

M. ÁNGELES GARRIDO VIZUETE

ILUMINACIÓN Y VIGILANCIA DE MUSEOS

LECCIÓN INAUGURAL
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Curso Académico 2011-2012

EDITORIAL UNIVERSIDAD DE SEVILLA



ÍNDICE

BIOGRAFÍA

COLECCIÓN

M. ÁNGELES GARRIDO VIZUETE

Dra. en Ciencias Matemáticas
Titular de Universidad
Departamento de Matemática Aplicada I

ILUMINACIÓN Y VIGILANCIA DE MUSEOS

Lección Inaugural leída en la Apertura
del Curso Académico 2011-2012
en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación.
Universidad de Sevilla

PORTADA

ÍNDICE

BIOGRAFÍA

COLECCIÓN



Sevilla 2015

Colección: Textos Institucionales
Núm.: 53

COMITÉ EDITORIAL:

Antonio Caballos Rufino (Director de la
Editorial Universidad de Sevilla)
Eduardo Ferrer Albelda (Subdirector)

Manuel Espejo y Lerdo de Tejada
Juan José Iglesias Rodríguez
Juan Jiménez-Castellanos Ballesteros
Isabel López Calderón
Juan Montero Delgado
Lourdes Munduate Jaca
Jaime Navarro Casas
M^a del Pópulo Pablo-Romero Gil-Delgado
Adoración Rueda Rueda
Rosario Villegas Sánchez

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de la Editorial Universidad de Sevilla.

Edición digital de la primera edición impresa de 2011

© EDITORIAL UNIVERSIDAD DE SEVILLA 2015
C/ Porvenir, 27 - 41013 Sevilla
Tfnos.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: eus4@us.es
Web: <http://www.editorial.us.es>

© M. ÁNGELES GARRIDO VIZUETE 2015

ISBNe: 978-84-472-1671-0
Edición digital: Dosgraphic, s. L. <www.dosgraphic.es>

Señor Rector Magnífico de la Universidad de Sevilla,

*Señor Director de la Escuela Técnica Superior
de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Sevilla,*

*Señor Presidente del Consejo General
de la Arquitectura Técnica de España,*

*Señor Presidente del Consejo Andaluz
de Colegios Oficiales de Aparejadores, Arquitectos Técnicos
e Ingenieros de Edificación,*

Autoridades Académicas,

Profesores,

Personal de Administración y Servicios,

Alumnos,

Señoras y Señores

PORTADA

ÍNDICE

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más duraderos que los de estos últimos, es debido a que están hechos de ideas. Los modelos del matemático, como los del pintor o los del poeta deben ser hermosos. La belleza es la primera prueba; no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas.

A Mathematician's Apology, G.H. Hardy (1877-1947)¹

Matemáticas. Esta ciencia tan amada por unos y tan odiada por otros. No me he fijado como objetivo hacer de esta lección una apología sobre las Matemáticas; cada uno de nosotros, con nuestra experiencia, fabricaremos nuestra propia apología de esta gran ciencia.

Cuando me propusieron la autoría de esta lección inaugural para el curso académico 2011-12 en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, no lo dudé, tenía claro el tema que quería compartir: *La Galería de Arte*. Y ustedes se preguntarán, ¿qué tienen que ver los museos con las matemáticas?

Pues tendremos que esperar al segundo capítulo de este trabajo para responder a esta pregunta, pero como siempre, hay

¹ G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Londres, 1940.

que empezar por una correcta definición: ¿qué son las matemáticas?, ¿qué estudian las matemáticas? La A.M.S. (*American Mathematical Society*) realiza una clasificación distinguiendo más de 5.000 ramas en esta ciencia, ramas que se han ido consolidando con las investigaciones realizadas a lo largo del tiempo. Para el lector más interesado y como obras generales, podemos hacer referencia a la *Enciclopedia de las Matemáticas*² o a las controvertidas obras de Nicolás Bourbaki, *Elementos de Matemáticas* y *Elementos de Historia de las Matemáticas*³.

En el contexto en el que nos encontramos, la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, nuestros alumnos estudian, en el marco de asignaturas obligatorias, materias como álgebra lineal, geometría analítica, cálculo diferencial e integral, o estadística. Ahora, en la titulación de Grado podemos encontrar una asignatura optativa sobre optimización continua. Y si leemos un poquito sobre el contenido de los diversos Másteres que oferta la escuela, podemos encontrar lecciones sobre esas otras ramas de las matemáticas, hasta ahora, menos conocidas en nuestro ámbito de trabajo y estudio.

Entonces, dedicamos el primer capítulo de esta lección a presentaros dos disciplinas como son la teoría de grafos y la geometría computacional, mediante sendas situaciones de aplicación en nuestro ámbito.

El segundo y último capítulo es el que da nombre a este trabajo y contiene la resolución de un problema básico de vigilancia

² VV.AA., *Enciclopedia de las Matemáticas*, Mir/Rubiños-1860, 1993.

³ N. Bourbaki, *Elements of Mathematics*, Springer, 1987-2008; N. Bourbaki, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, 1976.

o iluminación, haciendo uso de herramientas y resultados proporcionados tanto por la teoría de grafos, como por la geometría computacional. Y, ¿saben ustedes por qué tenía tan claro que quería compartir *La Galería de Arte*? Pues porque con este tema me inicié⁴ en mi andadura investigadora en la Universidad de Sevilla, estuvo presente en aquella oposición que realicé a Titular de Universidad y hoy en día forma parte de mi docencia.

Sin más preámbulo, entramos en materia. Espero que les “enganche” la lectura.

PORTADA

ÍNDICE

⁴ M.A. Garrido, *El problema de la galería de arte*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Sevilla, 1995; J.C. Dana, M.A. Garrido y A. Márquez, “Visibilidad con obstáculos en el cilindro”, *VI Encuentros de Geometría Computacional*, Barcelona, 1995.

UN ACERCAMIENTO A ESAS “OTRAS” MATEMÁTICAS

He dudado sobre cómo introducir este capítulo, si anteponer en la frase los procesos prácticos diseño en planta y modelado de terrenos, o por el contrario, comenzar con las disciplinas teoría de grafos y geometría computacional. He llegado a la conclusión de que, en este caso, aunque no siempre, el orden de los factores no altera el producto.

Este acercamiento comienza con la teoría de grafos, cuyo origen situaremos en la historia y plasmaremos cómo se modelarían mediante un grafo las especificaciones de la distribución de una posible vivienda. Mostraremos un diseño en planta rectangular acorde con la vivienda considerada pero sin incluir los detalles del proceso de obtención.

En segundo lugar, lo cual no tiene nada que ver con la importancia entre la teoría de grafos y la geometría computacional, abordamos el tema del modelado digital de terrenos y las herramientas que ésta proporciona para ello.

DISEÑO EN PLANTA Y TEORÍA DE GRAFOS

Grafos. Debemos remontarnos al siglo XVIII y transportarnos a la ciudad de Königsberg (Prusia Oriental) para conocer

PORTADA

ÍNDICE

cómo surgió el germen de la estructura que hoy conocemos como grafo o gráfica. Esta ciudad se encontraba dividida en cuatro regiones por el río Pregel, siendo necesario cruzar alguno de sus siete puentes para ir de unas zonas a otras. Este hecho geográfico llevó a sus habitantes a plantearse un entretenido rompecabezas, conocido como el problema de los puentes de Königsberg y que consistía en encontrar un camino que, comenzando en un punto cualquiera de la ciudad, recorriera una única vez cada puente y volviera al punto de partida. En la figura 1 (izquierda) se muestra un mapa de la ciudad en el que se resaltan en celeste el recorrido del río y en verde sus puentes.

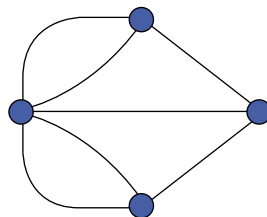


Figura 1. Mapa de la ciudad de Königsberg (izquierda) y grafo que modeliza la división de la ciudad por el río Pregel en cuatro regiones conectadas por siete puentes (derecha). Fuente: Wikipedia (problema de los puentes de Königsberg).

Entonces, pensemos un poco, ¿era posible realizar tal recorrido por Königsberg?

En 1736, L. Euler (1707-1782) dio la solución⁵, modelizando las relaciones entre las regiones y los puentes mediante el grafo mostrado en la figura 1 (derecha). Nosotros reservamos

⁵ L. Euler, “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8 (1736), 128-140.

la respuesta para el final de la sección y así poder pensar un poquito más (ver llamada ⁱ en la página 18).

Desde entonces, la disciplina actualmente conocida como teoría de grafos ha proporcionado modelos y ha servido de herramienta en la resolución de problemas surgidos en áreas muy diversas: arquitectura, organización, programación y control de obras, ingeniería (eléctrica, industrial, civil...), física, química, biología, ciencias sociales, economía, medioambiente, ciencias de la computación...

En todos los casos, el problema en cuestión presenta la cualidad de poder ser representado mediante un esquema gráfico (grafo o gráfica) formado por elementos (vértices, nodos, nudos, o puntos del grafo) y relaciones entre ellos (aristas o ejes del grafo); y, expresado de manera muy general, podemos decir que el estudio de las propiedades del grafo de representación conduce a la resolución del problema. Para que el lector atraído por el tema pueda leer más y conocer los detalles de la teoría de grafos y sus múltiples aplicaciones, citamos algunos textos⁶ relevantes.

Entonces, como no podía ser de otra forma, nos centramos en nuestro contexto de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, y nos planteamos la siguiente cuestión: ¿cómo podemos resolver el problema del diseño o distribución en planta mediante la teoría de grafos?

⁶ R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, 2010; L.R. Foulds, *Graph theory applications*, Springer-Verlag, 1992; J.L. Gross y J. Yellen, *Graph theory and its applications*, Chapman & Hall/CRC, 2006; H. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.

Consideramos una vivienda con las siguientes estancias:

- Distribuidor (denotado por d).
- Cocina (denotada por cc).
- Baño (denotado por b).
- Dos dormitorios (denotamos por d1 y d2).
- Comedor (denotado por cm).
- Trastero (denotado por t).

Los accesos necesarios entre las estancias son los siguientes:

- El distribuidor debe estar comunicado con el resto de las estancias, excepto con el trastero.
- La cocina debe ser accesible desde el comedor y el trastero.
- Ambos dormitorios deben estar comunicados con el baño.

Por otro lado, se desea que el comedor y la cocina estén orientados al norte, el trastero al este, el baño al sur y un dormitorio a cada punto cardinal este y oeste.

Entonces, ¿es posible distribuir en una planta rectangular la vivienda anterior con las especificaciones dadas? Y en caso afirmativo, ¿cómo se podría obtener un diseño factible de la planta? Para responder a estas cuestiones, se requieren resultados y herramientas de diferentes temáticas dentro de la teoría de grafos, como son la representación, la conexión o la planaridad de grafos.

En la figura 2 se muestra el grafo que modeliza la planta a diseñar y un posible diseño rectangular de ella. Para las personas

interesadas en los detalles, remitimos al texto de Moreno *et al.*⁷ en el que se desarrolla el proceso para una vivienda de dos plantas.

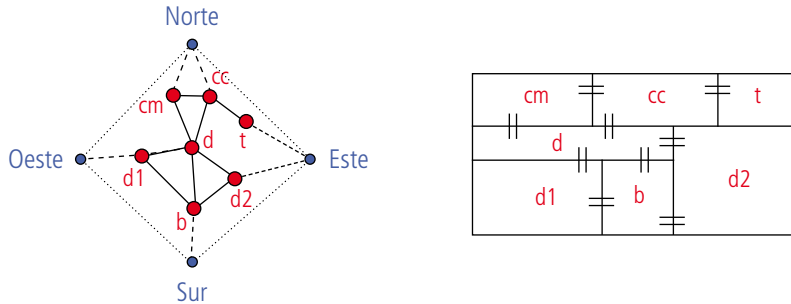


Figura 2. Grafo que modeliza la planta a diseñar (izquierda) y una posible distribución de las estancias cumpliendo las especificaciones dadas (derecha).

Debemos poner de manifiesto que el modelo expuesto es el más simple en el proceso del diseño en planta; el siguiente paso natural sería estudiar las dimensiones factibles de cada estancia en relación con el área de la parcela disponible para la construcción de la vivienda.

Como último dato sobre el tema que nos ocupa en esta sección, citamos algunas publicaciones científicas actuales⁸, en las

⁷ J. Moreno *et al.*, *Matemáticas para la edificación y otras ingenierías*, Paraninfo, 2011.

⁸ R. Flack y B. Ross, “Evolution of Architectural Floor Plans”, Applications of Evolutionary Computation, *Lectures Notes in Computer Science*, 6625 (2011), 313-322; S.S.Y. Wong y K.C.C. Chan, “EvoArch: An evolutionary algorithm for architectural layout design”, *Computer-Aided Design*, 41 (9) (2009), 649-667.

que se tienen en cuenta restricciones a imponer en la distribución en planta y que dan lugar a diferentes y complejos problemas de optimización.

No podemos concluir este apartado sin mencionar otra de las más útiles y conocidas aplicaciones de la teoría de grafos en el campo de la edificación, como es el método P.E.R.T. (*Program Evaluation and Review Technique*) para la administración y gestión de las diferentes tareas que intervienen en un proceso en general y en los relacionados con la construcción, en particular.

MODELADO DE TERRENOS Y GEOMETRÍA COMPUTACIONAL

Triángulos. Ya en el Paleolítico Inferior se utilizaban puntas de lanza con forma triangular, y no podemos dejar de mencionar el destacado papel que juega esta forma geométrica en la arquitectura de las dinastías del Antiguo Egipto, llevada a su mayor expresión mediante las conocidas pirámides.

Hoy en día, en el siglo XXI, nos encontramos sumergidos en un proceso de digitalización, fruto del avance científico y tecnológico de siglos anteriores. De entre todos los recursos y aplicaciones desarrolladas nos centramos en los sistemas de información geográfica, y en particular, como proceso cartográfico necesario para su diseño, en la obtención de modelos digitales de terrenos o D.T.M. (*Digital Terrain Model*).

ⁱ Pues no, no era posible tal recorrido por Königsberg. Para que lo fuera, cada región tendría que ser accesible a través de un número par de puentes.

Como primer paso necesario en el diseño del modelo, se realiza un levantamiento taquimétrico para obtener las coordenadas tridimensionales de puntos elegidos sobre el terreno. A partir de estos valores numéricos se construye un modelo matemático adecuado que refleje las características topográficas del terreno y que permita estimaciones de cotas para nuevos puntos sin necesidad de realizar nuevas mediciones.

Y nos preguntaremos: ¿qué relación hay entre los triángulos y el modelado digital de terreno? Pues mucha: una de las configuraciones geométricas más utilizadas para este proceso de modelado son las redes irregulares trianguladas o T.I.N. (*Triangulated Irregular Network*).

Los elementos básicos del modelo son triángulos adyacentes entre sí cuyos vértices coinciden con los puntos proporcionados por el levantamiento taquimétrico. Es decir, de éstos, se considera su proyección en el plano $z = 0$ y en él se calcula una triangulación del conjunto o nube de puntos para, posteriormente, elevar dicha triangulación según las cotas asociadas a los puntos bidimensionales y obtener, así, una superficie poliédrica como modelo matemático continuo que constituye una representación tridimensional de la superficie topográfica real (ver figura 3).

Entonces, acabamos de introducir, aplicado al modelado de terrenos, la noción de triangulación de puntos, objetos estudiados por el área de las matemáticas conocida como geometría computacional. Podemos decir que la geometría computacional se ocupa del diseño y análisis de algoritmos, métodos eficientes de resolución, para resolver problemas de índole geométrica.

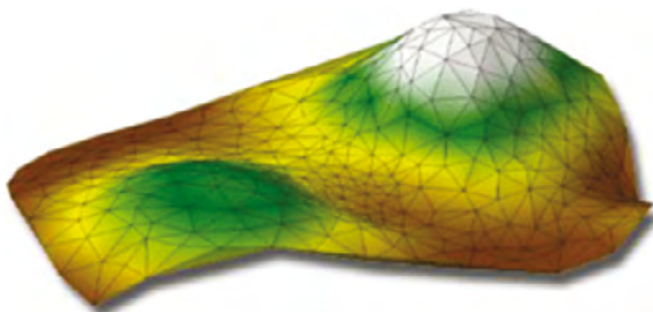


Figura 3. Ejemplo de una red irregular triangulada o T.I.N. generada con el software GMS. Fuente: <http://www.aquaveo.com/html/gms/FEATURES/sitevis.html>.

Dentro de esta disciplina, las triangulaciones tanto de puntos como su variante para polígonos (éstas serán tratadas en el siguiente capítulo) son una de las estructuras más estudiadas, hecho motivado principalmente por las múltiples aplicaciones que presentan: sistemas de información geográfica, reconocimiento y reconstrucción de imágenes, estudios estadísticos, realidad virtual, etcétera.

En el conjunto de las posibles triangulaciones de una nube de puntos en el plano, es obligado mencionar a una que tiene nombre propio y de la que hablaremos a continuación en el marco del modelado de terrenos: la triangulación de Delaunay. Sus propiedades hacen de ella la triangulación más adecuada en las aplicaciones mencionadas anteriormente. En la figura 4 se muestra una nube de puntos triangulada de dos formas diferentes, siendo la triangulación de Delaunay la que aparece a la derecha. Aunque aún no se han expuesto las características de esta notable triangulación, ya podemos preguntarnos, en base a este ejemplo, cuál de las dos nos resulta “mejor”.

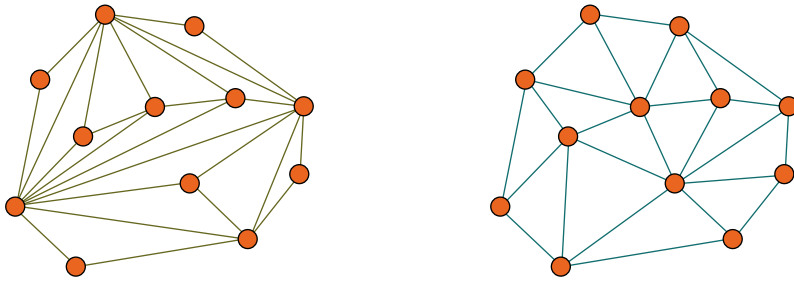


Figura 4. Dos triangulaciones de la misma nube de puntos. La mostrada a la derecha es su triangulación de Delaunay, la cual ha sido generada con el programa de libre distribución GeoGebra.

Antes de volver al problema que nos ocupa sobre la obtención de redes irregulares trianguladas, incluimos algunos textos⁹ generales sobre geometría computacional que le serán de utilidad al interesado lector.

Por tanto, una vez expuesto el procedimiento general para la obtención de redes irregulares trianguladas como modelos digitales de terrenos, hay que plantearse si dicha representación es realmente una aproximación del terreno y, por tanto, es adecuada para estimar las cotas de nuevas localizaciones sobre él. La bondad de esta estimación depende de varios factores. Por una parte, es la topografía la disciplina encargada de elegir de manera apropiada las observaciones de campo para que se refleje la orografía del terreno.

⁹ M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars y O. Schwarzkopf, *Computational geometry: algorithms and applications*, Springer-Verlag, 1987; J. O'Rourke, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, 1994; F.P. Preparata y M.I. Shamos, *Computational geometry: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.

Por otra parte, el ejemplo que presentamos a continuación pone de manifiesto que no puede ser aleatoria la elección de la triangulación para la nube de puntos bidimensionales (en general, un conjunto de puntos admite un número exponencial de triangulaciones), y que dicha elección influye en la calidad del modelo del terreno generado.

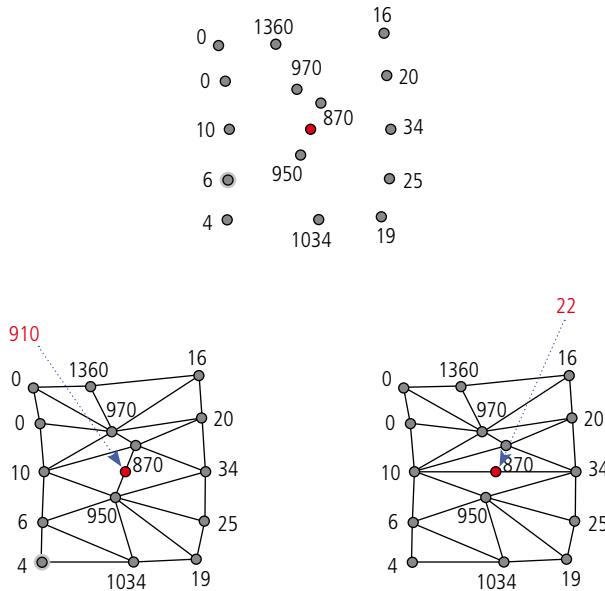


Figura 5. Puntos bidimensionales y sus cotas asociadas. Estimación de la cota para el punto mostrado en rojo (arriba). Dos triangulaciones de la nube de puntos que dan lugar a estimaciones muy diferentes (izquierda y derecha).

En la figura 5 (arriba) se muestra un conjunto de puntos (grises) con sus correspondientes cotas (información recogida mediante el levantamiento taquimétrico) y un punto destacado,

en rojo, cuya cota se necesita estimar. Notemos que los puntos “centrales” presentan una altura mucho más elevada que las “bandas laterales”. Este hecho hace pensar que se trata de una cadena montañosa central y dos valles. Se han considerado dos triangulaciones de la nube de puntos en gris, mostradas en la figura 5 (izquierda y derecha), cuya diferencia radica en la forma de triangular el cuadrilátero formado por los puntos de alturas 10, 870, 34 y 950, considerando una de sus diagonales o la otra. En ambos casos, la localización roja es el punto medio de ambas diagonales, por lo que, realizando una sencilla interpolación lineal obtenemos como estimación de su cota el valor 910 en el caso de la izquierda y 22 en el de la derecha.

Es evidente que una altitud de 22 para el punto rojo no es coherente con la supuesta orografía del terreno y las causas geométricas de esta contradicción radican en que los valores utilizados para dicha estimación, 10 y 34, corresponden a puntos muy alejados entre sí, esto es, a diagonales de gran longitud o, equivalentemente, a ángulos muy pequeños en la triangulación.

Entonces, ¿qué triangulación se debe considerar? Está probado que el T.I.N. que mejor aproxima el terreno es aquel que procede de la triangulación que hace máximo el menor de los ángulos interiores, es decir, que el ángulo más pequeño contenido en la triangulación sea lo más grande posible, o equivalentemente, que el lado de mayor longitud de la triangulación sea lo más corto posible. Y esta propiedad lleva a una única triangulación que es la de Delaunay; podemos volver a la figura 4 y fijarnos en el tamaño de los ángulos interiores de los triángulos en ambos casos y, en consecuencia, en la

regularidad de los triángulos correspondientes a la triangulación de Delaunay.

En los textos citados anteriormente sobre geometría computacional podemos consultar varios algoritmos que calculan la triangulación de Delaunay de una nube de puntos dada. Solamente indicar que la consecución de dicha triangulación se basa en la correcta realización de *flips* o intercambio entre las diagonales de un cuadrilátero, tal y como analizamos en la figura 5. Además, es fácil obtener de *Internet* mucha información sobre el tema, además de gran cantidad de programas que generan dicha triangulación (escribir, por ejemplo, *Delaunay* y *applet*).

Llegados a este punto, hemos puesto de manifiesto la aplicabilidad de la geometría computacional mediante la triangulación de Delaunay en el modelado de terrenos. El modelo así construido permite realizar estimaciones fiables de cotas para otros puntos (sin necesidad de más mediciones), proceso para el cual es necesario determinar en qué triángulo se encuentra el nuevo punto, por ejemplo, mediante el método de las bandas (volvemos a remitir al curioso lector a los textos citados). Posteriormente se realiza una interpolación lineal multiparamétrica teniendo en cuenta las coordenadas tridimensionales de los vértices del triángulo en cuestión y la posición del nuevo punto. A modo de ejemplo, si consideramos el triángulo mostrado en la figura 6, la función lineal a considerar en la interpolación es

$$z = f(x,y) = -6.471 x + 6.981 y + 1123.962,$$

obteniéndose para los nuevos puntos, las cotas indicadas.

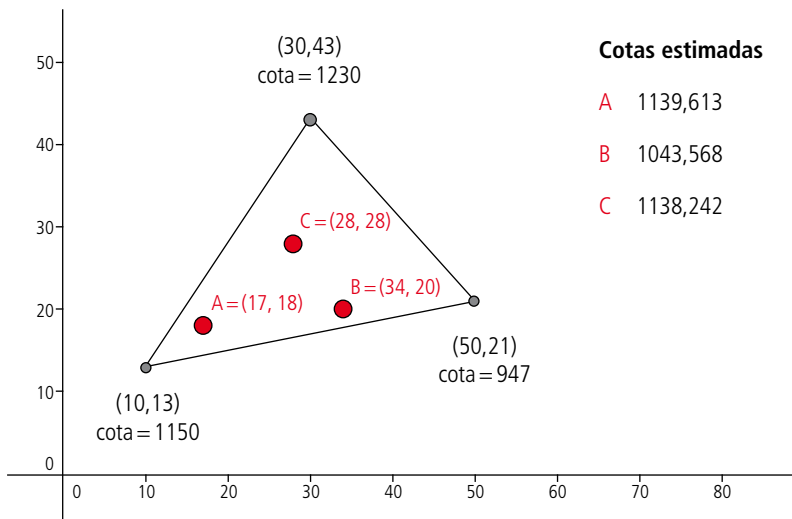


Figura 6. Estimación de cotas para nuevos puntos mediante interpolación lineal multiparamétrica en triángulos del T.I.N.

Concluimos esta sección añadiendo algunas referencias¹⁰ sobre el estudio específico del modelado de terrenos.

¹⁰ M. de Berg y K.T.G. Dobrindt, “On Levels of Detail in Terrains”, *Graphical Models and Image Processing*, 40 (1) (1998), 1-12; Y. Li y L. Yang, “Based on Delaunay Triangulation DEM of Terrain Model”, *Computer and Information Science*, 2 (2) (2009), 137-140; J.E. Priego de los Santos y M.J. Porres de la Haza, “La Triangulación de Delaunay Aplicada a los Modelos Digitales de Terreno”, *X Congreso de Métodos Cuantitativos, Sistemas de Información Geográfica y Teledetección*, 2002, ISBN: 84-87528-47-3.

GALERÍA DE ARTE E ILUMINACIÓN

¿Cuántos guardianes son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el interior de una galería de arte? Esta pregunta fue formulada por Victor Klee a la comunidad científica en 1973 y marcó el origen de lo que hoy en día se conoce como *Problemas de Galería de Arte*, área que se enmarca dentro de la geometría combinatoria y computacional y que hace uso de la teoría de grafos en su estudio y resolución.

La solución a la cuestión planteada por Klee no se hizo esperar, y dos años después V. Chvátal resolvió el problema dando una demostración que distinguía una amplia casuística. El tema atrajo a muchos investigadores y comenzaron a surgir multitud de preguntas que dieron lugar a diversas variantes al problema original. Dejaremos para el último apartado de este trabajo, el hablar un poquito de ellas.

Pero aún resuelto, se siguió estudiando el problema original y en 1978, S. Fisk sorprende dando unas sencillas técnicas de resolución, además de intuitivas y elegantes. En la siguiente sección aplicaremos estas técnicas para resolver el problema sobre la primera planta del museo Guggenheim de Bilbao.

Una formulación alternativa en términos de visibilidad sería determinar el mínimo número de focos que hay que situar en

PORTADA

ÍNDICE

una galería de arte poligonal de n lados, para que queden iluminados todos sus cuadros. En esta línea, podemos mencionar aplicaciones como robótica, planificación de trayectorias, gráficos y arquitectura asistida por ordenador...

Queremos con este capítulo acercarnos a este tipo de cuestiones, mostrando el modelo y las técnicas de resolución para el problema original dadas por S. Fisk y comentando ligeramente algunas de las principales variantes que han ido surgiendo en estos temas.

Para una lectura más en profundidad, el sugestionado lector puede consultar los textos¹¹ de O'Rourke o Urrutia, clásicos en el tema.

PROBLEMA ORIGINAL APLICADO AL MUSEO GUGGENHEIM DE BILBAO

Tradicionalmente las plantas de los edificios han sido mayoritariamente rectangulares o elípticas, pero también han tenido un papel importante en la arquitectura las plantas poligonales. Hoy en día, una extraordinaria muestra de ello la podemos encontrar en el museo Guggenheim de Bilbao, obra del arquitecto Frank O. Gehry, en el que la forma de sus tres plantas es a cuál más original.

Este hecho nos ha llevado a elegirlo como ejemplo para resolver en él el problema original de la galería de arte, considerando diáfano el espacio interior de su primera planta y modelizándola

¹¹ J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, 1987; J. Urrutia, "Art Gallery and Illumination Problems", en *Handbook on Computational Geometry*, Elsevier, 1999.

mediante un polígono (en la siguiente sección trataremos modelos más generales). No daremos definiciones formales, ni abordaremos resultados técnicos detallados, sino que, de manera intuitiva aplicaremos paso a paso la prueba dada por Fisk¹², la cual es de gran belleza y elegancia.

Sin más dilación entramos en materia, haciéndose necesario concretar el concepto de visibilidad entre puntos, ya sea bajo el planteamiento de iluminación o vigilancia. Para ello mostramos en la figura 7 varios puntos sobre la frontera o interior de un polígono y sus correspondientes relaciones de visibilidad.

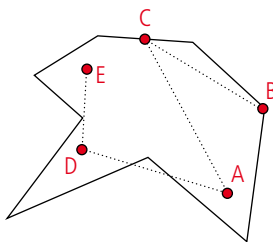


Figura 7. Relaciones de visibilidad entre puntos en polígonos. Los puntos A y D no son visibles entre sí porque el segmento que los une intersecta al exterior del polígono.

A continuación enumeramos los pasos a seguir en el proceso para elegir el número y posición de los guardianes o focos que vigilen o iluminen la planta del museo:

1. Modelización de la planta mediante un polígono de n vértices.

¹² S. Fisk, “A Short Proof of Chvátal’s Watchman Theorem”, *Journal of Combinatorial Theory, serie B*, 24 (1978), 374.

2. Triangulación del polígono mediante la adición de diagonales internas.
3. Coloreado del grafo resultante (los vértices son los del polígono y sus aristas las del polígono junto con las diagonales añadidas) con tres colores.
4. Elección del color menos frecuente, situando los guardianes o focos sobre los vértices así coloreados.

Bien. Aunque seguro que ya tenéis la idea del proceso, lo aplicamos a continuación a la primera planta del museo elegido, de esta forma se asimilará mucho mejor y podremos hacer comentarios para garantizar que el algoritmo es factible.

En la figura 8 se muestra el plano de la primera planta del museo Guggenheim, y a continuación, una posible modelización mediante un polígono de 56 vértices.

Para el paso 2, triangulación del polígono mediante la adición de diagonales internas, necesitamos saber que una diagonal en un polígono es aquel segmento que une dos vértices de él, y que queda completamente contenido en su interior. Las diagonales a considerar no se pueden intersectar entre ellas, en puntos que no sean vértices, y sabemos que este proceso siempre es posible realizarlo para cualquier polígono de n vértices añadiendo $n-3$ diagonales internas.

Y seguro que el término triangulación no os ha dejado indiferente, ya que hemos trabajado con triangulaciones de puntos en el modelado de terrenos, y ahora surge de nuevo para polígonos. La idea, en un caso u otro, es subdividir una estructura en triángulos que sólo compartan vértices o aristas, pero con intersección no nula entre sus interiores.

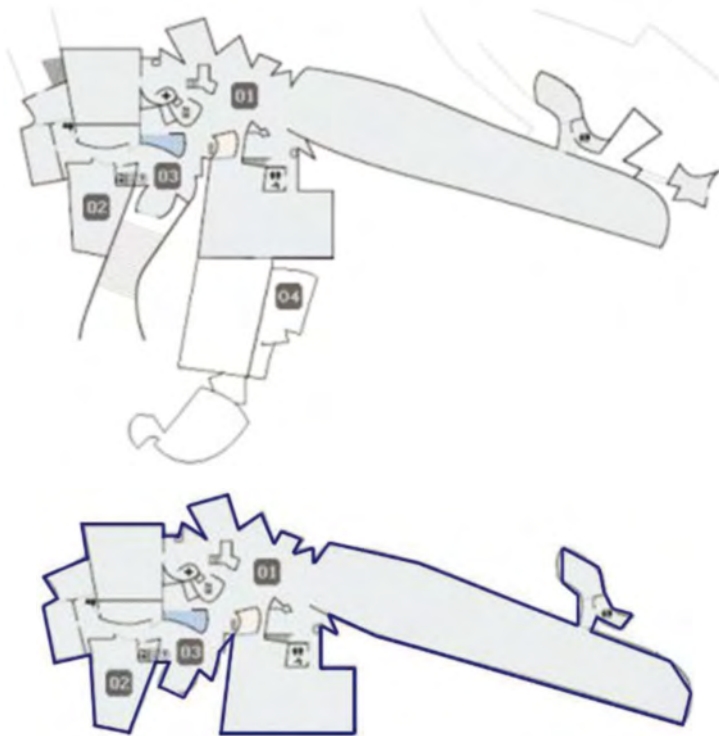


Figura 8. Plano de la primera planta del museo Guggenheim de Bilbao (fuente: <http://www.guggenheim-bilbao.es/>) y su modelización mediante un polígono (paso 1).

Entonces, es posible triangular cualquier polígono de n vértices en $n-2$ triángulos, mediante la adición de $n-3$ diagonales internas (remitimos a los textos referenciados sobre geometría computacional para más detalles). La figura 9 muestra la triangulación del polígono que representa la planta considerada.

Tenemos así un grafo (los vértices son los del polígono y sus aristas las del polígono junto con las diagonales añadidas) en

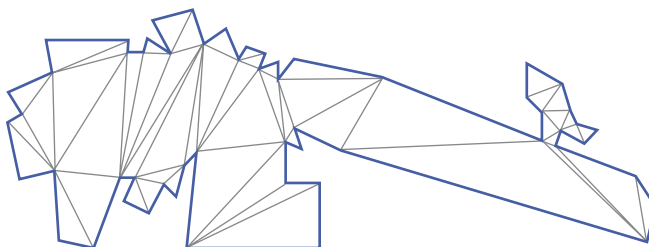


Figura 9. Triangulación del polígono (paso 2).

el que se pueden distinguir triángulos en su estructura (en el lenguaje de la teoría de grafos, todas sus caras son triángulos). La técnica de coloración de un grafo, que procede de la necesidad de colorear mapas, consiste en la asignación de colores a vértices o aristas, teniendo en cuenta que dos elementos que compartan una arista o un vértice, respectivamente, tienen que ser coloreados con diferente color.

Por la estructura de nuestro grafo, “dividido” en triángulos, es fácil ver que con tres colores se pueden colorear sus vértices, sin necesidad de tener que utilizar un cuarto color (ver figura 10).

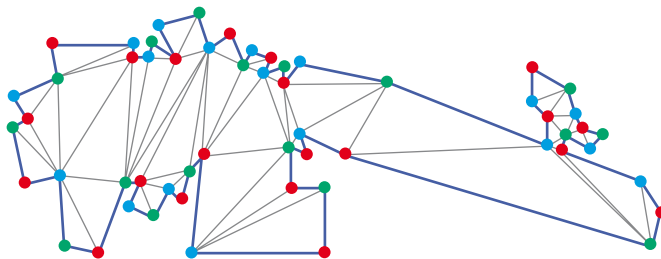


Figura 10. Con tres colores es posible colorear los vértices del grafo de triangulación obtenido (paso 3).

Y ahora basta pensar un poquito: la planta se ha dividido en triángulos, cada triángulo es completamente visible desde cualquiera de sus tres vértices, cada uno de los tres colores utilizados en la coloración está presente en todos y cada uno de los triángulos. Con estos ingredientes, nuestra “receta” nos dice que elijamos el color menos utilizado, el cuál, repetimos, está presente en todos los triángulos, luego si situamos guardianes o focos sobre los vértices así coloreados, está garantizada la cobertura de todo el polígono, luego de toda la planta. ¿Y cuántas localizaciones hemos seleccionado? Pues si el polígono tiene n vértices y hemos utilizado 3 colores, el caso más equitativo supone utilizar cada color $n/3$ veces; si algún color se ha asignado más veces es porque otro se ha asignado menos. Entonces, para optimizar recursos, el proceso nos indica que seleccionemos el color menos utilizado, el cuál, como mucho, aparecerá $n/3$ veces.

Pues entonces, ya estamos en condiciones de enunciar y entender el resultado original conocido como *Teorema de la Galería de Arte*: son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $n/3$ (realmente, el entero más próximo por defecto) guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

De nuevo, como ya comentamos para la triangulación de De-launay, es posible encontrar en *Internet* aplicaciones que realizan el proceso anterior (escribir, por ejemplo, *art gallery* y *applet*).

Como nota importante antes de concluir este apartado, hacer observar que este proceso no nos proporciona el mínimo número de guardianes en todos los casos. Por ejemplo, si el polígono que modeliza la planta del museo es convexo (todos sus ángulos interiores menores que 180 grados), e independientemente del

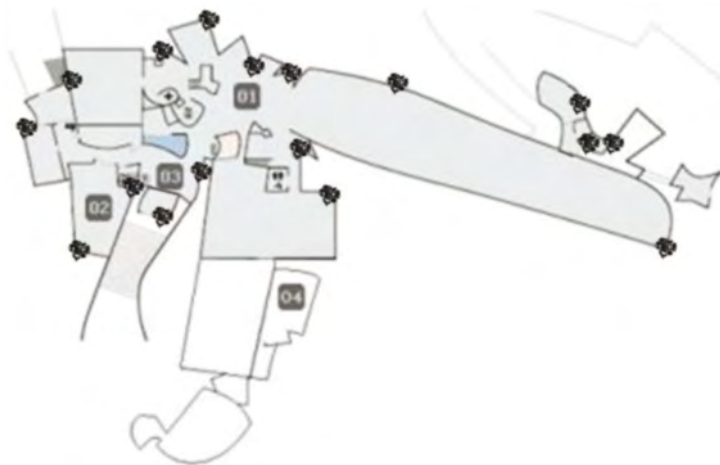


Figura 11. Selección del color menos popular, el color verde y localización de los guardianes o focos sobre los vértices así coloreados, esto es, en 17 ubicaciones (paso 4).

número de lados que tenga, con un guardián se puede cubrir la vigilancia de todo su interior. Entonces, habría que abordar el problema de encontrar el número mínimo en cada caso, pero esta cuestión ya está estudiada y catalogada como “muy difícil”, “topándonos” con la disciplina conocida como *teoría de la completitud*, la cual requiere muchos más conocimientos y se “escapa” de este marco.

MODELOS MÁS GENERALES

Me he propuesto ser muy breve en esta última sección, aunque habría mucho de que hablar sobre todas las posibles variantes que han ido surgiendo en los problemas de galería de arte e iluminación y que han estado determinadas por las diferentes situaciones reales que surgen en la práctica: vigilancia del exterior

del polígono (problema de la fortaleza) o del interior y exterior (problema de la prisión); guardianes móviles o guardianes vigilados; vigilancia o iluminación con reflectores para los que el ángulo de visión está limitado; vigilancia en 3D; o una de las últimas líneas de investigación referentes a la emisión de señal mediante k-modems.

Pero a estas alturas de la lectura, ya llevamos asimilada mucha información, no es fructífero dar más detalles y siempre tenemos la opción de consultar y leer más en los textos referenciados.

Únicamente, permitidme dos apuntes: sobre galería de arte con agujeros y plantas ortogonales.

Volviendo al Guggenheim de Bilbao y ubicada en la “cola” de la primera planta, encontramos la exposición permanente La materia del tiempo, obra de R. Serra, en la que se combinan formas geométricas tradicionales como elipses, espirales o curvas sinuosidales, para conformar estructuras de grandes dimensiones en relación con el cuerpo humano (ver figura 12).

Estas obras de arte suponen obstáculos para la visibilidad o iluminación (ya teníamos claro que, en general, las estancias no son diáfanas), lo que hace necesario adaptar el modelo para considerar lo que se conoce como galería de arte con agujeros.

Por otro lado, dado su notable interés en edificación, debemos mencionar que se ha estudiado y resuelto el caso en el que la planta se puede modelizar mediante un polígono ortogonal (lados verticales y horizontales), obteniéndose mejores resultados que en el caso general. Del mismo modo, son destacables las plantas rectangulares cuyo interior se encuentra dividido en estancias también rectangulares.



Figura 12. *La materia del tiempo*, exposición permanente del Guggenheim de Bilbao (primera planta). Fuente: <http://www.guggenheim-bilbao.es/>.

Aún dejando alguna que otra idea en el “tintero”, hasta aquí lo que deseaba compartir con todos vosotros sobre esas otras matemáticas menos conocidas, y esos problemas de galería de arte, cuya belleza me apasiona.

Mil gracias por vuestra lectura y atención.

PORTADA

ÍNDICE

ÍNDICE

<i>Un acercamiento a esas “otras” matemáticas</i>	13
Diseño en planta y teoría de grafos.....	13
Modelado de terrenos y geometría computacional.....	18
<i>Galería de Arte e Iluminación</i>	27
Problema original aplicado al museo Guggenheim de Bilbao.....	28
Modelos más generales.....	34

PORTADA

BIOGRAFÍA

COLECCIÓN

Para ir a página pulsar en la línea



M. ÁNGELES GARRIDO VIZUETE

M. Ángeles Garrido Vizuete nació en La Puebla de los Infantes (Sevilla) en 1971. Comenzó sus estudios de matemáticas en la Universidad de Sevilla (licenciada en 1994 y doctora en Ciencias Matemáticas en 1997) para continuar con su labor docente e investigadora en ella. Actualmente es Titular de Universidad en el departamento de Matemática Aplicada I. Su docencia ha sido variada entre las distintas materias que ha impartido el departamento en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación en sus diferentes planes de estudio y titulaciones, contando con publicaciones docentes. Su investigación se enmarca en áreas de las matemáticas como la Teoría de Grafos o Geometría Computacional, y más específicamente, en la representación de grafos o etiquetado de mapas. Posee colaboraciones con investigadores de universidades como New Brunswick (Canadá), La Sapienza (Italia) o Karlsruhe (Alemania).

PORTADA

ÍNDICE

COLECCIÓN

LECCIONES INAUGURALES DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN. UNIVERSIDAD DE SEVILLA

A favor del ingenio

Curso Académico 2012-2013

SANTIAGO LLORENS CORRALIZA

Iluminación y vigilancia de museos

Curso Académico 2011-2012

M. ÁNGELES GARRIDO VIZUETE

La curiosidad y el universo

Curso Académico 2010-2011

ADÁN CABELLO QUINTERO

Pasado, presente y futuro del ingeniero de edificación

Curso Académico 2009-2010

ANTONIO RAMÍREZ DE ARELLANO AGUDO

La luz y el color de Sevilla

Curso Académico 2008-2009

MARÍA DOLORES ROBADOR GONZÁLEZ

Symboleion. Símbolos y ritos del construir

Curso Académico 2007-2008

AMPARO GRACIANI GARCÍA

*Catálogo completo de nuestras publicaciones
en la página web*

<<http://www.editorial.us.es>>

PORTADA

ÍNDICE

BIOGRAFÍA

Para ir al libro pulsar en la línea

