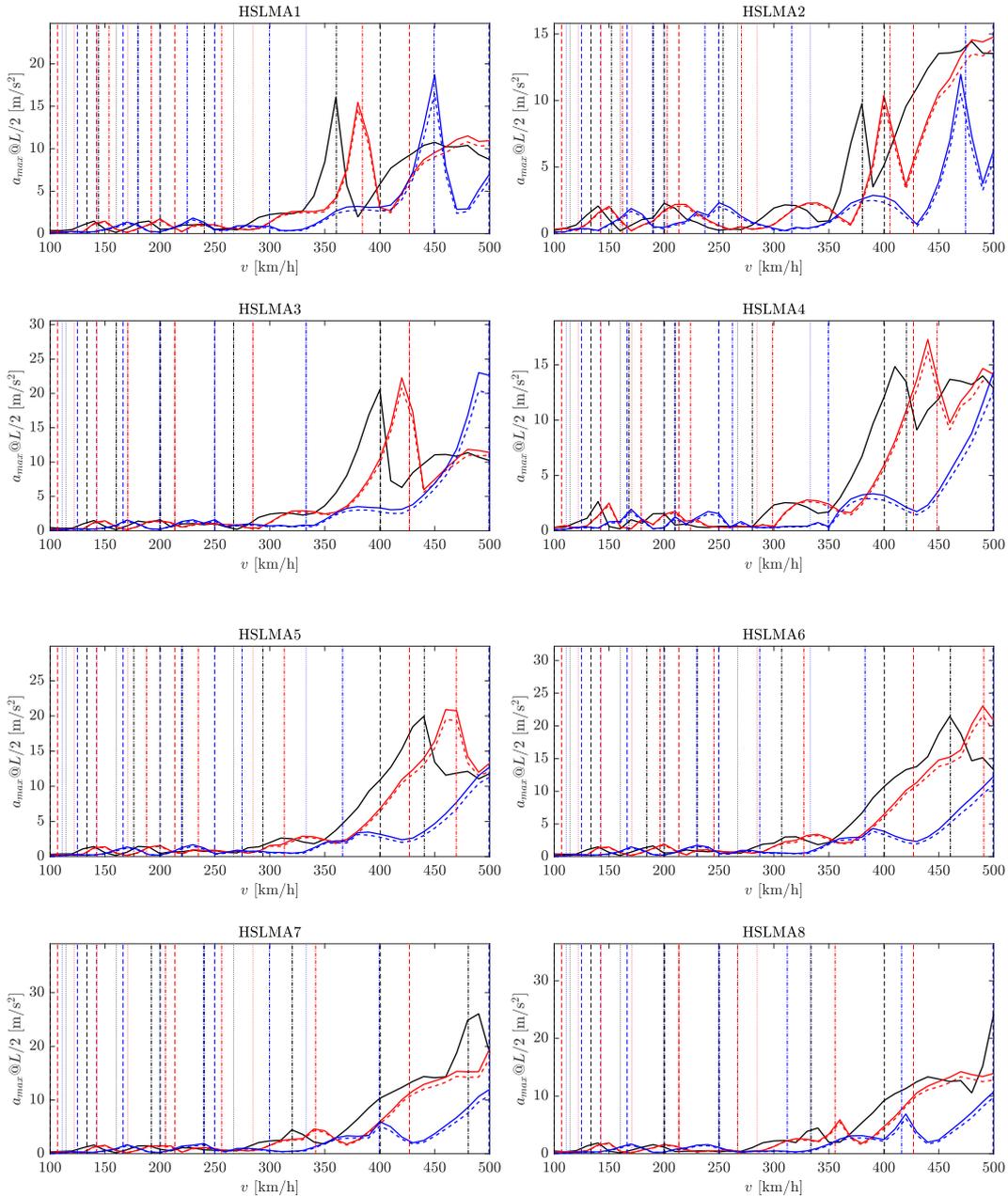
Respecto al caso de la carga puntual, se expone una diferencia respecto a los casos anteriores muy notable. Si se observa las tres respuestas para una velocidad de paso cercano a 500 km/h, se puede destacar que la respuesta correspondiente a un esviaje de 45° converge con las correspondientes a un esviaje nulo y a un esviaje de 25°. No obstante, tal como se puede apreciar en el intervalo de velocidad de circulación entre 100 y 250 km/h, la aceleración lograda en el caso de esviaje máximo, es relativamente superior que las demás respuestas ya que, en términos porcentuales, se establece en un 8% respecto a la respuesta de esviaje nulo y en un 4% respecto a la respuesta de esviaje de 25°. Esto vuelve a poner de manifiesto que mediante los máximos alcanzados se puede observar la diferencia de valores en cada situación de esviaje.

Una vez presentados todos los casos, se puede establecer algunas conclusiones, referidas a todos los casos, sobre la variación de valores desarrollados. Esto es, analizando las variaciones porcentuales de todas las situaciones comentadas se puede establecer que la diferencia entre respuestas de esviaje intermedio y esviaje nulo es inferior a la diferencia entre esviajes máximos y esviaje nulo. En el primer caso, en términos medios, se puede establecer que la divergencia de valores no supera el 15%. En el segundo caso, la diferencia se encuentra alrededor del 20%. Además, se puede mostrar cómo en el caso de mayor longitud (Figura 17), la diferencia es más importante que en los restantes casos.

Por último, como se aprecia en las figuras, las respuestas considerando flexión y torsión son mayores que las respuestas teniendo en cuenta la flexión únicamente. Además, sucede en todas las gráficas, cómo para velocidades de paso reducidas, ambas respuestas convergen. Cuando la aceleración alcanza un máximo o para velocidades de circulación elevadas, las dos respuestas divergen en mayor medida. Esto último se aprecia en mayor medida para longitudes menores, para esviajes superiores (véase cada uno de los casos de las Figuras 14,15 y 16 comparados con el último caso, Figura 17).

4.3.2. RIGIDEZ INTERMEDIA

Para esta situación, el rango de frecuencia adopta el valor de 35, por tanto, se obtiene el segundo de los tres casos de rigideces o frecuencias, según [3]. Se presentan las Figuras 18, 19, 20 y 21, para una longitud de 10, 15, 20 y 25 metros respectivamente, donde se muestran las aceleraciones experimentadas por el punto medio del puente respecto a la velocidad de circulación. En cada una de ellas, los gráficos según el esviaje considerado: nulo, 25° y 45°.



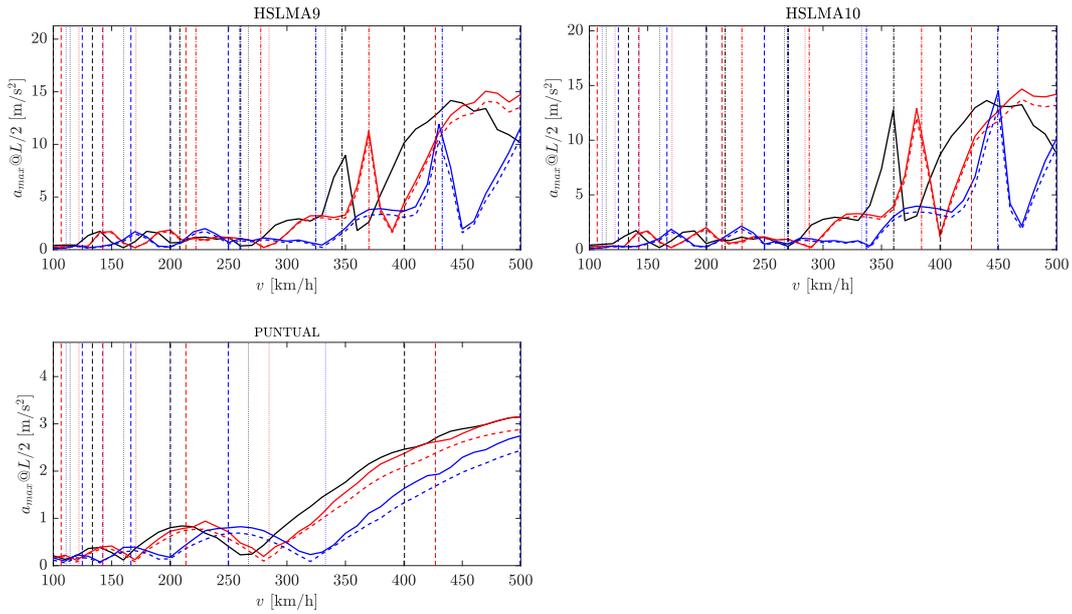
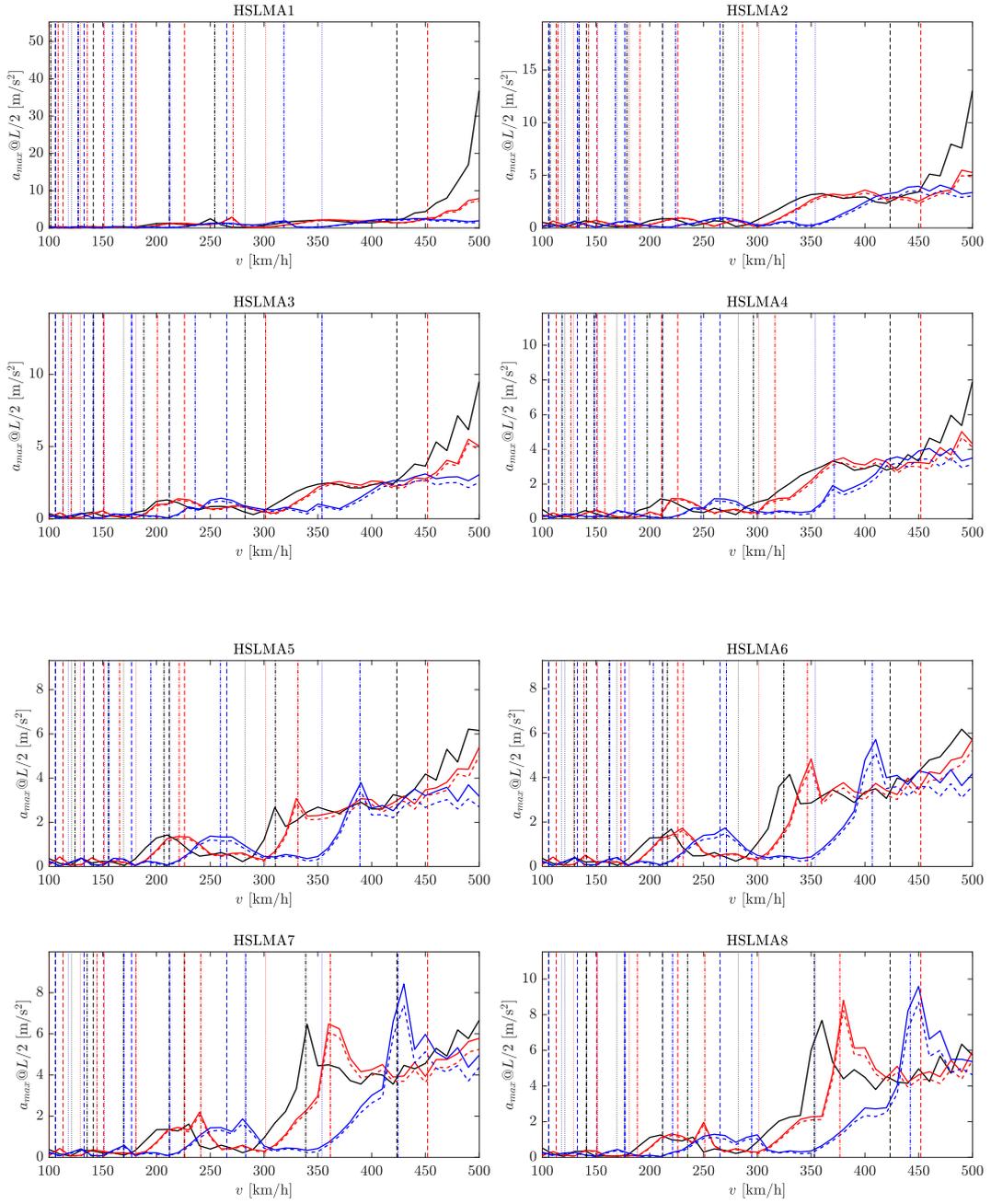


Figura 18: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 10 metros, todos los esviajes y rigidez intermedia. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



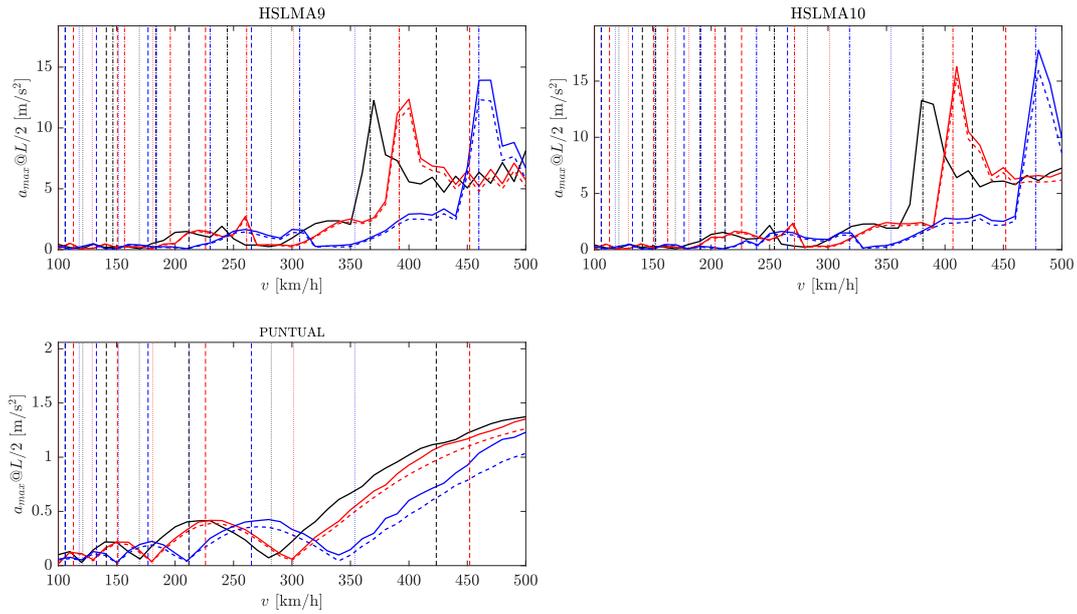
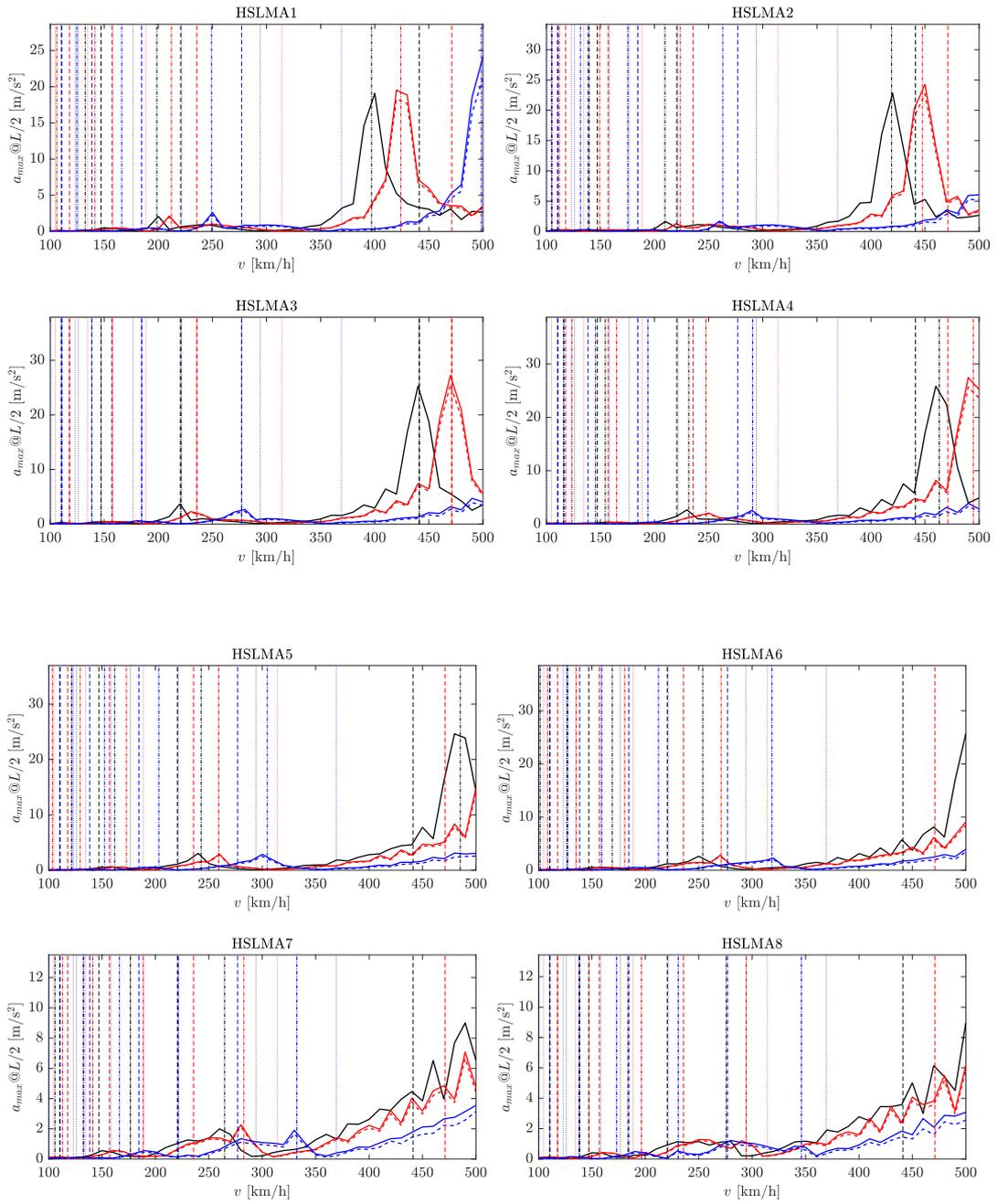


Figura 19: Aceleración del punto medio del puente, en [m/s²], respecto a velocidad de paso, en [km/h] para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 15 metros, todos los esviajes y rigidez intermedia. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



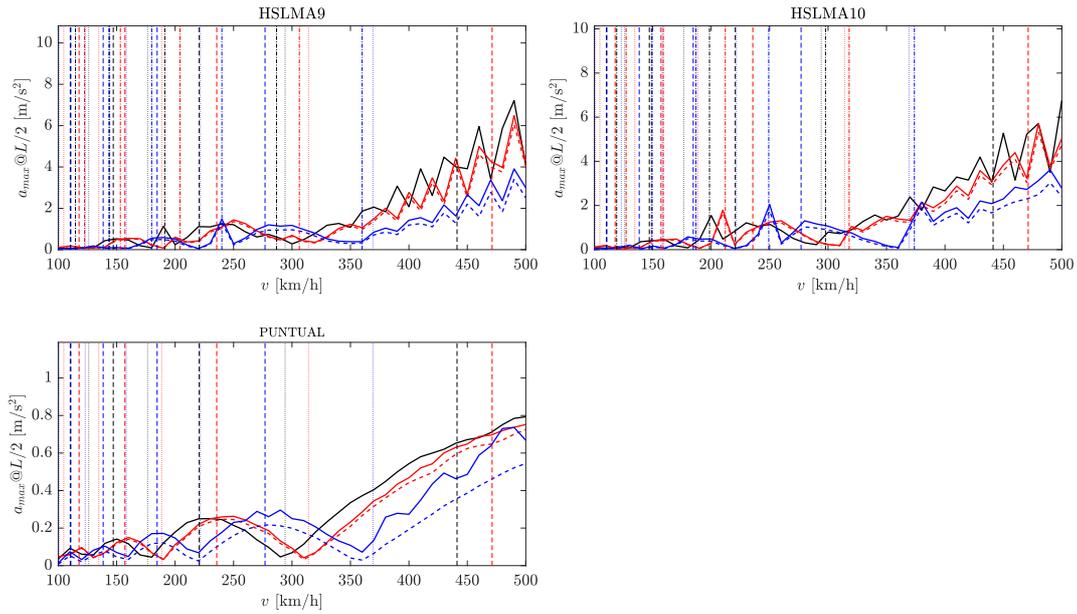
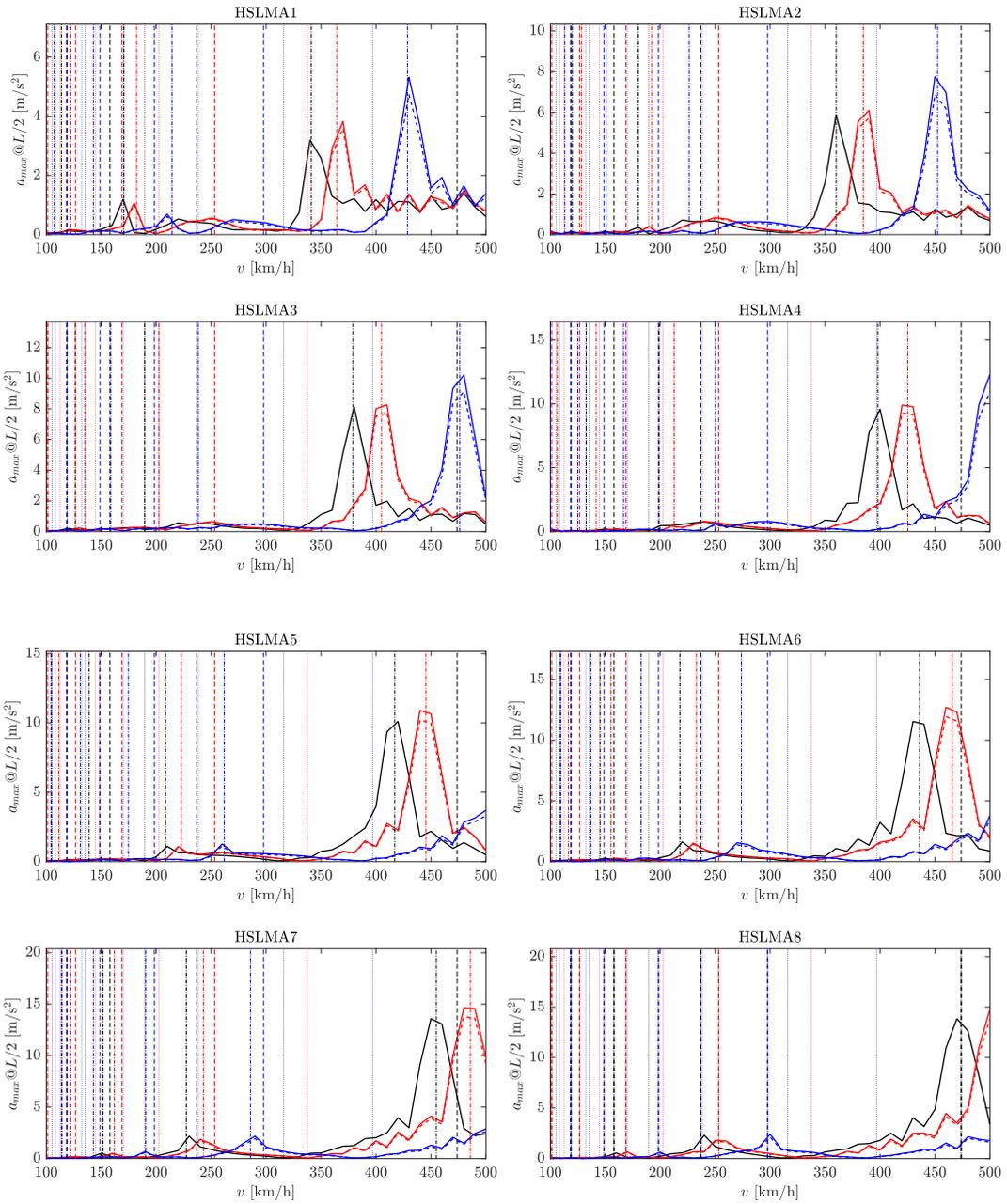


Figura 20: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 20 metros, todos los esviajes y rigidez intermedia. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



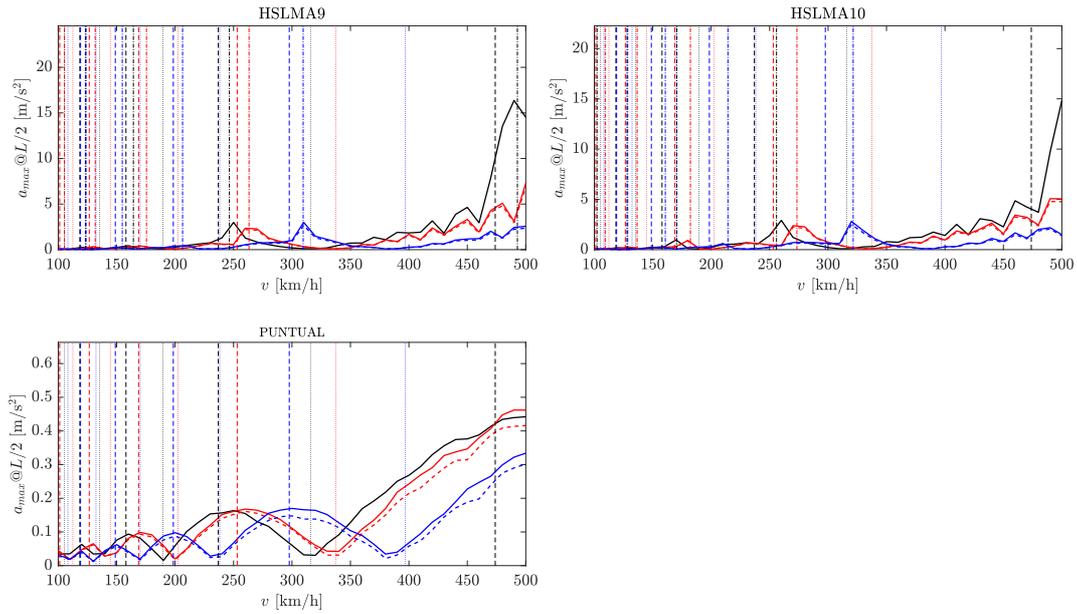


Figura 21: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 25 metros, todos los esviajes y rigidez intermedia. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.

4.3.2.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este caso, para una rigidez intermedia, correspondiente a un valor de $f_p = 35$, los resultados mostrados mantienen lo descrito anteriormente. Por un lado, las propias formas adquieren máximos y mínimos, según las diferentes velocidades características. Sin embargo, dichas velocidades características no coinciden en los tres casos representados de esviaje. Es más, conforme aumenta el esviaje considerado, en cada puente, los mínimos y máximos alcanzados se desplazan hacia velocidades superiores, esto provoca que para velocidades de circulación entre 100 y 200 km/h, aproximadamente, se superpongan diversas velocidades características, asociadas a cada esviaje concreto. Por otro lado, también sucede en todos los casos cómo las respuestas entre un esviaje nulo y un esviaje de 25° están más próximas entre sí. Si se observa cualquier caso de las aceleraciones para un esviaje de 45° y un esviaje nulo, se muestra una mayor divergencia en los resultados. Asimismo, al igual que sucedía en el anterior apartado, para velocidades de circulación comprendidas entre 100 y 200 km/h, aproximadamente, no parece desarrollarse fenómenos de resonancia muy señalados.

En este caso, los límites de aceleraciones máximas de 3.5 y 5 m/s², del Eurocódigo, se cumplen para todos los casos de carga puntual (véase Figura 18, 19, 20 o 21). Respecto a los casos de trenes, se puede observar, de forma general que para velocidades de circulación reducidas no existe problema a la hora de cumplir con el límite. Sin embargo, conforme aumenta la velocidad de paso (para valores cercanos a 500 km/h), se producen algunos máximos que provocan que no satisfagan el límite impuesto.

Al igual que anteriormente, se hace referencia en todos los casos que se exponen a continuación, a las aceleraciones representadas en línea continua. Es decir, al valor de la aceleración que tiene en cuenta la contribución tanto de la flexión como de la torsión. Además, para un desarrollo más profundo de los resultados, se analizan la diferencia de valores, desde un punto de vista porcentual, entre los diversos máximos que se alcanzan en cada situación de esviaje.

En el primer caso, de longitud de 10 metros (Figura 18), con los valores máximos alcanzados en cada HSLMA, se observa cómo las aceleraciones correspondientes a un esviaje de 45° son superiores. Sin embargo, debido a que las velocidades características, referidas al caso de este último esviaje, se suceden para velocidades de circulación más elevadas (comparadas con el caso sin esviaje y esviaje de 25°), ocurre que en muchas gráficas las aceleraciones correspondientes a esviaje máximo son inferiores que los demás casos (véase el caso de HSLMA2, HSLMA4, HSLMA6, HSLMA7 y HSLMA8). Esto también se produce debido a que las formas adquiridas de máximos y mínimos en cada situación son similares. Respecto a esto último, el principal ejemplo se muestra en HSLMA1, HSLMA2, HSLMA9 y HSLMA10, donde se puede ver cómo la respuesta de esviaje de 45° es superior a las restantes. Concretamente en un 22% a las de esviaje nulo y en un 13% a las de esviaje de 25°. Además, la diferencia entre estas y las correspondientes al caso sin esviaje, para todos los casos presentados, se puede establecer alrededor de un 12%.

Por otro lado, en el caso puntual sucede un aspecto similar. Mientras que las aceleraciones alcanzadas, entre la situación de esviaje nulo y esviaje intermedio divergen alrededor de un 18%, para velocidades de paso entre 100 y 300 km/h, para velocidades de circulación elevadas se muestra una convergencia de valores entre las correspondientes a un esviaje de 25° y nulo y una divergencia significativa de estas con la debida a un esviaje de 45°. Si se representase la aceleración máxima del punto medio para velocidades superiores a 500 km/h, posiblemente se llegaría a un valor donde la respuesta de esviaje de 45° se mostrase mayor que las restantes.

En el caso de longitud de 15 metros, Figura 19, se puede establecer las mismas consideraciones que en el caso anterior. Esto es, al analizar los máximos originados en velocidades de resonancia de diferentes esviajes, se puede disponer que los resultados correspondientes a un esviaje mayor son superiores, véase los casos de HSLMA5 hasta HSLMA10. Concretamente, en términos medios y observando dichos máximos, si se realiza la comparación entre las aceleraciones de esviaje nulo y los dos casos de esviaje, se puede establecer que las aceleraciones debidas a esviaje de 45° son un 24% superiores y las correspondientes a un esviaje de 25°, 11% mayores. Sin embargo, en las situaciones donde las longitudes características de los vehículos son menores (HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3 y HSLMA4), según Tabla 2, puede realizarse una lectura opuesta de los resultados a lo comentado, ya que, las velocidades de resonancia que provocan dichos máximos se logran según velocidades de circulación superiores. Esto origina que los resultados de esviaje nulo parezcan mayores que los restantes casos.

Para el caso de vibración libre, la lectura de resultados ofrece el mismo análisis que en los casos de vibración forzada. Por un lado, si se compara los máximos alcanzados para velocidades de resonancia que se encuentran

en el intervalo de 100 a 350 km/h, se puede establecer que las aceleraciones logradas correspondientes a un esviaje de 25° son ligeramente superior a las logradas en los restantes casos de esviaje. En términos numéricos, se presenta que estos resultados son mayores en un 2% tanto a las respuestas de esviaje de 45° como a las correspondientes a un esviaje nulo. Sin embargo, para velocidades de circulación elevadas (cercanas a 500 km/h), se puede mostrar cómo las aceleraciones del caso de esviaje de 45° son inferiores que las restantes. La explicación de dicha circunstancia se debe a que, la velocidad de resonancia, que provoca el máximo, se desarrolle para una velocidad de circulación superior a 500 km/h, por tanto, el máximo relativo todavía no se ha alcanzado.

Respecto a cada uno de los casos representados correspondientes a una longitud de 20 metros, Figura 20, se muestra que las tres respuestas poseen el mismo patrón. Esto es, se suceden máximos y mínimos según diversas velocidades características. Sin embargo, vuelve a cumplirse que los valores máximos suponiendo un esviaje de 45° son superiores que los valores correspondientes a un esviaje de 25° y a un esviaje nulo. A diferencia de otras situaciones (véase la Figura 18), donde sí existían más ejemplos claros para mostrar dicha diferencia, en este caso, la principal divergencia se puede ver en HSLMA1. Para este tren, sucede que se muestran los tres máximos relativos debidos a cada situación de esviaje, produciéndose un incremento de un 26% entre los máximos de esviaje nulo y esviaje máximo y un aumento de un 23% entre los resultados correspondientes a este último esviaje y los debido a un esviaje intermedio. En los demás trenes, no se aprecia con precisión dichas disimilitudes. Aun así, en HSLMA7 y HSLMA8 se muestra que la forma oscilatoria de las respuestas de esviaje nulo y esviaje intermedio no se producen en la respuesta de esviaje máximo (véase el intervalo entre 350 y 500 km/h). Por último, si se comparan los máximos obtenidos en HSLMA10, en el intervalo entre 200 y 300 km/h, se puede observar que la respuesta de esviaje de 45° es superior a la de esviaje nulo en un 32% y que la respuesta de esviaje de 25° es mayor que esta última en un 15%. La diferencia entre aceleraciones de esviaje máximo e intermedio se establece en un 15%.

Para la situación de carga puntual, sucede lo comentado previamente. Al analizar los máximos logrados, se puede establecer que la respuesta de esviaje de 45° es superior a las demás. Esto se puede observar con relativa facilidad en el intervalo de velocidad de circulación, comprendido entre 100 y 300 km/h. En términos específicos, dicha respuesta es mayor en un 19% y en un 13% frente a la respuesta de esviaje nulo y esviaje intermedio, respectivamente. En cuanto a la comparación de esta última y esviaje nulo, a la vista de los resultados, se puede definir en una divergencia de un 5%. Sin embargo, conforme la velocidad de paso aumenta, la respuesta de esviaje máximo es diferente a las restantes ya que parece oscilar. Aun así, como se aprecia, las respuestas de esviaje nulo y esviaje intermedio parecen converger.

Finalmente, el caso de mayor longitud, 25 metros, se puede observar en la Figura 21. Aquí, se puede ver con bastante claridad la diferencia de valores que se alcanzan debido a velocidades características (véase HSLMA1, HSLMA2 y HSLMA3, para un intervalo comprendido entre 350 y 500 km/h). En el primer caso se muestra la mayor divergencia de valores, siendo el máximo de esviaje 45° un 66% superior al máximo de esviaje nulo y un 39% mayor al máximo de esviaje intermedio. Respecto a este y al máximo de esviaje nulo, la diferencia se establece en un 20% mayor. Para los restantes modelos, se observa cómo las velocidades de resonancia más elevadas parecen darse para velocidades de paso superiores a 500 km/h, por tanto, no es posible apreciar con precisión la divergencia entre las tres respuestas de diversos esviajes. No obstante, en los máximos producidos para velocidades de circulación más inferiores, se muestra que las aceleraciones del caso de esviaje de 45° es ligeramente superior en un 2% a las de esviaje nulo en un 19% a las respuestas del caso de esviaje de 25° (véase cualquier caso, para un intervalo de velocidad entre 150 a 300 km/h).

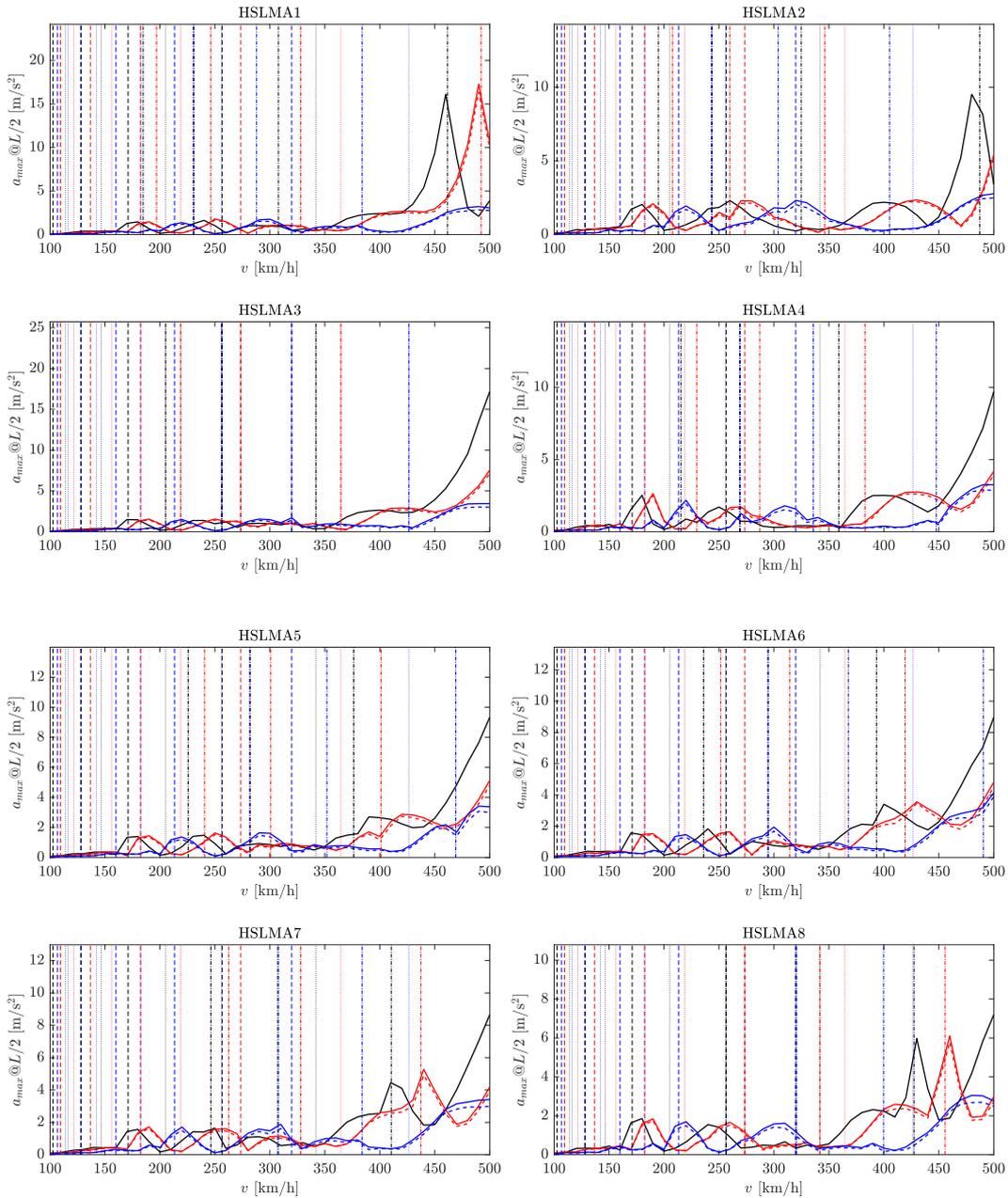
En el caso de carga puntual sucede lo comentado en anteriores casos. La diferencia de resultados solo puede apreciarse para los máximos y mínimos consecutivos, no en los máximos relativos logrados, siendo de un 2% la diferencia entre respuestas de esviaje nulo e intermedio y de un 4% entre esviaje nulo y máximo (en ambos casos, la de esviaje nulo es inferior). Como se observa, conforme aumenta la velocidad de circulación, mayor es la diferencia de respuesta de esviaje de 45° con respecto a las demás. En este caso, además, debido a la ya comentada diferencia numérica de velocidades características, no se aprecia las velocidades de resonancia más elevadas de los casos de esviaje diferente de cero. Únicamente se muestra la velocidad de resonancia del caso de esviaje nulo (entre 450 y 500 km/h). Por tanto, no resulta muy certero comentar los resultados de esviaje máximo para velocidades tan altas. Para esviaje intermedio se puede ver cómo al llegar al límite de 500 km/h, la respuesta es superior a la de esviaje nulo.

Tras debatir la diferencia de resultados en cada situación, se puede establecer que en los dos primeros casos (longitud de 10 metros y longitud de 15 metros, Figuras 18 y 19 respectivamente) la diferencia de valores se mantiene. Por un lado, los resultados de esviaje de 45° son superiores que los de esviaje nulo (en términos medios, se puede establecer alrededor de 23% según los dos casos). Por otro lado, también los resultados de esviaje intermedio son superiores que los de esviaje nulo (alrededor de un 11%). Sin embargo, al tener en cuenta una mayor longitud, 20 y 25 metros, Figuras 20 y 21, hay casos donde esos porcentajes se mantienen o incluso aumentan, pero también se pueden observar situaciones en las cuales las respuestas de esviaje nulo son mayores o directamente se alcanzan valores muy similares.

Por último, como se aprecia en las figuras, las respuestas considerando flexión y torsión son mayores que las respuestas teniendo en cuenta la flexión únicamente. Además, sucede en todas las gráficas, cómo para velocidades de paso reducidas, ambas respuestas convergen. Cuando la aceleración alcanza un máximo o para velocidades de circulación elevadas, las dos respuestas divergen en mayor medida, tal como sucedía en el anterior caso.

4.3.3. RIGIDEZ SUPERIOR

Por último, para todos los casos de trenes, se muestran los resultados asociados a una frecuencia correspondiente al 70% del límite superior definido por [3]. Se presentan las Figuras 22, 23, 24 y 25, para una longitud de 10, 15, 20 y 25 metros respectivamente, donde se muestran las aceleraciones experimentadas por el punto medio del puente respecto a la velocidad de circulación. En cada una de ellas, tres gráficos según el esviaje considerado: nulo, 25° y 45°.



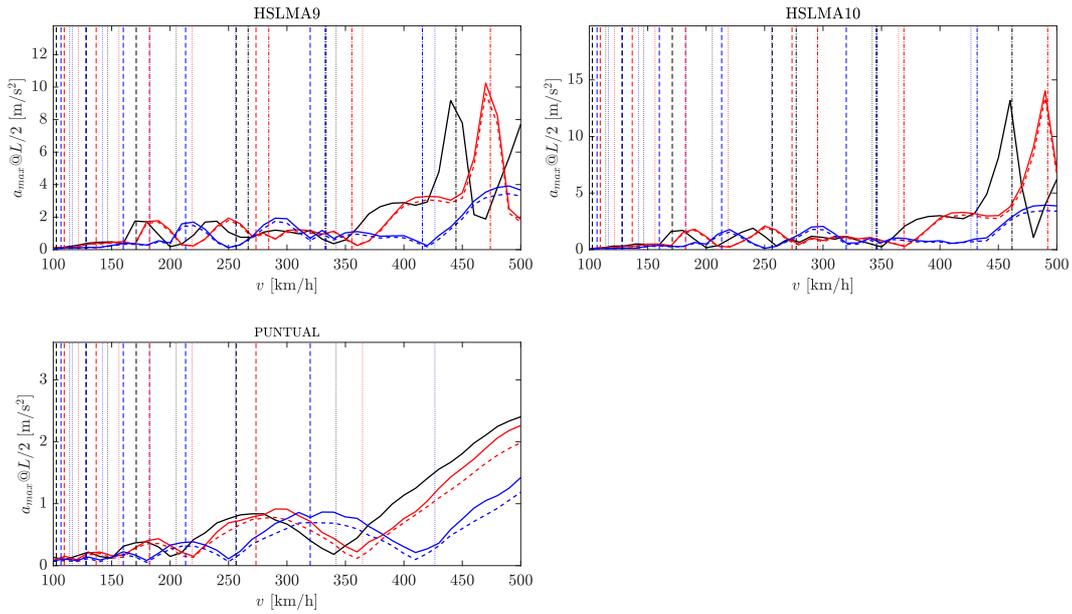
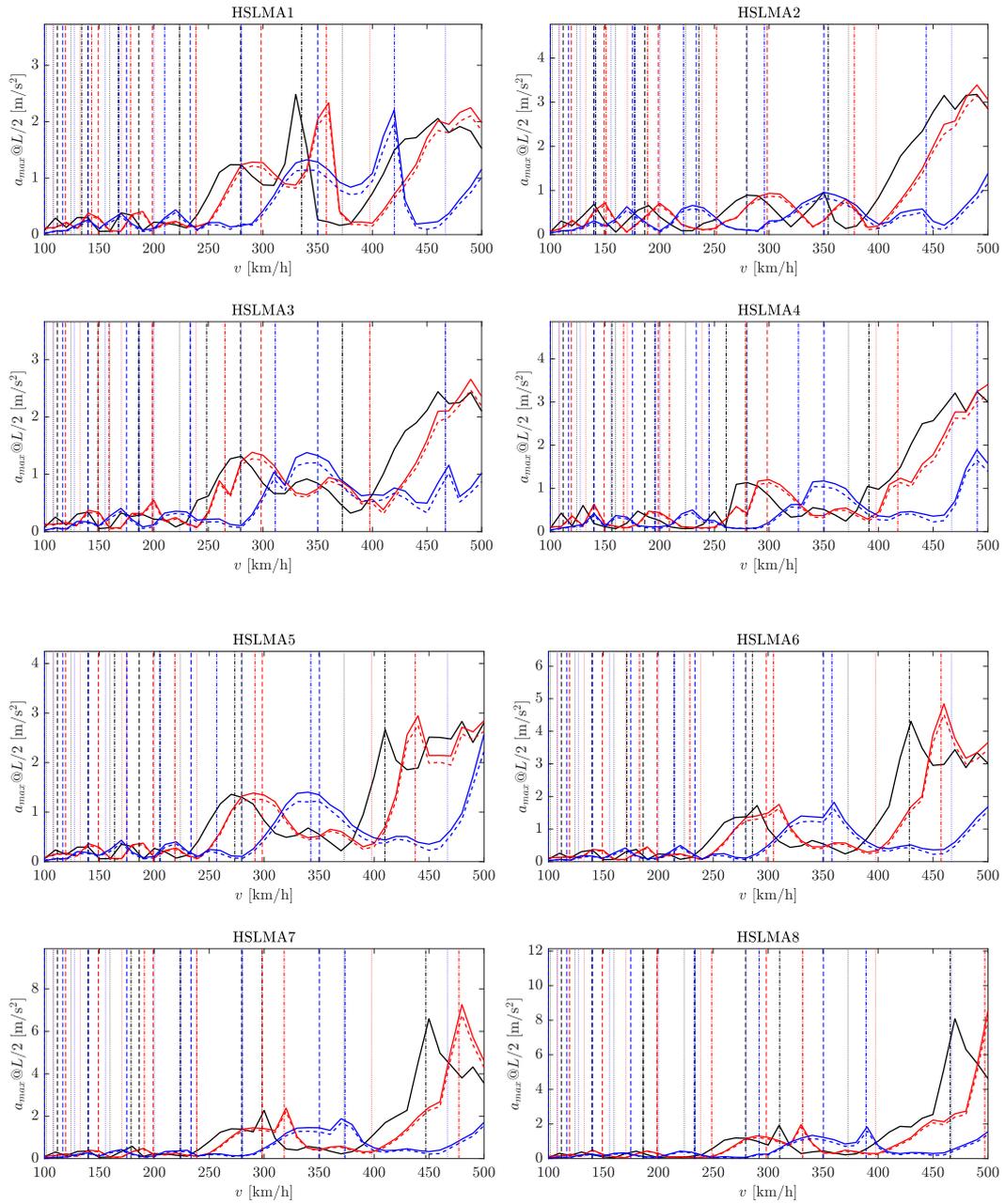


Figura 22: Aceleración del punto medio del puente, en [m/s²], respecto a velocidad de paso, en [km/h] para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 10 metros, todos los esviajes y rigidez superior. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



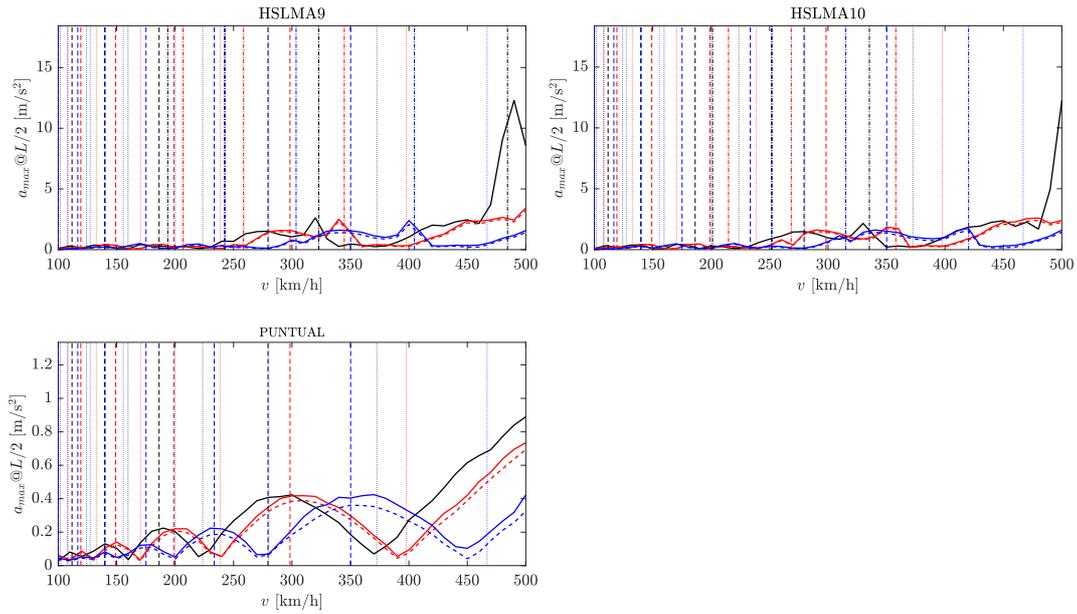
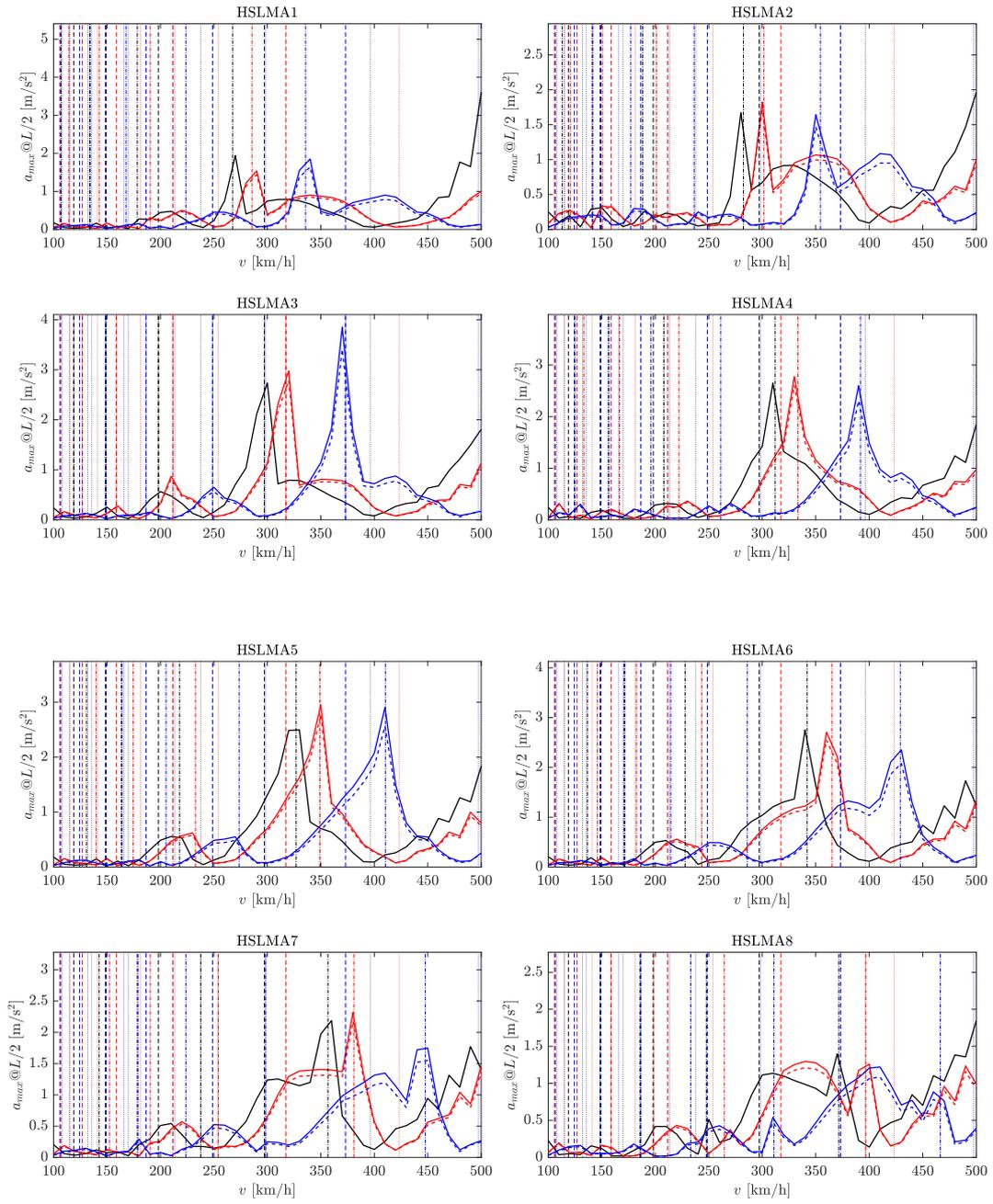


Figura 23: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 15 metros, todos los esviajes y rigidez superior. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



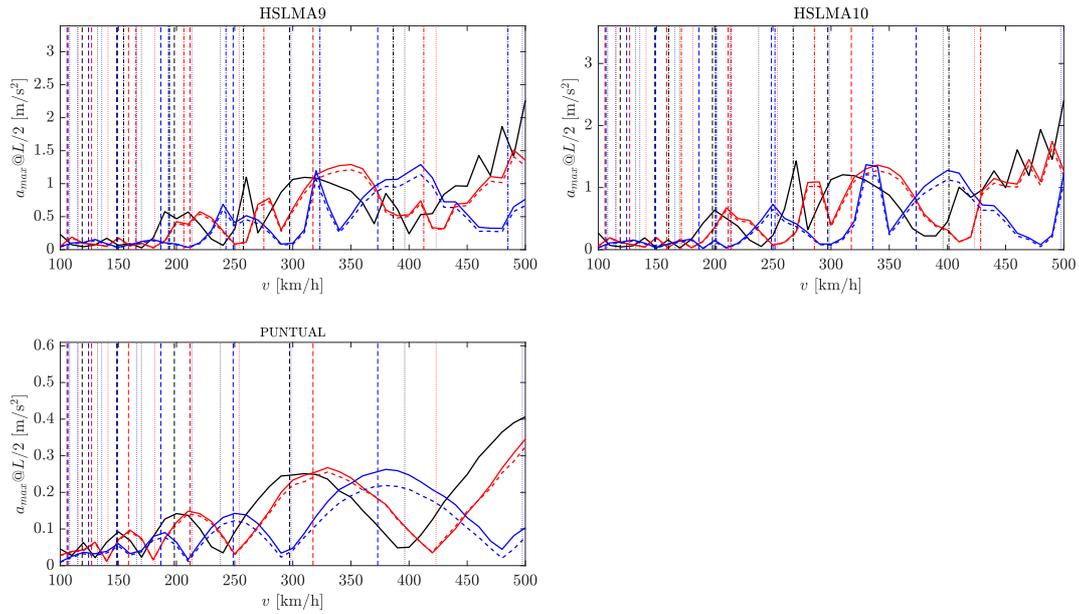
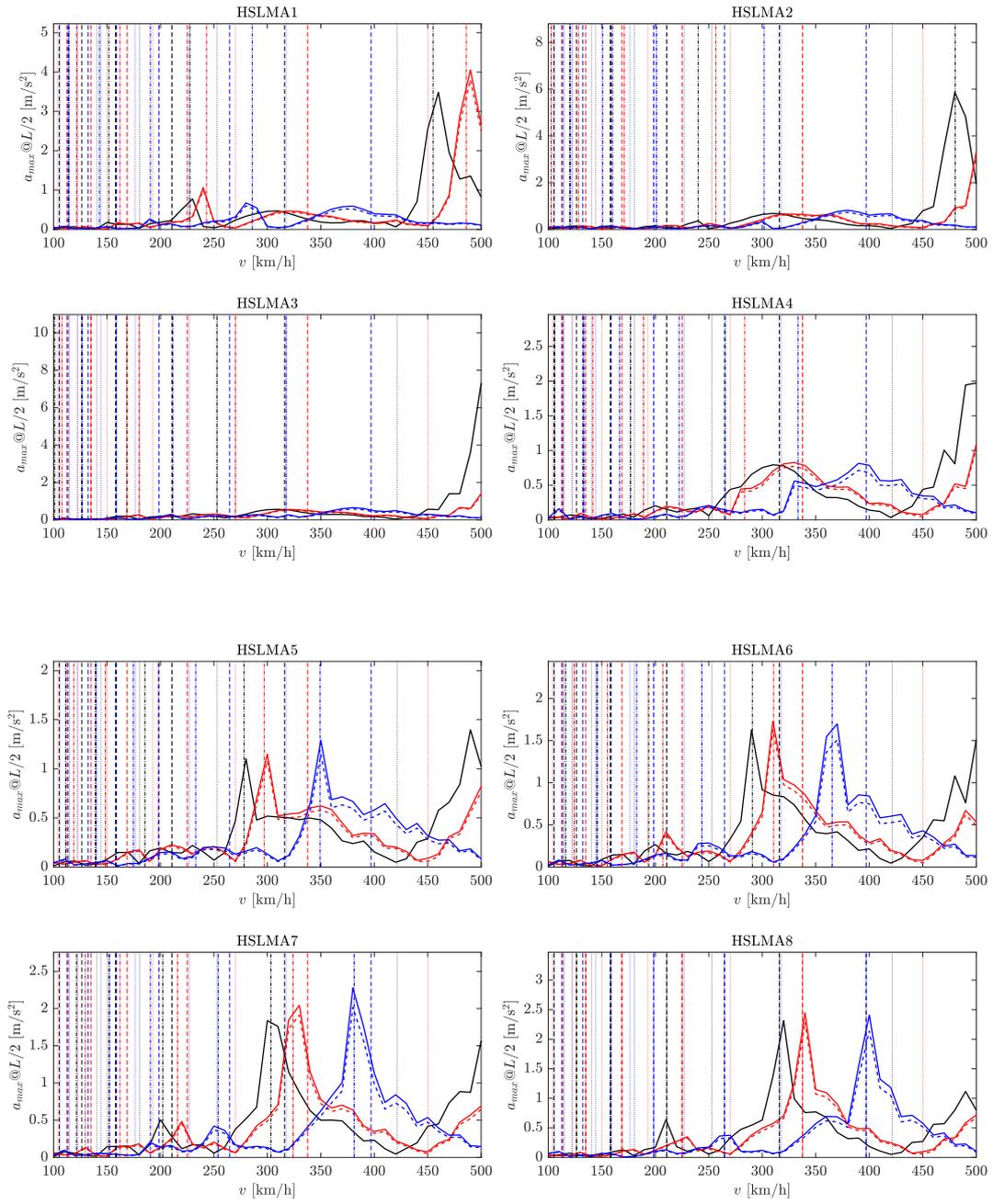


Figura 24: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 20 metros, todos los esviajes y rigidez superior. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45°, en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto-rama y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.



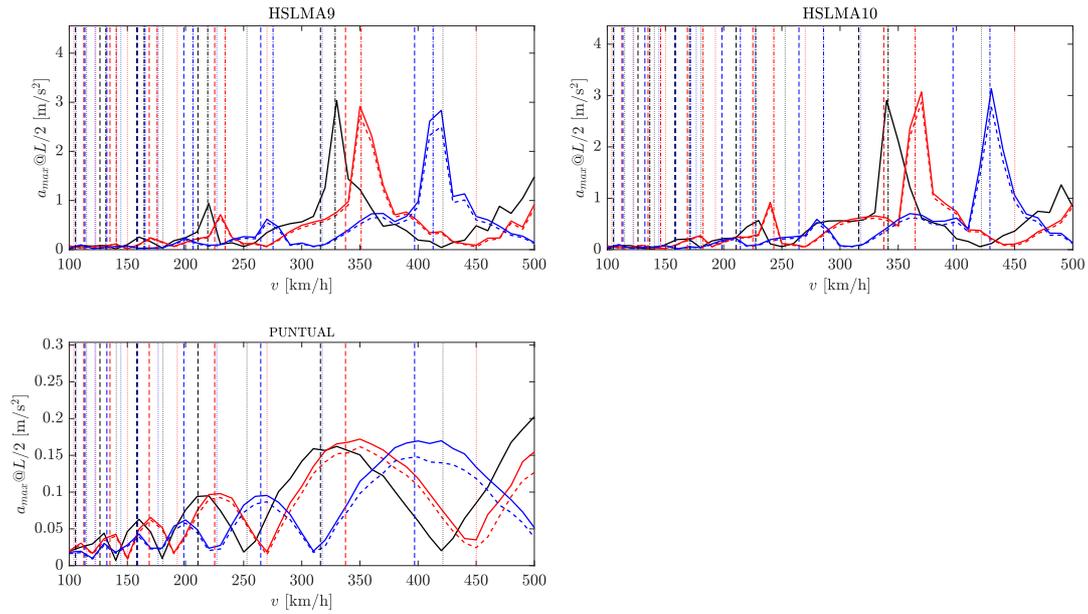


Figura 25: Aceleración del punto medio del puente, en $[m/s^2]$, respecto a velocidad de paso, en $[km/h]$ para todos los casos de cargas externas. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: HSLMA1, HSLMA2, HSLMA3, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6, HSLMA7, HSLMA8, HSLMA9, HSLMA10 y carga puntual. Resultados para una longitud de 25 metros, todos los esviajes y rigidez superior. Los resultados para un esviaje nulo se expresan en negro. Resultados considerando un esviaje de 25° en rojo y un esviaje de 45° , en azul. Resultados expresados considerando únicamente el efecto de flexión en línea discontinua y aquellos que consideran el efecto de la torsión y flexión, en línea continua. Para cada caso de esviaje, las velocidades de cancelación se exponen en línea verticales de puntos, las velocidades de resonancia en función del tipo de tren en línea punto- raya y las velocidades de resonancia del puente en línea discontinua de rayas.

4.3.3.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Finalmente, se muestran los resultados considerando la mayor rigidez o frecuencia, según se expuso en capítulos previos. Tal como sucedió en los dos casos anteriores, se suceden formas parecidas de respuesta. Esto es, las aceleraciones alcanzan máximos y mínimos según diversas velocidades características. A mayor esviaje considerado, mayor es el desplazamiento hacia velocidades superiores de dichos máximos o mínimos. En todos los casos, se muestra cómo para velocidades de circulación bajas (entre 100 y 200 km/h) se suceden velocidades de resonancia o cancelación de los diferentes modelos. Por tanto, se puede observar una coexistencia de máximos y mínimos para ese rango. Los principales ejemplos se pueden mostrar en las Figuras 22 y 23, correspondientes a un puente de 10 metros y 15 metros de longitud, respectivamente. En el primer caso, se muestra para todos los trenes HSLMA, mientras que en el segundo caso ocurre desde HSLMA1 hasta HSLMA6. Por último, desde un punto de vista de un análisis común, también como sucedía en los dos anteriores casos, las respuestas considerando flexión y torsión son mayores que las respuestas teniendo en cuenta la flexión únicamente, cuando se analizan las respuestas con esviaje. Para velocidades de circulación bajas (entre 100 y 200 km/h, aproximadamente), ambas respuestas muestran una menor diferencia que para velocidades de paso más elevadas o cuando debido a una velocidad de resonancia, se produce un máximo. Además, para este rango de velocidades, los fenómenos de resonancia no son destacables.

En este caso, los límites de 5 y 3.5 m/s², del Eurocódigo, continúan cumpliéndose para todos los casos de carga puntual (véase cualquier Figura 22, 23, 24 o 25) y también en la mayoría de los casos de trenes (véase todos los casos de la Figura 24). Esta consideración supone una de las principales diferencias con los casos mostrados anteriormente (rigideces inferiores). Sin embargo, existen gráficas donde se muestran que, fundamentalmente los máximos relativos no cumplen con el límite establecido. En la Figura 22 se puede observar en todos los casos. En la Figura 23, correspondiente a una longitud de 15 metros, sucede una a partir de HSLMA4, coincidiendo con longitudes características de los vehículos mayores (según Tabla 2). Y en la Figura 25, donde se puede observar para HSLMA2 y HSLMA3 (estos dos últimos casos, para los casos sin esviaje).

Antes de desarrollar cada uno de los casos, se deben destacar dos aclaraciones. Por un lado, la comparación de resultados se realiza con los valores correspondientes a la contribución conjunta de flexión y torsión (línea continua). Anteriormente, ya se ha comentado algunas consideraciones sobre las aceleraciones que únicamente tienen en cuenta la flexión. Por otro lado, a la hora de abordar los valores porcentuales, estos se definen a partir de los máximos (relativos o no) que se logran en cada situación de esviaje.

En el primer caso mostrado, correspondiente a una longitud de 10 metros, Figura 22, se puede observar de nuevo cómo las tres respuestas siguen el mismo patrón de máximos y mínimos. Sin embargo, debido a una diferencia muy notable de valores de velocidades características entre los tres modelos de esviajes, sucede que hay máximos, fundamentalmente del caso de esviaje de 45°, que no se muestran en las gráficas. Aun así, sí se exponen otros máximos que alcanza la aceleración, para velocidades reducidas. Debido a esa diferencia tan notable entre velocidades características, en el caso de HSLMA8, ocurre la coincidencia de una velocidad de resonancia para la situación sin esviaje con una velocidad de cancelación del puente de esviaje de 45°, lo que provoca una diferencia de respuestas muy notable, entre 400 y 450 km/h. En HSLMA6 ocurre la misma coincidencia, pero la velocidad de resonancia corresponde a la situación de esviaje de 25°. A diferencia de todos los casos anteriores que mostraban unos valores de aceleraciones, correspondientes a un esviaje de 45°, superiores a los debido a un esviaje nulo y esviaje de 25°, en estos casos, los valores de esviaje máximo no presentan una divergencia tan marcada. Esto es, en HSLMA9 y HSLMA10 se puede observar, en el rango de velocidades de circulación entre 150 y 350 km/h, cómo los valores logrados son muy similares que los alcanzados en el caso de esviaje intermedio y esviaje nulo. De forma general, al analizar los máximos de cada una de las respuestas representados, se puede establecer que los valores correspondientes a un esviaje de 45° son superiores, alrededor de un 10%, a los valores correspondientes a un esviaje nulo. En cuanto a las respuestas de esviaje de 25° y esviaje nulo, las primeras difieren también sobre un 10% respecto a las segundas.

Para el caso de carga puntual, se exponen las mismas consideraciones que en los casos de HSLMA. Si se comparan los tres máximos más representativos de la gráfica, comprendidos entre 150 y 350 km/h, se observa cómo la aceleración debida al caso de esviaje nulo es prácticamente similar a los casos con esviaje. Por ello, la divergencia entre respuestas se define en un 4% y un 10 % mayor entre los valores del caso de esviaje intermedio y esviaje nulo y entre el caso de esviaje máximo y esviaje nulo, respectivamente. Además, conforme la velocidad de circulación se acerca a 500 km/h, los resultados de esviaje nulo y esviaje intermedio parecen convergen, desde un punto de vista numérico.

En el caso de una longitud de 15 metros, Figura 23, en HSLMA1, al observar los tres máximos relativos obtenidos en cada uno de los casos de esviaje, se puede establecer que las aceleraciones correspondientes a esviaje máximo son menores que los restantes casos. En términos porcentuales, el máximo logrado debido a un esviaje nulo es superior en un 6% al caso de esviaje intermedio (25°) y en un 11% respecto al máximo alcanzado correspondiente a un esviaje de 45°. Sin embargo, al ver la evolución de las velocidades de resonancia que producen dichos máximos (véase HSLMA3 y HSLMA4) se puede observar cómo las respuestas de esviaje mayor son superiores que las demás. En las restantes situaciones de HSLMA, se muestra igualmente la similitud de valores logrado entre las tres respuestas. A destacar HSLMA7 donde se produce una situación similar (entre 250 y 400 km/h) a la ya comentada HSLMA1. La diferencia de respuestas origina que se produzcan fenómenos de resonancia entre los diversos modelos. En HSLMA7 ocurre la proximidad de una velocidad de cancelación y dos velocidades de resonancia en el intervalo entre 400 y 500 km/h. La velocidad de cancelación corresponde al caso de esviaje de 45° y las velocidades de resonancia a las restantes situaciones. Esto conlleva que ambas respuestas (negra y roja) alcancen máximos, mientras que la respuesta azul desarrolle un mínimo. No obstante, si se examina el intervalo entre 350 y 400 km/h, se puede observar cómo sucede lo contrario. Esto es, se produce la coincidencia de una velocidad de resonancia (para esviaje de 45°) y de cancelación (para esviaje nulo), lo que provoca una respuesta se haga máxima y la otra, mínima.

Para la situación de vibración libre, se observa en los máximos cómo la respuesta correspondiente tanto a un esviaje de 45° como a un esviaje de 25°, es superior a las respuestas de esviaje nulo en un 2%. En este caso concreto, sucede la coincidencia de una velocidad de resonancia del caso sin esviaje con una velocidad de cancelación de esviaje máximo. Además, como se puede observar, la aceleración debida a un esviaje intermedio (25°) alcanza valores muy similares al caso de esviaje nulo. Por último, se vuelve a mostrar que conforme el esviaje considerado es superior, mayor es la diferencia de valores de velocidades características que se producen.

Para el caso de una longitud de 20 metros, se exponen en la Figura 24, todos los casos de cargas externas. Como se aprecia en todos los casos de vibración forzada, las tres respuestas presentan la misma forma. Sin embargo, no coinciden numéricamente. Respecto a la coincidencia o proximidad de velocidades características, destaca el caso HSLMA4, alrededor de una velocidad de 400 km/h. Se produce una diferencia de respuestas muy notable entre el caso sin esviaje y un esviaje de 45°. El caso HSLMA6 también presenta este fenómeno. Entre 400 y 450 km/h se origina una amplificación de la respuesta de esviaje máximo y un mínimo de la aceleración para un esviaje intermedio. Si se analizan los máximos, se puede observar cómo hay situaciones donde la aceleración de esviaje máximo es mayor que las restantes (casos de HSLMA3 y HSLMA9, en el intervalo entre 250 y 400 km/h). A destacar la gran diferencia de resultados en HSLMA3, donde se produce un aumento de los valores cercano a un 41% entre los casos de esviaje máximo y esviaje nulo. En las demás situaciones se muestra cómo los valores alcanzados correspondientes a un esviaje nulo son relativamente superiores (HSLMA1, entre 250 y 350 km/h). En este caso, destaca que el máximo relativo alcanzado de esviaje nulo es un 21% mayor que el máximo de esviaje de 25°. También puede ocurrir que las aceleraciones correspondientes a un esviaje intermedio sean más considerables que las debida a un esviaje máximo, en un 11% de valor medio, en las situaciones de HSLMA2, HSLMA4, HSLMA5, HSLMA6 y HSLMA7, donde se puede observar en los máximos relativos alcanzados.

Para el caso puntual, si se comparan las aceleraciones máximas debida a velocidades de resonancia, se puede establecer de forma genérica cómo las correspondientes a esviaje intermedio (de 25°) son superiores en un 2% a las de esviaje máximo y en un 7% a las de esviaje nulo. También sucede que las respuestas de esviaje de 45° son mayores que las de esviaje nulo, en un 5%. Como se ha comentado, este balance de valores se debe realizar entre los máximos desarrollados, ya que suponen un análisis real entre aceleraciones.

Finalmente, la Figura 25 muestra los resultados asociados a una longitud de 25 metros. Para la mayoría de los casos de HSLMA ocurre que las aceleraciones correspondientes a un esviaje de 45° son superiores que las restantes. El ejemplo más claro se muestra en HSLMA5 y HSLMA7. En el primer caso, la diferencia se establece en un 17% respecto al caso sin esviaje y en un 5% respecto al caso de esviaje de 25°. En el segundo caso, la divergencia es más notable, siendo de un 23% con la situación sin esviaje y de un 11% respecto al caso de esviaje intermedio. Sin embargo, existen otros casos donde las respuestas de esviaje de 45° son muy similares a las de esviaje de 25° (véase HSLMA4, HSLMA6, HSLMA8, HSLMA9 y HSLMA10). Además, en estos dos últimos casos sucede dos fenómenos que requieren un desarrollo especial. Por un lado, para HSLMA9, en el intervalo

entre 200 y 300 km/h, se puede observar como el máximo logrado de la situación de esviaje nulo es superior en un 4% a la situación de esviaje intermedio y en un 7% al máximo alcanzado de esviaje correspondiente a 45°. Por otro lado, para ese mismo intervalo, en HSLMA10, ocurre que la respuesta de esviaje máximo es superior a las demás en un 5%.

Para el caso puntual, se vuelve a comentar que, al comparar los valores obtenidos en cada máximo, de cada respuesta, las tres poseen valores muy similares, mostrando una diferencia comparativa de aproximadamente un 5% entre las tres. No obstante, las dos de esviaje no nulo son semejantes, siendo la de esviaje cero la menor. Aquí se puede volver a ver otra coincidencia de velocidades características entre modelos, afianzando lo comentado anteriormente sobre las formas desplazadas hacia las velocidades superiores según aumenta el esviaje considerado. Ocurre entre 300 y 350 km/h, la coincidencia de una velocidad de resonancia del caso de esviaje nulo y una velocidad de resonancia de esviaje máximo.

Respecto a los valores porcentuales comentados en cada situación, se puede establecer que, a diferencia de los casos de esviaje inferior y esviaje intermedio, en todos los casos expuestos (independiente de su longitud) se producen diferencias variadas. Es decir, existen casos donde la diferencia de valores es muy significativa entre respuestas de esviaje nulo y esviaje máximo, siendo estos superiores. Sin embargo, también se producen situaciones donde los máximos analizados manifiestan que la diferencia de respuestas no es tan significativa.

Por último, si cada caso se comparase con sus homólogos anteriores, se observaría que la principal diferencia reside en los valores de las aceleraciones alcanzados. Esto se debe a la consideración de una rigidez o frecuencia superior.

5 CONCLUSIÓN Y DESARROLLOS FUTUROS

Una vez expuestos todos los resultados, se procede a finalizar el presente trabajo con las conclusiones oportunas que pueden desarrollarse. Así, se disponen las conclusiones de los resultados desde diversos puntos de vista. Finalmente, se establecen algunas consideraciones que pueden ser objeto de estudio para un hipotético desarrollo futuro.

5.1. CONCLUSIÓN

A lo largo de todo el documento se han presentado los métodos numéricos para poder obtener los resultados de un puente con esviaje, como si no presentase dicha propiedad. Los resultados obtenidos se han expuesto de forma conjunta para poder observar qué diferencias o similitudes existen considerando diferentes esviajes. Lo que resulta claro, es que, si cada uno de los puentes oblicuos se calculasen obviando su esviaje, los resultados serían exactamente los mostrados en color negro en cada una de las gráficas.

De forma general, observando cada una de las soluciones considerando esviaje, se puede llegar a la conclusión de que el método utilizado de cálculo sí funciona. Esto es, los máximos y mínimos se siguen desarrollan de igual manera que la situación sin esviaje. No obstante, la diferencia se fundamenta en el desplazamiento de dichos máximos y mínimos hacia velocidades de circulación más elevadas debido al aumento de cada una de las frecuencias fundamentales. Al calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración de torsión y flexión, existe una dependencia directa con el esviaje considerado (α). Por tanto, esto unido a los tres límites definidos por [3] para las rigideces, origina que las frecuencias naturales aumenten (principalmente la primera, que es la que más contribuye a la respuesta calculada, como se ha comentado previamente). Por ello, al aumentar el esviaje, ya que siempre no se puede olvidar que ambos modos siempre van a estar presentes, valores máximos de la aceleración se obtienen más próximos a velocidades muy elevadas.

Al examinar las soluciones debida a la carga puntual, teniendo en cuenta la influencia tanto de la torsión como de la flexión, se puede concluir que los valores para un esviaje de 45° son superiores que los obtenidos para un esviaje nulo o un esviaje de 25° . Sin embargo, conforme aumenta la rigidez considerada, los valores de esviaje de 45° se hacen menores, para velocidades de circulación más elevadas, respecto a los valores obtenidos sin esviaje y esviaje intermedio. Esto se debe a que las velocidades de resonancia de esviaje máximo ocurren para velocidades de circulación más elevadas (superando 500 km/h). Esto se puede ir observando en cada caso particular de los mostrados anteriormente. Para velocidades de circulación más reducidas, se van sucediendo máximos y mínimos de cada respuesta debido a la alternancia de velocidades características. Se han comentado caso a caso la diferencia de valores para dichas velocidades de circulación, concluyendo que los valores de esviaje máximo son relativamente superiores, de forma genérica, a los de esviaje nulo.

En el caso del conjunto de ejes, las mayores diferencias ocurren debido a esa alternancia consecutiva de velocidades características. Es decir, se han observado en numerosos casos comentados cómo se produce la coincidencia de velocidades de resonancia y cancelación de diferentes modelos, provocando que se alcancen máximos y mínimos consecutivos. De forma general, sucede que los valores de aceleraciones alcanzados entre un puente sin esviaje y un puente con esviaje de 25° , son similares en muchas ocasiones, como se ha ido definiendo a la hora de analizar los resultados. También ocurre que los resultados de esviaje de 45° , si se analizan los máximos obtenidos en cada situación, son mayores que los correspondientes a esviaje de 25° o esviaje nulo, en la mayoría de las situaciones. Sin embargo, se han mostrado en algunas gráficas cómo las respuestas de estos últimos son superiores al caso de máximo esviaje. Esto se debe, como se ha comentado previamente, a la no coincidencia exacta de velocidades de resonancia y cancelación en el rango representado de velocidades (entre 100 y 500 km/h), provocando que haya máximos de esviaje de 45° que se alcancen para velocidades superiores a 500 km/h.

Además, desde el punto de vista de límites definidos en el Eurócodigo [3], se puede establecer que conforme aumenta la rigidez y la longitud de la estructura considerada, las cargas externas provocan una menor aceleración sobre el puente, provocando en muchos casos, tal como se ha ido estableciendo, que no se alcancen los límites ni de 3.5 m/s^2 ni de 5 m/s^2 .

Por otro lado, a la hora de analizar las dos respuestas para cada situación de esviaje no nulo, se observa cómo los dos resultados coinciden fundamentalmente para velocidades reducidas (desde 100 hasta 200 km/h). Para este rango, los fenómenos de resonancia no parecen efectuarse [9], salvo algunas excepciones comentadas. Cuando el esviaje es mayor, mayor es la diferencia entre respuestas. Además, como se ha comentado previamente, para velocidades muy elevadas (cercanas a 500 km/h) los resultados divergen de forma más considerable. Desde este punto de vista, se concluye que el desarrollo efectuado es adecuado para velocidades de paso menores. Sin embargo, al analizar la situación para velocidades superiores o para esviajes muy altos, los resultados presentan un sesgo mayor.

En definitiva, si un puente oblicuo se calculase como si no presentase esviaje, las aceleraciones teóricas alcanzadas serían inferiores. Esto es, en un proyecto real de un puente oblicuo, al obtener la respuesta de la estructura considerando que no es esviado, se perdería información sobre las aceleraciones reales que experimentaría dicha estructura, alcanzándose una mayor diferencia a mayor esviaje y a velocidades de circulación superiores.

5.2. DESARROLLOS FUTUROS

A la hora de obtener los resultados mostrados se han introducido numerosas simplificaciones en las expresiones de cálculo. Destaca la relación entre la inercia a flexión y la inercia a torsión (estableciendo esta última como el doble de la primera) o la uniformidad de materiales en cada modelo (se ha supuesto que cada uno de los puentes con sus respectivos esviajes, son de hormigón pretensado), provocando que todos los puentes sigan la misma expresión de amortiguamiento estructural. Además, los radios de giros mantienen los mismos valores para los dos casos de esviaje. Respecto a esto último, únicamente se han considerado dos esviajes (sin tener en cuenta el caso nulo) y las velocidades de circulación poseen un paso de 10 km/h. Para desarrollos futuros, todas estas simplificaciones podrían desarrollarse de manera más real. Por ejemplo, obteniendo resultados para velocidades de circulación con un paso de 1 km/h o teniendo en cuenta un mayor número de esviajes.

No obstante, desde un punto de vista del cálculo, hubiese sido posible considerar estructuras hiperestáticas tanto de un vano (estructura con los dos extremos empotrados) como de varios vanos. Respecto a esto último, se propone para futuros desarrollos. En ese caso, se deben utilizar de nuevo las ecuaciones de un vano, presentadas a lo largo del presente documento. Simplemente se debe imponer compatibilidad de desplazamientos en los apoyos intermedios. Lo que resulta en un problema de autovalores similar, pero con más ecuaciones. Por otro lado, se podría haber introducido irregularidades viales, tales como rugosidad de la superficie del pavimento, deficiencias de curvatura u otras imperfecciones asociadas a montajes defectuosos, como fuerzas externas y observar qué diferencias existen entre la respuesta conjunta y la respuesta individual bajo la consideración de dichas cargas externas. También se podría haber trabajado con modelos que hubiesen considerado la interacción suelo adyacente-estructura y exponer conclusiones en función de diferentes tipos de suelo. Además, en todos los modelos, se ha comentado los límites definidos tanto en vía en placa como en vía sobre balasto. Si se considerase esta última conllevaría que futuros desarrollos consideren únicamente el límite de 3.5 m/s^2 para aceleraciones y otros aspectos como, por ejemplo, la influencia del amortiguamiento que proporciona el propio balasto.

Además, mediante las herramientas matemáticas presentadas en el anexo I, sería posible estudiar un caso real de un puente oblicuo para debatir sobre sus propios resultados teniendo en cuenta unas características y propiedades más realistas que todos los casos mostrados en el presente trabajo.

6 REFERENCIAS

- [1] A. Romero, P. Galvín, M. Solís, Apuntes para el Análisis de Estructuras. 2020
- [2] K. Nguyen, C. Velarde, J.M. Goicolea, Analytical and simplified models for Dynamic análisis of short skew bridges under moving load. 2019
- [3] UNE-EN 1991-92
- [4] P. L. Chaussée, P. Galvín, G. Kouroussis, S. Datoussaid, Dynamic analysis of the vehicle-railway bridge interaction by the modal approach. 2023
- [5] G. T. Michaltsos, I.G. Raftoyiannis, Bridges' dynamics. Bentham eBooks. 2012. Chapter 4.
- [6] J. J. Soriano Muñoz, J. M. Goicolea Ruigómez, D. Alonso Gimeno, Estudio dinámico de las aceleraciones en pasos inferiores de líneas de alta velocidad. TFM. 2016
- [7] J. A. Ramírez Martínez, P. Galvín, Condiciones de resonancia y cancelación en puentes de ferrocarril considerando la interacción suelo-estructura: estudio del efecto de las propiedades de la vía. TFG. 2016
- [8] P. Museros, E. Moliner, M.D. Martínez-Rodrigo, Free vibrations of simply supported beam bridges under moving loads: Maximun resonance, cancellation and resonant vertical acceleration. 2012
- [9] A. Murillo Bautista, A. Martínez de la Concha, Comportamiento dinámico de puentes ferroviarios con interacción suelo estructura. Análisis de la influencia de la rigidez del terreno para cimentación superficial. TFC. 2018
- [10] J. C. Sánchez-Quesada, A. Romero, P. Galvín, E. Moliner, M. D. Martínez Rodrigo, 3D analysis of railway induced vibrations on skew girder bridges including ballast track–bridge interaction effects. 2023
- [11] J. Manterola, Puentes: Apuntes para su diseño, cálculo y construcción. 2006
- [12] A. A. Ghobarah, W. K. Tso, Seismic analysis of skewed highway bridges with intermediate supports. 1974
- [13] M. Mallick, P. Raychowdhury, Seismic analysis of highway skew bridges with nonlinear soil–pile interaction. 2015
- [14] J. Domínguez Barbero, Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de resonancia. 2001

- [15] RW. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures. 1993
- [16] P. Ryjáček, M. Poláka, T. Plachý, J. Kašpárek, The dynamic behavior of the extremely skew railway bridge “Oskar”. 2017
- [17] E. Özşahin, G. Pekcan, Assessment of Seismic Demand Due to Torsional Ground Motions on Symmetric Skew Bridges. 2022
- [18] E. G. Dimitrakopoulos, Seismic response analysis of skew bridges with pounding deck–abutment joints. 2010.
- [19] P. Kaviani, F. Zareian, E. Taciroglu, Performance-Based Seismic Assessment of Skewed Bridges. 2014
- [20] M. Díaz Arancibia, P. Okumus, Live load and long-term response of steel bridges with high skew. 2023
- [21] Y. Wang, L. Ibarra, C. Pantelides, Collapse capacity of reinforced concrete skewed bridges retrofitted with buckling-restrained braces. 2019
- [22] Q. Zeng, E. G. Dimitrakopoulos, Seismic response analysis of an interacting curved bridge–train system under frequent earthquakes. 2016
- [23] Y. Bao, H. Xiang, Y. Li, A dynamic analysis scheme for the suspended monorail vehicle–curved bridge coupling system. 2020
- [24] M. Gong, J. Chen, Y. Sun, Multiscale Finite-Element Analysis of Damage Behavior of Curved Ramp Bridge Deck Pavement Considering Tire–Bridge Interaction Effect. 2023
- [25] A. E. Abdelnaby, T. M. Frankie, A. S. Elnashai, B. F. Spencer, D. A. Kuchma, P. Silva, Chia-Ming Chang, Numerical and hybrid analysis of a curved bridge and methods of numerical model calibration. 2014
- [26] J. Meng, H. Ghasemi, E. M. Lui, Analytical and experimental study of a skew bridge model. 2004

ANEXO I: Códigos de MATLAB

Se muestran todos los códigos utilizados para obtener los resultados:

ARCHIVO DE CÁLCULO GENERAL

```
Lv=(10:5:25);
alphav=[0 25 45];
fp=[0 35 70];
v=(100:10:500)/3.6;

trenes={'puntual'; 'HSLMA1'; 'HSLMA2'; 'HSLMA3'; 'HSLMA4'; 'HSLMA5'; 'HSLMA6'; 'HSLMA7'; 'HSLMA8'; 'HSLMA9'; 'HSLMA10'};

ntrain=size(trenes,1);

max_a=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_ab=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_fa=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_fab=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));

max_d=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_db=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_fd=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));
max_fdb=zeros(length(Lv),length(alphav),length(fp),ntrain,length(v));

for il=1:length(Lv)
    if Lv(il) <= 20
        amort= 1.0 + 0.07*(20 - Lv(il));
    else
        amort= 1;
    end
    amort=amort/100;
    damping_ratio_list=amort*ones(1,length(modes));

    for ialpha=1:length(alphav)
        for ifp=1:length(fp)
            [L,alpha,I,J,m]=propiedades(E,Lv(il),alphav(ialpha),fp(ifp));

            if (il==1&&ialpha==1&&ifp==1)|| (il==1&&ialpha==1&&ifp==2)
                rRoot=[0.0001 10000]; % Intervalo para busca raíces
                nRoot=850; % Número de raíces
            else
                rRoot=[0.001 10001];
                nRoot=851;
            end

            [S]=modos(L,alpha,E,I,J,m,r,G,modes,dx,fp(ifp),rRoot,nRoot);

            for itrain=1:ntrain
                train=char(trenes(itrain,:));
                [~,dejesaux]=tren(train);
                Ltrain=dejesaux(end);
```

```

clear dejesaux
if strcmp(train,'puntual')
    Ltrain=0;
end

for iv=1:length(v)
    v(iv)*3.6

foldername=strcat('./L_',int2str(L),'_alpha_',int2str(alpha*360/2/pi),'_fp_',int2str(
fp(ifp)));

    %tend=(Ltrain+L)/v(iv)+1/(S(1)/2/pi)*20;
tend=(Ltrain+L)/v(iv)+1/(S(1))*20;
tendf=(Ltrain+L)/v(iv);
tendi=0;
tic;
obj=VBI_Object('Job',foldername,...
    'AnsysFolder',foldername,...
    'ModeList',modes,...
    'TrainType',train,...
    'LaneLocation',[0 0 0],...
    'TimeSpan',tend,...
    'DampingRatio',damping_ratio_list,...
    'VehicleSpeed',v(iv));
toc

iNode=knnsearch(obj.Nodes(:,2),0.5*L);    %L/2

ndof=6;
dir=3;
iDof=ndof*(iNode-1)+dir;

t=obj.TimeVector;
dt=gradient(obj.TimeVector');

max_d(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeDisplacement(iDof,t>tendi)));

max_db(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeDisplacement(iDof,t>tendi)+obj.Brid
geDisplacement(iDof+1,t>tendi)*brazo));

max_a(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeAcceleration(iDof,t>tendi)));

max_ab(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeAcceleration(iDof,t>tendi)+obj.Brid
geAcceleration(iDof+1,t>tendi)*brazo));

max_fd(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeDisplacement(iDof,t>tendf)));

max_fdb(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeDisplacement(iDof,t>tendf)+obj.Bri
dgeDisplacement(iDof+1,t>tendf)*brazo));

max_fa(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeAcceleration(iDof,t>tendf)));

max_fab(il,ialpha,ifp,itrain,iv)=max(abs(obj.BridgeAcceleration(iDof,t>tendf)+obj.Bri
dgeAcceleration(iDof+1,t>tendf)*brazo));
end

```

```

end
end
end
end

```

CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS MODOS

```

function [S]=modos(L,alpha,E,I,J,m,r,G,modes,dx,fp,rRoot,nRoot)

syms w;

betha1=(m*w^2)/(E*I);
betha=betha1^(1/4);

lamda1=(m*r^2*w^2)/(G*J);
lamda=sqrt(lamda1);

a1=betha*sin(alpha);
a2=E*I*betha^2*cos(alpha);
a3=G*J*lamda*sin(alpha);
a4=sin(betha*L);
a5=cos(betha*L);
a6=sinh(betha*L);
a7=cosh(betha*L);
a8=sin(lamda*L);
a9=cos(lamda*L);

format short
A=[0 1 0 1 0 0;a4 a5 a6 a7 0 0;-a1 0 -a1 0 0 cos(alpha);-a1*a5 a1*a4 -a1*a7 -a1*a6
a8*cos(alpha) a9*cos(alpha);0 -a2 0 a2 a3 0;-a2*a4 -a2*a5 a2*a6 a2*a7 a3*a9 -
a3*sin(lamda*L)];

D=det(A); eqn = D==0;

S=zeros(nRoot,1);
for iRoot = 1:nRoot
    S(iRoot) = vpasolve(eqn,w, nRoot, 'Random',true);
end

S=round(S,6); S=unique(S); uRoot=length(S);
sprintf('Number of unique eigenvalues: %i\n',uRoot);

LAM=zeros(length(S),1);
for i=1:1:length(S)
    lamda1=(m*r^2*S(i)^2)/(G*J);
    lamda=sqrt(lamda1);
    LAM(i)=lamda;
end

BTH=zeros(length(S),1);
for i=1:1:length(S)
    betha1=(m*S(i)^2)/(E*I);
    betha=betha1^(1/4);
    BTH(i)=betha;
end

x=0:dx:L;
xL=x;

```

```

nX=length(x);
ModeShape=zeros(nX,uRoot);
ModeShapeT=zeros(nX,uRoot);
Slope=zeros(nX,length(modes));

for iRoot=1:uRoot
    b=zeros(6,1);
    C=zeros(6,1);

    w=S(iRoot);

    CopyA=double(subs(A));

    idof=1;
    idof2=[2 3 4 5 6];
    b=b-1*CopyA(:,idof);

    b=CopyA(idof2,idof2)\b(idof2);
    C(idof)=1;
    C(idof2)=b;

    iX=1:nX;

    ModeShape(iX,iRoot)=C(1)*sin(BTH(iRoot)*x)+C(2)*cos(BTH(iRoot)*x)+C(3)*sinh(BTH(iRoot
)*x)+C(4)*cosh(BTH(iRoot)*x);
    ModeShapeT(iX,iRoot)=C(5)*sin(LAM(iRoot)*x)+C(6)*cos(LAM(iRoot)*x);

    m1=ones(size(ModeShape,1),1)*m*dx;
    m2=ones(size(ModeShapeT,1),1)*m*r^2*dx;
    m3=[m1;m2];
    matrizM=diag(m3);
    modotodo=[ModeShape(iX,iRoot);ModeShapeT(iX,iRoot)];
    modotodo=modotodo./sqrt(modotodo'*matrizM*modotodo);
    ModeShape(iX,iRoot)=modotodo(1:length(m1));
    ModeShapeT(iX,iRoot)=modotodo(length(m1)+1:end);

    Slope(iX,iRoot)=gradient(ModeShape(iX,iRoot),dx); %Para definir ROTZ
end

tol=1e-8;
cont=0;
falso=[];
for iRoot=1:uRoot
    if(abs(ModeShape(1,iRoot))>tol||abs(ModeShape(end,iRoot))>tol)
        cont=cont+1;
        falso(cont)=iRoot;
    end
end
modesinicial=modes;
if ~isempty(falso)
    ModeShape(:,falso)=[];
    ModeShapeT(:,falso)=[];
    Slope(:,falso)=[];
    S(falso)=[];
    modes=1:1:length(S);
end

if length(S)<length(modesinicial)
    disp('Se han obtenido menos modos de los requeridos')

```


FICHERO DE COMANDOS SOBRE LOS LÍMITES DE RIGIDECES

```
function [Lp,alpha,I,J,m]=propiedades(E,Lp,alpha,fp)

m=1000*Lp;
alpha=alpha*2*pi/360;

N0S = 94.76 * Lp^-0.748;
if Lp <= 20
    N0I = 80 / Lp;
else
    N0I = 23.58 * Lp^(-0.592);
end
%
n0 = N0I + (N0S - N0I)/100*fp;
OMEGA1 = 2*pi*n0;
EI = OMEGA1^2 / (pi/Lp)^4 * m;
I = EI /E;
J=2*I;
end
```

FICHERO PARA OBTENER LAS GRÁFICAS

```
close all
colorg=[0 0 0;
        1 0 0;
        0 0 1];

for im=1:3
    figure
    t=tiledlayout('flow');
    for iit=10:11

        nexttile([1,2])
        hold on
        box on
        p(1)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,1,im,iit,:)), 'LineStyle','-
', 'Marker', 'none', 'Color', 'k', 'LineWidth', 1);
        p(2)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,2,im,iit,:)), 'LineStyle','--
', 'Marker', 'none', 'Color', 'r', 'LineWidth', 1);
        p(3)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FABB(1,2,im,iit,:)), 'LineStyle','-
', 'Marker', 'none', 'Color', 'r', 'LineWidth', 1);
        p(4)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,3,im,iit,:)), 'LineStyle','--
', 'Marker', 'none', 'Color', 'b', 'LineWidth', 1);
        p(5)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FABB(1,3,im,iit,:)), 'LineStyle','-
', 'Marker', 'none', 'Color', 'b', 'LineWidth', 1);
        set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'latex', 'FontSize', 12.5)
        xlim([v(1)*3.6 v(end)*3.6])
        xticks(v(1)*3.6:50:v(end)*3.6)
        xlabel('$v$ [km/h]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12.5)
        ylabel('$a_{max}$@L/2$ [m/s$^2$]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12.5);
        title_NOM=sprintf('HSLMA%d', (mtren(iit-1)));
        title(title_NOM, 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12.5)
        if im==1
            jnum=[1 4 7];
        elseif im==2
            jnum=[2 5 8];
        else
            jnum=[3 6 9];
        end
    end
end
```

```

for jjnum=1:3
    FN=frecuencia(jnum(jjnum));
    jtren=iit-1;
    longitud_tren=longitud_trenes(jtren);
    velor=sort([L*FN L*FN/2 L*FN/3 L*FN/4 L*FN/5 L*FN/6 L*FN/7 L*FN/8 L*FN/9
L*FN/10]);
    veloc=sort([FN*L/(2-0.5) FN*L/(3-0.5) FN*L/(4-0.5) FN*L/(5-0.5) FN*L/(6-0.5)
FN*L/(7-0.5) FN*L/(8-0.5) FN*L/(9-0.5)]);
    velot=sort([FN*longitud_tren/1 FN*longitud_tren/2 FN*longitud_tren/3
FN*longitud_tren/4 FN*longitud_tren/5]);
    velor2=[velor' velor'];
    veloc2=[veloc' veloc'];
    velot2=[velot' velot'];
    veloh=[1e-6 100000];
    hold on
    for ivelo=1:length(velor2)
        plot(velor2(ivelor,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle','--
','Color',colorg(jjnum,:), 'LineWidth',0.7)
    end

    for ivelo=1:length(veloc2)
        plot(veloc2(ivelor,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle',':','Color',colorg(jjnum,:), 'Line
Width',0.7)
    end

    for ivelo=1:length(velot2)
        plot(velot2(ivelor,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle','-
.','Color',colorg(jjnum,:), 'LineWidth',0.7)
    end

    ylim([0 max(squeeze(MAX_FAA(1,1,im,iit,:)))*1.5])
% end

end
set(gcf, 'WindowState', 'maximized')
end
nexttile(3,[1,2])
hold on
box on
p(1)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,1,im,1,:)), 'LineStyle', '-
','Marker', 'none', 'Color', 'k', 'LineWidth',1);
p(2)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,2,im,1,:)), 'LineStyle', '--
','Marker', 'none', 'Color', 'r', 'LineWidth',1);
p(3)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FABB(1,2,im,1,:)), 'LineStyle', '-
','Marker', 'none', 'Color', 'r', 'LineWidth',1);
p(4)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FAA(1,3,im,1,:)), 'LineStyle', '--
','Marker', 'none', 'Color', 'b', 'LineWidth',1);
p(5)=plot(v*3.6,squeeze(MAX_FABB(1,3,im,1,:)), 'LineStyle', '-
','Marker', 'none', 'Color', 'b', 'LineWidth',1);
set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'latex', 'FontSize',12.5)
xlim([v(1)*3.6 v(end)*3.6])
xticks(v(1)*3.6:50:v(end)*3.6)
xlabel('$v$ [km/h]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',12.5)
ylabel('$a_{max}$@L/2$ [m/s$^2$]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',12.5);
title('PUNTUAL', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',10)
if im==1
    jnum=[1 4 7];

```

```

elseif im==2
    jnum=[2 5 8];
else
    jnum=[3 6 9];
end
for jjnum=1:3
    FN=frecuencia(jnum(jjnum));
    longitud_tren=0;
    velor=sort([L*FN L*FN/2 L*FN/3 L*FN/4 L*FN/5 L*FN/6 L*FN/7 L*FN/8 L*FN/9
L*FN/10]);
    veloc=sort([FN*L/(2-0.5) FN*L/(3-0.5) FN*L/(4-0.5) FN*L/(5-0.5) FN*L/(6-0.5)
FN*L/(7-0.5) FN*L/(8-0.5) FN*L/(9-0.5)]); %[m/s]
    velot=sort([FN*longitud_tren/1 FN*longitud_tren/2 FN*longitud_tren/3
FN*longitud_tren/4 FN*longitud_tren/5]); %[m/s]
    velor2=[velor' velor'];
    veloc2=[veloc' veloc'];
    velot2=[velot' velot'];
    veloh=[1e-6 100000];
    hold on
    for ivelo=1:length(velor2)
        plot(velor2(ivelo,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle','--
','Color',colorg(jjnum,:), 'LineWidth',0.7)
    end

    for ivelo=1:length(veloc2)
        plot(veloc2(ivelo,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle',':','Color',colorg(jjnum,:), 'Line
Width',0.7)
    end

    for ivelo=1:length(velot2)
        plot(velot2(ivelo,:)*3.6,veloh(1,:)*3.6,'LineStyle','-
.','Color',colorg(jjnum,:), 'LineWidth',0.7)
    end
    ylim([0 max(squeeze(MAX_FAA(1,1,im,1,:)))*1.5])
end
end
end

```