Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Memoria para optar al grado de Doctor en Matemáticas

ANÁLISIS DE ALGUNOS MODELOS DE DINÁMICA DE POBLACIONES ESTRUCTURADOS EN EDAD CON Y SIN DIFUSIÓN

Autor: MÓNICA MOLINA BECERRA

Directores: MANUEL DELGADO DELGADO
ANTONIO SUÁREZ FERNÁNDEZ.

Memoria presentada
por Mónica Molina Becerra
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Fdo. Mónica Molina Becerra

V^{o} B^{o} de los Directores del Trabajo

Fdo. Manuel Delgado Delgado
Profesor Titular
de la Universidad de Sevilla

Fdo. Antonio Suárez Fernández
Profesor Titular
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, septiembre de 2004

Agradecimientos

La realización de este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo constante y la ayuda desinteresada de muchas personas. A todas ellas les debo que hoy, por fin, pueda escribir estas frases.

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres el darme la vida, que junto con mi hermana, el cariño y el apoyo que me han ofrecido siempre han contribuido enormemente a la elaboración de este trabajo. Gracias por aguantar mis momentos de mal humor.

Mi infinita gratitud a mis directores, Manuel Delgado y Antonio Suárez, no puede expresarse con unas simples palabras. A ellos les debo todo este trabajo. A ambos les agradezco sinceramente el haberme introducido en un tema tan apasionante como es la "Dinámica de Poblaciones", el plantearme modelos y ayudarme a resolverlos, el estar disponibles cada vez que los he necesitado y todas las horas que han invertido en la realización de este trabajo. Gracias por vuestra paciencia, por vuestro optimismo y por creer en la finalización de este proyecto.

Durante todo el tiempo que ha durado el desarrollo de este trabajo he tenido la oportunidad de conocer personas maravillosas, tanto a nivel profesional como personal: al profesor Ovide Arino, un excelente investigador y mejor persona. Todavía recuerdo el día que lo conocí y me trató como a uno más de sus estudiantes, estando disponible en cualquier momento. Todavía recuerdo la última vez que lo vi, como antes de coger su avión se había pasado gran parte de la noche resolviéndome unas dudas. Su repentina pérdida nos deja, a todas las personas que tuvimos la suerte de conocerle, un enorme vacío. Allí donde estés: "Merci pour ta générosité". Quisiera agradecer, también, a los miembros del IRD (Bondy), por su excelente acogida; en especial a Alex, por darme tantos ánimos y servirme en más de una ocasión de traductor.

Un sincero agradecimiento en general a todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, por ofrecerme su ayuda cada vez que la he necesitado; en particular a los profesores Enrique Fernández y José Real, por ser los directores de mi primer trabajo de investigación, la Tesina de Licenciatura. Al profesor José Martín por su labor como Director del Departamento durante el período de elaboración de este trabajo. A Mª del Ara Hernández por hacer fácil la tediosa labor del "papeleo". A mi "compi", Pedro Marín, por compartir tantas horas de trabajo; gracias por aguantarme y escucharme. A Mª José Garrido, gracias por tu ayuda y amistad.

En especial, quiero agradecer a Óscar por haberme ofrecido su mano y levantarme todas las veces que me he caído. Sin ti no hubiese terminado este sueño, perdona todas las veces que no he tenido la cabeza donde debiera.

Por último, quisiera agradecer a todas aquellas personas que con un simple saludo o una sonrisa sincera, hicieron de un día malo uno un poquito más agradable.

Índice general

Introducción

En los últimos doscientos años se han usado teorías matemáticas para modelar el comportamiento de poblaciones humanas, de animales, de células, virus...

La primera contribución significativa a la teoría de la dinámica de poblaciones fue la de T. Malthus, quién en 1798 publicó *Ensayo sobre el Principio de la Población*. Su modelo lineal era satisfactorio siempre que la población no fuese demasiado grande. Es importante señalar que cuando la población es "grande", los modelos lineales no pueden ser exactos ya que no contemplan el hecho de que los individuos compiten entre sí por los recursos (como puede ser comida, espacio...). Posteriormente, en 1837, P. F. Verhulst añadió un término no lineal a la ley de Malthus, que tuviera en cuenta esta limitación de crecimiento formulando un modelo conocido como *la ley logística*.

Más adelante se introduce la consideración de la edad de la población que es un dato decisivo para las tasas de natalidad y mortalidad.

Modelos estructurados en edad sin difusión

Modelos lineales estructurados en edad

F. R. Sharpe, A. Lotka, (1911) y A. G. McKendrick (1926) (véanse [83, 70]) fueron los primeros en introducir edad en los modelos de dinámica de poblaciones.

El *modelo de Sharpe-Lotka-McKendrick*, también llamado *modelo de von Foerster-McKendrick* o simplemente *ecuación de McKendrick*, supone que una población asexual puede ser descrita por una función de 2 variables, edad y tiempo. Denotando por $\rho(a,t)$ la densidad de los individuos de edad a en un instante de tiempo t, se tiene que el número de individuos con edad entre a y $a+\Delta a$ en un instante de tiempo t es aproximadamente $\rho(a,t)\Delta a$. Luego la población total en un instante t es aproximadamente

$$\sum_a \rho(a,t)\Delta a,$$

y considerando el límite cuando $\Delta a \to 0$ se llega,

$$\lim_{\Delta a\to 0} \sum_a \rho(a,t)\Delta a = \int_0^\infty \rho(a,t)\, da.$$

Así, se define la población total en un instante de tiempo t,

$$P(t) = \int_0^\infty \rho(a,t)\, da.$$

Suponen, también, que los individuos dejan la población solamente por muerte, denotando la tasa de muerte dependiente en edad por $\mu(a)$. Formulado matemáticamente significa que en el intervalo temporal $(t, t+\Delta t)$ una fracción $\mu(a)\Delta t$ de los miembros de la población con edades entre a y $a+\Delta a$ en el instante t mueren. Se sabe que en el instante de tiempo t, hay $\rho(a,t)\Delta a$ individuos con edades entre a y $a+\Delta a$. Luego entre el tiempo t y $t+\Delta t$ el número de individuos muertos de edades comprendidas en $(a, a+\Delta a)$ es $\rho(a,t)\Delta a\mu(a)\Delta t$ y el resto sobreviven teniendo edades entre $a+\Delta t$ y $a+\Delta t+\Delta a$ en el instante $t+\Delta t$. Luego,

$$\rho(a+\Delta t, t+\Delta t)\Delta a \approx \rho(a,t)\Delta a - \rho(a,t)\Delta a\mu(a)\Delta t.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\rho(a+\Delta t, t+\Delta t) - \rho(a,t)}{\Delta t} + \mu(a)\rho(a,t) \approx 0.$$

Si ρ es una función diferenciable en a y t, tomando $\Delta t \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho(a+\Delta t, t+\Delta t) - \rho(a,t)}{\Delta t} \\ &\quad = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho(a+\Delta t, t+\Delta t) - \rho(a,t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho(a, t+\Delta t) - \rho(a,t)}{\Delta t} \\ &\quad = \frac{\partial\rho}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial\rho}{\partial t}(a,t). \end{aligned}$$

Así se obtiene la *Ecuación de McKendrick*, también conocida como *Ecuación de von Foerster*

$$\frac{\partial\rho}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial\rho}{\partial t}(a,t) + \mu(a)\rho(a,t) = 0. \tag{1}$$

Se supone que el proceso de nacimiento viene regido por una función $\beta(a)$, denominada *razón de natalidad*; es decir, $\beta(a)\Delta t$ es el número de recién nacidos producidos por los miembros de la población con edades comprendidas entre a y $a+\Delta a$ en el intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$. Así, el número total de nacimientos producidos entre los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ es

$$\Delta t \sum_a \beta(a)\rho(a,t)\Delta a,$$

y se tiene

$$\lim_{\Delta a\to 0} \Delta t \sum_a \beta(a)\rho(a,t)\Delta a = \Delta t \int_0^\infty \beta(a)\rho(a,t)\,da.$$

Como esta cantidad debe ser $\rho(0,t)\Delta t$, se obtiene la condición

$$\rho(0,t) = \int_0^\infty \beta(a)\rho(a,t)\,da.$$

Para completar el modelo se supone que la distribución inicial de edad, es decir la densidad de población de edad a que hay en el instante 0, es conocida, $\rho_0(a)$. Luego el modelo completo es:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}(a,t)+\frac{\partial\rho}{\partial a}(a,t)+\mu(a)\rho(a,t)=0,\\
&\rho(0,t)=\int_0^\infty \beta(a)\,\rho(a,t)\,da,\\
&\rho(a,0)=\rho_0(a).
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

La ecuación (2) es una ecuación en derivadas parciales de primer orden lineal con una condición inicial no local.

Es importante observar la existencia de las curvas, llamadas *características*, a lo largo de las cuales la ecuación (2) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Es decir, representando la curva paramétrica como $t = t(s)$ y $a = a(s)$ y ρ evaluada en la curva por

$$\tilde{\rho}(s) = \rho(a(s), t(s)),$$

entonces se verifica

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\rho(a(s), t(s)) = \frac{\partial\rho}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}. \tag{3}$$

Ahora, eligiendo las curvas $t(s)$ y $a(s)$ por las condiciones

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} = 1, \tag{4}$$

y combinado (3) con la ecuación (2), se llega

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}}{\mathrm{d}s} + \mu(a(s))\tilde{\rho} = 0, \tag{5}$$

a lo largo de las curvas (4).

Este método general funciona incluso si los coeficientes en (2) son variables y dependientes en la población total P. Así, la solución de (2) es encontrada utilizando el método de las características como será explicado en la página 50.

El modelo mencionado anteriormente permitió dar un paso adelante por jugar un papel unificador en la teoría matemática de las poblaciones y, como se vio posteriormente, en la teoría de las epidemias. Dicho sea de paso la propagación de un hecho por "contagio"sirve también para modelar asuntos tan lejanos de la dinámica de poblaciones como la propagación de un rumor o una información.

Desde un punto de vista matemático, este modelo es un poco simple debido a la linealidad y como comentamos al principio no es aplicable a muchas situaciones. Así, como sucede habitualmente, el modelo fue mejorando, incorporando nuevos aspectos y planteando nuevas dificultades matemáticas. Un modelo más real hace pensar en variar la tasa de mortalidad y fertilidad con la población total, P, por ejemplo parece lógico suponer que a mayor población mayor será su tasa de mortalidad.

Modelos no lineales estructurados en edad: El modelo de Gurtin y MacCamy

En 1974, M. E. Gurtin y R. G. MacCamy, [44], introducen una formulación más realista de un modelo de dinámica de poblaciones no lineal, determinista y estructurado en edad. Consideran tanto la tasa de natalidad como la tasa de mortalidad funciones no lineales variando con la población total. Así, el modelo que ellos proponen es

$$
(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}(a,t) + \dfrac{\partial\rho}{\partial a}(a,t) + \mu(a,P(t))\rho(a,t) = 0, \\ \rho(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,P(t))\,\rho(a,t)\,da, \\ \rho(a,0) = \rho_0(a), \end{cases}
$$

donde P es la población total, es decir

$$
P(t) := \int_0^\infty \rho(a,t)\,da.
$$

En [44], establecen la existencia y unicidad de solución de la ecuación (6), además comprueban que añadiendo algunas hipótesis esta solución es global en tiempo. Sus resultados están basados en la reducción del problema (6) a un par de ecuaciones integrales para la población total $P(t)$ y la razón de nacimiento $B(t) = \rho(0,t)$. También estudian la estabilidad de los equilibrios del problema (6).

Este modelo ha sido punto de partida para gran cantidad de variaciones, extensiones, problemas relacionados, en los siguientes veinte años. Se han estudiado hipótesis de crecimiento de los datos para la existencia de solución global o de explosión en tiempo finito (véanse por ejemplo los trabajos de Chipot [22,23] y de Webb [89]), pruebas constructivas de la solución que permiten su aproximación numérica, diversos métodos numéricos para el problema tanto lineal como no lineal (véanse por ejemplo [1,55]), etc. También, se han hecho depender tanto la tasa de natalidad como de mortalidad de la función de densidad, $\rho(a,t)$, por ejemplo los trabajos [10,84], se han dado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una población de tamaño constante, véase por ejemplo [54]. Se han hecho depender los datos de otras variables, por ejemplo, $\beta \equiv \beta(a,t,W(t))$ donde $W(t)$ es la población total ponderada, (véanse por ejemplo [52,71] y la bibliografía citada en dichos trabajos); se ha considerado el modelo (6) con un segundo miembro de la forma $K\,f(P(t))\,\rho(a,t)$ (véase por ejemplo [18]), etc. En general, la abundante literatura resulta poco sistemática.

Motivación y resultados de la parte I de la Memoria: Un modelo presa-depredador con enfermedad en la presa

En una primera parte vamos a analizar un modelo presa-depredador con enfermedad en la presa estructurado en edad sin difusión. El sistema que vamos a analizar viene motivado, principalmente, por dos modelos, uno de epidemia de tipo SIS y otro presa-depredador con enfermedad en la presa no estructurado en edad.

Modelos de epidemias.-

El estudio de los modelos de epidemias es relativamente reciente como un área de investigación en las ciencias matemáticas. El primer modelo completo que dio una descripción matemática para la transmisión de una enfermedad con una población no estructurada fue, en 1927, el *modelo de Kermack y McKendrick* [53]. Este modelo es determinista y donde el proceso de la infección depende sólo del número de individuos infectados inicialmente en la población.

Durante el proceso infeccioso y dependiendo del tipo de enfermedad, los individuos pueden pasar por todos o algunos de los siguientes estados:

- **Susceptible** (S), estado en el cual el individuo puede ser contagiado por otro agente que esté infectado;
- **Infectado** (I), estado durante el cual el individuo se halla infectado y puede además infectar;
- **Recuperado** (R), estado durante el cual el individuo no puede ni ser infectado por haber adquirido inmunidad (temporal o permanente) ni afectar (por haber recuperado o haber pasado la etapa contagiosa de la enfermedad) o bien ha fallecido a causa de la enfermedad.

Entre las enfermedades infectocontagiosas encontramos dos grupos principales:

- Las que confieren inmunidad al infectado (temporal o permanente) una vez recuperado, la mayoría de origen viral (sarampión, varicela,...).
- Las que, una vez recuperado, el individuo vuelve a ser susceptible inmediatamente, entre las que encontramos las causadas por agentes bacterianos (enfermedades venéreas, peste, malaria...).

Teniendo en cuenta los distintos estados relacionados con un proceso infeccioso, los modelos epidemiológicos matemáticos se dividen en tres grandes grupos:

- **SIR**: El modelo susceptible-infectado-recuperado, relacionado con las enfermedades que confieren inmunidad permanente.
- **SIRS**: El modelo susceptible-infectado-recuperado-susceptible, idéntico al anterior, pero aplicable a casos en que la inmunidad no es permanente y el individuo vuelve a ser susceptible después de un cierto periodo, tal como la gripe.
- **SIS**: El modelo susceptible-infectado-susceptible; se usan en casos en que la enfermedad no confiere inmunidad y el individuo pasa de estar infectado a susceptible nuevamente, saltando la etapa R.

Generalmente, hay dos modos de transmitir directamente una enfermedad infecciosa,

- *La transmisión vertical*, es el contagio producido de una generación a otra en el útero o en el parto.
- *La transmisión horizontal*, es el contagio de individuo a individuo a través de otros métodos que los transmitidos verticalmente, como puede ser por contacto directo con un individuo infectado.

Kermack y McKendrick consideraron una enfermedad de tipo $SIRS$. Así, el modelo que propusieron en 1927, fue el siguiente:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
S' = -\beta S I, \\
I' = \beta S I - \alpha I, \\
R' = \alpha I,
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

donde α, β y γ son constantes

En 1932, también Kermack y McKendrick, propusieron un modelo simple de tipo SIS,

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \gamma I, \\ I' = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \tag{8}$$

Más adelante, el análisis matemático de modelos de epidemias con estructura de edad comienza principalmente con el trabajo de Hoppensteadt [49], siendo últimamente continuado por muchos otros ([15, 37, 50], entre otros).

Para el modelo de epidemia en la presa, nos hemos basado, principalmente, en los trabajos de Busenberg, Iannelli y otros (véanse por ejemplo [14, 16, 37, 51] y su bibliografía) que incluyen unas consideraciones interesantes relativas al contagio. Estos trabajos consideran, principalmente, modelos de epidemias dependientes en edad de tipo SIS donde la enfermedad se puede transmitir tanto vertical como horizontalmente.

Así, el modelo quizás más completo aparece en [51] y es el siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial i}{\partial a} + \mu(a, P(t))i = \lambda(a; i)s(a,t) - \gamma(a)i(a,t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial s}{\partial a} + \mu(a, P(t))s = -\lambda(a; i)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), \\ i(0,t) = q\displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a, P(t))\, i(a,t)\, \mathrm{d}a, \\ s(0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a, P(t))(s(a,t) + (1-q)\, i(a,t))\mathrm{d}a, \end{cases} \tag{9}$$

donde $A_\dagger$ denota la edad máxima de persistencia de la especie, $P = I + S$, es decir es la población total de individuos infectados y susceptibles de ser infectados, μ y β denotan la tasa de mortalidad y de natalidad, respectivamente, de la especie, γ es la razón de recuperación de la enfermedad, $q \in [0,1]$ la razón de la transmisión vertical de la enfermedad y λ es la fuerza de la infección, dada por una forma específica. Nótese que estos modelos asumen que la enfermedad es leve en el sentido que no afecta a la mortalidad de la especie, es decir la tasa de mortalidad tanto de los individuos infectados como de los susceptibles es la misma. Esta hipótesis ayuda a simplificar bastante el modelo pues si sumamos las dos primeras ecuaciones del modelo es fácil comprobar entonces que la población de toda la especie, es decir, infectados y susceptibles ($p = i + s$) verifica la ecuación de Gurtin y MacCamy, es decir la ecuación (6).

En [51], los autores analizan el comportamiento global del modelo bajo la hipótesis que la densidad de población, es decir, p, converge uniformemente hacia un equilibrio estable. Comprueban que el sistema es globalmente asintóticamente estable hacia el sistema estacionario correspondiente.

Nosotros supondremos en nuestro modelo que la presa sigue un modelo de epidemia de tipo SIS pero a diferencia de los modelos anteriores, consideraremos que la enfermedad afecta a la especie, es decir causa mortalidad y por tanto, la tasa de mortalidad de los individuos infectados será mayor que la de los individuos sanos. También supondremos que el modelo es no autónomo, es decir tanto las tasas de mortalidad como la fuerza de la infección dependen de la variable temporal, con lo que no podemos proceder utilizando las técnicas de [89], donde quizás se encuentra la teoría más general de solución para estas ecuaciones.

Luego, el modelo que asumiremos que sigue la presa en ausencia del depredador es el siguiente

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t}(a,t) + \dfrac{\partial i}{\partial a}(a,t) + \mu_1(a,t,P(t))i(a,t) = \lambda(a,t;i)s(a,t) - \gamma(a)i(a,t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t}(a,t) + \dfrac{\partial s}{\partial a}(a,t) + \mu_2(a,t,P(t))s(a,t) = -\lambda(a,t;i)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), \\ i(0,t) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\, i(a,t)\, \mathrm{d}a, \\ s(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\big(s(a,t) + (1-q)i(a,t)\big)\mathrm{d}a. \end{cases}$$

Modelos de presa-depredador.-

Interacción de tipo presa-depredador son habituales en la literatura biológica y uno de los principales temas de trabajo en Ecología.

El estudio teórico de tales modelos comienza, quizás, con los trabajos de Lotka y Volterra, y es continuado por muchos otros, sin suponer dependencia en edad (véase por ejemplo [25, 38]).

Pero, como ya explicamos al principio de esta Introducción, la importancia de la estructura de edad en la población ha conducido a trabajos donde los modelos presa-depredador son supuestos dependientes en edad. La introducción de la edad en estos modelos complica, claramente, su análisis y es por ello que a menudo se supone que la dependencia de la edad sólo afecta a una de las especies, o bien al depredador (véase por ejemplo [28]), o bien a la presa (por ejemplo los trabajos [42, 66]). En 1974, Venturino [87], estudió la existencia y unicidad de solución de un modelo presa-depredador donde tanto la presa como el depredador vienen estructurados en edad, aunque la dificultad analítica que conlleva el análisis de tal modelo hace estudiarlo mediante técnicas numéricas.

Nosotros asumiremos que el depredador, denotado por Y, no depende de la edad y crece de acuerdo a una ley logística.

Modelos de presa-depredador con enfermedad en la presa.-

La importancia de las enfermedades infectocontagiosas han comenzado a tenerse en cuenta en las interacciones presa-depredador muy recientemente.

Así nos encontramos en la literatura los trabajos de Chattopadhyay y Arino [19], que consideraron un modelo SI en el cual la presa y el depredador crecen siguiendo una ley logística y el depredador come principalmente presa infectada y ninguna de las especies está estructurada en edad. También nos encontramos otros trabajos, aunque no demasiados, que consideran esta posible situación, por ejemplo para citar algunos [20, 21, 47, 88, 90].

Considerando ahora que en el modelo que vamos a actuar intervienen tanto la presa como el depredador, el sistema que analizaremos en la parte I de la memoria es el siguiente

$$(11)\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t}+\dfrac{\partial i}{\partial a}+\mu_1(a,t,P(t))i=\lambda(a,t;i)s(a,t)-\gamma(a)i(a,t)-M_1 i(a,t)Y(t),\\ \dfrac{\partial s}{\partial t}+\dfrac{\partial s}{\partial a}+\mu_2(a,t,P(t))s=-\lambda(a,t;i)s(a,t)+\gamma(a)i(a,t)-M_2 s(a,t)Y(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)=mY(t)-nY^2(t)+\nu M_1 I(t)Y(t)+\nu M_2 S(t)Y(t),\\ i(a,0)=i_0(a), s(a,0)=s_0(a), Y(0)=Y_0,\\ i(0,t)=q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\, i(a,t)\,\mathrm{d}a,\\ s(0,t)=\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))(s(a,t)+(1-q)\,i(a,t))\mathrm{d}a. \end{cases}$$

donde i, s, denotan los individuos infectados y susceptibles de la presa e Y denota el depredador, y M_1, M_2, ν, m y n son constantes que serán explicadas con más claridad en la introducción del Capítulo 2.

En el Capítulo 2, estudiaremos la existencia y unicidad de solución del problema (11). Para ello, en primer lugar analizaremos el problema (10). Como comentamos anteriormente la diferencia de las tasas de mortalidad entre los individuos sanos e infectados complica matemáticamente la resolución de dicho sistema, pues nos encontramos con un sistema de ecuaciones acopladas.

Se tiene el siguiente resultado (véase Teorema 2.4.7 del Capítulo 2):

Teorema 0.0.1. *Bajo hipótesis adecuadas sobre regularidad y acotación en los datos* (cf. Capítulo 2)*, para cada $T>0$ y para cada $(i_0,s_0)\in\left(L^1(\mathbb{R}_+)\right)^2$, existe una única (i,s) solución del problema* (10)*.*

Una vez estudiado el modelo de epidemia con tasa de mortalidad distinta, el siguiente paso es estudiarlo con el depredador. Para ello, fijados i y s en el modelo (11), resolvemos la ecuación diferencial que verifica el depredador. Así nos surge, entonces, un problema de punto fijo. Luego, justificaremos que la aplicación

$$\begin{aligned} G:\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)\\ z &\longmapsto G(z), \end{aligned}$$

donde para cada $t \in [0,T]$,

$$G(z)(t) = \frac{Y_0\, e^{mt}\, \exp[f_z(t)]}{1 + n\, Y_0 \displaystyle\int_0^t e^{m\tau}\, \exp[f_z(\tau)]\, \mathrm{d}\tau},$$

con f_z una función dependiente de i y s, es contractiva. Esto nos dará la existencia de un único punto fijo de la aplicación G y por consiguiente, la existencia y unicidad de solución del modelo (11). Este resultado queda reflejado en el siguiente Teorema (véase Teorema 2.5.8):

Teorema 0.0.2. *Bajo hipótesis adecuadas sobre regularidad y acotación en los datos* (cf. Capítulo 2)*, para cada $T > 0$ y para cada $(i_0, s_0, Y_0) \in \left(L^1(\mathbb{R}_+)\right)^2 \times \mathbb{R}_+$, existe una única (i, s, Y) solución del problema* (11)*.*

Los resultados de este Capítulo, basados en el método de las características y en las estimaciones necesarias para aplicar el Teorema del punto fijo de Banach están sometidos a publicación [31].

El siguiente paso, como suele ser habitual, es el estudio del comportamiento asintótico de la solución del problema (11). Es por ello que en el Capítulo 3, estudiaremos la estabilidad de los equilibrios libres de enfermedad, es decir, de aquellos equilibrios donde los individuos infectados desaparecen, del modelo (11) ligeramente modificado. Es decir, consideraremos el modelo (11) autónomo y semilineal, donde β no depende de la población total, y supondremos también que la fuerza de la infección es de la forma:

$$\lambda(a,t;i) := K(a)I(t).$$

Así, el modelo objeto de estudio del Capítulo 3 es el siguiente:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial i}{\partial a} + \mu_1(a,P(t))i = K(a)I(t)s(a,t) - \gamma(a)i(a,t) - M_1 i(a,t)Y(t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial s}{\partial a} + \mu_2(a,P(t))s = -K(a)I(t)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t) - M_2 s(a,t)Y(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = mY(t) - nY^2(t) + \nu M_1 I(t)Y(t) + \nu M_2 S(t)Y(t), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), Y(0) = Y_0, \\ i(0,t) = q \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\, i(a,t)\, \mathrm{d}a, \\ s(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)(s(a,t) + (1-q)\, i(a,t))\mathrm{d}a, \\ i(a,t), s(a,t) \longrightarrow 0, \text{ cuando } a \to +\infty. \end{cases}$$

Estudiar este tipo de equilibrios desde el punto de vista biológico puede ser interesante pues da pistas sobre cómo puede ayudar el depredador a extinguir la enfermedad de la presa.

Para realizar dicho estudio, en primer lugar reformularemos el problema como un problema abstracto, para así poder utilizar después las técnicas de la teoría de semigrupos. Luego, una vez que escribamos el modelo como una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de Banach, en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{\mathrm{d}t} = B\phi + C(\phi), \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases}$$

comprobaremos que el operador lineal B es el generador de un semigrupo y el operador no lineal C es Fréchet diferenciable para poder aplicarle técnicas de linealización.

El siguiente paso será estudiar la existencia de equilibrios libres de enfermedad. Denotando por:

$$\boxed{R_0 := \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, 0)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a}$$

y

$$\boxed{\widetilde{R_0} = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, 0)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a\right] \mathrm{d}a,}$$

es obvio que $R_0 > \widetilde{R_0}$. Obtendremos el siguiente resultado (véase Teorema 3.3.1 del Capítulo 3):

Teorema 0.0.3. *Bajo hipótesis de regularidad en los datos* (cf. Capítulo 3)*, se tiene:*

- *Si $R_0 \leq 1$, entonces $(0,0,0)$ y $(0,0,m/n)$ son los únicos puntos estacionarios en los que desaparecen los infectados.*
- *Si $\widetilde{R_0} \leq 1 < R_0$, entonces $(0,0,0)$, $(0,0,m/n)$ y $(0,s^*(a),0)$ son los únicos puntos estacionarios en los que desaparecen los infectados. Aquí s^* es:*

$$s^*(a) = \frac{S^*}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^\tau \mu_2(\tau, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}\tau} \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right],$$

donde S^* es la única solución real y positiva de la siguiente ecuación:

$$\int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a = 1.$$

- *Si $\widetilde{R_0} > 1$, entonces $(0,0,0)$, $(0,0,m/n)$, $(0,s^*(a),0)$ y $(0,\tilde{s}(a),(m+\varepsilon M_2\widetilde{S})/n)$ son los únicos puntos estacionarios en los que desaparecen los infectados. Con*

$$\tilde{s}(a) = \widetilde{S} \frac{\exp\left[-\displaystyle\int_0^a \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a - \frac{\nu M_2^2 \widetilde{S}}{n} a\right]}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^\tau \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n}\tau - \frac{\nu M_2^2 \widetilde{S}}{n}\tau\right] \mathrm{d}\tau},$$

donde $\widetilde{S}$ *es la única solución real positiva de la ecuación:*

$$\int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n}a - \frac{\nu M_2^2 \widetilde{S}}{n}a\right] \mathrm{d}a = 1.$$

El siguiente objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de la solución hacia estos equilibrios libres de enfermedad, para ello queremos aplicar el principio de linealización (véase Prop. 1.3.11). Así una vez linealizado el problema en los puntos de equilibrios, veremos que el operador de la linealización puede ser descompuesto en un operador compacto y en otro operador "pequeño". Y por tanto, reduciremos el problema de la estabilidad al estudio de los autovalores del operador de la linealización.

Por tanto, estudiando el problema de autovalores asociado a la linealización entorno a cada punto de equilibrio se obtendrá el siguiente resultado (cf. Sección 3.4.2):

Teorema 0.0.4.

- *Los equilibrios* $(0,0,0)$ *y* $(0, s^*(a), 0)$ *son inestables.*
- *El equilibrio* $(0,0,m/n)$ *es*
  - *localmente asintóticamente estable si* $\widetilde{R_0} < 1$*;*
  - *inestable si* $\widetilde{R_0} > 1$*.*

El estudio de la estabilidad o inestabilidad del equilibrio $(0, \tilde{s}(a), (m + \varepsilon M_2 \widetilde{S})/n)$, es bastante más complicado y está basado en las propiedades de los semigrupos positivos y resultados del Análisis Complejo. Llegamos a encontrar condiciones suficientes tanto de inestabilidad como de estabilidad para dicho equilibrio.

Para finalizar con este Capítulo, estudiamos un caso particular, en el cual el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), (m + \varepsilon M_2 \widetilde{S})/n)$ es localmente asintóticamente estable, con la hipótesis principal de que la tasa de infección sobre la presa, i.e. M_1, sea "pequeña".

Los resultados de este Capítulo, que se apoyan en técnicas variadas (teoría de semigrupos, principio de linealización, teoría de las transformadas de Laplace, el principio del argumento de la variable compleja) han sido publicados en [8].

Como anteriormente comentamos, nuestro objetivo era el estudio del comportamiento asintótico del modelo (11) y así pretendemos estudiar en el Capítulo 4 la estabilidad de todos los puntos de equilibrio. La obtención de resultados analíticos exige realizar algunas variaciones al modelo original; por una parte suponemos que los datos no dependen de la edad, pero por otra permitimos que la tasa de natalidad β dependa de la población total P, lo que hace de este modelo ligeramente distinto al que aparecía en el Capítulo 3. Por tanto, la suposición de la no dependencia en edad de los datos nos permite integrar el sistema en derivadas parciales con respecto a la variable edad, obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$
(13)\qquad \begin{cases} I' = q\beta(P)I - \mu_1(P)I + KIS - \gamma I - M_1 IY, \\ S' = \beta(P)\big(S + (1-q)I\big) - \mu_2(P)S - KIS + \gamma I - M_2 SY, \\ Y' = mY - nY^2 + \varepsilon M_1 IY + \varepsilon M_2 SY, \\ I(0) = I_0,\ S(0) = S_0,\ Y(0) = Y_0, \end{cases}
$$

En realidad haremos algo más que estudiar el comportamiento asintótico. Primero analizaremos el modelo sin depredador, y después el modelo con depredador. Esto nos permitirá comprobar qué es lo que le ocurre a la población cuando empieza a actuar el depredador.

Obsérvese que el sistema sin depredador es un sistema diferencial plano, lo que nos permitirá usar, entre otros resultados, el Teorema de Poincaré-Bendixson. Así, para este modelo se tiene el siguiente resultado de existencia de equilibrios (véase Teorema 4.2.3):

Teorema 0.0.5. *El punto* $E_{00} := (0,0)$ *es siempre un equilibrio, trivial, del sistema* (13)*.*

1. *Si* $\mu_2(0) \geq \beta(0)$*, entonces el punto* E_{00} *es el único punto de equilibrio.*

2. *Si* $\mu_2(0) < \beta(0)$ *entonces existe otro equilibrio,* $E_{0S} := (0, P_S)$*, es decir un equilibrio libre de enfermedad. Además, si* $K > \mathcal{K}_1$*, con* $\mathcal{K}_1$ *una constante positiva, que depende de* μ_1*,* μ_2*,* β*,* q *y* γ*, existe al menos otro equilibrio* $E_{IS} := (I^*, S^*)$*.*

Además, tenemos el siguiente resultado de estabilidad (véanse Teoremas 4.2.7 y 4.2.8):

Teorema 0.0.6.

1. *El equilibrio trivial* E_{00} *es globalmente asintóticamente estable si* $\mu_2(0) > \beta(0)$ *y si* $\mu_2(0) < \beta(0)$ *es inestable.*

2. *Existen dos constantes* $\mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_3$ *tal que si* $K < \mathcal{K}_2$*, entonces el equilibrio libre de enfermedad,* E_{0S}*, supuesto que exista, es globalmente asintóticamente estable y si* $K > \mathcal{K}_3$ *es inestable.*

3. *Bajo hipótesis que nos garanticen la existencia y unicidad del equilibrio endémico* E_{IS} *y* $K > \mathcal{K}_3$*, el equilibrio* E_{IS} *es globalmente asintóticamente estable.*

Después estudiaremos el modelo con depredador, que al no ser ya un sistema diferencial plano complica el estudio asintótico, pues no podemos, por ejemplo, aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson.

Obsérvese que los equilibrios donde el depredador desaparece, es decir, los equilibrios del tipo $(I^*, S^*, 0)$, han sido estudiados en el Teorema 0.0.5. Así que en este Teorema incluiremos solamente aquellos equilibrios donde el depredador no desaparece. Primero obtendremos un resultado de existencia de equilibrios (véase Teorema 4.3.5):

Teorema 0.0.7. *El punto* $E_{00Y} := (0, 0, m/n)$ *es siempre un punto crítico del sistema* (13)*.*

1. *Si* $\mu_2(0) \geq \beta(0) - (M_2 m)/n$, *entonces el punto* E_{00Y} *es el único equilibrio en el cual no desaparece el depredador para el sistema* (13)*.*

2. *Si* $\mu_2(0) < \beta(0) - (M_2 m)/n$, *entonces existe otro equilibrio,*

$$E_{0SY} := (0, P_{SY}, (m + \varepsilon M_2 P_{SY})/n).$$

   Además si existe una constante $\mathcal{K}_4$ *tal que* $K > \mathcal{K}_4$ *entonces existe al menos otro equilibrio endémico* (I^*, S^*, Y^*)*.*

Y con respecto a la estabilidad obtendremos el siguiente resultado (véanse Proposición 4.3.7 y Teoremas 4.3.8 y 4.3.9):

Teorema 0.0.8.

1. *Todos los equilibrios donde desaparece el depredador, es decir del tipo* $(I^*, S^*, 0)$*, son inestables.*

2. *El equilibrio trivial* E_{00Y} *es globalmente asintóticamente estable si* $\mu_2(0) > \beta(0) - (M_2 m)/n$ *e inestable cuando* $\mu_2(0) < \beta(0) - (M_2 m)/n$*.*

3. *Supongamos que existe el equilibrio* E_{0SY} *y dos constantes* $\mathcal{K}_5 < \mathcal{K}_6$*. Entonces si* $K < \mathcal{K}_5$ *el equilibrio* E_{0SY} *es globalmente asintóticamente estable. De hecho, la enfermedad desaparece. Y si* $K > \mathcal{K}_6$ *entonces* E_{0SY} *es inestable.*

4. *Bajo ciertas hipótesis el equilibrio endémico* (I^*, S^*, Y^*) *es localmente asintóticamente estable.*

Así que analizando los resultados obtenidos tanto para el modelo sin depredador como para el modelo con depredador, podemos llegar a la siguiente interpretación biológica:

Para el caso sin el depredador tenemos que:

- Si la razón de natalidad neta, es decir la que corresponde a ausencia de población ($\beta(0)$), es menor que la tasa neta de mortalidad de los individuos susceptibles ($\mu_2(0)$), entonces la presa se acaba extinguiendo.

- En caso contrario, es decir si $\beta(0) > \mu_2(0)$ y además

  - la razón de la infección, K, es suficientemente pequeña, entonces la enfermedad desaparece, aunque no la población.
  - Sin embargo, si la razón de la infección es bastante grande, entonces la enfermedad persiste a lo largo de todo el período de tiempo.

Ahora introducimos en este proceso un depredador, es decir consideramos el sistema (13).

- Si la razón de depredación sobre los individuos susceptibles, M_2, o la capacidad del medio, $D := m/n$, es suficientemente grande ($M_2 D > \beta(0) - \mu_2(0)$), entonces el depredador provoca la extinción de los individuos sanos y enfermos, es decir de toda la población de la presa.

- Si por el contrario, tenemos que $M_2 D < \beta(0) - \mu_2(0)$, entonces
  - si la razón de depredación sobre los individuos infectados, M_1, es suficientemente grande, entonces la enfermedad desaparece.
  - Sin embargo, bajo ciertas condiciones (véase Teorema 4.3.8), la enfermedad persiste.

Como consecuencia, podemos concluir que la entrada del depredador puede ayudar a extinguir la enfermedad. Efectivamente, si tenemos que K es suficientemente grande, por ejemplo $K > K_2$ con K_2 definida en (4.13), el equilibrio libre de enfermedad, cuando no hay depredador, es inestable, y de hecho en este caso existen equilibrios endémicos que son estables. Por consiguiente, en este caso, la enfermedad persiste. Por el contrario, si el depredador actúa, $K > K_2$ y la tasa de depredación sobre los infectados, M_1, es suficientemente grande, entonces la enfermedad desaparece perdurando los individuos sanos.

Los resultados de este Capítulo que se basan en la teoría de estabilidad para sistemas diferenciales ordinarios autónomos y no autónomos han sido publicados en [32].

Modelos estructurados en edad con difusión

Hasta ahora todos los modelos que hemos ido viendo no suponen difusión espacial.

Un modelo pionero de dinámica de poblaciones considerando la difusión espacial de la población fue enunciado por Skellam, [85], en 1951. El modelo está basado en la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$\rho_t = \Delta\rho + \sigma(\rho), \tag{14}$$

donde $\rho := \rho(x,t)$ denota la densidad de población, Δ el Laplaciano, y $\sigma(\rho)$ representa la variación de la población debida a la natalidad y la mortalidad de la especie.

Este modelo no tiene en cuenta la edad de la población. Sin embargo, como ya hemos comentado anteriormente, para muchos organismos su comportamiento no depende sólo de su densidad de población en espacio sino también de su distribución en edad. No se puede esperar que una comunidad de organismos mayores tenga el mismo comportamiento que una de organismos más jóvenes.

Modelos considerando la difusión espacial sin tener en cuenta la estructura en edad han sido extensamente estudiados; pero hay muchos menos trabajos teniendo en cuenta tanto la estructura en edad como en espacio.

En [43], Gurtin generaliza la clásica ecuación (14) a un modelo lineal dependiente en edad con difusión. Así, supuso que la evolución de la población estaba gobernada por la ley

$$\rho_t + \rho_a = -div\, q + s,$$

donde $\rho(x,a,t)$ denota la función distribución de la población, q es el flujo de la población debido a la dispersión y s representa la entrada-salida de individuos.

En 1977, Gurtin y MacCamy [45], diferenciaron entre dos clases de difusión: la difusión debida a una dispersión aleatoria y la difusión para evitar el hacinamiento, es decir aquella en la que las especies migran de zonas de alta a baja densidad de población. Los autores aplicaron los resultados obtenidos para el caso sin estructura en edad, a una extensión no lineal de un modelo con estructura en edad aparecido en [43]. Supusieron que la entrada-salida de individuos era debida exclusivamente a muerte en la población y tomaba la forma:

$$s(x, a, t) := -\mu(a, P)\rho,$$

donde μ representa la tasa de mortalidad de la especie y P denota la población total, es decir

$$P(x, t) = \int_0^\infty \rho(x, a, t)\, \mathrm{d}a.$$

El proceso de nacimiento venía modelado por la siguiente ecuación:

$$\rho(x, 0, t) = \int_0^\infty \beta(a, P)\rho(x, a, t)\, \mathrm{d}a.$$

Además, el flujo de la población debido a la dispersión seguía la usual ley:

$$q := \rho\mathbf{v},$$

siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de difusión. Puesto que estaban interesados en situaciones en las que la difusión evitaba la concentración, asumieron que:

$$\mathbf{v} := -k(a, \rho, P)\nabla P.$$

Así, suponiendo que tanto μ, β y k eran independientes de a y además k independiente de ρ, obtuvieron el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_a + \mu(P)\rho = div\left[\rho k(P)\nabla P\right], \\ \rho(x, 0, t) = \beta(P)P(x, t). \end{cases}$$

Integrando en la variable edad, se tiene una ecuación del tipo (14) y los autores le aplicaron los resultados obtenidos para el caso sin estructura en edad.

Di Blasio y Lamberti [36] y más recientemente, Langlais [63], consideraron un modelo lineal con estructura en edad y difusión suponiendo que el flujo de la población viene dado por

$$q := \nabla \int_0^{A_\dagger} k(a, \alpha)\rho(x, \alpha, t)\, \mathrm{d}\alpha,$$

donde $A_\dagger$ es la edad máxima de supervivencia de la especie y k una función medible verificando condiciones de monotonía.
Así, el modelo que se consideró en [63] era:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_a + \mu\rho - \Delta \displaystyle\int_0^{A_\dagger} k(a, \alpha)\rho(x, \alpha, t)\, \mathrm{d}\alpha = 0, \\ \rho(x, a, 0) = \rho_0(x, a), \\ \rho(x, 0, t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x, a, t)\rho(x, a, t)\, \mathrm{d}a, \end{cases}$$

con condición frontera:

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_0^{A_\dagger} k(a, \alpha)\rho(x, \alpha, t)\, \mathrm{d}\alpha = 0.$$

Bajo hipótesis razonable de regularidad en k, μ, β y ρ_0, el autor estableció la existencia y unicidad de solución en el espacio $L^2((0,A_\dagger)\times(0,T);H^2(\Omega))$. Los resultados fueron obtenidos utilizando un método de punto fijo.

En 1982, Garroni y Langlais [40] consideraron un modelo lineal con difusión aleatoria, es decir asumieron que el flujo de dispersión venía dado por

$$q := -\nabla\rho,$$

además supusieron que la población se encontraba sujeta a una fuerza dependiendo del entorno en el sentido siguiente: la densidad de población permanece menor o igual que una función dada, ψ, y cuando es estrictamente menor es gobernada por la ecuación:

$$\rho_t + \rho_a - \Delta\rho + \mu(x,a,t)\rho = f(x,a,t), \tag{15}$$

donde f es un término que tiene en cuenta posibles incrementos externos de la especie. Es decir, buscaron ρ tal que

$$\begin{cases} \rho \le \psi, \\ \rho_t + \rho_a - \Delta\rho + \mu\rho - f \le 0, \\ (\rho_t + \rho_a - \Delta\rho + \mu\rho - f)\,(\rho - \psi) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

con condición frontera de tipo Neumann y las condiciones iniciales habituales.
Los autores obtuvieron resultados sobre existencia y unicidad de solución, entendiendo por solución:

$$\begin{aligned} &\rho \in L^2((0,A_\dagger)\times(0,T);H^2(\Omega)) \text{ tal que} \\ &\rho_t + \rho_a + \mu\rho \in L^2(\Omega\times(0,A_\dagger)\times(0,T)) \end{aligned}$$

verificando el problema (16).
Para obtener existencia y unicidad de solución usaron un método de penalización, es decir, para $\varepsilon > 0$ buscaron $\rho_\varepsilon \in L^2((0,A_\dagger)\times(0,T);H^2(\Omega))$ solución de:

$$\rho_t + \rho_a - \Delta\rho + \mu\rho + \frac{1}{\varepsilon}(\rho-\psi)^+ = f.$$

y después tomaron $\varepsilon \to 0$. Por resultados de comparación y estimaciones de energía, tuvieron existencia y unicidad de solución del problema (16).

En 1985, Kunisch, Schappacher y Webb [58], estudiaron un modelo no lineal como una ecuación abstracta en un espacio de Banach, X, mediante las técnicas de la teoría de $\mathcal{C}^0$-semigrupos. Se plantearon el problema, escrito en forma abstracta siguiente:

$$\begin{cases} D\rho(a,t) = A\rho(a,t) + G(\rho(t,\cdot))(a), \\ \rho(0,t) = F(\rho(t,\cdot)), \\ \rho(a,0) = \rho_0(a), \end{cases} \tag{17}$$

donde

$$D\rho(a,t) = \lim_{h\to 0}\frac{\rho(a+h,t+h)-\rho(a,t)}{h},$$

$F : BC(0,\infty;X) \cap L^1(0,\infty;X) \to X$, con $BC(0,\infty;X)$ el espacio de Banach de todas las funciones con valores en X, acotadas y uniformemente continuas, $G : BC(0,\infty;X) \cap L^1(0,\infty;X) \to BC(0,\infty;X) \cap L^1(0,\infty;X)$ y A es el generador de un $\mathcal{C}^0$-semigrupo.
Entonces, los autores obtienen, bajo hipótesis de regularidad en F y G, la existencia de un $T > 0$ y una única función continua $\rho : [0,T] \to BC(0,\infty;X) \bigcap L^1(0,\infty;X)$ tal que ρ es solución de (17), es decir verifica la ecuación implícita, que se obtiene la resolver la ecuación por el método de las líneas características, siguiente:

$$\rho(a,t) = \begin{cases} e^{Aa}F(\rho(t-a,\cdot)) + \displaystyle\int_{t-a}^{t} e^{A(t-s)}G(\rho(s,\cdot))(s+a-t)\,\mathrm{d}s, & \text{si } 0 \le a \le t, \\ e^{At}\rho_0(a-t) + \displaystyle\int_{0}^{t} e^{A(t-s)}G(\rho(s,\cdot))(s+a-t)\,\mathrm{d}s, & \text{si } a \ge t. \end{cases}$$

Además probaron, la existencia de un intervalo maximal de la solución, $[0, T_{\rho_0})$, es decir si $0 < T < T_{\rho_0}$, entonces existe un única solución de (17) en $[0,T]$. Si $T_{\rho_0} < +\infty$, entonces

$$\limsup_{t \to T_{\rho_0}^-} \|\rho(t,\cdot)\| = +\infty.$$

En 1985 y 1988, Langlais [64,65], considera modelos no lineales con difusión aleatoria. En [65], considera el modelo:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \rho_t + \rho_a - k\Delta\rho + \mu(x,a,P)\rho = 0, \\ \rho(x,a,0) = \rho_0(x,a), \\ \rho(x,0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,x,P)\rho(x,a,t)\,\mathrm{d}a, \\ \rho(x,a,t) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde k es una constante positiva.
En dicho trabajo, el autor analiza el comportamiento asintótico de la solución del modelo (18), entendiendo por solución una función ρ positiva tal que para cualquier $T > 0$, $\rho \in L^1(Q)$ $(Q := \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T))$ verificando

$$\iiint_Q \left(\rho^2 + |\nabla\rho|^2 + |\Delta\rho|^2 + |\rho_t + \rho_a|^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t < +\infty,$$
$$0 \le P(x,t) \le M_1 < +\infty,$$

y el sistema (18).
En una primera etapa, el autor estudia el caso concreto donde las tasas de natalidad y mortalidad vienen dadas por:

$$\mu(x,a,P) \equiv \mu_n(a) + \mu_e(P),$$
$$\beta(x,a,P) \equiv \beta_n(a)\,\beta_e(P).$$

El autor comprobó que la solución de dicho modelo se podía expresar como:

$$\rho(x,a,t) = \varphi(a)\,P(x,t).$$

Y gracias a la forma concreta de la solución, probó que o bien tiende a cero o bien converge a una solución estacionaria no trivial o bien explota cuando el tiempo se hace grande. Y usando métodos de comparación, aplicó los resultados obtenidos en este caso particular al modelo no lineal (18).

Más recientemente Kubo y Langlais [56, 57] introducen en el segundo miembro del modelo lineal asociado a (18) una función lineal positiva, es decir suponen que la densidad de población puede aumentar por agentes externos. Además, bajo ciertas hipótesis de periocidad en los datos, dan resultados de existencia y no existencia de solución periódica, aplicando los resultados obtenidos a un sistema de epidemias con difusión.

Últimamente, se ha comenzado con el estudio de los problemas de control y controlabilidad aplicados a problemas lineales y no lineales del tipo (18) (véanse por ejemplo los trabajos de Ainseba, Langlais y Aniţa [2, 3, 6] entre otros).

Motivación y resultados de la parte II de la Memoria: Estudio de modelos con difusión estructurados en edad

En una segunda parte analizamos un modelo con difusión estructurado en edad semilineal.

Supondremos que la difusión es lineal, i.e. el flujo de la población viene dado por ∇u, con ∇ el gradiente con respecto a la variable espacial. Además, asumiremos que la entrada-salida de individuos viene dada por un término de mortalidad y un término de reacción, i.e.

$$s := -\mu(x,a,t)u + f(x,a,t,u),$$

donde $\mu(x,a,t)$ es la tasa de la mortalidad natural de la especie y f describe el efecto del entorno en la población, entonces f será positiva cuando el entorno es favorable y negativa cuando es hostil.

Supondremos que los individuos de la población desaparecen al llegar a una edad máxima, $A_\dagger$.

Asumiremos que el proceso de nacimiento viene dado por la ecuación,

$$u(x,0,t) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)da,$$

donde $\beta(x,a,t)$ representa la tasa de fertilidad.

Finalmente, supondremos que la frontera, $\partial\Omega$, del dominio, Ω, es inhabitable.

Entonces, el modelo que consideramos es

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x,a,t)u = f(x,a,t,u) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Este modelo es una generalización de modelos estudiados (véanse por ejemplo los trabajos de Langlais [62, 64, 65] y las referencias que aparecen en ellos). En dichos modelos, como explicamos anteriormente, se supone que la entrada-salida de individuos viene únicamente afectado por la mortalidad de la especie, es decir es un término de salida de individuos, mientras que en el modelo (19), aparece además un término de reacción.

En el Capítulo 5, primero daremos un resultado general de existencia y unicidad de solución del problema (19), bajo la hipótesis de la lipschitzianidad global de f en la variable u.

A continuación, construiremos un método de sub-supersolución y se lo aplicaremos al problema (19). Nótese que (19) es un problema de primer orden con condición inicial no local y potencial singular, lo cual es un hecho importante, puesto que gran parte de la dificultad de este problema estriba en el hecho que vamos a suponer que $\mu(x,a,t) \to +\infty$ cuando $a \to A_\dagger$, la cual es una condición necesaria para garantizar que la solución de (19) se anula cuando $a = A_\dagger$.

Sea T un número real finito positivo, denotamos por $\mathcal{O}$, el abierto $(0, A_\dagger) \times (0, T)$.

Antes de nada, daremos la definición de solución, subsolución y supersolución de (19):

Definición 0.0.9. *Una función $\underline{u} \in L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega))$ se dice que es una **subsolución** del problema* (19) *si*

$$\begin{aligned}&(\partial_t + \partial_a)\underline{u} + \mu\underline{u} \in L^2(\mathcal{O}; (H^1(\Omega))'),\\ &f(\cdot,\cdot,\cdot,\underline{u}) \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})\end{aligned}$$

y además verifica

a) para todo $v \in L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega))$ positiva

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{O}} \langle (\partial_t + \partial_a)\, \underline{u} + \mu\underline{u}, v\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}} \nabla\underline{u}\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t&\\ \le \iint_{\mathcal{O}} f(x,a,t,\underline{u})\, v \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t,&\end{aligned} \tag{20}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto de dualidad entre $(H^1(\Omega))'$ y $H^1(\Omega)$,

b) $\underline{u}(x,a,t) \le 0$ sobre $\partial\Omega \times \mathcal{O}$, en el sentido débil,

c) $\underline{u}(x,0,t) \le \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)\underline{u}(x,a,t)\,\mathrm{d}a$ en $\Omega \times (0,T)$,

d) $\underline{u}(x,a,0) \le u_0(x,a)$ en $\Omega \times (0, A_\dagger)$.

*Análogamente, se definen una **supersolución**, $\overline{u}$, invirtiendo las desigualdades anteriores, y una **solución**, u, cambiando las desigualdades por igualdades, y además verificándose* (20)*, para todo $v \in L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega))$ sin necesidad de positividad.*

El resultado general que obtenemos sobre existencia y unicidad de solución del problema (19), es (véase Teorema 5.3.1):

Teorema 0.0.10. *Bajo ciertas hipótesis de regularidad en los datos* (cf. Cap. 5) *y la hipótesis de lipschitzianidad global de f con respecto a la cuarta variable, existe una única solución, u, del problema* (19).

Aplicando el método de sub-supersolución, obtendremos el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución del problema (19) (véase Teorema 5.4.5):

Teorema 0.0.11. *Bajo ciertas hipótesis de regularidad en los datos* (cf. Cap. 5)*, si existe un par de sub-supersoluciones de* (19)*,* $\underline{u}, \overline{u}$*, y, además,* f *verifica una condición de lipschitzianidad local en la cuarta variable, se tiene que* (19) *posee una única solución,* u*, tal que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Es importante notar que demostraremos (véase Teorema 5.4.2), que si tenemos un par de sub-supersoluciones del problema (19), $\underline{u}$ y $\overline{u}$, respectivamente, entonces $\underline{u} \leq \overline{u}$, por lo cual no hay que suponer que la subsolución es menor que la supersolución.

Este método también puede ser utilizado para estudiar el comportamiento asintótico de la solución de (19). Nosotros aplicaremos este método a diferentes modelos ecológicos: en primer lugar a un problema logístico generalizado, es decir a un problema del tipo

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(a)u = \lambda u - g(u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, 0) = u_0(x, a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, 0, t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a) u(x, a, t)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

con g una función localmente lipschitziana, verificando:

$$(22) \qquad \begin{aligned} &g(0) = 0, && g(s) \geq 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}_+, \\ &\lim_{s \downarrow 0} \frac{g(s)}{s} = 0, && \lim_{s \uparrow +\infty} \frac{g(s)}{s} = +\infty. \end{aligned}$$

En segundo lugar, aplicaremos el método de sub-supersoluciones a un problema de tipo Holling-Tanner, es decir al problema

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(a)u = \lambda u + \dfrac{u}{1+u} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, 0) = u_0(x, a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, 0, t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a) u(x, a, t)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si denotamos por r_μ la única solución real de

$$\int_0^{A_\dagger} \beta(a) \exp\left(- \int_0^a \mu(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right) e^{-ra}\, \mathrm{d}a = 1,$$

y por λ_1 el primer autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$, obtendremos el siguiente resultado de comportamiento asintótico de las soluciones de los problemas (21) y (23) (véanse Teoremas 5.5.2 y 5.5.5):

Teorema 0.0.12. *Bajo ciertas hipótesis de regularidad de los datos* (cf. Cap. 5) *y* g *verificando* (22), *se tiene:*

1. *Sea* v *la solución del problema* (21), *entonces:*

   a) *Si* $\lambda < \lambda_1 - r_\mu$ *la solución,* v*, de* (21) *satisface*

   $$v(\cdot,\cdot,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega}\times[0,A_\dagger].$$

   b) *Si* $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$ *y* $u_0(x,a) > 0$ *en* $\Omega\times(0,A_\dagger)$*, entonces el modelo* (21) *es* ***permanente*** *en el sentido siguiente:*
   existe una subsolución $\underline{v}$ *y una supersolución* $\overline{v}$ *de* (21) *tales que:*

   $$\underline{v}(x,a) \leq v(x,a,t) \leq \overline{v}(x,a) \text{ e.c.t. } (x,a,t)\in\Omega\times(0,A_\dagger)\times(0,+\infty).$$

2. *Sea* u *la solución del problema* (23), *entonces*

   a) *Si* $\lambda < \lambda_1 - r_\mu - 1$ *la solución,* u*, de* (23) *verifica*

   $$u(\cdot,\cdot,t)\to 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega}\times[0,A_\dagger] \text{ cuando } t\to+\infty.$$

   b) *Si* $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$*, la solución,* u*, de* (23) *verifica*

   $$u(x,a,t)\to+\infty \text{ en } L^2(\Omega\times(0,A_\dagger)) \text{ cuando } t\to+\infty.$$

   c) *Si* $\lambda\in(\lambda_1 - r_\mu - 1, \lambda_1 - r_\mu)$ *y* $u_0(x,a)>0$ *en* $\Omega\times(0,A_\dagger)$*, entonces* (23) *es un sistema permanente, en el sentido anterior.*

Los resultados de este Capítulo, basados en el estudio de un principio del mínimo, en el análisis de un problema lineal asociado,... aparecerán publicados en [33].

En el último Capítulo de la Memoria estudiamos el problema estacionario asociado a (19), es decir del problema

$$\text{(24)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x,a)u = f(x,a,u) & \text{en } \Omega\times(0,A_\dagger),\\ u(x,a)=0 & \text{sobre } \partial\Omega\times(0,A_\dagger),\\ u(x,0)=\displaystyle\int_0^{A_\dagger}\beta(x,a)u(x,a)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

El estudio de este sistema nos permitirá un mejor conocimiento del comportamiento asintótico de la solución del problema evolutivo (19).

Primero veremos que el método de sub-supersoluciones funciona para este problema, donde por sub y supersolución vamos a entender:

Definición 0.0.13. *Diremos que una función* $\overline{u}\in L^2(0,A_\dagger;H^1(\Omega))$ *es una* ***supersolución*** *de* (6.1) *si*

$$\partial_a\overline{u} + \mu\overline{u} \in L^2(0,A_\dagger;(H^1(\Omega))'),$$

$$f(\cdot, \cdot, \overline{u}) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$$

y además se cumple que para toda $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ *positiva*

$$\begin{aligned} (25) \qquad & \int_0^{A_\dagger} \langle \partial_a \overline{u} + \mu \overline{u}, v \rangle \, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega \times (0, A_\dagger)} \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a \geq \iint_{\Omega \times (0, A_\dagger)} f(x, a, \overline{u}) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a, \\ & \overline{u}(x, a) \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ & \overline{u}(x, 0) \geq \int_0^{A_\dagger} \beta(x, a) \overline{u}(x, a) \, \mathrm{d}a \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Análogamente se define una ***subsolución****,* $\underline{u}$*, cambiando las desigualdades anteriores por sus contrarias y una* ***solución****,* u*, cambiando las desigualdades anteriores por igualdades y verificando la igualdad* (25) *para toda* $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$*.*

Obtenemos el siguiente resultado (véase Teorema 6.4.2):

Teorema 0.0.14. *Bajo ciertas hipótesis de regularidad en los datos* (cf. Cap. 6)*, si existe un par de sub-supersoluciones* $\underline{u}, \overline{u}$ *de* (24) *tal que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *entonces existe una solución minimal* u_* *y una maximal* u^* *de* (24)*, en el sentido siguiente: para cualquier otra solución*

$$u \in [\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\},$$

se verifica que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u}.$$

Este resultado será usado, principalmente, para el estudio, según los valores de λ, de la existencia y la unicidad o de la no existencia de solución del problema estacionario asociado al problema (21), es decir al problema

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x, a) u = \lambda u - g(u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, 0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x, a) u(x, a) \, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ y g una función localmente lipschitziana verificando (22) y además para obtener unicidad de solución necesitaremos que la función $g(s)/s$ sea creciente para $s \in \mathbb{R}_+$.

Para el estudio de la existencia de solución del problema (26) nos basamos principalmente en el problema de autovalores asociado, es decir del problema:

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x, a) u = \lambda u & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, 0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x, a) u(x, a) \, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Así, diremos que λ es un **autovalor** del problema (27), si dicho problema tiene solución. Demostraremos que existe un único **autovalor principal** (en el sentido que es el único con autofunción asociada estrictamente positiva) denotado por $\lambda_0(\mu)$. Es decir (véase Teorema 6.5.4):

Teorema 0.0.15. *Bajo hipótesis de regularidad para las funciones* μ *y* b (cf. Cap. 6), *existe un único autovalor principal de* (27), $\lambda_0(\mu)$, *que es simple y el único que tiene una autofunción positiva.*

El principal resultado que obtendremos sobre la existencia de solución del problema (26) es (véase Teorema 6.6.1):

Teorema 0.0.16. *El problema* (26) *tiene una solución positiva si y sólo si,* $\lambda > \lambda_0(\mu)$. *Además en el caso en que exista solución, ésta es única.*

Los resultados de este Capítulo, que se basan principalmente en el estudio de los problemas lineales autónomo y no autónomo asociado al problema (24), en el Teorema de Krein-Rutman y en la búsqueda de un par adecuado de sub-supersolución del problema (26), han sido sometidos a publicación [34].

Problemas abiertos

Para finalizar vamos a incluir un apartado sobre problemas abiertos que quedan sin resolverse en la presente Memoria, unos son simples cuestiones a las que no se ha podido dar respuesta, y otros son cuestiones más generales que pueden ser posibles líneas de investigación para seguir trabajando en un futuro. Principalmente, estamos interesados en las correspondientes a la parte II de la Memoria, es decir a los problemas con difusión.

Con respecto a las pequeñas cuestiones que se han quedado sin resolver:

- En el Capítulo 4, estudiamos el comportamiento asintótico del sistema diferencial ordinario (4.2), es decir del sistema:

$$(28)\qquad \begin{cases} I' = q\beta(P)I - \mu_1(P)I + KIS - \gamma I - M_1IY, \\ S' = \beta(P)\big(S + (1-q)I\big) - \mu_2(P)S - KIS + \gamma I - M_2SY, \\ Y' = mY - nY^2 + \nu M_1IY + \nu M_2SY, \\ I(0) = I_0,\ S(0) = S_0,\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

  Es lógico plantearse que si el estudio del comportamiento asintótico de dicho sistema es equivalente al estudio del comportamiento asintótico del modelo:

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial i}{\partial a} + \mu_1(P(t))i(a,t) = KI(t)s(a,t) - \gamma i(a,t) - M_1 i(a,t)Y(t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial s}{\partial a} + \mu_2(P(t))s(a,t) = -KI(t)s(a,t) + \gamma i(a,t) - M_2 s(a,t)Y(t), \\ Y' = mY(t) - nY^2(t) + \nu M_1 I(t)Y(t) + \nu M_2 S(t)Y(t), \\ i(0,t) = q\beta(P(t))I(t), \\ s(0,t) = \beta(P(t))\big(S(t) + (1-q)I(t)\big), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

  Es decir, la primera cuestión que nos planteamos es la siguiente:
  Supongamos que la solución (I, S, Y) del sistema (28), es estable hacia un punto de

equilibrio (I^*, S^*, Y^*). Entonces, ¿la solución del sistema (29), (i, s, Y) verifica

$$\lim_{t\to+\infty} i(a,t) = i^*(a), \quad \lim_{t\to+\infty} s(a,t) = s^*(a) \text{ y } \lim_{t\to+\infty} Y(t) = Y^* \text{ para casi todo } a \in \mathbb{R}_+,$$

donde

$$I^* = \int_0^\infty i^*(a)\, \mathrm{d}a \text{ y } S^* = \int_0^\infty s^*(a)\, \mathrm{d}a?.$$

En el caso particular en que $\gamma \equiv 0$ podemos afirmar que sí.

- Otra de las cuestiones que han quedado abiertas es el paso del problema evolutivo con difusión al problema estacionario con difusión. Es decir, ¿podremos dar condiciones sobre los datos para que la solución del problema (5.1), es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x,a,t)u = f(x,a,t,u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

converja a la solución del problema estacionario (6.1):

$$\begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u = f(x,a,u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega\ ?. \end{cases}$$

Creemos que la respuesta es positiva.

- Otra cuestión sería el estudio de las soluciones del problema de tipo Holling-Tanner estacionario, es decir del problema:

$$\begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u = \lambda u + \dfrac{u}{1+u} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)u(x,a)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega; \end{cases}$$

para el que no hemos podido construir una supersolución, que pasaría por un estudio detallado de la aplicación $\lambda_0(\mu)$, es decir del autovalor principal, en función del dominio Ω.

Como problemas más generales, como comentamos anteriormente, que podrían servir para iniciar futuras líneas de investigación queda el estudio de nuevos problemas entre los que citamos:

- Con respecto a la parte I de la Memoria, el estudio de problemas "completos", es decir:

- Incluir estructura en edad en el depredador en el modelo (11). Pensamos que para el estudio de la existencia y unicidad de solución de dicho modelo podría razonarse de manera análoga al Capítulo 2, en este caso en vez de resolver explícitamente la ecuación diferencial ordinaria de tipo Bernouilli que verifica el depredador, resolverla por el método de las líneas características. Las dificultades que pueden surgir, principalmente, al estudiar un modelo de este tipo es el estudio de los equilibrios, puesto que en este caso tendríamos un sistema diferencial ordinario de dimensión tres, con condición inicial no local y acoplado. De hecho, no hemos sido capaces de encontrar equilibrios en el caso general sino sólo cuando los individuos infectados desaparecen.

- Suponer que el depredador puede infectarse, lo que trae consigo la dificultad añadida al aumentar el número de ecuaciones en el modelo a tratar.

▪ Con respecto a la parte II de la Memoria, una de las primeras cuestiones que nos plantearemos es que si podremos usar un método de sub-supersolución, para un problema del tipo (19), pero suponiendo que la función f tiene una no linealidad con respecto también a la población total, es decir estudiar el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x,a,t)u = f(x,a,t,u,P) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

y quizás añadir también no linealidades a las tasas de mortalidad y natalidad.

▪ Otra de las posibles vías es el estudio de sistemas con difusión estructurados en edad, aplicables a modelos de presa-depredador, epidemias, etc. Así, como sistema general con difusión estructurado en edad podríamos considerar el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu_1(x,a)u = f(x,a,u,v) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial a} - \Delta v + \mu_2(x,a)v = g(x,a,u,v) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0,\ v(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a),\ v(x,a,0) = v_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta_1(x,a,u,v)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ v(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta_2(x,a,u,v)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

como también el problema estacionario asociado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu_1(x,a)u = f(x,a,u,v) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ \dfrac{\partial v}{\partial a} - \Delta v + \mu_2(x,a)v = g(x,a,u,v) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0,\ v(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta_1(x,a,u,v)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \\ v(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta_2(x,a,u,v)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Así, por ejemplo, podríamos pensar en el estudio de modelos del tipo Lotka-Volterra para el problema estacionario, es decir suponer que f y g son de la forma:

$$f(x,a,u,v) = u(\lambda - u + bv)$$
$$g(x,a,u,v) = v(\mu - v + cu),$$

donde $\lambda, b, \mu, c \in \mathbb{R}$.

Lo primero que nos plantearemos será establecer un método de sub-supersolución para los sistemas anteriores, generalizando el resultado obtenido (ver Teorema 6.4.2) para el caso de una ecuación. En el caso de simbiosis ($b, c > 0$) y competición ($b, c < 0$) el sistema tiene monotonía y se espera obtener resultados de existencia y unicidad. En cambio, en el caso de presa-depredador ($b > 0$ y $c < 0$ ó $b < 0$ y $c > 0$), no tenemos ni monotonía, ni principio del máximo y deberemos proceder con otras técnicas para obtener el estudio de la existencia de solución, motivo de una de las líneas de investigación que esperamos desarrollar en el futuro.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este Capítulo enunciaremos resultados, la mayoría de ellos conocidos, de la Teoría de Semigrupos y de estabilidad de los puntos de equilibrio que serán usados a lo largo de la Memoria.

Mientras que no se indique lo contrario, en todo el Capítulo consideraremos X un espacio de Banach.

1.1. Una breve introducción a la Teoría Espectral

Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal y cerrado. Veamos algunas definiciones y resultados sobre Teoría espectral de operadores lineales y cerrados.

El espectro de un operador lineal admite dos clasificaciones distintas. Según una de ellas se clasifica en espectro continuo, residual y puntual, según otra, en esencial y no esencial.

Definición 1.1.1. ([46]) *El espectro de A puede escribirse como la unión disjunta de los siguientes conjuntos*

$$\begin{aligned} \sigma_c(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A) \textit{ es inyectiva, } D((\lambda I - A)^{-1}) \textit{ es denso en } X \\ &\qquad\qquad \textit{y } (\lambda I - A)^{-1} \textit{ no es acotado}\}, \\ \sigma_r(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A) \textit{ es inyectiva, } D((\lambda I - A)^{-1}) \textit{ no es denso en } X\}, \\ \sigma_p(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A) \textit{ no es inyectiva }\}. \end{aligned}$$

*Estos conjuntos son llamados **espectro continuo**, **espectro residual** y **espectro puntual** de A, respectivamente.*

Definición 1.1.2. *Los puntos $\lambda \in \sigma_p(A)$ son llamados los **autovalores** de A y cualquier $x \in X$ no nulo, tal que $Ax = \lambda x$ es llamado un **autovector**.*

*El **núcleo** de A, $N(A)$, es el conjunto de los $x \in X$ tal que $Ax = 0$.*

*Sea $\lambda \in \sigma(A)$ dado, el **autoespacio generalizado** de λ, denotado por $N_\lambda(A)$, es el menor subespacio cerrado de X conteniendo todos los elementos de X tal que pertenecen a $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} N((\lambda I - A)^k)$.*

*Denotaremos por **radio espectral** de A al número*

$$r(A) := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Veamos ahora la clasificación del espectro del operador en esencial y no esencial.

Definición 1.1.3. *Diremos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un punto del **espectro esencial** de A, denotado por $\sigma_{ess}(A)$, si al menos una condición de las siguientes ocurre*

i) $\mathrm{Rg}(\lambda I - A)$ *no es cerrado;*

ii) λ *es un punto límite de* $\sigma(A)$*;*

iii) $N_\lambda(A)$ *tiene dimensión infinita.*

*Diremos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un punto del **espectro no esencial** de A, si no está en el espectro esencial.*

Proposición 1.1.4. ([13, Lema 17]) *Se verifica*

$$\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A) \subset \sigma_p(A).$$

Aunque la versión generalizada del Teorema de Krein-Rutman funciona en espacios de Banach reticulados, (véase por ejemplo [29]), nosotros enunciaremos una adaptación para espacios $L^2(\Omega)$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$, pues en realidad es la versión que utilizaremos.

Definición 1.1.5. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, A un operador tal que $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Denotamos por*

$$L^2_+(\Omega) := \{g \in L^2(\Omega) : g(x) \geq 0 \ \textit{e.c.t. } x \in \Omega\}.$$

- *Diremos que $u \in L^2_+(\Omega)$ es un punto **cuasi interior** de $L^2_+(\Omega)$, y lo escribiremos como $u \gg 0$, si*

$$\int_\Omega u(x)g(x)\,\mathrm{d}x > 0, \ \textit{para todo } g \in L^2_+(\Omega) \textit{ no idénticamente nulo.}$$

- *Diremos que el operador A es un operador **fuertemente positivo**, y lo escribiremos como $A \gg 0$, si*

$$Ag \gg 0 \ \textit{para todo } g \in L^2_+(\Omega) \textit{ no idénticamente nulo.}$$

- *Diremos que el operador A es **irreducible** si A o una potencia suya es un operador fuertemente positivo.*

Teorema 1.1.6. (véase [30, Teor. 3] para una versión generalizada) *Si A es un operador compacto, positivo e irreducible en $L^2(\Omega)$, entonces, $r(A) > 0$, donde $r(A)$ es el radio espectral del operador A.*

Teorema 1.1.7 (Teorema de Krein-Rutman)**.** (véase [29, Teor. 12.3] para una versión generalizada) *Sea $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ un operador lineal, continuo, positivo e irreducible. Entonces se tiene:*

$r(A)$ es un autovalor de multiplicidad algebraica 1 y además es el único autovalor de T que tiene una autofunción positiva.

1.2. Una breve introducción a la Teoría de Semigrupos

Los resultados que enunciaremos a continuación son básicos de la teoría de Hille-Philips-Yosida (véase por ejemplo [77]).

Definición 1.2.1. *Una familia uniparamétrica, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de operadores lineales y acotados de X en X es un* ***semigrupo*** *de operadores lineales acotados en X si*

i) $S(0) = I$ *(donde I es el operador identidad en X).*

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para cada $t, s \geq 0$.*

Un semigrupo de operadores lineales acotados, $S(t)$, es ***uniformemente continuo*** *si*

$$\lim_{t\downarrow 0} \|S(t) - I\| = 0.$$

El operador lineal A definido por, $A : D(A) \subset X \to X$, siendo

$$D(A) := \left\{ x \in X : \ \textit{existe} \ \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \right\}$$

y para $x \in D(A)$,

$$Ax := \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+ S(t)x}{dt}\right|_{t=0}$$

es el generador infinitesimal del semigrupo $S(t)$ y $D(A)$ es el dominio de A.

Definición 1.2.2. *Un semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de operadores lineales acotados en X es un* ***semigrupo fuertemente continuo*** *si*

$$\lim_{t\downarrow 0} S(t)x = x \ \textit{para todo} \ x \in X. \tag{1.1}$$

Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados en X será llamado un semigrupo de clase $\mathcal{C}^0$ o simplemente un $\mathcal{C}^0$-semigrupo.

Teorema 1.2.3. *Sea $S(t)$ un $\mathcal{C}^0$-semigrupo. Entonces existen dos constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \ \textit{para} \ t \geq 0. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.4. *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un $\mathcal{C}^0$-semigrupo $S(t)$ satisfaciendo $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ si y sólo si,*

i) *A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.*

ii) *El conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, contiene el rayo $(\omega, +\infty)$ y para $\lambda \in (\omega, +\infty)$ se tiene*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \ \textit{para} \ \lambda > \omega. \tag{1.3}$$

1.3. Algunos resultados sobre la Teoría de ecuaciones diferenciales abstractas semilineales en espacios de Banach

Ahora vamos a dar algunos resultados de estabilidad de problemas semilineasles diferenciales, es decir de problemas del tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = Bu(t) + K(u(t)) \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde B es el generador infinitesimal de un $\mathcal{C}^0$-semigrupo y K es un operador no lineal.

Para el estudio del comportamiento asintótico de problemas no lineales de dinámica de poblaciones estructurados en edad, es frecuente estudiar las propiedades de compacidad de las trayectorias del semigrupo no lineal asociado al modelo. Pero no es automático dicho estudio, y es por ello que resulta ventajoso estudiar las propiedades de acotación y precompacidad de las trayectorias separadamente. Para ello, usaremos las nociones de medida de no compacidad debidas a Kuratowski [59].

Definición 1.3.1. *Sea Y un espacio métrico completo con métrica ρ y sea M un subconjunto acotado de Y. Definimos el **diámetro** de M, denotado por $|M|$, como*

$$|M| := \text{ínf}\{\eta > 0,\ \textit{tal que si}\ x, y \in M \Rightarrow \rho(x,y) \leq \eta\}.$$

*Definimos la **medida de no compacidad** de M, denotada por $\alpha[M]$, como el ínfimo de $\eta > 0$ tal que M puede ser recubierto por un número finito de subconjuntos de Y cada uno con diámetro menor que η.*

Definición 1.3.2. ([74]) *Sea T un operador lineal acotado en un espacio de Banach X. La **medida de no compacidad** de T, denotada por $\alpha[T]$, es el valor*

$$\alpha[T] := \text{ínf}\{\eta > 0\ \textit{tal que}\ \alpha[T(M)] \leq \eta\alpha[M]\ \forall\ M \subseteq X\ \textit{acotado}\},$$

donde $\alpha[M]$ es la medida de no compacidad del conjunto M.

Proposición 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach y sea T_1 un operador lineal acotado en X. Entonces se tiene*

$$\alpha[T_1] \leq \|T_1\|.$$

Definición 1.3.4. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados en el espacio de Banach X con generador infinitesimal B. Definimos la **cota de crecimiento** de $S(t)$, denotada por $\omega_0(B)$, como*

$$\omega_0(B) := \lim_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t}.$$

*Y la **α-cota de crecimiento** de $S(t)$, denotada por $\omega_1(B)$, como:*

$$\omega_1(B) := \lim_{t\to\infty} \frac{\log(\alpha[S(t)])}{t}.$$

Proposición 1.3.5. ([89, Prop. 4.13]) *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados en el espacio de Banach X con generador infinitesimal B. Entonces,*

$$\sup_{\lambda\in\sigma(B)} \operatorname{Re}\lambda \leq \omega_0(B) \tag{1.5}$$

$$\sup_{\lambda\in\sigma_{ess}(B)} \operatorname{Re}\lambda \leq \omega_1(B) \tag{1.6}$$

$$\omega_0(B) = \max\{\omega_1(B), \sup_{\lambda\in\sigma(B)\setminus\sigma_{ess}(B)} \operatorname{Re}\lambda\}. \tag{1.7}$$

Veamos ahora un resultado sobre la cota de crecimiento cuando el semigrupo es positivo, antes de nada vamos a dar la definición de dichos semigrupos [24].

Definición 1.3.6. *Sea X un espacio de Banach ordenado con cono positivo X^+. Diremos que el $\mathcal{C}^0$-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es* ***positivo*** *si todos los operadores $S(t)$, $t\geq 0$, son positivos, es decir si*

$$S(t)X^+ \subset X^+.$$

Teorema 1.3.7. ([24, Teor. 7.4]) *Sea X un espacio de Banach ordenado. Supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{C}^0$-semigrupo positivo en X con generador B. Entonces,*

$$\omega_0(B) = \sup\{\lambda\in\mathbb{R} :\ \lambda\in\sigma(B)\}.$$

Proposición 1.3.8. ([89, Prop. 4.14]) *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados en el espacio de Banach X con generador infinitesimal B y sea K un operador lineal acotado en X. Entonces, $B+K$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ en X, y*

$$U(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-s)K(U(s)x)\,\mathrm{d}s \quad t\geq 0, x\in X.$$

Además, si K es también compacto, entonces

$$\omega_1(B) = \omega_1(B+K).$$

1.3.1. Resultados sobre estabilidad local de equilibrios de un problema abstracto. Método de linealización.

La predicción y descripción de la convergencia a estados de equilibrios es una de las aplicaciones más valiosas de los modelos de dinámicas de poblaciones. Si por ejemplo, la solución trivial, es decir la solución nula, es una solución de equilibrio del modelo entonces el estudio de su estabilidad puede ayudarnos a predecir si la población se extingue o no. Por tanto, vamos a dar algunos resultados de estabilidad y de no estabilidad de los equilibrios del problema (1.4).

Definición 1.3.9. *Diremos que ϕ^* es un equilibrio de* (1.4)*, si $\phi^*\in D(B)$ y*

$$B\phi^* + K(\phi^*) \equiv 0.$$

En algunos casos, el estudio de la estabilidad local de un equilibro de un problema no lineal puede ser analizado por el método de linealización. Para esta aproximación el marco de los semigrupos fuertemente continuos es bastante útil.

Definición 1.3.10. *Sea ϕ^* un equilibrio de* (1.4)*, $u \equiv u(t;\phi)$ la solución del problema* (1.4) *para $x = \phi$ con $\phi \in X$ y T_ϕ el tiempo maximal de existencia de la solución.*

- *Diremos que ϕ^* es un equilibrio* ***localmente exponencialmente asintóticamente estable*** *si*

  existen $\varepsilon > 0$, $M \geq 1$ y $\gamma < 0$ tal que si $\phi \in X$ y $\|\phi - \phi^*\| \leq \varepsilon$, entonces $T_\phi = +\infty$ y

  $$\|u(t;\phi) - \phi^*\| \leq M e^{\gamma t}\|\phi - \phi^*\| \text{ para todo } t \geq 0.$$

- *Diremos que ϕ^* es un equilibrio* ***inestable*** *si*

  existen $\varepsilon > 0$, y una sucesión $\{\phi_n\}$ en X tal que $\phi_n \to \phi^*$ y

  $$\|u(n;\phi_n) - \phi^*\| \geq \varepsilon \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

Veamos ahora el resultado más importante de esta Sección, conocido como *el principio de linealización*:

Proposición 1.3.11. ([89, Prop. 4.19]) *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados en el espacio de Banach X con generador infinitesimal B. Sea K un operador no lineal de X en X tal que K es continuamente Fréchet diferenciable en X. Sean ϕ^* un equilibrio de* (1.4) *y $\{S_{\phi^*}(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados en el espacio de Banach X generado por B_{ϕ^*}, con*

$$B_{\phi^*} := B + K'(\phi^*),$$

donde K' denota la derivada Fréchet del operador K. Entonces se tiene,

1. *Si $\omega_0(B_{\phi^*}) < 0$ entonces el equilibrio ϕ^* es localmente exponencialmente asintóticamente estable.*
2. *Si existe $\lambda_1 \in \sigma(B_{\phi^*})$ tal que $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ y $\max\{\omega_1(B_{\phi^*}), \sup_{\substack{\lambda\in\sigma(B_{\phi^*})\setminus\sigma_{ess}(B_{\phi^*}) \\ \lambda\neq\lambda_1}} \operatorname{Re}\lambda\} < \operatorname{Re}\lambda_1$, entonces el equilibrio ϕ^* es inestable.*

1.4. Algunos resultados de estabilidad de sistemas diferenciales ordinarios

En esta Sección vamos a dar algunos resultados sobre estabilidad de sistemas diferenciales no lineales que serán principalmente utilizados en el Capítulo 4.

Consideramos el siguiente sistema diferencial ordinario no lineal,

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{array}\right. \tag{1.8}$$

y denotaremos $x(\cdot, x_0)$ cualquier solución de (1.8).

Para comenzar con el análisis de dicho sistema es útil determinar sus puntos de equilibrio, es decir, buscar

$$x^* \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } f(x^*) = 0,$$

y después describir el comportamiento de (1.8) cerca de dichos puntos de equilibrio.

El comportamiento local del sistema no lineal (1.8) cerca de un punto de equilibrio está cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax,$$

con $A = Df(x^*)$, donde Df es la matriz Jacobiana, es decir

$$Df := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} . \right)$$

Consideremos el sistema autónomo (1.8), con $f \in \mathcal{C}^1(E)$ con E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, y supongamos que dicho sistema tiene solución $x(\cdot, x_0)$, que será llamada curva solución, trayectoria u órbita de (1.8). Hablaremos de semiórbita positiva cuando el tiempo en el que se mueve es positivo.

Definición 1.4.1. *Un punto* $\mathbf{p} \in E$ *es un punto ω-límite de la trayectoria* $x(\cdot, x_0)$ *del sistema* (1.8) *si existe una sucesión* $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $t_n \to +\infty$ *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} x(t_n, x_0) = \mathbf{p}.$$

El conjunto de todos los puntos ω-límite de una trayectoria Γ *es llamado el conjunto ω-límite y denotado por* $\omega(\Gamma)$.

Veamos ahora resultados de comportamiento asintótico de la solución del sistema (1.8), en el caso de $\mathbb{R}^2$.

1.4.1. El Teorema de Poincaré-Bendixson

El Teorema de Poincaré-Bendixson juega un importante papel en el estudio del comportamiento cualitativo de ecuaciones diferenciales autónomas y sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^2$, su limitación radica en que no es aplicable a sistemas dinámicos de dimensiones mayores. Esta teoría se originó en los trabajos de H. Poincaré ([79]), fue continuada por I. Bendixson ([9]), y ha sido ampliamente desarrollada durante este último siglo. Una versión generalizada de este Teorema es

Teorema 1.4.2. *Consideremos el sistema autónomo plano*

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \tag{1.9}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. *Supongamos que* $f \in \mathcal{C}^1(E)$ *donde* E *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$, *y que el sistema* (1.9) *admite una órbita,* Γ, *con la semiórbita positiva contenida en un subconjunto compacto* F *de* E. *Supongamos que* (1.9) *posee un número finito de puntos de equilibrio en* F. *Entonces ocurre que* $\omega(\Gamma)$

1. es un punto de equilibrio de (1.9)

2. ó bien es una órbita periódica

3. ó bien consiste de un número finito de puntos críticos de (1.9)*.*

Hay varias pruebas de este Teorema, generalmente están basadas en el Teorema de la curva de Jordan (una de las razones por la cual el Teorema sólo es válido para dimensión 2). Pruebas detalladas de este Teorema pueden encontrarse en [48, 75].

Luego a fin de determinar el comportamiento global de un sistema dinámico plano, un resultado muy utilizado es el Criterio de Dulac, (véase por ejemplo [78]), el cual establece condiciones bajo las cuales el sistema plano (1.9) no tiene órbitas periódicas.

Teorema 1.4.3 (Criterio de Dulac)**.** *Consideramos el sistema* (1.9)*. Sea f de clase $\mathcal{C}^1$ en una región simplemente conexa Ω del plano. Si existe una función $B \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$ no es idénticamente cero y no cambia de signo en Ω, entonces el sistema* (1.9) *no tiene ninguna órbita periódica contenida enteramente en Ω.*

1.4.2. Un resultado de estabilidad para sistemas no autónomos

Más recientemente, se han obtenidos resultados para sistemas no autónomos, por ejemplo la teoría desarrollada por Markus ([69], véase también [86]). Dicha teoría obtiene resultados fundamentales concernientes al comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias asintóticamente autónomas. Consideremos los siguientes sistemas

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.10}$$

$$\dot{y} = g(y), \tag{1.11}$$

donde f y g son funciones continuas y localmente lipschitzianas en $\mathbb{R}^N$ y supongamos que existen las soluciones para todo tiempo positivo. Diremos que la ecuación (1.10) es *asintóticamente autónoma*, con *ecuación límite* (1.11) si

$$f(t, x) \to g(x) \text{ cuando } t \to \infty, \text{ localmente uniforme para } x \in \mathbb{R}^N.$$

Así el resultado principal que vamos a utilizar en el Capítulo 4 es el siguiente

Proposición 1.4.4. *Si las soluciones de la ecuación* (1.10) *están acotadas y el equilibrio e del sistema límite* (1.11) *es globalmente asintóticamente estable, entonces cualquier solución $x(t)$ del sistema* (1.10) *satisface $x(t) \to e$, cuando $t \to \infty$.*

1.5. Otros resultados

Vamos a dar otros resultados que serán utilizados principalmente en el Capítulo 3 y 4.

Primero veamos un resultado que nos permitirá probar que ciertos conjuntos son densos y que utilizaremos para probar que cierto operador es el generador de un semigrupo. Para la demostración de este resultado necesitamos el siguiente Lema

Lema 1.5.1. ([12, Lema III.2]) *Sea Y un espacio de Banach, consideremos $f_1, \dots, f_N$, con $f_j : Y \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\phi \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\forall y \in Y$ con $f_j(y) = 0$ ($j = 1, \dots, N$) $\Rightarrow \phi(y) = 0$. Entonces: $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\phi \equiv \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j \text{ en } Y. \tag{1.12}$$

Teorema 1.5.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach tal que $Y \hookrightarrow X$ con inyección continua. Sean*

$$l : Y \to \mathbb{R}^N$$

una aplicación continua, lineal y no nula. Y

$$m : X \to \mathbb{R}^N$$

una aplicación continua, lineal y no nula. Supongamos que $l^{-1}(0)$ es denso en X y $\{l_1, \dots, l_N\}$ son linealmente independientes. Entonces el conjunto

$$D = \{y \in Y : l(y) = m(y)\} \tag{1.13}$$

es denso en X con la norma en X.

Demostración. Vamos a proceder por inducción sobre el número de las aplicaciones.

1. **Caso N=1.-**

   Vamos a proceder por razonamiento al absurdo. Supongamos que D no es denso en X, entonces por el Teorema de Hahn-Banach se tiene que existe

   $$\phi \in X' (\text{donde } X' \text{ es el dual de } X)$$

   no nula tal que
   $$\langle \phi, x \rangle = 0 \quad \forall x \in D$$
   es decir $\phi|_D \equiv 0$.
   Puesto que $Y \hookrightarrow X$, tenemos también que $\phi \in Y'$.
   Ahora bien, para toda $y \in D$, se tiene que $(l - m)(y) = 0$ y también $\phi(y) = 0$, luego por el Lema 1.5.1 se tiene que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ tal que

   $$\phi \equiv \alpha(l - m) \text{ en } Y.$$

   Por tanto,
   $$l = m + \frac{1}{\alpha}\phi \text{ en } Y.$$
   Ya que $m, \phi \in X'$, tenemos en particular que $l \in X'$.
   Ahora bien, por hipótesis, tenemos que $l^{-1}(0)$ es denso en X luego, en particular, se tiene que

   $$\forall y \in Y \text{ existe } \{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq Y \text{ con } l(x_n) = 0 \text{ tal que } x_n \to y \text{ en } X.$$

   Ya que $l \in X'$, se verifica que
   $$l(x_n) \to l(y),$$

y puesto que $l(x_n) = 0$ se tiene que

$$l(y) = 0 \quad \forall y \in Y.$$

Por consiguiente, $l \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, si $N = 1$, $D = \{y \in Y : l(y) = m(y)\}$ es denso en X.

2. **Supongamos cierto para $N - 1$ y demostrémoslo para N.-**

   Utilizamos la hipótesis de inducción, es decir supongamos cierto para $N-1$, y veamos que es cierto entonces para N.

   Sea $l := (l_1, \ldots, l_N)$ la aplicación del enunciado. Escribimos

$$Y_1 = \{y \in Y : l_1(y) = m_1(y)\}$$

   y consideramos la aplicación

$$\tilde{l} : Y \to \mathbb{R}^{N-1}$$

   con $\tilde{l} := (l_2, \ldots, l_N)$. Veamos primero que

$$Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0) \text{ es denso en } X.$$

   Para ello procedemos por un razonamiento de reducción al absurdo.

   Supongamos que $Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0)$ no es denso en X, entonces por el Teorema de Hahn-Banach se tiene que existe $\phi \in X'$, no nula tal que

$$\phi|_{Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0)} \equiv 0. \tag{1.14}$$

   Ahora razonando de manera análoga al caso $N = 1$, tenemos que dado $y \in Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0)$ entonces

$$(l_1 - m_1)(y) = 0 \text{ y } (l_2(y), \ldots, l_N(y)) = (0, \ldots, 0).$$

   Luego por (1.14) $\phi(y) = 0$. Y de nuevo aplicando el Lema 1.5.1 obtenemos que existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\phi \equiv \alpha_1(l_1 - m_1) + \sum_{j=2}^{N} \alpha_j l_j \text{ en } Y. \tag{1.15}$$

   Por consiguiente,

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j l_j \equiv \phi + \alpha_1 m_1 \text{ en } Y.$$

   Ahora bien, por hipótesis, $l^{-1}(0)$ es denso en X, luego en particular tenemos que

$$\forall y \in Y \text{ existe } \{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq Y \text{ con } l(x_n) = 0 \text{ tal que } x_n \to y \text{ en } X.$$

   Y puesto que, $\phi + \alpha_1 m_1 \in X'$, entonces por (1.15) se tiene que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j l_j(y) = 0 \; \forall y \in Y.$$

Gracias a que $\{l_1, \ldots, l_N\}$ son linealmente independientes se tiene entonces que

$$\alpha_j = 0 \quad \forall j.$$

Por tanto, usando de nuevo (1.15), se tiene que $\phi \equiv 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto hemos demostrado que el conjunto $Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0)$ es denso en X.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que

$$\{l_{2_{|Y_1}}, \ldots, l_{N_{|Y_1}}\} \text{ son linealmente independientes.}$$

Supongamos lo contrario, entonces existe $(\alpha_2, \ldots, \alpha_N) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que

$$\sum_{j=2}^{N} \alpha_j l_{j_{|Y_1}} = 0.$$

Así, en particular, si $y \in Y_1$, es decir

$$\text{si } y \text{ verifica } (l_1 - m_1)(y) = 0 \Rightarrow \sum_{j=2}^{N} \alpha_j l_j(y) = 0.$$

Aplicando de nuevo el Lema 1.5.1, se obtiene que

$$\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{j=1}^{N} \alpha_j l_j \equiv \alpha_1 m_1 \text{ en } Y.$$

Y por consiguiente,

$$\alpha_1 m_1(y) = 0 \text{ para todo } y \in l^{-1}(0).$$

Ahora bien, $l^{-1}(0)$ es denso en X y $m_1 \in X'$, luego tenemos que

$$\alpha_1 m_1 \equiv 0 \text{ en } X.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j l_j \equiv 0 \text{ en } X,$$

lo que contradice la hipótesis de la independencia lineal de $\{l_1, \ldots, l_N\}$.

Para finalizar, vamos a intentar aplicar la hipótesis de inducción. Sabemos que

$$l_{j_{|Y_1}} \in Y_1' \text{ y } m_j \in X' \text{ para } j = 2, \ldots, N,$$

y también que

$$Y_1 \cap \tilde{l}^{-1}(0) \text{ es denso en } X.$$

Luego estamos en el caso de $N-1$ aplicaciones verificando la hipótesis de inducción. Luego, procediendo por inducción, llegamos a que el conjunto

$$\{y \in Y_1 : l_i(y) = m_i(y),\ i = 2, \ldots, N\}$$

es denso en X. Ahora bien, este conjunto es en realidad el conjunto D definido por (1.13), i.e.

$$D = \{y \in Y : l_i(y) = m_i(y),\ 1 \leq i \leq N\},$$

y por tanto hemos demostrado el Teorema.

$\square$

El siguiente resultado nos permitirá caracterizar el signo de las raíces de los polinomios característicos, principalmente usado para estudiar el signo de las partes reales de los autovalores.

Lema 1.5.3 (Criterio de Routh-Hurwitz)**.** ([39, Pag. 191]) *Todas las raíces de un polinomio real*

$$\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n = 0$$

tienen parte real negativa si y sólo si se tiene que $D_k > 0$ *para* $k = 1, \dots, n$ *con*

$$D_1 = d_1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}, \qquad D_k = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \cdots & d_{2k-1} \\ 1 & d_2 & d_4 & \cdots & d_{2k-2} \\ 0 & d_1 & d_3 & \cdots & d_{2k-3} \\ 0 & 1 & d_2 & \cdots & d_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_k \end{vmatrix},$$

con $d_k = 0$ *para* $k > n$.

Parte I

Un modelo presa-depredador con enfermedad en la presa

CAPÍTULO 2

Existencia y unicidad de solución de un modelo presa-depredador con enfermedad en la presa

En este Capítulo estudiamos la existencia y unicidad de solución positiva para un modelo presa-depredador, donde suponemos que en la presa puede actuar una enfermedad infecciosa. Primero veremos que estudiar la existencia y unicidad de dicho modelo es consecuencia de estudiar la existencia y unicidad de solución de un modelo de epidemia de tipo SIS (véase Introducción) donde sólo actúa la presa; y después comprobar la existencia y unicidad de un punto fijo para una aplicación que será definida posteriormente.

Nótese que como vamos a buscar solución de un modelo de dinámica de poblaciones, siempre hablaremos de soluciones positivas.

2.1. Planteamiento del modelo

Consideramos un modelo de presa-depredador, donde la presa se ve afectada por una enfermedad leve en el sentido que permite recuperar, parcialmente, a los infectados, aunque no les concede inmunidad, es decir una epidemia de tipo SIS explicada en la Introducción, y viene estructurada en edad. También asumiremos que el depredador no se ve afectado por la enfermedad, ni tampoco depende de la edad.

Por tanto consideramos dos poblaciones:

1. *la presa*, cuya densidad de población en una edad a y en un tiempo t será denotada por $p(a,t)$. Ésta a su vez se divide en dos subpoblaciones,

   a) *individuos infectados*, denotado por i,

   b) *individuos susceptibles* de ser infectados, denotado por s.

   Además se verifica que $p = s + i$, es decir que un individuo de la presa es ó bien un individuo infectado ó bien un individuo susceptible de ser infectado.
   La población total de la presa será denotada por P, es decir

$$P(t) = \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a,$$

y la de los infectados y susceptibles, por I y S, respectivamente, i.e.

$$I(t) = \int_0^\infty i(a,t)\,\mathrm{d}a \quad \text{y} \quad S(t) = \int_0^\infty s(a,t)\,\mathrm{d}a.$$

Claramente se tiene que,

$$P(t) = I(t) + S(t). \tag{2.1}$$

2. *el depredador*, que se supone que no viene afectado por estructura en edad y cuya densidad de población total será denotada por $Y(t)$.

En ausencia de presa, el depredador crece siguiendo una ley logística. Luego, si denotamos $D > 0$ la capacidad del medio, que viene determinada por la existencia de recursos y $m > 0$ una razón intrínseca de nacimiento del depredador, entonces el depredador crece de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = mY\left(1 - \frac{Y}{D}\right).} \tag{2.2}$$

Por comodidad, a lo largo de todo el Capítulo, vamos a denotar

$$n := \frac{m}{D}.$$

En ausencia del depredador la presa sigue un modelo de tipo SIS, del tipo visto en la Introducción. Vamos a suponer que la enfermedad puede ser mortal y es por ello que si denotamos por

$\mu_1(a,t,P)$: la tasa de mortalidad de un individuo infectado de edad a en un instante de tiempo t, y con población total P

$\mu_2(a,t,P)$: la tasa de mortalidad de un individuo susceptible de edad a en un instante de tiempo t, y con población total P,

entonces

$$\mu_1 \geq \mu_2. \tag{2.3}$$

Hemos considerado que el modelo que sigue la presa es de tipo SIS, lo que significa que la enfermedad puede curarse pero no causa inmunidad, por ello denotamos

γ: la tasa de recuperación de los individuos infectados,

que es un parámetro relevante.

En nuestro modelo, vamos a considerar que la enfermedad se puede transmitir tanto verticalmente como horizontalmente, como ya explicamos en la Introducción.
Supongamos que la razón de transmisión horizontal viene dada por la siguiente ley de acción de masa

$$\lambda(a,t;i) := \int_0^\infty K(a,a')\,i(a',t)\,\mathrm{d}a',$$

es decir la razón con la cual un individuo susceptible de edad a se convierte en infectado en un tiempo t, viene dada por:

$$s(a,t)\lambda(a,t;i).$$

En dicha ley, $K(a,a')$ denota la razón con la cual un individuo infectado de edad a' transmite la enfermedad por contacto a un individuo susceptible de edad a y λ es conocida como *la fuerza de infección*.

Como hemos comentado, otra forma de infectar a un individuo es mediante la transmisión vertical, que se transmite de "progenitor infectado a descendiente". Así, supondremos que existe una constante $q \in [0,1]$, tal que

$(1-q)$ es la fracción de descendientes de padres infectados que nacen sanos
y
q es la fracción que nace infectados.

A su vez, asumiremos que la enfermedad no influye en la natalidad, y denotaremos

$\beta(a,t,P)$: la tasa de natalidad de un individuo de edad a en un instante de tiempo t con población total P.

Por consiguiente se tiene que la densidad de descendientes infectados y susceptibles en un instante de tiempo t, viene modelada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} i(0,t) &= q\int_0^{\infty} \beta(a,t,P(t))\, i(a,t)\,\mathrm{d}a, \\ s(0,t) &= \int_0^{\infty} \beta(a,t,P(t))\big(s(a,t)\ + (1-q)\, i(a,t)\big)\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Supongamos también que las distribuciones iniciales de edad son conocidas, y vienen dadas por:

$$s(a,0) = s_0(a), \qquad i(a,0) = i_0(a).$$

Luego el modelo que sigue la presa en <u>ausencia de depredador</u> viene dado por el siguiente sistema:

$$\text{(2.4)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t}(a,t) + \dfrac{\partial i}{\partial a}(a,t) + \mu_1(a,t,P(t))i(a,t) = \lambda(a,t;i)s(a,t) - \gamma(a)i(a,t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t}(a,t) + \dfrac{\partial s}{\partial a}(a,t) + \mu_2(a,t,P(t))s(a,t) = -\lambda(a,t;i)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), \\ i(0,t) = q\displaystyle\int_0^{\infty} \beta(a,t,P(t))\, i(a,t)\,\mathrm{d}a, \\ s(0,t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \beta(a,t,P(t))\big(s(a,t)\ + (1-q)i(a,t)\big)\mathrm{d}a. \end{cases}$$

Como parece lógico, desde un punto de vista biológico, los individuos mueren a una cierta edad, así buscaremos solución del sistema anterior tal que

$$i(a,t), s(a,t) \longrightarrow 0, \text{ cuando } a \to +\infty.$$

Nota 2.1.1. *Se pueden dar condiciones para que la población se extinga a una edad máxima $A_\dagger > 0$, por ejemplo suponiendo que las tasas de mortalidad vienen dadas de la forma:*

$$\mu_i(a,t,P(t)) = \mu_{i,0}(a) + \mu_{i,e}(a,t,P(t)),$$

con $\mu_{i,0} \in C^0([0,A_\dagger))$ verificando

$$\int_0^{A_\dagger} \mu_{i,0}(a)\,\mathrm{d}a = +\infty,$$

y $\mu_{i,e} \in C^1([0,A_\dagger] \times [0,T] \times [0,+\infty))$, para cada $T > 0$ y para $i = 1,2$ (véase por ejemplo [51] *en el caso de tasas de mortalidad iguales para los infectados y los susceptibles).*

Vamos a ver el modelo completo, es decir cuando hay interacción entre el depredador y la presa.

En el modelo objeto de estudio suponemos que el depredador no se infecta al devorar a un individuo infectado, y también que la enfermedad debilita a la presa, con lo cual parece lógico suponer que el depredador devorará más fácilmente a un individuo infectado que a un individuo sano. Así, si denotamos como $M_1 > 0$ la tasa de depredación sobre infectados y $M_2 > 0$ la tasa de depredación sobre sanos, supondremos que

$$M_1 \geq M_2.$$

Denotando por $\nu > 0$ la tasa de eficacia en la captura de la presa por parte del depredador, se llega al siguiente modelo:

$$\tag{2.5} \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial i}{\partial a} + \mu_1(a,t,P(t))i = \lambda(a,t;i)s(a,t) - \gamma(a)i(a,t) - M_1 i(a,t)Y(t), \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial s}{\partial a} + \mu_2(a,t,P(t))s = -\lambda(a,t;i)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t) - M_2 s(a,t)Y(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = mY(t) - nY^2(t) + \nu M_1 I(t)Y(t) + \nu M_2 S(t)Y(t), \\ i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), Y(0) = Y_0, \\ i(0,t) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\, i(a,t)\,\mathrm{d}a, \\ s(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))(s(a,t) + (1-q)\, i(a,t))\mathrm{d}a, \\ i(a,t), s(a,t) \longrightarrow 0, \text{ cuando } a \to +\infty. \end{cases}$$

En este Capítulo vamos a ver un resultado de existencia y unicidad de solución para este modelo bajo hipótesis convenientes en los datos.

2.2. Hipótesis matemáticas

Además de las hipótesis propias para el planteamiento biológico del modelo, vamos a considerar las siguientes hipótesis matemáticas necesarias para el tratamiento analítico. Dado $T > 0$,

($\mathcal{H}_1$) Para $i = 1, 2$, suponemos que

$$\mu_i : \mathbb{R}_+ \times (0, T) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

es una función medible y positiva tal que la aplicación

$$s \longmapsto \mu_i(s, s+u, P) \text{ está en } L^1_{Loc}(\mathbb{R}_+) \text{ e.c.t. } (u, P) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Además, existe una constante $C(T) > 0$ tal que para casi toda $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|\mu_i(a, t, P) - \mu_i(a, t, \tilde{P})| \leq C(T)\,|P - \tilde{P}| \text{ e.c.t. } (a, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T). \tag{2.7}$$

Y puesto que hemos supuesto que la enfermedad afecta a la tasa de mortalidad, tenemos que denotando

$$\mu := \mu_1 - \mu_2$$

entonces μ es positiva. Asumiremos, también, que existe $C(T) > 0$ tal que para casi todo $P \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\mu(a, t, P) \leq C(T) \log(|P| + e) \text{ e.c.t. } (a, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T). \tag{2.8}$$

($\mathcal{H}_2$) Suponemos que

$$\beta(a, t, P) : \mathbb{R}_+ \times (0, T) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

es una función medible, positiva y con soporte compacto en la variable a. Además existe una constante, $C(T)$, positiva tal que para casi toda $P, \tilde{P} \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|\beta(a, t, P) - \beta(a, t, \tilde{P})| \leq C(T)\,|P - \tilde{P}| \text{ e.c.t. } (a, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T). \tag{2.9}$$

Además existe otra constante $C(T) > 0$ tal que para casi toda $P \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\beta(a, t, P) \leq C(T) \log(|P| + e) \text{ e.c.t. } (a, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T). \tag{2.10}$$

($\mathcal{H}_3$) $\psi_0 := (i_0, s_0) \in \left(L^1(\mathbb{R}_+)\right)^2$, con soporte compacto y positiva.

($\mathcal{H}_4$) $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, con soporte compacto. Denotaremos,

$$\gamma_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{a \in (0,\infty)} \gamma(a). \tag{2.11}$$

($\mathcal{H}_5$) $K \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, con soporte compacto y positiva . Denotaremos

$$K_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{a \in (0,\infty), a' \in (0,\infty)} K(a, a'). \tag{2.12}$$

Nota 2.2.1. *Notamos que las acotaciones* (2.8) *y* (2.10) *fueron motivadas por* [22]*. En dicho trabajo, M. Chipot considera el modelo no lineal considerado por M. E. Gurtin y R.C. MacCamy en* [44]*. En* [44]*, la idea principal de la prueba de la existencia y la unicidad de solución consiste en reducir el problema a un par de ecuaciones integrales, mientras que Chipot en* [22] *prueba que el problema puede resolverse usando un argumento de punto fijo. Además, tanto en un trabajo como en otro, se comprueba que el crecimiento de la tasa de natalidad, β, debe limitarse cuando P se va hacia infinito para obtener una solución* *global. Chipot comprueba que se puede permitir a β un crecimiento como un logaritmo en P o una potencia suya, i.e. supone que debe existir una constante $C(T)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $P \in \mathbb{R}_+$*

$$\beta(a,t,P) \leq C(T) \prod_{K=1}^{n} \log^k (P + e_n),$$

donde $\log^k = \log \circ \log \circ \cdots \circ \log$ *(k veces) y* $e_k = \exp \circ \exp \circ \cdots \circ \dim$ *(k veces). Incluso da un ejemplo donde si el crecimiento de β es algo superior, entonces la población total P explota en tiempo finito.*

Nótese que problablemente las acotaciones (2.8) *y* (2.10)*, podrían ser mejoradas con una acotación de alguna potencia logarítmica.*

2.3. Desacoplamiento del modelo

Para comenzar con el estudio de nuestro modelo, veamos que estudiar la existencia y la unicidad de solución del modelo (2.5) se reduce a estudiar la existencia y la unicidad de solución de un modelo de epidemia de tipo SIS con tasa de mortalidad distinta; es decir, un problema del tipo (2.4), y después demostrar la existencia y unicidad de un punto fijo para una cierta aplicación.

Dados $T > 0$, $P \in \mathbb{R}$, para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, denotamos

$$\begin{gathered}
\mu_{1,z}(a,t,P) := \mu_1(a,t,P) + M_1\, z(t), \\
\mu_{2,z}(a,t,P) := \mu_2(a,t,P) + M_2\, z(t), \\
\mu_z(a,t,P) := \mu_{1,z}(a,t,P) - \mu_{2,z}(a,t,P), \\
\text{y} \\
\mathcal{O}_T := (0,+\infty) \times (0,T).
\end{gathered}$$

Para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, nos planteamos el problema

$$(2.13)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial i_z}{\partial t} + \dfrac{\partial i_z}{\partial a} + \mu_{1,z}(a,t,P_z(t)) i_z = \lambda(a,t;i_z) s_z(a,t) - \gamma(a) i_z(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T, \\
\dfrac{\partial s_z}{\partial t} + \dfrac{\partial s_z}{\partial a} + \mu_{2,z}(a,t,P_z(t)) s_z = -\lambda(a,t;i_z) s_z(a,t) + \gamma(a) i_z(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T, \\
i_z(a,0) = i_0(a), \quad s_z(a,0) = s_0(a), & \text{en } \mathbb{R}_+, \\
i_z(0,t) = q \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P_z(t))\, i_z(a,t)\, \mathrm{d}a, & \text{en } (0,T), \\
s_z(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P_z(t)) \big(s_z(a,t) + (1-q)\, i_z(a,t) \big) \mathrm{d}a, & \text{en } (0,T), \\
i_z(a,t), s_z(a,t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } a \to +\infty
\end{cases}$$

donde

$$p_z(a,t) := i_z(a,t) + s_z(a,t)$$

$$\text{y}$$

$$P_z(t) := \int_0^\infty p_z(a,t)\, \mathrm{d}a.$$

Supongamos que para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, se tiene que este sistema posee una única solución $(i_z, s_z) \in L^\infty((0,T);(L^1(\mathbb{R}_+))^2)$ no negativa. Entonces, demostrar que el modelo (2.5) posee una única solución se traduce en probar que la ecuación diferencial que verifica el depredador tiene una única solución. Es decir, que existe un único $Y \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, tal que

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = mY(t) - nY^2(t) + \nu M_1 I_Y(t)Y(t) + \nu M_2 S_Y(t)Y(t).$$

Trivialmente, tenemos que en este caso, (i_Y, s_Y, Y) sería la única solución del problema (2.5). En efecto, para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$ supongamos que el sistema (2.13) tiene una única solución $(i_z, s_z) \in L^\infty((0,T);(L^1(\mathbb{R}_+))^2)$ no negativa. Nos planteamos la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t) &= mw(t) - nw^2(t) + \nu M_1 I_z(t)w(t) + \nu M_2 S_z(t)w(t) \\ &= mw(t) - nw^2(t) + \nu M_1 P_z(t)w(t) + \nu(M_2 - M_1)S_z(t)w(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

con $w(0) = Y_0$.
Se tiene entonces que la ecuación diferencial ordinaria (2.14), es una ecuación de tipo Bernoulli, y resolviendo se llega

$$w(t) = \frac{Y_0\, e^{mt} \, \exp[f_z(t)]}{1 + n\, Y_0 \displaystyle\int_0^t e^{m\tau} \, \exp[f_z(\tau)]\, \mathrm{d}\tau}, \tag{2.15}$$

con

$$f_z(t) = \nu M_1 \int_0^t P_z(s)\, \mathrm{d}s + \nu(M_2 - M_1)\int_0^t S_z(s)\, \mathrm{d}s. \tag{2.16}$$

Luego si definimos

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+) \\ z &\longmapsto G(z), \end{aligned}$$

donde para cada $t \in [0,T]$,

$$G(z)(t) = \frac{Y_0\, e^{mt} \, \exp[f_z(t)]}{1 + n\, Y_0 \displaystyle\int_0^t e^{m\tau} \, \exp[f_z(\tau)]\, \mathrm{d}\tau}, \tag{2.17}$$

nuestro problema se traduce en demostrar que la aplicación G tiene un único punto fijo. Lo cual nos conduce a la existencia y la unicidad de solución del sistema (2.5), una vez demostrado que (2.13) tiene unicidad de solución, puesto que si suponemos que tenemos dos soluciones distintas de (2.5), (i, s, Y) e $(i', \tilde{s}, Y')$, entonces $Y \neq Y'$. Gracias a la ecuación diferencial que verifican Y e Y' se tiene que tanto Y como Y' son puntos fijos de G, entonces $Y = Y'$ y consecuentemente obtenemos la unicidad de solución.

2.4. Un modelo de epidemia no autónomo con tasa de mortalidad distinta

Nuestro primer objetivo es estudiar la existencia y unicidad de solución de (2.13). Observando detenidamente dicho sistema, se aprecia que es un modelo de epidemia de tipo SIS donde $\mu_{1,z}$ es la tasa de mortalidad de los infectados y $\mu_{2,z}$ es la tasa de mortalidad de los susceptibles. Obsérvese, que la hipótesis $\mu_{1,z} \neq \mu_{2,z}$, como ya indicamos en la Introducción, complica técnicamente los cálculos.

Es por esto que en esta Sección vamos a estudiar un modelo del tipo (2.4), con tasas de mortalidad, μ_i, $i = 1, 2$, de infectados y susceptibles, respectivamente, supuestas distintas, y verificando la hipótesis $(\mathcal{H}_1)$, para $i = 1, 2,$. Una vez demostrado esto, llegaremos entonces a que tenemos existencia y unicidad de solución para (2.13).

Nótese que el sistema (2.4) es un sistema no autónomo, es por ello que no procederemos utilizando las técnicas de [89], que son aplicables principalmente cuando el problema es autónomo. En dicho trabajo, G. F. Webb convierte el problema dependiente en edad en una ecuación integral equivalente, en la cual la densidad de población es una función desconocida vista como una función de dos variables independientes, la edad y el tiempo.

Las técnicas que usaremos en la prueba de existencia y unicidad de solución del problema (2.4) están basadas en las pruebas de [22] y adaptadas para un sistema de epidemia.

Ya que facilita bastante los cálculos, vamos a trabajar con el sistema en las incógnitas p y s, en vez de i y s.

Luego el sistema que obtenemos es el siguiente:

$$
(2.18)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial a}+\mu_1(a,t,P(t))p=(\mu_1(a,t,P(t))-\mu_2(a,t,P(t)))s(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T,\\
\dfrac{\partial s}{\partial t}+\dfrac{\partial s}{\partial a}+(\mu_2(a,t,P(t))+\gamma(a)+\lambda(a,t;p-s))s=\gamma(a)p(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T,\\
p(a,0)=p_0(a), \quad s(a,0)=s_0(a), & \text{en } \mathbb{R}_+,\\
p(0,t)=\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\,p(a,t)\,\mathrm{d}a, & \text{en } (0,T),\\
s(0,t)=\displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\,(q\,s(a,t)\,+(1-q)\,p(a,t)\,)\,\mathrm{d}a, & \text{en } (0,T),\\
p(a,t), s(a,t) \longrightarrow 0, \text{ cuando } a \to +\infty,
\end{cases}
$$

donde

$$P(t) = \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a$$

$$p_0(a) = i_0(a) + s_0(a)$$

y

$$\lambda(a,t;p-s) = \int_0^\infty K(a,a')\,(p(a',t)-s(a',t))\,\mathrm{d}a'.$$

Por razones biológicas estamos interesados en soluciones no negativas de (2.5), es decir, si (i,s) es una solución de (2.5), entonces $i \geq 0$ y $s \geq 0$. Puesto que $i = p - s$, vamos a buscar soluciones que verifiquen que $p \geq s$. Por otra parte, hemos dicho que en cada instante de tiempo t la población total P es dada por

$$P(t) = \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a,$$

luego esta cantidad debe ser finita y por consiguiente parece razonable suponer que la solución esté en $(L^1(\mathbb{R}_+))^2$. Además, para evitar un amontonamiento infinito de la especie y obtener solución global es natural buscar la solución en $L^\infty((0,T);(L^1(\mathbb{R}_+))^2)$. Así, la solución del sistema (2.18) va a pertenecer al cono

$$V := \left\{(\rho_1,\rho_2) \in L^\infty((0,T);(L^1(\mathbb{R}_+))^2) \mid \rho_1(a,t) \geq \rho_2(a,t) \geq 0 \text{ e.c.t. } (a,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,T)\right\}.$$

En V, consideraremos la norma siguiente, para cada $\rho \in V$

$$|\rho|_V := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} e^{-kt}|\rho(\cdot,t)|_1,$$

donde k es una constante positiva que será escogida más adelante y $|\cdot|_1$ denota la norma usual en $\left(L^1(\mathbb{R}_+)\right)^2$, es decir

$$|\rho(\cdot,t)|_1 := \int_0^\infty |\rho_1(a,t)|\mathrm{d}a + \int_0^\infty |\rho_2(a,t)|\mathrm{d}a := \|\rho_1(\cdot,t)\|_{L^1} + \|\rho_2(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

Definición 2.4.1. *Diremos que $\rho(\cdot,\cdot) = (p(\cdot,\cdot), s(\cdot,\cdot)) \in V$ es una **solución** de (2.18) si*

$$(2.19)\quad \begin{cases} Dp = -\mu_1(a,t,P(t))p(a,t) + (\mu_1(a,t,P(t)) - \mu_2(a,t,P(t)))s(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T,\\ Ds = -(\mu_2(a,t,P(t)) + \gamma(a) + \lambda(a,t;p-s))s(a,t) + \gamma(a)p(a,t), & \text{en } \mathcal{O}_T,\\ p(a,0) = p_0(a), \quad s(a,0) = s_0(a), & \text{en } \mathbb{R}_+,\\ \lim\limits_{h\to 0^+} p(0,t+h) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))\,p(a,t)\,\mathrm{d}a, & \text{en } (0,T),\\ \lim\limits_{h\to 0^+} s(0,t+h) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a,t,P(t))(q\,s(a,t) + (1-q)\,p(a,t))\mathrm{d}a, & \text{en } (0,T),\\ p(a,t), s(a,t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } a \to +\infty, \end{cases}$$

donde Dp y Ds denotan las derivadas direccionales de p y s respectivamente, es decir

$$Dp(a,t) = \lim_{h\to 0} \frac{p(a+h,t+h) - p(a,t)}{h}.$$

Nótese que en principio esto sólo tiene sentido como distribución sobre $\mathbb{R}_+ \times (0,T)$:

$$\langle Dp, \varphi\rangle = -\langle p, D\varphi\rangle = \langle Dp, \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times (0,T)).$$

Generalmente, ρ no tiene por que ser regular ($\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times (0,T))$). Si efectivamente lo es, claramente se tiene que $Dp = p_a + p_t$ y $Ds = s_a + s_t$.

Nota 2.4.2. *Nuestras soluciones serán consideradas en el sentido de (2.19). Por tanto, no es necesario que ρ posea derivadas parciales con respecto a a y t, sino sólo las derivadas direccionales. Si añadimos condiciones adicionales de regularidad en el dato inicial y condiciones de compatibilidad para $\rho_0 := (p_0, s_0)$, entonces conseguimos diferenciabilidad en la solución (véase por ejemplo para el caso de una ecuación [44]).*

2.4.1. Análisis del sistema (2.19)

A lo largo de todo el Capítulo vamos a considerar las siguientes notaciones:
Para cada $(u, v) \in V$, denotamos

$$B_u(t) = \int_0^\infty \beta(\sigma, t, U(t))\, u(\sigma, t)\, \mathrm{d}\sigma \tag{2.20}$$

$$B_{u,v}(t) = \int_0^\infty \beta(\sigma, t, U(t)) \big(q\, v(\sigma, t) + (1-q) u(\sigma, t)\big)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{2.21}$$

con

$$U(t) = \int_0^\infty u(a, t)\, \mathrm{d}a.$$

Para transformar el problema (2.19), que consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones adicionales una de las cuales es una condición integral, en un problema más manejable, usualmente se integra a lo largo de las características del sistema. Estas características son las líneas $a = t + k$ (cuando $t \leq a$), respectivamente $t = a + h$ (cuando $t > a$). La importancia de este método está principalmente en el hecho que los valores de la función solución en el punto (a, t) están determinados por valores de la solución a lo largo de la línea característica de (a, t) pues un miembro de la población de edad a en el instante t debe haber tenido la edad $a - \alpha$ en el instante $t - \alpha$ para cada $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha \leq a$ y $\alpha \leq t$. Es decir, todos los puntos de una línea característica dada $t = a + c$ corresponden al mismo cohorte de edad, (c.f. [11]).

Así, $(2.19)_1$ y $(2.19)_2$ se reduce al sistema de ecuaciones integro-diferenciales siguiente:

$$\text{Para } t > a \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}a}(a, a+h) = -\mu_1(a, a+h, P(a+h)) p(a, a+h) \\ \qquad\qquad -(\mu_2(a, a+h, P(a+h)) - \mu_1(a, a+h, P(a+h))) s(a, a+h), \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}(a, a+h) = -(\mu_2(a, a+h, P(a+h)) + \gamma(a) + \lambda(a, a+h; p-s)) s(a, a+h) \\ \qquad\qquad + \gamma(a) p(a, a+h). \end{cases}$$

$$\text{Para } t \leq a \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t+k, t) = -\mu_1(t+k, t, P(t)) p(t+k, t) \\ \qquad\qquad -(\mu_2(t+k, t, P(t)) - \mu_1(t+k, t, P(t))) s(t+k, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t+k, t) = -(\mu_2(t+k, t, P(t)) + \gamma(t+k) + \lambda(t+k, t; p-s)) s(t+k, t) \\ \qquad\qquad + \gamma(t+k) p(t+k, t). \end{cases}$$

Así, si resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, teniendo en cuenta las condiciones adicionales que verifican p y s, y denotando por

$$\rho := (p, s) \text{ la solución de dicho sistema de ecuaciones diferenciales}$$

se tiene:

$$
(2.22)\quad p(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\pi(a,t,t;P) + \displaystyle\int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\Big(\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) \\ \qquad\qquad \times s(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\Big)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{si } a \geq t \\ B_p(t-a)\pi(a,t,a;P) + \displaystyle\int_0^a \pi(a,t,\sigma;P)\Big(\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) \\ \qquad\qquad \times s(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\Big)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{si } t > a \end{cases}
$$

y

$$
(2.23)\qquad s(a,t) = \begin{cases} s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \tilde{\pi}(a,t,\sigma;\rho)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{si } a \geq t \\ B_{p,s}(t-a)\tilde{\pi}(a,t,a;\rho) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^a \tilde{\pi}(a,t,\sigma;\rho)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{si } t > a \end{cases}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\pi(a,t,x;P) = \exp\left[-\int_0^x (\mu_1(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) + \gamma(a-\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\right], \\
&\tilde{\pi}(a,t,x;\rho) = \exp\left[-\int_0^x (\mu_2(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) + \lambda(a-\sigma,t-\sigma;p-s) + \gamma(a-\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\right], \\
&\mu(a,t,P(t)) = \mu_1(a,t,P(t)) - \mu_2(a,t,P(t)).
\end{aligned}
$$

Es fácil comprobar que buscar una solución del problema (2.18) es equivalente a buscar una solución de las ecuaciones integrales (2.22) y de (2.23).

Para obtener un resultado de existencia y unicidad de solución del problema (2.18), veremos que efectivamente las ecuaciones integrales (2.22) y (2.23) tienen unicidad de solución. Para ello intentaremos aplicar algún resultado de punto fijo. Primero, veremos tres resultados que nos permitirán dar cotas a priori de la norma de la solución ρ.

Lema 2.4.3. *Sean $\rho := (p,s) \in V$, $(a,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ y $x \leq \min\{a,t\}$. Entonces se verifica,*

$$
\pi(a,t,x;P) \leq 1 \tag{2.24}
$$

$$
\tilde{\pi}(a,t,x;\rho) \leq 1. \tag{2.25}
$$

Demostración. La demostración es trivial por la positividad de las funciones μ_1, μ_2, γ y puesto que $\rho \in V$, se tiene que $p \geq s$, y así la positividad de $\lambda(\cdot,\cdot;p-s)$. □

Proposición 2.4.4. *Supongamos que se verifican las hipótesis $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_5)$. Denotemos $\rho_0 = (p_0, s_0)$ con $p_0 := i_0 + s_0$, y*

$$
r := \log(|\rho_0|_1 + e). \tag{2.26}
$$

Entonces existe una constante $C > 0$, dependiendo únicamente de T y del supremo de γ, tal que si $\rho = (p, s) \in V$ satisface (2.22) y (2.23), se verifica

$$|\rho(\cdot, t)|_1 \leq \exp\left(re^{C\,t}\right) \quad e.c.t\ t \in (0, T). \tag{2.27}$$

Demostración. Sea $\rho := (p, s)$ verificando las hipótesis de la Proposición, entonces:

$$|\rho(\cdot, t)|_1 = \int_0^\infty |p(a, t)|\,\mathrm{d}a + \int_0^\infty |s(a, t)|\,\mathrm{d}a = \|p(\cdot, t)\|_{L^1} + \|s(\cdot, t)\|_{L^1}.$$

Por la igualdad integral (2.22) y usando (2.24), tenemos que

$$\begin{aligned} \|p(\cdot, t)\|_{L^1} \leq & \int_0^t |B_p(t-a)|\,\mathrm{d}a + \int_0^t \int_0^a |\mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma))|\,|s(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \\ & + \int_0^t \int_0^a |\gamma(a-\sigma)|\,|p(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a + \int_t^\infty |p_0(a-t)|\,\mathrm{d}a \\ & + \int_t^\infty \int_0^t |\mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma))|\,|s(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \\ & + \int_t^\infty \int_0^t |\gamma(a-\sigma)|\,|p(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora bien, por la definición de B_p en (2.20), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t |B_p(t-a)|\,\mathrm{d}a \underset{t-a\rightsquigarrow a'}{=} & \int_0^t |B_p(a')|\,\mathrm{d}a' \\ \leq & \int_0^t \int_0^\infty |\beta(\sigma, a', P(a'))|\,|p(\sigma, a')|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a'. \end{aligned}$$

Por la igualdad integral (2.23) y la acotación (2.25), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|s(\cdot, t)\|_{L^1} \leq & \int_0^t |B_{p,s}(t-a)|\,\mathrm{d}a + \int_0^t \int_0^a |\gamma(a-\sigma)|\,|p(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \\ & + \int_t^\infty |s_0(a-t)|\,\mathrm{d}a + \int_t^\infty \int_0^t |\gamma(a-\sigma)|\,|p(a-\sigma, t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Gracias a la definición de $B_{p,s}$ en (2.21), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t |B_{p,s}(t-a)|\,\mathrm{d}a \underset{t-a\rightsquigarrow a'}{=} & \int_0^t |B_{p,s}(a')|\,\mathrm{d}a' \\ \leq & \int_0^t \int_0^\infty \big|\beta(\sigma, a', P(a'))\big|\big(q\,|s(\sigma, a')| + (1-q)\,|p(\sigma, a')|\big)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a'. \end{aligned}$$

Y realizando cambios de variables oportunos tenemos,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\int_0^a |\mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma))|\, |s(a-\sigma,t-\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}a \\
&\qquad + \int_t^\infty \left[\int_0^t |\mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma))|\, |s(a-\sigma,t-\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}a \\
&\underset{t-\sigma\rightsquigarrow\sigma'}{=} \int_0^t \left[\int_{t-a}^t |\mu(a-t+\sigma', \sigma', P(\sigma'))|\, |s(a-t+\sigma',\sigma')| \,\mathrm{d}\sigma' \right] \mathrm{d}a \\
&\qquad + \int_t^\infty \left[\int_0^t |\mu(a-t+\sigma', \sigma', P(\sigma'))|\, |s(a-t+\sigma',\sigma')| \,\mathrm{d}\sigma' \right] \mathrm{d}a \\
&\qquad \left[\begin{array}{l} t-a \le \sigma' \le t \\ 0 \le a \le t \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} t-\sigma' \le a \le t \\ 0 \le \sigma' \le t \end{array} \Bigg] \\
&= \int_0^t \left[\int_{t-\sigma'}^t |\mu(a-t+\sigma', \sigma', P(\sigma'))|\, |s(a-t+\sigma',\sigma')| \,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}\sigma' \\
&\qquad + \int_0^t \left[\int_t^\infty |\mu(a-t+\sigma', \sigma', P(\sigma'))|\, |s(a-t+\sigma',\sigma')| \,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}\sigma' \\
&\underset{a-t+\sigma'\rightsquigarrow a'}{=} \int_0^t \int_0^\infty |\mu(a', \sigma', P(\sigma'))|\, |s(a',\sigma')| \,\mathrm{d}a' \,\mathrm{d}\sigma'.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Realizando estos mismos cálculos para la integral en γ, se llega

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^a |\gamma(a-\sigma)|\, |p(a-\sigma,t-\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}a + \int_t^\infty \int_0^t |\gamma(a-\sigma)|\, |p(a-\sigma,t-\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}a \\
= \int_0^t \int_0^\infty |\gamma(a')|\, |p(a',\sigma')| \,\mathrm{d}a' \,\mathrm{d}\sigma'.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, ya que $0 \le q \le 1$,

$$
\begin{aligned}
|\rho(\cdot,t)|_1 \le |\rho_0|_1 + \int_0^t \int_0^\infty |\mu(a,\sigma,P(\sigma))|\, |s(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma + 2 \int_0^t \int_0^\infty |\gamma(a)|\, |p(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \\
+ 2 \int_0^t \int_0^\infty |\beta(a,\sigma,P(\sigma))| \big(|p(a,\sigma)| + |s(a,\sigma)| \big) \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Utilizando (2.8)y (2.10), se tiene que

$$
\int_0^t \int_0^\infty |\mu(a,\sigma,P(\sigma))|\, |s(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \le C \int_0^t \log(|P(\sigma)|+e) |\rho(\cdot,\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma
$$

y

$$
\int_0^t \int_0^\infty |\beta(a,\sigma,P(\sigma))| \big(|p(a,\sigma)| + |s(a,\sigma)| \big) \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \le C \int_0^t \log(|P(\sigma)|+e) |\rho(\cdot,\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma.
$$

Por tanto, ya que $\gamma \in L^\infty$, se tiene

$$
|\rho(\cdot,t)|_1 \le |\rho_0|_1 + 2\gamma_\infty \int_0^t |\rho(\cdot,\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma + C \int_0^t \log(|P(\sigma)|+e) |\rho(\cdot,\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma,
\tag{2.30}
$$

y puesto que $\log(|P(\sigma)| + e) \geq 1$, se llega

$$|\rho(\cdot,t)|_1 \leq |\rho_0|_1 + C\int_0^t \log(|P(\sigma)| + e)|\rho(\cdot,\sigma)|_1\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2.31}$$

Ahora procedemos utilizando las técnicas de [22, Lema 1]. Ponemos

$$H(t) := |\rho(\cdot,t)|_1,$$

puesto que $|P(\sigma)| \leq H(\sigma)$, y utilizando (2.31), se llega, para casi toda $t \in (0,T)$,

$$H(t) \leq |\rho_0|_1 + C\int_0^t \log(H(\sigma) + e)\,H(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma := \psi(t). \tag{2.32}$$

Supongamos por un momento que H es continua, entonces (2.32) ocurre para toda t y además se tiene que ψ es diferenciable. Luego, derivando ψ obtenemos que

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = C\log(H(t)+e)H(t) \leq C\log(\psi(t)+e)\,(\psi(t)+e),$$

y por consiguiente

$$\frac{d}{dt}\big(\log(\log(\psi(t)+e))\big) \leq C.$$

Integrando entre 0 y t, y utilizando que $\psi(0) = |\rho_0|_1$, se tiene que

$$\log(\log(\psi(t)+e)) \leq C\,t + \log(\log(|\rho_0|_1 + e)).$$

Aplicando a ambos lados de la desigualdad dos veces exp, y (2.32), llegamos a que

$$H(t) \leq \psi(t) \leq \psi(t) + e \leq \exp\left(re^{C\,t}\right),$$

con $r := \log(|\rho_0|_1 + e)$.
Así que, para concluir la prueba lo único que nos queda por ver es que podemos realizar esta prueba sin suponer la continuidad de H. Pero, puesto que $H(t) \leq \psi(t)$ (por (2.32)), se tiene que

$$C\log(H(t)+e)H(t) \leq C\log(\psi(t)+e)\,\psi(t).$$

Integrando esta desigualdad entre 0 y t, sumando $|\rho_0|_1$ y por (2.32) obtenemos que

$$\psi(t) \leq |\rho_0|_1 + C\int_0^t \log(\psi(\sigma)+e)\,\psi(\sigma).$$

Puesto que ψ si es continua, gracias a que $\rho \in V$, entonces trabajamos con ψ en vez de H y llegamos a la misma desigualdad. □

Lema 2.4.5. *Bajo las condiciones* $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$*, sea* r *definido en* (2.26) *y* w *una constante positiva. Consideramos el conjunto*

$$C_{r,\omega} = \{\rho \in V \mid |\rho(\cdot,t)|_1 \leq \exp(r\,e^{\omega t})\ \textit{e.c.t. } t \in (0,T)\}. \tag{2.33}$$

Sean $\rho := (p,s), \tilde{\rho} := (\tilde{p},\tilde{s}) \in C_{r,\omega}$*,* $a \in \mathbb{R}_+$*,* $t \in (0,T)$ *y denotamos*

$$P(t) := \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a \quad y \quad \tilde{P}(t) := \int_0^\infty \tilde{p}(a,t)\,\mathrm{d}a. \tag{2.34}$$

Entonces para casi todo $x \leq \min\{a,t\}$ *se cumple*

- $\exists M(T) > 0$ *tal que*

$$|P(t)| \leq M \text{ e.c.t. } t \in (0,T). \tag{2.35}$$

- $\exists M(T) > 0$ *tal que*

$$|B_p(t)| \leq M \text{ e.c.t. } t \in (0,T). \tag{2.36}$$

- $\exists M(T) > 0$ *tal que*

$$|B_{p,s}(t)| \leq M \text{ e.c.t. } t \in (0,T). \tag{2.37}$$

- $\exists C(T) > 0$ *tal que*

$$\left|\pi(a,t,x;P) - \pi(a,t,x;\tilde{P})\right| \leq \frac{C}{k}\,|\rho - \tilde{\rho}|_V\, e^{kt}. \tag{2.38}$$

- $\exists C(T, K_\infty) > 0$ *con* K_∞ *definido en* (2.12) *tal que*

$$|\tilde{\pi}(a,t,x;\rho) - \tilde{\pi}(a,t,x;\tilde{\rho})| \leq \frac{C}{k}\,|\rho - \tilde{\rho}|_V\, e^{kt}. \tag{2.39}$$

Demostración. (2.35) se cumple por estar $\rho \in C_{r,\omega}$.

(2.36) y (2.37) por (2.10) y (2.35).

Demostremos (2.38); por la definición de π, la positividad de γ y usando la desigualdad

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\pi(a,t,x;P) - \pi(a,t,x;\tilde{P})\right| \\
&\quad\leq \int_0^x \left|\mu_1(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma)) - \mu_1(a-\sigma, t-\sigma, \tilde{P}(t-\sigma))\right| \mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq C(T) \int_0^x \left|P(t-\sigma) - \tilde{P}(t-\sigma)\right| \mathrm{d}\sigma \leq C(T) \int_0^x |\rho(\cdot, t-\sigma) - \tilde{\rho}(\cdot, t-\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad= C(T) \int_0^x |\rho(\cdot, t-\sigma) - \tilde{\rho}(\cdot, t-\sigma)|_1\, e^{-k(t-\sigma)} e^{k(t-\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq C(T) \int_0^x |\rho - \tilde{\rho}|_V\; e^{k(t-\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma = C(T)\; |\rho - \tilde{\rho}|_V\, e^{kt} \left[\frac{e^{-k\sigma}}{-k}\right]_0^x \\
&\quad\leq \frac{C(T)}{k}\,|\rho - \tilde{\rho}|_V\, e^{kt}.
\end{aligned}$$

Demostremos (2.39). Procediendo como en la prueba de la desigualdad (2.38), gracias a la definición de λ, se verifica

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{\pi}(a,t,x;\rho) - \tilde{\pi}(a,t,x;\tilde{\rho})\right| \\
&\quad\leq \int_0^x \left|\mu_2(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma)) - \mu_2(a-\sigma, t-\sigma, \tilde{P}(t-\sigma))\right| \mathrm{d}\sigma \\
&\qquad\qquad + \int_0^x \int_0^\infty K(a-\sigma, a')\left|\rho(a', t-\sigma) - \tilde{\rho}(a', t-\sigma)\right| \mathrm{d}a'\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq (C(T) + K_\infty) \int_0^x |\rho(\cdot, t-\sigma) - \tilde{\rho}(\cdot, t-\sigma)|_1\,.
\end{aligned}$$

Y razonando como en la prueba de la desigualdad (2.38), se llega a que

$$|\tilde{\pi}(a,t,x;\rho) - \tilde{\pi}(a,t,x;\tilde{\rho})| \leq \frac{C(T,K_\infty)}{k} |\rho - \tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

□

Ahora pasemos al objetivo principal de esta Sección, es decir la búsqueda de solución única del problema (2.18). Para ello definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \longrightarrow & V \\ & \rho := (p,s) & \mapsto & F(\rho) := \omega \end{array} \tag{2.40}$$

con $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a} + (\mu_1(a,t,P(t) + \gamma(a))\omega_1 = \mu(a,t,P(t))\omega_2 + \gamma(a)p, & \text{en } \mathcal{O}_T, \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega_2}{\partial a} + (\mu_2(a,t,P(t)) + \gamma(a) + \lambda(a,t;p-s))\omega_2 = \gamma(a)p, & \text{en } \mathcal{O}_T, \\ \omega_1(a,0) = p_0(a), \quad \omega_2(a,0) = s_0(a), & \text{en } \mathbb{R}_+, \\ \omega_1(0,t) = B_p(t), & \text{en } (0,T), \\ \omega_2(0,t) = B_{p,s}(t), & \text{en } (0,T), \end{cases} \tag{2.41}$$

donde

$$P(t) := \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a.$$

Resolviendo este sistema por el método de las características y notando por $F_i := \omega_i$, para $i = 1, 2$, tenemos que

$$F_1(\rho)(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\pi(a,t,t;P) + \displaystyle\int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\big(\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) \\ \quad \times F_2(\rho)(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\big)\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } a \geq t \\ B_p(t-a)\pi(a,t,a;P) + \displaystyle\int_0^a \pi(a,t,\sigma;P)\big(\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma)) \\ \quad \times F_2(\rho)(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\big)\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } t > a \end{cases} \tag{2.42}$$

y

$$F_2(\rho)(a,t) = \begin{cases} s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \tilde{\pi}(a,t,\sigma;\rho)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } a \geq t \\ B_{p,s}(t-a)\,\tilde{\pi}(a,t,a;\rho) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^a \tilde{\pi}(a,t,\sigma;\rho)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } t > a. \end{cases} \tag{2.43}$$

Veamos que la aplicación F está bien definida y lleva el conjunto V en V.

Proposición 2.4.6. *Bajo las hipótesis* $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$*, se tiene que* F *está bien definida, es decir,* $F(V)\subseteq V$*, con* $p_0 := i_0 + s_0$.

Demostración. Sea $\rho\in V$, veamos entonces que $F(\rho)\in V$.
Ya que $\rho\in V$, entonces por (2.35) se tiene que

$$P(\cdot) := \int_0^\infty p(a,\cdot)\,\mathrm{d}a \in L^\infty(0,T).$$

Luego por (2.7) y (2.9) se tiene que

$$\beta(a,t,P(t)),\ \mu(a,t,P(t)) \in L^\infty((0,T);L^1_{Loc}(\mathbb{R}_+)). \tag{2.44}$$

Gracias a la hipótesis $(\mathcal{H}_4)$, la definición de π y $\tilde\pi$ y el Lema 2.4.3 se tiene que

$$F(\rho)\in L^\infty((0,T);(L^1(\mathbb{R}_+))^2).$$

Por tanto nos falta demostrar que $F_1(\rho)\geq F_2(\rho)\geq 0$.
Claramente se tiene que $F_2(\rho)\geq 0$ en $\mathbb{R}_+\times(0,T)$. Luego demostremos que $F_1(\rho)(a,t)\geq F_2(\rho)(a,t)$ e.c.t. $(a,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.
Supongamos que $a\geq t$ (para el caso $a<t$ se razonará análogamente) utilizando (2.42) y (2.43), y sustituyendo el valor de F_2 en F_1 se tiene,

$$\begin{aligned}
&F_1(\rho)(a,t)-F_2(\rho)(a,t)\\
&\quad= p_0(a-t)\pi(a,t,t;P) \quad (:=\mathbf{A})\\
&\qquad - s_0(a-t)\tilde\pi(a,t,t;\rho) \quad (:=\mathbf{B})\\
&\qquad + s_0(a-t)\int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))\tilde\pi(a-\sigma,t-\sigma,t-\sigma;\rho)\mathrm{d}\sigma \quad (:=\mathbf{C})\\
&\qquad + \int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))\\
&\qquad\qquad \times\left(\int_\sigma^t \tilde\pi(a-\sigma,t-\sigma,\tau-\sigma;\rho)\gamma(a-\tau)p(a-\tau,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma \quad (:=\mathbf{D})\\
&\qquad + \int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad (:=\mathbf{E})\\
&\qquad - \int_0^t \tilde\pi(a,t,\sigma;\rho)\gamma(a-\sigma)p(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad (:=\mathbf{F}).
\end{aligned}$$

Así, considerando estas notaciones tenemos que

$$F_1(\rho)(a,t)-F_2(\rho)(a,t) := \mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{E}-\mathbf{F}. \tag{2.45}$$

Estimemos primero $\mathbf{C}$. Es fácil verificar que

$$\tilde\pi(a-\sigma,t-\sigma,t-\sigma;\rho) = \tilde\pi(a,t,t;\rho)\ (\tilde\pi(a,t,\sigma;\rho))^{-1}. \tag{2.46}$$

Luego

$$\mathbf{C} = s_0(a-t)\tilde\pi(a,t,t;\rho)\int_0^t \pi(a,t,\sigma;P)\,(\tilde\pi(a,t,\sigma;\rho))^{-1}\,\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))\,\mathrm{d}\sigma.$$

Sustituyendo, entonces, el valor de π y $(\tilde{\pi})^{-1}$, se llega a

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho)\int_0^t \Bigg(\exp\left[-\int_0^\sigma \mu(a-\tau,t-\tau,P(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \\ &\qquad \times \mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))\exp\left[\int_0^\sigma \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right]\Bigg)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho)\int_0^t \Bigg(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\exp\left[-\int_0^\sigma \mu(a-\tau,t-\tau,P(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\right) \\ &\qquad \times \exp\left[\int_0^\sigma \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right]\Bigg)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio, se tiene que existe $t_1 \in (0,t)$, tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho)&\left(1-\exp\left[-\int_0^t \mu(a-\tau,t-\tau,P(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\right) \\ &\times \exp\left[\int_0^{t_1} \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right].\end{aligned} \tag{2.48}$$

Puesto que

$$\exp\left[\int_0^{t_1} \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right] \geq 1$$

entonces

$$\begin{aligned}-\mathbf{B}+\mathbf{C} &\geq s_0(a-t)\tilde{\pi}(a,t,t;\rho)\exp\left[-\int_0^t \mu(a-\tau,t-\tau,P(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \\ &\qquad \times \exp\left[\int_0^{t_1} \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right] \\ &= s_0(a-t)\pi(a,t,t;P)\exp\left[-\int_{t_1}^t \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right].\end{aligned}$$

Ahora bien, $p_0 \geq s_0$, por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{C} &\geq \pi(a,t,t;P)\left(p_0(a-t) - s_0(a-t)\exp\left[-\int_{t_1}^t \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right]\right) \\ &\geq s_0(a-t)\pi(a,t,t;P)\left(1-\exp\left[-\int_{t_1}^t \lambda(a-\tau,t-\tau;p-s)\,\mathrm{d}\tau\right]\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{C} \geq 0.$$

Veamos entonces que $\mathbf{D}+\mathbf{E}-\mathbf{F} \geq 0$.

Estimemos primero $\mathbf{D}$. Por la definición de $\tilde{\pi}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}(a-\sigma, t-\sigma, \tau-\sigma; \rho) &= \exp\Big[-\int_0^{\tau-\sigma} \big(\mu_2(a-\sigma-\xi, t-\sigma-\xi, P(t-\sigma-\xi)) \\
&\qquad + \lambda(a-\sigma-\xi, t-\sigma-\xi; p-s) + \gamma(a-\sigma-\xi)\big)\, \mathrm{d}\xi\Big] \\
&\underset{\sigma+\xi \rightsquigarrow \xi'}{=} \exp\Big[-\int_\sigma^{\tau} \big(\mu_2(a-\xi', t-\xi', P(t-\xi')) \\
&\qquad + \lambda(a-\xi', t-\xi'; p-s) + \gamma(a-\xi')\big)\, \mathrm{d}\xi'\Big] \\
&= \exp\Big[\int_0^{\sigma} \big(\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi)\big)\, \mathrm{d}\xi\Big] \\
&\qquad \times \exp\Big[-\int_0^{\tau} \big(\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi)\big) \mathrm{d}\xi\Big] \\
&\qquad \times \exp\Big[-\int_\sigma^{\tau} \big(\lambda(a-\xi, t-\xi; p-s)\big) \mathrm{d}\xi\Big]
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Luego, sustituyendo el valor de π en $\mathbf{D}$ y usando la igualdad anterior, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} = \int_0^t \Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\sigma} \mu(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi))\, \mathrm{d}\xi\right] \mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma)) \\
\times \int_\sigma^t \Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\tau} \big(\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi)\big) \mathrm{d}\xi\right] \\
&\times \exp\left[-\int_\sigma^{\tau} \lambda(a-\xi, t-\xi; p-s)\, \mathrm{d}\xi\right] \gamma(a-\tau) p(a-\tau, t-\tau)\Bigg)\, \mathrm{d}\tau \Bigg) \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Ahora bien intercambiando el orden de integración:

$$
\left.\begin{array}{c} \sigma \le \tau \le t \\ 0 \le \sigma \le t \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 0 \le \sigma \le \tau \\ 0 \le \tau \le t, \end{array}
$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} = \int_0^t \Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\tau} (\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi))\, \mathrm{d}\xi\right] \gamma(a-\tau) p(a-\tau, t-\tau) \\
\times \int_0^{\tau} \Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\sigma} \mu(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi))\, \mathrm{d}\xi\right] \mu(a-\sigma, t-\sigma, P(t-\sigma)) \\
&\times \exp\left[-\int_\sigma^{\tau} \lambda(a-\xi, t-\xi; p-s)\, \mathrm{d}\xi\right]\Bigg) \mathrm{d}\sigma \Bigg)\, \mathrm{d}\tau \\
= \int_0^t \Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\tau} (\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi))\, \mathrm{d}\xi\right] \gamma(a-\tau) p(a-\tau, t-\tau) \\
\times \int_0^{\tau} \Bigg(&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left(\exp\left[-\int_0^{\sigma} \mu(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi))\, \mathrm{d}\xi\right]\right) \\
&\times \exp\left[-\int_\sigma^{\tau} \lambda(a-\xi, t-\xi; p-s)\, \mathrm{d}\xi\right]\Bigg) \mathrm{d}\sigma \Bigg)\, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio, como hicimos en (2.48), se tiene que existe $t_\tau \in (0,\tau)$, tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = \int_0^t \Bigg(1 - \exp\left[-\int_0^\tau \mu(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi))\,\mathrm{d}\xi\right]\Bigg) \\
\times \exp\left[-\int_{t_\tau}^\tau \lambda(a-\xi, t-\xi; p-s)\,\mathrm{d}\xi\right] \\
\times \exp\left[-\int_0^\tau (\mu_2(a-\xi, t-\xi, P(t-\xi)) + \gamma(a-\xi))\,\mathrm{d}\xi\right] \gamma(a-\tau)p(a-\tau, t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
= \int_0^t \tilde{\pi}(a,t,\tau;\rho)\gamma(a-\tau)p(a-\tau,t-\tau)\exp\left[\int_0^{t_\tau} \lambda(a-\xi,t-\xi;p-s)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \\
- \int_0^t \pi(a,t,\tau;P)\gamma(a-\tau)p(a-\tau,t-\tau)\exp\left[-\int_{t_\tau}^\tau \lambda(a-\xi,t-\xi;p-s)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} + \mathbf{E} - \mathbf{F} = \int_0^t \tilde{\pi}(a,t,\tau;\rho)\gamma(a-\tau)p(a-\tau,t-\tau) \\
\times \left(\exp\left[\int_0^{t_\tau} \lambda(a-\xi,t-\xi;p-s)\,\mathrm{d}\xi\right] - 1\right)\mathrm{d}\tau \\
+ \int_0^t \pi(a,t,\tau;P)\gamma(a-\tau)p(a-\tau,t-\tau) \\
\times \left(1 - \exp\left[-\int_{t_\tau}^\tau \lambda(a-\xi,t-\xi;p-s)\,\mathrm{d}\xi\right]\right)\mathrm{d}\tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que $F_1(\rho)(a,t) \geq F_2(\rho)(a,t) \geq 0$ e.c.t. $(a,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,T)$. Así, podemos concluir que $F(\rho) \in V$. □

Teorema 2.4.7. *Supongamos* $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_5)$*,entonces para cada* $T > 0$ *y para cada* $\rho_0 := (p_0, s_0) \in \left(L^1(\mathbb{R}_+)\right)^2$*, con* $p_0 \geq s_0$*, existe un único* $\rho = (p,s) \in V$ *satisfaciendo* (2.22) *y* (2.23)*. Y por tanto se tiene que* ρ *es la única solución del problema* (2.18)*.*

Demostración. Para demostrar que (2.22) y (2.23) tienen una única solución, lo que vamos a probar es que la aplicación F, definida en (2.40), tiene un único punto fijo.

Sea $r := \log(|\rho_0|_1 + e)$, es decir el que nos da la Proposición 2.4.4, y sea $C_{r,w}$ definido en (2.33). Veamos que para ω suficientemente grande

$$F : C_{r,\omega} \longrightarrow C_{r,\omega}.$$

En efecto, vamos a razonar como en la demostración del Teorema 2 de [22]. Por (2.31), tenemos que

$$|F(\rho)(\cdot,t)|_1 \leq |\rho_0|_1 + C\int_0^t \log(|\rho(\cdot,s)|_1 + e)\,|\rho(\cdot,s)|_1\,\mathrm{d}s.$$

Ahora bien, $\rho \in C_{r,w}$, luego

$$|\rho(\cdot,s)|_1 \leq \exp(r\,e^{\omega s}) \text{ e.c.t. } s \in (0,T).$$

Por tanto,

$$|F(\rho)(\cdot,t)|_1 \leq |\rho_0|_1 + C\int_0^t \log(\exp(r\,e^{\omega s})+e)\exp(r\,e^{\omega s})\,\mathrm{d}s.$$

Gracias a la definición de r se tiene que $r>1$, y es fácil comprobar que

$$\log(\exp(r\,e^{\omega s})+e) \leq 2\log(\exp(r\,e^{\omega s})) = 2re^{\omega s}.$$

Por consiguiente,

$$|F(\rho)(\cdot,t)|_1 \leq |\rho_0|_1 + 2C\int_0^t re^{\omega s}\exp(r\,e^{\omega s})\,\mathrm{d}s.$$

Integrando, obtenemos que

$$|F(\rho)(\cdot,t)|_1 \leq |\rho_0|_1 + \frac{2C}{\omega}\left(\exp(r\,e^{\omega t}) - e^r\right).$$

Ahora bien, por la definición de r se tiene que $|\rho_0|_1 \leq e^r$. Luego, eligiendo ω tal que $\dfrac{2C}{\omega} \leq 1$, tenemos que

$$|F(\rho)(\cdot,t)|_1 \leq \left(1-\frac{2C}{\omega}\right)e^r + \frac{2C}{\omega}\exp(r\,e^{\omega t}) \leq \exp(r\,e^{\omega t}).$$

Por tanto, efectivamente se tiene que $F: C_{r,\omega} \longrightarrow C_{r,\omega}$.

Luego, fijamos ω tal que $F(C_{r,\omega}) \subseteq C_{r,\omega}$. Claramente $C_{r,\omega}$ es cerrado en V, luego para probar que F tiene un único punto fijo en V, nos basta demostrar que F es contractiva en $C_{r,\omega}$.

Para ello, mostraremos que existe una constante $L<1$ tal que

$$|F(\rho)-F(\tilde{\rho})|_V \leq L|\rho-\tilde{\rho}|_V \quad \forall \rho,\tilde{\rho} \in C_{r,\omega}.$$

Sean $\rho,\tilde{\rho} \in C_{r,\omega}$, por facilitar notaciones consideraremos

$$\begin{aligned}
&\rho := (p,s), \quad \tilde{\rho} := (\tilde{p},\tilde{s}),\\
&P(t) := \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a, \quad \tilde{P}(t) := \int_0^\infty \tilde{p}(a,t)\,\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Para casi toda $t \in (0,T)$, se tiene

$$\begin{aligned}
|F(\rho)(\cdot,t)-F(\tilde{\rho})(\cdot,t)|_1 = &\int_0^\infty |F_1(\rho)(a,t)-F_1(\tilde{\rho})(a,t)|\mathrm{d}a\\
&+\int_0^\infty |F_2(\rho)(a,t)-F_2(\tilde{\rho})(a,t)|\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Ahora bien sustituyendo la expresión de F_1 se llega a que

$$
\begin{aligned}
&\|F_1(\rho)(\cdot,t) - F_1(\tilde{\rho})(\cdot,t)\|_{L^1} \\
&\quad \le \int_0^t |B_p(t-a)\pi(a,t,a;P) - B_{\tilde{p}}(t-a)\pi(a,t,a;\tilde{P})|\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_1}) \\
&\quad + \int_t^\infty |p_0(a-t)||\pi(a,t,t;P) - \pi(a,t,t;\tilde{P})|\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_2}) \\
&\quad + \int_0^t\int_0^a \Big(|\pi(a,t,\sigma;P)\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))\, F_2(\rho)(a-\sigma,t-\sigma) \\
&\qquad\qquad - \pi(a,t,\sigma;\tilde{P})\mu(a-\sigma,t-\sigma,\tilde{P}(t-\sigma))\, F_2(\tilde{\rho})(a-\sigma,t-\sigma)|\Big)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_3}) \\
&\quad + \int_t^\infty\int_0^t \Big(|\pi(a,t,\sigma;P)\mu(a-\sigma,t-\sigma,P(t-\sigma))F_2(\rho)(a-\sigma,t-\sigma) \\
&\qquad\qquad - \pi(a,t,\sigma;\tilde{P})\mu(a-\sigma,t-\sigma,\tilde{P}(t-\sigma))F_2(\tilde{\rho})(a-\sigma,t-\sigma)|\Big)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_4}) \\
&\quad + \gamma_\infty \int_0^t\int_0^a |\pi(a,t,\sigma;P)p(a-\sigma,t-\sigma) - \pi(a,t,\sigma;\tilde{P})\tilde{p}(a-\sigma,t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_5}) \\
&\quad + \gamma_\infty \int_t^\infty\int_0^t |\pi(a,t,\sigma;P)p(a-\sigma,t-\sigma) - \pi(a,t,\sigma;\tilde{P})\tilde{p}(a-\sigma,t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_6}).
\end{aligned}
$$

Así, siguiendo estas notaciones tenemos que

$$
\|F_1(\rho)(\cdot,t) - F_1(\tilde{\rho})(\cdot,t)\|_{L^1} \le \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} + \mathbf{I_3} + \mathbf{I_4} + \mathbf{I_5} + \mathbf{I_6} \tag{2.51}
$$

Ahora bien haciendo los mismos cambios de variables como en (2.29), se llega

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I_3} + \mathbf{I_4} = \int_0^t \Big(\int_0^\infty \big|\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P)\mu(a,\sigma,P(\sigma))\, F_2(\rho)(a,\sigma) \\
- \pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\tilde{P})\mu(a,\sigma,\tilde{P}(\sigma))\, F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)\big|\,\mathrm{d}a\Big)\,\mathrm{d}\sigma \quad (:= \mathbf{I_{3,4}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I_5} + \mathbf{I_6} = \gamma_\infty \int_0^t \Big(\int_0^\infty \big|\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P)p(a,\sigma) \\
- \pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\tilde{P})\tilde{p}(a,\sigma)\big|\,\mathrm{d}a\Big)\mathrm{d}\sigma. \quad (:= \mathbf{I_{5,6}})
\end{aligned}
$$

Denotando

$$
\mathbf{I_7} := \int_0^\infty |F_2(\rho)(a,t) - F_2(\tilde{\rho})(a,t)|\mathrm{d}a,
$$

se tiene

$$
|F(\rho)(\cdot,t) - F(\tilde{\rho})(\cdot,t)|_1 \le \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} + \mathbf{I_{3,4}} + \mathbf{I_{5,6}} + \mathbf{I_7}. \tag{2.52}
$$

Luego vamos a realizar las estimaciones de todos los sumandos.

• *Estimación de* $\mathbf{I_1}$.-
Sumando y restando en $\mathbf{I_1}$ el término $B_p(t-a)\pi(a,t,a;\tilde{P})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{I_1} &= \int_0^t |B_p(t-a)\pi(a,t,a;P) - B_{\tilde{p}}(t-a)\pi(a,t,a;\tilde{P})|\mathrm{d}a\\ &\le \int_0^t |B_p(t-a)|\,|\pi(a,t,a;P)-\pi(a,t,a;\tilde{P})|\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_1^1})\\ &\qquad + \int_0^t |B_p(t-a)-B_{\tilde{p}}(t-a)|\,|\pi(a,t,a;\tilde{P})|\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_1^2}).\end{aligned}$$

Ahora bien, por (2.36) y (2.38), se llega

$$\mathbf{I_1^1} \le \frac{M\,C(T)}{k}|\rho-\tilde{\rho}|_V\, e^{kt}.$$

Y por la definición de B_p y $B_{\tilde{p}}$ y la desigualdad (2.24) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{I_1^2} &\le \int_0^t |B_p(t-a)-B_{\tilde{p}}(t-a)|\,\mathrm{d}a\\ &= \int_0^t |B_p(u)-B_{\tilde{p}}(u)|\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^t\int_0^\infty \Big|\beta(\xi,u,P(u))\,p(\xi,u)-\beta(\xi,u,\tilde{P}(u))\,\tilde{p}(\xi,u)\Big|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\\ &\le \int_0^t\int_0^\infty |\beta(\xi,u,P(u))|\,|p(\xi,u)-\tilde{p}(\xi,u)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}u\\ &\qquad + \int_0^t\int_0^\infty |\beta(\xi,u,P(u))-\beta(\xi,u,\tilde{P}(u))|\,|\tilde{p}(\xi,u)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Usando (2.10), en el primer sumando y (2.9), y el hecho de que $\tilde{\rho}\in C_{r,\omega}$ en el segundo, y procediendo después de una forma análoga a la demostración de (2.38) obtenemos que

$$\mathbf{I_1} \le \frac{M}{k}|\rho-\tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

• *Estimación de* $\mathbf{I_2}$.-
Usando (2.38), se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{I_2} &\le \frac{C(T)}{k}\,|\rho-\tilde{\rho}|_V\, e^{kt}\int_t^\infty |p_0(a-t)|\,\mathrm{d}a\\ &\le \frac{C(T)\,|\rho_0|_1}{k}\,|\rho-\tilde{\rho}|_V\, e^{kt}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

• *Estimación de* $\mathbf{I_7}$.-
Sustituyendo el valor de F_2 en $\mathbf{I_7}$ y realizando cambios de variables análogos a los de

(2.29), se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I_7} \leq & \int_0^t |B_{p,s}(t-a)\,\tilde\pi(a,t,a;\rho) - B_{\tilde p,\tilde s}(t-a)\,\tilde\pi(a,t,a;\tilde\rho)|\,\mathrm{d}a \\
& + \int_t^\infty |s_0(a-t)|\,|\tilde\pi(a,t,t;\rho) - \tilde\pi(a,t,t;\tilde\rho)|\,\mathrm{d}a \\
& + \int_0^t \int_0^a |\gamma(a-\sigma)|\,|\tilde\pi(a,t,\sigma;\rho)\,p(a-\sigma,t-\sigma) - \tilde\pi(a,t,\sigma;\tilde\rho)\,\tilde p(a-\sigma,t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \\
& + \int_t^\infty \int_0^t |\gamma(a-\sigma)|\,|\tilde\pi(a,t,\sigma;\rho)\,p(a-\sigma,t-\sigma) - \tilde\pi(a,t,\sigma;\tilde\rho)\,\tilde p(a-\sigma,t-\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \\
\leq & \int_0^t |B_{p,s}(t-a)\,\tilde\pi(a,t,a;\rho) - B_{\tilde p,\tilde s}(t-a)\,\tilde\pi(a,t,a;\tilde\rho)|\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_7^1}) \\
& + \int_t^\infty |s_0(a-t)|\,|\tilde\pi(a,t,t;\rho) - \tilde\pi(a,t,t;\tilde\rho)|\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{I_7^2}) \\
& + \gamma_\infty \int_0^t \int_0^\infty |\tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho)\,p(a,\sigma) \\
& \qquad - \tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\tilde\rho)\,\tilde p(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\sigma. \quad (:= \mathbf{I_7^3})
\end{aligned}
$$

Gracias a (2.37) y (2.39), las estimaciones de $\mathbf{I_7^1}$ y $\mathbf{I_7^2}$ son análogas a las de $\mathbf{I_1}$ y $\mathbf{I_2}$, respectivamente. Luego obtenemos,

$$
\mathbf{I_7^1} + \mathbf{I_7^2} \leq \frac{M}{k}|\rho - \tilde\rho|_V e^{kt}.
$$

Acotemos ahora $\mathbf{I_7^3}$. Sumando y restando $\tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho)\tilde p(a,\sigma)$ en $\mathbf{I_7^3}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I_7^3} \leq & \int_0^t \int_0^\infty |\tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho)||p(a,\sigma) - \tilde p(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\sigma + \\
& + \int_0^t \int_0^\infty |\tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho) - \tilde\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\tilde\rho)|\,|\tilde p(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Gracias a (2.25) y (2.39), se tiene entonces que

$$
\mathbf{I_7^3} \leq \int_0^t \|p(\cdot,\sigma) - \tilde p(\cdot,\sigma)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{C}{k}e^{kt}|\rho - \tilde\rho|_1 \int_0^t \|\tilde p(\cdot,\sigma)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\sigma.
$$

Luego análogamente a las otras acotaciones obtenemos que

$$
\mathbf{I_7^3} \leq \frac{M}{k}\,|\rho - \tilde\rho|_V\,e^{kt},
$$

Así, uniendo todas estas desigualdades tenemos

$$
\mathbf{I_7} \leq \frac{M}{k}\,|\rho - \tilde\rho|_V\,e^{kt}.
$$

• *Estimación de* $\mathbf{I_{3,4}}$.-
Sumando y restando

$$
|\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P)||\mu(a,\sigma,P(\sigma))|F_2(\tilde\rho)(a,\sigma)|,
$$

en $\mathbf{I_{3,4}}$ y usando (2.24), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I_{3,4}} \leq & \int_0^t \int_0^\infty |\mu(a,\sigma,P(\sigma))||F_2(\rho)(a,\sigma) - F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \quad (:= \mathbf{I^1_{3,4}}) \\
& + \int_0^t \Big(\int_0^\infty |\pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P) - \pi(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\tilde{P})| \\
& \qquad \times |\mu(a,\sigma,P(\sigma))|\, |F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \Big) \,\mathrm{d}\sigma \quad (:= \mathbf{I^2_{3,4}}) \\
& + \int_0^t \int_0^\infty |F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)|\, |\mu(a,\sigma,P(\sigma)) - \mu(a,\sigma,\tilde{P}(\sigma))| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \quad (:= \mathbf{I^3_{3,4}}).
\end{aligned}$$

Ahora bien, por (2.10) y (2.35), se tiene que

$$\mu(a,t,P(t)) \leq \bar{\mu}.$$

Usando la estimación de $\mathbf{I_7}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I^1_{3,4}} \leq & \,\bar{\mu} \int_0^t \int_0^\infty |F_2(\rho)(a,\sigma) - F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)| \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}\sigma \leq \frac{\bar{\mu} M}{k} \,|\rho - \tilde{\rho}|_V \int_0^t e^{k\sigma} \,\mathrm{d}\sigma \\
\leq & \,\frac{\bar{\mu} M}{k^2} \,|\rho - \tilde{\rho}|_V \, e^{kt}.
\end{aligned}$$

Utilizando (2.38), se tiene que

$$\mathbf{I^2_{3,4}} \leq \frac{C(T)}{k} |\rho - \tilde{\rho}|_V \, e^{kt} \left(\int_0^\infty |F_2(\tilde{\rho})(a,\sigma)| \mathrm{d}a \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Y puesto que $F(\rho) \in C_{r,\omega}$, tenemos que

$$\|F_2(\rho)(\cdot,\sigma)\|_{L^1} \leq M, \tag{2.55}$$

entonces

$$\mathbf{I^2_{3,4}} \leq \frac{C(T)M}{k} |\rho - \tilde{\rho}|_V \, e^{kt}.$$

Gracias a (2.55) y usando (2.7) se llega a que

$$\mathbf{I^3_{3,4}} \leq \frac{C(T)\, M}{k} |\rho - \tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

Por consiguiente, uniendo todas las desigualdades, tenemos que

$$\mathbf{I_{3,4}} \leq \left(\frac{\bar{\mu} M}{k^2} + \frac{M C(T)}{k} \right) |\rho - \tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

• *Estimación de* $\mathbf{I_{5,6}}$.-
Estimar $\mathbf{I_{5,6}}$ es análogo a $\mathbf{I^3_7}$ y se llega a

$$\mathbf{I_{5,6}} \leq \frac{M}{k} |\rho - \tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

Por tanto uniendo todas las estimaciones, tenemos que para $t \in [0,T]$, existen dos constantes M y $\tilde{M}$ dependiendo sólo de ρ_0, T y de los supremos de γ y K, tal que

$$|F(\rho)(\cdot,t) - F(\tilde{\rho})(\cdot,t)|_1 \leq \left(\frac{M}{k} + \frac{\tilde{M}}{k^2}\right) |\rho - \tilde{\rho}|_V e^{kt}.$$

Luego,

$$|F(\rho)(\cdot,t) - F(\tilde{\rho})(\cdot,t)|_1 e^{-kt} \leq \left(\frac{M}{k} + \frac{\tilde{M}}{k^2}\right) |\rho - \tilde{\rho}|_V,$$

y tomando supremo en $t \in [0,T]$, se tiene que

$$|F(\rho) - F(\tilde{\rho})|_V \leq \left(\frac{M}{k} + \frac{\tilde{M}}{k^2}\right) |\rho - \tilde{\rho}|_V.$$

Por tanto para un k suficientemente grande se tiene que F es contractiva en $C_{r,\omega}$, luego tenemos que existe un único punto fijo en $C_{r,\omega}$, y por consiguiente en V. Consecuentemente, llegamos a la existencia y unicidad de solución del problema (2.18), puesto que si ρ es solución de (2.18), entonces es un punto fijo de F. $\square$

2.5. Existencia y unicidad de solución del modelo

Para concluir con el estudio de la existencia y unicidad de solución del modelo (2.5), lo que nos queda ver es que la aplicación G definida en (2.17), tiene un único punto fijo.

Primero recordemos algunas notaciones. Dado $T > 0$, $P \in \mathbb{R}$, para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, denotamos

$$\mu_{1,z}(a,t,P) := \mu_1(a,t,P) + M_1\, z(t),$$
$$\mu_{2,z}(a,t,P) := \mu_2(a,t,P) + M_2\, z(t),$$
y
$$\mu_z(a,t,P) := \mu_{1,z}(a,t,P) - \mu_{2,z}(a,t,P).$$

Veamos entonces que si μ_i, para $i = 1,2$, verifican la hipótesis $(\mathcal{H}_1)$, entonces $\mu_{i,z}$ para $i = 1,2$, también la verifican.
(2.6) se verifica trivialmente. Veamos entonces, (2.7),

$$\begin{aligned}|\mu_{i,z}(a,t,P) - \mu_{i,z}(a,t,\tilde{P})| &= |\mu_i(a,t,P) - \mu_i(a,t,\tilde{P})| \\ &\leq C(T)\,|P - \tilde{P}| \text{ e.c.t. } (a,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,T).\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $\mu_{i,z}$ verifica (2.7). Luego, nos falta probar que μ_z satisface la desigualdad (2.8).
Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned}|\mu_z(a,t,P)| &\leq |\mu_1(a,t,P) - \mu_2(a,t,P)| + (M_1 - M_2)|z(t)| \\ &\leq C(T)\log(|P| + e) + (M_1 - M_2)\|z\|_\infty,\end{aligned}$$

y gracias a que $\log(|P| + e) \geq 1$, obtenemos que, para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$,

$$|\mu_z(a,t,P)| \leq C(T, M_1, M_2, \|z\|_\infty)\log(|P| + e) \text{ e.c.t. } (a,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,T). \tag{2.56}$$

Por tanto si se verifican $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$, usando el Teorema 2.4.7, tenemos que para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, el problema (2.13), tiene una única solución $(i_z, s_z) \in \mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\mathbb{R}_+))^2)$ no negativa. Así, denotando $p_z := i_z + s_z$, sabemos que para cada $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, existe una única solución $(p_z, s_z) \in V$ del problema (2.18) (sustituyendo μ_i por $\mu_{i,z}$). Y además, $\rho_z := (p_z, s_z)$, verifica las siguientes ecuaciones implícitas:

$$
(2.57)\quad p_z(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\pi_z(a,t,t;P_z) + \displaystyle\int_0^t \pi_z(a,t,\sigma;P_z)\Big(\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma)) \\ \qquad \times s_z(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p_z(a-\sigma,t-\sigma)\Big)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } a \geq t \\[2ex] B_{p_z}(t-a)\pi_z(a,t,a;P_z) + \displaystyle\int_0^a \pi_z(a,t,\sigma;P_z)\Big(\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma)) \\ \qquad \times s_z(a-\sigma,t-\sigma) + \gamma(a-\sigma)p_z(a-\sigma,t-\sigma)\Big)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } t > a \end{cases}
$$

y

$$
(2.58)\quad s_z(a,t) = \begin{cases} s_0(a-t)\tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \tilde{\pi}_z(a,t,\sigma;\rho_z)\gamma(a-\sigma)p_z(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } a \geq t \\[2ex] B_{p_z,s_z}(t-a)\tilde{\pi}_z(a,t,a;\rho_z) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^a \tilde{\pi}_z(a,t,\sigma;\rho_z)\gamma(a-\sigma)p_z(a-\sigma,t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{si } t > a \end{cases}
$$

donde

$$
P_z(t) := \int_0^\infty p_z(a,t)\,\mathrm{d}a,
$$

B_{p_z} y B_{p_z,s_z}, están definidas en (2.20) y (2.21), respectivamente, y

$$
\begin{aligned}
\pi_z(a,t,x;P_z) &= \exp\left[-\int_0^x \left(\mu_{1,z}(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma)) + \gamma(a-\sigma)\right)\,\mathrm{d}\sigma\right], \\
\tilde{\pi}_z(a,t,x;\rho_z) &= \exp\Big[-\int_0^x \Big(\mu_{2,z}(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma)) \\
&\qquad\qquad + \lambda(a-\sigma,t-\sigma;p_z-s_z) + \gamma(a-\sigma)\Big)\,\mathrm{d}\sigma\Big].
\end{aligned}
$$

Primero en el espacio $\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$ vamos a considerar la norma de Bielecki, la cual será denotada por $\|\cdot\|_B$, es decir, para cada $v \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$,

$$
\|v\|_B := \sup_{t\in[0,T]} \{e^{-kt}v(t)\},
$$

donde k es una constante que será elegida posteriormente.

Lema 2.5.1. *Para cada $z, z' \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, sean $\rho_z := (p_z, s_z), \rho_{z'} := (p_{z'}, s_{z'}) \in V$, $(a,t) \in \mathbb{R}\times(0,T)$, $x \leq \min\{a,t\}$ y denotamos*

$$
P_z(t) = \int_0^\infty p_z(a,t)\,\mathrm{d}a \quad y \quad P_{z'}(t) = \int_0^\infty p_{z'}(a,t)\,\mathrm{d}a.
$$

Entonces se verifican,

(2.59) $\pi_z(a,t,x;P_z) \leq 1$

(2.60) $\tilde{\pi}_z(a,t,x;\rho_z) \leq 1$

(2.61) $\exists C(T) > 0$ *tal que*

$$|\pi_z(a,t,x;P_z) - \pi_{z'}(a,t,x;P_{z'})| \leq \frac{C}{k}\,|\rho_z - \rho_{z'}|_V\, e^{kt} + \frac{M_1}{k}\|z - z'\|_B e^{kt}.$$

(2.62) $\exists C(T, K_\infty) > 0$ *con* K_∞ *definido en* (2.12) *tal que*

$$|\tilde{\pi}_z(a,t,x;\rho_z) - \tilde{\pi}_{z'}(a,t,x;\rho_{z'})| \leq \frac{C}{k}\,|\rho_z - \rho_{z'}|_V\, e^{kt} + \frac{M_2}{k}\|z - z'\|_B e^{kt}.$$

Demostración. La demostración de (2.59) y de (2.60) es trivial.

Para la demostración de (2.61), procedemos como en la prueba de (2.38), es decir,

$$\begin{aligned}
&|\pi_z(a,t,t;P_z) - \pi_{z'}(a,t,t;P_{z'})| \\
&\quad\leq \int_0^t \big|\mu_{1,z}(a-\sigma, t-\sigma, P_z(t-\sigma)) - \mu_{1,z'}(a-\sigma, t-\sigma, P_{z'}(t-\sigma))\big|\, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq \int_0^t |\mu_1(a-\sigma, t-\sigma, P_z(t-\sigma)) - \mu_1(a-\sigma, t-\sigma, P_{z'}(t-\sigma))|\, \mathrm{d}\sigma \\
&\qquad\qquad + M_1 \int_0^t |z(t-\sigma) - z'(t-\sigma)|\, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq C(T)\int_0^t |P_z(\sigma) - P_{z'}(\sigma)|\, \mathrm{d}\sigma + M_1 \int_0^t |z(\sigma) - z'(\sigma)|\, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq C(T)\int_0^t |\rho_z(\cdot,\sigma) - \rho_{z'}(\cdot,\sigma)|_1\, e^{-k\sigma} e^{k\sigma}\, \mathrm{d}\sigma + M_1 \int_0^t |z(\sigma) - z'(\sigma)|\, e^{-k\sigma} e^{k\sigma} \mathrm{d}\sigma \\
&\quad\leq \frac{C(T)}{k}\,|\rho_z - \rho_{z'}|_V\, e^{kt} + \frac{M_1}{k}\|z - z'\|_B e^{kt}.
\end{aligned}$$

La demostración de (2.62) es análoga. □

Proposición 2.5.2. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$*, entonces para toda* $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$*, se tiene que existe una constante* $C > 0$ *que no depende de* z *tal que*

(2.63) $$\|p_z(\cdot,t)\|_{L^1} \leq \exp(re^{Ct})$$

con r *definida en* (2.26).

Nota 2.5.3. *Este resultado no viene reflejado en la Proposición* 2.4.4*, ya que si se aplica la demostración de la Proposición a* $\mu_{i,z}$*, se llegaría a la acotación pero con la constante* C *que aparece en la Proposición* 2.4.4 *dependiente, también, de la norma del supremo de* z *por* (2.56).

Nota 2.5.4. *Si se verifica la Proposición* 2.5.2*, en realidad también se demuestra que* P_z *y* S_z *se acotan por una constante independiente de* z*, pues*

$$|S_z(t)| \leq |P_z(t)| \leq \|p_z(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

Demostración. Sea $t \in [0,T]$, considerando $\rho_z(\cdot,t) = (p_z(\cdot,t), s_z(\cdot,t))$, solución de (2.18) (sustituyendo μ_i por $\mu_{i,z}$). Luego por (2.57), usando (2.61) y procediendo como en (2.28), se tiene que

$$\begin{aligned}
|P_z(t)| \leq & \|p_z(\cdot,t)\|_{L^1} \\
& \leq \int_0^t |B_{p_z}(t-a)|\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{J_1}) \\
& + \int_t^\infty |p_0(a-t)|\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{J_2}) \\
& + \int_0^t \int_0^\infty |\gamma(a)|\,|p_z(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\sigma \quad (:= \mathbf{J_3}) \\
& + \int_0^t \int_0^a |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))s_z(a-\sigma,t-\sigma)|\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{J_4}) \\
& + \int_t^\infty \int_0^t |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))s_z(a-\sigma,t-\sigma)|\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a \quad (:= \mathbf{J_5}).
\end{aligned}$$

Ahora bien sustituyendo el valor de s_z, dado por (2.58), en $\mathbf{J_4}$ y $\mathbf{J_5}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J_4} + \mathbf{J_5} \leq & \int_0^t |B_{p_z,s_z}(t-a)| \Big(\int_0^a |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)|\,|\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))| \\
& \qquad \times |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,a-\sigma;\rho_z)|\,\mathrm{d}\sigma \Big)\mathrm{d}a \qquad (:= \mathbf{J^1_{4,5}}) \\
& + \int_0^t \Big(\int_0^a |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))| \\
& \qquad \times \Big(\int_0^{a-\sigma} |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,\eta;\rho_z)\gamma(a-\sigma-\eta)p_z(a-\sigma-\eta,t-\sigma-\eta)|\,\mathrm{d}\eta \Big) \mathrm{d}\sigma \Big) \mathrm{d}a \qquad (:= \mathbf{J^2_{4,5}}) \\
& + \int_t^\infty |s_0(a-t)| \Big(\int_0^t |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)|\,|\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))| \\
& \qquad \times |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,t-\sigma;\rho_z)|\,\mathrm{d}\sigma \Big)\mathrm{d}a \qquad (:= \mathbf{J^3_{4,5}}) \\
& + \int_t^\infty \Big(\int_0^t |\pi_z(a,t,\sigma;P_z)\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))| \\
& \qquad \times \Big(\int_0^{t-\sigma} |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,\eta;\rho_z)\gamma(a-\sigma-\eta)p_z(a-\sigma-\eta,t-\sigma-\eta)|\mathrm{d}\eta \Big) \mathrm{d}\sigma \Big) \mathrm{d}a. \qquad (:= \mathbf{J^4_{4,5}})
\end{aligned}$$

Acotemos $\mathbf{J^3_{4,5}}$. Como en (2.46), se tiene que

$$\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,t-\sigma;\rho_z) = \tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z)\ (\tilde{\pi}_z(a,t,\sigma;\rho_z))^{-1},$$

y

$$\begin{aligned}
\pi_z(a,t,&\sigma;P_z)\,(\tilde{\pi}_z(a,t,\sigma;\rho_z))^{-1} \\
&= \exp\left[-\int_0^\sigma |\mu_z(a-\eta,t-\eta,P_z(t-\eta))\,\mathrm{d}\eta\right] \exp\left[\int_0^\sigma \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right].
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J^3_{4,5}} \leq \int_t^\infty |s_0(a-t)|\, |\tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z)| \Bigg(\int_0^t \Bigg(\exp\left[\int_0^\sigma \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right] \\
\times \exp\left[-\int_0^\sigma |\mu_z(a-\eta,t-\eta,P_z(t-\eta))\mathrm{d}\eta\right] \mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))\Bigg)\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}a \\
= \int_t^\infty |s_0(a-t)|\, |\tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z)| \Bigg(\int_0^t \Bigg(\exp\left[\int_0^\sigma \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right] \\
\times -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\exp\left[-\int_0^\sigma |\mu_z(a-\eta,t-\eta,P_z(t-\eta))\mathrm{d}\eta\right]\right)\Bigg)\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Luego, procediendo como en (2.48), es decir aplicando el Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $t_1 \in (0,t)$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J^3_{4,5}} \leq \int_t^\infty |s_0(a-t)|\, |\tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z)| \exp\left[\int_0^{t_1} \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right] \\
\times \left(1-\exp\left[-\int_0^t |\mu_z(a-\eta,t-\eta,P_z(t-\eta))\mathrm{d}\eta\right]\right)\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$|\tilde{\pi}_z(a,t,t;\rho_z)| \leq \exp\left[-\int_0^t \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right],$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{J^3_{4,5}} &\leq \int_t^\infty |s_0(a-t)|\, \exp\left[-\int_{t_1}^t \lambda(a-\eta,t-\eta;p_z-s_z)\,\mathrm{d}\eta\right] \\
&\qquad \times \left(1-\exp\left[-\int_0^t |\mu_z(a-\eta,t-\eta,P_z(t-\eta))\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}a\right) \\
&\leq \int_t^\infty |s_0(a-t)|\,\mathrm{d}a = \int_0^\infty |s_0(a)|\,\mathrm{d}a = \|s_0\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbf{J^3_{4,5}} \leq \|s_0\|_{L^1}.$$

Realizando cálculos análogos para $\mathbf{J^1_{4,5}}$ obtenemos que

$$\mathbf{J^1_{4,5}} \leq \int_0^t |B_{p_z,s_z}(t-a)|\,\mathrm{d}a.$$

Estimemos $\mathbf{J^4_{4,5}}$. Primero se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-\sigma} |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,\eta;\rho_z)\gamma(a-\sigma-\eta)p_z(a-\sigma-\eta,t-\sigma-\eta)|\mathrm{d}\eta \\
&\qquad \underset{\sigma+\eta\rightsquigarrow\eta'}{=} \int_\sigma^t |\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,\eta'-\sigma;\rho_z)\gamma(a-\eta')p_z(a-\eta',t-\eta')|\mathrm{d}\eta'.
\end{aligned}$$

Por (2.49), sabemos que

$$\tilde{\pi}_z(a-\sigma,t-\sigma,\eta'-\sigma;\rho_z) = \exp\left[\int_0^{\sigma}\big(\mu_{2,z}(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))+\gamma(a-\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\right]$$
$$\times\exp\left[-\int_0^{\eta'}\big(\mu_{2,z}(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))+\gamma(a-\xi)\big)\mathrm{d}\xi\right]$$
$$\times\exp\left[-\int_{\sigma}^{\eta'}\lambda(a-\xi,t-\xi;\rho_z)\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J^4_{4,5}} \le \int_t^{\infty}\Bigg(\int_0^t\Bigg(&|\pi_z(a,t,\sigma;P_z)\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma))| \\
&\times\exp\left[\int_0^{\sigma}\big(\mu_{2,z}(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))+\gamma(a-\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\right] \\
&\times\int_{\sigma}^t\Bigg(\exp\left[-\int_0^{\eta'}\big(\mu_{2,z}(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))+\gamma(a-\xi)\big)\mathrm{d}\xi\right] \\
&\quad\times\exp\left[-\int_{\sigma}^{\eta'}\lambda(a-\xi,t-\xi;\rho_z)\,\mathrm{d}\xi\right]|\gamma(a-\eta')p_z(a-\eta',t-\eta')|\Bigg)\mathrm{d}\eta'\Bigg)\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}a \\
= \int_t^{\infty}\Bigg(\int_0^t\Bigg(&\exp\left[-\int_0^{\sigma}\mu_z(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))\,\mathrm{d}\xi\right]\mu_z(a-\sigma,t-\sigma,P_z(t-\sigma)) \\
&\times\int_{\sigma}^t\Bigg(\exp\left[-\int_0^{\eta'}\big(\mu_{2,z}(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))+\gamma(a-\xi)\big)\mathrm{d}\xi\right] \\
&\quad\times\exp\left[-\int_{\sigma}^{\eta'}\lambda(a-\xi,t-\xi;\rho_z)\,\mathrm{d}\xi\right]|\gamma(a-\eta')p_z(a-\eta',t-\eta')|\Bigg)\mathrm{d}\eta'\Bigg)\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}a \\
\le \int_t^{\infty}\Bigg(\int_0^t\Bigg(&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\exp\left[-\int_0^{\sigma}\mu_z(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))\,\mathrm{d}\xi\right]\right) \\
&\times\int_{\sigma}^t|\gamma(a-\eta')p_z(a-\eta',t-\eta')|\mathrm{d}\eta'\Bigg)\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Ahora bien intercambiando el orden de integración:

$$\left.\begin{array}{c} 0\le\sigma\le t \\ \sigma\le\eta'\le t\end{array}\right\}\rightsquigarrow\begin{array}{c} 0\le\eta'\le t \\ 0\le\sigma\le\eta',\end{array}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J^4_{4,5}} \le \int_t^{\infty}\Bigg(\int_0^t\Bigg(&|\gamma(a-\eta')||p_z(a-\eta',t-\eta')| \\
&\times\int_0^{\eta'}-\frac{d}{d\sigma}\left(\exp\left[-\int_0^{\sigma}\mu_z(a-\xi,t-\xi,P_z(t-\xi))\right]\right)\,\mathrm{d}\sigma\Bigg)\mathrm{d}\eta'\Bigg)\mathrm{d}a \\
\le \int_t^{\infty}\int_0^t&|\gamma(a-\eta')||p_z(a-\eta',t-\eta')|\mathrm{d}\eta'\,\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Y haciendo estos mismos cálculos para $\mathbf{J}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4,5}}$ se llega a

$$\mathbf{J}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4,5}} \leq \int_0^t \int_0^a |\gamma(a-\eta')||p_z(a-\eta', t-\eta')| \mathrm{d}\eta' \, \mathrm{d}a.$$

Por tanto, procediendo como en (2.29), llegamos a que

$$\mathbf{J}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4,5}} + \mathbf{J}^{\mathbf{4}}_{\mathbf{4,5}} \leq \int_0^t \int_0^\infty |\gamma(a)| \, |p_z(a,\sigma)| \mathrm{d}a \, r d\sigma.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
|P_z(t)| &\leq \|s_0\|_{L^1} + \int_0^t |B_{p_z,s_z}(t-a)| \, \mathrm{d}a + 2\gamma_\infty \int_0^t \|p_z(\cdot,\sigma)\|_{L^1} \, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \|p_0\|_{L^1} + \int_0^t |B_{p_z}(t-a)| \, \mathrm{d}a \\
&\leq |\rho_0|_1 + \int_0^t (|B_{p_z,s_z}(a)| + |B_{p_z}(a)|) \, \mathrm{d}a + 2\gamma_\infty \int_0^t \|p_z(\cdot,\sigma)\|_{L^1} \, \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Ahora bien, trivialmente se comprueba que

$$\int_0^t (|B_{p_z,s_z}(a)| + |B_{p_z}(a)|) \, \mathrm{d}a \leq C \int_0^t \log(|P_z(\sigma)| + e)|\rho_z(\cdot,\sigma)|_1 \, \mathrm{d}\sigma.$$

Luego, obtenemos que

$$|P_z(t)| \leq |\rho_0|_1 + 2\gamma_\infty \int_0^t |\rho_z(\cdot,\sigma)|_1 \, \mathrm{d}\sigma + C \int_0^t \log(|P_z(\sigma)| + e)|\rho_z(\cdot,\sigma)|_1 \, \mathrm{d}\sigma,$$

es decir, hemos llegado a una acotación del tipo que aparece en (2.30). Por tanto, existe una constante C dependiente sólo de $C(T)$ y del supremo de γ, tal que si denotamos por $r := \log(|\rho_0|_1 + e)$, se tiene que

$$|P_z(t)| \leq \exp\left(re^{C\,t}\right), \tag{2.64}$$

para toda $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$. □

Lema 2.5.5. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_5)$*. Sea la aplicación* G *definida en* (2.17)*, entonces se cumple que existe una constante* $\widetilde{C}$*, que depende sólo de los datos del problema, tal que*

$$\|G(z)\|_B \leq \widetilde{C}, \quad \forall z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+).$$

Demostración. La demostración es trivial gracias a la Nota 2.5.4. □

Sea el conjunto

$$W := \{z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+) : \ \|z\|_B \leq \widetilde{C}\}.$$

Así, gracias a Lema anterior se tiene que

$$G : W \longrightarrow W,$$

y nos basta con buscar el punto fijo en W.

Proposición 2.5.6. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$*. Dadas* $z_1, z_2 \in W$*, denotando por* $\rho_{z_1} = (p_{z_1}, s_{z_1})$ *y* $\rho_{z_2} = (p_{z_2}, s_{z_2})$ *las soluciones correspondientes de* (2.57) *y* (2.58)*, se tiene que existe una constante positiva* $M < 1$ *tal que*

$$|\rho_{z_1} - \rho_{z_2}|_V \leq M\|z_1 - z_2\|_B. \tag{2.65}$$

Demostración. Sea $t \in [0, T]$,

$$|\rho_{z_1}(\cdot,t) - \rho_{z_2}(\cdot,t)|_1 = \int_0^\infty |p_{z_1}(a,t) - p_{z_2}(a,t)|\,\mathrm{d}a + \int_0^\infty |s_{z_2}(a,t) - s_{z_2}(a,t)|.$$

Ahora bien, como hicimos en la demostración del Teorema 2.4.7, tomando las notaciones de (2.52) tenemos que

$$|\rho_{z_1}(\cdot,t) - \rho_{z_2}(\cdot,t)|_1 \leq \mathbf{I_1^*} + \mathbf{I_2^*} + \mathbf{I_{3,4}^*} + \mathbf{I_{5,6}^*} + \mathbf{I_7^{1}}^* + \mathbf{I_7^{2}}^* + \mathbf{I_7^{3}}^*,$$

con

$$\begin{aligned}
\mathbf{I_1^*} &:= \int_0^t |B_{p_{z_1}}(t-a)\,\pi_{z_1}(a,t,a;P_{z_1}) - B_{p_{z_2}}(t-a)\,\pi_{z_2}(a,t,a;P_{z_2})|\,\mathrm{d}a \\
\mathbf{I_2^*} &:= \int_t^\infty |p_0(a-t)|\,|\pi_{z_1}(a,t,t;P_{z_1}) - \pi_{z_2}(a,t,t;P_{z_2})\,\mathrm{d}a \\
\mathbf{I_{3,4}^*} &= \int_0^t \left(\int_0^\infty |\pi_{z_1}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P_{z_1})\mu_{z_1}(a,\sigma,P_{z_1}(\sigma))\,s_{z_1}(a,\sigma) \right. \\
&\qquad \left. - \pi_{z_2}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P_{z_2})\mu_{z_2}(a,\sigma,P_{z_2}(\sigma))\,s_{z_2}(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a \right) \mathrm{d}\sigma \\
\mathbf{I_{5,6}^*} &= \gamma_\infty \int_0^t \left(\int_0^\infty |\pi_{z_1}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P_{z_1})p_{z_1}(a,\sigma) \right. \\
&\qquad \left. - \pi_{z_2}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;P_{z_2})p_{z_2}(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a \right) \mathrm{d}\sigma \\
\mathbf{I_7^{1}}^* &= \int_0^t |B_{p_{z_1},s_{z_1}}(t-a)\,\tilde{\pi}_{z_1}(a,t,a;\rho_{z_1}) - B_{p_{z_2},s_{z_2}}(t-a)\,\tilde{\pi}_{z_2}(a,t,a;\rho_{z_2})|\,\mathrm{d}a \\
\mathbf{I_7^{2}}^* &= \int_t^\infty |s_0(a-t)|\,|\tilde{\pi}_{z_1}(a,t,t;\rho_{z_1}) - \tilde{\pi}_{z_2}(a,t,t;\rho_{z_2})|\,\mathrm{d}a \\
\mathbf{I_7^{3}}^* &= \gamma_\infty \int_0^t \left(\int_0^\infty |\tilde{\pi}_{z_1}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho_{z_1})p_{z_1}(a,\sigma) \right. \\
&\qquad \left. - \tilde{\pi}_{z_2}(a+t-\sigma,t,t-\sigma;\rho_{z_2})p_{z_2}(a,\sigma)|\,\mathrm{d}a \right) \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Las estimaciones de todas estas integrales se hacen de forma análoga a sus homólogas en la prueba del Teorema 2.4.7, teniendo en cuenta que en vez de utilizar las desigualdades (2.38) y (2.39), utilizamos (2.61) y (2.62), y gracias a que $z_1, z_2 \in W$ y (2.63), entonces por (2.56) se tiene que

$$|\mu_z(a,t,P)| \leq C, \text{ con } C \text{ constante independiente de } z.$$

Así, por ejemplo, para estimar $\mathbf{I_2^*}$, procederíamos como en (2.54), usando (2.61), y se obtiene que

$$\mathbf{I_2^*} \leq \frac{C(T)|\rho_0|_1}{k}\,|\rho_{z_1} - \rho_{z_2}|_V\; e^{kt} + \frac{M_1|\rho_0|_1}{k}\|z_1 - z_2\|_B e^{kt}.$$

Por tanto, llegamos a que

$$|\rho_{z_1}(\cdot,t)-\rho_{z_2}(\cdot,t)|_1 \leq \frac{C}{k}\,|\rho_{z_1}-\rho_{z_2}|_V\ e^{kt}+\frac{C'}{k}\|z_1-z_2\|_B e^{kt}.$$

Luego, haciendo k suficientemente grande, se tiene que

$$|\rho_{z_1}-\rho_{z_2}|_V \leq M\|z_1-z_2\|_B, \tag{2.66}$$

con $M<1$. □

Corolario 2.5.7. *Con las notaciones anteriores, para k suficientemente grande existe $M<1$ tal que*

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-kt}\left(|S_{z_1}(t)-S_{z_2}(t)|+|P_{z_1}(t)-P_{z_2}(t)|\right) \leq M\|z_1-z_2\|_B. \tag{2.67}$$

Demostración. Este resultado se tiene directamente del anterior ya que,

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-kt}\left(|S_{z_1}(t)-S_{z_2}(t)|+|P_{z_1}(t)-P_{z_2}(t)|\right) \leq |\rho_{z_1}-\rho_{z_2}|_V \leq M\|z_1-z_2\|_B.$$

□

Teorema 2.5.8. *Supongamos que se verifican las hipótesis $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$. Entonces, para $z_1,z_2\in W$, G definida en* (2.17) *se tiene que existe una constante $L<1$ tal que*

$$\|G(z_1)-G(z_2)\|_B \leq L\|z_1-z_2\|_B, \tag{2.68}$$

con $L<1$. Luego, se tiene que la aplicación G es contractiva y por tanto se llega a existencia y unicidad de solución del modelo (2.5).

Demostración. Dado $t\in[0,T]$, y $z\in\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, definimos la aplicación

$$\Theta_z(t) := n\,Y_0\int_0^t e^{m\tau}\ \exp[f_z(\tau)]\,\mathrm{d}\tau,$$

donde f_z está definida en (2.16), es decir

$$f_z(t)=\nu M_1\int_0^t P_z(s)\,\mathrm{d}s+\nu(M_2-M_1)\int_0^t S_z(s)\,\mathrm{d}s.$$

Luego, podemos escribir

$$G(z)(t)=\frac{Y_0\,e^{mt}\ \exp[f_z(t)]}{1+\Theta_z(t)}.$$

Así, se tiene que dado $z_1,z_2\in W$,

$$\begin{aligned}|G(z_1)(t)-G(z_2)(t)| &= \left|Y_0 e^{mt}\left(\frac{\exp[f_{z_1}(t)]}{1+\Theta_{z_1}(t)}-\frac{\exp[f_{z_2}(t)]}{1+\Theta_{z_2}(t)}\right)\right| \\ &= |Y_0|e^{mt}\left|\frac{\exp[f_{z_1}(t)]-\exp[f_{z_2}(t)]+\exp[f_{z_1}(t)]\Theta_{z_2}(t)-\exp[f_{z_2}(t)]\Theta_{z_1}(t)}{(1+\Theta_{z_1}(t))(1+\Theta_{z_2}(t))}\right|.\end{aligned}$$

Ya que,

$$1 + \Theta_z(t) \geq 1,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}|G(z_1)(t) - G(z_2)(t)| \leq |Y_0|e^{mt}\Big(&|\exp[f_{z_1}(t)] - \exp[f_{z_2}(t)]| \\ &+ |\exp[f_{z_1}(t)]\Theta_{z_2}(t) - \exp[f_{z_2}(t)]\Theta_{z_1}(t)|\Big).\end{aligned}$$

Por tanto, denotando

$$A := |\exp[f_{z_1}(t)] - \exp[f_{z_2}](t)|$$

y

$$B := |\exp[f_{z_1}(t)]\Theta_{z_2}(t) - \exp[f_{z_2}(t)]\Theta_{z_1}(t)|,$$

se llega a que

$$|G(z_1)(t) - G(z_2)(t)| \leq |Y_0|e^{mt}\,(A + B)\,.$$

Primero gracias a la Proposición 2.5.2, tenemos que, para toda $t \in [0, T]$,

$$f_z(t) \leq C,$$

con C independiente de z. Luego usando la desigualdad,

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+,$$

tenemos que

$$A = \exp[f_{z_1}(t)]\exp[f_{z_2}(t)]\,|\exp[-f_{z_2}(t)] - \exp[-f_{z_1}(t)]| \leq M\,|f_{z_2}(t) - f_{z_1}(t)|\,.$$

Por la definición de f_z y gracias a (2.67), se tiene que

$$\begin{aligned}|f_{z_2}(t) - f_{z_1}(t)| &\leq \nu M_1 \int_0^t e^{-ks}\left(|S_{z_1}(s) - S_{z_2}(s)| + |P_{z_1}(s) - P_{z_2}(s)|\right)e^{ks}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{M}{k}\|z_1 - z_2\|_B\, e^{kt}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$A \leq \frac{C}{k}\|z_1 - z_2\|_B\, e^{kt}.$$

Acotemos B, sustituyendo la expresión de $\Theta_z(t)$ en B, se llega

$$\begin{aligned}B = {}& nY_0\exp[f_{z_1}(t)]\exp[f_{z_2}(t)] \\ &\times\left|\int_0^t e^{m\eta}\left(\exp[f_{z_2}(\eta)]\exp[-f_{z_2}(t)] - \exp[f_{z_1}(\eta)]\exp[-f_{z_1}(t)]\right)\mathrm{d}\eta\right|.\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\exp[f_z(\eta)]\exp[-f_z(t)] = \exp\left[-\nu\, M_1\int_\eta^t P_z(s)\,\mathrm{d}s + \nu(M_1 - M_2)\int_\eta^t S_z(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

para cualquier $z \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$. Luego

$$B \leq \exp[f_{z_1}(t)]\exp[f_{z_2}(t)]e^{mT}$$
$$\times \left| \int_0^t \nu\, M_1 \left(\int_\eta^t |P_{z_1}(s) - P_{z_2}(s)|\,\mathrm{d}s \right) + \nu(M_1 - M_2) \left(\int_\eta^t |S_{z_1}(s) - S_{z_2}(s)|\,\mathrm{d}s \right) \right|.$$

Y análogamente como hicimos para A se tiene que

$$B \leq \frac{C}{k} \|z_1 - z_2\|_B\, e^{kt}.$$

Por consiguiente,

$$|G(z_1)(t) - G(z_2)(t)| \leq \frac{M}{k} \|z_1 - z_2\|_B\, e^{kt},$$

luego

$$\|G(z_1) - G(z_2)\|_B \leq \frac{M}{k} \|z_1 - z_2\|_B.$$

Así, se tiene que para un k suficientemente grande G es contractiva en W y por consiguiente tiene un único punto fijo en W. Ahora bien $W \subseteq \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$, y además es cerrado. Por tanto se tiene que la aplicación G tiene un único punto fijo en $\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}_+)$. Con lo cual obtenemos existencia y unicidad de solución del modelo (2.5). □

CAPÍTULO 3

Comportamiento asintótico de los equilibrios libres de enfermedad del modelo semilineal autónomo presa-depredador

3.1. Introducción

En este Capítulo vamos a estudiar el comportamiento asintótico de los equilibrios libres de enfermedad, i.e. aquellos equilibrios donde los individuos infectados desaparecen, del modelo (2.5), pero suponiendo que el problema es autónomo, semilineal, es decir β sólo depende de la edad, y la fuerza de la infección es de la forma

$$\lambda(a,t;i) := K(a)I(t).$$

Es decir, el problema cuyo comportamiento asintótico queremos estudiar es el siguiente:

$$(3.1)\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t}+\dfrac{\partial i}{\partial a}+\mu_1(a,P(t))i=K(a)I(t)s(a,t)-\gamma(a)i(a,t)-M_1 i(a,t)Y(t),\\ \dfrac{\partial s}{\partial t}+\dfrac{\partial s}{\partial a}+\mu_2(a,P(t))s=-K(a)I(t)s(a,t)+\gamma(a)i(a,t)-M_2 s(a,t)Y(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)=mY(t)-nY^2(t)+\nu M_1 I(t)Y(t)+\nu M_2 S(t)Y(t),\\ i(a,0)=i_0(a), s(a,0)=s_0(a), Y(0)=Y_0,\\ i(0,t)=q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\, i(a,t)\,\mathrm{d}a,\\ s(0,t)=\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)(s(a,t)\,+(1-q)\,i(a,t))\mathrm{d}a,\\ i(a,t),s(a,t)\longrightarrow 0,\ \text{cuando } a\to+\infty. \end{cases}$$

Para conseguir el objetivo de este Capítulo vamos a utilizar la teoría de ecuaciones semilineales de evolución. Es por ello que vamos a considerar el problema (3.1) como una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de Banach apropiado, es decir

$$\phi' = B\phi + C(\phi), \quad \phi(0) = \phi_0,$$

donde

$$\phi = (i(\cdot,t), s(\cdot,t), Y(t)) .$$

Puesto que por el Capítulo anterior sabemos que $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+$, parece lógico considerar como espacio de Banach $X = L^1(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+$.
Una vez que comprobemos que efectivamente el operador B genera un semigrupo continuo, probaremos que el principio de linealización (Prop. 1.3.11) funciona en este modelo. Este principio aplicado a problemas semilineales de la dinámica de poblaciones fue, quizás, iniciado por los trabajos de J. Prüß [80–82], y continuado por G. F. Webb [89].

El resultado principal que se obtiene es la posibilidad de tener un equilibrio libre de enfermedad con individuos sanos, es decir el depredador puede ayudar a detener la enfermedad según su nivel de propagación.

El Capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la Sección 3.2 vamos a formular el problema (3.1) en un problema de Cauchy abstracto, comprobando efectivamente, que el operador lineal asociado a dicha formulación es el generador de un semigrupo.

En la Sección 3.3 daremos algunas condiciones para la existencia de equilibrios libres de enfermedad, es decir buscaremos la existencia de solución donde los individuos infectados desaparezcan del problema estacionario asociado a (3.1). Es claro que el equilibrio trivial $(0, 0, 0)$ existe bajo cualquier condición.

En la Sección 3.4, comprobaremos que efectivamente el principio de estabilidad linealizado funciona. Demostraremos que el signo de la parte real de los autovalores del problema linealizado asociado a cada equilibrio nos dará la estabilidad o inestabilidad de dichos equilibrios.

Para terminar el Capítulo veremos un caso particular de estabilidad local de un equilibrio donde los individuos infectados desaparecen mientras que los individuos sanos perduran. Es decir, el depredador puede ayudar a controlar la enfermedad.

3.1.1. Hipótesis

Además de la hipótesis $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$ supuestas en el Capítulo anterior vamos a suponer:

$(\mathcal{H}_6)$ Para $i = 1, 2$, las funciones $\mu_i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ son continuas, y continuamente diferenciables y estrictamente crecientes con respecto al segundo argumento, y además verifican

$$\lim_{P\to+\infty} \mu_i(a, P) = +\infty \tag{3.2}$$

$$\mu_i(a, P) \geq \underline{\mu_i} > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

con $\underline{\mu_1} \geq \underline{\mu_2}$.

3.2. Reformulación del problema en un problema abstracto.

Nuestro interés en este Capítulo es intentar aplicar el principio de estabilidad linealizado. Por esta razón lo primero que vamos a hacer es escribir el problema (3.1) como un problema de Cauchy abstracto.

Consideremos los espacios de Banach

$$X := L^1(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$$
$$Z := W^{1,1}(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}.$$

El problema (3.1) puede ser escrito como un problema de Cauchy abstracto en X de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{\mathrm{d}t} = B\phi + C(\phi), \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde B es el operador lineal

$$\begin{array}{rccc} B: & D(B) \subset X & \longrightarrow & X \\ & \phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3) & \mapsto & B\phi \end{array}$$

con

$$B\phi = \begin{pmatrix} -\phi_1' \\ -\phi_2' \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$D(B) := \{\phi \in Z, (\phi_1, \phi_2)(0) = F(\phi_1, \phi_2)\}$$

y

$$F(\phi_1, \phi_2) := \begin{pmatrix} q \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a \\ \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\left(\phi_2(a) + (1-q)\phi_1(a)\right)\mathrm{d}a \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

El operador no lineal C es definido como,

$$C : X \to X$$
$$\phi \mapsto C(\phi)$$

donde para casi toda $a \in (0, +\infty)$,

$$C(\phi)(a) = \begin{pmatrix} -\mu_1(a,\Phi)\phi_1(a) + K(a)\Phi_1\phi_2(a) - \gamma(a)\phi_1(a) - M_1\phi_1(a)\phi_3 \\ -\mu_2(a,\Phi)\phi_2(a) - K(a)\Phi_1\phi_2(a) + \gamma(a)\phi_1(a) - M_2\phi_2(a)\phi_3 \\ m\phi_3 - n\phi_3^2 + \nu M_1\Phi_1\phi_3 + \nu M_2\Phi_2\phi_3 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

con

$$\Phi_i := \int_0^\infty \phi_i(a)\,\mathrm{d}a \text{ para } i = 1, 2$$

y

$$\Phi := \Phi_1 + \Phi_2.$$

Ahora en el resto de la Sección veremos que efectivamente B es el generador de un $\mathcal{C}_0$-semigrupo de operadores lineales en el espacio de Banach X.

Para ello vamos a aplicar el Teorema 1.2.4. Luego es suficiente que B sea cerrado y $D(B)$ denso en X, y que el conjunto resolvente, $\rho(B)$, de B contenga el rayo $(\omega, +\infty)$ verificándose

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \quad \text{para } \lambda > \omega.$$

Lema 3.2.1. *$D(B)$ es denso en X*

Demostración. Veamos que podemos aplicar el Teorema 1.5.2.

Para demostrar la densidad nos podemos olvidar de la tercera componente de $D(B)$, es decir ϕ_3, pues ésta recorre todo $\mathbb{R}$.
Así, que consideremos los espacios:

$$\widetilde{X} := L^1(\mathbb{R}_+)^2,$$
$$\widetilde{Z} := W^{1,1}(\mathbb{R}_+)^2,$$

y el conjunto

$$\widetilde{D(B)} := \{\phi \in \widetilde{Z}, (\phi_1, \phi_2)(0) = F(\phi_1, \phi_2)\}.$$

Veamos entonces que estamos en las hipótesis del Teorema 1.5.2.

Tenemos efectivamente que $\widetilde{Z} \hookrightarrow \widetilde{X}$ con inyección continua.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} l : \widetilde{Z} &\to \mathbb{R}^2 \\ \phi &\mapsto (\phi_1(0), \phi_2(0)) \end{aligned}$$

que está bien definida, puesto que si $\phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)^2$ entonces ϕ admite un representante continuo y entonces tiene sentido hablar de $\phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Trivialmente tenemos que l es una aplicación lineal y utilizando la desigualdad (véase por ejemplo el Teorema VIII. 7. en [12])

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,1}} \; \forall u \in W^{1,1},$$

continua.
Ahora bien, también se verifica que

$$l^{-1}(0) \equiv W_0^{1,1}(\mathbb{R}_+)^2,$$

luego $l^{-1}(0)$ es denso en X.
Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} m : \widetilde{X} &\to \mathbb{R}^2 \\ \phi &\mapsto (m_1(\phi), m_2(\phi)) \end{aligned}$$

con

$$m_1(\phi) = q\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a$$
$$m_2(\phi) = \int_0^\infty \beta(a)\left(\phi_2(a) + (1-q)\phi_1(a)\right)\,\mathrm{d}a.$$

Trivialmente, se tiene que m es una aplicación lineal y continua en $\widetilde{X}$ (pues $\beta \in L^\infty$).

Además, se observa que $\widetilde{D(B)}$ puede escribirse como:

$$\widetilde{D(B)} := \{\phi \in \widetilde{Z}, l(\phi) = m(\phi)\}.$$

Así, para terminar de demostrar que $\widetilde{D(B)}$ es denso en $\widetilde{X}$, nos falta ver que $\{l_1, l_2\}$ son linealmente independientes. Para ello, supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \equiv 0,$$

luego

$$\alpha_1 l_1(\phi) + \alpha_2 l_2(\phi) \equiv 0, \text{ para todo } \phi \in Y.$$

Por consiguiente

$$\alpha_1\phi_1(0) + \alpha_2\phi_2(0) = 0, \text{ para todo } \phi \in Y.$$

Por tanto, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, es decir que $\{l_1, l_2\}$ son linealmente independientes.

Luego hemos probado que podemos aplicar el Teorema 1.5.2 y entonces $\widetilde{D(B)}$ es denso en $\widetilde{X}$. Por consiguiente, se tiene que $D(B)$ es denso en X. $\square$

Lema 3.2.2. *El operador B es cerrado.*

Demostración. Para ver que B es cerrado, tenemos que demostrar que dado $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(B)$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \phi_n \to \phi \text{ en } X \\ B\phi_n \to \psi \text{ en } X \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi \in D(B) \\ B\phi \equiv \psi. \end{array}\right.$$

Luego sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(B)$ tal que $\phi_n \to \phi$ en X y $B(\phi_n) \to \psi$ en X, entonces, por la definición del operador B, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\phi_n)_i &\to \phi_i \text{ en } L^1(\mathbb{R}_+),\ i = 1,2 \\ -(\phi_n)_i' &\to \psi_i \text{ en } L^1(\mathbb{R}_+),\ i = 1,2 \\ (\phi_n)_3 &\to \phi_3 \text{ en } \mathbb{R}, \\ \psi_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En particular ya que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(B)$, se tiene que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}$, luego $\phi_i' = -\psi_i$ para $i = 1,2$.
Por tanto tenemos que

$$\left\{\begin{array}{l} \phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R} \\ \phi_i' = -\psi_i,\ i = 1,2 \\ \psi_3 \equiv 0. \end{array}\right.$$

Veamos que $\phi \in D(B)$, y después ya tendremos que $B\phi \equiv \psi$. Hemos visto que

$$(\phi_n)_i \to \phi_i \text{ en } W^{1,1}(\mathbb{R}_+),\ i = 1, 2. \tag{3.9}$$

Luego, en particular

$$(\phi_n)_i(0) \to (\phi)_i(0) \text{ en } \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, se llega a

$$(\phi_n)_1(0) = q \int_0^\infty \beta(a)(\phi_n)_1(a)\,\mathrm{d}a \to q \int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a$$

$$(\phi_n)_2(0) = \int_0^\infty \beta(a)((\phi_n)_2(a) + (1-q)(\phi_n)_1(a))\,\mathrm{d}a \to \int_0^\infty \beta(a)\phi_2(a) + (1-q)\phi_1(a))\,\mathrm{d}a.$$

Por consiguiente $\phi \in D(B)$ y $B\phi = \psi$, luego B es cerrado. □

Lema 3.2.3. *El conjunto resolvente de B, $\rho(B)$, contiene un rayo $(\omega, +\infty)$ con*

$$\omega = \beta_\infty, \quad \textit{donde } \beta_\infty = \sup_{a \in (0,+\infty)} (\beta(a))$$

y tal que

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \le \frac{1}{(\lambda - \omega)} \quad \textit{para } \lambda > \omega.$$

Demostración. Debemos probar que existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que dada $f \in X$, para cualquier $\lambda > \omega$ existe $\phi \in D(B)$ verificando $(\lambda I - B)\phi = f$ y además la aplicación

$$(\lambda I - B)^{-1} : X \to D(B) \text{ es continua,}$$

con

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \le \frac{1}{(\lambda - \omega)} \quad \text{para } \lambda > \omega.$$

Sea $f \in X$, nos planteamos el problema:

$$(\lambda I - B)\phi = f, \quad \phi \in D(B), \tag{3.10}$$

luego

$$\begin{cases} \lambda\phi_1 + \phi_1' = f_1, \\ \lambda\phi_2 + \phi_2' = f_2, \\ \lambda\phi_3 = f_3, \end{cases} \tag{3.11}$$

con

$$\begin{cases} \phi_1(0) = q \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a \\ \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)(\phi_2(a) + (1-q)\phi_1(a))\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3.12}$$

Resolviendo, se llega (supuesto $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} \phi_1(a) = e^{-\lambda a}\left(\phi_1(0) + \int_0^a e^{\lambda s} f_1(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ \phi_2(a) = e^{-\lambda a}\left(\phi_2(0) + \int_0^a e^{\lambda s} f_2(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ \phi_3 = \dfrac{1}{\lambda} f_3. \end{cases} \tag{3.13}$$

Sustituyendo $(3.13)_1$ en $(3.12)_1$, se tiene

$$\left(1 - q\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s\right)\phi_1(0) = q\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda\tau} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

Por tanto existe $\phi_1(0)$ si

$$\left(1 - q\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s\right) \neq 0.$$

Y esto se cumple, si por ejemplo

$$\lambda \in (q\beta_\infty, +\infty). \tag{3.14}$$

En este caso se tiene que

$$\phi_1(0) = \frac{q\displaystyle\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda\tau} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s}{1 - q\displaystyle\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s}.$$

Y por consiguiente

$$\phi_1(a) = e^{-\lambda a}\left(\frac{q\displaystyle\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda\tau} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s}{\left(1 - q\displaystyle\int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s\right)} + \int_0^a e^{\lambda s} f_1(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{3.15}$$

Veamos cuándo existe ϕ_2.
Sustituimos $(3.13)_2$ en $(3.12)_2$, y suponemos que existe ϕ_1. Entonces

$$\left(1 - \int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\mathrm{d}s\right)\phi_2(0) = \int_0^\infty \beta(s)\left(e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda\tau} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau + (1-q)\phi_1(s)\right)\mathrm{d}s.$$

Por tanto existe $\phi_2(0)$ si

$$\left(1 - \int_0^\infty \beta(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s\right) \neq 0,$$

en particular si $\lambda > \beta_\infty$. Luego, si

$$\lambda \in (\beta_\infty, +\infty) \tag{3.16}$$

existen $\phi_1(0), \phi_2(0)$, y en este caso

$$\phi_2(0) = \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \beta(s) \left(e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda\tau} f_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) + (1-q)\phi_1(s) \right) \mathrm{d}s}{1 - \displaystyle\int_0^{\infty} \beta(s) e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s},$$

y por tanto

$$\phi_2(a) = e^{-\lambda a} \left(\frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \beta(s) \left(e^{-\lambda s} \int_0^s e^{\lambda\tau} f_2(\tau) \mathrm{d}\tau + (1-q)\phi_1(s) \right) \mathrm{d}s}{1 - \displaystyle\int_0^{\infty} \beta(s) e^{-\lambda s} \mathrm{d}s} + \int_0^a e^{\lambda s} f_2(s) \mathrm{d}s \right). \tag{3.17}$$

Así, gracias a (3.14) y (3.16), se tiene que

$$\forall \lambda \in (\beta_\infty, +\infty) \text{ existe } \phi \in D(B) \text{ y además } R(\lambda I - B) \equiv X.$$

Nos falta ver que $(\lambda I - B)^{-1}$ es continua $\forall \lambda \in (\beta_\infty, +\infty)$. Como se trata de un operador lineal veamos que está acotado.
Sea $f \in X$ y $\lambda \in (\beta_\infty, +\infty)$, luego

$$\|(\lambda I - B)^{-1} f\| = \|\phi\|_X,$$

con $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ definida por $(3.13)_3$, (3.15) y (3.17).
Luego por la definición de la norma en X tenemos que

$$\|(\lambda I - B)^{-1} f\| = \int_0^{\infty} (|\phi_1(a)| + |\phi_2(a)|)\, \mathrm{d}a + |\phi_3|.$$

Ahora bien, por (3.13), se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} (|\phi_1(a)| + |\phi_2(a)|) \mathrm{d}a \\ &\qquad \le \int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \left(|\phi_1(0)| + |\phi_2(0)| + \int_0^a e^{\lambda s} (|f_1(s)| + |f_2(s)|)\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{3.18}$$

$\phi \in D(B)$, por tanto $\phi_1(0)$ y $\phi_2(0)$ verifican las expresiones $(3.12)_1$ y $(3.12)_2$ respectivamente, luego

$$\begin{aligned} |\phi_1(0)| + |\phi_2(0)| &\le \int_0^{\infty} \beta(a) |\, (|\phi_1(a)| + |\phi_2(a)|)\, \mathrm{d}a \le \beta_\infty \int_0^{\infty} (|\phi_1(a)| + |\phi_2(a)|)\, \mathrm{d}a \\ &\le \beta_\infty \|\phi\|_X. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \int_0^a e^{\lambda s} (|f_1(s)| + |f_2(s)|)\, \mathrm{d}s) \mathrm{d}a \\ &\qquad\qquad \left[\left. \begin{array}{l} 0 \le s \le a \\ 0 \le a \le \infty \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} s \le a \le \infty \\ 0 \le s \le \infty \end{array} \right] \\ &\quad = \int_0^{\infty} e^{\lambda s} (|f_1(s)| + |f_2(s)|) \left(\int_s^{\infty} e^{-\lambda a}\, \mathrm{d}a \right) \mathrm{d}s \\ &\quad = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{\lambda s} (|f_1(s)| + |f_2(s)|) e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (|f_1(s)| + |f_2(s)|)\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

y

$$|\phi_3| = \frac{1}{\lambda}|f_3|.$$

Luego sustituyendo en (3.18) y por la definición de la norma de X, tenemos que

$$\|\phi\|_X \leq \beta_\infty \|\phi\|_X \int_0^\infty e^{-\lambda a}\,\mathrm{d}a + \frac{1}{\lambda}\|f\|_X.$$

Por tanto

$$\|\phi\|_X \leq \frac{1}{\lambda - \beta_\infty}\|f\|_X, \quad \forall\lambda > \beta_\infty.$$

Luego

$$\|(\lambda I - B)^{-1} f\| \leq \frac{1}{\lambda - \beta_\infty}\|f\|_X.$$

Consecuentemente hemos visto que $(\lambda I - B)^{-1}$ es continua y además

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \beta_\infty}.$$

□

Ahora por los Lemas 3.2.1–3.2.3, se tiene que B es el generador de un $\mathcal{C}^0$-semigrupo.

3.3. Existencia de soluciones de equilibrio libres de enfermedad

El objetivo de esta Sección es buscar soluciones estacionarias del problema (3.1) cuando los infectados desaparecen, es decir de equilibrios del tipo $(0, s^*, Y^*)$.
Así en primer lugar nos planteamos el problema estacionario correspondiente de (3.1)

$$\text{(3.19)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i^*}{\mathrm{d}a}(a) + \mu_1(a, P^*)i^*(a) = I^*K(a)s^*(a) - \gamma(a)i^*(a) - M_1 i^*(a)Y^*, \\ \dfrac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}a}(a) + \mu_2(a, P^*)s^*(a) = -I^*K(a)s^*(a) + \gamma(a)i^*(a) - M_2 s^*(a)Y^*, \\ 0 = mY^* - nY^{*2} + \nu M_1 I^* Y^* + \nu M_2 S^* Y^*, \\ i^*(0) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\, i^*(a)\,\mathrm{d}a, \\ s^*(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\big(\, s^*(a) \,+ (1-q)\, i^*(a)\,\big)\mathrm{d}a. \end{cases}$$

Estudiamos la existencia de equilibrio en el caso en el que los infectados desaparezcan, es decir $I^* \equiv 0$, luego $i^*(a) = 0$ e. c. t. $a \in (0, +\infty)$. Luego tenemos

$$\text{(3.20)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}a}(a) + \mu_2(a, S^*)s^*(a) = -M_2 s^*(a)Y^*, \\ 0 = mY^* - nY^{*2} + \nu M_2 S^* Y^*, \\ s^*(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)s^*(a)\,\mathrm{d}a. \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación para Y^* tenemos que ó bien

$$Y^* = 0,$$

ó bien

$$Y^* = \frac{m + \nu M_2 S^*}{n}.$$

Y resolviendo la ecuación para s^* se tiene que

$$s^*(a) = s^*(0) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma - M_2 Y^* a\right]. \tag{3.21}$$

Ahora bien, como se debe verificar la condición inicial, sustituyendo se llega a que

$$s^*(0)\left(1 - \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma - M_2 Y^* a\right] \mathrm{d}a\right) = 0. \tag{3.22}$$

Caso $\mathbf{Y^* = 0}$:
En este caso la condición (3.22) se convierte en

$$s^*(0)\left(1 - \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a\right) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación tenemos dos posibles soluciones:

$$s^*(0) = 0 \tag{3.23}$$

ó

$$\int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a = 1. \tag{3.24}$$

Si se verifica (3.23), por (3.21) se tiene $s^* \equiv 0$ y el punto de equilibrio resultante es $(0, 0, 0)$.

Busquemos entonces otro equilibrio donde los individuos susceptibles no desaparezcan, es decir debemos dar condiciones para que exista $S^* \in (0, +\infty)$ verificando (3.24). Entonces, integrando (3.21) con respecto a la variable a, teniendo en cuenta que en este caso $Y^* = 0$, obtenemos que

$$s^*(0) = \frac{S^*}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a}.$$

Sustituyendo en (3.21) los valores de S^* y $s^*(0)$ tendremos el punto de equilibrio $(0, s^*(a), 0)$, con

$$s^*(a) = \frac{S^*}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^\tau \mu_2(\tau, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}\tau} \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\,\mathrm{d}\sigma\right]. \tag{3.25}$$

Así vamos a dar alguna condición para la existencia de $S^* \in (0, +\infty)$ tal que verifica (3.24). Esto es equivalente a la siguiente condición; denotando por R la aplicación

$$R(S) := \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a, \tag{3.26}$$

y debemos encontrar un $S^* \in (0, +\infty)$ tal que $R(S^*) = 1$.

La función R es usualmente conocida como la *tasa de reproducción neta* de los individuos susceptibles si no hubiese enfermedad ni depredador.

Es fácil comprobar que la función R es decreciente. En efecto, se tiene que

$$R'(S) = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma\right] \left(-\int_0^a \frac{\partial \mu_2}{\partial S}(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}a < 0,$$

pues μ_2 es estrictamente creciente en la segunda variable.
Por tanto $R(S) \leq R(0)$ para toda $S \in (0, +\infty)$. Además

$$\lim_{S \to +\infty} R(S) = 0,$$

ya que β está acotada y la hipótesis (3.2).

Luego una condición necesaria y suficiente para la existencia de S^* tal que se verifique (3.24) es que

$$\boxed{R(0) = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, 0)\, \mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a > 1.}$$

Luego si $R(0) > 1$ se tiene que existe un único $S^* \in (0, +\infty)$ tal que $R(S^*) = 1$, y por tanto la existencia del equilibrio $(0, s^*(a), 0)$.

Caso $\mathbf{Y}^* = \dfrac{\mathbf{m} + \nu \mathbf{M_2 S}^*}{\mathbf{n}}$:
En este caso la condición (3.22) se convierte en

$$s^*(0)\left(1 - \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S^*)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a - \frac{\nu M_2^2 S^*}{n} a\right] \mathrm{d}a\right) = 0. \tag{3.27}$$

Si $s^*(0) = 0$, entonces por (3.21) $s^* \equiv 0$ y se obtiene el punto de equilibrio $\left(0, 0, \dfrac{m}{n}\right)$.

Para la existencia de otro punto de equilibrio donde existan individuos susceptibles y depredador, debemos encontrar $\widetilde{S} \in (0, +\infty)$ tal que $\widetilde{R}(\widetilde{S}) = 1$ con

$$\widetilde{R}(S) = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a - \frac{\nu M_2^2 S}{n} a\right] \mathrm{d}a. \tag{3.28}$$

Ahora bien, $\widetilde{R}$ es una función estrictamente decreciente, puesto que

$$\begin{aligned} \widetilde{R}'(S) = \int_0^\infty &\beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a - \frac{\nu M_2^2 S}{n} a\right] \\ &\times \left(-\int_0^a \frac{\partial \mu_2}{\partial S}(\sigma, S)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{\nu M_2^2}{n} a\right) \mathrm{d}a < 0. \end{aligned}$$

Luego $\widetilde{R}(S) \leq \widetilde{R}(0)$ para toda $S \in (0, +\infty)$.
Además $\lim_{S \to +\infty} \widetilde{R}(S) = 0$. Por tanto, para que exista $\widetilde{S} \in (0, +\infty)$ tal que $\widetilde{R}(\widetilde{S}) = 1$, se debe verificar que

$$\boxed{\widetilde{R}(0) = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, 0)\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a\right] \mathrm{d}a > 1.} \tag{3.29}$$

Por consiguiente, si tenemos que $\widetilde{R}(0) > 1$, se tiene que existe una única $\widetilde{S} \in (0, +\infty)$ tal que $\widetilde{R}(\widetilde{S}) = 1$, y tendremos que

$$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$

es un punto estacionario con

$$\tilde{s}(a) = \widetilde{S} \frac{\exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} a - \frac{\nu M_2^2 \widetilde{S}}{n} a\right]}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^\tau \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\, \mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n} \tau - \frac{\nu M_2^2 \widetilde{S}}{n} \tau\right] \mathrm{d}\tau}. \tag{3.30}$$

Podemos resumir las existencias de los puntos de equilibrio en el siguiente Teorema, teniendo en cuenta que se verifica:

$$\widetilde{R}(0) < R(0).$$

Teorema 3.3.1. *Sean las funciones R y $\widetilde{R}$, definidas en (3.26) y (3.28), respectivamente. Entonces*

- *Si $R(0) \leq 1$, entonces*
$$(0, 0, 0) \ \ y \ \left(0, 0, \frac{m}{n}\right)$$
son los únicos puntos estacionarios desapareciendo los infectados.

- *Si $\widetilde{R}(0) \leq 1 < R(0)$, entonces*
$$(0, 0, 0), \ \left(0, 0, \frac{m}{n}\right) \ y \ (0, s^*(a), 0)$$
son los únicos puntos estacionarios desapareciendo los infectados, con s^* definido en (3.25).

- *Si $\widetilde{R}(0) > 1$, entonces*
$$(0, 0, 0), \ \left(0, 0, \frac{m}{n}\right), \ (0, s^*(a), 0) \ \ y \ \left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$
son los únicos puntos estacionarios desapareciendo los infectados, con s^* y $\tilde{s}$ definidos en (3.25) y en (3.30), respectivamente.

3.4. Estabilidad e inestabilidad local de los equilibrios libres de enfermedad

En esta Sección vamos a aplicar el principio de estabilidad linealizado (véase Proposición 1.3.11).

Para ello volvemos a considerar la forma abstracta del problema (3.4), es decir

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{\mathrm{d}t} = B\phi + C(\phi), \\ \phi(0) = \phi_0. \end{cases}$$

3.4.1. El principio de estabilidad linealizado

Si C es continuamente Fréchet diferenciable, para estudiar la estabilidad de un equilibrio cualquiera, ϕ^*, podemos aplicar el principio de estabilidad linealizado (véase Proposición 1.3.11)). Y en este caso, la estabilidad de dicho equilibrio depende del espectro del operador

$$B_{\phi^*} := B + C'(\phi^*).$$

Por tanto consideramos un equilibrio cualquiera, ϕ^*, de los estudiados en la Sección 3.3. Calculemos formalmente la derivada del operador C en el punto ϕ^*.
Luego dado $\phi \in X$:

$$\begin{aligned}
(C'(\phi^*))_1\phi(a) &= -\frac{\partial \mu_1}{\partial P}(a,\Phi^*)\Phi\phi_1^*(a) - \mu_1(a,\Phi^*)\phi_1(a) + \Phi_1^* K(a)\phi_2(a) \\
&\quad + \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) - \gamma(a)\phi_1(a) - M_1\phi_1(a)\phi_3^* - M_1\phi_1^*(a)\phi_3, \\
(C'(\phi^*))_2\phi(a) &= -\frac{\partial \mu_2}{\partial P}(a,\Phi^*)\Phi\phi_2^*(a) - \mu_2(a,\Phi^*)\phi_2(a) - \Phi_1^* K(a)\phi_2(a) \\
&\quad - \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) + \gamma(a)\phi_1(a) - M_2\phi_2(a)\phi_3^* - M_2\phi_2^*(a)\phi_3, \\
(C'(\phi^*))_3\phi(a) &= m\phi_3 - 2n\phi_3\phi_3^* + \nu M_1\Phi_1\phi_3^* + \nu M_1\Phi_1^*\phi_3 + \nu M_2\Phi_2\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2^*\phi_3.
\end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba que ésta es la derivada Fréchet y que efectivamente el operador C es continuamente Fréchet diferenciable. Ahora bien, a partir de ahora supondremos que $\gamma \equiv 0$ y gracias a que estamos estudiando los equilibrios libres de enfermedad, i.e. $\phi_1^* = 0$, nos queda:

$$\begin{aligned}
(C'(\phi^*))_1\phi(a) &= -\mu_1(a,\Phi_2^*)\phi_1(a) + \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) - M_1\phi_1(a)\phi_3^*, \\
(C'(\phi^*))_2\phi(a) &= -\frac{\partial \mu_2}{\partial P}(a,\Phi_2^*)\Phi\phi_2^*(a) - \mu_2(a,\Phi_2^*)\phi_2(a) - \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) \\
&\quad - M_2\phi_2(a)\phi_3^* - M_2\phi_2^*(a)\phi_3, \\
(C'(\phi^*))_3\phi(a) &= m\phi_3 - 2n\phi_3\phi_3^* + \nu M_1\Phi_1\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2^*\phi_3.
\end{aligned}$$

Nótese que $C'(\phi^*)$ se puede descomponer de la manera siguiente

$$C'(\phi^*)\phi(a) := \begin{pmatrix} \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) \\ -\dfrac{\partial \mu_2}{\partial P}(a,\Phi_2^*)\Phi\phi_2^*(a) - \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) - M_2\phi_2^*(a)\phi_3 \\ m\phi_3 - 2n\phi_3\phi_3^* + \nu M_1\Phi_1\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2^*\phi_3 \end{pmatrix} \qquad (:= D_{1,\phi^*}\phi(a))$$

$$+ \begin{pmatrix} -\mu_1(a,\Phi_2^*)\phi_1(a) - M_1\phi_1(a)\phi_3^* \\ -\mu_2(a,\Phi_2^*)\phi_2(a) - M_2\phi_2(a)\phi_3^* \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (:= D_{2,\phi^*}\phi(a)).$$

A continuación procederemos de la forma siguiente. Ya que

$$B_{\phi^*} = B + D_{1,\phi^*} + D_{2,\phi^*}$$

1. Probaremos que el operador D_{1,ϕ^*} es compacto. De donde seguirá (véase Prop. 1.3.8) que
$$\omega_1(B_{\phi^*}) = \omega_1(B + D_{2,\phi^*}).$$
2. Justificaremos que $\omega_1(B_{\phi^*}) < 0$, etapa habitual en problemas de dinámica de poblaciones estructurados en edad.
3. Reduciremos el problema al análisis del signo de la parte real de ciertos autovalores (aquellos cuya parte real sea mayor que $\omega_1(B_{\phi^*})$) del operador B_{ϕ^*}.

Lema 3.4.1. *D_{1,ϕ^*} es un operador compacto.*

Demostración. Tenemos que ver que dado cualquier conjunto $A \subset X$ acotado entonces $D_{1,\phi^*}(A)$ es relativamente compacto.

Lo primero que vamos a hacer es separar el operador D_{1,ϕ^*} es dos partes: una contenida en $L^1(0,+\infty;\mathbb{R}^3)$ y otra parte en $\mathbb{R}^3$, es decir

$$D_{1,\phi^*}\phi(a) := \begin{pmatrix} \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) \\ -\dfrac{\partial\mu_2}{\partial P}(a,\Phi_2^*)\Phi\phi_2^*(a) - \Phi_1 K(a)\phi_2^*(a) - M_2\phi_2^*(a)\phi_3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (:= D^1_{1,\phi^*}\phi(a))$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\phi_3 - 2n\phi_3\phi_3^* + \nu M_1\Phi_1\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2\phi_3^* + \nu M_2\Phi_2^*\phi_3 \end{pmatrix} \qquad (:= D^2_{1,\phi^*}\phi(a)).$$

Trivialmente, el operador $D^2_{1,\phi^*} : X \to \mathbb{R}^3$ es compacto, pues su imagen está contenida en un espacio de dimensión finita.

Para comprobar la compacidad del operador $D^1_{1,\phi^*} : A \subset X \to L^1(0,+\infty;\mathbb{R}^3)$, vamos a intentar aplicar el Criterio de Fréchet-Kolmogorov en L^1, (véase [12, Teorema IV.25]). Es decir debemos demostrar que dado $\phi \in A$ con $A \subset X$ acotado se verifica

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\int_0^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a) - D^1_{1,\phi^*}\phi(a+h)|\,\mathrm{d}a = 0$ uniformemente para $\phi \in A$ ($\phi(a+h)$ será tomada 0 si $a+h<0$).
2. $\displaystyle\lim_{h\to\infty}\int_h^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a)|\,\mathrm{d}a = 0$ uniformemente para $\phi \in A$.

Demostremos 1,

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\int_0^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a) - D^1_{1,\phi^*}\phi(a+h)|\,\mathrm{d}a \\ &\quad\le \lim_{h\to 0}\bigg(2\Phi_1\int_0^\infty |K(a)\phi_2^*(a) - K(a+h)\phi_2^*(a+h)|\,\mathrm{d}a \\ &\qquad + |\Phi|\int_0^\infty \left|\frac{\partial\mu_2}{\partial P}(a,\Phi_2^*)\phi_2^*(a) - \frac{\partial\mu_2}{\partial P}(a+h,\Phi_2^*)\phi_2^*(a+h)\right|\mathrm{d}a \\ &\qquad + |\phi_3|M_2\int_0^\infty |\phi_2^*(a) - \phi_2^*(a+h)|\,\mathrm{d}a\bigg). \end{aligned}$$

Para cualquier función $\phi \in L^1(0, +\infty)$ y $h \in \mathbb{R}$, denotamos por T_h el siguiente operador

$$(T_h\phi)(a) = \begin{cases} \phi(a+h) & \text{e.c.t.} \quad a > \text{máx}\{0, -h\}, \\ 0 & \text{e.c.t.} \quad a \in (0, \text{máx}\{0, -h\}). \end{cases}$$

Se tiene, véase por ejemplo [12, Lema IV. 4], que el operador T_h verifica

$$\lim_{h \to 0} \|T_h\phi - \phi\|_{L^1} = 0. \tag{3.31}$$

Luego con esta notación tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \int_0^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a) - D^1_{1,\phi^*}\phi(a+h)|\, \mathrm{d}a \\
&\quad \le \lim_{h\to 0} \Bigg(2K_\infty |\Phi_1| \int_0^\infty |T_h(\phi_2^*)(a) - (\phi_2^*)(a)|\, \mathrm{d}a \\
&\qquad + |\Phi| \int_0^\infty \left| T_h \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}(\cdot, \Phi_2^*)\phi_2^* \right)(a) - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}(\cdot, \Phi_2^*)\phi_2^* \right)(a) \right| \mathrm{d}a \\
&\qquad + M_2|\phi_3| \int_0^\infty |T_h(\phi_2^*)(a) - \phi_2^*(a)|\, \mathrm{d}a \Bigg).
\end{aligned}$$

Ahora bien, A es un conjunto acotado, luego en particular

$$\|\phi\| \le M \quad \forall\, \phi \in A.$$

Por tanto aplicando (3.31) se llega a que efectivamente

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a) - D^1_{1,\phi^*}\phi(a+h)|\, \mathrm{d}a = 0 \text{ uniformemente para } \phi \in A.$$

Demostremos ahora 2,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to\infty} \int_h^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a)|\, \mathrm{d}a \\
&\quad \le \lim_{h\to\infty} \Bigg(2K_\infty |\Phi_1| \int_h^\infty |\phi_2^*(a)|\, \mathrm{d}a + |\Phi| \int_h^\infty \left| \frac{\partial \mu_2}{\partial P}(a, \Phi_2^*)\phi_2^*(a) \right| \mathrm{d}a \\
&\qquad + M_2|\phi_3| \int_h^\infty |\phi_2^*(a)|\, \mathrm{d}a \Bigg).
\end{aligned}$$

Ya que A es acotado, por $(\mathcal{H}_6)$ se tiene que

$$\left| \frac{\partial \mu_2}{\partial P}(a, \Phi_2^*) \right| \le M$$

y gracias a la forma exponencial negativa de ϕ_2^*, obtenemos efectivamente que

$$\lim_{h\to\infty} \int_h^\infty |D^1_{1,\phi^*}\phi(a)|\, \mathrm{d}a = 0 \text{ uniformemente para } \phi \in A.$$

Luego aplicando el Teorema de Fréchet-Kolmogorov se tiene que D^1_{1,ϕ^*} es compacto.

Por tanto, puesto que D^1_{1,ϕ^*} y D^2_{1,ϕ^*} son compactos, entonces se llega a que el operador D_{1,ϕ^*} es compacto. □

Veamos ahora que $\omega_1(B + D_{2,\phi^*}) < 0$. Para ello procederemos, como es habitual, a considerar el semigrupo que genera el operador $B + D_{2,\phi^*}$, descomponiéndolo en un operador compacto y en otro exponencialmente pequeño.

Proposición 3.4.2. $\omega_1(B + D_{2,\phi^*}) < 0$.

Demostración. Denotemos por B_{0,ϕ^*} el operador

$$B_{0,\phi^*} := B + D_{2,\phi^*}.$$

Es decir dado $\phi \in D(B_{0,\phi^*}) \equiv D(B)$, se tiene que

$$B_{0,\phi^*}\phi(a) = \begin{pmatrix} -\phi_1'(a) - \mu_1(a, \Phi_2^*)\phi_1(a) - M_1\phi_1(a)\phi_3^* \\ -\phi_2'(a) - \mu_2(a, \Phi_2^*)\phi_2(a) - M_2\phi_2(a)\phi_3^* \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Como B es el generador de un semigrupo y D_{2,ϕ^*} es un operador lineal y acotado en X, se tiene que B_{0,ϕ^*} es el generador de un $\mathcal{C}^0$-semigrupo, $S_{\phi^*}(t)$, (véase Prop. 1.3.8), con

$$S_{\phi^*}(t) := ((S_{\phi^*}(t))_1, (S_{\phi^*}(t))_2, (S_{\phi^*}(t))_3).$$

Ahora bien, resolviendo por el método de las características (ver pág. 50) el problema abstracto que genera el operador B_{0,ϕ^*}, resulta que el semigrupo $S_{\phi^*}(t)$ admite la representación

$$(S_{\phi^*}(t))_1\phi(a) = \begin{cases} \psi_1(t-a)\exp\left[-\int_0^a (\mu_1(s, \Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] & \text{si } a < t, \\ \phi_1(a-t)\exp\left[-\int_{a-t}^a (\mu_1(s, \Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] & \text{si } a \geq t; \end{cases}$$

$$(S_{\phi^*}(t))_2\phi(a) = \begin{cases} \psi_2(t-a)\exp\left[-\int_0^a (\mu_2(s, \Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] & \text{si } a < t, \\ \phi_2(a-t)\exp\left[-\int_{a-t}^a (\mu_2(s, \Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] & \text{si } a \geq t, \end{cases}$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ denotan las soluciones de las ecuaciones integrales

$$\psi_1(t) = \int_0^t \beta_1^1(t-s)\psi_1(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \beta_1^2(t,s)\phi_1(s)\mathrm{d}s \tag{3.33}$$

$$\psi_2(t) = \int_0^t \beta_2^1(t-s)\psi_2(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \beta_2^2(t,s)\phi_2(s)\mathrm{d}s + \frac{1-q}{q}\psi_1(t), \tag{3.34}$$

con

$$\beta_1^1(t) = q\beta(t)\exp\left[-\int_0^t (\mu_1(\tau, \Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$\beta_1^2(t,s) = q\beta(s+t)\exp\left[-\int_s^{s+t} (\mu_1(\tau, \Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$\beta_2^1(t) = \beta(t)\exp\left[-\int_0^t (\mu_2(\tau, \Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$\beta_2^2(t,s) = \beta(s+t)\exp\left[-\int_s^{s+t} (\mu_2(\tau, \Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Y
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_{\phi^*}(t))_3\phi \equiv 0 \Rightarrow (S_{\phi^*}(t))_3\phi \equiv \phi_3.$$
Ahora bien, fijado $t > 0$, $S_{\phi^*}(t)$ se puede descomponer de manera natural como
$$S_{\phi^*}(t) := S^1_{\phi^*}(t) + S^2_{\phi^*}(t) + S^3_{\phi^*}(t)$$
con
$$S^1_{\phi^*}(t)\phi(a) = \begin{cases} ((S_{\phi^*}(t))_1\phi(a), (S_{\phi^*}(t))_2\phi(a), 0) & \text{si } a \geq t \\ (0,0,0) & \text{si } a < t \end{cases}$$
$$S^2_{\phi^*}(t)\phi(a) = \begin{cases} (0,0,0) & \text{si } a \geq t \\ ((S_{\phi^*}(t))_1\phi(a), (S_{\phi^*}(t))_2\phi(a), 0) & \text{si } a < t \end{cases}$$
y
$$S^3_{\phi^*}(t)\phi(a) = (0,0,\phi_3) \text{ e.c.t. } a \in \mathbb{R}_+.$$
Trivialmente se comprueba que $S^3_{\phi^*}(t)$ es un operador lineal compacto. Veamos que $S^2_{\phi^*}(t)$ lo es también.
Para ello definimos los operadores:
$$T_j : L^1(0,t) \times L^1(0,t) \times \mathbb{R} \to L^1(0,t) \times L^1(0,t) \times \mathbb{R}, \text{ para } j = 1,2$$
como, para cada $u \in L^1(0,t) \times L^1(0,t) \times \mathbb{R}$,
$$T_1u(x) = \left(\int_0^x \beta_1^1(x-y)u_1(y)\,\mathrm{d}y, \int_0^x \beta_2^1(x-y)u_2(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1-q}{q}u_1(x), 0\right)$$
y
$$T_2u(x) = \left(\int_0^\infty \beta_1^2(x,y)u_1(y)\,\mathrm{d}y, \int_0^\infty \beta_2^2(x,y)u_2(y)\,\mathrm{d}y, 0\right).$$

Procediendo análogamente a la demostración del Lema 3.4.1, se llega a que T_2 es un operador compacto.

Fácilmente se prueba que T_1 es un operador acotado. Lo siguiente que vamos a ver es que existe $(I - T_1)^{-1}$.
T_1 es un operador de Volterra cuyo núcleo depende sólo de la diferencia de sus argumentos, luego para todo $\lambda \neq 0$, existe una única solución de la ecuación $(\lambda - T_1)\phi \equiv \psi$ con $\psi \in L^1(0,t)$ (véase por ejemplo [26, Cap. 6]). Por tanto, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe $(\lambda - T_1)^{-1}$, y en particular existe $(I - T_1)^{-1}$. Por tanto $S^2_{\phi^*}$ se puede escribir como
$$S^2_{\phi^*}(t)\phi(a) = \begin{cases} (0,0,0) & \text{si } a \geq t \\ \left((I-T_1)^{-1}T_2\phi\right)(t-a)\Big(\exp\left[-\int_0^a (\mu_1(s,\Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right], & \\ \qquad \exp\left[-\int_0^a (\mu_2(s,\Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right], 0\Big) & \text{si } a < t. \end{cases}$$

Puesto que el operador $(I - T_1)^{-1}$ es acotado y T_2 es compacto, se tiene que $S^2_{\phi^*}$ es compacto.

Por consiguiente, como los operadores $S^2_{\phi^*}$ y $S^3_{\phi^*}$ son compactos, se tiene, por una aplicación directa de la Proposición 1.3.3, que

$$\alpha[S_{\phi^*}(t)] = \alpha[S^1_{\phi^*}(t)] \leq \|S^1_{\phi^*}(t)\|.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|S^1_{\phi^*}(t)\phi\|_X = {} & \|(S^1_{\phi^*}(t)\phi)_1\|_{L^1} + \|(S^1_{\phi^*}(t)\phi)_2\|_{L^1} + |(S^1_{\phi^*}(t)\phi)_3| \\
& \leq \int_0^\infty |\phi_1(a-t)| \exp\left[-\int_{a-t}^a (\mu_1(s,\Phi_2^*) + M_1\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] \mathrm{d}a \\
& + \int_0^\infty |\phi_2(a-t)| \exp\left[-\int_{a-t}^a (\mu_2(s,\Phi_2^*) + M_2\phi_3^*)\,\mathrm{d}s\right] \mathrm{d}a \\
& \leq e^{-\underline{\mu_1}t}\|\phi_1\|_{L^1} + e^{-\underline{\mu_2}t}\|\phi_2\|_{L^1} \leq e^{-\underline{\mu_2}t}\|\phi\|_X.
\end{aligned}$$

Luego $\|S^1_{\phi^*}(t)\| \leq e^{-\underline{\mu_2}t}$, y por consiguiente

$$\alpha[S_{\phi^*}(t)] \leq e^{-\underline{\mu_2}t}.$$

Por tanto, gracias a la definición de ω_1, se llega a que

$$\omega_1(B + D_{2,\phi^*}) \leq -\underline{\mu_2} < 0.$$

$\square$

Por consiguiente tenemos que

$$\omega_1(B_{\phi^*}) = \omega_1(B + D_{2,\phi^*}) \leq -\underline{\mu_2} < 0.$$

Así que, gracias a (1.6), se verifica que

$$\sigma_{ess}(B_{\phi^*}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -\underline{\mu_2}\}.$$

Luego por el resultado de linealización, véase la Proposición 1.3.11, la estabilidad del equilibrio ϕ^* está determinado por el comportamiento de $\sigma(B_{\phi^*}) \setminus \sigma_{ess}(B_{\phi^*})$. Ahora bien, usando la Proposición 1.1.4, se tiene que en la banda

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : -\underline{\mu_2} < \operatorname{Re}\lambda \leq \omega_0(B_{\phi^*})\},$$

solamente pueden existir autovalores aislados de multiplicidad finita.

Por tanto lo que vamos a estudiar son los autovalores del operador B_{ϕ^*} para cada equilibrio en particular.

3.4.2. El problema de autovalores para los equilibrios libres de enfermedad

Estudio del equilibrio $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$

En este caso el problema de autovalores es:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a}(a) + (\mu_1(a,0)+\lambda)\,\phi_1(a) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a}(a) + (\mu_2(a,0)+\lambda)\,\phi_2(a) = 0, \\ (\lambda - m)\phi_3 = 0, \\ \phi_1(0) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\,\phi_1(a)\,\mathrm{d}a, \\ \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\big(\,\phi_2(a)\, + (1-q)\,\phi_1(a)\,\big)\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3.35}$$

El problema (3.35) nos da como autovalor $\lambda = m > 0$, por tanto el equilibrio $(0,0,0)$ es inestable.

Estudio del equilibrio $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m/n})$

En este caso el problema de autovalores es:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a}(a) + \Big(\mu_1(a,0)+M_1\dfrac{m}{n}+\lambda\Big)\,\phi_1(a) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a}(a) + \Big(\mu_2(a,0)+M_2\dfrac{m}{n}+\lambda\Big)\,\phi_2(a) = 0, \\ (\lambda + m)\phi_3 + \nu M_1\dfrac{m}{n}\displaystyle\int_0^\infty \phi_1(s)\,\mathrm{d}s + \nu M_2\dfrac{m}{n}\displaystyle\int_0^\infty \phi_2(s)\,\mathrm{d}s = 0 \\ \phi_1(0) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\,\phi_1(a)\,\mathrm{d}a, \\ \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\big(\,\phi_2(a)\, + (1-q)\,\phi_1(a)\,\big)\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3.36}$$

Resolviendo $(3.36)_1$ y $(3.36)_2$, obtenemos

$$\phi_1(a) = \phi_1(0)\exp\left[-\left(\lambda a + \int_0^a \mu_1(\sigma,0)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{M_1 m}{n}a\right)\right] \tag{3.37}$$

$$\phi_2(a) = \phi_2(0)\exp\left[-\left(\lambda a + \int_0^a \mu_2(\sigma,0)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{M_2 m}{n}a\right)\right], \tag{3.38}$$

verificando las condiciones iniciales. Por tanto, sustituyendo (3.37) en la condición inicial para ϕ_1 se tiene

$$\left(1 - q\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a - \int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma - \frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)\phi_1(0) = 0. \tag{3.39}$$

Y ahora sustituyendo (3.38) en la condición inicial para ϕ_2 se tiene

$$\begin{aligned}(1-q)\left(\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)\phi_1(0)\\ +\left(1-\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_2 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)\phi_2(0)=0.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Luego sustituyendo en $(3.36)_3$ los valores de (3.37) y (3.38) se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu M_1 m}{n}\int_0^\infty \exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)\phi_1(0)\\ +\left(\nu M_2\frac{m}{n}\int_0^\infty \exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_2 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)\phi_2(0)\\ +(\lambda+m)\phi_3=0.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Así que denotando por

$$c_1 := \phi_1(0), \qquad c_2 := \phi_2(0), \qquad c_3 := \phi_3,$$

se llega a que $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\mu_2}$ es un autovalor si el sistema lineal homogéneo,

$$\begin{cases}\left(1-q\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)c_1=0,\\[2ex] (1-q)\left(\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)c_1\\ \qquad +\left(1-\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_2 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)c_2=0,\\[2ex] \left(\frac{\nu M_1 m}{n}\int_0^\infty \exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_1 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)c_1\\ \qquad +\left(\nu M_2\frac{m}{n}\int_0^\infty \exp\left[-\lambda a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma-\frac{M_2 m}{n}a\right]\mathrm{d}a\right)c_2\\ \qquad +(\lambda+m)c_3=0,\end{cases}$$

tiene solución distinta de la trivial. Y esto se verifica si, $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\mu_2}$, cumple la ecuación característica:

$$\begin{aligned}\left(1-q\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\frac{M_1 m}{n}a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}a\right)\\ \times\left(1-\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\frac{M_2 m}{n}a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}a\right)(\lambda+m)=0.\end{aligned}$$

Es decir, $\lambda\in\mathbb{C}$ debe verificar alguna de las igualdades,

$$\begin{aligned}&\psi_1(\lambda) := q\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\frac{M_1 m}{n}a-\int_0^a \mu_1(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}a=1,\\ &\psi_2(\lambda) := \int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\lambda a-\frac{M_2 m}{n}a-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}a=1,\\ &\lambda=-m.\end{aligned}$$

Luego, se tiene el siguiente resultado sobre la estabilidad del equilibrio $(0, 0, m/n)$. Nótese que $\psi_2(0) = \widetilde{R}(0)$, definido en (3.29).

Teorema 3.4.3.

- *Si* $\widetilde{R}(0) < 1$ *entonces el equilibrio* $(0, 0, m/n)$ *es localmente asintóticamente estable.*
- *Si* $\widetilde{R}(0) > 1$ *entonces el equilibrio* $(0, 0, m/n)$ *es inestable.*

Demostración. Claramente se cumple que,

$$|\psi_i(\lambda)| \le \psi_i(\mathrm{Re}(\lambda)) \text{ para } i = 1, 2,$$
$$\psi_1(\lambda) \le \psi_2(\lambda) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Además $\psi_i(\lambda)$ es una función decreciente como función real para $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \psi_i(\lambda) = 0.$$

Así, si suponemos que $\psi_2(0) = \widetilde{R}(0) < 1$, entonces, para $i = 1, 2$ se tiene que

$$|\psi_i(\lambda)| < 1, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0.$$

Luego no existen autovalores con parte real positiva y aplicando la Proposición 1.3.11, se tiene entonces que el equilibrio $(0, 0, m/n)$ es localmente asintóticamente estable.

Supongamos que $\psi_2(0) = \widetilde{R}(0) > 1$, entonces se tiene que existe algún $\lambda \in \mathbb{C}$ con parte real positiva tal que $\psi_2(\lambda) = 1$. De nuevo aplicando la Proposición 1.3.11, se tiene entonces que el equilibrio $(0, 0, m/n)$ es inestable. □

Estudio del equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{s}^*(\mathbf{a}), \mathbf{0})$

Consideramos el equilibrio $(0, s^*(a), 0)$ con s^* definido en (3.25). Recordemos que para que exista este equilibrio se debe dar la condición

$$\widetilde{R}(0) := \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, 0)\, \mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}a > 1.$$

Por tanto si existe el equilibrio $(0, s^*(a), 0)$, el problema de autovalores que tenemos es:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a}(a) + (\mu_1(a, S^*) + \lambda)\, \phi_1(a) - K(a) s^*(a) \Phi_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a}(a) + (\mu_2(a, S^*) + M_2 m/n + \lambda)\, \phi_2(a) \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{\partial \mu_2}{\partial P}(a, S^*)\Phi + K(a)\Phi_1 - M_2\phi_3\right) s^*(a) = 0, \\[2ex] (\lambda - m - \nu M_2 S^*)\phi_3 = 0, \\[2ex] \phi_1(0) = q \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\, \phi_1(a)\, \mathrm{d}a, \\[2ex] \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\big(\phi_2(a) + (1 - q)\, \phi_1(a)\big) \mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3.42}$$

Resolviendo (3.42) tenemos que un autovalor es $\lambda = m + \nu M_2 S^* > 0$, por tanto el equilibrio $(0, s^*(a), 0)$ es inestable.

Estudio del equilibrio $\left(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{a}), \dfrac{\mathbf{m}+\nu\mathbf{M_2}\widetilde{\mathbf{S}}}{\mathbf{n}}\right)$

Consideramos el equilibrio

$$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m+\nu M_2\widetilde{S}}{n}\right)$$

con $\tilde{s}(a)$ definido por (3.30). Para que exista este equilibrio se debe verificar la condición:

$$\int_0^\infty \beta(a)\exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma,0)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{M_2 m}{n}a\right]\mathrm{d}a > 1.$$

Por comodidad denotemos:

$$\boxed{\psi_3 := \frac{m+\nu M_2\widetilde{S}}{n},\ f_1(a) := \mu_1(a,\widetilde{S}),\ f_2(a) := \mu_2(a,\widetilde{S}),\ f_2'(a) := \frac{\partial\mu_2}{\partial P}(a,\widetilde{S}).}$$

Así, el problema de autovalores lo podemos escribir como

$$(3.43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a}(a) + \left(f_1(a)+\psi_3 M_1+\lambda\right)\phi_1(a) = K(a)\tilde{s}(a)\Phi_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a}(a) + \left(f_2(a)+\psi_3 M_2+\lambda\right)\phi_2(a) = \left(f_2'(a)+K(a)\right)\tilde{s}(a)\Phi_1 \\ \qquad\qquad\qquad -f_2'(a)\tilde{s}(a)\Phi_2 - M_2\tilde{s}(a)\phi_3, \\ (\lambda+m+\nu M_2\widetilde{S})\phi_3 = \nu M_1\psi_3\Phi_1 + \nu M_1\psi_3\Phi_2, \\ \phi_1(0) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a, \\ \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\left(\phi_2(a)+(1-q)\phi_1(a)\right)\mathrm{d}a. \end{cases}$$

Luego $\lambda = -m-\nu M_2\widetilde{S} < 0$ es un autovalor asociado al autovector $(0,0,\phi_3)$. Por tanto supongamos $\lambda \neq -m-\nu M_2\widetilde{S}$ y busquemos otros autovalores. En este caso resolviendo $(3.43)_3$ se tiene

$$\phi_3 = \left(\frac{\nu M_1\psi_3}{\lambda+m+\nu M_2\widetilde{S}}\right)\Phi_1 + \left(\frac{\nu M_1\psi_3}{\lambda+m+\nu M_2\widetilde{S}}\right)\Phi_2.$$

Como la ecuación para ϕ_1 no depende de ϕ_2 podemos calcular, con la ecuación $(3.43)_1$ todos los autovalores asociados a $\phi_1 \neq 0$. Después calcularemos los autovalores asociados a las autofunciones del tipo $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 \neq 0$.

Por tanto, primero resolvemos el siguiente problema de autovalores

$$(3.44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a}(a) + \left(f_1(a)+\lambda+\psi_3 M_1\right)\phi_1(a) = K(a)\tilde{s}(a)\Phi_1, \\ \phi_1(0) = q\displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a. \end{cases}$$

El semigrupo generado por el operador asociado al problema (3.44), $S(t)$, es positivo. Es decir el operador $\mathcal{B}$ definido como

$$\mathcal{B}\phi_1(a) := -\phi_1'(a) - (f_1(a) + \psi_3 M_1)\,\phi_1(a) + K(a)\tilde{s}(a)\Phi_1$$

con dominio

$$D(\mathcal{B}) := \left\{\phi_1 \in L^1(\mathbb{R}_+) : \quad \phi_1(0) = q\int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a\right\}$$

es el generador de un semigrupo positivo.
En efecto, si calculamos explícitamente el semigrupo generado, mediante el método de las características se llega a que

$$S(t)\phi_1(a) = \begin{cases} \begin{aligned} &\psi_1(t-a)\exp\left[-\int_0^a (f_1(\sigma)+\psi_3 M_1)\,\mathrm{d}\sigma\right] \\ &+\int_0^a \exp\left[-\int_0^\sigma (f_1(\tau)+\psi_3 M_1)\,\mathrm{d}\tau\right] K(a-\sigma)\tilde{s}(a)\Phi_1(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma, \end{aligned} & \text{si } a < t, \\ \begin{aligned} &\phi_1(a-t)\exp\left[-\int_0^t (f_1(\sigma)+\psi_3 M_1)\,\mathrm{d}\sigma\right] \\ &+\int_0^t \exp\left[-\int_0^\sigma (f_1(\tau)+\psi_3 M_1)\,\mathrm{d}\tau\right] K(a-\sigma)\tilde{s}(a)\Phi_1(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma, \end{aligned} & \text{si } a \geq t, \end{cases}$$

donde ψ_1 está definido en (3.33). Es fácil comprobar que el semigrupo es positivo.

Luego, en este caso particular, por tratarse de un semigrupo positivo (véase Teorema 1.3.7), se tiene que

$$\omega_0(\mathcal{B}) := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{B})\} \equiv \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(\mathcal{B})\}.$$

Así que nos limitaremos a buscar los autovalores reales y veremos si $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+$ autovalor.

Resolvemos la ecuación para ϕ_1, y se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_1(a) =& \exp\left[-\left((\lambda+\psi_3 M_1)a + \int_0^a f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right]\phi_1(0) \\ &+\exp\left[-\left((\lambda+\psi_3 M_1)a + \int_0^a f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right] \\ &\times\left(\int_0^a \exp\left[\left((\lambda+\psi_3 M_1)\sigma + \int_0^\sigma f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right] K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\Phi_1. \end{aligned}$$

Denotemos

$$G_1(a) := \exp\left[-\left(\psi_3 M_1 a + \int_0^a f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right],$$

luego

$$\phi_1(a) = e^{-\lambda a}G_1(a)\phi_1(0) + \left(e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\Phi_1. \tag{3.45}$$

Ahora bien, ϕ_1 debe verificar la condición inicial,

$$\phi_1(0) = q \int_0^\infty \beta(a)\phi_1(a)\,\mathrm{d}a.$$

Luego sustituyendo esta expresión en (3.12), se tiene que se debe verificar

$$\begin{aligned}&\left(1 - q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\right)\phi_1(0)\\ &\quad - \left(q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right)\Phi_1 = 0.\end{aligned}$$

También tenemos que

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \phi_1(a)\,\mathrm{d}a,$$

por tanto reemplazando esta expresión en (3.45) se tiene que se debe verificar la ecuación:

$$\begin{aligned}&-\left(\int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\mathrm{d}a\right)\phi_1(0)\\ &\quad + \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right)\Phi_1 = 0.\end{aligned}$$

Así denotando por $b := \phi_1(0)$ y $c := \Phi_1$, se llega a que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de (3.44), si verifica el siguiente sistema homogéneo en las incógnitas b y c:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(1 - q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\right)b\\ &\qquad - \left(q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right)c = 0,\\ &-\left(\int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\mathrm{d}a\right)b\\ &\qquad \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right)c = 0.\end{aligned}\right.$$

Luego tenemos la existencia de un autovalor real si este sistema lineal homogéneo tiene solución distinta de la trivial, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que verifica la ecuación característica:

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) :=& \left(1 - q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\mathrm{d}a\right)\\ &\quad\times\left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right)\\ &-\left(\int_0^\infty e^{-\lambda a}G_1(a)\mathrm{d}a\right)\\ &\quad\times\left(q\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}G_1(a)\int_0^a e^{\lambda\sigma}(G_1(\sigma))^{-1}K(\sigma)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Tenemos el siguiente resultado de inestabilidad

Teorema 3.4.4. *Si existe $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ tal que $\chi(\lambda_0) < 0$ entonces el equilibrio*

$$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$

es inestable.

Demostración. Fácilmente se comprueba que la aplicación

$$\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

es continua y además verifica que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \chi(\lambda) = 1.$$

Luego existirá $\lambda \in \mathbb{R}_+$ autovalor si y sólo si $\exists \lambda_0 \in [0, +\infty)$ tal que $\chi(\lambda_0) < 0$.
Así, que si existe $\lambda_0 \in [0, +\infty)$, por la Proposición 1.3.11, se tiene efectivamente que el equilibrio $\left(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$ es inestable. $\square$

Luego si para todo $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ se tiene que $\chi(\lambda_0) > 0$ entonces no tenemos la existencia de ningún autovalor con parte real positiva asociado a una autofunción del tipo $(\phi_1, 0, \phi_3)$. Luego debemos seguir buscando los autovalores asociados ahora a las autofunciones $\phi_2 \neq 0$ y $\phi_1 = 0$.

Por tanto supongamos que $\forall \lambda_0 \in [0, +\infty)$ $\chi(\lambda_0) > 0$ y pasemos entonces a la ecuación para ϕ_2. En este caso como $\phi_1 \equiv 0$, se tiene que

$$\phi_3 = \frac{\nu M_2 \psi_3}{\lambda + n\psi_3} \Phi_2 := A_\lambda \Phi_2, \text{ con } A_\lambda = \frac{\nu M_2 \psi_3}{\lambda + n\psi_3}.$$

Por tanto el problema de autovalores nos queda:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a}(a) + (f_2(a) + M_2\psi_3 + \lambda)\,\phi_2(a) = -\left(f_2'(a) + M_2 A_\lambda\right)\tilde{s}(a)\Phi_2, \\ \phi_2(0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(a)\phi_2(a)\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3.47}$$

Ahora bien, para este problema no podemos proceder como en el caso anterior pues no podemos garantizar que el semigrupo generado por el operador asociado al problema (3.47) sea positivo. Para ello se procede calculando el semigrupo generado por el operador $\mathcal{D}$ definido como

$$\mathcal{D}\phi_2(a) := -\phi_2'(a) - (f_2(a) + \psi_3 M_2)\,\phi_2(a) - \left(f_2'(a) + M_2 A_\lambda\right)\tilde{s}(a)\Phi_2$$

con dominio

$$D(\mathcal{D}) := \left\{\phi_2 \in L^1(\mathbb{R}_+) : \quad \phi_2(0) = \int_0^\infty \beta(a)\phi_2(a)\,\mathrm{d}a\right\}.$$

Así, no nos basta con mirar sólo los autovalores reales.
Calculemos entonces todos los autovalores del problema (3.47). Resolviendo dicho problema se tiene

$$\begin{aligned}\phi_2(a) = \exp&\left[-\int_0^a f_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma - M_2\psi_3 a - \lambda a\right]\\ &\times\left(\phi_2(0) - \int_0^a \exp\left[\int_0^\sigma f_2(\tau)\mathrm{d}\tau + M_2\psi_3\sigma + \lambda\sigma\right](f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\tilde{s}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\Phi_2.\end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la definición de $\tilde{s}$ en (3.30) se tiene

$$\exp\left[-\left(\int_0^a f_2(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + M_2\psi_3 a\right)\right] = \tilde{s}(a)(\tilde{s}(0))^{-1}.$$

Por tanto

$$\phi_2(a) = \tilde{s}(a)(\tilde{s}(0))^{-1}e^{-\lambda a}\phi_2(0) - \tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}(f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\,\mathrm{d}\sigma\right)\Phi_2.$$

Análogamente al caso $\phi_1 \neq 0$, queremos escribir la ecuación como un sistema lineal homogéneo en las incógnitas $b := \phi_2(0)$, $c := \Phi_2 \in \mathbb{R}$. Imponemos entonces las condiciones:

$$b = \int_0^\infty \beta(a)\phi_2(a)\,\mathrm{d}a,\ c = \int_0^\infty \phi_2(a)\,\mathrm{d}a.$$

Por tanto tenemos el siguiente sistema lineal homogéneo en las incógnitas b y c.

$$\begin{cases}\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\,\mathrm{d}a\right)b\\ \qquad + \left(\int_0^\infty \beta(a)e^{-\lambda a}\tilde{s}(a)\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}(f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\right)c = 0,\\ \left(-(\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a\right)b\\ \qquad + \left(1 + \int_0^\infty e^{-\lambda a}\tilde{s}(a)\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}(f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\right)c = 0.\end{cases}$$

Por tanto para que este sistema tenga solución el determinante de sus coeficientes tiene que ser 0. Luego

$$\begin{aligned}F(\lambda) :=&\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a\right)\\ &\quad\times\left(1 + \int_0^\infty e^{-\lambda a}\tilde{s}(a)\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}(f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\right)\\ &+\left(\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}(f_2'(\sigma) + M_2A_\lambda)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\right)\\ &\quad\times(\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a = 0.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Operando (suponiendo $\lambda \neq 0$ que no es autovalor), y teniendo en cuenta que $\tilde{s}$ verifica la condición inicial:

$$\tilde{s}(0) = \int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)\mathrm{d}a,$$

se llega a que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda) = &\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a\right)\\
&\times\left(1 + \int_0^\infty \tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}f_2'(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a + \lambda^{-1}M_2\,A_\lambda\widetilde{S}\right)\\
&+(\tilde{s}(0))^{-1}\left(\int_0^\infty \tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a\right)\left(\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\left(\int_0^a e^{\lambda\sigma}f_2'(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\right).
\end{aligned}$$

La teoría de funciones de variable compleja permite dar condiciones suficientes de estabilidad o inestabilidad. A continuación presentamos unas y en el caso particular, estudiado en la Sección siguiente, otras.
Denotamos

$$a_1(\sigma) = \int_\sigma^\infty f_2'(a-\sigma)\tilde{s}(a)\mathrm{d}a, \quad a_2(\sigma) = \int_\sigma^\infty f_2'(a-\sigma)\beta(a)\tilde{s}(a)\mathrm{d}a.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda) = &\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\widehat{\beta(\cdot)\tilde{s}(\cdot)}(\lambda)\right)\left(1 + \widehat{a_1(\cdot)}(\lambda) + \lambda^{-1}M_2\,A_\lambda\widetilde{S}\right)\\
&+ (\tilde{s}(0))^{-1}\widehat{\tilde{s}(\cdot)}(\lambda)\widehat{a_2(\cdot)}(\lambda),
\end{aligned}$$

donde $\widehat{a}(\lambda)$ es la Transformada de Laplace de una cierta función $a \in L^1$.

Ahora aplicando la fórmula de la convolución para la Transformada de Laplace se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda) = &\,1 + \lambda^{-1}M_2\,A_\lambda\widetilde{S}\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda a}\beta(a)\tilde{s}(a)\,\mathrm{d}a\right)\\
&+ (\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda a}\Big(-\beta(a)\tilde{s}(a) + \tilde{s}(0)a_1(a) - \int_0^a \beta(\sigma)\tilde{s}(\sigma)a_1(a-\sigma)\mathrm{d}\sigma\\
&\qquad + \int_0^a \tilde{s}(\sigma)a_2(a-\sigma)\mathrm{d}\sigma\Big)\mathrm{d}a\\
:= &\,1 + \lambda^{-1}M_2\,A_\lambda\widetilde{S}\left(1 - (\tilde{s}(0))^{-1}\widehat{\beta(\cdot)\tilde{s}(\cdot)}(\lambda)\right) + \widehat{G(\cdot)}(\lambda),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

con G,

$$G(a) = (\tilde{s}(0))^{-1}\left(-\beta(a)\tilde{s}(a) + \tilde{s}(0)a_1(a) + \int_0^a \left(-\beta(\sigma)a_1(a-\sigma) + a_2(a-\sigma)\right)\tilde{s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right).$$

Veamos ahora un resultado de estabilidad e inestabilidad local. Para ello, denotemos por $\eta(\mathcal{F})$ el número de ceros de $\mathcal{F}(\lambda)$ con parte real positiva.

Proposición 3.4.5. *Supongamos que $\digamma$ no tiene raíces puramente imaginarias, es decir el problema de autovalores (3.47) no admite autovalores imaginarios puros. Consideremos la curva $\gamma(t) := \digamma(-it)$. Entonces,*

$$\eta(\digamma) = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\digamma'(it)}{\digamma(it)}\mathrm{d}t := \eta(\gamma, 0),$$

siendo $\eta(\gamma, 0)$ el número de vueltas de la curva γ con respecto al origen.

En consecuencia, el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2\widetilde{S}}{n})$ es asintóticamente estable si y sólo si, γ no gira alrededor del origen. En particular,

- *Si $\digamma(0) < 0$, entonces el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2\widetilde{S}}{n})$ es inestable.*
- *Si $\digamma(it) \notin \mathbb{R}_- \ \forall t \geq 0$, entonces el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2\widetilde{S}}{n})$ es localmente asintóticamente estable.*

Demostración. La demostración sigue de argumentos estándar de la Teoría de variable compleja, y la idea viene dada por resultados similares en [27] y [82].

Gracias a las propiedades de la Transformada de Laplace, lo primero que vemos es que la función $\digamma$ es analítica en el semiplano $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$. También se comprueba fácilmente que

$$\digamma(\lambda) \to 1 \text{ cuando } |\lambda| \to +\infty \text{ y } \operatorname{Re}\lambda \geq 0. \tag{3.50}$$

Así, en particular, tenemos que $\digamma(i\infty) = \digamma(-i\infty) = 1$ y por consiguiente la curva γ es cerrada. Luego podemos hablar del número de vueltas, $\eta(\gamma, 0)$, de la curva γ con respecto al origen.

Denotemos, entonces, ∂R como la frontera del semicírculo:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0,\ |\lambda| = R\},$$

y por

$$\partial^1 R := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0,\ |\lambda| = R\},$$
$$\partial^2 R := \{\lambda = iy : -R \leq y \leq R\}.$$

Entonces $\partial R = \partial^1 R \cup \partial^2 R$.

Hemos supuesto que $\digamma$ no tiene raíces puramente imaginarias; así que podemos aplicar algunos resultados estándar de variables complejas como por ejemplo el Principio del Argumento, (véase por ejemplo [68]). Luego por el Principio del Argumento, el número de raíces de $\digamma$ encerrados por ∂R, es decir raíces con parte real positiva, $\nu(R)$, es dado por

$$\nu(R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{\digamma'(z)}{\digamma(z)}\mathrm{d}z := I_1(R) + I_2(R),$$

con

$$I_j(R) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^j R} \frac{\digamma'(z)}{\digamma(z)}\mathrm{d}z, \quad j = 1, 2.$$

Ahora bien, como estamos interesados en el número de raíces con parte real positiva de $\digamma$, en realidad lo que estamos buscando es

$$\lim_{R\to+\infty} \nu(R).$$

Realizando un cambio de variable, tenemos que

$$I_2(R) := -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\digamma'(it)}{\digamma(it)}\mathrm{d}t.$$

Por tanto para concluir con la demostración de la primera parte de la Proposición, tenemos que demostrar que $\lim\limits_{R\to+\infty} I_1(R) = 0$. Es claro que $\partial^1 R$ puede escribirse como:

$$\partial^1 R = \{Re^{i\theta} : \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

Luego,

$$I_1(R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^1 R} \frac{\digamma'(z)}{\digamma(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\digamma'(Re^{i\theta})}{\digamma(Re^{i\theta})} Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Gracias a (3.50), tenemos que $\digamma(Re^{i\theta}) \to 1$ cuando $R \to +\infty$, luego existen $R_0, K_0 > 0$ tal que

$$|\digamma(Re^{i\theta})| \geq K_0 > 0 \text{ para todo } R > R_0,$$

luego

$$\lim_{R\to+\infty} I_1(R) \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{K_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \digamma'(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Ahora bien, por (3.49), se comprueba que $\digamma$ puede escribirse como

$$\digamma(\lambda) = 1 + \lambda^{-1} M_2\, A_\lambda \widetilde{S} - \hat{b}(\lambda),$$

donde b es una cierta función de L^1 y además verifica que la aplicación $tb(t)$ también pertenece a L^1.
Luego,

$$\digamma'(Re^{i\theta}) = \int_0^\infty e^{-Re^{i\theta}t} tb(t)\mathrm{d}t.$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{R\to+\infty} I_1(R) &\leq \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{K_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^\infty e^{-Re^{i\theta}t} tb(t)\mathrm{d}t\right) Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{K_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty tb(t)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-Re^{i\theta}t} Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

Así, se tiene efectivamente la primera parte de la Proposición, es decir

$$\eta(\digamma) = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\digamma'(it)}{\digamma(it)}\mathrm{d}t,$$

y esto corresponde con el número de vueltas de γ alrededor del origen.

Demostremos ahora la segunda parte de la Proposición.
Primero tenemos que la curva γ es simétrica respecto del eje real pues $\mathcal{F}(it) = \overline{\mathcal{F}(-it)}$, ya que para $\lambda = it$ se verifica $A_\lambda \lambda^{-1} = \overline{A_{-\lambda}(-\lambda)^{-1}}$. Además se tiene que $\gamma(t) \to 1$ cuando $t \to \pm\infty$. Luego en particular tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\gamma(t)) &= \mathrm{Re}(\gamma(-t)), \\ \gamma(+\infty) &= \gamma(-\infty). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

- Si $\mathcal{F}(0) < 0$, entonces $\mathrm{Re}(\gamma(0)) < 0$. Así γ gira alrededor del origen, es decir, $\eta(\gamma, 0) \geq 1$. Y por tanto $\mathcal{F}$ tiene al menos una raíz con parte real positiva.
  Luego aplicando la Proposición 1.3.11 tenemos que el equilibrio
  $$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$
  es localmente inestable.
- Ahora bien, si $\mathcal{F}(it) \notin \mathbb{R}_- \ \forall t \geq 0$, entonces $\mathrm{Re}(\gamma(t)) \geq 0$. Por consiguiente, γ no gira entorno al origen. Luego, $\mathcal{F}$ no tiene ninguna raíz con parte real positiva.
  Aplicando de nuevo la Proposición 1.3.11 tenemos que el equilibrio
  $$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$
  es localmente asintóticamente estable.

□

3.5. Un caso particular de estabilidad local para el equilibrio presa sana-depredador

Vamos a considerar algunas hipótesis particulares con las que obtendremos que el equilibrio
$$\left(0, \tilde{s}(a), \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}\right)$$
es localmente asintóticamente estable.

Aparte de las hipótesis $(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_6)$ supongamos estas otras,

$(\mathcal{H}_7)$ Supongamos que la tasa de mortalidad de la presa sana es la suma de una función dependiente sólo en edad y de otra dependiente sólo en la población total. Es decir,

$$\mu_2(a, P) = n_1(a) + n_2(P), \text{ para todo } a \in (0, +\infty) \text{ y } P \in \mathbb{R}_+.$$

($\mathcal{H}_8$) Además, supongamos que la tasa de depredación sobre los individuos infectados es estrictamente mayor que sobre los individuos sanos, es decir,

$$M_1 > M_2,$$

y se verifica

$$\frac{\nu M_2}{n}(M_1 - M_2) > 1 + q.$$

($\mathcal{H}_9$) También imaginemos que la infección afecta más fuertemente a los individuos más jóvenes, es decir, existe $\alpha > 0$ con

$$\alpha < \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n}(M_1 - M_2) - \widetilde{S}(1 + q) \tag{3.51}$$

tal que

$$K(a) \leq e^{-\alpha a} \text{ e.c.t. } a \in (0, +\infty).$$

Como queremos que exista el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \psi_3)$, donde como en la Sección anterior,

$$\psi_3 := \frac{m + \nu M_2 \widetilde{S}}{n},$$

debemos además suponer que

($\mathcal{H}_{10}$)

$$\widetilde{R}(0) := \int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a n_1(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma - \left(n_2(0) + \frac{M_2 m}{n}\right) a\right] \mathrm{d}a > 1.$$

Denotamos

$$H := \int_0^\infty \exp\left[-\int_0^\tau \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \psi_3 M_2 \tau\right] \mathrm{d}\tau,$$

entonces por la ecuación (3.30) tenemos que

$$\tilde{s}(a) = \frac{\widetilde{S}}{H} \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \psi_3 M_2 a\right], \tag{3.52}$$

donde $\widetilde{S}$ verifica

$$\int_0^\infty \beta(a) \exp\left[-\int_0^a \mu_2(\sigma, \widetilde{S})\,\mathrm{d}\sigma - \psi_3 M_2 a\right] \mathrm{d}a = 1. \tag{3.53}$$

Sea la función χ definida en (3.46), entonces tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.5.1. *Supongamos* ($\mathcal{H}_1$)-($\mathcal{H}_{10}$)*, entonces para todo λ real y positivo se tiene que* $\chi(\lambda) > 0$.

Demostración. Podemos escribir,

$$\chi(\lambda) := \chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda) - \chi_3(\lambda)\chi_4(\lambda),$$

donde

$$\chi_1(\lambda) := 1 - q\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a$$
$$\chi_2(\lambda) := 1 - \frac{\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a}\left(\int_0^a K(\sigma)e^{(\lambda+\psi_3(M_1-M_2))\sigma-\int_\sigma^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau-\int_0^\sigma \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a$$
$$\chi_3(\lambda) := \int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a$$
$$\chi_4(\lambda) := \frac{q\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a}\left(\int_0^a K(\sigma)e^{(\lambda+\psi_3(M_1-M_2))\sigma-\int_\sigma^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau-\int_0^\sigma \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a.$$

Acotemos $\chi_1(\lambda)$. Gracias a que $M_1 > M_2$, $\mu_1(a,P) \geq \mu_2(a,P)$ y (3.53), tenemos que

$$\chi_1(\lambda) > \left(1 - \int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right) > 0. \tag{3.54}$$

Acotemos ahora $\chi_2(\lambda)$. Denotemos por $\Theta := -\alpha + \psi_3(M_1 - M_2)$, que sabemos que es positiva gracias a (3.51). Luego

$$\begin{aligned}
&\frac{\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a}\left(\int_0^a K(\sigma)e^{(\lambda+\psi_3(M_1-M_2))\sigma-\int_\sigma^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau-\int_0^\sigma \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\\
&\quad\leq \frac{\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a}\left(\int_0^a e^{(\lambda+\Theta)\sigma-\int_\sigma^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau-\int_0^\sigma \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\\
&\quad\leq \frac{\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\left(\int_0^a e^{(\lambda+\Theta)\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\\
&\quad= \frac{\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\left(e^{(\lambda+\Theta)a}-1\right)\mathrm{d}a\\
&\quad= \frac{\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha a-\psi_3 M_2 a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a - \int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right)\\
&\quad\leq \frac{\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\left(H - \int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right)\\
&\quad= \frac{\widetilde{S}}{\lambda+\Theta}\left(1 - \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right).
\end{aligned}$$

Así $\forall\lambda \geq 0$ tenemos que

$$\chi_2(\lambda) \geq 1 - \frac{\widetilde{S}}{\lambda+\Theta} + \frac{\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a. \tag{3.55}$$

Además esta cota es positiva gracias a (3.51).

Acotemos $\chi_3(\lambda)$, usando que $M_1 > M_2$ y $\mu_1(a,P) \geq \mu_2(a,P)$, tenemos que $\forall\lambda \geq 0$

$$\chi_3(\lambda) < H. \tag{3.56}$$

Acotemos $\chi_4(\lambda)$, usando (3.53) y la acotación de tipo exponencial negativa de K se tiene

$$
\begin{aligned}
\chi_4(\lambda) &\le \frac{q\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a}\left(\int_0^a e^{(\lambda+\Theta)\sigma-\int_\sigma^a \mu_1(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau-\int_0^\sigma \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\\
&\le \frac{q\widetilde{S}}{H}\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\left(\int_0^a e^{(\lambda+\Theta)\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a\\
&= \frac{q\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\left(e^{(\lambda+\Theta)a}-1\right)\\
&= \frac{q\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\left(1-\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente

$$
\chi_4(\lambda) \le \frac{q\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\left(1-\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right). \tag{3.57}
$$

Por tanto, por (3.54)-(3.57) y ser todas estas cotas positivas, tenemos que $\forall\lambda\ge 0$

$$
\begin{aligned}
\chi(\lambda) > &\left(1-\frac{\widetilde{S}}{\lambda+\Theta}+\frac{\widetilde{S}}{H(\lambda+\Theta)}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a-\frac{q\widetilde{S}}{\lambda+\Theta}\right)\\
&\times\left(1-\int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda+\psi_3 M_1)a-\int_0^a \mu_2(\tau,\widetilde{S})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a\right) := \Gamma_1(\lambda)\Gamma_2(\lambda).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $\Gamma_2(\lambda) > 0\ \forall\lambda\ge 0$.
Veamos que, $\Gamma_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda\ge 0$, entonces tendremos que $\chi(\lambda) > 0$. Se tiene que

$$
\Gamma_1(\lambda) \ge 1-\frac{\widetilde{S}}{\lambda+\Theta}(1+q) \quad \forall\lambda\ge 0.
$$

Luego, gracias a (3.51), se tiene que $\Gamma_1(\lambda) > 0\ \forall\lambda\ge 0$.

Por tanto bajo la hipótesis $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_{10})$ tenemos que para todo $\lambda\ge 0$, $\chi(\lambda) > 0$. □

Proposición 3.5.2. *El equilibrio* $(0,\tilde{s}(a),\psi_3)$ *es asintóticamente estable.*

Demostración. Gracias a la Proposición 3.5.1 nos falta ver que $\digamma(\lambda)$, definida en (3.48) no tiene raíces positivas. Bajo las condiciones que hemos supuesto tenemos que

$$
\frac{\partial\mu_2}{\partial P}(a,P) = n_2'(P), \quad \forall P\in\mathbb{R}_+.
$$

Luego, en este caso particular podemos escribir $\digamma(\lambda)$ como

$$
\begin{aligned}
\digamma(\lambda) &= \left(\lambda^{-1}\left(1-(\tilde{s}(0))^{-1}\int_0^\infty \beta(a)\tilde{s}(a)e^{-\lambda a}\mathrm{d}a\right)\right)\left(\lambda+\widetilde{S}\left(n_2'(\widetilde{S})+M_2\,A_\lambda\right)\right)\\
&:= \digamma_1(\lambda)\digamma_2(\lambda).
\end{aligned}
$$

Es fácil comprobar que $\digamma_1(\lambda)$ no tiene ceros con parte real positiva.
Busquemos entonces, las raíces de $\digamma_2(\lambda)$. Sea $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda$, se tiene que

$$\operatorname{Re}(\digamma_2(\lambda)) = \operatorname{Re}\lambda + n_2'(\widetilde{S})\widetilde{S} + \frac{\nu M_2 \widetilde{S}\psi_3(\operatorname{Re}\lambda + n\psi_3)}{(\operatorname{Re}\lambda + n\psi_3)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2},$$
$$\operatorname{Im}(\digamma_2(\lambda)) = \operatorname{Im}\lambda\left(1 - \frac{\widetilde{S}\nu M_2\psi_3}{(\operatorname{Re}\lambda + n\psi_3)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2}\right).$$

Por tanto si $\operatorname{Re}\lambda \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\digamma_2(\lambda)) > 0$, así que no hay autovalores con parte real positiva. Por consiguiente tenemos que el equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2\widetilde{S}}{n})$ es localmente asintóticamente estable. $\square$

Luego resumiendo los resultados obtenidos sobre la estabilidad e inestabilidad de los equilibrios, tenemos:

- Los equilibrios $(0,0,0)$ y $(0, s^*(a), 0)$ son inestables.
- El equilibrio $(0, 0, m/n)$ es
  - localmente asintóticamente estable si $\widetilde{R_0} < 1$;
  - inestable si $\widetilde{R_0} > 1$.
- El equilibrio $(0, \tilde{s}(a), \dfrac{m + \nu M_2\widetilde{S}}{n})$ es
  - inestable si:
    1. existe $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ tal que $\chi(\lambda_0) < 0$ con χ definida en (3.46);
    2. si $\digamma(0) < 0$, con $\digamma$ definida en (3.49);
  - localmente asintóticamente estable si $\digamma(it) \notin \mathbb{R}_-$ $\forall t \geq 0$.

CAPÍTULO 4

Análisis del comportamiento asintótico del modelo presa-depredador con datos no dependientes en edad

En el Capítulo anterior, estudiamos el comportamiento asintótico de los equilibrios libres de enfermedad del modelo presa-depredador con enfermedad en la presa. Para continuar con un estudio asintótico más general, es decir para hacer un estudio del comportamiento asintótico de todos los equilibrios, vamos a suponer en este Capítulo que los datos son independientes de la edad, y además supondremos que la tasa de natalidad depende de la población total.

4.1. Introducción

Consideraremos en el modelo (2.5) que:

- la tasa de infección y de recuperación, K y γ, respectivamente, son constantes (i.e. $K, \gamma \in \mathbb{R}_+$);
- la tasa de mortalidad de la presa, tanto de los individuos infectados como de los individuos sanos, μ_1 y μ_2, son independientes de la edad. Luego, para $i = 1, 2$,

  $$\mu_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

  tal que $\mu_1(P) > \mu_2(P)$, para todo $P \in \mathbb{R}_+$.
  Además, supondremos que las funciones μ_i son continuamente diferenciables, crecientes y verifican que

  $$\lim_{P \to +\infty} \mu_i(P) = +\infty.$$

- la tasa de natalidad de la presa, β, es tomada

  $$\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

  continuamente diferenciable, decreciente y verifica

  $$\lim_{P \to +\infty} \beta(P) = 0.$$

Nótese, que la dependencia de $\beta(P)$ hace que no esté incluida en las hipótesis del Capítulo anterior.

Estas hipótesis son "lógicas" biológicamente. En efecto, estas tasas independientes en edad corresponden a procesos en un hábitat duro, es decir que la supervivencia y el nacimiento de la especie no dependen de la edad de la especie, sino principalmente del número de individuos que habitan.

Teniendo en cuenta la independencia de la edad, el modelo (2.5) se transforma en éste:

$$
(4.1) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial i}{\partial a} + \mu_1(P(t))i(a,t) = KI(t)s(a,t) - \gamma i(a,t) - M_1 i(a,t)Y(t), \\
\dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial s}{\partial a} + \mu_2(P(t))s(a,t) = -KI(t)s(a,t) + \gamma i(a,t) - M_2 s(a,t)Y(t), \\
Y' = mY(t) - nY^2(t) + \nu M_1 I(t)Y(t) + \nu M_2 S(t)Y(t), \\
i(0,t) = q\beta(P(t))I(t), \\
s(0,t) = \beta(P(t))\big(S(t) + (1-q)I(t)\big), \\
i(a,0) = i_0(a), s(a,0) = s_0(a), Y(0) = Y_0,
\end{cases}
$$

donde, siguiendo las notaciones de los Capítulos precedentes, I,S y P, denotan la población total de individuos infectados, susceptibles y presa, es decir

$$
I(t) = \int_0^\infty i(a,t)\,\mathrm{d}a,\ S(t) = \int_0^\infty s(a,t)\,\mathrm{d}a \text{ y } P(t) = I(t) + S(t) = \int_0^\infty p(a,t)\,\mathrm{d}a.
$$

Ahora bien, integrando las dos primeras ecuaciones entre 0 y $+\infty$ con respecto a la variable edad, y teniendo en cuenta la hipótesis, $i(a,t), s(a,t) \to 0$ cuando $a \to +\infty$, obtenemos el siguiente sistema diferencial ordinario,

$$
(4.2) \qquad \begin{cases}
I' = q\beta(P)I - \mu_1(P)I + KIS - \gamma I - M_1 IY, \\
S' = \beta(P)\big(S + (1-q)I\big) - \mu_2(P)S - KIS + \gamma I - M_2 SY, \\
Y' = mY - nY^2 + \nu M_1 IY + \nu M_2 SY, \\
I(0) = I_0,\ S(0) = S_0,\ Y(0) = Y_0,
\end{cases}
$$

donde,

$$
I_0 = \int_0^\infty i_0(a)\,\mathrm{d}a \text{ y } S_0 = \int_0^\infty s_0(a)\,\mathrm{d}a.
$$

Nuestro objetivo principal en este Capítulo será el estudio del comportamiento global del sistema diferencial ordinario (4.2). Aunque, en realidad, haremos algo más: analizaremos el efecto que produce la entrada de un depredador en un modelo de epidemia. Para ello primero analizaremos el modelo suponiendo que no existe depredador, es decir sólo tenemos presa y después estudiaremos el modelo completo; comparando los resultados obtenidos.

Así en una primera etapa estudiaremos el comportamiento asintótico del modelo sin la existencia del depredador, es decir asumiremos que $Y \equiv 0$. En este caso tenemos un sistema de dimensión dos, lo cual nos permitirá, para el estudio del comportamiento asintótico, utilizar, por ejemplo, teoremas del tipo Poincaré-Bendixson (ver entre otros, [78]).

En una segunda etapa analizaremos el comportamiento asintótico del modelo completo, es decir del modelo (4.2). Puesto que este sistema diferencial es de dimensión tres no podemos aplicar algunos de los Teoremas que se aplicarán al caso sin depredador.

Un esquema a seguir de lo que haremos en este Capítulo es el siguiente: en la Sección 4.2 analizaremos el modelo sin depredador. Primero veremos condiciones para la existencia de equilibrios del problema asintótico asociado al modelo sin depredador. Continuaremos estudiando la estabilidad local y global de los equilibrios encontrados.

Posteriormente, en la Sección 4.3 analizaremos el modelo completo, es decir pondremos en juego la entrada de un depredador. Primero estudiaremos la existencia de equilibrios para dicho modelo. Llegaremos a probar, que bajo ciertas condiciones existe un número impar de equilibrios endémicos, (I^*, S^*, Y^*), lo cual se quedó abierto en el Capítulo anterior con los datos dependientes en edad. A continuación, estudiaremos las estabilidades local y global de los equilibrios.

Probaremos que la entrada del depredador puede ayudar a la extinción de la enfermedad perdurando los individuos sanos; esto puede ser interpretado como un control para eliminar la enfermedad.

Para concluir el Capítulo, veremos, por medio de un ejemplo, un rango completo de valores de K y M_1, tal que, sin la presencia del depredador la enfermedad persiste y con la llegada del depredador desaparece.

4.2. Estudio del modelo sin depredador

Como hemos comentado, primero vamos a estudiar el comportamiento asintótico del modelo (4.2) sin la existencia de depredador, es decir

$$\begin{cases} I' = q\beta(P)I + \mu_1(P)I + KIS - \gamma I, \\ S' = \beta(P)\big(S + (1-q)I\big) - \mu_2(P)S - KIS + \gamma I, \\ I(0) = I_0, S(0) = S_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

A lo largo de todo el Capítulo vamos a denotar,

$$\boxed{R_S := \mu_2(0) - \beta(0),\ R_I := \mu_1(0) - \beta(0).} \tag{4.4}$$

Evidentemente $R_S < R_I$.

Lema 4.2.1. *Existe un único punto, $P_S \geq 0$, tal que*

$$\mu_2(P_S) = \beta(P_S), \tag{4.5}$$

si y sólo si $R_S \leq 0$.

Existe un único punto, $P_I \geq 0$, tal que

$$\mu_1(P_I) = \beta(P_I), \tag{4.6}$$

si y sólo si $R_I \leq 0$.

En el caso de la existencia del punto P_I *se tiene que* $P_I < P_S$.

Demostración. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} F_S \ : \ \mathbb{R}_+ &\to \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ \mu_2(P) - \beta(P) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F_I \ : \ \mathbb{R}_+ &\to \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ \mu_1(P) - \beta(P) \end{aligned}$$

Gracias a las hipótesis de crecimiento y decrecimiento de las tasas de mortalidad y de natalidad, respectivamente, tenemos que tanto la función F_S como F_I son estrictamente crecientes, y además $F_S(P), F_I(P) \to +\infty$ cuando $P \to +\infty$. De aquí se sigue fácilmente el resultado.
Y puesto que, $F_I(P) > F_S(P)$ para todo $P \in \mathbb{R}_+$, se sigue que $P_I < P_S$. □

Proposición 4.2.2. *Para cada* $(I_0, S_0) \in \mathbb{R}^2_+$, *existe una única solución global de* (4.3), *que es positiva y acotada uniformemente.*

Demostración. Una aplicación directa del Teorema de Picard nos garantiza la existencia y unicidad de solución local para cada $(I_0, S_0) \in \mathbb{R}^2_+$. La positividad de la solución la obtenemos trivialmente. Efectivamente, tenemos que I verifica la siguiente ecuación diferencial,

$$I' = (q\beta(P) + \mu_1(P) + KS - \gamma)\, I,$$

y por tanto se tiene que I es positiva. Entonces, gracias a la positividad de la función β y de la constante γ, S verifica:

$$S' \geq (\beta(P) - \mu_2(P) - KI)\, S.$$

Por consecuencia, se tiene la positividad de la función S partiendo de un dato inicial positivo.

Veamos entonces la existencia de solución global para el sistema (4.3). De (4.3), y usando el hecho que $P = I + S$, se tiene que

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} P' = \beta(P)P - \mu_1(P)I - \mu_2(P)S, \\ \\ P(0) = P_0 := I_0 + S_0. \end{cases}$$

Gracias a la hipótesis $\mu_1 \geq \mu_2$, es fácil comprobar que

$$\text{(4.8)} \qquad (\beta(P(t)) - \mu_1(P(t)))P(t) \leq P'(t) \leq (\beta(P(t)) - \mu_2(P(t)))P(t).$$

Para $i = 1, 2$, consideramos los siguientes sistemas

$$\text{(EDO)}_i \qquad \begin{cases} \dot{x}_i = (\beta(x_i) - \mu_i(x_i))x_i \\ x_i(0) = P_0. \end{cases}$$

Así, por la desigualdad (4.8) y utilizando un Teorema de comparación (véase por ejemplo [60]), se tiene que

$$x_1(t) \leq P(t) \leq x_2(t)$$

en sus respectivos dominios de definición. Y puesto que β es decreciente y μ_2 es creciente, se llega a que

1. Si $R_S \geq 0$, entonces $\beta(r) < \mu_2(r)$ para todo $r \in (0, +\infty)$. Luego $x_2(t) \leq P_0$, para todo $t \in [0, +\infty)$. Por consiguiente,

$$0 < x_1(t) \leq P(t) \leq x_2(t) \leq P_0 \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

2. Si $R_S < 0$, entonces $x_2(t) \leq \text{máx}\{P_0, P_S\}$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Luego

$$0 < x_1(t) \leq P(t) \leq x_2(t) \leq \text{máx}\{P_0, P_S\} \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

Luego tenemos existencia y unicidad global de la solución, y además dicha solución está uniformemente acotada. $\square$

4.2.1. Existencia de equilibrios del modelo sin depredador

Como un primer paso para el estudio del comportamiento asintótico de (4.3) vamos a buscar los puntos de equilibrios de dicho sistema.
La ecuación que verifican los puntos estacionarios es la siguiente:

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{cases} \big(-q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - KS^* + \gamma\big)I^* = 0, \\ -\beta(P^*)\big(S^* + (1-q)I^*\big) + \mu_2(P^*)S^* = -KI^*S^* + \gamma I^*. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $I^* = P^* - S^*$ y combinando $(4.9)_1$ con $(4.9)_2$, entonces podemos escribir (4.9) como

$$\text{(4.10)} \qquad \begin{cases} \big(-q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - KS^* + \gamma\big)(P^* - S^*) = 0, \\ \big(\mu_2(P^*) - \mu_1(P^*)\big)S^* = \big(\beta(P^*) - \mu_1(P^*)\big)P^*. \end{cases}$$

A lo largo de toda la Sección, consideraremos las siguientes notaciones:

$$\text{(4.11)} \qquad \begin{aligned} &S(P) := \frac{\mu_1(P) - q\beta(P) + \gamma}{K} \\ &T_1 := \sup_{Q \in I_1} \{\mu_1'(Q) - q\beta'(Q)\} \text{ donde } I_1 := \begin{cases} (P_I, P_S) \text{ si } R_I \leq 0 \\ (0, P_S) \text{ si } R_I > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que $(P^*, S(P^*))$ es solución de (4.10).

Teorema 4.2.3. *El punto $E_{00} := (0, 0)$ es siempre un equilibrio, trivial, del sistema* (4.3)*.*

1. *Si $R_S \geq 0$, entonces el punto E_{00} es el único punto de equilibrio.*

2. *Si $R_S < 0$ entonces existe otro equilibrio, $E_{0S} := (0, P_S)$, es decir un equilibrio libre de enfermedad. Además, si suponemos que $K > T_1$, con T_1 definido en* (4.11)*, tenemos que*

   a) *Para $R_I \leq 0$, si*

   $$\text{(4.12)} \qquad K > K_1 := \frac{\mu_1(P_I) - q\beta(P_I) + \gamma}{P_I}$$

   entonces existe al menos otro equilibrio $E_{IS} := (I^*, S^*)$. Este tipo de equilibrios son conocidos como equilibrios endémicos.

b) *Para $R_I > 0$, entonces existe al menos otro equilibrio $E_{IS} := (I^*, S^*)$ si y sólo si*

$$K > K_2 := \frac{\mu_1(P_S) - q\beta(P_S) + \gamma}{P_S}. \tag{4.13}$$

Cuando el sistema (4.3) tiene equilibrios endémicos, entonces en realidad posee un número impar de dichos equilibrios.

Nota 4.2.4. *Obsérvese que K_1 puede ser expresado como*

$$K_1 := \frac{(1-q)\beta(P_I) + \gamma}{P_I},$$

puesto que $\mu_1(P_I) = \beta(P_I)$.

Demostración. La prueba de la existencia del equilibrio trivial E_{00} es obvia. Estudiemos la existencia de los otros equilibrios

1. Supongamos que $R_S > 0$. En este caso, por la Proposición 4.2.2, se tiene que

   $$\beta(P) < \mu_2(P), \text{ para todo } P \geq 0.$$

   Además si tenemos que existe algún equilibrio no trivial, (I^*, S^*), éste debe verificar que $S^* \leq P^*$. Luego no puede existir ningún punto que verifique la ecuación $(4.10)_2$, puesto que

   $$(\mu_2(P^*) - \mu_1(P^*))S^* \geq (\mu_2(P^*) - \mu_1(P^*))P^* > (\beta(P^*) - \mu_1(P^*))P^*.$$

   Así que si $R_S > 0$, el único equilibrio que existe es el trivial.

2. Supongamos ahora que $R_S = 0$. En este caso $P_S = 0$ y $\beta(P) < \mu_2(P)$ para todo $P > 0$. Razonando de manera análoga al caso anterior, tenemos que el único punto que verifica (4.10) es el equilibrio trivial.

3. Supongamos que $R_S < 0$. Veamos, primero, la existencia del equilibrio libre de enfermedad, E_{0S}, para todo valor de R_I. En este caso, se comprueba trivialmente que el punto $(0, P_S)$ verifica el sistema (4.10).

   Ahora, comprobemos la existencia de algún equilibrio no semitrivial, es decir del tipo (I^*, S^*), con I^* y S^* no nulos.
   Sea la aplicación $S(P)$ definida en (4.11), consideramos el conjunto

   $$\Sigma := \{P \in (0, +\infty) \text{ tal que } 0 < S(P) < P\}.$$

   Por (4.10), se tiene que $S^* = S(P^*)$, donde $P^* > 0$ verifica la igualdad

   $$J(P^*) = G(P^*),$$

   con J y G definidas por

   $$\begin{aligned} J(P) &:= (\mu_1(P) - \beta(P))\, P, \\ G(P) &:= (\mu_1(P) - \mu_2(P))\, S(P). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Necesariamente P^* tiene que pertenecer al conjunto Σ para poder tener I^* positiva y no nula. Luego, por $(4.10)_2$, $\beta(P^*)$ tiene que ser mayor que $\mu_2(P^*)$, y por consiguiente obtenemos que $P^* < P_S$.
Definimos

$$\begin{array}{rcl} H : I_1 & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & S(P) - P \end{array} \tag{4.15}$$

y puesto que hemos supuesto que $K > T_1$, entonces tenemos que H es una aplicación decreciente en el intervalo I_1.

a) Si $R_I \leq 0$, puesto que por hipótesis $\mu_2 \leq \mu_1$, si existe un punto estacionario, (I^*, S^*), por $(4.10)_2$, se debe verificar que $\beta(P^*) < \mu_1(P^*)$. Así tenemos que $P^* > P_I$. Por tanto,

$$P^* \in (P_I, P_S). \tag{4.16}$$

Así, si admitimos que $K > K_1$, con K_1 definido en (4.12), se llega a que $(P_I, P_S) \subseteq \Sigma$. En efecto, puesto que H definida en (4.15) es una función decreciente en (P_I, P_S) y verifica que

$$H(P_I) = S(P_I) - P_I < 0,$$

tenemos entonces que, $H(P) < 0$ para todo $P \in [P_I, P_S]$, es decir

$$0 < S(P) < P \text{ para todo } P \in [P_I, P_S]. \tag{4.17}$$

Y por consiguiente $(P_I, P_S) \subseteq \Sigma$.
Considerando las aplicaciones J y G definidas en (4.14), se comprueba fácilmente que

$$J(P_I) = 0 < G(P_I)$$

y, por (4.17), se tiene que

$$J(P_S) > G(P_S).$$

Así aplicando el Teorema de Bolzano se obtiene al menos un punto P^* tal que $J(P^*) = G(P^*)$, y además existen un número impar de intersecciones de los dos grafos.

b) Supongamos $R_I > 0$. Veamos que existe al menos un punto de equilibrio si y sólo si $K > K_2$, con K_2 definida por (4.13).

Supongamos que $K \leq K_2$ entonces se verifica que $H(P_S) \geq 0$, con H definida en (4.15) y por consiguiente $H(P) > H(P_S) \geq 0$ para todo $P \in (0, P_S)$. Luego tenemos que no existe $P \leq P_S$ tal que $P \in \Sigma$. Por tanto, no existe ningún equilibrio no semitrivial.

Ahora, supongamos $K > K_2$. Ya que hemos supuesto que $R_I > 0$, entonces se tiene que $H(0) > 0$ y además, puesto que $K > K_2$, se llega a que $H(P_S) < 0$. Entonces, existe $P_2 \in (0, P_S)$ tal que $H(P_2) = 0$, y consecuentemente tenemos que $S(P_2) = P_2$. Además se verifica que

$$S(P) > P \text{ para todo } P \in (0, P_2)$$
$$S(P) < P \text{ para todo } P \in (P_2, P_S].$$

Como tenemos que $P_2 < P_S$ entonces $\beta(P_2) > \mu_2(P_2)$ y además, $S(P_2) = P_2$ entonces

$$\begin{aligned} J(P_2) &= (\mu_1(P_2) - \beta(P_2))P_2 = (\mu_1(P_2) - \beta(P_2))S(P_2) \\ &< (\mu_1(P_2) - \mu_2(P_2))S(P_2) = G(P_2). \end{aligned}$$

Luego $J(P_2) < G(P_2)$ y además, por el caso anterior sabemos que se verifica que $J(P_S) > G(P_S)$. Por tanto, aplicando nuevamente el Teorema de Bolzano, existe $P^* \in (P_2, P_S)$, tal que $J(P^*) = G(P^*)$. Procediendo de manera análoga al caso anterior, existen un número impar de intersecciones de las funciones J y G en (P_2, P_S).

□

Ahora vamos a dar alguna condición suficiente para la unicidad del equilibrio no semitrivial E_{IS}.

Corolario 4.2.5. *Supongamos que existe al menos un equilibrio no semitrivial, E_{IS}. Entonces si*

$$K > \sup_{Q \in I_1} \left\{ \frac{\Big((\mu_1(Q) - \mu_2(Q))(-q\beta(Q) + \mu_1(Q))\Big)'}{(\mu_1'(Q) - \beta'(Q))Q + (\mu_1(Q) - \beta(Q))} \right\}, \tag{4.18}$$

donde I_1 está definido en (4.11), *existe un único equilibrio endémico, (I^*, S^*).*

Demostración. Es fácil ver que bajo esta condición se tiene que $J'(P) - G'(P) > 0$. Así, podemos afirmar que tenemos unicidad del equilibrio semitrivial. □

Nota 4.2.6. *Se pueden imponer otras condiciones para tener unicidad del equilibrio endémico. Por ejemplo,*

- *Para $R_I \leq 0$, si estamos en las condiciones para tener existencia del equilibrio E_{IS}, y además suponemos que β' es decreciente en (P_I, P_S) y $\beta(0) < -\beta'(P_I)P_I$, se comprueba que tenemos unicidad de equilibrio endémico.*
- *Para $R_I > 0$, si estamos en las condiciones para tener existencia del equilibrio E_{IS}, y además suponemos que β' es decreciente en (P_2, P_S) y $\beta(0) < -\beta'(P_2)P_2$, se comprueba que tenemos unicidad de equilibrio endémico.*

4.2.2. Estabilidad de los equilibrios

4.2.2.1. Estabilidad local de los equilibrios

Para estudiar la estabilidad local, utilizaremos las técnicas estándar de linealización de (4.3) alrededor de un equilibrio cualquiera, (I^*, S^*).

Sea (I^*, S^*) un equilibrio del sistema (4.3), denotamos

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &:= I(t) - I^*, \\ \Pi_2(t) &:= S(t) - S^*, \\ \Pi(t) &:= P(t) - P^* \equiv \Pi_1(t) + \Pi_2(t) \end{aligned}$$

Luego el problema linealizado resultante es:

$$(4.19)\quad \begin{cases} \Pi_1' = \Big(q\beta(P^*) - \mu_1(P^*) + q\beta'(P^*)I^* - \mu_1'(P^*)I^* + KS^* - \gamma\Big)\Pi_1(t) \\ \qquad + \Big(q\beta'(P^*)I^* - \mu_1'(P^*)I^* + KI^*\Big)\Pi_2(t), \\ \Pi_2' = \Big(\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + (1-q)\beta(P^*) - \mu_2'(P^*)S^* - KS^* + \gamma\Big)\Pi_1(t) \\ \qquad + \Big(\beta(P^*) + \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - \mu_2(P^*) - \mu_2'(P^*)S^* - KI^*\Big)\Pi_2(t). \end{cases}$$

Estableciendo las notaciones:

$$\begin{aligned} a_1 &:= -q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - KS^* + \gamma + (-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*))I^*, \\ a_2 &:= (-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*) - K)I^*, \\ b_1 &:= -\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - (1-q)\beta(P^*) + \mu_2'(P^*)S^* + KS^* - \gamma, \\ b_2 &:= -\beta(P^*) - \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + \mu_2(P^*) + \mu_2'(P^*)S^* + KI^*, \end{aligned}$$

el sistema diferencial ordinario (4.19) puede escribirse como:

$$\begin{cases} \Pi_1'(t) + a_1\Pi_1(t) + a_2\Pi_2(t) = 0, \\ \Pi_2'(t) + b_1\Pi_1(t) + b_2\Pi_2(t) = 0. \end{cases}$$

Ahora procedemos a calcular la estabilidad, para ello realizamos los siguientes cambios de variables:

$$\Pi_1(t) = e^{\lambda t}v_1, \quad \Pi_2(t) = e^{\lambda t}v_2,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v_i \in \mathbb{R}_+$. Luego el problema de autovalores resultante es,

$$\begin{cases} (\lambda + a_1)\, v_1 + a_2 v_2 = 0, \\ b_1 v_1 + (\lambda + b_2)\, v_2 = 0. \end{cases}$$

Y se tiene que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor si y sólo si verifica la siguiente ecuación característica:

$$(4.20)\qquad \chi(\lambda) \equiv \lambda^2 + (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Tenemos el siguiente resultado sobre estabilidad local, derivado del estudio del signo de los autovalores

Teorema 4.2.7.

1. *El equilibrio trivial, E_{00}, es localmente asintóticamente estable cuando $R_S > 0$ e inestable cuando $R_S < 0$.*

2. *El equilibrio libre de enfermedad, E_{0S}, supuesto que exista (es decir suponiendo que $R_S > 0$) es localmente asintóticamente estable cuando $K < K_2$ e inestable cuando $K > K_2$.*

3. *Bajo la hipótesis $K > T_1$ (donde T_1 es definido por (4.11)) cualquier equilibrio endémico, E_{IS}, es localmente asintóticamente estable.*

Demostración.

1. En el caso del equilibrio trivial, E_{00}, se tiene que

$$\begin{aligned} a_1 &= -q\beta(0) + \mu_1(0) + \gamma, \\ a_2 &= 0, \\ b_1 &= -(1-q)\beta(0) - \gamma, \\ b_2 &= \mu_2(0) - \beta(0). \end{aligned}$$

En este caso, obtenemos que los autovalores correspondientes son $\lambda_1 = q\beta(0) - \mu_1(0) - \gamma$ y $\lambda_2 = \beta(0) - \mu_2(0)$. Trivialmente se tiene el resultado, ya que

$$q\beta(0) - \mu_1(0) - \gamma < \beta(0) - \mu_1(0) < \beta(0) - \mu_2(0) = -R_S.$$

2. Ahora suponemos que existe el equilibrio libre de enfermedad, $E_{0S} := (0, P_S)$, es decir $R_S < 0$. En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} a_1 &= -q\beta(P_S) + \mu_1(P_S) - KP_S + \gamma, \\ a_2 &= 0, \\ b_1 &= (-\beta'(P_S) + \mu_2'(P_S) + K)P_S - (1-q)\beta(P_S) - \gamma, \\ b_2 &= (-\beta'(P_S) + \mu_2'(P_S))P_S. \end{aligned}$$

Y resolviendo, (4.20), en este caso, obtenemos que las raíces son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= KP_S - \mu_1(P_S) + q\beta(P_S) - \gamma \\ \lambda_2 &= (\beta'(P_S) - \mu_2'(P_S))P_S. \end{aligned}$$

Ahora bien, como la función β es decreciente y μ_2 es creciente, tenemos que λ_2 es negativo, y por tanto, si $K < K_2$ donde K_2 estaba definida en (4.13), es decir

$$K_2 := \frac{\mu_1(P_S) - q\beta(P_S) + \gamma}{P_S},$$

tenemos que $\lambda_1 < 0$, y contrariamente si $K > K_2$, entonces se tiene que $\lambda_1 > 0$; y de aquí el resultado.

3. Supongamos que $K > T_1$, y tenemos la existencia de algún equilibrio endémico. Veamos entonces que estos equilibrios son localmente asintóticamente estables.
En este caso sabemos que I^*, S^* y P^* verifican (4.9) y (4.10), luego en particular tenemos que

$$\begin{aligned} & -q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - KS^* + \gamma = 0, \\ & KI^* + \mu_2(P^*) - \beta(P^*) = ((1-q)\beta(P^*) + \gamma)\,\frac{I^*}{S^*}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= (-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*))I^*, \\ a_2 &= (-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*) - K)I^*, \\ b_1 &= -\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - \beta(P^*) + \mu_1(P^*)) + \mu_2'(P^*)S^*, \\ b_2 &= ((1-q)\beta(P^*) + \gamma)\,\frac{I^*}{S^*} - \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + \mu_2'(P^*)S^*. \end{aligned}$$

Así, puesto que las funciones μ_i, para $i = 1, 2$, son funciones crecientes y β es decreciente, se llega a que $a_1, b_2 > 0$.
También se tiene, por la demostración del Teorema 4.2.3, véase (4.16), que si

$$R_I \leq 0 \Rightarrow P^* \in [P_I, P_S] \Rightarrow \beta(P^*) < \mu_1(P^*),$$

y si

$$R_I > 0 \Rightarrow \beta(P) < \mu_1(P) \text{ para todo } P \geq 0.$$

Consecuentemente, $b_2 > 0$. Como hemos supuesto que $K > T_1$, entonces se tiene que $a_2 < 0$.
Por tanto, $(a_1 + b_2) > 0$ y $(a_1 b_2 - a_2 b_1) > 0$. Luego, la ecuación característica (4.20)

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^2 + (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

sólo puede tener raíces con parte real negativa. De aquí se sigue el resultado.

□

4.2.2.2. Estabilidad global

Teorema 4.2.8.

1. *El equilibrio trivial E_{00} es globalmente asintóticamente estable si $R_S > 0$.*
2. *El equilibrio libre de enfermedad, E_{0S}, supuesto que exista, es globalmente asintóticamente estable si $K < K_3$, donde*

$$K_3 := \begin{cases} \dfrac{\mu_1(P_I) - q\beta(P_I) + \gamma}{P_S} & \text{si } R_I \leq 0 \\ \dfrac{\mu_1(0) - q\beta(0) + \gamma}{P_S} & \text{si } R_I > 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

3. *Bajo la hipótesis $K > K_2$, si tenemos existencia y unicidad del equilibrio endémico E_{IS} entonces este equilibrio es globalmente asintóticamente estable.*

Nota 4.2.9. *Nótese que la estabilidad global del equilibrio E_{0S} no está en contradicción con el Teorema 4.2.7, puesto que $K_3 < K_2$. En efecto, sabemos que $0 < P_I < P_S$, y además por el crecimiento de la función μ_1 y el decrecimiento de la función β, se llega a que $K_3 < K_2$.*

Demostración.

1. Supongamos $R_S > 0$ y estudiemos la estabilidad global del equilibrio trivial E_{00}. Como $R_S > 0$, se tiene que $\beta(P(t)) < \mu_2(P(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Luego, como tenemos que P es positiva y gracias a (4.8), se llega a que

$$P(t) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Ahora bien, por la Proposición 4.2.2, tenemos que I y S son positivas, luego se sigue que si $R_S > 0$, entonces

$$I(t) \to 0 \;\text{ y }\; S(t) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Consecuentemente si $R_S > 0$, el equilibrio $(0,0)$ es globalmente asintóticamente estable.

2. Supongamos que $K < K_3$ y veamos la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad $(0, P_S)$.
Demostremos primero el caso $R_I \leq 0$. Luego, en este caso hemos supuesto que

$$q\beta(P_I) - \mu_1(P_I) - \gamma + KP_S < 0.$$

Ahora bien, como β y μ_1 son funciones continuas, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$q\beta(P_I - \delta) - \mu_1(P_1 - \delta) - \gamma + K(P_S + \delta) < 0. \tag{4.22}$$

Por otra parte, en este caso tenemos que, por la Proposición 4.2.2, las soluciones x_1 y x_2 del problema $(\mathrm{EDO})_1$ y $(\mathrm{EDO})_2$, respectivamente verifican

$$x_1(t) \to P_I \text{ cuando } t \to \infty$$
$$x_2(t) \to P_S \text{ cuando } t \to \infty.$$

Luego, por (4.8), dado $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$ tal que

$$P_I - \delta \leq P(t) \leq P_S + \delta, \text{ para todo } t \geq t_\delta.$$

Consecuentemente obtenemos que

$$I'(t) \leq (q\beta(P_I - \delta) - \mu_1(P_I - \delta) - \gamma + K(P_S + \delta))\, I(t),$$

así, de (4.22) sigue que

$$I(t) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene la misma convergencia para $R_I > 0$, si

$$K < \frac{\mu_1(0) - q\beta(0) + \gamma}{P_S},$$

pues en este caso se tiene que

$$0 \leq P(t) \leq P_S + \delta.$$

Por otra parte, tenemos que S verifica la ecuación diferencial no autónoma (introduciendo la variable temporal en la función $I(t)$)

$$S' = \beta(S + I(t))\big(S + (1-q)I(t)\big) - \mu_2(S + I(t))S - KI(t)S.$$

Ahora bien, como $I(t) \to 0$, entonces esta ecuación es asintóticamente estable, con ecuación límite

$$y' = (\beta(y) - \mu_2(y))y.$$

Usando que $R_S < 0$ se tiene que $y(t) \to P_S$ cuando $t \to \infty$, y gracias a la Proposición 1.4.4, se obtiene que

$$S(t) \to P_S \text{ cuando } t \to \infty.$$

Por tanto, el equilibrio $(0, P_S)$ es globalmente asintóticamente estable.

3. Supongamos la existencia y la unicidad del equilibrio endémico (I^*, S^*), y que $K > K_2$, en este caso tenemos que el equilibrio libre de enfermedad, E_{0S} es inestable, y puesto que para que exista el equilibrio endémico se debe verificar que $R_S < 0$, entonces el equilibrio trivial, E_{00}, también es inestable.

   Para estudiar la estabilidad global del equilibrio E_{IS}, vamos a aplicar el criterio de Dulac (ver Teorema 1.4.3) al sistema plano (4.3). Consideramos el abierto

$$\Omega := \{I > 0, S > 0\}$$

   y la función $\mathbf{f}$, como

$$\mathbf{f} = (F, G)^T,$$

   donde

$$\begin{aligned} F(I,S) &= q\beta(I+S)I - \mu_1(I+S)I + KIS - \gamma I, \\ G(I,S) &= \beta(I+S)\big(S + (1-q)I\big) - \mu_2(I+S)S - KIS + \gamma I. \end{aligned}$$

   Luego el sistema (4.3), puede ser escrito como

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x),$$

   con $x := (I,S)^T$.

   Como multiplicador de Dulac consideramos la función $B := \dfrac{1}{IS}$. Luego, se tiene que

$$\nabla \cdot (B\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{F(I,S)}{IS}\right) + \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{G(I,S)}{IS}\right),$$

   y así

$$\nabla \cdot (B\mathbf{f}) = \beta'(I+S)\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{S}\right) - \frac{\mu_1'(I+S)}{S} - \frac{\mu_2'(I+S)}{I} - \frac{\beta(I+S)}{S^2}(1-q)\frac{\gamma}{S^2}.$$

   Claramente, $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$ no cambia de signo en Ω, pues es siempre negativo. Entonces, aplicando el criterio de Dulac, se tiene que el sistema (4.3) no tiene soluciones periódicas ni ciclos en Ω y el Teorema de Poincaré-Bendixson nos dice que en este caso el conjunto ω-límite consiste sólo de los puntos de equilibrios, y puesto que hemos visto que tanto el equilibrio trivial, E_{00}, como el equilibrio semitrivial, E_{0S} son inestables se tiene el resultado.

□

4.3. Estudio del modelo con depredador

Ahora vamos a estudiar que es lo que ocurre cuando aparece un depredador en nuestro modelo. Por tanto, vamos a estudiar el modelo completo (4.2).

A lo largo del resto del Capítulo, utilizamos la siguiente notación

$$\boxed{R_{SY} := \mu_2(0) - \beta(0) + \frac{M_2 m}{n}, \; R_{IY} := \mu_1(0) - \beta(0) + \frac{M_1 m}{n}.} \tag{4.23}$$

Obsérvese que $R_{IY} > R_{SY}$.

Lema 4.3.1. *Existe un único punto,* $P_{SY} \geq 0$*, tal que*

$$-\beta(P_{SY}) + \mu_2(P_{SY}) + \frac{M_2}{n}\,(m + \nu M_2 P_{SY}) = 0, \tag{4.24}$$

si y sólo si $R_{SY} \leq 0$*.*

Existe un único punto, $P_{IY} \geq 0$*, tal que*

$$-\beta(P_{IY}) + \mu_1(P_{IY}) + \frac{M_1}{n}\,(m + \nu M_1 P_{IY}) = 0, \tag{4.25}$$

si y sólo si $R_{IY} \leq 0$*.*

En el caso de la existencia del punto P_{IY} *se tiene que* $P_{IY} < P_{SY}$*.*

Demostración. Análogamente a la demostración del Lema 4.2.1, consideremos las funciones

$$\begin{array}{rcccl} F_{SY} & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \mu_2(P) - \beta(P) + \dfrac{M_2}{n}\,(m + \nu M_2 P) \\ F_{IY} & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \mu_1(P) - \beta(P) + \dfrac{M_1}{n}\,(m + \nu M_1 P) \end{array} \tag{4.26}$$

Es fácil comprobar que tanto la función F_{SY} como la función F_{IY} son estrictamente crecientes, y además $F_{SY}(P), F_{IY}(P) \to +\infty$ cuando $P \to +\infty$. De aquí se sigue fácilmente el resultado.

Puesto que, $F_{IY}(P) > F_{SY}(P)$ para todo $P \in \mathbb{R}_+$, se tiene que $P_{IY} < P_{SY}$. □

Nota 4.3.2.

Si $R_{SY} \leq 0$*, entonces* $R_S < 0$*, con* R_S *definido en* (4.4)*. Además, en este caso, se comprueba que*

$$P_{SY} < P_S.$$

Análogamente, si $R_{IY} \leq 0$*, entonces* $R_I < 0$*, con* R_I *definido en* (4.4)*. Además, en este caso, se comprueba que*

$$P_{IY} < P_I.$$

Proposición 4.3.3. *Para cada* $(I_0, S_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2_+$*, existe una única solución global de* (4.2)*, que es positiva y acotada uniformemente.*

Demostración. Una aplicación directa del Teorema de Picard nos garantiza la existencia y unicidad de solución local para cada $(I_0, S_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2_+$. Además, gracias a la forma del sistema, razonando de manera similar a la prueba de la Proposición 4.2.2, se comprueba fácilmente que $I(t), S(t), Y(t) \geq 0$.

Para el estudio de la existencia global y de la acotación uniforme, tenemos que por (4.2), y usando que $P = I + S$,

$$\begin{cases} P' = \beta(P)P - \mu_1(P)I - \mu_2(P)S - M_1 IY - M_2 SY, \\ Y' = (m + \nu M_1 I + \nu M_2 S - nY)\,Y, \\ P(0) = I_0 + S_0 := P_0,\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Ahora bien, es fácil ver que

$$\begin{aligned}P' &\leq (\beta(P) - \mu_2(P))P \\ Y' &\leq (m + \nu M_1 P - nY)\,Y.\end{aligned}$$

Luego, considerando el sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = (\beta(x) - \mu_2(x))x, \\ \dot{z} = (m + \nu M_1 x - nz)\,z, \\ x(0) = P_0,\ z(0) = Y_0. \end{cases}$$

se tiene que tanto x como z están acotados uniformemente y además, se verifica que $0 \leq P(t) \leq x(t)$ y $0 \leq Y(t) \leq z(t)$, para todo $t \geq 0$.

Si $R_S < 0$, entonces se tiene que $x(t) \to P_S$ cuando $t \to +\infty$, consecuentemente, dado $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$, tal que para todo $t \geq t_\delta$ se verifica

$$0 \leq P(t) \leq P_S + \delta. \tag{4.28}$$

También se verifica que

$$(m - nY)\,Y \leq Y'.$$

Consideramos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = (m - nx)x, \\ x(0) = Y_0, \end{cases} \tag{4.29}$$

claramente se verifica que

$$x(t) \to \frac{m}{n}.$$

Luego, dado $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$, tal que para todo $t \geq t_\delta$ se verifica

$$Y(t) \geq \frac{m}{n} - \delta. \tag{4.30}$$

□

Ahora vamos a intentar encontrar una cota más óptima en el caso $R_{SY} \leq 0$. Gracias a las hipótesis $\mu_1 > \mu_2$, $M_1 \leq M_2$ y el sistema (4.27), es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}(\beta(P) - \mu_1(P) - M_1 Y)P \leq P' &\leq (\beta(P) - \mu_2(P) - M_2 Y)P \\ (m - nY)\,Y \leq Y' &\leq (m + \nu M_1 P - nY)\,Y.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Consideramos x la solución de la ecuación diferencial (4.29), claramente se verifica que

$$x(t) \geq \min\left\{Y_0, \frac{m}{n}\right\} := Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}}.$$

Luego por (4.31), tenemos que

$$Y(t) \geq Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}},\ \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.32}$$

Así, sigue que

$$P'(t) \leq (\beta(P(t)) - \mu_2(P(t)) - M_2 Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}})P(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Ahora consideramos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{z} = \left(\beta(z) - \mu_2(z) - M_2 Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}}\right) z, \\ z(0) = P_0. \end{cases}$$

Supongamos que $R_{SY} \leq 0$, en el otro caso se razona de manera análoga, diferenciando entre $Y_0 \leq m/n$ e $Y_0 > m/n$.

Si $R_{SY} \leq 0$, entonces

$$\beta(0) - \mu_2(0) - M_2 Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}} \geq 0,$$

por consiguiente, razonando como en el Lema anterior, se tiene que existe $P_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}} \geq 0$ tal que

$$\beta(P_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}}) - \mu_2(P_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}}) - M_2 Y_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}} = 0, \tag{4.33}$$

además se tiene que

$$P_{SY} < P_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}} < P_S.$$

Así gracias a (4.31), tenemos que si $R_{SY} \leq 0$, entonces

$$P(t) \leq \text{máx}\left\{P_0, P_{\{Y_0, \frac{m}{n}\}}\right\} := Y_S, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.34}$$

Ahora por (4.31) y (4.34), se llega a que

$$Y' \leq (m + \nu M_1 Y_S - nY)\, Y.$$

Consideramos, en primer lugar, la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = (m + \nu M_1 Y_S - nx)\, x, \\ x(0) = Y_0, \end{cases}$$

así, obtenemos que

$$x(t) \leq \text{máx}\left\{Y_0, \frac{m + \nu M_1 Y_S}{n}\right\} := Y_I.$$

Consecuentemente

$$Y(t) \leq Y_I,$$

por tanto,

$$P'(t) \geq (\beta(P(t)) - \mu_1(P(t)) - M_1 Y_I)P(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Ahora consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{z} = (\beta(z) - \mu_1(z) - M_1 Y_I)\, z, \\ z(0) = P_0. \end{cases}$$

Definimos

$$\boxed{R_{Y_I} := \mu_1(0) - \beta(0) + M_1 Y_I.} \tag{4.35}$$

Puesto que β es decreciente y μ_1 es creciente, tenemos que

1. Si $R_{Y_I} \geq 0$, entonces $\beta(r) < \mu_1(r) + M_1 Y_I$ para todo $r \in (0, +\infty)$. Luego $z(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, y en este caso, tenemos que

$$0 < P(t) \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

2. Si $R_{Y_I} < 0$, entonces tenemos que existe P_{Y_I} tal que

$$\mu_1(P_{Y_I}) - \beta(P_{Y_I}) + M_1 Y_I = 0. \tag{4.36}$$

   Además, se tiene que $P_{Y_I} < P_{IY}$.

   En este caso tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = P_{Y_I}.$$

   Por consiguiente, dado $\delta > 0$ existe t_δ tal que para todo $t \geq t_\delta$,

$$P(t) \geq P_{Y_I} - \delta.$$

Resumiendo tenemos que

Lema 4.3.4.

1. Si $R_{SY} > 0$, entonces

$$0 < P(t) < \begin{cases} P_0 \text{ si } R_S > 0 \\ \max\{P_0, P_S\} \text{ si } R_S \leq 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0.$$

2. Si $R_{SY} \leq 0$, entonces

$$0 < P(t) \leq Y_S, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Si además $R_{Y_I} < 0$, entonces dado $\delta > 0$ existe t_δ tal que para todo $t \geq t_\delta$,

$$P(t) \geq P_{Y_I} - \delta.$$

4.3.1. Existencia de equilibrios

Como hicimos en el caso sin depredador, lo primero que vamos a hacer es buscar los equilibrios del sistema (4.2). Denotamos (I^*, S^*, Y^*) un equilibrio y por $P^* = I^* + S^*$. Así, el problema estacionario asociado al sistema (4.2) es,

$$\begin{cases} -q\beta(P^*)I^* + \mu_1(P^*)I^* = KI^*S^* - \gamma I^* - M_1 I^* Y^*, \\ -\beta(P^*)\big(S^* + (1-q)I^*\big) + \mu_2(P^*)S^* = -KI^*S^* + \gamma I^* - M_2 S^* Y^*, \\ 0 = mY^* - n(Y^*)^2 + \nu M_1 I^* Y^* + \nu M_2 S^* Y^*. \end{cases} \tag{4.37}$$

Procediendo de manera análoga a la Sección anterior, es decir, sustituyendo $I^* = P^* - S^*$, y combinando las ecuaciones $(4.37)_1$ y $(4.37)_2$, se tiene

$$\begin{cases} \big(-q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - KS^* + \gamma + M_1 Y^*\big)(P^* - S^*) = 0, \\ \big(\mu_2(P^*) - \mu_1(P^*) + (M_2 - M_1)Y^*\big)S^* = \big(\beta(P^*) - \mu_1(P^*) - M_1 Y^*\big)P^*, \\ mY^* - n(Y^*)^2 + \nu M_1 P^* Y^* + \nu(M_2 - M_1)S^* Y^* = 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Resolviendo la ecuación $(4.37)_3$, se encuentran dos posibles puntos Y^* que verifican la ecuación

$$Y^* = 0 \tag{4.39}$$

$$Y^* = \frac{m + \nu M_1 P^* + \nu(M_2 - M_1)S^*}{n}. \tag{4.40}$$

La existencia de los equilibrios para $Y^* = 0$ fue estudiada en la Sección anterior. Luego nosotros estudiaremos en esta Sección la existencia de los equilibrios para Y^* verificando (4.40).

Definimos las siguientes funciones,

$$\begin{aligned} F_S \ : \ \mathbb{R}_+ &\to \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ \mu_2(P) - \beta(P) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_I \ : \ \mathbb{R}_+ &\to \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ \mu_1(P) - \beta(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \ : \ \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ S(P) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Y \ : \ \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ P &\mapsto \ Y(P), \end{aligned}$$

con

$$S(P) := \frac{-q\beta(P) + \mu_1(P) + \gamma + \dfrac{M_1 m}{n} + \dfrac{\nu M_1^2}{n} P}{K + \dfrac{M_1 \nu (M_1 - M_2)}{n}}, \tag{4.41}$$

$$Y(P) := \frac{m + \nu M_1 P + \nu(M_2 - M_1)S(P)}{n}. \tag{4.42}$$

Si nos fijamos en estas dos funciones y encontramos un $P^* > 0$ tal que verifique $(4.38)_2$ con $S^* = S(P^*)$ e $Y^* = Y(P^*)$, y además que $P^* > S(P^*)$ entonces tendremos que $(P^* - S(P^*), S(P^*), Y(P^*))$ es un equilibrio endémico del sistema (4.2).

Denotemos,

$$T_2 := \sup_{Q \in I_2} \{-q\beta'(Q) + \mu_1'(Q) + \frac{\nu M_1 M_2}{n}\} \text{ donde } I_2 := \begin{cases} (P_{IY}, P_{SY}) \text{ si } R_{IY} \leq 0 \\ (0, P_{SY}) \text{ si } R_{IY} > 0. \end{cases} \tag{4.43}$$

Como la existencia de equilibrios sin depredador, es decir $Y^* = 0$, fue analizada en la Sección anterior, vamos a ver un resultado de existencia de equilibrios con $Y^* \neq 0$.

Teorema 4.3.5. *El punto $E_{00Y} := (0, 0, m/n)$ es siempre un punto crítico del sistema* (4.2).

1. *Si $R_{SY} \geq 0$, entonces E_{00Y} es el único punto de equilibrio, con persistencia del depredador, para el sistema* (4.2).

2. *Si $R_{SY} < 0$, entonces existe otro equilibrio,*

$$E_{0SY} := (0, P_{SY}, (m + \nu M_2 P_{SY})/n),$$

es decir un equilibrio libre de enfermedad. Si además suponemos que $K > T_2$, con T_2 definido en (4.43)*, se tiene que*

a) *Para $R_{IY} \leq 0$, si*

$$K > K_4 := \frac{\mu_1(P_{IY}) - q\beta(P_{IY}) + \gamma + \dfrac{M_1 m}{n}}{P_{IY}} + \frac{\nu M_1 M_2}{n} \tag{4.44}$$

entonces existe al menos otro equilibrio endémico (I^*, S^*, Y^*).

b) *Para $R_{IY} > 0$, entonces existe al menos otro equilibrio endémico (I^*, S^*, Y^*) si y sólo si*

$$K > K_5 := \frac{\mu_1(P_{SY}) - q\beta(P_{SY}) + \gamma + \dfrac{M_1 m}{n}}{P_{SY}} + \frac{\nu M_1 M_2}{n}. \tag{4.45}$$

Cuando el sistema (4.2) tiene equilibrios endémicos, entonces en realidad posee un número impar de dichos equilibrios.

Nota 4.3.6. *Obsérvese que gracias a la definición del punto P_{IY}, K_4 puede escribirse como*

$$K_4 := \frac{(1-q)\beta(P_{IY}) + \gamma}{P_{IY}} + \frac{\nu M_1}{n}(M_2 - M_1).$$

Demostración. La demostración es parecida a la del Teorema 4.2.3, aunque un poco más complicada.

La existencia del punto de equilibrio E_{00Y} es trivial.

1. Veamos ahora la existencia del equilibrio libre de enfermedad, E_{0SY}, y comprobemos que un condición necesaria y suficiente es que $R_{SY} < 0$.

   Supongamos que existe un equilibrio semitrivial, $(0, P^*, Y^*)$. Entonces se tiene que

   $$S^* = P^* \text{ e } Y^* = Y(P^*) = \frac{m + \nu M_2 P^*}{n}.$$

   Además se debe verificar la ecuación $(4.38)_2$, es decir, en este caso tenemos

   $$\mu_2(P^*) - \mu_1(P^*) + (M_2 - M_1)Y^* = \beta(P^*) - \mu_1(P^*) - M_1 Y^*$$
   $$\Updownarrow$$
   $$\mu_2(P^*) + M_2 Y^* = \beta(P^*).$$

   Luego sustituyendo el valor de Y^*, se llega a que P^* debe verificar

   $$\mu_2(P^*) - \beta(P^*) + \frac{M_2}{n}(m + \nu M_2 P^*) = 0.$$

   Ahora bien, por la definición de F_{SY} en (4.26), en realidad P^* debe ser un cero de la función F_{SY}. Y gracias al Lema 4.3.1, se tiene que la función F_{SY} tiene una única raíz positiva si y sólo si, $R_{SY} < 0$, y en este caso la raíz es P_{SY}.

   Por tanto una condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio libre de enfermedad E_{0SY} es que $R_{SY} < 0$; y además en este caso tenemos unicidad de equilibrio libre de enfermedad.

2. Continuemos viendo que una condición necesaria para la existencia de equilibrio endémico es que $R_{SY} < 0$.

   Definimos las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcl} G_1 : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & G_1(P) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} G_2 : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & G_2(P), \end{array}$$

   con

$$\begin{aligned} G_1(P) &:= \mu_1(P) + M_1 Y(P) - \beta(P), \\ G_2(P) &:= \mu_2(P) + M_2 Y(P) - \beta(P), \end{aligned} \tag{4.46}$$

   donde $Y(P)$ está definida en (4.42).

   Estamos buscando un equilibrio endémico del sistema (4.2), (I^*, S^*, Y^*), luego debe existir un $P^* > 0$ tal que

$$S^* = S(P^*), Y^* = Y(P^*), P^* > S(P^*) \text{ e } I^* = P^* - S(P^*),$$

   donde P^* verifica la ecuación $(4.38)_2$. Es decir, si definimos el conjunto

$$\Sigma := \{P \in (0, +\infty) \text{ tal que } 0 < S(P) < P\},$$

   entonces $P^* \in \Sigma$, y además debe verificar la igualdad

$$J(P^*) = G(P^*), \tag{4.47}$$

   con J y G definidas por

$$\begin{array}{rcl} J : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & G_1(P)P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} G : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & (G_1(P) - G_2(P))\, S(P), \end{array} \tag{4.48}$$

   con G_1 y G_2 definidas en (4.46). Claramente se tiene que, $G_1(P) > G_2(P)$ para todo $P \geq 0$. Ahora bien, como estamos buscando soluciones $P^* \in \Sigma$, se observa que $G(P) \geq 0$ en Σ, luego para tener la igualdad (4.47), se debe verificar que $J(P^*) > 0$. Además, para $P \in \Sigma$ tenemos que

$$G(P) = (G_1(P) - G_2(P))S(P) < (G_1(P) - G_2(P))P = J(P) - G_2(P)P.$$

   Así, para que se verifique (4.47), P^* debe cumplir que

$$G_2(P^*) \leq 0. \tag{4.49}$$

   Ahora bien, como estamos buscando soluciones en Σ, se tiene que

$$Y(P) > \frac{m + \nu M_2 P}{n} \quad \forall\, P \in \Sigma.$$

   Así,

$$G_2(P) > \mu_2(P) + \frac{M_2}{n}(m + \nu M_2 P) - \beta(P) = F_{SY}(P) \quad \forall\, P \in \Sigma, \tag{4.50}$$

donde F_{SY} fue definida en (4.26). Luego una condición necesaria para tener la existencia del equilibrio endémico es que $R_{SY} < 0$, además en este caso tenemos que $P^* < P_{SY}$.

También hemos supuesto que $K > T_2$, con T_2 definido en (4.43), luego fácilmente se comprueba que la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} H: & I_2 & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & H(P) := S(P) - P \end{array} \tag{4.51}$$

es decreciente donde $I_2 := (P_{IY}, P_{SY})$ si $R_{IY} \leq 0$ e $I_2 := (0, P_{SY})$ si $R_{IY} > 0$.

a) Para $R_{IY} \leq 0$, se tiene que $P^* \in (P_{IY}, P_{SY})$. En efecto, hemos visto que $J(P^*) > 0$, luego en particular $G_1(P^*) > 0$. Pero G_1 verifica que

$$G_1(P^*) < F_{IY}(P^*),$$

luego $F_{IY}(P^*) > 0$, y así $P^* > P_{IY}$.
Veamos primero que

$$(P_{IY}, P_{SY}) \subseteq \Sigma.$$

En efecto, se tiene que

$$S(P) > \frac{F_{IY}(P)}{K + \dfrac{M_1\nu(M_1 - M_2)}{n}},$$

luego $S(P_{IY}) > 0$. Además, tenemos que la función H, definida en (4.51), es decreciente en (P_{IY}, P_{SY}). Así que

$$H(P) := S(P) - P < S(P_{IY}) - P_{IY}, \ \forall\, P \in (P_{IY}, P_{SY}).$$

Ahora bien, puesto que $K > K_4$, es fácil ver que

$$S(P_{IY}) < P_{IY}.$$

Por tanto, $S(P) < P$, y consecuentemente

$$(P_{IY}, P_{SY}) \subseteq \Sigma.$$

También se verifica que $J(P_{IY}) < G(P_{IY})$, puesto que

$$J(P_{IY}) = \frac{\nu M_1}{n}(M_2 - M_1)S(P_{IY}) < 0 < G(P_{IY}).$$

Por otra parte, $J(P_{SY}) > G(P_{SY})$. En efecto, por (4.50), se tiene que

$$G_2(P_{SY}) > F_{SY}(P_{SY}) = 0,$$

y puesto que $S(P_{SY}) < P_{SY}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} G(P_{SY}) &= (G_1(P_{SY}) - G_2(P_{SY}))S(P_{SY}) < (G_1(P_{SY}) - G_2(P_{SY}))P_{SY} \\ &< G_1(P_{SY})P_{SY} = J(P_{SY}). \end{aligned}$$

Luego aplicando el Teorema de Bolzano, se tiene que existe al menos un punto $P^* \in (P_{IY}, P_{SY})$ tal que $J(P^*) = G(P^*)$. Y además existe un número impar de puntos que verifican esta igualdad.

b) Demostremos que para $R_{IY} > 0$, existe al menos un equilibrio endémico si y sólo si $K > K_5$. Hemos visto que si existe un equilibrio endémico, se debe verificar que $P^* \leq P_{SY}$ y además $P^* \in \Sigma$.

Supongamos que $K \leq K_5$, entonces no existe $P^* \in (0, P_{SY})$ tal que $P^* \in \Sigma$. En efecto, puesto que la función H, definida en (4.51), es decreciente en $(0, P_{SY})$, tenemos que

$$S(P) - P > S(P_{SY}) - P_{SY} \ \forall \, P \in (0, P_{SY}).$$

Ahora bien, si $K \leq K_5$, entonces $S(P_{SY}) \geq P_{SY}$ y por tanto,

$$S(P) > P \ \forall \, P \in (0, P_{SY}).$$

Consecuentemente K debe ser mayor que K_5.

Supongamos ahora que $K > K_5$, y veamos que existe al menos un equilibrio endémico. En este caso se tiene que $H(0) > 0$ y además, puesto que $K > K_5$, se llega a que $H(P_{SY}) < 0$. Entonces, existe $\widetilde{P}_2 \in (0, P_{SY})$ tal que $H(\widetilde{P}_2) = 0$, y consecuentemente $S(\widetilde{P}_2) = \widetilde{P}_2$, y se verifica que

$$S(P) > P \text{ para todo } P \in (0, \widetilde{P}_2) \text{ y } S(P) < P \text{ para todo } P \in (\widetilde{P}_2, P_{SY}].$$

Como tenemos que $S(\widetilde{P}_2) = \widetilde{P}_2$, entonces

$$Y(\widetilde{P}_2) = \frac{m + \nu M_2 \widetilde{P}_2}{n}$$

y además, $\widetilde{P}_2 < P_{SY}$ entonces $F_{SY}(\widetilde{P}_2) < 0$ y por tanto

$$-\beta(\widetilde{P}_2) < -\mu_2(\widetilde{P}_2) - \frac{M_2}{n}\left(m + \nu M_2 \widetilde{P}_2\right) = -\mu_2(\widetilde{P}_2) - \frac{M_2}{n} Y(\widetilde{P}_2).$$

Entonces se tiene que $J(\widetilde{P}_2) < G(\widetilde{P}_2)$, en efecto, pues

$$\begin{aligned} J(P_2) &= G_1(\widetilde{P}_2)\widetilde{P}_2 = (\mu_1(\widetilde{P}_2) - \beta(\widetilde{P}_2) + M_1 \widetilde{P}_2) S(\widetilde{P}_2) \\ &< (\mu_1(P_2) - \mu_2(P_2) + (M_1 - M_2) Y(\widetilde{P}_2)) S(\widetilde{P}_2) = G(\widetilde{P}_2). \end{aligned}$$

Además, por el caso anterior, se tiene que $J(P_{SY}) > G(P_{SY})$. Por tanto, aplicando nuevamente el Teorema de Bolzano, existe un $P^* \in (\widetilde{P}_2, P_{SY})$, tal que $J(P^*) = G(P^*)$. Además, existe un número impar de puntos que verifican esta igualdad.

□

4.3.2. Estabilidad de los equilibrios

4.3.2.1. Estabilidad local de los equilibrios

Para estudiar la estabilidad linealizamos alrededor del equilibrio (I^*, S^*, Y^*). Denotamos,

$$\mathbf{\Pi_1}(t) := I(t) - I^*, \quad \mathbf{\Pi_2}(t) := S(t) - S^*, \quad \mathbf{\Pi_3}(t) := Y(t) - Y^*.$$

Luego el problema linealizado resultante es:

$$
(4.52)\quad \begin{cases}
\mathbf{\Pi_1}' = \Big(q\beta(P^*) - \mu_1(P^*) + q\beta'(P^*)I^* - \mu_1'(P^*)I^* + KS^* - \gamma - M_1Y^*\Big)\mathbf{\Pi_1} \\
\qquad + \Big(q\beta'(P^*)I^* - \mu_1'(P^*)I^* + KI^*\Big)\mathbf{\Pi_2} \\
\qquad - M_1I^*\mathbf{\Pi_3}, \\
\mathbf{\Pi_2}' = \Big(\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + (1-q)\beta(P^*) - \mu_2'(P^*)S^* - KS^* + \gamma\Big)\mathbf{\Pi_1} \\
\qquad + \Big(\beta(P^*) + \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - \mu_2(P^*) - \mu_2'(P^*)S^* - KI^* - M_2Y^*\Big)\mathbf{\Pi_2} \\
\qquad - M_2S^*\mathbf{\Pi_3}, \\
\mathbf{\Pi_3}' = \nu M_1Y^*\mathbf{\Pi_1} + \nu M_2Y^*\mathbf{\Pi_2} + \Big(m - 2nY^* + \nu M_1I^* + \nu M_2S^*\Big)\mathbf{\Pi_3}.
\end{cases}
$$

Establecemos las siguientes notaciones:

$$
(4.53)\quad \begin{aligned}
a_1 &:= \left(-q\beta(P^*) + \mu_1(P^*) - q\beta'(P^*)I^* + \mu_1'(P^*)I^* - KS^* + \gamma + M_1Y^*\right), \\
a_2 &:= (-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*) - K)I^*, \\
a_3 &:= M_1I^*, \\
b_1 &:= -\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - (1-q)\beta(P^*) + \mu_2'(P^*)S^* + KS^* - \gamma, \\
b_2 &:= -\beta(P^*) - \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + \mu_2(P^*) + \mu_2'(P^*)S^* + KI^* + M_2Y^*, \\
b_3 &:= M_2S^*, \\
c_1 &:= -\nu M_1Y^*, \\
c_2 &:= -\nu M_2Y^*, \\
c_3 &:= -m + 2nY^* - \nu M_1I^* - \nu M_2S^*,
\end{aligned}
$$

luego el sistema diferencial ordinario (4.52) puede escribirse como:

$$
\begin{cases}
\mathbf{\Pi_1}'(t) + a_1\mathbf{\Pi_1}(t) + a_2\mathbf{\Pi_2}(t) + a_3\mathbf{\Pi_3}(t) = 0, \\
\mathbf{\Pi_2}'(t) + b_1\mathbf{\Pi_1}(t) + b_2\mathbf{\Pi_2}(t) + b_3\mathbf{\Pi_3}(t) = 0, \\
\mathbf{\Pi_3}'(t) + c_1\mathbf{\Pi_1}(t) + c_2\mathbf{\Pi_2}(t) + c_3\mathbf{\Pi_3}(t) = 0.
\end{cases}
$$

Ahora procedemos a calcular la estabilidad, para ello realizamos los siguientes cambios de variables:

$$
\mathbf{\Pi_1}(t) = e^{\lambda t}v_1, \quad \mathbf{\Pi_2}(t) = e^{\lambda t}v_2 \text{ y } \quad \mathbf{\Pi_3}(t) = e^{\lambda t}v_3,
$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v_i \in \mathbb{R}_+$. Así, el problema de autovalores resultante es,

$$
\begin{cases}
(\lambda + a_1)\,v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0, \\
b_1v_1 + (\lambda + b_2)\,v_2 + b_3v_3 = 0, \\
c_1v_1 + c_2v_2 + (\lambda + c_3)\,v_3 = 0.
\end{cases}
$$

Por consiguiente la ecuación característica de los autovalores es:

$$
(4.54)\qquad \Psi(\lambda) := \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & \lambda + b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda + c_3 \end{vmatrix} = 0.
$$

Proposición 4.3.7. *Los equilibrios donde desaparecen el depredador, es decir todos los equilibrios con $Y^* = 0$, son inestables.*

Demostración. En este caso tenemos que $c_1, c_2 = 0$, luego la ecuación característica se convierte en

$$\Psi(\lambda) = (\lambda + c_3)\left[(\lambda + a_1)(\lambda + b_2) - a_2 b_1\right] = 0.$$

Por tanto,

$$\lambda_1 = -c_3 > 0$$

es un autovalor positivo. Consecuentemente, los equilibrios con $Y^* = 0$ son inestables. □

Teorema 4.3.8.

1. *El equilibrio E_{00Y} es localmente asintóticamente estable si $R_{SY} > 0$ e inestable si $R_{SY} < 0$.*

2. *El equilibrio libre de enfermedad, E_{0SY}, supuesto que exista, es localmente asintóticamente estable si $K < K_5$, con K_5 definido por (4.45), e inestable cuando $K > K_5$.*

3. *Cualquier equilibrio endémico, (I^*, S^*, Y^*), supuesto que exista, bajo la hipótesis $K > T_2$, con T_2 definido en (4.43), es localmente asintóticamente estable si se verifica*

$$-\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + \mu_2'(P^*)S^* > (1-q)\beta(P^*) + \gamma. \tag{4.55}$$

Demostración.

1. Para el equilibrio trivial $(0, 0, m/n)$, se observa que los autovalores que se obtienen son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -m,\\ \lambda_2 &= \left(q\beta(0) - \mu_1(0) - \gamma - \frac{M_1 m}{n}\right),\\ \lambda_3 &= \left(\beta(0) - \mu_2(0) - \frac{M_2 m}{n}\right) = -R_{SY}.\end{aligned}$$

   Ahora bien,

$$q\beta(0) - \mu_1(0) - \gamma - \frac{M_1 m}{n} < -R_{SY},$$

   y de aquí se sigue el resultado.

2. Veamos ahora que ocurre con el equilibrio libre de enfermedad.
   Gracias al Teorema 4.3.5, sabemos que este equilibrio existe si y sólo si $R_{SY} < 0$, y en este caso es único.
   Nótese que en el caso que $Y^* \neq 0$, gracias a la ecuación (4.37), podemos escribir c_3 definido en (4.53) como

$$c_3 = m + \nu M_1 I^* + \nu M_2 S^*.$$

Para el equilibrio libre de enfermedad, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(-q\beta(P_{SY}) + \mu_1(P_{SY}) - KP_{SY} + \gamma + M_1 Y(P_{SY})\right),\\
a_2 &= 0,\\
a_3 &= 0,\\
b_1 &= -\beta'(P_{SY})P_{SY} - (1-q)\beta(P_{SY}) + \mu_2'(P_{SY})P_{SY} + KP_{SY} - \gamma\\
b_2 &= -\beta'(P_{SY})P_{SY} + \mu_2'(P_{SY})P_{SY},\\
b_3 &= M_2 P_{SY}\\
c_1 &= -\nu M_1 Y(P_{SY}),\\
c_2 &= -\nu M_2 Y(P_{SY}),\\
c_3 &= m + \nu M_2 P_{SY},
\end{aligned}
$$

luego la correspondiente ecuación característica (4.54), se transforma en

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda) &= (\lambda + a_1)\left(\lambda^2 + (b_2+c_3)\lambda + (b_2c_3 - b_3c_2)\right)\\
&:= \Psi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda) = 0.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, puesto que (b_2+c_3) y $(b_2c_3 - b_3c_2)$ son positivos, entonces Ψ_2 no puede tener raíces con parte real positivas.

Estudiemos entonces la raíz de Ψ_1.

$$
\Psi_1(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = q\beta(P_{SY}) - \mu_1(P_{SY}) + KP_{SY} - \gamma - M_1Y(P_{SY}).
$$

Por tanto si $K < K_5$ entonces la raíz de Ψ_1 es negativa, consecuentemente el equilibrio libre de enfermedad es localmente asintóticamente estable. Si $K > K_5$ entonces la raíz es positiva, y por tanto el equilibrio libre de enfermedad es inestable.

3. Estudiemos ahora la estabilidad del equilibrio no semitrivial, (I^*, S^*, Y^*).

   Bajo la hipótesis $K > T_2$, con T_2 definido en (4.43), supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 4.3.5 para la existencia de tales equilibrios.

   Desarrollando el determinante (4.54), tenemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor si y sólo si es un cero del siguiente polinomio:

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda) :=& \lambda^3 + (a_1+b_2+c_3)\lambda^2 + (a_1b_2 + a_1c_3 + b_2c_3 - a_2b_1 - a_3c_1 - b_3c_2)\lambda\\
&+ (a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2)\\
:=& \lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3.
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

   Por el Criterio de Routh-Hurwitz, (véase Lema 1.5.3), se tiene que Ψ no posee ninguna raíz con parte real positiva si y sólo si

$$
d_i > 0 \text{ para } i = 1,2,3 \text{ y } d_1d_2 - d_3 > 0.
$$

   Ahora bien, (I^*, S^*, Y^*) debe verificar (4.38), luego a_1 y c_3 pueden ser escrito como

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(-q\beta'(P^*) + \mu_1'(P^*)\right) I^*,\\
c_3 &= nY^*.
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

Veamos primero el signo de todos los coeficientes de la ecuación característica.

Fácilmente se comprueba que $a_1, a_3, b_3, c_3 > 0$ y $c_1, c_2 < 0$. Y puesto que hemos supuesto que $K > T_2$, entonces tenemos que $a_2 < 0$. Veamos ahora el signo de b_2. Ya que (I^*, S^*, Y^*) verifica la ecuación $(4.37)_2$, se tiene que

$$b_2 = (1-q)\beta(P^*)\frac{I^*}{S^*} - \beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) + \mu_2'(P^*)S^* > 0.$$

Por tanto nos falta conocer el signo de b_1. Por la ecuación $(4.37)_1$ se tiene que

$$q\beta(P^*) + KS^* - \gamma = \mu_1(P^*) + M_1 Y^*,$$

luego podemos escribir b_1 como

$$b_1 = -\beta'(P^*)(S^* + (1-q)I^*) - \beta(P^*) + \mu_1(P^*) + M_1 Y^* + \mu_2'(P^*)S^*,$$

y por la ecuación $(4.38)_2$ tenemos que

$$(\mu_1(P^*) - \beta(P^*) + M_1 Y^*) = (\mu_1(P^*) - \mu_2(P^*) + (M_1 - M_2)Y^*)\,\frac{S^*}{P^*},$$

como esta cantidad es positiva y debido al decrecimiento de β y al crecimiento de μ_2 se tiene efectivamente que b_1 es positivo.

Así,

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_2 + c_3 > 0, \\ d_2 &= a_1 b_2 + a_1 c_3 + b_2 c_3 - a_2 b_1 - a_3 c_1 - b_3 c_2 > 0. \end{aligned}$$

Veamos entonces el signo de d_3. Tenemos que,

$$d_3 = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2.$$

Primero sabemos que,

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 > 0,$$

y además

$$+a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 = b_1(a_3 c_2 - a_2 c_3).$$

Gracias a (4.57), se verifica que

$$a_3 c_2 - a_2 c_3 = \left(-\frac{\nu M_1 M_2}{n} + q\beta'(P^*) - \mu_1'(P^*) + K\right) I^* n Y^*.$$

Puesto que $K > T_2$, con T_2 definido en (4.43), entonces

$$a_3 c_2 - a_2 c_3 > 0.$$

Para terminar de verificar el Criterio de Routh-Hurwitz nos falta verificar que

$$d_1 d_2 - d_3 > 0.$$

Como hemos visto, tenemos que

$$a_1, a_3, b_1, b_2, b_3, c_3 > 0 \text{ y } a_2, c_1, c_3 < 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} d_1 d_2 - d_3 = {} & a_1^2 b_2 + a_1^2 c_3 - a_1 a_2 b_1 - a_1 a_3 c_1 + a_1 b_2^2 + 2a_1 b_2 c_3 + b_2^2 c_3 - a_2 b_1 b_2 \\ & - b_2 b_3 c_2 + a_1 c_3^2 + b_2 c_3^2 - a_3 c_1 c_3 - b_3 c_2 c_3 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 \\ & > -a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 = a_2 \left(\nu M_1 M_2 S^* Y^*\right) + b_1 \left(\nu M_1 M_2 I^* Y^*\right). \end{aligned}$$

Ahora bien $a_2 > -KI^*$, y gracias a (4.55), tenemos que $b_1 > KS^*$, por tanto

$$d_1 d_2 - d_3 > -\nu K M_1 M_2 S^* I^* Y^* + \nu K M_1 M_2 S^* I^* Y^* = 0.$$

Luego, gracias al Criterio de Routh-Hurwitz, tenemos que la ecuación característica (4.54) no puede tener ninguna raíz con parte real positiva, y consecuentemente el equilibrio endémico es localmente asintóticamente estable.

□

4.3.2.2. Estabilidad global

Teorema 4.3.9.

1. *El equilibrio E_{00Y} es globalmente asintóticamente estable si $R_{SY} > 0$.*
2. *Supongamos que $R_{SY} < 0$, luego existe el equilibrio libre de enfermedad E_{0SY}. Entonces si*

$$K < K_6 := \frac{\dfrac{mM_1}{n} - q\beta(0) + \mu_1(0) + \gamma}{P_S} \tag{4.58}$$

el equilibrio E_{0SY} es globalmente asintóticamente estable. De hecho, la enfermedad desaparece.

Nota 4.3.10. *Nótese que la estabilidad global del equilibrio E_{0SY} no está en contradicción con el Teorema 4.3.8, puesto que $K_6 < K_5$. En efecto, gracias a la Nota 4.3.2 tenemos que $P_{SY} < P_S$, y además por el crecimiento de la función μ_1 y el decrecimiento de la función β, se llega a que $K_6 < K_5$.*

Demostración. Veamos primero la estabilidad global del equilibrio E_{00Y} cuando $R_{SY} > 0$. Puesto que $R_{SY} > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\beta(P(t)) - \mu_2(P(t)) - M_2(m/n - \delta) < 0 \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.59}$$

Por (4.30), se tiene que dado $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$ tal que

$$Y(t) \geq \frac{m}{n} - \delta \text{ para todo } t \geq 0.$$

Luego, para $t \geq t_\delta$, se llega a que

$$P'(t) \leq \left(\beta(P(t)) - \mu_2(P(t)) - M_2\left(\frac{m}{n} - \delta\right)\right) P(t).$$

Por tanto, gracias a (4.59), se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0,$$

y puesto que $I(t), S(t) \geq 0$ (véase Proposición 4.3.3), entonces tenemos que efectivamente

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} S(t) = 0.$$

También se tiene que Y verifica la ecuación diferencial

$$Y' = (m - nY + \nu M_1 I(t) + \nu M_2 S(t))Y,$$

la cual es asintóticamente estable a

$$Y' = (m - nY)Y,$$

y una aplicación directa de la Proposición 1.4.4 nos da que

$$\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{m}{n},$$

y consecuentemente la estabilidad global del equilibrio $(0, 0, m/n)$ cuando $R_{SY} \geq 0$.

Veamos ahora la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad. Como para tener existencia de este equilibrio es necesario que $R_{SY} < 0$, en particular se tiene que $R_S < 0$. Ahora gracias a (4.28) y (4.30), tenemos que dado $\delta > 0$, existe $t_\delta \geq 0$ tal que

$$\left.\begin{aligned} &0 \leq P(t) \leq P_S + \delta \\ &Y(t) \geq \frac{m}{n} - \delta \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo } t \geq t_\delta. \tag{4.60}$$

Así, para $t \geq t_\delta$, por (4.2), se tiene que

$$I' \leq \left(q\beta(0) - \mu_1(0) + K(P_S + \delta) - \gamma - M_1\left(\frac{m}{n} - \delta\right)\right) I.$$

Luego, si

$$K < K_6,$$

tenemos que para δ suficientemente pequeño

$$q\beta(0) - \mu_1(0) + K(P_S + \delta) - \gamma - M_1\left(\frac{m}{n} - \delta\right) < 0,$$

y por consiguiente $I(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Veamos ahora que efectivamente

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} S(t) = P_{SY}, \\ &\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{m + \nu M_2 P_{SY}}{n}. \end{aligned}$$

Por (4.2), tenemos que S e Y verifican

$$\begin{cases} S' = \beta(S+I(t))\big(S+(1-q)I(t)\big) - \mu_2(S+I(t))S - KI(t)S + \gamma I(t) - M_2SY, \\ Y' = \big(m + \nu M_1 I(t) + \nu M_2 S - nY\big)Y. \end{cases}$$

Este sistema diferencial ordinario es asintóticamente estable con

$$\begin{cases} S' = (\beta(S) - \mu_2(S) - M_2Y)S, \\ Y' = (m - nY + \nu M_2 S)Y. \end{cases} \tag{4.61}$$

Por tanto, estudiamos el sistema (4.61). Para ello utilizaremos el criterio de Dulac. Usando el multiplicador $1/YS$, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\beta(S)-\mu_2(S)}{Y} - M_2\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{m-nY}{S} + \nu M_2\right) = \frac{\beta'(S)-\mu_2'(S)}{Y} - \frac{n}{S} < 0.$$

Luego el criterio de Dulac (véase Teorema 1.4.3) nos dice que el sistema (4.61) no tiene soluciones periódicas ni ciclos. Además, por el Teorema de Poincaré-Bendixson (véase [78]) y el hecho que en este caso los otros equilibrios $((P_S,0)$, $(0,m/n)$ y $(0,0))$ son inestables el conjunto ω-límite de este sistema es

$$\{(P_{SY}, (m+\nu M_2 P_{SY})/n)\}.$$

Consecuentemente, la Proposición 1.4.4 nos da el resultado, i.e. el equilibrio libre de enfermedad $(0, P_{SY}, (m+\nu M_2 P_{SY})/n)$ es globalmente asintóticamente estable. $\square$

4.4. Análisis de un caso concreto

Para una interpretación biológica véase la página 13 de la Introducción.

Ahora vamos a aplicar los resultados obtenidos a un caso particular. Supongamos que las tasas de mortalidad y de natalidad de la presa vienen dadas por,

$$\mu_i(P) := \mu_i\, P \text{ para } i = 1,2, \text{ con } \mu_1 > \mu_2 > 0,$$
$$\beta(P) := e^{-\beta P} \quad \text{con } \beta > 0.$$

Además supondremos que la tasa de recuperación de los infectados, γ, es nula, aunque los individuos infectados se pueden recuperar por el proceso de nacimiento, y supondremos que $0 < q < 1$.

- Examinemos primero el **caso sin depredador**.-

  En este caso se tiene que,
  $$R_S = R_I = -1 < 0.$$
  Por tanto el equilibrio $(0,0)$ es inestable, además existe un equilibrio libre de enfermedad, $(0, P_S)$ donde
  $$\mu_2\, P_S = e^{-\beta\, P_S}.$$

También tenemos que la constante K_2 definida en (4.13) es

$$K_2 = \mu_1 - q\mu_2,$$

y por aplicación del Teorema 4.2.7, se tiene que el equilibrio libre de enfermedad es estable si $K < K_2$ e inestable cuando $K > K_2$.

Por otra parte, en este caso se pueden mejorar las estimaciones obtenidas en el Capítulo y podemos concluir que existe un equilibrio endémico (I^*, S^*) si y sólo si $K > K_2$, y que además es único.

En efecto, para que exista un equilibrio endémico, por el Teorema 4.2.3, se debe verificar la igualdad

$$J(P^*) = G(P^*),$$

con J y G definidas en (4.14). Luego, en este caso particular debe existir $P^* > 0$, tal que

$$M\mu_1 P^* = Ne^{\beta P^*}, \tag{4.62}$$

con

$$M := \left(1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{K}\right) \text{ y } N := \left(1 + q\frac{\mu_2 - \mu_1}{K}\right).$$

Claramente se tiene que $M < N$, y además sólo puede existir $P^* > 0$ verificando (4.62), si $M > 0$ o bien $N < 0$, y además en estos casos P^* es única y verifica,

$$\frac{e^{\beta P^*}}{P^*} = \frac{M\mu_1}{N}. \tag{4.63}$$

Además tenemos que

$$S^* = \frac{\mu_1 P^* - qe^{\beta P^*}}{K} < P^*. \tag{4.64}$$

Ahora bien, gracias a (4.63), tenemos que sólo podemos tener esta igualdad si $K > K_2$, y además para este caso $S^* > 0$. Con lo cual si $K > K_2$, existe un único equilibrio endémico $(P^* - S^*, S^*)$ con P^* verificando (4.63) y S^* verificando (4.64).
Y puesto que tenemos entonces que existe un único equilibrio endémico por el Teorema 4.2.8 sabemos que este es globalmente asintóticamente estable.

- Supongamos que actúa **un depredador**.-

  Buscaremos los equilibrios donde el depredador no desaparece, i.e. $Y^* \neq 0$.

  Ahora, tenemos que

  $$R_{SY} = -1 + \frac{M_2 m}{n} \text{ y } R_{IY} = -1 + \frac{M_1 m}{n}.$$

  Luego si $M_2 m/n \geq 1$ entonces sólo existe el equilibrio trivial E_{00Y} y además en este caso es globalmente asintóticamente estable. Ahora bien, si $M_2 m/n < 1$, entonces existe un único equilibrio libre de enfermedad ,

  $$(0, P_{SY}, \frac{m + \nu M_2 P_{SY}}{n}),$$

donde

$$\mu_2\, P_{SY} - e^{-\beta\, P_{SY}} + M_2 \frac{m + \nu M_2 P_{SY}}{n} = 0.$$

Y por el Teorema 4.3.8, este equilibrio es localmente asintóticamente estable si $K < K_5$ e inestable cuando $K > K_5$, con K_5 definida en (4.44), que en este caso concreto queda como

$$K_5 = K_2 + \left(\frac{m + \nu M_2 P_{SY}}{n P_{SY}} \right) (M_1 - q M_2)\,.$$

De hecho gracias al Teorema 4.3.9, si

$$M_1 > \frac{n}{m} \left(q + K P_S \right)$$

entonces es globalmente asintóticamente estable.

Resumiendo, si suponemos que $K > K_2$, entonces si no existe depredador la enfermedad persiste, mientras si tenemos un depredador y suponemos además que

$$M_1 m/n > (q + K P_S) \;\; \text{y} \;\; M_2 m/n < 1,$$

entonces desaparece la enfermedad gracias a la influencia del depredador.

Parte II

Estudio de modelos con difusión estructurados en edad

CAPÍTULO 5

Modelos evolutivos dependientes en edad con difusión

En este Capítulo, vamos a analizar un modelo no lineal de dinámica de poblaciones con dependencia en edad, difusión espacial y con la influencia de un término de reacción-difusión.

5.1. Planteamiento del modelo

Vamos a considerar un modelo no lineal que describe la dinámica de una especie con dependencia en edad y estructura espacial.

Sea $u(x, a, t)$ la densidad de la población de edad $a > 0$, en el instante de tiempo $t > 0$ y en la posición $x \in \Omega$. Supondremos que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con una frontera, $\partial\Omega$, regular.

Como ya explicamos en la Introducción el sistema que describe la dinámica de la especie que vamos a estudiar en este Capítulo es dado por

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} - \Delta u + \mu(x, a, t)u = f(x, a, t, u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, T), \\ u(x, a, 0) = u_0(x, a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x, 0, t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x, a, t)u(x, a, t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

donde $T > 0$.

En este Capítulo, daremos primero un resultado general de existencia y unicidad de solución del problema (5.1), bajo la hipótesis de la lipschitzianidad global de f en la variable u. Después construiremos un método de sub-supersoluciones y probaremos, asumiendo la existencia de un par de sub-supersoluciones de (5.1) y la lipschtizianidad de f entre la sub y la supersolución, la existencia de una única solución del problema (5.1) entre la subsolución y la supersolución. Obsérvese que aunque resultados de comparación han sido previamente utilizados para tipos de problemas cuando $f(x, a, t, u) \equiv f(x, a, t)$ (véase por ejemplo, [65, Cor. 4.2]), los resultados que obtenemos generalizan el método clásico de sub-supersolución en las siguientes vías: (5.1) es un problema de primer orden con potencial singular y condición inicial no local. Nótese que gran parte de la dificultad de este problema estriba en el hecho que vamos a suponer que $\mu(x,a,t) \to +\infty$ cuando $a \to A_\dagger$, la cual es una condición necesaria para garantizar que la solución de (5.1) se anula cuando $a = A_\dagger$.

Una de las ventajas de usar el método de sub-supersolución es que nos permitirá analizar el comportamiento, a medida que el tiempo va aumentando, de la solución.

Así, un esquema de lo que vamos a realizar en este Capítulo es el siguiente: en la Sección 5.2, veremos unos preliminares que serán utilizados a lo largo de todo el Capítulo, como son el concepto de solución para el problema (5.1), estudiaremos el problema lineal auxiliar del problema (5.1) dando un principio del mínimo y estudiando la existencia y unicidad de solución del problema lineal asociado.

En la Sección 5.3, veremos la existencia y unicidad de solución del problema no lineal (5.1), bajo la hipótesis de lipschitzianidad global de f.

En la Sección 5.4, describiremos el método de sub-supersoluciones para el problema (5.1), y demostraremos que bajo la hipótesis de existencia de un par de sub-supersolución de (5.1) y la lipschitzianidad de la función f entre la sub y la supersolución, entonces tendremos existencia y unicidad entre dicho par de sub-supersoluciones.

Para finalizar, en la última Sección, aplicaremos los resultados obtenidos a diferentes modelos ecológicos: a un problema logístico generalizado y a un problema de tipo Holling-Tanner (véase por ejemplo [72] para una interpretación ecológica de estos modelos). En concreto, para el estudio de un problema logístico general supondremos que f viene dado por

$$f(x,a,t,u) \equiv \lambda u - g(u)$$

con g verificando ciertas hipótesis de crecimiento y en el problema de tipo Holling-Tanner supondremos que f viene dado por

$$f(x,a,t,u) \equiv \lambda u + \frac{u}{1+u}.$$

Demostraremos que una elección conveniente de sub y supersolución para cada uno de los modelos nos aportará información sobre el comportamiento asintótico de la solución de los modelos concretos.

5.2. Preliminares

5.2.1. Hipótesis

A lo largo de todo el Capítulo, por comodidad, vamos a denotar ∂_a y ∂_t la derivación parcial en el sentido de las distribuciones. T es un número real finito positivo; $t \in (0,T)$ y por $\mathcal{O}$, denotaremos el abierto $(0,A_\dagger) \times (0,T)$.

Vamos a suponer que

$(\mathcal{H}_\mu)$ La tasa de mortalidad verifica

$$\mu \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega} \times [0,A_\dagger) \times [0,T]), \qquad \mu(x,a,t) \geq 0 \text{ en } \Omega \times \mathcal{O} \tag{5.2}$$

y su comportamiento en $a = A_\dagger$ viene dado por la "condición de divergencia"(véase por ejemplo [61]):

$$\text{(5.3)}\qquad \begin{cases} 0 < t < A_\dagger, \quad x \in \Omega, \quad \lim\limits_{a \to A_\dagger} \displaystyle\int_0^t \mu(x, a - t + \tau, \tau) \mathrm{d}\tau = +\infty, \\ A_\dagger < t < T, \quad x \in \Omega, \quad \lim\limits_{a \to A_\dagger} \displaystyle\int_0^a \mu(x, \alpha, t - a + \alpha) \mathrm{d}\alpha = +\infty. \end{cases}$$

($\mathcal{H}_\beta$) La tasa de natalidad β definida en $\Omega \times \mathcal{O}$ verifica

$$\text{(5.4)}\qquad \beta \in L^\infty(\Omega \times \mathcal{O}), \qquad \beta(x, a, t) \geq 0 \text{ e.c.t } \Omega \times \mathcal{O}.$$

Denotaremos por

$$\text{(5.5)}\qquad \bar{\beta} := \sup\{\beta(x, a, t) : (x, a, t) \in \Omega \times \mathcal{O}\}$$

($\mathcal{H}_0$) Asumiremos que la condición inicial, u_0, verifica

$$\text{(5.6)}\qquad u_0 \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)).$$

Nota 5.2.1. *La condición* (5.3) *significa que la integral de μ es infinita en los segmentos característicos $t-a = \text{cte}$, con extremo inicial $a = 0$ y extremo final $a = A_\dagger$ ó bien extremo inicial $t = 0$ y extremo final $a = A_\dagger$.*

Además, esta condición nos garantiza que, bajo ciertas hipótesis sobre f, la solución del problema (5.1) *se anula en $a = A_\dagger$, es decir la población muere al alcanzar la edad $a = A_\dagger$. Esto se tiene fácilmente al resolver el problema* (5.1) *por el método de la líneas características definido en la página* 50 *(véase por ejemplo* [40, Teorema 3]*).*

Nota 5.2.2. *Queremos hacer notar que la positividad de la tasa de mortalidad, aunque desde un punto de vista biológico parece lógica, no es particularmente restrictiva. En efecto, si realizamos el cambio de variable*

$$w = e^{-kt}u \text{ con } k \text{ una constante positiva,}$$

entonces w debe satisfacer la ecuación

$$\partial_t w + \partial_a w - \Delta w + (\mu + k)w = g(x, a, t, w) := e^{-kt} f(x, a, t, e^{kt} w).$$

Así, gracias a la hipótesis ($\mathcal{H}_\mu$), podemos tomar k suficientemente grande para que $\mu + k$ sea positiva.

5.2.2. Concepto de solución

Antes de la definición de solución del problema (5.1), para poder hablar de la solución en las condiciones iniciales, vamos a dar un resultado de trazas previo (véase por ejemplo [40, Lema 0]), el cual es una adaptación de los clásicos resultados de trazas en el caso de los habituales espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ y $H^1_0(\Omega)$ (véase por ejemplo [67] y [62]).

Lema 5.2.3. *Sea A_0 un número real estrictamente positivo y denotemos $\mathcal{O}_0 := (0, A_0) \times (0, T)$. Sea $u \in L^2(\mathcal{O}_0; H^1(\Omega))$ (resp. $u \in L^2(\mathcal{O}_0; H^1_0(\Omega))$) tal que $(\partial_t + \partial_a)u$ pertenece a $L^2(\mathcal{O}_0; (H^1(\Omega))')$ (resp. a $L^2(\mathcal{O}_0; H^{-1}(\Omega))$). Entonces:*

a) para todo $t_0 \in (0,T)$ *y para todo* $a_0 \in (0,A_0)$*, u tiene una traza en* $t = t_0$ *que pertenece a* $L^2(\Omega \times (0,A_0))$ *y en* $a = a_0$ *que pertenece a* $L^2(\Omega \times (0,T))$*;*

b) sea $v \in L^2(\mathcal{O}_0; H^1(\Omega))$ *(resp.* $v \in L^2(\mathcal{O}_0; H_0^1(\Omega))$*) tal que* $(\partial_t + \partial_a)v$ *pertenece a* $L^2(\mathcal{O}_0; (H^1(\Omega))')$ *(resp. a* $L^2(\mathcal{O}_0; H^{-1}(\Omega))$*), entonces se verifica la siguiente igualdad de integración por partes*

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{O}_0} \langle (\partial_t + \partial_a)u, v\rangle + \langle (\partial_t + \partial_a)v, u\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_{\Omega\times(0,A_0)} \big(u(x,a,T)v(x,a,T) - u(x,a,0)v(x,a,0)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\
&+ \iint_{\Omega\times(0,T)} \big(u(x,A_0,t)v(x,A_0,t) - u(x,0,t)v(x,0,t)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *denota la dualidad entre* $H^1(\Omega)$ *(resp.* $H_0^1(\Omega)$*) y su dual.*

En general, el problema (5.1) no tiene solución clásica (véase por ejemplo [64]). Nosotros usaremos el concepto de solución aplicado en [40] entre otros, añadiendo la condición del término de reacción.

Definición 5.2.4. *Una función u es una* ***solución*** *del problema* (5.1) *si* $u : \Omega \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *es una función medible tal que u pertenece al espacio* $L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega))$ *y además verifica*

$$\begin{aligned}
&(\partial_t + \partial_a)u + \mu u \in L^2(\mathcal{O}; H^{-1}(\Omega)), \\
&f(\cdot,\cdot,\cdot,u) \in L^2(\mathcal{O}; H^{-1}(\Omega))
\end{aligned}$$

y para cualquier $w \in L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega))$ *se tiene que*

$$\iint_{\mathcal{O}} \langle (\partial_t + \partial_a)u + \mu u, w\rangle \mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla w \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t = \iint_{\mathcal{O}} \langle f(\cdot,a,t,u), w\rangle \mathrm{d}a\,\mathrm{d}t. \tag{5.8}$$

Así, las condiciones iniciales tienen sentido en $L^2(\Omega \times (0,A_\dagger))$ *y* $L^2(\Omega \times (0,T))$*, respectivamente, y por tanto u tiene que verificar:*

$$\begin{aligned}
u(x,a,0) &= u_0(x,a), \;\; \text{en } L^2(\Omega \times (0,A_\dagger)) \\
u(x,0,t) &= \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\mathrm{d}a, \;\; \text{en } L^2(\Omega \times (0,T)).
\end{aligned}$$

5.2.3. Algunos resultados sobre un problema lineal auxiliar

Vamos a dar un principio del mínimo que será usado en todo el trabajo.

Lema 5.2.5. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_\mu)$ *y* $(\mathcal{H}_\beta)$*. Sea z una función de* $L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega))$ *tal que*

$$(\partial_t + \partial_a)z + \mu z \in L^2(\mathcal{O}; (H^1(\Omega))'),$$

y además verifica

$$
(5.9) \qquad \begin{cases} \partial_t z + \partial_a z - \Delta z + \mu(x,a,t)z \leq L|z| & \textit{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ z(x,a,t) \leq 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ z(x,a,0) \leq 0 & \textit{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,0,t) \leq \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t) z(x,a,t) \mathrm{d}a & \textit{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}
$$

para alguna constante $L > 0$*. Entonces se tiene que*

$$
z(x,a,t) \leq 0 \ \textit{e.c.t.} \ (x,a,t) \in \Omega \times \mathcal{O}.
$$

Demostración. Para cualquier función real, w, denotamos por w^+ su parte positiva, es decir,

$$
w^+ := \frac{1}{2}\left(|w| + w\right).
$$

Si $w \in H^1(\Omega)$, es claro que $w^+ \in H^1(\Omega)$ (véase por ejemplo [73, Cap. 7]). Vamos a demostrar que la parte positiva de la función z, es decir z^+, es nula.

Sean A_0, T_0 tal que $0 < A_0 < A_\dagger$ y $0 < T_0 < T$, denotamos $\mathcal{O}_0 := (0, A_0) \times (0, T_0)$. Consideramos como función test la siguiente función, $v = z^+ \chi_{\mathcal{O}_0}$, y la multiplicamos en la primera ecuación de (5.9).

Nótese que, en general, $(\partial_t + \partial_a) z^+$ no está en $L^2(\mathcal{O}_0; (H^1(\Omega))')$; sin embargo, podemos aproximar z por funciones regulares y después pasar al límite, lo cual conserva todas las desigualdades (véase por ejemplo [64, demostración Lema 8.4]).

Gracias a que vamos a trabajar en el abierto $\mathcal{O}_0$, por (5.2), podemos usar la fórmula de integración por partes (5.7). Así, obtenemos

$$
(5.10) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times (0,A_0)} (z^+(x,a,T_0))^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a + \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times (0,T_0)} (z^+(x,A_0,t))^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ + \iiint_{\Omega \times \mathcal{O}_0} \mu(x,a,t)(z^+(x,a,t))^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}t \\ \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times (0,T_0)} (z^+(x,0,t))^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + L \iiint_{\Omega \times \mathcal{O}_0} (z^+(x,a,t))^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}t. \end{aligned}
$$

Por otra parte, ya que la función parte positiva es una función creciente, se tiene que

$$
z^+(x,0,t) \leq \left[\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t) z(x,a,t) \, \mathrm{d}a \right]^+.
$$

Puesto que $z \leq z^+$ y β es positiva, obtenemos que

$$
z^+(x,0,t) \leq \left[\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t) z^+(x,a,t) \, \mathrm{d}a \right].
$$

Luego, gracias a (5.10), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,A_0)}&(z^+(x,a,T_0))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\\ &\leq\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,T_0)}\left[\int_0^{A_\dagger}\beta(x,a,t)z^+(x,a,t)\,\mathrm{d}a\right]^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\qquad+L\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}(z^+(x,a,t))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Usando la condición $(\mathcal{H}_\beta)$, se llega a que

$$\left[\int_0^{A_\dagger}\beta(x,a,t)z^+(x,a,t)\,\mathrm{d}a\right]^2\leq\overline{\beta}^2A_\dagger\int_0^{A_\dagger}(z^+(x,a,t))^2\,\mathrm{d}a.$$

Así, para todo A_0, T_0 tal que $0<A_0<A_\dagger$ y $0<T_0<T$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,A_0)}(z^+(x,a,T_0))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\leq\left(L+\frac{\overline{\beta}^2A_\dagger}{2}\right)\iiint_{\Omega\times(0,A_\dagger)\times(0,T_0)}(z^+(x,a,t))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.$$

Haciendo A_0 tender a $A_\dagger$, se obtiene que para todo T_0 tal que $0<T_0<T$

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}(z^+(x,a,T_0))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\leq\left(L+\frac{\overline{\beta}^2A_\dagger}{2}\right)\iiint_{\Omega\times(0,A_\dagger)\times(0,T_0)}(z^+(x,a,t))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.$$

Así, denotando para casi toda $s\in(0,T)$

$$v(s)=\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}(z^+(x,a,s))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a,$$

tenemos que para casi todo T_0 tal que $0<T_0<T$

$$\frac{1}{2}v(T_0)\leq\left(L+\frac{\overline{\beta}^2A_\dagger}{2}\right)\int_0^{T_0}v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall a la función v, obtenemos que

$$v(s)=0\text{ e.c.t }s\in(0,T).$$

Consecuentemente,

$$\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}(z^+(x,a,s))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a=0\text{ e.c.t }s\in(0,T).$$

Por tanto, $z^+\equiv0$ e.c.t. $\Omega\times\mathcal{O}$. Luego $z\leq0$. □

Nota 5.2.6. *Bajo las mismas hipótesis del Lema anterior, tenemos que si v verifica el siguiente problema*

$$\text{(5.11)}\qquad\begin{cases}\partial_tv+\partial_av-\Delta v+\mu(x,a,t)v\geq-L|v| & \textit{en }\Omega\times\mathcal{O},\\ v(x,a,t)\geq0 & \textit{sobre }\partial\Omega\times\mathcal{O},\\ v(x,a,0)\geq0 & \textit{en }\Omega\times(0,A_\dagger),\\ v(x,0,t)\geq\displaystyle\int_0^{A_\dagger}\beta(x,a,t)v(x,a,t)\mathrm{d}a & \textit{en }\Omega\times(0,T),\end{cases}$$

entonces

$$v(x,a,t) \geq 0 \text{ e.c.t. } \Omega \times \mathcal{O}.$$

La prueba es análoga a la anterior, poniendo $-v = z$.

Ahora vamos a estudiar el problema lineal asociado con el problema (5.1). El resultado que vamos a enunciar es básicamente conocido (ver por ejemplo [40]). Puesto que en los trabajos precedentes la demostración se ha realizado con la hipótesis de la positividad de las funciones u_0 y b, damos la prueba sin esta restricción.

Proposición 5.2.7. *Sea $g \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$ y $b \in L^2(\Omega \times (0,T))$. Supongamos que μ y u_0 verifican las hipótesis $(\mathcal{H}_\mu)$ y $(\mathcal{H}_0)$, respectivamente. Entonces existe una única solución (en el sentido de la Definición* 5.2.4*), v, del siguiente problema lineal*

$$(5.12) \qquad \begin{cases} \partial_t v + \partial_a v - \Delta v + \mu(x,a,t)v = g(x,a,t) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ v(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ v(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ v(x,0,t) = b(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Demostración. Primero vamos a evitar el problema de la no acotación de la función μ.

Para $n = 1, 2, \cdots$ designamos por μ_n las funciones truncadas, definidas por

$$(5.13) \qquad \mu_n(x,a,t) := \begin{cases} \mu(x,a,t) \text{ para } \mu(x,a,t) \leq n, \\ n \text{ para } \mu(x,a,t) > n. \end{cases}$$

Para cada $n = 1, 2, \cdots$, consideremos el problema,

$$(5.12)_n \begin{cases} \partial_t(u_n) + \partial_a(u_n) - \Delta u_n(x,a,t) + \mu_n(x,a,t)u_n = g(x,a,t) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ u_n(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ u_n(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u_n(x,0,t) = b(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Para cada $n = 1, 2, \ldots$, realizamos el cambio de variable $w_n = e^{-\delta t}u_n$, con $\delta > 0$ que será elegido a posteriori para poder obtener acotaciones de $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, el problema $(5.12)_n$ puede ser escrito como

$$(5.12)'_n \quad \begin{cases} \partial_t(w_n) + \partial_a(w_n) - \Delta w_n + (\delta + \mu_n(x,a,t))w_n = \tilde{g}(x,a,t) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ w_n(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ w_n(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ w_n(x,0,t) = \tilde{b}(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

donde $\tilde{g} := e^{-\delta t}g$ y $\tilde{b} := e^{-\delta t}b$.

Puesto que μ_n está acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces existe una única, w_n, solución de $(5.12)'_n$ (ver [64, Lemas 8.1 y 8.2]).

Sean A_0, T_0 tal que $0 < A_0 < A_\dagger$ y $0 < T_0 < T$, denotamos $\mathcal{O}_0 := (0,A_0) \times (0,T_0)$, y procedemos como en la demostración del Lema 5.2.5. Es decir, multiplicamos la primera ecuación de $(5.12)'_n$ por w_n e integramos sobre $\Omega\times\mathcal{O}_0$. Entonces procediendo como en (5.10), se llega a que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,A_0)} & w_n^2(x,a,T_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a+\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,T_0)} w_n^2(x,A_0,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &+\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\left[(\delta+\mu_n(x,a,t))\,w_n^2+|\nabla w_n|^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\\ =&\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\tilde{g}w_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,A_0)}u_0^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a+\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,T_0)}\tilde{b}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Luego, existe una constante $C>0$, independiente de n tal que

$$\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\left[(\delta+\mu_n(x,a,t))\,w_n^2+|\nabla w_n|^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\le C+\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\tilde{g}w_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.$$

Ahora bien, usando la desigualdad

$$2ab\le\varepsilon^2a^2+\frac{1}{\varepsilon^2}b^2,$$

y considerando $\delta>1$ (tomamos $\varepsilon=\sqrt{2(\delta-1)}$), tenemos que

$$\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\tilde{g}w_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\le(\delta-1)\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}w_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4(\delta-1)}\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}\tilde{g}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.$$

Así, se obtiene que

$$\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}\left(\mu_nw_n^2+w_n^2+|\nabla w_n|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\le C,\tag{5.14}$$

donde C es una constante independiente de n.
Puesto que w_n es solución de $(5.12)'_n$, se sigue que

$$\{(\partial_t+\partial_a)w_n+\mu_nw_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ está acotada en }L^2(\mathcal{O};H^{-1}(\Omega)).$$

Luego, podemos extraer una subsucesión convergente, $\{w_k\}_k$, tal que para $k\to+\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}w_k&\rightharpoonup v\ \text{ en } L^2(\mathcal{O};H_0^1(\Omega))\\ \sqrt{\mu_n}w_k&\rightharpoonup w\ \text{ en } L^2(\Omega\times\mathcal{O})\\ (\partial_t+\partial_a)w_k+\mu_kw_k&\rightharpoonup z\ \text{ en } L^2(\mathcal{O};H^{-1}(\Omega)).\end{aligned}$$

Por otra parte, la hipótesis (5.2) nos garantiza que para $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega\times\mathcal{O})$ y k suficientemente grande,

$$\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}\sqrt{\mu_k}w_k\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t=\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}\sqrt{\mu}w_k\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}\sqrt{\mu}v\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.$$

Luego

$$\sqrt{\mu_k}w_k\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\mu}v\ \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega\times\mathcal{O}),$$

así $w = \sqrt{\mu}v$.
Análogamente, podemos probar que

$$(\partial_t + \partial_a)w_k + \mu_k w_k \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} v_t + v_a + \mu v \ \text{ en } \mathcal{D}'(\mathcal{O}; H^{-1}(\Omega)),$$

y por tanto $z = (\partial_t + \partial_a)v + \mu v$.
Así, se deduce que cuando $k \to +\infty$, se tiene

$$\begin{aligned} w_k &\rightharpoonup v \ \text{ en } L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega)),\\ (\partial_t + \partial_a)w_k &\rightharpoonup (\partial_t + \partial_a)v \ \text{ en } L^2(\mathcal{O}; H^{-1}(\Omega)).\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la fórmula de integración por partes, (5.7), tenemos que

$$\begin{aligned} w_k(x,a,0) &\rightharpoonup v(x,a,0) \ \text{ en } L^2(\Omega\times(0,A_\dagger)),\\ w_k(x,0,t) &\rightharpoonup v(x,0,t) \ \text{ en } L^2(\Omega\times(0,T)).\end{aligned}$$

Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, w_k es solución del problema $(5.12)'_n$, en particular, para todo $k \in \mathbb{N}$ verifica las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} w_k(x,a,0) &= u_0(x,a) \text{ en } \Omega\times(0,A_\dagger),\\ w_k(x,0,t) &= \tilde{b}(x,t) \text{ en } \Omega\times(0,T),\end{aligned}$$

entonces v satisface

$$\begin{aligned} v(x,a,0) &= u_0(x,a) \text{ en } \Omega\times(0,A_\dagger),\\ v(x,0,t) &= \tilde{b}(x,t) \text{ en } \Omega\times(0,T).\end{aligned}$$

Consecuentemente v es una solución de (5.12).

Para estudiar la unicidad, supongamos v_1 y v_2, dos soluciones distintas del problema (5.12) y sea $v := v_1 - v_2$. Entonces, v verifica el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_a v - \Delta v + \mu(x,a,t)v = 0 & \text{en } \Omega\times\mathcal{O},\\ v(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times\mathcal{O},\\ v(x,a,0) = 0 & \text{en } \Omega\times(0,A_\dagger),\\ v(x,0,t) = 0 & \text{en } \Omega\times(0,T).\end{cases}$$

Usando el Lema 5.2.5 y la Nota 5.2.6, obtenemos que $v \equiv 0$, y por tanto, la unicidad de solución de (5.12). □

5.3. Un resultado general de existencia y unicidad de solución

En esta Sección, vamos a ver que bajo cierta hipótesis de regularidad del término de reacción, tenemos existencia y unicidad de solución del problema (5.1). La demostración se basa en encontrar un punto fijo de un operador asociado al problema lineal correspondiente de (5.1).

Teorema 5.3.1. *Supongamos* $(\mathcal{H}_\mu)$, $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_0)$ *y además*

$(\mathcal{H}_f)$ *f es lipschitziana con respecto a la cuarta variable, i.e. existe una constante L positiva tal que e.c.t.* $(x,a,t) \in \Omega \times \mathcal{O}$

$$|f(x,a,t,s_1) - f(x,a,t,s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \ \textit{e.c.t}\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Además suponemos que

$$f(\cdot,\cdot,\cdot,0) \in L^2(\Omega \times \mathcal{O}). \tag{5.15}$$

Entonces existe una única solución, u, del problema (5.1).

Demostración. Realizando el siguiente cambio de variable $u = e^{\alpha t}\omega$, con u una solución de (5.1), entonces tenemos que ω debe ser una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \partial_a \omega - \Delta\omega + (\mu(x,a,t) + \alpha)\omega = e^{-\alpha t} f(x,a,t,e^{\alpha t}\omega) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ \omega(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)\omega(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{sobre } \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{5.16}$$

Así, vamos a estudiar la existencia de unicidad del problema (5.16) en vez de la de (5.1).

Sea Λ la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Lambda \ : \ L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega)) & \to & L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega)) \\ v & \mapsto & \Lambda v := w, \end{array} \tag{5.17}$$

donde w es la solución del siguiente problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_a w - \Delta w + (\mu(x,a,t) + \alpha) w = g(x,a,t) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ w(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ w(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ w(x,0,t) = b(x,t) & \text{sobre } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.18}$$

con

$$g(x,a,t) := e^{-\alpha t} f(x,a,t,e^{\alpha t} v), \tag{5.19}$$

$$b(x,t) := \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t) v(x,a,t)\,\mathrm{d}a. \tag{5.20}$$

Nótese que $g \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$. En efecto, gracias a $(\mathcal{H}_f)$ y (5.15), tenemos que

$$\begin{aligned} |g(x,a,t)| &\leq |e^{-\alpha t}(f(x,a,t,e^{\alpha t} v) - f(x,a,t,0))| + |e^{-\alpha t} f(x,a,t,0)| \\ &\leq L|v| + |e^{-\alpha t} f(x,a,t,0)|. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Consecuentemente $g \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$. Por otra parte, claramente, $b \in L^2(\Omega \times (0,T))$. Luego, aplicando la Proposición 5.2.7, tenemos que la aplicación Λ está bien definida.

Veamos entonces que Λ tiene un único punto fijo. Para esto, buscamos α tal que Λ defina un aplicación contractiva.

Consideremos el espacio $H^1(\Omega)$ dotado con la norma $\|\cdot\|_\alpha$, para un cierto $\alpha > 1$, definida por

$$\|z\|_\alpha^2 := \|z\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla z\|^2_{L^2(\Omega)^N}, \text{ para cada } z \in H^1(\Omega).$$

Se sigue fácilmente que $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma equivalente con la norma usual de $H^1(\Omega)$.

Para cualquier $v_1, v_2 \in L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega))$, consideramos $z := \Lambda v_1 - \Lambda v_2$. Entonces, se tiene que z es la solución del siguiente problema

$$(5.22)\quad \begin{cases} \partial_t z + \partial_a z - \Delta z + (\mu(x,a,t) + \alpha) z \\ \qquad\qquad = e^{-\alpha t}(f(x,a,t,e^{\alpha t}v_1) - f(x,a,t,e^{\alpha t}v_2)) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ z(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ z(x,a,0) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)(v_1 - v_2)(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Sea A_0 tal que $0 < A_0 < A_\dagger$, y tomemos la función $\phi := z\chi_{(0,A_0)}$ como una función test. Entonces multiplicando la primera ecuación de (5.22) por ϕ e integrando sobre $\mathcal{O}_0 := (0, A_0) \times (0,T)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{O}_0} \langle (\partial_t + \partial_a) z, z\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0} |\nabla z|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0} (\mu(x,a,t)+\alpha)|z|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\ (5.23)\quad &\qquad = \iint_{\mathcal{O}_0} e^{-\alpha t}\langle f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_1) - f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_2), z(\cdot,a,t)\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de integración por partes (5.7), llegamos a que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_0} \langle (\partial_t + \partial_a) z, z\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\Big(\iint_{\Omega\times(0,A_0)} z^2(x,a,T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ &\quad + \iint_{\Omega\times(0,T)} z^2(x,A_0,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \iint_{\Omega\times(0,T)} z^2(x,0,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big) \\ (5.24)\quad &\geq -\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,T)} \left(\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)(v_1-v_2)(x,a,t)\,\mathrm{d}a\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\geq -\frac{1}{2}\overline{\beta}^2 A_\dagger \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}} (v_1 - v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Procediendo como en (5.21), tenemos que $f(\cdot,\cdot,\cdot,e^{\alpha t}v_i) \in L^2(\Omega\times\mathcal{O}_0)$. Luego, por $(\mathcal{H}_f)$ y la definición de $\|\cdot\|_\alpha$, con $\alpha > 1$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{O}_0} e^{-\alpha t}\langle f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_1) - f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_2), z\rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le \iint_{\mathcal{O}_0} e^{-\alpha t}\|f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_1) - f(\cdot,a,t,e^{\alpha t}v_2)\|_{L^2(\Omega)}\|z(\cdot,a,t)\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le \iint_{\mathcal{O}_0} L\|(v_1-v_2)(\cdot,a,t)\|_{L^2(\Omega)}\|z(\cdot,a,t)\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le \frac{1}{2}L^2\iint_{\mathcal{O}_0}\|(v_1-v_2)(\cdot,a,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le \frac{1}{2}L^2\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}(v_1-v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le \frac{1}{2}L^2\iint_{\Omega\times\mathcal{O}}(v_1-v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Sustituyendo (5.24) y (5.25) en (5.23), puesto que hemos supuesto que $\mu \ge 0$ y $\alpha > 1$, se llega a

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\overline{\beta}^2A_\dagger\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}(v_1-v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}|\nabla z|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
+\alpha\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}_0}|z|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
\le \frac{1}{2}L^2\iint_{\Omega\times\mathcal{O}}(v_1-v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t &\le \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}^2A_\dagger + L^2\right)\iiint_{\Omega\times\mathcal{O}}(v_1-v_2)^2(x,a,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}^2A_\dagger + L^2\right)\iint_{\mathcal{O}}\|(v_1-v_2)(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Por tanto, para todo A_0, tal que $0 < A_0 < A_\dagger$, tenemos que

$$
\frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}_0}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}^2A_\dagger + L^2\right)\iint_{\mathcal{O}}\|(v_1-v_2)(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.
$$

Así, haciendo tender A_0 hacia $A_\dagger$, se obtiene que

$$
\frac{\alpha}{2}\iint_{\mathcal{O}}\|z(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}^2A_\dagger + L^2\right)\iint_{\mathcal{O}}\|(v_1-v_2)(\cdot,a,t)\|^2_\alpha\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t.
$$

Consecuentemente, para cualquier $v_1, v_2 \in L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega))$, se verifica que

$$
\|\Lambda v_1 - \Lambda v_2\|_{L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega))} \le \sqrt{\frac{\overline{\beta}^2A_\dagger + L^2}{\alpha}}\|v_1 - v_2\|_{L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega))}.
$$

Entonces, tomando

$$
\alpha > \text{máx}\{1, \overline{\beta}^2A_\dagger + L^2\}, \tag{5.26}
$$

se tiene que efectivamente el operador Λ, definido en (5.17), es una aplicación contractiva, y consecuentemente, gracias al Teorema del punto fijo de Banach, Λ tiene un único punto fijo.

Por tanto tenemos existencia y unicidad de solución, w, del problema (5.16). Y deshaciendo el cambio de variables $u = e^{\alpha t} w$, tenemos existencia y unicidad del problema original, es decir del problema (5.1). $\square$

Nota 5.3.2. *El Teorema sigue siendo cierto si suponemos que existe* $w \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$ *tal que* $f(\cdot,\cdot,\cdot,w) \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$ *en lugar de la condición* (5.15)*. En efecto, observemos que* (5.15) *se necesita solamente para demostrar que* g *definida en* (5.19) *pertenece a* $L^2(\Omega \times \mathcal{O})$*. Pero, esto también se tiene si en vez de* (5.21)*, razonamos como sigue*

$$\begin{aligned} |g(x,a,t)| &\leq |e^{-\alpha t}(f(x,a,t,e^{\alpha t}v) - f(x,a,t,w))| + |e^{-\alpha t} f(x,a,t,w)| \\ &\leq L|v - we^{-\alpha t}| + |e^{-\alpha t} f(x,a,t,w)|. \end{aligned}$$

Nota 5.3.3. *El Teorema anterior sigue siendo cierto si no suponemos que* β *sea positivo.*

5.4. El método de sub-supersoluciones

En esta Sección vamos a describir un método de sub-supersoluciones. Este método nos permitirá dar un resultado de existencia y unicidad de solución del problema (5.1), bajo la suposición de la existencia de un par de sub-supersolución y la hipótesis de lispchtzianidad del término de reacción entre la sub y la supersolución solamente. A su vez, dicho método nos servirá, en ciertos casos, para analizar el comportamiento de la solución a medida que va aumentando el tiempo, conocido el comportamiento de la sub y de la supersolución.

Definición 5.4.1. *Una función* $\underline{u} \in L^2(\mathcal{O}; H^1(\Omega))$ *se dice que es una* ***subsolución*** *del problema* (5.1) *si*

$$\begin{aligned} &(\partial_t + \partial_a)\underline{u} + \mu \underline{u} \in L^2(\mathcal{O}; (H^1(\Omega))'), \\ &f(\cdot,\cdot,\cdot,\underline{u}) \in L^2(\Omega \times \mathcal{O}) \end{aligned}$$

y además verifica

a) para todo $v \in L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega))$ *positiva*

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{O}} \langle (\partial_t + \partial_a)\,\underline{u} + \mu \underline{u}, v \rangle \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \iiint_{\Omega \times \mathcal{O}} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \leq \iint_{\mathcal{O}} f(x,a,t,\underline{u})\, v \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.27}$$

b) $\underline{u}(x,a,t) \leq 0$ *sobre* $\partial\Omega \times \mathcal{O}$*, en el sentido débil,*

c) $\underline{u}(x,0,t) \leq \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)\underline{u}(x,a,t)\,\mathrm{d}a$ *en* $\Omega \times (0,T)$*,*

d) $\underline{u}(x,a,0) \leq u_0(x,a)$ *en* $\Omega \times (0, A_\dagger)$*.*

Análogamente, se define una ***supersolución***, $\overline{u}$*, invirtiendo las desigualdades anteriores.*

El siguiente resultado nos garantiza que un par de sub-supersoluciones está ordenado.

Teorema 5.4.2. *Supongamos que existe un par de sub-supersoluciones de* (5.1), $\underline{u}$, $\overline{u}$, *y* f *verifica*

$$|f(x,a,t,s_1) - f(x,a,t,s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \text{ p.c.t. } s_1, s_2 \in [u_*, u^*]\,, \tag{5.28}$$

con

$$\begin{aligned} u_* &= \inf_{(x,a,t)\in\Omega\times\mathcal{O}} \{\underline{u}(x,a,t), \overline{u}(x,a,t)\} \\ u^* &= \sup_{(x,a,t)\in\Omega\times\mathcal{O}} \{\underline{u}(x,a,t), \overline{u}(x,a,t)\}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Entonces

$$\underline{u} \leq \overline{u}.$$

Nota 5.4.3. *Nótese que tanto* u_* *y* u^* *pueden ser infinito.*

Demostración. Definimos $\omega := \underline{u} - \overline{u}$, luego ω verifica:

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \partial_a\omega - \Delta\omega + \mu\omega \leq f(x,a,t,\underline{u}) - f(x,a,t,\overline{u}) & \text{en } \Omega\times\mathcal{O}, \\ \omega(x,a,t) \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times\mathcal{O}, \\ \omega(x,a,0) \leq 0 & \text{en } \Omega\times(0,A_\dagger), \\ \omega(x,0,t) \leq \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)\omega(x,a,t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{5.30}$$

Por (5.28), se tiene que

$$f(x,a,t,\underline{u}) - f(x,a,t,\overline{u}) \leq L|\omega|.$$

Ahora usando el Lema 5.2.5, se sigue fácilmente que $\omega \leq 0$ y así tenemos que $\underline{u} \leq \overline{u}$. □

Nota 5.4.4. *En particular, bajo las hipótesis del Teorema* 5.3.1*, y la existencia de un par de sub-supersoluciones de* (5.1), $\underline{u}$, $\overline{u}$, *entonces la solución* u *de* (5.1), *debe verificar*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Efectivamente, procediendo como en la prueba del Teorema anterior, tomando primero $\omega_1 := \underline{u} - u$, *y después* $\omega_2 := u - \overline{u}$, *se llega a que* ω_1 *y* ω_2 *son ambos negativos, y de aquí el resultado.*

Teorema 5.4.5. *Supongamos que se verifican las condiciones* $(\mathcal{H}_\mu)$, $(\mathcal{H}_\beta)$ *y* $(\mathcal{H}_0)$. *Si existe un par de sub-supersoluciones de* (5.1), $\underline{u}, \overline{u}$, *y, además,* f *verifica*

$$|f(x,a,t,s_1) - f(x,a,t,s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in [u_*, u^*]\,, \tag{5.31}$$

con u_* *y* u^* *definidas en* (5.29), *entonces* (5.1) *posee una única solución,* u, *tal que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Demostración. Nótese que gracias al Teorema 5.4.2, se tiene que $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Análogamente a la prueba del Teorema 5.3.1, mediante el cambio $w := ue^{-\alpha t}$, en vez de estudiar el problema (5.1), estudiamos el problema (5.16).

Puesto que nosotros queremos probar que existe una única solución, u, de (5.1) entre la sub y la supersolución, entonces al estudiar el problema (5.16), deberemos probar que existe una única solución w verificando

$$e^{-\alpha t}\underline{u} \leq w \leq e^{-\alpha t}\overline{u}. \tag{5.32}$$

Para la demostración vamos a proceder como en la prueba del Teorema 5.3.1, pero en vez de considerar el operador Λ, definido en (5.17), vamos a considerar el operador $\widetilde{\Lambda}$ definido como

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Lambda}\ :\ L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega)) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega)) \\ v & \mapsto & w, \end{array} \tag{5.33}$$

donde w es la solución del problema,

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_a w - \Delta w + (M + \alpha + \mu(x,a,t))w = g(x,a,t) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ w(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ w(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0,t) = b(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.34}$$

con $M > 0$, una constante que será elegida a posteriori, α definida en (5.26) y

$$g(x,a,t) := e^{-\alpha t} f(x,a,t,e^{\alpha t}v) + Mv, \tag{5.35}$$

$$b(x,t) := \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)v(x,a,t)\mathrm{d}a. \tag{5.36}$$

Así una aplicación de la Proposición 5.2.7, nos dice que el operador $\widetilde{\Lambda}$ está bien definido.

Ahora bien, como buscamos w solución del problema (5.34) verificando (5.32), entonces definiendo el intervalo $\left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right]$ como

$$\begin{aligned} \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right] := \{u \in L^2(\mathcal{O};H^1(\Omega)) :\ & e^{-\alpha t}\underline{u}(x,a,t) \leq u(x,a,t) \leq e^{-\alpha t}\overline{u}(x,a,t) \\ & \text{e.c.t. } (x,a,t) \in \Omega \times \mathcal{O}\}. \end{aligned}$$

Debemos probar que

$$\widetilde{\Lambda} : \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right] \to \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right]$$

y además tiene un único punto fijo en $\left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right]$.

Luego consideremos $v \in \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right]$, entonces tenemos que probar que $\widetilde{\Lambda}v \in \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right]$.

Probemos primero que $e^{-\alpha t}\overline{u} - \widetilde{\Lambda}v := \omega \geq 0$. Ahora bien, ω satisface

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \partial_a\omega - \Delta\omega + (M + \alpha + \mu(x,a,t))\omega & \\ \qquad \geq e^{-\alpha t}\left(f(x,a,t,\overline{u}) - f(x,a,t,e^{\alpha t}v)\right) + M\left(e^{-\alpha t}\overline{u} - v\right) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,t) \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,0) \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ \omega(x,0,t) \geq \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)(e^{-\alpha t}\overline{u} - v)(x,a,t)\,\mathrm{d}a \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Por (5.31) y el hecho de que $e^{\alpha t}v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, se tiene que

$$L(e^{\alpha t}v - \overline{u}) \leq f(x,a,t,\overline{u}) - f(x,a,t,e^{\alpha t}v) \leq L(\overline{u} - e^{\alpha t}v).$$

Luego, si definimos $h(x,t,a) := e^{-\alpha t}\left(f(x,a,t,\overline{u}) - f(x,a,t,e^{\alpha t}v)\right) + M\left(e^{-\alpha t}\overline{u} - v\right)$, obtenemos que

$$h(x,t,a) \geq (M - L)\left(e^{-\alpha t}\overline{u} - v\right).$$

Así, tomando $M > L$, llegamos a que $h \gneqq 0$ y, consecuentemente, $\omega \gneqq 0$ ([40, Teor. 2]). El mismo razonamiento aplicado $w := \widetilde{\Lambda}v - e^{-\alpha t}\underline{u}$ nos muestra que $\widetilde{\Lambda}v \geq e^{-\alpha t}\underline{u}$. Por consiguiente,

$$\widetilde{\Lambda} : \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right] \to \left[e^{-\alpha t}\underline{u}, e^{-\alpha t}\overline{u}\right].$$

Ahora, realizando un análisis similar al que hicimos en la prueba del Teorema 5.3.1, vemos que existe un único, v, punto fijo de $\widetilde{\Lambda}$. Además, $u = e^{\alpha t}v$ es la solución del problema (5.1). □

5.5. Aplicación a algunos modelos ecológicos

En esta Sección, vamos a aplicar el método de sub-supersoluciones para probar la existencia, la unicidad de solución positiva y algunas propiedades de comportamiento asintótico de las soluciones de diferentes modelos.

Primero consideremos el problema lineal,

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \partial_a\omega - \Delta\omega + \mu(a)\omega = \lambda\omega & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ \omega(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ \omega(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)\omega(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.37}$$

donde β satisface la condición $(\mathcal{H}_\beta)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, u_0 y q verifican

$(\mathcal{H}_0^*)$ $u_0 \in L^\infty(\Omega \times (0,A_\dagger))$ y $u_0(x,a) \geq 0$ e.c.t. $(x,a) \in \Omega \times (0,A_\dagger)$,

$(\mathcal{H}_\mu^*)$ μ es una función tal que $\mu \in L^\infty(0,r)$ para $r < A_\dagger$ y

$$\int_0^{A_\dagger} \mu(a)\,\mathrm{d}a = +\infty. \tag{5.38}$$

Observemos que (5.38) es equivalente con la condición (5.3) cuando $\mu \equiv \mu(a)$.

Siguiendo la notación usada en [65], denotamos por

$$\pi(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right),$$

y por r_μ la única solución real de

$$\int_0^{A_\dagger} \beta(a)\pi(a)e^{-ra}\,\mathrm{d}a = 1. \tag{5.39}$$

Finalmente, λ_1 denota el primer autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$.

Los resultados sobre el comportamiento asintótico de (5.37) son los siguientes (para una demostración ver [65, Sección 3 y 4]):

Teorema 5.5.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_0^*)$ *y* $(\mathcal{H}_\mu^*)$, *y que existe* $0 \leq A_0 \leq A_\dagger$ *tal que* $\mathrm{sop}(\beta) \subset [0, A_0]$. *Entonces, existe una única solución,* ω_λ, *de* (5.37). *Además, fijado* $T > 0$, ω_λ *está acotada en* $\Omega \times \mathcal{O}$.
Además,

a) Si $\mathrm{sop}(u_0) \subset \bar{\Omega} \times (A_0, A_\dagger)$ *la solución de* (5.37) *satisface* $\omega_\lambda(x, a, t) = 0$ *para* $t > a$ *y* $x \in \Omega$. *Además, para cada* $A > 0$

$$\omega_\lambda(\cdot, \cdot, t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega} \times [0, A].$$

b) Supongamos que la condición inicial, u_0, *verifica*

$$\mathrm{sop}(u_0) \cap (\Omega \times (0, A_0)) \neq \emptyset,$$

entonces

i) Si $\lambda < \lambda_1 - r_\mu$ *la solución de* (5.37) *satisface*

$$\omega_\lambda(\cdot, \cdot, t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega} \times [0, A_\dagger].$$

ii) Si $\lambda = \lambda_1 - r_\mu$ *la solución de* (5.37) *satisface*

$$\omega_\lambda(x, a, t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} g(x, a) \text{ en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)),$$

para una cierta función $g \in L^2_+(\Omega \times (0, A_\dagger))$ *(véase* [65, Teorema 4.9] *para una descripción de la función* g*).*

iii) Si $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$ *la solución de* (5.37) *satisface*

$$\omega_\lambda(x, a, t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)).$$

5.5.1. Un problema logístico generalizado

Nuestra primera aplicación del método de sub-supersolución va a ser al siguiente problema logístico generalizado

$$
\begin{cases}
\partial_t u + \partial_a u - \Delta u + \mu(a)u = \lambda u - g(u) & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\
u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\
u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\
u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)u(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T),
\end{cases}
\tag{5.40}
$$

donde β, u_0 y μ verifican las hipótesis $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_0^*)$ y $(\mathcal{H}_\mu^*)$, respectivamente, $\lambda \in \mathbb{R}$, y g satisface la siguiente condición

$(\mathcal{H}_g)$ es localmente lipschitziana, $g(0) = 0$, $g(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$ y verifica

$$
\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = 0 \tag{5.41}
$$

$$
\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s} = +\infty. \tag{5.42}
$$

En el siguiente resultado veremos la existencia y la unicidad de solución del problema (5.40), y usando un par adecuado de sub-supersolución, demostraremos que para los valores de λ tal que $\lambda < \lambda_1 - r_\mu$, el sistema (5.40) se extingue, es decir la densidad de población u para un instante de tiempo suficientemente grande se hace nula, pero la especie persiste si $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$.

Teorema 5.5.2. *Supongamos que se verifican las hipótesis $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_0^*)$ y $(\mathcal{H}_\mu^*)$. Entonces, existe una única solución positiva, u, del problema* (5.40)*. Supongamos que existe $0 \leq A_0 \leq A_\dagger$ tal que* $\operatorname{sop}(\beta) \subset [0, A_0]$, *entonces*

a) Si $\operatorname{sop}(u_0) \subset \bar{\Omega} \times (A_0, A_\dagger)$ *la solución de* (5.40) *satisface $u(x,a,t) = 0$ para $t > a$ y $x \in \Omega$. Además, para cada $A > 0$*

$$
u(\cdot,\cdot,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega} \times [0, A].
$$

b) Supongamos que la condición inicial, u_0, verifica

$$
\operatorname{sop}(u_0) \cap (\Omega \times (0, A_0)) \neq \emptyset,
$$

entonces

i) Si $\lambda < \lambda_1 - r_\mu$ la solución de (5.40) *satisface*

$$
u(\cdot,\cdot,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } \bar{\Omega} \times [0, A_\dagger].
$$

ii) Si $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$ y $u_0(x,a) > 0$ en $\Omega \times (0, A_\dagger)$, entonces el modelo (5.40)*, es permanente en el sentido siguiente:*
existe una subsolución $\underline{u}$ y una supersolución $\overline{u}$ de (5.40) *tal que:*

$$
\underline{u}(x,a) \leq u(x,a,t) \leq \overline{u}(x,a) \text{ e.c.t. } (x,a,t) \in \Omega \times (0, A_\dagger) \times (0, +\infty). \tag{5.43}
$$

Demostración. Usando la definición de sub-supersolución, podemos afirmar que $\underline{u} \equiv 0$ y $\overline{u} \equiv \omega_\lambda$ es un par de sub-supersoluciones de (5.40), respectivamente, donde ω_λ es la solución de (5.37). Gracias al Teorema 5.5.1, se tiene que ω_λ está acotada. Por otra parte la función $f(x,a,t,s) \equiv \lambda s - g(s)$ es globalmente lispchitziana para $s \in [0, \omega^*]$, con

$$\omega^* := \sup_{(x,a,t)\in\Omega\times\mathcal{O}} \{\omega_\lambda(x,a,t)\}.$$

Consecuentemente, aplicando el Teorema 5.4.5, se tiene que existe una única solución, u, de (5.40) tal que

$$0 \leq u(x,a,t) \leq \omega_\lambda(x,a,t) \text{ en } \Omega \times \mathcal{O}.$$

Además esta solución es única, puesto que si suponemos la existencia de otra solución positiva, v, entonces sabemos que en particular es una subsolución del problema (5.37). Consecuentemente, $0 \leq v \leq q\omega_\lambda$, y por tanto la unicidad de solución positiva.

Usando el Teorema 5.5.1 la demostración de a) e i) son directas.

Ahora supongamos que se verifica ii). Vamos a construir otra supersolución de (5.40). Sea $\varepsilon > 0$, tomemos

$$\underline{u}(x,a) := \varepsilon \exp\left(-r_\mu a - \int_0^a \mu(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi_1(x),$$

con φ_1 una autofunción positiva asociada al autovalor λ_1.
Vamos a probar que $\underline{u}$ es una subsolución de (5.40) para ε suficientemente pequeño. Es fácil comprobar que $\underline{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$, $\underline{u}(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)\underline{u}(x,a,t)\,\mathrm{d}a$ y que $\underline{u}(x,a) \leq u_0(x,a)$.
Para finalizar de demostrar que $\underline{u}$ es una subsolución de (5.40), tenemos que ver que

$$\underline{u}_t + \underline{u}_a - \Delta\underline{u} + \mu(a)\underline{u} \leq \lambda\underline{u} - g(\underline{u}).$$

Pero, demostrar esta desigualdad es equivalente a probar que

$$\frac{g(\underline{u})}{\underline{u}} \leq \lambda - (\lambda_1 - r_\mu) \text{ en } \Omega \times (0, A_\dagger).$$

Y, para ε suficientemente tenemos esta condición gracias a la hipótesis (5.41).

Ahora construyamos otra supersolución del problema (5.40). Fijemos $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$ y tomemos un dominio $\widetilde{\Omega}$ tal que $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$. Sea $\widetilde{\lambda_1}$ el primer autovalor asociado a $\widetilde{\Omega}$.

Gracias a la hipótesis $(\mathcal{H}^*_\mu)$, podemos considerar una función m tal que $m \in \mathcal{C}^0([0, A_\dagger])$ y $m(a) \leq \mu(a)$ para todo $a \in [0, A_\dagger]$.

Fijado $K > 0$, consideramos

$$\overline{u}(x,a) := K \exp\left(-r_m a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s\right)\widetilde{\varphi_1}(x),$$

donde $\widetilde{\varphi_1}$ es la autofunción positiva asociada a $\widetilde{\lambda_1}$.

Veamos que efectivamente $\overline{u}$ es una supersolución de (5.40) para K suficientemente grande. En efecto, se tiene que $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega$, $\overline{u}(x,0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(a)\overline{u}(x,a,t)\,\mathrm{d}a$ y

$$\overline{u}(x,a) \geq u_0(x,a),$$

para K grande. Para esta última desigualdad hemos usado que $\widetilde{\varphi_1}(x) \geq c_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$. Luego, falta por demostrar que

$$\overline{u}_t + \overline{u}_a - \Delta\overline{u} + \mu(a)\overline{u} \geq \lambda\overline{u} - g(\overline{u}).$$

Pero, esta desigualdad es equivalente a demostrar que

$$\frac{g(\overline{u})}{\overline{u}} \geq \lambda - (\widetilde{\lambda_1} - r_m) + (m(a) - \mu(a)).$$

Por (5.42), para K suficientemente grande, se tiene esta desigualdad. □

Nota 5.5.3. *Un ejemplo clásico de función g que verifica $(\mathcal{H}_g)$ es la función*

$$g(s) := s^p, \ \ con\ p > 1.$$

5.5.2. Un modelo de tipo Holling-Tanner

Ahora, vamos a aplicar el método de sub-supersolución a un modelo de Holling-Tanner del tipo

$$\text{(5.44)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_a u - \Delta u + \mu(a)u = \lambda u + \dfrac{u}{1+u} & \text{en } \Omega \times \mathcal{O}, \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathcal{O}, \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)u(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

donde β satisface $(\mathcal{H}_\beta)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, u_0 y μ verifican $(\mathcal{H}_0^*)$ y $(\mathcal{H}_\mu^*)$, respectivamente.

Antes de probar el resultado principal de esta Sección, necesitamos un resultado de continuidad de la aplicación $\mu \mapsto r_\mu$, donde r_μ es la única solución real de (5.39).

Lema 5.5.4. *Supongamos que existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(0, A_\dagger)$, tal que la sucesión definida por*

$$\Psi_n(a) := \int_0^a \mu_n(s)\,\mathrm{d}s,$$

es creciente como sucesión en $n \in \mathbb{N}$ y satisface

$$\Psi_n(a) \nearrow \Psi(a) := \int_0^a \mu(s)\,\mathrm{d}s, \quad cuando\ n \to \infty\ e.c.t.\ a \in (0, A_\dagger).$$

Entonces,

$$r_{\mu_n} \searrow r_\mu, \quad cuando\ n \to \infty.$$

Demostración. Ya que Ψ_n es una sucesión creciente entonces r_{μ_n} es decreciente y puesto que $\Psi_n(a) \nearrow \Psi(a)$ tenemos que

$$r_{\mu_n} \geq r_\mu.$$

Entonces, existe $r_* \geq r_\mu$ tal que

$$r_{\mu_n} \searrow r_*, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostremos ahora que $r^* = r_\mu$. Consideremos la aplicación

$$G_n(a) := \exp\left(-r_{\mu_n} a - \Psi_n(a)\right).$$

Es fácil comprobar que

$$\Psi_n(a) \to \exp\left(-r_* a - \Psi(a)\right) \quad \text{e.c.t } a \in (0, A_\dagger) \text{ cuando } n \to +\infty$$

y

$$|\Psi_n(a)| \leq e^{-r_* a}.$$

Gracias al Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que

$$1 = \int_0^{A_\dagger} \exp\left(-r_* a - \int_0^a \mu(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}a.$$

Así, usando la definición de r_μ, se llega a que efectivamente $r_* = r_\mu$. □

El resultado principal que obtenemos para el modelo (5.44) es el siguiente

Teorema 5.5.5. *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_0^*)$, $(\mathcal{H}_\mu^*)$ *y que* $\mu \in \mathcal{C}^0([0, A_\dagger))$ *es una función creciente. Entonces, existe una única solución positiva* u *de* (5.44). *Supongamos que existe* $0 \leq A_0 \leq A_\dagger$ *tal que* $\mathrm{sop}(\beta) \subset [0, A_0]$, *entonces*

a) Si $\mathrm{sop}(u_0) \subset \bar{\Omega} \times (A_0, A_\dagger)$ *la solución de* (5.44) *verifica* $u(x, a, t) = 0$ *para* $t > a$ *y* $x \in \Omega$. *Además, para cada* $A > 0$

$$u(\cdot, \cdot, t) \to 0 \textit{ uniformemente } \bar{\Omega} \times [0, A] \textit{ cuando } t \to +\infty.$$

b) Supongamos que la condición inicial u_0 *satisface*

$$\mathrm{sop}(u_0) \cap (\Omega \times (0, A_0)) \neq \emptyset,$$

entonces

i) Si $\lambda < \lambda_1 - r_\mu - 1$ *la solución de* (5.44) *verifica*

$$u(\cdot, \cdot, t) \to 0 \textit{ uniformemente en } \bar{\Omega} \times [0, A_\dagger] \textit{ cuando } t \to +\infty.$$

ii) Si $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$, *la solución de* (5.44) *verifica*

$$u(x, a, t) \to +\infty \textit{ en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)) \textit{ cuando } t \to +\infty.$$

iii) Si $\lambda \in (\lambda_1 - r_\mu - 1, \lambda_1 - r_\mu)$ *y* $u_0(x, a) > 0$ *en* $\Omega \times (0, A_\dagger)$, *entonces* (5.44) *es un sistema permanente, en el sentido de la definición del Teorema* 5.5.2.

Demostración. Primero, observamos que

$$\lambda u + \frac{u}{1+u} = (\lambda + 1)u - \frac{u^2}{1+u}.$$

Nótese que $s^2/(1+s)$ no satisface la hipótesis (5.42), por tanto no podemos aplicar los resultados obtenidos para el problema logístico.

Como en el caso del problema logístico, tenemos que $\underline{u} \equiv 0$ y $\overline{u} \equiv \omega_{\lambda+1}$ es un par de sub-supersoluciones de (5.44). Además, la parte a) se sigue por el Teorema 5.5.1 parte b) i).

Por otra parte, ya que u es una supersolución de (5.37), se llega a que

$$\omega_\lambda \leq u,$$

luego se obtiene ii).

Fijemos $\lambda \in (\lambda_1 - r_\mu - 1, \lambda_1 - r_\mu)$. Procediendo de manera similar a como hicimos en la demostración del Teorema 5.5.2, podemos probar que

$$\underline{u}(x,a) := \varepsilon \exp\left(-r_\mu a - \int_0^a \mu(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi_1(x)$$

es una subsolución de (5.44).

Ahora, fijando $\lambda < \lambda_1 - r_\mu$ y tomando $\delta > 0$ tal que $\lambda < \lambda_1 - r_\mu - \delta$, gracias a la continuidad del primer autovalor λ_1 con respecto al dominio, tenemos que existe un dominio Ω_1, $\Omega \subset \Omega_1$ tal que

$$\lambda < \overline{\lambda}_1 - r_\mu - \delta,$$

donde $\overline{\lambda}_1$ es el primer autovalor asociado al dominio Ω_1.

Finalmente, vamos a demostrar que existe una sucesión de funciones $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([0, A_\dagger + 1/n))$, tal que $\mu_n \leq \mu$, verifica el Lema 5.5.4, y tal que

$$\lambda < \overline{\lambda}_1 - r_{\mu_n} - \delta \quad \text{para } n \geq n_0 \text{ para algún } n_0 \geq 0. \tag{5.45}$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión

$$\mu_n(s) := \begin{cases} \mu(0) & 0 \leq s \leq 1/n, \\ \mu(s - 1/n) & 1/n < s < A_\dagger + 1/n. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\mu_n \leq \mu$ y verifica las hipótesis del Lema 5.5.4.

Consideremos

$$\overline{u}(x,a) := K \exp\left(-r_{\mu_n} a - \int_0^a \mu_n(s)\,\mathrm{d}s\right)\overline{\varphi}_1(x),$$

donde $\overline{\varphi}_1$ es la autofunción positiva asociada a $\overline{\lambda}_1$. Vamos a probar que $\overline{u}$ es una supersolución de (5.44) para K suficientemente grande. En efecto, obsérvese que $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega$, $\overline{u}(x,0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(a)\overline{u}(x,a,t)\,\mathrm{d}a$ en Ω y

$$\overline{u}(x,a) \geq u_0(a,x),$$

para una constante K grande. En esta última desigualdad hemos usado, de nuevo, que $\overline{\varphi}_1(x) \geq c_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ y que, ya que μ_n es finita en $[0, A_\dagger]$,

$$\overline{u} \geq KC_0 > 0 \quad \text{en } \overline{\Omega} \times [0, A_\dagger]. \tag{5.46}$$

Para finalizar,

$$\partial_t \overline{u} + \partial_a \overline{u} - \Delta \overline{u} + \mu(a)\overline{u} \geq (\lambda + 1)\overline{u} - \frac{\overline{u}^2}{1 + \overline{u}}$$

es equivalente a

$$\frac{\overline{u}}{1 + \overline{u}} \geq \lambda + 1 - \overline{\lambda}_1 + r_{\mu_n} + \mu_n(a) - \mu(a). \tag{5.47}$$

Puesto que $\mu_n \leq \mu$ y se verifica (5.45), se tiene que

$$\lambda + 1 - \overline{\lambda}_1 + r_{\mu_n} + \mu_n(a) - \mu(a) \leq 1 - \delta.$$

Y por (5.46)

$$\frac{\overline{u}}{1 + \overline{u}} \geq \frac{KC_0}{1 + KC_0},$$

así, para K grande, tenemos que la desigualdad (5.47) se verifica. Con lo que concluimos la prueba. □

Nota 5.5.6. *Desde un punto de vista biológico, la hipótesis de que la tasa de mortalidad μ es una función creciente en la edad tiene perfecto sentido; además, ayuda a clarificar la exposición.*

CAPÍTULO 6

Estudio del problema estacionario asociado al modelo con difusión

En este Capítulo, queremos analizar el problema estacionario asociado al problema del Capítulo anterior (5.1), y principalmente el asociado al problema logístico generalizado (5.40). Esto nos permitirá un mejor conocimiento del comportamiento asintótico de la solución del problema evolutivo.

6.1. Introducción

Vamos a estudiar el problema estacionario asociado al problema (5.1), es por ello que vamos a suponer que la tasa de mortalidad μ es independiente del tiempo. Así, considerando las mismas notaciones que en el Capítulo anterior, estudiamos el problema no lineal siguiente

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u = f(x,a,u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Una de las principales dificultades que nos encontramos en el estudio del problema (6.1), es que vamos a suponer que μ explota en edad finita y además la condición inicial es no local. Es por ello que no podemos aplicar el método clásico de sub-supersoluciones para problemas parabólicos (véase por ejemplo [35] y [76]). Por esta razón, en este Capítulo, vamos a justificar un método de sub-supersolución, el cual nos dará la existencia de solución del problema (6.1), donde vamos a entender por solución lo siguiente:

Definición 6.1.1. *Diremos que una función u es una **solución** del problema* (6.1) *si $u : \Omega \times (0, A_\dagger) \to \mathbb{R}$ es una función medible tal que u verifica*

$$\partial_a u + \mu u \in L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega)),$$
$$f(\cdot, \cdot, u) \in L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega)),$$

y para cualquier $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ *se tiene que*

$$\int_0^{A_\dagger} \langle \partial_a u + \mu u, v \rangle \, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a = \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} f(x,a,u) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a,$$
$$u(x,a) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger),$$
$$u(x,0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u(x,a) \, \mathrm{d}a, \text{ en } \Omega.$$

Así, en el Teorema 6.4.2 demostraremos que bajo la hipótesis de la existencia de un par ordenado de sub-supersoluciones de (6.1), existe un par de solución maximal y minimal entre la sub y la supersolución, suponiendo, básicamente, la lipschitzianidad de f en la variable u. Luego este resultado generaliza el resultado clásico para los problemas parabólicos en las dos vías mencionadas anteriormente.

Este resultado será usado, principalmente, para el estudio, según los valores de λ, de la existencia y unicidad o de la no existencia de solución del problema logístico estacionario asociado al problema evolutivo (5.40) siguiente,

$$\tag{6.2} \begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a) u = \lambda u - g(u) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u(x,a) \, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ y g verificando las hipótesis $(\mathcal{H}_g)$, (5.41) y (5.42), definidas en la página 162 del Capítulo anterior y además, $g(s)/s$ una función creciente.

En general el estudio de la existencia de soluciones positivas de un problema similar a (6.2) no es trivial. De hecho, en nuestro conocimiento, solamente problemas lineales en u han sido analizados en [65], aunque en este caso la ecuación también depende de la población total, es decir de

$$P(x) = \int_0^{A_\dagger} u(x,a) \mathrm{d}a.$$

Concretamente en [65], (véase [65, Teorema 3.5]), no se supone la existencia de un término de reacción y las funciones μ y β verifican

$$\mu(x,a) = \mu_1(a) + \mu_2(P), \qquad \beta(x,a) = \beta_1(a),$$

y además, en este caso, P es la solución positiva del problema clásico elíptico logístico, es decir P es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta P = P(\lambda - P) & \text{en } \Omega, \\ P(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

la cual es conocida. Bajo estas hipótesis, el autor prueba que solamente pueden existir soluciones del tipo

$$u(x,a,t) := U(a)V(x,t)$$

y entonces busca la solución explícitamente.

Para los resultados de la existencia y de la no existencia de solución del problema (6.2) estudiaremos el problema de autovalores asociado con (6.2). Es decir, analizaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u = \lambda u & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{6.3}$$

Para esto, seguiremos una idea de [41]. Demostraremos que existe un único autovalor principal (en el sentido que es el único con autofunción asociada estrictamente positiva) denotado por $\lambda_0(\mu)$. Obsérvese la gran diferencia que existe entre el problema (6.3) y el problema parabólico clásico (6.3) con $u(x,0) = u_0(x) > 0$ en lugar de la condición no local, el cual tiene existencia de solución positiva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicando los resultados obtenidos en todo el Capítulo al problema (6.2), veremos que posee una solución positiva si y sólo si $\lambda > \lambda_0(\mu)$. Además, si $\lambda \leq \lambda_0(\mu)$ la única solución positiva de (6.2) es la trivial y si $\lambda > \lambda_0(\mu)$, tendremos unicidad de solución positiva. De nuevo, un destacable cambio ocurre con respecto al problema (6.2) con $u(x,0) = u_0(x)$, el cual posee una única solución positiva para todo valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.2. Hipótesis

Vamos a considerar las siguientes condiciones, que serán utilizadas a lo largo de este Capítulo

($\mathcal{H}_\mu$) μ es una función tal que $\mu \in L^\infty(\overline{\Omega} \times (0,r))$ para $r < A_\dagger$ y

$$\int_0^r \mu_M(a)\,\mathrm{d}a < \infty, \qquad \int_0^{A_\dagger} \mu_L(a)\,\mathrm{d}a = +\infty, \tag{6.4}$$

donde

$$\mu_L(a) := \inf_{x \in \overline{\Omega}} \mu(x,a) \quad \text{y} \quad \mu_M(a) := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \mu(x,a).$$

($\mathcal{H}_\beta$) $\beta \in L^\infty(\Omega \times (0, A_\dagger))$, $\beta \geq 0$, no trivial y existe un conjunto $\Sigma \subseteq [0, A_\dagger]$ con medida estrictamente positiva, definido como

$$a \in \Sigma \text{ si } \beta_L(a) := \inf_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x,a) > 0.$$

Nota 6.2.1. *La condición* (6.4) *es necesaria para tener*

$$\lim_{a \uparrow A_\dagger} u(x,a) \equiv 0,$$

para u solución de (6.1).

6.3. Análisis de algunos problemas auxiliares

En esta Sección vamos a estudiar algunos problemas asociados al problema (6.1), que serán utilizados a lo largo de todo el Capítulo.

6.3.1. Estudio del problema lineal autónomo

Primero vamos a considerar el problema lineal autónomo asociado al problema (6.1), es decir vamos a estudiar el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_a u - \Delta u + m(a)u = f(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{6.5}$$

Para este problema concreto supondremos que m verifica

($\mathcal{H}_m$) $m \in L^\infty(0,r)$ para $r < A_\dagger$ y

$$\int_0^{A_\dagger} m(a)\,\mathrm{d}a = +\infty. \tag{6.6}$$

Nótese que en realidad la condición ($\mathcal{H}_m$) es equivalente a ($\mathcal{H}_\mu$) cuando μ no depende de la variable espacial x.

Vamos a establecer un principio del máximo.

Lema 6.3.1. *Supongamos que se verifica* ($\mathcal{H}_m$) *y sea u una solución del problema* (6.5) *con $f \geq 0$, $\phi \geq 0$ y alguna de las desigualdades estrictas. Entonces, $u \gg 0$ (véase la Definición* 1.1.5*).*

Si $f \equiv \phi \equiv 0$, entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Obsérvese que si u es una solución de (6.5), entonces realizando el cambio de variables

$$v := u\, e^{\int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s},$$

se tiene que v es una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_a v - \Delta v = g(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ v(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ v(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{6.7}$$

donde

$$g(x,a) := f(x,a)\, e^{\int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Por [7] (véase también [5]), se tiene que efectivamente $v \gg 0$ y por tanto $u \gg 0$.

Análogamente se tiene, si $f \equiv \phi \equiv 0$, entonces $v \equiv 0$, y por tanto también u es nula. □

Nota 6.3.2. *La existencia y unicidad de solución del modelo anterior* (6.5)*, será analizada en el apartado siguiente.*

6.3.2. Estudio del problema lineal no autónomo

Ahora consideramos el siguiente problema lineal

$$(6.8)\qquad \begin{cases} \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u = f(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con μ satisfaciendo la condición $(\mathcal{H}_\mu)$ y $\phi \in L^2(\Omega)$.

Lema 6.3.3. *Supongamos que $f \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$. Entonces, existe una única solución u de* (6.8) *en el sentido de la Definición* 6.1.1. *Además, para cada A_0, tal que, $0 < A_0 < A_\dagger$ tenemos que $u \in \mathcal{C}^0([0, A_0]; L^2(\Omega))$.*

Por otra parte, se tienen los siguientes principios de comparación:

a) Si $f \geq 0$ y $\phi \geq 0$, entonces $u \geq 0$. Además, si alguna de estas desigualdades es estricta, se obtiene que $u \gg 0$.

b) Si $f_1 \geq f_2 \geq 0$, $\phi_1 \geq \phi_2 \geq 0$ y $\mu_1 \leq \mu_2$ en sus respectivos dominios, entonces $u_1 \geq u_2$, donde u_i, $i = 1, 2$, es la solución de (6.8) *con $f = f_i$, $\phi = \phi_i$ y $\mu = \mu_i$.*

Demostración. Realizando el cambio de variables

$$w := e^{-ka} u,$$

con k una constante positiva, tenemos que w verifica el problema

$$(6.9)\qquad \begin{cases} w_a - \Delta w + (\mu(x,a) + k)w = g & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger) \\ w(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con

$$g(x,a) := f(x,a)\, e^{-ka}.$$

Gracias a la condición $(\mathcal{H}_\mu)$, podemos tomar k suficientemente grande para tener $\mu(x,a) + k/3 \geq 0$. Estudiamos entonces el problema (6.9) en vez de (6.8).

Análogamente a como hicimos en el Capítulo 5 en la página 151, para $n = 1, 2, \cdots$, designamos por μ_n las funciones truncadas, definidas por

$$(6.10)\qquad \mu_n(x,a) := \begin{cases} \mu(x,a) & \text{para } \mu(x,a) \leq n, \\ n & \text{para } \mu(x,a) > n, \end{cases}$$

y para cada $n = 1, 2, \cdots$, consideramos el problema

$$(6.9)_n\qquad \begin{cases} \partial_a(w_n) - \Delta w_n + (\mu_n(x,a) + k)w_n = g(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w_n(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w_n(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\mu_n + k$ está acotada, existe una única, w_n, solución de $(6.9)_n$ con $w_n \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ y $\partial_a(w_n) \in L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega))$. Multiplicando la primera ecuación de $(6.9)_n$ por w_n, integrando sobre $\Omega \times (0, A_\dagger)$ y aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} w_n^2(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |\nabla w_n(x,a)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} (\mu_n(x,a)+k) w_n^2(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ = \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} g(x,a) w_n(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Ahora bien, usando la desigualdad $2ab \leq (\varepsilon^2 a^2 + (1/\varepsilon^2) b^2)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} g(x,a) w_n(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \leq \frac{3}{4k} \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} g^2(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ + \frac{k}{3} \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} w_n^2(x,a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |w_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |\nabla w_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \left[(\mu_n + k/3) w_n^2 + (k/3) w_n^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \leq C, \end{aligned}$$

con C una constante independiente de n. Luego, podemos extraer una subsucesión convergente, $\{w_m\}_m$, tal que para $m \to +\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} w_m &\rightharpoonup w \quad \text{en } L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega)), \\ \sqrt{\mu_m + (k/3)} w_m &\rightharpoonup h \quad \text{en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)), \\ \partial_a(w_m) + (\mu_m + k/3) w_m &\rightharpoonup z \quad \text{en } L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Por otra parte, gracias a la hipótesis $(\mathcal{H}_\mu)$, para $\varphi \in D(\Omega \times (0, A_\dagger))$ y m suficientemente grande se llega a que

$$\begin{aligned} \int_0^{A_\dagger} \langle (w_m)_a + (\mu_m + k/3) w_m, \varphi \rangle \mathrm{d}a = \int_0^{A_\dagger} \langle -w_m \varphi_a + (\mu + k/3) w_m, \varphi \rangle \mathrm{d}a \underset{m\to+\infty}{\rightarrow} \\ \underset{m\to+\infty}{\rightarrow} \int_0^{A_\dagger} \langle -w \varphi_a + (\mu + k/3) w), \varphi \rangle \mathrm{d}a, \end{aligned}$$

luego,

$$z = \partial_a w + (\mu + k/3) w.$$

Entonces, gracias a la continuidad de la aplicación traza, se tiene que w es solución del problema (6.9) y de aquí se deduce que $u \equiv e^{ka} w$ es solución del problema (6.8).

La regularidad $u \in \mathcal{C}^0([0, A_0]; L^2(\Omega))$, para $A_0 < A_\dagger$, se sigue considerando la ecuación (6.8) en $\Omega \times (0, A_0)$, véase por ejemplo [12, Teorema X.1].

Estudiemos ahora la unicidad. Para ello supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones del problema (6.8). Entonces, $w = u_1 - u_2$ satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_a w - \Delta w + \mu(x,a)w = 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación de este problema por w nos da, efectivamente, que $w \equiv 0$.

Demostremos ahora los principios de comparación, para ello supongamos que $f \geq 0$ y $\phi \geq 0$. Sea u la solución de (6.8), entonces, por el principio del máximo clásico aplicado al problema $(6.9)_n$ (obsérvese que en este caso el potencial está acotado), se sigue que $w_n \geq 0$, y consecuentemente $u \geq 0$. Además,

$$0 \leq f = \partial_a u - \Delta u + \mu(x,a)u \leq \partial_a u - \Delta u + \mu_M(a)u,$$

y por tanto $u \gg 0$ se tiene gracias al Lema 6.3.1.
Y de aquí se sigue la parte b) del Lema, pues si u_1, u_2 son las soluciones correspondientes del problema (6.8), en las condiciones de la parte b) del Lema, entonces denotando $v := u_1 - u_2$, se tiene que v verifica

$$\begin{cases} \partial_a v - \Delta v + \mu_1 v = (f_1 - f_2) + (\mu_2 - \mu_1)u_2 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ v(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ v(x,0) = (\phi_1 - \phi_2) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando la parte a), obsérvese que gracias a las hipótesis tenemos que $u_2 \geq 0$, se tiene que $v \geq 0$ y por tanto el resultado. □

6.4. El método de sub-supersoluciones

Nuestro siguiente objetivo es estudiar el problema (6.1) donde β y μ verifican las condiciones $(\mathcal{H}_\beta)$ y $(\mathcal{H}_\mu)$ respectivamente, y $f : \Omega \times (0, A_\dagger) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función medible.

Definición 6.4.1. *Diremos que una función $\overline{u} \in L^2(0, A_\dagger; H^1(\Omega))$ es una **supersolución** de (6.1) si*

$$\partial_a \overline{u} + \mu\overline{u} \in L^2(0, A_\dagger; (H^1(\Omega))'),$$
$$f(\cdot, \cdot, \overline{u}) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$$

y además se cumple que para toda $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ positiva

$$\int_0^{A_\dagger} \langle \partial_a \overline{u} + \mu\overline{u}, v\rangle \, da + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \nabla\overline{u} \cdot \nabla v \, dx \, da \geq \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} f(x,a,\overline{u}) v \, dx \, da,$$
$$\overline{u}(x,a) \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger),$$
$$\overline{u}(x,0) \geq \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)\overline{u}(x,a) \, da \text{ en } \Omega.$$

*Análogamente se define una **subsolución**, $\underline{u}$, cambiando las desigualdades anteriores por sus contrarias.*

Teorema 6.4.2. *Supongamos que se verifican las condiciones* $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_\mu)$ *y* f *verifica*

$$|f(x,a,s_1) - f(x,a,s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad e.c.t.\ (x,a) \in \Omega \times (0, A_\dagger), s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Si existe un par de sub-supersoluciones de (6.1) *tal que* $\underline{u} \leq \overline{u}$*, entonces existe una solución minimal* u_* *y una maximal* u^* *de* (6.1)*, en el sentido siguiente:*
para cualquier otra solución

$$u \in [\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\},$$

se verifica que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u}.$$

Demostración. Definimos la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$u_0 = \underline{u}$$

y para $n \geq 1$, u_n la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_a(u_n) - \Delta u_n + (\mu(x,a) + M)u_n = f(x,a,u_{n-1}) + Mu_{n-1} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u_n(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u_n(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u_{n-1}(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{6.12}$$

donde M es una constante positiva que será elegida a posteriori.
Y la sucesión $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se define como

$$u^0 = \overline{u}$$

y para $n \geq 1$, u^n la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_a(u^n) - \Delta u^n + (\mu(x,a) + M)u^n = f(x,a,u^{n-1}) + Mu^{n-1} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u^n(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u^n(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u^{n-1}(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{6.13}$$

Primero veamos que u_n está bien definida.
Ya que $f(x,a,u_0) = f(x,a,\underline{u}) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$, podemos aplicar el Lema 6.3.3 y de aquí la existencia de u_1. Además, puesto que

$$-L|u_1 - u_0| + f(x,a,u_0) \leq f(x,a,u_1) \leq L|u_1 - u_0| + f(x,a,u_0),$$

se sigue que $f(x,a,u_1) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$, y de aquí la existencia de u_2, y procediendo análogamente se llega a la existencia de u_n para cualquier n. Análogamente, podemos probar la existencia de u^n.

Demostremos, ahora, que la sucesión $\{u_n\}_n$ (resp. $\{u^n\}_n$) es creciente (resp. decreciente) y que para cada $n \geq 1$ se verifica la siguiente desigualdad

$$\underline{u} \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u^{n+1} \leq u^n \leq \ldots \leq \overline{u}. \tag{6.14}$$

En efecto, tomando $w := u_1 - u_0$, w verifica el problema

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_a w - \Delta w + \mu(x,a)w + Mw \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) \geq 0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.15}$$

Usando el Lema 6.3.3, podemos concluir que $w \geq 0$, i.e.,

$$\overline{u} = u_0 \leq u_1.$$

Supongamos que para $n \geq 1$, se tiene que $u_{n-1} \leq u_n$. Gracias a la hipótesis (6.11) se tiene que

$$f(x,a,u_n) - f(x,a,u_{n-1}) + M(u_n - u_{n-1}) \geq (M - L)(u_n - u_{n-1}) \geq 0,$$

para $M > L$. Entonces, $w := u_{n+1} - u_n$ satisface el problema

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_a w - \Delta w + \mu(x,a)w + Mw \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)(u_n - u_{n-1})(x,a)\,\mathrm{d}a \geq 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.16}$$

y aplicando, nuevamente, el Lema 6.3.3, obtenemos que $u_n \leq u_{n+1}$.
Análogamente podemos demostrar el resto de desigualdades de (6.14).

Veamos ahora que la sucesión $\{u_n\}_n$ converge a una solución minimal u_*. Para ello, multiplicando la primera ecuación de (6.12) por u_n e integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} (\mu + M)u_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\ = \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} (f(x,a,u_{n-1}) + Mu_{n-1})u_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Por otra parte, gracias a (6.11) y las desigualdades (6.14) obtenemos que

$$f(x,a,u_{n-1}) \leq L(u_{n-1} - \underline{u}) + f(x,a,\underline{u}) \leq L(\overline{u} - \underline{u}) + f(x,a,\underline{u}).$$

Y así, utilizando de nuevo la desigualdad (6.14), llegamos a que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} (\mu + M)u_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \leq C,$$

con C independiente de n.
Usando un razonamiento análogo al empleado en el Lema 6.3.3, podemos extraer una subsucesión $\{u_k\}_k$ tal que haciendo $k \to +\infty$ se verifica

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_* \quad \text{en } L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega)), \\ \sqrt{\mu}u_k &\rightharpoonup w \quad \text{en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)), \\ \partial_a(u_k) + \mu u_k &\rightharpoonup z \quad \text{en } L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Por la monotonía de la sucesión u_k y usando el Teorema de la convergencia monótona, podemos concluir que

$$u_n \to u_* \text{ en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)). \tag{6.17}$$

Ahora por la hipótesis (6.11), se tiene que

$$-L(u_n - u_*) + f(x, a, u_*) \leq f(x, a, u_n) \leq L(u_n - u_*) + f(x, a, u_*),$$

y consecuentemente

$$f(x, a, u_n) \rightharpoonup f(x, a, u_*) \text{ en } L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)).$$

Finalmente, la continuidad de la aplicación traza en $a = 0$ y (6.17) implican que

$$u_*(x, a) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x, a) u_*(x, a)\, \mathrm{d}a.$$

Por tanto podemos concluir que u_* es una solución de (6.1).

No es difícil comprobar que u_* es la solución minimal de (6.1). En efecto, si u es una solución de (6.1) tal que $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, entonces la sucesión u_n construida en (6.12) verifica que $\overline{u} \leq u_n \leq u$. Además,

$$u_n \uparrow u_* \leq u.$$

Razonando de una manera similar con la sucesión u^n, nos permite concluir la existencia de una solución maximal, u^*, de (6.1). Con lo que concluimos la prueba. $\square$

6.5. El problema de autovalores

En esta Sección, vamos a estudiar el problema de autovalores asociados al problema logístico (6.2), es decir el problema (6.3),

Primero daremos la definición de autovalor del problema (6.3) y de autovalor principal.

Definición 6.5.1. *λ es un **autovalor** de (6.3) si existe una función u tal que*

$$u \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega)),$$

$$\partial_a u + \mu u \in L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega))$$

con $u \neq 0$ solución de (6.3) en el sentido siguiente:
para toda $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ se verifica

$$\int_0^{A_\dagger} \langle \partial_a u + \mu u, v \rangle\, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega \times (0, A_\dagger)} \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}a = \lambda \iint_{\Omega \times (0, A_\dagger)} uv\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}a,$$
$$u(x, a) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger),$$
$$u(x, 0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x, a) u(x, a)\, \mathrm{d}a \text{ en } \Omega,$$

*Diremos que λ es un **autovalor principal** si $u > 0$ en $\Omega \times (0, A_\dagger)$.*

Antes de estudiar el problema (6.3), necesitamos analizar el caso autónomo, i.e.,

$$
(6.18) \qquad \begin{cases} \partial_a u - \Delta u + m(a)u = \lambda u & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \gamma(a) u(x,a)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases}
$$

donde m verifica la hipótesis $(\mathcal{H}_m)$ definida en la página 172 y γ verifica

$(\mathcal{H}_\gamma)$ $\gamma \in L^\infty(0, A_\dagger)$, $\gamma \geq 0$ y no trivial.

Teorema 6.5.2. *Supongamos que se verifican* $(\mathcal{H}_m)$ *y* $(\mathcal{H}_\gamma)$*. Entonces,* (6.18) *tiene una solución positiva, si y sólo si,*

$$\lambda = \lambda_1 - r_m,$$

donde r_m *es la única solución real de* (5.39)*, es decir verifica la ecuación*

$$
(6.19) \qquad 1 = \int_0^{A_\dagger} \gamma(a) e^{-r_m a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}a,
$$

y λ_1 *denota el primer autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para* $-\Delta$*. Además, en este caso la solución tiene la forma*

$$\varphi_0(x,a) = e^{-r_m a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s} \varphi_1(x),$$

siendo φ_1 *una autofunción positiva asociada a* λ_1*.*

Demostración. Primero, gracias al Teorema 3.5 de [65], cualquier solución de (6.18) es de variables separadas. Obsérvese que en el resultado citado, $A_\dagger = \infty$, pero se puede adaptar la misma prueba para el caso $A_\dagger < \infty$. Tomamos

$$u(x,a) = p(a)\varphi(x).$$

Entonces,

$$p_a + m(a)p = rp, \qquad r \in \mathbb{R};$$

y resolviendo se llega a que,

$$p(a) = p_0 \exp\left(ra - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

No es difícil ver que p verifica la condición inicial

$$p(0) = \int_0^{A_\dagger} \gamma(a) p(a)\,\mathrm{d}a,$$

si y sólo si $r = -r_m$. Por otra parte,

$$-\Delta\varphi = (\lambda + r_m)\varphi \text{ en } \Omega, \qquad \varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

y por tanto, $\lambda + r_m = \lambda_1$ y $\varphi = \varphi_1$. Lo cual completa la demostración. □

Nota 6.5.3.

a) *Obsérvese que gracias a* (6.6) *tenemos que* $\lim\limits_{a\uparrow A_\dagger} \varphi_0(x,a) = 0$ *e.c.t.* $x \in \Omega$.

b) *Un resultado similar fue probado en el Teorema* 1 *de* [17] *usando propiedades del generador infinitesimal de un semigrupo asociado a* (6.18).

El principal resultado de esta Sección es el siguiente:

Teorema 6.5.4. *Supongamos que se verifican* $(\mathcal{H}_\mu)$ *y* $(\mathcal{H}_\beta)$. *Entonces, existe un único autovalor principal de* (6.3), *que será denotado por* $\lambda_0(\mu)$ *que es simple y es el único que tiene una autofunción positiva. Además, las autofunciones positivas pueden tomarse acotadas. Finalmente, la aplicación*

$$\mu \mapsto \lambda_0(\mu)$$

es creciente.

Antes de la demostración de este resultado necesitamos algunos resultados preliminares.

Para cada $\phi \in L^2(\Omega)$, definimos z_ϕ como la única solución del siguiente problema (la cual existe por el Lema 6.3.3)

$$\begin{cases} z_a - \Delta z + \mu(x,a)z = 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{6.20}$$

y definimos el operador $\mathcal{B}_\lambda : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ por

$$\mathcal{B}_\lambda(\phi) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) e^{\lambda a} z_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a.$$

El siguiente resultado juega un papel muy importante en este Capítulo.

Lema 6.5.5.

a) *El operador* $\mathcal{B}_\lambda$ *está bien definido, es compacto y positivo.*

b) *Se verifica que*

$$\mathcal{A}_\lambda(\phi) \le \mathcal{B}_\lambda(\phi) \le \mathcal{C}_\lambda(\phi) \qquad \forall \phi \ge 0, \tag{6.21}$$

donde

$$\mathcal{A}_\lambda(\phi) := \int_0^{A_\dagger} \beta_L(a) e^{\lambda a} w_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a, \qquad \mathcal{C}_\lambda(\phi) := \int_0^{A_\dagger} \beta_M(a) e^{\lambda a} y_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a$$

siendo w_ϕ *e* y_ϕ *las soluciones de* (6.20) *con* $\mu(x,a) = \mu_M(a)$ *y* $\mu(x,a) = \mu_L(a)$, *respectivamente (i.e.,* w_ϕ *e* y_ϕ *son soluciones de los problemas autónomos).*

c) $\mathcal{B}_\lambda$ es un operador irreducible.

d) Si ϕ es un punto fijo de $\mathcal{B}_\lambda$, entonces λ es un autovalor de (6.3).

e) Inversamente, si (λ, u) es un par de autovalor-autofunción de (6.3)*, entonces $\phi(x) := u(x,0)$ es un punto fijo de $\mathcal{B}_\lambda$.*

Demostración. Que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ está bien definido se sigue del Lema 6.3.3. La compacidad es debido a las propiedades de la aplicación $\phi \mapsto z_\phi$, véase también [41].

Parte b) se tiene gracias al Lema 6.3.3 parte b). En efecto, puesto que $\mu_M(a) \geq \mu(x,a)$, entonces $w_\phi \leq z_\phi$, y $\mathcal{A}_\lambda \leq \mathcal{B}_\lambda$ gracias a que $\beta_L(a) \leq \beta(x,a)$.

Demostremos ahora que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ es un operador irreducible. Recordaremos que un operador positivo es irreducible si él mismo o una potencia suya es un operador fuertemente positivo. Así, vamos a probar que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ es fuertemente positivo, i.e., si $\phi \geq 0$ no nulo entonces $\mathcal{B}_\lambda(\phi) \gg 0$. Observemos primero que

$$w_\phi \gg 0$$

gracias al Lema 6.3.1. Luego, usando la condición $(\mathcal{H}_\beta)$, se tiene que

$$\mathcal{B}_\lambda(\phi) \geq \mathcal{A}_\lambda(\phi) \gg 0.$$

Lo cual implica que el operador $\mathcal{B}_\lambda$, efectivamente, es fuertemente positivo.

Probemos ahora la parte d), sea ϕ un punto fijo del operador $\mathcal{B}_\lambda$ entonces λ es un autovalor de (6.3). En efecto, no es complicado comprobar que la función $u = e^{\lambda a} z_\phi$ es una autofunción asociada a λ.

Veamos el inverso, sea (λ, u) un autovalor y una autofunción, respectivamente, de (6.3). Gracias a la regularidad de la función u (ver Lema 6.3.3), se tiene que

$$\phi(x) := u(x,0) \in L^2(\Omega).$$

Además,

$$z_\phi = z_{u(x,0)} = e^{-\lambda a} u(x,a), \tag{6.22}$$

consecuentemente $\mathcal{B}_\lambda \phi = \phi$. Así completamos la demostración. □

Definimos por

$$r(\mathcal{B}_\lambda) := \text{ el radio espectral del operador } \mathcal{B}_\lambda.$$

Gracias al Lema anterior tenemos que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ es un operador lineal, positivo e irreducible, y por tanto por el Teorema 1.1.6 se verifica que $r(\mathcal{B}_\lambda)$ es positivo. Usando el Teorema 1.1.7, $r(\mathcal{B}_\lambda)$ es un autovalor de multiplicidad simple con una autofunción positiva, y de hecho es el único autovalor que tiene una autofunción positiva. Luego, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 6.5.6. *λ_0 es un autovalor principal de* (6.3)*, si y sólo si, $r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) = 1$.*

Demostración. Sea $u_0 > 0$ una autofunción principal asociada a λ_0. Por el Lema 6.3.1 se sigue que $u_0 \gg 0$. Ahora, gracias a la condición $(\mathcal{H}_\beta)$ se tiene que $\phi_0(x) := u_0(x,0) \gg 0$. Y por el Lema 6.5.5 parte e), ϕ_0 es un punto fijo estrictamente positivo de $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ y usando de nuevo el Teorema de Krein-Rutman, se llega a que $r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) = 1$.

Inversamente, si $r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) = 1$, entonces existe un punto fijo estrictamente positivo, ϕ_0, de $\mathcal{B}_{\lambda_0}$. En este caso, por el Lema 6.5.5 parte d), tenemos que $u_0(x,a) = e^{\lambda_0 a} z_{\phi_0} \gg 0$ es una autofunción principal de (6.3). $\square$

Como consecuencia del Teorema 6.5.2, se tiene que para el problema autónomo el siguiente resultado

Proposición 6.5.7. *Supongamos que se verifican las condiciones $(\mathcal{H}_m)$ y $(\mathcal{H}_\gamma)$. Entonces,*

$$r(\mathcal{D}_{\lambda_1 - r_m}) = 1,$$

siendo

$$\mathcal{D}_\lambda(\phi) = \int_0^{A_\dagger} \gamma(a) e^{\lambda a} p_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a,$$

con p_ϕ la única solución de (6.20) *con $\mu(x,a) = m(a)$.*

Demostración. Obsérvese que para $\phi = \varphi_1$ se tiene que

$$p_{\varphi_1} = e^{-\lambda_1 a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s} \varphi_1,$$

y por tanto,

$$\mathcal{D}_\lambda(\varphi_1) = \varphi_1 \int_0^{A_\dagger} \gamma(a) e^{(\lambda - \lambda_1)a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}a.$$

Así,

$$\mathcal{D}_{\lambda_1 - r_m}(\varphi_1) = \varphi_1,$$

i.e., 1 es un autovalor con una autofunción positiva. Entonces, de nuevo gracias al Teorema de Krein-Rutman, se llega a que

$$r(\mathcal{D}_{\lambda_1 - r_m}) = 1.$$

$\square$

Demostración del Teorema 6.5.4. Primero, recordemos que la aplicación $\lambda \mapsto r(\mathcal{B}_\lambda)$ es creciente (ver por ejemplo Teorema 3.2 (v) en [4]). A continuación, probaremos que la aplicación $\lambda \mapsto r(\mathcal{B}_\lambda)$ es continua. Para ello tomamos una sucesión $\{\lambda_n\}_n$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$ cuando $n \to +\infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $\lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda_n \leq \lambda_0 + \varepsilon$ para $n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Afirmamos que

$$e^{-\varepsilon A} r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) \leq r(\mathcal{B}_{\lambda_0 - \varepsilon}) \leq r(\mathcal{B}_{\lambda_n}) \leq r(\mathcal{B}_{\lambda_0 + \varepsilon}) \leq e^{\varepsilon A} r(\mathcal{B}_{\lambda_0}), \tag{6.23}$$

luego la continuidad se tiene y de aquí se sigue que si existe una autovalor principal éste es único.

En efecto, veamos que se verifica (6.23). Sea ϕ_0 una autofunción principal asociada a $r(\mathcal{B}_{\lambda_0})$. Entonces,

$$e^{\varepsilon A} r(\mathcal{B}_{\lambda_0})\phi_0 - \mathcal{B}_{\lambda_0 + \varepsilon}(\phi_0) \geq 0,$$

y por Teorema 3.2 parte (iv) en [4] se tiene que $e^{\varepsilon A} r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) \geq r(\mathcal{B}_{\lambda_0+\varepsilon})$. Lo cual prueba (6.23).

Aplicando la Proposición 6.5.7 a los operadores $\mathcal{A}_\lambda$ y $\mathcal{C}_\lambda$ y el Lema 6.5.5 b), se sigue que

$$1 = r(\mathcal{A}_{\lambda_1 - r_{\mu_M}}) \leq r(\mathcal{B}_{\lambda_1 - r_{\mu_M}}), \qquad 1 = r(\mathcal{C}_{\lambda_1 - r_{\mu_L}}) \geq r(\mathcal{B}_{\lambda_1 - r_{\mu_L}}).$$

De aquí, tenemos que existe

$$\lambda_0(\mu) \in (\lambda_1 - r_{\mu_L}, \lambda_1 - r_{\mu_M})$$

tal que $r(\mathcal{B}_{\lambda_0(\mu)}) = 1$. De nuevo, el Teorema de Krein-Rutman prueba el carácter simple del autovalor $\lambda_0(\mu)$.

Veamos ahora el crecimiento. Tomemos $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces las soluciones de (6.20) con $\mu = \mu_1$ (resp. $\mu = \mu_2$), denotadas por z_1 (resp. z_2), verifican que

$$z_1 \geq z_2,$$

así se tiene que $\lambda_0(\mu_1) \leq \lambda_0(\mu_2)$.

Demostremos que las autofunciones son acotadas. Sea φ una autofunción asociada al autovalor $\lambda_0(\mu)$. Entonces, por (6.22) se tiene que

$$\varphi(x,a) = e^{\lambda_0(\mu)a} z_{\varphi(x,0)}(x,a).$$

Por otra parte, es fácil comprobar que

$$z_{\varphi(x,0)}(x,a) \leq e^{-\int_0^a \mu_L(s)\,\mathrm{d}s} c_{\varphi(x,0)}(x,a),$$

donde $c_{\varphi(x,0)}$ denota la solución de (6.7) con $g \equiv 0$ y $\phi(x) = \varphi(x,0) \in L^2(\Omega)$. Entonces,

$$\varphi(x,a) \leq e^{\lambda_0(\mu)a - \int_0^a \mu_L(s)\mathrm{d}s} c_{\varphi(x,0)}(x,a),$$

y así, puesto que $c_{\varphi(x,0)} \in C^\infty((0,A) \times \Omega)$, véase [12, Teorema X.1], se sigue que φ está acotada. $\square$

6.6. Aplicación a un problema logístico generalizado

El siguiente objetivo es aplicar el método de sub-supersoluciones para estudiar la existencia y unicidad, o la no existencia, de solución del problema logístico (6.2).

Supondremos que g verifica las hipótesis $(\mathcal{H}_g)$, (5.41) y (5.42), definidas en la página 162 del Capítulo anterior y además, la función $g(s)/s$ para $s \in \mathbb{R}_+$ es creciente.

El principal resultado de esta Sección es el siguiente

Teorema 6.6.1. *El problema* (6.2) *tiene una solución positiva si y sólo si,* $\lambda > \lambda_0(\mu)$. *Además en el caso en que exista la solución, ésta es única.*

Demostración. Supongamos que $u > 0$ es solución de (6.2). Entonces, podemos escribir la ecuación (6.2) como

$$\partial_a u - \Delta u + \left(\mu(x,a) + \frac{g(u)}{u} - \lambda \right) u = 0, \quad u(x,0) > 0,$$

con $\mu + g(u)/u - \lambda$ satisfaciendo la condición $(\mathcal{H}_\mu)$. Luego, por el Lema 6.3.3, $u \gg 0$, y por el Teorema 6.5.4, y teniendo en cuenta que

$$\partial_a u - \Delta u + \left(\mu(x,a) + \frac{g(u)}{u}\right) u = \lambda u,$$

se sigue que

$$\lambda = \lambda_0(\mu + g(u)/u). \tag{6.24}$$

Por la monotonía de la aplicación $\mu \mapsto \lambda_0(\mu)$ y gracias a las hipótesis que verifica g, tenemos que $g(s)/s > 0$ para toda $s > 0$, luego

$$\lambda = \lambda_0(\mu + g(u)/u) > \lambda_0(\mu).$$

Supongamos, ahora, que $\lambda > \lambda_0(\mu)$. Vamos a construir un par de sub y supersolución que nos permita comprobar la existencia de solución del problema (6.2).

Tomemos como subsolución

$$\underline{u} := \varepsilon\varphi(x,a)$$

con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y φ una autofunción positiva asociada a $\lambda_0(\mu)$. Es fácil ver que $\underline{u}$ es una subsolución de (6.2). En efecto, $\underline{\equiv}0$ sobre $\partial\Omega \times (0, A_\dagger)$ y

$$\underline{u}(x,0) = \varepsilon\varphi(x,0) = \varepsilon \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)\varphi(x,a)\,\mathrm{d}a = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)\underline{u}(x,a)\,\mathrm{d}a.$$

Finalmente, debemos comprobar que

$$\partial_a \underline{u} - \Delta \underline{u} + \mu(x,a)\underline{u} \le \lambda \underline{u} - g(\underline{u}),$$

lo que es equivalente a

$$\lambda_0(\mu) \le \lambda - \frac{g(\underline{u})}{\underline{u}},$$

lo cuál es cierto suponiendo ε suficientemente pequeño gracias a la hipótesis (5.41).

Ahora vamos a construir una supersolución de (6.2). Tomemos un dominio $\widetilde{\Omega}$ tal que $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$. Sea $\widetilde{\lambda_0}(\mu)$ el autovalor principal del problema (6.3) asociado a $\widetilde{\Omega}$, y $\widetilde{\varphi}$ una autofunción positiva asociada a $\widetilde{\lambda_0}(\mu)$. Tomemos como supersolución

$$\overline{u} := K\widetilde{\varphi}(x,a)$$

con $K > 0$ suficientemente grande. Es fácil ver que $\overline{u}$ es una supersolución de (6.2). En efecto, $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega \times (0, A_\dagger)$ puesto que $\widetilde{\lambda_0}(\mu)$ es el autovalor principal y consecuentemente,

$$\widetilde{\varphi}(x,a) \ge c_0 > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \times (0, A_\dagger). \tag{6.25}$$

Además,

$$\overline{u}(x,0) = K\widetilde{\varphi}(x,0) = K \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)\widetilde{\varphi}(x,a)\,\mathrm{d}a = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)\overline{u}(x,a)\,\mathrm{d}a.$$

Finalmente, debemos comprobar que

$$\partial_a \overline{u} - \Delta \overline{u} + \mu(x,a)\overline{u} \geq \lambda \overline{u} - g(\overline{u}),$$

lo que es equivalente a

$$\widetilde{\lambda_0}(\mu) \geq \lambda - \frac{g(\overline{u})}{\overline{u}},$$

lo cuál es cierto suponiendo K suficientemente grande gracias a (6.25) y a la hipótesis (5.42).

Ahora, podemos elegir $\varepsilon > 0$ y $K > 0$ tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Con lo cuál terminamos la prueba de la existencia de la solución.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de dos soluciones positivas distintas, u_1 y u_2.
Hemos visto que existe $K > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{u} := K\widetilde{\varphi}(x,a)$ es supersolución de (6.2) y además se tiene en este caso que $u_1 \leq \overline{u}$ y $u_2 \leq \overline{u}$. En particular, u_1 y u_2 son subsoluciones de (6.2), puesto que son soluciones, luego aplicando el Teorema 6.4.2, tenemos que existe una solución maximal, u^*, tal que

$$\begin{aligned} u_1 &\leq u^* \leq \overline{u}, \\ u_2 &\leq u^* \leq \overline{u}. \end{aligned}$$

Veamos que $u_1 \equiv u^* \equiv u_2$. Supongamos que $u_1 \neq u^*$ y definamos

$$w := u^* - u_1.$$

Entonces, $w \geq 0$, además satisface el problema

$$\begin{cases} w_a - \Delta w + (\mu(x,a) + h(x,a))w = \lambda w & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) w(x,a)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{6.26}$$

con

$$h(x,a) := \begin{cases} \dfrac{g(u^*) - g(u_1)}{u^* - u_1} & \text{si } u^* \geq u_1 \\ g'(u_1) & \text{si } u^* = u_1. \end{cases} \tag{6.27}$$

Tenemos que $h(x,a) > g(u_1)/u_1$, efectivamente esto se verifica gracias al crecimiento de la función $g(s)/s$.
Aplicando el Lema 6.3.3 llegamos a que $w \gg 0$, así por el Teorema 6.5.4 se tiene que

$$\lambda = \lambda_0(\mu + h) > \lambda_0(\mu + g(u_1)/u_1),$$

lo cuál es absurdo. En efecto, ya que u_1 es una solución positiva de (6.1) se tiene que $\lambda = \lambda_0(\mu + g(u_1)/u_1)$, véase (6.24). Consecuentemente $u^* = u_1$.

Análogamente se puede demostrar que $u^* = u_2$, con lo cual se tiene la unicidad de solución. $\square$

Nota 6.6.2. *En el caso autónomo,* $\mu(x,a) = \mu(a)$ *y* $\beta(x,a) = \beta(a)$ *hemos visto que*

$$\lambda_0(\mu) = \lambda_1 - r_\mu,$$

donde r_μ *está definido en* (6.19) *con* $\gamma(a) = \beta(a)$. *Así, en este caso solamente existirá solución positiva de* (6.2) *si y sólo si,* $\lambda > \lambda_1 - r_\mu$. *En el Capítulo anterior, vimos que en este caso la solución de* (5.40) *es persistente, por tanto cabe pensar que la solución de* (5.40) *converja a la solución de* (6.2).

Bibliografía

[1] L. M. Abia y J. C. López Marcos, *Runge-Kutta methods for age-structured population models*, Appl. Numer. Math. **17** (1995), 1–17.

[2] B. Ainseba, *Exact and approximate controllability of the age and space population dynamics structured model*, J. Math. Anal. Appl. **275** (2002), 562–574.

[3] B. Ainseba y M. Langlais, *On a population dynamics control problem with age dependence and spatial structure*, J. Math. Anal. Appl. **248** (2000), 455–474.

[4] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. **18** (1976), 620–709.

[5] H. Amann, *Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems*, Israel J. Math. **45** (1983), 225–254.

[6] S. Aniţa, *Analysis and control of age-dependent population dynamics*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 11, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[7] W. Arendt, A. Grabosch, G. Greiner, U. Groh, H. P. Lotz, U. Moustakas, R. Nagel, F. Neubrander y U. Schlotterbeck, *One-parameter semigroups of positive operators*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1184, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[8] O. Arino, M. Delgado y M. Molina-Becerra, *Asymptotic behavior of disease-free equilibriums of an age-structured predator-prey model with disease in the prey*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **4** (2004), 501–515.

[9] I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math. **24** (1901), 1–88.

[10] A. Bouzinab y O. Arino, *On the existence and uniqueness for an age-dependent population model with nonlinear growth*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. (1993), no. 8, 55–68.

[11] F. Brauer y C. Castillo-Chávez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, Texts in Applied Mathematics, vol. 40, Springer-Verlag, New York, 2001.

[12] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[13] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators*, Math. Ann. **142** (1960), 22–130.

[14] S. Busenberg, K. Cooke y M. Iannelli, *Endemic threshold and stability in a class of age-structured epidemics*, SIAM J. Appl. Math. **48** (1988), 1379–1395.

[15] S. Busenberg y M. Iannelli, *Separable models in age-dependent population dynamics*, J. Math. Biol. **22** (1985), 145–173.

[16] S. Busenberg, M. Iannelli y H. R. Thieme, *Global behavior of an age-structured epidemic model*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1065–1080.

[17] W. L. Chan y B. Z. Guo, *On the semigroups of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion*, Manuscripta Math. **66** (1989), 161–181.

[18] W. L. Chan y B. Z. Guo, *Global behaviour of age-dependent logistic population models*, J. Math. Biol. **28** (1990), 225–235.

[19] J. Chattopadhyay y O. Arino, *A predator-prey model with disease in the prey*, Nonlinear Anal. **36** (1999), 747–766.

[20] J. Chattopadhyay, S. Pal y A. El Abdllaoui, *Classical predator-prey system with infection of prey population—a mathematical model*, Math. Methods Appl. Sci. **26** (2003), 1211–1222.

[21] J. Chattopadhyay, R. R. Sarkar y G. El Ghosal, *Removal of infecte prey prevent limit cycle oscillations in an infected prey-predator system—a mathematical study*, Ecol. Model. **156** (2002), 113–121.

[22] M. Chipot, *On the equations of age-dependent population dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), 13–25.

[23] M. Chipot, *A remark on the equations of age-dependent population dynamics*, Quart. Appl. Math. **42** (1984), 221–224.

[24] Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn y B. de Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monographs, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[25] E. D. Conway y J. A. Smoller, *Global analysis of a system of predator-prey equations*, SIAM J. Appl. Math. **46** (1986), 630–642.

[26] C. Corduneanu, *Principles of differential and integral equations*, second ed., Chelsea Publishing Co., Bronx, N. Y., 1977.

[27] J. M. Cushing, *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 20, Springer, Berlin, 1977.

[28] J. M. Cushing y M. Saleem, *A predator prey model with age structure*, J. Math. Biol. **14** (1982), 231–250.

[29] D. Daners y P. Koch-Medina, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 279, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[30] B. de Pagter, *Irreducible compact operators*, Math. Z. **192** (1986), 149–153.

[31] M. Delgado, M. Molina-Becerra y A. Suárez, *Analysis of an age-structured predator-prey model with disease in the prey*, Aparecerá en Nonlinear Anal. Real World Appl.

[32] M. Delgado, M. Molina-Becerra y A. Suárez, *Relating disease and predation: equilibria of an epidemic model*, Math. Methods Appl. Sci. **28** (2005), 349–362.

[33] M. Delgado, M. Molina-Becerra y A. Suárez, *The sub-supersolution method for an evolutionary reaction-diffusion age-dependent problem*, Differential Integral Equations **18** (2005), 155–168.

[34] M. Delgado, M. Molina-Becerra y A. Suárez, *A nonlinear age-dependent model with spatial diffusion*, J. Math. Anal. Appl. **313** (2006), 366–380.

[35] J. Deuel y P. Hess, *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions*, Israel J. Math. **29** (1978), 92–104.

[36] G. Di Blasio y L. Lamberti, *An initial-boundary value problem for age-dependent population diffusion*, SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 593–615.

[37] M. El Doma, *Analysis of nonlinear integro-differential equations arising in age-dependent epidemic models*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 913–937.

[38] H. I. Freedman, *Deterministic mathematical models in population ecology*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 57, Marcel Dekker Inc., New York, 1980.

[39] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices. Tome 2: Questions spéciales et applications*, Dunod, Paris, 1966.

[40] M. G. Garroni y M. Langlais, *Age-dependent population diffusion with external constraint*, J. Math. Biol. **14** (1982), 77–94.

[41] B. Z. Guo y W. L. Chan, *On the semigroup for age dependent population dynamics with spatial diffusion*, J. Math. Anal. Appl. **184** (1994), 190–199.

[42] M. Gurtin y D. S. Levine, *On predator-prey interactions with predation dependent on age of prey*, Math. Biosc. **47** (1979), 207–219.

[43] M. E. Gurtin, *A system of equations for age dependent population diffusion*, J. Theor. Biol. **40** (1973), 389–392.

[44] M. E. Gurtin y R. C. MacCamy, *Non-linear age-dependent population dynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal. **54** (1974), 281–300.

[45] M. E. Gurtin y R. C. MacCamy, *On the diffusion of biological populations*, Math. Biosci. **33** (1977), 35–49.

[46] J. K. Hale, *Functional differential equations*, Springer-Verlag New York, New York-Heidelberg, 1971, Applied Mathematical Sciences, Vol. 3.

[47] L. Han, Z. Ma y H. W. Hethcote, *Four predator prey models with infectious diseases*, Math. Comput. Modelling **34** (2001), 849–858.

[48] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.

[49] F. C. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*, CMBS Lectures, no. 20, SIAM Publications, Philadelphia, 1975.

[50] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*, vol. 7, Applied Mathematics Monographs, Comitato per le Scienze Matematiche, C.N.R., Giardini-Pisa, 1995.

[51] M. Iannelli, M. Y. Kim y E. J. Park, *Asymptotic behavior for an SIS epidemic model and its approximation*, Nonlinear Anal. **35** (1999), 797–814.

[52] M. Iannelli, M. Y. Kim, E. J. Park y A. Pugliese, *Global boundedness of the solutions to a Gurtin-MacCamy system*, Nonl. Diff. Eq. Appl. **9** (2002), 197–216.

[53] W. O. Kermack y A. G. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Roy. Soc. Edin. A **115** (1927), 700–721.

[54] T. Kostova y F. Milner, *Nonlinear age-dependent population dynamics with constant size*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 129–137.

[55] T. V. Kostova, *Numerical solutions to equations modelling nonlinearly interacting age-dependent populations*, Comput. Math. Appl. **19** (1990), 95–103.

[56] M. Kubo y M. Langlais, *Periodic solutions for a population dynamics problem with age-dependence and spatial structure*, J. Math. Biol. **29** (1991), 363–378.

[57] M. Kubo y M. Langlais, *Periodic solutions for nonlinear population dynamics models with age-dependence and spatial structure*, J. Differential Equations **109** (1994), 274–294.

[58] K. Kunisch, W. Schappacher y G. F. Webb, *Nonlinear age-dependent population dynamics with random diffusion*, Comput. Math. Appl. **11** (1985), 155–173.

[59] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York, 1966.

[60] V. Lakshmikantham y S. Leela, *Differential and integral inequalities: Theory and applications. Vol. I: Ordinary differential equations*, Academic Press, New York, 1969, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 55-I.

[61] H. L. Langhaar, *General population theory in the age-time continuum*, J. Franklin Inst. **293** (1972), 199–214.

[62] M. Langlais, *Solutions fortes pour une classe de problèmes aux limites du second ordre dégénérés*, Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 869–897.

[63] M. Langlais, *On a linear age-dependent population diffusion model*, Quart. Appl. Math. **40** (1982/83), 447–460.

[64] M. Langlais, *A nonlinear problem in age-dependent population diffusion*, SIAM J. Math. Anal. **16** (1985), 510–529.

[65] M. Langlais, *Large time behavior in a nonlinear age-dependent population dynamics problem with spatial diffusion*, J. Math. Biol. **26** (1988), 319–346.

[66] D. S. Levine, *Bifurcating periodic solutions for a class of age-structured predator-prey systems*, Bull. Math. Biol. **45** (1983), 901–915.

[67] J. L. Lions y E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[68] J. López-Gómez, *Ecuaciones diferenciales y variable compleja: con teoría espectral y una introducción al grado topológico de Brouwer*, Prentice Hall, Madrid, 2001.

[69] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems*, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. 3, Annals of Mathematics Studies, no. 36, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, pp. 17–29.

[70] A. G. McKendrick, *Applications of mathematics to medical problems*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **44** (1926), 98–130.

[71] J. A. J. Metz y O. Diekmann (eds.), *The dynamics of physiologically structured populations*, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 68, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[72] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics, vol. 19, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[73] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.

[74] R. D. Nussbaum, *The radius of the essential spectrum*, Duke Math. J. **37** (1970), 473–478.

[75] J. Palis y W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems: An introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[76] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

[77] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 44, Appl. Math. Sci., Springer-Verlag, 1983.

[78] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, third ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, New York, 2001.

[79] H. Poincaré, *Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Mathemátiques **7** (1881), 375–422.

[80] J. Prüss, *Equilibrium solutions of age-specific population dynamics of several species*, J. Math. Biol. **11** (1981), 65–84.

[81] J. Prüss, *On the qualitative behaviour of population with age-specific interactions*, Comp. Maths. with Appls. **9** (1983), 327–339.

[82] J. Prüss, *Stability analysis for equilibria in age-specific population dynamics*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 1291–1313.

[83] F. R. Sharpe y A. J. Lotka, *A problem in age-distribution*, Philosophical Magazine (1911), 435–438.

[84] E. Sinestrari, *Nonlinear age-dependent population growth*, J. Math. Biol. **9** (1980), 331–345.

[85] J. G. Skellam, *Random dispersal in theoretical populations*, Biometrika **38** (1951), 196–218.

[86] H. R. Thieme, *Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations*, J. Math. Biol. **30** (1992), 755–763.

[87] E. Venturino, *Age-structured predator-prey models*, Math. Modelling **5** (1984), 117–128.

[88] E. Venturino, *The effects of diseases on competing species*, Math. Biosci. **174** (2001), 111–131.

[89] G. F. Webb, *Theory of nonlinear age-dependent population dynamics*, Pure Appl. Math. Monographs, Marcel Dekker, New York, 1985.

[90] Y. Xiao y L. Chen, *Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey*, Math. Biosci. **171** (2001), 59–82.