

ESTIMACIÓN GARANTISTA DE LA POSICIÓN DE UN QUADROTOR CON GPS

Ramón A. García, Manuel G. Ortega y Francisco R. Rubio

Depto. de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, {ramongr, mortega, rubio}@us.es

Guilherme V. Raffo

Depto. de Engenharia Eletrônica, Unisersidade Federal de Minas Gerais, raffo@ufmg.br

Resumen

La aplicación de dos métodos de estimación garantistas sobre un quadrotor se presentan en este artículo. Se tiene un modelo del sistema discretizado en el que se calcula su posición cada T segundos, mientras que la medida del GPS es cada t_{sincro} segundos. Se aplicaron los algoritmos garantistas para contemplar las posibles posiciones en las que se puede encontrar el quadrotor y posteriormente, gracias a la medida del sensor corregir y mejorar la estimación realizada.

Palabras clave: Estimación garantista, aritmética intervalar, zonotopos, quadrotor, GPS.

1. Introducción

Un quadrotor es un vehículo aéreo con cuatro motores coplanarios. En la Fig.1 se observa un esquema con las distintas fuerzas y momentos que actúan sobre dicho tipo de vehículo.

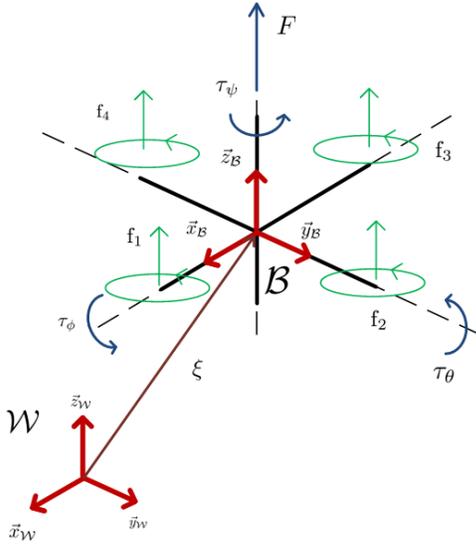


Figura 1: Esquema de las Fuerzas y Pares sobre un Quadrotor.

Se trata pues de un sistema continuo cuya medición de la posición a través de un GPS se realiza de forma discreta. Se tienen dos tiempos de mues-

treo, uno debido a la implementación del observador discreto, T , y otro con el que se realizan las mediciones del GPS, t_{sincro} , donde $T < t_{sincro}$. En la Fig.2 se puede apreciar el comportamiento que se plantea: en el instante de partida t_1 se tiene tanto la estimación de la posición a través de las ecuaciones del modelo como la medida de la señal GPS, y hasta que no han transcurrido t_{sincro} segundos no se volverá a tener la sincronización con el GPS. Mientras que en los instantes de tiempo intermedios, cada T segundos, se tendrá la estimación basada en las ecuaciones del modelo del sistema. El uso de dos tiempos de muestreo ya ha sido empleado en [11], donde se trabaja con un tiempo para el modelo y otro para la medida del sensor, aunque con fines distintos.

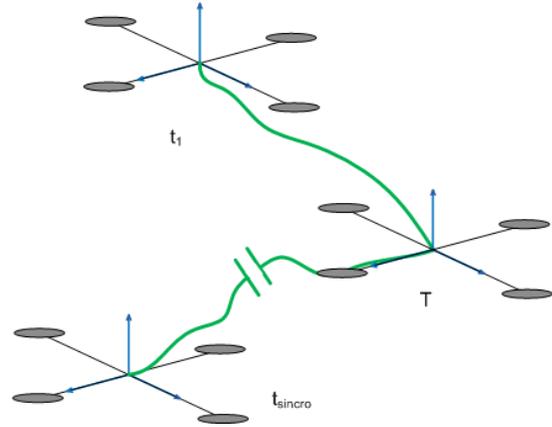


Figura 2: Ejemplo instantes de muestreo utilizados.

Por otro lado, el modelo presenta distintas incertidumbres que pueden provenir de diversas fuentes, tales como error al medir la masa o la distribución de la misma, dinámica del sistema no contemplada, imposibilidad de medir perturbaciones como viento, efecto suelo, etc. También existe la posibilidad de tener incertidumbres a la hora de realizar la medida por parte de los sensores, como muestra la Fig.3. Si se considera una medida totalmente precisa nos encontraremos en el caso (a). Si por el contrario, se considera que la medida no sea perfecta y se asume que puede tener cierta inexactitud, se tiene el caso (b). Más en detalle, en la Fig.3 se representa un proceso de estimación, donde en

un momento o instante determinado se realiza una medición con el GPS o sincronización. Considerando un sistema lineal con una fuerza externa también lineal, se tiene debido a dicho proceso para cada coordenada en el caso (a) un triángulo, ya que al sincronizar nos fiamos completamente de la medida y por tanto al “resetear” tenemos un solo punto, mientras que para el caso (b) lo que se obtiene es un trapecio, ya que al “resetear” no se tiene un punto sino un conjunto de puntos posibles en los que se puede encontrar el estado.

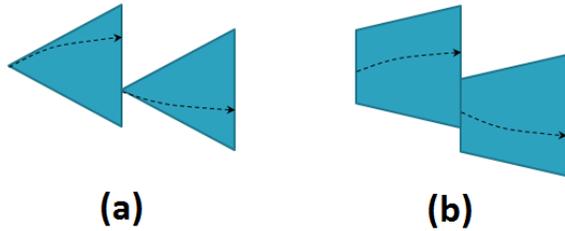


Figura 3: Ejemplos de medida GPS.

A la hora de estimar las variables de estado de un sistema, existen diferentes métodos posibles. Entre ellos, los observadores de estado, usados en diferentes aplicaciones, por ejemplo [1], [12], [8], [14] y [5]. Basándonos en la clasificación realizada en [6] podemos resaltar tres tipos:

1. El observador de Luenberger que no trata explícitamente las incertidumbres.
2. Estimadores basados en el comportamiento estadístico, como el filtro de Kalman que presupone el ruido con cierta función de probabilidad.
3. Estimadores basados en estados garantistas, los cuales no necesitan presuponer una función de probabilidad sino que se basan en que las variables estarán acotadas dentro de un determinado rango, es decir, son conjuntos compactos (en \mathbb{R}^n que sean acotados y cerrados).

Como ejemplo de este último tipo, si se usaran intervalos como método de estimación garantista, sin la necesidad de suponer una función de probabilidad como se hace en el caso del filtro de Kalman, sólo hay que tener en cuenta que el ruido o la incertidumbre están acotados entre un valor máximo y uno mínimo. De este modo, no es necesario recurrir a un estudio estadístico de dicho ruido, lo que en ocasiones puede ser difícil o tedioso de calcular.

Continuando con [6], los estimadores garantistas dan como resultado un estado estimado que es un dominio en el espacio de estados. Dicho dominio

representa una cota exterior de todos los posibles estados que son consistentes tanto con el modelo incierto (con incertidumbres y/o ruido) como con las medidas inciertas (con incertidumbres y/o ruido).

Tal dominio se puede representar de diversas maneras, ya sea mediante elipsoides, cajas (provenientes del uso de aritmética intervalar), paralelotoos o incluso politopos de complejidad limitada, es decir, con un número de vértices y caras limitado. Según el método empleado para representar el dominio, se tendrá de mayor o menor manera el llamado efecto *wrapping*¹, es decir, será más o menos conservador en función de cómo se acoten las soluciones. No es lo mismo acotarlo por una caja de lados paralelos a los ejes, que por un paralelepípedo o por un zonotopo. En la Fig.4 se puede observar el conjunto de estados posibles, la acotación externa mediante una caja cuyos lados son paralelos a los ejes (supuestos ejes en horizontal y vertical), y un paralelepípedo cuyos lados no son paralelos a los ejes y que se intenta adaptar mejor a la forma del conjunto de estados posibles. Se puede apreciar como la solución obtenida por medio de la caja es más conservadora que la obtenida por el paralelepípedo.

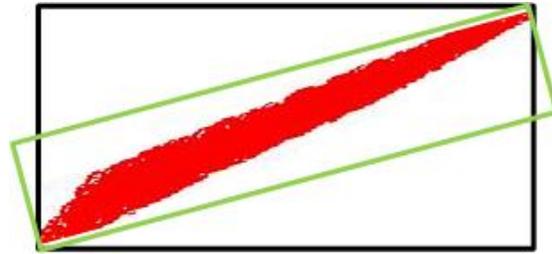


Figura 4: Ejemplo de ajuste del conjunto de posibles estados.

En este artículo se pretende diseñar un observador que estime el estado del sistema haciendo uso de las medidas obtenidas del mismo. El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera, en la sección 2 se presenta el modelo del sistema. Los dos algoritmos usados serán introducidos en la sección 3 y posteriormente se verán los resultados obtenidos mediante simulación a un caso de estudio en la sección 4. Finalmente, las conclusiones se muestran en la sección 5.

¹El efecto *wrapping* es el hecho de añadir más soluciones de las reales al utilizar un método de acotación demasiado conservador y por tanto obtener un conjunto de posibles estados mayor que los posibles estados reales que podría alcanzar el sistema.

2. Modelado del Sistema

Partiendo del caso general, sea un sistema discreto con incertidumbres, tanto en el modelo como en la medida, dado por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, w_k) \\ y_k = g(x_k, v_k) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $y_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa errores de modelado así como perturbaciones y finalmente $v_k \in \mathbb{R}^{p_v}$ representa el vector de ruidos en las mediciones.

Para los métodos que se van a emplear en la resolución de la estimación, se supone que las incertidumbres están acotadas dentro de unos valores concretos, sin importar la distribución estadística. Por ello se asume que $w_k \in W$, $v_k \in V$ y $x_0 \in X_0$.

Particularizando (1) en el caso de que se desee estimar la posición espacial de un quadrotor, se parte de la segunda Ley de Newton, considerando que todas las fuerzas se agrupan en una sola componente. Siendo análogas las expresiones para los tres ejes, si se considera la expresión sólo para la componente x , se tendrá $\ddot{x} = \frac{F_x}{m}$. Trasladándolo al espacio de estados, se pueden definir dos estados, $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$

Se tiene pues un sistema descrito por la posición y la velocidad en \mathbb{R}^6 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \frac{F_x}{m} \\ \frac{F_y}{m} \\ \frac{F_z}{m} \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde x, y, z son las coordenadas en posición, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ son las velocidades lineales, m es la masa del vehículo y F_x, F_y, F_z son fuerzas aplicadas en cada uno de los ejes respectivamente.

Si se expresa (2) en tiempo discreto, el resultado

sería:

$$\begin{bmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \\ x_{3k+1} \\ x_{4k+1} \\ x_{5k+1} \\ x_{6k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} + Tx_{4k} \\ x_{2k} + Tx_{5k} \\ x_{3k} + Tx_{6k} \\ x_{4k} \\ x_{5k} \\ x_{6k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \frac{F_x}{m} \\ \frac{T^2}{2} \frac{F_y}{m} \\ \frac{T^2}{2} \frac{F_z}{m} \\ T \frac{F_x}{m} \\ T \frac{F_y}{m} \\ T \frac{F_z}{m} \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde T es el tiempo de muestreo empleado.

Se han mostrado de forma reducida las fuerzas aplicadas, si se desarrollan incluyendo el subsistema de rotación de un quadrotor, se pueden expresar las fuerzas aplicadas como:

$$\begin{aligned} F_x &= (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)u + A_x \\ F_y &= (\cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi)u + A_y \\ F_z &= (\cos \phi \cos \theta)u + A_z \end{aligned} \quad (4)$$

siendo ϕ, θ, ψ los ángulos de Euler (roll, pitch y yaw respectivamente), u el empuje total y A_i la perturbación en el eje i correspondiente. Sin embargo en (3) se ha empleado una notación simplificada en lugar de hacer referencia a los ángulos de Euler o al empuje, ya que eso es objeto de cálculo del controlador de estabilización el cual no se está abordando en esta parte, es decir, aquí se calculan F_x, F_y, F_z necesarias para el movimiento traslacional y a partir de dichas fuerzas se calcularía en el control rotacional los ángulos y empuje necesarios.

Una vez presentado el sistema, se verá cómo se ha abordado la resolución del problema. Dado el sistema se quiere estimar su posición a través de un modelo discreto con incertidumbres y una medición de la posición del mismo, que podrá ser a su vez incierta o no, según el caso de estudio.

3. Algoritmos utilizados

A continuación se mostrarán los dos casos objetos de estudio: aritmética intervalar y zonotopos. Se ha considerado el movimiento en el plano XY, reordenando los estados de (3) y sin usar las componentes correspondientes al eje z.

3.1. Aritmética Intervalar

La idea de utilizar la aritmética intervalar en estimación garantista surge de la partida del conocimiento de los límites de las incertidumbres, por ejemplo, se conoce que puede haber un error máximo y mínimo a la hora de calcular la masa, pero no se sabe exactamente cuanto es el valor del error.

Visto el motivo de su aplicación, se verá el sistema reordenado a partir de (3):

$$\begin{bmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \\ x_{3k+1} \\ x_{4k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} + Tx_{3k} \\ x_{2k} + Tx_{4k} \\ x_{3k} \\ x_{4k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \frac{F_x}{m} \\ \frac{T^2}{2} \frac{F_y}{m} \\ T \frac{F_x}{m} \\ T \frac{F_y}{m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde x_1 es la posición x , x_2 es la posición y , x_3 es la velocidad \dot{x} y x_4 es la velocidad \dot{y} . El resto de la notación es la utilizada en (3).

Para abordar el problema, se hace uso de una adaptación del algoritmo presentado en [9], donde se hace uso de la aritmética intervalar para estimar el estado de un sistema autónomo ($x_{k+1} = f(x_k)$). Esquemáticamente, el algoritmo es el siguiente:

- Paso 1: $[\hat{x}](t_2) = [x](t_1) + (t_2 - t_1) \square f([x](t_1))$
- Paso 2: $[v] = [x](t_1) \cup [\hat{x}](t_2)$
- Paso 3: $[w] = \text{inflado}([v], \alpha\omega[v] + \beta)$
- Paso 4: $[x](t_2) = [x](t_1) + (t_2 - t_1) \square f([w])$

donde $\omega[v]$ es la longitud de su lado mayor y la operación de inflado dado una caja $[x]$ y un escalar ϵ es: $\text{inflado}([x], \epsilon) = [\underline{x}_1 - \epsilon, \bar{x}_1 + \epsilon] \times \dots \times [\underline{x}_n - \epsilon, \bar{x}_n + \epsilon]$

Como resultado negativo de usar un método tan conservador como el propuesto con la aritmética intervalar es el llamado efecto *wrapping*. En la Fig.4 se puede observar cómo la función f está acotada por la caja de color negro cuando en realidad hay zonas de dicha caja en las que no cae ningún punto.

La fuente de incertidumbre en el modelo se ha supuesto que sea un error a la hora de la medición de la masa, m . Debido a ello se tendrá un intervalo en el que se podrán encontrar los distintos estados.

La función de inclusión² $\square f$ de (5) será (por simplicidad en la notación se han omitido los subíndices k):

$$\square f([x]) = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1, \bar{x}_1] + T[\underline{x}_3, \bar{x}_3] + \frac{T^2}{2} [\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] F_x \\ [\underline{x}_2, \bar{x}_2] + T[\underline{x}_4, \bar{x}_4] + \frac{T^2}{2} [\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] F_y \\ [\underline{x}_3, \bar{x}_3] + T[\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] F_x \\ [\underline{x}_4, \bar{x}_4] + T[\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] F_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

²Según otros autores se puede expresar como $[f]$

siendo T el tiempo de muestreo. Se han elegido $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,0001$. A la hora de calcular $\omega[v]$ se han separado los estados en función a la coordenada que representen, es decir, x_1 y x_3 por un lado y x_2 y x_4 por otro. Una vez hecha la distinción, se aplica a cada pareja de forma separada aquel que sea el mayor de cada par.

3.2. Zonotopos

La idea es utilizar otro procedimiento que permita una estimación garantista cuyo resultado sea una acotación menos conservadora. Se vuelve a partir del conocimiento de los límites de la incertidumbre, pero esta vez no se suponen que tengan forma rectangular, o de caja, sino que se permite una forma más compleja, haciendo usos de politopos, concretamente de zonotopos.

En esta ocasión, el sistema reordenado a partir de (3), es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \\ x_{3k+1} \\ x_{4k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} + Tx_{2k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} + Tx_{4k} \\ x_{4k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \frac{F_x}{m} \\ T \frac{F_x}{m} \\ \frac{T^2}{2} \frac{F_y}{m} \\ T \frac{F_y}{m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde x_1 es la posición x , x_2 es la velocidad \dot{x} , x_3 es la posición y y x_4 es la velocidad \dot{y} . El resto de notación es la ya utilizada en (3).

Según el algoritmo mostrado en [4]:

- Paso 1: Usar una función de inclusión para acotar la trayectoria del sistema no lineal con incertidumbres.
- Paso 2: Calcular una cota del conjunto de estados consistente.
- Paso 3: Calcular una cota ajustada del conjunto intersección.

Para el paso 1, se empleará el método de Kühn [10], con el cual se consigue un zonotopo que acota los posibles estados del sistema. Para el paso 2, a partir de las medidas obtenidas se estimará una franja del conjunto de variables de estados factibles para dicha medición. Y por último para el paso 3 habrá que calcular la intersección entre zonotopo y franja. Por tanto, lo que se verá en este momento es cómo calcular una franja de posibles estados a partir de una medición.

En [4] viene detallado cómo obtener un conjunto de estados a través de la medida tomada. Para ello se tendrán tantas franjas como componentes

de la salida; siendo la salida $y_k = g(x_k, v_k)$ donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $v_k \in \mathbb{R}^{p_v}$ es el ruido en la medida.

Supongamos que tenemos una medida $y_k \in \mathbb{R}^p$, se tiene como conjunto de estados consistentes con la medida, denotado por X_{y_k} :

$$X_{y_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k \in g(x, V)\}$$

Se define $X_{y_k}(i)$ como el conjunto de estados consistentes con la componente i -ésima de y_k :

$$X_{y_k}(i) = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k(i) \in g_i(x, V)\}$$

donde $g_i(x, V)$ denota la i -ésima componente de $g(x, V)$.

Con ambas definiciones tendremos que:

$$X_{y_k} \subseteq \bigcap_{i=1}^p X_{y_k}(i)$$

En [4] se demuestra por qué una franja sirve de cota externa para el intervalo, en este artículo nos quedaremos con el resultado, y el procedimiento para obtener a partir de una medida una franja. Se supone dado un zonotopo \hat{X}_k y una medida y_k . Se deben obtener mediante aritmética intervalar el vector $c_i \in \mathbb{R}^n$ y los escalares $s_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ tal que:

- $c_i = \text{mid}(\square \nabla_x g_i(\hat{X}_k, V))$
- $c_i^T \hat{X}_k - g_i(\hat{X}_k, V) \subseteq [s_i - \sigma_i, s_i + \sigma_i]$

entonces, si $X_{y_k}^e(i) = \{x : |c_i^T x - y_k(i) - s_i| \leq \sigma_i\}$ resulta que la intersección entre el zonotopo \hat{X}_k y el conjunto de estados consistentes i -ésimo pertenecerá a la intersección entre el zonotopo \hat{X}_k y la franja i -ésima $X_{y_k}^e(i)$:

$$\hat{X}_k \cap X_{y_k}(i) \subseteq \hat{X}_k \cap X_{y_k}^e(i)$$

4. Simulaciones

Una vez vistos los algoritmos, se mostrarán los resultados obtenidos en simulación.

4.1. Aritmética Intervalar

Una de las ventajas de usar intervalos, es que la intersección de dos intervalos sigue siendo un intervalo. Este hecho, sin embargo, no ocurre con los zonotopos.

Realizando una simulación cuya fuerza aplicada consiste en un escalón de subida y otro de bajada para volver al punto inicial, sin incertidumbres en la medida, se obtiene como resultado el mostrado en la Fig.5. En la simulación se cuenta con dos tiempos distintos, un tiempo de sincronización de 1 segundo (recordar que este tiempo es el que hay entre lectura y lectura del GPS) y uno de muestreo

de 20 milisegundos (recordar que este tiempo es el que transcurre entre cálculo y cálculo del vector de estados).

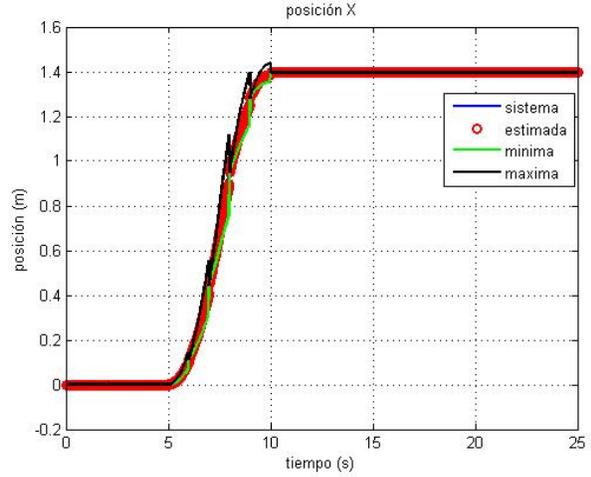


Figura 5: Coordenada X con GPS sin incertidumbres.

Si ahora, la medida del GPS se considera no “fiable” y se supone un dispositivo diferencial con un error de $\pm 0,2m$ por ejemplo, se puede observar en la Fig.6 como varían los resultados. Al igual que en el caso “fiable” el tiempo de sincronización es de 1 segundo y el de muestreo de 20 milisegundos.

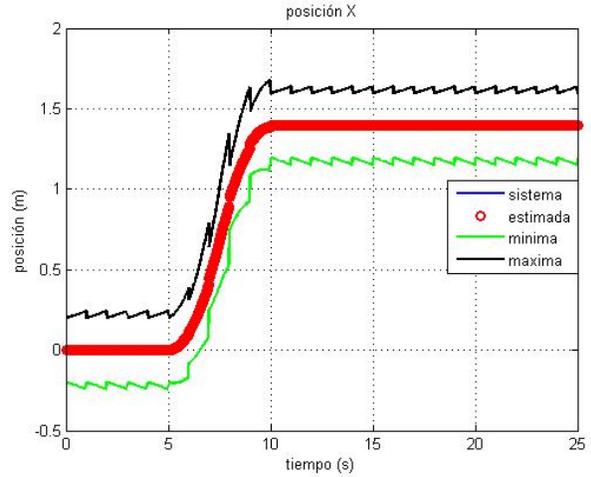


Figura 6: Coordenada X con GPS con incertidumbres.

4.2. Zonotopos

Al igual que con el caso de la aritmética intervalar se mostrarán los resultados sobre el eje x , la fuerza aplicada consiste en un escalón de subida y otro de bajada para volver al punto inicial y que así se llegue a un estado en régimen permanente.

Realizando la simulación bajo dos condiciones,

medida de la señal GPS considerada exacta, y considerada con una desviación de 0.2 metros se obtienen las Fig.7 y 8 respectivamente.

En la Fig.7 se puede apreciar como al principio el área de la región definida por el zonotopo crece hacía un zonotopo mayor, pero conforme se reciben las señales fiables del GPS se consigue reducir el tamaño del zonotopo que relaciona la posición, coordenada x_1 , con la velocidad, coordenada x_2 .

En la Fig. 8 se puede apreciar como en esta ocasión en la que las medidas del GPS no se consideran exactas, no se tiene una disminución drástica de los zonotopos.

5. Conclusiones

Se ha presentado la aplicación sobre un quadrotor de dos estimadores garantistas, uno basado en aritmética intervalar y otro en el uso de zonotopos.

La aplicación de algoritmos garantistas se llevó a cabo debido a que se tiene un modelo continuo con medidas de la posición de forma discreta, en tiempos mayores a los de muestreo del sistema. Por tanto si solo se usara la información del sensor, se tendrá durante instantes de tiempos sin cerrar el lazo de control. Para tener el lazo de control cerrado se tiene el modelo al que se le añaden posibles incertidumbres y se contempla los posibles estados a los que puede llegar el sistema.

Además, permite percatarse de que no solo se necesita el camino que se desee seguir libre de obstáculos, sino que además se necesita una zona donde es posible que se encuentre el quadrotor.

Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento al MCEI por la financiación de este trabajo, a través de los proyectos DPI2010-19154 y DPI2012-37580-C02-02 así como a FAPEMIG y al *Programa Institucional de Auxílio à Pesquisa de Doutores Recém Contratados* de la PRPq/UFGM.

Referencias

- [1] Abbott, E. and Powell, D., Land-Vehicle Navigation Using GPS. Proceedings of the IEEE, Vol. 87, No.1, 1999.
- [2] Alamo, T., Bravo, J.M. and Camacho, E.F. Guaranteed state estimation by zonotopes. Automatica Vol. 41, Issue 6, pages 1035-1043, 2005.
- [3] Bravo, J.M., Alamo, T. y Camacho, E.F., Estimación Garantista de Estados en Sistemas Híbridos.

- [4] Bravo, J.M., Control predictivo no lineal robusto basado en técnicas intervalares (Tesis Doctoral)
- [5] Brunke, S. and Campbell, M., Estimation Architecture for Future Autonomous Vehicles. Proceedings of the American Control Conference, 2002.
- [6] Combastel, C., A State Bounding Observer Based on Zonotopes. Proceedings of European Control Conference, 2003
- [7] Combastel, C., A State Bounding Observer for Uncertain Non-linear Continuous-time Systems based on Zonotopes. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, 2005.
- [8] Farrelly, J. and Wellstead, P., Estimation of Vehicle Lateral Velocity. Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Applications, 1996.
- [9] Jaulin, L., Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. Automatica, Vol. 38, Issue 6, pages 1079-1082, 2002.
- [10] Kühn, W., Rigorously Computed Orbits of Dynamical Systems without the Wrapping Effect. Computing 61, 47-67, 1998.
- [11] Orihuela, L., Rubio, F.R. and Gómez-Estern, F., Model-Based Networked Control Systems under Parametric Uncertainties. 18th IEEE International Conference on Control Applications, 2009.
- [12] Raïsi, T., Efimov, D. and Zolghadri, A., Interval State Estimation for a Class of Nonlinear Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, No.1, 2012.
- [13] Redondo, M.J., Aplicaciones de Técnicas DC a Identificación Paramétrica, Estimación de Estados y Conjuntos Invariantes, en Sistemas No Lineales (Tesis Doctoral)
- [14] Scholte, E. and Campbell, M.E., On-line Nonlinear Guaranteed Estimation with Application to a High Performance Aircraft. Proceedings of the American Control Conference, 2002.
- [15] Vu Tuan Hieu LE, Robust predictive control by zonotopic set-membership estimation (Tesis Doctoral)

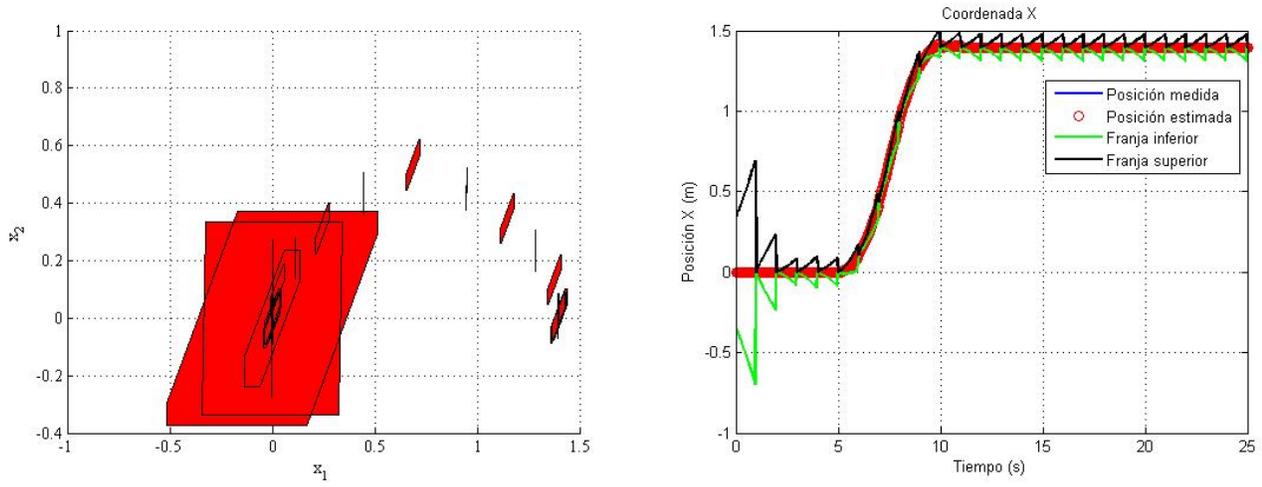


Figura 7: Zonotopo $X \dot{X}$ con GPS sin incertidumbres.

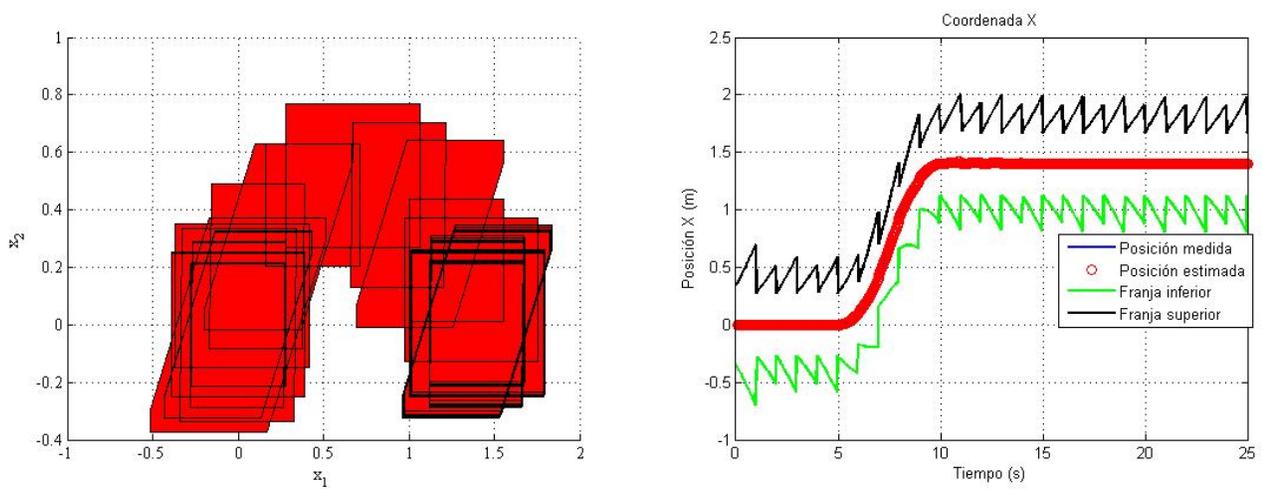


Figura 8: Zonotopo $X \dot{X}$ con GPS con incertidumbres