

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería de Tecnologías Industriales

Análisis de eficiencia por envoltura de datos del tratamiento de aguas residuales en Alemania

Autor: Ana Gil Jiménez

Tutor: María Rodríguez Palero

**Dpto. de Organización Industrial y Gestión de
Empresas II**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2024



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Análisis de eficiencia por envoltura de datos del tratamiento de aguas residuales en Alemania

Autor:
Ana Gil Jiménez

Tutor:
María Rodríguez Palero
Profesor titular

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de
Empresas II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2024

Proyecto Fin de Carrera: Análisis de eficiencia por envoltura de datos del tratamiento de aguas residuales en Alemania

Autor: Ana Gil Jiménez

Tutor: María Rodríguez Palero

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2024

El Secretario del Tribunal

A mi familia
A mis amigos

Agradecimientos

Nunca imaginé que llegaría el momento de concluir este ciclo en las circunstancias en las que me encuentro, tan lejos de mi tierra y seres queridos. Por eso quiero aprovechar este espacio agradecer a las personas que me han apoyado y motivado a conseguirlo.

A María, brindarme la oportunidad de llevar a cabo este proyecto y guiarme en el proceso.

A mis padres, por su apoyo incondicional y ser ese impulso cuando más lo necesito. Gracias por inculcarme los valores que me hacen ser quién soy, y enseñarme a valorar las cosas importantes de la vida.

A mis hermanos, por inspirarme. Son, sin duda, los mejores amigos que se puede tener.

A Clari, por estar a mi lado desde los tres años. A Lu, por convertirse en uno de mis mayores apoyos. A Miguel y Sofi, por ser casa y familia, sin importar lo lejos que estemos.

A mis abuelos. En especial, mi abuela Lola; tu ratita por fin ha acabado. Te quiero mucho.

De corazón, gracias. Os echo mucho de menos.

Ana Gil Jiménez

Stuttgart, 2024

Resumen

El agua es un recurso fundamental para la vida y el desarrollo sostenible. La gestión eficiente de las aguas residuales es esencial para asegurar la disponibilidad de agua limpia y la protección del medio ambiente. En Alemania, reconocida por su avanzada tecnología y estricta normativa ambiental, la gestión de aguas residuales varía entre los estados federados. Este Trabajo de Fin de Grado se centra en evaluar la eficiencia del tratamiento en las distintas regiones, con el objetivo de identificar las regiones con mejores prácticas y áreas de mejora en el sistema de tratamiento de aguas residuales.

El análisis proporciona una visión detallada de cómo cada estado federado maneja sus recursos y su impacto ambiental, ofreciendo una base sólida para futuras mejoras en las regiones menos eficientes. Al comparar los estados, se pretende fomentar un intercambio de mejores prácticas que conduzca a una mayor eficiencia en todo el país, contribuyendo así a la sostenibilidad y la protección del medio ambiente.

Abstract

Water is a fundamental resource for life and sustainable development. Efficient management of wastewater is essential to ensure the availability of clean water and protect the environment. In Germany, known for its advanced technology and strict environmental regulations, wastewater management varies among the federal states. This Final Degree Project focuses on evaluating the efficiency of treatment in the different regions, with the aim of identifying best practices and areas for improvement in the wastewater treatment system across the country.

The analysis provides a detailed insight into how each federal state manages its resources and its environmental impact, offering a solid basis for future improvements in the less efficient regions. By comparing the states, the project aims to foster an exchange of best practices that will lead to greater efficiency throughout the country, thus contributing to sustainability and environmental protection.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
1 Introducción	1
1.1 <i>Objeto general</i>	1
1.2 <i>Estructura del documento</i>	1
2 Análisis por envoltura de datos	3
2.1 <i>Introducción</i>	3
2.1.1 <i>Conceptos básicos</i>	3
2.1.2 <i>Desarrollo</i>	4
2.2 <i>Modelos DEA</i>	6
2.2.1 <i>Modelos con retornos de escala constante</i>	6
2.2.2 <i>Modelos con retornos de escala variable</i>	8
2.2.3 <i>Otros modelos</i>	10
3 Caso de estudio	13
3.1 <i>Gestión del agua residual</i>	13
3.2 <i>Definición del análisis</i>	15
3.2.1 <i>Selección de las unidades de medida</i>	16
3.2.2 <i>Definición de objetivos</i>	16
3.2.3 <i>Selección de parámetros de entrada y salida</i>	17
3.2.4 <i>Recolección de datos</i>	18
3.2.5 <i>Definición de los modelos a estudiar</i>	25
3.2.6 <i>Aplicación del software</i>	37
4 Análisis de resultados	39
4.1 <i>Modelo económico</i>	39
4.2 <i>Modelo de sostenibilidad</i>	42
4.3 <i>Modelo de aprovechamiento de recursos</i>	49
4.4 <i>Modelo de calidad</i>	54
4.6 <i>Eficiencia global</i>	58
5 Conclusiones	60
Anexo: Resultados del software EMS	61
Referencias	81
Glosario	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Datos reales	18
Tabla 2: Datos reales	19
Tabla 3: Datos reales	20
Tabla 4: Cálculo concentraciones de nitrógeno y fósforo	21
Tabla 5: Clasificación de plantas según su tamaño y la respectiva energía consumida	22
Tabla 6: Análisis previo de los datos	23
Tabla 7: Precio electricidad en función al consumo anual [13]	26
Tabla 8: Cálculo precio energía consumida por residente conectado	27
Tabla 9: Datos definitivos modelo económico	28
Tabla 10: Datos definitivos modelo de sostenibilidad	30
Tabla 11: Análisis estadísticos datos modelo sostenibilidad	31
Tabla 12: Datos definitivos modelo aprovechamiento de recursos	33
Tabla 13: Análisis estadístico datos modelo de aprovechamiento de recursos	34
Tabla 14: Datos definitivos modelo de calidad	36
Tabla 15: Ranking de eficiencia modelo económico	39
Tabla 16: Modelo económico CRS - Benchmarks unidades eficientes	40
Tabla 17: Modelo económico VRS - Benchmarks unidades eficientes	40
Tabla 18: Metas modelo económico CRS	41
Tabla 19: Metas modelo económico VRS	42
Tabla 20: Ranking de eficiencia modelo sostenibilidad	43
Tabla 21: Ranking de eficiencia submodelo sostenibilidad	44
Tabla 22: Modelo sostenibilidad CRS – Benchmarks unidades eficientes	45
Tabla 23: Modelo sostenibilidad VRS – Benchmarks unidades eficientes	45
Tabla 24: Submodelo sostenibilidad CRS – Benchmarks unidades eficientes	45
Tabla 25: Submodelo sostenibilidad VRS – Benchmarks unidades eficientes	46
Tabla 26: Metas modelo sostenibilidad	47
Tabla 27: Metas submodelo sostenibilidad	47
Tabla 28: Ranking de eficiencia modelo aprovechamiento de recursos	50
Tabla 29: Ranking de eficiencia submodelo aprovechamiento de recursos	51
Tabla 30: Modelo aprovechamiento VRS – Benchmark unidades eficientes	51
Tabla 31: Modelo aprovechamiento VRS – Benchmark unidades eficientes	51
Tabla 32: Submodelo aprovechamiento CRS – Benchmark unidades eficientes	52
Tabla 33: Submodelo aprovechamiento VRS - Benchmark unidades eficientes	52
Tabla 34: Metas modelo aprovechamiento de recursos	53

Tabla 35: Metas submodelo aprovechamiento de recursos	53
Tabla 36: Comparación de eficiencias modelos sostenibilidad	54
Tabla 37: Ranking de eficiencia modelo calidad	55
Tabla 38: Modelo calidad CRS – Benchmark unidades eficientes	56
Tabla 39: Modelo calidad CRS – Benchmark unidades eficientes	56
Tabla 40: Metas modelo calidad	57
Tabla 41: Comparación global eficiencias medias	58
Tabla 42: Ranking eficiencias globales	59
Tabla 43: Resultados software EMS modelo económico CRS	62
Tabla 44: Resultados software EMS modelo económico VRS	63
Tabla 45: Resultados software EMS modelo sostenibilidad CRS	65
Tabla 46: Resultados software EMS modelo sostenibilidad VRS	66
Tabla 47: Resultados software EMS submodelo sostenibilidad CRS	68
Tabla 48: Resultados software EMS submodelo sostenibilidad VRS	69
Tabla 49: Resultados software EMS modelo aprovechamiento de recursos CRS	70
Tabla 50: Resultados software EMS modelo aprovechamiento de recursos VRS	72
Tabla 51: Resultados software EMS submodelo aprovechamiento de recursos CRS	73
Tabla 52: Resultados software EMS submodelo aprovechamiento de recursos VRS	75
Tabla 53: Resultados software EMS submodelo mejorado aprovechamiento de recursos CRS	76
Tabla 54: Resultados software EMS submodelo mejorado aprovechamiento de recursos VRS	77
Tabla 55: Resultados software EMS modelo calidad CRS	79
Tabla 56: Resultados software EMS modelo calidad VRS	80

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Representación gráfica DMU	4
Figura 2: Representación gráfica Tecnología CRS	5
Figura 3: Representación gráfica Tecnología VRS	6
Figura 4: Grado de conexión al alcantarillado - Población con tratamiento de aguas residuales en instalaciones públicas de tratamiento de aguas residuales en 2019 [8]	14
Figura 5: Representación etapas del proceso de depuración	14
Figura 6: Esquema planteamiento del análisis	15
Figura 7: Relación entre las emisiones de óxido nitroso y el nitrógeno eliminado [16]	22
Figura 8: Gráfico comparativo de los residentes conectados al sistema de depuración y la capacidad máxima en cada región	24
Figura 9: Esquema modelo económico	25
Figura 10: Esquema modelo sostenibilidad	29
Figura 11: Esquema modelo aprovechamiento de recursos	32
Figura 12: Esquema modelo calidad	35
Figura 13: Representación modelo sostenibilidad	42
Figura 14: Gráfica comparación eficiencia tecnología CRS	48
Figura 15: Gráfica comparación eficiencia tecnología VRS	48
Figura 16: Esquema modelo aprovechamiento de recursos	49
Figura 17: Gráfico comparativo eficiencias en los cuatro modelos	58

1 INTRODUCCIÓN

Este primer capítulo se centra en la presentación y descripción de los objetivos generales de este trabajo y del estudio llevado a cabo para su realización, además de incluir una explicación sobre la estructura del documento.

1.1 Objeto general

El presente Trabajo de Fin de Grado se centra en el análisis de eficiencia del sistema de gestión de aguas residuales en las diferentes zonas de Alemania, específicamente a nivel de estados federados. Este estudio busca identificar cuál de estas regiones se desempeña de manera más eficiente, tanto de forma global como en cada aspecto específico del sistema de gestión. El objeto general de este trabajo es evaluar la eficiencia del sistema de gestión de aguas residuales en los estados federados de Alemania utilizando el Análisis por Envoltura de Datos (DEA). El estudio se aborda desde cuatro perspectivas distintas:

1. Económica: Evaluar el rendimiento del sistema de gestión en términos de costos y recursos financieros.
2. Sostenibilidad: Analizar el impacto ecológico y ambiental del tratamiento de aguas residuales.
3. Aprovechamiento de recursos: Examinar la eficiencia en términos de utilización de recursos disponibles para el tratamiento de aguas.
4. Calidad del agua depurada: Medir la efectividad en la obtención de agua tratada de alta calidad.

Cada uno de estos modelos proporciona una visión integral del rendimiento de los sistemas de gestión de aguas residuales, permitiendo identificar las áreas de mejora en cada estado federado de Alemania. A través de esta evaluación, se pretende comparar los estados entre sí, de modo que esto pueda servir como base para futuras mejoras en las regiones menos eficientes.

1.2 Estructura del documento

El documento se divide principalmente en tres partes. En la primera, se explica la metodología DEA, que se utilizará posteriormente para realizar el estudio de eficiencia. En la segunda parte, se aplicará el caso práctico real utilizando la metodología previamente explicada, desarrollando y justificando cada uno de los modelos diseñados para ello. El análisis se llevará a cabo mediante el software EMS, obteniendo los resultados pertinentes para cada caso. Se analizará la eficiencia de distintas regiones de Alemania en cuanto a la gestión y tratamiento de aguas residuales. Por último, se interpretarán y compararán los resultados obtenidos en el estudio.

2 ANÁLISIS POR ENVOLTURA DE DATOS

La productividad se puede definir de infinitas formas; dependiendo de qué se esté midiendo exactamente. La forma más intuitiva sería calcularlo como la relación entre los beneficios (o resultados) obtenidos y los recursos utilizados, donde los valores más altos de este índice se asociarían con un productividad o rendimiento.

Farrel [1] definió la productividad de la siguiente forma, donde la salida sería el producto o resultado, y la entrada el recurso utilizado para ello:

$$Productividad = \frac{Salida}{Entrada}$$

Esta definición sería bastante útil y acertada cuando la unidad a analizar depende únicamente de una entrada, y produce una sola salida. No obstante, existen bastantes situaciones en las que las unidades que se quieren medir dependen de múltiples factores y/o generan más de un producto.

En tales casos, la toma de decisiones multicriterio se vuelve esencial. Este proceso implica evaluar decisiones del mundo real considerando una variedad de criterios, ya sean cuantitativos o cualitativos, bajo ciertas condiciones.

2.1. Introducción

El Análisis por Envoltura de Datos (*Data Envelopment Analysis*, DEA) es una metodología no paramétrica que se usa principalmente para medir la eficiencia relativa de un conjunto de unidades, en situaciones donde existen más de una entrada y/o salida; por lo que el concepto de eficiencia se define como el coeficiente entre la producción total y los múltiples recursos usados para alcanzar dicha producción. El origen de esta metodología se remonta a los años 70, presentada por Charnes, Cooper, y Rhodes [2]; desarrollando la técnica inicialmente presentada por Farrell [1] en 1957. Por tanto, la productividad quedaría definida de la siguiente forma:

$$Productividad = \frac{\text{Conjunto de salidas}}{\text{Conjunto de entradas}}$$

2.1.1 Conceptos básicos

En este apartado se procede a definir varios conceptos básicos para facilitar así la explicación y posterior aplicación de dicha metodología.

- **DMU (*Decision Making Unit*):** Las unidades de decisión son las entidades o unidades sobre las cuales se está evaluando la eficiencia. En el caso de la metodología DEA, serían las unidades individuales, que deben ser homogéneas, que están siendo comparadas; como por ejemplo organizaciones, empresas, regiones o instituciones.
- **Orientación:** En el análisis por envoltura de datos, la eficiencia se puede medir desde dos perspectivas distintas. La elección de la orientación dependerá del contexto de la evaluación y de los objetivos concretos del estudio.
 - Orientación de entrada: se minimizan las entradas para obtener ciertas salidas/productos concretos.
 - Orientación de salida: se maximizan las salidas dadas unas entradas/recursos concretos.
- **Pesos:** Los pesos se refieren a los coeficientes asignados a las diferentes entradas y salidas de las unidades de decisión. Estos pesos se utilizan para calcular la eficiencia relativa de esa DMU en relación

con las demás. Estos pesos se usarán realmente para ponderar las entradas y salidas en función de su importancia relativa en el proceso de producción de las salidas.

- **Frontera eficiente:** La frontera eficiente en el análisis por envoltura de datos representa el nivel óptimo de rendimiento que pueden alcanzar las unidades evaluadas en el contexto dado. Por tanto, las unidades eficientes se encontrarán en dicha frontera.

2.1.2 Desarrollo

Una vez definidos ciertos conceptos importantes, se procede a explicar de forma más detallada el funcionamiento de la metodología.

En el apartado anterior se ha definido la productividad como el coeficiente entre la suma ponderada de las salidas y la suma ponderada de las entradas. Si se denomina x_{ij} a la entrada o recurso i que utiliza la DMU_j , y y_{kj} a la salida o producto k generado por dicha unidad, se obtiene la siguiente definición de productividad de la unidad j :

$$Productividad_j = \frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{ij}}$$

donde las variables v_{ij} y u_{kj} son los respectivos pesos de cada entrada y salida, n el número total de entradas consideradas y m el número total de salidas. De forma gráfica, es habitual hacer la representación gráfica que puede verse en la siguiente figura (véase Figura 1).



Figura 1: Representación gráfica DMU

Mediante la anterior fórmula se podrá calcular la productividad de una determinada DMU. No obstante, este dato aislado no aporta información comparativa de cómo se están aprovechando los recursos para obtener los respectivos resultados respecto a otras DMU similares. Para ello, la metodología DEA identifica un subconjunto de unidades eficientes consideradas "mejores prácticas", y para las unidades restantes, su nivel de eficiencia se determina mediante la comparación con estas unidades de referencia. Para ello, se definirá la eficiencia de la unidad de decisión j de la siguiente forma:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_{ref}} = \frac{\frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{ij}}}{\frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kref}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{iref}}}$$

siendo el subíndice ref la unidad de referencia que tomaremos para comparar el resto de las unidades con ella. En función a la unidad de referencia que se elija, se define la eficiencia de distintas formas [3]:

- Eficiencia global: La unidad de referencia será aquella de mayor productividad.
- Eficiencia técnica: La unidad de referencia será aquella de mayor productividad de entre todas las unidades de su tamaño, es decir, aquellas con entradas y salidas del mismo orden de magnitud.
- Eficiencia de escala: La eficiencia de escala se define como el cociente entre la eficiencia global y la eficiencia técnica.

En cualquiera de los casos, la eficiencia relativa de toda DMU siempre tendrá un valor inferior o igual a 1, ya que ninguna puede tener una eficiencia mayor al 100%. La DMU con eficiencia igual a uno se le denominará unidad eficiente [1]. Sin embargo, aquella con un valor inferior a la unidad se le denominará ineficiente. Por lo

tanto, según la definición de eficiencia relativa, siempre se comparará con la unidad eficiente (cuya productividad será 1). Por ello, el denominador de dicha ecuación sobre la eficiencia siempre será en estos casos 1, simplificando la ecuación de la siguiente forma:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{ij}}$$

Una vez introducidos estos conceptos, es importante también explicar los retornos de escala constantes y variables.

Los retornos de escala constantes (CRS) implican que, si se aumentan proporcionalmente todas las entradas, los resultados también aumentarán en la misma proporción. Cualquier unidad alcanzar la eficiencia independientemente de su tamaño o escala de operación. Por tanto, la eficiencia calculada en este caso será la eficiencia global definida anteriormente.

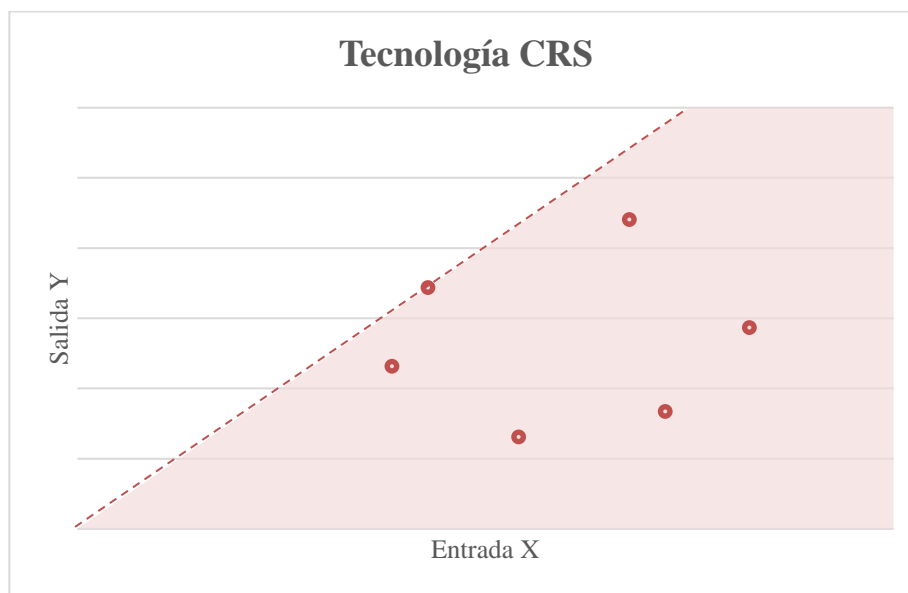


Figura 2: Representación gráfica Tecnología CRS

La anterior gráfica (Figura 2) representa un conjunto de unidades cuya salida Y (eje vertical) depende de una única entrada X (eje horizontal). Los puntos serían las unidades evaluadas, dentro del conjunto (área sombreada) admisible. La línea discontinua indicaría la frontera eficiente. Por ello, en este caso el punto en dicha línea sería el eficiente.

Por otro lado, los retornos de escala variables (VRS) se consideran cuando alguna de las unidades con tamaño distinto a las eficientes no es capaz de alcanzar la productividad de éstas. En este caso, el análisis se realizará mediante la eficiencia técnica, cuya unidad de referencia será aquella de mayor productividad de entre todas las unidades de su tamaño. La representación gráfica del conjunto en este tipo de tecnología se refleja en la siguiente gráfica, donde la zona sombreada representa la región admisible, los puntos las unidades de decisión, y la línea discontinua la frontera eficiente (Ver Figura 3).

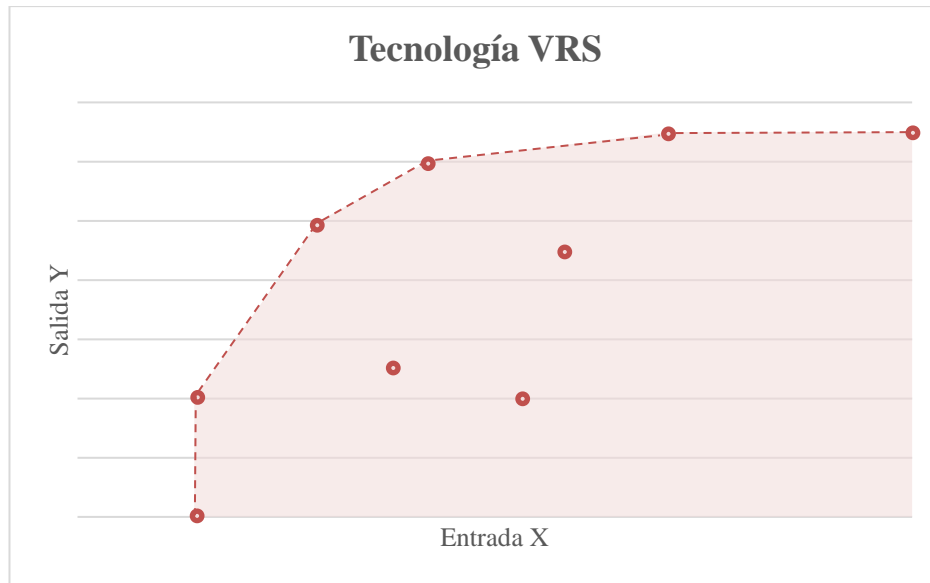


Figura 3: Representación gráfica Tecnología VRS

Por último, también se debe tener en cuenta el número de unidades de decisión y el número de entradas y salidas que se utilicen para realizar un análisis por envoltura de datos, ya que pueden influir en los resultados que se obtienen. Existen distintas reglas para asegurar una discriminación adecuada entre las DMU y evitar problemas de sobreajuste. Golany y Roll [4] sugirieron que se tenía que cumplir: $N^{\circ} DMU \geq 2 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$. Dyson [5] en 2001 recomendó usar la siguiente fórmula para decidir el número de parámetros usados en el problema de optimización: $N^{\circ} DMU \geq 2 \times \text{entradas} \times \text{salidas}$. Por otro lado, en 2007 Cooper [6] propuso la siguiente condición: $N^{\circ} DMU \geq 3 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$.

2.2 Modelos DEA

Dentro del Análisis por Envoltura de Datos, existen varios modelos. En este apartado se explorarán algunos de los principales, cada uno con sus propias características y aplicaciones específicas. Cada uno de estos modelos presenta diferentes enfoques para calcular la eficiencia de las DMU y ofrece perspectivas únicas para la toma de decisiones y la mejora del rendimiento.

2.2.1 Modelos con retornos de escala constante

2.2.1.1 Modelo ratio

Este apartado trata de explicar de forma más detallada el modelo más simple en el análisis por envoltura de datos: el modelo ratio, que sirve como base para el desarrollo de los demás. Se describe matemáticamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \max E_j &= \frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{ij}} \\ \text{s.a. } \frac{\sum_{k=1}^m u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^n v_i x_{ij}} &\leq 1 \quad j = 1, \dots, r \\ u_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ v_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Se trata de un modelo de maximización, en el que se resolverán r (número total de DMU) problemas de optimización, uno por cada unidad a evaluar. Existe una restricción por cada DMU, que no permite que las eficiencias de cada unidad sean mayores que la unidad. Por otro lado, también hay una restricción por cada peso,

que obliga a éstos a ser números positivos.

La función objetivo elige los pesos que optimicen la eficiencia de cada unidad de estudio. Por tanto, cada unidad irá comparando su productividad con la del resto, utilizando en cada comparación los pesos que hagan máxima su eficiencia.

2.2.1.2 Modelo CCR

Este nuevo modelo fue inicialmente propuesto por Charnes, Cooper, y Rhodes [2] en 1978. El modelo ratio es un modelo fraccional que puede ser transformado añadiendo una nueva restricción a un modelo lineal equivalente, obteniendo así el modelo CCR. Para ello, se sustituyen los cocientes que aparecen en el modelo por expresiones lineales. Sin embargo, como se ha explicado en apartados anteriores, los modelos se pueden enfocar de dos formas distintas: con orientación de entrada y con orientación de salida.

- **CCR input-oriented**

La restricción que se añade en este caso para poder eliminar el cociente es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^n v_i x_{ij} = 1$$

Así, el denominador permanecería constante, y la función a maximizar sería únicamente el numerador.

$$\max E_j = \sum_{k=1}^m u_k y_{kj}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} = 1 \\ & \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, r \\ & u_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

A este modelo se le denomina CCR en el espacio de los multiplicadores, ya que las variables de decisión son en este caso los multiplicadores u y v , es decir, los respectivos pesos.

El programa lineal formulado tiene un problema dual asociado, con el que se obtienen soluciones idénticas al anterior. Éste se suele usar de forma más frecuente al aplicar esta metodología, y se denomina forma envolvente:

$$\min f_0$$

s.a.

$$\begin{aligned} f_0 x_{i0} & \geq \sum_{j=1}^r \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j y_{kj} & \geq y_{k0} \quad k = 1, \dots, m \\ \lambda_j & \geq 0 \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

La interpretación de la formulación matemática expuesta es la siguiente: Para la unidad o , se busca el mínimo f_0 , permitiendo buscar la combinación de pesos (λ_j) de cada unidad, sujeto a una serie de restricciones: para cada

entrada x_{ij} , su combinación con los respectivos pesos no puede exceder la proporción f_0 de la entrada de la unidad o ; para cada salida y_{kj} , su combinación con los respectivos pesos alcanza al menos el valor de la unidad o .

En la formulación envolvente, f_0 es el nivel de eficiencia de la DMU_j , que también puede interpretarse como el factor por el cual los valores de las entradas de la unidad de decisión evaluadas pueden reducirse, manteniendo las salidas en un nivel igual o superior al observado. Esta formulación dual es la más utilizada para benchmarking, ya que permite una identificación directa de pares (que representan las mejores prácticas a seguir) y objetivos a alcanzar para que cada DMU_j bajo evaluación se vuelva eficiente.

- **CCR output-oriented**

El modelo CCR también puede analizarse con una orientación de salida, además de la ya mencionada orientación de entrada. En este caso, el objetivo es maximizar las salidas sin aumentar las entradas, buscando así potenciar al máximo los resultados con los recursos disponibles.

De forma equivalente a modelo CCR input-oriented, la formulación matemática primal del problema (multiplicadores) para la orientación de salida sería la siguiente:

$$\begin{aligned} \min E_j &= \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \\ \text{s.a. } \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} &= 1 \\ \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} - \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} &\geq 0 \quad j = 1, \dots, r \\ u_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ v_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Así, el problema dual equivalente se formularía matemáticamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \max f_0 \\ \text{s.a. } f_0 y_{k0} &\leq \sum_{j=1}^r \lambda_j y_{kj} \quad k = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j x_{ij} &\leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, n \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

La interpretación de la formulación matemática en la orientación de salida es la siguiente: Para la unidad o , se busca maximizar f_0 , permitiendo encontrar la combinación de pesos (λ_j) de cada unidad, sujeto a una serie de restricciones. Para cada salida y_{kj} , su combinación con los respectivos pesos debe alcanzar al menos el valor de la unidad o . Para cada entrada x_{ij} , su combinación con los respectivos pesos no puede exceder la proporción f_0 de la entrada de la unidad o .

En esta formulación, f_0 es el nivel de eficiencia de la DMU_j , que puede interpretarse como el factor por el cual los valores de las salidas de la unidad de decisión evaluada pueden incrementarse, manteniendo las entradas constantes.

2.2.2 Modelos con retornos de escala variable

El modelo anterior CCR supone rendimientos constantes a escala. No obstante, en algunas situaciones este supuesto no se cumple y es necesario utilizar el modelo BCC, que supone rendimientos variables a escala. Este

modelo fue introducido por Banker [7] en 1984.

2.2.2.1 Modelo BCC

- **BCC input-oriented**

De forma equivalente al modelo CCR, se introduce la formulación matemática primal para el modelo asumiendo retornos de escala variable orientado a las salidas:

$$\begin{aligned} \max E_j &= \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} + \omega \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} &= 1 \\ \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} &\leq 0 \quad j = 1, \dots, r \\ u_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ v_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

En términos generales, en el análisis de DEA bajo la suposición de VRS, la orientación de evaluación, ya sea hacia las entradas o las salidas, afecta la forma en que se proyecta la frontera eficiente. Esto significa que las eficiencias resultantes de cada DMU pueden variar dependiendo de su orientación. Sin embargo, es importante destacar que, independientemente de la orientación del modelo, el subconjunto de unidades eficientes es el mismo. Además, la variable de decisión (ω) introducida en este modelo DEA se utilizan para identificar la naturaleza de los rendimientos a escala de la faceta de la frontera. Esto ayuda a determinar si una DMU experimenta rendimientos crecientes, constantes o decrecientes a medida que varía la escala de producción, lo que proporciona información valiosa sobre cómo cambia la producción en relación con los cambios en los recursos y los productos.

La formulación matemática dual equivalente para el modelo BCC orientado a las salidas sería la siguiente:

$$\begin{aligned} \min f_0 \\ \text{s.a. } f_0 x_{i0} &\geq \sum_{j=1}^r \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j y_{kj} &\geq y_{k0} \quad k = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

- **BCC output-oriented**

De manera equivalente al modelo BCC con orientación de entrada, se introduce la variable ω , quedando la formulación matemática primal del modelo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min E_j &= \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} + \omega \\ \text{s.a. } \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} &= 1 \\ \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} - \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} &\geq 0 \quad j = 1, \dots, r \\ u_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ v_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Así, el problema dual equivalente quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \max f_0 \\
 \text{s.a.} & \\
 & f_0 y_{k0} \leq \sum_{j=1}^r \lambda_j y_{kj} \quad k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^r \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, r
 \end{aligned}$$

Como aprecia en los modelos matemáticos expuestos, los modelos BCC y CCR difieren sólo en que sólo el primero, pero no el segundo, incluye la condición de convexidad $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$; $\lambda_j \geq 0$.

2.2.3 Otros modelos

- **Modelo aditivo**

El modelo aditivo es una alternativa al modelo CCR y BCC, que permite un enfoque más flexible en el tratamiento de los datos. Este modelo no requiere distinguir entre orientación de entrada o salida, se combinan ambas orientaciones. En lugar de imponer restricciones específicas sobre la forma de la función de producción, este modelo se basa en una función aditiva que descompone la eficiencia en términos de recursos y resultados.

La formulación matemática del modelo aditivo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \max f_0 = \sum_{k=1}^m u_k + \sum_{i=1}^n v_i \\
 \text{s.a.} & \sum_{k=1}^m u_k y_{kj} \leq \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \quad j = 1, \dots, r \\
 & u_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

donde f_0 representa la eficiencia relativa de la unidad de decisión bajo evaluación y v_i y u_k los pesos asociados a las entradas y salidas respectivamente.

- **Modelo FDH**

El modelo FDH (*Free Disposal Hull*), formulado por Deprins, Simar y Tulkens en 1984, permite una mayor flexibilidad en la forma de la frontera de eficiencia. Lo que hace el FDH es trazar una envolvente convexa alrededor de los datos de entrada y salida de las unidades de medida, de manera que captura las mejores prácticas observadas. Esto significa que cualquier unidad que se encuentre dentro de esta envolvente se considerará eficiente, mientras que aquellas fuera de ella se considerarán ineficientes.

Comparado con otros modelos DEA como el CCR, BCC y aditivo, el FDH presenta una mayor flexibilidad en la forma de la frontera de eficiencia, ya que no asume una forma específica para esta frontera. Mientras que el CCR y el BCC asumen ciertas restricciones sobre los rendimientos y el aditivo descompone la eficiencia en términos de recursos y productos, el FDH simplemente busca ajustarse a los datos de manera óptima, lo que

puede ser útil en situaciones donde la forma de la función de producción no está claramente definida o es desconocida.

3 CASO DE ESTUDIO

La gestión efectiva del agua es un pilar fundamental para la supervivencia y el bienestar de la humanidad. En entornos urbanos y rurales, el agua desempeña un papel crucial en numerosos aspectos de la vida cotidiana, desde el suministro de agua potable hasta la irrigación de cultivos y la producción industrial. Sin embargo, este recurso enfrenta desafíos crecientes debido a diversos factores como el cambio climático, la contaminación y su explotación excesiva. Por lo tanto, la protección y el tratamiento adecuado del agua son esenciales para garantizar su disponibilidad y calidad a largo plazo.

En Alemania, un país altamente industrializado y densamente poblado, la gestión del agua se convierte en un tema de especial relevancia debido a su ubicación geográfica y su economía desarrollada. Con una red de ríos y cuerpos de agua que atraviesan su territorio, Alemania depende en gran medida de la eficiente gestión y conservación de sus recursos hídricos para mantener su calidad de vida y promover el desarrollo sostenible. En este contexto, el abastecimiento de agua y el tratamiento de aguas residuales emergen como áreas críticas de atención y acción.

El suministro de agua y el tratamiento de aguas residuales en Alemania recaen principalmente en manos de los municipios, reflejando una estructura descentralizada en la gestión del agua. Estos municipios tienen la responsabilidad primaria de garantizar la seguridad del suministro de agua y la protección del medio ambiente, en conformidad con las leyes y regulaciones estatales y federales.

A nivel local, los municipios tienen la autoridad para organizar y gestionar el abastecimiento de agua y el tratamiento de aguas residuales en sus respectivas áreas. Esto implica asegurar el cumplimiento de los estándares ambientales y de salud pública, así como recaudar tarifas de los usuarios para financiar estas actividades. Aunque el Gobierno Federal y los Estados federados desempeñan un papel en la legislación y regulación del agua, los municipios son fundamentales debido a su conocimiento directo de las necesidades locales.

En Alemania, debido a la creciente complejidad técnica y los costos asociados a la gestión del agua, han surgido nuevas formas de organización para hacer frente a estos desafíos. Las asociaciones intermunicipales desempeñan un papel crucial en la mejora de la eficiencia y el mantenimiento técnico y económico de los cuerpos de agua, así como en su protección. Sin embargo, la diversidad y descentralización de estas organizaciones pueden dificultar la comprensión de su funcionamiento desde una perspectiva externa. No obstante, esto muestra la capacidad de adaptación y flexibilidad del sistema de gestión del agua en Alemania, aunque también plantea desafíos en términos de coordinación.

3.1 Gestión del agua residual

En Alemania, más del 95 por ciento de la población está conectado al sistema de alcantarillado público, donde sus aguas residuales son tratadas en más de 10.000 plantas depuradoras alrededor del país. Sin embargo, la gestión del tratamiento del agua se realiza de forma descentralizada, por lo que generalmente son los municipios los encargados del tratamiento de aguas residuales.

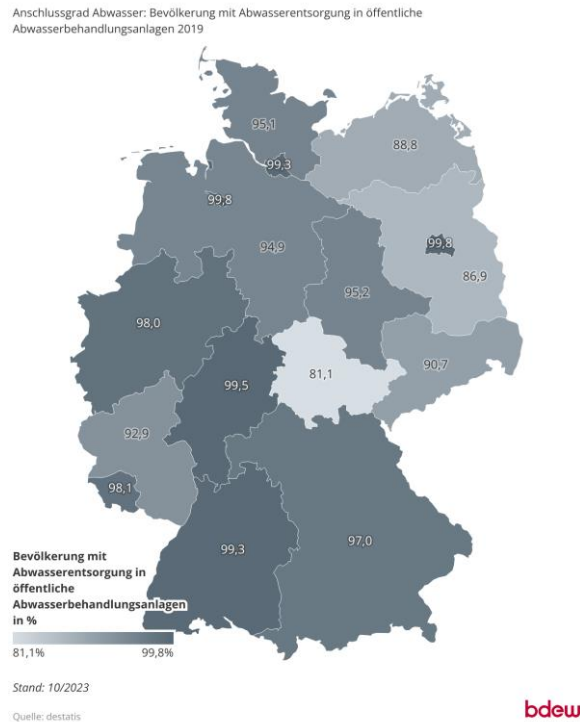


Figura 4: Grado de conexión al alcantarillado - Población con tratamiento de aguas residuales en instalaciones públicas de tratamiento de aguas residuales en 2019 [8]

En la ilustración anterior, se puede apreciar el porcentaje de la población alemana, dividido en sus estados federales, conectados a la red de aguas residuales públicas en Alemania. En el caso de casi todos los habitantes restantes, el tratamiento de las aguas residuales se realiza de manera privada.

- **Proceso tratamiento de aguas residuales**

En primer lugar, la recogida del agua se realiza mediante el sistema de alcantarillado, que cuenta con aproximadamente 540.000 km de longitud [9], donde llegan por un lado las aguas residuales generadas en los hogares, aguas residuales industriales y comerciales que se vierten en alcantarillas públicas, y el agua de lluvia y agua externa que ingresa al sistema de alcantarillado.

Una vez llega el agua a la respectiva planta municipal más cercana, comienza el proceso de depuración y tratamiento del agua.

Las plantas depuradoras cuentan principalmente con tres etapas de depuración [10]:



Figura 5: Representación etapas del proceso de depuración

1. Tratamiento mecánico

Una vez llega el agua a la planta de tratamiento, comienza la etapa denominada tratamiento mecánico. En esta primera etapa, también conocida como limpieza mecánica, se retienen y eliminan los residuos de mayor tamaño, como botellas, latas o ramas, mediante un rastrillo automático.

En segundo lugar, mediante un desarenador, se eliminan sustancias gruesas como grava, arena y restos de material sólido de tamaño similar.

Por último, el agua es retenida en una fosa séptica que permite que los sólidos en suspensión restantes se

depositen en el fondo en forma de lodo. Este lodo crudo se aspira, se espesa y se transporta a un digestor. Las sustancias denominadas ligeras suben a la superficie del agua (como grasas o aceites minerales) y se drenan mediante un recipiente especial.

Estos lodos se transportan a un tanque de digestión, donde mediante bacterias anaeróbicas se produce biogas, que se almacena y se utiliza posteriormente para calefacción. Después de aproximadamente cuatro semanas, los lodos están digeridos, sin olor, y pueden ser deshidratados y reutilizados con distintos objetivos.

Mediante esta etapa de limpieza mecánica se consigue eliminar aproximadamente el 30% de los residuos totales que ingresan en el sistema.

2. Tratamiento biológico

En esta segunda etapa, los componentes orgánicos presentes en las aguas residuales son sometidos a un proceso de degradación. Este proceso implica el uso de microorganismos para descomponer la materia orgánica. Este proceso se realiza típicamente en reactores biológicos aeróbicos, donde se suministra oxígeno para mantener la actividad microbiana. Finalmente, el agua tratada se somete a sedimentación para separar los sólidos biológicos, antes de ser filtrada o tratada secundariamente.

Al finalizar esta etapa del proceso, altamente efectiva para eliminar componentes orgánicos, las aguas están aproximadamente un 90% purificadas.

3. Tratamiento adicional

El 10 por ciento de los compuestos restantes son tratados en esta última etapa biológica adicional, con eliminación selectiva de nutrientes como el nitrógeno y el fósforo. Dado que hoy en día las aguas residuales están también contaminadas con diversas sustancias químicas, se deben usar tratamientos adicionales para su eliminación. Dependiendo del tamaño de la planta depuradora y de las características específicas del agua, además del tratamiento mecánico-biológico de las aguas residuales, son necesarias otras medidas de limpieza.

3.2 Definición del análisis

La siguiente gráfica muestra las etapas sucesivas que se van a llevar a cabo para la correcta realización del análisis propuesto (ver Figura 6).

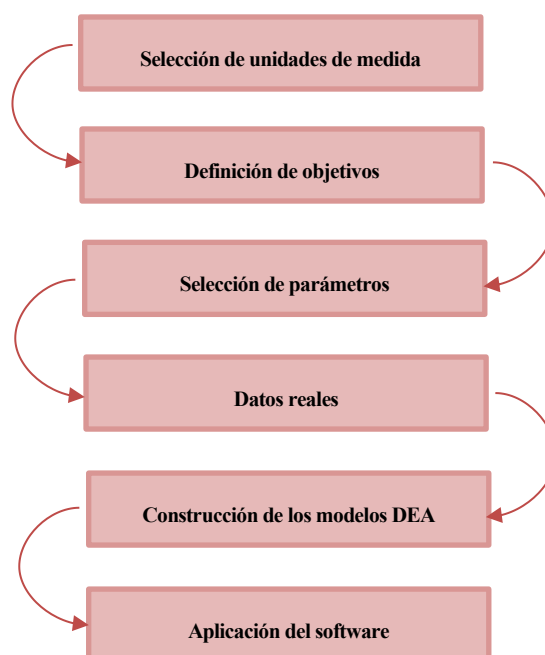


Figura 6: Esquema planteamiento del análisis

En primer lugar, se seleccionarán las unidades de medida a analizar. En segundo lugar, se definirán los objetivos concretos del estudio, para poder realizar un estudio más preciso seleccionando los parámetros de entrada y salida adecuados para ello, que será el tercer paso. Después, se realizará una búsqueda de los datos reales. Posteriormente, se desarrollarán los modelos de forma más detallada, definiendo las distintas entradas y salidas de cada uno, y aplicando en análisis por envoltura de datos con la información recogida en el paso anterior. Por último, se aplicará el software EMS para realizar el análisis de eficiencia.

3.2.1 Selección de las unidades de medida

Las plantas de tratamiento de aguas residuales son sistemas complejos con múltiples componentes operativos, cuyas características dependen de distintos factores en función a su ubicación. En un principio, se contempló la posibilidad de evaluar y comparar la eficiencia de las principales empresas en Alemania dedicadas al tratamiento de aguas. Sin embargo, tras estudiar la situación actual del país y la organización de este en cuanto al tratamiento de aguas residuales, se ha decidido estudiar la eficiencia por regiones. Se tomarán como unidades de toma de decisiones (DMU) los 16 estados federados:

- 1 Baden-Württemberg
- 2 Baviera (Bayern)
- 3 Berlin
- 4 Brandeburgo (Brandenburg)
- 5 Bremen
- 6 Hamburgo (Hamburg)
- 7 Hesse (Hessen)
- 8 Mecklemburgo-Pomerania Occidental (Mecklenburg-Vorpommern)
- 9 Baja Sajonia (Niedersachsen)
- 10 Renania del Norte-Westfalia (Nordrhein-Westfalen)
- 11 Renania-Palatinado (Rheinland-Pfalz)
- 12 Sarre (Saarland)
- 13 Sajonia (Sachsen)
- 14 Sajonia-Anhalt (Sachsen-Anhalt)
- 15 Schleswig-Holstein
- 16 Turingia (Thüringen)

3.2.2 Definición de objetivos

Para poder realizar el siguiente paso y definir los parámetros de entrada y salida, primero habrá que definir los objetivos reales del análisis para poder elegir con mayor precisión estos parámetros y obtener unos resultados acordes a ellos.

Se ha decidido hacer la investigación desde cuatro perspectivas distintas, para obtener así una visión más amplia y completa del rendimiento buscado en las distintas zonas del país. Para ello, se definirán cuatro modelos distintos, cada uno con sus respectivas entradas y salidas.

- **Modelo económico:** Este modelo evaluará la eficiencia de las plantas de tratamiento de aguas residuales en función de los recursos económicos disponibles en cada región. Se medirá la capacidad de las plantas para optimizar la producción de resultados utilizando de manera efectiva los recursos financieros asignados.
- **Modelo de sostenibilidad:** En este modelo se estudiará la eficiencia de las plantas desde una

perspectiva ecológica, considerando distintos indicadores de sostenibilidad. El objetivo será determinar qué regiones están logrando un equilibrio óptimo entre la eficiencia en el tratamiento de aguas residuales y la conservación del medio ambiente.

- **Modelo de aprovechamiento de recursos:** Este modelo se centrará en identificar cuáles regiones están maximizando el aprovechamiento de los recursos disponibles para el tratamiento de aguas residuales. Se evaluará la eficiencia en función de la capacidad de las plantas para utilizar eficazmente los recursos naturales y tecnológicos disponibles en cada región.
- **Modelo de calidad:** El modelo de calidad evaluará la eficiencia de las plantas de tratamiento de aguas residuales mediante el análisis de la pureza del agua depurada con los estándares de calidad establecidos. Se buscará identificar las regiones que están logrando producir resultados de tratamiento de aguas residuales con mayor calidad.

3.2.3 Selección de parámetros de entrada y salida

Una vez decididas las DMU y los objetivos concretos del estudio, se procede a analizar los posibles parámetros de entrada y salida.

- **Tarifa regional:** Precio medio ($\text{€}/\text{m}^3$) de las tarifas destinadas al tratamiento de agua residual cobradas por cada estado federal.
- **Residentes conectados:** Número total de residentes conectados al sistema público de tratamiento de aguas residuales.
- **Agua tratada:** Cantidad anual de agua residual en miles de metros cúbicos (1000 m^3) que ha sido tratada por el total de las respectivas plantas de cada estado federado.
- **Longitud red alcantarillado:** Longitud total (km) de la red de alcantarillado, incluyendo el alcantarillado pluvial y el de aguas residuales, de cada estado federal.
- **Agua disponible:** Cantidad anual total de recursos hídricos disponibles; estos incluyen tanto aguas superficiales como subterráneas, en cada región. Esta será medida en 1000 m^3 anuales.
- **Precipitación:** Precipitación anual, medida en l/m^2 , anual de cada estado federal.
- **Capacidad de depuración:** Este parámetro medirá la capacidad total de depuración del total de las plantas en cada región, medido en número total de habitantes máximo que sería capaz de suministrar al 100% de su capacidad.
- **Lodos reutilizados:** Toneladas de lodo (materia seca) anuales reutilizados tras el proceso de depuración en cada estado federado.
- **Nitrógeno:** Concentración de nitrógeno (componentes orgánicos e inorgánicos) en el agua tratada tras el proceso de depuración (kg/m^3). Las altas concentraciones de nitrógeno en el agua pueden causar problemas como la eutrofización, lo que puede llevar a la proliferación de algas y plantas acuáticas, reduciendo el oxígeno disponible para otras formas de vida acuática. Por consiguiente, se busca reducir la concentración de nitrógeno en el agua residual tratada para evitar estos efectos negativos y garantizar la salud del ecosistema acuático receptor.
- **Fósforo:** Concentración de fósforo en el agua tratada tras el proceso de depuración (kg/m^3). Al igual que el nitrógeno, el fósforo en exceso puede contribuir a la eutrofización. Además, éste puede ser limitante en el crecimiento de algas, por lo que su presencia en el agua puede estimular el crecimiento algal no deseado. Por lo tanto, también se busca controlar la concentración de fósforo en el agua tratada para prevenir la eutrofización y mantener la calidad del agua.
- **Energía consumida:** Este parámetro se referirá a la energía total anual consumida durante el tratamiento completo del agua en el conjunto de plantas residuales de toda la región. Su unidad de medida serán los GWh anuales.
- **Emisiones CH_4 :** Toneladas de metano anuales emitidas de forma directa durante el proceso en cada

región.

- **Emisiones N_2O :** Toneladas de óxido nitroso anuales emitidas de forma directa durante el proceso en cada región.

3.2.4 Recolección de datos

Una vez definidos los parámetros, se procede a recopilar los datos reales referidos al año 2020 de cada uno de los estados federados, tal como se presenta en las siguientes tablas: Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3.

DATOS REALES						
Estado federado			Agua tratada (1000 m ³)	Tarifa regional (€/m ³)	Residentes conectados	Capacidad depuración (habitantes)
1	BW	Baden-Württemberg	1.380.294	1,94	11.103.000	20.649.088
2	BY	Bayern	1.446.187	2,01	13.140.200	25.416.140
3	BE	Berlin	93.097	2,21	3.664.100	1.600.000
4	BB	Brandenburg	246.431	2,76	2.531.100	5.669.558
5	HB	Bremen	60.004	2,42	680.100	1.772.000
6	HH	Hamburg	146.000	2,14	1.852.500	2.900.000
7	HE	Hessen	738.335	2,44	6.293.200	10.140.672
8	MV	Mecklenburg-Vorpommern	82.383	2,65	1.610.800	3.024.391
9	NI	Niedersachsen	549.328	2,12	8.003.400	14.880.096
10	NW	Nordrhein-Westfalen	2.353.384	2,77	17.925.600	33.271.588
11	RP	Rheinland-Pfalz	425.625	1,79	4.098.400	6.996.167
12	SL	Saarland	153.741	2,28	984.000	1.473.550
13	SN	Sachsen	249.357	2,31	4.056.900	5.234.539
14	ST	Sachsen-Anhalt	138.351	2,98	2.180.700	4.812.576
15	SH	Schleswig-Holstein	174.772	2,44	2.910.900	5.188.022
16	TH	Thüringen	152.362	2,2	2.120.200	3.224.938

Tabla 1: Datos reales

DATOS REALES ¹					
Estado federado			Recursos hídricos (1000 m³)	Precipitación (l/m²)	Longitud red (km)
1	BW	Baden-Württemberg	703.080	816	80.595
2	BY	Bayern	907.062	861	108.075
3	BE	Berlin	233.194	511,1	10.929
4	BB	Brandenburgo	140.333	511,4	21.842
5	HB	Bremen	13.192	668,4	3.192
6	HH	Hamburgo	118.579	688,4	5.496
7	HE	Hessen	362.806	656,5	40.194
8	MV	Mecklenburg-Vorpommern	97.650	564,7	16.463
9	NI	Niedersachsen	583.213	688,8	83.936
10	NW	Nordrhein-Westfalen	1.201.883	740,7	100.719
11	RP	Rheinland-Pfalz	263.595	684,1	34.271
12	SL	Saarland	62.402	864,2	8.351
13	SN	Sachsen	288.248	633,4	29.181
14	ST	Sachsen-Anhalt	73.838	499,9	21.272
15	SH	Schleswig-Holstein	184.411	771,0	26.988
16	TH	Thüringen	121.995	658,4	16.513

Tabla 2: Datos reales

La precipitación regional anual se ha obtenido directamente de DWD [11] (Servicio meteorológico alemán). La capacidad de depuración total se ha calculado sumando la capacidad máxima del conjunto de plantas depuradoras de cada uno de los estados federales, datos obtenidos de la Directiva europea sobre aguas residuales

¹ Datos sobre longitud de la red referidos al año 2019; el resto de los datos a 2020. Se tomarán los datos sobre la longitud de la red del año 2019, debido a que los datos del 2020 no están disponibles. Los datos se considerarán válidos para 2020, pues las infraestructuras de las redes de distribución y saneamiento de aguas están completamente establecidas desde hace bastante tiempo en países desarrollados como el caso de Alemania, y no habrá cambios significativos de un año a otro.

municipales [12]. El resto de los datos se ha adquirido directamente de la Oficina Federal de Estadística [13] de Alemania.

DATOS REALES								
Estado federado			Lodos reutilizados (ton)	% N (g/m^3)	% P (g/m^3)	Energía consumida (MWh)	CH ₄ (ton)	N ₂ O
1	BW	Baden-Württemberg	212	9,179	0,348	712.187,66	5.782	-
2	BY	Bayern	279	9,287	0,645	886.014,72	7.117	-
3	BE	Berlin	50,2	11,323	0,353	51.200,00	448	-
4	BB	Brandenburg	61,3	10,632	0,490	191.504,02	1.587	-
5	HB	Bremen	17,9	10,197	0,306	56.740,00	496	-
6	HH	Hamburg	45,1	10,959	0,637	92.800,00	812	-
7	HE	Hessen	142,2	8,232	0,364	355.831,12	2.839	-
8	MV	Mecklenburg-Vorpommern	32	6,761	0,535	106.153,64	847	-
9	NI	Niedersachsen	164,8	5,071	0,499	511.897,40	4.166	-
10	NW	Nordrhein-Westfalen	351,4	5,976	0,349	1.110.161,69	9.316	-
11	RP	Rheinland-Pfalz	79,4	7,464	0,529	249.362,48	1.959	-
12	SL	Saarland	17,8	5,365	0,711	52.191,15	413	-
13	SN	Sachsen	64,8	10,822	0,941	181.146,10	1.466	-
14	ST	Sachsen-Anhalt	48,8	7,312	0,659	164.888,22	1.348	-
15	SH	Schleswig-Holstein	67,4	7,321	0,288	179.056,31	1.453	-
16	TH	Thüringen	32,9	6,112	0,663	113.788,77	903	-

Tabla 3: Datos reales

En esta segunda tabla, los datos sobre los lodos han sido obtenidos directamente de la Oficina Federal de Estadística [13] de Alemania. Por otro lado, las concentraciones de nitrógeno y fósforo del agua residual tras su tratamiento han sido calculadas dividiendo los kg totales de ambos que permanecen en el agua tras su depuración entre el volumen total de agua tratada, como se puede observar en la siguiente tabla (Tabla 4); ambos datos recolectados de la Directiva europea sobre aguas residuales municipales [12].

Estado federal	Volumen agua tratada (m ³)	Nitrógeno (kg)	Fósforo (kg)	% Nitrógeno (g/m ³)	% Fósforo (g/m ³)	
1	BW	1.380.294.435	12.670.404	479.901	9,179	0,348
2	BY	1.446.187.215	13.430.081	933.171	9,287	0,645
3	BE	93.097.400	1.054.120	32.850	11,323	0,353
4	BB	246.431.996	2.620.122	120.723	10,632	0,490
5	HB	60.004.038	611.831	18.388	10,197	0,306
6	HH	146.000.000	1.600.000	93.000	10,959	0,637
7	HE	738.335.495	6.078.161	268.994	8,232	0,364
8	MV	82.383.561	556.987	44.107	6,761	0,535
9	NI	549.328.998	2.785.492	274.190	5,071	0,499
10	NW	2.353.384.483	14.064.956	821.412	5,976	0,349
11	RP	425.625.970	3.176.797	224.973	7,464	0,529
12	SL	153.741.789	824.831	109.321	5,365	0,711
13	SN	249.357.725	2.698.523	234.622	10,822	0,941
14	ST	138.351.645	1.011.685	91.185	7,312	0,659
15	SH	174.772.248	1.279.579	50.283	7,321	0,288
16	TH	152.362.545	931.193	101.028	6,112	0,663

Tabla 4: Cálculo concentraciones de nitrógeno y fósforo

Por otro lado, la energía anual total consumida por el total de las plantas de las regiones se tendrá que calcular. Esta se calculará sumando el total de las energías consumida por cada una de las plantas de cada región. Sin embargo, también habrá que obtener estos valores de energía anual de cada planta. Para ello, se clasificarán las plantas en cinco grupos según su tamaño. El tamaño en este caso se medirá según la capacidad de cada una de las plantas. Una vez clasificadas las plantas según su tamaño, se le asignará a cada una un consumo de energía anual medio según indica la Tabla 5. Esta información deriva de un estudio de eficiencia energética de plantas residuales en Alemania [14].

Tipo	Capacidad (habitante)	Consumo anual de energía (kWh / habitante)
1	< 1.000	75
2	1.000 – 5.000	55
3	5.000 – 10.000	44

4	10.0 – 100.000	35
5	> 100.000	32

Tabla 5: Clasificación de plantas según su tamaño y la respectiva energía consumida

Una vez se tiene la clasificación de las plantas según su capacidad, y el consumo anual por habitante, se calculará con ellos el consumo anual de energía. Para clasificar las respectivas plantas en los distintos grupos, se usarán los datos de la capacidad [12], y para calcular el consumo anual de cada planta el número de residentes conectados [12] a esa planta (ya que el dato de la energía viene dado en kWh por habitante conectado). Se sumarán los consumos de energía anuales de cada planta clasificándolos en sus respectivas regiones y obteniendo así los datos de la Energía total consumida, recogidos en la Tabla 3.

Por último, habrá que obtener los valores de CH_4 y N_2O generados en el proceso de depuración, ya que se tratan de dos poderosos gases de efecto invernadero. Las alcantarillas y las plantas de tratamiento de aguas residuales son fuentes de dióxido de carbono, óxido nitroso y metano [15]. Por un lado, se tienen las emisiones directas, que son aquellas que se emiten directamente en el proceso: metano y óxido nitroso. Por otro lado, se tienen las emisiones indirectas de CO_2 debido a la energía importada para el correcto funcionamiento de la planta.

Las emisiones de CH_4 medias anuales de las plantas depuradoras son de 280 g [15] por habitante conectado a dicha planta. Con este dato se calculará la cantidad total de metano (Ver Tabla 3) emitida por el total de las plantas de cada estado federado.

El óxido nitroso, por otro lado, se genera durante el proceso de nitrificación-desnitrificación en la etapa biológica del tratamiento de aguas residuales. Sin embargo, no se han encontrado datos concretos sobre la emisión de N_2O para el estudio.

No obstante, existe una correlación entre la cantidad de nitrógeno eliminado en la planta de tratamiento de aguas residuales y el óxido nitroso emitido en ese proceso, según la siguiente fórmula:

EMISIONES DE N_2O PROVENIENTES DE LAS AGUAS RESIDUALES EFLUENTES
$Emisiones\ de\ N_2O = N_{EFLUENTE} \cdot EF_{EFLUENTE} \cdot 44 / 28$

Figura 7: Relación entre las emisiones de óxido nitroso y el nitrógeno eliminado [16]

Siendo la variable $N_{efluente}$ el nitrógeno en el efluente eliminado; $EF_{efluente}$ el factor de emisión para las emisiones de N_2O provenientes de la eliminación en aguas servidas.

Por consiguiente, se puede concluir que la cantidad de óxido nitroso emitido guarda una relación directamente proporcional con la cantidad de nitrógeno eliminado durante el proceso de tratamiento de aguas residuales. Esto implica que la emisión de óxido nitroso es inversamente proporcional al porcentaje de nitrógeno presente en el agua una vez tratada, como se indica en la Tabla 4. Por lo tanto, en lugar de utilizar la concentración de N_2O , se utilizará de nuevo el dato de la concentración de nitrógeno al final del proceso.

3.2.4.1 Análisis de los datos

En este apartado se realizará una caracterización de los datos. Este paso preliminar es crucial, ya que proporciona una comprensión de la distribución y variabilidad de las variables de entrada y salida utilizadas. Mediante el cálculo de estadísticas descriptivas básicas como la media, la mediana, la desviación estándar, el valor máximo y el valor mínimo, se pueden identificar patrones y posibles anomalías en los datos que podrían influir en los resultados del análisis de eficiencia.

Para ello, se presenta a continuación una tabla con las estadísticas descriptivas (máximo, mínimo, media, desviación estándar y mediana) de cada una de las variables de entrada y salida descritas anteriormente.

Variable	Max	DMU (max)	Min	DMU (min)	Media	Desviación estándar	Mediana
Agua tratada	2.353.384	10. NW	60.004	5. HB	524.353,19	654.411,45	210.601,5

Tarifa regional	2,98	14. ST	1,79	11. RP	2,341	0,326	2,295
Residentes conectados	17.925.600	10. NW	680.100	3. HB	5.197.193,75	4.946.533,42	3.287.500
Capacidad depuración	33.271.588	10. NW	1.473.550	12. SL	9.140.832,81	9.525.868,18	5.211.280,5
Agua disponible	1.201.883	10. NW	13.192	5. HB	334.717,563	341.511,01	208.802,5
Precipitación	864,2	12. SL	499,9	14. ST	676,12	116,36	676,25
Longitud red	108.075	2. BY	3.192	5. HB	38.001,06	34.959,82	24.415
Lodos reutilizados	351,4	10. NW	17,8	12. SL	104,19	99,48	63,05
% Nitrógeno	11,323	3. BE	5,071	9. NI	8,251	2,122	7,848
% Fósforo	0,941	12. SL	0,288	15. SH	0,520	0,182	0,514
Energía consumida	1.110.161,7	10. NW	51.200	3. BE	313.432,7	323.915,4	180.101,2
Emisiones CH₄	9.316	10. NW	413	12. SL	2.559,5	2.667,25	1.459,5

Tabla 6: Análisis previo de los datos

Las respectivas columnas derechas de los valores máximos y mínimos indican dicha DMU que alcanza esos valores para cada uno de los casos.

A continuación, se analizará de forma más detallada los datos conseguidos en la Tabla 6 para cada una de las variables.

1. **Agua tratada:** El gran rango entre el máximo (2.353.384) y el mínimo (60.004), junto con una alta desviación estándar, indica una gran variabilidad en la cantidad de agua tratada entre las diferentes regiones. La DMU 10. NW (Nordrhein-Westfalen) trata significativamente más agua que otras, lo que podría sugerir una alta eficiencia en el tratamiento de agua en esa región, o simplemente una mayor capacidad instalada.
2. **Tarifa regional:** La variabilidad en las tarifas regionales es relativamente baja, como lo indica una desviación estándar pequeña. Esto sugiere que las tarifas son bastante uniformes entre las regiones, aunque DMU 14. ST (Sachsen-Anhalt) tiene la tarifa más alta, lo cual podría influir en su eficiencia económica.
3. **Residentes conectados:** La alta desviación estándar y el gran rango indican una notable disparidad en el número de residentes conectados entre las regiones. DMU 10. NW se destaca nuevamente, esta vez con el mayor número de residentes conectados, lo que podría indicar una mayor demanda y potencialmente mayor eficiencia en servicios proporcionados.
4. **Capacidad de depuración:** La gran disparidad en la capacidad de depuración, reflejada en la alta desviación estándar, sugiere diferencias significativas en la infraestructura entre regiones, siendo la unidad de decisión 10. NW nuevamente la de mayor capacidad.
5. **Agua disponible:** La alta desviación estándar y la diferencia significativa entre el máximo y el mínimo sugieren una variabilidad considerable en la disponibilidad de agua superficial y subterránea entre los

estados federados.

6. **Precipitación:** La precipitación muestra menos variabilidad comparada con otras variables. La distribución de la precipitación parece ser relativamente homogénea entre las regiones alemanas.
7. **Longitud red:** La longitud total de la red varía considerablemente entre los estados. La DMU 2. BY (Bayern) tiene una red significativamente más extensa, lo que podría indicar una mejor infraestructura o un área más grande cubierta.
8. **Lodos reutilizados:** La reutilización de lodos presenta una alta variabilidad, con DMU 10. NW nuevamente destacándose con el valor más alto, lo que podría reflejar prácticas de gestión de residuos más eficientes, o en este caso, más sostenibles.
9. **% Nitrógeno:** La concentración de nitrógeno en el agua residual tratada presenta una desviación moderada. La DMU 3. BE (Berlin) tiene la concentración más alta, lo cual podría influir en la eficiencia del tratamiento, desde el punto de vista de la calidad de depuración del agua.
10. **% Fósforo:** La concentración de fósforo presenta una variabilidad relativamente baja, por lo que su valor es bastante uniforme en las distintas regiones.
11. **Energía consumida:** La energía consumida muestra una alta variabilidad. DMU 10. NW consume significativamente más energía, lo cual podría estar relacionado con su mayor capacidad y operaciones.
12. **Emisiones CH₄:** Las emisiones de metano varían considerablemente entre las regiones. DMU 10. NW tiene las mayores emisiones, lo que podría indicar ineficiencias en los procesos o una mayor escala de operaciones.

La DMU 10. NW destaca en varias métricas, incluyendo la cantidad de agua tratada, el número de residentes conectados, la capacidad de depuración y el consumo de energía. Su posición como líder en estas variables sugiere que tiene una infraestructura robusta y una alta capacidad operativa. Sin embargo, también muestra altos valores en emisiones de metano, lo que podría indicar áreas de ineficiencia ambiental. Por el contrario, la DMU 5. HB (Bremen) tiene los valores mínimos en varias variables importantes como el agua tratada, el agua disponible y la longitud de la red. Estos bajos valores pueden reflejar limitaciones en recursos e infraestructura, lo que podría impactar negativamente en su eficiencia operativa.

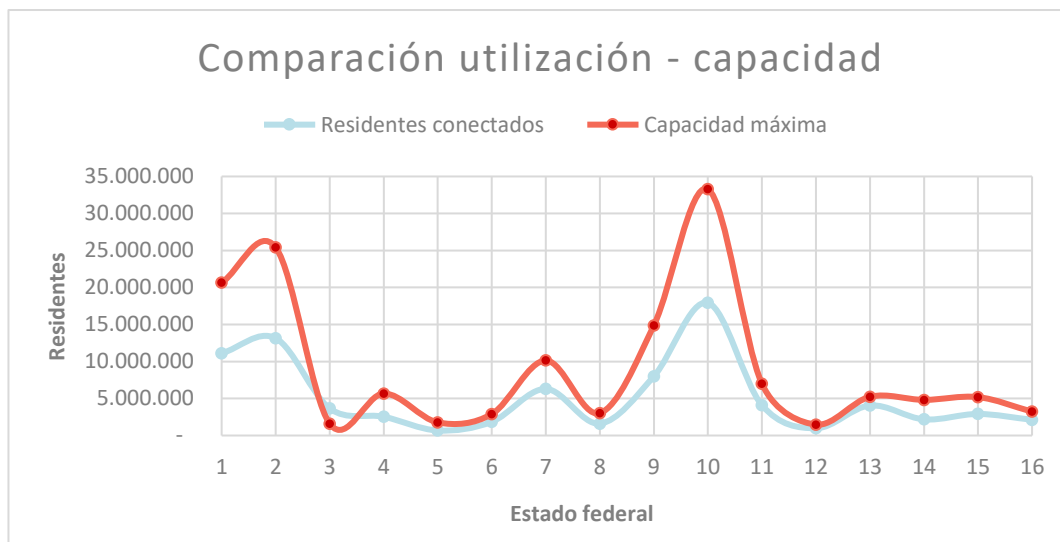


Figura 8: Gráfico comparativo de los residentes conectados al sistema de depuración y la capacidad máxima en cada región

Por otro lado, resulta interesante analizar el gráfico anterior (Figura 8; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), en el que se realiza una comparación entre el número de residentes conectados al sistema de depuración de aguas residuales y la capacidad máxima del sistema (medida en el número de residentes que podría atender al 100% de su capacidad). En el gráfico se pueden observar distintas regiones con una considerable capacidad libre, así como otras en las que los números de residentes conectados y la capacidad máxima son muy similares, lo que sugiere que estas últimas podrían estar utilizando sus recursos de manera más eficiente.

Cabe destacar también la situación particular de la DMU 3 (Berlín). En este caso, la capacidad es menor que el número de residentes conectados. A primera vista, esto podría parecer contradictorio. Sin embargo, como se explicó anteriormente, la gestión de aguas residuales es responsabilidad de los municipios, aunque en algunas ocasiones se crean asociaciones intermunicipales que, según sus necesidades locales, gestionan los recursos de manera conjunta. En este caso, debido a la localización geográfica de la DMU 3 (Berlín), que está rodeada por el estado de Brandenburgo (DMU 4), es probable que este último supla la diferencia.

No obstante, debido a que esta situación representa una excepción y afecta a un número reducido de casos, se ha decidido obviar esta diferencia y continuar el análisis a nivel de estados federales. Este enfoque se justifica por la escasa frecuencia de tales casos en las zonas fronterizas de las regiones.

La alta desviación estándar identificada (Tabla 6) en variables importantes como el volumen de agua depurada, los residentes conectados y capacidad máxima de depuración, indica una gran disparidad entre las regiones. Este hecho subraya la importancia de un análisis DEA bien contextualizado, para poder identificar no solo las DMU más eficientes, sino también las que enfrentan condiciones más desafiantes. Para abordar esta disparidad y obtener una evaluación completa de la eficiencia, se emplearán dos modelos de DEA: el modelo CCR y el modelo BCC. El primero asume retornos a escala constantes, lo que permitirá evaluar la eficiencia pura de las DMU sin considerar el tamaño de estas, permitiendo identificar así las mejores prácticas en términos absolutos. Además, dado que las DMU operan en contextos significativamente diferentes, es crucial también utilizar el modelo BCC, que asume retornos a escala variables, ajustando así la eficiencia en función de la escala de operaciones, lo que permite una comparación más justa entre las DMU con diferentes tamaños y capacidades.

Al aplicar ambos modelos, podremos distinguir entre ineficiencias debidas a la mala gestión y aquellas debidas a una escala subóptima de operaciones. Esto nos proporcionará una visión más completa y precisa de la eficiencia de cada DMU, permitiendo identificar no solo las unidades más eficientes, sino también las que podrían mejorar su desempeño ajustando su escala operativa.

3.2.5 Definición de los modelos a estudiar

3.2.5.1 Modelo económico

Como se ha explicado anteriormente, este primer modelo se enfocará desde el ámbito económico. El objetivo será minimizar los insumos necesarios para alcanzar ciertos niveles de resultados, en este caso, el volumen de agua residual tratada y el número de habitantes conectados. Por ello, será conveniente realizar un análisis input-oriented. Esto permitirá identificar qué regiones están utilizando los insumos de manera más eficiente para lograr los resultados deseados.

El modelo, representado gráficamente en la Figura 9, constará de dos entradas (x_{1j}, x_{2j}) y dos salidas (y_{1j}, y_{2j}), siendo j la unidad examinada, en este caso cada uno de los estados federados, por lo que $j = 1, \dots, 16$.



Figura 9: Esquema modelo económico

x_{1j} : **tarifa** regional de la unidad j ($\text{€}/\text{m}^3$)

x_{2j} : **costes energía** consumida por la unidad j ($\text{€}/\text{residente}^2$)

y_{1j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j (1.000 m^3)

y_{2j} : número total de **residentes** conectados al sistema de aguas residuales en la unidad j

² Residente conectado al sistema de aguas residuales

Los datos sobre las tarifas regionales, el volumen de agua residual tratada y el número de residentes conectados se pueden encontrar en la Tabla 1. Los datos asociados a los costes de energía consumida por cada unidad se deberán de calcular.

Se tienen los datos acerca de la energía total consumida por cada región (*MWh*) y el número de residentes total conectados a la red de aguas residuales. Aún se necesitan los datos sobre el precio de la electricidad en cada región. En Alemania, las industrias, negocios u otras organizaciones, pagan un precio concreto según su consumo anual, según la Tabla 7.

Consumo anual (<i>kWh</i>)	Distribución (€/kWh)	Red (€/kWh)	Impuestos (€/kWh)	Total (€/kWh)
< 1.000 kWh	0,1213	0,1546	0,1849	0,4608
1.000 - 2.500 kWh	0,0742	0,0992	0,1659	0,3393
2.500 - 5.000 kWh	0,0574	0,0864	0,1589	0,3027
5.000 -15.000 kWh	0,0577	0,0715	0,1545	0,2837
> 15.000 kWh	0,0502	0,0579	0,1472	0,1081

Tabla 7: Precio electricidad en función al consumo anual [13]³

El siguiente paso consistirá en comprobar el consumo anual de cada una de las plantas y calcular a partir de ahí los gastos totales de cada una de ellas. Sin embargo, el consumo anual de todas las plantas depuradoras analizadas en este estudio supera los 15.000 kWh anuales, por lo que se tomará como precio de la energía consumida 0,1081 €/kWh (Ver Tabla 7), calculando así el precio por residente y obteniendo los resultados recogidos en la Tabla 8. Por lo tanto, los datos definitivos que se usarán para el modelo económico serán los reflejados en la Tabla 9.

Unidades de decisión	Energía total consumida (<i>kWh</i>)	Residentes conectados	Energía consumida por residente (<i>kWh/res</i>)	Precio energía (€/res)	
1	BW	712.187.660,00	11.103.000	64,14	6,93
2	BY	886.014.720,00	13.140.200	67,42	7,28
3	BE	51.200.000,00	3.664.100	13,97	1,51
4	BB	191.504.020,00	2.531.100	75,66	8,17
5	HB	56.740.000,00	680.100	83,42	9,01
6	HH	92.800.000,00	1.852.500	50,09	5,41
7	HE	355.831.120,00	6.293.200	56,54	6,11
8	MV	106.153.640,00	1.610.800	65,90	7,12
9	NI	511.897.400,00	8.003.400	63,95	6,91
10	NW	1.110.161.690,00	17.925.600	61,93	6,69

³ Datos referidos al año 2020

11	RP	249.362.480,00	4.098.400	60,84	6,57
12	SL	52.191.150,00	984.000	53,03	5,73
13	SN	181.146.100,00	4.056.900	44,65	4,82
14	ST	164.888.220,00	2.180.700	75,61	8,17
15	SH	179.056.310,00	2.910.900	61,51	6,64
16	TH	113.788.770,00	2.120.200	53,66	5,80

Tabla 8: Cálculo precio energía consumida por residente conectado

DATOS DEFINITIVOS MODELO ECONÓMICO					
Unidades de decisión		Entradas		Salidas	
j	DMU $_j$	Tarifas regionales (x_{1j})	Costes energía por residente (x_{2j})	Agua tratada (y_{2j})	Residentes conectados (y_{2j})
1	BW	1,94	6,93	1.380.294	11.103.000
2	BY	2,01	7,28	1.446.187	13.140.200
3	BE	2,21	1,51	93.097	3.664.100
4	BB	2,76	8,17	246.431	2.531.100
5	HB	2,42	9,01	60.004	680.100
6	HH	2,14	5,41	146.000	1.852.500
7	HE	2,44	6,11	738.335	6.293.200
8	MV	2,65	7,12	82.383	1.610.800
9	NI	2,12	6,91	549.328	8.003.400
10	NW	2,77	6,69	2.353.384	17.925.600
11	RP	1,79	6,57	425.625	4.098.400
12	SL	2,28	5,73	153.741	984.000
13	SN	2,31	4,82	249.357	4.056.900
14	ST	2,98	8,17	138.351	2.180.700
15	SH	2,44	6,64	174.772	2.910.900
16	TH	2,2	5,8	152.362	2.120.200

Tabla 9: Datos definitivos modelo económico

Por último, se comprobará si las dimensiones del modelo son adecuadas, según lo visto en el apartado 2.1.2. En este estudio, se usará la ecuación más restrictiva, para mejorar así la precisión de los resultados:

$$N^{\circ} \text{ DMU} \geq 3 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$$

En el caso del modelo económico:

$$16 \geq 3 \times (2 + 2)$$

La restricción se cumple, por lo que se realizará el análisis con las entradas y salidas mencionadas.

3.2.5.2 Modelo sostenibilidad

El modelo de sostenibilidad pretende hacer un diagnóstico del rendimiento desde el punto de vista ecológico. En este caso, un análisis output-oriented será más apropiado. Este enfoque permitirá evaluar qué regiones están

logrando minimizar las emisiones de gases de efecto invernadero y maximizar la reutilización de energía dados los insumos de agua tratada y energía consumida.

Este modelo, representado en la Figura 10, constará de dos entradas (x_{1j}, x_{2j}) y cuatro salidas ($y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}, y_{4j}$).

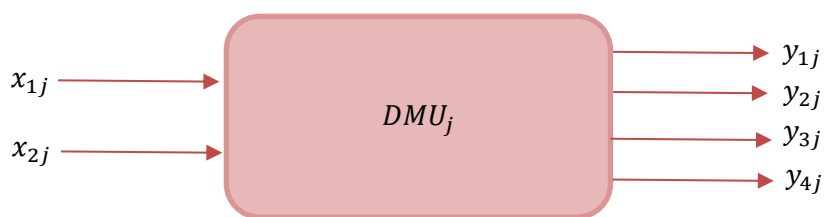


Figura 10: Esquema modelo sostenibilidad

x_{1j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j ($1.000 m^3$)

x_{2j} : número total de **residentes** conectados al sistema de aguas residuales en la unidad j

y_{1j} : emisiones totales (*ton*) de **CH₄** por unidad j ⁴

y_{2j} : concentración de **nitrógeno** (g/m^3) en el agua tras el proceso de depuración^{4 5}

y_{3j} : **lodos** (*ton*) reutilizados por unidad j

y_{4j} : **energía total** (*MWh*) consumida por unidad j ⁴

Los datos necesarios para este modelo se obtendrán de las Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3. Sin embargo, los datos sobre la energía consumida y las emisiones de metano ya están expresados como sus inversas en la siguiente tabla que recoge los datos definitivos del modelo de sostenibilidad.

DATOS DEFINITIVOS MODELO SOSTENIBILIDAD							
Unidades de decisión		Entradas		Salidas			
j	DMU $_j$	Agua tratada (x_{1j})	Residentes conectados (x_{2j})	Emisiones CH ₄ ⁶ (y_{1j})	% Nitrógeno ⁶ (y_{2j})	Lodos reutilizados (y_{3j})	Energía consumida ⁶ (y_{4j})
1	BW	1.380.294	11.103.000	0,000172951	0,109	212	1,40412E-06
2	BY	1.446.187	13.140.200	0,000140509	0,108	279	1,12865E-06

⁴Los datos utilizados para estas salidas serán, en realidad, los inversos de los mencionados. Dado que este modelo persigue maximizar los productos al tener una orientación de salida, resulta necesario minimizar las variables involucradas. Por consiguiente, optaremos por su inversa.

⁵ En un principio se quiso usar como salida las emisiones de N_2O . Sin embargo, al no disponer de dichos datos, concentración de nitrógeno presente en el agua una vez depurada. La cantidad de nitrógeno eliminado es inversamente proporcional a la cantidad de óxido nítrico emitido. Es decir, mientras más nitrógeno se elimine (y menor sea la concentración de nitrógeno), menor será la emisión de N_2O . Por ello, se buscará minimizar la concentración de nitrógeno en el agua.

⁶ Valores inversos de las variables

3	BE	93.097	3.664.100	0,002232143	0,088	50,2	1,95313E-05
4	BB	246.431	2.531.100	0,00063012	0,094	61,3	5,22182E-06
5	HB	60.004	680.100	0,002016129	0,098	17,9	1,76243E-05
6	HH	146.000	1.852.500	0,001231527	0,091	45,1	1,07759E-05
7	HE	738.335	6.293.200	0,000352237	0,121	142,2	2,81032E-06
8	MV	82.383	1.610.800	0,001180638	0,148	32	9,42031E-06
9	NI	549.328	8.003.400	0,000240038	0,197	164,8	1,95352E-06
10	NW	2.353.384	17.925.600	0,000107342	0,167	351,4	9,0077E-07
11	RP	425.625	4.098.400	0,000510465	0,134	79,4	4,01023E-06
12	SL	153.741	984.000	0,002421308	0,186	17,8	1,91603E-05
13	SN	249.357	4.056.900	0,000682128	0,092	64,8	5,52041E-06
14	ST	138.351	2.180.700	0,00074184	0,137	48,8	6,06471E-06
15	SH	174.772	2.910.900	0,000688231	0,137	67,4	5,58484E-06
16	TH	152.362	2.120.200	0,00110742	0,164	32,9	8,78821E-06

Tabla 10: Datos definitivos modelo de sostenibilidad

El siguiente paso será comprobar el número de parámetros utilizados, según la fórmula:

$$N^{\circ} \text{ DMU} \geq 3 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$$

Para el modelo de sostenibilidad:

$$17 \geq 3 \times (2 + 4)$$

Como se observa en la fórmula anterior, la condición no se cumple. Con un número insuficiente de DMU en relación con las entradas y salidas, el modelo puede tener dificultades para distinguir entre unidades eficientes e ineficientes. Muchas DMU pueden aparecer como eficientes simplemente porque no hay suficientes unidades de comparación. Por ello, habrá que o bien aumentar el número de unidades de decisión o reducir el número de entradas y/o salidas incluidas en el modelo.

En este caso, el número de unidades de decisión no se puede aumentar, ya que no disponemos de más regiones que analizar; y dividir algunos de los estados en subregiones no es posible ya que no se dispondría de todos los datos necesarios para éstas.

La otra opción sería eliminar alguna de las entradas o salidas propuestas inicialmente para el modelo de sostenibilidad, solo habría que eliminar una de ellas para que la restricción se cumpla. Las entradas en este caso son el volumen total de agua residual y el número total de residente conectados; y las salidas las emisiones de CH_4 , el nitrógeno total eliminado tras el proceso de depuración, los lodos reutilizados y la energía total consumida.

A simple vista, todas las variables elegidas parecen ser relevantes para estudio de la eficiencia en las distintas regiones desde el punto de vista ambiental. Sin embargo, mediante el análisis estadístico inicial realizado en el apartado 3.2.4.1 sobre los datos que se van a estudiar, se pueden observar diferencias en los datos sobre dichos parámetros, y sobre cómo podrían influir en los resultados del estudio (véase Tabla 11).

Variable	Max	DMU (max)	Min	DMU (min)	Media	Desviación estándar	Mediana
<i>Agua tratada</i>	2.353.384	10. NW	60.004	5. HB	524.353,19	654.411,45	210.601,5
<i>Residentes conectados</i>	17.925.600	10. NW	680.100	3. HB	5.197.193,75	4.946.533,42	3.287.500
<i>Lodos reutilizados</i>	351,4	10. NW	17,8	12. SL	104,19	99,48	63,05
<i>% Nitrógeno</i>	11,323	3. BE	5,071	9. NI	8,251	2,122	7,848
<i>Energía consumida</i>	1.110.161,7	10. NW	51.200	3. BE	313.432,7	323.915,4	180.101,2
<i>Emisiones CH_4</i>	9.316	10. NW	413	12. SL	2.559,5	2.667,25	1.459,5

Tabla 11: Análisis estadísticos datos modelo sostenibilidad

- *Agua tratada*: Esta variable exhibe una amplia variabilidad entre las diferentes regiones, con un rango que va desde 60.004 hasta 2.353.38. La media y la mediana están en el rango de cientos de miles de unidades, con una desviación estándar significativamente alta, lo que indica una dispersión considerable de los datos.
- *Residentes conectados*: Presenta una variabilidad considerable entre las DMU, con valores que oscilan entre 680.100 y 17.925.600. La media y la mediana son del orden de varios millones de unidades, y la desviación estándar es alta en relación con la media, lo que sugiere una dispersión significativa de los datos.
- *Lodos reutilizados*: Aunque la variabilidad no es tan extrema como en las variables anteriores, sigue siendo notable, con valores que van desde 17,8 hasta 351,4 unidades. La media y la mediana son relativamente bajas, con una desviación estándar que representa una proporción considerable de la media, lo que indica una dispersión significativa de los datos.
- *% Nitrógeno*: Muestra una variabilidad moderada, con valores que van desde 5,071 hasta 11,323. La media y la mediana se encuentran en el rango de 7-8%, con una desviación estándar relativamente baja en relación con la media, lo que sugiere una variabilidad más controlada en comparación con otras variables.
- *Energía consumida*: Esta variable presenta una variabilidad considerable entre las DMU, con valores que oscilan entre 51.200 y 1.110.161,7 unidades. La media y la mediana son del orden de cientos de miles de unidades, y la desviación estándar es alta en relación con la media, lo que sugiere una dispersión significativa de los datos.
- *Emisiones de CH_4* : Exhibe una variabilidad considerable entre las diferentes regiones, con valores que oscilan entre 413 y 9.316 unidades. La media y la mediana son del orden de miles de unidades, y la

desviación estándar es alta en relación con la media, lo que indica una dispersión significativa de los datos.

Se propone eliminar una variable con variabilidad baja, ya que podría no proporcionar suficiente información discriminante para distinguir eficazmente entre las diferentes regiones. Dado esto, la variable con la variabilidad más baja es la concentración de nitrógeno en el agua tratada. Aunque es importante para evaluar la sostenibilidad ambiental, su variabilidad relativamente baja en comparación con las otras variables podría indicar que no contribuye significativamente a la capacidad del modelo para distinguir entre las regiones. Por lo tanto, eliminar esta variable podría ayudar a garantizar que el modelo tenga suficiente poder discriminante para identificar la eficiencia relativa de las DMU.

Por esta razón, se eliminará la variable de salida y_{2j} , creando otro modelo que se denominará submodelo de sostenibilidad compuesto por dos entradas (x_{1j}, x_{2j}) y tres salidas (y_{1j}, y_{3j}, y_{4j}). No obstante, se aplicará el análisis a ambos modelos (el modelo de sostenibilidad, compuesto por dos entradas y cuatro salidas, y el submodelo de sostenibilidad propuesto en este apartado) para poder comparar los resultados y observar así si realmente supone una diferencia el cumplimiento de la restricción sobre el número de parámetros a utilizar.

3.2.5.3 Modelo aprovechamiento de recursos

El tercer modelo pretende examinar la eficiencia en función a los recursos disponibles en cada región, abordando distintos aspectos como la disponibilidad de agua (tanto superficial como subterránea) en cada zona, o las infraestructuras de suministro y distribución de agua. En cuanto a la orientación del análisis, en este caso parece más apropiado realizar un enfoque output-oriented, dado que se quiere evaluar cómo las entradas (recursos disponibles) afectan a las salidas (resultados del tratamiento y cobertura del servicio).

Este modelo, representado en la Figura 11, se ha construido incluyendo cinco entradas ($x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}$) y dos salidas (y_{1j}, y_{2j}).

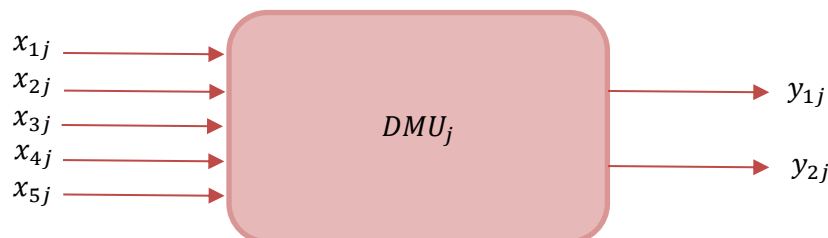


Figura 11: Esquema modelo aprovechamiento de recursos

x_{1j} : **tarifa** regional de la unidad j ($\text{€}/\text{m}^3$)

x_{2j} : **capacidad** máxima de depuración de la unidad j (*residentes*)

x_{3j} : **longitud total de la red** de la unidad j (km)

x_{4j} : disponibilidad total de **aguas subterráneas y superficiales** de la unidad j (1.000 m^3)

x_{5j} : **precipitación** anual de la unidad j (l/m^2)

y_{1j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j (1.000 m^3)

y_{2j} : número total de **residentes** conectados al sistema de aguas residuales en la unidad j

Los datos necesarios para este modelo se obtendrán de la Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3.

DATOS DEFINITIVOS MODELO APROVECHAMIENTO DE RECURSOS								
Unidades de decisión		Entradas					Salidas	
j	DMU $_j$	Tarifa regional (x_{1j})	Capacidad depuración (x_{2j})	Longitud red (x_{3j})	Agua Disponible (x_{4j})	Precipitación (x_{5j})	Agua tratada (y_{1j})	Residentes conectados (y_{2j})
1	BW	1,94	20.649.088	80.595	703.080	816.0	1.380.294	11.103.000
2	BY	2,01	25.416.140	108.075	907.062	861.0	1.446.187	13.140.200
3	BE	2,21	1.600.000	10.929	233.194	511.1	93.097	3.664.100
4	BB	2,76	5.669.558	21.842	140.333	511.4	246.431	2.531.100
5	HB	2,42	1.772.000	3.192	13.192	668.4	60.004	680.100
6	HH	2,14	2.900.000	5.496	118.579	688.4	146.000	1.852.500
7	HE	2,44	10.140.672	40.194	362.806	656.5	738.335	6.293.200
8	MV	2,65	3.024.391	16.463	97.650	564.7	82.383	1.610.800
9	NI	2,12	14.880.096	83.936	583.213	688.8	549.328	8.003.400
10	NW	2,77	33.271.588	100.719	1.201.883	740.7	2.353.384	17.925.600
11	RP	1,79	6.996.167	34.271	263.595	684.1	425.625	4.098.400
12	SL	2,28	1.473.550	8.351	62.402	864.2	153.741	984.000
13	SN	2,31	5.234.539	29.181	288.248	633.4	249.357	4.056.900
14	ST	2,98	4.812.576	21.272	73.838	499.9	138.351	2.180.700
15	SH	2,44	5.188.022	26.988	184.411	771.0	174.772	2.910.900
16	TH	2,2	3.224.938	16.513	121.995	658.4	152.362	2.120.200

Tabla 12: Datos definitivos modelo aprovechamiento de recursos

A continuación, al igual que en los modelos anteriores, se procede a comprobar el número de parámetros utilizados, según la fórmula:

$$\text{N}^\circ \text{DMU} \geq 3 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$$

En el caso del modelo de aprovechamiento de recursos:

$$16 \geq 3 \times (5 + 2)$$

Como se observa en la inequación, al igual que en el modelo de sostenibilidad, la restricción tampoco se cumple. A continuación, se procederá a analizar los diferentes parámetros de entrada y salida según el estudio estadístico realizado en el apartado 3.2.4.1, para determinar cuál es más susceptible a ser eliminada para cumplir así la restricción de la dimensión.

En este caso, las variables de entrada son la tarifa regional, la capacidad máxima de depuración, la longitud total

de la red, la disponibilidad de aguas superficiales y subterráneas y la precipitación en cada región. Las salidas son el volumen total de agua depurada y el número de residentes conectados a la red.

Variable	Max	DMU (max)	Min	DMU (min)	Media	Desviación estándar	Mediana
<i>Agua tratada</i>	2.353.384	10. NW	60.004	5. HB	524.353,19	654.411,45	210.601,5
<i>Tarifa regional</i>	2,98	14. ST	1,79	11. RP	2,341	0,326	2,295
<i>Residentes conectados</i>	17.925.600	10. NW	680.100	3. HB	5.197.193,75	4.946.533,42	3.287.500
<i>Capacidad depuración</i>	33.271.588	10. NW	1.473.550	12. SL	9.140.832,81	9.525.868,18	5.211.280,5
<i>Agua disponible</i>	1.201.883	10. NW	13.192	5. HB	334.717,563	341.511,01	208.802,5
<i>Precipitación</i>	864,2	12. SL	499,9	14. ST	676,12	116,36	676,25
<i>Longitud red</i>	108.075	2. BY	3.192	5. HB	38.001,06	34.959,82	24.415

Tabla 13: Análisis estadístico datos modelo de aprovechamiento de recursos

- *Agua tratada*: Esta variable muestra una amplia variabilidad entre las diferentes regiones, con valores que van desde 60.004 hasta 2.353.384. La media es 524.353,19 y la mediana es 210.601,5, con una desviación estándar de 654.411,45, indicando una dispersión significativa de los datos.
- *Tarifa regional*: La tarifa regional varía entre 1,79 y 2,98, con una media de 2,341 y una mediana de 2,295. La desviación estándar es 0,326, lo que sugiere una variabilidad relativamente baja en comparación con las otras variables.
- *Residentes conectados*: Presenta una variabilidad considerable entre las DMU, con valores que oscilan entre 680.100 y 17.925.600. La media es 5.197.193,75 y la mediana es 3.287.500, con una desviación estándar de 4.946.533,42, sugiriendo una dispersión significativa de los datos.
- *Capacidad de depuración*: Esta variable muestra una variabilidad significativa, con valores que van desde 1.473.550 hasta 33.271.588. La media es 9.140.832,81 y la mediana es 5.211.280,5, con una desviación estándar de 9.525.868,18, indicando una gran dispersión de los datos.
- *Agua disponible*: Presenta una variabilidad considerable entre las DMU, con valores que oscilan entre 13.192 y 1.201.883. La media es 334.717,563 y la mediana es 208.802,5, con una desviación estándar de 341.511,01, lo que sugiere una dispersión significativa de los datos.
- *Precipitación*: Muestra una variabilidad moderada, con valores que van desde 499,9 hasta 864,2. La media es 676,12 y la mediana es 676,25, con una desviación estándar de 116,36, lo que sugiere una variabilidad más controlada en comparación con otras variables.
- *Longitud de la red*: Exhibe una amplia variabilidad entre las diferentes regiones, con valores que oscilan entre 3.192 y 108.075 km. La media es 38.001,06 y la mediana es 24.415, con una desviación estándar de 34.959,82, indicando una dispersión significativa de los datos.

Dado que la tarifa regional presenta la menor variabilidad (desviación estándar de 0,326), podría ser la variable más adecuada para eliminar. Su baja variabilidad sugiere que no contribuye significativamente a la discriminación entre las DMU y, por tanto, podría tener un impacto menor en la evaluación de la eficiencia relativa en el análisis DEA. No obstante, en este caso habría que eliminar una segunda variable para que se cumpla la restricción de la dimensión. Dada la evaluación de los parámetros, la precipitación podría ser la

segunda variable por eliminar. A pesar de su relevancia, su variabilidad moderada en comparación al resto y el hecho de que es menos directamente controlable por las DMU en comparación con otras variables como la capacidad de depuración o el agua tratada, la hace una opción razonable para eliminación.

Por consiguiente, se eliminarán las variables de entrada x_{1j} y x_{5j} inicialmente propuestas, creando otro modelo que se denominará submodelo de aprovechamiento de recursos compuesto por tres entradas (x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}) y dos salidas (y_{1j}, y_{2j}). Aun así, al igual que en el modelo de sostenibilidad, se analizarán ambos modelos (el modelo de aprovechamiento de recursos, compuesto por cinco entradas y dos salidas, y el submodelo de aprovechamiento de recursos) para poder comparar ambos resultados.

3.2.5.4 Modelo calidad

En este último modelo se enfocará la calidad del agua tras su depuración. Para ello se utilizarán parámetros de calidad del agua como la concentración de contaminantes después de su tratamiento, para evaluar así la eficiencia de eliminación de contaminantes en las distintas regiones. En este caso, se realizará el análisis desde un enfoque output-oriented, que permitirá identificar qué regiones están logrando producir agua tratada con concentraciones de contaminantes más bajas y una producción de lodos más eficiente.

El modelo de calidad, representado gráficamente en la Figura 12, está formado por dos entradas (x_{1j}, x_{2j}) y tres salidas (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}).



Figura 12: Esquema modelo calidad

x_{1j} : **tarifa** regional de la unidad j ($\text{€}/\text{m}^3$)

x_{2j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j (1.000 m^3)

y_{1j} : **concentración de nitrógeno**⁷ en el agua tras su depuración en la unidad j (g/m^3)

y_{2j} : **concentración de fósforo**⁷ en el agua tras su depuración en la unidad j (g/m^3)

y_{3j} : **lodos** (ton) reutilizados por unidad j

Los datos necesarios para este modelo se obtendrán nuevamente de la Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3, siendo los datos definitivos usados para el modelo de calidad los recogidos en la Tabla 14.

⁷ Los datos utilizados para estas salidas serán, en realidad, los inversos de los mencionados. Dado que este modelo persigue maximizar los productos al tener una orientación de salida, resulta necesario minimizar las variables involucradas, ya que buscamos minimizar las concentraciones de nitrógeno y fósforo. Por consiguiente, optaremos por su inversa.

DATOS DEFINITIVOS MODELO CALIDAD						
Unidades de decisión		Entradas		Salidas		
j	DMU $_j$	Tarifa regional (x_{1j})	Agua tratada (x_{2j})	Concentración nitrógeno ⁸ (y_{1j})	Concentración fósforo ⁸ (y_{2j})	Lodos reutilizados (y_{3j})
1	BW	1,94	1.380.294	0,109	2,874	212
2	BY	2,01	1.446.187	0,108	1,550	279
3	BE	2,21	93.097	0,088	2,833	50,2
4	BB	2,76	246.431	0,094	2,041	61,3
5	HB	2,42	60.004	0,098	3,268	17,9
6	HH	2,14	146.000	0,091	1,570	45,1
7	HE	2,44	738.335	0,121	2,747	142,2
8	MV	2,65	82.383	0,148	1,869	32
9	NI	2,12	549.328	0,197	2,004	164,8
10	NW	2,77	2.353.384	0,167	2,865	351,4
11	RP	1,79	425.625	0,134	1,890	79,4
12	SL	2,28	153.741	0,186	1,406	17,8
13	SN	2,31	249.357	0,092	1,063	64,8
14	ST	2,98	138.351	0,137	1,517	48,8
15	SH	2,44	174.772	0,137	3,472	67,4
16	TH	2,2	152.362	0,164	1,508	32,9

Tabla 14: Datos definitivos modelo de calidad

Por último, se comprobarán las dimensiones del modelo para el modelo de calidad, volviendo a usar la ecuación más restrictiva:

$$N^{\circ} \text{ DMU} \geq 3 \times (\text{entradas} + \text{salidas})$$

Así pues, según este modelo:

$$16 \geq 3 \times (2 + 3)$$

La restricción se cumple, por lo que se realizará el análisis con las entradas y salidas mencionadas.

⁸ Valores inversos de las variables

3.2.6 Aplicación del software

Una vez expuestos y desarrollados los distintos modelos que se van a llevar a cabo para el caso práctico del estudio, se procede a realizar el análisis. Para el uso del DEA como herramienta de medición de eficiencia, existen distintas alternativas.

En primer lugar, habrá que proporcionarle a la herramienta EMS [17] los datos de entrada y salida. Éste permite introducir datos en MS Excel y en formato de texto. Sin embargo, de cualquiera de las formas, los datos deben ser preparados de una forma específica para que el programa pueda trabajar con ellos. Una vez ajustados los datos al formato aceptado por el programa, se procede a realizar el análisis DEA estudiando el funcionamiento del software.

Se analizarán los cuatro modelos expuestos en los apartados anteriores: modelo económico, modelo de sostenibilidad, modelo de aprovechamiento de recursos y modelo de calidad; el segundo y el tercero incluyendo también los submodelos creados para cumplir así la condición de dimensionalidad. Para cada uno de los modelos, se realizará dos análisis: uno asumiendo retornos de escala constantes (CRS) y otros retornos de escala variable (VRS), para poder así comparar en cada caso cual es más adecuado dependiendo de las magnitudes de los parámetros escogidos.

Los resultados conseguidos mediante el software EMS para cada uno de los modelos mencionados se recogerán en el apartado Anexo: Resultados del software EMS.

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se analizarán y compararán los resultados del estudio realizado para cada uno de los modelos.

4.1 Modelo económico

En primer lugar, se analizará el modelo económico, cuyos resultados se recogen en la Tabla 43 y Tabla 44. Este modelo fue orientado a las entradas; es decir, se buscó minimizar las entradas para obtener al menos las salidas dadas. Las entradas en este caso han sido la tarifa regional (x_{1j}) y los costes de energía (x_{2j}); y las salidas el volumen de agua tratada (y_{1j}) y el número de residentes conectados (y_{2j}).

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	NW	100	RP	100
2	BY	100	BE	100
3	BE	90,56	BW	100
4	BW	88,15	BY	100
5	NI	57,92	NW	100
6	HE	39,83	NI	90,47
7	RP	35,02	HH	90,20
8	SN	31,41	TH	87,09
9	SH	18,39	SN	86,33
10	TH	14,86	SL	84,75
11	BB	14,11	HE	81,96
12	HH	13,36	SH	78,07
13	ST	11,28	HB	73,97
14	MV	9,37	MV	72,06
15	SL	7,94	BB	67,92
16	HB	4,30	ST	63,84
	Media	39,78	Media	86,04

Tabla 15: Ranking de eficiencia modelo económico

En la Tabla 15 se puede observar que, asumiendo retornos de escala constantes, obtenemos dos unidades de decisión eficientes: NW y BY. Sin embargo, asumiendo retornos de escala variables, obtenemos tres unidades eficientes más: RP, BE y BW. Las unidades determinadas como eficientes en CRS también lo son en VRS.

Se aprecia también que todas las unidades mejoran su eficiencia al pasar de la tecnología CRS a la VRS; cabe destacar por ejemplo la unidad HB que pasa de una eficiencia del 4,3% a una eficiencia del 73,97% usando la segunda tecnología.

La eficiencia media para los modelos CRS es de un 39,78%, estando un total de 6 unidades, el 37,5% de las totales, por encima del promedio. No obstante, para los modelos VRS más de la mitad de las DMU estudiadas, un 56,25% de ellas, alcanzan la eficiencia promedio, en este caso 86,04%. No existe una gran diferencia entre las dos tecnologías en el número de unidades que alcanzan la media, pero sí en la eficiencia media determinada para cada una de ellas.

En este caso, el modelo VRS parece ser más adecuado para el análisis. La razón principal es que permite una mayor flexibilidad al considerar la escala de operación, lo cual parece relevante dado que muchas DMUs mejoran significativamente su eficiencia bajo este modelo. Además, la mayor cantidad de DMUs eficientes y la alta eficiencia media bajo VRS indican que este modelo proporciona una visión más matizada y probablemente más realista de la eficiencia en tu contexto.

Otra información importante que se ha identificado mediante la aplicación del software EMS son los Benchmarks. Estos números, reflejados en las Tabla 16 y Tabla 17, indican la cantidad de veces que una unidad ineficiente toma como base de referencia otra eficiente.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
NW	12
BY	11

Tabla 16: Modelo económico CRS - Benchmarks unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
RP	11
BE	10
BW	3
BY	0
NW	0

Tabla 17: Modelo económico VRS - Benchmarks unidades eficientes

En el caso de la primera tecnología, las unidades ineficientes toman como referencia NW un total de 12 veces, y BY un total de 11. Por el contrario, es interesante comparar estos resultados con los obtenidos asumiendo retornos de escala variables. Cuando una DMU eficiente aparece un número elevado de veces, se podría interpretar como una señal de que su eficiencia relativa es real. En este caso, las DMU ineficientes se reflejan 11 veces sobre RP, 10 sobre BE y 3 sobre BY. Ninguna toma en este caso BY y NW como referencia.

El siguiente paso consistirá en calcular las metas, es decir, los objetivos de mejora, a conseguir por cada una de las regiones ineficientes. En este modelo, al ser de entrada y buscar minimizar los recursos, se analizará la entrada más significativa, en este caso las tarifas regionales (x_{1j}). El cálculo de estas metas para cada una de las unidades ineficientes se realizará según la siguiente fórmula:

$$\text{Meta} = \text{entrada} * \text{eficiencia} - \text{holgura}$$

siendo la variable entrada el dato de entrada de dicho recurso; eficiencia, la eficiencia calculada en el análisis para el modelo económico; y holgura la respectiva holgura determinada para cada una de ellas. Así pues, se obtienen los resultados recogidos en la Tabla 18.

Metas modelo CRS

<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>HB</i>	0,10406	95,70%
<i>SL</i>	0,181032	92,06%
<i>MV</i>	0,248305	90,63%
<i>ST</i>	0,336144	88,72%
<i>HH</i>	0,285904	86,64%
<i>BB</i>	0,389436	85,89%
<i>TH</i>	0,32692	85,14%
<i>SH</i>	0,448716	81,61%
<i>BE</i>	0,561376	74,60%
<i>SN</i>	0,625571	72,92%
<i>RP</i>	0,626858	64,98%
<i>HE</i>	0,971852	60,17%
<i>NI</i>	1,227904	42,08%
<i>BW</i>	1,71011	11,85%
Media	0,574584	73,78%

Tabla 18: Metas modelo económico CRS

La tabla anterior muestra las metas a alcanzar para la entrada de la tarifa regional de cada uno de los estados ineficientes, además de su mejora respecto a las entradas iniciales, con una media de un 73,78% de mejora. La región con más margen de mejora es, en este caso, HB con un porcentaje del 95,70.

Metas modelo VRS

<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>NI</i>	1,9180	90,47%
<i>HH</i>	1,9303	90,20%
<i>TH</i>	1,9160	87,09%
<i>SN</i>	1,9942	86,33%
<i>SL</i>	1,9323	84,75%

<i>HE</i>	1,9998	81,96%
<i>SH</i>	1,9049	78,07%
<i>HB</i>	1,7901	73,97%
<i>MV</i>	1,9096	72,06%
<i>BB</i>	1,8746	67,92%
<i>ST</i>	1,9024	63,84%
Media	1,9157	79,70%

Tabla 19: Metas modelo económico VRS

En el modelo VRS (véase Tabla 19), el porcentaje medio de mejora de las tarifas regionales es de un 79,70%, con una mejora media de 1,9157. Resulta interesante comparar los dos modelos ya que, pese a ser mayor el porcentaje de mejora de las unidades ineficientes con la tecnología VRS, este también ha determinado más unidades de decisión eficientes.

4.2 Modelo de sostenibilidad

En este apartado se analizarán los resultados determinados para el modelo y submodelo de sostenibilidad, con los que se pretendía determinar la eficiencia desde un punto de vista ambiental. Estos modelos fueron orientados a las salidas, es decir, se buscó maximizar las salidas dados unas entradas o recursos determinados.

En el caso del modelo de sostenibilidad, se recuerdan las entradas y salidas usadas en la Figura 13: Representación modelo sostenibilidad. En cuanto al submodelo de sostenibilidad, los parámetros de entrada y salida serán los mismos que los usados en el modelo de sostenibilidad, quitando la variable de salida y_{2j} .

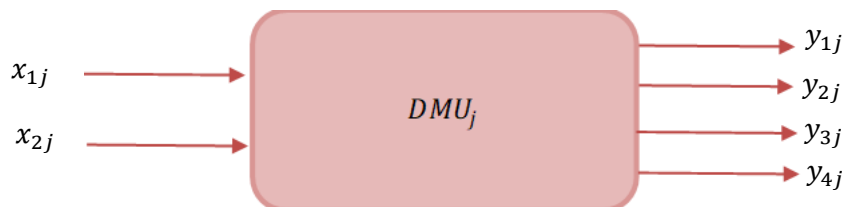


Figura 13: Representación modelo sostenibilidad

x_{1j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j ($1.000 m^3$)

x_{2j} : número total de **residentes** conectados al sistema de aguas residuales en la unidad j

y_{1j} : emisiones totales (*ton*) de **CH₄** por unidad j

y_{2j} : concentración de **nitrógeno** (g/m^3) en el agua tras el proceso de depuración

y_{3j} : **lodos** (*ton*) reutilizados por unidad j

y_{4j} : **energía total** (*MWh*) consumida por unidad j

En la Tabla 20 se reflejan las eficiencias calculadas para las DMU estudiadas en el modelo ambiental; asumiendo retornos de escala constantes y retornos de escala variables. Al tener una orientación de salida, los resultados de eficiencia obtenidos en el apartado **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** para las unidades ineficientes son mayores que 100. Por lo tanto, para poder visualizar y comparar los resultados con más claridad, se van a escalar dichos valores para que sean menores que las unidades eficientes, invirtiendo los resultados.

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	HB	100	NI	100
2	SH	100	SL	100
3	MV	100	SH	100
4	BE	100	HB	100
5	SL	100	HE	100
6	HH	96,37	MV	100
7	ST	95,91	BY	100
8	BB	92,02	BE	100
9	HE	85,85	BB	100
10	NI	85,37	HH	100
11	BY	80,67	NW	100
12	NW	74,48	ST	99,10
13	RP	73,61	TH	95,95
14	BW	72,55	BW	89,51
15	SN	68,51	RP	88,21
16	TH	65,81	SN	76,21
	Media	86,95	Media	96,81

Tabla 20: Ranking de eficiencia modelo sostenibilidad

En el modelo con CRS, se han identificado 5 unidades eficientes: HB, SH, MV, BE, SL; logrando una eficiencia media del 86,95%. En el modelo VRS se han obtenido 11 unidades eficientes, un 68,75% de las unidades totales estudiadas, frente al 31,25% de unidades eficientes identificadas asumiendo retornos de escala constantes. También se puede observar que todas las DMU mejoran su eficiencia al pasar de la tecnología CRS a VRS.

Seguidamente, se presentará el ranking de eficiencias para el submodelo de sostenibilidad, en el que se eliminó una de las variables de salida cuyos datos tenían una variabilidad relativamente baja en comparación al resto de los parámetros usados, para cumplir así la condición de la dimensión.

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	HB	100	SH	100
2	SH	100	HB	100

3	BE	100	BE	100
4	MV	98,77	HH	100
5	HH	96,37	HE	100
6	ST	95,08	NI	100
7	BB	92,02	BY	100
8	HE	85,85	BB	100
9	NI	85,37	MV	100
10	SL	83,01	NW	100
11	BY	80,67	SL	100
12	NW	74,48	ST	95,22
13	RP	73,61	BW	88,97
14	BW	72,55	RP	84,13
15	SN	68,51	SN	76,21
16	TH	63,38	TH	69,69
	Media	85,60	Media	94,64

Tabla 21: Ranking de eficiencia submodelo sostenibilidad

Como se observa en la Tabla 21, usando la tecnología CRS, se obtienen 3 unidades eficientes: HB, SH, BE; un 18,75% del total de unidades estudiadas, logrando una eficiencia media del 85,60 %. Por el contrario, se detecta un importante cambio en el uso de las dos tecnologías. En el caso de la segunda, se obtienen 11 unidades eficientes, obteniendo una eficiencia promedio bastante alta, 94,64%. Las tres unidades consideradas eficientes en el primer caso son también las tres más eficientes asumiendo retornos de escala variables, aunque en distinto orden.

Acto seguido, se compararán los datos reflejados en las tablas anteriores, para el modelo y el submodelo de sostenibilidad. Para el modelo de sostenibilidad CRS, se han identificado 5 unidades eficientes, mientras que para el submodelo CRS, sólo tres; aunque la eficiencia media es bastante parecida para los dos modelos estudiados: 86,95% y 85,60%. Por otro lado, al usar la tecnología VRS se obtienen resultados bastante similares en ambos modelos. Ambos obtienen 11 unidades eficientes, con eficiencias promedias muy parecidas: 96,81% y 94,64%. Además, es bastante curioso observar que las unidades eficientes e ineficientes usando la tecnología VRS son exactamente las mismas para ambos modelos, aunque las posiciones varían ligeramente de un modelo a otro.

A continuación, se analizarán las veces en las que sobre una determinada unidad eficiente se referencia una ineficiente, es decir, los benchmarks.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
HB	11
SH	5
MV	2
BE	0
SL	0

Tabla 22: Modelo sostenibilidad CRS – Benchmarks unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
NI	4
SL	3
SH	3
HB	2
HE	2
MV	2
BY	1
BE	1
BB	0
HH	0
NW	0

Tabla 23: Modelo sostenibilidad VRS – Benchmarks unidades eficientes

Como se puede ver en las tablas anteriores (Tabla 22 y Tabla 23), para el modelo de sostenibilidad CRS, la unidad eficiente sobre la que más se reflejan las ineficientes es HB un total de 11 veces, seguida de SH y MV. Por otro lado, para el modelo VRS la unidad eficiente más referenciada es NI, un total de 4 veces. Es bastante interesante este resultado, ya que la DMU NI no alcanzó siquiera la eficiencia en el modelo CRS.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
HB	13
SH	6
BE	1

Tabla 24: Submodelo sostenibilidad CRS – Benchmarks unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
SH	4
HB	3
BE	2
HH	2
HE	2
NI	2
BY	1
BB	1

MV	0
NW	0
SL	0

Tabla 25: Submodelo sostenibilidad VRS – Benchmarks unidades eficientes

En el submodelo de sostenibilidad CRS, todas las unidades eficientes, HB, SH y BE, son tomadas como referencia por el resto de las unidades ineficientes, un total de 13, 6 y 1 vez, respectivamente (véase Tabla 24). Dichas unidades eficientes son también las DMU eficientes para el submodelo VRS (véase Tabla 23), aunque en distinto orden, obteniendo SH un benchmark de 4 seguido por HB con 3 unidades y BE con 2.

Comparando el modelo y el submodelo de sostenibilidad, se revela que para ambos modelos con tecnología CRS, la unidad eficiente sobre la que más se refleja el resto es, con diferencia, HB, seguida en ambos casos por la unidad SH. Por el contrario, usando la tecnología VRS, los resultados no resultan tan similares en ambos modelos. Para el modelo VRS se reflejan 4 veces sobre NI, y 3 veces sobre SL y SH. En cambio, para el submodelo VRS la unidad más referenciada es SH, un total de 4 veces, seguida de HB y BE, 3 y 2 veces cada una respectivamente.

Por último, se calcularán las metas. En este caso, se escogerá una variable que esté presente tanto en el modelo como en el submodelo de sostenibilidad, para poder compararlas. Se ha decidido escoger la energía total consumida ($y_{4,j}$). Al ser un modelo orientado a las salidas, se buscaba maximizar las salidas⁹. Por lo tanto, se utilizará la siguiente fórmula para el cálculo de las metas:

$$\text{Meta} = \text{salida} * \text{eficiencia} + \text{holgura}$$

siendo la variable salida el dato de salida de dicho producto; eficiencia, la eficiencia calculada en el análisis para el modelo de sostenibilidad; y holgura la respectiva holgura para cada una de ellas. Así pues, se obtienen los resultados obtenidos en las siguientes tablas.

<i>Modelo sostenibilidad CRS</i>			<i>Modelo sostenibilidad VRS</i>		
<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>	<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>TH</i>	1,33537E-05	51,95%	<i>SN</i>	7,24332E-06	31,21%
<i>SN</i>	8,05758E-06	45,96%	<i>RP</i>	4,54639E-06	13,37%
<i>BW</i>	1,93544E-06	37,84%	<i>BW</i>	1,56869E-06	11,72%
<i>RP</i>	5,44789E-06	35,85%	<i>TH</i>	9,15908E-06	4,22%
<i>NW</i>	1,20937E-06	34,26%	<i>ST</i>	6,1199E-06	0,91%
<i>BY</i>	1,39907E-06	23,96%	<i>SN</i>	5,72748E-06	31,21%
<i>NI</i>	2,28835E-06	17,14%	<i>Media</i>	7,24332E-06	12,29%
<i>HE</i>	3,27346E-06	16,48%			

⁹ En este caso concreto, se pretendía reducir la energía anual total consumida. Por ello, de aquí en adelante, cuando se hable de energía total consumida, se estará hablando en realidad de su valor invertido.

<i>BB</i>	5,67455E-06	8,67%
<i>ST</i>	6,32307E-06	4,26%
<i>HH</i>	1,11821E-05	3,77%
Media	5,46769E-06	25,47%

Tabla 26: Metas modelo sostenibilidad

En la Tabla 26 se observan las metas calculadas para la salida de la energía total consumida. Para el modelo CRS se ha calculado una mejora media del 25,47% de las unidades determinadas como ineficientes. En cambio, para el modelo VRS el porcentaje de mejora media de las unidades ineficientes es del 12,29%.

Seguidamente, se calcularán las metas para el submodelo de sostenibilidad, recogidas en la Tabla 27.

<i>Submodelo sostenibilidad CRS</i>			<i>Submodelo sostenibilidad VRS</i>		
<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>	<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>TH</i>	1,38652E-05	57,77%	<i>TH</i>	1,26102E-05	43,49%
<i>SN</i>	8,05758E-06	45,96%	<i>SN</i>	7,24332E-06	31,21%
<i>BW</i>	1,93544E-06	37,84%	<i>RP</i>	4,76656E-06	18,86%
<i>RP</i>	5,44789E-06	35,85%	<i>BW</i>	1,57824E-06	12,40%
<i>NW</i>	1,20937E-06	34,26%	<i>ST</i>	6,36916E-06	5,02%
<i>BY</i>	1,39907E-06	23,96%	<i>TH</i>	6,5135E-06	22,20%
<i>SL</i>	2,30825E-05	20,47%	Media	1,26102E-05	43,49%
<i>NI</i>	2,28835E-06	17,14%			
<i>HE</i>	3,27346E-06	16,48%			
<i>BB</i>	5,67455E-06	8,67%			
<i>ST</i>	6,37887E-06	5,18%			
<i>HH</i>	1,11821E-05	3,77%			
<i>MV</i>	9,53806E-06	1,25%			
Media	7,17942E-06	23,74%			

Tabla 27: Metas submodelo sostenibilidad

Para el submodelo de sostenibilidad CRS se obtiene un porcentaje de mejora de un 23,74% para la variable de la energía consumida. Sin embargo, para el submodelo VRS propone una mejora de casi el doble que la anterior, un 43,49%, para las unidades ineficientes. En este caso también, a pesar de obtener más unidades eficientes, el modelo VRS refleja un porcentaje de mejora mayor para sus unidades ineficientes.

Por último, se realizará una comparación de las eficiencias obtenidas en ambos modelos para ambas tecnologías.

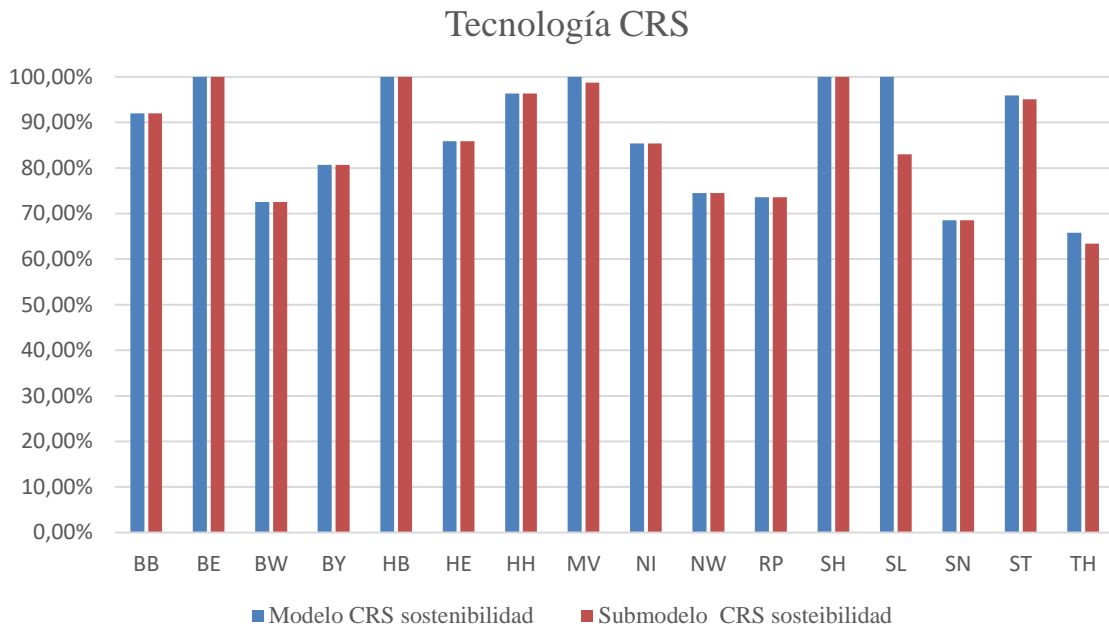


Figura 14: Gráfica comparación eficiencia tecnología CRS

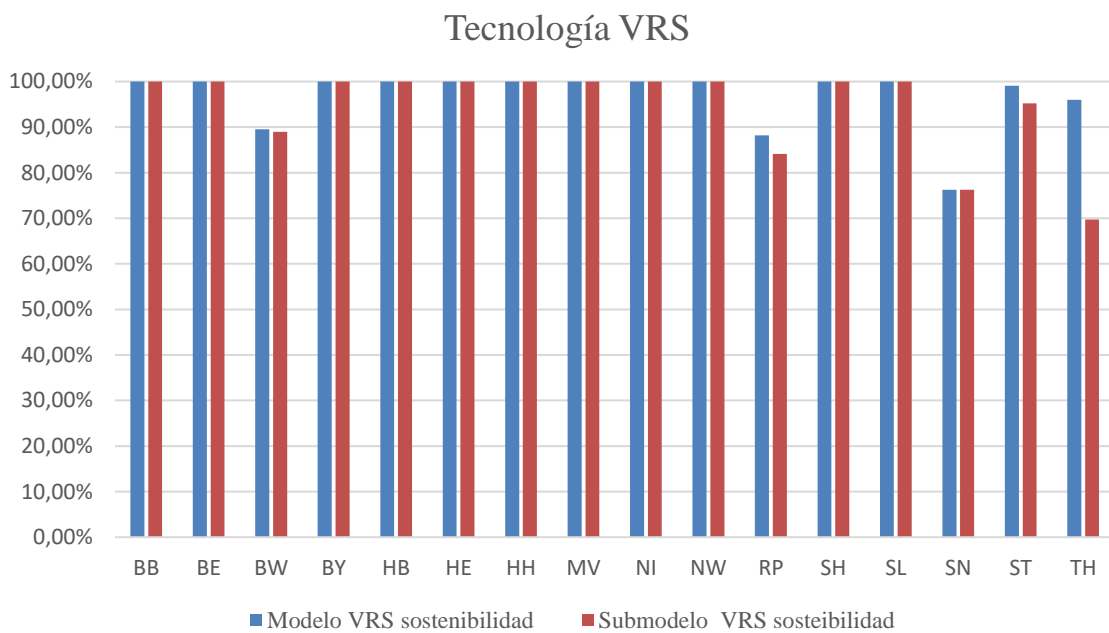


Figura 15: Gráfica comparación eficiencia tecnología VRS

Como se refleja en las gráficas anteriores (Figura 14 y Figura 15), no existe una gran diferencia entre el porcentaje de eficiencia en los dos modelos para la mayoría de las unidades de decisión. Además, en la Tabla 45 y Tabla 46, se puede observar que los pesos (columna $y_{4j} \{O\} \{V\}$) resultantes para la variable que se ha eliminado en el submodelo son relativamente bajos en comparación con el resto de los parámetros. Por ello, se puede afirmar que esos datos no tienen gran influencia en los resultados de eficiencia.

Por lo tanto, en este caso, se puede concluir que la eliminación de uno de los parámetros para poder cumplir así la condición de dimensionalidad no ha tenido un impacto significativo en los resultados del modelo de sostenibilidad.

4.3 Modelo de aprovechamiento de recursos

En este subcapítulo, se analizarán los resultados determinados tanto en el modelo como en el submodelo de aprovechamiento de recursos, ambos orientados a las salidas.

En el caso del modelo de aprovechamiento, se recuerdan las entradas y salidas usadas en la FIGURA. En cuanto al submodelo de aprovechamiento, los parámetros de entrada y salida serán los mismos que los usados en el modelo de aprovechamiento (véase Figura 16), eliminando en este caso las variables de entrada x_{1j} y x_{5j} .

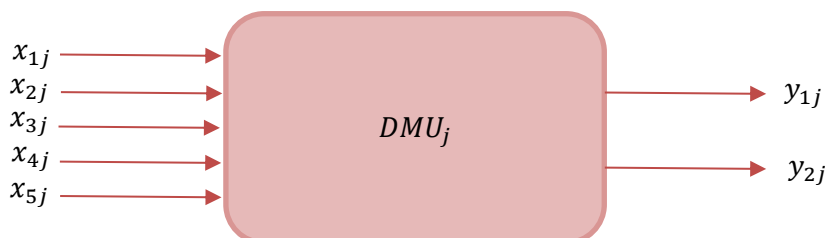


Figura 16: Esquema modelo aprovechamiento de recursos

x_{1j} : **tarifa** regional de la unidad j ($\text{€}/\text{m}^3$)

x_{2j} : **capacidad** máxima de depuración de la unidad j (*residentes*)

x_{3j} : **longitud total de la red** de la unidad j (km)

x_{4j} : disponibilidad total de **aguas subterráneas y superficiales** de la unidad j (1.000 m^3)

x_{5j} : **precipitación** anual de la unidad j (l/m^2)

y_{1j} : volumen total de **agua residual** tratada en la unidad j (1.000 m^3)

y_{2j} : número total de **residentes** conectados al sistema de aguas residuales en la unidad j

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	BE	100	SL	100
2	HB	100	BE	100
3	HE	100	HE	100
4	BW	100	BW	100
5	SL	100	HB	100
6	RP	100	ST	100
7	ST	100	RP	100
8	BY	100	BY	100
9	HH	100	HH	100
10	NW	100	NW	100

11	TH	97,53	TH	99,19
12	SH	93,25	SH	95,36
13	NI	90,38	SN	94,07
14	SN	89,92	NI	92,23
15	BB	85,22	BB	85,98
16	MV	80,42	MV	83,22
	Media	96,04	Media	96,88

Tabla 28: Ranking de eficiencia modelo aprovechamiento de recursos

En la Tabla 27Tabla 29 se refleja el ranking de unidades eficiente con sus respectivas eficiencias obtenidas para el modelo de aprovechamiento de recursos. Tanto el modelo CRS como el VRS obtienen el mismo número de unidades eficientes, un total de 10, un 62,5% sobre el total de DMU analizadas. Además, son las mismas en ambos casos las unidades que alcanzan en 100% de eficiencia; ambos con una eficiencia media similar, 96,04% y 96,88%. No obstante, el orden en el ranking varía ligeramente de una tecnología a otra.

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	BE	100	HE	100
2	HB	100	BE	100
3	SL	100	ST	100
4	HH	100	HB	100
5	NW	100	NW	100
6	HE	98,08	BW	100
7	ST	91,97	HH	100
8	BW	89,30	SL	100
9	TH	86,94	BY	94,80
10	RP	83,89	TH	90,03
11	BB	78,81	RP	88,29
12	SN	78,74	NI	87,71
13	BY	77,50	BB	85,61
14	SH	74,64	SN	84,84

15	MV	73,34	SH	82,18
16	NI	69,08	MV	76,61
	Media	87,64	Media	93,13

Tabla 29: Ranking de eficiencia submodelo aprovechamiento de recursos

Por el contrario, se obtienen resultados distintos para el submodelo de aprovechamiento de recursos (véase Tabla 29), en el que se eliminaron dos variables propuestas inicialmente, que se analizan también en el modelo de sostenibilidad, para cumplir la condición de dimensionalidad. Para el submodelo CRS, se han clasificado 5 unidades eficientes, con una eficiencia media del 87,64%; mientras que para el submodelo VRS un total de 8 DMU han alcanzado la eficiencia, con una eficiencia media del 91,13%.

Comparando el modelo y el submodelo de aprovechamiento, se observa sobre todo una gran diferencia en el uso de la tecnología CRS, ya que en el modelo de aprovechamiento se han identificado el doble de unidades eficientes que en el submodelo. Además, la eficiencia media también varía en un 8,4%. Sin embargo, usando la tecnología VRS, se obtienen resultados más parecidos: 10 unidades eficientes, con una eficiencia media del 96,88% para el modelo, y 8 unidades eficientes con una eficiencia media del 93,13% para el submodelo.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
BE	5
HB	4
HE	4
BW	3
SL	3
RP	2
ST	2
BY	0
HH	0
NW	0

Tabla 31: Modelo aprovechamiento VRS – Benchmark unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
SL	6
BE	4
HE	4
BW	3
HB	2
ST	2
RP	1
BY	0
HH	0
NW	0

Tabla 30: Modelo aprovechamiento VRS – Benchmark unidades eficientes

A continuación, se comentarán los resultados para los benchmarks de los dos modelos (véase Tabla 30 y Tabla 31). Para ambas tecnologías, en el modelo de aprovechamiento de recursos, se han determinado las mismas 10 unidades eficientes. Sin embargo, hay 3 unidades eficientes para ambos modelos sobre las que no se refleja ninguna unidad ineficiente, y estas son BY, HH y NW. Además, hay diferencia en el resto de las unidades eficientes y el número de veces que las toman el resto como referencia. En el modelo CRS, las DMU BE, HB y HE son las que encabezan el ranking, con un total de 5, 4 y 4 unidades, respectivamente. Por otro lado, en el modelo VRS, las unidades más eficientes son SL, BE y HE, siendo éstas referenciadas un total de 6, 4 y 4 veces, respectivamente.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
BE	11
HB	11
SL	9
HH	2
NW	0

Tabla 32: Submodelo aprovechamiento CRS – Benchmark unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
HE	8
BE	7
ST	6
HB	4
NW	2
BW	1
HH	0
SL	0

Tabla 33: Submodelo aprovechamiento VRS - Benchmark unidades eficientes

En el caso del submodelo de aprovechamiento de recursos, se obtienen resultados distintos (véase Tabla 32 y Tabla 33). Usando la tecnología CRS, BE y HB son las unidades más referenciadas, un total de 11 veces cada una, seguidas por SL, referenciada 9 veces. En este caso las dos unidades más referenciadas en el submodelo CRS son también las más referenciadas en el modelo CRS. Para el submodelo VRS, las unidades eficientes más referenciadas son, de mayor a menor: HE, BE, ST y HB. Una diferencia significativa es la unidad SL. Esta unidad, clasificada como eficiente tanto en el modelo como en el submodelo VRS, es la más referenciada en el modelo de aprovechamiento. Sin embargo, en el submodelo no es tomada como referencia ni una sola vez por el resto de las unidades ineficientes.

El siguiente paso será el cálculo de las metas. Se elegirá una variable de salida que esté presente tanto en el modelo como en el submodelo de aprovechamiento, para poder compararlas. Se ha decidido escoger el volumen de agua total depurada (y_{1j}), ya que sería un indicador directo de la eficiencia operativa del sistema de tratamiento de aguas residuales; un mayor volumen tratado indicaría una mayor capacidad de procesamiento y una mejor utilización de la infraestructura disponible.

Al ser un modelo orientado a las salidas, se buscaba maximizar las salidas. Por lo tanto, se utilizará la siguiente fórmula para el cálculo de las metas:

$$Meta = salida * eficiencia + holgura$$

siendo la variable salida el dato de salida de dicho producto; eficiencia, la eficiencia calculada para el modelo de aprovechamiento; y holgura la respectiva holgura para cada una de ellas. Así pues, se obtienen los siguientes resultados:

<i>Modelo aprovechamiento CRS</i>			<i>Modelo aprovechamiento VRS</i>		
<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>	<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>SH</i>	391898,11	124,23%	<i>SH</i>	389698,27	122,98%
<i>MV</i>	156115,64	89,50%	<i>MV</i>	160404,95	94,71%
<i>NI</i>	986148,18	79,52%	<i>NI</i>	994979,95	81,13%
<i>TH</i>	228575,94	50,02%	<i>SN</i>	358955,99	43,95%
<i>SN</i>	327080,29	31,17%	<i>BB</i>	289116,21	17,32%
<i>BB</i>	289186,79	17,35%	<i>TH</i>	177486,69	16,49%
<i>Media</i>	396500,83	65,30%	<i>Media</i>	395107,01	62,76%

Tabla 34: Metas modelo aprovechamiento de recursos

En la Tabla 34 se pueden observar las metas calculadas para el volumen de agua residual de las unidades de decisión no eficientes. Las tres primeras DMU coinciden en las posiciones para ambas tecnologías, obteniendo unos porcentajes de mejora bastante parecidos. Cabe destacar también la meta identificada para la unidad SH, que en ambos modelos supera el 100%. Además, las metas medias en ambos casos son bastante parecidas, resultando el porcentaje de mejora para el CRS un 65,30% y para el VRS un 62,76%.

<i>Submodelo aprovechamiento CRS</i>			<i>Submdelo aprovechamiento VRS</i>		
<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>	<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>NI</i>	795152,3	44,75%	<i>NI</i>	1056079,513	92,25%
<i>MV</i>	115624,3205	40,35%	<i>SH</i>	266225,2468	52,33%
<i>SH</i>	234159,5256	33,98%	<i>SN</i>	367594,3759	47,42%
<i>BY</i>	1866015,086	29,03%	<i>MV</i>	107534,5299	30,53%
<i>SN</i>	316683,39	27,00%	<i>BY</i>	1782737,048	23,27%
<i>BB</i>	312671,6528	26,88%	<i>BB</i>	287856,0511	16,81%
<i>ST</i>	169655,3523	22,63%	<i>RP</i>	482062,875	13,26%
<i>RP</i>	507387,5625	19,21%	<i>TH</i>	169228,4734	11,07%
<i>TH</i>	175246,7724	15,02%	<i>Media</i>	564914,7641	35,87%
<i>BW</i>	1545653,221	11,98%			
<i>HE</i>	752806,366	1,96%			
<i>Media</i>	617368,6863	24,80%			

Tabla 35: Metas submodelo aprovechamiento de recursos

Por el contrario, se evidencian resultados muy diferentes para el submodelo de aprovechamiento (véase Tabla 35). Se recuerda que para este submodelo se eliminaron dos de los parámetros iniciales (usados en el modelo de aprovechamiento), en este caso dos de las entradas. Como se observa en la tabla anterior, para las 11 unidades ineficientes del submodelo CRS se ha obtenido un porcentaje de mejora del 24,80%; mientras que para las 8 variables ineficientes del modelo VRS un porcentaje algo más elevado, 35,57%. Tal como se puede apreciar en la tabla, la unidad con más margen de mejora es, en este caso, NI. Sin embargo, se han identificado porcentajes muy dispares de mejora para esta unidad: un 44,75% asumiendo retornos de escala constante, y más del doble, 92,25%, asumiendo retornos de escala variables.

De acuerdo con lo que se percibe en la diferencia de los resultados para el modelo y el submodelo de aprovechamiento, se puede afirmar que, en este caso, el no cumplimiento de la condición de dimensionalidad sí que tiene un impacto significativo en los resultados determinados. No obstante, esto también se puede deber a las dos variables de entrada eliminadas y su influencia en los resultados conseguidos.

Esto se puede comprobar observando los resultados de los pesos obtenidos en el modelo de aprovechamiento de recursos, en la Tabla 49 y Tabla 50 (columnas $\{I\}$ $\{V\}$). Las variables eliminadas para la realización del submodelo tienen unos pesos medios relativamente altos en comparación a otros parámetros. Por tanto, no se puede determinar con claridad si los altos resultados de eficiencia en el modelo de sostenibilidad se deben al no cumplimiento de la condición de dimensionalidad, o a la influencia de los parámetros eliminados para el submodelo. Las variables con pesos más bajos son x_{2j} y x_{3j} , siendo éstas la capacidad total de depuración y la longitud total de la red. Por tanto, se aplicará nuevamente el software EMS eliminando las variables de entrada mencionadas. Se denominará a este nuevo modelo submodelo de aprovechamiento mejorado, cuyos resultados se reflejan en la Tabla 53 y Tabla 54.

Una vez calculados los resultados para el submodelo mejorado, reflejados en las tablas anteriores, se procede a hacer una comparación de dichos datos con los calculados tanto en el modelo como en el submodelo de aprovechamiento. Se procederá a calcular la eficiencia media en cada modelo como el número de unidades eficientes determinadas.

	<i>Eficiencia (n° uds eficientes)</i>		<i>Eficiencia (n° uds eficientes)</i>
<i>Modelo CRS</i>	96,04% (10)	<i>Modelo VRS</i>	96,88% (10)
<i>Submodelo CRS</i>	87,64% (5)	<i>Submodelo VRS</i>	93,13% (8)
<i>Submodelo mejorado CRS</i>	89,23% (7)	<i>Submodelo mejorado VRS</i>	95,37% (11)

Tabla 36: Comparación de eficiencias modelos sostenibilidad

Como revela la Tabla 36, el modelo de sostenibilidad, para ambas tecnologías, es el que obtiene una eficiencia mayor. Ambos submodelos obtienen eficiencias medias muy similares para cada tecnología. Aunque es cierto que sí que hay una diferencia en las eficiencias obtenidas en el modelo y los submodelos, no es una diferencia extrema, pero sí existe una gran diferencia en el número de unidades determinadas como eficientes. Por lo tanto, se podría concluir que sí que influye el número de parámetros elegidos para el modelo en los resultados, aunque en los casos estudiados no suponga un cambio significativo en la eficiencia, pero sí en el número de unidades y cuáles son determinadas como eficientes.

4.4 Modelo de calidad

Por último, se analizarán los resultados del modelo de calidad, enfocado en estudiar la eficiencia según la calidad del agua depurada al final del proceso. Al estar orientado a las salidas, los valores de eficiencia determinados en las Tabla 55 y Tabla 56 son mayores que 100. Por ello, se volverán a escalar todos por debajo de las unidades eficientes invirtiendo los valores adquiridos mediante el software EMS.

Se recuerda que el modelo de calidad estaba compuesto por dos entradas y tres salidas. Dichas entradas eran la

tarifa regional (x_{1j}) y el volumen total de agua residual tratada (x_{2j}); y las salidas la concentración de nitrógeno (y_{1j}), la concentración de fósforo (y_{2j}) y los lodos reutilizados (y_{3j}).

Posición	Eficiencia CRS		Eficiencia VRS	
	DMU	%	DMU	%
1	SH	100	NI	100
2	BE	100	SH	100
3	NI	100	BE	100
4	BW	100	MV	100
5	MV	100	NW	100
6	BY	100	BW	100
7	HB	100	BY	100
8	NW	100	HB	100
9	SL	100	HH	100
10	TH	100	RP	100
11	RP	94,05	SL	100
12	HE	88,27	TH	100
13	ST	86,18	ST	94,34
14	HH	78,10	HE	92,70
15	SN	71,19	SN	72,57
16	BB	64,72	BB	70,26
	Media	92,66	Media	95,62

Tabla 37: Ranking de eficiencia modelo calidad

Como se puede apreciar en la tabla anterior, se han identificado altos porcentajes de eficiencia en ambas tecnologías. En el modelo CRS se han obtenido 10 unidades eficientes, mientras que en el VRS 12. La eficiencia media de las regiones en ambos casos es bastante parecida y elevada, logrando un 92,66% asumiendo retornos de escala constantes, y un 95,62% con retornos de escala variables. Consecuentemente, estos resultados sugieren una calidad elevada del agua depurada.

Benchmarks CRS	
DMU	Benchmark
SH	6
BE	4
NI	4
BW	2
MV	2
BY	0
HB	0
NW	0
SL	0
TH	0

Tabla 38: Modelo calidad CRS – Benchmark unidades eficientes

Benchmarks VRS	
DMU	Benchmark
NI	4
SH	4
BE	2
MV	1
NW	1
BW	0
BY	0
HB	0
HH	0
RP	0
SL	0
TH	0

Tabla 39: Modelo calidad VRS – Benchmark unidades eficientes

En el caso de los benchmarks para el modelo de calidad, se obtienen también resultados parecidos para ambas tecnologías (véase Tabla 38 y Tabla 39). En el modelo CRS, SH es la unidad eficiente sobre la que más se referencian el resto de las unidades ineficientes, seguida por NI y BE. En el caso del modelo VRS, NI y SH son las regiones con benchmarks más altos. También es interesante observar las unidades que se han considerado eficientes sobre las que no se refleja ninguna SMU ineficiente; éstas son eficientes, pero no sirven de referencia para el resto de las unidades de decisión.

Por último, se calcularán las metas. Se ha decidido escoger la salida de la concentración de nitrógeno presente en el agua una vez tratada la energía total consumida (y_{1j}). Al ser un modelo orientado a las salidas, se buscaba maximizar las salidas¹⁰. Por lo tanto, se utilizará, al igual que en el modelo anterior, la siguiente fórmula para el cálculo de las metas:

$$Meta = salida * eficiencia + holgura$$

¹⁰ En este caso concreto, se pretendía reducir la concentración de nitrógeno. Por ello, de aquí en adelante, cuando se hable de concentración de nitrógeno, se estará hablando en realidad de su valor invertido.

<i>Modelo calidad CRS</i>			<i>Modelo calidad VRS</i>		
<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>	<i>DMU</i>	<i>Meta</i>	<i>Mejora (%)</i>
<i>BB</i>	0,14523	54,51%	<i>BB</i>	0,13378	42,32%
<i>SN</i>	0,12922	40,46%	<i>SN</i>	0,12676	37,79%
<i>HE</i>	0,16708	38,08%	<i>HE</i>	0,16052	32,66%
<i>HH</i>	0,11651	28,04%	<i>ST</i>	0,14522	6,00%
<i>ST</i>	0,15896	16,03%	<i>Media</i>	0,14157	29,69%
<i>RP</i>	0,14248	6,33%			
<i>Media</i>	0,14325	30,58%			

Tabla 40: Metas modelo calidad

La Tabla 40 refleja las metas a alcanzar por las unidades ineficientes. En el caso del modelo de calidad CRS, la DMU con mayor porcentaje de mejora es BB con un 54,51%, frente al 42,32% que ha obtenido la misma unidad de decisión suponiendo retornos de escala variables. La mejora media para ambos modelos es prácticamente la misma: 30,58% para el modelo CRS, frente al 29,96% del modelo VRS.

4.5 Comparación modelos

En este apartado se compararán los resultados para cada uno de los modelos en cada una de las regiones alemanas. Para la comparación, usaremos los modelos con tecnología VRS, debido a que los tamaños de las DMU varían significativamente y operan en escalas diferentes. Por ello, para comparar las unidades en condiciones más equitativas, se estudiarán los modelos con tecnología VRS.

En cuanto a los modelos de sostenibilidad y de aprovechamiento de recursos, se usarán a modo comparativo, el submodelo de sostenibilidad y el submodelo mejorado de aprovechamiento de recursos. Pese a que no se han obtenido resultados tan dispares en comparación a sus respectivos modelos iniciales, se ha decidido elegir estos submodelos ya que los iniciales pueden identificar ciertas unidades eficientes simplemente porque no hay suficientes unidades de comparación.

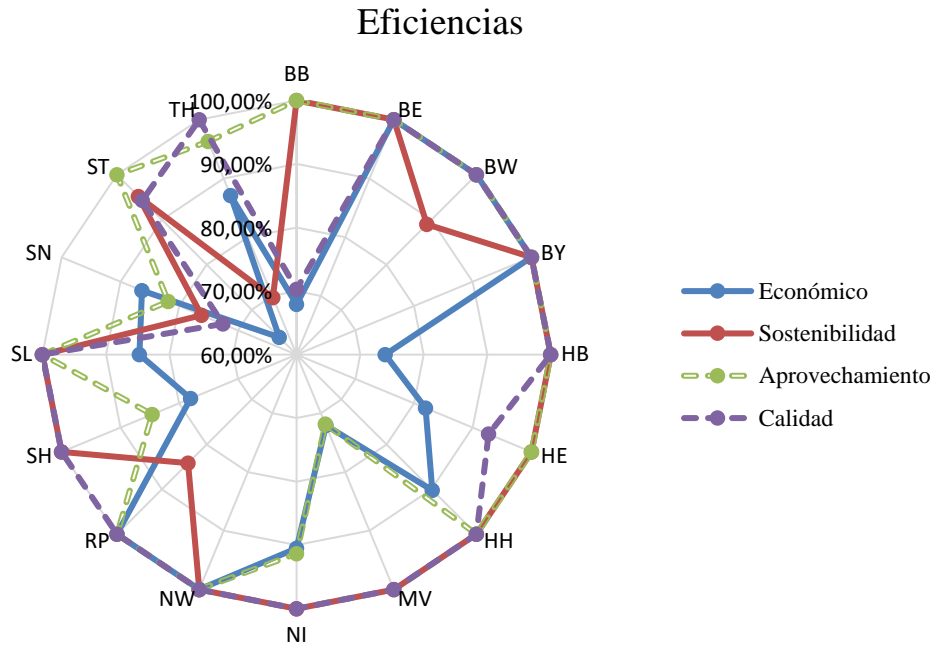


Figura 17: Gráfico comparativo eficiencias en los cuatro modelos

En la Figura 17 se pueden distinguir las diferentes eficiencias determinadas para cada estado federado en cada uno de los cuatro modelos llevados a cabo en este estudio. Es cierto que se han identificado resultados muy favorables del rendimiento de las unidades de decisión en los distintos campos en los que han sido medidas. Destacan BE, BY y MW, donde se puede observar que han alcanzado la eficiencia en los cuatro modelos. Por el contrario, tenemos DMU como SN, en el que todas las eficiencias se encuentran por debajo del 90%. Por otro lado, hay otras unidades que han obtenido muy buenos resultados en ciertos modelos, y eficiencias más bajas en otros, como MV, BB o SH.

<i>Modelo</i>	<i>Eficiencia media</i>
<i>Económico</i>	86,04 %
<i>Sostenibilidad</i>	94,64 %
<i>Aprovechamiento</i>	95,35 %
<i>Calidad</i>	95,62 %

Tabla 41: Comparación global eficiencias medias

En la Tabla 41 se reflejan las eficiencias medias en los distintos ámbitos. La eficiencia media más baja se ha identificado en el modelo económico. Esto sugiere que los estados no están usando los recursos económicos asociados a la gestión de aguas residuales de forma eficiente para los resultados alcanzados. El resto de los modelos han logrado una eficiencia media entorno al 95%, siendo el modelo de calidad el que encabeza la lista reflejando una eficiencia media del 95,62%.

4.6 Eficiencia global

Una vez analizados y comparados los resultados de los distintos modelos, se determinará la productividad global de cada una de las regiones. Se calculará dándole un peso de un 25% a cada una de las eficiencias en los distintos modelos, estableciendo el siguiente ranking de eficiencias:

Puesto	DMU	Eficiencia
1	BE – Berlin	100,00%
2	BY – Bayern	100,00%
3	NW – Nordrhein-Westfalen	100,00%
4	HH – Hamburg	97,55%
5	BW – Baden-Württemberg	97,24%
6	SL – Saarland	96,19%
7	RP – Rheinland-Pfalz	96,03%
8	NI – Niedersachsen	95,45%
9	HE – Hessen	93,67%
10	HB – Bremen	93,49%
11	SH – Schleswig-Holstein	90,66%
12	ST – Sachsen-Anhalt	88,35%
13	TH – Thüringen	88,28%
14	MV – Mecklenburg-Vorpommern	85,97%
15	BB – Brandenburg	84,55%
16	SN – Sachsen	79,25%

Tabla 42: Ranking eficiencias globales

Tal y como se refleja en la tabla anterior, 3 regiones han alcanzado la eficiencia en los 4 modelos estudiados: Berlin, Bayern y Nordrhein-Westfalen. Berlin se posiciona en el primer lugar como el estado más eficiente, seguido por Bayern y, en tercer lugar, Nordrhein-Westfalen. De haber analizado los resultados con los modelos CRS, no habrían derivado estas posiciones en el ranking de eficiencia ya que, por ejemplo, Berlin, en comparación con las dos siguientes unidades más eficientes, opera a una escala relativamente baja. Por el contrario, en los últimos puestos, clasificadas como unidades más ineficientes, se encuentran Mecklenburg-Vorpommern, Brandenburg y Sachsen, con unas eficiencias del 85,97%, 84,55% y 79,25%, respectivamente.

5 CONCLUSIONES

En conclusión, este estudio ha permitido evaluar la eficiencia del tratamiento de aguas residuales en diferentes regiones de Alemania desde diversas perspectivas utilizando la metodología DEA, incluyendo aspectos económicos, de sostenibilidad, aprovechamiento de recursos y calidad del agua depurada. Los resultados conseguidos proporcionan una visión detallada de cómo cada estado federado maneja sus recursos en comparación con los demás, ofreciendo así una base sólida para futuras mejoras en las regiones menos eficientes. Al comparar los estados, se ha podido identificar áreas de mejora en ciertos parámetros que influyen en la gestión de aguas residuales a nivel estatal. Por lo tanto, la metodología empleada ha permitido obtener los objetivos perseguidos.

Además, al comparar los modelos de eficiencia implementados en este estudio, se ha demostrado que el enfoque de tecnología VRS es más adecuado para comparar las unidades de decisión en condiciones equitativas, dada la variabilidad en el tamaño y la escala de las DMU. También se ha analizado la importancia de cumplir la condición de dimensionalidad en los análisis DEA.

El análisis detallado ha revelado que tres regiones, Berlin (BE), Bayern (BY) y Nordrhein-Westfalen (MW), han alcanzado la eficiencia en los cuatro modelos estudiados, destacándose como las más eficientes en el tratamiento de aguas residuales. Por el contrario, la región de Sachsen (SN) se identificó como la más dispar, con todas las eficiencias por debajo del 90%, lo que indica significativas oportunidades de mejora.

Además, se han resuelto cuatro casos en este estudio, midiendo la eficiencia en aspectos económicos, de sostenibilidad, aprovechamiento de recursos y calidad del agua, obteniendo respectivamente una eficiencia media del 86,04%, 96,64%, 95,35% y 95,62%.

Como posible línea de investigación futura, se propone llevar a cabo un estudio en el que se analicen las unidades ineficientes, con el objetivo de optimizar las áreas de mejora teniendo en cuenta la ubicación geográfica de los estados federados. Por ejemplo, la colaboración entre regiones eficientes y aquellas con deficiencias, considerando la posibilidad de compartir recursos, podría contribuir significativamente a mejorar la eficiencia en todo el país. Además, sería relevante evaluar la distancia geográfica entre dichas regiones para optimizar el proceso de colaboración y maximizar el impacto de las mejoras implementadas.

En resumen, este estudio no solo ha proporcionado una evaluación detallada de la eficiencia en el tratamiento de aguas residuales en Alemania, sino que también ha sentado las bases para futuras investigaciones y desarrollos en el campo de la gestión del agua residual. Los hallazgos obtenidos tienen implicaciones significativas para la sostenibilidad y la protección del medio ambiente, y se espera que inspiren nuevas iniciativas y colaboraciones en el ámbito de la gestión del agua a nivel nacional.

ANEXO: RESULTADOS DEL SOFTWARE EMS

Este anexo presenta los resultados obtenidos mediante el software EMS para el análisis de eficiencia. Los datos están organizados en tablas, distinguiendo cada uno de los modelos analizados y las diferentes tecnologías utilizadas para ello.

Modelo económico - CRS											
DMU		Score	x_{1j} {B}{V}	x_{2j} {B}{V}	y_{1j} {O}{V}	y_{2j} {O}{V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{2j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}
1	BW	88,15%	1	0	0,06	0,94	2 (0,28), 10 (0,42)	0	1,31	1,04	0,01
2	BY	100,00%	1	0	0	1	11				
3	BE	90,56%	0	1	0	1	10 (0,20)	1,44	0	387948,78	0
4	BB	14,11%	0,98	0,02	0	1	2 (0,09), 10 (0,08)	0	0	61466,68	0
5	HB	4,30%	1	0	0	1	2 (0,05)	0	0,01	14846,6	0
6	HH	13,36%	0,98	0,02	0	1	2 (0,01), 10 (0,09)	0	0	93495,32	0
7	HE	39,83%	0,98	0,02	0	1	2 (0,04), 10 (0,32)	0	0	77936,66	0
8	MV	9,37%	0,98	0,02	0	1	2 (0,03), 10 (0,07)	0	0	121335,11	0
9	NI	57,92%	0,97	0,03	0	1	2 (0,43), 10 (0,13)	0	0	382180,6	0
10	NW	100,00%	0	1	1	0	12				
11	RP	35,02%	1	0	0	1	2 (0,31)	0	0,03	25437,6	0
12	SL	7,94%	1	0	1	0	10 (0,07)	0	0,02	0	187036,97
13	SN	31,41%	0	1	0	1	10 (0,23)	0,1	0	283257,94	0
14	ST	11,28%	0,98	0,02	0	1	2 (0,05), 10 (0,09)	0	0	135329,61	0
15	SH	18,39%	0,98	0,02	0	1	2 (0,06), 10 (0,12)	0	0	191593,74	0,02
16	TH	14,86%	0,98	0,02	0	1	2 (0,03), 10 (0,10)	0	0	117672,17	0

Tabla 43: Resultados software EMS modelo económico CRS

Modelo económico - VRS											
DMU		Score	x_{1j} {I}{V}	x_{2j} {I}{V}	y_{1j} {O}{V}	y_{2j} {O}{V}	Benchmarks	$\{S\} x_{1j}$ {I}	$\{S\} x_{2j}$ {I}	$\{S\} y_{1j}$ {O}	$\{S\} y_{2j}$ {O}
1	BW	100,00%	0,73	0,27	1	0	3				
2	BY	100,00%	1	0	0	1	0				
3	BE	100,00%	0	1	0,76	0,24	10				
4	BB	67,92%	0,8	0,2	0,57	0,43	3 (0,20), 11 (0,80)	0	0	112124,53	1479703,56
5	HB	73,97%	1	0	0,4	0,6	11 (1,00)	0	0,09	365621	3418300
6	HH	90,20%	0,83	0,17	0,78	0,22	3 (0,33), 11 (0,67)	0	0	168553,08	2100834,17
7	HE	81,96%	0,81	0,19	1	0	1 (0,45), 3 (0,34), 11 (0,21)	0	0	0,02	782385,45
8	MV	72,06%	0,82	0,18	0,43	0,57	3 (0,28), 11 (0,72)	0	0	248636,4	2364040,14
9	NI	90,47%	0,78	0,22	0	1	1 (0,56), 3 (0,10), 11 (0,33)	0	0	380331,19	0,04
10	NW	100,00%	0,01	0,99	1	0	0				
11	RP	100,00%	1	0	0,18	0,82	11				
12	SL	84,75%	0,83	0,17	0,91	0,09	3 (0,34), 11 (0,66)	0	0	159250,36	2967294,55
13	SN	86,33%	0,85	0,15	0	1	1 (0,02), 3 (0,48), 11 (0,50)	0	0	40023,24	0,26
14	ST	63,84%	0,81	0,19	0,52	0,48	3 (0,27), 11 (0,73)	0	0	198272,1	1801458,76
15	SH	78,07%	0,82	0,18	0,01	0,99	3 (0,27), 11 (0,73)	0	0	159780,87	1068554,78

Tabla 44: Resultados software EMS modelo económico VRS

16	TH	87,09%	0,82	0,18	0,68	0,32	3 (0,30), 11 (0,70)		0	0	173465,42	1847859,03
----	----	--------	------	------	------	------	---------------------	--	---	---	-----------	------------

Modelo sostenibilidad - CRS															
DMU	Score	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	y_{4j}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S}	{S}	{S}	{S}	{S}	
		{I}	{I}	{I}	{O}	{O}	{O}			{I}	{I}	{I}	{O}	{O}	{O}
		{V}	{V}	{V}	{V}	{V}	{V}			{I}	{I}	{O}	{O}	{O}	
1	BW	137,84%	0	1	0	0	1	0	5 (16,33)	400696,28	0	0,03	1,45	0	0
2	BY	123,96%	0	1	0	0	1	0	5 (19,32)	286850,78	0	0,04	1,76	0	0
3	BE	100,00%	1	0	0	0	0,84	0,16	0						
4	BB	108,67%	0	1	0	0	1	0	5 (3,72)	23116,6	0	0,01	0,26	0	0
5	HB	100,00%	0,79	0,21	0	0	0	1	11						
6	HH	103,77%	0,35	0,65	0	0	1	0	5 (1,81), 15 (0,21)	0	0	0	0,11	0	0
7	HE	116,48%	0	1	0	0	1	0	5 (9,25)	183097,28	0	0,02	0,77	0	0
8	MV	100,00%	1	0	0	0,62	0,38	0	2						
9	NI	117,14%	0,32	0,68	0	0	1	0	5 (3,59), 15 (1,91)	0	0	0,01	0,38	0	0
10	NW	134,26%	0	1	0	0	1	0	5 (26,36)	771840,55	0	0,05	2,36	0	0
11	RP	135,85%	0	1	0	0	1	0	5 (6,03)	64030,54	0	0,01	0,41	0	0
12	SL	100,00%	0	1	0	1	0	0	0						

13	SN	145,96%	0,3	0,7	0	0	1	0	5 (0,30), 15 (1,32)	0	0	0	0,08	0	0
14	ST	104,26%	0,54	0,46	0	0,08	0,92	0	5 (0,48), 8 (0,12), 15 (0,57)	0	0	0	0	0	0
15	SH	100,00%	0,57	0,43	0	0	1	0	5						
16	TH	151,95%	0,57	0,43	0	0,13	0,87	0	5 (1,70), 8 (0,52), 15 (0,04)	0	0	0	0	0	0

Tabla 45: Resultados software EMS modelo sostenibilidad CRS

Modelo sostenibilidad - VRS															
DMU	Score	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	y_{4j}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S}	{S}	{S}	{S}	{S}	{S}
		{I}	{I}	{I}	{O}	{O}	{O}			{I}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	y_{4j}
		{V}	{V}	{V}	{V}	{V}	{V}			{I}	{I}	{O}	{O}	{O}	{O}
1	BW	111,72%	0	1	0	0,07	0,93	0	2 (0,67), 7 (0,20), 9 (0,13)	190457,14	0,03	0	0	0	0
2	BY	100,00%	1	0	0	0	1	0	1						
3	BE	100,00%	1	0	0	0	0,77	0,23	1						
4	BB	100,00%	0	1	0	0	1	0	0						
5	HB	100,00%	0,44	0,56	0,09	0,01	0,89	0,02	2						
6	HH	100,00%	0,06	0,94	0	0	0,91	0,09	0						

7	HE	100,00%	0	1	0	0,03	0,97	0	2							
8	MV	100,00%	1	0	0	0,81	0,19	0	2							
9	NI	100,00%	1	0	0	0,53	0,47	0	4							
10	NW	100,00%	0,56	0,44	0	0,38	0,62	0	0							
11	RP	113,37%	0	1	0	0,23	0,77	0	7 (0,40), 9 (0,09), 12 (0,32), 15 (0,19)	0,02	0	0	0	0	0	0
12	SL	100,00%	0	1	0	1	0	0	3							
13	SN	131,21%	0,38	0,62	0,1	0	0,9	0	3 (0,11), 5 (0,11), 9 (0,26), 15 (0,52)	0	0	0	0,02	0	0	0
14	ST	100,91%	0,16	0,84	0	0,29	0,71	0	5 (0,13), 8 (0,21), 12 (0,08), 15 (0,57)	0	0	0	0	0	0	0
15	SH	100,00%	0,63	0,37	0	0	1	0	3							
16	TH	104,22%	1	0	0	0,85	0,15	0	8 (0,42), 9 (0,07), 12 (0,51)	0	3702 45,59	0	0	0	0	0

Tabla 46: Resultados software EMS modelo sostenibilidad VRS

Submodelo sostenibilidad - CRS

DMU		Score	x_{1j} {I} {V}	x_{2j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{3j} {O} {V}	y_{4j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{2j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{3j} {O}	{S} y_{4j} {O}
1	BW	137,84%	0	1	0	1	0	5 (16,33)	400696,29	0	0,03	0	0
2	BY	123,96%	0	1	0	1	0	5 (19,32)	286850,79	0	0,04	0	0
3	BE	100,00%	1	0	0	0,84	0,16	1					
4	BB	108,67%	0	1	0	1	0	5 (3,72)	23116,6	0	0,01	0	0
5	HB	100,00%	0,79	0,21	0	0	1	13					
6	HH	103,77%	0,35	0,65	0	1	0	5 (1,81), 15 (0,21)	0	0,01	0	0	0
7	HE	116,48%	0	1	0	1	0	5 (9,25)	183097,28	0	0,02	0	0
8	MV	101,25%	0,62	0,38	0,05	0,95	0	3 (0,16), 5 (0,32), 15 (0,28)	0	0	0	0	0
9	NI	117,14%	0,32	0,68	0	1	0	5 (3,59), 15 (1,91)	0	0	0,01	0	0
10	NW	134,26%	0	1	0	1	0	5 (26,36)	771840,55	0	0,05	0	0
11	RP	135,85%	0	1	0	1	0	5 (6,03)	64030,54	0	0,01	0	0
12	SL	120,47%	0	1	1	0	0	5 (1,45)	66924,45	0	0	4,45	0
13	SN	145,96%	0,3	0,7	0	1	0	5 (0,30), 15 (1,32)	0	0	0	0	0
14	ST	105,18%	0,3	0,7	0	1	0	5 (0,39), 15 (0,66)	0	0,01	0	0	0

15	SH	100,00%	0,57	0,43	0	1	0	6					
16	TH	157,77%	0,33	0,67	0	1	0	5 (1,31), 15 (0,42)	0	0	0	0	0

Tabla 47: Resultados software EMS submodelo sostenibilidad CRS

Submodelo sostenibilidad - VRS													
DMU	Score	x_{1j} {I} {V}	x_{2j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{3j} {O} {V}	y_{4j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{2j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{3j} {O}	{S} y_{4j} {O}	
1	BW	112,40%	0	1	0	1	0	2 (0,70), 7 (0,30)	144715,46	0	0	0	0
2	BY	100,00%	1	0	0	1	0	1					
3	BE	100,00%	1	0	0	0,77	0,23	2					
4	BB	100,00%	0	1	0	1	0	1					
5	HB	100,00%	0,44	0,56	0,16	0,79	0,05	3					
6	HH	100,00%	0,06	0,94	0	0,91	0,09	2					
7	HE	100,00%	0	1	0	1	0	2					
8	MV	100,00%	0,65	0,35	0	1	0	0					
9	NI	100,00%	1	0	0	1	0	2					
10	NW	100,00%	0,34	0,66	0	1	0	0					

11	RP	118,86%	0,08	0,92	0,02	0,98	0	4 (0,24), 6 (0,14), 7 (0,42), 15 (0,20)	0,01	0	0	0	0
12	SL	100,00%	0	1	1	0	0	0					
13	SN	131,21%	0,38	0,62	0,1	0,9	0	3 (0,11), 5 (0,11), 9 (0,26), 15 (0,52)	0	0	0	0	0
14	ST	105,02%	0,13	0,87	0	1	0	5 (0,31), 6 (0,04), 15 (0,65)	0	0	0	0	0
15	SH	100,00%	0,63	0,37	0	1	0	4					
16	TH	143,49%	0,42	0,58	0,26	0,74	0	3 (0,00), 5 (0,73), 9 (0,16), 15 (0,10)	0	0,07	0	0	0

Tabla 48: Resultados software EMS submodelo sostenibilidad VRS

Modelo aprovechamiento de recursos - CRS																	
DMU	Score	x_{1j} {I} {V}	x_{2j} {I} {V}	x_{3j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	x_{5j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{2j} {I}	{S} x_{3j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} x_{5j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}	
1	BW	100,00%	0,4	0	0	0,6	0,37	0,63	0	3							
2	BY	100,00%	1	0	0	0	0,24	0	0,76	0							
3	BE	100,00%	0	1	0	0	0	0	1	5							
4	BB	117,35%	0,15	0	0,27	0,58	0	0,01	0,99	3 (0,00), 5 (0,31), 7 (0,28), 14 (0,44)	0	11389 8,39	0	0	133,76	0,02	0

5	HB	100,00%	0	0	0	1	1	0	0	4							
6	HH	100,00%	0	0	1	0	0,01	0,45	0,53	0							
7	HE	100,00%	0,03	0,31	0,06	0,6	0	0,31	0,69	4							
8	MV	124,34%	0,37	0,13	0	0,5	0,24	0	0,76	3 (0,18), 5 (0,77), 7 (0,12), 14 (0,03)	0	0,01	6552,77	0	0	5368 0,62	0
9	NI	110,65%	0,44	0,56	0	0	0,39	0	0,61	1 (0,66), 3 (0,29), 11 (0,11)	0	0	23749,6 4	21658, 92	0	3783 16,75	0
10	NW	100,00%	0,05	0	0,95	0	0	1	0	0							
11	RP	100,00%	0,59	0,41	0	0	0,57	0	0,43	2							
12	SL	100,00%	0	0,93	0	0,07	0,39	0,61	0	3							
13	SN	111,21%	0,44	0,18	0	0,38	0,34	0	0,66	1 (0,05), 3 (0,54), 11 (0,47), 12 (0,08)	0	0	2744,2	0	0	4977 0,38	0
14	ST	100,00%	0,33	0	0	0,67	0	0	1	2							
15	SH	107,24%	0,37	0,01	0	0,62	0,33	0	0,67	1 (0,06), 5 (0,10), 7 (0,29), 12 (0,61)	0	0,35	5359,58	0	0	2044 72,62	0
16	TH	102,53%	0,34	0,12	0	0,53	0,28	0	0,72	3 (0,10), 5 (0,29), 7 (0,20), 12 (0,35)	0	0	3506,02	0	0	7235 9,19	0

Tabla 49: Resultados software EMS modelo aprovechamiento de recursos CRS

Modelo aprovechamiento de recursos - VRS

DMU	Score	x_{1j} {I} {V}	x_{2j} {I} {V}	x_{3j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	x_{5j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{2j} {I}	{S} x_{3j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} x_{5j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}	
1	BW	100,00%	0,76	0	0,24	0	0	1	0	3							
2	BY	100,00%	1	0	0	0	0	0	1	0							
3	BE	100,00%	0,93	0,07	0	0	0	0	1	4							
4	BB	116,31%	0	0	0,1	0,9	0,33	0	0,67	5 (0,25), 7 (0,28), 12 (0,02), 14 (0,45)	0,0 9	18302 3,99	0	0	0	2492, 31	0
5	HB	100,00%	0	0	0	1	0,06	0,09	0,84	2							
6	HH	100,00%	0,94	0	0,06	0	0,07	0,92	0,01	0							
7	HE	100,00%	0	0,33	0,05	0,62	0	0,31	0,69	4							
8	MV	120,17%	0	0,27	0	0,73	0,35	0	0,65	3 (0,12), 7 (0,03), 12 (0,47), 14 (0,37)	0,1 1	0	1913,41	0	0	6140 5,3	0
9	NI	108,43%	0	1	0	0	0,39	0	0,61	1 (0,70), 3 (0,24), 12 (0,07)	0,0 9	0,02	24577,4 4	33395, 79	0	3993 43,6	0,03
10	NW	100,00%	0	0	1	0	0	1	0	0							
11	RP	100,00%	0,96	0,04	0	0,01	0,87	0,02	0,11	1							
12	SL	100,00%	0,89	0,09	0	0,03	0	1	0	6							

13	SN	106,30%	0	1	0	0	0,54	0	0,46	1 (0,19), 3 (0,51), 12 (0,29)	0,1 3	0	5579,69	14528, 82	0	9388 9,5	0
14	ST	100,00%	0	0	0	1	0	0	1	2							
15	SH	104,87%	0	0	0	1	0,45	0	0,55	1 (0,07), 7 (0,25), 12 (0,68)	0,1 4	14404 8,24	5388,8	0	0	2064 14,87	0,02
16	TH	100,82%	0,46	0,09	0	0,45	0,26	0	0,74	3 (0,15), 5 (0,49), 7 (0,00), 11 (0,28), 12 (0,08)	0	0	2870,71	0	0	2387 5,32	0

Tabla 50: Resultados software EMS modelo aprovechamiento de recursos VRS

Submodelo aprovechamiento de recursos - CRS													
DMU	Score	x_{2j} {I} {V}	x_{3j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{2j} {I}	{S} x_{3j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}	
1	BW	111,98%	0,3	0,37	0,32	0,49	0,51	3 (0,09), 5 (2,91), 6 (1,52), 12 (7,42)	0,06	0	0	0	0,02
2	BY	129,03%	0,43	0	0,57	0,25	0,75	3 (1,09), 5 (5,65), 12 (9,27)	0	701,11	0	0	0
3	BE	100,00%	1	0	0	0	1	11					
4	BB	126,88%	0,52	0	0,48	0,23	0,77	3 (0,19), 5 (2,12), 12 (1,09)	0	3885,75	0	0	0
5	HB	100,00%	0	0	1	0,67	0,33	11					

6	HH	100,00%	0	1	0	0,46	0,54	2					
7	HE	101,96%	0,3	0,37	0,33	0,47	0,53	3 (0,18), 5 (1,50), 6 (0,67), 12 (3,57)	0	0	0	0	0
8	MV	136,35%	0,39	0	0,61	0	1	3 (0,34), 5 (1,40)	0	8282,78	0	3295,1	0
9	NI	144,75%	0,4	0	0,6	0,17	0,83	3 (1,62), 5 (5,10), 12 (2,20)	0,02	31548,7	0	0,02	0,03
10	NW	100,00%	0,08	0,67	0,26	1	0	0					
11	RP	119,21%	0,41	0	0,59	0,24	0,76	3 (0,38), 5 (1,56), 12 (2,46)	0	4560,94	0	0	0
12	SL	100,00%	1	0	0	1	0	9					
13	SN	127,00%	0,33	0	0,67	0,16	0,84	3 (0,89), 5 (1,31), 12 (1,01)	0	6829,05	0	0	0
14	ST	108,73%	0,57	0	0,43	0	1	3 (0,17), 5 (2,56)	0,01	11220,63	0	19226,31	0
15	SH	133,98%	0,43	0	0,57	0,16	0,84	3 (0,58), 5 (2,12), 12 (0,35)	0	11015,51	0	0	0
16	TH	115,02%	0,41	0	0,59	0,18	0,82	3 (0,32), 5 (1,10), 12 (0,51)	0	5170,13	0	0	0

Tabla 51: Resultados software EMS submodelo aprovechamiento de recursos CRS

Submodelo aprovechamiento de recursos - VRS

DMU		Score	x_{2j} {I} {V}	x_{3j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{2j} {I}	{S} x_{3j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}
1	BW	100,00%	0	0	1	0	1	1					
2	BY	105,48%	0,17	0	0,83	0	1	1 (0,24), 7 (0,21), 10 (0,55)	0,01	24800,25	0	257299	0
3	BE	100,00%	1	0	0	0	1	7					
4	BB	116,81%	0	0,36	0,64	0,03	0,97	3 (0,00), 5 (0,26), 7 (0,28), 14 (0,45)	156385,75	0	0	0	0
5	HB	100,00%	0	0	1	0	1	4					
6	HH	100,00%	0	1	0	0,46	0,54	0					
7	HE	100,00%	0,33	0,05	0,62	0,31	0,69	8					
8	MV	130,53%	0,37	0	0,63	0,11	0,89	3 (0,26), 5 (0,34), 7 (0,01), 14 (0,39)	0	3735,25	0	0	0
9	NI	114,01%	0,32	0	0,68	0	1	3 (0,27), 7 (0,43), 10 (0,30)	0	33201,77	0	429790,66	0
10	NW	100,00%	0	1	0	1	0	2					
11	RP	113,26%	0,34	0	0,66	0,2	0,8	3 (0,16), 5 (0,18), 7 (0,61), 14 (0,05)	0,02	6406,69	0	0	0
12	SL	100,00%	0,97	0	0,03	1	0	0					

13	SN	117,87%	0,16	0	0,84	0	1	3 (0,57), 7 (0,43), 14 (0,00)	0	5798,42	0	73677,28	0
14	ST	100,00%	0	0	1	0	1	6					
15	SH	121,69%	0,23	0	0,77	0	1	3 (0,27), 7 (0,23), 14 (0,50)	0,02	4094,38	0	53545,2	0
16	TH	111,07%	0,34	0	0,66	0,15	0,85	3 (0,25), 5 (0,50), 7 (0,14), 14 (0,12)	0	4244,09	0	0	0

Tabla 52: Resultados software EMS submodelo aprovechamiento de recursos VRS

Submodelo mejorado aprovechamiento de recursos - CRS													
DMU	Score	x_{1j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	x_{5j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} x_{5j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}	
1	BW	100,00%	0,1	0,9	0	0	1	1					
2	BY	100,00%	1	0	0	0	1	0					
3	BE	116,51%	0,07	0,75	0,18	0	1	7 (0,56), 10 (0,01), 14 (0,28)	0	0	0	362019,86	0
4	BB	115,35%	0	0,9	0,1	0,67	0,33	5 (0,13), 7 (0,29), 14 (0,47)	0,34	0	0	0	0
5	HB	100,00%	0	1	0	0,67	0,33	1					
6	HH	137,29%	0,3	0,7	0	0	1	7 (0,22), 14 (0,54)	0	0	275,82	34428,27	0

7	HE	100,00%	0	0,94	0,05	0,73	0,27	9					
8	MV	150,00%	0,4	0,6	0	0	1	7 (0,11), 14 (0,80)	0	0	94,01	65590,7	0
9	NI	116,25%	0,03	0,86	0,11	0	1	1 (0,40), 7 (0,40), 10 (0,13)	0	0	0	516128,61	0
10	NW	100,00%	0	0	1	1	0	2					
11	RP	111,72%	0,14	0,86	0	0	1	7 (0,73), 14 (0,01)	0	0	204,58	60863,08	0
12	SL	100,00%	0,21	0,79	0	1	0	0					
13	SN	126,56%	0,16	0,84	0	0	1	7 (0,76), 14 (0,15)	0	0	57,03	269229,7	0
14	ST	100,00%	0	0,77	0,23	0	1	8					
15	SH	124,83%	0,24	0,76	0	0	1	7 (0,41), 14 (0,48)	0	0	260,35	151373,51	0
16	TH	123,39%	0,3	0,7	0	0	1	7 (0,22), 14 (0,56)	0	0	234,17	53657,24	0

Tabla 53: Resultados software EMS submodelo mejorado aprovechamiento de recursos CRS

Submodelo mejorado aprovechamiento de recursos - VRS													
DMU	Score	x_{1j} {I} {V}	x_{4j} {I} {V}	x_{5j} {I} {V}	y_{1j} {O} {V}	y_{2j} {O} {V}	Benchmarks	{S} x_{1j} {I}	{S} x_{4j} {I}	{S} x_{5j} {I}	{S} y_{1j} {O}	{S} y_{2j} {O}	
1	BW	100,00%	1	0	0	1	0	1					
2	BY	100,00%	1	0	0	0	1	0					

3	BE	100,00%	0,44	0	0,56	0,05	0,95	4					
4	BB	100,00%	0,42	0,08	0,51	1	0	0					
5	HB	100,00%	0,6	0,03	0,37	0,19	0,81	2					
6	HH	100,00%	0,86	0,12	0,02	0	1	0					
7	HE	100,00%	0,19	0,53	0,28	1	0	2					
8	MV	139,25%	0,56	0,2	0,25	0	1	3 (0,02), 5 (0,20), 11 (0,17), 14 (0,61)	0	0	0	55834,93	0
9	NI	109,50%	0,5	0	0,5	0	1	1 (0,52), 3 (0,40), 10 (0,09)	0	21904,94	0	355699,23	0
10	NW	100,00%	0	0	1	1	0	1					
11	RP	100,00%	0,81	0,03	0,17	0,05	0,95	4					
12	SL	100,00%	0,93	0,07	0	1	0	0					
13	SN	122,13%	0,31	0,48	0,2	0	1	3 (0,07), 7 (0,52), 11 (0,28), 14 (0,13)	0	0	0	221326,39	0,01
14	ST	100,00%	0	0,15	0,85	0,01	0,99	4					
15	SH	118,24%	0,44	0,56	0	0	1	7 (0,12), 11 (0,40), 14 (0,48)	0	0	178,71	118691,65	0
16	TH	103,82%	0,46	0,25	0,29	0	1	3 (0,04), 5 (0,52), 11 (0,38), 14 (0,05)	0	0	0	47606,73	0

Tabla 54: Resultados software EMS submodelo mejorado aprovechamiento de recursos VRS

Modelo calidad - CRS

DMU	Score	x_{1j} {I}{V}	x_{2j} {I}{V}	y_{1j} {O}{V}	y_{2j} {O}{V}	y_{3j} {O}{V}	Benchmarks	$\{S\}$ x_{1j} {I}	$\{S\}$ x_{2j} {I}	$\{S\}$ y_{1j} {O}	$\{S\}$ y_{2j} {O}	$\{S\}$ y_{3j} {O}	
1	BW	100,00%	1	0	0	0,78	0,22	2					
2	BY	100,00%	0,48	0,52	0	0	1	0					
3	BE	100,00%	0,03	0,97	0	0,14	0,86	4					
4	BB	154,51%	0,41	0,59	0,3	0	0,7	3 (0,83), 9 (0,26), 15 (0,16)	0	0	0	0,25	0
5	HB	100,00%	0	1	0	1	0	0					
6	HH	128,04%	0,46	0,54	0,45	0	0,55	3 (0,10), 8 (0,01), 15 (0,78)	0	0	0	0,99	0
7	HE	113,29%	0,7	0,3	0	0,51	0,49	1 (0,33), 9 (0,39), 15 (0,40)	0	0	0,03	0	0
8	MV	100,00%	0,45	0,55	0,8	0	0,2	2					
9	NI	100,00%	0,53	0,47	0,42	0	0,58	4					
10	NW	100,00%	1	0	0,34	0,15	0,51	0					
11	RP	106,33%	0,99	0,01	0,49	0,51	0	1 (0,07), 9 (0,54), 15 (0,21)	0	0	0	0	32,86
12	SL	100,00%	0,55	0,45	1	0	0	0					

13	SN	140,46%	0,37	0,63	0,29	0	0,71	3 (0,73), 9 (0,33), 15 (0,00)	0	0	0	1,23	0
14	ST	116,03%	0,55	0,45	0,53	0	0,47	3 (0,22), 8 (0,57), 15 (0,41)	0	0	0	1,34	0
15	SH	100,00%	0,78	0,22	0,45	0,42	0,13	6					
16	TH	100,00%	0,6	0,4	0,78	0,01	0,21	0					

Tabla 55: Resultados software EMS modelo calidad CRS

Modelo calidad - VRS														
DMU		Score	x_{1j} {I}{V}	x_{2j} {I}{V}	y_{1j} {O}{V}	y_{2j} {O}{V}	y_{3j} {O}{V}	Benchmarks	$\{S\}$ x_{1j} {I}	$\{S\}$ x_{2j} {I}	$\{S\}$ y_{1j} {O}	$\{S\}$ y_{2j} {O}	$\{S\}$ y_{3j} {O}	
1	BW	100,00%	1	0	0	0,76	0,24	0						
2	BY	100,00%	0,6	0,4	0	0	1	0						
3	BE	100,00%	0,88	0,12	0,01	0	0,99	2						
4	BB	142,32%	0	1	0	0,12	0,88	3 (0,30), 9 (0,26) 15 (0,44)	0,47	0	0	0	0	
5	HB	100,00%	0,5	0,5	0	0,92	0,08	0						
6	HH	100,00%	0,92	0,08	1	0	0	0						
7	HE	107,87%	0	1	0	0,41	0,59	9 (0,26), 10 (0,21), 15 (0,53)	0,01	0	0,03	0	0	

8	MV	100,00%	0	1	0,81	0	0,19	1					
9	NI	100,00%	0,53	0,47	0,46	0	0,54	4					
10	NW	100,00%	0,35	0,65	0,26	0,21	0,53	1					
11	RP	100,00%	0,96	0,04	0,11	0,51	0,38	0					
12	SL	100,00%	0	1	1	0	0	0					
13	SN	137,79%	0	1	0,14	0	0,86	3 (0,62), 9 (0,33), 15 (0,05)	0,12	0	0	1,12	0
14	ST	106,00%	0	1	0,55	0	0,45	8 (0,54), 9 (0,04), 15 (0,42)	0,44	0	0	0,94	0
15	SH	100,00%	0	1	0	0,77	0,23	4					
16	TH	100,00%	0,91	0,09	1	0	0	0					

Tabla 56: Resultados software EMS modelo calidad VRS

REFERENCIAS

- [1] M. Farrel, *The Measurement of Productive Efficiency*, 1957.
- [2] A. Charnes, W. Cooper y E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, 1978.
- [3] G. V. Caro, «Análisis por envoltura de datos (DEA): Nuevos modelos y aplicaciones,» 2003.
- [4] B. Golany y Y. Roll, *An application procedure for DEA*, 1989.
- [5] R. Dyson, *Pitfalls and protocols in DEA*, 2001.
- [6] W. Cooper, *Data Envelopment Analysis: History, Models, and Interpretations*, 2007.
- [7] R. D. Banker, A. Charnes y W. W. Cooper, *Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, 1984.
- [8] «Asociación Federal de la Industria de la Energía y el Agua,» [En línea]. Available: <https://www.bdew.de/wasser-abwasser/karten-der-wasserwirtschaft/deutschland/>.
- [9] «Ministerio de Medio Ambiente, Protección de la Naturaleza, Seguridad Nuclear y Protección al Consumidor Baden-Württemberg,» [En línea]. Available: <https://www.bmu.de/themen/wasser-und-binnengewasser/abwasser>.
- [10] „Ministerio de Medio Ambiente, Clima y Energía Baden-Württemberg,“ [Online]. Available: <https://um.baden-wuerttemberg.de/de/umwelt-natur/wasser/abwasser>.
- [11] „DWD - Deutscher Wetterdienst,“ [Online]. Available: https://www.dwd.de/DE/Home/home_node.html.
- [12] „Europäische Kommunalabwasser-Richtlinie,“ [Online]. Available: <https://kommunales-abwasser.de/>.
- [13] „DE Statis - Statistisches Bundesamt,“ [Online]. Available: https://www.destatis.de/DE/Home/_inhalt.html.
- [14] K. Fricke, «Umwelt Bundesamt,» [En línea]. Available: www.umweltbundesamt.de.
- [15] J. K. V. P. Joseph Tauber, „Climate relevance of the wastewater sector,“ 2022.
- [16] P. Macedo, V. Moutinho y M. Madaleno, *Advanced Mathematical Methods for Economic Efficiency Analysis*, Springer.
- [17] H. Scheel, «EMS: Efficiency Measurement System,» 2000.
- [18] R. Dyson, *Pitfalls and protocols in DEA*.

-
- [19] H. Eggleston, L. Buendia, K. Miwa, T. Ngará y K. Tanabe, «Directrices del IPCC de 2006 para los inventarios nacionales de gases de efecto invernadero - Volumen 5 Deshechos,» 2006.
- [20] «Ministerio de Medio Ambiente, Protección de la Naturaleza, Seguridad Nuclear y Protección al Consumidor Baden-Württemberg,» [En línea]. Available: <https://www.bmu.de/themen/wasser-und-binnengewasser/abwasser>.

GLOSARIO

BB: Brandenburg	18, 19
BCC: Banker-Charnes-Cooper Model	9
BE: Berlin	18, 19
BW: Baden-Württemberg	18, 19
BY: Bayern	18, 19
CCR: Charnes-Cooper-Rhodes Model	7
CRS: Constant Returns to Scale	5
DEA: Data Envelopment Analysis	1
DMU: Decision Making Unit	3
EMS: Efficiency Measurement System	1
FDH: Free Disposal Hull	10
HB: Bremen	18, 19
HE: Hessen	18, 19
HH: Hamburg	18, 19
MV: Mecklenburg-Vorpommern	18, 19
NI: Niedersachsen	18, 19
NW: Nordrhein-Westfalen	18, 19
RP: Rheinland-Pfalz	18, 19
SH: Schleswig-Holstein	18, 19
SL: Saarland	18, 19
SN: Sachsen	18, 19
ST: Sachsen-Anhalt	18, 19
TH: Thüringen	18, 19
VRS: Variable Returns to Scale	5