QUÉ TIENEN DE ESPECIALES LAS FUNCIONES ESPECIALES

Discurso de recepción
como académica de número de la
Real Academia Sevillana de Ciencias por el
Ilmo. Sr. D. Antonio J. Durán,
celebrado el día 1 de junio de 2022

1. INTRODUCCIÓN Y AGRADECIMIENTOS

Sr. Presidente, señores académicos, queridos amigos, señoras y señores:

Es para mí un honor haber sido elegido para formar parte de la Real Academia Sevillana de Ciencias. Me siento por ello sinceramente agradecido y ofrezco mi compromiso para colaborar, participar e impulsar las actividades científicas de la Academia en la medida de mis posibilidades.

Quiero empezar mostrando mi agradeciendo a todos aquellos que, de una u otra forma, me han ayudado en mi carrera científica.

En este sentido creo que la mención más importante y especial es para Juan Arias de Reyna, mi indiscutible maestro y miembro de esta Academia. Creo que lo más importante que Juan nos ha dado, a mí y a todos los que nos consideramos alumnos suyos, es un modelo: un modelo de lo que un científico tiene que ser, y, en particular, un modelo de lo que un matemático tiene que ser, lo que incluye saber qué es lo importante y qué lo accesorio en matemáticas. Y también un modelo de comportamiento impecablemente ético. Y eso, en un país donde este tipo de modelos no son precisamente abundantes, es muchísimo.

También debo mencionar a Antonio de Castro, ya desaparecido y miembro fundador de esta Academia, y que dirigía el Departamento de Análisis Matemático cuando me incorporé al mismo hace 37 años.

Y en otro orden de cosas, a Guillermo Curbera, colega, amigo y compañero, y también a Luis Rodríguez Piazza, con quienes inicié mi andadura por la senda de la investigación y la vida de profesor universitario.

Mención también merece el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, que ayudé a crear y que ha aunado a los investigadores en matemáticas de la Universidad haciendo que el conjunto sea más potente que la suma de sus componentes.

Agradezco al académico Enrique Fernández Cara por contestar a mi discurso, y por los ya muchos y excelentes momentos que hemos pasado juntos, ya sea corriendo esforzadamente, ya reponiéndonos de la carrera con buenas comidas y mejores vinos.

También quiero mostrar mi agradecimiento a todos los investigadores, nacionales y extranjeros, con los que he colaborado, en especial a los profesores Alberto Grünbaum y Christian Berg, por hacerme mejor científico de lo que hubiera sido de no haberlos conocido.

Y en último lugar, que en realidad es el primero, no debe faltar mi más entrañable agradecimiento a mi familia por toda la felicidad y apoyo que me han dado.

En este discurso trataré algunas de las razones por las que yo creo que todavía las Academias, o los académicos tienen un papel que jugar en la sociedad actual; o dicho de otra manera, qué puede la sociedad actual esperar, e incluso demandar, de un académico.

Dado que esta es una academia de ciencias, naturalmente se debe empezar por exigirle a sus miembros cierto nivel de excelencia científica. En este sentido, y como es por otro lado habitual, comentaré algunas de las aportaciones científicas por las que entiendo he sido elegido miembro de esta Academia. Pero procuraré también intercalar algunas otras contribuciones, aparte de la excelencia científica que cabría esperar también de los académicos y que se pueden sintetizar en dos frases: Promoción de la ciencia, por un lado, y Generación de opinión, por otro".

2. FUNCIONES ESPECIALES. BIESPECTRALIDAD

Así pues, empezaré este discurso hablando del área donde he desarrollado buena parte de mi investigación científica para situar en ella aquellas de mis aportaciones que considero más relevantes.

Esta área responde al nombre genérico de funciones especiales y, dentro de ella, por concretar más, mis mejores resultados los he obtenido en el ámbito de la llamada biespectralidad.

Empecemos por las funciones especiales. Seguro que la audiencia conoce lo que son las raíces cuadradas o cúbicas, las funciones exponenciales, los logaritmos, o las funciones trigonométricas. A estas funciones las llamamos elementales porque, en cierta forma, vienen a resolver problemas elementales del cálculo infinitesimal, lo que, dada la interpretación física de la derivada, es tanto como decir problemas elementales de la dinámica. Sin embargo, la solución explícita de ciertos modelos matemáticos de interés para la física matemática (ya no tan básica, pensemos en modelos mecánico-cuánticos) o la tecnología dependen frecuentemente del uso de otras funciones a las que, para diferenciarlas de las elementales, llamamos funciones especiales. Dicho de otra forma, las funciones especiales permiten aplicaciones concretas de las matemáticas a una infinidad de problemas, ya sea en física matemática, astronomía, o todo tipo de tecnologías (desde el diseño y estudio de estructuras de grandes obras públicas al uso de las modernas tecnologías para el diagnóstico médico por imagen). El profesor Grünbaum, de la Universidad de Berkeley, con el que he colaborado durante bastantes años, acuñó una metáfora muy acertada aunque algo escatológica sobre las funciones especiales: si vemos la ciencia y la tecnología como una gran ciudad, las funciones especiales serían como las cañerías y el alcantarillado, que contribuyen esencialmente al buen funcionamiento de la ciudad y procuran confort a sus habitantes, por más que se suelan ocultar porque tampoco es raro que su visión pueda resultar ofensiva para los no habituados.

En cuanto a la biespectralidad, su motivación original se encuentra en una serie de trabajos en teoría de la señal, que ya se han convertido en clásicos, realizados en los célebres Laboratorios Bell por C. Shannon, D. Slepian, H. Landau y H. Pollak en los años 60 del siglo XX ([108, 109, 110, 111, 112]). Este tipo de problema que estudiaban en los Laboratorios Bell ha vuelto a aparecer repetidas veces en varios ámbitos de la tecnología; por ejemplo, en el diagnóstico médico usando distintos tipos de tomografía, especialmente la de rayos X. Tienen que ver, por un lado, con el estudio de la optimización entre la dosis de radiación aplicada y la calidad de la imagen obtenida y, por otro lado, con problemas de ángulo limitado en este tipo de exploraciones del cuerpo humano ([107]). El éxito de la investigación de Shannon, Slepian, Landau y Pollak residió en una todavía inexplicada conjunción de milagros matemáticos que se puede describir brevemente del siguiente modo: las funciones especiales que vienen a resolver su problema son autofunciones de dos operadores distintos actuando en distintas variables. Uno de estos operadores relaciona las funciones con el problema de teoría de la señal que querían estudiar en los Laboratorios Bell, y es un operador de tipo integral que hace muy inestable el cálculo explícito de las funciones especiales en cuestión. Por contra, el otro operador implicado, que aparentemente no guardaba relación con el problema, aunque sí con las funciones especiales buscadas, es de tipo diferencial, y a la postre permitió la solución explícita del problema. Al resolver estas funciones un problema espectral con respecto a dos operadores (cada uno actuando en una variable), los profesores Duistermaat y Grünbaum [22] acuñaron posteriormente la denominación *biespectrales* para referirse a este tipo de problemas.

Los problemas biespectrales tienen conexiones muy sorprendentes en bastantes áreas de las matemáticas. Por citar solo algunas, se pueden mencionar el estudio de soluciones racionales de la jerarquía de ecuaciones de Korteweg-De Vries y sus simetrías maestras, anillos conmutativos de operadores diferenciales, deformaciones isomonódromas de ecuaciones diferencias lineales, álgebras de Weyl, flujos de Toda, etc.

3. POLINOMIOS ORTOGONALES CLÁSICOS

Entre las funciones especiales más útiles destacan ciertas familias de polinomios que tienen un carácter biespectral: son los llamados polinomios ortogonales clásicos y clásicos discretos. Dada su ubicuidad en muy diferentes problemas, podemos considerar que estas familias son el caballo de batalla de buena parte de la física matemática clásica, con aplicaciones que van de la teoría del potencial al electromagnetismo, pasando por su aparición estelar en la mecánica cuántica en los trabajos de Schrödinger de los años 20 del siglo XX, donde le aparecieron al físico austríaco al resolver su celebrada ecuación en el caso particular del átomo de hidrógeno.

Podemos describir las familias clásicas de polinomios ortogonales del siguiente modo. Tenemos una sucesión $(p_n(x))_n$ de polinomios, donde x indica la variable continua con respecto a la que son funciones y n una variable discreta que indica el grado del polinomio $p_n(x)$. Por un lado, exigimos que estos polinomios sean ortogonales con respecto a una medida μ en la recta real:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\, d\mu(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ a_n \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Para los no habituados, el concepto de ortogonalidad viene a extender el venerable concepto de perpendicularidad que aparece en el teorema de Pitágoras a objetos más generales que los lados de un triángulo.

Esta propiedad analítica de ortogonalidad (asociada al producto escalar propio de un espacio de Hilbert) es equivalente a la siguiente propiedad espectral en la variable discreta n: existe un operador en diferencias T de segundo orden actuando en la variable discreta n del tipo

$$T(f_n) = a_{n+1}f_{n+1} + b_n f_n + c_n f_{n-1},$$

donde a_n, b_n, c_n son sucesiones de números, tal que

$$T(p_n(x)) = xp_n(x).$$

El resultado anterior es la versión para polinomios ortogonales del teorema espectral y se conoce como teorema de Favard (por más que el resultado ya era conocido para, entre otros, Stieltjes y Chebyshev y apareció explícitamente contenido en el libro de Stone [113], que se publicó un par de años antes que el artículo de Favard [59]).

Las familias clásicas de polinomios ortogonales surgen cuando, además de esta propiedad espectral, exigimos a la familia $p_n(x)$ que resuelva otro problema espectral, en este caso en la variable continua x: existe un operador diferencial D de segundo orden, actuando en la variable continua x, del tipo

$$D(f(x)) = A_2(x)f''(x) + A_1(x)f'(x) + A_0(x)f(x),$$

donde $A_2(x)$, $A_1(x)$ y $A_0(x)$ son funciones de x independientes de n, tal que

$$D(p_n(x)) = \lambda_n p_n(x),$$

con λ_n independiente de x (esto implica, en particular, que las funciones A_2, A_1 y A_0 son polinomios de grado menor o igual que 2, 1 y 0, respectivamente).

Teniendo en cuenta el tipo hipergeométrico de la ecuación diferencial definida por el operador D, no es difícil adivinar la conexión que tendrán las familias clásicas con algunos problemas físicos muy relevantes.

Las familias clásicas de polinomios ortogonales fueron clasificadas en 1929 por Salomon Bochner [16] (aunque el resultado ya había sido demostrado por E. J. Routh unas décadas antes [103]). Hay solo cuatro familias clásicas, y conforman la aristocracia en el reino de los polinomios ortogonales ([80, 94, 114]). Las medidas de ortogonalidad de las familias clásicas se corresponden con las principales distribuciones continuas de probabilidad (una muestra más de su versatilidad y utilidad).

1. Polinomios de Hermite, ortogonales en $(-\infty, +\infty)$ con respecto a e^{-x^2} (distribución normal de probabilidad).
2. Polinomios de Laguerre, ortogonales en $(0, +\infty)$ con respecto a $x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ (distribución gamma de probabilidad).
3. Polinomios de Jacobi, ortogonales en $(-1, 1)$ con respecto a $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, α, $\beta > -1$ (distribución beta de probabilidad).
4. Polinomios de Bessel.

Las familias clásicas se construyeron entre finales del siglo XVIII y la primera parte del siglo XIX. La primera en ser estudiada fue el caso $\alpha = \beta = 0$: son los llamados polinomios de Legendre, en honor del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833), quien fue el primero en construirlos; aunque el gran C. F. Gauss también hizo estudios pioneros sobre ellos en las primeras décadas del siglo XIX en relación con las fórmulas de cuadratura. Como dije antes, tienen importantes aplicaciones físicas y tecnológicas. La más conocida de ellas los relaciona con los modelos básicos mecanocuánticos asociados a la ecuación de Schrödinger ([75, 94]); así:

1. Los polinomios de Hermite modelizan las funciones de onda del oscilador armónico unidimensional.
2. Los polinomios de Laguerre modelizan la parte radial de las funciones de onda en el átomo de hidrógeno.
3. El caso $\alpha = \beta$ de los polinomios de Jacobi, los llamados polinomios ultraesféricos (a partir de los cuales se construyen los esféricos armónicos), modelizan la parte angular de las funciones de onda en el átomo de hidrógeno.

Conviene reseñar que Schödinger no identificó los polinomios de Laguerre en su primer artículo de 1926 ([105]) donde propuso la ecuación de ondas y la resolvió para el átomo de hidrógeno. Esto lo hizo en su segundo artículo ([106]): allí comentó en una nota a pie de página que había identificado los polinomios de Laguerre como las funciones que, esencialmente, modelizan la parte radial del átomo de hidrógeno, mientras que Erwin Fues (asistente suyo en Zürich) había identificado los polinomios de Hermite como las funciones que, esencialmente, modelizan el oscilador armónico de Planck. Schödinger también explicó que, a sugerencia de Hermann Weyl y Erwin Fues, consultó el libro que habían publicado dos años antes Richard Courant y David Hilbert *Methoden der mathematischen Physik* ([19]), donde explícitamente aparece el operador del que son autofunciones los polinomios de Laguerre; esto fue lo que le puso sobre la pista, aunque los polinomios de Laguerre no se mencionan explícitamente en el libro de Courant y Hilbert ([91]).

Habrán advertido que no he dicho con respecto a qué función son ortogonales los polinomios de Bessel. Esta familia es peculiar: fue la última en ser descubierta y estudiada. Aparece en trabajos de mediados del siglo XIX, pero un estudio detallado sobre esta familia no se hizo hasta 1949 por Harry Krall y Orrin Frink ([84]). En ese trabajo mostraron que la medida de ortogonalidad de los polinomios de Bessel no puede ser positiva (como en las otras familias), pero fueron incapaces de encontrar ninguna.

Los polinomios de Bessel tienen también importantes aplicaciones físicas: cuando se considera la ecuación de ondas en coordenadas esféricas, los polinomios de Bessel se pueden usar para encontrar la parte radial de las soluciones ligadas a autovalores enteros no negativos".

Las matemáticas son una ciencia especial (el filósofo Karl Popper, de hecho, opinaba que ni siquiera son una ciencia). Una de las características más singulares de las matemáticas es su persistencia: todavía hoy enseñamos que hay infinitos números primos, como descubrió Euclides hace 2.300 años, e, igual que entonces, sobre ese resultado se levanta la que Gauss consideraba la reina de las disciplinas matemáticas: la teoría de números. Comparen con lo que ha ocurrido con la astronomía o la física del tiempo de los griegos: la astronomía griega no es más que una interesantísima curiosidad arrumbada en las cunetas de la historia, y posiblemente ni a eso llega la física de simpatías de Aristóteles. La teoría de números, sin embargo, persiste y se sigue estudiando con más ardor todavía del que mostraron los griegos por ella. Es esta persistencia la que justifica una de las varas de medir la calidad de un resultado matemático: cuánto más tiempo lleve planteado, cuantos más y mejores matemáticos se sepa que lo han intentado resolver sin éxito, más calidad matemática cabrá atribuir a quien lo logré resolver (y más placer se sentirá al resolverlo).

El problema de encontrar una función de ortogonalidad para los polinomios de Bessel, una de las familias clásicas de polinomios ortogonales, estuvo abierto durante casi medio siglo, desde que lo propusieran explícitamente Krall y Frink en 1949 ([84]) hasta que yo lo resolví en 1990 ([23]). Desarrollé un método para el cálculo explícito de medidas de ortogonalidad para polinomios ortogonales y usándolo encontré que la siguiente función es un medida de ortogonalidad para los polinomios de Bessel:

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big((2it)^{-1/2}J_1(\sqrt{8it})\\ \times\int_{-1}^{t}\big(\chi_{[-1,0]}(u)-\chi_{[0,1]}(u)\big)e^{-1/u^2-1/(1-u)^2}\,du\Big)e^{-ixt}\,dt$$

(donde J_1 es la función de Bessel de primer orden).

Naturalmente, ese casi medio siglo que se llevó planteado ese importante problema sobre los polinomios de Bessel sin que nadie diera con la solución a mí me supo a gloria. Resolver un problema central para una de las aristocráticas familias de polinomios clásicos fue una de mis mejores experiencias como investigador. Se dio además la circunstancia de que lo resolví en Sicilia (la tierra que vio nacer a Arquímedes) cuando participaba en mi primer congreso internacional sobre funciones especiales. Hubo otra circunstancia que hizo de ese congreso algo inolvidable para mí. Richard Askey, por entonces el gran gurú mundial de las funciones especiales, propuso un problema que consideraba en ese momento, 1990, entre los más importantes que debían resolverse dentro del campo de las funciones especiales y la biespectralidad. Tenía en este caso que ver con otras aristocráticas familias de polinomios ortogonales: las llamadas familias clásicas discretas. Volveré dentro de un momento sobre el problema propuesto por Askey, porque ahora tengo que presentar brevemente las familias clásicas discretas.

4. POLINOMIOS DE KRALL DISCRETOS

Las familias clásicas de polinomios ortogonales tienen una versión discreta, donde los operadores diferenciales de segundo orden (que actuán en la variable continua x) se sustituyen por operadores en diferencias también de segundo orden (también actuando en la variable continua x). En este caso existen cuatro familias de polinomios ortogonales clásicos discretos que van ligadas con las cuatros principales distribuciones de probabilidad discreta ([80, 95]):

1. Los polinomios de Charlier, ortogonales con respecto a la distribución de Poisson
$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}\,\delta_x, \quad a > 0.$$
2. Los polinomios de Meixner, ortogonales con respecto a la distribución de Pascal.
3. Los polinomios de Krawtchouk, ortogonales con respecto a la distribución binomial.
4. Los polinomios de Hahn, ortogonales con respecto a la distribución hipergeométrica.

Aunque construidas entre finales del siglo XIX y las primeras décadas del XX, la clasificación la obtuvo Otis E. Lancaster en 1941 ([88]).

Los polinomios clásicos discretos aparecen también en numerosas aplicaciones en estadística y probabilidad, física matemática y otras disciplinas. Por citar solo un ejemplo, los polinomios de Krawtchouk modelizan el sistema de urnas de los Ehrenfest ([2, 58, 76]), propuesto por Paul y Tatiana Ehrenfest para resolver la dicotomía entre irreversibilidad y recurrencia que enfrentó a finales del siglo XIX el segundo principio de la termodinámica con el teorema de recurrencia de Poincaré; aparecen también en el problema, relacionado con el anterior, del movimiento browniano de una partícula elásticamente ligada al origen, estudiado por Erwin Schrödinger y Friedrich Kohlrausch en la década de los 20 del siglo XX ([81]).

Desde los años cuarenta del siglo XX, las familias clásicas y clásicas discretas de polinomios ortogonales se han enriquecido con los llamados polinomios de Krall. Los polinomios de Krall son familias de polinomios ortogonales que resuelven un problema biespectral asociado a un operador diferencial o en diferencias de orden mayor que dos; recuerdo que el orden dos corresponde con el caso clásico. Harry Krall demostró en 1940 que el orden de estos operadores diferenciales tiene necesariamente que ser par y clasificó el caso de operadores de orden cuatro ([82, 83]). Sin embargo, hubo que esperar hasta la década de los ochenta del siglo XX para encontrar familias de Krall asociadas a operadores diferenciales de cualquier orden par. Todas ellas corresponden a modificaciones de las familias clásicas de Laguerre y Jacobi (no se conocen polinomios de Krall asociados a la familia de Hermite), aunque todavía no está demostrado que las familias de polinomios de Krall hasta ahora construidas sean todas las posibles. Las modificaciones consisten en imponer a (uno o todos) los parámetros de las familias clásicas que sean enteros no negativos y añadir deltas de Dirac en los extremos del intervalo de ortogonalidad (hay una extensísima bibliografía sobre el tema, de la que se pueden destacar [67, 68, 72, 73, 74, 77, 78, 79, 87, 89, 90, 118]).

Vuelvo ahora al congreso de Sicilia de 1990. Fue en ese congreso donde se presentaron por primera vez polinomios de Krall asociados a operadores diferenciales de orden par arbitrario. Sin embargo, en ese momento nada se sabía del caso Krall discreto: esto es, polinomios ortogonales que son autofunciones de operadores en diferencias de orden mayor que dos. Precisamente en ese congreso en 1990, Richard Askey (como apunté antes, el gran gurú de las funciones especiales a nivel mundial) propuso como uno de los más importantes problemas del área el encontrar ejemplos de polinomios de Krall discretos. Naturalmente hubo bastantes intentos de resolver el problema en los años siguientes, aunque todos con resultados negativos que venían a mostrar que los métodos para el caso de operadores diferenciales no funcionan en el caso discreto (ver, por ejemplo, [3, 4]). Nadie lograba imaginar qué tipo de modificaciones había que usar en el caso de las familias discretas. En 2011 logré construir los primeros ejemplos de polinomios de Krall discretos, setenta años después de que Harry Krall construyera sus ejemplos para el caso de operadores diferenciales y más de veinte años después de que Richard Askey propusiera el problema como uno de los más relevantes del área de las funciones especiales.

Cuando construí los primeros ejemplos, propuse la conjetura de cómo se podía construir toda una jerarquía de familias de Krall discretas partiendo de las familias clásicas discretas ([31]): cada familia clásica discreta tiene asociada una familia de polinomios de forma que las medidas obtenidas al multiplicar uno de estos polinomios por el peso clásico discreto generan medidas de Krall discretas. Por ejemplo, para el caso más sencillo de los polinomios de Charlier, la forma de construir familias de Krall-Charlier consiste en multiplicar el peso de Charlier por un polinomios cuyos ceros sean números enteros positivos: dado un conjunto finito de números enteros positivos F, los polinomios ortogonales con respecto a la medida discreta

$$\sum_{x=0}^{\infty} \prod_{f \in F} (x-f) \frac{a^x}{x!} \delta_x, \quad a > 0,$$

son autofunciones de un operador en diferencias de orden

$$\sum_{f \in F} f - \binom{n_F+1}{2}$$

(donde n_F denota el número de elementos de F).

Demostrar estas conjeturas ha llevado (a mí y a un grupo de colaboradores) casi una década en la que ha habido que desarrollar conceptos y herramientas nuevas, dadas las enormes diferencias con el caso continuo ([32, 37, 45, 46]). Estas técnicas se han mostrado muy fructíferas para tratar todo tipo de problemas biespectrales ([1, 37, 42, 47, 48]). Aunque todavía no está demostrado que estas sean todas las familias de Krall discretas, no se ha encontrado ninguna distinta de las que aparecen en mis conjeturas o de casos límite de estas ([40]).

El estudio de las familias de Krall discretas ha mostrado una gran riqueza de estructura, así como sorprendentes conexiones con otros problemas matemáticos y de física matemática. Por citar solo dos ejemplos:

1. Obtención de identidades de tipo Selberg y problemas combinatorios relacionados (identidades para el término constante en desarrollos de funciones analíticas de varias variables, etc.) ([20, 35, 36, 41, 42, 62]).
2. Hasta donde yo sé, los polinomios de Krall no aparecen en aplicaciones físicas (lo que tampoco es extraño dado que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden mayor que dos). Sin embargo, la construcción de los polinomios de Krall discretos ha tenido una inesperada aplicación en física matemática: se pueden usar para construir los llamados polinomios excepcionales. Los polinomios excepcionales son un nuevo tipo de funciones especiales que se han empezado a construir en la física matemática en los últimos 15 años y que sirven para integrar de forma exacta la ecuación de Schrödinger asociada a perturbaciones racionales de los potenciales clásicos (tanto del oscilador armónico unidimensional como del átomo de hidrógeno) (a pesar de su novedad, la bibliografía sobre polinomios excepcionales es ya muy extensa, aquí destacaré los siguientes artículos: [33, 34, 38, 39, 57, 60, 61, 63, 64, 66, 92, 97, 98, 100, 104]). Los polinomios excepcionales han sido aplicados en varios problemas mecánico-cuánticos relacionados con potenciales shape-invariant ([100]), transformaciones supersimétricas ([65]), modelos discretos [96], mass-dependent potentials ([92]) y resolubilidad quasi-exacta ([115]).

5. INTERMEDIO

Como comenté al principio, voy a dedicar una parte de este discurso a exponer algunas razones por las que yo creo que todavía los académicos tenemos un papel relevante que jugar en la sociedad actual.

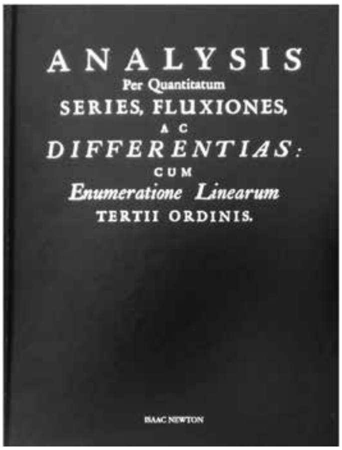
Están lejos ya los tiempos en que el espacio de las Academias fue fundamental para hacer ciencia. Me refiero a los tiempos heroicos de los siglos XVII y, sobre todo, del XVIII, donde los mejores matemáticos y científicos hacían ciencia en las Academias y no en unas Universidades mayormente anquilosadas y alejadas del empuje científico del momento. Baste citar el caso paradigmático de Leonhard Euler, que desarrolló toda su prolífica carrera científica en las Academias de Berlín y San Petersburgo. Las Academias ya no son imprescindibles hoy como espacio para hacer ciencia pero, a mi modo de ver, deben ser tribunas desde donde, por un lado, se promueva la ciencia y, por otro, se haga oír la voz de la ciencia en todos aquellos asuntos donde se requiera. En otras palabras: por un lado, el académico debe esforzarse en hacer presente y transmitir la ciencia a la sociedad, en hacer divulgación de la ciencia; por otro, debe participar con opinión cualificada en aquellos debates donde sea necesaria la visión y la opinión de los científicos y convertirse así en generadores de opinión científica.

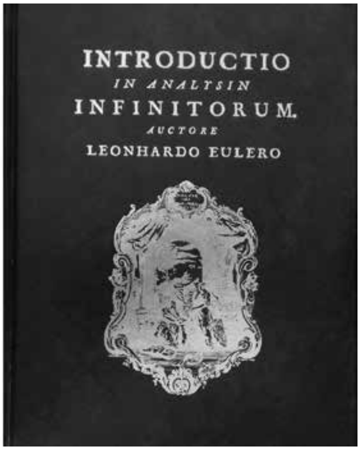
Desarrollaré más estas ideas y, a la vez, comentaré algo de mi experiencia particular en ambas.

Debo empezar diciendo que no descubro nada nuevo, porque esta Academia ya hace difusión de la ciencia a través de los varios coloquios, jornadas y conferencias que organiza (sola o en colaboración con entidades como la Fundación Cajasol y el Ateneo de Sevilla); y tampoco son pocas las ocasiones en que los académicos hacen oír su opinión a través de tribunas públicas (como pueden ser, por ejemplo, las columnas de opinión publicadas por algunos de sus miembros en el *Diario de Sevilla*). Así que reitero aquí mi compromiso específico para colaborar y participar en estas actividades de difusión y opinión.

En el sentido divulgativo debemos difundir y dar a conocer la ciencia a la sociedad. Tanto los hallazgos recientes en la frontera del conocimiento que la ciencia continuamente está produciendo y qué implicaciones pueden tener para la sociedad, como los aspectos del pasado que hacen de la historia de la ciencia una disciplina ciertamente apasionante. En los avatares de los descubrimientos científicos a lo largo del tiempo, se mezclan elementos que dotan a su historia de una notable capacidad para atraer la atención de la sociedad: abundan en la historia de la ciencia las sorpresas espectaculares, los cambios de guión sorprendentes, y está poblada de personajes fascinantes y conmovedores. No debemos desaprovechar este tesoro para captar el interés del público e interesarlo por la ciencia. En mi caso, he dedicado mucho tiempo y esfuerzo a la divulgación de la ciencia, en general, y de las matemáticas en particular. Y me siento especialmente orgulloso de mis aportaciones, a pesar de que durante un tiempo casi se consideraba un demérito para un científico en activo dedicar esfuerzos a la divulgación. En este sentido, he publicado más de una docena de libros, la mayoría en prestigiosas editoriales comerciales, que abarcan desde los estudios puramente históricos, al ensayo y la divulgación. Algunos de mis libros han sido traducidos al francés, inglés, italiano, polaco, portugués y ruso. Ilustraré con un ejemplo cada una de estas facetas.

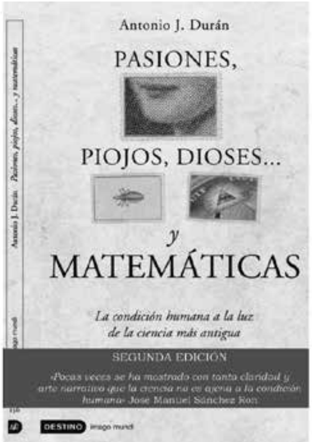
1. Entre los estudios históricos destacaría la colección de obras maestras de las matemáticas que dirijo para la Real Sociedad Matemática Española (y en la que han participado también otras instituciones, como la Sociedad Thales o Patrimonio Nacional): en esa colección he prologado y anotado la traducción al castellano, por primera vez en la historia, de obras tan fundamentales como el *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias* de Isaac Newton o la *Introducción al análisis de los infinitos* de Leonhard Euler. En ambos casos, se trata de la primera vez que se han traducido al cstellano. También he prologado en esta colección Obras escogidas de Arquímides.

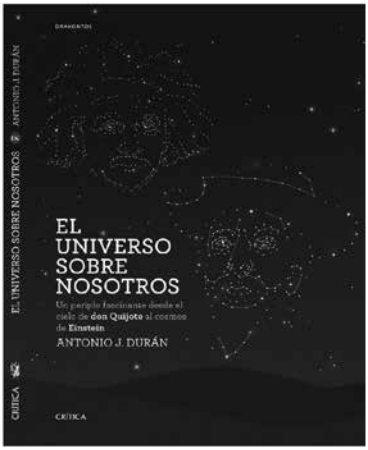




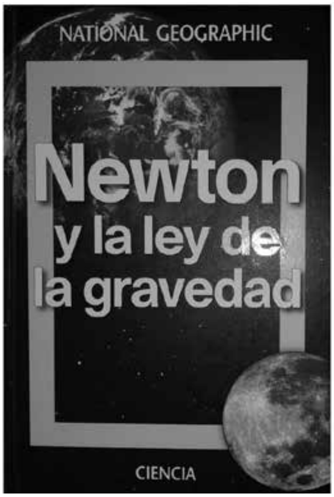
2. En mis libros de ensayo he explorado lo que he dado en llamar circunstancias emocionales de la ciencia. Por circunstancias de un teorema, por ejemplo, me refiero a los entresijos históricos en que se desenvolvieron el autor, o los autores, de ese teorema, ya fuera la persona que lo conjeturó, aquella que lo demostró o lo refutó, o aquellas otras que intentaron una cosa u otra sin éxito, si alguna hubo. Entiendo que las circunstancias emocionales de la ciencia son, en cierta forma, similares a las circunstancias que describió Ortega y Gasset como compañeras inseparables para entender el yo. Esas circunstancias emocionales de la ciencia tienen mucho que ver con la historia de la ciencia, pero, tal y como yo lo entiendo, no son la misma cosa. El enfoque de mis libros de ensayo está hecho desde el convencimiento de que la confrontación del mundo racional y aparentemente frío de la ciencia, en especial del mundo abstracto de las matemáticas, con el mundo vehemente y emocional de los científicos se desprende una luz que puede ayudar a alumbrar las más recónditas profundidades de la naturaleza humana. Con ese enfoque más humanista, rico y complejo no solo se ayuda al lector a comprender mejor lo científico sino también la propia condición humana. Según me han

hecho llegar numerosos lectores, ese enfoque dota a mis libros de ensayo de una característica propia muy personal. Es el caso, por ejemplo, de los titulados *Pasiones, piojos, dioses... y matemáticas*, que lleva como subtítulo *La condición humana a la luz de la ciencia más antigua*, publicado por la Editorial Destino en 2009, y *El universo sobre nosotros*, una historia de la astronomía que lleva como subtítulo *Un periplo fascinante desde el cielo de don Quijote al cosmos de Einstein*, publicado por la Editorial Crítica en 2015.



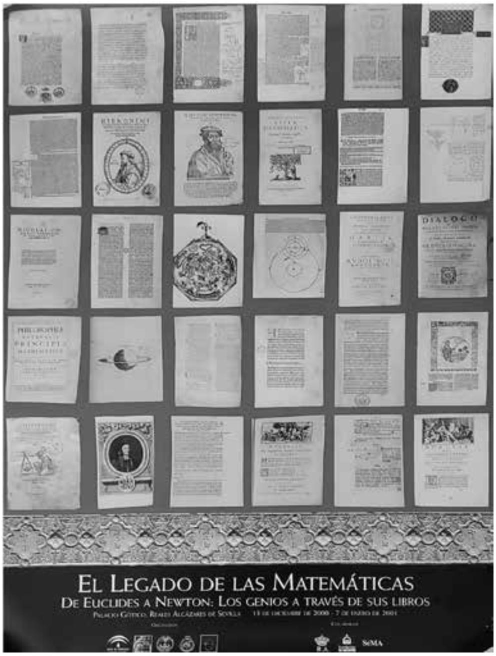


3. También he escrito libros pensados para una divulgación más amplia, incluso libros de gran distribución integrados en colecciones ofrecidas por periódicos de prestigio (*El País*, por ejemplo) en quioscos; aquí me permitiré citar la biografía de Isaac Newton, *Newton y la ley de la gravedad* (2012), que escribí para la Editorial RBA, y que también apareció en una colección de biografías científicas de National Geographic.

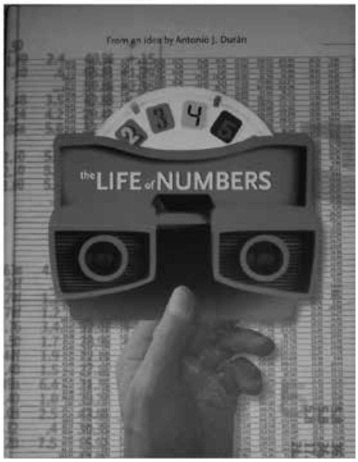


4. También querría mencionar las dos exposiciones de las que he sido comisario, cuyo objetivo fue ofrecer al gran público exposiciones de tema científico en espacios habitualmente dedicadas a exposiciones de tipo artístico, religioso o histórico.

   a) La primera de estas exposiciones tuvo por motivo la celebración del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. La exposición se tituló *El legado de las matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros*, estuvo bajo el amparo de la Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía y tuvo lugar en el Salón de Tapices de los Reales Alcázares de Sevilla en las navidades del año 2000 (créanme, no fue fácil convencer al Ayuntamiento de Sevilla de que cediera un espacio tan señero como el Salón de Tapices de los Alcázares para una exposición que no era ni sobre Semana Santa ni sobre reyes conquistadores). La exposición contó con manuscritos y ediciones impresas de todos los grandes clásicos de las matemáticas y la astronomía desde los griegos al siglo XVII, puestos en sazón con otras obras esenciales de la cultura, incluyendo un ejemplar de la Biblia de Gutenberg. La exposición se podía también disfrutar como una muestra de la evolución del libro, desde los manuscritos medievales hasta joyas producidas por los mejores impresores europeos del siglo XVI pasando por una impresionante colección de incunables entre los que destacaba la Biblia de Gutenberg. Los 50.000 visitantes recibidos en las tres semanas que estuvo abierta dan idea del interés con que fue recibida.



b) La otra exposición tuvo lugar en la Biblioteca Nacional en Madrid entre junio y septiembre de 2006, coincidiendo con la celebración del *International Congress of Mathematicians* en una ciudad española, por primera vez en la historia. La exposición se tituló *Vida de los números*, y trató sobre los números, un hecho científico fundamental, usando como escenario la Biblioteca Nacional, la casa de las letras. Se usaron, además, elementos del mundo de la cultura, como tablillas babilónicas, monedas y téseras romanas, manuscritos prerrománicos y mayas, incunables, grabados de Leonardo da Vinci y Durero, diseños tipográficos o mapas (terrestres y celestes). Hubo algunas colas, algo que, según los responsables de la Biblioteca Nacional, no siempre ocurre con las exposiciones allí organizadas. Además, el catálogo de la exposición fue Premio Nacional del Ministerio de Cultura al libro de divulgación mejor editado de 2006.



Otra de las actividades que los académicos debemos realizar es la de convertirnos en generadores de opinión científica especialmente en aquellos debates donde sea necesaria la visión y la opinión cualificada de los científicos. Téngase en cuenta que las sociedades actuales tienen gran dependencia de la ciencia y la tecnología, y por tanto no son pocas las ocasiones en que hará falta ofrecer nuestra opinión sobre problemas y cuestiones que tengan que ver, directa o indirectamente, con la ciencia y la tecnología. He aquí tres relevantes ejemplos de estas situaciones (de muchos posibles): el cambio climático, la inteligencia artificial (algoritmos) y, naturalmente, la pandemia generada por el coronavirus. En todas ellas, por cierto, las matemáticas tienen un importante papel que jugar. En todos ellos, las Academias tienen que hacer el necesario esfuerzo para llevar a la sociedad opinión cualificada que ayude a clarificar situaciones, enmendar errores o falsas creencias, combatir la desinformación (en muchas ocasiones, interesada) e influir de una u otra manera, ya sea en la toma de decisiones políticas ya en la modulación de los comportamientos sociales. En este sentido, quiero compartir con ustedes la labor de información que desde el Blog del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, que me honro en haber puesto en marcha y dirigir, hemos realizado tratando de arrojar algo de luz y perspectiva sobre la situación provocada por la epidemia del coronavirus. Para ello, hemos aplicado a los distintos factores del problema enfoques diversos donde las matemáticas, en una u otra forma, pueden ayudar. Debo empezar comentando que el Blog del IMUS, que cuenta ya con cinco años de vida, explora las conexiones de las matemáticas con otros ámbitos de la ciencia, la tecnología, el pensamiento, la cultura, la economía, la sociedad y cualquier otra actividad humana. Tiene pues un carácter multidisciplinar, innovador y heterodoxo, que conjuga la divulgación para público general con entradas de muy alto nivel y actualidad científica. Desde el Blog del IMUS trabajamos con la certeza de que la difusión de las matemáticas implica explorar su conexión con cualesquiera otros ámbitos de la ciencia, la tecnología, las humanidades o la cultura, todo lo cual permite un mayor nivel de profundidad en la comprensión, tanto del valor intrínseco de las matemáticas, como del que supone en todos aquellos ámbitos donde se aplica o con los que se relaciona. En cuanto a la pandemia, debo reseñar que el Blog del IMUS ha tenido una repercusión mediática que cabe calificar de extraordinaria. Esto ha sido así porque fuimos pioneros en advertir que los datos disponibles en las primeras semanas de marzo de 2020, justo cuando estalló la pandemia, eran muy defectuosos, y confundían más que aclaraban la situación de la pandemia. También apuntamos algunas ideas de cómo se podía estimar en aquellos momentos la dimensión real de la pandemia. Esto hizo que muchos medios buscaran algo de claridad en el Blog. Así, Javier Sampedro dedicó su columna de *El País* del 27 de marzo de 2020 (que inequívocamente tituló *Los datos están mal*) a la entrada del Blog del IMUS *¿Cómo estimar el número de infectados reales por covid-19? Los casos de Andalucía e Italia* que yo había publicado en el Blog el 23 de marzo, https://elpais.com/ciencia/2020-03-26/los-datos-estan-mal.html. Esa y otras entradas fueron también referenciadas en muchos otros medios de comunicación: *La Razón*, *ABC*, *El Diario* o *Diario de Sevilla*, entre otros periódicos, y dieron origen a numerosas entrevistas en programas nacionales de máxima audiencia, entre los que cabe destacar *La brújula* de *Onda Cero*, *A vivir que son dos días* de *La Cadena Ser*, *24 horas* de *Radio Nacional de España*, o *La mañana de Andalucía* de *Canal Sur*.

6. BIESPECTRALIDAD MATRICIAL

En la parte final de mi discurso, haré referencia a dos problemas más donde he hecho contribuciones relevantes, en este caso en colaboración con dos prestigiosos matemáticos, que han acabado siendo también grandes amigos: los profesores Alberto Grünbaum, de la Universidad de Berkeley, y Christian Berg, de la Universidad de Copenhague.

Cuando, en la década de los 40 del siglo XX, el matemático soviético Mark Krein ([85, 86]) propuso estudiar polinomios ortogonales a valores matriciales, surgió inmediatamente el problema de encontrar las familias biespectrales en este tipo de contexto. Más concretamente, el problema de encontrar familias de polinomios ortogonales a valores matriciales que fueran autofunciones de operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales.

En 1997 ([27]), yo había publicado un artículo inicial sobre este problema que había llamado la atención del profesor Grünbaum, de la Universidad de Berkeley. En ese momento, el Prof. Grünbaum formaba parte del *Committee on the Mathematics and Physics of emerging dinamic biomedical imaging*, un Comité integrado en el *National Research Council* y el *Institute of Medicine* de Estados Unidos. Este era un Comité multidisciplinar para documentar los desafíos clave en matemáticas y física que podían ayudar al desarrollo de aparatos pioneros para el diagnóstico por imagen en biomedicina. Allí coincidió, entre otros, con Paul C. Lauterbur, en ese momento una autoridad mundial en resonancia magnética, ganador del Premio Nobel de Medicina en 2003 por sus descubrimientos en imagen por resonancia magnética. El Prof. Grünbaum, con una sólida formación de matemático aplicado adquirida en el Courant Institute de la Universidad de Nueva York, donde realizó su tesis doctoral, había publicado, junto con algunos colaboradores, un artículo en *Science* en 1990 sobre reconstrucción de imágenes internas de cuerpos que dispersan la radiación; lo allí estudiado, junto con las discusiones del Comité, llevaron al Prof. Grünbaum a pensar que los polinomios ortogonales biespectrales a valores matriciales podían ser una herramienta útil en tomografía tensorial (que permite una mejor exploración de cuerpos anisotrópicos). Por esos años, yo había centrado mi investigación en la ortogonalidad matricial y había publicado algunos artículos sobre el tema que tuvieron bastante repercusión en el área. Entre ellos el inicial sobre biespectralidad matricial que apareció en 1997, ya comentado. A raíz de ese artículo, el Prof. Grünbaum me propuso una colaboración para encontrar ejemplos de polinomios ortogonales matriciales biespectrales.

El problema de encontrar ejemplos no triviales (esto es, que no se reduzcan a matrices diagonales con polinomios clásicos en la diagonal) de este tipo de funciones especiales es de una naturaleza matemática incomparablemente más complicada que el caso clásico escalar, dado que equivale a resolver explícitamente un sistema de ecuaciones diferenciales que no se puede desacoplar, con condiciones adicionales de hermiticidad difíciles de manejar (aquí la condición de resolver *explícitamente* es fundamental). Más concretamente, se trata de encontrar funciones matriciales hermíticas $W(t)$, y polinomios matriciales A_2, A_1 y A_0 con grado(A_i) ≤ i, verificando

$$\begin{aligned} A_2W &= WA_2^*, \\ 2(A_2W)' &= WA_1^* + A_1W, \\ (A_2W)'' - (A_1W)' + A_0W &= WA_0^* \end{aligned}$$

(además de ciertas condiciones de frontera).

Como se puede ver, la cuestión de la no conmutatividad del producto de matrices aparece de forma explícita en las ecuaciones anteriores y supone una complicación considerable para la resolución de este tipo de problemas. El primer fruto de mi colaboración científica con el Prof. Grünbaum fue un artículo, aparecido en 2004, donde desarrollamos técnicas muy potentes y novedosas que nos permitieron integrar explícitamente las ecuaciones anteriores, suponiendo que el polinomio A_2 es escalar y para algunos casos de polinomios matriciales A_1 y A_0 ([49]). Para comparar la diferencia con el caso escalar, baste decir que los ejemplos que encontramos los construimos a partir de polinomios a los que podemos calificar de puramente matriciales, puesto que tienen unas características imposibles para un polinomio escalar (v.g., son polinomios P no constantes pero cuyo determinante es constante igual a 1: $\det P(x) = 1$, lo que implica en particular que P tiene inversa P^{-1} que vuelve a ser un polinomio matricial).

La colaboración con el Prof. Grünbaum ha sido muy fructífera, y hemos publicado juntos bastantes artículos sobre biespectralidad matricial ([49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]), incluyendo eventuales aplicaciones en modelos cuánticos relativistas ([54]).

Entre otras cosas, los resultados que se obtuvieron en esos años (véanse, entre muchos otros, [24, 25, 26, 28, 29, 30, 43, 44, 69, 99]) muestran que la no conmutatividad del producto de matrices y la existencia de matrices singulares (las diferencias de la estructura algebraica de las matrices con respecto a los números complejos) implican una mucha mayor flexibilidad de la ortogonalidad matricial respecto del problema biespectral; lo que se traduce en la existencia de una increíble riqueza y complejidad de ejemplos biespectrales matriciales. Frente a las cuatro únicas familias clásicas del caso escalar, el caso matricial muestra una inabarcable riqueza que apenas ha podido ser entrevista dada la intrínseca dificultad del problema de encontrar estas familias clásicas matriciales. En matemáticas, casi tan importante como resolver problemas es proponer problemas interesantes y profundos, que sirvan tanto para revitalizar áreas ya existentes como para crear áreas nuevas de investigación. Este es el caso de la biespectralidad matricial, donde ya hay algunos problemas difíciles y profundos que han atraído la atención de los investigadores del área:

1. Quizá el más relevante sea el problema de clasificar los polinomios matriciales biespectrales. Dada la riqueza y variedad de ejemplos ya comentada, lo primero es dar con la clave para hacer la clasificación, lo que situá al problema en una dimensión muy distinta de la clasificación de Bochner para las familias clásicas escalares.
2. Otro problema nuevo es el del estudio de las álgebras de operadores diferenciales asociadas a las familias de polinomios ortogonales matriciales biespectrales. En el caso escalar, esa caracterización es relativamente fácil de obtener y las álgebras resultantes tienen una estructura trivial, en el sentido de que están generadas por el operador de segundo orden asociado a cada familia clásica. Esto dista de ser cierto en el caso matricial, y ya hay un buen número de conjeturas (de las que solo se han podido demostrar las relativas a los ejemplos más sencillos en tamaño 2×2) que muestran gran riqueza de patrones, lo que viene a señalar que en el caso matricial las álgebras de operadores van a tener una gran variedad de estructuras.
3. Son numerosas las aplicaciones que cabe esperar de las familias biespectrales matriciales. Entre ellas se pueden mencionar: (a) en tomografía tensorial, donde se ha mostrado la existencia de soluciones a problemas de ángulo limitado asociados al núcleo reproductor de algunas de estas familias (en la línea de los

trabajos seminales de Shannon, Slepian, Landau y Pollack en los Laboratorios Bell mencionados al inicio de este discurso); (b) en física cuántica relativista en relación con la ecuación de Dirac y la representaciones del grupo de Schrödinger; (c) en la modelización de cadenas discretas de Markov donde las interacciones no se reducen a los vecinos más próximos.

(de la ya muy extensa bibliografía que muestra el interés por estos problemas, destacaré [17, 18, 21, 70, 71, 116, 117, 119]).

7. PROBLEMAS DE MOMENTOS

La última contribución que quería comentar la hice con el profesor Christian Berg de la Universidad de Copenhague. El profesor Berg es el mayor experto mundial en problemas de momentos. Estos problemas consisten en determinar relaciones y propiedades entre una medida μ y las integrales

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \, d\mu, \quad n \in \mathbb{N},$$

que se denominan momentos de μ, debido a que el caso $n = 2$ es conocido como momento de inercia si entendemos μ como una distribución de masas, y el caso $n = 1$ como momento estático.

La teoría de momentos está íntimamente relacionada con la de polinomios ortogonales al venir el producto escalar que define la ortogonalidad determinado por los momentos de la medida. También tiene múltiples aplicaciones en probabilidad.

La contribución del Prof. Berg y mía tiene un sabor muy clásico y viene a completar un problema que fue tratado en los años 20 del siglo XX por matemáticos de la talla de Rolf Nevalinna y Marcel Riesz ([93, 101, 102]). Dada una familia de polinomios ortonormales $(p_n)_n$, Nevalinna y Riesz caracterizaron los números complejos z para los que la sucesión $(p_n(z))_n$ está en el espacio de Hilbert l^2. La solución depende de cuántas soluciones tiene el problema de momentos asociado a la medida de ortogonalidad de los polinomios $(p_n)_n$. Si estos tienen una única medida μ con respecto a la que son ortogonales (decimos entonces que el problema de momentos asociado es determinado), entonces $(p_n(z))_n \in l^2$ si y solo si $\mu(\{z\}) > 0$. Si hay varias medidas con respecto a la que son ortogonales (decimos entonces que el problema de momentos asociado es indeterminado), entonces $(p_n(z))_n \in l^2$ para todo número complejo z (esto, además, caracteriza la indeterminación de un problema de momentos).

Dado que el problema es altamente no lineal, quedó pendiente el estudio de cuándo una combinación finita de evaluaciones, por ejemplo, $(p_n(z_1) + p_n(z_2))_n$ está en l^2. El profesor Berg y yo resolvimos completamente el problema en una serie de artículos ([5, 6, 7, 8]) incluyendo el caso más general que incluye también evaluación de una combinación de derivadas de cualquier orden de la familia de polinomios ortogonales:

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L_k} a_{k,l}p_n^{(l)}(z_k),$$

donde tanto *a_{k,l}* como *z_k* son números complejos.

Me interesé por este problema en 1992, e intuí que su resolución iba a venir determinada por el concepto de índice de determinación, que el Prof. Berg y su colaborador M. Thill habían introducido en un artículo sobre problemas de momentos en varias variables publicado en 1991 en la revista *Acta Mathematica* ([15]). Propuse entonces al Prof. Berg estudiar juntos el problema, y dimos así inicio a una muy fructífera relación científica y personal (concretada en un buen número de colaboraciones [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]).

REFERENCIAS

[1] R. ÁLVAREZ-NODARSE Y A. J. DURÁN, Using *D*-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher-order *q*-difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* **424** (2015), 304-320.

[2] R. ASKEY, Evaluation of some determinants, ISAAC Congress, 2003.

[3] H. BAVINCK Y H. VAN HAERINGEN, Difference equations for generalizations of Meixner polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **184** (1994), 453-463.

[4] H. BAVINCK Y R. KOEKOEK, On a difference equation for generalizations of Charlier polynomials, *J. Approx. Theory* **81** (1995), 195-206.

[5] C. BERG Y A. J. DURÁN, The index of determinacy for measures and the *L*2 norm of orthonormal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2795-2811.

[6] C. BERG Y A. J. DURÁN, When does a discrete differential perturbation of a sequence of orthonormal polynomials belong to *l*2?, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 127-153.

[7] C. BERG Y A. J. DURÁN, Orthogonal polynomials, *L*2 spaces and entire functions, *Math. Scand.* **79** (1996), 209-223.

[8] C. BERG Y A. J. DURÁN, Measures with finite index of determinacy or a mathematical model for Dr. Jekyll and Mr. Hyde, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 523-530.

[9] C. BERG Y A. J. DURÁN, A transformation from Hausdorff to Stieltjes moment sequences, *Ark. Mat.* **42** (2004), 239-257.

[10] C. BERG Y A. J. DURÁN, Some transformations of Hausdorff moment sequences and Harmonic numbers, *Canad. J. Math.* **57** (2005), 941-960.

[11] C. BERG Y A. J. DURÁN, Analytic functions associated to positive definite infinite matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **315** (2006), 54-67.

[12] C. BERG Y A. J. DURÁN, The fixed point for a transformation of Hausdorff moment sequences and iteration of a rational function, *Math. Scand.* **103** (2008), 11-39.

[13] C. Berg y A. J. Durán, Iteration of the rational function $z-1/z$ and a Hausdorff moment sequence, *Expo. Math.* **26** (2008), 375-385.

[14] C. BERG Y A. J. DURÁN, Fibonacci numbers, Euler two periodic continuous fractions and moment sequences, *Fibonacci Quart.* **49** (2011), 66-75.

[15] C. BERG Y M. THILL, Rotation invariant moment problems, *Acta Math.* **167** (1991), 207-227.

[16] S. BOCHNER, Über Surm-Liouvillesche polynomsystema, *Math. Z.* 29 (1929), 730-736.

[17] W. R. CASPER Y M. YAKIMOV, The matrix Bochner problem, *American J. Math.*, por aparecer.

[18] M. M. CASTRO Y F. A. GRÜNBAUM, The algebra of differential operators associated to a given family of matrix valued orthogonal polynomials: five instructive examples, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), Art. ID 47602, 33 pp.
[19] R. COURANT Y D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, vol. 1., Springer, Belin, 1924.
[20] G. CURBERA Y A. J. DURÁN, Invariant properties for Wronskian type determinants of classical and classical discrete orthogonal polynomials under an involution of sets of positive integers, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), 748-764.
[21] M. D. DE LA IGLESIA Y C. JUAREZ, The spectral matrices associated with the stochastic Darboux transformations of random walks on the integers, *J. Approx. Theory* **258** (2020), 105458, 32 pp.
[22] J. J. DUISTERMAAT Y F. A. GRÜNBAUM, Differential equations in the spectral parameter, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986), 177-240.
[23] A. J. DURÁN, Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials, *Rocky Mountain J. Math.* **23** (1993), 87-104.
[24] A. J. DURÁN, A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation, *J. Approx. Theory* **74** (1993), 83-109.
[25] A. J. Durán, On orthogonal polynomials with respect to a positive defi matrix of measures, *Canad. J. Math.* **47** (1995), 88-112.
[26] A. J. DURÁN, Markov's theorem for orthogonal matrix polynomials, *Canad. J. Math.* **48** (1996), 1180-1195.
[27] A. J. DURÁN, Matrix inner product having a matrix symmetric second-order differential operator, *Rocky Mountain J. Math.* **27** (1997), 585-600.
[28] A. J. DURÁN, Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials, *J. Approx.Theory* **100** (1999), 304-344.
[29] A. J. DURÁN, A method to find weight matrices having symmetric second order differential operators with matrix leading coefficents, *Constr. Approx.* **29** (2009), 181-205.
[30] A. J. DURÁN, Generating orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations from a trio of triangular matrices, *J. Approx. Theory* **161** (2009), 88-113.
[31] A. J. DURÁN, Orthogonal polynomials satisfying higher order difference equations, *Constr. Approx.* **36** (2012), 459-486.
[32] A. J. Durán, Using D-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher-order difference or differential equations, *J. Approx. Theory* **174** (2013), 10-53.
[33] A. J. DURÁN, Exceptional Charlier and Hermite polynomials, *J. Approx. Theory* **182** (2014), 29-58.
[34] A. J. DURÁN, Exceptional Meixner and Laguerre polynomials, *J. Approx. Theory* **184** (2014), 176-208.
[35] A. J. DURÁN, Symmetries for Casorati determinants of classical discrete orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), 915-930.
[36] A. J. DURÁN, Wronskian type determinants of orthogonal polynomials, Selberg type formulas and constant term identities, *J. Combin. Theory Ser. A* **124** (2014), 57–96.
[37] A. J. DURÁN, Constructing bispectral dual Hahn polynomials, *J. Approx. Theory* **189** (2015), 1-28.
[38] A. J. DURÁN, Exceptional Hahn and Jacobi polynomials, *J. Approx. Theory* **214** (2017), 9-48.
[39] A. J. DURÁN, Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters, *Stud. Appl. Math.* **148** (2022), 606-650.
[40] A. J. DURÁN, New examples of Krall-Meixner and Krall-Hahn polynomials, *J. Approx. Theory* **275** (2022), 105683.
[41] A. J. DURÁN, Christoffel transform of classical discrete measures and invariance of determinants of classical and classical discrete polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **503** (2021), 125306, 29 pp.

[42] A. J. DURÁN Y J. ARVESÚ, q-Casorati determinants of some q-classical orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 1655-1668.
[43] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIA, Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations, *J. Approx. Theory* **150** (2008), 153-174.
[44] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIa, Second order differential operators having several families of orthogonal matrix polynomials as eigenfunctions, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2008** (2008), Art. ID rnn 084, 24 pp.
[45] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIA, Constructing bispectral orthogonal polynomials from the classical discrete families of Charlier, Meixner and Krawtchouk, *Constr. Approx.* **41** (2015), 49-91.
[46] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIA, Constructing Krall-Hahn orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **424** (2015), 361-384.
[47] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIA, Differential equations for discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **195** (2015), 70-88.
[48] A. J. DURÁN Y M. D. DE LA IGLESIA, Differential equations for discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Spectr. Theory* **8** (2018), 191-234.
[49] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, *Int. Math. Res. Not.* **2004** (2004), 461-484.
[50] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, A characterization for a class of weight matrices with orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), 1371-1390.
[51] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, I, *Constr. Approx.* **22** (2005), 255-271.
[52] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, Orthogonal matrix polynomials, scalar type Rodrigues' formulas and Pearson matrix equations, *J. Approx. Theory* **134** (2005), 267-280.
[53] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, A survey on orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **178** (2005), 169-190.
[54] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, P. A. M. Dirac meets M. G. Krein: matrix orthogonal polynomials and Dirac's equation, *J. Phys. A* **39** (2006), 3655-3662.
[55] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, Matrix orthogonal polynomials satisfying second order differential equations: coping without help fromn group representation theory, *J. Approx. Theory* **148** (2007), 35-48.
[56] A. J. DURÁN Y F. A. GRÜNBAUM, Matrix differential equations and scalar polynomials satisfying higher order recursions, *J. Math. Anal. Appl.* **354** (2009), 1-11.
[57] A. J. Durán y M. Pérez, Admissibility condition for exceptional Laguerre polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **424** (2015), 1042-1053.
[58] P. EHRENFEST Y T. EHERENFEST, Ü ber zwei bekannte Einw¨ande gegen das Boltz-mannsche H-Theorem, *Phys. Z.* **8** (1907), 311-314.
[59] J. FAVARD, Sur les polynomes de Tchebicheff *C. R. Acad. Sci. Paris* **200** (1935), 2052-2053.
[60] M. A. GARCÍA-FERRERO, D. GÓMEZ-ULLATE Y R. MILSON, A Bochner type characterization theorem for exceptional orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **472** (2019), 584-626.
[61] D. GÓMEZ-ULLATE, Y. GRANDATI Y R. MILSON, Rational extensions of the quantum Harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials, *J. Phys. A* **47** (2014), 015203.
[62] D. GÓMEZ-ULLATE, Y. GRANDATI Y R. MILSON, Durfee rectangles and pseudo-Wronskian equivalences for Hermite polynomials, *Stud. Appl. Math.* **141** (2018), 596-625.
[63] D. GÓMEZ-ULLATE, N. KAMRAN Y R. MILSON, An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009), 352-367.
[64] D. GÓMEZ-ULLATE, N. KAMRAN Y R. MILSON, An extension of Bochner's problem: exceptional invariant subspaces, *J. Approx. Theory* **162** (2010), 987-1006.

[65] D. GÓMEZ-ULLATE, N. KAMRAN Y R. MILSON, Exceptional orthogonal polynomials and the Darboux transformation, *J. Phys. A* **43** (2010), 434016.

[66] Y. GRANDATI Y C. QUESNE, Disconjugacy, regularity of multi-indexed rationally-extended potentials, and Laguerre exceptional polynomials, *J. Math. Phys.* **54** (2013), 073512.

[67] F. A. GRÜNBAUM Y L. HAINE, Orthogonal polynomials satisfying differential equations: the role of the Darboux transformation, *Symmetries an Integrability of Differential Equations (D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, Eds.)*, 143-154, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 9, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1996.

[68] F. A. GRÜNBAUM, L. HAINE Y E. HOROZOV, Some functions that generalize the Krall-Laguerre polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **106** (1999), 271-297.

[69] F. A. GRÜNBAUM, I. PACHARONI Y J. TIRAO, Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type, *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), 353-366.

[70] F. A. GRÜNBAUM, I. PACHARONI Y I. ZURRIÁN, Time and band limiting for matrix valued functions: an integral and a commuting differential operator, *Inverse Problems* **33** (2017), 025005, 14 pp.

[71] F. A. GRÜNBAUM, I. PACHARONI Y I. ZURRIÁN, Bispectrality and time-band limiting: matrix valued polynomials, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2020** (2020), 4016-4036.

[72] F. A. GRÜNBAUM Y M. YAKIMOV, Discrete bispectral Darboux transformations from Jacobi operators. *Pacific J. Math.* **204** (2002), 395-431.

[73] P. ILIEV, Krall-Jacobi commutative algebras of partial differential operators, *J. Math. Pures Appl.* **96** (2011), 446-461.

[74] P. ILIEV, Krall-Laguerre commutative algebras of ordinary differential operators, *Ann. Mat. Pur. Appl.* **192** (2013), 203-224.

[75] M. E. H. ISMAIL, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, 2009.

[76] M. KAC, Random walk and the theory of Brownian motion, *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 369-391.

[77] R. KOEKOEK, Differential equations for symmetric generalized ultraspherical polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **345** (1994), 47-72.

[78] J. KOEKOEK Y R. KOEKOEK, On a differential equation for Koornwinder's generalized Laguerre polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **112** (1991), 1045-1054.

[79] J. KOEKOEK Y R. KOEKOEK, Differential equations for generalized Jacobi polynomials, *J. Compt. Appl. Math.* **126** (2000), 1-31.

[80] R. KOEKOEK, P. A. LESKY Y L. F. SWARTTOUW, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Verlag, Berlin, 2008.

[81] F. KOHLRAUSCH Y E. SCHRÖDINGER, Das Ehrenfestsche Model der H-Kurve, *Physikalische Zeitschrift* **47** (1926), 306-313.

[82] H. L. KRALL, Certain differential equations for Tchebycheff polynomials, *Duke Math. J.* **4** (1938), 705-718.

[83] H. L. KRALL, *On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation*, The Pennsylvania State College Studies, No. 6, 1940.

[84] H. L. KRALL Y O. FRINK, A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **65** (1949), 100-115.

[85] M. G. KREIN, Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency index (m, m), *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **97** (1970), 75-143.

[86] M. G. KREIN, Infinite J-matrices and a matrix moment problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **69** (1949), no. 2, 125-128.

[87] K. H. KWON Y D. W. LEE, Characterizations of Bochner-Krall orthogonal polynomials of Jacobi type, *Constr. Approx.* **19** (2003), 599-619.

[88] O. E. LANCASTER, Orthogonal polynomials defined by difference quations, *Amer. J. Math.* **63** (1941), 185-207.
[89] L. L. LITTLEJOHN, The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials, *Quaest. Math.* **5** (1982), 255-265.
[90] L. L. LITTLEJOHN, An application of a new theorem on orthogonal polynomials and differential equations, *Quaest. Math.* **10** (1986), 49-61.
[91] J. MAWHIN Y A. RONVEAUX, Schrödinger and Dirac equations for the hydrogen atom, and Laguerre polynomials, *Arch. Hist. Exact Sci.* **64** (2010), 429-460.
[92] B. MIDYA Y B. ROY, Exceptional orthogonal polynomials and exactly solvable potentials in position dependent mass Schrödinger Hamiltonians, *Phys. Lett. A* **373** (2009), 4117-4122.
[93] R. NEVALINNA, Asymptotische entwickelungen beschränkter funktionen und das Stieltjessche momentenproblem, *Ann. Acad. Scie. Fenn. A* **18** (1922), no. 5, 52 pp.
[94] A. F. NIKIFOROV Y V. B. UVAROV, *Special functions of mathematical physics*, Birkhäuser, Basel, 1988.
[95] A. F. NIKIFOROV, S. K. SUSLOV Y V. B. UVAROV, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
[96] S. ODAKE Y R. SASAKI, Infinitely many shape invariant discrete quantum mechanical systems and new exceptional orthogonal polynomials related to the Wilson and Askey-Wilson polynomials, *Phys. Lett. B* **682** (2009), 130-136.
[97] S. ODAKE Y R. SASAKI, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials, *Phys. Lett. B* **702** (2011), 164-170.
[98] S. ODAKE Y R. SASAKI, Dual Christoffel transformations, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011), 1-34.
[99] I. PACHARONI Y J. A. TIRAO, Matrix valued orthogonal polynomials arising from the complex projective space, *Constr. Approx.* **25** (2006), 177-192.
[100] C. QUESNE, Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry. *J. Phys. A* **41** (2008), 392001.
[101] M. RIESZ, Sur le probléme des moments, *Ark. för Mat., Astr. och Fys.* **16** (1922), (12) 23 p., (19) 21 p., y **17** (1923), (16) 62 p.
[102] M. RIESZ, Sur le probléme des moments et le théoréme de Parseval correspon- dant, *Acta Litt. ac Sci., Szeged* **1** (1922), 209-225.
[103] E. ROUTH, On some properties of certain solutions of a diff tial equation of the second order, *Proc. London Math. Soc.* **16** (1884), 245-261.
[104] R. SASAKI, S. TSUJIMOTO Y A. ZHEDANOV, Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transforma- tions, *J. Phys. A* **43** (2010), 315204.
[105] E. SCHRÖDINGER, Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung), *Ann. d. Phys.* **79** (1926), 361-376.
[106] E. SCHRÖDINGER, Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung), *Ann. d. Phys.* **79** (1926), 489-527.
[107] J. SINGER, F. A. GRÜNBAUM, P. KOHN Y J. ZUBELLI, Image reconstruction of the interior of bodies that differential radiation, *Science* **248** (1990), 990-993.
[108] D. SLEPIAN Y H. O. POLLAK, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unvertainty, I, *Bell System Tech. Journal* **40** (1961), 43-64.
[109] H. J. LANDAU Y H. O. POLLAK, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unvertainty, II, *Bell System Tech. Journal* **40** (1961), 65-84.
[110] H. J. LANDAU Y H. O. POLLAK, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unvertainty, III, *Bell System Tech. Journal* **41** (1962), 1295-1336.
[111] D. SLEPIAN, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unvertainty, IV, *Bell System Tech. Journal* **43** (1961), 3009-3058.

[112] D. SLEPIAN, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unvertainty, V, *Bell System Tech. Journal* **57** (1978), 1371-1430.
[113] M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1932.
[114] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1959.
[115] T. TANAKA, N-fold Supersymmetry and quasi-solvability associated with X_2- Laguerre polynomials, J. Math. Phys. 51 (2010), 032101.
[116] J. TIRAO, The algebra of differential operators associated to a weight matrix: a first example, groups, algebras and applications, *Proceedings of the XVIII Latin American Algebra Colloquium (Sao Pedro, Brazil, August 3-8, 2009)*, 291-324, Contemporary Mathematics, 537, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
[117] L. VINET Y A. ZHEDANOV, Representations of the Schrödinger group and matrix orthogonal polynomials, *J. Phys. A* **44** (2011), 355201.
[118] A. ZHEDANOV, A method of constructing Krall's polynomials, *J. Compt. Appl. Math.* **107** (1999), 1-20.
[119] I. ZURRIÁN, The Algebra of differential operators for a Gegenbauer weight matrix, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017 (2017), 2402-2430.