UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

VALORES PARA JUEGOS SOBRE ESTRUCTURAS COMBINATORIAS

ANDRÉS JIMÉNEZ LOSADA
TESIS DOCTORAL

U[illegible]

Reunido el [illegible] ...ntes
en el día de [illegible] Doctoral de
D. Andrés Jiménez losada
[illegible] VALORES PARA JUEGOS SOBRE ESTRUCTURAS
COMBINATORIAS

[illegible] APTO CUM LAUDE, por
unanimidad
[illegible] 6 de Noviembre 19 98

El [illegible] El [illegible] El Vocal,

El Doctorado,

Memoria presentada por Andrés Jiménez Losada
para optar al grado de *Doctor en Ciencias Matemáticas* por la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ de los Directores:

Fdo: J. Mario Bilbao Arrese

Fdo: Esperanza Lebrón Rueda

Sevilla, Mayo de 1998

Quiero hacer constar mi más sincero agradecimiento a todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II por el ánimo y apoyo recibidos y, especialmente, al Grupo de Investigación de Teoría de Juegos. Así mismo, y sobre todo, destacar la labor de los directores de esta memoria, J.Mario Bilbao Arrese y Esperanza Lebrón Rueda.

A mi mujer e hija

Índice

Introducción

Los fundamentos de la teoría de juegos se deben a John von Neumann [56], quien en 1928 demostró el teorema del minimax. Esta mera teoría matemática quedó establecida con el tratado de von Neumann y Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour* [57], publicado en 1944. En este libro, se introdujo el concepto de *juego cooperativo* como una situación en la que varios agentes (llamados jugadores) persiguen alcanzar un objetivo común y los beneficios (o costes) de la cooperación tienen que ser divididos, diferenciándose de los denominados *juegos no cooperativos,* basados en el hecho de analizar las estrategias posibles que puede realizar cada jugador.

Inicialmente, en la noción de juego cooperativo, se presuponía que los jugadores tienen una medida común de la utilidad (dinero), que puede ser libremente transferida entre ellos. Esta idea, que conduce a la noción de *juego cooperativo de utilidad transferible*, fue más tarde extendida por Aumann al considerar juegos donde no necesariamente se cumple esta premisa (*juegos de utilidad no transferible).* En la actualidad la teoría de juegos cooperativos se aplica en distintas áreas de conocimiento como pueden ser la Investigación Operativa, Teoría de Decisión, Ciencias Políticas y Económicas, Derecho y Localización.

El trabajo que se presenta en esta memoria se enmarca en la primera clase de juegos cooperativos. En esta introducción se expondrán aquellos conceptos y resultados de esta teoría que han de ser utilizados a lo largo de la misma. Por otra parte, se realizará un breve recorrido histórico por el discurrir de las investigaciones en el campo de la cooperación parcial, con el objetivo de señalar el punto de partida de esta tesis. Además, se incluye un sumario de los contenidos de los diferentes capítulos.

Un juego cooperativo de utilidad transferible, o juego en forma de función característica, es un par (N, v) donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito cuyos elementos se denominan *jugadores* y, $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación sobre el conjunto de los subconjuntos de N tal que $v(\emptyset) = 0$. Cada subconjunto S de N es una *coalición* y $v(S)$ el *valor* de la coalición S en el juego. Es habitual identificar, siempre que no haya lugar a confusión, cada juego (N, v) con la función v, denominada *función característica* del juego. La clase de juegos cooperativos con conjunto de jugadores N se denotará $\Gamma(N)$.

Las diferentes propiedades que puede tener la función característica v de un juego cooperativo (N, v) dan lugar a distintos tipos de juegos. Un juego v es *monótono* si para cualesquiera coaliciones $S, T \in 2^N$, $S \subseteq T$, se verifica $v(S) \leq v(T)$. Si, además, v sólo toma valores en el conjunto $\{0, 1\}$, entonces el juego es *simple*. En un juego simple, una coalición S es *ganadora* si $v(S) = 1$; en otro caso, es *perdedora*. Una clase importante de juegos simples, por su utilización en el estudio de sistemas de representación electoral, son los *juegos de votación ponderada*. En ellos, se supone que cada jugador i tiene un número de votos ω_i, por lo que cada coalición S dispone en total de $\omega(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$ votos. Así, se define la función característica de un juego de votación ponderada en la forma

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega(S) \geq q, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $q > \omega(N)/2$, representa la cuota que ha de alcanzar una coalición para ser ganadora.

Se dice que v es un juego *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, para toda $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$. Una clase especial de juegos superaditivos son la llamados juegos convexos, introducidos por Shapley. Un juego v se dice que es *convexo* cuando la función v es *supermodular*, esto es,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \quad \text{para todo } S, T \subseteq N.$$

Las nociones de juego *subaditivo* y *submodular* se obtienen de las anteriores al invertir en ellas el sentido de las desigualdades.

El conjunto de juegos $\Gamma(N)$ es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$, respecto de las operaciones habituales de suma y producto por un escalar. Dos de sus bases más simples son las formadas por los juegos de unanimidad y por los juegos de identidad. Dada una coalición no vacía S, el *juego de unanimidad* ζ_S y el *juego de identidad* δ_S están definidos por:

$$\zeta_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \supseteq S \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \delta_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Uno de los principales tópicos tratados en la teoría de juegos cooperativos es, dado un juego v, estudiar cómo se puede repartir el beneficio de la cooperación $v(N)$ entre los jugadores si la gran coalición N se forma. Por ello, en el sentido más amplio, se llama *solución o concepto de solución* sobre una colección no vacía $\mathcal{G}$ de juegos, $\mathcal{G} \subseteq \Gamma(N)$, a toda aplicación ψ que asocia a cada juego v de dicha colección un conjunto $\psi(v)$ de vectores $x \in \mathbb{R}^N$. Cada vector $x \in \mathbb{R}^N$ se denomina *distribución* o *vector de pagos*, ya que la coordenada x_i representa el pago al jugador i; y una propiedad exigible a todo concepto de solución ψ es que éste asocie a cada juego v un conjunto de vectores con la *propiedad de eficiencia*: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. En particular, se denomina *valor* a toda solución ψ que asocia a cada juego un único vector de pagos. Por otra parte, los valores definidos sobre la clase de juegos simples se denominan *índices*, siendo éstos de gran utilidad en la teoría de decisiones y en sistemas de votación.

El valor más conocido es el *valor de Shapley,* introducido por Lloyd Shapley [47] en 1953. El valor de Shapley $\Phi(v) \in \mathbb{R}^N$ de un juego $v \in \Gamma(N)$ es una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores a las distintas coaliciones. En concreto, el valor de Shapley de v está definido mediante la siguiente expresión

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right], \text{ para todo } i \in N,$$

donde $s = |S|$.

Otra manera de introducir el valor de Shapley se basa en el siguiente modelo. Se supone que los jugadores entran en una habitación de uno en uno siguiendo un orden aleatorio θ. Entonces, se admite que cada jugador i obtiene como ganancia la diferencia entre el valor de la coalición $S_i(\theta)$ que ya estaba formada y el de la nueva $S_i(\theta) \cup \{i\}$ que se forma con su incorporación. Finalmente, se ofrece a cada jugador la media de sus contribuciones marginales correspondientes a todos los posibles órdenes del conjunto N de jugadores. Esto es,

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Omega} \left[v(S_i(\theta) \cup \{i\}) - v(S_i(\theta)) \right], \text{ para todo } i \in N$$

donde Ω es el conjunto de todas las ordenaciones posibles de N.

Shapley justificó su elección indicando requisitos que debería cumplir una solución razonable y demostrando que, el valor de Shapley, es el único valor sobre $\Gamma(N)$ que verifica los siguientes axiomas:

Axioma de linealidad. Si $v,w \in \Gamma(N)$, entonces

$$\Phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Axioma del jugador dummy. Si $i \in N$ es un jugador dummy en un juego $v \in \Gamma(N)$, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces

$$\Phi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma de eficiencia. Para todo $v \in \Gamma(N)$,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$$

Axioma de simetría. Para cada permutación π del conjunto N,

$$\Phi_{\pi i}(\pi v) = \Phi_i(v), \quad \text{para todo } i \in N,$$

donde πv es el juego definido por $\pi v(\pi S) = v(S)$, para todo $S \subseteq N$.

Una recopilación de los numerosos estudios que sobre el valor de Shapley se han hecho desde su invención, se encuentra en el libro en honor de Shapley, *The Shapley Value*, editado por Alvin E. Roth en 1988, y con la participación de numerosos autores. Varios capítulos de dicho libro se utilizan como referencia en este trabajo.

En 1954, Shapley y Martin Shubik [49], proponen aplicar el valor de Shapley a la clase de juegos simples. El resultado, conocido como *índice de Shapley-Shubik*, tiene como finalidad medir la influencia de los votantes en los sistemas de votación. Dicho índice está caracterizado por verificar los axiomas de eficiencia, jugador dummy, simetría y *transferencia.* Este último indica que las componentes del índice de Shapley-Shubik son funciones modulares sobre el retículo de juegos simples.

Otra forma de analizar cómo el voto de un jugador afecta al resultado final de una votación, fue introducida por el abogado John F. Banzahf III [4] en 1965. El *índice de Banzhaf* de un jugador i cuenta el número de veces en que dicho jugador es un votante *swing* (convierte a una coalición perdedora S en otra $S \cup \{i\}$ ganadora). La versión más utilizada es el índice normalizado que, en términos de contribuciones marginales, se expresa en la forma

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{\eta(v)} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right], \text{ para todo } i \in N,$$

donde $\eta(v)$ es el número total de swings que se producen en el juego v.

Más adelante Dubey y Shapley [17] en 1979 ofrecen una versión probabilística del índice de Banzhaf, tomando en este caso, la probabilidad de producción de un swing. Este nuevo concepto es capaz de diferenciar juegos con distintas capacidades de construcción de swings pero con los mismos índices normalizados. La formulación del índice de Banzhaf probabilístico es

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right], \text{ para todo } i \in N.$$

Los axiomas que caracterizan al índice probabilístico son los mismos que se toman para el índice de Shapley-Shubik pero, sustituyendo la eficiencia tradicional por un reparto del número total de probabilidades de swing en el juego, llamado *axioma de totalidad.*

Straffin en [52] ofrece un análisis de las diferencias y similitudes entre los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf. Sus observaciones sugieren cómo adaptar estos métodos para construir nuevos índices para situaciones particulares.

Weber [59] en 1988 agrupa los valores que verifican los axiomas más habituales desde el punto de vista individual en los denominados *valores probabilísticos*. El valor de Shapley y la versión probabilística del valor de Banzhaf, considerados como valores individuales, pertenecen a la clase de valores probabilísticos. En dicho trabajo, se examina paso a paso cómo intervienen los axiomas lógicos individuales en la formulación de dichos valores. También se introducen axiomas que persiguen la construcción de valores de grupo, teniendo como referencia la formación natural del valor de Shapley.

Otro grupo de valores de más reciente creación son los *valores de compromiso*, donde no se desea dar a los jugadores una esperanza de pago sino conseguir un compromiso entre ellos para el reparto real de la cantidad disponible. Destaca el *valor de Tijs* creado por Tijs [53] en 1981 y desarrollado por Driessen y Tijs [16] y Tijs y Otten [54], entre otros. Dado un juego $v \in \Gamma(N)$, se construyen los vectores $M(v)$ y $m(v)$ como aquéllos de coordenadas

$$\begin{aligned} M_i(v) &= v(N) - v(N \setminus \{i\}), \\ m_i(v) &= \max_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \left[v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(v) \right], \end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Entonces, trabajando en la clase de juegos casiequilibrados $\left(\text{tales que } m(v) \leq M(v) \text{ y } \sum_{i \in N} m_i(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(v)\right)$, el valor de Tijs para un juego v, denotado por $\tau(v)$, es el único vector del segmento de extremos $m(v)$ y $M(v)$ que verifica la propiedad de eficiencia.

Aunque las soluciones de conjunto (aquéllas que ofrecen más de un vector de pago para cada juego) no son objeto de estudio en este trabajo, se introduce seguidamente el concepto de core, por utilizarse en el desarrollo del capítulo 3. El *core* de un juego v, cuando éste es submodular, es el conjunto

$$Core(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \leq v(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

Un estudio bastante completo de esta noción, introducida por Gillies en 1953, y su relación con otras soluciones puede verse en Driessen [15].

Del modelo inicial de juego cooperativo anteriormente expuesto, donde se supone que cada subgrupo de jugadores puede unirse formando una coalición, se ha ido evolucionando a modelos más generales que puedan contemplar dificultades en la cooperación. En opinión de Harsanyi y Selten [24], existen importantes clases de juegos intermedios entre la cooperación total y la no cooperación.

Una de las primeras aproximaciones al problema de la cooperación parcial es el modelo de Aumann y Maschler [2] sobre *juegos con estructura de coalición.* Se entiende por estructura de coalición toda partición en coaliciones, $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, del conjunto N de jugadores; y, en dichos juegos, se supone que sólo los jugadores de una misma coalición de la estructura pueden coaligarse. Posteriormente Aumann y Dréze [1] introducen axiomáticamente el concepto de valor de un juego restringido por una estructura de coalición.

El estudio de valores para estructuras de coalición se ha desarrollado en numerosos trabajos como los de Owen [45], Hart y Kurtz [26], Levy y Mc Lean [33], Winter [63], [64] y Mc Lean [35]. Todos ellos consideran la estructura de coalición dada de forma exógena, mientras que los trabajos de Shenoy [50], Hart y Kurtz [25], Kurtz [32] se plantean la formación endógena de coaliciones.

Puesto que las estructuras de coalición sólo explican modelos transitivos y disjuntos en la relación entre jugadores, Myerson [37] en 1977 propone un nuevo punto de vista para modelar la cooperación parcial. Dado un juego (N, v), se considera asociado a él un grafo G cuyo conjunto de vértices es N y cuyo conjunto de aristas no ordenadas E determina las relaciones bilaterales entre los jugadores. Entonces, se dice que una coalición es factible si dados dos elementos cualesquiera de la misma, existe un camino en el grafo que los relaciona y que está completamente incluido en dicha coalición. Pasa así a representarse un juego mediante una terna (N, v, G) donde G es el grafo de cooperación. La existencia de coaliciones factibles y de otras que no lo son obliga a que la función característica del juego (N, v) tenga que ser modificada. La función característica del juego restringido por el grafo de cooperación se define mediante

$$v^G(S) = \sum_{T \in \Pi(S)} v(T),$$

siendo $\Pi(S)$ la partición de S en componentes conexas del subgrafo inducido por la coalición S. A la terna (N, v, G) se le llama *situación de comunicación*.

El *valor de Myerson* de la situación de comunicación (N, v, G), denotado por $\mu(N, v, G)$, es el valor de Shapley para el juego (N, v^G) restringido por el grafo, es decir, $\mu(N, v, G) = \Phi(N, v^G)$.

Numerosos trabajos han continuado esta línea de investigación planteada por Myerson. Entre ellos cabe citar los de Owen [46], van den Nouweland y Borm [40], Carreras [13], van den Nouweland, Borm y Tijs [41]. Por otra parte, la formación endógena de coaliciones en situaciones de comunicación ha sido estudiada por Aumann y Myerson [3] y van den Nouweland [39]. Recientemente, otros modelos que guardan una estrecha relación con el planteado inicialmente por Myerson, en tanto que las relaciones entre los jugadores se modela mediante un grafo no dirigido, son analizados por Bergantiños, Carreras y García Jurado [5], Calvo y Lasaga [12].

En 1980, el propio Myerson [38] plantea la necesidad de extender su modelo a hipergrafos de comunicación. La idea que apunta, y que recoge van den Nouweland en su tesis doctoral, es que se debería tender a considerar un marco más amplio aún de cooperación. Conectando con esta idea, Bilbao y López [34] en 1996 comienzan a desarrollar modelos de cooperación parcial basados en los denominados *sistemas de coaliciones factibles* y *sistemas de partición,* que pretenden generalizar las situaciones de comunicación. Los sistemas de coaliciones factibles son colecciones $\mathcal{F}$ de subconjuntos de N que contienen al vacío y a las coaliciones unitarias. Los sistemas de partición son casos particulares de los anteriores, donde es necesario que cualquier coalición pueda expresarse mediante unión disjunta de coaliciones factibles maximales contenidas en ella.

Al considerar una terna $(N, v, \mathcal{F})$ en la que (N, v) es un juego de utilidad transferible y $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles o un sistema de partición, los correspondientes juegos restringidos por el sistema $\mathcal{F}$ están definidos, para toda $S \subseteq N$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{v}^{\mathcal{F}}(S) &= \max\left\{\sum v(S_i) : \{S_i\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\},\\ v^{\mathcal{F}}(S) &= \sum_{S_i \in \Pi_S} v(S_i),\end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ es el conjunto de las posibles particiones de S en coaliciones factibles, y Π_S constituye la partición de S en coaliciones factibles maximales contenidas en S.

Éste y otros trabajos, como los de Faigle [21], Faigle y Kern [22] y Kuipers [31], abren una nueva línea de investigación en la que se pone de manifiesto el interés de definir la función característica de un juego sólo sobre las coaliciones que se consideren factibles. En esta dirección se encuentran los trabajos de Bilbao [7], [8] y Bilbao y Edelman [9], los cuales introducen una nueva estructura combinatoria en la teoría de juegos, las denominadas *geometrías convexas,* y estudian el valor de Shapley para juegos definidos sobre éstas. Una geometría convexa se define como un operador clausura que verifica una propiedad de anticambio equivalente a la propiedad finita de Minkowski-Krein-Milman. En esta misma línea, Jiménez [28] analiza juegos sobre *espacios de clausura,* entre los que se encuentran las geometrías convexas como un caso particular, estudiando diferentes conceptos de solución para estos juegos y, en especial, la clase de los juegos simples. Un espacio de clausura es un sistema de coaliciones donde la intersección es una operación cerrada. También, dentro de este contexto de cooperación parcial, Bilbao, Lebrón y Jiménez [11] obtienen una caracterización axiomática del valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas como conclusión de un análisis de los valores probabilísticos.

El trabajo que se presenta continúa esta última línea de investigación, y tiene por objetivo el estudio de valores en determinadas estructuras combinatorias. Se pueden apreciar dos grandes bloques en cuanto al desarrollo de los tópicos que se tratan. Por un lado, se prosigue la línea iniciada por Bilbao [7] y [8] sobre juegos definidos en geometrías convexas, extendiendo a dicha estructura los valores de Banzhaf y Tijs. Además, se abarca el estudio de los juegos definidos sobre antimatroides, considerando la estrecha relación entre ambas nociones. En el otro bloque, constituido por los tres últimos capítulos de esta memoria, se introduce otro modelo de cooperación parcial en el que las relaciones entre los jugadores vienen determinadas por un matroide. Esto lleva a considerar dos versiones de un mismo modelo de juegos, para cada uno de los cuales se proponen diferentes soluciones.

A continuación se detalla el contenido de los cinco capítulos de que consta esta memoria.

En el *capítulo primero,* se modela la cooperación parcial definiendo la función característica del juego sólo sobre las coaliciones factibles. Una familia de coaliciones factibles o sistema de coaliciones no tendrá, en este caso, ninguna restricción salvo la propiedad técnica de contener al vacío. Cualquier sistema de coaliciones se puede considerar como un conjunto parcialmente ordenado y, de ahí, que la primera sección del capítulo se dedique a recordar aquellas nociones de interés sobre los conjuntos parcialmente ordenados. En la segunda sección, tras introducir formalmente el concepto de juego de utilidad transferible sobre un sistema de coaliciones, se estudia la estructura de espacio vectorial del conjunto de estos juegos y, en particular, se analiza la clase de juegos simples. Se consideran, en las dos últimas secciones, tres tipos concretos de sistemas de coaliciones. Aquéllos que tienen estructura de geometría convexa o de antimatroide son introducidos en la sección tercera. En ella se exponen las propiedades fundamentales de estos sistemas de coaliciones, comentadas en términos de juegos, y se observa la estrecha relación entre ellos. Otra visión diferente de cómo puede venir determinada la cooperación entre los jugadores, la ofrece la estructura de matroide, cuyos conceptos más relevantes se tratan en la última sección del capítulo.

El *capítulo segundo*, titulado Valores Clásicos sobre Geometrías y Antimatroides, está dedicado al estudio de los valores de Shapley, Banzhaf y Tijs en dichos sistemas de coaliciones. En el desarrollo de este capítulo se utiliza como herramienta fundamental, el isomorfismo existente entre los conjuntos de juegos sobre geometrías y antimatroides, que se considera en la sección primera. La posibilidad de asociar a cada juego definido sobre una geometría convexa otro definido sobre su antimatroide dual, permite relacionar los diferentes valores en ambas estructuras. En la segunda sección, teniendo como referencia la caracterización axiomática del valor de Shapley dada por Bilbao [8] para geometrías convexas, se introduce el correspondiente valor en antimatroides. La sección tercera se dedica a definir el índice de Banzhaf en ambas estructuras, observando, nuevamente, la importancia del operador dual. Por último, en la cuarta sección se comienza extendiendo el valor de Tijs a la estructura de antimatroide, considerando antimatroides coatómicos. Este tipo de antimatroides ofrecen la posibilidad de trasladar de forma automática la construcción original de dicho valor, y en ellos se consigue una de las habituales caracterizaciones sobre la clase de juegos casiequilibrados.

Por otro lado, la dualidad entre los antimatroides coatómicos y geometrías convexas atómicas, da pie a proponer un valor de Tijs para este último tipo de estructura.

Comienza en el *capítulo tercero* la parte dedicada a juegos sobre matroides. Este capítulo establece, en la primera sección, un modelo según el cual se pueden desarrollar juegos definidos sobre un sistema donde no es factible la gran coalición y además, a diferencia de las estructuras de coalición, las coaliciones maximales no son disjuntas. Se contempla que en el discurrir de un juego se dan dos posibilidades: o bien los jugadores se unen determinando una única coalición factible maximal, o bien se van organizando en coaliciones factibles que ocasionan una partición del conjunto de jugadores. En la segunda y última sección se introduce el concepto de influencia. La noción de influencia de una coalición pretende reflejar la capacidad que tiene cada coalición de influir en la dinámica del juego. Se comprueba que su definición avala esta idea cuando se estudia su relación con el core de un juego vinculado a la estructura y generado por un elemento clásico del matroide, su función rango.

En el *capítulo cuarto,* siguiendo el trabajo de Weber [59], se profundiza sobre los axiomas exigibles a un valor para juegos sobre matroides pensados bajo el modelo del capítulo anterior. La primera sección examina los axiomas desde el punto de vista individual, investigando su aportación a la formulación del valor. Este estudio individual puede servir para los dos tipos de juegos que se tratan, tanto para juegos estáticos como dinámicos, y desemboca en una familia de valores denominados valores λ-ponderados. Cuando se exigen axiomas de grupo hay que tener en cuenta la diferencia entre ambos tipos de juegos. En la segunda sección se estudian la denominada propiedad del rango y los conceptos de valor eficiente, básico y de orden aleatorio como axiomas de grupo válidos para un juego estático. Se determinan, para finalizar la sección, qué características tienen aquellos valores que satisfacen todas las propiedades enunciadas anteriormente, definiendo una familia de valores de grupo. La última sección del capítulo hace lo propio con un juego dinámico, exigiendo la propiedad de ponderación unitaria y los conceptos de valor eficiente, básico y de orden aleatorio en el sentido dinámico. También se construyen valores de grupo que verifican estas condiciones. En el transcurso del estudio de los valores dinámicos surgen determinados valores cuya aplicación es sobre juegos estáticos, a pesar de verificar la propiedad de ponderación unitaria. Estos últimos valores se denominarán valores relativos.

El *capítulo quinto* se dedica al valor de Shapley para juegos sobre matroides. Se tiene como referencia el concepto de poder jerárquico introducido por Faigle y Kern [22], que utilizan para determinar el valor de Shapley en las estructuras de precedencia. En la primera sección se definen valores de Shapley desde el punto de vista estático y se obtiene una caracterización de éstos. Se destaca el caso particular donde todas las coaliciones maximales son equiprobables. Por último, los valores dinámicos de Shapley son examinados en la segunda sección de forma paralela a lo realizado con los estáticos.

Capítulo 1

Juegos sobre Estructuras Combinatorias

En la introducción de esta memoria se ha planteado la necesidad de seguir estudiando juegos cooperativos de utilidad transferible en situaciones en las que la cooperación pueda estar sujeta a ciertas restricciones, ya que en algunas aplicaciones se presentan casos intermedios entre la cooperación total y la no cooperación. Por esta razón, se proponen aquí unos modelos en los que las relaciones entre los jugadores están determinadas por una estructura combinatoria (de geometría convexa, antimatroide o matroide), que expresa reglas lógicas de comunicación entre los jugadores.

En el caso más general, la cooperación estaría modelada mediante una familia cualquiera $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto finito de jugadores N. Así, un juego de utilidad transferible se definirá como una aplicación sobre el conjunto $\mathcal{F}$ mediante la cual se determinan los valores que las distintas coaliciones pueden obtener en dicho juego. En el estudio de estos juegos, son determinantes las características de la familia $\mathcal{F}$, y, por ello, hablando en el sentido más amplio, serán necesarias las notaciones y propiedades de dicha familia como conjunto parcialmente ordenado respecto de la inclusión.

En consecuencia, la primera sección de este capítulo, está dedicada a presentar los conceptos, definiciones y resultados relativos a conjuntos parcialmente ordenados que se utilizarán en esta memoria. Se seguirá para ello el texto de Stanley [51].

En la segunda sección se define formalmente el concepto de juego de utilidad transferible sobre una familia de subconjuntos del conjunto de jugadores, y se estudian sus principales propiedades estructurales. Finalmente, en las dos últimas secciones, se introducen las estructuras combinatorias objeto de este trabajo, y se interpretan las nociones de interés en términos de juegos.

1.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ una relación binaria en P que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Siendo P un conjunto parcialmente ordenado mediante una relación de orden $\leq$, pueden considerarse las siguientes nociones. Se dice que $\widehat{1} \in P$ es *último elemento* de P si $x \leq \widehat{1}$ para todo $x \in P$. Análogamente, se dice que $\widehat{0} \in P$ es *primer elemento* de P si $\widehat{0} \leq x$ para todo $x \in P$.

Dados $x, y \in P$, con $x \leq y$, se denomina *intervalo* $[x, y]$ al conjunto

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}.$$

Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es *localmente finito* si cualquiera de sus intervalos es un conjunto finito.

Dos elementos $x, y \in P$ son *comparables* si $x \leq y$ o bien $y \leq x$; en otro caso, x e y son *incomparables*. Una *cadena* C de P es un subconjunto no vacío de P en el que dos elementos cualesquiera son siempre comparables. Se dice que una cadena C de P es una *cadena maximal* de P cuando no existe otra cadena de P que la contenga. La *longitud* $l\,(C)$ de una cadena finita C es $l\,(C) = |C| - 1$. Se denotará por $c\,([x, y])$ al número de cadenas maximales que hay en el intervalo $[x, y]$ cuando éste se considera ordenado por el orden inducido por $(P, \leq)$. En particular, si P tiene primer elemento $\widehat{0}$, y $x \in P$, entonces $c(x)$ representará el número de cadenas maximales del intervalo $\left[\widehat{0}, x\right]$.

Se dice que un subconjunto I de P es un *ideal del orden* de P cuando, para todo $x \in I$, se verifica que si $y \leq x$ entonces $y \in I$. En particular, cuando $x \in P$, el conjunto

$$\langle x \rangle = \{y \in P : y \leq x\},$$

se denomina *ideal principal* del orden generado por x.

Dados dos elementos distintos $x, y \in P$, se dice que y *cubre a* x cuando el intervalo $[x, y] = \{x, y\}$. Cuando P tiene primer y último elemento, los *átomos* de P son los $x \in P$ que cubren a $\widehat{0}$; los *coátomos* de P son los $y \in P$ tales que $\widehat{1}$ cubre a y.

Se conoce como *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado y finito P a un grafo cuyos vértices son los elementos de P, y las aristas vienen determinadas por la relación de cubrir.

Una *cota superior* de un subconjunto X, de un conjunto parcialmente ordenado P, es un elemento $a \in P$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$. Si a es una cota superior de X para la cual el resto de cotas superiores y de X satisfacen $a \leq y$, entonces a se llama *supremo* de X. Análogamente se definen los conceptos de *cota inferior* e *ínfimo* de X. Si en un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ existen el supremo y el ínfimo de cualquier pareja de elementos de P, entonces se dice que $(P, \leq)$ es un *retículo*. Usualmente, se denota

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \quad a \vee b = \sup\{a, b\}.$$

Un retículo P es *completo* si cualquier subconjunto suyo no vacío tiene supremo e ínfimo en P. Se dice que un retículo P es *distributivo* si verifica

$$x \vee (y \wedge z) \quad = \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) \;=\; (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,,$$

para cualesquiera $x, y, z \in P$. Por otro lado, un retículo $(P, \leq)$, con elementos $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$, es *complementado* si para todo $x \in P$ existe $y \in P$ tal que $x \wedge y = \widehat{0}$ y $x \vee y = \widehat{1}$. Un retículo distributivo finito complementado se denomina *álgebra de Boole* (en este caso se utilizará esta definición, aunque el concepto de álgebra de Boole implica una estructura más amplia que la de retículo).

Sea P un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica nula (normalmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Se dice que

$$f : P \times P \longrightarrow \mathbb{K}$$

es una *función de incidencia* de P sobre $\mathbb{K}$ si $f(x, y) = 0$ cuando $x \nleq y$. Esta definición implica que una función de incidencia es nula sobre pares que no constituyen intervalos de P. El conjunto de funciones de incidencia de P sobre $\mathbb{K}$ se denotará por $I(P, \mathbb{K})$. Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar. Además, puede definirse una segunda operación interna denominada producto o *convolución* de la siguiente forma

$$(f * g)(x, y) = \sum_{\{z : x \leq z \leq y\}} f(x, z)\, g(z, y)$$

para $(x, y) \in P \times P$. El elemento neutro de la convolución es la función δ de Kronecker

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

El conjunto $I(P, \mathbb{K})$ junto con las operaciones suma, producto por escalar y convolución constituye un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ llamado *álgebra de incidencias.*

Una función particular de $I(P, \mathbb{K})$ es la *función zeta* ζ, definida por

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado un conjunto finito N, y considerando el conjunto parcialmente ordenado $(2^N, \subseteq)$, la función zeta ζ de 2^N sobre $\mathbb{R}$ permite definir, fijado cualquier subconjunto no vacío $S \in 2^N$, una nueva función

$$\zeta_S : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta_S(T) = \zeta(S,T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que la función ζ_S es un juego de unanimidad. Esta forma de interpretar los juegos de unanimidad es utilizada por Faigle y Kern [22].

Una función de incidencia $f \in I(P, \mathbb{K})$ tiene inversa para la convolución si y sólo si $f(x,x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Por ello, la función zeta ζ posee inversa a la que se denomina *función de Möbius* de P y se simboliza por μ. El cálculo de μ se puede realizar mediante la siguiente fórmula recurrente

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ -\sum_{\{z \in P : x \leq z < y\}} \mu(x,z), & \text{si } x < y. \end{cases}$$

Usando la función de Möbius se obtiene el resultado fundamental de la *fórmula de inversión de Möbius.* Dicho resultado establece que si P es un conjunto parcialmente ordenado en donde cualquier ideal principal del orden es finito y si $f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces para todo $x \in P$:

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y,x)\, g(y).$$

Para el caso particular de un álgebra de Boole $P = 2^N$, con N un conjunto finito, la función de Möbius se escribe como $\mu(S,T) = (-1)^{|T|-|S|}$, para $S \subseteq T \subseteq N$. Así, la fórmula de inversión de Möbius implica

$$g(T) = \sum_{S \subseteq T} f(S) \Longleftrightarrow f(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|}\, g(S).$$

1.2 Juegos sobre Sistemas de Coaliciones

Se denominará *sistema de coaliciones* a todo par $(N, \mathcal{F})$, donde N es un conjunto finito y $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de N tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Dado un sistema de coaliciones $(N, \mathcal{F})$, los elementos de $\mathcal{F}$ se llamarán *coaliciones factibles.*

Definición 1.1 *Un juego de utilidad transferible es una terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones y $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación tal que $v(\emptyset) = 0$. La aplicación v se denomina función característica del juego.*

A lo largo de todo este trabajo se supondrá, salvo indicación expresa, que al hablar de juegos de utilidad transferible $(N, \mathcal{F}, v)$, el sistema de coaliciones $(N, \mathcal{F})$ es tal que $N = \{1, \ldots, n\}$ y además se verifica la propiedad adicional $N = \cup_{S \in \mathcal{F}} S$, por lo que el conjunto N queda determinado por $\mathcal{F}$. Por ello, con frecuencia se entenderá el sistema $(N, \mathcal{F})$ como la familia $\mathcal{F}$. Los elementos de N se denominarán *jugadores.* Se identificará el juego $(N, \mathcal{F}, v)$ con la función v y se dirá que v es un juego definido sobre el sistema $\mathcal{F}$.

Se denotará por $\Gamma(\mathcal{F})$ el conjunto de todos los juegos definidos sobre el sistema $\mathcal{F}$. Se pueden definir sobre el conjunto $\Gamma(\mathcal{F})$ las operaciones suma y producto por un escalar de la forma habitual: para todo $S \in \mathcal{F}$, $v, w \in \Gamma(\mathcal{F})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v + w)(S) &= v(S) + w(S), \\ (\alpha v)(S) &= \alpha v(S). \end{aligned}$$

Estas operaciones dotan al conjunto $\Gamma(\mathcal{F})$ de estructura de espacio vectorial y, al igual que en la teoría de juegos cooperativos, los juegos de unanimidad y los juegos de identidad, que se introducen a continuación, determinan dos bases de dicho espacio.

Para cualquier coalición no vacía $T \in \mathcal{F}$, el correspondiente *juego de unanimidad*, que se representa por ζ_T, está definido como $\zeta_T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$$\zeta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{F}$.

El *juego de identidad* $\delta_T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ está definido por

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T = S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.2 *La dimensión del espacio vectorial* $\Gamma(\mathcal{F})$ *es* $|\mathcal{F}| - 1$, *y las familias de juegos* $\{\delta_T : T \in \mathcal{F}, T \neq \emptyset\}$ *y* $\{\zeta_T : T \in \mathcal{F}, T \neq \emptyset\}$ *son dos bases de dicho espacio.*

Demostración: Es sencillo comprobar que los juegos de identidad son linealmente independientes y que

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{F}: T \neq \emptyset\}} v(T)\, \delta_T, \quad \forall v \in \Gamma(\mathcal{F}). \tag{1.1}$$

Para probar que los juegos de unanimidad también forman una base del mismo espacio, basta ahora comprobar que son linealmente independientes o bien que constituyen un sistema generador de $\Gamma(\mathcal{F})$. Aunque la primera de esas comprobaciones es más sencilla, se realizará la segunda debido a que el resultado obtenido será de utilidad con posterioridad.

Cada juego de unanimidad ζ_T se puede expresar en la forma

$$\zeta_T = \sum_{\{S \in \mathcal{F}: S \supseteq T\}} \delta_S, \tag{1.2}$$

y utilizando la función y teorema de inversión de Möbius (ver sección anterior), en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}, \subseteq)$ se tiene

$$\delta_T = \sum_{\{S \in \mathcal{F}: S \supseteq T\}} \mu(T, S)\, \zeta_S. \tag{1.3}$$

Así, sin más que usar (1.1) e intercambiar los sumatorios

$$v = \sum_{\{S\in\mathcal{F}:S\neq\emptyset\}} \Delta_v(S)\,\zeta_S, \quad \forall v \in \Gamma(\mathcal{F}), \tag{1.4}$$

donde los coeficientes son

$$\Delta_v(S) = \sum_{\{T\in\mathcal{F}:T\neq\emptyset,T\subseteq S\}} \mu(T,S)\,v(T). \tag{1.5}$$

□

Las coordenadas de un juego v definido sobre el sistema $\mathcal{F}$ en la base formada por los juegos de unanimidad, esto es, los escalares $\Delta_v(S)$ para $S \in \mathcal{F}$, se denominan *coeficientes de Harsanyi.*

A continuación se introducen algunos tipos particulares de juegos, cuyas definiciones son extensiones naturales de las ya existentes en juegos cooperativos clásicos.

Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{F})$ es *monótono* si para cualesquiera coaliciones $S, T \in \mathcal{F}$, $T \subseteq S$, se verifica $v(T) \leq v(S)$. Se designará por $\Gamma_m(\mathcal{F})$ el subconjunto de $\Gamma(\mathcal{F})$ formado por los juegos monótonos. Dicho conjunto no constituye un subespacio vectorial de $\Gamma(\mathcal{F})$. Se dice que $\Gamma_m(\mathcal{F})$ tiene estructura de cono, en el sentido de que la operación suma es interna y el producto por escalares no negativos es una ley de composición externa.

Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{F})$ es *simple* si es monótono y $v(S) \in \{0,1\}$ para toda coalición $S \in \mathcal{F}$. En un juego simple, las coaliciones S tales que $v(S) = 1$ se denominan *coaliciones ganadoras*, y las restantes son llamadas *coaliciones perdedoras.* Se denotará por $\Gamma_s(\mathcal{F})$ el conjunto de los juegos simples.

Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{F})$ es *débilmente superaditivo* si para cualesquiera coaliciones $S, T \in \mathcal{F}$ con $S \cup T \in \mathcal{F}$ y $S \cap T = \emptyset$, se verifica

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

A continuación se probará que el conjunto de juegos simples $\Gamma_s(\mathcal{F})$ es un retículo. En efecto, si en dicho conjunto se considera la relación binaria $\leq$ tal que, para cualesquiera $v,w \in \Gamma_s(\mathcal{F})$, se tiene

$$v \leq w \Longleftrightarrow v(S) \leq w(S) \text{ para todo } S \in \mathcal{F},$$

entonces $(\Gamma_s(\mathcal{F}), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Por otro lado, para cualesquiera $v,w \in \Gamma_s(\mathcal{F})$, el ínfimo y el supremo de dichos juegos son, respectivamente, los juegos $v \wedge w$, $v \vee w$ tales que

$$\begin{aligned}(v \wedge w)(S) &= \min\{v(S), w(S)\},\\ (v \vee w)(S) &= \max\{v(S), w(S)\},\end{aligned}$$

para toda coalición $S \in \mathcal{F}$. Además, en el retículo $\Gamma_s(\mathcal{F})$, los juegos $\overset{\wedge}{1}$ y $\overset{\wedge}{0}$ son aquéllos donde $\overset{\wedge}{1}(S) = 1$ y $\overset{\wedge}{0}(S) = 0$, para toda coalición factible no vacía.

Proposición 1.3 *El conjunto de juegos simples $\Gamma_s(\mathcal{F})$ es un retículo distributivo. Además, $\Gamma_s(\mathcal{F})$ es un álgebra de Boole si, y sólo si, las coaliciones no vacías de $\mathcal{F}$ son maximales en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}, \subseteq)$.*

Demostración: Sean v, w, z juegos simples. Nótese que las siguientes tablas

Tabla 1	$v \vee (w \wedge z)$
$v(S) < w(S) < z(S)$	w
$w(S) < v(S) < z(S)$	v
$w(S) < z(S) < v(S)$	v

Tabla 2	$v \vee w$	$v \vee z$	$(v \vee w) \wedge (v \vee z)$
$v(S) < w(S) < z(S)$	w	z	w
$w(S) < v(S) < z(S)$	v	z	v
$w(S) < z(S) < v(S)$	v	v	v

implican la igualdad

$$v \vee (w \wedge z) = (v \vee w) \wedge (v \vee z).$$

La ecuación dual se obtiene de forma similar. Por tanto, el retículo es distributivo.

Obsérvese ahora que si v, $w \in \Gamma(\mathcal{F})$ son juegos tales que sólo toman valores en el conjunto $\{0,1\}$, entonces si además verifican

$$v \vee w = \widehat{1}, \qquad v \wedge w = \widehat{0},$$

debe suceder que las coaliciones factibles ganadoras de v son perdedoras para w y las perdedoras, no vacías, para v son ganadoras para w.

Supóngase que existe una coalición no vacía $R \in \mathcal{F}$, tal que R no es maximal en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, esto es, existe $T \in \mathcal{F}$ tal que $R \subset T$. En esta situación, se puede considerar un juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{F})$ tal que $v(R) = 0$ y $v(T) = 1$, y, según lo dicho anteriormente, todo juego $w \in \Gamma(\mathcal{F})$ que verifique $v \vee w = \widehat{1}$ y $v \wedge w = \widehat{0}$, no es monótono (ya que $w(R) = 1$ y $w(T) = 0$). Por tanto, para que $\Gamma_s(\mathcal{F})$ sea un álgebra de Boole es condición necesaria que toda coalición no vacía de $\mathcal{F}$ sea maximal $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Además, es inmediato que dicha condición es suficiente. □

Para finalizar esta sección, se introducen los conceptos que permitirán construir *soluciones* para juegos sobre sistemas de coaliciones.

Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones. Un *valor para el jugador* i, $i \in N$, *sobre* $\Gamma(\mathcal{F})$ es una función

$$\Psi_i : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a cada juego v definido sobre $\mathcal{F}$ un número real. El número $\Psi_i(v)$ asociado a un juego v se interpreta como el valor que dicho juego tiene para el jugador i (por ejemplo, la ganancia que el jugador espera por participar en dicho juego).

Un valor para el conjunto de jugadores o *valor de grupo sobre* $\Gamma(\mathcal{F})$ es una función

$$\Psi : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que asocia a cada juego v un vector $\Psi(v) = (\Psi_1(v), \ldots, \Psi_n(v))$. Este vector representa el valor que tiene el juego dado para cada uno de los jugadores.

1.3 Geometrías Convexas y Antimatroides

Los *antimatroides* fueron introducidos por Diworth [14] en 1940 como ejemplos particulares de retículos semimodulares. Desde entonces, varios autores han llegado al concepto de antimatroide como abstracciones de diversas situaciones combinatorias. Un estudio sistemático de dichas estructuras, basado en la abstracción de la convexidad, fue realizado por Edelman y Jamison, desembocando en 1970 con el establecimiento por Jamison [27] de una estrecha relación entre la convexidad y la existencia de un operador clausura con una determinada propiedad de anticambio. En 1980, Edelman [18] prueba que esta relación era inducida por los denominados retículos meet-distributivos o *geometrías convexas.* En la teoría de juegos, Bilbao [7], introduce en 1998 las geometrías convexas.

Los resultados sobre geometrías convexas y antimatroides que se exponen en esta sección, se han extraído de los trabajos de Edelman y Jamison [20] y el capítulo dedicado a ambas estructuras de Korte, Lovász y Schrader [30].

Definición 1.4 *Una geometría convexa es un sistema de coaliciones* $(N, \mathcal{L})$ *que satisface las siguientes propiedades:*

(G1) Si $S, T \in \mathcal{L}$, *entonces* $S \cap T \in \mathcal{L}$,

(G2) Si $S \in \mathcal{L}$ *y* $S \neq N$, *existe* $j \in N \setminus S$ *tal que* $S \cup \{j\} \in \mathcal{L}$.

Considérense los juegos $\Gamma(\mathcal{L})$ sobre una geometría convexa. La propiedad (G1) implica que la intersección de coaliciones factibles es también factible, pues los jugadores se ponen de acuerdo sobre un perfil de cooperación. En el modelo de estructuras de conferencia de Myerson [37], dos jugadores están conectados si ellos pueden coordinarse mediante conferencias separadas con algunos miembros comunes que sirven de intermediarios. En una geometría convexa, las coaliciones de intermediarios están en la estructura de cooperación. La propiedad (G2) indica un método de formación de coaliciones mediante la anexión individual de jugadores.

Las coaliciones factibles de una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$, que se identificará con la familia $\mathcal{L}$, se denominarán *convexos* siguiendo la nomenclatura de Bilbao [7]

A continuación se muestran algunos ejemplos de geometrías convexas que aparecen en la literatura de juegos. El primero ha sido utilizado por Edelman [19] para el estudio de índices de poder en juegos de votación.

Ejemplo 1.5 *Si en el conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se considera el orden natural de sus elementos, la familia $\mathcal{L}_n$ formada por el conjunto vacío y los intervalos*

$$[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}, \quad \textit{para } 1 \leq i \leq j \leq n,$$

de $(N, \leq)$, es una geometría convexa.

Ejemplo 1.6 *Una situación de comunicación es una terna (N, G, v), donde (N, v) es un juego cooperativo y $G = (N, A)$ es un grafo. Considérese el par $(N, \mathcal{L})$, donde*

$$\mathcal{L} = \{S \subseteq N \ : \ (S, A(S)) \ \textit{es un subgrafo conexo de } G\}.$$

En estas condiciones, Edelman y Jaminson [20], establecen que $G = (N, A)$ es un grafo bloque conexo (véase Harary [23]) si y sólo si $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa. Nótese que los grafos bloques son denominados grafos ciclos completos por Nouweland y Borm [40]

Las cadenas maximales de una geometría convexa tienen un papel relevante en el estudio de valores en dichas estructuras, como se verá en el siguiente capítulo. Edelman y Jamison [20] prueban que toda cadena maximal de una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ contiene $n+1$ conjuntos convexos

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{n-1} \subset S_n = N,$$

donde el cardinal $|S_k| = k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. En consecuencia, las *situaciones de jerarquía* de Moulin y Shenker [36], donde se usan pagos que incrementan los costos de acuerdo con una ordenación de N, pueden ser modeladas por geometrías convexas.

El *operador clausura* de una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ es la aplicación $- : 2^N \to 2^N$, definida por

$$\overline{A} = \bigcap_{\{S \in \mathcal{L} \,:\, S \supseteq A\}} S, \quad \text{para todo } A \subseteq N.$$

Dicho operador verifica las propiedades: (1) $A \subseteq \overline{A}$, (2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,(3) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$; propias de un operador clausura, y la propiedad adicional $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Además, satisface la denominada propiedad *anticambio de Steinitz-MacLane:* Dados dos elementos $i, j \in N$, $i \neq j$, y siendo $A \subseteq N$,

$$\text{Si } i, j \notin \overline{A} \text{ y } j \in \overline{A \cup \{i\}}, \text{ entonces } i \notin \overline{A \cup \{j\}},$$

que caracteriza a los operadores clausura propios de geometrías convexas. Obsérvese que, según la definición de dicha función, la clausura de cualquier subconjunto de N es un elemento de la familia $\mathcal{L}$.

Para un subconjunto $A \subseteq N$ cualquiera, un elemento $i \in A$ es un *punto extremal* de A si $i \notin \overline{A \setminus \{i\}}$. En particular, un jugador i de $S \in \mathcal{L}$ es un punto extremo de S si $S \setminus \{i\} \in \mathcal{L}$. El conjunto de puntos extremales de una coalición convexa S es denotado por $ex(S)$. Utilizando este concepto, la segunda propiedad de la definición de una geometría convexa puede ser sustituida por:

(G2') Para todo convexo $A \subseteq N$ se verifica que $A = \overline{ex(A)}$.

Por ello, se puede afirmar que toda coalición factible no vacía de una geometría convexa tiene al menos un punto extremal. Este hecho permite utilizar un procedimiento de eliminación (conocido como proceso *shelling*) que es posible interpretar en términos de juegos. Empezando con la gran coalición N, se puede eliminar de ella uno de sus puntos extremales, y seguir eliminando sucesivamente un punto extremal de cada una de las coaliciones factibles que se obtienen hasta que se llega finalmente al conjunto vacío. Naturalmente, en general, habrá más de una forma de hacer esto, pero todas ellas permiten determinar a los jugadores lo que ocurriría si ellos abandonaran la gran coalición.

La idea anterior permite también relacionar la estructura de antimatroide con los juegos. Basta considerar que los jugadores eliminados, en cada uno de los procesos anteriores, se agrupen formando sucesivas coaliciones. En concreto, supóngase que si en un proceso de eliminación los jugadores se van eliminando según el orden i_1, i_2, ..., i_n, entonces éstos se organicen formando las coaliciones $\{i_1\}$, $\{i_1, i_2\}$, ..., $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$. La conclusión es que la nueva estructura de coaliciones determina un antimatroide.

Definición 1.7 *Un antimatroide es un sistema de coaliciones $(N, \mathcal{A})$ que verifica:*

(A1) Si $S, T \in \mathcal{A}$, entonces $S \cup T \in A$,

(A2) Si $S \in \mathcal{A}$ y $S \neq N$, existe $j \in N \setminus S$ tal que $S \cup \{j\} \in \mathcal{A}$.

Los siguientes ejemplos de antimatroides se pueden encontrar en Korte, Lóvasz y Schrader [30].

Ejemplo 1.8 *Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo no dirigido y $r \in V$ uno de sus vértices. Los conjuntos de aristas de subgrafos conexos que contienen a r, junto con el vacío, constituyen el denominado antimatroide de búsqueda por aristas del grafo.*

Ejemplo 1.9 *Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo no dirigido y $r \in V$ uno de sus vértices. Se define el antimatroide de búsqueda por vértices de dicho grafo, $(V \setminus \{r\}, \mathcal{A})$, como aquél cuyos conjuntos factibles son los $S \subseteq V \setminus \{r\}$ tales que, en el subgrafo inducido por $S \cup \{r\}$, todo vértice $x \in S \cup \{r\}$ puede ser conectado con r mediante un camino.*

Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, la función definida sobre 2^N y que asocia, a cada subconjunto A de N, el conjunto

$$int(A) = \bigcup_{\{S \in \mathcal{A} \,:\, S \subseteq A\}} S,$$

se denomina *operador interior.* Las propiedades que definen este operador interior son: (1) $int(A) \subseteq A$, (2) $int(int(A)) = int(A)$, (3) Si $A \subseteq B$, entonces $int(A) \subseteq int(B)$, y la propiedad adicional $int(N) = N$. Además, satisface la denominada propiedad *anticambio de Steinitz-MacLane:* Dados dos elementos $i, j \in N$, $i \neq j$, y siendo $A \subseteq N$,

$$\text{Si } i, j \notin int(A) \text{ y } j \in int(A \setminus \{i\}), \text{ entonces } i \notin int(A \setminus \{j\}).$$

Obsérvese que, según la definición de dicha función, el interior de cualquier subconjunto de N es un elemento de la familia $\mathcal{L}$.

Sea S una coalición factible de un antimatroide $(N, \mathcal{A})$. Un elemento $i \in N \setminus S$ es un *aumentador* de la coalición S cuando $S \cup \{i\} \in \mathcal{A}$. El conjunto de jugadores aumentadores de una coalición factible S se denotará por $au(S)$.

El siguiente resultado pone de manifiesto la dualidad existente entre antimatroides y geometrías convexas. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, si se denota por $\widetilde{\mathcal{A}}$ el conjunto definido por

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{S \subseteq N : N \setminus S \in \mathcal{A}\},$$

entonces, se verifica el siguiente resultado.

Teorema 1.10 *$(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide si, y sólo si, $\left(N, \widetilde{\mathcal{A}}\right)$ es una geometría convexa.*

Obsérvese que las situaciones de precedencia planteadas por Faigle y Kern [22], constituidas por los ideales principales de un conjunto parcialmente ordenado N, son un caso de geometría convexa y antimatroide a la vez.

Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y su geometría convexa dual $(N, \mathcal{L})$, de las definiciones de jugador aumentador en $\mathcal{A}$ y jugador extremal en $\mathcal{L}$, se obtiene de forma inmediata la siguiente propiedad. Siendo $S \in \mathcal{A}$, un jugador de $N \backslash S$ es aumentador de S si, y sólo si, es extremal de $N \setminus S$. Es decir, si $S \in \mathcal{A}$, entonces

$$au\,(S) = ex\,(N \setminus S)\,. \tag{1.6}$$

Las funciones de Möbius $\mu_{\mathcal{L}}$ y $\mu_{\mathcal{A}}$ asociadas, repectivamente, a una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ y a un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, están dadas por las siguientes expresiones. Para cualesquiera coaliciones factibles S, T, tales que $S \subseteq T$ y $|T| = t$, $|S| = s$,

$$\mu_{\mathcal{L}}\,(S,T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\,, & \text{si } T \setminus S \subseteq ex\,(T) \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{\mathcal{A}}\,(S,T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\,, & \text{si } T \setminus S \subseteq au\,(S) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La expresión correspondiente a $\mu_{\mathcal{L}}$ se debe a Edelman y Jamison [20], y de ésta se obtiene la correspondiente a $\mu_{\mathcal{A}}$ teniendo en cuenta la relación (1.6) existente entre puntos extremales y aumentadores.

Las fórmulas anteriores y la expresión (1.5), permiten obtener los *coeficientes de Harsanyi* asociados a una coalición factible T,

$$\Delta_v^{\mathcal{L}}\,(T) \;=\; \sum_{\{S \in \mathcal{L} : S \in [T \setminus ex(T), T]\}} (-1)^{t-s}\, v\,(S)\,, \tag{1.7}$$

$$\Delta_v^{\mathcal{A}}(T) = \sum_{\{S\in\mathcal{A}:T\in[S,S\cup au(S)]\}} (-1)^{t-s} v(S),$$

para cada juego v definido sobre una geometría convexa $\mathcal{L}$, o un antimatroide $\mathcal{A}$.

1.4 Matroides

Los sistemas denominados *matroides* fueron introducidos por Whitney [61] en 1935 definidos como un abstracción del concepto de independencia lineal y de la estructura cíclica de grafos, e independientemente, por van der Waerden [58] en 1937 como combinación de la independencia lineal y algebraica. La teoría de matroides actual tiene su origen en el trabajo de Tutte [55] de 1959 y cuenta con numerosas aplicaciones como objeto combinatorio y de optimización. Sus estructuras y algoritmos han proporcionado un buen soporte para numerosas extensiones.

Definición 1.11 *Un matroide es un sistema de coaliciones $(N, \mathcal{M})$ que verifica las siguientes propiedades:*

(M1) Si $S \in \mathcal{M}$ y $T \subseteq S$, entonces $T \in \mathcal{M}$,

(M2) Si $S, T \in \mathcal{M}$ y $|S| = |T| + 1$, entonces existe $i \in S \setminus T$ de forma que $T \cup \{i\} \in \mathcal{M}$.

En la definición de juego sobre un matroide se consideran como coaliciones factibles los elementos del matroide, lo cual presupone la existencia de ciertas normas preestablecidas en la cooperación entre los jugadores. Así, si se piensa que las coaliciones entre jugadores se realizan porque éstos tienen ciertos intereses comunes, entonces la propiedad (M1) de la definición de matroide establece que es factible también toda posible subcoalición entre jugadores de cada coalición, ya que cualquier subgrupo tendrá al menos los mismos intereses comunes que los del grupo. Por otro lado, la propiedad (M2) refleja que las diferentes coaliciones se forman regidas por un cierto proceso secuencial de incorporación individual de jugadores.

A continuación se relacionan los resultados de los que se hará uso en la memoria concernientes a matroides, los cuales se comentarán en el lenguaje propio de la teoría de juegos. Las demostraciones se omiten por poderse consultar en libros como Welsh [60] y Korte, Lovász y Schrader [30]. A partir de ahora se supondrá que $(N, \mathcal{M})$ es un matroide, y éste se identificará con la familia $\mathcal{M}$.

Una *coalición básica* de un matroide $\mathcal{M}$ es una coalición $B \in \mathcal{M}$ maximal respecto a la inclusión. La familia de coaliciones básicas de $\mathcal{M}$ se denotará por $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, y mediante $b(\mathcal{M})$ el cardinal de este conjunto. La propiedad (M1) aplicada a una coalición básica $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ garantiza que todas sus subcoaliciones son factibles y, por tanto, son coaliciones factibles las del álgebra de Boole 2^B. En particular si $N \in \mathcal{M}$, entonces el matroide es 2^N y se conoce por *matroide libre*. Un jugador que pertenezca a todas las coaliciones básicas de un matroide se dirá que es un *jugador istmo*.

Las *bases* de un subconjunto X de N en un matroide $\mathcal{M}$ son sus subconjuntos maximales en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{M}, \subseteq)$.

La *función rango* de un matroide $\mathcal{M}$ es la aplicación $r : 2^N \to \mathbb{Z}_+$ definida por

$$r(X) = \max\{|S| : S \subseteq X, S \in \mathcal{M}\} \quad \text{para todo } X \in 2^N.$$

El *rango del matroide* $\mathcal{M}$, denotado por $r(\mathcal{M})$, es el rango del conjunto de jugadores N. De esta forma, $r(\mathcal{M})$ indica el máximo grado de cooperación que tienen los jugadores del matroide.

El *operador clausura* de un matroide $\mathcal{M}$ es la función $\sigma : 2^N \to 2^N$ definida por

$$\sigma(X) = \{i \in N : r(X \cup \{i\}) = r(X)\} \quad \text{para todo } X \in 2^N.$$

Dicha función, además de verificar las propiedades propias de un operador clausura, satisface la *propiedad de intercambio de Steinitz-MacLane*: Para todo $X, Y \subseteq N$, y cualesquiera $i, j \in N$ se cumple

$$\text{si } j \notin \sigma(X) \text{ y } j \in \sigma(X \cup \{i\}) \text{ entonces } i \in \sigma(X \cup \{j\}).$$

Dicha propiedad es la que caracteriza los operadores clausura de los matroides. Obsérvese que, a diferencia con lo que ocurre en geometrías convexas, la clausura de una coalición cualquiera no necesariamente es una coalición del matroide.

El último concepto de los matroides que se usará son los circuitos. Los *circuitos* de un matroide $\mathcal{M}$ son los subconjuntos X de N, $X \notin \mathcal{M}$, minimales respecto de la inclusión, es decir, para todo $i \in X$ se verifica que $X \setminus \{i\} \in \mathcal{M}$. Se dirá que dos jugadores $i, j \in N$ son *jugadores paralelos* en el matroide $\mathcal{M}$, y se utilizará la notación $i \| j$, si el par $\{i, j\}$ es un circuito. Por ello, cuando dos jugadores son paralelos, juntos no pueden formar parte de ninguna coalición factible.

Los conceptos anteriores permiten obtener diversas caracterizaciones de los matroides, de entre las que se destacan, por ser útiles en esta memoria, las siguientes.

Teorema 1.12 *Una colección no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos de 2^N son las coaliciones básicas de un matroide si, y sólo si, satisface la siguiente propiedad de sustitución: Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $j \in B_1 \setminus B_2$, entonces existe $i \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{i\} \setminus \{j\} \in \mathcal{B}$.*

En las condiciones de este Teorema el matroide determinado por la colección $\mathcal{B}$ es

$$\mathcal{M} = \{S \subseteq N : S \subseteq B \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}.$$

Teorema 1.13 *Un sistema de coaliciones $(N, \mathcal{M})$ es un matroide si, y sólo si, satisface la condición $(M1)$ y tiene la siguiente propiedad:*

(M2') Para todo $X \subseteq N$, las bases de X tienen el mismo cardinal.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que todas las coaliciones básicas de un matroide tienen el mismo cardinal, y éste coincide con el rango del matroide.

Teorema 1.14 *Una aplicación $r : 2^N \to \mathbb{Z}$ es la función rango de un matroide si, y sólo si, para toda $X, Y \subseteq N$, verifica:*

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$,

(R2) Si $X \subseteq Y$, entonces $r(X) \leq r(Y)$,

(R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Obsérvese que la condición (R1) garantiza que la función rango de un matroide es un juego cooperativo (N, r), y las condiciones (R2) y (R3) que el juego es monótono y submodular, respectivamente.

Teorema 1.15 *Una función $r : 2^N \to \mathbb{Z}_+$ es la función rango de un matroide si, y sólo si, para todo $X, Y \subseteq N$ y cualesquiera $i, j \in N$, verifica:*

(R1') $r(\emptyset) = 0$,

(R2') $r(X) \leq r(X \cup \{i\}) \leq r(X) + 1$,

(R3') Si $r(X \cup \{i\}) = r(X \cup \{j\}) = r(X)$, entonces $r(X \cup \{i, j\}) = r(X)$.

Bajo las hipótesis de cualquiera de los dos teoremas anteriores, la función r determina de forma única el matroide

$$\mathcal{M} = \{S \subseteq N : r(S) = |S|\}.$$

La condición (R3') se suele denominar *submodularidad local* de la función rango. De ella se puede deducir que $r(\sigma(X)) = r(X)$ para todo $X \subseteq N$. Por tanto, la clausura de X es el máximo subconjunto de N que contiene a X y mantiene su rango. Obsérvese que, si S es una coalición factible, los jugadores que no están en $\sigma(S)$ son los que pueden unirse a S para dar lugar a nuevas coaliciones factibles.

Se muestran a continuación algunos ejemplos de matroides de interés para el desarrollo de la teoría de juegos sobre matroides.

Ejemplo 1.16 *El matroide uniforme $\mathcal{U}_n^k$ está formado por todos los subconjuntos de N cuyo cardinal es menor o igual que k,*

$$\mathcal{U}_n^k = \left\{S \in 2^N : |S| \leq k\right\}.$$

La función rango y el operador clausura de este matroide se definen, para cada $X \subseteq N$, por

$$r(X) = \min\{k, |X|\}, \quad \sigma(X) = \begin{cases} X & si \quad |X| < k \\ N & si \quad |X| \geq k. \end{cases}$$

Cuando $k \neq n$, no hay jugadores istmo. Los circuitos son las coaliciones de cardinal $k+1$, y no hay jugadores paralelos salvo que $k = 1$. En la siguiente figura se muestra el matroide uniforme $\mathcal{U}_3^2$.

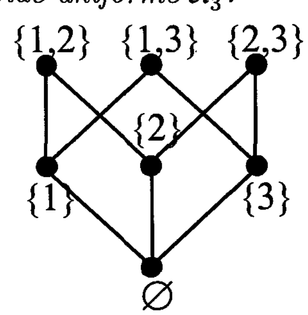

Figura 1.1

Ejemplo 1.17 *Dado un grafo no dirigido $G = (V, A)$, donde V es el conjunto de vértices y A el conjunto de aristas, se define el matroide gráfico generado por G como el formado por los subconjuntos del conjunto de aristas A que generan subgrafos acíclicos. El matroide gráfico generado por G se denotará $\mathcal{M}(G)$. La función rango, para cada $X \subseteq A$, viene dada por*

$$r(X) = |V(X)| - k(X),$$

donde $k(X)$ es el número de componentes conexas que tiene el subgrafo generado por las aristas de X. Se sabe que un jugador $a \in A$ está en la clausura de una coalición X si es posible formar un circuito que contenga a la arista a y que esté contenido en $X \cup \{a\}$.

Considerando el grafo de la Figura 1.2, el matroide $\mathcal{M}(G)$ es el de la Figura 1.3.

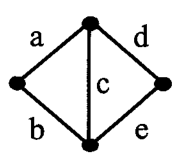

Figura 1.

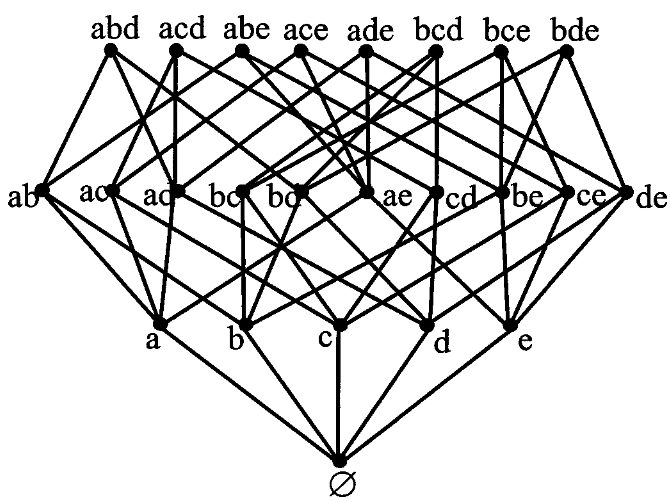

Figura 1.3

Ejemplo 1.18 *Dados dos jugadores $i, j \in N$, se define el matroide de oposición $\mathcal{M}_n(i \parallel j)$ como el formado por todos los subconjuntos de N que no contienen a $\{i, j\}$. Esto es, el mayor matroide contenido en 2^N, con i, j paralelos,*

$$\mathcal{M}_n(i \parallel j) = \{S \subseteq N : \{i,j\} \nsubseteq S\}.$$

En este matroide los únicos jugadores paralelos son i, j, y los restantes son itsmos. Su función rango y el operador clausura están dados, para cada $X \subseteq N$, por

$$r(X) = \begin{cases} |X| & si\ i\ ó\ j \notin X \\ |X| - 1 & si\ i, j \in X, \end{cases} \qquad \sigma(X) = \begin{cases} X \cup \{j\} & si\ i \in X, j \notin X \\ X \cup \{i\} & si\ j \in X, i \notin X \\ X & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Tomando $N = \{1, 2, 3, 4\}$, la siguiente figura muestra el matroide $\mathcal{M}_4(1\|4)$.

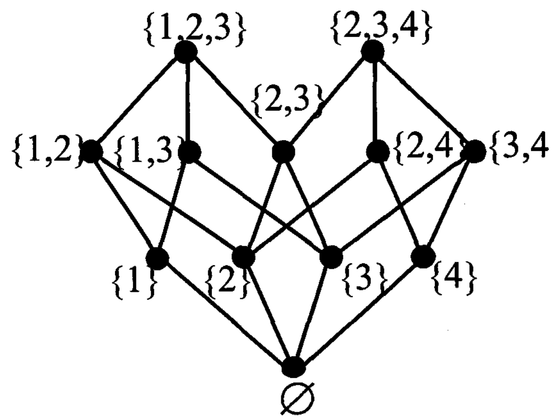

Figura 1.4

A continuación se definen algunas operaciones sobre matroides, que serán muy útiles en los capítulos posteriores.
La *k-truncación* de un matroide $\mathcal{M}$ es el matroide dado por la colección

$$\mathcal{M}^{(k)} = \{S \in \mathcal{M} : |S| \leq k\}.$$

La *restricción* del matroide $\mathcal{M}$ a una coalición $X \subseteq N$ es el matroide dado por

$$\mathcal{M}_X = \{S \in \mathcal{M} : S \subseteq X\}.$$

La *eliminación* de X en $\mathcal{M}$ se define como la restricción del matroide a la coalición $N \setminus X$, esto es,

$$\mathcal{M} \backslash X = \{S \in \mathcal{M} : S \subseteq N \setminus X\}.$$

Por último, la *contracción* sobre X de $\mathcal{M}$ es el matroide definido por la colección

$$\mathcal{M}/X = \{S \subseteq N \setminus X : S \cup T \in \mathcal{M}, \text{ para alguna base } T \text{ de } X\}.$$

Todas estas operaciones sobre matroides originan nuevos matroides. Por definición, se tiene que $\mathcal{M}/X \subseteq \mathcal{M}\backslash X$. Obsérvese, además, que la eliminación de un jugador en el matroide sobre el que está definido un juego, se puede interpretar como que el jugador se separa del juego dado. Por otro lado, la contracción sobre un jugador del matroide determina las posibles coaliciones a las que el jugador se puede integrar para conjuntamente participar en el juego.

Cualquier matroide que pueda ser obtenido a partir de otro matroide $\mathcal{M}$ mediante una sucesión de contracciones y eliminaciones se denomina un *menor* de $\mathcal{M}$.

Proposición 1.19 *Sea $(N, \mathcal{M})$ un matroide, y r su función rango. Entonces:*

(1) La función rango r' del matroide k-truncación $\mathcal{M}^{(k)}$ está definida por $r'(X) = \min\{r(X), k\}$, para todo $X \in 2^N$.

(2) La función rango r' del matroide restricción sobre Y, $\mathcal{M}_Y$, está definida por $r'(X) = r(X)$, para todo $X \in 2^Y$.

(3) La función rango r' del matroide contracción sobre Y, $\mathcal{M}/Y$, se define $r'(X) = r(X \cup Y) - r(Y)$, para todo $X \in 2^{N \setminus Y}$.

Conviene también introducir el concepto de isomorfismo entre matroides. Dos matroides $(N_1, \mathcal{M}_1)$, $(N_2, \mathcal{M}_2)$ son *isomorfos* si existe una biyección $\phi : N_1 \to N_2$ tal que para todo $S \in \mathcal{M}_1$, se verifica que $\{\phi(i) : i \in S\} \in \mathcal{M}_2$.

La función de Möbius $\mu : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ de un matroide $\mathcal{M}$ tiene la siguiente expresión

$$\mu(S,T) = (-1)^{t-s},$$

para cualesquiera $S, T \in \mathcal{M}$, $S \subseteq T$, donde $|S| = s$ y $|T| = t$, pues cualquier intervalo es un álgebra de Boole. Por tanto, utilizando (1.5), se tiene que los *coeficientes de Harsanyi* de un juego $v : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido sobre un matroide, se pueden expresar en la forma

$$\Delta_v^{\mathcal{M}}(T) = \sum_{\{S \in \mathcal{M} : S \subseteq T\}} (-1)^{t-s} v(S). \tag{1.8}$$

Capítulo 2

Valores Clásicos sobre Geometrías y Antimatroides

En este capítulo se extienden los valores de Shapley, Banzhaf y Tijs a los sistemas de coaliciones geometría convexa y antimatroide. La dualidad entre dichas estructuras se estudia, en la primera sección, en el terreno de los juegos, y se generan a partir de las bases de los juegos de unanimidad y de identidad sobre una geometría convexa, dos nuevas bases del conjunto de juegos sobre el antimatroide dual. Se dedica luego una sección a cada uno de los valores mencionados.

En la segunda sección se trata el valor de Shapley. Dicho valor ha sido estudiado en geometrías convexas por Bilbao [7] y [8], y Bilbao, Lebrón y Jiménez [11]. Bilbao sigue la técnica de Faigle y Kern [22], y posterioremente Bilbao obtiene otra caracterización de dicho valor sustituyendo el axioma del poder jerárquico. Por otra parte, Bilbao, Lebrón y Jiménez consiguen llegar al valor de Shapley en geometrías convexas utilizando los denominados valores de orden compatible. Aquí se sigue la idea de Bilbao [8] para extender la noción a antimatroides.

En la tercera sección se introducen los índices de Banzhaf para ambas estructuras y se dan caracterizaciones de estos índices, siguiendo a Dubey y Shapley [17]. Los resultados de esta sección están recogidos en Bilbao, Jiménez y López [10].

Por último, en la línea de los trabajos de Tijs [53], Driessen y Tijs [16] y Tijs y Otten [54], se extiende el valor de Tijs a juegos definidos sobre antimatroides coatómicos. Dicha extensión permite definir también este valor para geometrías convexas atómicas, utilizando la dualidad.

A lo largo de todo este capítulo se trabajará con una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ o bien con un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, por lo que se considera que el conjunto de jugadores es N aunque no se diga explícitamente en lo sucesivo.

2.1 Dualidad

En la sección 1.3 del capítulo anterior se puso de manifiesto el carácter dual de las estructuras geometría convexa y antimatroide. Esta relación va a permitir construir una dualidad entre los espacios vectoriales de sus juegos.

Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. Se considera el siguiente operador entre los espacios vectoriales de juegos de ambas estructuras

$$F : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad F(v) = v^*, \quad \text{para todo } v \in \Gamma(\mathcal{L})$$

donde v^*, que se denominará *juego dual* de v, es el juego definido, para cada $S \in \mathcal{A}$, por la expresión

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S).$$

Puesto que las familias $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ tienen el mismo cardinal , se puede afirmar (Proposición 1.2) que los espacios vectoriales $\Gamma(\mathcal{L})$ y $\Gamma(\mathcal{A})$ son de la misma dimensión. Es fácil comprobar entonces que F es un isomorfismo para el que $(v^*)^* = v$, cualquiera sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Por tanto, utilizando dicho isomorfismo y cualquiera de las bases conocidas del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{L})$ es posible obtener nuevas bases del espacio $\Gamma(\mathcal{A})$.

En la siguiente proposición se obtendrán las bases duales de aquéllas formadas por los juegos de unanimidad y los juegos de identidad del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{L})$.

Proposición 2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un antimatroide y $\mathcal{L}$ su geometría convexa dual. Siendo $S \in \mathcal{A}$ una coalición factible distinta de la gran coalición, $S \neq N$, se verifica:*

(1) El dual del juego de unanimidad $\zeta_{N\setminus S} \in \Gamma(\mathcal{L})$ es el juego $\mu_S \in \Gamma(\mathcal{A})$ tal que, para cada $T \in \mathcal{A}$,

$$\mu_S(T) = \begin{cases} 0, & si\, T \subseteq S \\ 1, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

(2) Si $S \neq \emptyset$, el dual del juego de identidad $\delta_{N\setminus S} \in \Gamma(\mathcal{L})$ es el juego $\rho_S \in \Gamma(\mathcal{A})$ definido, para cada $T \in \mathcal{A}$, como

$$\rho_S(T) = \begin{cases} -1, & si\, T = S \\ 0, & si\, T \neq S. \end{cases}$$

Además, el dual del juego $\delta_N \in \Gamma(\mathcal{L})$ es el juego $\rho_\emptyset \in \Gamma(\mathcal{A})$ tal que $\rho_\emptyset(T) = 1$ para toda coalición $T \in \mathcal{A}$ no vacía.

Demostración: Sea $T \in \mathcal{A}$. El dual del juego $\zeta_{N\setminus S}$ se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \zeta^*_{N\setminus S}(T) &= \zeta_{N\setminus S}(N) - \zeta_{N\setminus S}(N \setminus T) = 1 - \begin{cases} 1, & \text{si } N \setminus T \supseteq N \setminus S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \mu_S(T). \end{aligned}$$

Análogamente, para el juego de indentidad $\delta_{N\setminus S}$, cuando $S \neq \emptyset$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta^*_{N\setminus S}(T) &= \delta_{N\setminus S}(N) - \delta_{N\setminus S}(N \setminus T) = 0 - \begin{cases} 1, & \text{si } N \setminus T = N \setminus S \\ 0, & \text{si } N \setminus T \neq N \setminus S, \end{cases} \\ &= \rho_S(T). \end{aligned}$$

Por último, si $S = \emptyset$ el dual de δ_N es el juego

$$\begin{aligned} \delta_N^* (T) &= \delta_N (N) - \delta_N (N \setminus T) = 1 - \begin{cases} 1, & \text{si } N \setminus T = N \\ 0, & \text{si } N \setminus T \neq N, \end{cases} \\ &= \rho_\emptyset (T) . \end{aligned}$$

□

Se verá seguidamente que algunas propiedades de los juegos se transmiten por el operador dual. Con esta finalidad se extiende, en primer lugar, la noción de juego cooperativo supermodular al caso de juegos definidos sobre geometrías convexas y antimatroides.

Definición 2.2 *Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ sobre una geometría convexa, se dice supermodular o convexo si, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$, se verifica*

$$v\left(\overline{S \cup T}\right) + v\left(S \cap T\right) \geq v(S) + v(T).$$

Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$ sobre un antimatroide, se dice supermodular si, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$, se verifica

$$v\left(S \cup T\right) + v\left(int\left(S \cap T\right)\right) \geq v(S) + v(T).$$

Análogamente se definen los juegos submodulares intercambiando la desigualdad $\geq$ por $\leq$ en los dos casos anteriores.

Proposición 2.3 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. Entonces:*

(1) Si $v \in \Gamma_m(\mathcal{L})$, entonces $v^* \in \Gamma_m(\mathcal{A})$.

(2) Si $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, entonces $v^* \in \Gamma_s(\mathcal{A})$.

(3) Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es un juego supermodular, entonces $v^* \in \Gamma(\mathcal{A})$ es submodular.

Demostración: Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.

(1) Supóngase que v es monótono. Sean $S, T \in \mathcal{A}$, $S \subseteq T$. Entonces, $N \setminus T \subseteq N \setminus S$ y se verifica $v(N \setminus T) \leq v(N \setminus S)$. Luego,

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S) \leq v(N) - v(N \setminus T) = v^*(T).$$

(2) Sea v un juego simple. Utilizando el apartado anterior se sabe que el juego v^* es monótono, por lo que sólo falta por probar que dicho juego toma valores en el conjunto $\{0,1\}$. Ahora bien, esto último se verifica puesto que, por definición, se tiene $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$, para todo $S \in \mathcal{A}$.

(3) Supóngase que v es un juego supermodular. Obsérvese que para todo $X \subseteq N$ se verifica $N \setminus int(X) = \overline{N \setminus X}$. Entonces, si $S, T \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\begin{aligned}
& v^*(S \cup T) + v^*(int(S \cap T)) \\
= \; & v(N) - v(N \setminus (S \cup T)) + v(N) - v(N \setminus int(S \cap T)) \\
= \; & 2v(N) - v((N \setminus S) \cap (N \setminus T)) - v\left(\overline{(N \setminus S) \cup (N \setminus T)}\right) \\
\leq \; & 2v(N) - v(N \setminus S) - v(N \setminus T) = v^*(S) + v^*(T).
\end{aligned}$$

□

2.2 El Valor de Shapley

Se expone a continuación la caracterización axiomática del denominado valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas debida a Bilbao [8], que se utilizará en esta sección para extender la noción de valor de Shapley a juegos definidos sobre antimatroides.

Siendo $\mathcal{L}$ una geometría convexa, y $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{L})$, se consideran los siguientes axiomas.

<u>*Axioma de linealidad.*</u> Si $v_1, v_2 \in \Gamma(\mathcal{L})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^N$, entonces

$$\Psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Psi(v_1) + \alpha_2 \Psi(v_2).$$

Se denomina *contribución marginal* de un jugador $i \in N$ a una coalición $S \in \mathcal{L}$, tal que $i \in ex(S)$, al valor $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Un jugador i se dice *dummy* en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ si, para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(S)$, se verifica que

$$v(S) - v(S \setminus \{i\}) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

<u>*Axioma del jugador dummy.*</u> Si $i \in N$ es un jugador dummy en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, entonces

$$\Psi_i(v) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

<u>*Axioma de eficiencia.*</u> Para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se verifica

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = v(N).$$

<u>*Axioma de $\mathcal{L}$-cadenas.*</u> Para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ y cualesquiera $i, j \in ex(S)$,

$$c(S \setminus \{i\}) \Psi_j(\delta_S) = c(S \setminus \{j\}) \Psi_i(\delta_S).$$

En el contexto anterior, y utilizando entre otros resultados el lema que se expone a continuación, Bilbao [8] llega a la caracterización siguiente del valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas.

Lema 2.4 *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $S \in \mathcal{L}$ un convexo no vacío. Siendo $i \in N$, se verifica: a) Si $i \notin ex(S)$, entonces i es un jugador dummy en el juego de unanimidad ζ_S. b) Si $i \in S \setminus ex(S)$, entonces i es un jugador dummy en el juego de identidad δ_S.*

Teorema 2.5 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Existe un único valor de grupo $\Phi^{\mathcal{L}}$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ que satisface los axiomas de linealidad, jugador dummy, eficiencia y $\mathcal{L}$-cadenas. Además, para todo $i \in N$, y cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se tiene*

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{c(S \setminus \{i\})\, c([S,N])}{c(\mathcal{L})} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right],$$

donde se considera $c([N,N]) = 1$, y $c(\mathcal{L})$ representa el número total de cadenas maximales de $(\mathcal{L}, \subseteq)$. Dicho valor se denomina valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas.

Considérese ahora un antimatroide $\mathcal{A}$, y el conjunto de juegos $\Gamma(\mathcal{A})$ definidos sobre él. En este caso, se define la *contribución marginal* de un jugador $i \in N$ a una coalición $S \in \mathcal{A}$, tal que $i \in au(S)$, como el pago exigido por el jugador para unirse a la coalición S, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Un jugador i se dice *dummy* en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$ si, para cada $S \in \mathcal{A}$ tal que $i \in au(S)$, se verifica que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{A})$, se introducen los siguientes axiomas.

<u>*Axioma de linealidad.*</u> Si $v_1, v_2 \in \Gamma(\mathcal{A})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^N$, entonces

$$\Psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Psi(v_1) + \alpha_2 \Psi(v_2).$$

<u>*Axioma del jugador dummy.*</u> Si $i \in N$ es un jugador dummy en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$, entonces

$$\Psi_i(v) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Axioma de eficiencia. Para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$, se verifica

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = v(N).$$

Axioma de $\mathcal{A}$-cadenas. Para cada coalición $S \in \mathcal{A}$, $S \neq N$, y cualesquiera $i, j \in au(S)$,

$$c([S \cup \{i\}, N]) \Psi_j(\rho_S) = c([S \cup \{j\}, N]) \Psi_i(\rho_S).$$

Obsérvese que en el último axioma se pone de manifiesto, al igual que en el caso de geometrías convexas, que los jugadores que obtienen contribuciones marginales positivas en un juego ρ_S son aquéllos que se anexionan a la coalición S inmediatamente después de su formación, por lo que el valor que se les debe asociar debe ser proporcional al número de órdenes donde eso ocurre para dicho jugador.

Lema 2.6 *Sean $\mathcal{A}$ un antimatroide y $S \in \mathcal{A}$. Siendo $i \in N$, se verifica:*

(a) Si $i \notin au(S)$, entonces i es un jugador dummy en el juego $\mu_S \in \Gamma(\mathcal{A})$.

(b) Si $i \notin S \cup au(S)$, entonces se tiene que el jugador i es un dummy en el juego $\rho_S \in \Gamma(\mathcal{A})$.

Demostración: Supóngase en lo que sigue que T es una coalición factible de $\mathcal{A}$ tal que $i \in au(T)$.

(a) Sea $S \neq \emptyset$, $i \notin au(S)$. En estas condiciones, se pueden dar dos casos: $i \in S$, o bien $i \notin S \cup au(S)$.

Si $i \in S$, obsérvese que $\mu_S(\{i\}) = 0$ cuando $\{i\} \in \mathcal{A}$. Por otro lado, $\mu_S(T \cup \{i\}) - \mu_S(T) = 0$ porque $T \subseteq S$ si, y sólo si, $T \cup \{i\} \subseteq S$. Por tanto, i es jugador dummy en el juego μ_S.

En el caso de que $i \notin S \cup au(S)$ (esto es, $i \notin S$ y $S \cup \{i\} \notin \mathcal{A}$), es fácil comprobar que $\{i\} \notin \mathcal{A}$ y que $T \nsubseteq S$, razonando por reducción al aburdo.

Entonces se tendría $\mu_S(T \cup \{i\}) - \mu_S(T) = 1 - 1 = 0$, e igualmente se comprueba el enunciado.

Nótese finalmente que el resultado es válido también si $S = \emptyset$. En efecto, en este caso, decir que $i \notin au(S)$ significa que $\{i\} \notin \mathcal{A}$. Por tanto también se tiene que $\mu_S(T \cup \{i\}) - \mu_S(T) = 1 - 1 = 0$, ya que en ese caso debe ser $T \neq \emptyset$.

(b) Sea $i \notin S \cup au(S)$. entonces, como ya se indicó , se verifica $\{i\} \notin \mathcal{A}$ y $T \nsubseteq S$. Por tanto, $\rho_S(T \cup \{i\}) - \rho_S(T) = 1 - 1 = 0$ cuando $S = \emptyset$, pero esto también sucede cuando S no es vacía ya que $\rho_S(T \cup \{i\}) = \rho_S(T) = 0$. Luego, el jugador i es un jugador dummy en el juego ρ_S. □

Teorema 2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un antimatroide. Existe un único valor de grupo $\Phi^{\mathcal{A}}$ sobre $\Gamma(\mathcal{A})$ que verifica los axiomas de linealidad, jugador dummy, eficiencia y $\mathcal{A}$-cadenas. Además, para todo $i \in N$, y cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$, se tiene*

$$\Phi_i^{\mathcal{A}}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S)\}} \frac{c(S)\, c([S \cup \{i\}, N])}{c(\mathcal{A})} [v(S \cup \{i\}) - v(S)],$$

donde $c(\mathcal{A})$ representa el número de cadenas maximales de $(\mathcal{A}, \subseteq)$.

Demostración: Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{A})$ que verifica los axiomas de linealidad, dummy, eficiencia y $\mathcal{A}$-cadenas. Se define, para cada $i \in N$, $v \in \Gamma(\mathcal{A})$

$$\Phi_i^{\mathcal{A}}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S)\}} \Psi_i(\rho_S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Se probará que, cualquiera que sea $i \in N$, se verifica $\Psi_i(\mu_T) = \Phi_i^{\mathcal{A}}(\mu_T)$ para todo juego μ_T, con $T \in \mathcal{A}, T \neq N$. Se distinguirán dos casos.

Sea $T \in \mathcal{A}$ tal que $i \notin au(T)$. Por el lema previo y el axioma del jugador dummy se tiene $\Psi_i(\mu_T) = 0$. Además, como las contribuciones marginales de i en μ_T son todas cero, se obtiene también que $\Phi_i^{\mathcal{A}}(\mu_T) = 0$.

En el caso contrario, cuando $i \in au(T)$, se tendría que las contribuciones marginales de dicho jugador en el juego μ_T, para una coalición $S \in \mathcal{A}$ tal que $i \in au(S)$, valen 1 si $S \subseteq T$, puesto que $S \cup \{i\}$ no está contenida en T, y valen cero en otro caso. Con ello se consigue, teniendo en cuenta la segunda parte del lema anterior, el axioma del jugador dummy y el axioma de linealidad,

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{\mathcal{A}}(\mu_T) &= \sum_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S), S \subseteq T\}} \Psi_i(\rho_S) = \sum_{\{S \in \mathcal{A}: S \subseteq T\}} \Psi_i(\rho_S) \\
&= \Psi_i\left(\sum_{\{S \in \mathcal{A}: S \subseteq T\}} \rho_S\right) = \Psi_i(\mu_T).
\end{aligned}$$

La última igualdad sigue de que, por la Proposición 2.1, $\mu_T = \zeta^*_{N\setminus T}$ y que, con la expresión (1.2), se tiene

$$\zeta_{N\setminus T} = \sum_{\{N\setminus S \in \mathcal{L}: N\setminus S \supseteq N\setminus T\}} \delta_{N\setminus S},$$

lo que implica, por ser F un isomorfismo, que

$$\mu_T = \sum_{\{N\setminus S \in \mathcal{L}: N\setminus S \supseteq N\setminus T\}} \delta^*_{N\setminus S} = \sum_{\{S \in \mathcal{A}: S \subseteq T\}} \rho_S.$$

Queda así probado que los operadores $\Phi^{\mathcal{A}}$ y Ψ coinciden sobre un conjunto de juegos que constituye una base del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{A})$, y de ahí que $\Phi^{\mathcal{A}} = \Psi$. Para finalizar la demostración se calcularán los números de la familia $\{\Psi_i(\rho_S) : S \in \mathcal{A}, i \in au(S)\}$.

Aplicando el axioma de eficiencia a un juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \Psi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S)\}} \Psi_i(\rho_S)\left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \\
&= \sum_{S \in \mathcal{A}} \left[\sum_{\{j \in S: S\setminus\{j\} \in \mathcal{A}\}} \Psi_j\left(\rho_{S\setminus\{j\}}\right) - \sum_{i \in au(S)} \Psi_i(\rho_S)\right] v(S) = v(N).
\end{aligned}$$

Para el juego $\rho_\emptyset$ la fórmula implica que

$$\sum_{\{S \in \mathcal{A}: S \neq \emptyset\}} \left[\sum_{\{j \in S: S\setminus\{j\} \in \mathcal{A}\}} \Psi_j\left(\rho_{S\setminus\{j\}}\right) - \sum_{i \in au(S)} \Psi_i(\rho_S)\right] = 1,$$

y ordenando por cardinal las diferencias, comenzando desde N, resulta

$$\sum_{\{j_1 \in N : N\setminus\{j_1\} \in \mathcal{A}\}} \Psi_{j_1}\left(\rho_{N\setminus\{j_1\}}\right)$$
$$+ \sum_{\{j_1 \in N : N\setminus\{j_1\} \in \mathcal{A}\}} \left[\sum_{\{j_2 \in N\setminus\{j_1\} : N\setminus\{j_1,j_2\} \in \mathcal{A}\}} \Psi_{j_2}\left(\rho_{N\setminus\{j_1,j_2\}}\right) - \Psi_{j_1}\left(\rho_{N\setminus\{j_1\}}\right) \right]$$
$$+ \cdots + \sum_{i \in au(\emptyset)} \left[\Psi_i(\rho_\emptyset) - \sum_{j_{n-1} \in au(\{i\})} \Psi_{j_{n-1}}\left(\rho_{\{i\}}\right) \right] = 1,$$

donde se observa que los términos se van anulando con el posterior de signo opuesto, quedando simplemente,

$$\sum_{i \in au(\emptyset)} \Psi_i(\rho_\emptyset) = 1. \tag{2.1}$$

Por otro lado, para un juego cualquiera ρ_T con $T \in \mathcal{A}$, $T \neq \emptyset, N$ se tiene

$$\sum_{\{j \in T : T\setminus\{j\} \in \mathcal{A}\}} \Psi_j\left(\rho_{T\setminus j}\right) = \sum_{i \in au(T)} \Psi_i(\rho_T). \tag{2.2}$$

Por último se aplicará el axioma de $\mathcal{A}$-cadenas en las identidades (2.1) y (2.2).

Para el juego $\rho_\emptyset$ y jugadores $i, j \in au(\emptyset)$, el axioma de $\mathcal{A}$-cadenas implica que

$$c([\{i\}, N])\, \Psi_j(\rho_\emptyset) = c([\{j\}, N])\, \Psi_i(\rho_\emptyset),$$

con lo que se obtiene de la ecuación (2.1), eligiendo un jugador $i \in au(\emptyset)$,

$$\frac{\Psi_i(\rho_\emptyset)}{c([\{i\}, N])} \sum_{j \in au(\emptyset)} c([\{j\}, N]) = 1.$$

De ahí se llega a

$$\Psi_i(\rho_\emptyset) = \frac{c([\{i\}, N])\, c(\emptyset)}{c(\mathcal{A})},$$

porque $\sum_{j\in au(\emptyset)} c\left([\{j\}, N]\right) = c(\mathcal{A})$ y $c(\emptyset) = 1$. Se probará ahora que, para toda coalición factible S del matroide de cardinal s, $s < n$, se verifica

$$\Psi_i(\rho_S) = \frac{c(S)\, c([S \cup \{i\}, N])}{c(\mathcal{A})},$$

suponiendo que la expresión anterior es válida para toda coalición factible de cardinal menor que s.

En efecto, el axioma de $\mathcal{A}$-cadenas garantiza que, fijado $i \in au(S)$, se tiene que para todo $k \in au(S)$

$$\Psi_k(\rho_S) = \Psi_i(\rho_S) \frac{c([S \cup \{k\}, N])}{c([S \cup \{i\}, N])}.$$

Así, la ecuación (2.2) se escribirá como

$$\frac{\Psi_i(\rho_S)}{c([S \cup \{i\}, N])} \sum_{k\in au(S)} c([S \cup \{k\}, N]) = \frac{c([S, N])}{c(\mathcal{A})} \sum_{\{j\in S: S\setminus\{j\}\in\mathcal{A}\}} c(S \setminus \{j\}),$$

y como $\sum_{k\in au(S)} c([S \cup \{k\}, N]) = c([S, N])$, $\sum_{\{j\in S: S\setminus\{j\}\in\mathcal{A}\}} c(S \setminus \{j\}) = c(S)$, se obtiene la igualdad buscada.

Sustituyendo los coeficientes $\{\Psi_i(\rho_S) : S \in \mathcal{A}, i \in au(S)\}$ en la expresión obtenida de Ψ_i se sigue la formulación del enunciado. □

Definición 2.8 *Sea $\mathcal{A}$ un antimatroide. Se denomina valor de Shapley para juegos sobre el antimatroide $\mathcal{A}$ al único valor de grupo $\Phi^{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica los axiomas de linealidad, dummy, eficiencia y $\mathcal{A}$-cadenas.*

Corolario 2.9 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. El operador dual $F : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{A})$ y los valores de Shapley $\Phi^{\mathcal{L}}$ y $\Phi^{\mathcal{A}}$ verifican que $\Phi^{\mathcal{L}} = \Phi^{\mathcal{A}} \circ F$.*

Demostración: Al ser los tres operadores implicados lineales, basta con demostrar que, para todo juego de unanimidad $\zeta_S \in \Gamma(\mathcal{L})$, se tiene

$$\Phi^{\mathcal{L}}(\zeta_S) = \Phi^{\mathcal{A}}(F(\zeta_S)).$$

Por la Proposición 2.1, el dual de ζ_S es el juego $\mu_{N\setminus S} \in \Gamma(\mathcal{A})$. El Teorema 2.5 implica

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{\mathcal{L}}(\zeta_S) &= \sum_{\{T\in\mathcal{L}:i\in ex(T)\}} \frac{c(T\setminus\{i\})\,c([T,N])}{c(\mathcal{L})}\left[\zeta_S(T) - \zeta_S(T\setminus\{i\})\right] \\
&= \sum_{\{T\in\mathcal{L}:i\in ex(T),S\subseteq T\}} \frac{c(T\setminus\{i\})\,c([T,N])}{c(\mathcal{L})},
\end{aligned}$$

si $i \in ex(S)$; además, por el Lema 2.4 y el axioma del jugador dummy se tiene $\Phi_i^{\mathcal{L}}(\zeta_S) = 0$ en otro caso. Mediante el Teorema 2.7 y el Lema 2.6 el valor de Shapley sobre $\mu_{N\setminus S}$ es

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{\mathcal{A}}(\mu_{N\setminus S}) &= \sum_{\{R\in\mathcal{A}:i\in au(R)\}} \frac{c(R)\,c([R\cup\{i\},N])}{c(\mathcal{A})}\left[\mu_{N\setminus S}(R\cup\{i\}) - \mu_{N\setminus S}(R)\right] \\
&= \sum_{\{R\in\mathcal{A}:i\in au(R),R\subseteq N\setminus S\}} \frac{c(R)\,c([R\cup\{i\},N])}{c(\mathcal{A})},
\end{aligned}$$

si $i \in au(N\setminus S)$, y 0 en otro caso.

Teniendo en cuenta ahora la relación (1.6) existente entre los puntos extremales de una coalición factible $T \in \mathcal{L}$ y los puntos aumentadores de la coalición $N \setminus T \in \mathcal{A}$, es fácil comprobar que existe una aplicación biyectiva que asocia a cada elemento del conjunto $\{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T), S \subseteq T\}$ un único elemento de $\{R \in \mathcal{A} : i \in au(R), R \subseteq N \setminus S\}$. Además, también existe una biyección entre las cadenas maximales de $(\mathcal{L}, \subseteq)$ y las de $(\mathcal{A}, \subseteq)$. En concreto, a una cadena maximal de $\mathcal{L}$ descrita mediante un orden aleatorio $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, le corresponde en el antimatroide dual $\mathcal{A}$ la cadena representada por el orden de jugadores $(i_n, \ldots, i_2, i_1)$. Luego $c(\mathcal{A}) = c(\mathcal{L})$. De igual forma se comprueba que el número de cadenas maximales del intervalo $[\emptyset, T \setminus \{i\}]$ en $\mathcal{L}$ coincide con el de cadenas maximales del intervalo

$[(N \setminus T) \cup \{i\}, N]$ en el antimatroide $\mathcal{A}$, lo cual sucede también para las cadenas maximales del intervalo $[T, N]$ en $\mathcal{L}$ y las de $[\emptyset, N \setminus T]$ en $\mathcal{A}$.

Se obtiene entonces que

$$\sum_{\{T \in \mathcal{L}: i \in ex(T), S \subseteq T\}} \frac{c(T \setminus \{i\})\, c([T, N])}{c(\mathcal{L})} = \sum_{\{R \in \mathcal{A}: i \in au(R), R \subseteq N \setminus S\}} \frac{c(R)\, c([R \cup \{i\}, N])}{c(\mathcal{A})},$$

y en consecuencia el resultado es cierto. □

2.3 El Índice de Banzhaf

Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ un antimatroide. Considérense los conjuntos de juegos simples $\Gamma_s(\mathcal{L})$ y $\Gamma_s(\mathcal{A})$.

El índice de Banzhaf para un juego simple se va a definir teniendo en cuenta las veces que un jugador es vital en dicho juego, en el sentido de que su participación sea la que provoca una coalición ganadora. A diferencia con lo que sucedía con el valor de Shapley, en su definición no se considera el orden de participación de los jugadores.

Definición 2.10 *Un swing factible (o convexo) de un jugador i en un juego simple $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$ es un par $(S, S \setminus \{i\})$ tal que $S \in \mathcal{L}$, $i \in ex(S)$ y se verifica $v(S) = 1$, $v(S \setminus \{i\}) = 0$.*

Un swing factible de un jugador i en un juego simple $v \in \Gamma_s(\mathcal{A})$ es un par $(T, T \cup \{i\})$ tal que $T \in \mathcal{A}$, $i \in au(T)$ y se verifica $v(T \cup \{i\}) = 1$, $v(T) = 0$.

El número de swings convexos de un jugador i en un juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$ se denotará por $cs_i(v)$, y el número total de swings en v es

$$cs(v) = \sum_{i \in N} cs_i(v).$$

Análogamente, el número de swings factibles de i en $v \in \Gamma_s(\mathcal{A})$ se representará por $as_i(v)$, y el número total de swings en v es $as(v) = \sum_{i \in N} as_i(v)$.

Es inmediato que el número de swings factibles de un jugador se puede expresar mediante sus contribuciones marginales, como se indica en el siguiente resultado.

Proposición 2.11 *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ un antimatroide. Para todo $i \in N$, se verifica*

(1) Si $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, entonces $cs_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: i \in ex(S)\}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$.

(2) Si $v \in \Gamma_s(\mathcal{A})$, entonces $as_i(v) = \sum_{\{T \in \mathcal{A}: i \in au(T)\}} [v(T \cup \{i\}) - v(T)]$.

A continuación se probará que el número de swings convexos de un jugador en un juego simple sobre una geometría convexa, coincide con el de swings factibles de dicho jugador en el juego dual definido sobre el antimatroide dual.

Proposición 2.12 *Sean v un juego simple sobre la geometría convexa $\mathcal{L}$, y v^* su juego dual sobre el antimatroide dual $\mathcal{A}$. Entonces, para todo $i \in N$, se tiene $as_i(v^*) = cs_i(v)$.*

Demostración: Basta probar que, para todo $i \in N$, $(S, S \cup \{i\})$ es un swing factible de i para el juego v^* en el antimatroide $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $(N \setminus S, (N \setminus S) \setminus \{i\})$ es un swing convexo del mismo jugador para el juego v en $\mathcal{L}$. En efecto,

$$\begin{aligned} v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S) &= v(N) - v(N \setminus (S \cup \{i\})) - v(N) + v(N \setminus S) \\ &= v(N \setminus S) - v((N \setminus S) \setminus \{i\}). \end{aligned}$$

□

Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Se define el *poder extremal* $\mathcal{E}_i$ de un jugador $i \in N$, como el cardinal del siguiente conjunto

$$\mathcal{E}_i = |\{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T)\}|.$$

Además, se denominará *poder extremal de i sobre $S \in \mathcal{L}$* al siguiente número

$$\mathcal{E}_i(S) = |\{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T), S \subseteq T\}| .$$

El cociente $\mathcal{E}_i(S)/\mathcal{E}_i$ se llamará *poder relativo extremal de i sobre S.*

Análogamente, en un antimatroide $\mathcal{A}$, se pueden definir los correspondientes *poderes aumentadores* de un jugador $i \in N$, como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i &= |\{R \in \mathcal{A} : i \in au(R)\}| , \\ \mathcal{X}_i(S) &= |\{R \in \mathcal{A} : i \in au(R),\ R \subseteq S\}| , \end{aligned}$$

y su cociente.

Obsérvese que cuando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ son duales, entonces la aplicación biyectiva comentada en la demostración del corolario de la sección anterior entre los conjuntos $\{T \in \mathcal{L} : i \in ex\,(T)\,, S \subseteq T\}$ y $\{R \in \mathcal{A} : i \in au\,(R)\,, R \subseteq N \setminus S\}$ usada para una coalición $S \in \mathcal{L}$, permite afirmar que

$$\mathcal{X}_i(N \setminus S) = \mathcal{E}_i(S).$$

En particular, para $S = \emptyset$, se consigue

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{E}_i.$$

Considerando la relación entre los swings convexos de un jugador y el conjunto de todas las coaliciones convexas donde el jugador es extremal, es decir, el cociente entre casos favorables de swings convexos sobre casos posibles, se define el siguente concepto.

Definición 2.13 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Para todo jugador $i \in N$, el número $cs'_i\,(v)$ dado por*

$$cs'_i\,(v) = \frac{cs_i\,(v)}{\mathcal{E}_i},$$

se denomina probabilidad de swing convexo del jugador $i \in N$ en el juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$.

Análogamente, dado un antimatroide $\mathcal{A}$, la probabilidad de swing factible de un jugador i en el juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{A})$ es $as'_i(v) = as_i(v)/\mathcal{X}_i$.

Las sumas $\sum_{i \in N} cs'_i(v)$ y $\sum_{i \in N} as'_i(v)$, se denotarán en lo sucesivo por $cs'(v)$ y $as'(v)$, respectivamente.

Obsérvese que la definición anterior es una extensión de la análoga dada por Dubey y Shapley [17] para juegos simples sobre 2^N. Evidentemente, por la Proposición 2.12 y la igualdad $\mathcal{X}_i = \mathcal{E}_i$, se tiene que si $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$ y v^* es su dual en el antimatroide dual $\mathcal{A}$, entonces $as'_i(v^*) = cs'_i(v)$.

A continuación se va a calcular el número de swings de un jugador para los juegos de unanimidad sobre una geometría convexa y sus duales.

Proposición 2.14 *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. El número de swings convexos del jugador $i \in N$ en el juego de unanimidad $\zeta_S \in \Gamma_s(\mathcal{L})$ es*

$$cs_i(\zeta_S) = \begin{cases} 0, & si \;\; i \notin ex(S) \\ \mathcal{E}_i(S), & si \;\; i \in ex(S). \end{cases}$$

Además, el número de swings factibles de $i \in N$ en el juego $\mu_S \in \Gamma_s(\mathcal{A})$ es

$$as_i(\mu_S) = \begin{cases} 0, & si \;\; i \notin au(S) \\ \mathcal{X}_i(S), & si \;\; i \in au(S). \end{cases}$$

Demostración: Por la Proposición 2.11 se tiene que

$$cs_i(\zeta_S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T)\}} [\zeta_S(T) - \zeta_S(T \setminus \{i\})].$$

Cuando $i \notin ex(S)$, entonces $cs_i(\zeta_S) = 0$ ya que, el Lema 2.3 asegura que el jugador i es dummy en ζ_S. En el caso de que $i \in ex(S)$ se tiene que $\zeta_S(T) - \zeta_S(T \setminus \{i\}) = 1$ si y sólo si $T \in \mathcal{L}$ y $T \supseteq S$, por lo que $cs_i(\zeta_S) = \mathcal{E}_i(S)$.

Para obtener la expresión del enunciado para $as_i\,(\mu_S)$ basta ahora aplicar la Proposición 2.12 y las igualdades $\mathcal{X}_i(S) = \mathcal{E}_i(N \setminus S)$ y $au\,(S) = ex(N \setminus S)$.
□

Definición 2.15 *Se denomina índice convexo de Banzhaf de un juego simple v definido sobre una geometría convexa $\mathcal{L}$, al vector cuyas componentes son el número de swings convexos de los diferentes jugadores en el juego dado, es decir, el vector $(cs_i\,(v))_{i \in N}$.*

A partir de la definición anterior, cabe introducir el concepto de *el índice convexo normalizado de Banzhaf* como la aplicación $\beta^{\mathcal{L}} : \Gamma_s(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\beta^{\mathcal{L}}(v) = \left(\beta_i^{\mathcal{L}}(v)\right)_{i \in N}$, donde

$$\beta_i^{\mathcal{L}}(v) = \frac{cs_i(v)}{cs(v)}.$$

Y también, *el índice convexo probabilístico de Banzhaf* como la aplicación $\beta'^{\mathcal{L}} : \Gamma_s(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\beta'^{\mathcal{L}}(v) = \left(\beta'^{\mathcal{L}}(v)\right)_{i \in N}$, donde

$$\beta'^{\mathcal{L}}(v) = \frac{cs_i(v)}{\mathcal{E}_i} = cs_i'(v).$$

Si se usa la Proposición 2.11, entonces estos índices se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\beta_i^{\mathcal{L}}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{cs(v)} \left[v\,(S) - v\,(S \setminus \{i\})\right],$$

$$\beta_i'^{\mathcal{L}}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{\mathcal{E}_i} \left[v\,(S) - v\,(S \setminus \{i\})\right].$$

Nótese que el nombre de índice probabilísitco dado a $\beta'^{\mathcal{L}}(v)$ se debe a que

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{\mathcal{E}_i} = 1.$$

Análogamente se definen los índices normalizado y probabilístico de Banzhaf para juegos simples sobre un antimatroide $\mathcal{A}$.

Se utilizará seguidamente que el dual de un juego simple sobre una geometría convexa es también un juego simple sobre el antimatroide dual, para probar un resultado en el que se pone de manifiesto la relación existente entre los conceptos anteriores.

Teorema 2.16 *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. El operador dual $F : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{A})$ y los índices normalizados y probabilísticos de Banzhaf verifican las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} \beta^{\mathcal{L}} &= \beta^{\mathcal{A}} \circ F, \\ \beta'^{\mathcal{L}} &= \beta'^{\mathcal{A}} \circ F. \end{aligned}$$

Demostración: Puesto que

$$\beta_i^{\mathcal{A}}(v) = \frac{as_i(v)}{as(v)}, \quad \beta_i'^{\mathcal{A}}(v) = as_i'(v),$$

basta utilizar la Proposición 2.12 y la igualdad $as_i'(v^*) = cs_i'(v)$ para obtener el resultado. □

Se estudian ahora axiomas que permitan caracterizar los índices de Banzhaf en geometrías convexas. En primer lugar, se verá que el índice convexo de Banzhaf verifica la propiedad de transferencia, que no es más decir que sus componentes definen aplicaciones modulares sobre el retículo de los juegos simples.

Proposición 2.17 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Para todo $i \in N$, se verifica que*

$$cs_i(v \vee w) + cs_i(v \wedge w) = cs_i(v) + cs_i(w), \text{ para todo } v, w \in \Gamma_s(\mathcal{L}).$$

Demostración: De la tabla siguiente

v	w	$v \vee w$	$v \wedge w$	$v + w$	$(v \vee w) + (v \wedge w)$
1	1	1	1	2	2
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

se puede concluir que

$$(v \vee w) + (v \wedge w) = v + w.$$

Ahora bien, utilizando la Proposición 2.11, es inmediato comprobar que el número de swuings convexos de la suma de dos juegos es la suma de los swings convexos de dichos juegos. □

Nótese que el índice normalizado de Banzhaf no satisface la propiedad anterior, debido a que su expresión está dada por un cociente en el que el denominador depende del juego considerado. Sin embargo, el índice probabilístico no tiene este problema.

Dada una geometría convexa $\mathcal{L}$, y un valor de grupo $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N}$, se consideran los siguientes axiomas.

Un jugador $i \in N$ se dice que es un *jugador nulo* en un juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$ si, para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(S)$, se verifica que

$$v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0.$$

Axioma del jugador nulo. Si $i \in N$ es un jugador nulo en $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Axioma de totalidad de swings. Para todo juego $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, se verifica

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = cs(v).$$

Axioma de poder extremal. Para toda coalición $S \in \mathcal{L}$, y cualesquiera $i, j \in ex\,(S)$, se tiene

$$\mathcal{E}_i\,(S)\,\varphi_j\,(\zeta_S) = \mathcal{E}_j\,(S)\,\varphi_i\,(\zeta_S)\,.$$

Axioma de transferencia. Si $v, w \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, entonces

$$\varphi\,(v) + \varphi\,(w) = \varphi\,(v \vee w) + \varphi\,(v \wedge w)\,.$$

Ahora se probará que los axiomas anteriores caracterizan al índice convexo normalizado de Banzhaf.

Teorema 2.18 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Existe un único valor de grupo φ sobre $\Gamma_s(\mathcal{L})$ que satisface los axiomas del jugador nulo, totalidad de swings, poder extremal y transferencia. Además, el índice convexo normalizado de Banzhaf $\beta^{\mathcal{L}}$, verifica*

$$\beta^{\mathcal{L}}(v) = \frac{1}{cs(v)}\varphi(v), \quad \textit{para todo} \quad v \in \Gamma_s\,(\mathcal{L})\,.$$

Demostración: Sea S una coalición convexa de $\mathcal{L}$. Si $j \notin ex(S)$, se sabe que j es un jugador nulo para ζ_S (Lema 2.4); por tanto, como φ verifica el axioma del jugador nulo, se tiene

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\zeta_S) = \sum_{j \in ex(S)} \varphi_j(\zeta_S).$$

Si $i \in ex(S)$, se tiene $S \in \{T \in \mathcal{L} : i \in ex\,(T)\}$ y $S \supseteq S$, por tanto $\mathcal{E}_i(S) \neq 0$. De ahí que tomando también $j \in ex(S)$, y utilizando el axioma de poder extremal, se verifique

$$\varphi_j(\zeta_S) = \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_i(S)}\varphi_i(\zeta_S).$$

Así, mediante el axioma de totalidad de swings, se llega a

$$\begin{aligned} cs\,(\zeta_S) &= \sum_{j\in ex(S)} \varphi_j(\zeta_S) \\ &= \sum_{j\in ex(S)} \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_i(S)}\varphi_i(\zeta_S) \\ &= \frac{\varphi_i(\zeta_S)}{\mathcal{E}_i(S)} \sum_{j\in ex(S)} \mathcal{E}_j(S). \end{aligned}$$

Por otro lado, como la Proposition 2.14, asegura que

$$\sum_{j\in ex(S)} \mathcal{E}_j(S) = cs(\zeta_S) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_i(S) = cs_i(\zeta_S),$$

se sigue que $\varphi_i(\zeta_S) = cs_i\,(\zeta_S)$.

Se verá ahora, aplicando el axioma de transferencia, que los valores obtenidos de φ_i sobre los juegos de unanimidad definen de forma única el valor sobre los demás juegos del conjunto $\Gamma_s\,(\mathcal{L})$. En efecto, si $S_1,\ldots,S_p$ son las coaliciones convexas ganadoras minimales para un juego $v\in\Gamma_s\,(\mathcal{L})\,, v\neq\widehat{0}$, usando la monotonía de v, se obtiene que

$$v = \zeta_{S_1}\vee\zeta_{S_2}\vee\ldots\vee\zeta_{S_p}.$$

Luego, por el axioma de transferencia,

$$\varphi\,(v) = \varphi\,(\zeta_{S_1}) + \varphi\left(\zeta_{S_2}\vee\ldots\vee\zeta_{S_p}\right) - \varphi\left(\zeta_{S_1}\wedge(\zeta_{S_2}\vee\ldots\vee\zeta_{S_p})\right).$$

Nótese que cada juego que aparece en el segundo miembro de esta expresión es un juego con menos coaliciones convexas ganadoras que v. En particular para el último juego del segundo miembro se tiene que las coaliciones ganadoras minimales son $\overline{S_1\cup S_m}$ donde $m=2,\ldots,p$. Así, es posible demostrar por inducción sobre el número de coaliciones convexas ganadoras minimales que $\varphi\,(v)$ está completamente deteminado por los valores $\varphi_i(\zeta_S)$ obtenidos anteriormente, obteniéndose $\varphi\,(v) = cs_i\,(v)$. Si $v=\widehat{0}$, entonces todos los jugadores son nulos en v y, por tanto, $\varphi_i\left(\widehat{0}\right)=0$.

Finalmente, es inmediato que $\beta^{\mathcal{L}}(v) = \frac{1}{cs(v)}\varphi(v)$. □

Para llegar a una caracterización del índice convexo probabilístico de Banzhaf sobre una geometría convexa, es necesario sustituir los axiomas de totalidad de swings y poder extremal por los siguientes:

Axioma de totalidad de probabilidades de swings. Para todo $v \in \Gamma_s(\mathcal{L})$, se verifica

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = cs'(v).$$

Axioma de poder extremal relativo. Para toda coalición $S \in \mathcal{L}$, y cualesquiera $i, j \in ex(S)$, se tiene

$$\frac{\mathcal{E}_i(S)}{\mathcal{E}_i}\varphi_j(\zeta_S) = \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_j}\varphi_i(\zeta_S).$$

El resultado siguiente se obtiene con una demostración similar a la del Teorema 2.18.

Teorema 2.19 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Existe un único valor de grupo φ' sobre $\Gamma_s(\mathcal{L})$ que satisface los axiomas del jugador nulo, totalidad de probabilidades de swings, poder extremal relativo y transferencia. Además, el índice convexo probabilístico de Banzhaf $\beta'^{\mathcal{L}}$, verifica*

$$\beta'^{\mathcal{L}}(v) = \varphi'(v), \quad \textit{para todo} \;\; v \in \Gamma_s(\mathcal{L}).$$

Cuando se trabaja con un antimatroide $\mathcal{A}$ se puede igualmente demostrar resultados similares a los expuestos en la Proposición 2.17 y los Teoremas 2.18 y 2.19, aunque utilizando en este caso el *axioma de totalidad sobre el numero de swings factibles* y el *axioma de poder aumentador.* Este último axioma se enuncia así: Para toda coalición $S \in \mathcal{A}$, y cualesquiera $i, j \in au(S)$, se tiene

$$\mathcal{X}_i(S)\,\varphi_j(\mu_S) = \mathcal{X}_j(S)\,\varphi_i(\mu_S).$$

En el último resultado de esta sección, se considera la geometría convexa $(N, \mathcal{L}_{2k+1})$, donde $N = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ y $\mathcal{L}_{2k+1}$ es la familia formada por los subconjuntos de la forma

$$[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\} \quad \text{con } 1 \leq i \leq j \leq 2k+1,$$

y se muestran los índices de Banzhaf para el *juego de mayoría simple* definido por $v : \mathcal{L}_{2k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq k+1 \\ 0, & \text{si } |S| \leq k. \end{cases}$$

Proposición 2.20 *Sea v el juego de mayoría simple sobre la geometría convexa $\mathcal{L}_{2k+1}$. Los índices de Banzhaf, normalizado y probabilístico, $(\beta_i(v))_{i \in N}$ y $(\beta_i'(v))_{i \in N}$, son tales que*

$$\beta_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{2k+2}, & si \ i \neq k+1 \\ \frac{1}{k+1}, & si \ i = k+1. \end{cases}$$

$$\beta_i'(v) = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & si \ i \neq k+1 \\ \frac{2}{2k+1}, & si \ i = k+1. \end{cases}$$

para todo $i \in N$.

Demostración: La fórmula correspondiente al índice normalizado es debida a Edelman [19]. Por tanto, se trata aquí de deducir la correspondiente al índice probabilístico.

Se calculará primero el poder extremal $\mathcal{E}_i$ de cada jugador $i \in N$. Para todo $j \geq i$, el intervalo $[i, j]$ es una coalición convexa donde i es un jugador extremal. Así, hay $2k+1-(i-1) = 2k+2-i$ posibles coaliciones convexas de la forma anterior en las que i es extremal. Por otro lado, los intervalos de la forma $[j, i]$, con $j < i$, de los que hay en total $i-1$, también tienen al jugador i como extremal. Entonces, para todo jugador i, se tiene $\mathcal{E}_i = 2k+1$.

Por otro lado, como el número de swings convexos está dado por

$$cs_i(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq k+1 \\ 2, & \text{if } i = k+1, \end{cases}$$

se llega al resultado del enunciado. □

2.4 El Valor de Tijs

En esta sección se extiende la noción conocida como valor de Tijs [53] a juegos definidos sobre un antimatroide, para lo que es necesario considerar en lo sucesivo que $\mathcal{A}$ es un antimatroide con la propiedad de ser *coatómico*; esto es, se supondrá que todos los subconjuntos de N de cardinal $n-1$ son coaliciones factibles. Nótese que esto plantea la posiblidad de que todos los jugadores pueden abandonar individualmente la gran coalición. Dicha extensión permitirá posteriormente hablar, para juegos sobre una geometría convexa atómica, del correspondiente valor.

Se denomina *vector superior* del juego $v \in \Gamma(\mathcal{A})$ al vector $M^v \in \mathbb{R}^N$ cuyas componentes son

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Nótese que la componente i–ésima de dicho vector es la contribución marginal del jugador i a la gran coalición, y se puede considerar como la expectativa de pago que tiene dicho jugador. Por tanto, si todos los jugadores de una coalición no vacía $S \in \mathcal{A}$ recibiesen dicho pago, entonces lo que podría esperar recibir un jugador $i \in au(S)$ por su contribución a la coalición $S \cup \{i\}$ sería el *resto*

$$R^v(S,i) = v(S \cup \{i\}) - M^v(S),$$

donde $M^v(S) = \sum_{i \in S} M_i^v$.

Se puede entonces pensar que la menor cantidad esperada por un jugador que participa en el juego es el mayor de los restos que puede conseguir. Así se denomina *vector inferior* del juego v al vector $m^v \in \mathbb{R}^N$ que tiene por componentes

$$m_i^v = \max_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S)\}} \{R^v(S,i)\} \quad \text{para todo } i \in N..$$

Siguiendo el modelo de Driessen y Tijs [16], se define ahora la *función de desfase*, $g^v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^N$ del juego v mediante la expresión

$$g^v(S) = M^v(S) - v(S), \quad \forall S \in \mathcal{A}.$$

Se observa que g^v es un juego sobre el antimatroide $\mathcal{A}$, al ser $M^v(\emptyset) = 0$.

La máxima concesión que un jugador i puede hacer en el juego v es

$$\lambda_i^v = \min_{\{S \in \mathcal{A}: i \in au(S)\}} g^v(S \cup \{i\}),$$

de forma que el vector $\lambda^v = (\lambda_i)_{i \in N}$ se denomina *vector de concesiones.*

Es fácil comprobar que el vector inferior no es más que la diferencia entre el vector superior y el de concesiones,

$$m^v = M^v - \lambda^v.$$

La siguiente proposición señala algunas de las propiedades de la función de desfase y de los vectores que se han definido. Se omite la demostración por no ofrecer ninguna dificultad con respecto a la del resultado original correspondiente. En lo sucesivo se debe entender que todo vector $d \in \mathbb{R}^N$ define un juego $d \in \Gamma(\mathcal{A})$, tal que $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$.

Proposición 2.21 *Sea $\mathcal{A}$ un antimatroide coatómico. Para cualesquiera $v \in \Gamma(\mathcal{A})$, $d \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica:*

(1) $M^{\alpha v + d} = \alpha M^v + d.$

(2) Si $S \in \mathcal{A}$, $i \in au(S)$, *entonces* $R^{\alpha v + d}(S,i) = \alpha R^v(S,i) + d_i.$

(3) $g^{\alpha v+d}(S) = \alpha g^v(S)$, *para todo* $S \in \mathcal{A}$.

(4) $\lambda^{\alpha v+d} = \alpha\lambda^v$, *si* $\alpha \geq 0$.

(5) $m^{\alpha v+d} = \alpha m^v + d$, *si* $\alpha \geq 0$.

Definición 2.22 *Un juego* $v \in \Gamma(\mathcal{A})$ *es casiequilibrado sobre el antimatroide* $\mathcal{A}$, *si verifica*

(a) $m^v \leq M^v$.

(b) $m^v(N) \leq v(N) \leq M^v(N)$.

La clase de juegos casiequilibrados se denotará por $QB(\mathcal{A})$.

Mediante la función de desfase o el vector de concesiones se puede también expresar el conjunto de juegos $QB(\mathcal{A})$.

$$\begin{aligned} QB(\mathcal{A}) &= \{v \in \Gamma(\mathcal{A}) : \lambda^v \geq 0,\ m^v(N) \leq v(N) \leq M^v(N)\} \\ QB(\mathcal{A}) &= \{v \in \Gamma(\mathcal{A}) : g^v(S) \geq 0 \forall S \in \mathcal{A},\ g^v(N) \leq \lambda^v(N)\} \qquad (2.3) \end{aligned}$$

La utilización de este tipo de juegos asegura la existencia de un valor en los siguientes términos.

Definición 2.23 *Sea* $v \in QB(\mathcal{A})$. *El* τ*-valor o valor de Tijs de* v, *es el vector* $\tau(v) \in \mathbb{R}^N$, *tal que, construido en la forma*

$$\tau(v) = m^v + \alpha(M^v - m^v),$$

verifica $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$. *Es decir,*

$$\tau(v) = \begin{cases} M^v & si\ g^v(N) = 0 \\ M^v - \frac{g^v(N)}{\lambda^v(N)}\lambda^v & si\ g^v(N) > 0. \end{cases}$$

Una caracterización del valor de Tijs para juegos en un antimatroide cuya demostración es igual a la realizada para 2^N en Driessen [15] se da en el siguiente resultado.

Teorema 2.24 *El τ-valor, $\tau : QB(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, es el único valor de grupo Ψ sobre $QB(\mathcal{A})$ que verifica las siguientes propiedades:*

(1) $\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = v(N)$, *para todo* $v \in QB(\mathcal{A})$.

(2) $\Psi_i(\alpha v + d) = \alpha \Psi_i(v) + d_i$, *para todo* $v \in QB(\mathcal{A})$, $d \in \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$.

(3) Para todo $v \in QB(\mathcal{A})$ tal que $\lambda^v = 0$, $\Psi(v)$ es proporcional al vector superior M^v.

Para poder seguir el proceso anterior de construcción del valor de Tijs en una geometría convexa $\mathcal{L}$, sería necesario exigir que ésta fuera coatómica. Pero, en ese caso, $\mathcal{L}$ coincidiría con el álgebra de Boole 2^N. Este hecho hace que aquí se utilice otra vía para tal fin. Se considerará que $\mathcal{L}$ es una geometría convexa *atómica,* y se utilizará el valor de Tijs definido para los juegos casiequilibrados sobre su antimatroide dual $\mathcal{A}$ (que es coatómico). Una geometría convexa es atómica si contiene todas las coaliciones individuales.

Definición 2.25 *Sea $\mathcal{L}$ geometría convexa atómica y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. Se denomina τ-valor o valor de Tijs de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ al vector $\tau^{\mathcal{L}}(v) \in \mathbb{R}^N$ dado por*

$$\tau^{\mathcal{L}}(v) = \tau^{\mathcal{A}}(v^*),$$

donde $\tau^{\mathcal{A}}(v^*)$ es el valor de Tijs del dual del juego v.

El concepto anterior de τ-valor en una geometría atómica no siempre tiene sentido a menos que el juego dual sea casiequilibrado en el antimatroide dual. Por ello, en el siguiente resultado, se obtiene una condición suficiente, en términos del juego v, bajo la cual se puede asegurar que su dual v^* es casiequilibrado.

Proposición 2.26 *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa atómica y $\mathcal{A}$ su antimatroide dual. Si un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ verifica las propiedades siguientes:*

(1) Para toda $T \in \mathcal{L}$, $T \neq N$, se tiene que

$$v(N) - v(T) \leq \sum_{i \in N \setminus T} v(\{i\}),$$

(2) El vector $x = (x_i)_{i \in N}$ cuyas componentes son las mayores contribuciones de cada jugador, $x_i = \max_{\{S \in \mathcal{L}: i \in ex(S)\}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$, satisface

$$\sum_{i \in N} x_i \leq v(N),$$

entonces su juego dual v^* es casiequilibrado.

Demostración: Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego que verifica las propiedades (1) y (2). Se probará que su juego dual v^* es casiequilibrado usando la expresión (2.3), es decir, comprobando que $g^v(S) \geq 0 \forall S \in \mathcal{A}$, $g^v(N) \leq \lambda^v(N)$.

Para todo $i \in N$, se tiene

$$M_i^{v^*} = v^*(N) - v^*(N \setminus i) = v(N) - [v(N) - v(N \setminus \{i\})] = v(\{i\}).$$

Por tanto, la función de desfase del juego v^*, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{A}$, está dada por

$$g^{v^*}(S) = M^{v^*}(S) - v^*(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) - v(N) + v(N \setminus S),$$

y verifica $g^{v^*}(S) \geq 0$, por cumplirse (1).

En particular,

$$g^{v^*}(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\}) - v(N).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lambda^{v^*}(N) &= \sum_{i\in N} \min_{\{S\in\mathcal{A}:i\in au(S)\}} [\sum_{j\in S\cup\{i\}} v(\{j\}) - v(N) + v((N\setminus S)\setminus\{i\}) \\
&\quad \pm v(N\setminus S)] \\
&\geq \sum_{i\in N} \min_{\{S\in\mathcal{A}:i\in au(S)\}} [-v(N\setminus S) + v(\{i\}) + v((N\setminus S)\setminus\{i\})] \\
&= \sum_{i\in N}\left[v(\{i\}) - \max_{\{S\in\mathcal{A}:i\in au(S)\}} [v(N\setminus S) - v((N\setminus S)\setminus\{i\})]\right] \\
&= \sum_{i\in N}\left[v(\{i\}) - \max_{\{T\in\mathcal{L}:i\in ex(T)\}} [v(T) - v(T\setminus\{i\})]\right] \\
&= \sum_{i\in N} v(\{i\}) - x(N) \geq g^{v^*}(N),
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad se ha usado (1) para $T = N\setminus S \in \mathcal{L}$, y en la última se utiliza (2). □

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la condición dada en la proposición anterior no es una condición necesaria para que el juego v^* sea casiequilibrado.

Ejemplo 2.27 *Se considera el sistema de coaliciones $(N,\mathcal{L})$, donde el conjunto de jugadores es $N = \{1,2,3\}$ y*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

En la Figura 2.1 se representa el diagrama de Hasse de dicha geometría convexa y en la Figura 2.2 el de su antimatroide dual $\mathcal{A}$. Obsérvese que $\mathcal{L}$ es atómica y que $\mathcal{A}$ es coatómico.

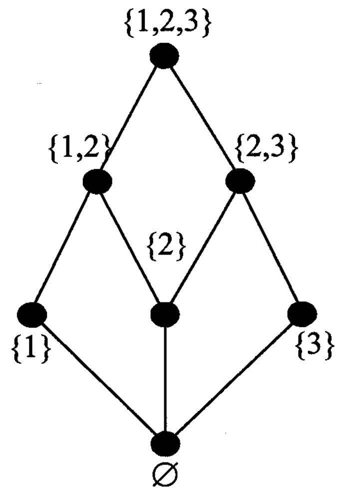

Figura 2.1

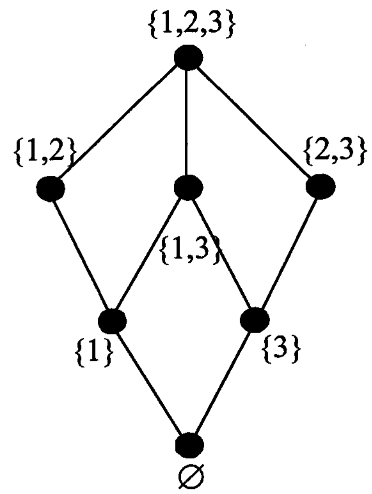

Figura 2.2

Se considera el juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, *dado por*

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 4,\ v(\{2\}) = 5,\ v(\{3\}) = 3, \\ v(\{1,2\}) &= 3,\ v(\{2,3\}) = 2,\ v(N) = 5. \end{aligned}$$

Se comprueba que dicho juego verifica la condición (1) de la proposición anterior, pero no la condición (2) ya el vector x *en este caso es* $x = (4,5,2)$. *Sin embargo, su juego dual* v^* *es*

$$v^*(\{1\}) = 3,\ v^*(\{3\}) = 2,\ v^*(\{1,3\}) = 0,$$

$$v^*(\{1,2\}) = 2,\ v^*(\{2,3\}) = 1,\ v^*(N) = 5,$$

y puede comprobarse que se trata de un juego casiequilibrado sobre el antimatroide $\mathcal{A}$, *puesto que* $M^{v^*} = (4,5,3)$ *y* $m^{v^*} = (3,-2,2)$. *Entonces, el valor de Tijs del juego* v *es* $\tau^{\mathcal{L}}(v) = (29/9, -4/9, 20/9)$.

Capítulo 3

Un Modelo para Juegos sobre Matroides

En este capítulo se plantea un modelo de cooperación por el que se pueden desarrollar juegos definidos sobre un sistema de coaliciones con estructura de matroide, que no considera las posibles estrategias de los jugadores. Como ya se indicó en la sección 1.4, en esta estructura la gran coalición puede no ser factible, y, en ese caso, las coaliciones maximales no son disjuntas. En la primera sección, se presenta el modelo construido en esta memoria y sus distintas formas de enfocarse. En la segunda sección, se estudia un valor asociado a cada coalición y determinado exclusivamente por la estructura.

3.1 El Modelo Secuencial de Cooperación

Al igual que en los juegos cooperativos clásicos, donde se supone que toda coalición entre los jugadores es posible y que interesa a todos ellos la formación de la gran coalición, en un juego sobre un matroide $\mathcal{M}$ se partirá de la idea de que a los jugadores les interesa cooperar al máximo de sus posibilidades. En este caso, la estructura de cooperación definida por el matroide establece que, en general, no existe cooperación total entre los jugadores, y por ello, se formará una coalición básica del matroide que no es conocida de antemano por los jugadores. Puede suceder que la única cuestión a dilucidar sea qué coalición básica se formará, y que una vez se haya resuelto esta cuestión, sólo se trate de repartir el beneficio obtenido por la cooperación entre los jugadores que la integran. Otra posibilidad, en el desarrollo del juego (si hay más de un jugador y $\mathcal{M}$ no es el matroide libre), es que una vez que se forme una coalición básica A_1, el juego continúe entre los restantes jugadores. Entonces, si se piensa que las coaliciones factibles vienen aún determinadas por las del matroide original, se deberá considerar el matroide $\mathcal{M}\backslash A_1$. Nuevamente, los jugadores de $N \setminus A_1$ intentarán cooperar al máximo de sus posibilidades, y se formará de nuevo una coalición básica del matroide $\mathcal{M}\backslash A_1$. Este proceso puede continuar hasta que participen todos los jugadores iniciales, o bien acabar sin haber participado todos ellos.

El modelo de cooperación en un matroide anteriormente expuesto, se denominará *modelo secuencial*, ya que, en cualquier caso, el desarrollo del juego supone la formación de una secuencia de coaliciones básicas determinadas por el matroide dado.

Se distinguirán en esta memoria, además, dos tipos de modelo secuencial. Se llamará *modelo estático* a aquél que consiste en determinar sólo una coalición básica del matroide dado; y se hablará de *modelo dinámico* cuando los jugadores se van organizando en varias coaliciones determinadas por el matroide, de manera que todos los jugadores participan.

Ejemplo 3.1 *Tres compañías aéreas que realizan trayectos según la figura 3.1 intentan establecer una alianza para ampliar su oferta. Las coaliciones entre compañías que no ofrecen nuevos servicios a sus usuarios no se consideran factibles, dando como resultado el matroide $\mathcal{M}$ de la figura 3.2. El valor de una coalición es el beneficio neto que se puede obtener en un cierto tiempo. El juego se desarrolla según el modelo dinámico, pues una compañía puede quedarse sola en el mercado, aunque sea su peor posibilidad.*

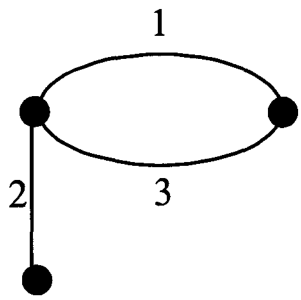

Figura 3.1

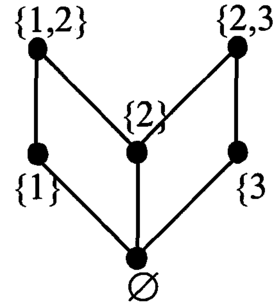

Figura 3.2

En un primer paso se decidirá qué alianza se formaliza, $\{1,2\}$ *ó* $\{2,3\}$. *Supóngase que ocurre* $A_1 = \{1,2\}$, *entonces ambos jugadores se reparten los beneficios mediante alguna técnica de juegos cooperativos aplicada al álgebra de Boole* 2^{A_1}. *Por otro lado, la compañía* 3 *no tiene porqué abandonar el juego y puede permanecer en el mercado sola. Por tanto continuaría el juego con el matroide* $\mathcal{M}\backslash A_1$, *formado por la coalición individual* $\{3\}$ *y el vacío, escogiéndose ahora la coalición básica* $\{3\}$ *de este nuevo matroide, y obteniendo* 3 *en este caso sus beneficios individuales. Pero el juego también podría haber discurrido mediante la formación de* $\{2,3\}$ *y la posterior de* $\{1\}$.

Ejemplo 3.2 *Un municipio quiere explotar de forma industrial el terreno lindante con un lago. Ha recibido 5 solicitudes de empresas, en las que se manifiestan las necesidades mínimas de agua de cada solicitante. Los estudios medioambientales aconsejan que, para evitar la desecación del lago, no se gaste más de cierta cantidad de agua como media anual. El terreno está lejano de la población y la empresa solicitante* 1 *es una empresa de servicios. Esta circunstancias hacen que el municipio busque los grupos de empresas que podrían instalarse juntas en el terreno, y escoja una de estas posibilidades. El siguiente diagrama muestra los posibles bloques de empresas.*

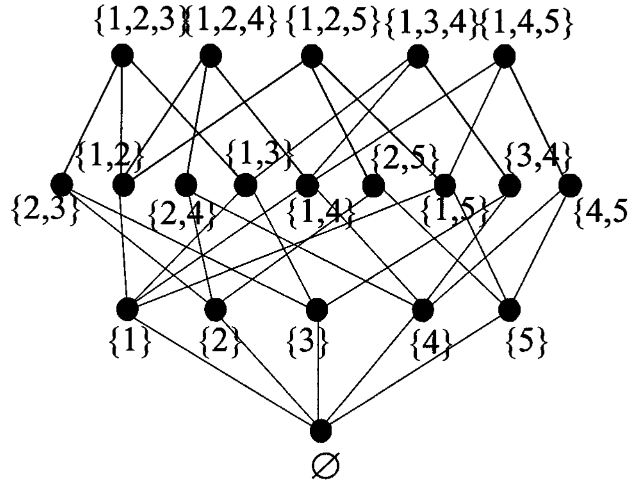

Figura 3.3

El juego se plantea entre las empresas solicitantes para determinar una coalición factible. El valor de cada coalición es el coste del terreno utilizado y los impuestos de impacto medioambiental proporcionales al agua gastada por la coalición. El desarrollo de este juego se enmarca en el modelo estático, en cuanto que se formará una única coalición, que será la que obtenga el terreno y explote el agua. Si, por ejemplo, se forma el bloque $\{1, 2, 5\}$ *entonces, las empresas* 3 *y* 4 *deben abandonar el juego, puesto que su instalación en el terreno podría desecar el lago.*

En el modelo secuencial, cada vez que se forme una coalición básica B se efectúa el reparto de beneficios que reporta la formación de la coalición en el juego. Juego, cuya función característica, se supondrá que no varía, sino que sólo se evalúa sobre el álgebra de Boole 2^B. Así, en cada paso de la secuencia, el reparto se puede hacer considerando los conceptos clásicos de solución para juegos cooperativos. El estudio que se realizará en lo que sigue, tiene como finalidad responder a las siguientes cuestiones. ¿Cómo puede cada jugador evaluar si le interesa o no jugar, si no conoce cómo se desarrollará el juego? Si los jugadores tienen una visión común del discurrir del juego, ¿pueden estimar, a priori, sus beneficios? ¿Cuál es, a priori, el poder de los jugadores, para poder establecer sus estrategias?.

Estas ideas se formalizarán usando las siguientes nociones y definiciones. Se supondrá que el matroide $\mathcal{M}$ es tal que $\mathcal{M} \neq \{\emptyset\}$ y que $\bigcup_{S \in \mathcal{M}} S = N$ donde $N = \{1, \ldots, n\}$.

Definición 3.3 *Una secuencia básica de un matroide $\mathcal{M}$ es una sucesión ordenada de coaliciones no vacías $(A_1, \ldots, A_k)$ tal que:*

(a) La primera coalición $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$,

(b) Si $k \geq 2$, entonces $A_m \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \backslash A_1 \backslash \cdots \backslash A_{m-1})$ para todo $m = 2, ..., k$,

(c) El matroide $\mathcal{M} \backslash A_1 \backslash \cdots \backslash A_k = \{\emptyset\}$.

El conjunto formado por las secuencias básicas de un matroide $\mathcal{M}$ se denotará por $\Pi(\mathcal{M})$. Por otro lado, se llamará *semisecuencia básica* del matroide a toda sucesión ordenada $(A_1, \ldots, A_k)$ de coaliciones que verifique las condiciones (a) y (b) de la definición anterior. Así, toda secuencia básica del matroide $\mathcal{M}$ es una semisecuencia básica. La *longitud*, $l(\pi)$, de una semisecuencia π es el número de coaliciones que la forman. Siendo S una coalición del matroide $\mathcal{M}$, se denotará por $\Pi_S(\mathcal{M})$ el conjunto de secuencias básicas $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$ tales que S está contenida en alguna coalición A_m, $1 \leq m \leq k$, de π.

Directamente de la definición anterior se pueden obtener las siguientes propiedades. Si $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$ es una semisecuencia básica del matroide $\mathcal{M}$, entonces:

(1) $\mathcal{M} \backslash A_1 \backslash \cdots \backslash A_k$ es un menor de $\mathcal{M}$.

(2) $A_m \in \mathcal{M}$, para todo $m \in \{1, \ldots, k\}$.

(3) $A_q \cap A_m = \emptyset$, para $m, q \in \{1, \ldots k\}$, $m \neq q$.

(4) Si π es una secuencia básica entonces

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m = N.$$

En este caso π determina una partición de N en coaliciones factibles maximales.

Definición 3.4 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Se denominan menores de eliminación de $\mathcal{M}$ a todo menor de $\mathcal{M}$ de la forma $\mathcal{M}\backslash A_1 \backslash \cdots \backslash A_k$, donde $(A_1, \ldots, A_k)$ es una semisecuencia básica de $\mathcal{M}$. Se entenderá que dos menores de eliminación de $\mathcal{M}$ son distintos cuando se obtienen a partir de distintas semisecuencias básicas. Además, por conveniencia, se supondrá en todo el trabajo que todo matroide es un menor de eliminación de sí mismo.*

En los siguientes ejemplos se muestra, para ciertos matroides, sus secuencias básicas.

Ejemplo 3.5 *(a) Sea $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y considérese el matroide uniforme $\mathcal{U}_5^3$. En este caso hay 10 secuencias básicas, todas ellas de la forma $\pi = (B, N\backslash B)$, donde B es cualquier coalición básica. Es decir, todas las secuencias básicas se pueden expresar como $\pi = (\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_4, i_5\})$.*

(b) Si $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el matroide uniforme $\mathcal{U}_6^3$ tiene 20 secuencias básicas, todas ellas de la forma $\pi = (\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_4, i_5, i_6\})$. Obsérvese que las secuencias básicas de este matroide contienen dos coaliciones básicas del matroide.

(c) Sea $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. El matroide uniforme $\mathcal{U}_8^3$ tiene 560 secuencias básicas de la forma $\pi = (\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_4, i_5, i_6\}, \{i_7, i_8\})$.

Ejemplo 3.6 *Para un matroide de oposición $\mathcal{M}_n(i\|j)$, sólo existen dos secuencias básicas posibles:*

$$\pi_1 = (N\backslash \{i\}, \{i\}) \text{ y } \pi_2 = (N\backslash \{j\}, \{j\}).$$

Ejemplo 3.7 *Sea el matroide $\mathcal{M}$ de la figura 3.3 y denótese las coaliciones básicas como*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1,2,3\}, B_2 = \{1,2,4\}, B_3 = \{1,2,5\}, \\ B_4 &= \{1,3,4\}, B_5 = \{1,4,5\}. \end{aligned}$$

Las secuencias básicas son:

$$\begin{array}{lll} \pi_1 = (B_1, \{4,5\}) & \pi_2 = (B_2, \{3\}, \{5\}) & \pi_3 = (B_2, \{5\}, \{3\}) \\ \pi_4 = (B_3, \{3,4\}) & \pi_5 = (B_4, \{2,5\}) & \pi_6 = (B_5, \{2,3\}). \end{array}$$

Obsérvese en este último ejemplo que no todas las secuencias básicas de un matroide han de tener la misma longitud.

3.2 Influencia de las coaliciones y el Juego Rango

En un juego sobre un matroide, se puede apreciar que entre los jugadores de las coaliciones básicas hay cooperación total, esto es, si B es una coalición básica del matroide $\mathcal{M}$, entonces $2^B \subseteq \mathcal{M}$. Así, cuando el matroide tiene al menos dos coaliciones básicas, la cooperación, que no es total entre los jugadores, se puede contemplar estructurada en áreas de cooperación, determinadas por las coaliciones básicas. La diferencia fundamental entre esta configuración de coaliciones y la que en la literatura se conoce como estructura de coaliciones, es que en el caso de los matroides las áreas de cooperación no pueden ser disjuntas, debido al axioma (M2). Así, cada jugador puede pertenecer a una o varias áreas de cooperación, y unos jugadores están presentes en más áreas de cooperación que otros. En otras palabras, los jugadores tienen distintas capacidades de cooperación en un matroide $\mathcal{M} \neq 2^N$.

Si se denominan *áreas de cooperación* de un matroide $\mathcal{M}$ a sus coaliciones básicas, se prueba que el número de áreas de cooperación de un matroide $\mathcal{M}$, $b(\mathcal{M})$, es un invariante Tutte-Grothendieck, (ver [30]), del matroide por verificar las siguientes propiedades.

Proposición 3.8 *Para cualesquiera $(N, \mathcal{M})$, $(N_1, \mathcal{M}_1)$ y $(N_2, \mathcal{M}_2)$ matroides, se verifican las siguientes propiedades:*

(1) $b(\mathcal{M}) = b(\mathcal{M}/i)$, *si i es istmo en $\mathcal{M}$,*

(2) $b(\mathcal{M}) = b(\mathcal{M}/i) + b(\mathcal{M}\backslash i)$, *si i no es istmo en $\mathcal{M}$,*

(3) $b(\mathcal{M}_1) = b(\mathcal{M}_2)$ *si $(N_1, \mathcal{M}_1)$ y $(N_2, \mathcal{M}_2)$ son isomorfos,*

(4) $b(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = b(\mathcal{M}_1)\, b(\mathcal{M}_2)$, *donde el matroide suma directa está formado por todas las uniones de una coalición de $\mathcal{M}_1$ y otra de $\mathcal{M}_2$.*

Teniendo en cuenta que un jugador puede pertenecer a varias áreas de cooperación del matroide, tiene sentido introducir el concepto de área de influencia de un jugador, y, en general, la siguiente noción de área de influencia de una coalición factible.

Definición 3.9 *Sea S una coalición factible del matroide $\mathcal{M}$. El conjunto de áreas de influencia de S en el matroide $\mathcal{M}$ es el conjunto de coaliciones básicas que contienen a S, es decir,*

$$\mathcal{B}_S(\mathcal{M}) = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : S \subseteq B\}.$$

Se denotará por $b_S(\mathcal{M})$ el cardinal de dicho conjunto.

En el caso particular de ser $S = \{i\}$, se hablará de áreas de influencia del jugador i, y para abreviar, se utilizará la notación $\mathcal{B}_i(\mathcal{M})$ en lugar de $\mathcal{B}_{\{i\}}(\mathcal{M})$. Es inmediato comprobar el siguiente resultado, referente a las áreas de influencia de un jugador.

Proposición 3.10 *Sean $i, j \in N$, y $\mathcal{M}$ un matroide. Entonces:*

(1) $\mathcal{B}_i(\mathcal{M}) = \{B \cup i : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}/i)\}$ *y* $b_i(\mathcal{M}) = b(\mathcal{M}/i)$,

(2) $\mathcal{B}_i(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathcal{M})$, *si i es un jugador istmo en $\mathcal{M}$,*

(3) $\mathcal{B}_i(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}_j(\mathcal{M}) = \emptyset$, *si i, j son jugadores paralelos en $\mathcal{M}$.*

Denotando por $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre las áreas de cooperación del matroide $\mathcal{M}$, cada distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $P = \{P(B) : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$, asigna a cada área de cooperación una probabilidad que se puede interpretar como la posibilidad de que dicha coalición básica se forme. Considerando que estas distribuciones de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ tienen una estrecha relación con el modelo estático de juegos sobre un matroide, se utilizan a continuación para definir la influencia de una coalición.

Definición 3.11 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Se denomina influencia en el sentido estático de la coalición factible $S \in \mathcal{M}$, según la distribución de probabilidad P, al número real no negativo, $w^P(S)$, dado por la siguiente expresión*

$$w^P(S) = \sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} P(B).$$

Además, se llama vector de influencias del matroide $\mathcal{M}$, según la distribución de probabilidad P, al vector $w^P \in \mathbb{R}^N$, tal que sus componentes son

$$w_i^P = w^P(\{i\}) = \sum_{B \in \mathcal{B}_i(\mathcal{M})} P(B), \qquad \textit{para todo } i \in N.$$

En particular, cuando se considera la *distribución de probabilidad equitativa*, $P^e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, tal que $P^e(B) = 1/b(\mathcal{M})$ para toda $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, se obtiene el *vector de influencias equitativo* del matroide $\mathcal{M}$, que tiene la expresión

$$w^e = \left(\frac{b_i\left(\mathcal{M}\right)}{b\left(\mathcal{M}\right)}\right)_{i\in N}.$$

La influencia equitativa de una coalición $S \in \mathcal{M}$ es

$$w^e\left(S\right) = \frac{b_S\left(\mathcal{M}\right)}{b\left(\mathcal{M}\right)}.$$

A continuación se verá, al estudiar la función rango del matroide, que los vectores de influencia son repartos justos del máximo grado de cooperación que existe en el matroide, determinado por el valor del rango del matroide $r\left(\mathcal{M}\right)$.

Como ya se indicó, la función rango de un matroide $\mathcal{M}$ es un juego cooperativo $r : 2^N \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, monótono y submodular. Esta última propiedad asegura (ver Driessen [15]) que su core,

$$Core\left(r\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i = r(N),\ \sum_{i\in S} x_i \leq r(S), \quad \text{para todo } S \subseteq N\right\},$$

es no vacío y, más precisamente, que coincide con la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal.

Dado el juego (N, r), para cada orden θ del conjunto de jugadores N, se define el vector de contribución marginal $z^\theta\left(r\right) \in \mathbb{R}^N$ como aquél de componentes

$$z_i^\theta\left(v\right) = v\left(X_i\left(\theta\right) \cup i\right) - v\left(X_i\left(\theta\right)\right), \qquad \text{para todo } i \in N,$$

donde $X_i\left(\theta\right)$ es el conjunto de los predecesores del jugador i en el orden θ.

Así,

$$Core\left(r\right) = conv\left\{z^\theta(r) : \theta \text{ es un orden de } N\right\}.$$

El siguiente teorema identifica los vectores de contribución marginal, y, por tanto, el core del juego rango. Para su formulación, se define, dado

$X \subseteq N$, el vector $e^X \in \mathbb{R}^N$, como aquél cuyas componentes son para todo $i \in N$,

$$e_i^X = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in X \\ 0 & \text{si} \quad i \notin X. \end{cases}$$

Teorema 3.12 *Sea r la función rango de un matroide $\mathcal{M}$. Entonces:*

$$Core\,(r) = conv\left\{e^B : B \in \mathcal{B}\,(\mathcal{M})\right\}.$$

Demostración: El juego rango $r : 2^N \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ es submodular, por lo que

$$Core\,(r) = conv\left\{z^\theta(r) : \theta \text{ es un orden de } N\right\}.$$

En primer lugar se probará que

$$\left\{z^\theta(r) : \theta \text{ es un orden de } N\right\} \subseteq \left\{e^B : B \in \mathcal{B}\,(\mathcal{M})\right\}.$$

Para un orden θ de N, el vector de contribución marginal $z^\theta\,(r)$ es eficiente, esto es

$$\sum_{i \in N} z_i^\theta\,(r) = r\,(N)\,,$$

y además, para cada $i \in N$ se tiene $z_i^\theta\,(r) \in \{0, 1\}$, por la propiedad (R3') del juego rango. Por ello, dicho vector tiene nulas todas sus componentes salvo $r(N)$ de ellas. Entonces, $z^\theta\,(r) = e^X$, siendo $X = \left\{j \in N : z_j^\theta\,(r) = 1\right\}$. Se va a probar que X es una coalición básica del matroide. Como e^X es un vector del core, se tiene

$$\sum_{i \in X} e_i^X = |X| = r(N) \leq r(X) \text{ y } |X| \leq r\,(X)\,.$$

Entonces, la monotonía del juego rango asegura $r(N) = r(X)$, y así se tiene que $|X| = r(X)$. Por tanto, X es una coalición básica.

Para probar ahora la inclusión contraria, sea B una coalición básica del matroide. Si se considera cualquier orden de los jugadores de B, y a éste se le añaden los restantes jugadores en cualquier orden, se obtiene un orden θ_o de los jugadores de N, tal que $z^{\theta_0}(r) = e^B$ ya que las contribuciones marginales, en ese orden, de los jugadores de B son iguales a la unidad, mientras que las de los demás jugadores son cero. □

Los vectores de $Core\,(r)$ tienen una estrecha relación con las distribuciones de probabilidad que se pueden construir sobre las áreas de cooperación. En efecto, a cada distribución de probabilidad $P = \{P(B) : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$ se le puede hacer corresponder un vector del core, dado por

$$w^P = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P(B) e^B,$$

esto es, el vector de influencias asociado a P.

Por otro lado, es evidente que cada expresión de un vector w del core, $w = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} \lambda_B e^B$, determina la distribución $\{\lambda_B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Sin embargo, aunque cada distribución de probabilidad P tiene asociado así un único vector del core, cada vector w del core tiene asociado, en general, una familia de distribuciones de probabilidad.

Por tanto, se han denominado vectores de influencia de un matroide $\mathcal{M}$ a cada uno de los vectores del core del juego rango del matroide, de ahí que se diga que dichos vectores determinan un reparto justo de la máxima capacidad de cooperación entre los jugadores. Obsérvese, además, que distintas distribuciones pueden definir el mismo vector de influencia, y, por otro lado, asignan distintas influencias por lo menos a dos coaliciones básicas del matroide.

Conviene también tener presentes los siguientes casos particulares:

- En el caso clásico de cooperación total entre los jugadores, $\mathcal{M} = 2^N$, el juego rango es la función cardinal y su core es el conjunto formado por el vector $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^N$. Por tanto éste es el único vector de influencias posible relacionado con la única distribución de probabilidad posible, $P = \{P(N) = 1\}$, sobre las áreas de cooperación.

- Tomar el vector de influencias $e^{B'}$, para $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, es equivalente a tomar la distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ con $P(B') = 1$ y $P(B) = 0$ para toda $B \neq B'$, y por tanto considerar este vector para un juego sobre el matroide $\mathcal{M}$ se interpretará como que el juego se restringe al área de cooperación B', por lo que su función característica sólo se evaluará sobre las coaliciones de $2^{B'}$.

El concepto de influencia de una coalición, cuando se estudia un juego sobre un matroide que se desarrolla según el modelo dinámico, no puede ser el anterior. En el modelo dinámico una coalición puede influir en el resultado sin estar incluida en la coalición básica A_1 que origina la secuencia básica final $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$, porque puede estar incluida en alguna otra de las coaliciones de dicha secuencia básica. Esto sugiere introducir una nueva definición.

Si se denota por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre las secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$, la noción de influencia de una coalición S en el caso del modelo dinámico se definirá como la suma de las probabilidades de las secuencias básicas $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$ tales que la coalición S está contenida en alguna coalición A_m de dicha secuencia.

Definición 3.13 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre las secuencias básicas de $\mathcal{M}$. Se denomina influencia en el sentido dinámico de la coalición factible $S \in \mathcal{M}$, según la distribución de probabilidad D, al número real no negativo, $w^D(S)$, dado por la siguiente expresión*

$$w^D(S) = \sum_{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M})} D(\pi).$$

Nótese que la influencia de las coaliciones unitarias según esta definición es igual a uno, lo cual es lógico puesto que cada uno de los jugadores participa finalmente en un juego que se desarrolla según el modelo dinámico.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Para cada menor de eliminación $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ que no esté formado únicamente por el vacío, sea $P_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$. En estas condiciones, a cada secuencia básica $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ del matroide $\mathcal{M}$, se le puede asociar un número real no negativo $D^*(\pi)$, dado por la siguiente expresión:

$$D^*(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\setminus A_1 \setminus \cdots \setminus A_{m-1}}(A_m).$$

A continuación, se demostrará que la aplicación D^* es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$, y que toda distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas se puede expresar en dicha forma.

Teorema 3.14 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Una aplicación $D : \Pi(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una distribución de probabilidad sobre $\Pi(\mathcal{M})$ si, y sólo si, existe una probabilidad $P_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$ para cada $\mathcal{M}'$ menor de eliminación de $\mathcal{M}$ que no contenga sólo al vacío, tal que D se puede expresar en la forma*

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\setminus A_1 \setminus \cdots \setminus A_{m-1}}(A_m), \qquad (3.1)$$

para toda secuencia básica $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ de $\mathcal{M}$.

Demostración: Si D es una distribución de probabilidad sobre las secuencias básicas de $\mathcal{M}$, se construirá, para $\mathcal{M}$ y para cualquier otro menor de eliminación no vacío $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, una distribución de probabilidad sobre sus áreas de cooperación. Se define

$$P_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D(\pi),$$

para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$. Se tiene que $P_{\mathcal{M}}(B) \geq 0$ y además,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D(\pi) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathcal{M})} D(\pi) = 1.$$

Si $\mathcal{M}' = \mathcal{M}\backslash A_1'\backslash\cdots\backslash A_m'$ es cualquier otro menor de eliminación de $\mathcal{M}$, se considera la semisecuencia asociada $\pi' = (A_1', \ldots, A_m')$ y se define el coeficiente

$$K(\mathcal{M}') = \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(\pi',\ldots)\}} D(\pi),$$

donde la suma se extiende a todas las secuencias básicas que comienzan con las coaliciones de la semisecuencia π'. Entonces, para cada coalición básica $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}')$ se considera

$$P_{\mathcal{M}'}(B) = \frac{1}{K(\mathcal{M}')} \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(\pi',B,\ldots)\}} D(\pi),$$

caso de ser $K(\mathcal{M}') \neq 0$. Si $K(\mathcal{M}') = 0$ entonces se puede tomar como $P_{\mathcal{M}'}$ cualquier distribución de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathcal{M}')$. Así, es inmediato que $P_{\mathcal{M}'}$ es una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathcal{M}')$.

Se prueba ahora que estas distribuciones permiten construir la distribución D con la fórmula (3.1) del enunciado. Si $\widetilde{\pi} = (A_1, \ldots, A_k)$ es una secuencia básica entonces se tiene

$$\begin{aligned}
& P_{\mathcal{M}}(A_1)\, P_{\mathcal{M}\backslash A_1}(A_2)\, P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash A_2}(A_3)\cdots P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\cdots\backslash A_{k-1}}(A_k) \\
= & \left(\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots)\}} D(\pi)\right)\left(\frac{1}{K(\mathcal{M}\backslash A_1)}\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,A_2,\ldots)\}} D(\pi)\right) \\
& \left(\frac{1}{K(\mathcal{M}\backslash A_1\backslash A_2)}\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,A_2,A_3,\ldots)\}} D(\pi)\right)\cdots \\
& \cdots\left(\frac{1}{K(\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\cdots\backslash A_{k-1})} D(\widetilde{\pi})\right) \\
= & D(\widetilde{\pi}),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de considerar que en el producto anterior cada factor es el denominador del siguiente, por lo que simplificando, se obtiene $D(\widetilde{\pi})$. Además, se ha tenido en cuenta que el menor $\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\cdots\backslash A_{k-1}$ es el álgebra de Boole determinada por A_k, de ahí que el sumatorio del último factor se reduzca al sumando correspondiente a $\widetilde{\pi}$. Por otra parte, se ha de observar que si existiera algún denominador nulo, aunque la primera igualdad de la fórmula anterior no tendría validez, se obtendría que $D(\widetilde{\pi}) = 0$.

Se probará ahora el recíproco, por inducción sobre el número de jugadores del matroide.

El resultado es trivialmente cierto cuando el matroide sólo tiene un jugador ya que, en ese caso, existe una única secuencia básica y el único menor de eliminación que no contenga sólo al vacío es el propio matroide. Suponiéndolo cierto para todo matroide con menos de n jugadores, se demostrará para los matroides de n jugadores.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide con n jugadores, y se considerará la aplicación D sobre $\Pi(\mathcal{M})$ dada por

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\ldots\backslash A_{m-1}}(A_m),$$

para cada secuencia básica $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k) \in \Pi(\mathcal{M})$. Se debe observar que para cada $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ secuencia básica de $\mathcal{M}$, se tiene que $\pi' = (A_2, \ldots, A_k)$ es una secuencia básica de $\mathcal{M}\backslash A_1$, y viceversa. Además, por hipótesis de inducción, la función $D_{\mathcal{M}\backslash A_1} : \Pi(\mathcal{M}\backslash A_1) \longrightarrow \mathbb{R}$. tal que

$$D_{\mathcal{M}\backslash A_1}(\pi') = \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\cdots\backslash A_{m-1}}(A_m) \tag{3.2}$$

para toda $\pi' = (A_2, \ldots, A_k)$ secuencia básica de $\mathcal{M}\backslash A_1$, es una distribución de probabilidad sobre $\Pi(\mathcal{M}\backslash A_1)$. Por ello, se tiene que

$$\sum_{\pi\in\Pi(\mathcal{M})} D(\pi)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,A_2,\ldots,A_k)\}} P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\cdots\backslash A_{m-1}}(A_m) \\ &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\pi')\}} P_{\mathcal{M}}(A_1)\, D_{\mathcal{M}\backslash A_1}(\pi') \end{aligned}$$

$$= \sum_{A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(A_1) \sum_{\pi' \in \Pi(\mathcal{M} \backslash A_1)} D_{\mathcal{M} \backslash A_1}(\pi') \tag{3.3}$$
$$= \sum_{A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(A_1) = 1.$$

y, por tanto, D es una distribución de probabilidad sobre $\Pi(\mathcal{M})$. En la expresión anterior, $\pi = (A_1, \pi')$ representa a $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ si se tiene que $\pi' = (A_2, \ldots, A_k)$. □

Se deduce del teorema anterior, que toda distribución de probabilidad $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ origina, para cada coalición básica $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, una distribución de probabilidad $D_{\mathcal{M} \backslash A_1} \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \backslash A_1)$. En efecto, escribiendo D en la forma (3.1), entonces la expresión (3.2) define la distribución de probabilidad que se ha denotado $D_{\mathcal{M} \backslash A_1}$. Además, se verifica que si $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ está en $\Pi(\mathcal{M})$, entonces

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \, D_{\mathcal{M} \backslash A_1}(\pi'), \tag{3.4}$$

donde $\pi' = (A_2, \ldots, A_k) \in \Pi(\mathcal{M} \backslash A_1)$.

Obsérvese por último que, como consecuencia de (3.3), se tiene que para $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$,

$$\sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (A_1, \ldots)\}} D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1). \tag{3.5}$$

Capítulo 4

Valores sobre Matroides

En este capítulo y el siguiente se estudiarán los conceptos de solución denominados *valores*, definidos ahora sobre el conjunto de juegos $\Gamma(\mathcal{M})$ de un matroide $\mathcal{M}$. Estos valores se deberán ajustar a la situación de cooperación determinada por el matroide dado y, por ello, serán introducidos adaptando los axiomas clásicos utilizados en juegos cooperativos donde no existen restricciones en la cooperación entre los jugadores. La construcción de valores se hará teniendo en cuenta también el tipo de juegos sobre el que se vayan a utilizar. Por ello, se hablará de valores estáticos y de valores dinámicos, atendiendo a que los juegos considerados se desarrollen según el modelo secuencial estático o dinámico.

En la primera sección se introducen y caracterizan axiomáticamante los que se denominarán valores $\lambda-$ponderados. Estos son valores individuales que generalizan el concepto de valor probabilístico introducido por Weber, y que son válidos para juegos que se desarrollen según cualquier modelo secuencial. Las dos últimas secciones del capítulo se dedican, respectivamente, al estudio de valores de grupo estáticos y valores de grupo dinámicos.

En lo sucesivo se supondrá que N es el conjunto de jugadores determinado por el matroide $\mathcal{M}$ y que, por tanto, $\mathcal{M}$ no contiene únicamente el vacío. Por otra parte, si no hay lugar a confusión, se simplificarán algunas notaciones.

En concreto, siempre que se trabaje con el matroide $\mathcal{M}$, se entenderá que $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{M})$ y $\mathcal{B}_S = \mathcal{B}_S(\mathcal{M})$. Los cardinales de dichos conjuntos de coaliciones se denotarán por b y b_S. Además, se escribirá $S \cup i$ y $S \setminus i$ en lugar de $S \cup \{i\}$ y $S \setminus \{i\}$, respectivamente.

4.1 Valores λ-Ponderados

Los valores probabilísticos fueron definidos por Weber [59] como valores individuales que permiten estimar a cada jugador, por sí solo, las expectitativas que tiene, a priori, al jugar diferentes juegos. Para obtener dicha estimación, el jugador establece una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones a las que él se puede unir (mediante la que define las posibilidades de hacerlo) y considera sus contribuciones marginales a cada una de ellas. Entonces, define el valor probabilístico como la media resultante o valor que espera conseguir en cada juego. Un *valor probabilístico* Ψ_i para el jugador i sobre el conjunto de juegos $\Gamma\left(2^N\right)$ es una función $\Psi_i : \Gamma\left(2^N\right) \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

para todo juego $v \in \Gamma\left(2^N\right)$, donde $\{p_S^i : S \subseteq N \setminus i\}$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones $S \subseteq N \setminus i$.

En el espacio vectorial de los juegos definidos sobre un matroide, $\Gamma(\mathcal{M})$, las estimaciones que realice cada jugador, dependerán de las posibilidades que éste estime inicialmente que tiene de formar parte de las coaliciones que se formarán con en el transcurso del juego. Mientras que en un juego cooperativo clásico, $\left(2^N, v\right)$, se presupone la formación de la gran coalición N, y , por tanto, la participación de todos los jugadores en el reparto final, en un juego definido sobre un matroide no siempre se puede garantizar que el jugador no quede eliminado. Estas consideraciones se introducen con la definición siguiente de valores λ-ponderados.

Definición 4.1 *Un valor Ψ_i, para el jugador i, sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ es un valor λ-ponderado, con $\lambda \in [0,1]$, si existe una colección $\{p_S^i : S \in \mathcal{M}/i\}$ de números reales no negativos, verificando $\sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda$, de modo que*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$.

Los valores λ-ponderados para $\lambda = 1$ se denominarán *valores probabilísticos*. En cualquier caso, la constante λ se puede considerar como la probabilidad que el jugador estima que tiene de estar en una de las coaliciones que se formen al finalizar las etapas del juego.

A continuación, se obtendrá una caracterización axiomática de los valores λ-ponderados. Se partirá de un valor Ψ_i para el jugador i, al que se le irán imponiendo propiedades razonables. En primer lugar, se considerará que el jugador estima que el valor que obtendrá al participar en el juego $v + w$ es la suma de los valores que obtendría en los juegos v y w. Igualmente se supondrá que si un juego es modificado por un cambio de escala, el jugador considera sus valoraciones afectadas en la misma proporción.

Axioma de linealidad. Si $v, w \in \Gamma(\mathcal{M})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\Psi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \Psi_i(v) + \beta \Psi_i(w).$$

Tomando la base de los juegos de identidad en $\Gamma(\mathcal{M})$, se obtiene a continuación una formulación de los valores individuales que son lineales.

Teorema 4.2 *Sea* Ψ_i *un valor sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *que satisface el axioma de linealidad. Entonces, existen unos únicos coeficientes* $\{a_S^i : S \in \mathcal{M},\ S \neq \emptyset\}$ *tales que*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}} a_S^i v(S),$$

para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$.

Demostración: Puesto que el conjunto de juegos $\{\delta_S : S \in \mathcal{M}, S \neq \emptyset\}$ es una base del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{M})$, y cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ se puede expresar como combinación lineal de los juegos de unanimidad (1.1), tenemos que

$$v = \sum_{\{S \in \mathcal{M}: S \neq \emptyset\}} v(S)\, \delta_S.$$

Entonces

$$\Psi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{M}: S \neq \emptyset\}} \Psi_i(\delta_S)\, v(S),$$

por la linealidad de Ψ_i. Por último, es suficiente tomar $a_S^i = \Psi_i(\delta_S)$, para $S \in \mathcal{M}$, $S \neq \emptyset$, y $a_\emptyset^i$ un valor cualquiera. □

En un juego pueden aparecer jugadores que contribuyen siempre con la misma cantidad en todas las coaliciones, éstos reciben el nombre de jugadores *dummy*.

Definición 4.3 *Un jugador* $i \in N$ *es dummy en un juego* $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ *si, para cada* $T \in \mathcal{M}/i$, *se verifica*

$$v(T \cup i) - v(T) = v(\{i\}).$$

Un jugador $i \in N$ *es nulo en un juego* $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ *si, para cada* $T \in \mathcal{M}/i$, *se satisface que* $v(T \cup i) - v(T) = 0$.

El valor que debe esperar un jugador dummy en un juego debe ser el valor con el que repercute en cualquier coalición, afectado por la posibilidad de formar parte de las coaliciones finales. Esta consideración justifica el siguiente axioma.

Axioma del jugador dummy λ-modificado. Sea $\lambda \in [0,1]$. Si $i \in N$ es jugador dummy en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ entonces

$$\Psi_i(v) = \lambda v(\{i\}).$$

En el caso particular de jugadores nulos, para los que $v(\{i\}) = 0$, cabe considerar simplemente este otro axioma.

Axioma del jugador nulo. Si i es jugador nulo en un juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ entonces

$$\Psi_i(v) = 0.$$

Se trata ahora de ver la repercusión de estos axiomas en la expresión de un valor que verifica el axioma de linealidad. Para ello, conviene observar que hay jugadores dummy y también jugadores nulos en los juegos de unanimidad.

Lema 4.4 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y, además, $i \in N$. Entonces:*

(1) Si $S \in \mathcal{M}\backslash i$ es una coalición no vacía, entonces i es jugador nulo en el juego ζ_S definido sobre $\mathcal{M}$.

(2) El jugador i es dummy en el juego de unanimidad $\zeta_{\{i\}}$ definido sobre $\mathcal{M}$.

Demostración: Considérese $T \in \mathcal{M}/i$.

(1) Sea $S \in \mathcal{M}\backslash i$ una coalición no vacía. En el caso de que T contenga a S, se tiene $\zeta_S(T) = \zeta_S(T \cup i) = 1$. Por otra parte, si T no contiene a S, se verifica $\zeta_S(T \cup i) = \zeta_S(T) = 0$. Así, $\zeta_S(T \cup i) - \zeta_S(T) = 0$ para todo $T \in \mathcal{M}/i$.

(2) Al ser $\zeta_{\{i\}}(T \cup i) = 1$ y $\zeta_{\{i\}}(T) = 0$, se obtiene la siguiente igualdad $\zeta_{\{i\}}(T \cup i) - \zeta_{\{i\}}(T) = 1 = \zeta_{\{i\}}(\{i\})$. □

Teorema 4.5 *Sea Ψ_i un valor individual sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica el axioma de linealidad. Entonces:*

(1) Si Ψ_i cumple el axioma del jugador nulo, entonces existe una colección de constantes $\{p_S^i : S \in \mathcal{M}/i\}$ de modo que

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right], \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}).$$

(2) Si Ψ_i satisface el axioma del jugador dummy λ-modificado, entonces la expresión anterior es cierta y, los coeficientes verifican

$$\sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda.$$

Demostración: Se tomará Ψ_i verificando el axioma de linealidad.

(1) Sea Υ_i un valor sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ definido, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, por

$$\Upsilon_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right], \text{ con } p_S^i = \Psi_i(\delta_{S \cup i}).$$

Dado que Ψ_i y Υ_i son lineales y los juegos de unanimidad son una base de $\Gamma(\mathcal{M})$, bastará demostrar que $\Upsilon_i(\zeta_T) = \Psi_i(\zeta_T)$, para cada coalición no vacía $T \in \mathcal{M}$. Sea $T \in \mathcal{M}$, no vacía, se considerarán dos casos.

(a) Si $i \notin T$, por el lema anterior, es un jugador nulo en el juego ζ_T. Entonces, $\Psi_i(\zeta_T) = 0$, al verificar Ψ_i el axioma del jugador nulo. Por otro lado, como las contribuciones marginales del jugador i en dicho juego ζ_T son cero, se tiene también que $\Upsilon_i(\zeta_T) = 0$.

(b) Si $i \in T$,

$$\Upsilon_i(\zeta_T) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[\zeta_T(S \cup i) - \zeta_T(S)\right] = \sum_{\{S \in \mathcal{M}: S \supseteq T\}} p_{S \setminus i}^i,$$

pues $\zeta_T(S) = 0$ al ser $S \in \mathcal{M}/i$. Por otro lado, como $\Psi_i(\delta_S) = p_{S \setminus i}^i$, se obtiene

$$\Upsilon_i(\zeta_T) = \sum_{\{S\in\mathcal{M}:S\supseteq T\}} \Psi_i(\delta_S) = \Psi_i\left(\sum_{\{S\in\mathcal{M}:S\supseteq T\}} \delta_S\right) = \Psi_i(\zeta_T).$$

(2) Si el valor Ψ_i satisface el axioma del jugador dummy λ-modificado, se puede repetir el mismo razonamiento hecho en el apartado anterior. Además, en este caso, al ser i un jugador dummy en el juego $\zeta_{\{i\}}$ por el lema anterior, y verificarse $\zeta_{\{i\}}(\{i\}) = 1$, se tiene $\Psi_i\left(\zeta_{\{i\}}\right) = \lambda$, por el axioma del jugador dummy λ-modificado. Finalmente, como la contribución marginal $\zeta_{\{i\}}(S\cup i) - \zeta_{\{i\}}(S)$ es 1 sólo para los $S\in\mathcal{M}/i$, se obtiene

$$\Psi_i\left(\zeta_{\{i\}}\right) = \sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda.$$

□

Si se considera que en los juegos monótonos la cooperación siempre es ventajosa, ya que $v(S)\leq v(T)$, siempre que las coaliciones factibles verifiquen $S\subseteq T$, es lógico exigir que el pago que reciba cada jugador al final sea no negativo. Por esta razón, se introduce el siguiente axioma.

Axioma de monotonía. Si $v\in\Gamma_{\mathrm{m}}(\mathcal{M})$, entonces $\Psi_i(v)\geq 0$.

En el siguiente teorema se verá cómo repercute el axioma de monotonía en la expresión de un valor de grupo que verifica los axiomas de linealidad y de jugador nulo.

Teorema 4.6 *Sea Ψ_i es un valor sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ tal que, para todo $v\in\Gamma(\mathcal{M})$, está dado por*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i\left[v(S\cup i) - v(S)\right].$$

Entonces, si Ψ_i verifica el axioma de monotonía, todos los coeficientes p_S^i son no negativos.

Demostración: Para cada $T \in \mathcal{M}/i$, se considera el juego monótono

$$\widehat{\zeta_T}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T \subset S \\ 0 & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, por el axioma de monotonía, $\Psi_i\left(\widehat{\zeta_T}\right) \geq 0$. Además,

$$\Psi_i\left(\widehat{\zeta_T}\right) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[\widehat{\zeta_T}(S \cup i) - \widehat{\zeta_T}(S)\right] = p_T^i.$$

Por tanto, todos los coeficientes de la expresión de Ψ_i son no negativos.□

Estos axiomas que se han ido describiendo caracterizan a los valores λ-ponderados. Mediante una simple comprobación y la aplicación de los teoremas anteriores se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4.7 *Un valor Ψ_i para un jugador $i \in N$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ es un valor λ-ponderado si, y sólo si, verifica los axiomas de linealidad, jugador dummy $\lambda-$modificado y monotonía.*

4.2 Valores de Grupo Estáticos

Se han considerado en la sección anterior axiomas para la construcción de valores individuales. Ahora, se van a estudiar axiomas desde el punto de vista de grupo, para juegos que se desarrollen según el modelo estático.

Se tendrá en cuenta que, en el modelo estático, se formará finalmente una única coalición básica, y que en los valores que hemos denominado λ-ponderados la interpretación de λ es la probabilidad de participar en el juego que tiene un jugador. Entonces, al considerar valores de grupo con componentes λ_i-ponderadas para cada jugador i es natural tener que exigir que estos valores sean conjuntamente realistas. Por ello, es lógico que ahora cada jugador considere que su probabilidad λ_i de participar en el juego sea su influencia en el matroide.

En esta sección, teniendo en cuenta la idea anterior, serán de interés los valores de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre juegos en un matroide $\mathcal{M}$ tales que cada componente Ψ_i, $i \in N$, es un valor λ_i-ponderado, de modo que $(\lambda_i)_{i \in N}$ es un vector de influencias (vector del core del juego rango del matroide).

Definición 4.8 *Un valor de grupo* $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ *sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *verifica la propiedad del rango, cuando existe un vector* $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$, *de modo que* $\Lambda \in Core(r)$, *tal que cada componente* Ψ_i *de* Ψ *es un valor* λ_i*-ponderado sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$.

En los resultados que siguen, se hará uso de las notaciones que se introducen a continuación.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide y $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Para cualquier matroide $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, se denotará por $v_{\mathcal{M}'}$ la restricción del juego v sobre $\mathcal{M}'$. Es decir,

$$v_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \to \mathbb{R}, \ v_{\mathcal{M}'}(S) = v(S), \text{ para cada } S \in \mathcal{M}'.$$

En el caso particular en que $\mathcal{M}'$ coincida con el matroide 2^B determinado por una coalición básica B de $\mathcal{M}$, se escribirá v_B en lugar de $v_{\mathcal{M}'}$.

En el lema siguiente se enuncia una propiedad que se utilizará en las demostraciones de resultados posteriores.

Lema 4.9 *Sea* $\mathcal{M}$ *una matroide y sea* $i \in N$ *un jugador fijo. Entonces, se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:*

$$\{(S,B) : B \in \mathcal{B}_i, S \subseteq B, i \notin S\} = \{(S,B) : S \in \mathcal{M}/i, B \in \mathcal{B}_{S \cup i}\}.$$

Demostración: Es inmediata teniendo en cuenta que para toda coalición básica B de $\mathcal{M}$, se verifica que el álgebra de Boole 2^B está contenida en el matroide $\mathcal{M}$. □

A continuación, se observará cómo repercute en la expresión de un valor de grupo la propiedad del rango. Se comprobará que cada valor de grupo con dicha propiedad es tal que sus componentes son medias ponderadas de valores probabilísticos sobre las áreas de influencia del jugador correspondiente.

Teorema 4.10 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide, con función rango r, y sea $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(1) Ψ verifica la propiedad del rango.

(2) Para cada jugador $i \in N$, la componente Ψ_i de Ψ se puede expresar en la forma

$$\Psi_i(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}_i} P_i(B)\, \Psi_i^B(v_B), \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}),$$

donde

(a) Ψ_i^B es un valor probabilístico sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, para cada $B \in \mathcal{B}_i$,

(b) P_i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto $\mathcal{B}$ de áreas de cooperación del matroide, de modo que el vector $\left(w_i^{P_i}\right)_{i\in N}$ está en $Core(r)$. (Nótese que $w_i^{P_i}$ es la componente i-ésima del vector de influencias definido por P_i)

Demostración: Sea Ψ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ con la propiedad del rango. Entonces existe $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in N}$ un vector de influencias del matroide $\mathcal{M}$, tal que cada componente Ψ_i de Ψ es un valor λ_i-ponderado. Por ello, Ψ_i puede escribirse en la forma

$$\Psi_i(v) = \sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i\left[v(S\cup i) - v(S)\right],$$

con $p_S^i \geq 0$ y $\sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda_i$.

Se define, por cada jugador $i \in N$, una distribución de probabilidad P_i sobre el conjunto $\mathcal{B}$ de las áreas de cooperación del matroide. Sea

$$P_i(B) = \begin{cases} \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} \frac{p_S^i}{b_{S \cup i}} & \text{si } B \in \mathcal{B}_i \\ \frac{1-\lambda_i}{b-b_i} & \text{si } B \notin \mathcal{B}_i. \end{cases}$$

Evidentemente $P_i(B) \geq 0$, para cada $B \in \mathcal{B}$, y además

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{B}} P_i(B) &= \sum_{B \notin \mathcal{B}_i} P_i(B) + \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B) \\ &= \sum_{B \notin \mathcal{B}_i} \frac{1-\lambda_i}{b-b_i} + \sum_{B \in \mathcal{B}_i} \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} \frac{p_S^i}{b_{S \cup i}} \\ &= 1 - \lambda_i + \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \sum_{B \in \mathcal{B}_{S \cup i}} \frac{p_S^i}{b_{S \cup i}} \\ &= 1 - \lambda_i + \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = 1 - \lambda_i + \lambda_i = 1, \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene de aplicar el lema anterior.

Obsérvese en primer lugar que como $w_i^{P_i} = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B)$, entonces los últimos cálculos permiten afirmar que

$$w_i^{P_i} = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda_i, \text{ para todo } i \in N,$$

y por tanto se verifica (b), ya que $\Lambda \in Core(r)$.

Se prueba ahora (a). Sea, para cada $i \in N$ y cada $B \in \mathcal{B}_i$, el valor

$$\Psi_i^B : \Gamma\left(2^B\right) \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

definido para todo $\widetilde{v} \in \Gamma\left(2^B\right)$ por

$$\Psi_i^B(\widetilde{v}) = \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} p_{S,B}^i \left[\widetilde{v}(S \cup i) - \widetilde{v}(S)\right],$$

donde los coeficientes $p_{S,B}^i$, cuando $P_i(B) \neq 0$, son

$$p_{S,B}^i = \frac{p_S^i}{b_{S \cup i} P_i(B)}.$$

Si $P_i(B)$ fuera cero, se llamará Ψ_i^B a cualquier valor probabilístico sobre $\Gamma\left(2^B\right)$.

Es fácil comprobar que el valor Ψ_i^B construido, cuando $P_i(B) \neq 0$, es probabilístico, ya que

$$\sum_{\{S\subseteq B: i\notin S\}} p_{S,B}^i = \sum_{\{S\subseteq B: i\notin S\}} \frac{p_S^i}{b_{S\cup i} P_i(B)} = \frac{1}{P_i(B)} \sum_{\{S\subseteq B: i\notin S\}} \frac{p_S^i}{b_{S\cup i}} = 1.$$

Para comprobar que Ψ_i se puede expresar como en el enunciado, se razona como sigue. Para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}
\Psi_i(v) &= \sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S\cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{S\in\mathcal{M}/i} \sum_{B\in\mathcal{B}_{S\cup i}} \frac{p_S^i}{b_{S\cup i}} \left[v(S\cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \sum_{\{S\subseteq B: i\notin S\}} \frac{p_S^i}{b_{S\cup i}} \left[v(S\cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{B\in\mathcal{B}_i} P_i(B) \sum_{\{S\subseteq B: i\notin S\}} p_{S,B}^i \left[v(S\cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{B\in\mathcal{B}_i} P_i(B)\, \Psi_i^B(v_B).
\end{aligned}$$

Nótese que en la tercera igualdad se utiliza el lema anterior y, en la cuarta, se tiene en cuenta la definición de los coeficientes $p_{S,B}^i$. Además, obsérvese que en caso de que $P_i(B) = 0$, para algún $B \in \mathcal{B}_i$, entonces por definición de P_i se tiene que $p_S^i = 0$ para toda $S \subseteq B$ tal que $i \notin S$. En este caso, el sumando correspondiente a dicho B es cero en la tercera igualdad, y puede tomarse como $p_{S,B}^i$ cualquier distribución de probabilidad sobre $\{S \subseteq B : i \notin S\}$ para que la siguiente igualdad sea cierta.

Para probar la implicación recíproca, suponiendo que se verifica (2) se construye el valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$. Se probará que Ψ verifica la propiedad del rango.

Puesto que para cada $i \in N$ y cada $B \in \mathcal{B}_i$, Ψ_i^B es un valor probabilístico sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, se tiene, para todo $\widetilde{v} \in \Gamma\left(2^B\right)$, que

$$\Psi_i^B\left(\widetilde{v}\right) = \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} p_{B,S}^i \left[\widetilde{v}(S \cup i) - \widetilde{v}(S)\right],$$

con $p_{B,S}^i \geq 0$ y $\sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} p_{B,S}^i = 1$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\Psi_i(v) &= \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B)\, \Psi_i^B(v_B) \\
&= \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B) \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} p_{B,S}^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \left(\sum_{B \in \mathcal{B}_{S \cup i}} P_i(B)\, p_{B,S}^i \right) \left[v(S \cup i) - v(S)\right],
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad sigue del lema anterior. Si se denota, para cada $i \in N$, $S \in \mathcal{M}/i$, por q_S^i el número real no negativo

$$q_S^i = \sum_{B \in \mathcal{B}_{S \cup i}} P_i(B)\, p_{B,S}^i,$$

se tendrá que

$$\sum_{S \in \mathcal{M}/i} \sum_{B \in \mathcal{B}_{S \cup i}} P_i(B)\, p_{B,S}^i = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B) \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} p_{B,S}^i = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P_i(B) = w_i^{P_i}.$$

Por tanto se ha probado que el valor Ψ definido anteriormente verifica la propiedad del rango para $\Lambda = \left(w_i^{P_i}\right)_{i \in N}$, teniendo en cuenta (b). □

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente. Si, para todo $i \in N$, se construyen valores individuales Ψ_i sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, tales que

$$\Psi_i(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}_i(\mathcal{M})} P(B)\, \Psi_i^B(v_B), \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}),$$

siendo Ψ_i^B un valor probabilístico sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, para cada $B \in \mathcal{B}_i$, y P una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{B}$; entonces, el valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$

verifica la propiedad del rango. (Nótese que al tomar la misma distribución de probabilidad para todos los jugadores se verifica trivialmente que el vector $\left(w_i^{P_i}\right)_{i\in N} = \left(w_i^{P}\right)_{i\in N}$ está en $Core(r)$)

El razonamiento anterior da pie a introducir un nuevo tipo de valor.

Definición 4.11 *Un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, se denomina valor básico estático si todas sus componentes se puedan expresar en la forma*

$$\Psi_i(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}_i(\mathcal{M})} P(B)\,\Psi_i^B(v_B)\,,\ \textit{para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M})\,,$$

siendo Ψ_i^B un valor probabilístico para el jugador i sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, para cada $B \in \mathcal{B}_i$, y $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de áreas de cooperación del matroide $\mathcal{M}$. Un valor en esta condiciones se denota por $\left(\Psi; P, \left\{\Psi^B\right\}\right)$.

Cuando los valores de grupo $\Psi^B = \left(\Psi_i^B\right)_{i\in B}$ sobre $\Gamma\left(2^B\right)$ de la definición anterior se extiende tomando $\Psi_i^B = 0$ si $i \notin B$, entonces los valores básicos se pueden escribir de una forma sencilla:

$$\Psi = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\,\Psi^B. \tag{4.1}$$

De la definición anterior y el Teorema 4.10 se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 4.12 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Si un valor de grupo Ψ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ es básico estático entonces satisface la propiedad del rango.*

En el siguiente ejemplo se muestra que hay valores de grupo que verifican la propiedad del rango y que no son valores básicos.

Ejemplo 4.13 *Considérese el matroide de oposición $\mathcal{M}_3(1 \parallel 3)$. Se puede comprobar que*

$$Core(r) = conv\{(1,1,0),(0,1,1)\}.$$

Se define el valor de grupo $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, como

$$\Psi_1(v) = \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})],$$
$$\Psi_2(v) = v(\{1,2\}) - v(\{1\}),$$
$$\Psi_3(v) = \frac{1}{2}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})].$$

Así, Ψ verifica la propiedad del rango para el vector de influencias equitativo $\Lambda = (1/2, 1, 1/2)$.

Se verá que Ψ no es un valor básico. Si lo fuera, entonces sus componentes se tendrían que poder expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(v) &= P(\{1,2\})\left[a_2^1[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + a_\emptyset^1 v(\{1\})\right] \\
\Psi_2(v) &= P(\{1,2\})\left[a_1^2[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + a_\emptyset^2 v(\{2\})\right] \\
&\quad + P(\{2,3\})\left[b_3^2[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + b_\emptyset^2 v(\{2\})\right] \\
\Psi_3(v) &= P(\{2,3\})\left[b_2^3[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + b_\emptyset^3 v(\{3\})\right]
\end{aligned}$$

donde $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, y los coeficientes verifican las siguientes relaciones

$$a_2^1 + a_\emptyset^1 = 1,$$
$$a_1^2 + a_\emptyset^2 = 1,$$
$$b_3^2 + b_\emptyset^2 = 1,$$
$$b_2^3 + b_\emptyset^3 = 1,$$

siendo todos no negativos.

Para que ambas expresiones de Ψ sean válidas para todo juego v, es necesario que $P(\{1,2\}) = P(\{2,3\}) = 1/2$, $a_2^1 = b_2^3 = 1$, $a_\emptyset^1 = b_\emptyset^3 = 0$, lo *que se deduce de las componentes primera y tercera. Por ello, la segunda componente se debe escribir*

$$\Psi_2(v) = \frac{1}{2}\left[a_1^2\left[v(\{1,2\}) - v(\{1\})\right] + a_\emptyset^2 v(\{2\})\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[b_3^2\left[v(\{2,3\}) - v(\{3\})\right] + b_\emptyset^2 v(\{2\})\right],$$

y entonces es necesario que $(1/2)\,a_1^2 = 1$, *lo cual es imposible.*

La principal propiedad exigible a un valor de grupo es la eficiencia. En el caso clásico, cuando el matroide es el matroide libre 2^N, dicha propiedad establece que un valor de grupo repartirá el beneficio $v(N)$ de la única coalición básica existente. Pero, esta idea necesita ser modificada cuando se piensa en un juego cooperativo sobre un matroide cualquiera, ya que en este caso no se conoce a priori qué coalición básica se formará. Aquí se seguirá la idea de eficiencia introducida por Nowak y Radzik [43], y Bergantiños y Sánchez [6] en sus trabajos sobre juegos en forma generalizada.

A continuación se introduce el concepto de eficiencia para valores de grupo $\Psi : \Gamma(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$, en el caso del modelo estático de juegos.

Axioma de eficiencia estático. Existe una distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ tal que, para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, se verifica

$$\sum_{i\in N} \Psi_i(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\, v(B).$$

Proposición 4.14 *Sea* Ψ *un valor de grupo sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *que satisface el axioma de eficiencia estático para la distribución de probabilidad* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. *Entonces, se verifica:*

(1) La distribución P *que lo hace eficiente es única.*

(2) Si Ψ *verifica la propiedad del rango para* $\Lambda \in Core(r)$, *entonces se tiene que* $w^P = \Lambda$.

Demostración: (1) Supóngase que Ψ es eficiente para $P, P' \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Si fuera $P \neq P'$, entonces existe $\widehat{B} \in \mathcal{B}$ tal que $P\left(\widehat{B}\right) \neq P'\left(\widehat{B}\right)$. En ese caso, para el juego de identidad $\delta_{\widehat{B}}$ se tendría

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} P(B)\,\delta_{\widehat{B}}(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}} P'(B)\,\delta_{\widehat{B}}(B),$$

lo que implica $P\left(\widehat{B}\right) = P'\left(\widehat{B}\right)$, en contradicción con lo supuesto.

(2) Si Ψ cumple la propiedad del rango para $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$, sus componentes Ψ_i verifican

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i\,[v(S \cup i) - v(S)], \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}),$$

siendo $p_S^i \geq 0$ y $\sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda_i$.

Considérese el juego de unanimidad $\zeta_{\{j\}}$ para un jugador j fijo. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Psi_i(\zeta_{\{j\}}) &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i\left[\zeta_{\{j\}}(S \cup i) - \zeta_{\{j\}}(S)\right] \\ &= \sum_{S \in \mathcal{M}/j} p_S^j = \lambda_j, \end{aligned}$$

porque los jugadores distintos de j son nulos y el jugador j es dummy en el juego $\zeta_{\{j\}}$, por el Lema 4.4. Por otro lado,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} P(B)\,\zeta_{\{j\}}(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}_j} P(B) = w_j^P.$$

Por tanto, al ser Ψ eficiente, se tiene $w_j^P = \lambda_j$, para todo $j \in N$. Lo que significa que $w^P = \Lambda$. □

A continuación, se probará que la propiedad de eficiencia se transmite de las áreas de cooperación a todo el matroide, cuando el valor es básico.

Proposición 4.15 *Sea $\left(\Psi; P, \left\{\Psi^B\right\}\right)$ un valor de grupo básico estático sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, definido mediante valores Ψ^B sobre $\Gamma\left(2^B\right)$ que verifican el axioma de eficiencia (no necesariamente con componentes probabilísticas). Entonces, Ψ verifica el axioma de eficiencia estático con la probabilidad P.*

Demostración: Teniendo en cuenta que cada Ψ^B es eficiente, se tiene

$$\sum_{i \in B} \Psi_i^B(v_B) = v(B), \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}).$$

Entonces, usando la expresión de Ψ como valor básico estático y sumando en $i \in N$, se obtiene fácilmente el resultado:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \Psi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B) \Psi_i^B(v_B) \\
&= \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B) \sum_{i \in B} \Psi_i^B(v_B) = \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B) v(B).
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que un valor de grupo, cuyas componentes verifican los axiomas de linealidad y jugador nulo, sea eficiente estático.

Teorema 4.16 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide con operador clausura σ. Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, de componentes tales que*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i [v(S \cup i) - v(S)], \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}).$$

Entonces, Ψ verifica el axioma de eficiencia estático si, y sólo si, existe una distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ para la cual los coeficientes dados p_S^i, $i \in N$, $S \in \mathcal{M}/i$, satisfacen las siguientes ecuaciones recurrentes

$$\sum_{i \in T} p_{T \setminus i}^i = \sum_{j \notin \sigma(T)} p_T^j, \quad \forall T \notin \mathcal{B},\ T \in \mathcal{M},$$

$$\sum_{i \in B} p_{B \setminus i}^i = P(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Demostración: Si Ψ verifica el axioma de eficiencia estático, entonces

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i [v(S \cup i) - v(S)] = \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B) v(B),$$

para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$.

Como todos los jugadores $i \in N$ participan en alguna coalición, de lo anterior se obtiene

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = \sum_{T \in \mathcal{M}} \left[\sum_{i \in T} p^i_{T \setminus i} - \sum_{j \notin \sigma(T)} p^j_T \right] v(T) = \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B)\, v(B), \qquad (4.2)$$

donde se ha considerado que dada una coalición $T \in \mathcal{M}$, un jugador $j \notin T$ es tal que $T \cup j \in \mathcal{M}$ si, y sólo si, $j \notin \sigma(T)$.

Tomando el juego δ_B, con $B \in \mathcal{B}$, la fórmula anterior queda así

$$\sum_{i \in B} p^i_{B \setminus i} = P(B),$$

ya que a la coalición B no se puede unir ningún jugador por ser una coalición básica. Repitiendo el razonamiento anterior con el juego de identidad δ_T, con $T \in \mathcal{M}$, $T \notin \mathcal{B}$, se obtiene

$$\sum_{i \in T} p^i_{T \setminus i} - \sum_{j \notin \sigma(T)} p^j_T = 0.$$

La otra implicación es trivial utilizando la expresión (4.2). □

Siguiendo la línea de Weber [59], a continuación se define una nueva familia de valores de grupo, fuertemente relacionada con el concepto de eficiencia, cuyos valores se llamarán *valores de orden aleatorio estáticos.* Se plantean valores que tomen un punto de vista común para todos los jugadores atendiendo al orden de incorporación al matroide. Evidentemente, al seguir tratando juegos estáticos, se considerarán sólo los ordenes posibles de las coaliciones básicas; es decir, las cadenas maximales del matroide. En primer lugar, se introducen las notaciones necesarias.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Si B es una coalición básica de $\mathcal{M}$, sea $\Omega_B(\mathcal{M})$ el conjunto de cadenas maximales del poset 2^B. Entonces, el conjunto de cadenas maximales del matroide $\mathcal{M}$ es $\Omega(\mathcal{M}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \Omega_B$. Nótese que cada jugador $i \in N$ interviene sólo en las cadenas del conjunto dado por $\Omega_i(\mathcal{M}) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_i} \Omega_B(\mathcal{M})$; además, para cada cadena maximal $\theta \in \Omega(\mathcal{M})$, existe una única coalición básica B_θ tal que $\theta \in \Omega_B(\mathcal{M})$. Dada $\theta \in \Omega_i(\mathcal{M})$, se denotará por $S_i(\theta)$ la coalición factible de predecesores de i en θ. Así, se tiene que $S_i(\theta) \in \mathcal{M}/i$.

Debido a la complejidad de las notaciones, éstas se simplificarán en esta sección suprimiendo $\mathcal{M}$ en las expresiones de las cadenas maximales.

Definición 4.17 *Se dice que un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ es un valor de orden aleatorio estático, si existe una distribución de probabilidad q sobre el conjunto de cadenas Ω del matroide, de forma que para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ se tiene*

$$\Psi_i(v) = \sum_{\theta\in\Omega_i} q(\theta)\left[v(S_i(\theta)\cup i) - v(S_i(\theta))\right], \textit{ para todo } i \in N.$$

Los siguientes resultados establecen la relación entre este concepto y los valores de grupo eficientes estáticos.

Teorema 4.18 *Sea Ψ un valor de orden aleatorio estático sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Entonces, Ψ es un valor básico estático definido mediante valores de grupo Ψ^B sobre $\Gamma(2^B)$ eficientes para cada B coalición básica de $\mathcal{M}$.*

Demostración: Como Ψ es un valor de orden aleatorio estático, existe una distribución de probabilidad q sobre el conjunto de cadenas Ω del matroide, tal que, para todo $i \in N$, se tiene

$$\Psi_i(v) = \sum_{\theta\in\Omega_i} q(\theta)\left[v(S_i(\theta)\cup i) - v(S_i(\theta))\right], \text{ para todo } v \in \Gamma(\mathcal{M}).$$

Luego, el valor satisface

$$\begin{aligned}\Psi_i(v) &= \sum_{B\in\mathcal{B}_i}\sum_{\theta\in\Omega_B} q(\theta)\left[v(S_i(\theta)\cup i) - v(S_i(\theta))\right]\\ &= \sum_{B\in\mathcal{B}_i}\sum_{\{S\subseteq B, i\notin S\}}\left(\sum_{\{\theta\in\Omega_B : S_i(\theta)=S\}} q(\theta)\right)\left[v(S\cup i) - v(S)\right],\end{aligned}$$

porque cada coalición contenida en $B\backslash i$ pertenece al matroide y es una coalición que precede al jugador i para alguna cadena.

Se considera la distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ definida como

$$P(B) = \sum_{\theta \in \Omega_B} q(\theta), \text{ para toda } B \in \mathcal{B}. \tag{4.3}$$

Nótese que,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} P(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{\theta \in \Omega_B} q(\theta) = \sum_{\theta \in \Omega} q(\theta) = 1,$$

porque cada cadena pertenece sólo a un conjunto Ω_B.

Para cada $B \in \mathcal{B}$, tal que $P(B) \neq 0$, se construye el valor de grupo $\Psi^B = \left(\Psi_i^B\right)_{i \in B}$ sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, de componentes

$$\Psi_i^B(v) = \sum_{\{S \subseteq B: i \notin S\}} p_{S,B}^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right], \text{ para cada } i \in B,$$

tomando

$$p_{S,B}^i = \frac{1}{P(B)} \sum_{\{\theta \in \Omega_B : S_i(\theta) = S\}} q(\theta).$$

Los valores Ψ_i^B así definidos son probabilísticos porque cada $p_{S,B}^i \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \sum_{\{S \subseteq B: i \notin S\}} p_{S,B}^i &= \frac{1}{P(B)} \sum_{\{S \subseteq B: i \notin S\}} \sum_{\{\theta \in \Omega_B : S_i(\theta) = S\}} q(\theta) \\ &= \frac{1}{P(B)} \sum_{\theta \in \Omega_B} q(\theta) = 1, \end{aligned}$$

debido a que $i \in B$.

Bastará probar que se satisfacen las igualdades

$$\sum_{i \in B} p_{B\backslash i,B}^i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i \in S} p_{S\backslash i,B}^i = \sum_{j \in B\backslash S} p_{S,B}^j, \text{ para toda } S \subset B,$$

para, aplicando el Teorema 4.16 al matroide 2^B, concluir que Ψ^B es eficiente. En efecto,

$$\sum_{i \in B} p_{B\backslash i,B}^i = \frac{1}{P(B)} \sum_{i \in B} \sum_{\{\theta \in \Omega_B : S_i(\theta) = B\backslash i\}} q(\theta) = \frac{1}{P(B)} \sum_{\theta \in \Omega_B} q(\theta) = 1.$$

Además, si $S \subset B$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} p^i_{S\backslash i,B} &= \frac{1}{P(B)}\sum_{i\in S}\ \sum_{\{\theta\in\Omega_B : S_i(\theta)=S\backslash i\}} q(\theta)\\ &= \frac{1}{P(B)}\sum_{j\in B\backslash S}\ \sum_{\{\theta\in\Omega_B : S_j(\theta)=S\}} q(\theta) = \sum_{j\in B\backslash S} p^j_{S,B},\end{aligned}$$

ya que si $i \in S$ y θ es una cadena de Ω_B tal que $S_i(\theta) = S\backslash i$, entonces dicha cadena es la formada por los conjuntos

$$\emptyset \subseteq \cdots \subseteq S\backslash i \subset S \subset S \cup j \subseteq \cdots \subseteq B.$$

Si existe $B \in \mathcal{B}$ con $P(B) = 0$, se tomará como valor de grupo Ψ^B sobre $\Gamma\left(2^B\right)$ cualquier valor eficiente cuyas componentes sean probabilísticas.

Por último, se verá que Ψ es un valor básico estático que se puede expresar en la forma (4.1), con la distribución P y los valores Ψ^B construidos anteriormente.

$$\begin{aligned}\Psi_i(v) &= \sum_{B\in\mathcal{B}_i}\ \sum_{\{S\subseteq B, i\notin S\}} \left(\sum_{\{\theta\in\Omega_B : S_i(\theta)=S\}} q(\theta)\right)[v(S\cup i) - v(S)]\\ &= \sum_{B\in\mathcal{B}_i} P(B) \sum_{\{S\subseteq B, i\notin S\}} \frac{1}{P(B)} \left(\sum_{\{\theta\in\Omega_B : S_i(\theta)=S\}} q(\theta)\right)[v(S\cup i) - v(S)]\\ &= \sum_{B\in\mathcal{B}_i} P(B)\,\Psi^B_i(v).\end{aligned}$$

Obsérvese que la conclusión anterior es válida incluso cuando $P(B) = 0$, ya que en dicho caso se tendría que todos los coeficientes $q(\theta)$, con $\theta \in \Omega_B$, son nulos. □

Utilizando el Corolario 4.12 y la Proposición 4.15, se pueden extraer unas consecuencias importantes del teorema anterior. Si Ψ es un valor de orden aleatorio estático sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, entonces:

a) Ψ verifica la propiedad del rango,

b) Ψ verifica el axioma de eficiencia estático.

Además, de la propia definición de valor que satisface la propiedad del rango, se tiene

c) Todas las componentes de Ψ verifican los axiomas de linealidad y de jugador nulo.

Nótese que la expresión (4.3), obtenida en la prueba anterior, proporciona el vector de influencias $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$ respecto del cual Ψ verifica la propiedad del rango

$$\lambda_i = \sum_{\theta \in \Omega_i} q(\theta), \text{ para todo } i \in N.$$

Además, las componentes de Ψ se pueden escriben como valores λ_i-ponderados, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Psi_i(v) &= \sum_{\theta \in \Omega_i} q(\theta) \left[v\left(S_i(\theta) \cup i\right) - v\left(S_i(\theta)\right) \right] \\ &= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \left[\sum_{\{\theta \in \Omega_i : S_i(\theta) = S\}} q(\theta) \right] \left[v(S \cup i) - v(S) \right], \end{aligned}$$

y, por tanto, para cada $S \in \mathcal{M}/i$, se tomará

$$p_S^i = \sum_{\{\theta \in \Omega_i : S_i(\theta) = S\}} q(\theta). \tag{4.4}$$

Teorema 4.19 *Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que satisface el axioma de eficiencia estático, y cuyas componentes Ψ_i verifican los axiomas de linealidad y jugador nulo. Entonces, Ψ es un valor de orden aleatorio estático.*

Demostración: Si cada Ψ_i verifica los axiomas de linealidad y jugador nulo, el Teorema 4.5 asegura que

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S) \right],$$

para cada $i \in N$ y $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Por otro lado, como Ψ satisface el axioma de eficiencia estático, existe $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ tal que

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B)\, v(B).$$

Considérese para $S \in \mathcal{M}$, el número

$$K(S) = \sum_{j \notin \sigma(S)} p_S^j,$$

y, además, para cada $i \in N$ y $S \in \mathcal{M}/i$, tómese

$$K(i,S) = \begin{cases} \frac{1}{K(S)} p_S^i & \text{si} \quad K(S) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad K(S) = 0. \end{cases}$$

Se define una distribución de probabilidad, q, sobre las cadenas maximales del matroide $\mathcal{M}$ de forma que, para $\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \Omega$, con $r = r(\mathcal{M})$ el rango del matroide, se tiene

$$q(\theta) = p_\emptyset^{i_1} K(i_2, \{i_1\}) \cdots K(i_r, \{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}\}).$$

Evidentemente $q(\theta) \geq 0$ y también

$$\sum_{\theta \in \Omega} q(\theta) = \sum_{i_1 \in N} \sum_{i_2 \notin \sigma(\{i_1\})} \cdots \sum_{i_r \notin \sigma(\{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}\})} q(i_1, i_2, \ldots, i_r)$$

$$= \sum_{i_1 \in N} p_\emptyset^{i_1} \sum_{i_2 \notin \sigma(\{i_1\})} K(i_2, \{i_1\}) \cdots \sum_{i_r \notin \sigma(\{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}\})} K(i_r, \{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}\})$$

donde la suma de la derecha, por definición de los coeficientes $K(i,S)$, es 1 y lo mismo le ocurre a cada una de las sucesivas sumas de derecha a izquierda, salvo la primera, luego

$$\sum_{\theta \in \Omega} q(\theta) = \sum_{i \in N} p_\emptyset^i.$$

Para el juego unidad $u \in \Gamma(\mathcal{M})$, dado por $u(S) = 1$ si $S \neq \emptyset$, se verifica

$$\Psi_i(u) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[u(S \cup i) - u(S)\right] = p_\emptyset^i,$$

y, por tanto,

$$\sum_{\theta\in\Omega} q(\theta) = \sum_{i\in N} \Psi_i(u).$$

Entonces, por el axioma de eficiencia

$$\sum_{\theta\in\Omega} q(\theta) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\, u(B) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B) = 1.$$

Con ello queda comprobado que q es una distribución de probabilidad sobre Ω.

Se probará que la distribución q define a Ψ como valor de orden aleatorio estático. Para un jugador $i \in N$ y una coalición $S \in \mathcal{M}/i$, con cardinal $|S| = s$, se tiene que la expresión

$$\sum_{\{\theta\in\Omega_i : S_i(\theta)=S\}} q(\theta),$$

se puede desarrollar de la siguiente forma

$$\frac{p_S^i}{K(S)} \sum_{i_s\in S} \frac{p_{S\backslash i_s}^{i_s}}{K(S\backslash i_s)} \sum_{i_{s-1}\in S\backslash i_s} \frac{p_{S\backslash\{i_s,i_{s-1}\}}^{i_s}}{K(S\backslash\{i_s,i_{s-1}\})} \cdots \sum_{i_1\in S\backslash\{i_2,\ldots,i_s\}} p_\emptyset^{i_1}$$
$$\sum_{i_{s+2}\notin\sigma(SUi)} \frac{p_{S\cup i}^{i_{s+2}}}{K(S\cup i)} \cdots \sum_{i_r\notin\sigma(S\cup\{i,i_{s+2},\ldots,i_{r-1}\})} \frac{p_{S\cup\{i,i_{s+2},\ldots,i_{r-1}\}}^{i_r}}{K(S\cup\{i,i_{s+2},\ldots,i_{r-1}\})}.$$

Pero, por el Teorema 4.16, al ser Ψ eficiente, se tiene

$$K(S) = \sum_{j\notin\sigma(S)} p_S^j = \sum_{i_s\in S} p_{S\backslash i_s}^{i_s},$$

y esto mismo ocurre con cada uno de los $s+1$ primeros coeficientes K del sumatorio anterior. Se puede ir simplificando entonces cada denominador con el numerador que viene a continuación. Los últimos $r-s-2$ sumandos (la parte de abajo de la expresión) son iguales a 1 por definición de los coeficientes K. Y así se obtiene

$$\sum_{\{\theta\in\Omega_i : S_i(\theta)=S\}} q(\theta) = p_S^i.$$

Con esto queda probado lo enunciado sin más que considerar la expresión (4.4). □

El siguiente teorema, consecuencia inmediata de los resultados anteriores, proporciona una caracterización de los valores de orden aleatorio estáticos.

Teorema 4.20 *Sea* $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ *un valor de grupo sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$. *Entonces,* Ψ *es un valor de orden aleatorio estático si, y sólo si, satisface el axioma de eficiencia estático, y sus componentes* Ψ_i *verifican los axiomas de linealidad y jugador nulo.*

En el próximo resultado se obtiene un método para construir valores de orden aleatorio estáticos.

Teorema 4.21 *Un valor de grupo* Ψ *sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *es de orden aleatorio estático si, y sólo si,* Ψ *es un valor básico estático definido mediante valores* Ψ^B *sobre* $\Gamma\left(2^B\right)$ *de orden aleatorio.*

Demostración: Sea Ψ un valor de orden aleatorio estático. Entonces, el Teorema 4.18, permite asegurar que es un valor básico definido por valores eficientes Ψ^B, para cada $B \in \mathcal{B}$, cuyas componentes son probabilísticas. De este modo, el Teorema 13 de Weber [59], asegura que los Ψ^B son valores de orden aleatorio.

Se demostrará ahora la implicación recíproca. Dada $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, supóngase que, para cada $i \in N$ y cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$,

$$\Psi_i(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B) \sum_{\theta \in \Omega_B} q_B(\theta)\left[v(S_i(\theta) \cup i) - v(S_i(\theta))\right],$$

con $\sum_{\theta \in \Omega_B} q_B(\theta) = 1$, $q_B(\theta) \geq 0$. Como los conjuntos de cadenas maximales son disjuntos en las áreas de influencia, entonces

$$\Psi_i(v) = \sum_{\theta \in \Omega_i} \left(P(B_\theta)\, q_{B_\theta}(\theta)\right)\left[v(S_i(\theta) \cup i) - v(S_i(\theta))\right].$$

Por tanto, considerando para cada $\theta \in \Omega$, el número real positivo

$$q(\theta) = P(B_\theta)\, q_{B_\theta}(\theta),$$

como se verifica

$$\sum_{\theta\in\Omega} q(\theta) = \sum_{\theta\in\Omega} P(B_\theta)\, q_{B_\theta}(\theta) = \sum_{B\in\mathcal{B}} \left[P(B) \sum_{\theta\in\Omega_B} q_B(\theta) \right] = 1,$$

queda probado que Ψ es un valor de orden aleatorio estático. □

4.3 Valores de Grupo Dinámicos y Estáticos Relativos

En el caso dinámico las estimaciones individuales realistas deberán suponer que es un suceso seguro el hecho de pertenecer el jugador a una de las coaliciones que se formarán al final. Por tanto, interesan en esta sección valores de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ tales que cada componente Ψ_i sea un valor probabilístico. Se dirá en lo sucesivo que estos son los valores de grupo que verifican la *propiedad de ponderación unitaria.*

Definición 4.22 *Un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ se dice que verifica la propiedad de ponderación unitaria, cuando cada una de sus componentes Ψ_i sea un valor probabilístico sobre $\Gamma(\mathcal{M})$.*

En lo sucesivo, un valor que verifique la definición anterior se dirá que verifica la *propiedad PU.*

A continuación se verá cómo construir valores de grupo con la propiedad PU, a partir de valores de grupo con la propiedad del rango.

Dado un vector $x = (x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$ y un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, se define el valor producto $x\Psi : \Gamma(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, como aquél de componentes tales que

$$(x\Psi)_i(v) = x_i \Psi_i(v),$$

para cada $i \in N$ y $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Se entiende esta operación como un cambio de escala individual. Además, si todas las componentes de un vector $x = (x_i)_{i \in N}$ son no nulas, se denotará $1/x$ el vector $(1/x_i)_{i \in N}$.

Proposición 4.23 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y r su juego rango. Para un valor de grupo Ψ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ se verifican las siguientes propiedades:*

(1) Si $\Lambda \in Core(r)$ y Ψ satisface la propiedad de ponderación unitaria, entonces $\Lambda\Psi$ cumple la propiedad del rango para el vector Λ.

(2) Si Ψ verifica la propiedad del rango para $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$, siendo $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in N$, entonces $\frac{1}{\Lambda}\Psi$ cumple la propiedad de ponderación unitaria.

Demostración: (1) Si Ψ verifica la propiedad PU y $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$, cada componente de $\Lambda\Psi$ es tal que, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, se tiene

$$(\Lambda\Psi)_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \lambda_i p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

con $p_S^i \geq 0$ y $\sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = 1$. Tomando $q_S^i = \lambda_i p_S^i$, se tiene que $q_S^i \geq 0$ y $\sum_{S \in \mathcal{M}/i} q_S^i = \lambda_i$. Luego para cada $i \in N$, $(\Lambda\Psi)_i$ es λ_i−ponderado y, por tanto, $\Lambda\Psi$ verifica la propiedad del rango para Λ.

De forma similar se comprueba el apartado (2). □

La proposición anterior junto con el Teorema 4.10 permite obtener una expresión de los valores Ψ que verifican la propiedad PU, sin más que utilizar el siguiente razonamiento. Dado un valor Ψ con la propiedad PU, y tomando cualquier vector $\Lambda \in Core(r)$ de componentes no nulas, al ser $\Lambda\Psi$ un valor con la propiedad del rango, se tendrá que $\Lambda\Psi$ se puede expresar como indica el Teorema 4.10. Haciendo $\frac{1}{\Lambda}(\Lambda\Psi)$ se llega finalmente a una expresión para Ψ. Obsérvese que la exigencia de que todas las coordenadas sean no nulas implica la necesidad de que los jugadores no se consideren autoexcluidos de las coaliciones finales.

Para definir el concepto de eficiencia para juegos dinámicos sobre un matroide $\mathcal{M}$, se considerará el conjunto de secuencias básicas $\Pi(\mathcal{M})$ y el de distribuciones de probabilidad sobre éstas, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Dada una secuencia básica $\pi \in \Pi(\mathcal{M})$, $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$, para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ se denotará por $v(\pi)$ el número dado por

$$v(\pi) = v(A_1) + \cdots + v(A_k).$$

Axioma de eficiencia dinámico. Existe $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ tal que, para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, el valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ verifica

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathcal{M})} D(\pi)\, v(\pi).$$

Se plantea ahora la cuestión de construir valores de grupo que verifiquen el axioma de eficiencia dinámico.

Teorema 4.24 *Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ cuyas componentes se expresan, para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, de la forma*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right].$$

Entonces, Ψ verifica el axioma de eficiencia dinámico si, y sólo si, existe una distribución de probabilidad D sobre el conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ de secuencias básicas, tal que satisfaga las siguientes ecuaciones recurrentes

$$\sum_{i \in S} p_{S \backslash i}^i - \sum_{j \notin \sigma(S)} p_S^j = \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (A_1, \ldots, S, \ldots, A_k)\}} D(\pi), \quad \forall S \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{B}.$$

$$\sum_{i \in B} p_{B \backslash i}^i = w^D(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Demostración: Para el valor de grupo Ψ dado, se verifica

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\Psi_i(v) &= \sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i\left[v(S\cup i)-v(S)\right]\\ &= \sum_{S\in\mathcal{M}}\left[\sum_{i\in S}p_{S\backslash i}^i-\sum_{j\notin\sigma(S)}p_S^j\right]v(S).\end{aligned}$$

Por tanto, Ψ verifica el axioma de eficiencia dinámico si, y sólo si, existe $D\in\mathcal{D}(\mathcal{M})$ tal que

$$\sum_{S\in\mathcal{M}}\left[\sum_{i\in S}p_{S\backslash i}^i-\sum_{j\notin\sigma(S)}p_S^j\right]v(S)=\sum_{\pi\in\Pi(\mathcal{M})}D(\pi)\,v(\pi),$$

para todo $v\in\Gamma(\mathcal{M})$. Así, se puede asegurar que Ψ verifica el axioma de eficiencia dinámico si, y sólo si, existe $D\in\mathcal{D}(\mathcal{M})$ tal que la igualdad anterior se satisface para todo juego de identidad δ_S, con $S\in\mathcal{M}$.

Esto es, es condición necesaria y suficiente que se verifique:

$$\sum_{i\in S}p_{S\backslash i}^i-\sum_{j\notin\sigma(S)}p_S^j=\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,S,\ldots,A_K)\}}D(\pi),$$

para todo $S\in\mathcal{M}\backslash\mathcal{B}$, y

$$\sum_{i\in B}p_{B\backslash i}^i=\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,B,\ldots,A_K)\}}D(\pi)=w^D(B),$$

para todo $B\in\mathcal{B}$. □

En el siguiente ejemplo se construirá un valor de grupo $\Psi=(\Psi_i)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, cuyas componentes se expresan en la forma

$$\Psi_i(v)=\frac{1}{w_i^P}\sum_{B\in\mathcal{B}_i(\mathcal{M})}P(B)\,\Psi_i^B(v_B),\text{ para todo } v\in\Gamma(\mathcal{M}), \tag{4.5}$$

donde $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ es una distribución de probabilidad tal que el vector de influencias w^P tiene todas sus componentes no nulas, y siendo cada valor $\Psi^B=\left(\Psi_i^B\right)_{i\in B}$ un valor eficiente sobre $\Gamma\left(2^B\right)$. Se trata de observar que este tipo de valores no cumplen, en general, el axioma de eficiencia dinámico.

Ejemplo 4.25 *Sea el matroide $\mathcal{M}_3(1\|3)$ y sobre él considérese la distribución equitativa $P(\{1,2\}) = P(\{2,3\}) = 1/2$, cuyo vector de influencias asociado es $w^P = (1/2, 1, 1/2)$. Sean $\Phi^{\{1,2\}}$ y $\Phi^{\{2,3\}}$ los valores de Shapley clásicos sobre cada área de cooperación del matroide dado; esto es,*

$$\Phi_1^{\{1,2\}}(v) = \frac{1}{2}v(\{1\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})],$$
$$\Phi_2^{\{1,2\}}(v) = \frac{1}{2}v(\{2\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})],$$
$$\Phi_2^{\{2,3\}}(v) = \frac{1}{2}v(\{2\}) + \frac{1}{2}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})],$$
$$\Phi_3^{\{2,3\}}(v) = \frac{1}{2}v(\{3\}) + \frac{1}{2}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})],$$

y tómese $\Phi_3^{\{1,2\}} = \Phi_1^{\{2,3\}} = 0$. Entonces, el valor de grupo Ψ', definido sobre el conjunto de juegos del matroide de oposición, dado por

$$\Psi' = \frac{1}{2}\left(\Phi^{\{1,2\}} + \Phi^{\{2,3\}}\right),$$

utilizando las extensiones de los valores de Shapley, verifica el axioma de eficiencia estático (Proposición 4.15). Además satisface la propiedad del rango (Teorema 4.10). Así, el valor $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ tal que

$$\Psi_1 = \frac{1}{w_1^P}\Psi_1' = 2\Psi_1',\ \Psi_2 = \frac{1}{w_2^P}\Psi_2' = \Psi_2',\ \Psi_3 = \frac{1}{w_3^P}\Psi_3' = 2\Psi_3',$$

es un valor de grupo que verifica la propiedad de ponderación unitaria por la Proposición 4.23.

Se verá que dicho valor no verifica el axioma de eficiencia dinámico. Sea el juego de identidad $\delta_{\{2\}}$, entonces

$$\Phi_1^{\{1,2\}}\left(\delta_{\{2\}}\right) = -\frac{1}{2}, \Phi_2^{\{1,2\}}\left(\delta_{\{2\}}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\Phi_3^{\{2,3\}}\left(\delta_{\{2\}}\right) = -\frac{1}{2}, \Phi_2^{\{2,3\}}\left(\delta_{\{2\}}\right) = \frac{1}{2},$$

con lo que

$$\Psi_1'\left(\delta_{\{2\}}\right) = \Psi_3'\left(\delta_{\{2\}}\right) = -\frac{1}{4}, \Psi_2'\left(\delta_{\{2\}}\right) = \frac{1}{2},$$

y así,

$$\Psi_1\left(\delta_{\{2\}}\right)=\Psi_3\left(\delta_{\{2\}}\right)=-\frac{1}{2},\Psi_2\left(\delta_{\{2\}}\right)=\frac{1}{2}.$$

lo que implica

$$\Psi_1\left(\delta_{\{2\}}\right)+\Psi_2\left(\delta_{\{2\}}\right)+\Psi_3\left(\delta_{\{2\}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, como las secuencias básicas del matroide son $\pi_1=(\{1,2\},\{3\})$ *y* $\pi_2=(\{2,3\},\{1\})$, *para toda distribución de probabilidad* $\mathcal{D}$ *sobre* $\Pi(\mathcal{M})$, *se tiene*

$$D(\pi_1)\,\delta_{\{2\}}(\pi_1)+D(\pi_2)\,\delta_{\{2\}}(\pi_2)=0,$$

pues

$$\delta_{\{2\}}(\pi_1)=\delta_{\{2\}}(\{1,2\})+\delta_{\{2\}}(\{3\})=0,$$
$$\delta_{\{2\}}(\pi_2)=\delta_{\{2\}}(\{2,3\})+\delta_{\{2\}}(\{1\})=0.$$

Luego Ψ *no verifica el axioma de eficiencia dinámico porque*

$$\Psi_1\left(\delta_{\{2\}}\right)+\Psi_2\left(\delta_{\{2\}}\right)+\Psi_3\left(\delta_{\{2\}}\right)\neq D(\pi_1)\,\delta_{\{2\}}(\pi_1)+D(\pi_2)\,\delta_{\{2\}}(\pi_2).$$

Aunque los valores de grupo construidos mediante la expresión (4.5) no interesan desde el punto de vista dinámico, sí tienen aplicación sobre juegos estáticos. En realidad, la expresión (4.5) representa un cambio de escala de un valor tal que, si los valores Ψ^B tomados sobre las áreas de cooperación son eficientes y con componentes probabilísticas, es un valor de orden aleatorio estático. Al ser el cambio de escala dividir entre la influencia, se entiende como un valor aplicado a juegos estáticos donde los jugadores miden sus posibilidades respecto de sus áreas de influencia y no respecto de todas las áreas de cooperación.

Definición 4.26 *Un valor de grupo* Ψ *sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *definido por la expresión (4.5), mediante una distribución de probabilidad* $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *tal que el vector de influencias* w^P *tiene todas sus componentes no nulas, y siendo cada valor* Ψ^B *sobre* $\Gamma\left(2^B\right)$ *con componentes probabilísticas, se denomina valor básico relativo.*

Evidentemente, un valor básico relativo verifica la propiedad PU. Además, es fácil comprobar que si en la definición de un valor de grupo Ψ básico relativo, se toma los valores Ψ^B eficientes, entonces se verifica el siguiente axioma.

<u>*Axioma de eficiencia relativo.*</u> Existe una distribución de probabilidad $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, con $w_i^P \neq 0$, tal que, para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, el valor $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ verifica

$$\sum_{i \in N} w_i^P \Psi_i(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P(B)\, v(B).$$

Proposición 4.27 *Un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ básico relativo con componentes Ψ_i eficientes verifica el axioma de eficiencia relativa.*

Nótese que el axioma de eficiencia relativa recuerda a la eficiencia planteada para los valores de pesos definidos inicialmente por Shapley [48] en juegos simples y planteados como sistemas ponderados por Kalai y Samet [29], Nowak y Radzik [42] entre otros. En este caso, los pesos son los de influencias de los distintos jugadores y el valor a repartir la media ponderada. También, para un valor que verifica el axioma de eficiencia relativa se consiguen ecuaciones similares a las obtenidas por Novak y Radzik en [42], como se muestra en el siguiente resultado. Se omite la demostración al ser inmediata a partir del Teorema 4.16.

Corolario 4.28 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y σ su operador clausura. Sea un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, cuyas componentes se pueden expresar en la forma*

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

para $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Entonces, Ψ verifica el axioma de eficiencia relativo si, y sólo si, existe un vector $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$ de $Core(r)$, de componentes no nulas, *tal que se satisfacen las siguientes ecuaciones recurrentes*

$$\sum_{i\in S}\lambda_i p^i_{S\setminus i}=\sum_{j\notin\sigma(S)}\lambda_j p^j_S,\quad \forall S\notin\mathcal{B},\ S\in\mathcal{M},$$
$$\sum_{i\in B}\lambda_i p^i_{B\setminus i}=1,\quad \forall B\in\mathcal{B}.$$

En la siguiente proposición se da otra formulación alternativa del axioma de eficiencia relativo.

Proposición 4.29 *Sea* $\Psi=(\Psi_i)_{i\in N}$ *un valor de grupo sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$. *Entonces,* Ψ *verifica el axioma de eficiencia relativo si, y sólo si, existe una distribución de probabilidad* $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *tal que, para todo* $v\in\Gamma(\mathcal{M})$, *se tiene*

$$\sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})}P(B)\sum_{i\in B}\Psi_i(v)=\sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})}P(B)\,v(B).$$

Demostración: Basta tener en cuenta que dado $w^P\in Core(r)$, se verifica

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}w_i^P\Psi_i(v) &= \sum_{i\in N}\left(\sum_{B\in\mathcal{B}_i(\mathcal{M})}P(B)\right)\Psi_i(v)\\ &= \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})}P(B)\sum_{i\in B}\Psi_i(v),\end{aligned}$$

dado que $w_i^P=\sum_{B\in\mathcal{B}_i(\mathcal{M})}P(B)$, para todo $i\in N$, por definición. □

A continuación se introduce un tipo de valor de grupo que, en determinadas condiciones, se verá que cumple la propiedad PU y el axioma de eficiencia dinámico. En la siguiente definición, para simplificar notaciones, el conjunto de menores de eliminación que no contengan sólo el vacío de un matroide $\mathcal{M}$ se denotará por $\mathbb{ME}(\mathcal{M})$.

Definición 4.30 *Se denomina valor básico dinámico, a todo valor de grupo* $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}=\left(\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}\right)_{i\in N}$ *sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$ *tal que, utilizando* *(a) Una colección* $\{\Psi^{\mathcal{M}'} : \Psi^{\mathcal{M}'}$ *definido sobre* $\Gamma(\mathcal{M}')\}_{\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})}$ *de valores de grupo estáticos,*

(b) Una colección $\{P_{\mathcal{M}'} : P_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')\}_{\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})}$ *de distribuciones de probabilidad,*

el valor $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v)$*, para cada* $i \in N$ *y cada* $v \in \Gamma(\mathcal{M})$*, se construye mediante la fórmula recurrente*

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \begin{cases} \Psi_i^{\mathcal{M}}(v), & \textit{si } i \textit{ es istmo en } \mathcal{M} \\ \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum\limits_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B) \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M} \backslash B}(v_{\mathcal{M} \backslash B}), & \textit{en otro caso,} \end{cases} \tag{4.6}$$

aplicada a cada $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}'}(v)$*, donde* $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$*. En tales condiciones, se utilizará la notación* $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}; \{\Psi^{\mathcal{M}'}\}, \{P_{\mathcal{M}'}\}\right)$.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se aplica la definición de valor básico dinámico sobre un matroide concreto, y se justifica dicha definición.

Ejemplo 4.31 *Sea el matroide* $\mathcal{M}$ *sobre* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *definido por el siguiente gráfico,*

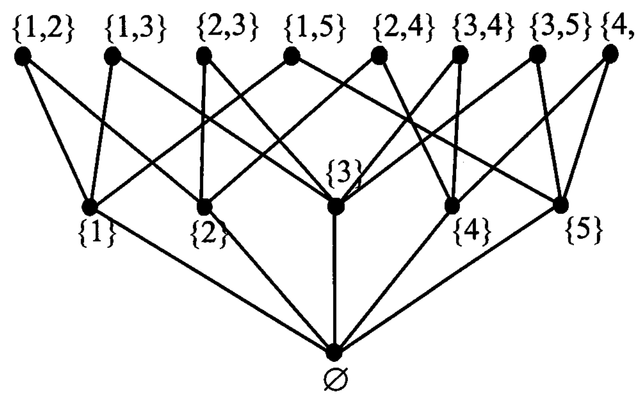

Figura 4.1

Se suponen dados valores de grupo $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *sobre* $\Gamma(\mathcal{M}')$ *y distribuciones de probabilidad* $P_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$ *para cada* $\mathcal{M}'$ *menor de eliminación de* $\mathcal{M}$, *considerando, en este ejemplo, los mismos valores y probabilidades para todos los menores de eliminación que tienen las mismas coaliciones. Se describirá el cálculo de la componente correspondiente al jugador* 1 *del valor básico sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$, $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}} = \left(\overline{\Psi}_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \overline{\Psi}_5^{\mathcal{M}}\right)$, *definido por los anteriores valores y probabilidades. Para un juego* $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, *el cálculo de* $\overline{\Psi}_1^{\mathcal{M}}(v)$ *se realiza mediante la recurrencia a los matroides del siguiente esquema, usando en cada uno de ellos el valor* $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *correspondiente.*

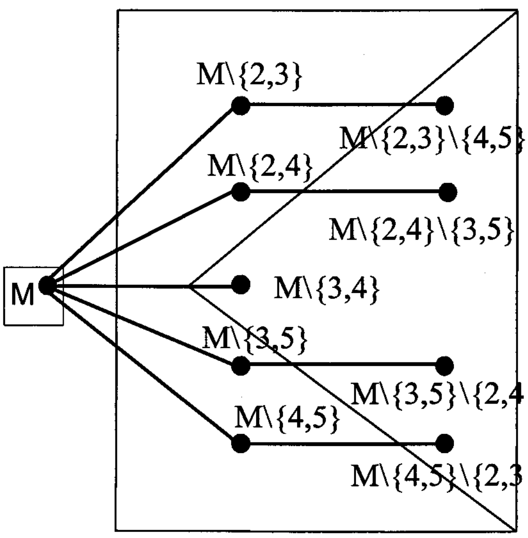

Figura 4.2

Para los matroides $\mathcal{M}'$ *de la última eliminación, descritos en la Figura 4.3, el jugador* 1 *es istmo, y por tanto* $\overline{\Psi}_1^{\mathcal{M}'}(v_{\mathcal{M}'}) = \Psi_1^{\mathcal{M}'}(v_{\mathcal{M}'})$. *Los valores para el juego restringido sobre los matroides de la primera eliminación, Figura 4.4, se calcularán a raíz de los anteriores. Por último, estos valores se utilizan para hallar* $\overline{\Psi}_1^{\mathcal{M}}(v)$.

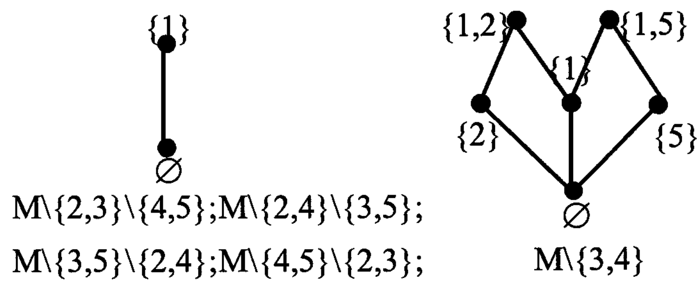

Figura 4.3

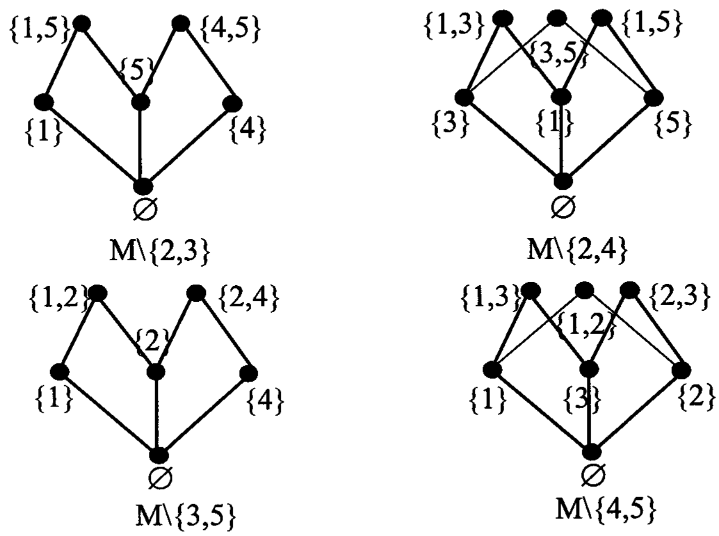

Figura 4.4

Así se obtiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_1(v) &= \Psi_1^{\mathcal{M}}(v_{\mathcal{M}}) \\
&\quad +P_{\mathcal{M}}(\{2,3\})\left[\Psi_1^{\mathcal{M}_3}(v_{\mathcal{M}_3})+P_{\mathcal{M}_3}(\{4,5\})\Psi_1^{\mathcal{M}_1}(v_{\mathcal{M}_1})\right] \\
&\quad +P_{\mathcal{M}}(\{2,4\})\left[\Psi_1^{\mathcal{M}_4}(v_{\mathcal{M}_4})+P_{\mathcal{M}_4}(\{3,5\})\Psi_1^{\mathcal{M}_1}(v_{\mathcal{M}_1})\right] \\
&\quad +P_{\mathcal{M}}(\{3,4\})\Psi_1^{\mathcal{M}_2}(v_{\mathcal{M}_2}) \\
&\quad +P_{\mathcal{M}}(\{3,5\})\left[\Psi_1^{\mathcal{M}_5}(v_{\mathcal{M}_5})+P_{\mathcal{M}_5}(\{2,4\})\Psi_1^{\mathcal{M}_1}(v_{\mathcal{M}_1})\right] \\
&\quad +P_{\mathcal{M}}(\{4,5\})\left[\Psi_1^{\mathcal{M}_6}(v_{\mathcal{M}_6})+P_{\mathcal{M}_6}(\{2,3\})\Psi_1^{\mathcal{M}_1}(v_{\mathcal{M}_1})\right].
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\setminus\{2,3\}\setminus\{4,5\} = \mathcal{M}\setminus\{2,4\}\setminus\{3,5\}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{M}\backslash\{3,5\}\backslash\{2,4\} = \mathcal{M}\backslash\{4,5\}\backslash\{2,3\}\,, \\ \mathcal{M}_2 &= \mathcal{M}\backslash\{3,4\}\,, \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}\backslash\{2,3\}\,, \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}\backslash\{2,4\}\,, \\ \mathcal{M}_5 &= \mathcal{M}\backslash\{3,5\}\,, \mathcal{M}_6 = \mathcal{M}\backslash\{4,5\}\,. \end{aligned}$$

Se estudiará ahora el buen comportamiento de los valores de grupo básicos dinámicos. Recuérdese que la función rango de un menor de eliminación de $\mathcal{M}$ es la de $\mathcal{M}$ restringida al álgebra de Boole definida por los jugadores que participan en dicho menor, como indica la Proposición 1.19. Por ello se denotará siempre de la misma forma tanto la función rango de $\mathcal{M}$ como la de cualquiera de sus menores de eliminación.

Teorema 4.32 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide y r su juego rango. Sea un valor básico dinámico $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}; \{\Psi^{\mathcal{M}'}\}, \{P_{\mathcal{M}'}\}\right)$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Si se verifica que, para cada $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$, existe un vector $\Lambda^{\mathcal{M}'} \in Core(r, \mathcal{M}')$ tal que:*

(1) El valor de grupo $\Psi^{\mathcal{M}'}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M}')$ satisface la propiedad del rango para $\Lambda^{\mathcal{M}'}$,

(2) La distribución de probabilidad $P_{\mathcal{M}'}$ cumple que $w^{P_{\mathcal{M}'}} = \Lambda^{\mathcal{M}'}$,

entonces, $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ verifica la propiedad PU.

Demostración: Suponiendo que se verifican las condiciones (1) y (2), se verá que las componentes $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$ de $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ son valores probabilísticos sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Para ello, debido a la construcción recurrente de los valores $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$, se realizarán las dos pruebas siguientes.

a) Cuando i es un jugador istmo de $\mathcal{M}$, se verifica que $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$ es un valor probabilístico sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. En efecto, en este caso se define $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}} = \Psi_i^{\mathcal{M}}$. Entonces, siendo $\Lambda^{\mathcal{M}} = \left(\lambda_i^{\mathcal{M}}\right)_{i\in N}$, se verifica por (1) que $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$ es un valor $\lambda_i^{\mathcal{M}}$-ponderado. Pero además, el hecho de ser i istmo asegura que todo vector de $Core(r, \mathcal{M})$ tiene su componente i-ésima igual a uno.

b) Cuando i no es un jugador istmo en $\mathcal{M}$; si los valores $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}$, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$, son probabilísticos sobre $\Gamma(\mathcal{M}\backslash B)$, entonces también lo es $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$.

En estas hipótesis, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, se verifica

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right) = \sum_{S \in \mathcal{M}\backslash B/i} p_{S,B}^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

con $p_{S,B}^i \geq 0$ y $\sum_{S \in \mathcal{M}\backslash B/i} p_{S,B}^i = 1$. Además, como la componente $\Psi_i^{\mathcal{M}}$ es $\lambda_i^{\mathcal{M}}$-ponderada por verificarse (1), se tiene

$$\Psi_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

con $p_S^i \geq 0$ y $\sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i = \lambda_i^{\mathcal{M}}$. Luego,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_i(v) &= \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\, \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right] \\ &\quad + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} \sum_{S \in \mathcal{M}\backslash B/i} P_{\mathcal{M}}(B)\, p_{S,B}^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right] \\ &= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \left(p_S^i + \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i): S \in \mathcal{M}\backslash B/i\}} P_{\mathcal{M}}(B)\, p_{S,B}^i \right) \left[v(S \cup i) - v(S)\right]. \end{aligned}$$

Ahora, definiendo

$$q_S^i = p_S^i + \sum_{\{B \in \mathcal{M}\backslash i: S \in \mathcal{M}\backslash B/i\}} P_{\mathcal{M}}(B)\, p_{S,B}^i,$$

para toda $S \in \mathcal{M}/i$, se terminará comprobando que dichos números no negativos suman uno.

$$\sum_{S \in \mathcal{M}/i} q_S^i = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \left(p_S^i + \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i): S \in \mathcal{M}\backslash B/i\}} P_{\mathcal{M}}(B)\, p_{S,B}^i \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{S\in\mathcal{M}/i} p_S^i + \sum_{S\in\mathcal{M}/i}\ \sum_{\{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i):S\in\mathcal{M}\backslash B/i\}} P_{\mathcal{M}}(B)\, p_{S,B}^i \\
&= \lambda_i^{\mathcal{M}} + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\left(\sum_{S\in\mathcal{M}\backslash B/i} p_{S,B}^i\right) \\
&= \lambda_i^{\mathcal{M}} + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B) = 1,
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad sigue de (2), ya que $w_i^{P_{\mathcal{M}}} = \lambda_i^{\mathcal{M}}$ y entonces

$$
\sum_{B\in\mathcal{M}\backslash i} P_{\mathcal{M}}(B) = 1 - \sum_{B\in\mathcal{M}/i} P_{\mathcal{M}}(B) = 1 - \lambda_i^{\mathcal{M}}.
$$

Finalmente observar que, debido a que todo el razonamiento anterior se puede aplicar a cada menor de eliminación $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$ y que en la recurrencia sólo se pueden presentar casos a) y b) para $\mathcal{M}'$, se concluye que las componentes $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}$ de $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ son valores probabilísticos sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. □

Considérese, un valor básico dinámico $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}; \left\{\Psi^{\mathcal{M}'}\right\}, \left\{P_{\mathcal{M}'}\right\}\right)$, donde los valores $\Psi^{\mathcal{M}'}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M}')$ son básicos estáticos; expresados cada uno de la forma (4.3) mediante valores $\Psi^B = \left(\Psi_i^B\right)_{i\in B}$ sobre $\Gamma\left(2^B\right)$, para toda coalición $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}')$, y las mismas probabilidades $P_{\mathcal{M}'}$. Entonces, para un jugador i istmo se obtiene, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$

$$
\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})} P^{\mathcal{M}}(B)\,\Psi_i^B(v_B),
$$

y en otro caso,

$$
\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}/i)} P_{\mathcal{M}}(B\cup i)\,\Psi_i^{B\cup i}(v_{B\cup i}) + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\,\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right).
$$

La fórmula del cálculo de $\overline{\Psi}$ se interpreta en dos partes, la contracción y la eliminación de cada jugador.

El siguiente resultado estudia la transmisión del axioma de eficiencia para los valores básicos en el sentido dinámico.

Teorema 4.33 *Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Sea $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}; \left\{\Psi^{\mathcal{M}'}\right\}, \{P_{\mathcal{M}'}\}\right)$ un valor básico dinámico sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ verificando que, para cada $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$, el valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M}')$ satisface el axioma de eficiencia estático para la distribución de probabilidad $P_{\mathcal{M}'}$. Entonces, $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ cumple el axioma de eficiencia dinámico para la distribución $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ definida, para cada secuencia básica $\pi \in \Pi(\mathcal{M})$, $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$, por*

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=2}^{k} P_{\mathcal{M}\setminus A_1 \setminus \ldots \setminus A_{m-1}}(A_m)$$

Demostración: Se demostrará por inducción en el número de jugadores del matroide.

Si sólo hubiese un jugador en el matroide $\mathcal{M}$, éste sería istmo y $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ coincidiría con $\Psi^{\mathcal{M}}$. En este caso el resultado es trivialmente cierto.

Supóngase que el teorema es cierto para matroides con menos de n jugadores. Considérese ahora un matroide $\mathcal{M}$ con n jugadores. Usando (4.6), y denotando por N^* el subconjunto de jugadores de N que no son istmos en $\mathcal{M}$, se obtiene, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) &= \sum_{i \in N} \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum_{i \in N^*} \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\setminus i)} P_{\mathcal{M}}(B)\, \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\setminus B}(v_{\mathcal{M}\setminus B}) \\
&= \sum_{i \in N} \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} \sum_{i \in N\setminus B} P_{\mathcal{M}}(B)\, \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\setminus B}(v_{\mathcal{M}\setminus B}) \\
&= \sum_{i \in N} \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) \sum_{i \in N\setminus B} \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\setminus B}(v_{\mathcal{M}\setminus B}).
\end{aligned}$$

Ahora bien, como el valor $\Psi^{\mathcal{M}}$ verifica el axioma de eficiencia estático para $P_{\mathcal{M}}$ y, por hipótesis de inducción, los $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}\setminus B}$ son eficientes dinámicos para $D_{\mathcal{M}\setminus B}$, entonces

$$\sum_{i \in N} \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B)\, v(B)$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}): \pi = (B, A_2, \ldots, A_k)\}} D_{\mathcal{M}\setminus B}(A_2, \ldots, A_k)\,[v(\pi) - v(B)] \\
= &\sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B)\, v(B) + \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}): \pi = (A_1, \ldots, A_k)\}} D(\pi)\,[v(\pi) - v(A_1)],
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha utilizado la expresión (3.4). Además, por (3.5), se cumple

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B)\, v(B) &= \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})}\left(\sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(B,A_2,\ldots,A_k)\}} D(\pi)\right) v(B)\\ &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,A_k)\}} D(\pi)\, v(A_1)\,,\end{aligned}$$

ya que la suma en $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ de todas las secuencias que parten de cada coalición básica es el conjunto de todas las secuencias básicas. Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\overline{\Psi}_i(v,\mathcal{M}) &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,A_k)\}} D(\pi)\, v(A_1)\\ &\quad+ \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,A_k)\}} D(\pi)\left[v(\pi)-v(A_1)\right]\\ &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(A_1,\ldots,A_k)\}} D(\pi)\, v(\pi)\,.\end{aligned}$$

Así se ha probado que $\overline{\Psi}$ es eficiente dinámico para la probabilidad D. □

Se pueden definir valores de orden aleatorio también en el contexto de juegos dinámicos.

Sea $\pi = (A_1,\ldots,A_k)$ una secuencia básica del matroide $\mathcal{M}$. Se denomina *enlace de cadenas* asociado a la secuencia básica π, a toda sucesión $\varepsilon = (\theta_1;\ldots;\theta_k)$ tal que θ_m, $m = 1,\ldots,k$, es una cadena maximal de A_m. La familia de todos los enlaces de cadenas de un matroide se denotará por $E\Omega(\mathcal{M})$. Se debe observar que, para cada $\varepsilon = (\theta_1;\ldots;\theta_k) \in E\Omega(\mathcal{M})$ enlace de cadenas, existe entonces una única secuencia básica $\pi = (A_1,\ldots,A_k)$ verificando que $\theta_1 \in \Omega_{A_1}(\mathcal{M})$ y

$$\theta_m \in \Omega_{A_m}(\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\ldots\backslash A_{m-1}) \text{ para } m = 2,\ldots,k\,.$$

Dicha secuencia básica π se llamará *secuencia asociada* a ε.

Puesto que las secuencias básicas de un matroide, en general, no tienen todas la misma longitud, entonces los enlaces de cadenas tampoco están compuestos del mismo número de cadenas.

Ejemplo 4.34 *Dado el matroide $\mathcal{M}$ de la Figura 3.3 del Ejemplo 3.2, cuyas secuencias básicas están construidas en el Ejemplo 3.7, los enlaces de cadena asociados a las secuencias π_1 y π_2 son los siguientes.*

Para $\pi_1 = (\{1,2,3\}, \{4,5\})$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^1 &= (1,2,3;4,5), \ \varepsilon_2^1 = (1,3,2;4,5), \ \varepsilon_3^1 = (2,1,3;4,5), \\
\varepsilon_4^1 &= (2,3,1;4,5), \ \varepsilon_5^1 = (3,1,2;4,5), \ \varepsilon_6^1 = (3,2,1;4,5), \\
\varepsilon_7^1 &= (1,2,3;5,4), \ \varepsilon_8^1 = (1,3,2;5,4), \ \varepsilon_9^1 = (2,1,3;5,4), \\
\varepsilon_{10}^1 &= (2,3,1;5,4), \ \varepsilon_{11}^1 = (3,1,2;5,4), \ \varepsilon_{12}^1 = (3,2,1;5,4).
\end{aligned}$$

Para $\pi_2 = (\{1,2,4\}, \{3\}, \{5\})$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= (1,2,4;3;5), \ \varepsilon_2^2 = (1,4,2;3;5), \ \varepsilon_3^2 = (2,1,4;3;5), \\
\varepsilon_4^2 &= (2,4,1;3;5), \ \varepsilon_5^2 = (4,1,2;3;5), \ \varepsilon_6^2 = (4,2,1;3;5).
\end{aligned}$$

Con esto se pone de manifiesto que son necesarias 2 *cadenas para formar los enlaces asociados a* π_1, *mientras que para los de* π_2 *se utilizan* 3.

Sea $i \in N$ y $\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})$, se escribirá como $\theta^i \langle\varepsilon\rangle$ la única cadena de ε donde interviene i. La coalición $S_i(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ es la formada por los predecesores de i en la cadena $\theta^i \langle\varepsilon\rangle$.

Definición 4.35 *Un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ se dice que es un valor de orden aleatorio dinámico, si existe una distribución de probabilidad Q sobre $E\Omega(\mathcal{M})$ de forma que, para todo $i \in N$ y para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$,*

$$\Psi_i(v) = \sum_{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon)\left[v(S_i(\varepsilon)\cup i) - v(S_i(\varepsilon))\right].$$

Teorema 4.36 *Sea $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ un valor de orden aleatorio dinámico sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Entonces $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ es un valor básico dinámico, $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}; \{\Psi^{\mathcal{M}'}\}, \{P_{\mathcal{M}'}\}\right)$, verificando que, para cada $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$:*

(1) El valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *es de orden aleatorio estático.*

(2) El valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *satisface el axioma de eficiencia estático para la distribución de probabilidad* $P_{\mathcal{M}'}$.

Demostración: Sea $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}} = \left(\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}\right)_{i \in N}$ un valor de orden aleatorio dinámico sobre $\Gamma(\mathcal{M})$.

Se trata de encontrar, para cada $\mathcal{M}' \in \mathbb{MB}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$, una distribución de probabilidad $P_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$ y un valor $\Psi^{\mathcal{M}'} = \left(\Psi_i^{\mathcal{M}'}\right)_{i \in \mathcal{M}'}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M}')$ que verifique (1) y (2), para los cuales $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ se puede construir utilizando (4.6).

Al ser $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ un valor de orden aleatorio en el sentido dinámico, existe una distribución de probabilidad Q sobre $E\Omega(\mathcal{M})$ tal que, para todo $i \in N$ y $v \in \Gamma(\mathcal{M})$,

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon)\left[v\left(S_i(\varepsilon) \cup i\right) - v\left(S_i(\varepsilon)\right)\right]. \tag{4.7}$$

Se define el valor de grupo $\Psi^{\mathcal{M}} = \left(\Psi_i^{\mathcal{M}}\right)_{i \in N}$, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, como

$$\Psi_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{\theta \in \Omega_i(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta)\left[v\left(S_i(\theta) \cup i\right) - v\left(S_i(\theta)\right)\right]$$

donde $q^{\mathcal{M}}(\theta)$ son los números no negativos,

$$q^{\mathcal{M}}(\theta) = \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}) : \theta_1 = \theta\}} Q(\varepsilon).$$

Mediante la siguiente comprobación se demuestra que $q^{\mathcal{M}}$ es una distribución de probabilidad sobre $\Omega(\mathcal{M})$:

$$\sum_{\theta \in \Omega(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta) = \sum_{\theta \in \Omega(\mathcal{M})} \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}) : \theta_1 = \theta\}} Q(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon) = 1.$$

Por tanto $\Psi^{\mathcal{M}}$ es un valor de orden aleatorio estático.

Por otro lado, sea la función no negativa $P_{\mathcal{M}}$ sobre $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ definida, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, en la forma

$$P_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}) : \theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon).$$

Se satisface que

$$\sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M})} \sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\in\Omega_B(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon) = 1,$$

por lo cual $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Como $\Psi^{\mathcal{M}}$ es un valor de orden aleatorio estático, el Teorema 4.18 asegura que verifica el axioma de eficiencia estático. Por la expresión (4.3) obtenida en ese mismo teorema y la Proposición 4.16, se garantiza que $\Psi^{\mathcal{M}}$ es eficiente para la probabilidad $P_{\mathcal{M}}$, observando que, para $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, la definición de $q^{\mathcal{M}}$ implica

$$P_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{\theta\in\Omega_B} q^{\mathcal{M}}(\theta).$$

Considérense ahora dos casos.

(a) Sea j istmo en $\mathcal{M}$. En este caso, para todo $\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})$, la cadena de participación del jugador j en ε es siempre θ_1, $\theta^j\langle\varepsilon\rangle = \theta_1$. Además, como cualquier cadena θ de $\Omega(\mathcal{M})$ contiene a j, dicha cadena θ puede ser utilizada como primer elemento de un enlace de cadenas. Se sigue de (4.7) que

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_j^{\mathcal{M}}(v) &= \sum_{\theta\in\Omega(\mathcal{M})}\left(\sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1=\theta\}} Q(\varepsilon)\right)\left[v\left(S_j(\theta)\cup j\right) - v\left(S_j(\theta)\right)\right] \\ &= \Psi_j^{\mathcal{M}}(v).\end{aligned}$$

(b) Sea j no istmo en $\mathcal{M}$. Al separar $E\Omega(\mathcal{M})$ en dos subconjuntos disjuntos, los enlaces donde j participa en la primera cadena y aquéllos donde no ocurre esto, se obtiene de (4.7) que

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_j^{\mathcal{M}}(v) &= \sum_{\theta\in\Omega_j(\mathcal{M})}\left(\sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1=\theta\}} Q(\varepsilon)\right)\left[v\left(S_j(\theta)\cup j\right) - v\left(S_j(\theta)\right)\right] \\ &\quad + \sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\notin\Omega_j(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon)\left[v\left(S_j(\varepsilon)\cup j\right) - v\left(S_j(\varepsilon)\right)\right] \\ &= \Psi_j^{\mathcal{M}}(v) \\ &\quad + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash j)} \sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\in\Omega_B(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon)\left[v\left(S_j(\varepsilon)\cup j\right) - v\left(S_j(\varepsilon)\right)\right].\end{aligned}$$

Para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash j)$ con $P_{\mathcal{M}}(B) \neq 0$ se denota, para cada $\varepsilon' \in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)$,

$$Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon') = \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\varepsilon=(\theta_1,\varepsilon'),\theta_1\in\Omega_B(\mathcal{M})\}} \frac{Q(\varepsilon)}{P_{\mathcal{M}}(B)}$$

donde si $\varepsilon' = (\theta_2;...;\theta_k)$ entonces $\varepsilon = (\theta_1, \varepsilon') = (\theta_1;\theta_2;...;\theta_k)$. La aplicación $Q^{\mathcal{M}\backslash B}$ es una distribución de probabilidad sobre $E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)$ puesto que

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon'\in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)} Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon') &= \sum_{\varepsilon'\in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)} \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\varepsilon=(\theta_1,\varepsilon'),\theta_1\in\Omega_B(\mathcal{M})\}} \frac{Q(\varepsilon)}{P_{\mathcal{M}}(B)}, \\ &= \frac{1}{P_{\mathcal{M}}(B)} \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\in\Omega_B(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon) = 1,\end{aligned}$$

sin más que observar la definición de $P_{\mathcal{M}}(B)$. En caso de que $P_{\mathcal{M}}(B) = 0$ se entenderá que $Q^{\mathcal{M}\backslash B}$ representa una distribución de probabilidad sobre $E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)$ cualquiera.

Sin más que multiplicar y dividir por $P_{\mathcal{M}}(B)$, cuando sea posible, la expresión (4.8) se escribe así

$$\begin{aligned}&\overline{\Psi}_j^{\mathcal{M}}(v) = \Psi_j^{\mathcal{M}}(v) \\ &+ \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash j)} P_{\mathcal{M}}(B) \sum_{\varepsilon'\in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)} Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon')\left[v\left(S_j(\varepsilon')\cup j\right) - v\left(S_j(\varepsilon')\right)\right],\end{aligned}$$

donde se ha usado que todo $\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})$ se puede pensar como $\varepsilon = (\theta_1, \varepsilon')$ con $\varepsilon' \in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)$, y que, al tenerse $j \in \mathcal{M}\backslash B$, se verifica la igualdad $S_j(\varepsilon) = S_j(\varepsilon')$.

Dado $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ se construye el valor de orden aleatorio dinámico $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}\backslash B} = \left(\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}\right)_{i\in\mathcal{M}\backslash B}$ sobre cada $\widetilde{v} \in \Gamma(\mathcal{M}\backslash B)$ como

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}(\widetilde{v}) = \sum_{\varepsilon'\in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)} Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon')\left[\widetilde{v}\left(S_i(\varepsilon')\cup i\right) - \widetilde{v}\left(S_i(\varepsilon')\right)\right].$$

Al valor $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}\backslash B}$, por ser de orden aleatorio, se le puede aplicar el método usado en esta prueba, obteniéndose un valor $\Psi^{\mathcal{M}\backslash B}$ y una probabilidad $P_{\mathcal{M}\backslash B}$, para el menor $\mathcal{M}\backslash B$, con las condiciones requeridas. Así, con este método, se pueden construir los valores $\Psi^{\mathcal{M}'}$ y las probabilidades $P_{\mathcal{M}'}$ verificando las propiedades (1) y (2), para todo $\mathcal{M}'$ menor de eliminación de $\mathcal{M}$.

Finalmente, por construcción, el valor $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ es un valor básico dinámico correspondiente a la colección de valores $\{\Psi^{\mathcal{M}'}\}$ y las probabilidades $\{P_{\mathcal{M}'}\}$. □

El siguiente resultado prueba que el recíproco del anterior teorema también es cierto.

Teorema 4.37 *Sea* $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}, \{\Psi^{\mathcal{M}'}\}, \{P_{\mathcal{M}'}\}\right)$ *un valor de grupo básico dinámico sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$*, verificando que, para cada* $\mathcal{M}' \in \mathbb{ME}(\mathcal{M})$*:*

(1) El valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *es de orden aleatorio estático.*

(2) El valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ *satisface el axioma de eficiencia estático para la distribución de probabilidad* $P_{\mathcal{M}'}$*.*

Entonces $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ *es un valor de orden aleatorio dinámico sobre* $\Gamma(\mathcal{M})$*.*

Demostración: Hay que construir, para cada $\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})$, un número no negativo $Q(\varepsilon)$ tal que, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$y para $i \in N$, se verifique

$$\overline{\Psi}_i(v) = \sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon)\left[v(S_i(\varepsilon) \cup i) - v(S_i(\varepsilon))\right],$$

y $\sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon) = 1$.

Se denota por $q^{\mathcal{M}'}$ la distribución de probabilidad sobre $\Omega(\mathcal{M}')$ que define a $\Psi^{\mathcal{M}'}$ como valor de orden aleatorio en el sentido estático, para $\mathcal{M}' \in \mathbb{MB}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$. Sea $\varepsilon = (\theta_1; \ldots; \theta_k)$ un elemento de $E\Omega(\mathcal{M})$, se define

$$Q(\varepsilon) = q^{\mathcal{M}}(\theta_1) \prod_{m=2}^{k} q^{\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{m-1}}}(\theta_m) \geq 0,$$

que satisface

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon) &= \sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\varepsilon=(\theta_1;\ldots;\theta_k)\}} q^{\mathcal{M}}(\theta_1)\prod_{m=2}^{k} q^{\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{m-1}}}(\theta_m)\\
&= \sum_{\theta_1\in\Omega(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta_1)\sum_{\theta_2\in\Omega\left(\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\right)} q^{\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}}(\theta_2)\cdots\\
&\quad\cdots\sum_{\theta_k\in\Omega\left(\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{k-1}}\right)} q^{\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{k-1}}}(\theta_k)\\
&= 1, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

puesto que para una elección de $\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}$ el último sumando es 1, ya que $q^{\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{k-1}}}$ es una probabilidad sobre $\Omega\left(\mathcal{M}\backslash B_{\theta_1}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{k-1}}\right)$. Además, observando que el último sumando es 1, se comprueba que el anterior también vale 1, y así sucesivamente se llega a que la suma total es 1. Luego Q es un distribución de probabilidad sobre $E\Omega(\mathcal{M})$.

Para probar que $\overline{\Psi}$ es un de orden aleatorio se utilizará el mismo razonamiento seguido en el Teorema 4.32, comenzando por el segundo caso.

Sea i no istmo en $\mathcal{M}$. Se supone que, para todo $B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$, el valor $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}(\widetilde{v})$ se puede escribir como

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}(\widetilde{v}) = \sum_{\varepsilon'\in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)} Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon')\left[\widetilde{v}(S_i(\varepsilon')\cup i)-\widetilde{v}(S_i(\varepsilon'))\right],$$

con $Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon') = q^{\mathcal{M}\backslash B}(\theta_2)\prod_{m=3}^{k} q^{\mathcal{M}\backslash B\backslash B_{\theta_2}\backslash\cdots\backslash B_{\theta_{m-1}}}(\theta_m)$ si $\varepsilon'=(\theta_2;\ldots;\theta_k)$, y $\widetilde{v}\in\Gamma(\mathcal{M}\backslash B)$.

Entonces ocurre que, para todo $v\in\Gamma(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon)\left[v(S_i(\varepsilon)\cup i)-v(S_i(\varepsilon))\right]\\
&= \sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\in\Omega_i(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon)\left[v(S_i(\varepsilon)\cup i)-v(S_i(\varepsilon))\right]\\
&\quad+\sum_{\{\varepsilon\in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1\notin\Omega_i(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon)\left[v(S_i(\varepsilon)\cup i)-v(S_i(\varepsilon))\right]
\end{aligned}$$

$$= (a_1) + (a_2).$$

En el sumando (a_1) se verifica que $S_i(\varepsilon) = S_i(\theta_1)$ y por tanto

$$\begin{aligned}
(a_1) &= \sum_{\theta \in \Omega_i(\mathcal{M})} \left(\sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1=\theta\}} Q(\varepsilon) \right) [v(S_i(\theta) \cup i) - v(S_i(\theta))] \\
&= \sum_{\theta \in \Omega_i(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta) [v(S_i(\theta) \cup i) - v(S_i(\theta))] \\
&= \Psi_i^{\mathcal{M}}(v),
\end{aligned}$$

donde la igualdad $\sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1=\theta\}} Q(\varepsilon) = q^{\mathcal{M}}(\theta)$ se obtiene realizando la operación (4.8) para θ_1 fijo.

El segundo sumando, (a_2), puede escribirse como

$$(a_2) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} \sum_{\{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M}):\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})\}} Q(\varepsilon) [v(S_i(\varepsilon) \cup i) - v(S_i(\varepsilon))].$$

Usando que cualquier enlace $\varepsilon = (\theta_1; \theta_2; ...; \theta_k) \in E\Omega(\mathcal{M})$ con $\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})$, para un $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$, puede describirse como $\varepsilon = (\theta_1, \varepsilon')$ donde $\varepsilon' = (\theta_2; ...; \theta_k) \in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)$, se sigue que

$$(a_2) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} \sum_{\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})} \sum_{\{\varepsilon=(\theta_1,\varepsilon'):\varepsilon' \in E\Omega(\mathcal{M}\backslash B)\}} Q(\varepsilon) [v(S_i(\varepsilon) \cup i) - v(S_i(\varepsilon))].$$

Sean $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$ y $\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})$. Dado $\varepsilon = (\theta_1, \varepsilon')$, como $i \notin B$, entonces $S_i(\varepsilon) = S_i(\varepsilon')$ y por definición, al ser $B_{\theta_1} = B$, se tiene que

$$Q(\varepsilon) = q^{\mathcal{M}}(\theta_1) Q^{\mathcal{M}\backslash B}(\varepsilon').$$

Se obtiene entonces que

$$(a_2) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} \left(\sum_{\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta_1) \right) \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}\backslash B}(v_{\mathcal{M}\backslash B}).$$

Al verificarse (2), la expresión (4.3) del Teorema 4.18 asegura que

$$\sum_{\theta_1 \in \Omega_B(\mathcal{M})} q^{\mathcal{M}}(\theta_1) = P_{\mathcal{M}}(B).$$

Sumando (a_1) y (a_2) y teniendo en cuenta la expresión (4.6)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q(\varepsilon)\left[v\left(S_i(\varepsilon) \cup i\right) - v\left(S_i(\varepsilon)\right)\right] \\
= \;& \Psi_i^{\mathcal{M}}(v) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus i)} P_{\mathcal{M}}(B)\, \overline{\Psi}_i^{\mathcal{M} \setminus B}\left(v_{\mathcal{M} \setminus B}\right) \\
= \;& \overline{\Psi}_i(v).
\end{aligned}$$

Se finalizará la demostración suponiendo que el jugador i es istmo en $\mathcal{M}$ y probando que $\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v)$ se escribe en la forma deseada. En este caso,

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \Psi_i^{\mathcal{M}}(v), \text{ para } v \in \Gamma(\mathcal{M}).$$

Se llegará a la expresión

$$\overline{\Psi}_i^{\mathcal{M}}(v) = \sum_{\varepsilon \in E\Omega(\mathcal{M})} Q^{\mathcal{M}}(\varepsilon)\left[v\left(S_i(\varepsilon) \cup i\right) - v\left(S_i(\varepsilon)\right)\right],$$

con $Q^{\mathcal{M}}(\varepsilon) = q^{\mathcal{M}}(\theta_1) \prod_{m=2}^{k} q^{\mathcal{M} \setminus B_{\theta_1} \setminus \cdots \setminus B_{\theta_{m-1}}}(\theta_m)$ si $\varepsilon = (\theta_1; ...; \theta_k)$, partiendo del segundo término y operando al igual que en (a_1), teniendo en cuenta que, en este caso, para todos los enlaces el jugador i participa en la primera cadena. □

A raíz de los resultados ya obtenidos se pueden enunciar las siguientes conclusiones.

Corolario 4.38 *Sea $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

(1) El valor $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ es básico dinámico, $\left(\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}, \left\{\Psi^{\mathcal{M}'}\right\}, \left\{P_{\mathcal{M}'}\right\}\right)$, satisfaciendo que, para cada $\mathcal{M}' \in \mathbb{MB}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$, el valor $\Psi^{\mathcal{M}'}$ verifica el axioma de eficiencia estático para $P_{\mathcal{M}'}$, y sus componentes satisfacen los axiomas de linealidad y jugador nulo.

(2) El valor $\overline{\Psi}^{\mathcal{M}}$ *es de orden aleatorio dinámico.*

Demostración: La prueba es inmediata sin más que combinar los Teoremas 4.20, 4.36 y 4.37. □

Nota 4.39 *Si se tiene un juego dinámico con un número fijo de pasos de eliminación, entonces no necesariamente participan todos los jugadores. En este caso, el método que se ha estudiado en este capítulo se puede modificar en el siguiente sentido. Se construyen, para* k *pasos, valores mediante fórmulas similares a las expresiones (4.6), pero finalizando la recurrencia cuando se han hecho* k *eliminaciones o bien anteriormente el jugador es istmo en el matroide correspondiente. El estudio se debería hacer en ese caso teniendo en cuenta las distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de semisecuencias de longitud* k*.*

Capítulo 5

Valores de Shapley para Matroides

En este capítulo se proponen unos axiomas para introducir el valor de Shapley en juegos definidos sobre un matroide. Se tratan las dos vertientes del modelo secuencial de cooperación: el modelo estático y el modelo dinámico. En ambas, el desarrollo es similar. Por un lado, se tiene en cuenta que el valor de Shapley sobre juegos cooperativos clásicos es el único valor de grupo que satisface los axiomas de linealidad, dummy, simetría y eficiencia. Por otra parte, se recoge la idea introducida por Faigle y Kern [22] de sustituir el axioma de simetría por otro, que ellos en su trabajo denominan axioma de poder jerárquico, en el que se establece la relación que debe existir entre los valores individuales de los jugadores que intervienen en un juego de unanimidad.

5.1 Valores Estáticos de Shapley

Se consideran en esta sección juegos sobre un matroide $\mathcal{M}$ que se desarrollan según el modelo secuencial estático. Se extiende a este caso la noción de poder jerárquico de un jugador en una coalición, introducida por Faigle y Kern al tratar estructuras de precedencia. Esto se hace, en primer lugar, partiendo de dos premisas:

1. Las coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$ se forman siguiendo procesos secuenciales de incorporación de jugadores. Comenzando con las coaliciones individuales, los jugadores se van incorporando, uno a uno, hasta formar una coalición básica. Además, en cada paso, las coaliciones que se formen son coaliciones factibles en el matroide.

2. Todas las coaliciones básicas del matroide tienen la misma probabilidad de formación.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Entonces, dada una coalición $S \in \mathcal{M}$, se define el *poder jerárquico estático* $h_S^e(i)$ de un jugador $i \in N$ en la coalición S como

$$h_S^e(i) = \frac{c(\mathcal{M}, S, i)}{c(\mathcal{M})},$$

siendo $c(\mathcal{M}, S, i)$ el número de cadenas maximales del matroide $\mathcal{M}$ que contienen a S, tales que el jugador i es el último en incorporarse a S, y $c(\mathcal{M})$ el número total de cadenas maximales de $\mathcal{M}$. En particular, se tiene $h_S^e(i) = 0$ cuando $i \notin S$.

Proposición 5.1 *Sean $\mathcal{M}$ un matroide y $S \in \mathcal{M}$. Entonces, el poder jerárquico estático de un jugador $i \in S$ en la coalición S es*

$$h_S^e(i) = \frac{w^e(S)}{|S|},$$

siendo $w^e(S)$ la influencia de la coalición S para la distribución de probabilidad equitativa $P^e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Demostración: Sea r el rango del matroide $\mathcal{M}$. Para cada coalición básica B de $\mathcal{M}$, el número de cadenas maximales del intervalo $[\emptyset, B] = 2^B$ es $r!$. Por tanto, el número $c(\mathcal{M})$ de cadenas maximales del matroide es $c(\mathcal{M}) = b\,(r!)$.

Análogamente, el número de cadenas maximales que contienen a S es $b_S\,(r!)$. Así,

$$c\,(\mathcal{M}, S, i) = \frac{b_S\,(r!)}{|S|},$$

puesto que todos los jugadores de S tienen las mismas posibilidades de incorporarse en último lugar a S en dichas cadenas. Por ello,

$$h_S^e\,(i) = \frac{c\,(\mathcal{M}, S, i)}{c\,(\mathcal{M})} = \frac{b_S}{b\,|S|} = \frac{w^e\,(S)}{|S|},$$

ya que $w^e\,(S) = b_S/b$, como se vió en la sección 3.2. □

En la proposición anterior, se llega a la conclusión de que el poder jerárquico de un jugador en una coalición es la parte proporcional de la influencia equitativa de la coalición en el matroide. Por ello, como en un matroide no hay que presuponer que todas las coaliciones básicas tienen la misma probabilidad de formarse, es posible considerar de forma más general el concepto de poder jerárquico.

Definición 5.2 *Sea $P \in \mathcal{P}\,(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$. El poder jerárquico estático $h_S^P\,(i)$ de un jugador $i \in S$ en una coalición $S \in \mathcal{M}$, respecto de la distribución de probabilidad P, es el número dado por*

$$h_S^P\,(i) = \frac{w^P\,(S)}{|S|}.$$

Además, para un jugador $j \in N \setminus S$, $h_S^P\,(j) = 0$.

Según la definición anterior, dada una coalición $S \in \mathcal{M}$, el poder jerárquico estático cumple las siguientes propiedades:

- El poder jerárquico $h_S^P\,(i) = 0$ para todo $i \in N$ que sea jugador nulo en el juego de unanimidad ζ_S, ya que, según el Lema 4.4, los jugadores nulos de este juego son los que no pertenecen a la coalición S.

- La suma de los poderes jerárquicos de todos los jugadores es

$$\sum_{i\in N} h_S^P(i) = \sum_{i\in S} \frac{w^P(S)}{|S|} = w^P(S) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\,\zeta_S(B).$$

- Todos los miembros de la coalición S tienen el mismo poder jerárquico en S, siendo éste la parte proporcional de la influencia de dicha coalición.

Entonces, es lógico introducir los siguientes axiomas para extender el concepto de valor de Shapley a los juegos estáticos definidos sobre un matroide.

Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ y sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$.

<u>*Axioma 1 (Linealidad).*</u> Si $v_1, v_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\Psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Psi(v_1) + \alpha_2 \Psi(v_2).$$

<u>*Axioma 2E (Jugador dummy).*</u> Para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$; si el jugador i es dummy en v, se tiene

$$\Psi_i(v) = w_i^P v(\{i\}).$$

<u>*Axioma 3E (Eficiencia).*</u> Si $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, entonces

$$\sum_{i\in N} \Psi_i(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\,v(B).$$

<u>*Axioma 4E (Poder jerárquico).*</u> Para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{M}$ y cualesquiera $i, j \in S$,

$$\Psi_i(\zeta_S) = \Psi_j(\zeta_S).$$

Previo al teorema que determina un único valor de grupo para estos axiomas, se necesita introducir el siguiente lema.

Lema 5.3 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$, y r el rango de $\mathcal{M}$. La influencia $w^P(S)$ de una coalición $S \in \mathcal{M}$ se relaciona con las influencias de las coaliciones factibles de cardinal fijo que la contienen de la siguiente forma*

$$\sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S, |T|=t\}} w^P(T) = w^P(S) \binom{r-s}{t-s},$$

con $s = |S|$. Además,

$$w^P(S) = \frac{1}{2^{r-s}} \sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S\}} w^P(T).$$

Demostración: Considérese el conjunto $\mathcal{B}_S$ de coaliciones básicas que contienen a la coalición $S \in \mathcal{M}$. Sea $B \in \mathcal{B}_S$ y $s = |S|$. Como el intervalo $[S, B]$ es un álgebra de Boole, para cada $t \in \{s, s+1, \ldots, r-1, r\}$ hay $\binom{r-s}{t-s}$ coaliciones de cardinal t contenidas en B y que contienen a S.

Dada una coalición $T \in \mathcal{M}$, tal que $S \subseteq T$, toda área de influencia suya lo es de S, y por tanto, el número de coaliciones básicas de T coincide con el número de áreas de influencia de S que contienen a T. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S, |T|=t\}} w^P(T) &= \sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S, |T|=t\}} \sum_{B \in \mathcal{B}_T} P(B) \\
&= \sum_{B \in \mathcal{B}_S} P(B) \sum_{\{T \subseteq B: T \supseteq S, |T|=t\}} 1 \\
&= \sum_{B \in \mathcal{B}_S} P(B) \binom{r-s}{t-s} = w^P(S) \binom{r-s}{t-s}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, obsérvese que

$$\begin{aligned}
\sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S\}} w^P(T) &= \sum_{t=s}^{r} \sum_{\{T \in \mathcal{M}: T \supseteq S, |T|=t\}} w^P(T) \\
&= \sum_{t=s}^{r} w^P(S) \binom{r-s}{t-s} = w^P(S)\, 2^{r-s},
\end{aligned}$$

puesto que $\sum_{t=s}^{r} \binom{r-s}{t-s} = (1+1)^{r-s}$. □

Teorema 5.4 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$. Existe un único valor de grupo $\Phi^P = \left(\Phi_i^P\right)_{i\in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ satisfaciendo Axioma 1, Axioma 2E, Axioma 3E y Axioma 4E. Además, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$,*

$$\Phi_i^P(v) = \sum_{S\in\mathcal{M}/i} w^P(S\cup i)\,\frac{(r-s-1)!s!}{r!}\,[v(S\cup i) - v(S)],$$

donde s indica $|S|$ y r es el rango del matroide $\mathcal{M}$.

Demostración: Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica los axiomas del enunciado. Para cada $S \in \mathcal{M}$, se considera el juego de unanimidad ζ_S. Los jugadores $i \notin S$ son jugadores nulos para dicho juego (Lema 4.4); y entonces, por el Axioma 2E, se tiene $\Psi_i(\zeta_S) = 0$ para todo $i \in N \setminus S$. Por otro lado, $\Psi_i(\zeta_S) = \Psi_j(\zeta_S)$ cuando $i, j \in S$, por el Axioma 4E. Así, aplicando el Axioma 3E al juego ζ_S se obtiene

$$\sum_{i\in N}\Psi_i(\zeta_S) = \sum_{i\in S}\Psi_i(\zeta_S) = \Psi_i(\zeta_S)\,|S| = w^P(S).$$

Luego, para todo $i \in S$

$$\Psi_i(\zeta_S) = \frac{w^P(S)}{|S|} = h_S^P(i).$$

Por tanto, al ser el conjunto de juegos de unanimidad una base del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{M})$, el Axioma 1 permite asegurar que existe un único valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que satisface los axiomas del enunciado. Sea Φ^P dicho valor.

Sea $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Expresando v como combinación lineal de los juegos de unanimidad, y teniendo en cuenta que Φ^P verifica el Axioma 1, para cada $i \in N$, se tiene

$$\Phi_i^P(v) = \sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\neq\emptyset\}} \Delta_v(T)\,\Phi_i^P(\zeta_T) = \sum_{\{T\in\mathcal{M}:i\in T\}} \Delta_v(T)\,\frac{w^P(T)}{t} \qquad (5.1)$$

$$= \sum_{\{T\in\mathcal{M}:i\in T\}} \left[\sum_{S\subseteq T} (-1)^{t-s} v(S)\right] \frac{w^P(T)}{t}$$

$$= \sum_{\{S\in\mathcal{M}:S\cup i\in\mathcal{M}\}} \left[\sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\supseteq S\cup i\}} (-1)^{t-s} \frac{w^P(T)}{t}\right] v(S), \qquad (5.2)$$

donde la tercera igualdad sigue de la expresión (1.8) para los dividendos de Harsanyi.

Se trata ahora de determinar el coeficiente de $v(S)$ en la expresión (5.2). Para ello se distinguen dos casos.

(1) Sea $S \in \mathcal{M}$, tal que $i \in S$. Entonces, para el coeficiente de $v(S)$ en la expresión (5.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\supseteq S\}} (-1)^{t-s} \frac{w^P(T)}{t} &= \sum_{t=s}^{r} (-1)^{t-s} \frac{1}{t} \sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\supseteq S,|T|=t\}} w^P(T) \\
&= w^P(S) \sum_{t=s}^{r} \binom{r-s}{t-s} (-1)^{t-s} \frac{1}{t} \\
&= w^P(S) \sum_{k=0}^{r-s} (-1)^k \binom{r-s}{k} \int_0^1 x^{k+s-1} dx \\
&= w^P(S) \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{r-s} dx \\
&= w^P(S) \frac{(r-s)!(s-1)!}{r!},
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado el Lema 5.3, y en la última se evalúa la función beta.

(2) Sea $S \in \mathcal{M}/i$. Ahora, siguiendo un razonamiento análogo al anterior, el coeficiente de $v(S)$ en la expresión (5.2) es

$$\begin{aligned}
\sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\supseteq S\cup i\}} (-1)^{t-s} \frac{w^P(T)}{t} &= \sum_{t=s+1}^{r} (-1)^{t-s} \frac{1}{t} \sum_{\{T\in\mathcal{M}:T\supseteq S\cup i,|T|=t\}} w^P(T) \\
&= w^P(S\cup i) \sum_{t=s+1}^{r} \binom{r-s-1}{t-s-1} (-1)^{t-s} \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

$$= -w^P(S \cup i) \int_0^1 x^s (1-x)^{r-s-1} \, dx$$
$$= -w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!}.$$

Para terminar la prueba, basta sustituir los coeficientes calculados en la expresión (5.2) y utilizar la biyección existente entre las coaliciones factibles $S \in \mathcal{M}/i$ y aquéllas que contienen al jugador i. Con ello,

$$\Phi_i^P(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!} [v(S \cup i) - v(S)].$$

□

Definición 5.5 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$. Se denomina P-valor estático de Shapley al único valor de grupo Φ^P sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica Axioma 1, Axioma 2E, Axioma 3E y Axioma 4E.*

Obsérvese en la demostración del último teorema, que cada componente Φ_i^P del P-valor estático de Shapley aplicada al juego ζ_S coincide con el poder jerárquico estático del jugador i en la coalición S, respecto de la distribución de probabilidad P.

A continuación se probará que el Axioma 4E, incluido en la caracterización del valor de Shapley, puede ser sustituido por un axioma similar para los juegos de identidad. Para un valor de grupo $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ se considera el siguiente axioma.

Axioma 4'E (Poder jerárquico). Para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{M}$ y cualesquiera $i, j \in S$,

$$\Psi_i(\delta_S) = \Psi_j(\delta_S).$$

Probar que este nuevo axioma puede sustituir al Axioma 4E en la determinación del P-valor estático de Shapley es fácil usando la relación que existe entre los juegos de identidad y los de unanimidad. Sin embargo, se realizará a continuación una demostración alternativa haciendo uso de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Teorema 5.6 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$. El P-valor estático de Shapley es el único valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica Axioma 1, Axioma 2E, Axioma 3E y Axioma 4'E.*

Demostración: Sea r el rango del matroide $\mathcal{M}$. Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica los axiomas del enunciado. Entonces, debido a que Ψ satisface el Axioma 1 y el Axioma 2E, el Teorema 4.5 asegura que, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para cada $i \in N$, se tiene

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

donde $p_S^i = \Psi_i(\delta_{S \cup i})$.

En ese caso, el Axioma 3E y el Teorema 4.15 implican las siguientes relaciones

$$\sum_{i \in S} p_{S \setminus i}^i = \sum_{j \notin \sigma(S)} p_S^j, \quad \forall S \notin \mathcal{B},\, S \in \mathcal{M}, \tag{5.3}$$

$$\sum_{i \in B} p_{B \setminus i}^i = P(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}. \tag{5.4}$$

Usando la igualdad $p_S^i = \Psi_i(\delta_{S \cup i})$ y el Axioma 4'E, se verifica que

$$p_{S \setminus i}^i = p_{S \setminus j}^j$$

cuando $S \in \mathcal{M}$ y además $i, j \in S$. Por tanto la ecuación (5.4) se puede escribir en la forma $r p_{B \setminus i}^i = P(B)$, y así

$$p^i_{B\setminus i} = \frac{P(B)}{r} = w^P(B)\,\frac{1!\,(r-1)!}{r!}.$$

Esto prueba que, para cada $B \in \mathcal{B}$, el coeficiente $p^i_{B\setminus i}$ coincide con el coeficiente de la contribución marginal $v(B) - v(B \setminus i)$ en la fórmula del P-valor estático de Shapley. Supóngase ahora que esto mismo ocurre para cada coalición factible S de cardinal s. Entonces, la demostración acaba cuando se pruebe que lo anterior también se cumple para las coaliciones de cardinal $s-1$.

En efecto, la ecuación (5.3) para una coalición $S \in \mathcal{M}$ de cardinal s implica que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} p^i_{S\setminus i} &= \sum_{j\notin\sigma(S)} p^j_S = \frac{(r-s-1)!s!}{r!} \sum_{\{j\in N: S\in\mathcal{M}/j\}} w^P(S\cup j) \\ &= \frac{(r-s-1)!s!}{r!} w^P(S) \binom{r-s}{1} = w^P(S)\,\frac{(r-s)!s!}{r!},\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debida a la hipótesis de inducción; y en la tercera se aplica el Lema 5.3 sobre las coaliciones que contienen a S con cardinal $s+1$. Además, por el Axioma 4'E, se obtiene finalmente

$$sp^i_{S\setminus i} = w^P(S)\,\frac{(r-s)!s!}{r!}.$$

En definitiva,

$$p^i_{S\setminus i} = w^P(S)\,\frac{(r-s)!\,(s-1)!}{r!}.$$

□

El Teorema 4.20 garantiza que el P-valor estático de Shapley es un valor de orden aleatorio. Por otro lado, el Teorema 4.21 asegura que entonces es un valor básico estático. Se verá a continuación que los valores que lo expresan en la forma (4.1) resultan ser los valores de Shapley correspondientes a las coaliciones básicas del matroide.

Teorema 5.7 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las coaliciones básicas de $\mathcal{M}$. El P-valor estático de Shapley se puede expresar en la forma*

$$\Phi^P = \sum_{B \in \mathcal{B}} P(B)\, \Phi^B,$$

donde cada Φ^B es el valor de Shapley sobre $\Gamma\left(2^B\right)$.

Demostración: Sean $i \in N$ y $B \in \mathcal{B}_i$ una coalición básica que contiene a i. Se considera el valor de Shapley Φ^B sobre $\Gamma\left(2^B\right)$. Entonces, para cualquier juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, se tiene que

$$\Phi_i^B(v_B) = \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} \frac{(r-s-1)!s!}{r!}\left[v(S \cup i) - v(S)\right].$$

Se debe probar que para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$, se verifica

$$\Phi_i^P(v) = \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B)\, \Phi_i^B(v_B).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B)\, \Phi_i^B(v_B) &= \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B) \sum_{\{S \subseteq B : i \notin S\}} \frac{(r-s-1)!s!}{r!}\left[v(S \cup i) - v(S)\right] \\
&= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \frac{(r-s-1)!s!}{r!}\left[v(S \cup i) - v(S)\right] \sum_{B \in \mathcal{B}_{S \cup i}} P(B) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!}\left[v(S \cup i) - v(S)\right],
\end{aligned}$$

donde, para intercambiar los sumatorios en la segunda igualdad, se ha usado el Lema 4.9. □

Obsérvese que el P-valor estático de Shapley verifica la propiedad del rango para el vector de influencias w^P. En consecuencia, sus componentes Φ_i^P, para cada $i \in N$, son valores w_i^P-ponderados y, entonces, se satisface también el axioma de monotonía. Otras propiedades destacables sobre su comportamiento sobre determinadas clases de juegos, son las siguientes.

Proposición 5.8 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$, y sea r el rango de dicho matroide. Las siguientes afirmaciones son ciertas para el P-valor estático de Shapley.*

(1) Si $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ es un juego débilmente superaditivo, entonces

$$\Phi_i^P(v) \geq w_i^P v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N.$$

(2) Si $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ es un juego simétrico (esto es, que existe una función $f : \{0, 1, \ldots, r\} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, para toda coalición $S \in \mathcal{M}$ con cardinal s, se verifica $v(S) = f(s)$), entonces

$$\Phi_i^P(v) = w_i^P \frac{f(r)}{r} \text{ para todo } i \in N.$$

Demostración: (1) Sea $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ un juego débilmente superaditivo. Entonces, si $i \in N$ y $S \in \mathcal{M}/i$, se tiene $v(S \cup i) \geq v(\{i\}) + v(S)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\Phi_i^P(v) &= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!} [v(S \cup i) - v(S)] \\
&\geq v(\{i\}) \sum_{S \in \mathcal{M}/i} w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!} \\
&= v(\{i\}) \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-s-1)!s!}{r!} \sum_{\{S \in \mathcal{M}/i : |S| = s\}} w^P(S \cup i) \\
&= w^P(\{i\}) v(\{i\}) \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-s-1)!s!}{r!} \binom{r-1}{s} \\
&= w_i^P v(\{i\}) \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{r} = w_i^P v(\{i\}),
\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se utiliza que las coaliciones de $\mathcal{M}/i$ tienen cardinal menor o igual que $r-1$; además, la tercera igualdad es consecuencia del Lema 5.3 aplicado a la coalición $\{i\}$.

(2) Sea $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ un juego de simétrico. Entonces, como $v(S) = f(s)$ para todo $S \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_i^P(v) &= \sum_{S \in \mathcal{M}/i} w^P(S \cup i) \frac{(r-s-1)!s!}{r!} [f(s+1) - f(s)] \\
&= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-s-1)!s!}{r!} [f(s+1) - f(s)] \sum_{\{S \in \mathcal{M}/i : |S| = s\}} w^P(S \cup i) \\
&= w_i^P \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} [f(s+1) - f(s)] = w_i^P \frac{f(r)}{r},
\end{aligned}$$

razonando de forma análoga al apartado anterior, y teniendo en cuenta que $f(0) = v(\emptyset) = 0$. □

El P-valor estático de Shapley, correspondiente a la distribución de probabilidad equitativa P^e, y que se denotará por Φ^e, es objeto del estudio que sigue a continuación. En primer lugar, obsérvese que usando el Teorema 5.4 y el Teorema 5.7, las componentes Φ_i^e de dicho valor se pueden expresar, para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, en la forma

$$\Phi_i^e(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \frac{b_{S \cup i}(r-s-1)!s!}{b(r!)} [v(S \cup i) - v(S)], \tag{5.5}$$

siendo $s = |S|$.

Proposición 5.9 *El valor estático de Shapley Φ^e sobre $\Gamma(U_n^k)$, es tal que*

$$\Phi_i^e(v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S, s < k\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)],$$

para cada $i \in N$ y para cada $v \in \Gamma(U_n^k)$.

Demostración: El rango del matroide U_n^k es $r = k$. La influencia de una coalición $S \in U_n^k$ es el número

$$w^e(S) = \frac{b_S}{b} = \frac{\binom{n-s}{k-s}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-s)!k!}{(k-s)!n!},$$

puesto que todas las coaliciones de tamaño k son factibles. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{b_{S\cup i}}{b} \frac{(k-s-1)!s!}{k!} &= \frac{(n-s-1)!k!}{(k-s-1)!n!} \frac{(k-s-1)!s!}{k!} \\ &= \frac{(n-s-1)!s!}{n!}, \end{aligned}$$

y basta sustituir en (5.5) para obtener la fórmula del enunciado. □

La fórmula del valor Φ^e obtenida para el matroide uniforme U_n^k, no es más que la k-truncación de la fórmula clásica, y recoge la idea de la definición de dicho matroide. Nótese además que, cuando $k = n$, esta fórmula es la conocida para el valor de Shapley en juegos cooperativos sobre 2^N.

Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido con k componentes conexas. Sea $\mathbb{T}$ el conjunto de bosques maximales de G. Para $A' \subseteq A$, se denotará por $G_{A'}$ el subgrafo generado por A'; y por $\mathbb{T}_{A'}$ los elementos de $\mathbb{T}$ que continen a $G_{A'}$.

Proposición 5.10 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido con k componentes conexas. Si $v \in \Gamma(\mathcal{M}(G))$ es un juego sobre el matroide gráfico $\mathcal{M}(G)$, entonces el valor estático de Shapley Φ^e, para cada arista $a \in A$, viene dado por*

$$\Phi_a^e(v) = \sum_{A' \in AC(a)} \frac{|\mathbb{T}_{A'}|}{|\mathbb{T}|} \frac{(|V| - k - |A'| - 1)!\,|A'|!}{(|V| - k)!} [v(A' \cup a) - v(A')]$$

donde $AC(a) = \{A' \subseteq A : a \notin A', G_{A' \cup a} \text{ acíclico}\}$.

Demostración: Basta con tener en cuenta que las coaliciones básicas del matroide gráfico $\mathcal{M}(G)$ definido por G son los bosques maximales. Así, la fórmula sigue de considerar que el rango del matroide es el número de vértices menos el de componentes conexas (ver ejemplo 1.18). □

Proposición 5.11 *Si $v \in \Gamma(\mathcal{M}_n(i \parallel j))$ es un juego sobre el matroide de oposición $\mathcal{M}_n(i \parallel j)$, entonces el valor estático de Shapley Φ^e es tal que*

$$\Phi_i^e(v) = \frac{1}{2} \sum_{\{S \subseteq N, \{i,j\} \notin S\}} \frac{(n-s-2)!s!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)],$$

$$\Phi_j^e(v) = \frac{1}{2} \sum_{\{S \subseteq N, \{i,j\} \notin S\}} \frac{(n-s-2)!s!}{n!} [v(S \cup j) - v(S)],$$

y para $k \in N \setminus \{i,j\}$,

$$\begin{aligned} \Phi_k^e(v) &= \frac{1}{2} \sum_{\{S \subseteq N, \{i,k\} \notin S\}} \frac{(n-s-2)!s!}{n!} [v(S \cup k) - v(S)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\{S \subseteq N, \{k,j\} \notin S\}} \frac{(n-s-2)!s!}{n!} [v(S \cup k) - v(S)]. \end{aligned}$$

Demostración: El matroide $\mathcal{M}_n(i \parallel j)$ tiene rango $n-1$ y dos coaliciones básicas, $N \setminus i$ y $N \setminus j$. El número de áreas de influencia de una coalición factible S viene dado por

$$b_S = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i, j \notin S \\ 1 & \text{si} \quad i \in S \text{ ó } j \in S. \end{cases}$$

Entonces, basta sustituir los datos anteriores en la expresión (5.5), y tener en cuenta que en la fórmula de $\Phi_k^e(v)$ del enunciado aparecen los términos asociados a coaliciones que no contienen a $\{i,j\}$ en ambos sumatorios. □

Para terminar la sección, se introducirá el concepto de P-valor relativo de Shapley. Recuérdese que se podían encontrar valores para juegos estáticos bajo una óptica relativa. El significado de este tipo de valores es suponer que un jugador mide sus posibilidades bajo una escala que sólo tiene en cuenta sus áreas de influencia y no todas las áreas de cooperación.

Sea $\mathcal{M}$ un matroide. Si $c(\mathcal{M}, i)$ representa el número de cadenas maximales del matroide $\mathcal{M}$ que contienen a un jugador i, entonces el *poder jerárquico relativo* del jugador i en una coalición $S \in \mathcal{M}$ es

$$\widehat{h}_S^e(i) = \frac{c(\mathcal{M}, S, i)}{c(\mathcal{M}, i)}.$$

En particular, $\widehat{h}_S^e(i) = 0$ cuando $i \in N \setminus S$.

Razonando de forma análoga a como se hizo en la Proposición 5.1, se llega al siguiente resultado.

Proposición 5.12 *Sean $\mathcal{M}$ un matroide y $S \in \mathcal{M}$. Entonces, el poder jerárquico relativo de un jugador $i \in S$ en la coalición S es*

$$\widehat{h}_S^e(i) = \frac{w^e(S)}{|S|\, w_i^e}.$$

siendo $w^e(S)$ la influencia de la coalición S para la distribución de probabilidad equitativa $P^e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, y w_i^e la correspondiente influencia del jugador i.

Generalizando la idea para una distribución de probabilidad cualquiera. se obtiene el concepto general de poder jerárquico relativo.

Definición 5.13 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$, tal que $w_j^P \neq 0$ para todo $j \in N$. El poder jerárquico relativo de un jugador $i \in S$ en una coalición $S \in \mathcal{M}$, respecto de la distribución de probabilidad P, es el número dado por*

$$\widehat{h}_S^P(i) = \frac{w^P(S)}{|S|\, w_i^P}.$$

Además, para un jugador $j \in N \setminus S$, $\widehat{h}_S^P(j) = 0$.

Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre las áreas de cooperación del matroide $\mathcal{M}$, tal que $w_j^P \neq 0$ para todo $j \in N$. Los poderes jerárquicos relativos verifican las siguientes propiedades:

- El poder jerárquico relativo $\widehat{h}_S^P(i) = 0$ para todo $i \in N$ que sea jugador nulo en el juego de unanimidad ζ_S, ya que, según el Lema 4.4, los jugadores nulos de este juego son los que no pertenecen a la coalición S.

- La suma de los poderes jerárquicos relativos de todos los jugadores es

$$\sum_{i\in N} w_i^P \widehat{h}_S^P(i) = \sum_{i\in N} h_S(i) = \frac{1}{b}\sum_{B\in\mathcal{B}} \zeta_S(B).$$

- El poder jerárquico relativo de un jugador en una coalición factible es inversamente proporcional a su influencia.

Se proponen los siguientes axiomas para introducir el P-valor relativo de Shapley.

Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ y sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$.

Axioma 1 (Linealidad). Si $v_1, v_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\Psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Psi(v_1) + \alpha_2 \Psi(v_2).$$

Axioma 2R (Jugador dummy). Para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$; si el jugador i es dummy en v, se tiene

$$\Psi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma 3R (Eficiencia). Si $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, entonces

$$\sum_{i\in N} w_i^P \Psi_i(v) = \sum_{B\in\mathcal{B}} P(B)\, v(B).$$

Axioma 4R (Poder jerárquico). Para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{M}$ y cualesquiera $i, j \in S$,

$$w_i^P \Psi_i(\zeta_S) = w_j^P \Psi_j(\zeta_S).$$

Teorema 5.14 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el, conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$, tal que $w_j^P \neq 0$ para todo $j \in N$. Existe un único valor de grupo $\widehat{\Phi}^P = \left(\widehat{\Phi}_i^P\right)_{i \in N}$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, que verifica Axioma 1, Axioma 2R, Axioma 3R y Axioma 4R. Además, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$,*

$$\widehat{\Phi}_i^P(v) = \sum_{S \in \mathcal{M}/i} \frac{w^P(S \cup i)}{w_i^P} \frac{(r-s-1)!s!}{r!} \left[v(S \cup i) - v(S)\right],$$

donde s indica $|S|$ y r es el rango del matroide $\mathcal{M}$.

Demostración: Se trata de probar que el único valor de grupo en las condiciones del enunciado es

$$\widehat{\Phi}^P = \frac{1}{w^P} \Phi^P.$$

Pero esto es inmediato. Basta tener en cuenta que si Ψ es un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que satisface los axiomas del enunciado, entonces el valor $w^P \Psi$ verifica los axiomas del Teorema 5.4. □

Definición 5.15 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$, con $w_j^P \neq 0$ para todo $j \in N$. Se denomina P-valor relativo de Shapley al único valor de grupo $\widehat{\Phi}^P$ sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica Axioma 1, Axioma 2R, Axioma 3R y Axioma 4R.*

Es fácil comprobar el siguiente resultado, análogo al Teorema 5.7.

Teorema 5.16 *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las coaliciones básicas de $\mathcal{M}$, con $w_j^P \neq 0$ para todo $j \in N$. El P-valor relativo de Shapley $\widehat{\Phi}^P = \left(\widehat{\Phi}_i^P\right)_{i \in N}$ es tal que*

$$\widehat{\Phi}_i^P = \frac{1}{w_i^P} \sum_{B \in \mathcal{B}_i} P(B) \, \Phi_i^B, \text{ para todo } i \in N,$$

donde cada Φ^B es el valor de Shapley sobre $\Gamma\left(2^B\right)$.

Denotando por $\widehat{\Phi}^e$ al valor relativo de Shapley correspondiente a la probabilidad equitativa $P^e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, la siguiente proposición proporciona la expresión de dicho valor sobre algunos matroides particulares. Su demostración se omite por ser inmediata utilizando el teorema anterior.

Proposición 5.17 *(1) Si* $v \in \Gamma\left(U_n^k\right)$, *entonces* ,

$$\widehat{\Phi}_i^e(v) = \frac{k}{n}\Phi_i^e(v), \text{ para cada } i \in N.$$

(2) Si $G = (V, A)$ *es un grafo no dirigido y* $v \in \Gamma(\mathcal{M}(G))$, *entonces*

$$\widehat{\Phi}_a^e(v) = \frac{|\mathbb{T}|}{|\mathbb{T}_a|}\Phi_a^e(v), \text{ para cada arista } a \in A,$$

donde $\mathbb{T}$ *es el conjunto de bosques maximales de* G, *y* $\mathbb{T}_a$ *los elementos de* $\mathbb{T}$ *que contienen la arista* a.

(3) Si $v \in \Gamma(\mathcal{M}_n(i \parallel j))$, *entonces*

$$\widehat{\Phi}_i^e(v) = \Phi_i^e(v), \; \widehat{\Phi}_j^e(v) = \Phi_j^e(v), \; \widehat{\Phi}_k^e(v) = \frac{1}{2}\Phi_k^e(v) \text{ para } k \notin \{i, j\}.$$

5.2 Valores Dinámicos de Shapley

En esta sección se siguen los mismos pasos que en la sección anterior. Las variantes surgen del hecho de trabajar ahora con juegos sobre un matroide que se rigen por el modelo dinámico. En este caso, se considera que cada etapa de un juego dinámico puede concebirse como un juego estático.

Sea un matroide $\mathcal{M}$. Se dirá que $S \in \mathcal{M}$ es una *coalición istmo* en $\mathcal{M}$ si para toda coalición básica $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ se verifica que $S \cap B \neq \emptyset$. Según esta definición, para que una coalición istmo S de $\mathcal{M}$ esté contenida en alguna de las coaliciones de una secuencia básica de dicho matroide, es necesario que

S esté incluida en la primera coalición de la secuencia. Así, al considerar juegos sobre un matroide que se desarrollen según el modelo dinámico, se puede afirmar que las coaliciones istmo sólo se pueden formar en la primera etapa del juego. La conclusión que sigue de este razonamiento es que, en el caso dinámico, el poder de los jugadores de una coalición istmo debe coincidir con el poder estático. Por tanto, se dirá que el poder jerárquico dinámico $\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M})$ de un jugador $i \in S$ en una coalición istmo S de $\mathcal{M}$, es

$$\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M}) = h_S^e(i, \mathcal{M}),$$

donde se utiliza la notación $h_S^e(i, \mathcal{M})$ en lugar de $h_S^e(i)$ para el poder jerárquico estático del jugador i en S.

Supóngase ahora que S no es una coalición istmo del matroide $\mathcal{M}$. Entonces, dada una secuencia básica de dicho matroide, se pueden presentar tres casos: (a) que S esté contenida en la primera coalición de la secuencia, (b) que alguno, pero no todos, de los jugadores de S pertenezca a la primera coalición de la secuencia, (c) que ningún jugador de S forme parte de la primera coalición. Por tanto, al hablar del poder de los jugadores de la coalición S, se debe considerar lo siguiente. En las coaliciones tipo (a) el jugador concibe su poder de igual forma que en el caso estático. En las del tipo (b) considera nulo su poder, puesto que no se forma en ningún momento la coalición S. Por último, en el caso (c) su poder lo evaluaría en relación al matroide resultante de la eliminación de la primera coalición básica de la secuencia. En definitiva, el poder jerárquico dinámico $\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M})$ de un jugador $i \in S$ en la coalición S vendrá dado por la siguiente fórmula recurrente:

$$\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M}) = h_S^e(i, \mathcal{M}) + \frac{1}{b(\mathcal{M})} \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : B \cap S = \emptyset\}} \overline{h}_S^e(i, \mathcal{M} \backslash B),$$

donde $\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M} \backslash B)$ representa el poder de dicho jugador en la coalición S para el matroide $\mathcal{M} \backslash B$.

Sea $D^e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ la distribución de probabilidad sobre $\Pi(\mathcal{M})$ que a cada secuencia básica $\pi = (A_1, \ldots, A_k)$ le hace corresponder el número

$$D^e(\pi) = \frac{1}{b(\mathcal{M})} \prod_{m=2}^{k} \frac{1}{b(\mathcal{M} \backslash A_1 \backslash \cdots \backslash A_{m-1})}.$$

Nótese que D^e se define a partir de las distribuciones equitativas de probabilidad $P^e_{\mathcal{M}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$ de los menores de eliminación $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, usando la expresión (3.1).

Proposición 5.18 *Sean $\mathcal{M}$ un matroide y $S \in \mathcal{M}$. Entonces, el poder jerárquico dinámico de un jugador $i \in S$ en la coalición S es*

$$\overline{h}^e_S(i, \mathcal{M}) = \frac{w^{D^e}(S)}{|S|},$$

donde $w^{D^e}(S)$ es la influencia de S en $\mathcal{M}$ según la distribución de probabilidad $D^e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Demostración: Nótese en primer lugar que, para cada coalición básica $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, se puede construir a partir de la distribución de probabilidad D^e otra $D^e_{\mathcal{M} \backslash B} \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \backslash B)$, usando (3.2).

Sean $S \in \mathcal{M}$, $i \in S$.

(a) Supóngase que la coalición S es istmo en $\mathcal{M}$. En ese caso,

$$\overline{h}^e_S(i, \mathcal{M}) = h^e_S(i, \mathcal{M}) = \frac{w^{P^e_{\mathcal{M}}}(S)}{|S|},$$

donde la última igualdad sigue de la Proposición 5.1. Por otro lado, como

$$w^{P^e_{\mathcal{M}}}(S) = \sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} P^e_{\mathcal{M}}(B),$$

y, aplicando (3.5), se tiene

$$P^e_{\mathcal{M}}(B) = \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D^e_{\mathcal{M}}(\pi),$$

entonces

$$w^{P^e_{\mathcal{M}}}(S) = w^{D^e_{\mathcal{M}}}(S).$$

Téngase en cuenta que, al ser S istmo en $\mathcal{M}$, el conjunto $\Pi_S(\mathcal{M})$ coincide con

$$\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots),\ B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})\}.$$

Luego queda probada en este caso la fórmula del enunciado.

(b) En el caso en que S no sea una coalición istmo en $\mathcal{M}$, supóngase que se verifica

$$\overline{h}^e_S(i, \mathcal{M}\backslash B) = \frac{w^{D^e_{\mathcal{M}\backslash B}}(S)}{|S|},$$

para cada coalición básica $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ tal que $B \cap S = \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{h}^e_S(i, \mathcal{M}) &= h^e_S(i, \mathcal{M}) + \frac{1}{b(\mathcal{M})} \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : B \cap S = \emptyset\}} \overline{h}^e_S(i, \mathcal{M}\backslash B) \\
&= \frac{w^{P^e_{\mathcal{M}}}(S)}{|S|} + \frac{1}{b(\mathcal{M})} \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : B \cap S = \emptyset\}} \frac{w^{D^e_{\mathcal{M}\backslash B}}(S)}{|S|} \\
&= \frac{1}{|S|} \left(\sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} P^e_{\mathcal{M}}(B) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b(\mathcal{M})} \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : B \cap S = \emptyset\}} \sum_{\pi' \in \Pi_S(\mathcal{M}\backslash B)} D^e_{\mathcal{M}\backslash B}(\pi') \right) \\
&= \frac{1}{|S|} \left(\sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} \sum_{\{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D^e(\pi) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) : B \cap S = \emptyset\}} \sum_{\{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D^e(\pi) \right) \\
&= \frac{1}{|S|} \sum_{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M})} D_e(\pi) = \frac{w^{D^e}(S)}{|S|}.
\end{aligned}$$

Nótese que para obtener el primer sumando de la cuarta igualdad se ha utilizado la expresión (3.5). El segundo sumando de la misma igualdad sigue del hecho de que toda secuencia básica $\pi \in \Pi_S(\mathcal{M})$, donde S no aparezca en la primera coalición de la secuencia, es de la forma $\pi = (B, \pi')$, con $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ tal que $B \cap S = \emptyset$ y $\pi' \in \Pi_S(\mathcal{M} \backslash B)$. Además, en ese paso se ha usado la expresión (3.4).

Finalmente observar que, debido a la construcción recurrente de $\overline{h}_S^e(i, \mathcal{M})$ y a que todo el razonamiento anterior se puede aplicar a cada menor de eliminación del matroide dado, se puede concluir que el resultado es cierto.□

A continuación, se va a definir el poder jerárquico dinámico para cualquier distribución de probabilidad $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Definición 5.19 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$. El poder jerárquico dinámico $\overline{h}_S^D(i, \mathcal{M})$ de un jugador $i \in S$ en una coalición $S \in \mathcal{M}$, respecto de la distribución de probabilidad D, es el número dado por*

$$\overline{h}_S^D(i, \mathcal{M}) = \frac{w^D(S)}{|S|}.$$

Además, para un jugador $j \in N \setminus S$, $\overline{h}_S^D(j, \mathcal{M}) = 0$.

Según la definición anterior, dada una coalición $S \in \mathcal{M}$, el poder jerárquico dinámico cumple las siguientes propiedades:

- El poder jerárquico $\overline{h}_S^D(i, \mathcal{M}) = 0$ para todo $i \in N$ que sea jugador nulo en el juego de unanimidad ζ_S, ya que según el Lema 4.4 los jugadores nulos de este juego son los que no pertenecen a la coalición S.

- La suma de los poderes jerárquicos de todos los jugadores es

$$\sum_{i \in N} \overline{h}_S^D(i, \mathcal{M}) = \sum_{i \in S} \frac{w^D(S)}{|S|} = w^D(S) = \sum_{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M})} D(\pi)$$
$$= \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (A_1, \ldots, A_k)\}} D(\pi) \left[\zeta_S(A_1) + \cdots + \zeta_S(A_k)\right].$$

- Todos los miembros de la coalición S tienen el mismo poder jerárquico en S, siendo éste la parte proporcional de la influencia de dicha coalición.

Entonces, es lógico introducir los siguientes axiomas para extender el concepto de valor de Shapley a los juegos dinámicos definidos sobre un matroide.

Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i \in N}$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ y sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de coaliciones básicas del matroide $\mathcal{M}$.

Axioma 1 (Linealidad). Si $v_1, v_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\Psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Psi(v_1) + \alpha_2 \Psi(v_2).$$

Axioma 2D (Jugador dummy). Para todo juego $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ y para todo $i \in N$; si el jugador i es dummy en v, se tiene

$$\Psi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma 3D (Eficiencia). Si $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, entonces

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathcal{M})} D(\pi) v(\pi).$$

Axioma 4D (Poder jerárquico). Para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{M}$ y cualesquiera $i, j \in S$,

$$\Psi_i(\zeta_S) = \Psi_j(\zeta_S).$$

Lema 5.20 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$, tal que*

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=1}^{k} P_{\mathcal{M} \setminus A_1 \setminus \ldots \setminus A_{m-1}}(A_m),$$

para cada $\pi \in \Pi(\mathcal{M})$. *Entonces, la influencia en el sentido dinámico de una coalición* $S \in \mathcal{M}$*, según la distribución de probabilidad* D*, se expresa mediante la recurrencia*

$$w^D(S) = \begin{cases} w^{P_{\mathcal{M}}}(S), & \textit{si } S \textit{ es istmo} \\ w^{P_{\mathcal{M}}}(S) + \sum\limits_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash S)} P_{\mathcal{M}}(B)\, w^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}(S), & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

donde cada $D_{\mathcal{M}\backslash B}$ *representa la distribución de probabilidad sobre* $\Pi(\mathcal{M}\backslash B)$ *generada por* D *según (3.2).*

Demostración: Sea $S \in \mathcal{M}$. En el caso de que S sea istmo en el matroide $\mathcal{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned} w^D(S) &= \sum_{\pi \in \Pi_S(\mathcal{M})} D(\pi) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots)\}} D(\pi) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) = w^{P_{\mathcal{M}}}(S), \end{aligned}$$

sin más que usar (3.5).

Por otro lado, si S no es istmo en $\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} & w^{P_{\mathcal{M}}}(S) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash S)} P_{\mathcal{M}}(B)\, w^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}(S) \\ = & \sum_{B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}}(B) \\ & + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash S)} P_{\mathcal{M}}(B) \sum_{\pi' \in \Pi_S(\mathcal{M}\backslash B)} D_{\mathcal{M}\backslash B}(\pi') \\ = & \sum_{\{\pi \in \Pi(\mathcal{M}) : \pi = (B, \ldots), B \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M})\}} D(\pi) \\ & + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash S)} \sum_{\{\pi = (B, \pi') : \pi' \in \Pi_S(\mathcal{M}\backslash B)\}} P_{\mathcal{M}}(B)\, D_{\mathcal{M}\backslash B}(\pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\{\pi\in\Pi(\mathcal{M}):\pi=(B,\ldots),B\in\mathcal{B}_S(\mathcal{M})\}} D(\pi) \\ &+ \sum_{\{\pi\in\Pi_S(\mathcal{M}):\pi=(B,\ldots),B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash S)\}} D(\pi) \\ &= \sum_{\pi\in\Pi_S(\mathcal{M})} D(\pi) = w^D(S), \end{aligned}$$

donde, en el primer sumando de la segunda igualdad se ha utilizado (3.5). Además, el segundo sumando de la tercera igualdad se obtiene de aplicar (3.4).

□

Teorema 5.21 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$. Existe un único valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ satisfaciendo los siguientes axiomas: Axioma 1, Axioma 2D, Axioma 3D y Axioma 4D.*

Demostración: Sea $\Psi = (\Psi_i)_{i\in N}$ un valor de grupo que satisface los axiomas del enunciado.

Para cada $S \in \mathcal{M}$, coalición no vacía, considérese el juego de unanimidad ζ_S. Por el Lema 4.4, los jugadores que no están en S son nulos para el juego ζ_S, con lo que el Axioma 2D implica que $\Psi_j(\zeta_S) = 0$ para $j \in N \setminus S$. Así, junto con el Axioma 4D, se puede afirmar que

$$\sum_{j\in N} \Psi_j(\zeta_S) = \sum_{j\in S} \Psi_j(\zeta_S) = \Psi_i(\zeta_S)\,|S|,$$

donde i es cualquier jugador de S.

Por otro lado, usando el Axioma 3D, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j\in N} \Psi_j(\zeta_S) &= \sum_{\pi\in\Pi(\mathcal{M})} D(\pi)\,\zeta_S(\pi) \\ &= \sum_{\pi\in\Pi_S(\mathcal{M})} D(\pi) = w^D(S), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se tiene en cuenta que cada secuencia básica π determina una partición del conjunto de jugadores.

Por tanto, para cada jugador $i \in S$, se tiene que

$$\Psi_i(\zeta_S) = \frac{w^D(S)}{|S|}.$$

Con ello, al ser los juegos de unanimidad una base del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{M})$ y verificar Ψ el Axioma 1 (linealidad), se puede afirmar que es único el valor de grupo que satisface los axiomas del enunciado. □

Definición 5.22 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$. Se denomina D-valor dinámico de Shapley al único valor de grupo Φ^D sobre $\Gamma(\mathcal{M})$ que verifica Axioma 1, Axioma 2D, Axioma 3D y Axioma 4D.*

Teorema 5.23 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$, tal que*

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1) \prod_{m=1}^{k} P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\ldots\backslash A_{m-1}}(A_m),$$

para cada $\pi \in \Pi(\mathcal{M})$. Entonces, el D-valor dinámico de Shapley sobre $\Gamma(\mathcal{M})$, $\Phi^D = \left(\Phi_i^D\right)_{i\in N}$ viene dado,para todo $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, por

$$\Phi_i^D(v) = \begin{cases} \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v), & i \text{ istmo en } \mathcal{M} \\ \\ \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v) + \sum\limits_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\,\Phi_i^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}$ el P-valor estático de Shapley sobre $\Gamma(\mathcal{M})$; para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$, $D_{\mathcal{M}\backslash B}$ es la distribución de probabilidad generada por D sobre $\Pi(\mathcal{M}\backslash B)$ según (3.2) y $\Phi_i^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}$ es el $D_{\mathcal{M}\backslash B}$-valor dinámico de Shapley sobre $\Gamma(\mathcal{M}\backslash B)$.

Demostración: Sea $v \in \Gamma(\mathcal{M})$. Utilizando la expresión (1.4), mediante la cual el juego v se expresa como combinación lineal de los juegos de unanimidad, y el hecho de que el valor de Shapley Φ^D verifica el Axioma 1 y es tal que $\Phi_i^D(\zeta_S) = \frac{w^D(S)}{|S|}$, para todo $i \in N$, se obtiene

$$\Phi_i^D(v) = \sum_{T \in \mathcal{M}} \Delta_v(T)\, \Phi_i^D(\zeta_T) = \sum_{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\}} \Delta_v(T) \frac{w^D(T)}{|T|}.$$

Supóngase que i es un jugador istmo de $\mathcal{M}$. Entonces, como las coaliciones del conjunto $\{T \in \mathcal{M} : i \in T\}$ son istmos de $\mathcal{M}$, aplicando el lema anterior, se sabe que $w^D(T) = w^{P_{\mathcal{M}}}(T)$. Por tanto,

$$\Phi_i^D(v) = \sum_{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\}} \Delta_v(T) \frac{w^{P_{\mathcal{M}}}(T)}{|T|} = \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v),$$

sin más que usar la ecuación (5.1) de la prueba del Teorema 5.4, para la distribución de probabilidad $P_{\mathcal{M}}$.

En el caso de que i no sea un jugador istmo de $\mathcal{M}$, supóngase que la fórmula del enunciado es cierta para todo menor de eliminación $\mathcal{M}\backslash B$, donde $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$. En este caso, usando el lema anterior,

$$\begin{aligned}
\Phi_i^D(v) &= \sum_{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\}} \Delta_v(T) \frac{1}{|T|} w^D(T) \\
&= \sum_{\substack{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\} \\ T \text{ istmo en } \mathcal{M}}} \Delta_v(T) \frac{1}{|T|} w^{P_{\mathcal{M}}}(T) \\
&\quad + \sum_{\substack{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\} \\ T \text{ no istmo en } \mathcal{M}}} \Delta_v(T) \frac{1}{|T|} \left[w^{P_{\mathcal{M}}}(T) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash T)} P_{\mathcal{M}}(B)\, w^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}(T) \right] \\
&= \sum_{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\}} \Delta_v(T) \frac{1}{|T|} w^{P_{\mathcal{M}}}(T) \\
&\quad + \sum_{\substack{\{T \in \mathcal{M}: i \in T\} \\ T \text{ no istmo en } \mathcal{M}}} \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash T)} \Delta_v(T) \frac{1}{|T|} P_{\mathcal{M}}(B)\, w^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}(T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v) + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B) \sum_{\{T\in\mathcal{M}\backslash B: i\in T\}} \Delta_v(T)\frac{1}{|T|}w^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}(T) \\
&= \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v) + \sum_{B\in\mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\,\Phi_i^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right),
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad sigue del intercambio de los sumatorios. En la última igualdad se ha usado que para los matroides $\mathcal{M}\backslash B$ la fórmula es cierta, así como el hecho de que, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)$,

$$\Delta_v(T) = \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}v(S) = \Delta_{v_{\mathcal{M}\backslash B}}(T), \text{ para toda } T \in \mathcal{M}\backslash B.$$

□

Evidentemente, el D-valor dinámico de Shapley verifica la propiedad de ponderación unitaria (PU) y, por tanto, el axioma de monotonía. Otra de sus propiedades es la siguiente.

Proposición 5.24 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una distribución de probabilidad sobre el conjunto de secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$. Si v es un juego débilmente superaditivo, entonces el D-valor dinámico de Shapley Φ^D verifica*

$$\Phi_i^D(v) \geq v(\{i\}), \textit{ para todo } i \in N.$$

Demostración: La distribución de probabilidad D, según el Teorema 3.14, se puede expresar en la forma

$$D(\pi) = P_{\mathcal{M}}(A_1)\prod_{m=1}^{k} P_{\mathcal{M}\backslash A_1\backslash\ldots\backslash A_{m-1}}(A_m),$$

para cada secuencia básica $\pi \in \Pi(\mathcal{M})$.

Para un jugador $i \in N$, que sea istmo en el matroide $\mathcal{M}$, se tiene que $\Phi_i^D(v) = \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v)$. Ahora bien, por la Proposición 5.8, el valor de Shapley $\Phi^{P_{\mathcal{M}}}$ verifica que $\Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v) \geq w_i^{P_{\mathcal{M}}}v(\{i\})$. Así, como $w_i^{P_{\mathcal{M}}} = 1$ por ser i istmo en $\mathcal{M}$, se comprueba que el resultado es cierto en este caso.

Cuando $i \in N$, no es un jugador istmo en $\mathcal{M}$, supóngase la propiedad cierta para todo menor de eliminación de $\mathcal{M}$. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{D}(v) &= \Phi_i^{P_{\mathcal{M}}}(v) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\, \Phi_i^{D_{\mathcal{M}\backslash B}}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right) \\
&\geq w_i^{P_{\mathcal{M}}} v(\{i\}) + \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B)\, v(\{i\}) \\
&= v(\{i\}),
\end{aligned}$$

donde la desigualdad sigue de aplicar el apartado (1) de la proposición 5.8 y de hipótesis de recurrencia. La última igualdad es cierta debido a que

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} P_{\mathcal{M}}(B) = 1 - w_i^{P_{\mathcal{M}}}$$

por definición.

Teniendo en cuenta finalmente la forma recurrente de construir el valor dinámico de Shapley, dada en el teorema anterior, y que el razonamiento seguido se puede aplicar a cada menor de eliminación del matroide dado, se concluye la veracidad de esta proposición. □

El D- valor dinámico de Shapley correspondiente a la distribución de probabilidad $D^e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, se denotará por Φ^{D^e}. Su expresión, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, viene dada por

$$\Phi_i^{D^e}(v) = \begin{cases} \Phi_i^{e}(v), & \text{si } i \text{ es istmo de } \mathcal{M} \\ \\ \Phi_i^{e}(v) + \frac{1}{b} \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}\backslash i)} \Phi_i^{D^e_{\mathcal{M}\backslash B}}\left(v_{\mathcal{M}\backslash B}\right), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A la vista de esta expresión, es fácil comprobar el resultado de la siguiente proposición. Sólo se considera en ella el matroide de oposición, puesto que las fórmulas correspondientes al matroide uniforme y al matroide gráfico no ofrecen ninguna simplificación con respecto a la anterior.

Proposición 5.25 *Si $v \in \Gamma(\mathcal{M}_n(i \parallel j))$ es un juego sobre el matroide de oposición $\mathcal{M}_n(i \parallel j)$, entonces las componentes del valor dinámico de Shapley Φ^{D^e} son*

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{D^e}(v) &= \Phi_i^e(v) + \frac{1}{2}v(\{i\}), \\
\Phi_j^{D^e}(v) &= \Phi_j^e(v) + \frac{1}{2}v(\{j\}), \\
\Phi_k^{D^e}(v) &= \Phi_k^e(v), \text{ si } k \notin \{i,j\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.26 *Se considera la situación del Parlamento Autonómico de Andalucía tras las elecciones de 1996. Cuatro partidos políticos obtuvieron representación parlamentaria, IU-CA(1), PSOE-A(2), PA(3) y PP-A(4). El número de escaños obtenidos es $q_1 = 13$, $q_2 = 52$, $q_3 = 4$ y $q_4 = 40$, respectivamente. Siendo $N = \{1,2,3,4\}$ se considera el juego simple $v \in \Gamma_s(N)$ dado por*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i \in S} q_i \geq 55 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se trata de obtener el valor de Shapley en varios sistemas de coaliciones.

(a) El juego $(N, 2^N, v)$ representa el juego de mayoría simple desarrollado mediante cooperación total, ver Figura 5.1. En este caso las coaliciones ganadoras son:

$$\begin{aligned}
W(2^N) = \; & \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\} \\
& ,\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.
\end{aligned}$$

En la siguientes figuras las coaliciones ganadoras están recuadradas.

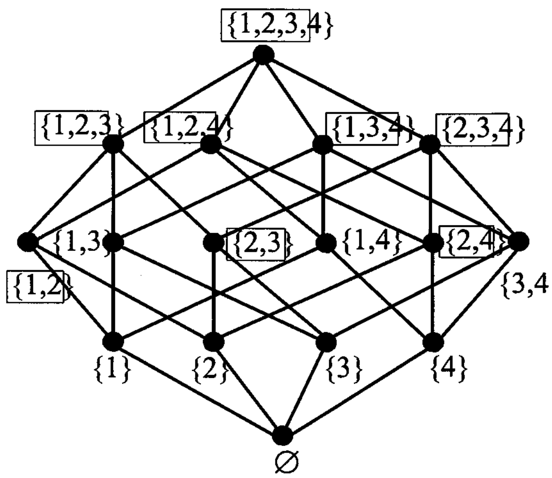

Figura 5.1

Usando la fórmula clásica del valor de Shapley (ver introducción) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\Phi_1^N(v) &= \frac{2!1!}{4!} + \frac{1!2!}{4!} = \frac{4}{24}, \\
\Phi_2^N(v) &= 3\frac{2!1!}{4!} + 3\frac{1!2!}{4!} = \frac{12}{24}, \\
\Phi_3^N(v) &= \frac{2!1!}{4!} + \frac{1!2!}{4!} = \frac{4}{24}, \\
\Phi_4^N(v) &= \frac{2!1!}{4!} + \frac{1!2!}{4!} = \frac{4}{24}.
\end{aligned}$$

Por lo que $\Phi^N(v) = (1/6, 1/2.1/6, 1/6)$.

(b) Si se tiene en cuenta el orden político unidimensional como en la Figura 5.2, entonces el sistema de coaliciones sobre el que se aplica v *es la geometría convexa* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_4$ *(ver Ejemplo 1.5 y Figura 5.3). En* $\mathcal{L}$ *las coaliciones ganadoras son*

$$W(\mathcal{L}) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

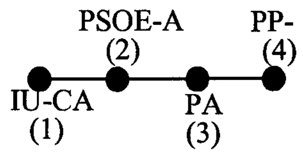

Figura 5.2

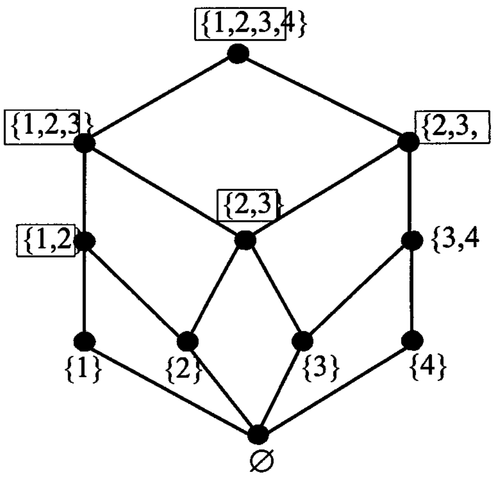

Figura 5.3

Aplicando la fórmula del valor de Shapley enunciada en el Teorema 2.5 se consigue

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{\mathcal{L}}(v) &= \frac{c(\{2\})\, c(\{1,2\},N)}{c(\mathcal{L})} = \frac{1}{8}, \\
\Phi_2^{\mathcal{L}}(v) &= \frac{c(\{1\})\, c(\{1,2\},N)}{c(\mathcal{L})} + \frac{c(\{3\})\, c(\{2,3\},N)}{c(\mathcal{L})} + \frac{c(\{3,4\})\, c(\{2,3,4\},N)}{c(\mathcal{L})} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}, \\
\Phi_3^{\mathcal{L}}(v) &= \frac{c(\{2\})\, c(\{2,3\},N)}{c(\mathcal{L})} = \frac{2}{8}, \\
\Phi_4^{\mathcal{L}}(v) &= 0.
\end{aligned}$$

Con ello $\Phi^{\mathcal{L}}(v) = (1/8, 5/8, 1/4, 0)$.

(c) En la anterior legislatura los pactos entre los partidos 1, 3 y 4 fueron muy habituales, aunque en ningún momento hubo un acuerdo de gobierno. Por ello, ante una votación en el actual Parlamento, la situación podría modelarse mediante un matroide de oposición entre los partidos más votados, 2 y 4, que tratarían de imponer sus ideas (salvo en casos muy particulares). La Figura 5.4 describe el sistema de coaliciones $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4 (2\|4)$. *Son coaliciones ganadoras en este caso*

$$W(\mathcal{M}) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\}\}.$$

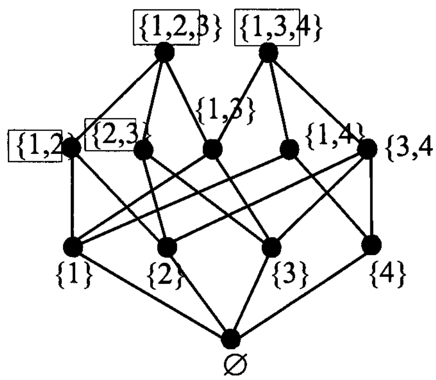

Figura 5.4

Los valores de Shapley clásicos en cada área de cooperación son:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{\{1,2,3\}}(v) &= \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6}, \ \Phi_1^{\{1,3,4\}}(v) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{2}{6}, \\
\Phi_2^{\{1,2,3\}}(v) &= \frac{1!1!}{3!} + \frac{1!1!}{3!} + \frac{0!2!}{3!} = \frac{4}{6}, \\
\Phi_3^{\{1,2,3\}}(v) &= \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6}, \ \Phi_3^{\{1,3,4\}}(v) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{2}{6}, \\
\Phi_4^{\{1,2,3\}}(v) &= \frac{0!2!}{3!} = \frac{2}{6}.
\end{aligned}$$

Si se considera las dos áreas de cooperación equiprobables entonces, por el Teorema 5.7, el valor equitativo de Shapley es

$$\Phi^e(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6},0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6},0,\frac{2}{6},\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right).$$

Sabiendo los partidos 2 y 4 que sólo juegan en un área de cooperación, entonces el valor equitativo relativo de Shapley es $\widehat{\Phi}^e(v) = (1/4, 2/3, 1/4, 1/3)$.

Pero, el hecho de que los pactos de 1 *con* 4 *en el anterior Parlamento hayan fortalecido a* 2 *mediante votos de* 1, *así como que* 2 *y* 3 *puedan gobernar en solitario, puede implicar que sea más posible que las negociaciones se muevan en el primer área de cooperación. Se concluye que, en este caso no debieran de ser ambas áreas de cooperación equiprobables, y puede tomarse la distribución de probabilidad* $P(\{1,2,3\}) = 3/4$ *y* $P(\{1,3,4\}) = 1/4$. *Entonces el* P*-valor de Shapley es*

$$\Phi^P(v) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}, 0\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{6}, 0, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{5}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24}\right).$$

El P*-valor relativo será en en este caso* $\widehat{\Phi}^P(v) = (5/24, 2/3, 5/24, 1/3)$.

Ejemplo 5.27 *Siendo* $N = \{1,2,3,4,5\}$ *se considera el matroide* $\mathcal{M}$ *de la Figura 3.3. Se toma el juego* $v \in \Gamma(\mathcal{M})$, *planteado bajo el modelo dinámico, cuyos valores son:*

$$\begin{aligned} v(\{i\}) &= 0, \text{ para todo } i \in N, \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = 50, \\ v(\{1,4\}) &= v(\{1,5\}) = 30, \\ v(\{2,3\}) &= 40, \\ v(\{2,4\}) &= v(\{2,5\}) = 20, \\ v(\{3,4\}) &= 30, \\ v(\{4,5\}) &= 10, \end{aligned}$$

$$v(\{1,2,3\}) = 100,\ v(\{1,2,4\}) = v(\{1,2,5\}) = 80,$$
$$v(\{1,3,4\}) = 90,\ v(\{1,4,5\}) = 70.$$

Las secuencias básicas del matroide $\mathcal{M}$ *están estudiadas en el Ejemplo 3.7. El valor de Shapley calculado para la distribución de probabilidad* D^e *es*

$$\overline{\Phi}_1^{D^e}(v) = \frac{1}{5}[\Phi_1^{\{1,2,3\}}(v) + \Phi_1^{\{1,2,4\}}(v) + \Phi_1^{\{1,2,5\}}(v)$$

$$
\begin{aligned}
& +\Phi_1^{\{1,3,4\}}(v) + \Phi_1^{\{1,4,5\}}(v)] \\
= & \ \frac{1}{5}[36.667 + 33.333 + 33.333 + 43.333 + 33.333] \\
= & \ 36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi}_2^{D^e}(v) = & \ \frac{1}{5}[\Phi_2^{\{1,2,3\}}(v) + \Phi_2^{\{1,2,4\}}(v) + \Phi_2^{\{1,2,5\}}(v) \\
& +\Phi_1^{\{2,5\}}(v) + \Phi_1^{\{2,3\}}(v)] \\
= & \ \frac{1}{5}[31.667 + 28.333 + 28.333 + 10 + 20] \\
= & \ 23.667
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi}_3^{D^e}(v) = & \ \frac{1}{5}[\Phi_3^{\{1,2,3\}}(v) + \Phi_3^{\{1,3,4\}}(v) + \Phi_3^{\{3\}}(v) \\
& +\Phi_3^{\{3,4\}}(v) + \Phi_3^{\{2,3\}}(v)] \\
= & \ \frac{1}{5}[31.667 + 33.333 + 0 + 15 + 20] \\
= & \ 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi}_4^{D^e}(v) = & \ \frac{1}{5}[\Phi_4^{\{1,2,4\}}(v) + \Phi_4^{\{1,3,4\}}(v) + \Phi_4^{\{1,4,5\}}(v) \\
& +\Phi_4^{\{4,5\}}(v) + \Phi_4^{\{3,4\}}(v)] \\
= & \ \frac{1}{5}[18.333 + 23.333 + 20 + 5 + 15] \\
= & \ 16.333
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi}_5^{D^e}(v) = & \ \frac{1}{5}[\Phi_5^{\{1,2,5\}}(v) + \Phi_5^{\{1,4,5\}}(v) + \Phi_5^{\{4,5\}}(v) \\
& +\Phi_5^{\{5\}}(v) + \Phi_3^{\{2,5\}}(v)] \\
= & \ \frac{1}{5}[18.333 + 20 + 5 + 0 + 10] \\
= & \ 10.667.
\end{aligned}
$$

Por tanto, las espectativas de pago de los jugadores son:

$$\overline{\Phi}^{D_e}(v) = (36, 23.667, 20, 16.333, 10.667).$$

Referencias

[1] AUMANN, R., DREZÉ, J.H. (1974) Cooperative Games with Coalition Structures, *International Journal of Game Theory* 3, 217-237.

[2] AUMANN, R., MASHLER, M. (1964) The Bargaining Set for Cooperative Games, en *Advances in Game Theory,* M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443-471.

[3] AUMANN, R., MYERSON, R. B. (1988) Endogenous Formation of Links between Players and Coalitions: an Application of the Shapley Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 175-191.

[4] BANZHAF, J.F. III (1965) Weighted Voting doesn't work Mathematical Analysis, *Rutgers Law Review* 19, 317-343.

[5] BERGANTIÑOS, G., CARRERAS, F., GARCÍA-JURADO, I. (1993) Cooperation when Some Players are Incompatible, *ZOR-Methods and Models of Operations Research.* 38, 187-201.

[6] BERGANTIÑOS, G., SANCHEZ, E. (1995) Un Nuevo Valor para Juegos en Forma Característica Generalizada, *preprint.*

[7] BILBAO, J.M. (1998) Values and Potential of Games with Cooperation Structure, *International Journal of Game Theory* 27, 131-145.

[8] BILBAO, J.M. (1998) Axioms for the Shapley Value, aceptado en *European Journal of Operations Research.*

[9] BILBAO, J.M., EDELMAN, P.H. (1998) The Shapley Value on Convex Geometries, *preprint.*

[10] BILBAO, J.M., JIMÉNEZ, A., LÓPEZ, J. (1998) The Banzhaf Power Index on Convex Geometries, aceptado en *Mathematical Social Sciences.*

[11] BILBAO, J.M., LEBRÓN, E., JIMÉNEZ, N. (1998) Probabilistic Values on Convex Geometries, aceptado en *Annals of Operations Research.*

[12] CALVO, E., LASAGA, J. (1997) Probabilistic Graphs and Power Indeces: An Application to the Spanish Parliament, *Journal of Theorical Politics* 9(4), 477-501.

[13] CARRERAS, F. (1991) Restriction of Simple Games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245-260.

[14] DILWORTH, R.P. (1940) Lattices with unique Irreducible Descompositions. *Ann. Math.* 41, 771-777.

[15] DRIESSEN, T.S.H. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications,* Kluwer, Dordrecht, Paises Bajos.

[16] DRIESSEN, T.S.H., TIJS, S.H (1983) The τ-Value, the Nucleolus and the Core for a subclass of games, *Methods of Operations Research* 46, 395-406.

[17] DUBEY, P., SHAPLEY, L. S. (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index, *Mathematics of Operations Research* 4(2) 99–131.

[18] EDELMAN, P.H (1980) Meet-Distributive Lattices and the Anti-Exchange Closure. *Algebra Universalis* 10, 290-299.

[19] EDELMAN, P.H. (1997) A Note of Voting. *Mathematical Social Sciences* 34, 37-50.

[20] EDELMAN, P.H., JAMISON, R.E. (1985) The Theory of Convex Geometries, *Geometriae Dedicata* 19, 247-270.

[21] FAIGLE, U. (1989) Cores of Games with Restricted Cooperation. *ZOR-Methods and Models of Operations Research* 33, 405-412.

[22] FAIGLE, U., KERN, W. (1992) The Shapley Value for Cooperative Games under Precedence Constraints, *International Journal of Game Theory* 21, 249-266.

[23] HARARY, F. (1969) *Graph Theory,* Addison-Wesley, Massachusetts.

[24] HARSANYI, J.C., SELTEN, R. (1988) *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, The MIT Press, Cambridge, Massachustts.

[25] HART, S., KURZ, M. (1983) Endogeneus Formation of Coalitions, *Econometrica* 51, 1047-1064.

[26] HART, S., KURZ, M. (1984) Stable Coalition Structures, en *Coalitions and Collective Action,* M. Holler (ed.), Physica-Verlag, Wuerzburg, Alemania, 235-258.

[27] JAMISON, R.E. (1970) A Development of Axiomatic Convexity. *Technical Report* 48, Clemson University Math., 15-20.

[28] JIMÉNEZ, N. (1998) Conceptos de Solución para Juegos sobre Espacios de Clausura. *Tésis Doctoral,* Universidad de Sevilla, España.

[29] KALAI, E., SAMET, D. (1987) On Weighted Shapley Values. *International Journal of Game Theory* 16, 205-222.

[30] KORTE, B., LÓVASZ, L., SCHRADER, R. (1991) *Greedoids,* Springer-Verlag Berlín Heidelberg New York.

[31] KUIPERS, J. (1994) Combinatorial Methods in Cooperative Game Theory, *Ph. D. Thesis,* Universidad de Maastricht, Paises Bajos.

[32] KURZ, M. (1988) Coalitional Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 155-173.

[33] LEVY, A., McLEAN, R. (1989) Weighted Coalition Structure Values, *Games and Economic Behavior* 1, 234-249.

[34] LÓPEZ, J. (1996) Cooperación Parcial en Juegos de n-Personas. *Tésis Doctoral,* Universidad de Sevilla, España.

[35] McLEAN, R. (1991) Random Order Coalition Structure Values, *International Journal of Game Theory* 20, 109-127.

[36] MOULIN, H., SHENKER, S. (1996) Strategyproof Sharing of Submodular Access Costs: Budget Balance versus Efficiency, *International Conference on Game Theory,* Stony Brook, Nueva York.

[37] MYERSON, R.B. (1977) Graphs and Cooperation in Games, *Mathematics of Operations Research* 2, 225-229.

[38] MYERSON, R.B. (1980) Conference Structure and Fair Allocation Rules. *International Journal of Game Theory* 9, 169-182.

[39] NOUWELAND, A. VAN DEN (1993) Games and Graphs in Economics Situations, *Ph. D. Tesis,* Universidad de Tilbourg, Paises Bajos.

[40] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P. (1991) On the Convexity of Communication Games, *International Journal of Game Theory* 19, 421-430.

[41] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P., TIJS, S. (1992) Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations, *International Journal of Game Theory* 20, 255-268.

[42] NOWAK, A.S., RADZIK, T. (1991) On Axiomatizations of the Weighted Shapley Values. *Games and Economic Behavior* 8, 389-405.

[43] NOWAK, A.S., RADZIK, T. (1994) The Shapley Value for n-Person Games in Generalized Characteristic Function Form. *Games and Economic Behaviour* 6, 150-161.

[44] NOWAK, A.S., RADZIK, T. (1997) Weighted Banzhaf Values. *Mathematical Methods of Operations Research* 45, 109-118.

[45] OWEN, G. (1977) Values of Games with a Priori Unions, en *Essays in Mathematical Economics and Game Theory,* R. Henn, O.Moeschlin (eds.), Springer-Verlag, Berlín, 76-88.

[46] OWEN, G. (1986) Values of Graph-Restricted Games, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* 7, 210-220.

[47] SHAPLEY, L.S. (1953) A Value for n-Person Games, *Contributions to the Theory Games,* vol. II, H.W. Khun, A.W. Tucker (eds.), Princeton, New Jersey, 307-317.

[48] SHAPLEY, L.S. (1953) Additive and Non-additive Set Functions. *Ph. D. Thesis.* Department of Mathematics, Princeton University.

[49] SHAPLEY, L.S., SHUBIK, M. (1954) A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review* 48, 787-792.

[50] SHENOY, P. (1979) On Coalition Formation: A Game Theoretic Approach, *International Journal of Game Theory* 8, 133-164.

[51] STANLEY, R.P. (1986) *Enumerative Combinatorics*, vol. I, Wadsworth.

[52] STRAFFIN, P. (1988) The Shapley.Shubik and Banzhaf Power Indices as Probabilities, en *The Shapley Value*, A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 71-82.

[53] TIJS, S.H. (1981) Bounds for the Core and the τ-Value. en *Game Theory and Mathematical Economics* (Eds. O.Moeshlin y D.Pallaschke), 123-132, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Paises Bajos.

[54] TIJS, S.H., OTTEN, G. (1993) Compromise Values in Cooperative Game Theory, *TOP* 1(1), 1-51.

[55] TUTTE, W.T. (1959) Matroids and Graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 90, 527-552.

[56] VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295-320.

[57] VON NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[58] WAERDEN, B.L. VAN DER (1937) *Moderne Algebra*, 2nd edn. Springer, Berlín.

[59] WEBER, R.J. (1988) Probabilistic Values for Games, en *The Shapley Value*, A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 101-119.

[60] WELSH, D.J.A. (1976) *Matroid Theory.* Academic Press, London New York San Francisco.

[61] WHITNEY, H. (1935) On the Abstract Properties of Linear Dependence. *Amer. J. Math.* 57, 509-533.

[62] WINTER, E. (1988) A Value for Cooperative Games with Levels Structure of Cooperation, *International Journal of Game Theory* 18, 227-240.

[63] WINTER, E. (1991) On Non-Tranferable Utility Games with Coalition Structure, *International Journal of Games Theory* 20, 53-63.

[64] WINTER, E. (1992) The Consistency and Potencial for Games with Coalition Structure, *Games and Economic Behavior* 4, 132-144.