

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Cálculo orbital y de actitud de satélites actuados con  
microimpulsores

Autor: José Antonio Gutiérrez Silva

Tutor: José Manuel Quero Reboul

**Dpto. de Ingeniería Electrónica  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2024





Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

# **Cálculo orbital y de actitud de satélites actuados con microimpulsores**

Autor:

José Antonio Gutiérrez Silva

Tutor:

José Manuel Quero Reboul

Catedrático

Dpto. de Ingeniería Electrónica  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2024



Trabajo de Fin de Grado: Cálculo orbital y de actitud de satélites actuados con microimpulsores

Autor: José Antonio Gutiérrez Silva

Tutor: José Manuel Quero Reboul

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

*Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me han acompañado y apoyado a lo largo de este viaje académico. A mi familia, por su amor incondicional, su apoyo constante y por estar siempre a mi lado, especialmente en los momentos más difíciles. A mis amigos, tanto dentro como fuera del grado, que, con su compañía, consejos y palabras de aliento, han hecho que este camino sea más llevadero y enriquecedor.*

*Un especial agradecimiento a los profesores que, con su dedicación y pasión por la enseñanza, me han transmitido conocimientos y valores fundamentales para mi desarrollo personal y profesional.*

*Finalmente, quiero agradecer de manera particular a mi tutor del TFG, cuya guía ha sido crucial para la realización de este proyecto. Sin el apoyo de todos ustedes, este logro no habría sido posible.  
¡Gracias!*





# Resumen

---

El presente Trabajo de Fin de Grado aborda el estudio y la implementación de modelos dinámicos para la orientación y maniobra orbital de nanosatélites, pequeños satélites utilizados en diversas aplicaciones científicas y tecnológicas. A lo largo del proyecto, se desarrolla un marco teórico que abarca desde los fundamentos de la dinámica de cuerpos rígidos hasta la representación de la actitud mediante ángulos de Euler y cuaterniones. Además, se implementan modelos lineales del sistema, que son simulados y analizados en Simulink, permitiendo la comparación con herramientas especializadas como Spacecraft Dynamics. Como parte práctica del proyecto, se desarrolla una aplicación que permite realizar simulaciones y análisis de maniobras específicas, mediante el uso de thrusters. Los resultados obtenidos demuestran la validez de los modelos implementados y su aplicabilidad en misiones satelitales reales.



# Abstract

---

This Final Degree Project focuses on the study and implementation of dynamic models for the orientation and orbital maneuvers of nanosatellites, small satellites used in various scientific and technological applications. Throughout the project, a theoretical framework is developed, covering the fundamentals of rigid body dynamics to attitude representation using Euler angles and quaternions. In addition, linear system models are implemented, simulated, and analysed in Simulink, allowing comparison with specialized tools such as Spacecraft Dynamics. As a practical component of the project, an application is developed to enable the simulation and analysis of specific maneuvers using thrusters. The results obtained demonstrate the validity of the implemented models and their applicability in real satellite missions.



# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Historia y Evolución de los Satélites</i>	1
1.2 <i>Objetivos del Proyecto</i>	2
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1 <i>CubeSat</i>	4
2.1.1 Sensores y actuadores de un CubeSat	4
2.2 <i>Sistema de Referencia en órbita</i>	6
2.2.1 Sistema de coordenadas centrado en la Tierra	6
2.2.2 Sistema de coordenadas de órbita local	7
2.2.3 Sistema de coordenadas centrado en el satélite	8
2.2.4 Transformaciones entre sistemas de coordenadas	8
2.3 <i>Cuerpos rígidos, Dinámica en tres dimensiones</i>	9
2.3.1 Cinemática	9
2.3.2 Cinética	10
2.4 <i>Consideraciones Algebraicas</i>	12
2.4.1 Matriz de Rotación	12
2.4.2 Matriz Antisimétrica	13
2.4.3 Derivada de una Matriz de Rotación	14
2.5 <i>Representación de la actitud</i>	15
2.5.1 Ángulos de Euler	15
2.5.2 Cuaterniones	16
2.6 <i>Transmisión Inercial</i>	17
2.6.1 Ruedas de reacción	17
2.6.2 Propulsores	18
2.7 <i>Cálculo Orbital y Maniobras de Transferencia</i>	20
2.7.1 Parámetros Fundamentales	20
2.7.2 Resultados Post-Impulso	20
<b>3 Modelo dinámico del sistema</b>	<b>22</b>
3.1 <i>Consideraciones del modelo</i>	22
3.1.1 Variables de entrada	22
3.1.2 Variables de salida	22
3.1.3 Perturbaciones	22
3.2 <i>Dinámica de orientación</i>	24
3.2.1 Momento del Gradiente Gravitacional	27
3.3 <i>Modelo no lineal</i>	30
3.4 <i>Modelo Lineal</i>	31
<b>4 Implementación en Simulink</b>	<b>35</b>
4.1 <i>Bases</i>	35
4.2 <i>Parámetros iniciales y entradas</i>	36
4.2.1 Parámetros	36
4.2.2 Entradas	37
4.3 <i>Orientación</i>	40
4.4 <i>Órbita</i>	43

4.4.1	Órbita inicial	43
4.4.2	Variación de velocidad orbital	44
4.4.3	Órbita final	47
4.5	<i>Simulación y Comparación con Spacecraft Dynamics</i>	50
4.5.1	Simulación	50
4.5.2	Comparación con Spacecraft Dynamics	60
4.5.3	Resultados de la Comparación	69
<b>5</b>	<b>Aplicación de Usuario</b>	<b>70</b>
5.1	<i>Introducción</i>	70
5.2	<i>Parámetros</i>	72
5.3	<i>Uso de thrusters</i>	73
5.4	<i>Resultados y Simulación</i>	74
5.4.1	Resultados	74
5.4.2	Ejemplo de uso	75
<b>6</b>	<b>Conclusión y trabajo futuro</b>	<b>78</b>
	<b>Referencias</b>	<b>80</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. Explorer 1 [I1]	1
Figura 2. Sputnik 1 [I2]	1
Figura 3. CubeSat Impulsado por thrusters [ I3]	2
Figura 4. Partes de un CubeSat [I4]	4
Figura 5. Vela Solar [I5]	6
Figura 6. Sistema de coordenadas centrado en la Tierra [I6]	7
Figura 7. Sistema de coordenadas de órbita local [I7]	7
Figura 8. Esquema de movimiento de cuerpos rígidos [7]	9
Figura 9. Esquemático de momento angular de un cuerpo rígido [7]	10
Figura 10. Rotación en un plano [15]	12
Figura 11. Rotación en tres dimensiones [15]	12
Figura 12. Rotaciones según ejes fijos móviles	15
Figura 13. Sucesivas rotaciones en Ángulos de Euler [11]	16
Figura 14. Marcos de referencia [12]	17
Figura 15. Ruedas de reacción	18
Figura 16. Esquema de disposición de propulsores	19
Figura 17. Cambio Orbital	20
Figura 18. Esquema de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo [7]	24
Figura 19. Esquema Gradiente Gravitacional	27
Figura 20. Modelo Simulink completo	35
Figura 21. Parámetros del modelo	36
Figura 22. Esquema CubeSat	37
Figura 23. Fuerzas y Torques sobre el Satélite	38
Figura 24. Bloques Roll-Pitch-Yaw	40
Figura 25. Orientación inicial no corregida	41
Figura 26. Transformación a orientación orbital	41
Figura 27. Orientación inicial corregida	42
Figura 28. Bloque Órbita inicial	43
Figura 29. Transformación a Referencia Terrestre	44
Figura 30. Variación de velocidad y ángulo de impulso	46
Figura 31. Parámetros Orbitales tras uso de thrusters	47
Figura 32. Bloque Orbita final	48
Figura 33. Velocidad Angular micropropulsor único	51
Figura 34. Ángulos micropropulsor único	52
Figura 35. Resultados Orbitales micropropulsor único	53
Figura 36. Velocidad Angular micropropulsores opuestos	54



Figura 37. Ángulos micropropulsores opuestos	55
Figura 38. Resultados Orbitales micropropulsores opuestos	56
Figura 39. Velocidad Angular micropropulsores colineales	57
Figura 40. Ángulos micropropulsores colineales	58
Figura 41. Resultados Orbitales micropropulsores colineales	59
Figura 42. Spacecraft Dynamics	60
Figura 43. Comparación Velocidad Angular micropropulsor único	61
Figura 44. Comparación Ángulos micropropulsor único	62
Figura 45. Comparación Resultados Orbitales micropropulsor único	63
Figura 46. Comparación Velocidad Angular micropropulsores opuestos	64
Figura 47. Comparación Ángulos micropropulsores opuestos	65
Figura 48. Comparación Resultados Orbitales micropropulsores opuestos	66
Figura 49. Comparación Velocidad Angular micropropulsores colineales	67
Figura 50. Comparación Ángulos micropropulsores colineales	68
Figura 51. Comparación Resultados Orbitales micropropulsores colineales	69
Figura 52. Interfaz App	71
Figura 53. Parámetros App	72
Figura 54. Interfaz Configuración de thrusters	73
Figura 55. Interfaz Resultados	74
Figura 56. App Ejemplo de uso Configuración	75
Figura 57. App Ejemplo progreso	75
Figura 58. App Ejemplo Resultados	76
Figura 59. App Ejemplo evolución de orientación	77



# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Historia y Evolución de los Satélites

El estudio del espacio, su exploración y explotación en particular, han sido proyectos históricamente extremadamente costosos desde el punto de vista tanto de la tecnología como de la economía. Este estudio nos ha permitido un conocimiento avanzado sobre nuestro planeta, el sistema solar y el universo. Hoy en día, los beneficios procedentes del espacio se han integrado en la vida cotidiana, desde la observación meteorológica y las comunicaciones globales hasta la navegación por satélite. En este contexto, el desarrollo de satélites pequeños, como los CubeSats, ha sido crucial para reducir los costos y democratizar el acceso al espacio.

El inicio de la era espacial moderna se remonta al 4 de octubre de 1957, con el lanzamiento del Sputnik 1 por parte de la Unión Soviética. Este acontecimiento no solo marcó el comienzo de la carrera espacial, sino que también destacó el potencial de los satélites para aplicaciones científicas y de comunicación. El Sputnik 1, permitió estimar la densidad de la atmósfera alta gracias a la fuerza de arrastre del aire en su órbita, y proporcionó datos sobre la ionosfera mediante la propagación de ondas de radio. Este hito inicial fue seguido por otros importantes desarrollos, como el Explorer 1 de Estados Unidos, que identificó los cinturones de Van Allen y transmitió datos cruciales durante cuatro meses.



Figura 2. Sputnik 1 [I2]



Figura 1. Explorer 1 [I1]

A lo largo de las décadas, se han lanzado más de 8,000 satélites con diversos objetivos, aunque aproximadamente 3,000 de ellos ya no están operativos y se consideran basura espacial. A medida que la tecnología avanzaba, los satélites pequeños, como los CubeSats, comenzaron a ganar relevancia. Los CubeSats, o satélites cúbicos, son un tipo de satélites a pequeña escala que se caracterizan por su tamaño compacto y bajo costo. Surgieron en la década de 2000, cuando el concepto de “SmallSat” (satélites de menos de 500 kg) maduró lo suficiente para combinar tecnología avanzada con costos reducidos, haciendo viables muchas misiones que anteriormente eran prohibitivas.

Los CubeSats utilizan un diseño modular estándar (1U, 1.5U, 2U, 3U, 6U, etc.), donde 1U corresponde a un cubo de 10 x 10 x 10 cm. Este diseño permite que los CubeSats sean accesibles para investigaciones académicas y misiones comerciales, facilitando la innovación tecnológica en el espacio. Su versatilidad permite realizar una amplia gama de actividades espaciales, desde la observación de la Tierra hasta las comunicaciones y el monitoreo del clima.

Uno de los componentes más críticos de los CubeSats es el subsistema de control y determinación de actitud (ADCS), que permite orientar y estabilizar el satélite en su órbita. El ADCS emplea

varias técnicas para mantener la orientación del satélite ante perturbaciones ambientales. Entre estas técnicas se encuentran los propulsores, las ruedas de reacción y los magneto-torques. La precisión, velocidad y capacidad para mantener la estabilidad del satélite influyen directamente en el éxito de la misión.

Entre las tecnologías emergentes, los microimpulsores destacan por su capacidad para proporcionar pequeñas cantidades de empuje, lo que permite ajustes precisos en la órbita de los nanosatélites sin necesidad de grandes depósitos de gas. Estos dispositivos permiten alterar levemente el rumbo de los satélites para evitar colisiones o mantener nuevas trayectorias, y potencialmente desorbitar satélites al final de su vida útil para reducir la basura espacial. Aunque ya existen sistemas propulsados por gas para cambiar el rumbo de un satélite, estos son generalmente más grandes y requieren la instalación de depósitos a bordo. Los microimpulsores, en cambio, reducen significativamente el tamaño y el peso del sistema de propulsión, además de su costo.



Figura 3. CubeSat Impulsado por thrusters [13]

## 1.2 Objetivos del Proyecto

El objetivo principal de este trabajo es diseñar y simular un sistema de control de la órbita de un nanosatélite mediante microimpulsores, utilizando Simulink para representar las leyes de actitud y orbitales. El sistema se controlará desde una aplicación interactiva que permite establecer parámetros del satélite y visualizar los resultados de la simulación.

Para alcanzar este objetivo, el documento se estructura en varias secciones. En primer lugar, se desarrolla un Marco Teórico que abarca la dinámica de cuerpos rígidos, los sistemas de referencia en órbita, y la representación de la actitud del satélite. Este marco es esencial para comprender cómo se modela matemáticamente el comportamiento del satélite.

Posteriormente, se presenta un Modelo Dinámico del sistema, que es fundamental para simular el control y la respuesta del satélite ante diferentes comandos y perturbaciones. Este modelo se justifica por la necesidad de prever y validar el comportamiento del sistema antes de su implementación real.

El uso de Simulink como herramienta de simulación se justifica por su capacidad para integrar estos modelos de manera efectiva, facilitando la visualización y el análisis en tiempo real. Las simulaciones se realizan para evaluar la eficacia del sistema de control en diferentes escenarios.

Finalmente, la creación de una Aplicación interactiva se justifica por su utilidad para modificar parámetros del satélite y analizar diferentes escenarios de forma intuitiva. Esta herramienta hace que el sistema sea accesible para usuarios con diferentes niveles de experiencia, proporcionando una plataforma versátil para la simulación y el análisis.

Desde el lanzamiento del Sputnik 1 hasta la actualidad, la tecnología satelital ha avanzado significativamente. El desarrollo de los nanosatélites y sus sistemas de propulsión representa un paso adelante en la accesibilidad y eficiencia de las misiones espaciales. Estos avances reflejan el continuo progreso y la creciente importancia de los satélites pequeños en la exploración espacial y las aplicaciones terrestres. Con la implementación exitosa de microimpulsores, se abre un nuevo horizonte para las misiones de satélites, permitiendo un control más preciso de sus órbitas y contribuyendo a la sostenibilidad del entorno espacial.

## 2 MARCO TEÓRICO

### 2.1 CubeSat

Un CubeSat (Cube Satellite) es un nanosatélite o tipo de satélite a pequeña escala, el cual, debido a su tamaño, su geometría y a su peso, permite el estudio de subsistemas satelitales, así como la implementación de módulos a bajo costo, incluso para investigaciones académicas. Un nanosatélite está conformado por las siguientes partes:

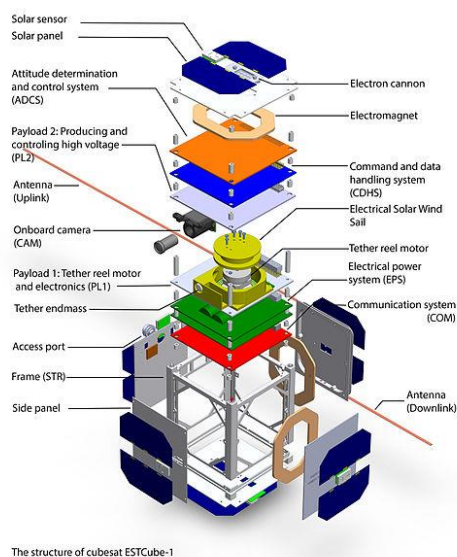


Figura 4. Partes de un CubeSat [I4]

De entre todas éstas las más importantes y representativas son:

- OBC: On Board Computer
- EPS: Electrical Power System
- Tx-Rx: Communication System Navigation system
- ADCS: Attitude Determination and Control System
- THCS: Thermal Control System PayLoad

#### 2.1.1 Sensores y actuadores de un CubeSat

Poder realizar un control de la orientación de un satélite implica dirigir el vehículo respecto una referencia hacia una posición deseada. Este proceso requiere:

- Sensores: Miden la orientación.
- Actuadores: Aplican momentos de fuerza que hagan girar el vehículo.
- Algoritmos: Para calcular las acciones de los actuadores basándose en las mediciones de los sensores.

El campo que integra estos elementos se llama “Guiado, Navegación y Control” (GNC). La orientación de un satélite debe ser controlada y estabilizada por diversas razones, como mantener una antena

orientada hacia la Tierra, gestionar el calor y frío aportado por la radiación solar, o realizar maniobras de guiado en la dirección correcta.

### 2.1.1.1 Sensores

Los sensores generan información sobre el cambio en la orientación del satélite.

#### 1. Giroscopios:

Dispositivos que miden la rotación en un espacio tridimensional sin necesidad de una referencia externa, basados en el principio de conservación del momento angular. Los giroscopios modernos incluyen sistemas electromecánicos (MEMS) miniaturizados en dispositivos electrónicos.

#### 2. Sensores Solares

Instrumentos de navegación que detectan la posición del Sol, midiendo el ángulo respecto al Sol y proporcionando señales continuas y discretas.

#### 3. Detectores de Estrellas ("Star Tracker")

Dispositivos ópticos que utilizan cámaras para medir la posición de las estrellas. Dado que las posiciones de muchas estrellas son conocidas con gran precisión, estos detectores permiten determinar la orientación del satélite al comparar las imágenes capturadas con una base de datos estelar.

#### 4. Magnetómetro:

Instrumento que mide la dirección del campo magnético terrestre. Al comparar estas mediciones con un mapa del campo magnético almacenado a bordo, y conociendo la posición del satélite, se puede determinar la orientación.

### 2.1.1.2 Actuadores

Los actuadores generan los cambios de orientación y en ocasiones posición del satélite.

#### 1. Propulsores

Dispositivos que generan un momento respecto al centro de gravedad del satélite para cambiar su orientación. Están distribuidos estratégicamente en la estructura del satélite para generar momentos de fuerza sin causar translación. Sus limitaciones incluyen el uso de combustible y el desgaste de los motores y válvulas.

#### 2. Ruedas de Reacción

Ruedas impulsadas por motores eléctricos que, al activarse, hacen girar el satélite en sentido opuesto debido a la conservación del momento angular. Son precisas y controladas por ordenador, lo que permite realizar pequeños giros.

#### 3. Velas Solares

Dispositivos que producen fuerza a partir de la luz solar que impacta sobre ellas. Estas velas

ahorran combustible en misiones de larga duración al no tener un gasto energético.



Figura 5. Vela Solar [15]

## 2.2 Sistema de Referencia en órbita

En el estudio de satélites en órbita alrededor de la Tierra, es fundamental utilizar sistemas de referencia adecuados para describir de manera precisa las posiciones y orientaciones del satélite respecto a la Tierra y su órbita. A continuación, se presentan los principales sistemas de coordenadas utilizados en este contexto:

### 2.2.1 Sistema de coordenadas centrado en la Tierra

El sistema de coordenadas  $F_t = \{O_t, i_t, j_t, k_t\}$  está centrado en el centro de masas de la Tierra. En este sistema:

- El vector unitario  $i_t$  apunta hacia la dirección del equinoccio de marzo, también conocido como el "primer punto de Aries", que es un punto de referencia común en astronomía y geodesia.
- El vector unitario  $k_t$  está alineado con el eje de rotación de la Tierra, apuntando hacia el polo norte geográfico.
- El vector unitario  $j_t$  completa el sistema siguiendo la regla de la mano derecha, y se encuentra en el plano ecuatorial, ortogonal a los otros dos vectores.

Las coordenadas de un punto en este sistema se denotan como  $v_t$ , y son esenciales para describir la posición de objetos en el espacio en relación con la Tierra.



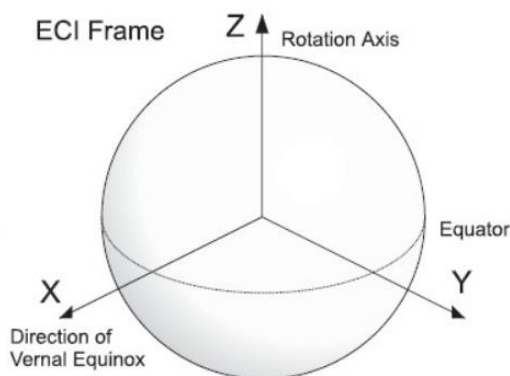


Figura 6. Sistema de coordenadas centrado en la Tierra [I6]

### 2.2.2 Sistema de coordenadas de órbita local

El sistema de coordenadas  $F_o = \{O_o, i_o, j_o, k_o\}$ , también conocido como "Local Vertical Local Horizontal" (LVLH), tiene su origen  $O_o$  en el centro de masas del satélite y está orientado de la siguiente manera:

- El vector  $k_o$  apunta en la dirección del centro de la Tierra, alineado con la línea que conecta el centro del satélite con el centro de la Tierra.
- El vector  $i_o$  se encuentra en el plano orbital y apunta en la dirección de la velocidad del satélite, tangente a la órbita en el caso de una órbita circular.
- El vector  $j_o$  completa el sistema ortogonal y es perpendicular al plano orbital, apuntando en la dirección opuesta al momento angular del satélite.

Este sistema es particularmente útil para maniobras orbitales y para describir la orientación del satélite en relación con su órbita.

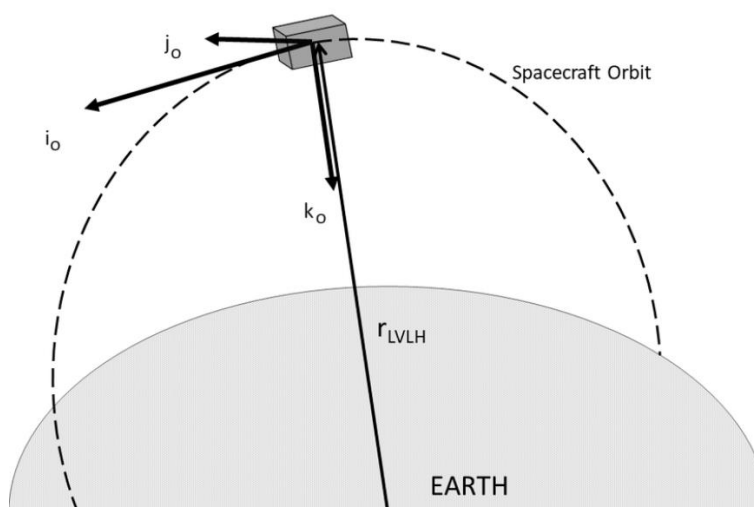


Figura 7. Sistema de coordenadas de órbita local [I7]

### 2.2.3 Sistema de coordenadas centrado en el satélite

El sistema de coordenadas  $F_s = \{O_s, i_s, j_s, k_s\}$  está centrado en el satélite, con el origen  $O_s$  en el centro de masas del vehículo espacial. Este sistema de referencia se utiliza para describir la dinámica interna del satélite.

- La orientación de los vectores unitarios  $i_s, j_s, k_s$  está alineada con los ejes principales de inercia del satélite.
- Las coordenadas en este sistema se denotan como  $v_s$ , y son útiles para describir movimientos relativos y fuerzas internas que actúan sobre el satélite.

### 2.2.4 Transformaciones entre sistemas de coordenadas

Para describir la posición y la velocidad de un satélite en diferentes sistemas de referencia, es necesario realizar transformaciones entre ellos. Un vector expresado en el sistema de coordenadas centrado en la Tierra se puede transformar al sistema centrado en el satélite mediante una matriz de rotación:

$$v_s = R_{st} v_t$$

Aquí,  $v_s$  es el vector en el sistema centrado en el satélite,  $v_t$  es el mismo vector en el sistema centrado en la Tierra, y  $R_{st}$  es la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas.

Esta matriz de rotación debe cumplir con la propiedad de ortogonalidad:

$$R_{st} = R_{ts}^T$$

donde  $R_{ts}$  es la matriz de rotación inversa.

Además, es importante considerar la velocidad angular del sistema de coordenadas del satélite respecto al sistema centrado en la Tierra, denotada como  $\omega_{ts}$ . Esta velocidad angular se puede expresar en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas:

- En el sistema centrado en el satélite se denota como  $\omega_s$ .
- En el sistema centrado en la Tierra se denota como  $\omega_t$ .

Estas transformaciones y conceptos son fundamentales para la correcta navegación y control de satélites en órbita, permitiendo realizar cálculos precisos de sus trayectorias y orientaciones.

## 2.3 Cuerpos rígidos, Dinámica en tres dimensiones

### 2.3.1 Cinemática

Se trata del estudio del cuerpo rígido en movimiento, relacionando el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo sin tener en cuenta la causa que lo produce [7].

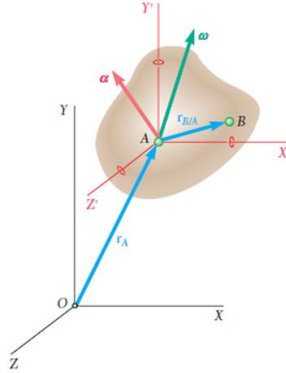


Figura 8. Esquema de movimiento de cuerpos rígidos [7]

### Rotación del marco de referencia

El movimiento general de estos cuerpos en el espacio tridimensional es igual a la suma de una traslación, una rotación y la velocidad relativa que se evidencia en la trayectoria:

$$v_B = v_A + \omega \times r_{\frac{B}{A}} + v_{rel} \quad (2-1)$$

Donde:

$\omega$  : Velocidad angular del cuerpo en el instante dado

$r_{\frac{B}{A}}$  : Posición de B relativa a A

$v_{rel}$  : Velocidad de B relativa al sistema de referencia AX'Y'Z' situado en A

Al derivar la expresión (2-1):

$$a_B = \dot{\omega} \times r_{\frac{B}{A}} + \omega \times \left( \omega \times r_{\frac{B}{A}} \right) + 2\omega \times \dot{r}_{\frac{B}{A}} + a_A \quad (2-2)$$

Donde:

$\dot{\omega} \times r_{\frac{B}{A}}$  : Aceleración en B debido a la aceleración angular del cuerpo

$\omega \times \left( \omega \times r_{\frac{B}{A}} \right)$  : Aceleración centrípeta

$\ddot{r}_{\frac{B}{A}} = a_{\frac{B}{A}}$  : Aceleración de B relativo al sistema de referencia A

$$2\omega \times \dot{r}_{\frac{B}{A}} = a_C : \text{Aceleración de Coriolis}$$

$a_A$  : Aceleración absoluta en A

La aceleración de Coriolis representa por tanto cómo cambia la dirección de la velocidad relativa, siendo vectorialmente perpendicular a esta.

### Traslación del marco de referencia

La velocidad  $v$  y la aceleración de estos cuerpos, vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$v_B = v_A + v_{\frac{B}{A}} \quad (2-3)$$

$$a_B = a_A + a_{\frac{B}{A}} \quad (2-4)$$

### 2.3.2 Cinética

Cinética o Dinámica estudia el movimiento, la relación que existe entre éste, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y su masa.

La cinética se utiliza para determinar las fuerzas que se requieren para producir un movimiento específico o para predecir el movimiento ocasionado por las fuerzas dadas [7]

### Momento Angular

Se puede definir el momento angular como la suma de momentos lineales que actúan sobre un cuerpo cuando este rota con velocidad angular  $\omega$ . De [7] la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de su centro de masa (G) se puede expresar como:

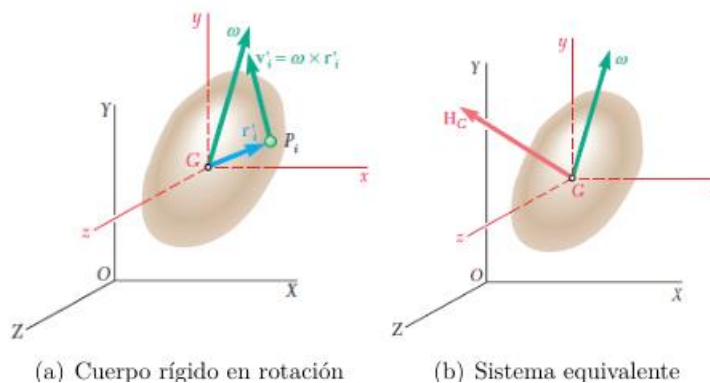


Figura 9. Esquemático de momento angular de un cuerpo rígido [7]

$$H_G = \sum_{t=1}^n (r'_t \times v'_t \Delta m_t) = \sum_{t=1}^n [r'_t \times (\omega \times r'_t) \Delta m_t] \quad (2-5)$$

Al descomponer vectorialmente y al sustituir las sumatorias por integrales, se obtienen expresiones del momento angular en sus componentes rectangulares:

$$H_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int zx dm$$

$$H_y = -\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int yz dm \quad (2-6)$$

$$H_z = -\omega_x \int zx dm - \omega_y \int yz dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm$$

Luego, las integrales contienen términos correspondientes a los momentos de inercia centroidales del cuerpo, alrededor de los ejes x, y y z, estos son:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (2-7)$$

$$I_{xy} = \int xy dm \quad I_{yz} = \int yz dm \quad I_{zx} = \int zx dm$$

Reemplazando las igualdades anteriores se puede expresar el momento angular como:

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = I_{yx}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \quad (2-8)$$

$$H_z = I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_{zz}\omega_z$$

Luego, es posible volver a expresar  $\mathbf{H}_G$  en un entorno matricial como:

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (2-9)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2-10)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \quad (2-11)$$

Para el caso de un nanosatélite es posible seleccionar un sistema de ejes, ejes principales de inercia, donde los productos de inercia o momentos de inercia cruzados son cero, formando, así, una matriz de inercias diagonalizada:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Consideraciones Algebraicas

### 2.4.1 Matriz de Rotación

Es posible establecer una matriz de transformación en un sistema que rota, de la misma forma que es posible establecer una matriz de transformación en un sistema que se traslada. Sin embargo, la diferencia entre estas transformaciones radica en que la rotación no es conmutativa, mientras que la traslación sí lo es. La rotación se verá afectada de acuerdo con el orden en que se ejecuten las rotaciones sucesivas en cada uno de los ejes [10].

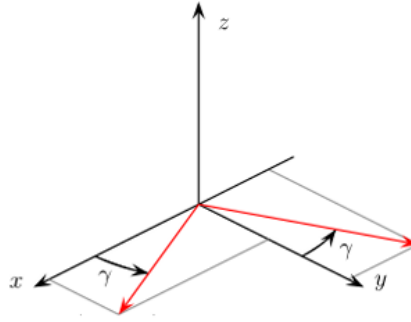


Figura 10. Rotación en un plano [15]

Si se efectúa la rotación en un solo plano, como el plano x-y, entonces se define la siguiente matriz R de rotación 2x2:

$$R_{z\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para el caso de una tercera dimensión, la matriz anterior se pueda escalar fácilmente como una serie de proyecciones.

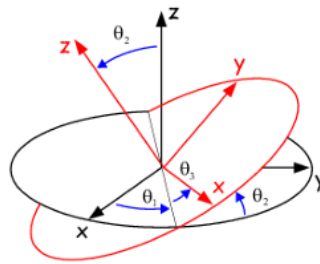


Figura 11. Rotación en tres dimensiones [10]

$$R_1 = R_{x\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

$$R_2 = R_{y\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$R_3 = R_{z\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

## Propiedades

1.  $R \in SO(n)$
2.  $R^{-1} \in SO(n)$
3.  $R^{-1} = R^T$
4.  $\det R = 1$
5. Las columnas (y filas) de R son mutuamente ortogonales
6. Cada columna (y fila) de R es un vector unitario

### 2.4.2 Matriz Antisimétrica

Se encontrarán operaciones que impliquen transformaciones de velocidades relativas entre sistemas de referencias, así como derivadas de matrices de rotación y multiplicaciones entre vectores y matrices. Usando las matrices Skew-Symmetric o anti-simétricas [15], es posible simplificar muchas expresiones y cálculos computacionales.

Se dice que una matriz es skew-symmetric si y solo si:

$$S^T + S = 0 \quad (2-15)$$

Una matriz skew-symmetric 3x3 tiene la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Donde se cumple la relación:

$$s_{ij} + s_{ji} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2-17)$$

Para los términos diagonales  $s_{ii} = 0$  mientras que los otros términos  $s_{ij} = -s_{ji}$ . Si existe un vector columna 3x1  $a = (a_x, a_y, a_z)^T$  es posible definir una matriz skew-symmetric  $S(a)$  como:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} = \tilde{a} \quad (2-18)$$

## Propiedades

Pueden resultar útiles para aplicaciones como la derivación.

Con  $a, b$  vectores pertenecientes a  $\mathbb{R}^3$  y  $\alpha, \beta$  escalares, es posible establecer estas primeras cuatro propiedades [15].

### 1. Linealidad

$$S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b) \quad (2-19)$$

### 2. El producto cruz entre dos vectores.

$$S(a)b = a \times b \quad (2-20)$$

3. Si  $R \in SO(3)$  es una matriz ortogonal

$$S(a \times b) = Ra \times Rb \quad (2-21)$$

4. De las propiedades 2. y 3.

$$\begin{aligned} RS(a)R^T b &= R(a \times R^T b) \\ &= (Ra) \times (RR^T b) \\ &= (Ra) \times b \\ &= S(Ra)b \end{aligned} \quad (2-22)$$

Esta última relación establece que la matriz anti-simétrica de  $a$  al ser rotada es equivalente a la matriz anti-simétrica obtenida de rotar el vector  $a$ .

### 2.4.3 Derivada de una Matriz de Rotación

Ahora se supone la matriz de rotación  $R$  como función de una sola variable. Entonces  $R = R(\theta) \in SO(3)$  para cada  $\theta$ . Dado que  $R$  es una matriz ortogonal, se tiene que:

$$R(\theta)R(\theta)^T = \mathbb{1} \quad (2-23)$$

Al derivar ambos términos de la ecuación respecto a  $\theta$  usando la regla del producto:

$$\frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T + R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta} = 0 \quad (2-24)$$

Definiendo una matriz  $S$  como

$$S = \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T \quad (2-25)$$

Luego su transpuesta es

$$S^T = \left( \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T \right)^T = R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta} \quad (2-26)$$

Con lo que se llega a que

$$S + S^T = 0 \quad (2-27)$$

Luego, la matriz  $S$  definida en (2-25) resulta ser una matriz skew-symmetric o antisimétrica. Multiplicando a ambos lados de la ecuación (2-25) por  $R$  y recordando (2-23)

$$\frac{dR}{d\theta} = SR(\theta) \quad (2-28)$$

Con lo que se llega a que la derivada de una matriz de rotación  $R$  es equivalente a la multiplicación matricial entre  $R$  y una matriz anti-simétrica  $S$ . Comúnmente  $R$  es una matriz de rotación o una serie de multiplicaciones de matrices de rotación [15].



## 2.5 Representación de la actitud

Hay dos principales métodos en cuanto a lo que representación de la actitud se refiere. Por un lado, está la representación mediante Ángulos de Euler que será la empleada en el desarrollo e implementación del trabajo y por otro la representación mediante Cuaterniones.

### 2.5.1 Ángulos de Euler

Establecen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, normalmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos.

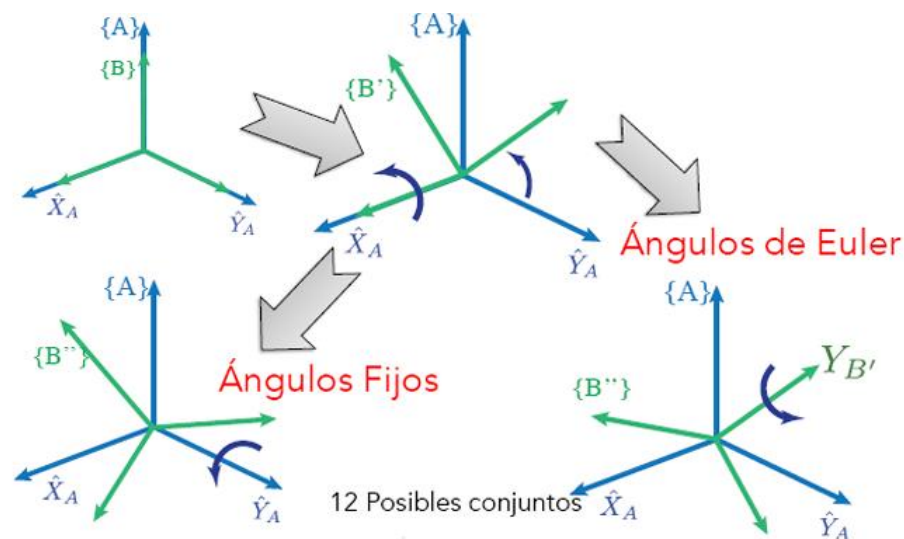


Figura 12. Rotaciones según ejes fijos móviles

Al efectuar rotaciones alrededor de los ejes principales (sistema móvil) es necesario efectuar post-multiplicaciones. Usando los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  es posible definir la orientación en Ángulos de Euler. Asociando estos con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  y con los números 1, 2 y 3 respectivamente, se definen una serie de secuencias básicas para las rotaciones.

Secuencias tipo I: sin repeticiones de ejes (123).

Secuencias tipo II: con repeticiones de ejes (131).

Dadas las permutaciones, existirían 12 rotaciones posibles para un sistema de ángulos fijos y 12 rotaciones para un sistema de ángulos móviles. Las 12 rotaciones para los Ángulos de Euler serían entonces: 123, 132, 213, 231, 312, 321, 121, 131, 212, 313, y 323.

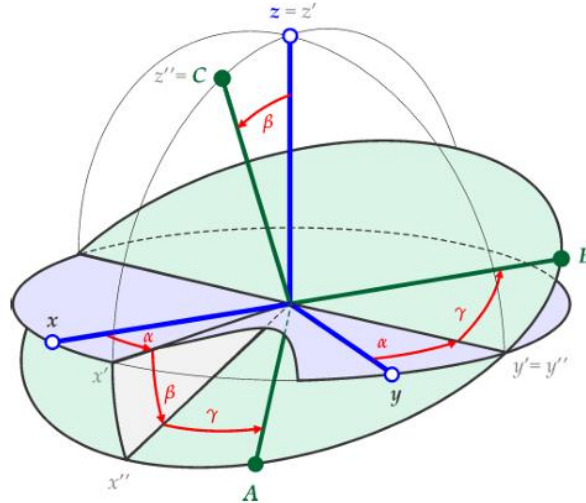


Figura 13. Sucesivas rotaciones en Ángulos de Euler [11]

Cabe recalcar que la secuencia 123 en el sistema fijo es equivalente a la secuencia 321 en el sistema móvil.

## 2.5.2 Cuaterniones

Son útiles para la representación angular de rotaciones sucesivas en un espacio de tres dimensiones, donde se ha comprobado que resultan más eficientes que las matrices de rotación convencionales y habituales. Por lo que han ganado peso y han sido utilizados en aplicaciones relacionadas con el control de orientación (actitud) de sistemas como robots, vehículos espaciales, aeronaves, entre otros, a pesar de su complejidad de comprensión [8].

Los cuaterniones son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos, generada a partir de añadir las unidades imaginarias  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  a los números reales. Estos tres elementos pueden verse también como vectores unitarios ortonormales, que generan un espacio de tres dimensiones representando de esta forma la parte vectorial del cuaternión. Se puede expresar al cuaternión mediante la siguiente representación [12]:

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} \quad (2-29)$$

Donde  $q_1, q_2, q_3, q_0$  pertenecen a  $\mathfrak{R}$ ,  $q_0$  se le denomina parte escalar (real) y  $q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  parte vectorial (imaginaria), se definen además mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} \sin\phi/2 \quad (2-30)$$

$$q_0 = \cos\phi/2 \quad (2-31)$$

Luego, dado un determinado vector  $\mathbf{a}$  y un ángulo  $\phi$  o ángulo de orientación relativa entre dos sistemas de referencia y un cuaternión  $\mathbf{Q}$  que representa alguna orientación particular, se puede hallar la matriz de rotación entre los dos sistemas de referencia [12]:

$$\mathbf{R} = (q_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \cdot \mathbb{1} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0 \tilde{\mathbf{q}} \quad (2-32)$$

Expresando  $\mathbf{Q}$  en términos de R:

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \text{tr}(R)} \quad (2-33)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{4q_0} \begin{bmatrix} R_{23} & R_{23} \\ R_{31} & -R_{13} \\ R_{12} & R_{21} \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

Donde  $\text{tr}()$  referencia la traza en álgebra lineal donde suman los elementos de la diagonal principal.

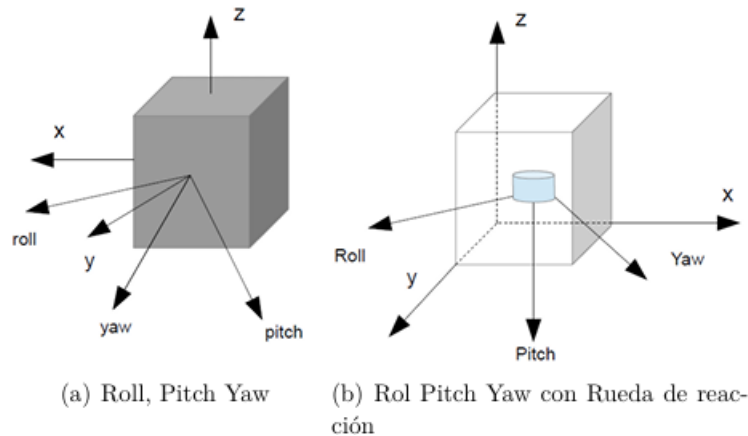


Figura 14. Marcos de referencia [12]

En este trabajo, se ha optado por emplear ángulos de Euler en lugar de cuaterniones para la representación de la actitud del satélite debido a la simplicidad y la intuición que los ángulos de Euler ofrecen en la interpretación de rotaciones tridimensionales. Los ángulos de Euler son más directos de visualizar y comprender, lo cual facilita la explicación teórica y la interpretación de los resultados. Aunque los cuaterniones ofrecen ventajas significativas, como la ausencia de singularidades y una mayor eficiencia computacional en ciertas aplicaciones, la complejidad matemática que implican podría desviar el foco del proyecto de su objetivo principal. Por ello, se decidió que los ángulos de Euler eran más apropiados para este estudio, permitiendo un equilibrio adecuado entre precisión y claridad en la representación de la orientación del satélite.

## 2.6 Transmisión Inercial

Como se ha tratado anteriormente, existen una serie de actuadores diferenciados que permiten modificar la orientación y en ocasiones posición de un satélite en el espacio. Se van a explicar los dos principales como son las ruedas de reacción y los propulsores.

### 2.6.1 Ruedas de reacción

Un mecanismo para modificar la Orientación (Attitude) son las ruedas de reacción, aportando un torque en un punto, gracias a la conservación de momento angular, a continuación, se explicará cómo actúan ruedas de reacción conjuntamente para modificar la orientación.

Para una sencilla comprensión se dispone de 3 ruedas de reacción en el mismo plano con un ángulo  $\beta$ .

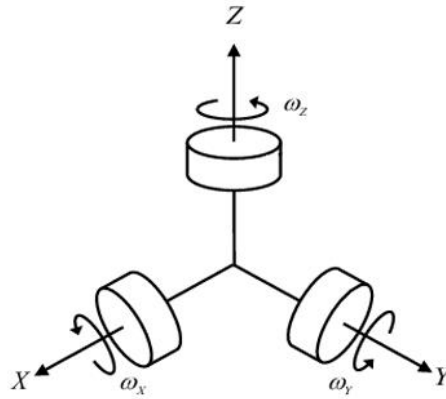


Figura 15. Ruedas de reacción

Las matrices de transformación de cada rueda desde el marco de cada rueda al marco de referencia dado.

$$R_{W1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_{W2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{W3} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El momento angular debe ser igual y en sentido contrario al momento del satélite, esta relación se describe así:

$$\mathbf{h}_\omega = I \times \dot{\omega} + \omega \times I\omega \quad (2-35)$$

El funcionamiento es muy sencillo, para obtener mayor cantidad de momento angular se necesita de mayor velocidad y de mayor momento de inercia al volante. Sin embargo, al necesitar mayor momento inercial, la velocidad disminuye, por lo que es necesario que el motor disponga de un mayor torque; se necesita de un motor con una mejor eficiencia o mayor potencia, de manera que tenga torque y velocidad. Esto puede ser recreado por un tipo de motor como es el brushless.

## 2.6.2 Propulsores

Otro mecanismo para modificar la Orientación (Attitude) son los propulsores o thrusters, que generan un torque al aplicar una fuerza en un punto fuera del centro de masa del satélite, lo que provoca un cambio en su orientación. A continuación, se explicará cómo los thrusters actúan conjuntamente para modificar la orientación del satélite.

Para una sencilla comprensión, se disponen de varios thrusters situados estratégicamente en el satélite, capaces de generar torques en diferentes ejes según sea necesario.

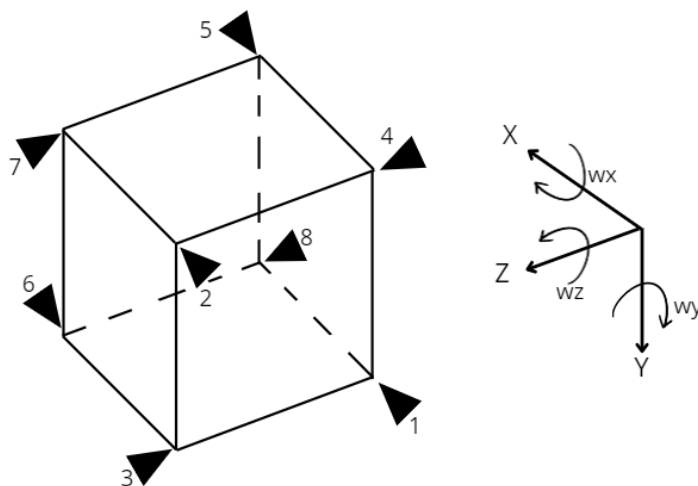


Figura 16. Esquema de disposición de propulsores

Las fuerzas generadas por los propulsores se aplican en el marco de referencia del satélite, y el torque resultante  $\tau$  se define por la siguiente relación:

$$\tau = r \times F \quad (2-36)$$

Por lo que se tiene el siguiente vector de torques:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Donde:

- $\tau$  es el torque generado.
- $r$  es el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza con respecto al centro de masa del satélite.
- $F$  es la fuerza aplicada por el propulsor.

El momento angular del satélite,  $L$ , se ve afectado por el torque aplicado, y su relación con la velocidad angular  $\omega$  del satélite se describe como:

$$\tau = I \cdot \dot{\omega} \quad (2-37)$$

El funcionamiento es muy sencillo: para generar un mayor cambio en la orientación del satélite (mayor aceleración angular  $\dot{\omega}$ ), se necesita aplicar un mayor torque, lo que se consigue aumentando la magnitud de la fuerza o cambiando el punto de aplicación  $r$ . Esto implica el uso de microthrusters con la capacidad de proporcionar una fuerza controlada y suficiente para alcanzar el control de actitud deseado.

A diferencia de las ruedas de reacción, los thrusters no dependen de la velocidad angular para generar torque, sino que operan mediante la expulsión de masa (en el caso de microthrusters a propulsión) para crear la fuerza necesaria. Esto permite ajustes rápidos y precisos en la orientación del satélite, aunque requiere una gestión cuidadosa del combustible o energía disponible.

## 2.7 Cálculo Orbital y Maniobras de Transferencia

Las maniobras orbitales son fundamentales para ajustar y controlar la trayectoria de un satélite en el espacio. Los microimpulsores, que aplican pequeñas fuerzas sobre el satélite, permiten realizar correcciones precisas en su órbita. En este contexto, consideramos un nanosatélite que ya está en órbita con una velocidad inicial, y que recibe un impulso, resultando en un cambio de velocidad ( $\Delta V$ ) que modifica sus parámetros orbitales [1].

### 2.7.1 Parámetros Fundamentales

Para calcular los efectos de un impulso sobre la órbita de un satélite, es esencial comprender los parámetros orbitales básicos y las ecuaciones asociadas:

- Altura inicial ( $h$ ): Es la distancia desde la superficie terrestre hasta la órbita del satélite.
- Radio orbital ( $r$ ): Es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite, calculada como  $r = R_{Tierra} + h$ .
- Parámetro gravitacional estándar ( $\mu$ ): Es el producto de la constante gravitacional  $G$  y la masa de la Tierra, dado por  $\mu = 398600.4 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .
- Velocidad inicial ( $V_0$ ): Es la velocidad del satélite antes de aplicar el impulso.
- Ángulo de impulso ( $\chi$ ): Es el ángulo entre la dirección del impulso y la velocidad inicial del satélite.

### 2.7.2 Resultados Post-Impulso

Cuando se aplica un impulso al satélite en órbita, este experimenta una modificación en su velocidad y en otros parámetros orbitales. A continuación, se detallan los cálculos necesarios para determinar estos parámetros después del impulso [E1].

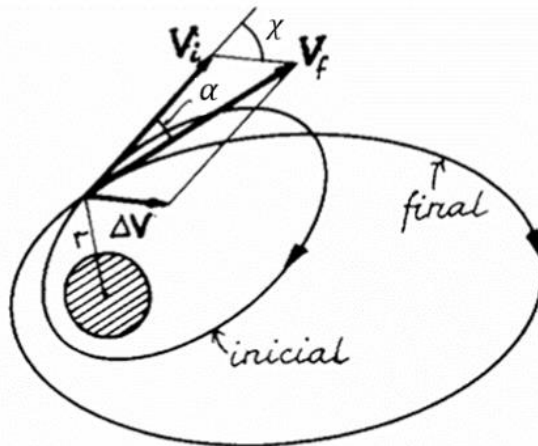


Figura 17. Cambio Orbital

#### 1. Velocidad Final ( $V_f$ ) y Dirección de la Velocidad

La nueva velocidad ( $V_f$ ) del satélite después de aplicar el impulso se calcula utilizando la ley del coseno, en función de la velocidad inicial ( $V_0$ ), la magnitud del cambio de velocidad ( $\Delta V$ ), y el ángulo  $\chi$  entre la dirección del cambio de velocidad y la velocidad inicial:

$$V_f = \sqrt{V_0^2 + \Delta V^2 + 2 \cdot V_0 \cdot \Delta V \cdot \cos \chi} \quad (2-38)$$

La nueva dirección de la velocidad ( $\alpha$ ) después del cambio de velocidad se determina mediante:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta V \cdot \sin\chi}{V_0 + \Delta V \cdot \cos\chi}\right) \quad (2-39)$$

## 2. Eje Semimayor ( $a$ )

El eje semimayor de la nueva órbita se determina a partir de la energía específica orbital ( $\epsilon$ ), que se mantiene constante en la órbita:

$$\epsilon = \frac{V_f^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2-40)$$

Despejando el eje semimayor ( $a$ ):

$$a = -\frac{\mu}{2\epsilon} \quad (2-41)$$

## 3. Excentricidad ( $e$ )

La excentricidad de la órbita después de la maniobra se calcula utilizando la ecuación:

$$e = 1 + \frac{2\epsilon L^2}{\mu^2} \quad (4-42)$$

donde  $L = r \cdot V_f \cdot \cos\chi$  es el momento angular específico de la órbita.

## 4. Altura de Apogeo ( $h_{af}$ ) y Perigeo ( $h_{pf}$ )

Se determinan a partir de las distancias respectivas  $r_a$  y  $r_p$ :

$$r_a = a \cdot (1 + e) \quad (4-43)$$

$$r_p = a \cdot (1 - e) \quad (4-44)$$

Las alturas se calculan restando el radio de la Tierra:

$$h_{af} = r_a - R_{Tierra} \quad (4-45)$$

$$h_{pf} = r_p - R_{Tierra} \quad (4-46)$$

## 5. Periodo Orbital ( $T$ )

El periodo orbital de la nueva órbita se calcula utilizando la tercera ley de Kepler:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (4-47)$$

Este periodo es el tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta alrededor de la Tierra en su nueva órbita.

## 3 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

### 3.1 Consideraciones del modelo

El desarrollo del modelo se hace para un sistema orbital, es decir, para un nanosatélite que está en órbita en el espacio. Las ecuaciones serán usadas posteriormente para un satélite mediante simulación variando los valores de ciertos parámetros como la distancia desde el centro de la tierra.

#### 3.1.1 Variables de entrada

Dado el modelo físico desarrollado, se consideran como entradas las dinámicas del actuador. Específicamente, las variaciones temporales y el momento angular generado por el actuador. Sin embargo, para simplificar las ecuaciones y facilitar la implementación en las simulaciones, se ha decidido omitir el momento angular directo del actuador en el análisis. Esto se debe a que, en el contexto de este modelo, el momento angular podría introducir complejidades adicionales en las ecuaciones de movimiento, complicando la resolución analítica y numérica sin aportar beneficios significativos al objetivo del control de la actitud. En su lugar, se considerará la variación del momento angular, representada por el torque producido por los thrusters, como la principal entrada al sistema.

$$\dot{H}_w = I\alpha = r \times m\alpha = u \quad (3-1)$$

#### 3.1.2 Variables de salida

Las técnicas de control efectuadas se realizan sobre el subsistema ADCS de un nanosatélite. Esto es, Attitude and Determination Control System, por lo que se ejerce control sobre la orientación del sistema. Luego, las variables de salida será la orientación del nanosatélite, Roll, Pitch y Yaw.

#### 3.1.3 Perturbaciones

Los satélites en el espacio exterior suelen estar expuestos a una serie de diferentes perturbaciones, entre las que podemos encontrar el arrastre aerodinámico, la presión debido a la radiación solar, el gradiente gravitacional, movimientos internos del satélite, el campo magnético, la eyección de propelente, entre otros.

Por facilidad se hará uso de los efectos del gradiente gravitacional. Sin embargo, a continuación, se muestran unas expresiones lineales y simplificadas y valores asociados de lo que podrían ser los Torques o momentos efectuados por estas perturbaciones.

#### Radiación Solar

$$\tau = r \times F_{solar} \quad (3-2)$$

$$F_{solar} = (1 + K)P_s A \quad (3-3)$$

$$P_s = I_s/c \quad (3-4)$$

Donde  $K$  es la reflectividad solar, normalmente entre 0 y 1,  $A$  es el área expuesta a la radiación solar,  $I_s$  es una constante solar el cual depende de la altitud heliocéntrica,  $c$  la velocidad de la luz. El torque es perpendicular a los rayos de incidencia del sol sobre el satélite. Dada la referencia de [22] los valores



comunes son:

$$K = 0,5$$

$$S = 5m^2$$

$$I_s = 1400 \frac{W}{m^2}$$

$$r = 0,1 m$$

$$\tau = 3,5 \times 10^6 Nm$$

### Arrastre Aerodinámico

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{aero} \quad (3-5)$$

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \quad (3-6)$$

$\rho$  es la densidad atmosférica, la cual varía entre  $10^{-5}$  y  $10^{-15} \frac{kg}{m^3}$  de acuerdo con la altitud en la que se encuentre,  $v$  es la velocidad del satélite en órbita,  $A$  es el área de arrastre y  $C_D$  es el coeficiente de arrastre aerodinámico. Comúnmente los valores son [22]:

$$\rho = 1 \times 10^{-12} \frac{kg}{m^3}$$

$$C_D = 2$$

$$A = 0,0225 m^2$$

$$r = 300 km$$

$$\tau = 1,2 \times 10^{-4} Nm$$

### Gradiente Gravitacional

$$\boldsymbol{T} = \frac{3\mu}{2R^3} \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{xx})\phi \\ (I_{zz} - I_{yy})\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Donde  $\mu$  es la constante gravitacional terrestre (GM),  $R$  es la distancia desde el centro de la tierra hasta el centro de masas del satélite. Normalmente el valor del torque suele ser  $6 \times 10^{-5} Nm$  para un nanosatélite este valor es mucho menor.

### Campo Magnético

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} \quad (3-8)$$

Donde  $M$  es el momento dipolar magnético y  $B$  el campo magnético de la tierra, el cual dependerá de la orientación y la altitud del satélite. Generalmente los valores son [22]:

$$M = 0,1 A m^2; \quad \text{Ampere} - \text{turn} - m^2$$

$$B = 3 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$$

$$\tau = 3 \times 10^{-6} \text{ Nm}$$

### 3.2 Dinámica de orientación

Partiendo de la ecuación de movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo [7], se tiene que:

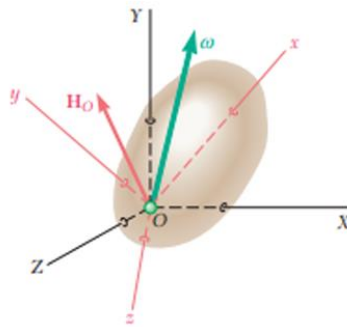


Figura 18. Esquema de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo [7]

$$\Sigma \mathbf{M}_0 = \dot{\mathbf{H}}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_0 \quad (3-9)$$

Donde:

$\Sigma \mathbf{M}_0$ : suma de momentos alrededor del punto fijo O de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo rígido. Para un nanosatélite orbital suelen ser las perturbaciones descritas previamente. Para este caso se considerará la presencia del gradiente gravitacional (Mg).

$H_0$ : Cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto al sistema de referencia fijo OXYZ. Cuando se utilizan microthrusters, la cantidad de movimiento angular  $H_0$  depende únicamente del movimiento del satélite debido al torque generado por los thrusters. Esto se describe como:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_B \quad (3-10)$$

Donde  $\mathbf{H}_B = \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}$ , con  $\mathbf{I}_B$  como el tensor de inercias del satélite y  $\boldsymbol{\omega}$  como el vector de velocidad angular.

$\frac{d}{dt}(H_0) = \dot{H}_0$ : razón de cambio de  $H_0$  con respecto al sistema de referencia de rotación  $O_{xyz}$

$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ : velocidad angular del sistema de referencia  $O_{xyz}$ .

Aplicando la ecuación (3-10) y la definición de  $H_B$  en la ecuación de movimiento (3-9) se tiene que:

$$\mathbf{M}_{ext} = \dot{\mathbf{H}}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_B \quad (3-11)$$

Sustituyendo  $\mathbf{H}_B = \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}$ , se obtiene

$$\mathbf{M}_{ext} = \mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}) \quad (3-12)$$

$\mathbf{M}_{ext}$  está compuesto tanto por el torque generado por los thrusters  $\mathbf{T}_{in}$ , el cual causa una aceleración angular  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  en el satélite como por el momento del gradiente gravitacional que se verá más adelante  $\mathbf{M}_g$ . Por definición, si existe un vector de la forma  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ , se puede definir la matriz skew-simétrica asociada al producto cruz consecutivo [9] de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega} \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (3-13)$$

Reemplazando (3-13) en la ecuación de torque (3-12)

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{T}_{in} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}$$

Finalmente, esta ecuación describe la dinámica del satélite bajo la influencia del torque aplicado por los thrusters:

$$\underbrace{\mathbf{M}_g}_{\text{Gradiente gravitacional}} = \underbrace{\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}}}_{\text{Efecto inercial}} - \underbrace{\mathbf{T}_{in}}_{\text{Torque de entrada}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}}_{\text{Efecto giroscopico}} \quad (3-14)$$

### Rotación y Transformación de Ejes

Para analizar la orientación del satélite, se utiliza el orden de transformación de los ejes  $\psi$  (YAW),  $\theta$  (PITCH) y  $\phi$  (ROLL), es decir, el orden de rotación 3-2-1. Se asocian los ángulos de Roll, Pitch y Yaw a los ejes  $X_B, Y_B, Z_B$ , que están en el marco de referencia del cuerpo.

$$\mathbf{R}_{321} = \mathbf{R}_{x,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi} \quad (3-15)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{R}_{321} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta c\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta s\phi \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

Donde las letras c y s representan las funciones trigonométricas de coseno y seno.

Esta matriz se usa para relacionar las velocidades angulares del satélite en su marco de referencia con las derivadas de los ángulos de Euler  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ :

La primera rotación es alrededor del eje  $Z_B$  y su derivada asociada es  $d\psi/dt$  en el mismo eje de rotación; esta derivada está sujeta a tres rotaciones sucesivas:

1. La primera en el eje  $Z_B$  por el ángulo  $\psi$ ,
2. La segunda en  $Y_B$  por  $\theta$  y
3. La tercera en  $X_B$  por  $\phi$ .

La segunda transformación ocurre en el eje  $Y_B$  con un ángulo  $\theta$ , cuya derivada asociada es  $d\theta/dt$ . Esta derivada está sujeta a dos rotaciones sucesivas:

1. La primera en el eje  $Y_B$  con el ángulo  $\theta$  y
2. La segunda alrededor del eje  $X_B$  con el ángulo  $\phi$

La tercera transformación ocurre en el eje  $X_B$  con un ángulo  $\phi$ , cuya derivada asociada es  $d\phi/dt$ . Esta es causada por una rotación efectuada en el eje  $X_B$  por un ángulo  $\phi$ .

Luego, para hallar el vector asociado a la velocidad angular (del satélite en el marco del cuerpo rígido, relativo  $X_R Y_R Z_R$  o al marco de referencia del centro de gravedad del cuerpo  $X_B Y_B Z_B$ ) se procede a hacer la sumatoria de estas 3 transformaciones efectuadas, así:

$$\omega_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{x,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{x,\phi} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

Reemplazando las respectivas matrices de rotación, multiplicando y sumando matricialmente se llega a:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\phi}s\theta \\ \dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi \\ \dot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\theta}s\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Al resolver estas ecuaciones para  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  se llega a ecuaciones las cuales dan información de roll, pitch y yaw en términos de la velocidad angular del satélite en el marco de referencia del centro de gravedad respecto al marco de referencia del cuerpo rígido.

Se evidencia la presencia de una singularidad en  $\pi/2$ , razón por la cual suele usarse otro tipo de representación angular como los cuaterniones.

### Derivadas y Aceleraciones Angulares

Al conocer elementos de la matriz de cosenos directores se conoce la orientación del satélite relativo al marco de referencia del cuerpo, la matriz de rotación  $R_{321}$  se desarrolló anteriormente.

Para un cuerpo en rotación, estos elementos pueden variar con el tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} R_{321} = \tilde{\omega} R_{321} \quad (3-20)$$

$$\frac{d}{dt} R_{321} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\theta c\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

Dadas las velocidades angulares en cada uno de los ejes del marco de referencia del cuerpo, se procede a calcular, mediante la regla de la cadena, las aceleraciones angulares mediante sus respectivas derivadas temporales:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t)s\theta(t) \\ \dot{\theta}(t)c\phi + \dot{\psi}(t)c\theta(t)s\phi(t) \\ \dot{\psi}(t)c\theta(t)c\phi(t) - \dot{\theta}(t)s\phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi}\dot{\theta}c\theta - \ddot{\psi}s\theta \\ \ddot{\theta}c\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}s\phi + \ddot{\psi}c\theta s\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta s\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta c\phi \\ -\ddot{\theta}s\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c\phi + \ddot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta c\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta s\phi \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c\theta \\ -\dot{\phi}s\phi & -\dot{\psi}s\theta s\phi & \dot{\phi}c\theta c\phi \\ -\dot{\theta}c\phi & -\dot{\psi}s\theta c\phi & -\dot{\phi}c\theta s\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

### 3.2.1 Momento del Gradiente Gravitacional

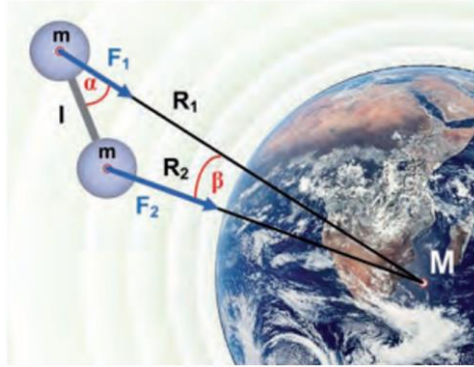


Figura 19. Esquema Gradiente Gravitacional

La ley de gravitación universal establece que fuerza gravitacional entre dos masas  $M$  y  $m$  separadas por una distancia  $R$  es:

$$\vec{F}_g = G \frac{Mm}{R^2} \cdot \hat{u}_r \quad (3-24)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

En el contexto de un satélite en órbita, el **momento del gradiente gravitacional** se origina debido a la diferencia de fuerza gravitacional experimentada en diferentes puntos del satélite, dada la distancia relativamente pequeña entre esos puntos y el centro de la Tierra.

Luego el momento del gradiente gravitacional se expresaría como:

$$M_g = \frac{l}{2} \times (\vec{F}_{g2} - \vec{F}_{g1}) \quad (3-25)$$

En nanosatélites, debido a las escalas dimensionales, los vectores radiales desde el centro de masa del satélite hacia la Tierra son prácticamente equivalentes, lo que hace que las fuerzas sean casi iguales y el momento resultante sea nulo si se considera el centro de masa.

Sin embargo, para un análisis más detallado, se considera la fuerza de atracción gravitacional experimentada por un elemento de masa diferencial  $dm$  dentro del satélite [14]. Asumiendo que la Tierra es una esfera perfecta con una distribución de masa simétrica, y usando el parámetro gravitacional  $\mu = GM$ , se tiene:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \sin\phi \\ -\cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} R \quad (3-26)$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad (3-27)$$

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Donde

$\vec{R}$ : Vector desde el centro de la tierra al centro de masa del satélite.

$\vec{r}$ : Vector desde el centro de la tierra al elemento de masa  $dm$  del satélite.

$\vec{\rho}$ : Vector de posición del elemento de masa  $dm$  respecto al centro de masa del satélite.

La fuerza diferencial de atracción gravitacional sobre  $dm$  es:

$$d\vec{F} = -\mu \frac{dm}{r^3} \vec{r} \quad (3-29)$$

Y el momento diferencial correspondiente es:

$$d\vec{M}_g = -\vec{\rho} \times \mu \frac{dm}{r^3} \vec{r} = -\mu \frac{dm}{r^3} \vec{\rho} \times (\vec{R} + \vec{\rho}) = -\mu \frac{dm}{r^3} \vec{\rho} \times \vec{R} \quad (3-30)$$

Hallando el cuadrado de  $r$  (3-27):

$$r^2 = (\vec{R} + \vec{\rho}) \cdot (\vec{R} + \vec{\rho}) = R^2 \left[ 1 + (\rho/R)^2 + 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right] \quad (3-31)$$

$r^{-3}$  puede ser escrito como:

$$r^{-3} = \frac{1}{R^3} \left[ 1 + \rho^2/R + 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right]^{-3/2}$$

En un desarrollo aproximado, considerando que  $\vec{\rho}$  es mucho menor que  $\vec{R}$ , y despreciando términos de mayor orden en la expansión binomial:

$$\approx \frac{1}{R^3} \left[ 1 - 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right] \quad (3-32)$$

El momento total del gradiente gravitacional sobre el satélite es:

$$\vec{M}_g = -\frac{\mu}{R^3} \int_m \left[ 1 - 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right] (\vec{\rho} \times \vec{R}) dm \quad (3-33)$$

$$\vec{M}_g = -\frac{\mu}{R^3} \int_m (\vec{\rho} \times \vec{R}) dm + \frac{3\mu}{R^3} \int_m \frac{1}{R^2} (\vec{R} \cdot \vec{\rho}) (\vec{\rho} \times \vec{R}) dm \quad (3-34)$$

Dado que el origen del sistema de referencia del cuerpo coincide con el centro de masa del satélite, se tiene que:

$$\int_m \vec{r} dm = 0 \quad (3-35)$$

Por lo tanto, el momento gravitacional se simplifica a:

$$\vec{M}_g = \frac{3\mu}{R^3} \int_m \frac{1}{R^2} (\vec{R} \cdot \vec{\rho}) (\vec{\rho} \times \vec{R}) dm \quad (3-36)$$

Se escogen los ejes de referencia de la órbita con el origen en el centro de masa del satélite.

Teniendo en cuenta que:

- $Z_0$  se dirige desde el centro de masa del satélite al centro de la Tierra.
- $X_0$  está en el plano de la órbita a lo largo de la dirección de avance normal a  $Z_0$ .
- $Y_0$  es normal al plano de la órbita.

La actitud del satélite puede identificarse mediante tres rotaciones sucesivas de los ejes de referencia de la órbita en la siguiente secuencia:

- $\psi$  sobre  $Z_0$
- $\theta$  sobre el recién eje  $Y_0$  desplazado
- $\phi$  sobre la posición final del eje  $X_0 \approx X$

Por lo tanto,  $R$  puede expresarse como (3-26)

Luego, recordando las definiciones (3-26) y (3-28), se expande el vector en sus componentes cartesianos:

$$M_{gx} = \frac{3\mu}{R^3} \int (s(\theta)x - c(\theta)s(\phi)y - c(\theta)c(\phi)z)(-c(\theta)c(\phi)y + c(\theta)s(\phi)z) dm \quad (3-37)$$

$$= \frac{3\mu}{R^3} [\int (x^2 + y^2) dm - \int (x^2 + z^2) dm] c^2(\theta) s(\phi) c(\phi) \quad (3-38)$$

$$= \frac{3\mu}{2R^3} (I_{zz} - I_{yy}) \sin(2\phi) \cos\theta^2 \quad (3-39)$$

$$M_{gy} = \frac{3\mu}{R^3} \int (s(\theta)x - c(\theta)s(\phi)y - c(\theta)c(\phi)z)(s(\theta)z + c(\theta)c(\phi)x) dm \quad (3-40)$$

$$= -\frac{3\mu}{R^3} [\int (y^2 + z^2) dm - \int (x^2 + y^2) dm] s(\theta) c(\theta) s(\phi) \quad (3-41)$$

$$= \frac{3\mu}{2R^3} (I_{zz} - I_{xx}) \cos\phi \sin(2\theta) \quad (3-42)$$

$$M_{gz} = \frac{3\mu}{R^3} \int (s(\theta)x - c(\theta)s(\phi)y - c(\theta)c(\phi)z)(-c(\theta)s(\phi)x - s(\theta)y) dm \quad (3-43)$$

$$= \frac{3\mu}{R^3} \int (z^2 + y^2) dm - \int (x^2 + z^2) dm] c^2(\theta) s(\phi) c(\phi) \quad (3-44)$$

$$= \frac{3\mu}{2R^3} (I_{xx} - I_{yy}) \sin\phi \sin\theta^2 \quad (3-45)$$

### 3.3 Modelo no lineal

Luego, usando las deducciones matriciales para velocidad y aceleración angular, se reemplaza en (3-14):

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c\theta \\ -\dot{\phi}s\phi & -\dot{\psi}s\theta s\phi & \dot{\phi}c\theta c\phi \\ -\dot{\theta}c\phi & -\dot{\psi}s\theta c\phi & -\dot{\phi}c\theta s\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\theta}s\phi) & \dot{\phi}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi \\ \dot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\theta}s\phi & 0 & -(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta) \\ -(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi) & \dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} + \frac{3\mu}{2R^3} \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\sin(2\phi)\cos\theta^2 \\ (I_{zz} - I_{xx})\cos\phi\sin(2\theta) \\ (I_{xx} - I_{yy})\sin\phi\sin\theta^2 \end{bmatrix}$$

Al resolver para las aceleraciones de Roll, Pitch y Yaw:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \dot{\psi}\dot{\theta}c\theta - I_{xx}(-\tau_x + \dot{\psi}(I_{zz}c\phi c\theta(\dot{\phi}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi) + I_{yy}c\theta s\phi(\dot{\theta}s\phi) - \dot{\psi}c\phi c\theta)) + \\ & \dot{\theta}(I_{yy}c\phi(\dot{\theta}s\phi - \dot{\psi}c\phi c\theta) - I_{zz}s\phi(\dot{\phi}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi)) + s\phi s\theta(\dot{\phi}^2 s\phi - I_{yy}(-\tau_y + \dot{\psi}(I_{xx}s\theta(\dot{\theta}s\phi - \\ & \dot{\psi}c\phi c\theta) - I_{zz}c\phi c\theta(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta))) - I_{xx}\dot{\phi}(\dot{\theta}s\phi - \dot{\psi}c\phi c\theta) + I_{zz}\dot{\theta}s\phi(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)) + \dot{\psi}\dot{\theta}s\phi s\theta - \\ & \dot{\phi}\dot{\psi}c\phi c\theta)/(c\theta c\phi^2 + c\theta s\phi^2) + (c\phi s\theta(\dot{\phi}\dot{\theta}c\phi - I_{zz}(-\tau_z + \dot{\psi}(I_{xx}s\theta(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi) + I_{yy}c\theta s\phi(\dot{\phi} - \\ & \dot{\psi}s\theta))) - I_{xx}\dot{\phi}(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi) + I_{yy}\dot{\theta}c\phi(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)) + \dot{\phi}\dot{\psi}c\theta s\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}c\phi s\theta)/(c\theta c\phi^2 + c\theta s\phi^2) \end{aligned} \quad (3-46)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & (\dot{\phi}^2 s(2\phi))/2 - (\dot{\phi}\dot{\theta}s(2\phi))/2 + I_{yy}\tau_y c\phi - I_{zz}\tau_z s\phi - \dot{\phi}\dot{\psi}c\phi^2 c\theta - \dot{\phi}\dot{\psi}c\theta s\phi^2 + \\ & (I_{xx}I_{yy}\dot{\phi}\dot{\theta}s(2\phi))/2 - (I_{xx}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\theta}s(2\phi))/2 + I_{xx}I_{yy}\dot{\psi}^2 c\phi^2 c\theta s\theta - I_{yy}I_{zz}\dot{\psi}^2 c\phi^2 c\theta s\theta + \\ & I_{xx}I_{zz}\dot{\psi}^2 c\theta s\phi^2 s\theta - I_{yy}I_{zz}\dot{\psi}^2 c\theta s\phi^2 s\theta - I_{xx}I_{yy}\dot{\phi}\dot{\psi}c\phi^2 c\theta + I_{yy}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}c\phi^2 c\theta - I_{xx}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}c\theta s\phi^2 + \\ & I_{yy}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}c\theta s\phi^2 - I_{xx}I_{yy}\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi s\phi s\theta + I_{xx}I_{zz}\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi s\phi s\theta \end{aligned} \quad (3-47)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & (c\phi(\dot{\phi}\dot{\theta}c\phi - I_{zz}(-\tau_z + \dot{\psi}(I_{xx}s\theta(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi) + I_{yy}c\theta s\phi(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta))) - s\phi s\theta^2(\dot{\psi}c\theta s\phi - \\ & I_{xx}\dot{\phi}(\dot{\theta}c\phi) + I_{yy}\dot{\theta}c\phi(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)) + \dot{\phi}\dot{\psi}c\theta s\phi) + \dot{\psi}\dot{\theta}c\phi s\theta)/c\theta - (s\phi(-I_{yy}\tau_y - \dot{\phi}^2 s\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\phi s\theta + \\ & \dot{\phi}\dot{\psi}c\phi c\theta - I_{xx}I_{yy}\dot{\phi}\dot{\theta}s\phi + I_{yy}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\theta}s\phi - I_{xx}I_{yy}\dot{\psi}^2 c\phi c\theta s\theta + I_{yy}I_{zz}\dot{\psi}^2 c\phi c\theta s\theta + I_{xx}I_{yy}\dot{\phi}\dot{\psi}c\phi c\theta - \\ & I_{yy}I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}c\phi c\theta + I_{xx}I_{yy}\dot{\psi}\dot{\theta}s\phi s\theta - I_{yy}I_{zz}\dot{\psi}\dot{\theta}s\phi s\theta))/c\theta \end{aligned} \quad (3-48)$$

Como se puede observar, las tres ecuaciones de aceleración de Roll, Pitch y Yaw presentan singularidades cuando  $\cos(\theta)$  es cero, es decir, para ángulos de 90 y -90 grados. Estas singularidades tienen como origen la inversa de la matriz de cosenos directores o rotación que acompaña al vector de aceleraciones angulares.

Para evitar esta limitación, generalmente se recurre a otro tipo de representación angular como lo son el Vector de Gibbs o los Cuaterniones.



### 3.4 Modelo Lineal

Dada la linealización llevada a cabo en [9] para ángulos pequeños se tienen las siguientes suposiciones:

-Las matrices coseno direccionales, por facilidad de cálculos, se consideran inicializadas en 0, lo que permite que la identidad matricial  $A^{-1} = A^T$  se cumpla.

-Para ángulos pequeños de Euler, las transformaciones de Euler (linealización en este caso) tienen una forma aproximada lineal, implicando que  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\psi \approx 1$ ,  $\phi\theta \approx 0$

La matriz de rotación  $R_{321}$  bajo estas suposiciones se aproxima como:

$$R_{321} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \theta\phi - \psi & \psi\theta\phi + 1 & \phi \\ \theta + \psi\phi & \psi\theta - \phi & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ 0 & -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Las derivadas de la rotación basadas en los ángulos de Euler necesitan un tratamiento con los 9 elementos de la matriz de cosenos directores, y cada elemento puede incluir funciones trigonométricas. Para el vector de velocidad angular se tiene la linealización para ángulos pequeños:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\phi}s\theta \\ \dot{\phi}c\phi + \dot{\psi}c\theta s\phi \\ \dot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\theta}s\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\phi}\theta \\ \dot{\theta} + \dot{\psi}\phi \\ \dot{\psi} - \dot{\theta}\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

De manera similar, el vector de aceleraciones angulares se aproxima para ángulos pequeños como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\psi}s\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}c\theta + \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi}c\theta s\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta s\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta c\phi + \ddot{\theta}c\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}s\phi \\ \ddot{\psi}c\theta c\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta c\phi + \ddot{\theta}s\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta s\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\ddot{\psi}\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} + \ddot{\phi} \\ \psi\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}\theta\phi + \dot{\psi}\dot{\phi} + \ddot{\psi}\theta - \dot{\theta}\dot{\phi} \\ \psi - \dot{\psi}\dot{\theta}\theta + \ddot{\theta}\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}\phi - \dot{\theta}\dot{\phi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

#### Gradiente Gravitacional

Para la linealización del vector  $M_g$  se asume que los ángulos son pequeños [13]. Esto es:  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\psi \approx 1$ ,  $\phi\theta \approx 0$ . Lo que implica que:

$$\begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\sin 2\phi\cos\theta^2 \\ (I_{zz} - I_{xx})\cos\phi\sin 2\theta \\ (I_{xx} - I_{yy})\sin\phi\sin\theta^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\phi \\ (I_{zz} - I_{xx})\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Sistema lineal de la planta

Reemplazando en la ecuación de movimiento las aproximaciones de aceleración y velocidad angular para un sistema actuado por thrusters:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & \dot{\theta} \\ \dot{\psi} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\theta} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{3\mu}{2R^3} \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\phi \\ (I_{zz} - I_{xx})\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

El lado derecho de la ecuación fue aproximado de igual manera para ángulos pequeños[13].

Resolviendo las respectivas multiplicaciones y despejando para aceleraciones:

$$\ddot{\phi} = \frac{-\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{zz}-I_{yy})+\tau_x+\frac{3\mu}{2R^3}(I_{zz}-I_{yy})\phi}{I_{xx}} \quad (3-53)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{xx}-I_{zz})+\tau_y+\frac{3\mu}{2R^3}(I_{zz}-I_{xx})\theta}{I_{yy}} \quad (3-54)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{-\dot{\theta}\dot{\phi}(I_{yy}-I_{xx})+\tau_z}{I_{zz}} \quad (3-55)$$

Esta aproximación para ángulos pequeños lleva nuevamente a un sistema no lineal, el cual es más simplificado que el visto previamente. Estas ecuaciones ((3-53), (3-54), y (3-55)), dada su simplicidad, serán usadas para los controladores que trabajen con sistemas no lineales.

Donde  $\omega$  es la velocidad angular del centro de masa del satélite y  $M$  es el vector de momentos externo asociado al gradiente gravitatorio que actúa sobre el centro de gravedad del cuerpo.

Para los ejes principales de rotación del marco de referencia, la ecuación de movimiento de Euler se puede escribir de forma vectorial como:

$$I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = M_x$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z = M_y$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_y\omega_x = M_z$$

Tres ecuaciones no lineales acopladas para las variables de estado asociadas a  $\omega$ . Estas ecuaciones junto con las ecuaciones diferenciales de la cinética describen completamente el movimiento rotacional del cuerpo en sus tres grados de libertad. Teniendo en cuenta la presencia de velocidad angular constante y que los valores de los momentos de inercia son distintos entre sí, las ecuaciones anteriores llegarían a estado estable de la siguiente forma [9]:

$$-(I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = M_x$$

$$-(I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z = M_y$$

$$-(I_{xx} - I_{yy})\omega_y\omega_x = M_z$$

Donde el punto de equilibrio estaría representado por  $\Omega = \omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

Al multiplicar las tres ecuaciones entre sí se tiene que:

$$(I_{yy} - I_{zz})(I_{xx} - I_{zz})(I_{xx} - I_{yy})\omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 = M_x M_y M_z \quad (3-56)$$

Lo cual implica que los puntos de equilibrio existen solo si  $M_x M_y M_z \geq 0$ . Obteniendo de esta manera seis puntos de equilibrio  $(\pm\omega_x, \pm\omega_y, \pm\omega_z)$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{I_{yy}-I_{zz}}{(I_{xx}-I_{yy})(I_{xx}-I_{zz})} \frac{M_y M_z}{M_x}} \quad (3-57)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{I_{xx}-I_{zz}}{(I_{xx}-I_{yy})(I_{yy}-I_{zz})} \frac{M_x M_z}{M_y}} \quad (3-58)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{I_{xx}-I_{yy}}{(I_{xx}-I_{zz})(I_{yy}-I_{zz})} \frac{M_x M_y}{M_z}} \quad (3-59)$$

Los puntos de equilibrio asociados al vector de momento  $(M_x, M_y, M_z)$  con  $M_x M_y M_z = 0$  son:

$$(M_x, 0, 0) \Rightarrow (0, \omega_y, \omega_z): -(I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = M_x$$

$$(0, M_y, 0) \Rightarrow (\omega_x, 0, \omega_z): -(I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z = M_y$$

$$(0, 0, M_z) \Rightarrow (\omega_x, \omega_y, 0): -(I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y = M_z$$

$$(0, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, 0), (\omega_x, 0, 0), (0, \omega_y, 0), (0, 0, \omega_z)$$

dadas las consideraciones de estado estable sin entradas al sistema, para los demás puntos no existen puntos de equilibrio [9].

Si se asumen pequeñas variaciones para el marco coordenado de referencia en el centro de gravedad y respecto al marco que gira con el satélite, las ecuaciones (3-53), (3-54) y (3-55) se puede linealizar en el espacio de estados alrededor del punto de equilibrio establecido anteriormente de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \left(\frac{df}{dx}\right) x + \left(\frac{df}{du}\right) u \quad (3-60)$$

Donde

$$x = [\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$$

$$u = [\dot{h}_{wx}, \dot{h}_{wy}, \dot{h}_{wz}]^T$$

Donde el vector  $x$  son las seis variables de estado del sistema y  $u$  es el vector de entradas. Para tener condiciones iniciales en cero se encuentra una ecuación lineal para cualquier torque nulo capaz de mantener al sistema en equilibrio. Por facilidad de cálculo se escoge el vector  $\mathbf{0}$  donde la posición se mantiene estable y los valores de torque en equilibrio.

$$x_0 = [0,0,0,0,0,0]^T$$

Las siguientes ecuaciones se definen derivando cada uno de los componentes de las ecuaciones en términos de cada una de las variables y de las entradas [9]:

$$\ddot{\phi} \approx \frac{3\mu}{2R^3} \frac{I_{zz}-I_{yy}}{I_{xx}} \cdot \phi + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} \cdot \dot{\theta} + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} \cdot \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_{xx}} \quad (3-61)$$

$$\ddot{\theta} \approx \frac{3\mu}{2R^3} \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \cdot \theta + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \cdot \dot{\phi} + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \cdot \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_{yy}} \quad (3-62)$$

$$\ddot{\psi} \approx \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \cdot \dot{\phi} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \cdot \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_{zz}} \quad (3-63)$$

Desarrollando de esta forma un modelo en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} \dot{h}_{wx} \\ \dot{h}_{wy} \\ \dot{h}_{wz} \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

$$A_1 = \frac{3\mu}{2R^3} \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}-I_{yy}}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} & 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{xx}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

En espacios de estados se escribe el sistema de la forma:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

Reemplazamos obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbb{1}_{3 \times 3} \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ A_3 \end{bmatrix} \cdot \tau \quad (3-69)$$

# 4 IMPLEMENTACIÓN EN SIMULINK

Tras el marco teórico y el modelado dinámico del sistema, se pasa a mostrar y describir la implementación de este dentro del espacio de simulación de MATLAB Simulink. A partir de este apartado las ecuaciones se plantearán tal y como se implementan en MATLAB.

## 4.1 Bases

La implementación se ha realizado con las siguientes bases:

- La masa del satélite se mantiene constante en todo momento, despreciándose las pérdidas de combustible por accionamiento de thrusters.
- La órbita inicial se considera circular ecuatorial con longitud verdadera de  $180^\circ$ .
- El sistema de coordenadas referente a la actitud del nanosatélite se considera fijo al mismo, empleándose los ángulos de Euler para su determinación, con orientación inicial correspondiente a la de la órbita, aunque se podrá escoger manualmente, y velocidad angular inicial nula. Por tanto, se puede considerar que en todo momento los ejes principales del nanosatélite XYZ, con origen en su centro geométrico son iguales a los ejes de giro Roll-Pitch-Yaw respectivamente.
- La única perturbación considerada es la que corresponde al gradiente gravitacional.
- El cuerpo central es la Tierra y se considera el modelo de potencial gravitacional la masa puntual.

Se va a emplear, como se ha explicado con anterioridad, el modelo lineal a partir de ángulos de Euler para la obtención de los ángulos de giro, por lo que el sistema funciona mejor cuando las variaciones de ángulos no son muy elevadas y para bajos tiempos de simulación. Para verificar el buen funcionamiento del modelo se van a comparar los resultados con aquellos que se obtienen del bloque *Spacecraft Dynamics* de Simulink.

Así, el sistema queda de la siguiente manera:

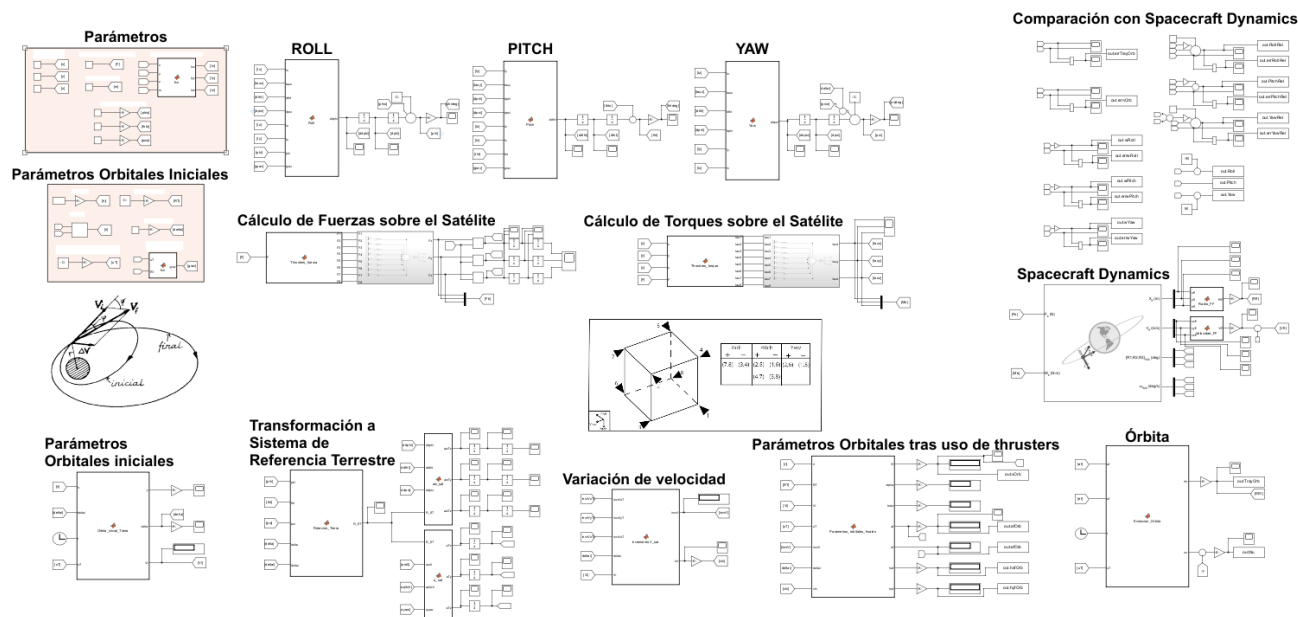


Figura 20. Modelo Simulink completo

## 4.2 Parámetros iniciales y entradas

Antes de comenzar con el análisis del sistema es necesario mencionar que, aunque se pueden manipular los parámetros directamente desde Simulink para la simulación del modelo, esto es bastante tedioso, por lo que en otro apartado se tratará la APP la cual facilita el manejo del modelo.

### 4.2.1 Parámetros

En primer lugar, se van a tratar tanto los parámetros necesarios para caracterizar al satélite como aquellos que influyen en su órbita.

Se tienen los siguientes bloques:

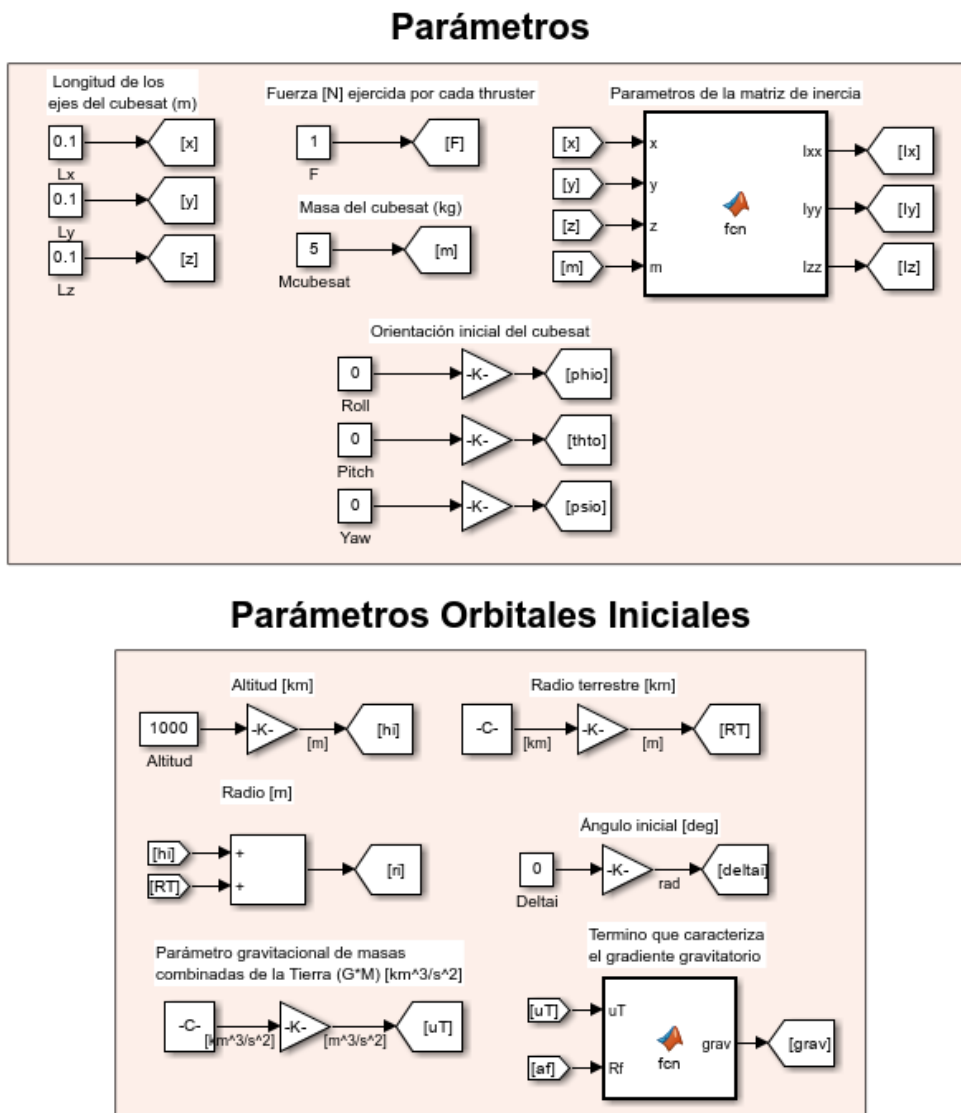


Figura 21. Parámetros del modelo

### Parámetros

Se establecen por un lado las características geométricas del nanosatélite, indicando la longitud de sus tres ejes x, y y z, y la masa de este m. A partir de lo anterior se calculan los elementos diagonales de la

matriz de inercia, necesarios más adelante:

$$I_{xx} = m/12*(y^2 + z^2);$$

$$I_{yy} = m/12*(x^2 + z^2); \quad (4-1)$$

$$I_{zz} = m/12*(x^2 + y^2);$$

Si se quiere que la orientación inicial del satélite sea diferente a la dada por la órbita inicial, se puede modificar ingresando los ángulos de Roll-Pitch-Yaw,  $\phi_{io}$ ,  $\theta_{io}$  y  $\psi_{io}$  respectivamente, correspondientes a dicha orientación (teniendo en cuenta que el orden de giro es Y-P-R). Por otro lado, se incluye también la fuerza,  $F$ , que ejercerá cada uno de los thrusters al ser activado, siendo esta igual para todos.

### Parámetros Orbitales Iniciales

En este bloque únicamente se tienen como parámetros modificables de manera manual la altitud sobre la superficie de la tierra a la que orbita inicialmente el satélite,  $h_i$ , y el ángulo inicial en el que se posiciona en el plano ecuatorial,  $\delta_{tai}$ .

Por otro lado, se incluyen constantes como el radio de la Tierra,  $R_T$ , para calcular la distancia entre los centros de masas de esta y del nanosatélite, el parámetro gravitacional de masas combinadas de la Tierra ( $G \cdot M$ ) necesaria para múltiples cálculos orbitales, donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $M$  la masa de la Tierra, y se calcula también el término del gradiente gravitatorio,  $grav$ , a partir de esta última y la distancia al centro de la Tierra:

$$grav = (3*u_T)/(2*R_f^3); \quad (4-2)$$

Donde  $u_T$  es el parámetro gravitacional de masas combinadas de la Tierra y  $R_f$  representa la distancia entre centros de masa.

#### 4.2.2 Entradas

Las entradas se corresponden con los efectos causados por la activación de los diferentes thrusters a lo largo del tiempo y se tratan tanto de las fuerzas que los propulsores ejercen sobre el nanosatélite como los torques producidos por la aplicación de estas en diferentes puntos.

Antes de comenzar es necesario presentar el diseño esquemático del nanosatélite, presentado como un CubeSat:

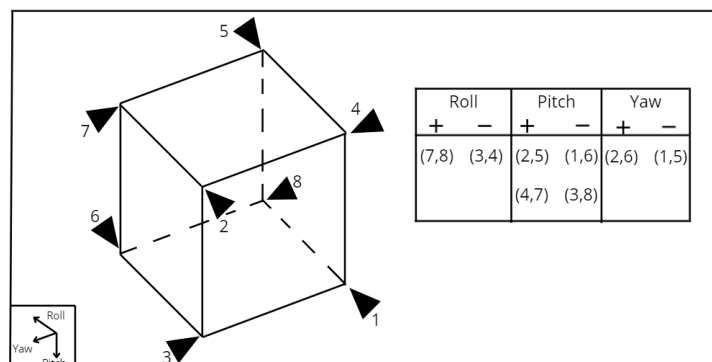


Figura 22. Esquema CubeSat

Como se puede observar en la Figura 22. el CubeSat dispone de ocho thrusters, cada uno colocado en una esquina y orientado según uno de los tres ejes principales. Con esta distribución se consigue que cada thruster afecte de manera distinta tanto a la orientación como a la órbita del satélite en conjunto. Así, si por ejemplo se activa únicamente el thruster 8 durante un instante de tiempo, el satélite comenzará a girar con sentido positivo en el eje de Roll, negativo en el Pitch y habrá incrementado su velocidad en el eje de Yaw lo que podría afectar a su órbita, mientras que la activación de cualquier otro producirá efectos diferentes.

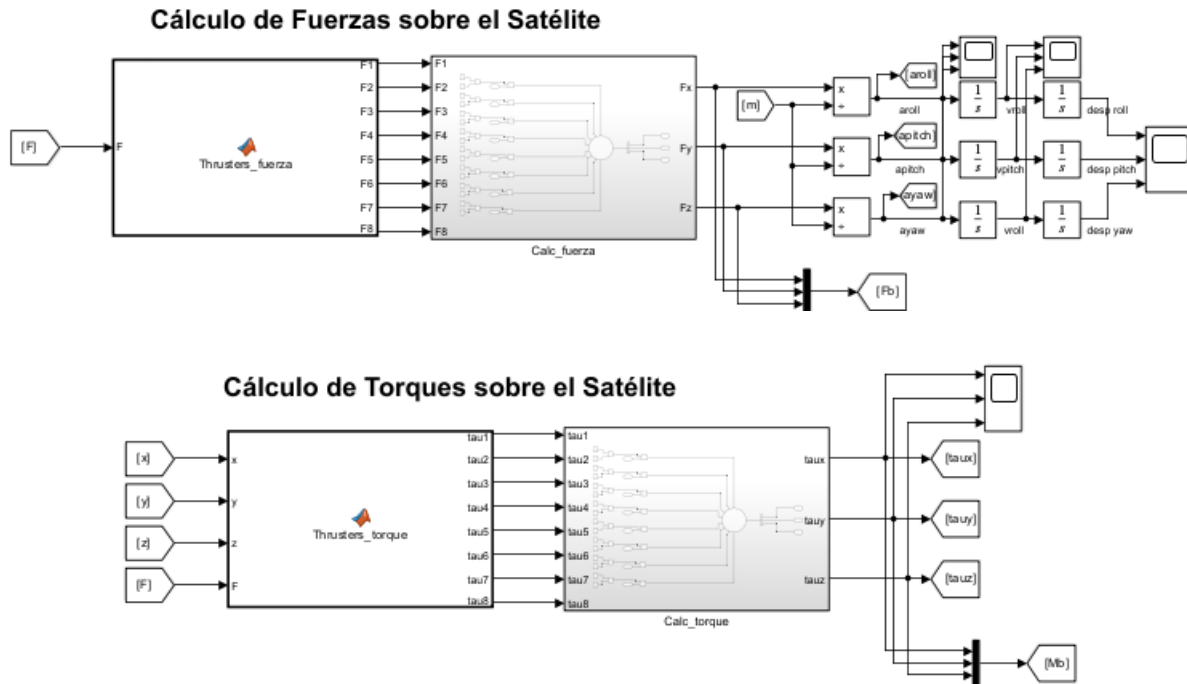


Figura 23. Fuerzas y Torques sobre el Satélite

A partir del esquema de la Figura 22. se modelan los bloques para el cálculo de fuerzas y torques que afectan al nanosatélite a lo largo del tiempo.

### Cálculo de Fuerzas sobre el Satélite

Se distinguen dos bloques, el primero recibe como entrada el módulo de la fuerza que ejercerá cada thruster al encontrarse activado y dentro se vectoriza para cada uno de los thrusters según su dirección y sentido. De esta forma, a la salida se tienen 8 fuerzas con el mismo módulo, pero con direcciones y sentidos diversos:

$$F1 = [F, 0, 0];$$

$$F2 = [F, 0, 0];$$

$$F3 = [0, 0, -F];$$

$$F4 = [0, 0, F];$$

$$F5 = [-F, 0, 0];$$

$$F6 = [-F, 0, 0];$$

(4-3)



$$F7 = [0, 0, -F];$$

$$F8 = [0, 0, F];$$

El segundo bloque recibe todas estas fuerzas y presenta a la salida la total sobre cada uno de los ejes del satélite a lo largo del tiempo. Para tener en cuenta esto último, se realiza el producto de cada fuerza con dos funciones escalón, representando cada una el inicio y el fin del disparo del propulsor.

Conocidas las fuerzas solo resta dividir las entre la masa del nanosatélite para calcular las aceleraciones sobre cada eje, necesarias para el posterior cálculo de los incrementos de velocidad orbital.

### Cálculo de Torques sobre el Satélite

Análogamente al anterior se distinguen dos bloques, recibiendo el primero tanto el módulo de la fuerza que ejercerá cada thruster cuando esté activo como la longitud de los ejes principales del satélite. En esta ocasión se van a calcular los torques que ejercen cada uno de los thrusters sobre el nanosatélite por lo que se necesita no solo conocer la fuerza ejercida y su sentido, sino también su punto de aplicación.

Siguiendo la disposición de los thrusters de la Figura 22. se obtienen los siguientes puntos de aplicación:

$$P1 = [-x/2, y/2, -z/2];$$

$$P2 = [-x/2, -y/2, z/2];$$

$$P3 = [-x/2, y/2, z/2];$$

$$P4 = [-x/2, -y/2, -z/2]; \tag{4-4}$$

$$P5 = [x/2, -y/2, -z/2];$$

$$P6 = [x/2, y/2, z/2];$$

$$P7 = [x/2, -y/2, z/2];$$

$$P8 = [x/2, y/2, -z/2];$$

Donde  $x$ ,  $y$ ,  $z$  representan las longitudes de los ejes principales del nanosatélite.

Realizando ahora el producto vectorial entre cada par de elementos de (4-2) y (4-1) se obtiene el torque producido por cada propulsor:

$$\tau_1 = \text{cross}(P1, F1);$$

$$\tau_2 = \text{cross}(P2, F2);$$

$$\tau_3 = \text{cross}(P3, F3);$$

$$\tau_4 = \text{cross}(P4, F4); \tag{4-5}$$

$$\tau_5 = \text{cross}(P5, F5);$$

```
tau6 = cross(P6,F6);
```

```
tau7 = cross(P7,F7);
```

```
tau8 = cross(P8,F8);
```

Análogamente con el cálculo de fuerzas, el segundo bloque recibe todos estos torques y presenta a la salida el total sobre cada uno de los ejes del nanosatélite a lo largo del tiempo, para lo cual, se realiza el producto de cada torque con las funciones escalón de inicio y final de disparo.

### 4.3 Orientación

En este apartado se van a implementar las ecuaciones (3-61), (3-62) y (3-63) correspondientes al modelo dinámico lineal dentro del modelo de Simulink. Para ello, se disponen tres bloques para el cálculo de las variaciones de los ángulos de Euler a lo largo del tiempo.

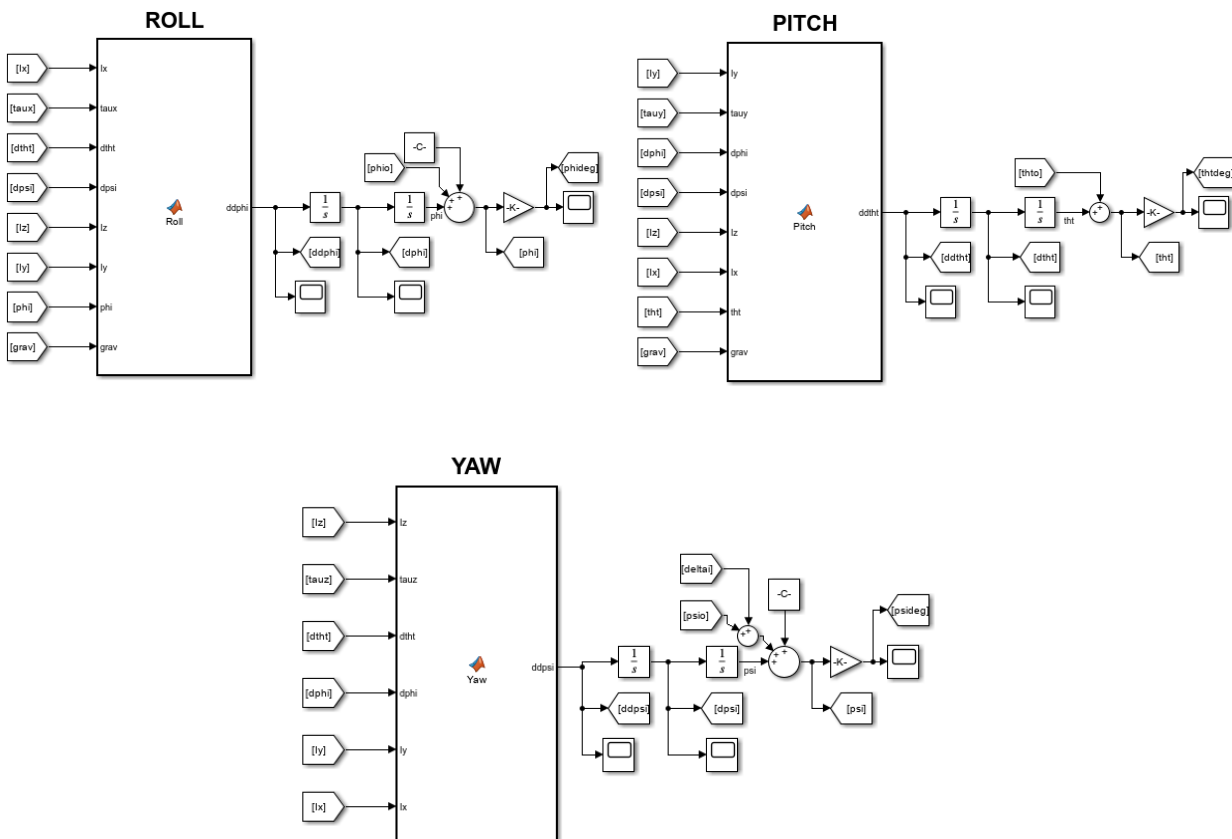


Figura 24. Bloques Roll-Pitch-Yaw

#### Roll

Este bloque calcula la aceleración experimentada en el eje de Roll/eje X del nanosatélite a lo largo del tiempo siguiendo la ecuación lineal (3-61):

$$ddphi = (grav*(Iz - Iy)*phi + (Iy - Iz)*dtht*dpsi + tauux)/Ix; \quad (4-6)$$

Donde  $grav$  es el gradiente gravitatorio,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  son los elementos diagonales de la matriz de inercia del satélite,  $phi$  es el ángulo de Roll,  $dtht$  y  $dpsi$  son las velocidades angulares en los ejes de

Pitch y Yaw respectivamente y  $\tau_{roll}$  es el torque total sobre el eje de Roll.

La aceleración angular obtenida se integra dos veces para obtener el ángulo de giro en el presente eje,  $\phi_i$ . Como se puede apreciar en el modelo, una vez obtenido  $\phi_i$  se suman por una parte el término  $\phi_{i0}$ , que representa el giro inicial en el eje para comenzar con una orientación diferente a la orbital, y una constante.

El término constante, que se presenta tanto en este bloque como en el de Yaw, es necesario para que en el instante inicial la orientación del satélite coincida con la orbital. Si este término no se incluyera, el satélite comenzaría con la misma orientación que la terna de referencia principal, es decir la de la Tierra.

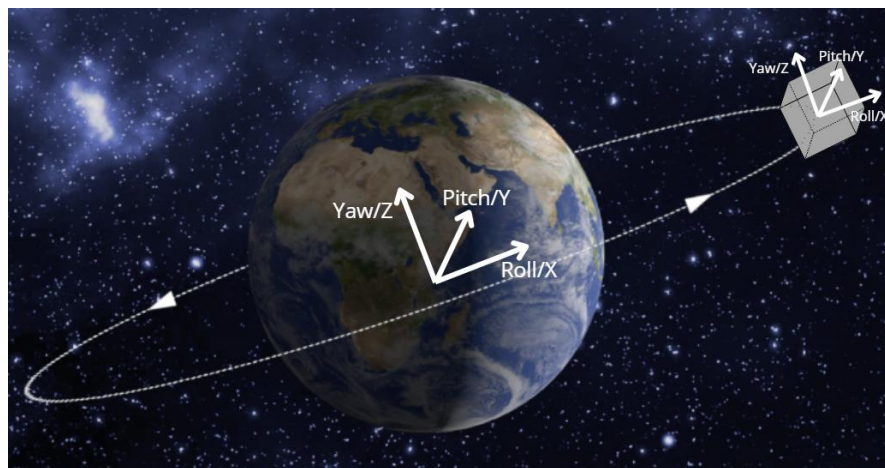


Figura 25. Orientación inicial no corregida

La Figura 25. muestra las ternas vectoriales de la Tierra, que se considera constante en todo momento, y la terna que representa al satélite. Como se puede apreciar, ambas presentan la misma orientación, sin embargo, la orientación característica de la órbita y la que debería presentar el satélite en el instante inicial se caracteriza por tener el eje de Roll en la dirección y sentido de la velocidad orbital tangente a la órbita y el eje de Yaw apuntando hacia el centro de la Tierra, resultando el eje de Pitch perpendicular al plano que forman ambos de manera que se cumple la regla de la mano derecha.

Para solucionar este problema del modelo, se suman a los bloques de Roll y Yaw tras la doble integración,  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$  en radianes respectivamente, que no son más que los giros necesarios en dichos ejes para obtener la orientación deseada:

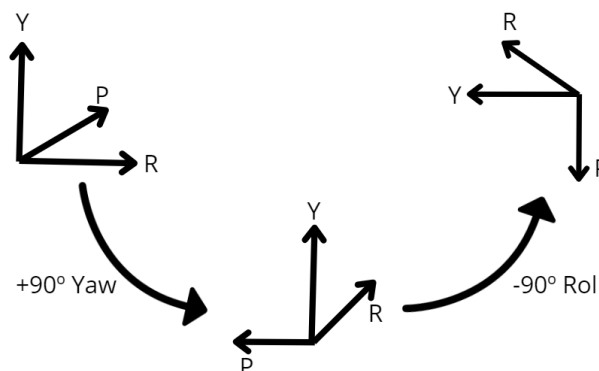


Figura 26. Transformación a orientación orbital

Como refleja la Figura 26, es necesario un giro positivo de  $90^\circ$  en Yaw seguido de uno negativo de también  $90^\circ$  para pasar de la orientación inicial de la terna de la Tierra a la orbital propia del satélite. El resultado se puede apreciar en la Figura 27.

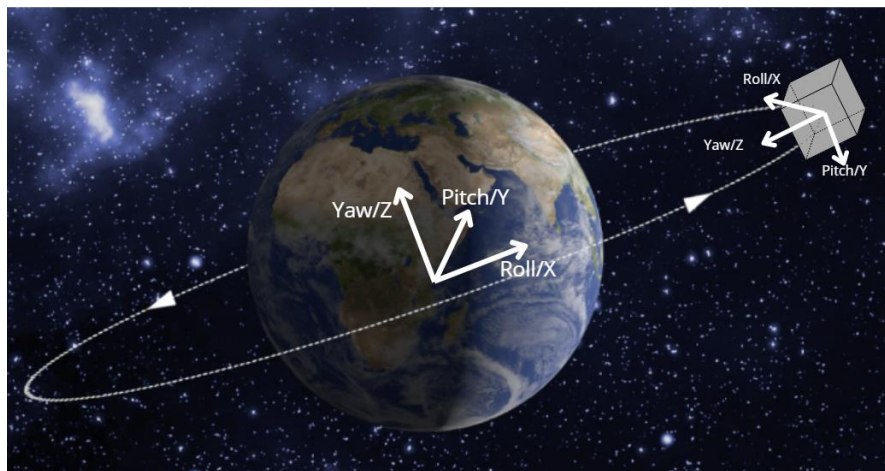


Figura 27. Orientación inicial corregida

### Pitch

Este bloque calcula la aceleración experimentada en el eje de Pitch/eje Y del nanosatélite a lo largo del tiempo siguiendo la ecuación lineal (3-62):

$$ddt\text{t} = (\text{grav} * (I_z - I_x) * \text{tht} + (I_z - I_x) * d\text{phi} * d\text{psi} + \text{tauy}) / I_y; \quad (4-7)$$

Donde  $\text{grav}$  es el gradiente gravitatorio,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  son los elementos diagonales de la matriz de inercia del satélite,  $\text{tht}$  es el ángulo de Pitch,  $d\text{phi}$  y  $d\text{psi}$  son las velocidades angulares en los ejes de Roll y Yaw respectivamente y  $\text{tauy}$  es el torque total sobre el eje de Pitch.

La aceleración angular obtenida se integra dos veces para obtener el ángulo de giro en el presente eje,  $\text{tht}$ . Como se puede apreciar en el modelo, una vez obtenido  $\text{tht}$  se suma el término  $\text{thto}$ , que representa el giro inicial en el eje para comenzar con una orientación diferente a la orbital.

### Yaw

Este bloque calcula la aceleración experimentada en el eje de Yaw/eje Z del nanosatélite a lo largo del tiempo siguiendo la ecuación lineal (3-63):

$$dd\text{psi} = ((I_x - I_y) * d\text{phi} * d\text{tht} + \text{tauz}) / I_z; \quad (4-8)$$

Donde  $\text{grav}$  es el gradiente gravitatorio,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  son los elementos diagonales de la matriz de inercia del satélite,  $\text{psi}$  es el ángulo de Yaw,  $d\text{phi}$  y  $d\text{tht}$  son las velocidades angulares en los ejes de Roll y Pitch respectivamente y  $\text{tauz}$  es el torque total sobre el eje de Yaw.

La aceleración angular obtenida se integra dos veces para obtener el ángulo de giro en el presente eje,  $\text{psi}$ . Como se puede apreciar en el modelo, una vez obtenido  $\text{psi}$  se suman por una parte el término  $\text{psio}$ , que representa el giro inicial en el eje para comenzar con una orientación diferente a la orbital, y una constante, comentada anteriormente.

## 4.4 Órbita

En este apartado se tratarán los efectos que la activación de los diferentes thrusters del satélite provocan sobre la órbita que sigue el mismo.

### 4.4.1 Órbita inicial

Como se mencionó anteriormente, se asume que el nanosatélite sigue una órbita circular ecuatorial en su estado inicial. Esto implica que, en ausencia de activación de los thrusters, el nanosatélite mantendrá su trayectoria orbital inicial sin cambios.

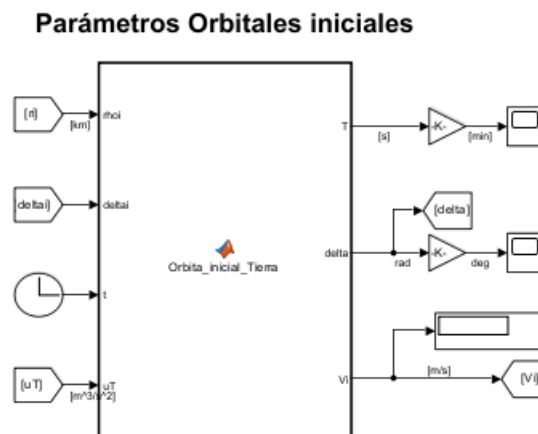


Figura 28. Bloque Órbita inicial

El bloque representado en la Figura 28. calcula varios parámetros clave para la órbita inicial del satélite:

- Velocidad orbital inicial ( $V_i$ ): La velocidad del satélite en su órbita inicial.
- Periodo orbital ( $T$ ): El tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta alrededor de la Tierra.
- Variación temporal del ángulo delta ( $\delta$ ): Este ángulo describe la posición del satélite dentro del plano orbital ecuatorial en función del tiempo.

Las ecuaciones utilizadas son las siguientes:

$$T = 2\pi \sqrt{r_i^3 / u_T}; \quad (4-9)$$

$$\delta = \delta_{i0} + 2\pi t / T; \quad (4-10)$$

$$V_i = \sqrt{u_T / r_i}; \quad (4-11)$$

Donde:

- $r_i$  es la distancia inicial entre los centros de masas de la Tierra y el satélite.
- $u_T$  es el parámetro gravitacional estándar de la Tierra.
- $t$  es el tiempo de simulación del sistema.

Los valores de  $\delta$  y  $V_i$  calculados en este bloque se envían a otros bloques para ser utilizados en cálculos posteriores.

#### 4.4.2 Variación de velocidad orbital

Cuando se activa uno o más thrusters del nanosatélite, el centro de masas del satélite experimenta una aceleración lineal durante el tiempo que dure dicha activación. Esta aceleración provoca una variación en la velocidad orbital del satélite, lo que a su vez altera su trayectoria de una órbita circular inicial a una órbita elíptica, cuyo análisis se abordará en la siguiente sección.

#### Transformación a Sistema de Referencia Terrestre

Dado que la orientación del satélite puede cambiar con el tiempo, es crucial calcular la variación de la velocidad orbital en relación con el sistema de referencia terrestre. A diferencia de otros sistemas de referencia que pueden moverse o rotar, el sistema de referencia terrestre permanece fijo, proporcionando un marco estable para evaluar los cambios en la velocidad y la posición del satélite.

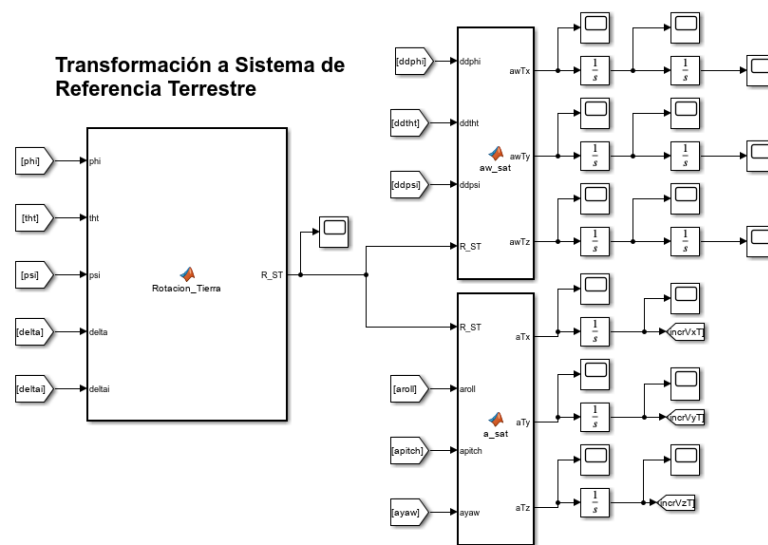


Figura 29. Transformación a Referencia Terrestre

Para realizar esta transformación, es necesario calcular la matriz de rotación  $R_{ST}$  que convierte las coordenadas del sistema de referencia del satélite al sistema de referencia fijo de la Tierra. Las matrices de rotación involucradas son:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi); \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}; \quad (4-12)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta); \\ 0 & 1 & 0; \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad (4-13)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \delta\psi) & -\sin(\psi + \delta\psi) & 0; \\ \sin(\psi + \delta\psi) & \cos(\psi + \delta\psi) & 0; \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4-14)$$

Se incluye el término  $\delta\psi$  para que donde sea que la simulación comience, la orientación del satélite coincida con la de la órbita. La matriz de transformación de coordenadas del sistema del satélite al sistema orbital  $R_{SO}$  se obtiene multiplicando estas matrices de rotación en el orden Yaw-Pitch-Roll, que corresponden a los ángulos de Euler  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente:

$$R_{SO} = R_z * R_y * R_x; \quad (4-15)$$

Luego, se calcula la matriz de transformación de coordenadas del sistema orbital al sistema de referencia terrestre  $R_{OT}$ :

$$R_{OT} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0; \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0; \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4-16)$$

Finalmente, la matriz de transformación de coordenadas del sistema del satélite al sistema de referencia terrestre  $R_{ST}$  se obtiene multiplicando las matrices anteriores:

$$R_{ST} = R_{SO} * R_{OT}; \quad (4-17)$$

Esta matriz  $R_{ST}$  permite determinar tanto los parámetros angulares como los lineales del satélite desde la perspectiva de la Tierra. De particular interés son los parámetros lineales, ya que permiten analizar cómo varía la velocidad del nanosatélite en los ejes principales del sistema de referencia terrestre, lo cual es esencial para calcular la nueva órbita resultante.

En el segundo bloque de la Figura 29, se calcula la aceleración que experimenta el nanosatélite en cada uno de los ejes, referenciada al sistema terrestre:

$$a_{vect} = [a_{roll} \ a_{pitch} \ a_{yaw}]'; \quad (4-18)$$

$$acel_{tierra} = R_{ST} * a_{vect}; \quad (4-19)$$

Donde:

- $a_{roll}$ ,  $a_{pitch}$ ,  $a_{yaw}$  son las aceleraciones calculadas en la sección de Cálculo de Fuerzas sobre el satélite, causadas por los thrusters en los ejes del satélite.

Las componentes de la aceleración transformadas al sistema terrestre se denotan como  $a_{Tx}$ ,  $a_{Ty}$  y  $a_{Tz}$ . Estas aceleraciones se integran para obtener los incrementos de velocidad en cada uno de los ejes del sistema de referencia terrestre, los cuales son cruciales para determinar la órbita final del nanosatélite.

### Variación de velocidad orbital

En esta sección, se calculará el incremento absoluto de velocidad  $incrV$  que experimenta el satélite debido a la acción de los thrusters, así como el ángulo  $\chi$  entre la dirección del impulso aplicado y el vector de velocidad inicial. Este ángulo se determina a partir del ángulo formado entre el vector de incremento de velocidad y el vector de velocidad inicial.

### Variación de velocidad orbital

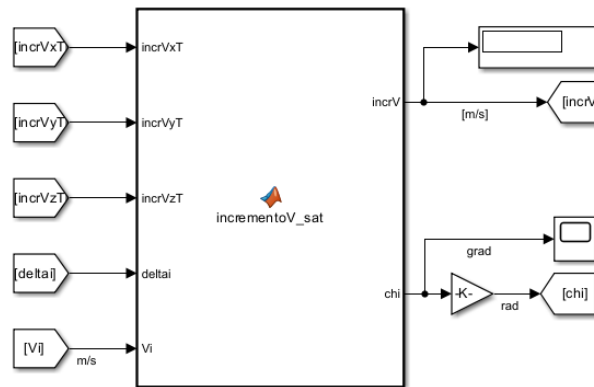


Figura 30. Variación de velocidad y ángulo de impulso

Las entradas del bloque incluyen los incrementos de velocidad en cada uno de los ejes del nanosatélite, referenciados al sistema terrestre:  $incrVxT$ ,  $incrVyT$  y  $incrVzT$ . También se utilizan el ángulo  $deltaI$  y la velocidad orbital inicial  $Vi$ .

El cálculo de  $incrV$  se realiza mediante la fórmula:

$$incrV = \sqrt{incrVxT^2 + incrVyT^2 + incrVzT^2}; \quad (4-20)$$

Aquí,  $incrV$  representa la magnitud del vector de incremento de velocidad, calculado a partir de las componentes en cada eje.

Para calcular el ángulo  $chi$ , primero se construyen los vectores de impulso y de velocidad inicial en el plano XY, ignorando la componente Z terrestre, bajo la suposición de que el plano orbital permanece constante. Así, se definen los vectores:

$$incrVT = [incrVxT, incrVyT]; \quad (4-21)$$

$$Vorbi = [Vi \cdot \sin(deltaI), Vi \cdot \cos(deltaI)]; \quad (4-22)$$

Luego, se calcula el producto escalar entre estos dos vectores:

$$prod\_esc = \text{dot}(incrVT, Vorbi); \quad (4-23)$$

Finalmente, el ángulo  $chi$  se obtiene utilizando la función  $atan2d$ , que calcula el ángulo en grados a partir del cociente entre la magnitud del producto vectorial de los vectores (extendidos a 3D con la componente Z nula) y el producto escalar previamente calculado:

$$chi = \text{atan2d}(\text{norm}(\text{cross}([incrVT, 0], [Vorbi, 0])), prod\_esc); \quad (4-24)$$

Este procedimiento proporciona el ángulo  $chi$  en el plano XY, que es crucial para determinar cómo el impulso de los thrusters afecta la trayectoria del satélite. Con estos cálculos, se puede proceder a determinar la órbita final resultante tras la aplicación del impulso.



### 4.4.3 Órbita final

Tras haber calculado la variación de velocidad inducida por los thrusters y el ángulo que forma esta variación con la velocidad orbital inicial, es posible determinar los nuevos parámetros orbitales del satélite, que definen la trayectoria resultante tras la maniobra de transferencia orbital.

#### Parámetros Orbitales Post-Impulso

El primer paso consiste en calcular los parámetros clave que describen la nueva órbita del nanosatélite tras el impulso. Estos parámetros incluyen la velocidad final, los ángulos relacionados con la trayectoria, el semieje mayor de la nueva órbita, la excentricidad, y las altitudes en apogeo y perigeo.

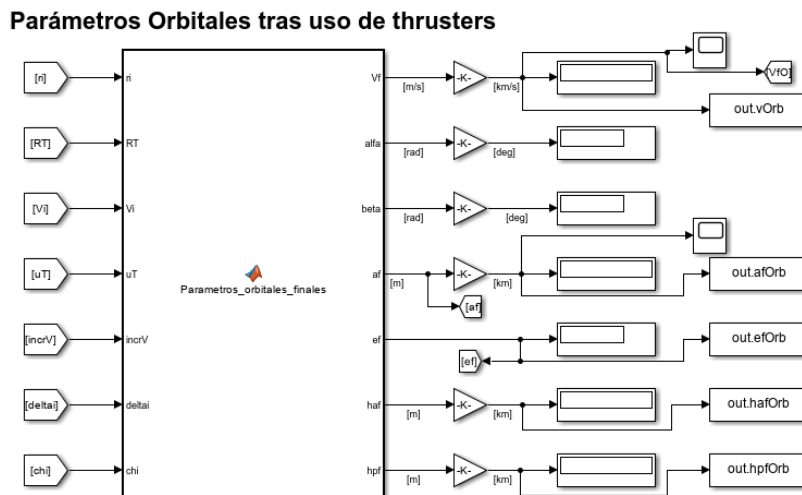


Figura 31. Parámetros Orbitales tras uso de thrusters

Debido a singularidades que se presentan cuando el impulso es perpendicular a la velocidad orbital, es decir cuando  $\chi = \pm 90^\circ$ , se realiza un pequeño ajuste tal que evita dicha singularidad aportando un margen mínimo.

La nueva velocidad orbital del satélite tras el impulso,  $V_f$ , se calcula utilizando la ley de cosenos, que relaciona las magnitudes de las velocidades y el ángulo entre ellas:

$$V_f = \sqrt{V_i^2 + \text{incrV}^2 - (2 \cdot V_i \cdot \text{incrV} \cdot \cos(\pi - \chi))}; \quad (4-25)$$

El ángulo  $\alpha$  se calcula para conocer la desviación entre la dirección de la velocidad inicial y la nueva velocidad tras el impulso:

$$\alpha = \arcsin(\text{incrV} \cdot \sin(\chi) / V_f); \quad (4-26)$$

El ángulo de trayectoria final,  $\beta$ , indica la posición angular del satélite respecto a su nueva trayectoria orbital, y se obtiene restando  $\alpha$  del ángulo inicial  $\delta_{tai}$ :

$$\beta = \delta_{tai} - \alpha; \quad (4-27)$$

El semieje mayor de la nueva órbita,  $a_f$ , se calcula a partir de la energía orbital específica, utilizando la velocidad final  $V_f$  y la distancia radial inicial  $r_i$ :

$$a_f = \frac{u_T}{((2 \cdot u_T / r_i) - V_f^2)}; \quad (4-28)$$

La excentricidad  $e_f$  describe la forma de la órbita elíptica resultante. Se calcula en función del semieje mayor  $a_f$  y la velocidad final  $V_f$ :

$$e_f = \sqrt{1 - ((V_f * r_i * \cos(\beta))^2 / (u_T * a_f))}; \quad (4-29)$$

Finalmente, las altitudes en apogeo,  $h_{af}$ , y perigeo,  $h_{pf}$ , se calculan restando el radio terrestre  $R_T$  de los puntos más alejados y cercanos de la órbita respecto al centro de la Tierra:

$$h_{af} = a_f * (1 + e_f) - R_T; \quad (4-30)$$

$$h_{pf} = a_f * (1 - e_f) - R_T; \quad (4-31)$$

## Órbita

Con los parámetros orbitales post-impulso determinados, se puede calcular la posición del satélite en cualquier punto de la nueva órbita elíptica. Para ello se usará la teoría del problema de los dos cuerpos, asumiendo que la órbita es kepleriana y que las perturbaciones son despreciables. Se calculará la anomalía verdadera ( $\nu$ ) y la posición en la órbita en función del tiempo, utilizando la ecuación de Kepler.

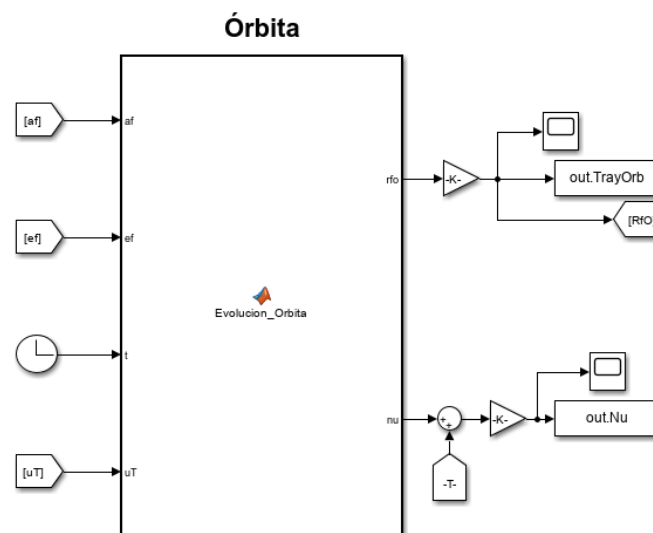


Figura 32. Bloque Orbita final

El parámetro orbital  $p$  es una constante para cualquier órbita elíptica y está relacionado con el semieje mayor  $a_f$  y la excentricidad  $e_f$  de la órbita. Representa la distancia del foco de la elipse al punto más cercano de la órbita en una trayectoria parabólica o hiperbólica, o al perigeo en una órbita elíptica.

$$p = a_f * (1 - e_f^2); \quad (4-32)$$

La anomalía media  $M$  es un ángulo que avanza de manera uniforme con el tiempo y está relacionado con la posición del satélite en su órbita. Es fundamental para la resolución de la ecuación de Kepler, ya que permite encontrar la posición del satélite a lo largo de su trayectoria elíptica. Se calcula mediante:

$$M = \sqrt{u_T / a_f^3} * t; \quad (4-33)$$

Donde,  $\sqrt{u_T / a_f^3}$  es la frecuencia angular media de la órbita, también conocida como

movimiento medio, que indica la velocidad angular promedio a la que el satélite se desplaza a lo largo de su órbita.

La ecuación de Kepler es una ecuación trascendental que relaciona la anomalía media  $M$  con la anomalía excéntrica  $E$ :

$$M = E - ef \cdot \sin E \quad (4-34)$$

Como esta ecuación no puede resolverse de forma analítica para  $E$ , se emplea un método iterativo para encontrar su valor. El proceso iterativo sigue estos pasos:

1. Estimación inicial: Se comienza con  $E = M$  como una primera aproximación.
2. Iteración: Se ajusta  $E$  usando la siguiente fórmula hasta que la diferencia entre iteraciones sucesivas sea menor que una tolerancia predeterminada  $tol$ :

```
while abs(E - E_prev) > tol
    E_prev = E;
    E = E - (E - ef*sin(E) - M)/(1 - ef*cos(E));
```

El valor final de  $E$  permite calcular la posición del satélite en su órbita.

La anomalía verdadera  $nu$  es el ángulo entre la dirección del perigeo y la posición actual del satélite, medido en el sentido del movimiento orbital. Se relaciona con la anomalía excéntrica  $E$  mediante la siguiente expresión:

$$nu = 2 \cdot \text{atan2}(\sqrt{1 + ef} \cdot \sin(E/2), \sqrt{1 - ef} \cdot \cos(E/2)); \quad (4-35)$$

La anomalía verdadera es crucial porque, a diferencia de  $E$  y  $M$ , está directamente relacionada con la posición angular del satélite en su órbita elíptica en el espacio físico. A la salida del bloque se le suma el término  $\delta t_i$  de forma que se tenga en cuenta el avance inicial dentro de la órbita.

La distancia radial  $r_f$  del satélite en cualquier punto de su órbita se calcula usando la siguiente fórmula, que relaciona el parámetro orbital  $p$ , la excentricidad  $ef$ , y la anomalía verdadera  $nu$ :

$$r_{fo} = p / (1 + ef \cdot \cos(nu)); \quad (4-36)$$

Con esto se puede conocer en todo momento la ubicación del nanosatélite en el plano orbital.

## 4.5 Simulación y Comparación con Spacecraft Dynamics

Una vez descrito el funcionamiento completo del sistema se pasa a mostrar los resultados obtenidos del mismo mediante su simulación en Simulink y la comparación de resultados con el bloque *Spacecraft Dynamics*.

### 4.5.1 Simulación

Se realizarán varias simulaciones en el entorno de Simulink para analizar cómo diferentes configuraciones de activación de los micropropulsores afectan tanto a la orientación como a la órbita del nanosatélite. En cada simulación, se mostrará la evolución temporal de las velocidades y ángulos de Roll-Pitch-Yaw, el radio orbital y la velocidad orbital.

Todas las simulaciones se realizarán con los siguientes parámetros iniciales constantes:

- Tiempo:  $t = 10$  s
- Fuerza de cada micropropulsor:  $F = 1$  N
- Duración del impulso:  $t_I = 0.05$  s
- Altitud sobre la superficie de la Tierra:  $h = 1000$  km
- Masa del Nanosatélite:  $m = 5$  kg
- Longitud de Ejes XYZ:  $l = 0.1$  m
- Ángulos de Yaw-Pitch-Roll iniciales:  $\psi = \theta = \phi = 0^\circ$
- Trayectoria inicial:  $\delta_{ai} = 0^\circ$

### Activación de un solo thruster

Se presentan a continuación los resultados de la simulación cuando se activa únicamente el micropropulsor 1, de acuerdo con el esquema de la Figura 22. Como el sistema responde mejor a pequeñas variaciones angulares, se activa posteriormente el micropropulsor 2 para contrarrestar el giro causado por el primero.

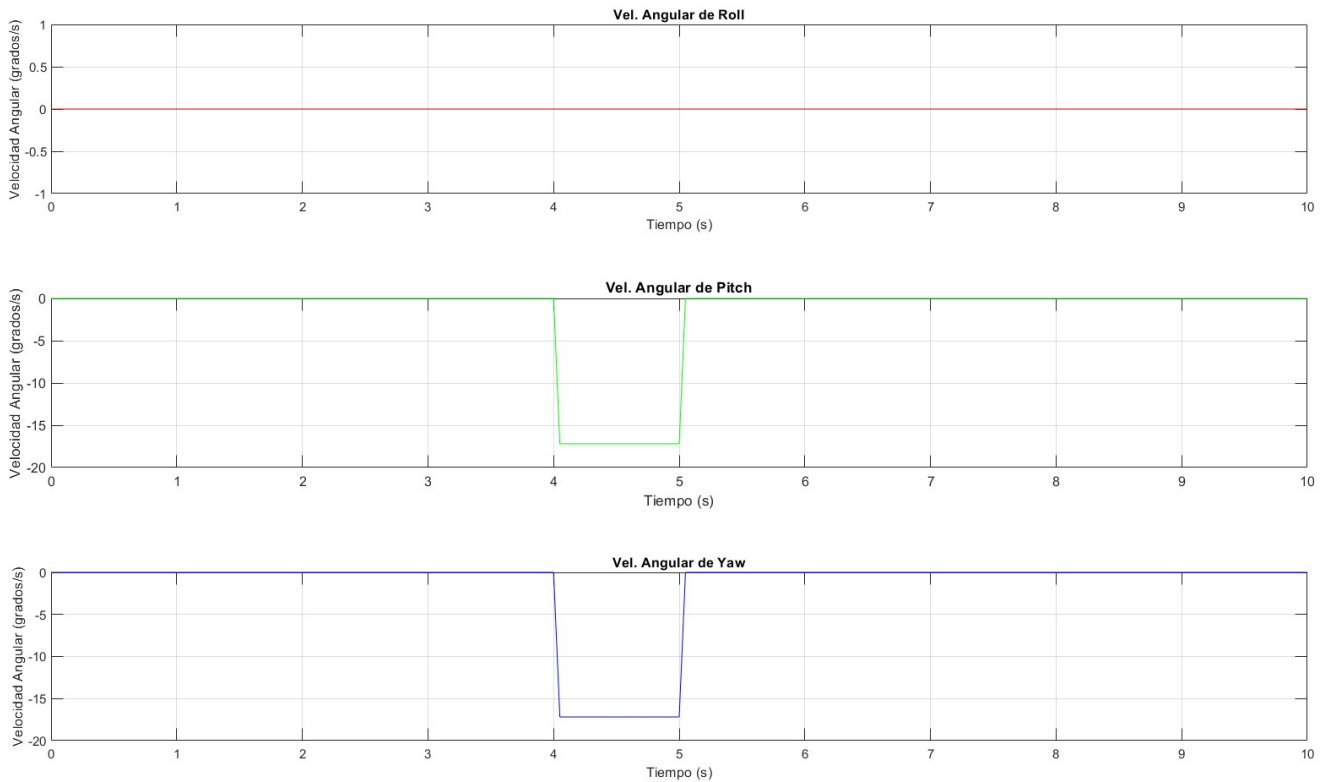


Figura 33. Velocidad Angular micropropulsor único

Se observa que la activación del micropropulsor 1 genera velocidades angulares negativas en los ejes de Pitch y Yaw. Este comportamiento es coherente con la disposición de los thrusters en el nanosatélite, donde un solo thruster produce un momento que induce una rotación en ambos ejes. El micropropulsor 2 se activa para detener el giro, lo que compensa las velocidades angulares.

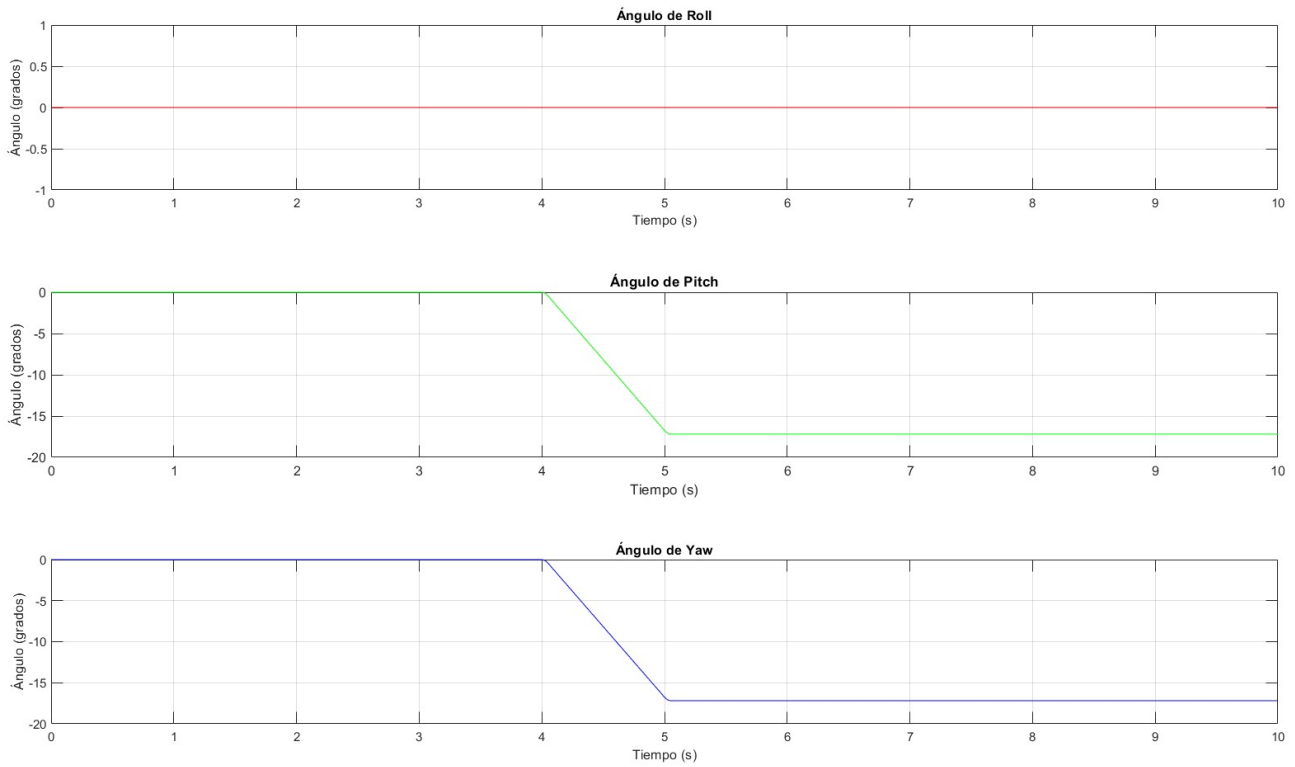


Figura 34. Ángulos micropropulsor único

La integración de las velocidades angulares de la Figura 33. muestra una variación en los ángulos de Pitch y Yaw de aproximadamente  $17^\circ$ . Este cambio es considerable y demuestra el impacto significativo de un solo thruster en la orientación del satélite, especialmente en configuraciones donde no se aplica un par de fuerzas equilibrado.

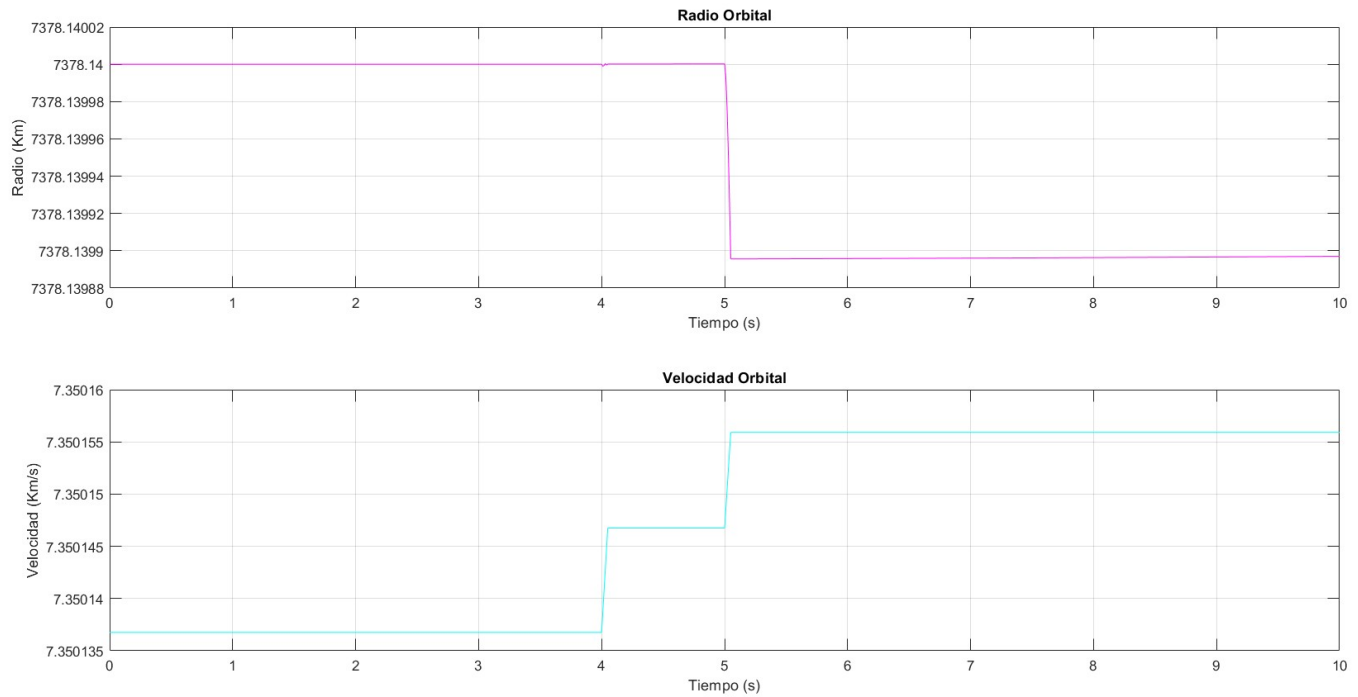


Figura 35. Resultados Orbitales micropropulsor único

En cuanto a la órbita, la simulación muestra que, aunque la velocidad orbital aumenta en dos ocasiones debido a la acción de los micropropulsores 1 y 2, el radio orbital disminuye tras la activación del segundo thruster. Esto podría sugerir inicialmente un error, pero al finalizar la activación, el radio orbital comienza a incrementarse, lo que implica que la órbita ha pasado de ser circular a elíptica. Este cambio en la forma orbital es una consecuencia directa del impulso asimétrico y la naturaleza dinámica del sistema.

En resumen, la activación de un solo thruster altera tanto la orientación como la órbita del satélite, que se transforma de circular a elíptica.

## Activación de dos thrusters opuestos

A continuación, se presentan los resultados de la activación simultánea de dos thrusters opuestos, es decir, una pareja de micropropulsores que generan impulsos en sentidos contrarios y perpendiculares a un eje, provocando un giro sobre ese eje (en este caso, los thrusters 1 y 6). Como en el ejemplo anterior, tras un tiempo de activación, se utilizará otra pareja (los thrusters 2 y 5) para detener el giro.

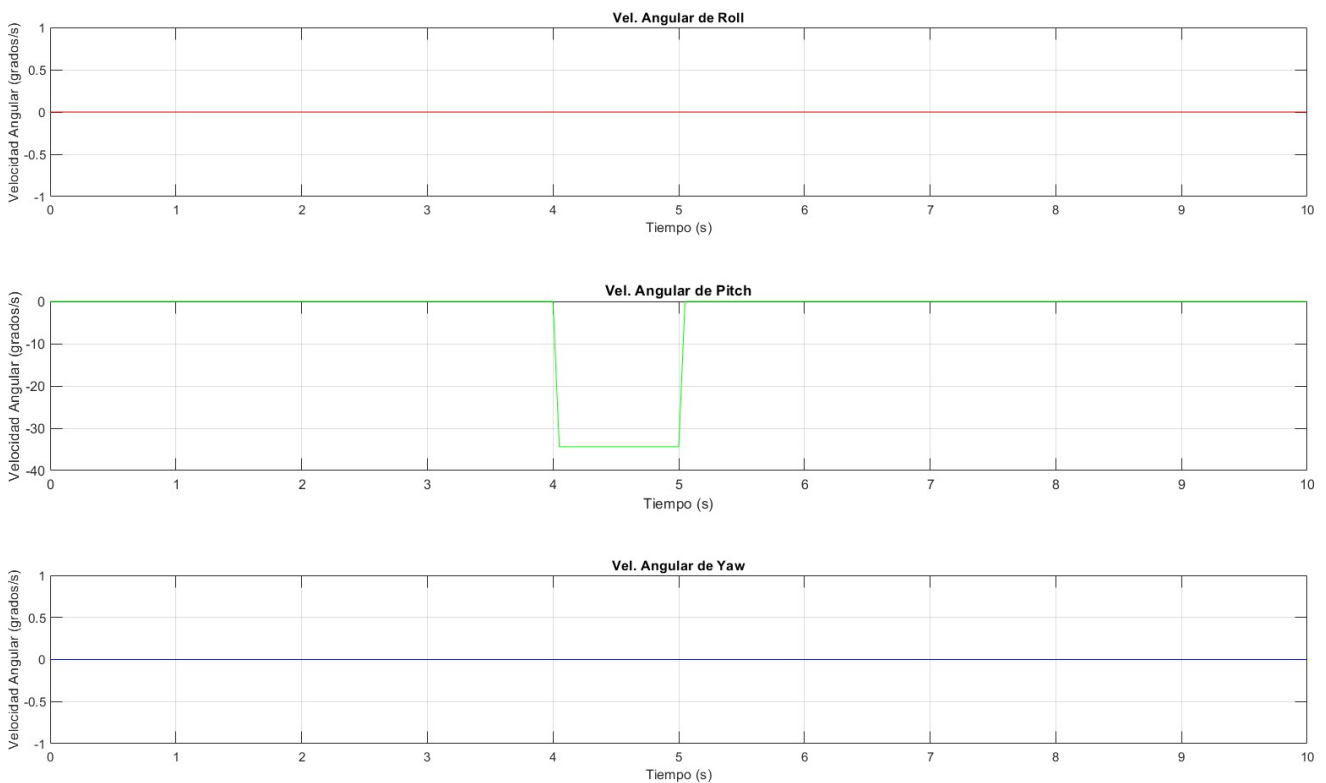


Figura 36. Velocidad Angular micropropulsores opuestos

Se observa que, a diferencia del caso anterior, solo se genera velocidad angular en uno de los ejes del nanosatélite, en este caso, el eje de Pitch. La magnitud de esta velocidad angular es aproximadamente el doble de la generada por un solo thruster, lo cual es esperado dado que se está aplicando el doble de impulso. Este comportamiento demuestra la efectividad de usar thrusters opuestos para controlar la rotación sin afectar otros ejes.



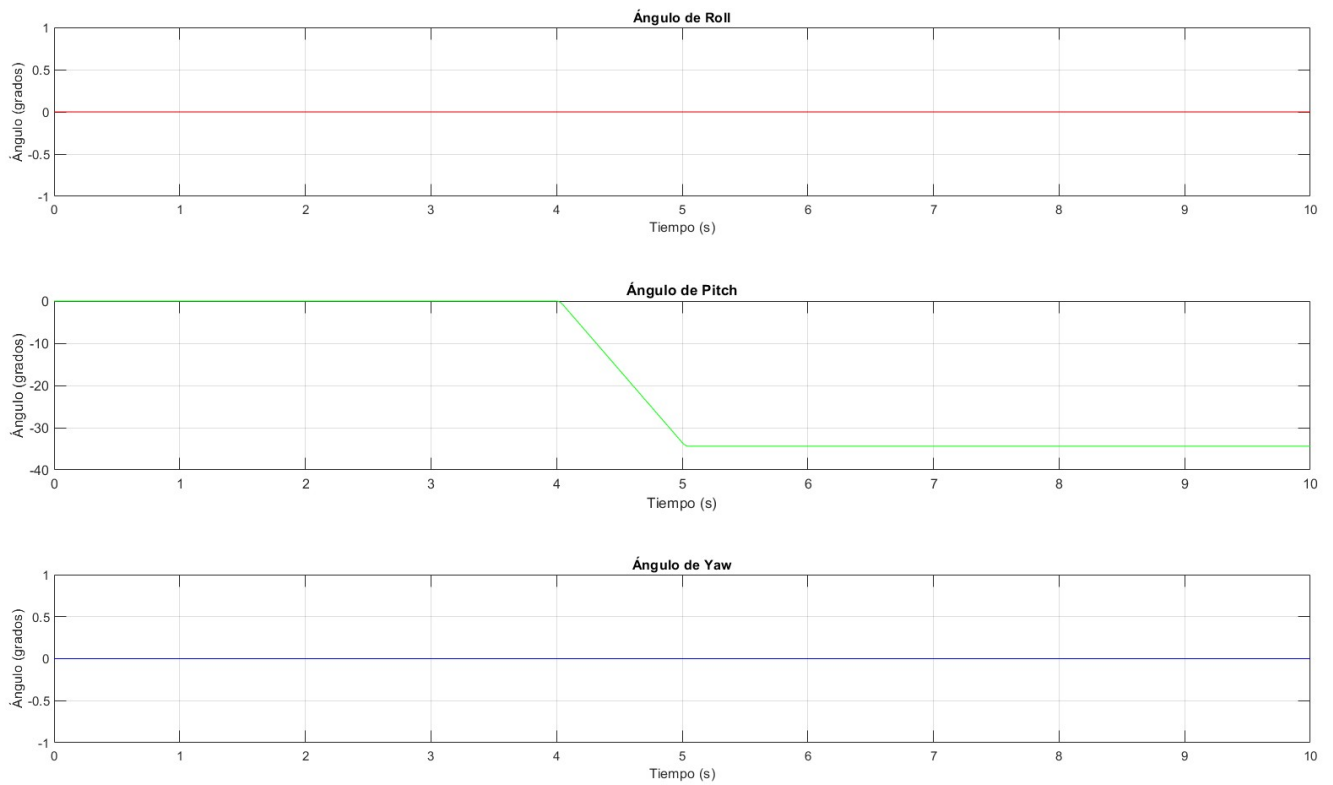


Figura 37. Ángulos micropropulsores opuestos

Como se anticipaba, solo varía el ángulo de Pitch, alcanzando un valor que es aproximadamente el doble del obtenido en la simulación con un solo thruster. Esto confirma que la activación de thrusters opuestos produce un giro controlado y significativo en el satélite sin introducir giros indeseados en los otros ejes.

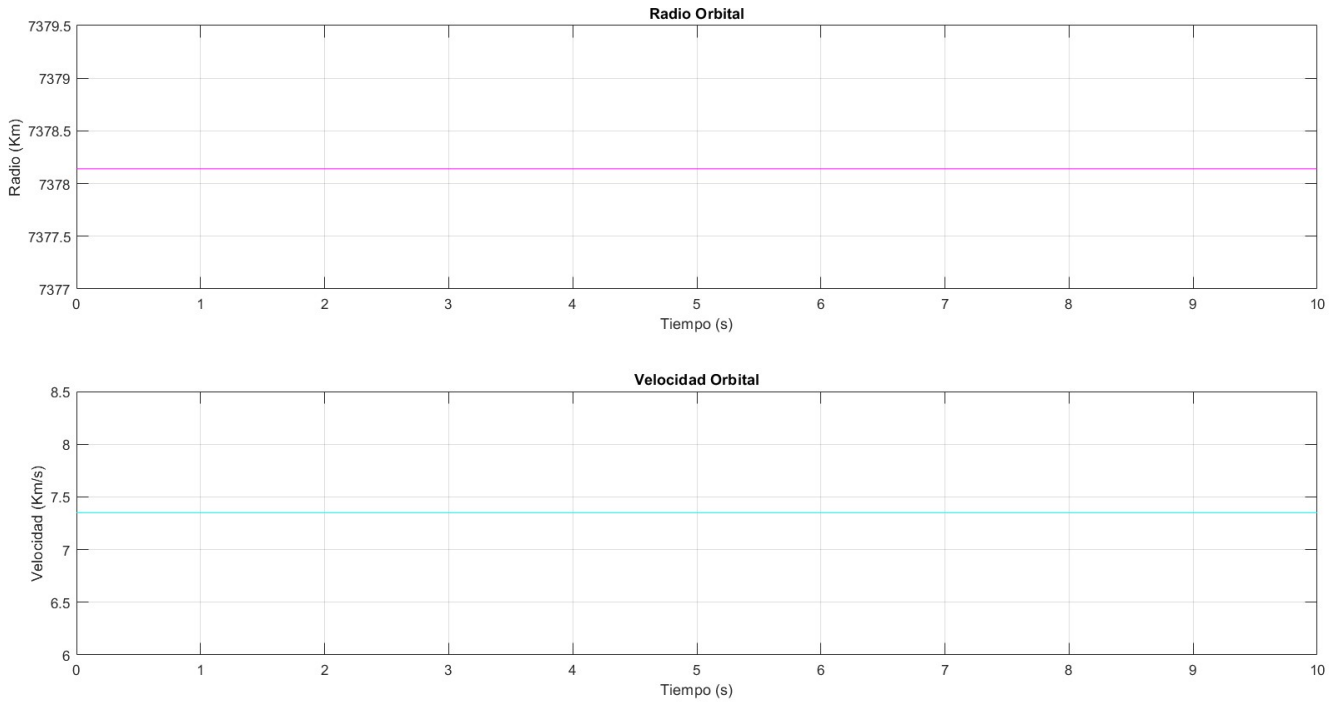


Figura 38. Resultados Orbitales micropropulsores opuestos

Debido a que los thrusters opuestos anulan las fuerzas a lo largo del eje de aplicación, no se observa ninguna variación en la órbita del satélite. La órbita permanece circular, lo que valida el uso de esta configuración para control de actitud sin afectar la traslación orbital.

En conclusión, la activación de dos thrusters opuestos altera únicamente la orientación del nanosatélite, manteniendo su órbita sin cambios.

### Activación de dos thrusters colineales

Por último, se presentan los resultados de la activación simultánea de dos thrusters colineales, es decir, una pareja de micropropulsores que generan impulsos en la misma dirección a lo largo de un eje. En este caso, se utilizarán los thrusters 1 y 2. A diferencia de los ejemplos anteriores, no es necesario utilizar otro conjunto de thrusters para contrarrestar el efecto, ya que los cambios en la orientación son más sensibles que los posibles cambios en la órbita.

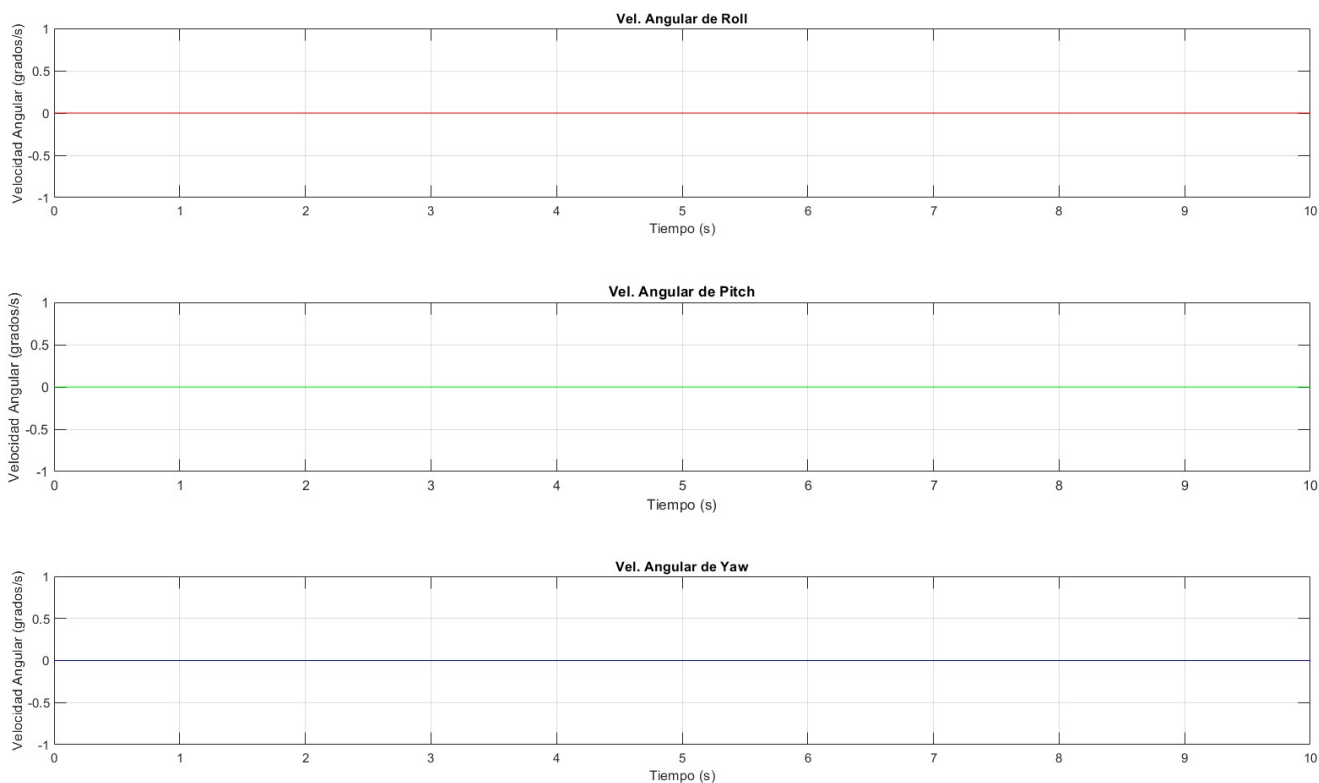


Figura 39. Velocidad Angular micropropulsores colineales

Como se esperaba, la activación de dos thrusters ubicados en la misma cara del nanosatélite no genera velocidad angular, ya que los momentos de torque de ambos se anulan mutuamente. Esto confirma que los thrusters colineales son efectivos para aplicar impulsos sin alterar la orientación del satélite.

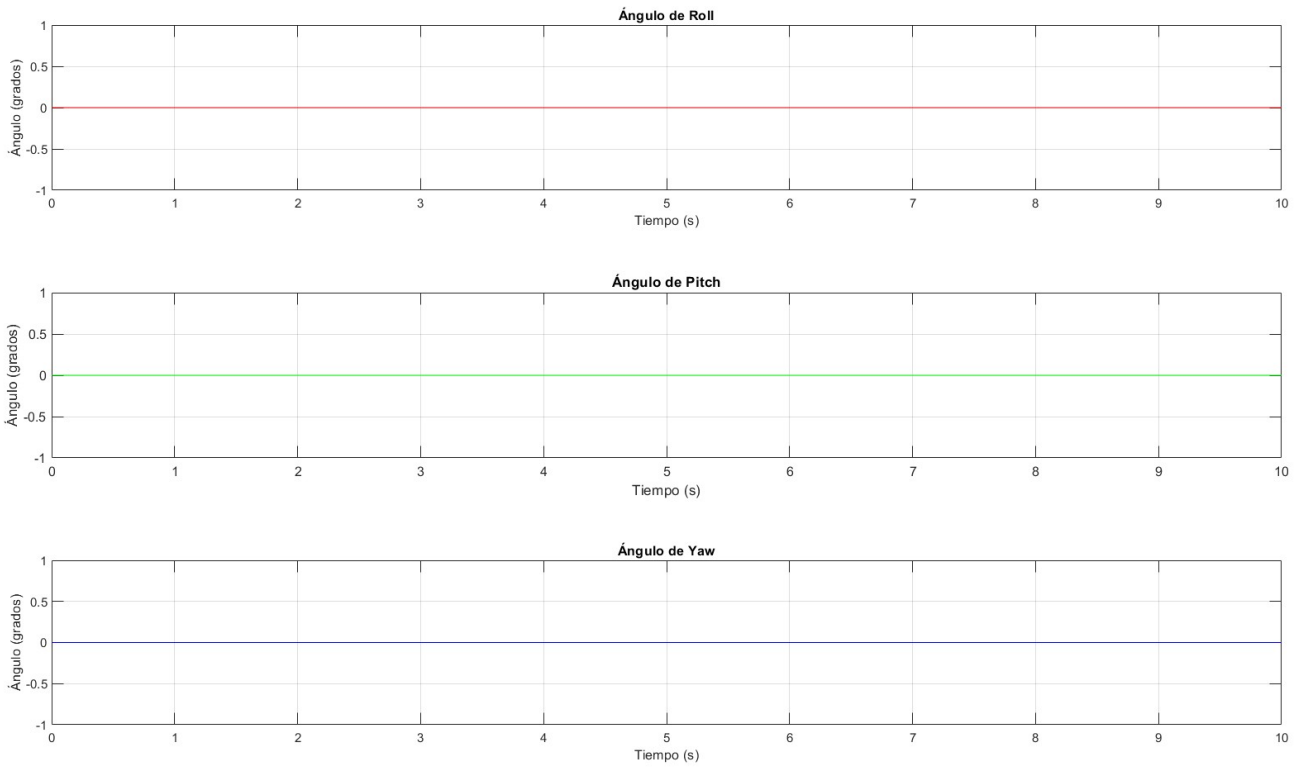


Figura 40. Ángulos micropropulsores colineales

Consecuentemente, no se observan cambios en los ángulos de Roll-Pitch-Yaw del nanosatélite, corroborando la inexistencia de rotación en los ejes. Esta estabilidad angular es crucial para aplicaciones donde se requiere mantener una orientación fija mientras se realizan maniobras orbitales.

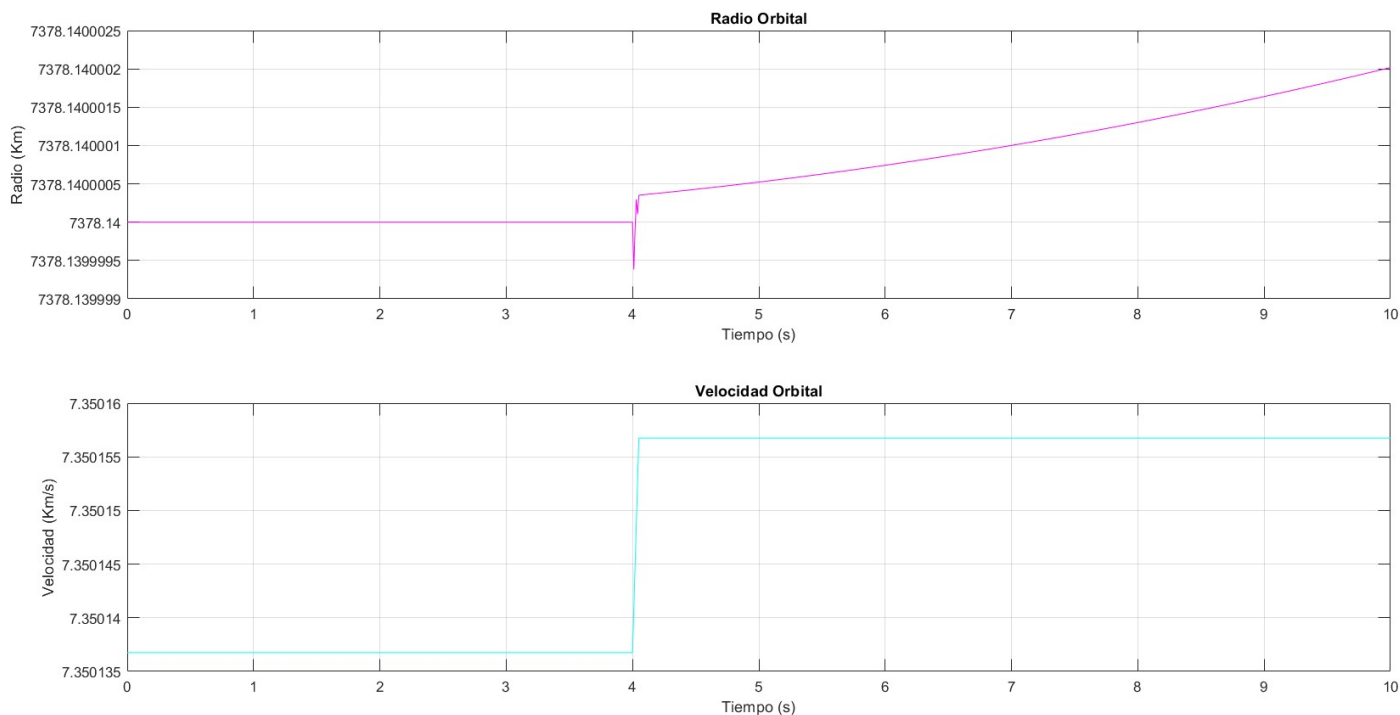


Figura 41. Resultados Orbitales micropropulsores colineales

A diferencia de los resultados angulares, los resultados orbitales muestran una variación significativa. La velocidad orbital experimenta un notable incremento, lo cual es lógico ya que el impulso se ha aplicado en la misma dirección que la velocidad orbital inicial. Esto resulta en una transferencia exitosa a una órbita diferente. Además, tras un pequeño error transitorio, el radio orbital comienza a incrementarse, lo que indica que la órbita ha pasado de ser circular a elíptica, similar a lo observado con la activación de un solo thruster, pero en una escala mayor.

En definitiva, la activación simultánea de dos thrusters colineales no modifica la orientación del satélite, pero sí afecta su órbita, transformándola de circular a elíptica.

Conocidos los efectos que las diferentes configuraciones de thrusters provocan sobre el nanosatélite se pueden pasar a combinar para obtener las orientaciones y órbitas objetivo.

## 4.5.2 Comparación con Spacecraft Dynamics

Se pasa a continuación a comparar los resultados dados por el modelo implementado a partir del marco teórico y modelado dinámico con el bloque de *Spacecraft Dynamics*.

El bloque *Spacecraft Dynamics* de Simulink, parte del *Aerospace Blockset* de MATLAB, es una herramienta ampliamente utilizada en simulaciones de misiones espaciales, análisis de control de actitud, diseño de sistemas de propulsión y estudios de estabilidad orbital. Este bloque recibe como entrada los torques y fuerzas aplicadas en los ejes X, Y y Z, y proporciona como salida la orientación del vehículo (en cuaterniones o ángulos de Euler), la velocidad angular, la posición y la velocidad orbital, entre otros parámetros.

Entre sus ventajas destacan su alta precisión al modelar tanto la cinemática como la dinámica de la nave espacial, su flexibilidad para configurarse según diferentes tipos de misiones y condiciones orbitales, y su integración con otros bloques de Simulink y del *Aerospace Blockset* para crear simulaciones completas de sistemas espaciales.

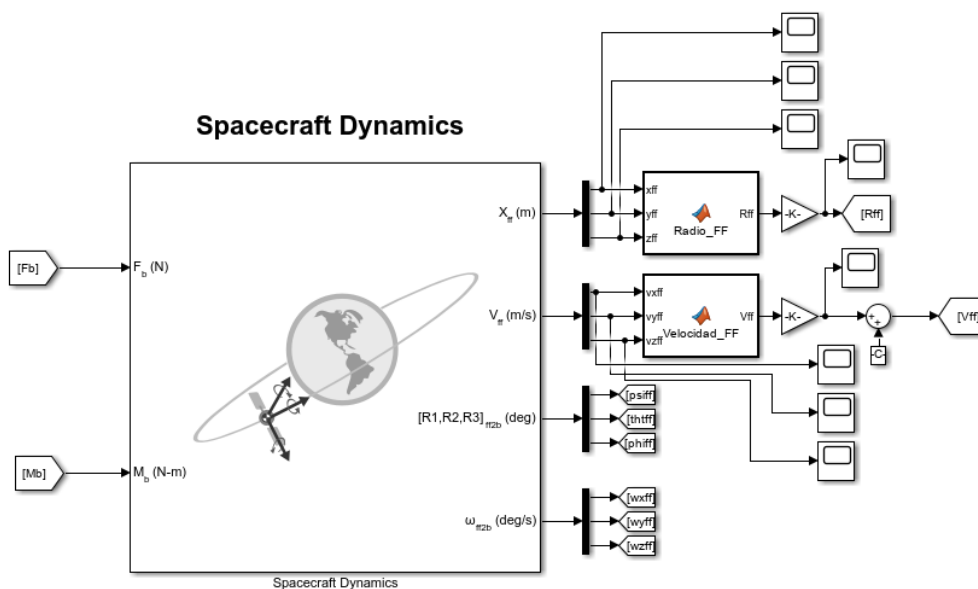


Figura 42. Spacecraft Dynamics

Análogamente al apartado anterior, para la comparación se realizan tres simulaciones distintas. En cada una, se analiza la evolución temporal de los errores en las velocidades y ángulos de Roll-Pitch-Yaw, así como los errores en el radio orbital y la velocidad orbital.

### Activación de un solo thruster

Se presentan a continuación los errores de la simulación cuando se activa únicamente el micropropulsor 1.

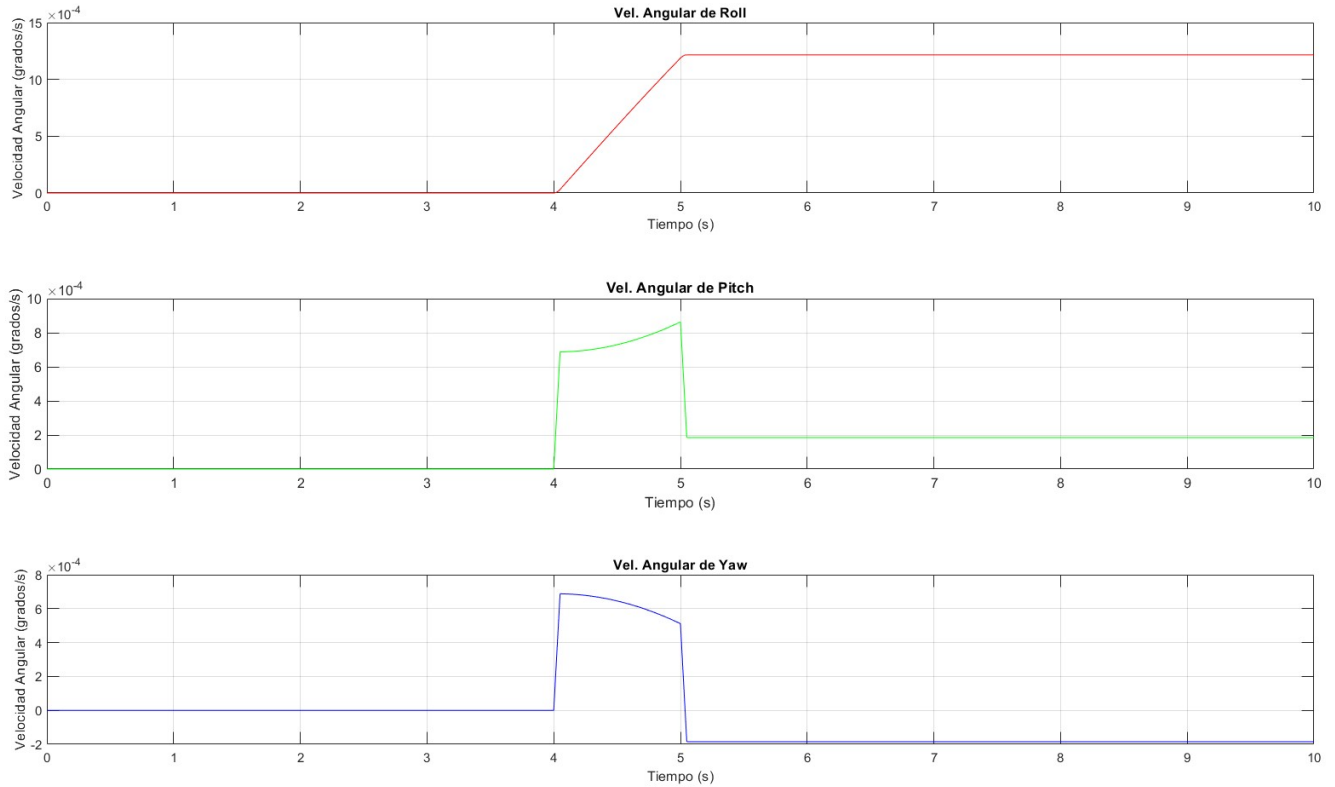


Figura 43. Comparación Velocidad Angular micropropulsor único

Los resultados muestran que el efecto del thruster afecta de manera distinta a cada componente de la velocidad angular. Para las componentes de Yaw y Pitch, el error es similar y se mantiene constante tras los impulsos, mientras que en el eje de Roll el error es notablemente mayor, superando en más de diez veces al de los otros ejes. A pesar de ello, los errores se mantienen en el orden de los miligrados/s, lo que sugiere una precisión aceptable en la simulación.

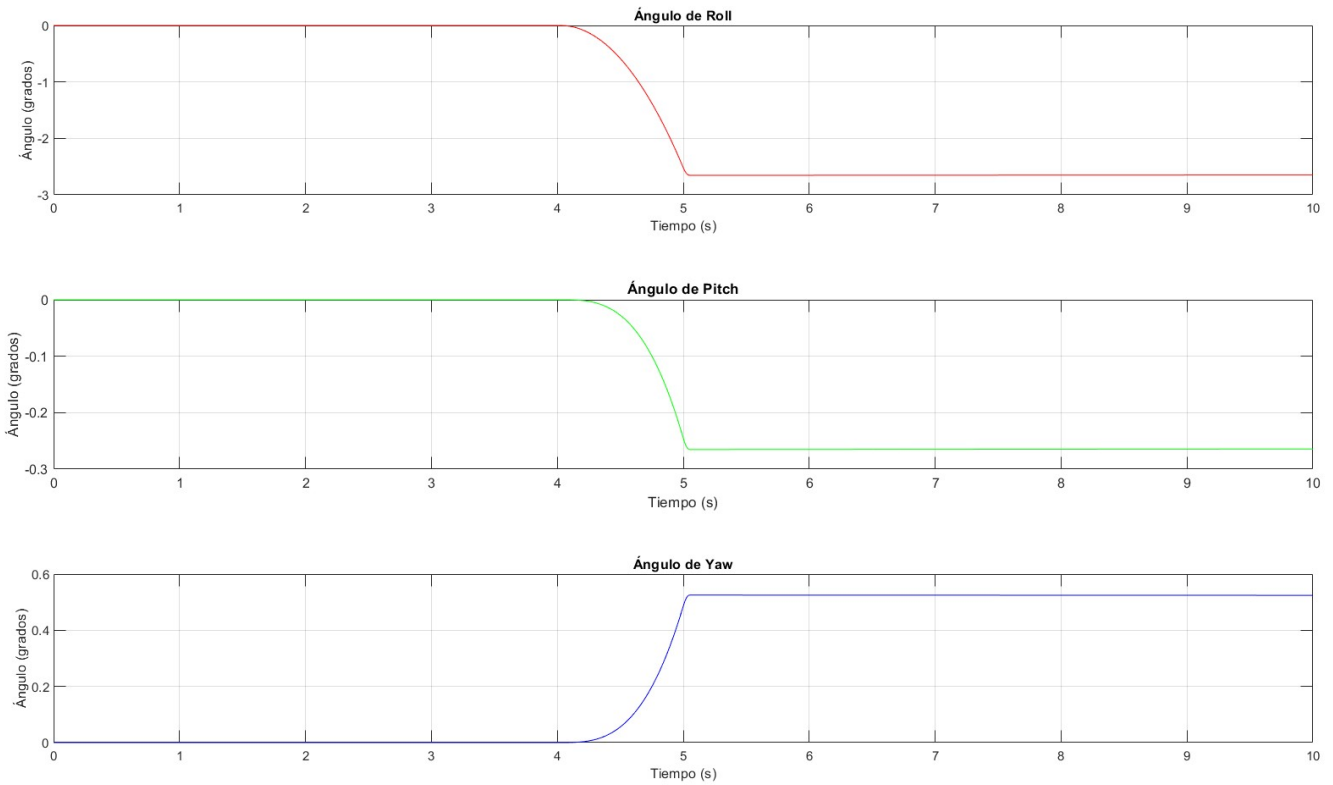


Figura 44. Comparación Ángulos micropropulsor único

La integración de las velocidades angulares revela un error en los ángulos de Pitch y Yaw, que apenas alcanza medio grado. Sin embargo, en el eje de Roll, el error es mucho mayor, aproximándose a los 3 grados. Este comportamiento puede atribuirse a la fuerza lineal ejercida sobre el centro de masas, que, al cambiar la orientación del satélite, introduce un error que el modelo implementado no logra corregir por completo.



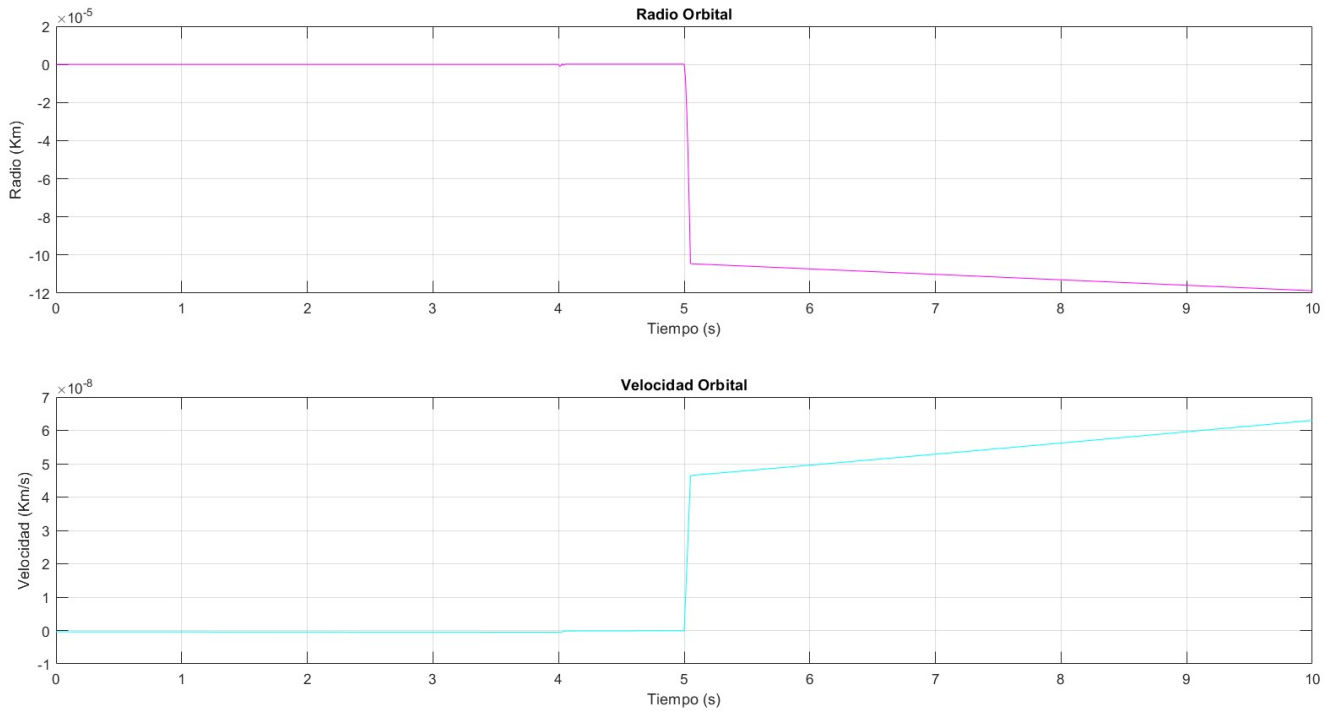


Figura 45. Comparación Resultados Orbitales micropropulsor único

La comparación de los resultados orbitales confirma la presencia de un error en la disminución del radio orbital, que ya se había detectado anteriormente. Aunque el error es mínimo, del orden de centímetros en una órbita de kilómetros, su presencia podría ser crítica para maniobras precisas, como evitar la colisión con basura espacial. En contraste, el error en la velocidad orbital es tres órdenes de magnitud menor, indicando que el modelo se ajusta mejor a esta variable.

### Activación de dos thrusters opuestos

A continuación, se presentan los errores cuando se activan los micropropulsores opuestos 1 y 6.

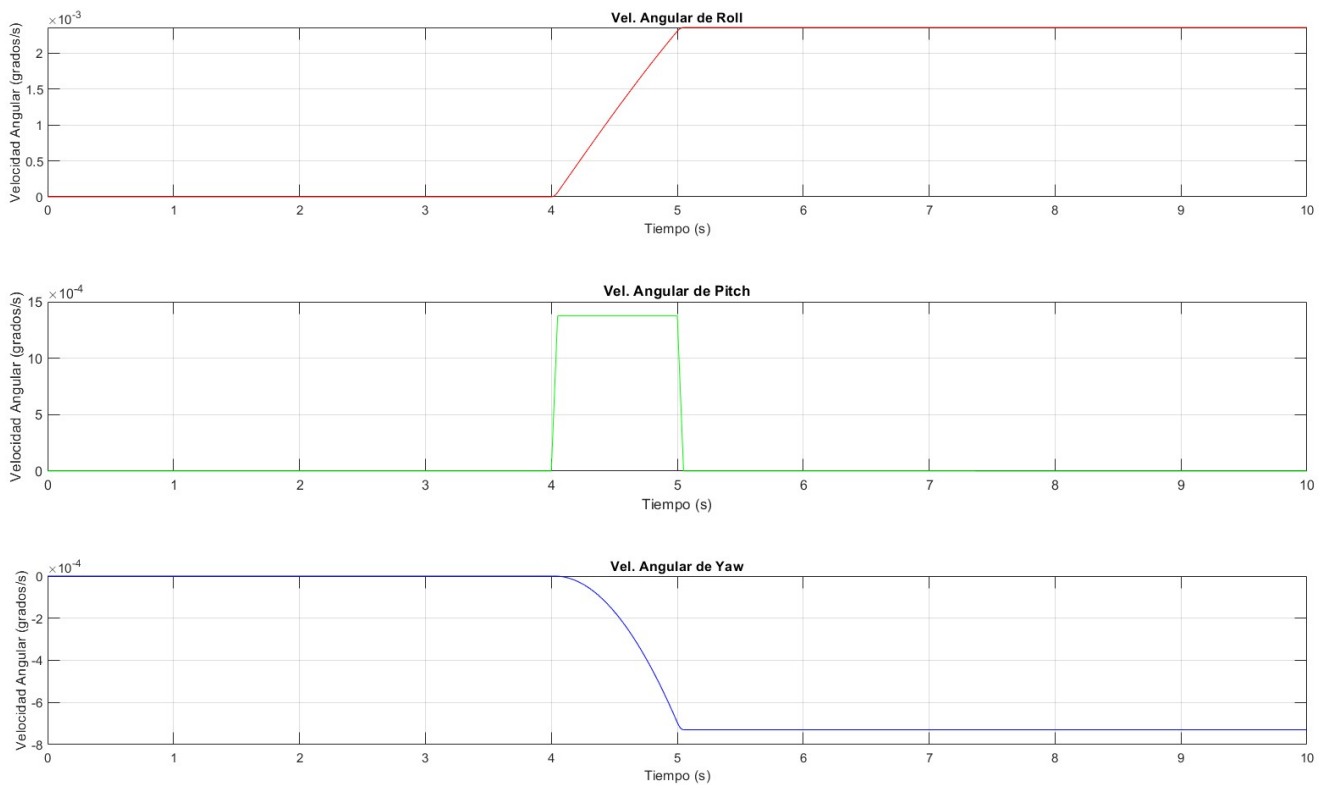


Figura 46. Comparación Velocidad Angular micropropulsores opuestos

En este caso, se espera que solo se genere velocidad angular en el eje de Pitch. Los resultados muestran un error en este eje entre los instantes de inicio y fin de los impulsos que activan y detienen el giro. En los otros dos ejes, el segundo impulso frena el aumento del error, lo que sugiere que el modelo implementado es más preciso para pequeñas variaciones angulares tal y como se esperaba.

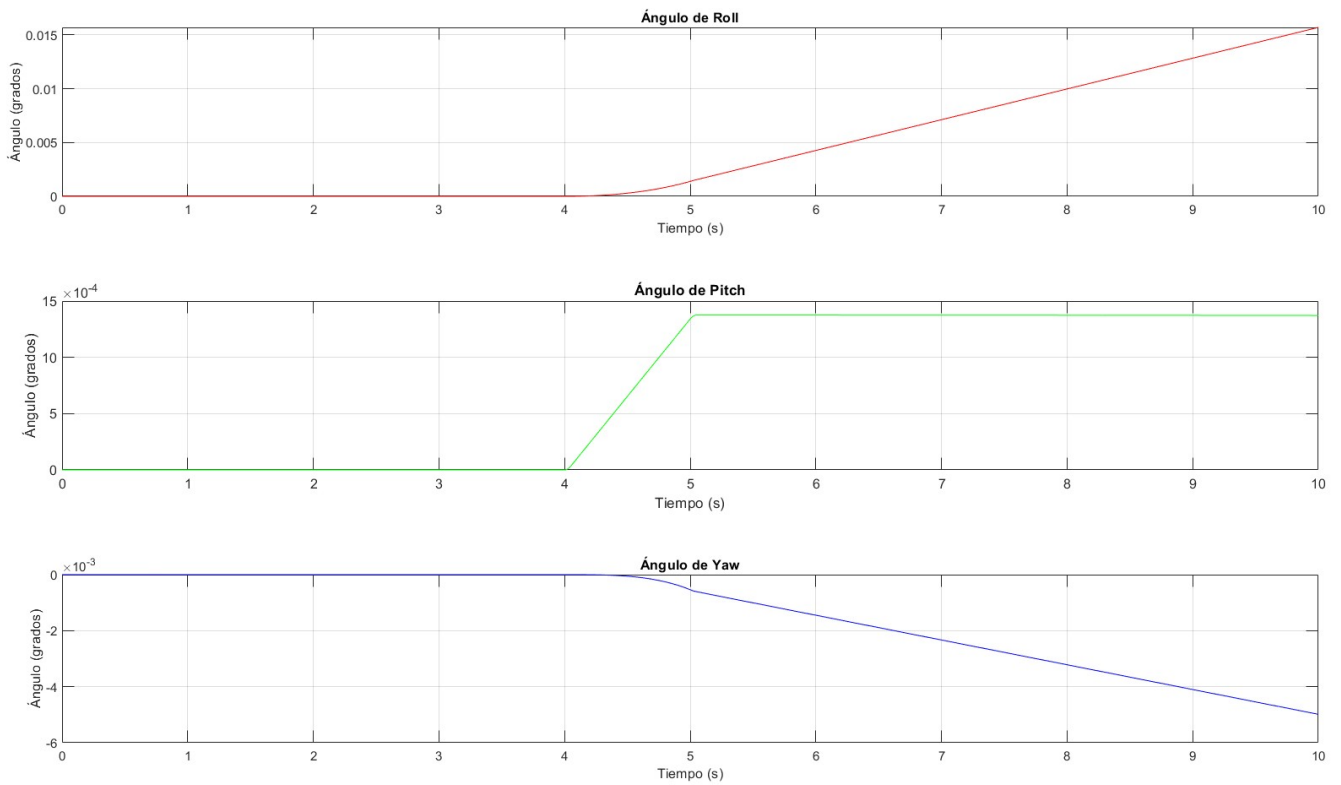


Figura 47. Comparación Ángulos micropropulsores opuestos

La integración de las velocidades angulares revela un error creciente en los ángulos de Roll y Yaw a medida que avanza la simulación. Este incremento es coherente con los errores en velocidad observados previamente, que se mantienen con el tiempo y, sin embargo, muestran como el modelo funciona mejor para bajos tiempos de simulación. Por el contrario, en el eje de Pitch, tras la aplicación del segundo impulso, el error se estabiliza a aproximadamente 1.5 miligrados. Aunque los errores angulares en Roll y Yaw son crecientes, sus magnitudes siguen siendo relativamente bajas.

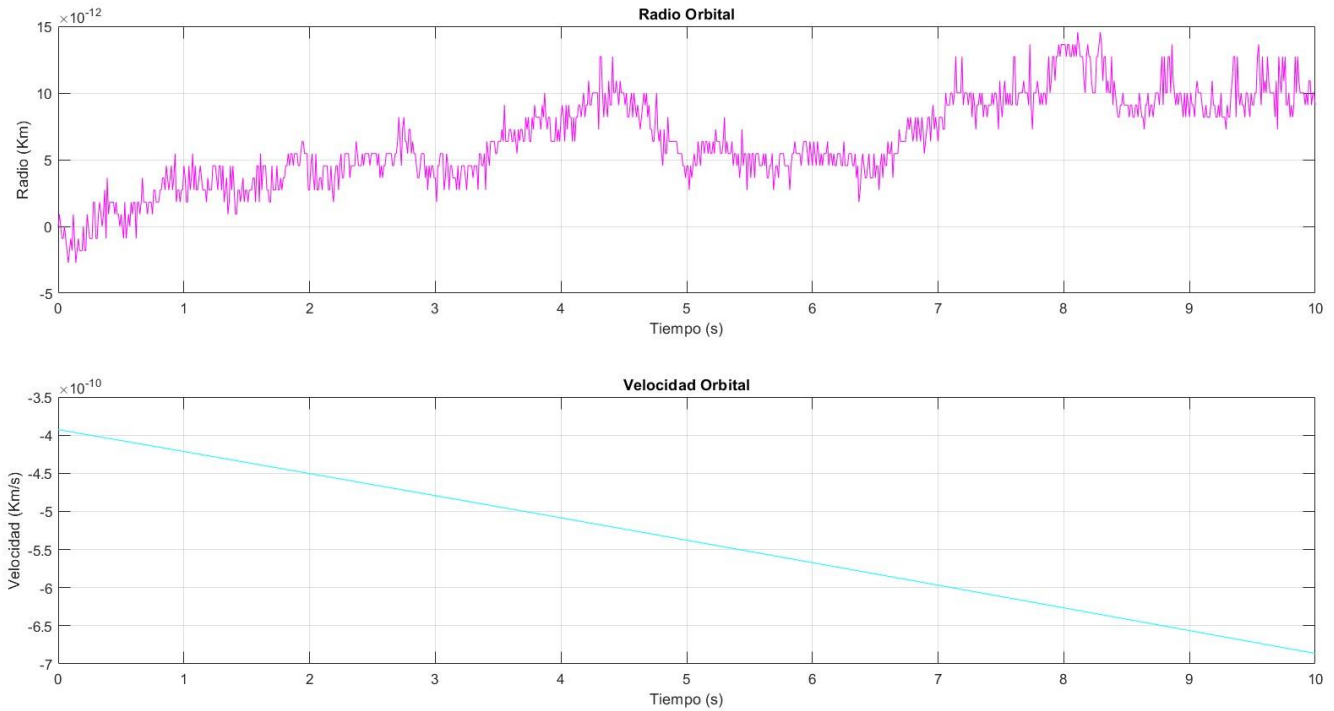


Figura 48. Comparación Resultados Orbitales micropropulsores opuestos

Como mencionó anteriormente, la activación de thrusters opuestos no afecta la órbita del satélite. El error en el radio orbital presenta una forma que podría atribuirse a ruido, con una magnitud despreciable del orden de  $10^{-12}$ . De manera similar, el error en la velocidad orbital, aunque decreciente presenta un módulo muy bajo, validando la precisión del modelo para estas configuraciones.

### Activación de dos thrusters colineales

Finalmente, se presentan los errores de la simulación cuando se activan los micropropulsores colineales 1 y 2.

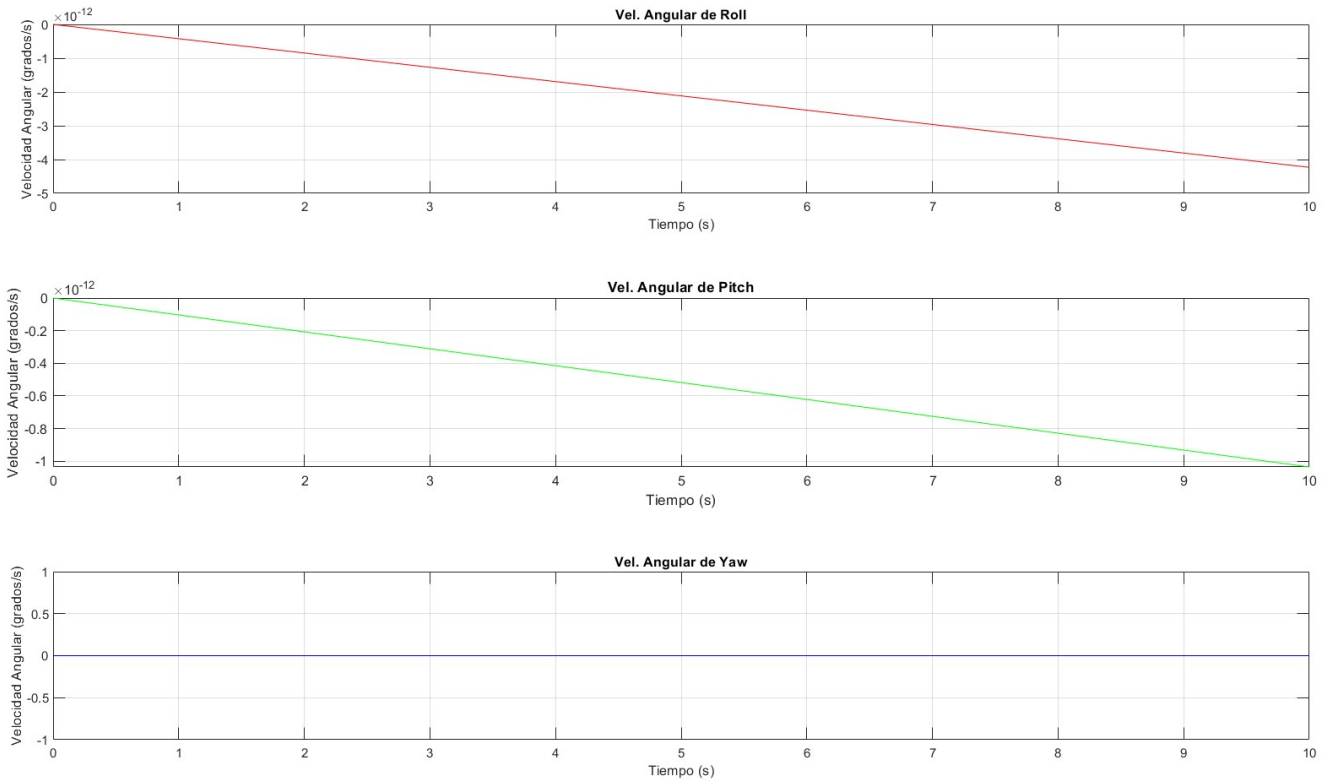


Figura 49. Comparación Velocidad Angular micropropulsores colineales

De manera similar a lo que ocurre con los resultados orbitales para los thrusters opuestos, la activación de micropropulsores colineales muestra errores mínimos en las velocidades angulares, especialmente en el eje de Yaw, donde el error es nulo. En los ejes de Roll y Pitch, aunque el error es creciente, su magnitud sigue siendo insignificante.

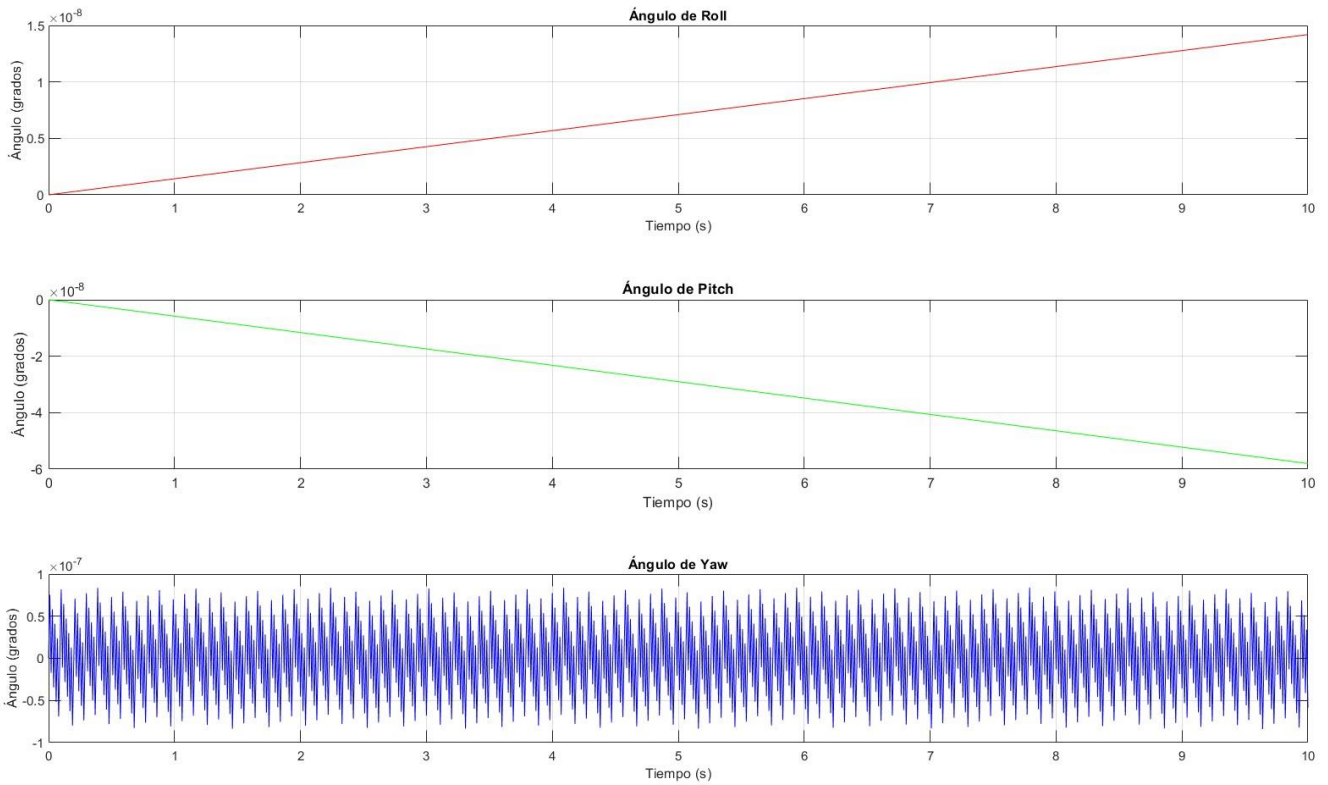


Figura 50. Comparación Ángulos micropropulsores colineales

La integración de los errores de velocidad angular muestra un error en el giro sobre los ejes, destacando el eje de Yaw donde, a pesar de no presentar errores significativos en velocidad angular, se observa ruido en la gráfica angular. No obstante, los errores en los tres ejes siguen siendo de una magnitud despreciable.

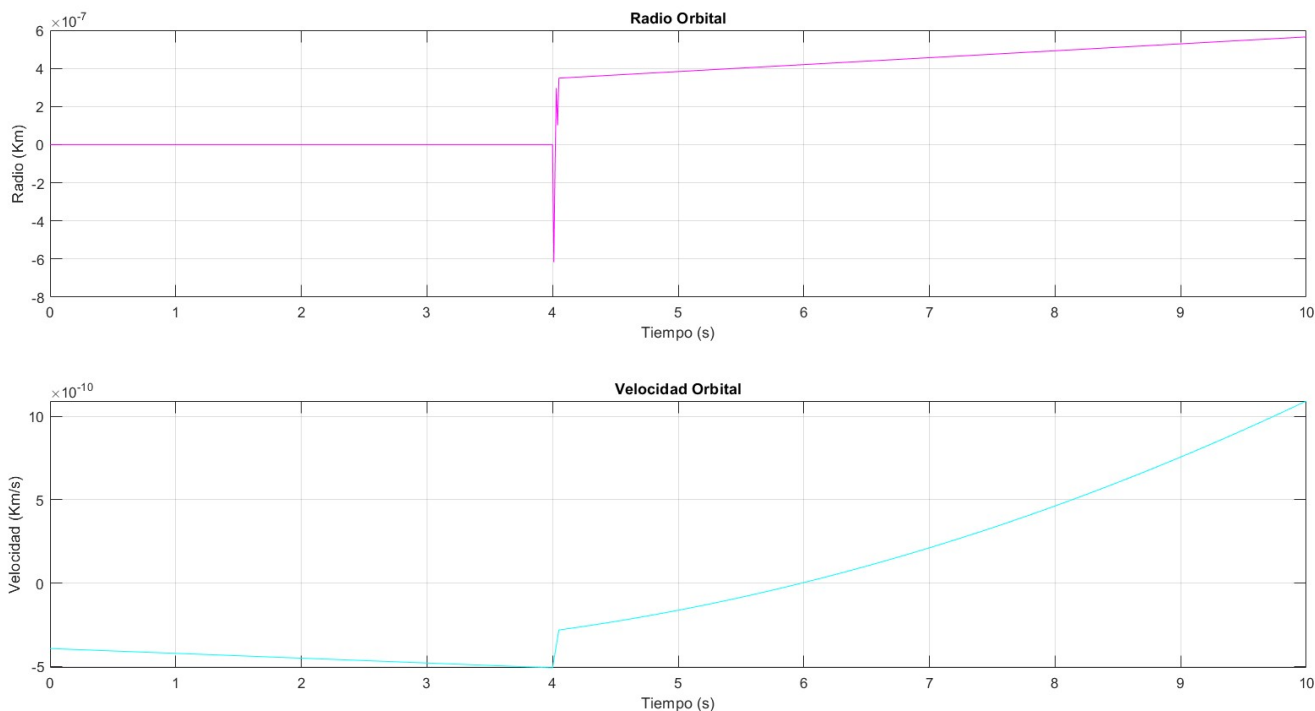


Figura 51. Comparación Resultados Orbitales micropropulsores colineales

Los resultados orbitales muestran un comportamiento similar al observado con la activación de un solo thruster. Una vez aplicado el impulso, se observa un error creciente que indica la transición de la órbita de circular a elíptica. A pesar de este crecimiento, el error sigue siendo de una magnitud muy baja. El error en la velocidad orbital también es menor en magnitud, aunque aumenta tras la aplicación del impulso.

#### 4.5.3 Resultados de la Comparación

La comparación entre el modelo implementado y el bloque *Spacecraft Dynamics* de Simulink demuestra que, aunque ambos modelos muestran un comportamiento general similar, existen diferencias notables en la precisión de las simulaciones. En particular, los errores en las velocidades y ángulos son mayores en el modelo implementado, lo que sugiere que el modelo podría beneficiarse de ajustes adicionales para mejorar su precisión en la simulación de actitudes. Por otro lado, en lo que respecta a las variables orbitales, los errores son menores, aunque aún presentes, y podrían ser críticos en escenarios que requieran maniobras de alta precisión. Además, se ha verificado mediante otras simulaciones que el sistema funciona tanto mejor cuanto menores son las duraciones de los impulsos.

En resumen, el modelo implementado ofrece una aproximación razonable para simular el comportamiento de un nanosatélite, pero se debe tener en cuenta su menor precisión en ciertas condiciones al compararlo con herramientas de simulación más robustas como *Spacecraft Dynamics*.

# 5 APLICACIÓN DE USUARIO

En este apartado se tratará la aplicación desarrollada basándose en su interfaz gráfica, en caso de querer conocer el código de esta se dispone de un repositorio de github [G1].

## 5.1 Introducción

Se ha desarrollado una App en MATLAB cuyo propósito principal es facilitar el uso del modelo anterior implementado en Simulink y destinado a la simulación de la dinámica de un nanosatélite, así como la visualización y análisis de los resultados obtenidos. La creación de esta herramienta responde a la necesidad de simplificar el proceso de interacción con el modelo más complejo en Simulink, permitiendo a los usuarios una gestión más intuitiva y eficiente de las simulaciones.

Aunque la aplicación y el modelo de Simulink operan como programas separados, están interconectados. La aplicación modifica los parámetros del modelo en Simulink, inicia la simulación y recibe los resultados para su posterior visualización y análisis.

La aplicación se organiza en tres secciones principales, cada una enfocada en un aspecto específico:

1. Parámetros del Nanosatélite y de la Órbita:

En esta primera sección, los usuarios pueden introducir los parámetros clave del nanosatélite, así como las características de la órbita en la que se encuentra. Esta funcionalidad permite la personalización de las simulaciones según las especificaciones del satélite y las condiciones orbitales deseadas, facilitando la configuración del modelo sin necesidad de interactuar directamente con Simulink.

2. Manejo de los Thrusters del Nanosatélite:

La segunda sección de la aplicación está dedicada al control y manejo de los thrusters del nanosatélite. Los usuarios pueden definir las estrategias de activación de los propulsores, ajustando los tiempos y duración de los impulsos. Esta funcionalidad es crucial para simular maniobras de orientación y control de actitud del satélite, permitiendo explorar diferentes escenarios.

3. Visualización de Resultados de la Simulación:

Una vez ejecutada la simulación, la tercera sección de la aplicación ofrece herramientas para la visualización y análisis de los resultados. Los usuarios pueden acceder a gráficos detallados que muestran la evolución temporal de las variables del sistema, como la orientación del satélite, la velocidad angular y otros parámetros relevantes. Esta sección facilita la interpretación de los datos, permitiendo una evaluación rápida y efectiva del comportamiento del satélite bajo distintas condiciones simuladas.

Para optimizar el uso de la aplicación, se recomienda a los usuarios seguir un flujo de trabajo en el que primero se ingresen los parámetros del nanosatélite y la órbita, seguidos de la configuración de los thrusters. Una vez completado este proceso, el usuario está listo para iniciar la simulación mediante el botón "Simular". Al finalizar la simulación, los resultados se mostrarán automáticamente en la pantalla.



Así, la interfaz de la App queda de la siguiente manera:

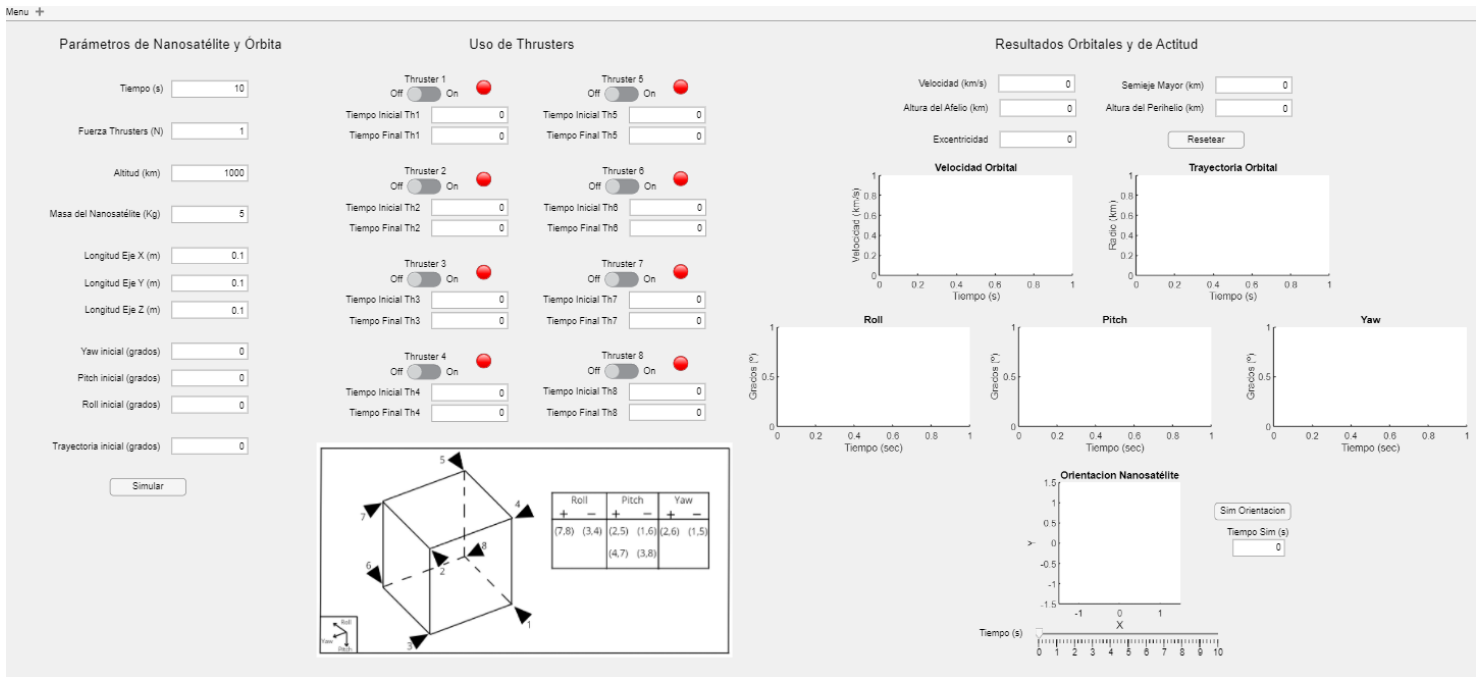


Figura 52. Interfaz App

## 5.2 Parámetros

En esta primera sección de la interfaz el usuario puede modificar los principales parámetros que definen al nanosatélite y a la órbita al inicio de la simulación.



Parámetros de Nanosatélite y Órbita

Tiempo (s)	<input type="text" value="10"/>
Fuerza Thrusters (N)	<input type="text" value="1"/>
Altitud (km)	<input type="text" value="1000"/>
Masa del Nanosatélite (Kg)	<input type="text" value="5"/>
Longitud Eje X (m)	<input type="text" value="0.1"/>
Longitud Eje Y (m)	<input type="text" value="0.1"/>
Longitud Eje Z (m)	<input type="text" value="0.1"/>
Yaw inicial (grados)	<input type="text" value="0"/>
Pitch inicial (grados)	<input type="text" value="0"/>
Roll inicial (grados)	<input type="text" value="0"/>
Trayectoria inicial (grados)	<input type="text" value="0"/>

Figura 53. Parámetros App

Sin más que clicar sobre los cuadros de edición numéricos se pueden modificar los valores por defecto de los parámetros, de entre los que se tienen:

- Tiempo (sec): Duración de la simulación, indicado en segundos.
- Fuerza Thrusters (N): Fuerza que cada thruster ejercerá sobre el nanosatélite cuando esté activo, en Newtons.
- Altitud (km): Altura sobre la superficie terrestre a la que el nanosatélite se encuentra orbitando, en kilómetros.
- Masa del Nanosatélite (kg): Masa que presenta el nanosatélite a lo largo de toda la simulación, pues se considera nula la pérdida de peso por combustible, entre otros, dado en kilogramos.
- Longitud del Eje X-Y-Z (m): Las dimensiones de los tres ejes principales del nanosatélite, que se considera un paralelepípedo, en metros.
- Yaw-Pitch-Roll inicial (grados): El giro inicial sobre cada uno de los ejes del nanosatélite para iniciar la simulación en una orientación diferente a la LVLH, en grados.
- Trayectoria inicial (grados): La posición inicial dentro de la órbita circular plana, respecto de la Tierra, en grados.

Es importante que el botón "Simular" no sea activado hasta que se haya completado toda la configuración pertinente, incluyendo la estrategia de los thrusters. La aplicación permite realizar múltiples simulaciones, lo que facilita corregir configuraciones erróneas y re-simular para obtener los resultados deseados.

### 5.3 Uso de thrusters

En esta sección, los usuarios configuran la activación de los micropropulsores, que controlan los cambios de orientación y órbita del satélite.

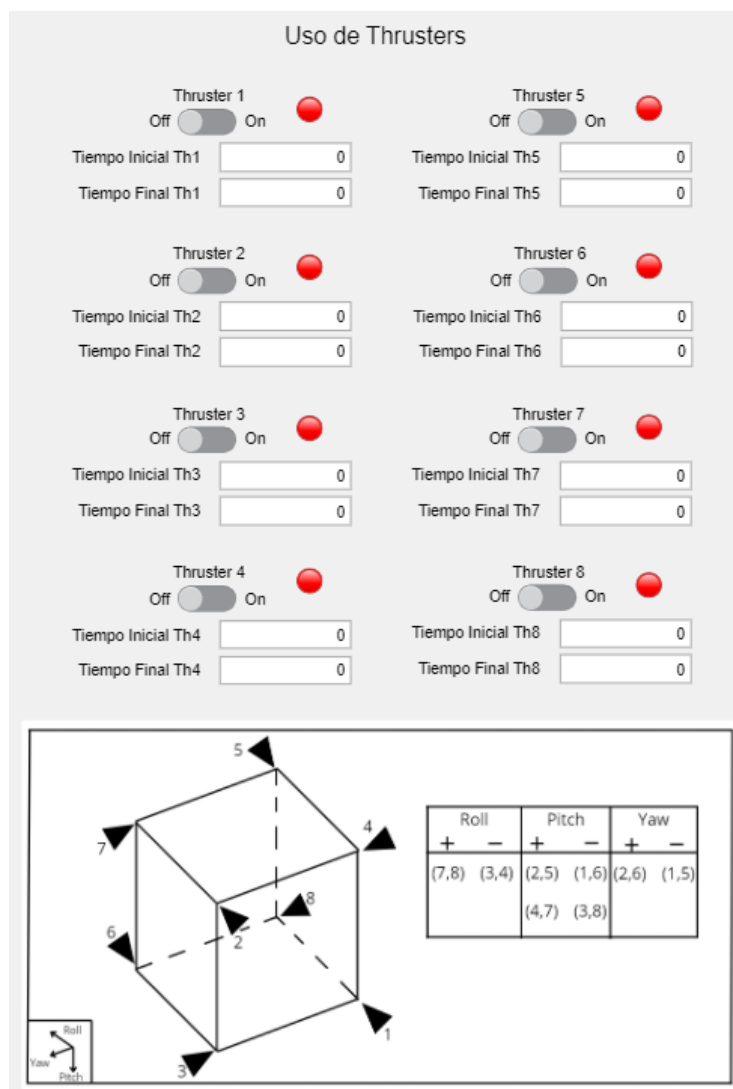


Figura 54. Interfaz Configuración de thrusters

Dentro de la interfaz se presenta una misma disposición para el uso de cada micropropulsor, compuesta por:

- Thruster 'x': Indica el número del thruster empleado.
- Interruptor: Al clicar en él activa el micropropulsor para poder ser usado o por el contrario lo desactiva, evitando su uso.
- Indicador de Estado: Muestra el estado del thruster, rojo si no está activo o verde si sí lo está.
- Tiempo Inicial y Final: Define el intervalo de tiempo en el que el thruster estará activo, modificable a través de cuadros de edición numéricos.

Tal y como se muestra en la interfaz el nanosatélite dispone de 8 thrusters, colocados cada uno en una esquina y cuyos efectos son diferentes sobre cada uno de los ejes de Roll/X Pitch/Y y Yaw/Z como también se muestra en el esquema inferior.

## 5.4 Resultados y Simulación

### 5.4.1 Resultados

Después de configurar los parámetros y thrusters, los resultados de la simulación se muestran en la sección correspondiente de la interfaz.

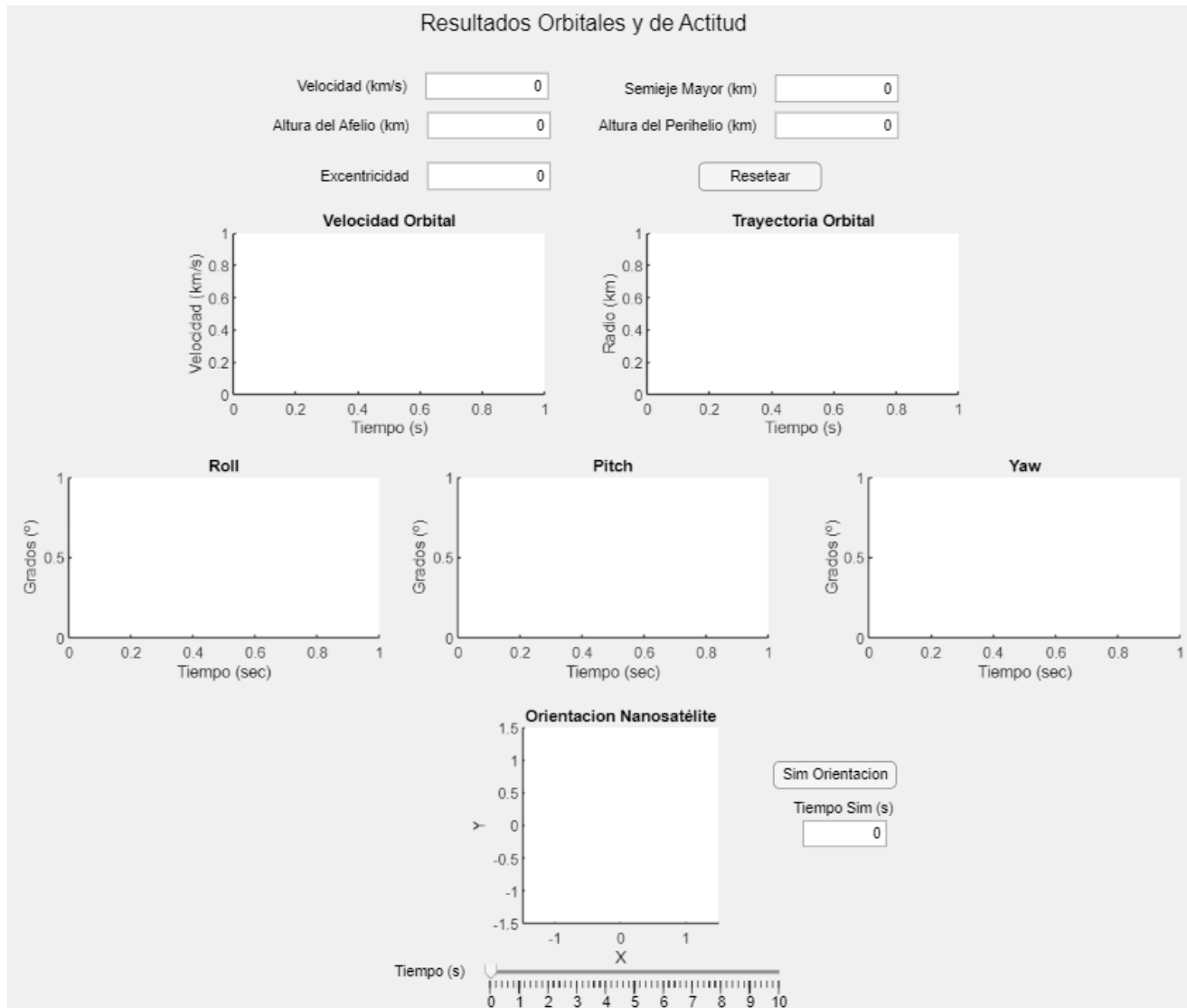


Figura 55. Interfaz Resultados

Los resultados incluyen:

- Parámetros orbitales finales: Velocidad orbital, semieje mayor, altura del afelio y perihelio, y excentricidad de la nueva órbita.
- Gráficas de Evolución Temporal: Muestran la evolución de la velocidad y trayectoria orbitales, así como los giros sobre los ejes Roll, Pitch y Yaw del nanosatélite.
- Gráfica Interactiva Orientación Nanosatélite: Representa gráficamente en 3D cómo los impulsos afectan la orientación del satélite respecto al sistema de referencia orbital.

Las opciones de visualización de la orientación en esta última gráfica incluyen:

- “Sim Orientación”: Permite observar cómo evoluciona la orientación del nanosatélite a lo largo del tiempo, visualizándose el tiempo de simulación en el cuadro de Tiempo Sim.

- Slider: Permite seleccionar manualmente un instante de la simulación para visualizar la orientación del nanosatélite en ese momento.

Para reiniciar las gráficas antes de una nueva simulación, el botón "Resetear" devuelve todas las gráficas a su estado original previo a la simulación.

### 5.4.2 Ejemplo de uso

A continuación, se presenta un ejemplo de uso de la aplicación. Se mantendrán los parámetros por defecto y se activará únicamente el Thruster 1 durante 0.05 segundos, comenzando en el segundo 5 de la simulación.

Figura 56. App Ejemplo de uso Configuración

Finalizada la configuración se pulsa el botón **Simular** y se espera a que la simulación acabe, que ocurrirá cuando la barra de progreso llegue al 100%

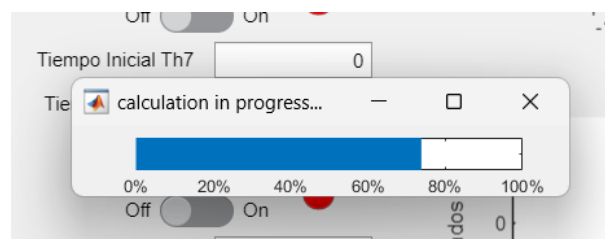


Figura 57. App Ejemplo progreso

Una vez finalizada la simulación, se muestran los resultados por pantalla:

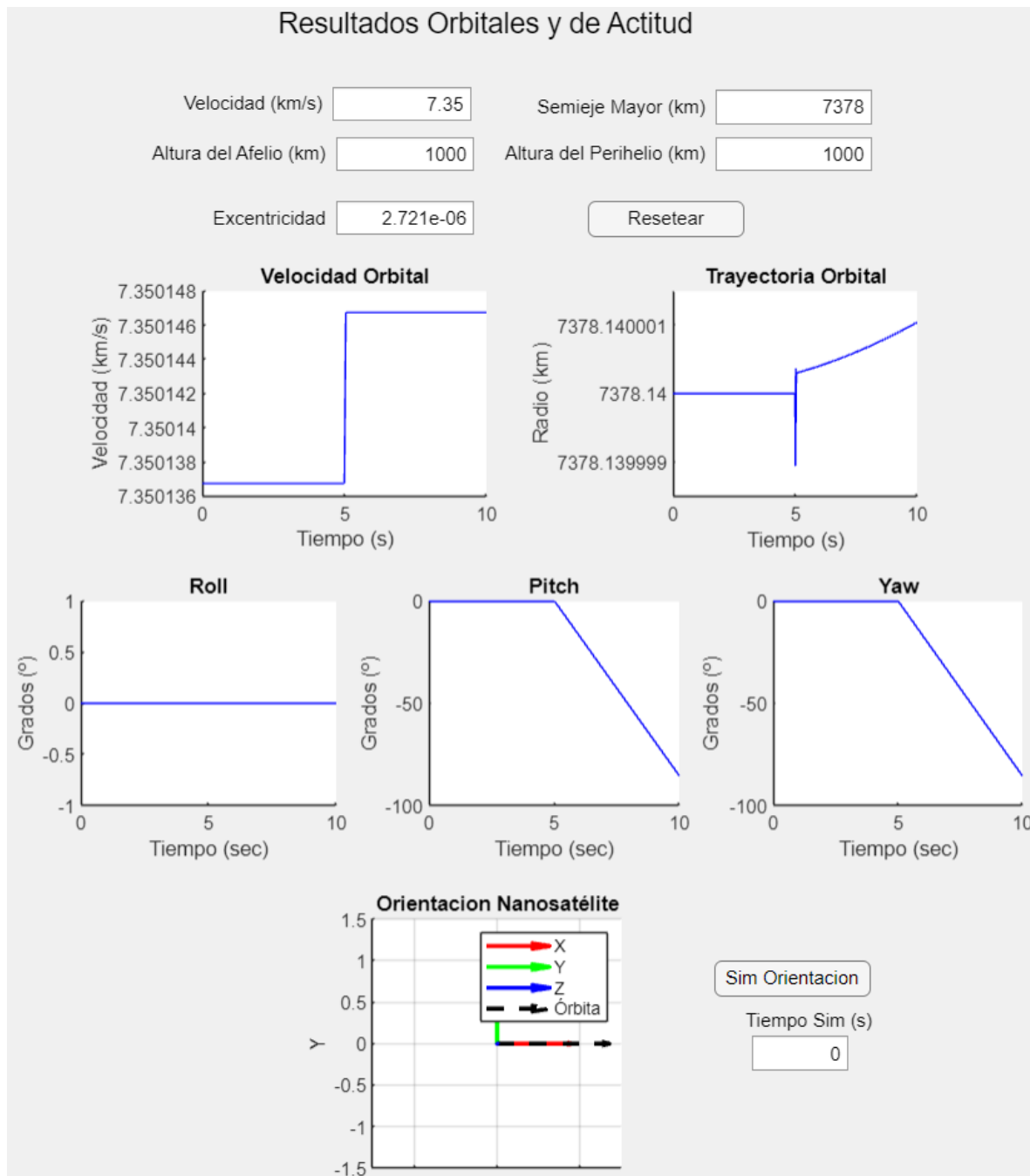


Figura 58. App Ejemplo Resultados

Tal y como se esperaba, la activación del Thruster 1 incrementa la velocidad orbital y por tanto el radio y genera giros de sentido negativo en los ejes de Pitch y Yaw.

Finalmente, se muestra cómo varía la orientación del satélite a lo largo del tiempo, en los instantes inicial, final y a mitad de tiempo entre el impulso y el final de la simulación.

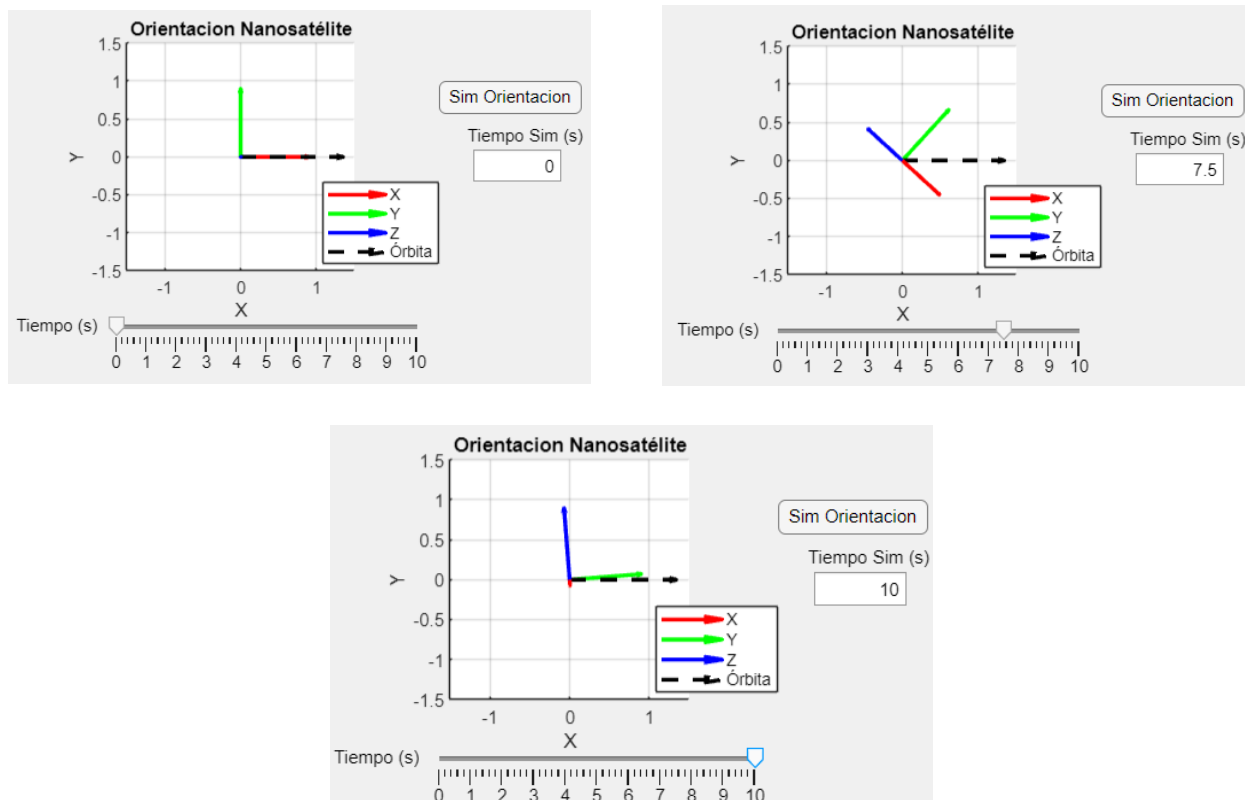


Figura 59. App Ejemplo evolución de orientación

Como se puede comprobar, en los tres instantes la terna muestra una orientación diferente respecto a la órbita.

## 6 CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO

### Conclusión

El desarrollo de este proyecto ha permitido una profunda inmersión en el estudio de la dinámica y orientación de satélites pequeños, a través de un enfoque teórico. A lo largo del trabajo, se ha logrado construir un marco teórico sólido que abarca desde las bases de la dinámica de cuerpos rígidos y la representación de la actitud hasta la implementación de modelos dinámicos complejos y su simulación en entornos como Simulink.

Uno de los principales logros del proyecto ha sido la implementación del modelo dinámico permitiendo no solo el estudio del comportamiento del satélite a partir de micropropulsores en diferentes escenarios sino también la comparación de resultados con otras herramientas de simulación, como Spacecraft Dynamics. Los resultados obtenidos validan la precisión del modelo implementado y su adecuación para aplicaciones en misiones espaciales reales.

De la misma manera, el desarrollo de una aplicación que facilita la simulación y análisis de escenarios específicos destaca la aplicabilidad de los conocimientos teóricos en herramientas útiles para el diseño y control de misiones satelitales. Esto ofrece un puente entre la teoría y la práctica, permitiendo que los usuarios experimenten con diferentes parámetros y condiciones iniciales para observar cómo impactan en la dinámica del satélite.

En resumen, el proyecto ha cumplido con los objetivos planteados, proporcionando una comprensión integral de la dinámica orbital y de actitud de nanosatélites. Las simulaciones realizadas no solo corroboran la validez de los modelos teóricos, sino que también demuestran la capacidad de los sistemas propuestos para gestionar la orientación y órbita de estos satélites en diferentes condiciones.

### Trabajo Futuro

A pesar de los avances logrados, el proyecto presenta varias áreas donde se puede continuar el trabajo para mejorar y expandir los resultados obtenidos. Algunas de estas direcciones incluyen:

1. **Optimización de Modelos:** Si bien se han implementado modelos dinámicos precisos, existe la posibilidad de optimizarlos para mejorar la robustez del sistema frente a perturbaciones no modeladas.
2. **Incorporación de Perturbaciones Más Complejas:** Ampliar el modelo para incluir perturbaciones adicionales, como el efecto de la atmósfera superior en altitudes bajas o la presión de radiación solar, permitiría un análisis más completo y realista de la misión del satélite.
3. **Desarrollo de Algoritmos de Control Avanzados:** Integrar algoritmos de control avanzados, como el control predictivo o el control óptimo, podría mejorar la capacidad del sistema para mantener la orientación deseada bajo condiciones más variadas y exigentes.
4. **Validación Experimental:** Si bien el proyecto se ha centrado en simulaciones, la validación experimental de los modelos en un entorno controlado o con hardware-in-the-loop (HIL) representaría un paso importante hacia la aplicación práctica de los resultados en misiones reales.
5. **Expansión de la Aplicación:** La aplicación desarrollada puede mejorarse con características adicionales, como la integración de interfaces gráficas más intuitivas, la capacidad de simular otros tipos de maniobras orbitales, o la inclusión de análisis post-simulación más detallados.
6. **Aplicación en Misiones Reales:** Finalmente, una posible extensión del trabajo sería la



colaboración con equipos de diseño de misiones satelitales para aplicar directamente los modelos y algoritmos desarrollados en este proyecto a misiones reales, contribuyendo así al avance de la tecnología satelital.

# REFERENCIAS

- [1] Rafael Vázquez Valenzuela. Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales. Tema 7: Maniobras Orbitales. 27 de septiembre de 2020
- [2] Yasuhiro Yoshimura, Takashi Matusno, Shinji Hokamoto. Three Dimensional Attitude Control of an Underactuated Satellite with Thrusters. September 2001
- [3] Ricardo Ramos. Transformaciones lineales en 3D.
- [4] Miguel Díaz Cabrera. Control robusto no lineal de un satélite en presencia de perturbaciones e incertidumbre en los parámetros. 2019
- [5] Ernesto Cortés. Experimentación del control de actitud en un prototipo de CubeSat con ruedas de reacción. Febrero 2020
- [6] Juan Cañizares Gómez de Terreros. Modeling and Basic Electronic Design of Formato de Publicación de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería an ADCSSubsystem for Deorbiting System Assistance. 2023
- [7] Beer, F.P.; Johnston, E.R.; Eisenberg, E.R. ; Cornwell, P.J. ; de Jesús Hidalgo Ca vazos, F.: Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica. Editorial Félix Varela, 2009
- [8] Cepeda Gómez, Rudy; Prieto Martinez, Luis: Sistema De Control Robusto, Basado En Cuaterniones Para Un Satélite De Órbita Baja. 2010
- [9] Christian, Rosso; Pablo, Vieira J. Modelo Teórico MIMO para un sistema de orientación de 3DOF de un satélite. 2010
- [10] Mecánica Cuántica, La. La matriz generadora de rotación. 2009
- [11] EasySpin. Rotations and Euler angles. 2014
- [12] Forero Martinez, David E.: Diseño del Bloque de Estimación de un Sistema ADCS para un Pico Satélite de Estándar CubeSat Usando Filtro de Partículas como Técnica de Estimación. 2016
- [13] Hall, Chris: Integrated Orbit and Attitude Control for a Nanosatellite with Power Constraints. En: Satellite Attitude Dynamics. 2002
- [14] Ramnath, R. V.: Computation and Asymptotics, SpringerBriefs in Computational Mechanics. 2012
- [15] Spong, Mark W.; Hutchinson, Seth ; Vidyasagar, M.: Robot modeling and control. 2006
- [16] M.C. Rolando Cortés Martínez. Sistema de control de orientación compatible con el estándar CubeSat. Enero 2020
- [E1] Calculadora de THRUSTERS [https://github.com/JoseAGS01/CubeSat\\_files](https://github.com/JoseAGS01/CubeSat_files)
- [G1] Cubesat\_APP\_code [https://github.com/JoseAGS01/CubeSat\\_files](https://github.com/JoseAGS01/CubeSat_files)
- [I1] <https://www.nasa.gov/history/explorer-1-overview/>
- [I2] <https://www.zendalibros.com/sputnik-1-el-primer-satelite-artificial-de-la-historia/>
- [I3] <https://spacenews.com/uwe-4-lowers-altitude/>
- [I4] [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:The\\_structure\\_of\\_cubesat\\_ESTCube-1\\_eng.jpg](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:The_structure_of_cubesat_ESTCube-1_eng.jpg)
- [I5] <https://www.europapress.es/ciencia/misiones-espaciales/noticia-nasa-lanza-cubesat-propulsado-vela-solar-ajustable-20240424134557.html>

[16] <https://sondasysatelites.blogspot.com/2006/09/sistema-de-determinacin-y-control-de.html>

[17] [https://www.researchgate.net/figure/LVLH-Local-Vertical-Local-Horizontal-frame-definition\\_fig2\\_320362993](https://www.researchgate.net/figure/LVLH-Local-Vertical-Local-Horizontal-frame-definition_fig2_320362993)



---