UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

JUEGOS DE OPERADOR INTERIOR SOBRE ANTIMATROIDES

María Casimira Chacón Fernández

TESIS DOCTORAL

Memoria presentada por Mª Casimira Chacón Fernández
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

Fdo: Mª Casimira Chacón Fernández

Vº Bº de los Directores:

Fdo: Andrés Jiménez Losada

Fdo: Esperanza A. Lebrón Rueda

Sevilla, Diciembre de 2008

Agradecimientos

A D. Andrés Jiménez Losada y Dña. Esperanza A. Lebrón Rueda, directores de esta tesis, por su generosa implicación, por compartir su conocimiento conmigo e inspirar en mí una admiración suprema. Su valiosa dirección y apoyo han sido imprescindibles para la conclusión de la misma.

A los miembros del grupo de Investigación de Métodos Combinatorios en Teoría de Juegos, por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto y amistad. Se han convertido en parte de mi familia.

A mis padres y hermanos, por su cariño y apoyo sin condiciones ni medida, por enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr objetivos y por ser guía de superación en mi vida. Sin ellos y sus enseñanzas este proyecto no hubiera visto la luz; a ellos dedico esta tesis.

A mis amigos, que siempre están brindándame cariño y soporte, por su permanente disposición y desinteresada ayuda.

A todas las personas que influyeron en mi desarrollo personal y profesional. En particular, a los profesores que han hecho posible este sueño.

También a todas aquellas personas que, de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

A TODOS, MI MAYOR RECONOCIMIENTO Y GRATITUD.

Prólogo

Con carácter general, la teoría de juegos estudia modelos de cooperación y conflicto utilizando métodos matemáticos. Así, muchas situaciones sociales y económicas pueden ser descritas mediante juegos de estrategia de forma que son susceptibles de un análisis matemático. Este trabajo de investigación se enmarca dentro de una línea fundamental de la teoría de juegos: los *juegos cooperativos de utilidad transferible.*

Se podría decir que un juego cooperativo de utilidad transferible queda definido a través de un conjunto finito de jugadores N y una función real v que asocia a cada subconjunto de jugadores que estén dispuestos a cooperar entre sí un número, que indica el valor de su cooperación. Las primeras investigaciones llevadas a cabo para establecer métodos justos de reparto de los beneficios alcanzables mediante el entendimiento de los jugadores, presuponían que las relaciones entre éstos permitían cualquier coalición. Es por ello que la función característica del juego, v, quedaba definida sobre el conjunto 2^N de las partes de N. Sin embargo, las diferentes líneas de investigación emprendidas revelaron pronto la necesidad de contemplar la idea de cooperación parcial para poder abarcar situaciones reales de mayor complejidad.

Aunque la teoría de juegos se inicia en la segunda década del Siglo XX, con los trabajos de Borel [10] y von Neumann [51], fue más tarde, en 1944, cuando von Neumann junto con el economista Oskar Morgenstern sentaron sus bases, al escribir el tratado titulado *Theory of Games and Economic Behavior* [52]. Una de las primeras aproximaciones que incorpora restricciones a la formación de coaliciones entre los jugadores surge en 1964 con el modelo de Aumann y Maschler [2] sobre juegos con *estructuras de coalición.* En este modelo, los jugadores están distribuidos formando una partición del conjunto de los mismos, de tal modo que la cooperación únicamente se da entre los que pertenecen al mismo elemento de la partición y ahí es total. Las limitaciones que supone esta idea, llevan a Myerson [40], en 1977, a definir una *situación de comunicación*, en la que propone utilizar un grafo no dirigido para expresar las relaciones bilaterales entre los jugadores, entendiendo que las coaliciones factibles son aquéllas cuyo subgrafo inducido es conexo. La línea de investigación emprendida por Myerson ha continuado con trabajos de Owen [45], Nouweland y Borm [42], Carreras [15], Nouweland, Borm y Tijs [43], entre otros. Además, Bergantiños, Carreras y García Jurado [4], Calvo y Lasaga [14] han desarrollado trabajos relacionados, en tanto que plantean modelos en los que las relaciones entre los jugadores también vienen dadas mediante un grafo no dirigido. El modelo de Myerson supone así el primer paso en el estudio de cooperación parcial, con la creación de juegos restringidos por un grafo de cooperación. A partir de este modelo, diferentes líneas de investigación han avanzado en la idea de modelar situaciones más generales de cooperación.

La idea que subyace en la generalización del modelo de Myerson y que recoge Nouwenland [44] en su tesis doctoral es la de establecer un marco más amplio donde la relación entre los jugadores no tenga por qué estar representada por un grafo no dirigido, sino que se haga la distinción simplemente entre coaliciones factibles y no factibles. Siguiendo esta línea de investigación, López [35] comienza a desarrollar un modelo de cooperación parcial basado en los denominados *sistemas de coaliciones factibles* y *sistemas de partición*, los cuales generalizan a las situaciones de comunicación. Los sistemas de coaliciones factibles son colecciones $\mathcal{F}$ de subconjuntos de N que contienen al conjunto vacío y a las coaliciones unitarias. Los sistemas de partición son sistemas de coaliciones factibles en los que cualquier coalición $S \subseteq N$ puede expresarse como una unión disjunta de coaliciones factibles contenidas en S y maximales para la inclusión.

Por otra parte se inician, con Faigle [23] y Kuipers [33] fundamentalmente, otros estudios de cooperación parcial motivados por problemas de optimización combinatoria. En ellos se define el juego cooperativo sobre una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto de jugadores N y las coaliciones que pertenecen a esta familia se denominan factibles. Sólo si procede y tiene sentido, se considera la extensión de la función característica a todos los subconjuntos de N.

En definitiva, la consideración de una familia de coaliciones en un juego conlleva dos formas diferentes de modelar la cooperación parcial. Una, la inicialmente emprendida por Faigle, en la que la función característica del juego con cooperación parcial sólo se define para las coaliciones factibles. Otra, emprendida por Myerson, en la que la existencia de tales coaliciones obliga a que la función característica del juego tenga que ser modificada para dar lugar a un nuevo juego llamado *juego restringido por el sistema de coaliciones* *factibles.*

El estudio de los sistemas de coaliciones factibles, de los sistemas de partición y de sus respectivos juegos restringidos se ha continuado con el análisis y caracterización de los diferentes conceptos de solución que existen para cualquier juego cooperativo. En estos trabajos se pone de manifiesto la importancia de la familia de coaliciones $\mathcal{F}$ y de su estructura para la determinación de los correspondientes juegos restringidos, así como para la transmisión de propiedades de la función característica del juego inicial. Aparecen así otros modelos de cooperación parcial que generalizan a las situaciones de comunicación, y en los que intervienen estructuras combinatorias con el fin de modelar la familia de coaliciones que se consideran factibles. Algunos de estos modelos pueden consultarse en Bilbao y Fernández [7] y Bilbao [8].

Entendiendo que un *sistema de conjuntos o coaliciones* es un par $(N, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de N que contiene al vacío, en el contexto de juegos cooperativos, el sistema $(N, \mathcal{F})$ representa las reglas de cooperación que se establecen entre los jugadores para un juego (N, v). De las exigencias impuestas por las relaciones entre los jugadores dependerán las diferentes propiedades que verifique el par $(N, \mathcal{F})$ y que, por tanto, éste adopte o no un determinado tipo de estructura combinatoria. En algunos casos, la verificación de ciertas propiedades origina estructuras combinatorias conocidas como son *antimatroides* y *geometrías convexas*. Cabe destacar, como muestra del interés que suscitan estas estructuras combinatorias, y en relación con los juegos que son modelados por ellas, los trabajos de Jiménez-Losada [29], van den Brink [13], Jiménez [28] y Gilles, Owen y van den Brink [24]. Basta advertir que la estructura de antimatroide se encuentra presente en los denominados *juegos sobre Estructuras de Autorización*, con los que se pretende analizar situaciones en las que existe cierta subordinación entre los jugadores y, debido a ello, las coaliciones factibles vienen determinadas por las relaciones que origina el orden jerárquico establecido. Igual de interesante resulta la estructura de geometría convexa en aquellas situaciones de comunicación donde el grafo que modera la cooperación parcial existente entre los jugadores es un árbol.

El trabajo que aquí se presenta profundiza en el conocimiento de los juegos aditivos restringidos por antimatroides, y viene a ser una continuación de la investigación emprendida en Algaba, Bilbao, van den Brink y Jiménez-Losada [1]. Está motivado por la incorporación de estructuras combinatorias en modelos de cooperación parcial y la existencia de diferentes juegos cooperativos tratados anteriormente por diferentes autores de forma independiente, pero que corresponden a situaciones en las que subyace una estructura de antimatroide que modela las relaciones entre los jugadores. Surge de la observación de situaciones en las que se contempla la cooperación total como un caso particular y en las que todos los jugadores están interesados en cooperar al máximo de sus posibilidades, pero sin vulnerar dos reglas fundamentales en la cooperación: una, cuando dos coaliciones sean posibles, también lo será la unión; otra, la coalición formada por todos los jugadores se alcanza mediante procesos secuenciales de incorporación, uno a uno, de los participantes en el juego. Bajo estas condiciones, representadas mediante un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y suponiendo conocida a través de un vector $w \in \mathbb{R}^N_+$ la aportación que cada jugador genera con su participación, se propone un modelo de juego cooperativo de asignación de beneficios. Su función característica está definida sobre cualquier subconjunto de la gran coalición, y le hace corresponder a cada coalición la suma de las aportaciones de los jugadores que constituyen la mayor subcoalición contenida en ella perteneciente al antimatroide.

La existencia de ciertos juegos cooperativos que se ajustan bien al modelo propuesto genera, no sólo la definición del modelo en sí, sino también la caracterización de ciertas familias de juegos supeditadas al modelo. En este proceso, se obtienen importantes propiedades y se determinan expresiones que simplifican el cálculo de algunos conceptos de solución ya tradicionales (core [25], valor de Shapley [46], valor de Tijs [49]) para la familia de juegos considerados. La dualidad existente entre antimatroides y geometrías convexas permite que ciertas coaliciones en el antimatroide sean interpretadas en la geometría convexa dual, y viceversa. Esta circunstancia ha propiciado gran parte de las contribuciones aportadas en la investigación desarrollada y ha permitido constituir un nuevo modelo de juegos cooperativos sobre geometrías convexas, que responde a ciertos juegos de asignación de costes. Después de observar las características de los juegos objeto de estudio, se continúa la investigación formulando repartos del valor exacto de la gran coalición que contemplan esas particularidades y que satisfacen condiciones razonables para todos los jugadores. La incorporación de elementos del cálculo matricial y geométrico constituyen la clave fundamental para su desarrollo. Como resultado, se obtiene una gama de valores para esta particular familia de juegos, en la que la relación entre los jugadores viene modelada por un determinado antimatroide, y se deduce que los valores de Shapley y de Tijs aparecen entre las familias de valores encontradas. El procedimiento seguido en la obtención de valores puede constituir un interesante recurso en la obtención de valores de juegos asociados a una estructura combinatoria diferente para futuras investigaciones.

En las siguientes páginas, distribuidas en seis capítulos, se muestran los conocimientos necesarios, así como la exposición de los detalles y resultados de esta investigación.

Debido a los diferentes campos que se interrelacionan en el estudio, se dedica el Capítulo I, íntegramente, a la presentación de aquellos fundamentos necesarios en capítulos posteriores que han surgido de la investigación de otros autores. Dentro del citado capítulo, en su primera sección, se presenta la Teoría de Juegos Cooperativos, que es el marco general donde se desarrolla el trabajo realizado, poniendo énfasis en los distintos tipos de juegos cooperativos y conceptos de solución que serán mencionados más adelante. En la segunda sección se introducen, aunque de forma somera, los aspectos relacionados con la Teoría de Grafos que se emplean en la presentación de los ejemplos de juegos y estructuras combinatorias posteriormente expuestos. Y por último, el contenido de la sección tercera se refiere a los Antimatroides y a las Geometrías Convexas, que es el tipo de estructura combinatoria fundamental en la investigación y su dual.

En el Capítulo II se modela la cooperación en un juego aditivo restringido por un antimatroide, mediante la definición de un *juego de operador interior*. La primera sección se dedica, fundamentalmente, a presentar el modelo, exponer ejemplos donde éste es viable y justificar su aplicación en juegos de asignación de beneficios, demostrando que corresponde a juegos monótonos y superaditivos. La estructura de antimatroide representa una *situación de dependencia* entre los jugadores, dada por un conjunto de premisas que determinan sus posibilidades de entrar en la cooperación. Estas premisas vienen dadas por unos elementos fundamentales en la estructura combinatoria de antimatroide, los caminos. La dualidad existente entre las estructuras de antimatroide y geometría convexa conllevan, en la segunda sección, la definición de un modelo de juego restringido por una geometría convexa, denominado *juego de operador clausura*. La tercera sección del capítulo se dedica al *core* de la familia de juegos de operador interior y en ella se obtienen otras propiedades importantes de estos juegos. Así, además de conseguir una expresión específica para el core, se demuestra que se trata de juegos totalmente equilibrados y se caracteriza la familia de antimatroides sobre la que el core de cualquier juego de operador interior constituido sobre uno de ellos está formado por un único vector: aquél cuyas componentes coinciden con la aportación inicial al juego de cada jugador. La consideración de una cota superior para el core de un juego de operador interior y de una función que mide el desfase de cualquier vector del core respecto a su contribución marginal, dará paso al Capítulo III, en el que se abordará otra propiedad interesante en juegos cooperativos de beneficios: la convexidad.

El papel que juega la *convexidad* en juegos superaditivos conlleva realizar en el Capítulo III un profundo estudio acerca de dicha propiedad y de otras acepciones cercanas a ella en juegos de operador interior. En la primera sección del capítulo se observa que no todo juego de operador interior es convexo y se establecen condiciones necesarias y suficientes para que sí lo sea, además de caracterizar a los antimatroides sobre los que cualquier juego de operador interior es convexo. Este hallazgo permite atribuir, de forma fácil y rápida, la propiedad de convexidad a algunos ejemplos de juegos presentados anteriormente como integrantes del modelo. Siguiendo el mismo enfoque, en las siguientes secciones se investigan las propiedades de 1-*convexidad*, k-*convexidad* para $k \geq 2$, y *semiconvexidad* dentro del modelo. En su desarrollo, adquieren protagonismo unos antimatroides particulares, que son: *poset-antimatroides*, *antimatroides coatómicos* y *antimatroides de control*. También, recobran importancia la función de desfase y el core del juego, así como los caminos del antimatroide sobre el que se constituye el juego y la geometría convexa dual asociada a éste. Como colofón al estudio relativo a la convexidad en juegos de operador interior, la sección quinta del capítulo presenta una breve síntesis de los principales resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Expuestos los tres primeros capítulos, dedicados a conocer y profundizar en el modelo presentado, los tres siguientes contribuyen a proporcionar soluciones que sean valores y tengan en cuenta dicho modelo. Una solución tipo valor establece un único vector de pagos para cada juego basado en propiedades razonables o axiomas.

A partir de las características propias de los juegos de operador interior, en el Capítulo IV se consiguen importantes resultados acerca de los valores de Shapley y de Tijs para esta familia de juegos. En la primera sección, la definición de *bloque* en un antimatroide facilita la expresión del dividendo de Harsanyi de cualquier coalición en un juego de operador interior y, por consiguiente, la obtención del *valor de Shapley*. La segunda sección comienza con la observación de la existencia del *valor de Tijs* en cualquier juego de operador interior para, a continuación, considerar la expresión del vector superior, ya obtenida en el segundo capítulo, y encontrar una caracterización del vector inferior en la que intervienen los caminos del antimatroide sobre el que se constituye el juego dado. Las nuevas formulaciones de los vectores superior e inferior en un juego de operador interior originan el correspondiente valor de Tijs. De las expresiones obtenidas, se derivan otras caracterizaciones interesantes para juegos de operador interior que sean 1-convexos o semiconvexos.

Con los Capítulos V y VI se introduce una forma diferente de generar valores en juegos cooperativos. Particularizando en la familia de juegos de operador interior constituidos a partir de un determinado antimatroide sobre el conjunto N de jugadores, se definen unas aplicaciones $\mathbb{R}$-valoradas y definidas en $\mathbb{R}^N$, denominadas *estimaciones razonables individuales*, que consideran las exigencias mínimas impuestas por cada jugador para cada vector no negativo de $\mathbb{R}^N$. El criterio de selección adoptado para elegir una estimación razonable individual para cada jugador determinará la obtención de un valor razonable directo o indirecto.

Concretamente, en el Capítulo V, se define la familia de *valores razonables directos* en un antimatroide dado, mediante la selección de estimaciones razonables individuales que, una por cada jugador, generan conjuntamente, un reparto exacto del valor de la gran coalición para cada vector no negativo de $\mathbb{R}^N$. La identificación de cada aplicación de esta familia con una matriz que posee unas características bien definidas genera una extensa familia de valores en cada juego de operador interior constituido sobre el antimatroide. Además, la definición de *selectores* en el antimatroide será determinante para expresar la familia de valores razonables directos como un conjunto convexo y acotado, y distinguir en él su centro. La consideración de determinados axiomas sobre este convexo genera ciertos subconjuntos convexos que permiten distinguir nuevos valores, entre los que se encuentra el valor de Shapley. La construcción de valores razonables directos tiene similitud con la búsqueda de valores probabilíticos generada por Weber [53]. Además, a partir de la creación de un juego de operador interior sobre el conjunto de caminos del antimatroide, se define una subfamilia de valores razonables directos denominados *valores de localización.* Estos últimos valores siguen la línea del valor de posición introducido por Borm, Owen y Tijs [11] para situaciones de comunicación.

En el Capítulo VI, la familia de *valores razonables indirectos* en un antimatroide se define a partir de otra aplicación, denominada *estimación superior razonable* que considera las estimaciones razonables individuales, una por cada jugador, que generan conjuntamente una cota superior para el core de cada juego de operador interior constituido sobre el antimatroide. Así, a partir de la definición de una estimación superior en el antimatroide, se define su correspondiente *estimación inferior razonable* y la única aplicación que a cada vector no negativo de $\mathbb{R}^N$ hace corresponder un vector comprendido entre los obtenidos a través de ambas estimaciones y que constituye el único valor eficiente para el juego de operador interior determinado por el vector. El valor de Tijs se convierte en un caso particular de estos valores, al ser determinado a partir de la estimación superior minimal. Además, la existencia de una única estimación superior en un poset-antimatroide genera la definición de un único valor razonable indirecto en esta estructura, y por tanto, la obtención del valor de Tijs. Destacar, de nuevo, la aplicación del cálculo matricial para facilitar la expresión de una estimación superior razonable y por ende, el valor razonable indirecto obtenido a partir de ella. Finalmente se deteminan también *valores indirectos de localización*, considerando nuevamente el conjunto de caminos del antimatroide.

Índice

Capítulo I

Juegos cooperativos y antimatroides

En este primer capítulo se introducen, básicamente, los conceptos y resultados conocidos que se utilizan en capítulos posteriores. Son tres los bloques temáticos que se relacionan: la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible, la teoría de grafos y la teoría de antimatroides y geometrías convexas. En la primera sección se aborda el primero de ellos, y se refiere al campo donde se desarrolla la investigación realizada. La tercera sección hace referencia a las estructuras combinatorias sobre las cuales se definen los juegos que serán objeto de estudio en este trabajo. Finalmente comentar que, el interés por dedicar la segunda sección a recopilar ciertos aspectos sobre grafos se debe a que varios antimatroides con aplicación en juegos cooperativos se constituyen a partir de un grafo.

1. Juegos cooperativos de utilidad transferible

Muchas situaciones interesantes, desde el punto de vista del comportamiento económico, pueden ser modeladas convenientemente como un juego cooperativo de utilidad transferible (o juego cooperativo en forma de función característica). Por ello, en esta sección se citarán aquellos contenidos relativos a juegos cooperativos que son relevantes en este trabajo de investigación. Más detalles o una posible ampliación sobre el tema pueden conseguirse en Driessen [17], de donde también proceden los resultados que se exponen a continuación.

Definición 1.1. *Sea N un conjunto finito y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ una aplicación sobre el conjunto de las partes de N tal que $v(\emptyset) = 0$. El par (N, v) se denomina juego cooperativo de utilidad transferible.*

En este trabajo, la mención a juego cooperativo se referirá siempre a juego cooperativo de utilidad transferible. Al conjunto de todos los juegos cooperativos sobre un conjunto N se le denotará con G^N. Dado un juego cooperativo (N, v), a los elementos de N se les denomina *jugadores*, a la aplicación v *función característica* del juego, y al conjunto N se le llama *gran coalición*. Es habitual identificar, cuando no hay posibilidad de confusión, el juego cooperativo (N, v) con su función característica v. Además, cuando se considere conveniente, se podrá suponer que los jugadores de la gran coalición están numerados por $1, 2, \ldots, n$; y entonces, sin pérdida de generalidad, se admitirá que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cada subconjunto de jugadores $S \subseteq N$ se denomina *coalición* y el número real $v(S)$ es el *valor de la coalición* S en el juego v. El valor de una coalición se interpreta bien como el beneficio máximo o bien como el coste mínimo de dicha coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Así, si $v(S)$, para cada $S \subseteq N$, representa un beneficio, el juego v se dirá que es un *juego de beneficios*, mientras que si la función característica valora costes, se dirá que v es un *juego de costes*. Este trabajo se centra principalmente en juegos de beneficios, por lo que los conceptos y resultados que se relacionan a continuación son enunciados en este ámbito.

Determinadas propiedades de la función característica de un juego cooperativo generan distintos tipos de juegos. Así, se dice que un juego cooperativo (N, v) es

monótono: si $v(S) \leq v(T)$, para $S, T \in 2^N$ tales que $S \subseteq T$;
superaditivo: si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$, para $S, T \in 2^N$ tales que $S \cap T = \emptyset$;
convexo: si $v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$, para $S, T \in 2^N$.

En un juego cooperativo de beneficios, mientras la propiedad de monotonía indica que el beneficio de una coalición no disminuye si se aumenta el número de jugadores, las propiedades de superaditividad y convexidad permiten deducir que los jugadores se muestran predispuestos a la cooperación, puesto que el beneficio obtenido por dos coaliciones que participan en el juego de forma conjunta es, como mínimo, el beneficio que obtendrían ambas coaliciones por separado. De hecho, existen autores que presuponen la propiedad de superaditividad en la definición de juego de beneficios, como por ejemplo Shapley [46].

A partir de la introducción de los juegos cooperativos, por Neumann y Moorgenstern [52] en 1944, el problema más extendido fue estudiar cómo repartir las ganancias de la gran coalición, suponiendo que se llega a algún tipo de entendimiento entre todos los jugadores. Esta cuestión condujo a definir el concepto de vector de pago eficiente.

En un juego v, cada vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ se denomina *distribución* o *vector de pago* si la coordenada x_i, para cada $i \in N$, representa el pago correspondiente al jugador i. Así, es usual denotar con $x(S)$ al pago de la coalición $S \subseteq N$ según el vector de pago x, adoptando por convenio que $x(\emptyset) = 0$; y por tanto,

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

Un vector de pago x se llama *eficiente* si distribuye exactamente el valor de la coalición N entre los jugadores, es decir, si $x(N) = v(N)$. Los vectores de pago que cumplen este principio de eficiencia se llaman *preimputaciones* y, atendiendo al problema antes comentado, una *solución* o *concepto de solución* sobre una colección no vacía de juegos es una aplicación ψ que asocia a cada juego cooperativo v de dicha colección un subconjunto $\psi(v)$ del conjunto de preimputaciones.

La mayoría de los conceptos de solución propuestos para los juegos cooperativos de beneficios requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado *principio de racionalidad individual*, que exige que el pago a cada jugador mediante el vector de pago sea como mínimo la cantidad que el jugador obtendría por sí mismo en el juego.

Definición 1.2. *Sea $v \in G^N$ un juego. Se define el conjunto de imputaciones de v como la familia de preimputaciones que verifica el principio de racionalidad individual, esto es:*

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), \ x_i \geq v(\{i\}) \ \text{para todo } i \in N \right\}.$$

Otro criterio de distribución satisfactorio en un juego de beneficios podría ser que, no sólo cada jugador, sino también cada coalición $S \in 2^N$ reciba al menos la cantidad que ésta puede obtener por sí sola; es decir, que para toda $S \subseteq N$, el vector de pago x verifique que $x(S) \geq v(S)$. El conjunto constituido por todos los vectores de pago eficientes que satisfacen estas desigualdades da lugar al concepto de solución denominado core del juego v. La definición del core de un juego de beneficios es por tanto la siguiente.

Definición 1.3. *Sea $v \in G^N$ un juego. Se define el core de (N, v) como el conjunto dado por*

$$Core(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), \ x(S) \geq v(S) \ \text{para todo } S \subseteq N \right\}.$$

El core de un juego fue introducido por Gillies [25] en 1953 y se considera un concepto muy natural de solución. Sin embargo, presenta inconvenientes, uno de éstos es que en muchos juegos se trata de un conjunto vacío. No obstante, existen importantes familias de juegos donde el core es no vacío, por ejemplo la clase de juegos convexos. Bondareva [9] y Shapley [47] obtuvieron, de forma independiente, una caracterización de los juegos con core no vacío, basada en los conceptos de colección equilibrada y de juego equilibrado.

Dado (N, v) un juego cooperativo, una colección $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de N, distintos y no vacíos, se dice que es equilibrada sobre N si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ tales que, para todo $i \in N$, $\sum_{\{j:i\in S_j\}} \alpha_j = 1$. Si para cualquier colección equilibrada sobre N, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N)$$

entonces se dice que el juego v es *equilibrado.*

Teorema 1.4. *Un juego $v \in G^N$ es equilibrado si, y sólo si $Core(v) \neq \emptyset$.*

Sea $v \in G^N$ un juego cooperativo y considérese una coalición $S \subset N$, el juego $v_S \in G^S$ representa la restricción de la función característica v a 2^S. Teniendo en cuenta el teorema anterior, se dice que un juego (N, v) es *totalmente equilibrado* si $Core(v_S) \neq \emptyset$ para todo $S \subseteq N$. Los juegos totalmente equilibrados se identifican con los denominados *juegos de mercado* introducidos por Kannai [31], como ponen de manifiesto Shapley y Shubik [48].

A veces sucede que, aún cuando el core no sea vacío, el conjunto que queda determinado por éste resulta demasiado pequeño para dar soluciones razonables a ciertos juegos. Esta objeción llevó a Weber [53], en 1978, a proponer como concepto de solución un conjunto que contiene al core, y que es siempre no vacío. La definición del *conjunto de Weber* se basa en los vectores de contribución marginal. Dada una determinada ordenación de los jugadores en un juego $v \in G^N$, la componente i-ésima del vector de contribución marginal se corresponde con la contribución marginal del jugador i respecto a la coalición que forma junto a sus predecesores en la ordenación de partida; y el conjunto de Weber es la envoltura convexa de los citados vectores. Así, si Θ^N es la familia de permutaciones del conjunto N, para cada $\theta \in \Theta^N$ se considera la relación de orden $\leq_\theta$ que origina θ entre todos los jugadores y, para cada $i \in N$, se denota con S_i^θ a la coalición formada por el jugador i y los predecesores de i según dicha ordenación, $S_i^\theta := \{j \in N : j \leq_\theta i\}$. En estas condiciones, se define el *vector de contribución marginal* $x^{\theta,v} = \left(x_i^{\theta,v}\right)_{i\in N}$ tal que

$$x_i^\theta(v) = v\left(S_i^\theta\right) - v\left(S_i^\theta \setminus \{i\}\right), \text{ para cada } i \in N, \tag{I.1}$$

y la definición del conjunto de Weber queda como sigue.

Definición 1.5. *Sea $v \in G^N$. El conjunto de Weber del juego v es la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal; esto es*

$$Weber\,(v) = conv\left\{x^{\theta,v} : \theta \in \Theta^N\right\}.$$

Proposición 1.6. *Sea $v \in G^N$. Se verifica que:*

1. $Core(v) \subseteq Weber\,(v)$
2. $Core(v) = Weber\,(v)$ *si, y sólo si v es un juego convexo.*

Entre los conceptos de solución figuran aquéllos que asignan a cada juego una única distribución. A toda solución ψ que asocia a cada juego un único vector de pago se le denomina *valor*. Entre los valores más destacados están el valor de Shapley y el valor de Tijs, ambos pertenecientes al conjunto de imputaciones del juego considerado.

El valor de Shapley, introducido por Lloyd Shapley [46] en 1953, constituye una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores a las distintas coaliciones. A continuación se define este concepto de solución y se denota con $|S|$ al cardinal de la coalición S, para cada $S \subseteq N$.

Definición 1.7. *Sea $v \in G^N$. Se denomina valor de Shapley del juego dado v al vector $Sh\,(v) \in \mathbb{R}^N$ cuyas componentes, $Sh_i\,(v)$, para cada $i \in N$, son*

$$Sh_i\,(v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\left(v\,(S) - v\,(S \setminus \{i\})\right).$$

La linealidad del valor de Shapley permite que pueda expresarse en términos de los dividendos de Harsanyi. Si $v \in G^N$, y $S \subseteq N$ es una coalición no vacía, el *dividendo de Harsanyi* de S en v es el número

$$\Delta_v\,(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}\, v\,(T). \tag{I.2}$$

Proposición 1.8. *Sea $v \in G^N$. Para cada $i \in N$, el valor de Shapley verifica que*

$$Sh_i\,(v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \frac{\Delta_v\,(S)}{|S|}.$$

A través de la fórmula anterior, los dividendos de Harsanyi se convierten en expresiones determinantes para conocer el valor de Shapley. De ahí que se intenten buscar formas alternativas para su cálculo efectivo, pudiéndose establecer el siguiente resultado en el que los dividendos de Harsanyi se obtienen de manera recursiva.

Proposición 1.9. *Sea $v \in G^N$. Para cada $S \subseteq N$, se verifica que*

$$\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{T \subset S} \Delta_v(T).$$

Entre las diversas caracterizaciones del valor de Shapley que se conocen, se encuentra su identificación con el centro del conjunto Weber del juego.

Proposición 1.10. *Si $v \in G^N$ se verifica que:*

$$Sh(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\theta \in \Theta^N} x^{\theta,v}.$$

En particular, se tiene que el valor de Shapley de un juego convexo es el centro de los extremos del core. La proposición anterior permite además definir otra familia de valores que determinan imputaciones, son los denominados *valores de orden aleatorio*. Si Θ^N es la familia de permutaciones sobre los jugadores de N, un valor ψ se denomina valor de orden aleatorio si existe una distribución de probabilidad $(\lambda_\theta)_{\theta \in \Theta^N}$ en Θ^N (entonces $\lambda_\theta \in [0,1]$ para cada $\theta \in \Theta^N$ y $\sum_{\theta \in \Theta^N} \lambda_\theta = 1$) tal que para todo $v \in G^N$ se verifica que

$$\psi(v) = \sum_{\theta \in \Theta^N} \lambda_\theta x^{\theta,v}. \tag{I.3}$$

Con esta definición, el valor de Shapley se convierte también en el centro de los valores de orden aleatorio de un determinado juego.

El valor de Tijs o τ-valor pertenece a un grupo de valores de más reciente creación denominados *valores de compromiso*, mediante los cuales se pretende conseguir un compromiso entre los jugadores para el reparto real de la cantidad disponible. Fue creado por Tijs [49] en 1981 y posteriormente desarrollado en Driessen y Tijs [18] y Tijs y Otten [50], entre otros. En tales trabajos se advierte que el τ-valor está basado en las ideas de una cota superior para el core (que será el vector superior) y el exceso con respecto a esta cota superior.

Definición 1.11. *Sea $v \in G^N$. El vector superior $M^{\tau,v} \in \mathbb{R}^N$ de coordenadas $M_i^{\tau,v}$, para todo $i \in N$, y la función de desfase $g^v : 2^N \to \mathbb{R}$ del juego (N, v) vienen dados por*

1. $M_i^{\tau,v} := v(N) - v(N \setminus \{i\})$, *para todo* $i \in N$.
2. $g^v(S) := \sum_{i \in S} M_i^{\tau,v} - v(S)$, *para cada* $S \subseteq N$.

La i-ésima coordenada $M_i^{\tau,v}$ del vector superior es denominada contribución marginal del jugador i (con respecto a la gran coalición) en el juego v, mientras que el valor $g^v(S)$, para cada $S \subseteq N$, se denomina desfase de la coalición S en el juego considerado.

El desfase no negativo de una coalición S en un juego v representa la pérdida conjunta de los jugadores que pertenecen a S si éstos decidieran abandonar el pago que habrían de recibir a través del vector $M^{\tau,v}$ para formar su propia coalición S. Se verifica, además, que $g^v(N \setminus \{i\}) = g^v(N)$, para cada $i \in N$. Si v es un juego superaditivo, se demuestra que el desfase de todas las coaliciones individuales es no negativo, y por tanto, los jugadores estarán siempre predispuestos a la cooperación, pues cada jugador prefiere su contribución marginal al valor que puede obtener por sí mismo en el juego.

El valor minimal de la función de desfase del juego pertinente, entre todas las coaliciones que contienen a cada jugador, induce una cota inferior para el core que se denomina vector inferior del juego. Este vector se puede escribir teniendo en cuenta las concesiones que están dispuestos a admitir los jugadores. Así, si $v \in G^N$, el *vector de concesión* $\lambda^v \in \mathbb{R}^N$ tiene por coordenadas, para cada $i \in N$,

$$\lambda_i^v = \text{mín}\{g^v(S) : S \subseteq N,\ i \in S\}. \tag{I.4}$$

Definición 1.12. *Sea $v \in G^N$. El vector $m^{\tau,v} \in \mathbb{R}^N$, de coordenadas*

$$m_i^{\tau,v} = M_i^{\tau,v} - \lambda_i^v, \text{ para cada } i \in N$$

se denomina vector inferior del juego v.

Teorema 1.13. *Sea $v \in G^N$ un juego equilibrado. Entonces, para todo $x \in Core(N, v)$ se verifica que*

$$m^{\tau,v} \leq x \leq M^{\tau,v}.$$

El teorema anterior muestra una de las muchas propiedades que poseen los vectores superior e inferior. Obsérvese que, en un juego cooperativo (N, v), las componentes del vector superior pueden ser consideradas como las aspiraciones máximas de los jugadores. Por tanto, dado un jugador $i \in N$, la formación de una coalición $S \subseteq N$ tal que $i \in S$ es atractiva para el resto de sus miembros siempre que todos ellos reciban su contribución marginal. Así, si el jugador i se complace en permitir esta concesión, a él le quedará el resto del beneficio obtenido por la coalición. Siguiendo este razonamiento, el jugador $i \in N$ siempre podrá elegir pertenecer a aquella coalición en la cual obtenga el mayor beneficio. De aquí se obtiene la siguiente formulación del vector inferior.

Teorema 1.14. *Sea $v \in G^N$ y considérese el vector superior $M^{\tau,v}$. Las coordenadas del vector inferior de v verifican, para cada jugador $i \in N$, que*

$$m_i^{\tau,v} = \max_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \left[v(S) - M^{\tau,v}(S \setminus \{i\}) \right].$$

Así, puesto que en un juego, el vector inferior constituye un vector de pago mínimo razonable y el vector superior constituye un vector utopía o de pago deseable para todos los jugadores, será especialmente interesante la clase de juegos donde:

1) Para cada jugador, el pago mínimo razonable no exceda del vector de pago utopía.

2) La suma de todos los pagos minimales razonables de los jugadores no exceda del valor de la gran coalición.

3) La suma de los pagos utopía de todos los jugadores sea al menos el valor de la gran coalición.

A esta familia de juegos se le denomina juegos cuasi-equilibrados.

Definición 1.15. *Un juego $v \in G^N$ se denomina cuasi-equilibrado si, y sólo si*

$$m^{\tau,v} \leq M^{\tau,v} \qquad y \qquad \sum_{i \in N} m_i^{\tau,v} \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i^{\tau,v}.$$

En la clase de juegos cuasi-equilibrados, el valor de Tijs para un juego v es el único vector de pago eficiente que es un valor de compromiso entre los vectores $m^{\tau,v}$ y $M^{\tau,v}$.

Definición 1.16. *Sea $v \in G^N$ un juego cuasi-equilibrado. Se define el τ-valor del juego v como el vector $\tau(v) \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\tau(v) = m^{\tau,v} + \alpha\left(M^{\tau,v} - m^{\tau,v}\right), \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ verifica que } \sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N).$$

o equivalentemente,

$$\tau(v) = \begin{cases} M^{\tau,v}, & si\ g^{v}(N) = 0 \\ M^{\tau,v} - g^{v}(N)\left(\sum\limits_{i\in N}\lambda_i^{v}\right)^{-1}\lambda^{v}, & si\ g^{v}(N) > 0. \end{cases}$$

Entre los juegos cuasi-equilibrados se encuentran los juegos equilibrados. Esto permitió a Driessen [17] investigar las condiciones que determinan cuándo el τ-valor de un juego cuasi-equilibrado pertenece al core. La no negatividad de la función de desfase constituye una condición necesaria, pero en general no es suficiente para que el core sea no vacío. Sin embargo, en el caso de que el juego posea una función de desfase no negativa y el desfase de la gran coalición sea nulo, ocurre que el core del juego consiste en un único vector, que es precisamente el τ-valor.

Proposición 1.17. *Sea $v \in G^N$, tal que $g^v(S) \geq 0$, para todo $S \subset N$ y $g^v(N) = 0$. Entonces $Core(v) = \{\tau(v)\} = \{M^{\tau,v}\}$.*

Conocido el interés que tiene la propiedad de convexidad en juegos cooperativos, y habida cuenta de que no todos son juegos convexos, en Driessen [17] se introducen otros juegos con propiedades cercanas y se estudia su repercusión en conceptos de solución conocidos. Así, la función de desfase de un juego cooperativo permite caracterizar las familias de juegos cooperativos que se relacionan a continuación.

Definición 1.18. *Sea $v \in G^N$. Se dice que el juego v pertenece a la clase C_N^1 de juegos 1-convexos sobre el conjunto N si verifica que:*

$$0 \leq g^v(N) \leq g^v(S)\ \text{, para todo } S \subseteq N, S \neq \emptyset.$$

Una condición necesaria y suficiente para que un juego sea 1-convexo la establece el siguiente teorema.

Teorema 1.19. *Sea $v \in G^N$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) El juego v es 1-convexo.

(b) Para cada $i \in N$, el vector $x^i = \left(x_j^i\right)_{j\in N} \in \mathbb{R}^N$ de componentes

$$x_j^i = \begin{cases} M_j^{\tau,v}, & si\ j \neq i \\ M_j^{\tau,v} - g^v(N), & si\ j = i, \end{cases}$$

pertenece al core del juego v.

Generalizando el concepto de juego 1-convexo, existe la definición de juego k-convexo, para $k \in \mathbb{N}$.

Definición 1.20. *Sea $v \in G^N$ y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que el juego v pertenece a la clase C_N^k de juegos k-convexos sobre el conjunto N si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $g^v(S) \geq g^v(N)$, *para todo* $S \subseteq N$ *tal que* $|S| \geq k$.
2. $g^v(N) \geq g^v(S)$, *para todo* $S \subseteq N$ *tal que* $|S| = k-1$.
3. $g^v(S)+g^v(T) \geq g^v(S \cup T)+g^v(S \cap T)$, *para todo* $S, T \subseteq N$ *tal que* $|S \cup T| \leq k-1$.
4. $g^v(S)+g^v(T) \geq g^v(N)+g^v(S \cap T)$, *para todo* $S, T \subseteq N$ *tal que* $|S \cup T| = k$.

El siguiente teorema facilita otra reformulación de la k-convexidad de un juego, de forma que las dos últimas condiciones en la definición anterior son sustituidas por otros dos requisitos equivalentes a ellas.

Teorema 1.21. *Sea $v \in G^N$ y $k \in \mathbb{N}$. El juego v es k-convexo si y sólo si satisface todas las siguientes condiciones:*

(K1) $g^v(S) \geq g^v(N)$, *para todo* $S \subseteq N$ *tal que* $|S| \geq k$.

(K2) $g^v(N) \geq g^v(S)$, *para todo* $S \subseteq N$ *tal que* $|S| = k-1$.

(K3) $g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$, *para todo* $i \in N$ *y cualesquiera* S, T *tales que* $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ *con* $|T| \leq k-2$.

(K4) $g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(N) - g^v(T)$, *para todo* $i \in N$ *y cualesquiera* S, T *tales que* $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ *con* $|T| = k-1$.

Cuando el desfase de cualquier coalición individual es mínimo entre los desfases de las coaliciones que la contienen, surge la definición de juego semiconvexo.

Definición 1.22. *Sea $v \in G^N$. Se dice que v pertenece a la clase SC_N de juegos semiconvexos sobre el conjunto N si verifica que*

$$0 \leq g^v(\{i\}) \leq g^v(S), \text{ para todo } i \in N \text{ y para todo } S \subseteq N \text{ tal que } i \in S.$$

La familia de juegos convexos sobre un conjunto N está contenida en la clase de juegos semiconvexos definidos sobre dicho conjunto. Además, existen otras importantes relaciones entre las familias de juegos anteriores. A continuación, se destacan las que serán relevantes en este trabajo.

Proposición 1.23. *Sea $v \in G^N$.*

1. *Si v es un juego convexo, entonces v es un juego semiconvexo.*
2. *Para $k \geq |N| - 1$, se verifica que v es un juego k-convexo si y sólo si v es un juego convexo.*

Reseñar, finalmente, que mientras que la función de desfase de un juego convexo es monótona creciente, se verifica que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, con $1 \leq k \leq |N| - 2$, la k-convexidad de un juego genera una división específica entre los desfases de las distintas coaliciones. Concretamente, estos desfases pueden ser organizados en tres niveles bien diferenciados. Un primer nivel o nivel inferior, en el que se encuentran los desfases de aquellas coaliciones que tienen cardinal menor o igual a $k - 1$, y donde la función de desfase es monótona creciente; un segundo nivel o nivel intermedio, en el que se encuentra el desfase de la gran coalición y el desfase de cualquier coalición con $|N| - 1$ jugadores; y, un tercer nivel o nivel superior, en el que no se garantiza la monotonía de la función de desfase, y donde se encuentran los desfases del resto de coaliciones, es decir, pertenece a este nivel el desfase de cualquier coalición cuyo cardinal es mayor o igual a k y menor o igual a $|N| - 2$. De esta división en niveles del desfase de las distintas coaliciones en un juego k-convexo, para $1 \leq k \leq |N| - 2$, se deduce lo siguiente. La k-convexidad y la m-convexidad, para $k \neq m$, son, en general, nociones contradictorias. Para $k = 1$, el nivel inferior antes referido estaría constituido únicamente por el desfase de la coalición vacía, que es cero.

Asociado a un juego cooperativo $v \in G^N$, se denomina *juego dual de v* al par (N, v^*), donde $v^* : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ verifica que

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S), \text{ para cada } S \subseteq N. \tag{I.5}$$

Mientras en un juego de beneficios la propiedad prioritaria es la superaditividad, en el caso de un juego de costes la predisposición de los jugadores a cooperar se manifiesta mediante la propiedad de subaditividad. Así, las nociones de juego *subaditivo* y juego *cóncavo* se obtienen, respectivamente, de las definiciones de juego superaditivo y juego convexo, sin más que invertir las desigualdades exigibles en éstas. Sin embargo, el juego dual de un juego superaditivo no es, en general, un juego subaditivo, y por tanto, no puede ser interpretado como un juego de costes propiamente dicho.

También a las soluciones sobre la familia de juegos cooperativos de costes es habitual exigirles el principio de racionalidad individual. En este caso, este principio manifiesta la condición de que cada jugador realice un pago no superior al que debería efectuar si actuara en solitario. Así, para un juego $v \in G^N$ de costes, el conjunto de *imputaciones de* v queda como sigue

$$I(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N),\ x_i \leq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N\right\}. \tag{I.6}$$

Y de forma similar a la definición del core de un juego de beneficios, para el juego de costes v,

$$Core(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N),\ x(S) \leq v(S)\ \forall S \subset N\right\}.$$

Con carácter general, la relación de dualidad entre dos juegos cooperativos no garantiza obtener imputaciones de uno de los juegos a partir del conjunto de imputaciones del otro; sin embargo, sí es posible si se impone alguna exigencia más, como es la de pertenecer al core.

Entre las relaciones conocidas de un juego y su dual, se encuentran las siguientes.

Proposición 1.24. *Sea $v \in G^N$ y v^* su juego dual. Son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. *El juego v es monótono si, y sólo si lo es también v^*.*
2. *El juego v es convexo si, y sólo si v^* es cóncavo.*
3. *El conjunto $Core(v)$ coincide con el conjunto $Core(v^*)$ si v es un juego de beneficios y v^* es un juego de costes.*
4. *Los valores de Shapley coinciden, esto es $Sh(v) = Sh(v^*)$.*

2. Teoría de grafos

El trabajo de Leonhard Euler sobre los puentes de Königsberg, en 1736, es considerado como uno de los primeros resultados de la teoría de grafos. Un *grafo*, en términos generales, representa las relaciones existentes entre los elementos de un determinado conjunto de objetos. Debido a su generalidad, los grafos se utilizan en una gran variedad de campos, como son Diseño y Análisis de Redes de Comunicación, Gestión y Administración, etc, y su aplicación en disciplinas tan diferentes ha dado lugar a una gran diversidad en la terminología referente a ellos.

Puesto que en el contenido de este trabajo se hacen algunas menciones sobre grafos, a continuación se revisan ciertas nociones y conceptos propios de la teoría de grafos, que han sido extraídos, en su mayor parte, de Jungnickel [30] y Bilbao [8]. Aquí sólo se considerarán grafos finitos y se define un grafo como un sistema matemático abstracto.

Un grafo $G = (V, E)$ consiste en dos conjuntos: un conjunto finito V de elementos llamados *vértices* y un conjunto finito E de elementos llamados *aristas*. Cada arista es identificada con un par no ordenado de vértices $\{u, v\}$.

De una arista, se dice que es *incidente* en sus vértices. Dos vértices son *adyacentes* si son vértices de una misma arista. En este trabajo se considerarán únicamente *grafos simples*, es decir, aquéllos en los que no hay aristas que tengan igual par de vértices y tampoco hay aristas con sus dos vértices iguales.

Considerado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G consiste en un nuevo grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Además, el *subgrafo* de G *inducido* por un conjunto de vértices $B \subseteq V$ se denota por $G[B]$ y es el subgrafo obtenido al eliminar los vértices del conjunto $V \setminus B$ y todas las aristas que son incidentes en un vértice de $V \setminus B$. Asímismo, para un subconjunto de aristas $F \subseteq E$, se denota con $G[F]$ al subgrafo de G que conforman las aristas de F y sus correspondientes vértices.

Un *camino* en un grafo G es una secuencia de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$, tal que v_{i-1} es adyacente a v_i, para $i = 1, \dots, k$. Los vértices v_0, v_k son denominados sus *vértices extremos*. El número k de aristas usadas es la *longitud del camino*. Obsérvese que, en un camino, aristas y vértices pueden repetirse. Para hacer referencia a un camino en el que no se repite ningún vértice se usará, en este trabajo, la notación $[u, v]$, indicando así que u y v son sus vértices extremos.

Un *ciclo* en un grafo G es un camino con al menos tres vértices diferentes y que no tiene vértices repetidos, excepto el primero y el último que son iguales. El grafo G es un grafo *acíclico* si no tiene ciclos.

Un grafo G es *conexo* si para cualesquiera dos vértices, u y v, existe un camino $[u, v]$ en G. Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico; y por tanto, cualesquiera dos vértices en un árbol están conectados por un único camino.

En numerosas ocasiones, aparecen grafos valorados, donde cada arista trae consigo una información adicional, un valor numérico denominado, en general, *peso* o *longitud de la arista*, y que representa una característica asociada a ella, como puede ser: longitud, coste, beneficio, capacidad o resistencia, y que, en definitiva, aporta el valor de la relación existente entre los vértices extremos de la arista estimada. Estos grafos se denominan *grafos ponderados* o *redes*.

Cuando G sea un grafo en el que exista un vértice específicamente destacado entre todos los demás se dirá que G es un grafo enraizado o, indistintamente, que G es un grafo con raíz. Si además G es un árbol, entonces se dirá que G es un árbol enraizado, o bien que G es un árbol con raíz.

A veces sucede que, cuando dos vértices de un grafo están relacionados, el orden es importante y por consiguiente, el par $\{u, v\}$ no significa lo mismo que el par $\{v, u\}$. Esta particularidad se expresará mediante un *digrafo* o *grafo dirigido.*

Un digrafo $D = (V, A)$ consiste en dos conjuntos: un conjunto finito V de *nodos* o *vértices* y un conjunto A de *arcos* o *aristas.* Cada arco es identificado con un par ordenado (u, v), siendo u su nodo inicial y v su nodo final; y se dice que u es *predecesor* de v y que v es *sucesor* de u.

Una gran parte de las definiciones establecidas para un grafo se hacen extensivas a un digrafo, sin más que considerar, cuando sea preciso, las orientaciones en el digrafo. Por ejemplo, un *camino* (dirigido) en un digrafo D es una secuencia de vértices $v_0v_1 \dots v_k$, tal que v_{i-1} es predecesor de v_i, para $i = 1, \dots, k$. Los *subgrafos inducidos* de un digrafo se definen como en el caso de un grafo no dirigido.

Un nodo r en un digrafo D es una *raíz* si hay un camino, en el que no se repite ningún nodo, desde r a cada uno del resto de nodos. Un digrafo D es un *árbol* si el grafo no dirigido que resulta después de eliminar las orientaciones en D es un árbol. *Un árbol con* *raíz* se caracteriza por la existencia de un único camino desde la raíz a cualquier otro nodo.

Los árboles constitituyen uno de los tipos de grafos o digrafos más importantes. Su importancia radica en que en ellos se conectan vértices utilizando el menor número posible de aristas. Destacan los *árboles con raíz*, por tener aplicación en una gran variedad de disciplinas. A veces, en una organización jerárquica, por ejemplo, los nodos representan los distintos individuos, junto con sus cargos; y las relaciones entre los cargos se describe mediante una arista que une cada superior con cada uno de sus subordinados inmediatos. En este tipo de representaciones existe un nodo, denominado raíz, cuyo conjunto de predecesores es vacío. Este nodo especial o raíz representa al jefe o director general de la organización.

En particular, un árbol dirigido con raíz se dice que es una *cadena* si sus nodos están localizados sobre un único camino dirigido.

Un grafo, ya sea dirigido o no, suele ilustrarse en el plano mediante un diagrama, de la forma siguiente. Los vértices o nodos se representan mediante puntos; las aristas o arcos, mediante segmentos que conectan los vértices extremos de cada arista o arco; y la longitud de cada arista o arco, mediante un número colocado cerca de la arista y que hace alusión a su peso o longitud. Si el grafo es dirigido, para indicar cuáles son los vértices inicial y final de cada arco, los segmentos que unen pares de puntos se sustituyen por flechas que parten del nodo inicial y terminan en el nodo final de cada arco. Obsérvese, no obstante, que la definición de grafo no contiene referencias acerca de las formas o posiciones de las aristas o arcos que puedan conectar pares de vértices o nodos, y tampoco considera ningún orden de las posiciones de los vértices o nodos. Por tanto, para un determinado grafo, no existe un único diagrama que lo represente, e incluso, puede ocurrir que dos diagramas que tengan distinto aspecto, representen un mismo grafo.

Un modelo de cooperación, basado en la teoría de grafos, y que es pionero en la línea de investigación seguida en este trabajo, es el que propone Myerson [40], al que denominó *estructura de comunicación*.

Una estructura de comunicación es un grafo $G = (N, E)$ tal que el conjunto de vértices es la gran coalición y el conjunto de aristas viene determinado por la siguiente relación:

$$\{i, j\} \in E \text{ si, y sólo si existe comunicación entre } i \text{ y } j.$$

Entonces, la colección de coaliciones de jugadores que pueden formarse es:

$$\mathcal{F} = \left\{ S \subseteq 2^N : \text{el subgrafo } G[S] \text{ es conexo} \right\}.$$

Este modelo y los que han ido aparecieron a partir de él, sugieren representar la familia de coaliciones realmente interesantes en un juego cooperativo mediante un grafo. Siguiendo esta idea, a partir de ahora, para cada conjunto finito $N \neq \emptyset$, será habitual representar una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de N mediante un grafo dirigido, cuyos nodos son los conjuntos $S \in \mathcal{F}$, y cuyos arcos vienen determinados por la relación $\subseteq$, que es la siguiente: si $S, T \in \mathcal{F}$, entonces

$$S \subseteq T \text{ si, y sólo si } \{R \in \mathcal{F} : S \subseteq R \subseteq T\} = \{S, T\}.$$

Dicho grafo recibe el nombre de *diagrama de Hasse* y, en su trazado, se omitirá siempre el sentido de las flechas que representan sus arcos, conviniendo que éstas se encuentran orientadas hacia el subconjunto de mayor cardinal.

3. Antimatroides y geometrías convexas

Los *antimatroides* son sistemas de conjuntos introducidos por Dilworth [16] en 1940 como un caso particular de retículos submodulares, y que otros autores han obtenido a partir de la abstracción de ciertas propiedades combinatorias. Edelman [21] en 1980, mostró que cierta propiedad, relacionada con la convexidad y la existencia de un operador clausura, estaba inducida por otra estructura, denominada *geometría convexa*, que se corresponde con la estructura dual de un antimatroide. Un estudio sistemático de estas estructuras se comenzó con Edelman y Jamison [22] en 1985, enfatizando la abstracción combinatoria de la convexidad. Posteriormente, Jiménez-Losada [29] en 1998, utilizó los antimatroides como estructuras de coaliciones en juegos cooperativos.

Con el propósito de continuar en la misma línea de investigación que Jiménez-Losada, se presentan aquí algunos resultados y definiciones sobre antimatroides y geometrías convexas que serán de utilidad en capítulos posteriores. Más detalles pueden consultarse en Korte, Lóvasz y Schrader [32], Goecke, Korte y Lóvasz [26] y Jiménez-Losada [29].

Definición 3.1. *Dado un conjunto finito N, sea $\mathcal{A} \subseteq 2^N$ una colección de subconjuntos de N tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$. El par $(N, \mathcal{A})$ se denomina antimatroide si satisface los siguientes axiomas:*

(A1) Accesibilidad: si $S \in \mathcal{A}$, con $S \neq \emptyset$, existe un elemento $i \in S$ tal que $S \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$.

(A2) Unión: si $S, T \in \mathcal{A}$, entonces $S \cup T \in \mathcal{A}$.

A partir de la definición anterior, se deduce la denominada *propiedad de aumentación*: si $S, T \in \mathcal{A}$ verifican que $|T| > |S|$, entonces existe $i \in T \setminus S$ tal que $S \cup \{i\} \in \mathcal{A}$. Puesto que se quiere contemplar a la cooperación total como una situación particular del modelo de cooperación parcial desarrollado en este trabajo, en lo que sigue, para exigir que $N \in \mathcal{A}$, se asumirá que todos los antimatroides son *normales*, esto es, se impondrá que cualquier antimatroide $(N, \mathcal{A})$ verifica la siguiente condición:

(A3) Para cada $i \in N$, existe $S \in \mathcal{A}$ tal que $i \in S$.

Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Los elementos de $\mathcal{A}$ se denominan *conjuntos factibles*. Si $i \in N$ es tal que $\{i\} \in \mathcal{A}$, entonces se dice que i es *átomo*, y el conjunto de todos los átomos del antimatroide se designará con $a(\mathcal{A})$. Aquellos elementos $i \in N$ que verifican que $N \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$ se denominarán, en este trabajo, *coátomos*, y el conjunto de los coátomos del antimatroide se denotará con $ca(\mathcal{A})$. La familia $\mathcal{A}$ podrá ser representada mediante su diagrama de Hasse, y se supondrá, sin pérdida de generalidad, que los elementos de N están numerados por $1, 2, \ldots, n$; y por tanto, N será identificado, siempre que se estime conveniente, con el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dado un antimatroide, se puede definir en él un operador denominado *operador interior*, el cual será el concepto clave para definir los juegos objeto de estudio en esta tesis doctoral.

Definición 3.2. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El operador interior asociado a $(N, \mathcal{A})$ se define como la aplicación $int : 2^N \to 2^N$ que asigna a cada $S \subseteq N$ el subconjunto*

$$int(S) := \bigcup_{\{T \in \mathcal{A} \,:\, T \subseteq S\}} T,$$

denominado interior de S.

Nótese que, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, para cualquier $S \subseteq N$ se verifica que $int(S) \in \mathcal{A}$, debido al axioma *(A2)*. Por tanto, se entiende el interior de un subconjunto de N como el mayor conjunto factible contenido en él. Además, se cumplen, entre otras, las siguientes propiedades.

Proposición 3.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El operador interior asociado verifica que:*

(I1) $int\,(S) \subseteq S$*, para todo* $S \subseteq N$*;*

(I2) Para todo $S \subseteq N$*, se verifica que* $int\,(S) = S$ *si, y sólo si* $S \in \mathcal{A}$*;*

(I3) $int\,(S) \subseteq int\,(T)$*, cualesquiera que sean* S, T *tales que* $S \subseteq T \subseteq N$*.*

Otro concepto relativo a antimatroides que será relevante en este trabajo es el de camino. Antes de su definición, hacer mención que, en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y dado un conjunto factible $S \in \mathcal{A}$, se dice que $i \in S$ es un *punto final* de S si se verifica que $S \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$. Obsérvese que el axioma *(A1)* de Accesibilidad garantiza la existencia de puntos finales para todos los conjuntos factibles de un antimatroide.

Definición 3.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Un conjunto factible $S \in \mathcal{A}$ se denomina camino si posee un único punto final.*

En lo que sigue, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, cuando $S \in \mathcal{A}$ sea camino, se usará la terminología de i-*camino*, para indicar que $i \in S$ es su único punto final. Con esta notación, $S \subseteq N$ es un i-camino si se trata de un conjunto factible minimal que contiene al elemento i (ningún otro conjunto factible incluido en S contiene al elemento i). La familia de todos los caminos del antimatroide se denotará $P\,(\mathcal{A})$. Para cualquier elemento $i \in N$, el conjunto de todos los i-caminos será representado mediante $A\,(i)$, lo que constituye una partición de $P\,(\mathcal{A})$.

Especialmente útil en la demostración de algunos de los resultados expuestos más adelante será la siguiente propiedad, enunciada como lema.

Lema 3.5. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese $S \subseteq N$. Se verifica que $S \in \mathcal{A}$ si, y sólo si para cada $i \in S$ existe un i-camino $T \in A\,(i)$ tal que $T \subseteq S$.*

En particular, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Un conjunto $S \subseteq N$ es factible si y sólo si es unión de caminos.*

Por tanto, se puede afirmar que los caminos permiten reconstruir toda la estructura mediante las uniones entre ellos. De hecho, el siguiente teorema caracteriza las familias de subconjuntos que definen los caminos en un antimatroide.

Teorema 3.7. *Sea N un conjunto finito y para cada $i \in N$, sea $A(i)$ una colección de subconjuntos de N que contienen a i. La familia $P(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in N} A(i)$ es la familia de caminos de un antimatroide si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\bigcup_{\{S \in A(i) : i \in N\}} S = N$
2. *Si $S \in A(i)$, para algún $i \in N$ y $j \in S \setminus \{i\}$, entonces existe $T \in A(j)$ con $T \subseteq S \setminus \{i\}$.*
3. *Si $S \in A(i)$, para algún $i \in N$ y $j \in S \setminus \{i\}$, entonces no existe ningún $T \in A(j)$ con $i \in T \subseteq S$.*

En el siguiente ejemplo se muestra un antimatroide determinado por sus caminos.

Ejemplo 3.8. *Considérese el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ determinado a través de la familia formada por todos sus caminos:*

$$\begin{aligned} A(1) &= \{\{1\}\}, \qquad A(2) = \{\{1,2\}\}, \qquad A(3) = \{\{1,3\}\} \\ A(4) &= \{\{1,3,4\}, \{1,2,4,5\}\}, \qquad A(5) = \{\{1,2,5\}, \{1,3,4,5\}\}. \end{aligned}$$

Su diagrama de Hasse es la Figura I.1 y los elementos de $\mathcal{A}$ se han obtenido realizando las distintas posibilidades de unión entre los caminos y añadiendo el conjunto vacío.

En este antimatroide, se observa la existencia de un único átomo, $a(\mathcal{A}) = \{1\}$, mientras todos los demás elementos son coátomos, $ca(\mathcal{A}) = \{2,3,4,5\}$. Además, hay conjuntos de interior vacío, como es el caso de $\{2,3,4,5\}$ y, en general, cualquier subconjunto de N que no contenga al elemento 1. También existen otros conjuntos de interior no vacío. A modo de ejemplo, se tiene:

$$int(\{1,3,5\}) = \{1,3\}, \quad int(\{1,4,5\}) = \{1\}, \quad int(\{1,2\}) = \{1,2\}.$$

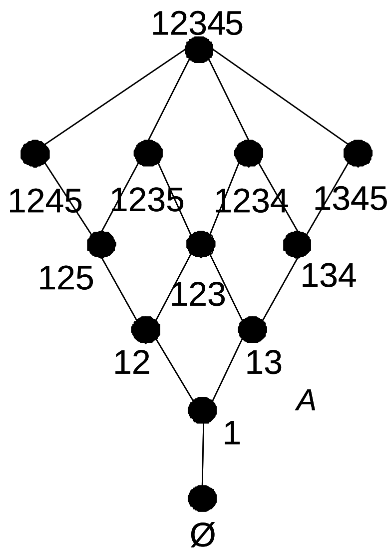

Figura I.1

Una clase especial de antimatroides la constituyen los que, siguiendo la nomenclatura inglesa, serán denominados *poset-antimatroides*. Un *poset* o conjunto parcialmente ordenado es un par $(N, \leq)$, donde N es un conjunto finito y $\leq$ es un orden parcial establecido sobre N. Los órdenes parciales son relaciones que verifican las tres propiedades habituales de orden: reflexiva, antisimétrica y transitiva; pero no necesariamente ocurre que dados dos elementos tengan que estar ordenados. Un *ideal* del poset $(N, \leq)$ es un subconjunto $S \subseteq N$ satisfaciendo que si $i \in S$, entonces para cualquier $j \in N$ con $j \leq i$, según el orden establecido, ocurre que $j \in S$. Se prueba que la familia de ideales de un poset, define un antimatroide sobre el conjunto.

Definición 3.9. *Sea $(N, \leq)$ un poset y considérese la familia $\mathcal{A}$ de ideales de $(N, \leq)$. El par $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide denominado poset-antimatroide.*

Ejemplo 3.10. *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y el orden parcial $1 \leq 3, 2 \leq 3, 2 \leq 4$. Los ideales que determina este orden son*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, N\}$$

El diagrama de Hasse de la Figura I.2 muestra el poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$.

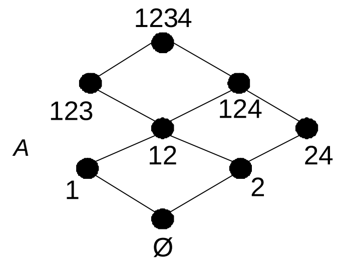

Figura I.2

En el siguiente resultado se muestran importantes caracterizaciones de un poset-antimatroide.

Teorema 3.11. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $(N, \mathcal{A})$ *es un poset-antimatroide.*

(b) Para cada par de subconjuntos $S, T \in \mathcal{A}$ *se verifica que* $S \cap T \in \mathcal{A}$.

(c) Para cada elemento $i \in N$ *existe un único* i*-camino. Es decir,* $|A(i)| = 1$ *para cada* $i \in N$.

A continuación se exponen algunos ejemplos de antimatroides conocidos, los cuales permitirán, según se verá más adelante, modelar las diferentes relaciones entre los jugadores de distintos juegos y establecer aplicaciones de éstos. En Goecke, Korte y Lovász [26] y Korte, Lovász y Schrader [32] pueden consultarse otros ejemplos.

Ejemplo 3.12. *Búsqueda por puntos en un grafo dirigido.*

Sea $G = (V, E)$ *un grafo dirigido con una raíz* $r \in V$. *Se define un antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *denominado antimatroide de búsqueda por puntos en el grafo* G, *considerando* $N = V \setminus \{r\}$ *y tomando la familia* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos* $S \subseteq N$ *tales que, en el subgrafo* $G[S \cup \{r\}]$, *cada nodo* $i \in S$ *puede ser conectado con* r *a través de un camino dirigido.*

Para cada elemento $i \in N$, *los* i*-caminos en el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *son cada uno de los subconjuntos de vértices incluidos en los caminos dirigidos de menor longitud que conectan la raíz con el elemento* i *en el grafo* G. *Obsérvese que también es posible considerar la* *raíz del grafo como parte del conjunto sobre el que se constituye el antimatroide, es decir, considerar* $N = V$. *En ese supuesto, la raíz sería el único átomo del antimatroide y, por tanto, ésta estaría en todos los caminos del antimatroide.*

Un caso particular de este tipo de antimatroides se genera cuando el grafo inicial es un árbol dirigido con raíz. Puesto que en un árbol con raíz, existe sólo un camino dirigido de la raíz a cada uno de los restantes nodos, los antimatroides de búsqueda por puntos determinados a partir de un árbol con raíz son también poset-antimatroides, sin más que tener en cuenta el teorema anterior.

En la Figura I.3 se proporciona un grafo dirigido G *con cuatro nodos, donde el nodo* 1 *actúa como raíz. Se representan, en la misma figura, dos antimatroides. Uno, que es el par* $(\{2,3,4\}, \mathcal{A})$, *en el que no se considera la raíz del grafo como elemento del conjunto total y en el que ésta sólo es tenida en cuenta para construir la estructura; y otro, el antimatroide* $(\{1,2,3,4\}, \mathcal{A}')$, *que sí considera la raíz del grafo inicial como elemento del conjunto total. Ambos son antimatroides de búsqueda por puntos en el grafo* G.

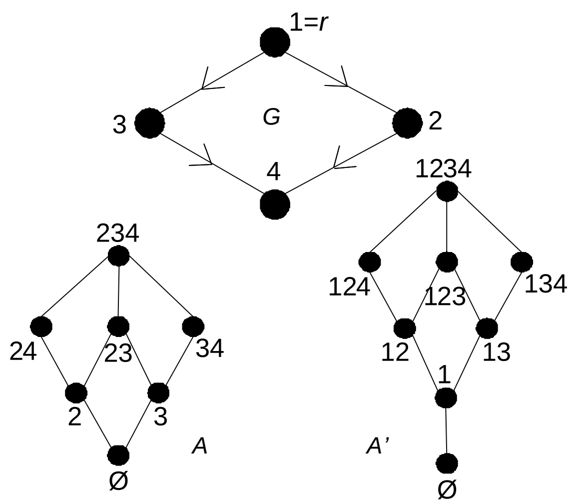

Figura I.3

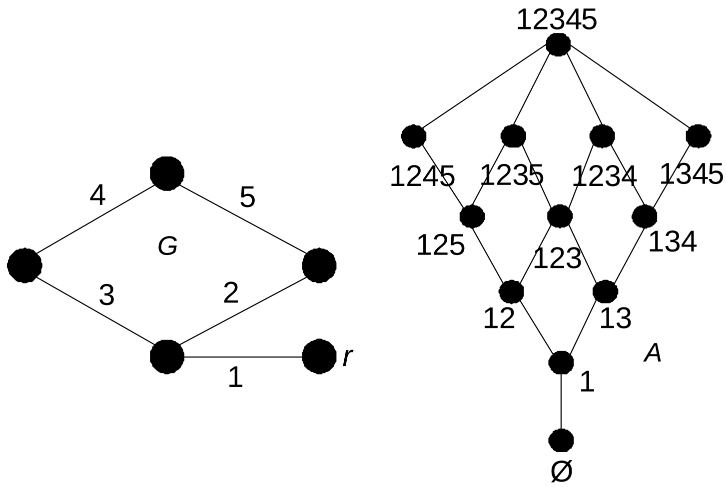

Figura I.4

Ejemplo 3.13. *Búsqueda por líneas en un grafo.*

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y considérese un vértice concreto $r \in V$. Se denomina antimatroide de búsqueda por líneas en el grafo G al par $(N, \mathcal{A})$, donde $N = E$ y la familia $\mathcal{A}$ está formada por aquellos subconjuntos de aristas $S \subseteq E$ tales que el subgrafo $G[S]$ es conexo y contiene a r.

El ejemplo de la Figura I.4 muestra un grafo con cinco aristas numeradas y su correspondiente antimatroide de búsqueda por líneas.

Ejemplo 3.14. *Búsqueda por puntos-líneas en un grafo.*

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se denomina antimatroide de búsqueda por puntos-líneas en el grafo G al par $(N, \mathcal{A})$, donde $N = V \cup E$ y $\mathcal{A}$ es la familia formada por todos los subconjuntos $S \subseteq N$ tales que verifican la siguiente condición: si la arista $\{i, j\}$ pertenece a $S \cap E$, entonces $i \in S$ o bien $j \in S$. Obsérvese que en este antimatroide los átomos coinciden con los vértices del grafo.

A continuación, se muestra un grafo G y la familia de conjuntos factibles correspondiente al antimatroide de búsqueda por puntos-líneas en G.

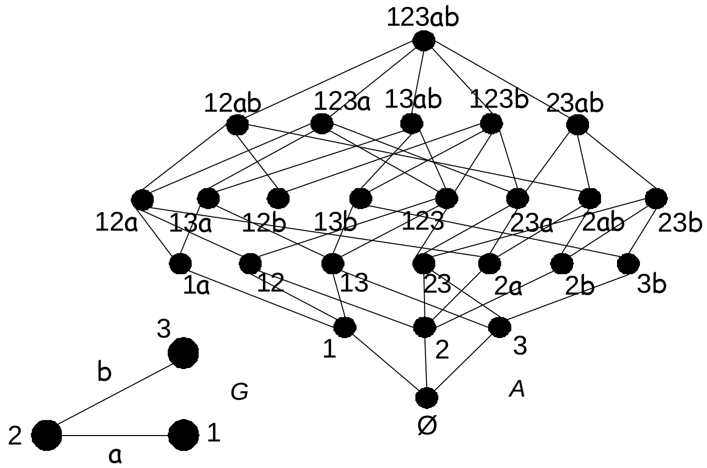

Figura I.5

Otros ejemplos de antimatroides que aparecerán asociados a juegos cooperativos en capítulos posteriores son los que se detallan a continuación.

Ejemplo 3.15. *Sea $(N, \mathcal{A})$ el par formado por un conjunto finito N y una familia $\mathcal{A}$ constituida a partir de un subconjunto no vacío $I \subseteq N$ de la siguiente forma*

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N : S \cap I \neq \emptyset\} \cup \{\emptyset\}.$$

Se verifica que $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide. Así es, se trata de un par $(N, \mathcal{A})$ con $\emptyset \in \mathcal{A}$, tal que, para cada $i \in N$, existe $S \in \mathcal{A}$ con $i \in S$ y donde la accesibilidad se prueba como sigue. Sea un conjunto $S \in \mathcal{A}$. Puesto que $\mathcal{A}$ contiene, por definición, al vacío y ocurre que $|I| \geq 1$, puede admitirse que $|S| \geq 2$. Además, al ser $S \cap I \neq \emptyset$, pueden considerarse dos elementos $i, j \in N$ tales que $i \in S \cap I$ y $j \in S \setminus i$. Entonces, se verifica que $S \setminus j \in \mathcal{A}$, sin más que observar que $i \in (S \setminus j) \cap I$. Por último, la unión de dos conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece también a la familia $\mathcal{A}$, ya que la unión de las intersecciones de ambos conjuntos con I es no vacía, y esto es equivalente a afirmar que la unión de los dos conjuntos tiene intersección no vacía con I.

Si $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e $I = \{1, 2\}$, el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ antes definido se corresponde con el diagrama de Hasse de la figura siguiente. Obsérvese que, en este antimatroide, los átomos son cada uno de los elementos del conjunto I.

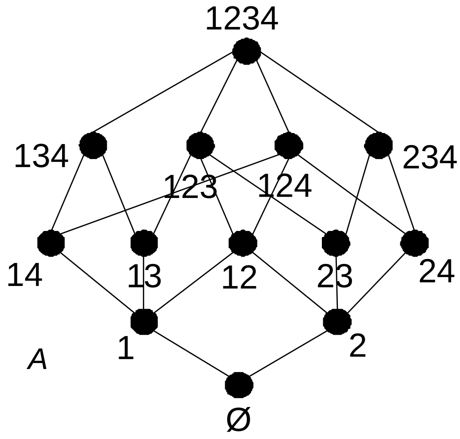

Figura I.6

Ejemplo 3.16. *Sea $(N,\mathcal{A})$ el par definido a partir de un conjunto finito N y un subconjunto $C \subset N$ no vacío, de forma que $\mathcal{A} = \{S \subseteq N : S \subseteq C$ ó $C \subset S\}$. Entonces, $(N,\mathcal{A})$ es un antimatroide.*

En efecto, $(N,\mathcal{A})$ verifica la propiedad (A3) y $\emptyset \in \mathcal{A}$. Para demostrar la condición (A1) de Accesibilidad se procede como sigue. Sea $S \in \mathcal{A}$ con $|S| \geq 2$. Si ocurre que $S \subseteq C$, entonces $S \setminus \{i\} \subseteq C$ para cualquier $i \in S$; y en otro caso, si $C \subset S$, se verifica que existe $i \in S \setminus C$, con lo que $C \subseteq S \setminus \{i\}$. El axioma (A2), referido a la unión de dos conjuntos de la familia $\mathcal{A}$, se demuestra planteando los distintos supuestos que pudieran ocurrir. Si se consideran dos elementos de $\mathcal{A}$ de los cuales al menos uno contiene al conjunto C, se tiene que la unión de ambos también contiene a C y, por tanto, pertenece a la familia $\mathcal{A}$. Si se consideran dos conjuntos de $\mathcal{A}$ que son subconjuntos estrictamente contenidos en C, entonces la unión de ambos también está contenida en C y sería esta unión un conjunto también perteneciente a la familia $\mathcal{A}$.

Puede afirmarse que $(N,\mathcal{A})$ es, en este caso, un poset-antimatroide, con tan sólo observar lo siguiente. La intersección de dos subconjuntos de N que contienen a C también contiene a C; y si se tiene un subconjunto de N que está contenido en C, entonces, su intersección con cualquier otro subconjunto de N también lo está. Este argumento y el Teorema I.3.11 permiten concluir que $(N,\mathcal{A})$ es un poset-antimatroide.

Si se consideran los conjuntos $N = \{1,2,3,4\}$ y $C = \{1,2\}$, entonces el antimatroide $(N,\mathcal{A})$ correspondiente es el que se representa en la figura siguiente.

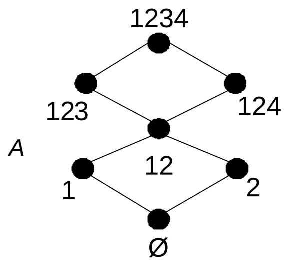

Figura I.7

A continuación se recuerda la definición de geometría convexa, así como otros conceptos relacionados con ella, para después establecer la relación de dualidad existente entre esta estructura combinatoria y la de antimatroide.

Definición 3.17. *Sea N un conjunto finito y $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ una colección de subconjuntos de N tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$. El par $(N, \mathcal{L})$ se denomina geometría convexa si satisface los siguientes axiomas:*

(GC1) Accesibilidad: si $S \in \mathcal{L}$, con $S \neq \emptyset$, existe un elemento $i \in S$ tal que $S \setminus \{i\} \in \mathcal{L}$.

(GC2) Intersección: si $S, T \in \mathcal{L}$, entonces $S \cap T \in \mathcal{L}$.

Ejemplos de geometrías convexas son, según el Teorema I.3.11, los poset-antimatroides. Por tanto, la familia formada por todos los poset-antimatroides constituyen un ejemplo claro de sistemas de conjunto que son a la vez antimatroides y geometrías convexas. Incluso, puede probarse que son las únicas estructuras combinatorias que verifican esa condición.

Proposición 3.18. *Los poset-antimatroides son los únicos sistemas de conjuntos que son a la vez geometrías convexas y antimatroides.*

Sobre una geometría convexa se define un operador clausura de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 3.19. *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa. El operador clausura asociado a $(N, \mathcal{L})$ se define como la aplicación que asigna a cada $S \subseteq N$ el conjunto*

$$\overline{S} := \bigcap_{\{T \in \mathcal{L} \,:\, T \supseteq S\}} T,$$

denominado clausura de S.

Obsérvese que $\overline{S}$ es, por definición, el subconjunto más pequeño de la familia $\mathcal{L}$ que contiene a S. Además, se verifican entre otras, las siguientes propiedades.

Proposición 3.20. *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa, el operador clausura asociado verifica que:*

(C1) $S \subseteq \overline{S}$, para todo $S \subseteq N$;

(C2) $\overline{S} = S$, para todo $S \in \mathcal{L}$;

(C3) $\overline{S} \subseteq \overline{T}$, cualesquiera que sean S, T tales que $S \subseteq T \subseteq N$.

Dado un sistema de conjuntos $(N, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, se define su sistema asociado o dual como el nuevo sistema de conjuntos $(N, \mathcal{F}')$ donde $\mathcal{F}'$ es la familia de complementarios de los subconjuntos de $\mathcal{F}$, esto es

$$\mathcal{F}' = \{S \subseteq N : N \setminus S \in \mathcal{F}\}.$$

El siguiente teorema muestra que antimatroides y geometrías convexas son duales en este sentido.

Teorema 3.21. *Sean N un conjunto finito, $(N, \mathcal{A})$ un sistema de conjuntos y $(N, \mathcal{L})$ su dual. Se verifica que $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide si, y sólo si, $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa. En particular, $(N, \mathcal{A})$ es poset-antimatroide si, y sólo si, $(N, \mathcal{L})$ también lo es.*

Ejemplo 3.22. *Se considera el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ del Ejemplo I.3.15 cuyo diagrama de Hasse es la Figura I.6. Su geometría convexa asociada se representa en la siguiente figura, junto al antimatroide indicado.*

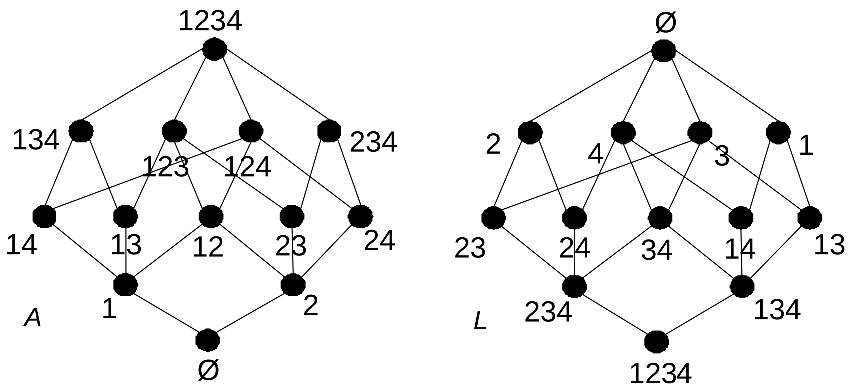

Figura I.8

Si $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide y $(N, \mathcal{L})$ es su geometría convexa asociada, entonces existe una relación de dualidad entre el operador interior y el operador clausura, que se expone en la siguiente proposición.

Teorema 3.23. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y $(N, \mathcal{L})$ la geometría convexa asociada. Entonces, se verifica que*

$$\overline{S} = N \setminus int\,(N \setminus S)\,, \textit{ para todo } S \subseteq N.$$

El teorema anterior permitirá transcribir propiedades de una estructura a su dual, siempre y cuando dichas propiedades vengan determinadas bien por el operador interior, si se trata de un antimatroide, o bien por el operador clausura, si la propiedad concierne a una geometría convexa. Como aplicación de este resultado, se procede a formular, en la siguiente proposición, una propiedad que caracteriza a las geometrías convexas dentro de otras estructuras con operador clausura más generales: la propiedad de intercambio de Steinitz-MacLane.

Proposición 3.24. *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa; su operador clausura verifica la siguiente condición de intercambio. Dado $S \subseteq N$, si $i, j \notin \overline{S}$ y $j \in \overline{S \cup \{i\}}$ entonces $i \notin \overline{S \cup \{j\}}$.*

La versión dual de la propiedad anterior se enuncia de la siguiente forma.

Proposición 3.25. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Dado $S \subseteq N$, si $i, j \in int\,(S)$ y se tiene que $j \notin int\,(S \setminus \{i\})$ entonces $i \in int\,(S \setminus \{j\})$.*

Capítulo II

Juegos de operador interior. El core

En este capítulo se introduce y formula el concepto de juego objeto de estudio en esta tesis doctoral. En la primera sección se establece la definición de juego de operador interior y se argumenta su tratamiento como juego de beneficios. Además, se incluyen ejemplos de juegos cooperativos que pueden ser modelados a través de un juego de operador interior. Entre ellos, algunas clases de juegos ya estudiados por otros autores, nuevos juegos construidos a partir de los anteriores, y otros referidos a redes de comunicación. De esta manera, se observa que bajo el nombre de juegos de operador interior pueden modelarse numerosas situaciones de la actividad económica, social y empresarial, en las que existe un número finito de entidades o personas con el objetivo común de obtener el mayor beneficio posible a través de la cooperación entre ellas, y cuyas relaciones determinan una familia de coaliciones factibles con estructura de antimatroide. En la segunda sección, se introducen los juegos duales de los juegos de operador interior, denominados juegos de operador clausura, que pueden ser considerados juegos de costes definidos a partir de una geometría convexa, estructura dual del antimatroide. La última sección del capítulo se dedica a establecer y analizar diferentes resultados sobre el core de estos juegos cooperativos. Se especifican además condiciones para los jugadores que tienen una situación de equilibrio en la estructura, en tanto que reciben la misma cantidad a través de cualquier vector del core de los juegos de operador interior constituidos sobre un mismo antimatroide.

1. Definición y ejemplos.

Sobre el conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, y fijado un vector de componentes no negativas $w \in \mathbb{R}_+^N$, se considera el juego aditivo (N, w), definido como

$$\begin{aligned} w(S) &= \sum_{i \in S} w_i \qquad \text{si } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset, \\ w(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Para cada juego aditivo (N, w), y cada antimatroide $(N, \mathcal{A})$, donde $|N| \geq 2$, se define un juego cooperativo en el que se considera que el valor obtenido por una coalición S es el que obtiene, en el juego aditivo dado, la coalición $int(S)$ determinada por el antimatroide. Por tanto, se interpreta el antimatroide como la familia de coaliciones realmente importantes para los jugadores, y las componentes del vector w como los beneficios que aportan los distintos jugadores a las coaliciones a las que se incorporan.

Definición 1.1. *Sean $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y $w \in \mathbb{R}_+^N$ un vector. Se denomina juego de operador interior asociado a $(N, \mathcal{A})$ y a $w \in \mathbb{R}_+^N$, al juego cooperativo $(N, w_{\mathcal{A}})$ cuya función característica $w_{\mathcal{A}} : 2^N \to \mathbb{R}$ se define como*

$$w_{\mathcal{A}}(S) := w(int(S)), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Así, en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, las componentes del vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ se refieren al beneficio que cada jugador puede generar en el juego, mientras que los conjuntos factibles del antimatroide $(N, \mathcal{A})$ son las coaliciones en las que se asegura obtener el valor total generado por el conjunto de sus miembros, ya que $S \in \mathcal{A}$ si y sólo si $int\,(S) = S$ según la Proposición I.3.3. Obsérvese además que los elementos del conjunto sobre el que se considera el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ se identifican con los jugadores que intervienen en el juego, y por ello, se hará referencia a ellos indistintamente, bien como elementos que pertenecen a alguna coalición factible del antimatroide $(N, \mathcal{A})$, bien como jugadores que intervienen en el juego.

La notación aquí establecida determinará, de ahora en adelante, que el juego de operador interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ está constituido a partir del antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ fijados previamente y conocidos éstos de antemano. Por tanto, no habrá necesidad de hacer mención expresa a ellos, salvo que se requiera una especificación concreta para los mismos. Además, para simplificar la exposición, se usará la denominación más simple de *juego interior* para hacer referencia a cualquiera de estos juegos.

Atendiendo a la definición del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, se observa que adquieren protagonismo ciertas coaliciones formadas a partir de los caminos en el antimatroide asociado. Recuérdese que, para cualquier jugador $i \in N$, un i-camino en el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ es una coalición factible $S \in \mathcal{A}$, que contiene al jugador i y tal que ninguna otra coalición de $\mathcal{A}$ a la que pertenezca el jugador i está contenida en S. Se consideran entonces los i-caminos como las distintas posibilidades que tiene el jugador i de introducirse en el juego obteniendo beneficios y formando agrupaciones con el menor número posible de jugadores. Así, la elección de uno de los caminos para los que el jugador i es punto final genera cierta dependencia de dicho jugador con el resto de jugadores que pertenecen al camino. Por ello, a partir de la familia $A(i)$ de i-caminos del antimatroide, se introducen los siguientes conjuntos que serán claves en el desarrollo posterior de la tesis. Se interpreta el conjunto

$$P_i = \bigcap_{S \in A(i)} S,$$

como el formado por los jugadores que "controlan" el beneficio del jugador i en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, ya que son aquéllos de cuya participación necesita el jugador i para poder obtener algún beneficio. Por otra parte, el conjunto

$$P^i = \bigcup_{S \in A(i)} S,$$

será el constituido por los jugadores de los que "puede depender" el beneficio del jugador i, al encontrarse éstos en alguno de los i-caminos. La construcción de ambos conjuntos, para cada uno de los jugadores, permite entender el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ como una estructura jerárquica que generaliza el concepto clásico basado en relaciones de orden. De hecho, la dependencia entre los jugadores viene establecida a través de los caminos, y cabe la posibilidad de que no haya antisimetría, es decir, que un jugador esté en algún camino cuyo punto final sea otro jugador y viceversa, que este segundo jugador se encuentre en un camino cuyo punto final sea el primer jugador. Así, el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ representa una *situación de dependencias* entre los jugadores, de forma que

$$i \in N \textit{ tiene dependencia con } j \in N \text{ si se verifica que } j \in P^i.$$

Además, las relaciones de dependencia entre los jugadores son diferentes entre sí, puesto que cada una viene determinada por un camino distinto, del que influye su cardinal y su situación en el antimatroide con respecto al resto de jugadores.

En el siguiente ejemplo se muestra un antimatroide y la situación de dependencias que representa.

Ejemplo 1.2. *Sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ representado en la Figura II.1, el cual está definido sobre el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sus caminos son:*

$$\begin{aligned} A(1) &= \{1\}, \qquad A(2) = \{2\}, \qquad A(3) = \{\{1,3\}, \{2,3,4\}\}, \\ A(4) &= \{\{2,4\}, \{1,3,4\}\}, \qquad A(5) = \{\{1,2,5\}, \{2,4,5\}\}. \end{aligned}$$

En él se observa que, un jugador $i \in N$ tiene dependencia con los jugadores que pertenecen a cada uno de los i-caminos, y además, posee más de una dependencia con cada jugador $j \in P_i \setminus \{i\}$. La Figura II.2 trata de reflejar esta situación, mostrando con flechas del mismo color las dependencias de un jugador con los jugadores que pertenecen a cada uno de los caminos que lo tienen como punto final. De esta forma, si un jugador $i \in N$ está en algún j-camino (para $j \neq i$) y viceversa, en la Figura II.2 se aprecian flechas entre los jugadores implicados con distinta orientación (es el caso de los jugadores 3 y 4).

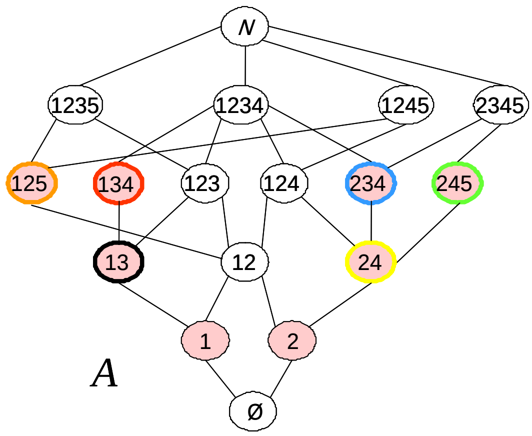

Figura II.1

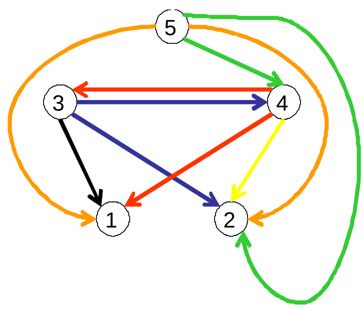

Figura II.2

Teniendo en cuenta las interpretaciones anteriores, si se considera la geometría convexa dual de un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, la siguiente igualdad viene a expresar que la clausura de un jugador en esta geometría convexa está formada por los jugadores cuyos beneficios en el juego son controlados por dicho jugador. Así, para un jugador $i \in N$, el conjunto P_i del antimatroide ofrece la visión del jugador i como controlado, mientras que el conjunto $\overline{\{i\}}$ en la geometría convexa asociada $(N, \mathcal{L})$ será su visión como controlador.

Lema 1.3. *Sea* $(N,\mathcal{A})$ *un antimatroide y* $(N,\mathcal{L})$ *la geometría convexa asociada. Para cada* $i \in N$*, se verifica que*

$$\overline{\{i\}} = \{j \in N : i \in P_j\}\,.$$

Demostración. Dado el antimatroide $(N,\mathcal{A})$, para cada $i \in N$, considérese un elemento $j \in N$ tal que $i \in P_j$. Si $j \notin \overline{\{i\}}$ en la geometría convexa asociada, entonces se tiene $j \in int\,(N \setminus \{i\})$, pues $\overline{\{i\}} = N \setminus int\,(N \setminus \{i\})$ según el Teorema I.3.23. Al ser $int\,(N \setminus \{i\})$ una coalición factible de $\mathcal{A}$ que contiene a j, existe al menos un camino $T \in A(j)$ tal que $T \subseteq int\,(N \setminus \{i\})$. De aquí que $i \notin T$ y entonces se llegue a contradicción, pues si $i \in P_j$, entonces el elemento i se encuentra en todos los j-caminos, en particular, en la coalición T.

Sea $i \in N$ y considérese el conjunto $\overline{\{i\}} \in \mathcal{L}$. La inclusión $\overline{\{i\}} \subseteq \{j \in N : i \in P_j\}$ se demuestra también por reducción al absurdo. Para cualquier elemento $j \in \overline{\{i\}}$, elíjase un j-camino cualquiera $T \in A(j)$ en el antimatroide $(N,\mathcal{A})$. Si $i \notin T$, entonces se tendría que $T \subseteq N \setminus \{i\}$ y, también, que $j \in T \subseteq int\,(N \setminus \{i\})$. Pero esto es imposible, pues $j \in \overline{\{i\}}$ y se sabe que $\overline{\{i\}} = N \setminus int\,(N \setminus \{i\})$. ■

El lema anterior permitirá que algunos resultados enunciados a partir de un antimatroide $(N,\mathcal{A})$ se demuestren a través de la geometría convexa dual $(N,\mathcal{L})$. Así, para cada subconjunto $S \subseteq N$, el conjunto $int\,(S)$ pertenece a la familia $\mathcal{A}$ mientras que $\overline{S}$ se entenderá que es un elemento de la familia asociada $\mathcal{L}$, aunque no se haga mención expresa a ésta.

En un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, las relaciones de dependencia anteriores originan una posible clasificación de los jugadores en tres grupos: los jugadores que son *átomos* del antimatroide $(N,\mathcal{A})$, cuya participación activa en el juego no depende del resto de jugadores (son los $i \in N$ con $|P^i| = 1$); los jugadores *totalmente controlados*, aquéllos que necesitan de la colaboración de otro jugador para participar de forma activa en el juego, esto es, en todos los caminos de los que es punto final, existe algún otro jugador común ($i \in N$ con $|P_i| \geq 2$); y, por último, los jugadores *dependientes no estrictamente controlados*, que, sin ser controlados por un jugador concreto, necesitan supeditarse a la participación de otro al cual pueden elegir entre varios ($i \in N$ con $|P_i| = 1$ y $|P^i| \geq 2$). Esta partición en el conjunto de jugadores conlleva considerar dos familias singulares de antimatroides: los *antimatroides coatómicos*, en los que no existen jugadores que sean totalmente controlados, y los *antimatroides de control*, en los que todos los jugadores no átomos son totalmente controlados. Obsérvese que la condición de Accesibilidad *(A1)* en la definición de antimatroide garantiza que siempre existan jugadores átomos.

Definición 1.4. *Un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ se denomina coatómico si para todo $i \in N$ se verifica que $|P_i| = 1$.*

La siguiente proposición justifica la denominación de los antimatroides definidos anteriormente.

Proposición 1.5. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $(N, \mathcal{A})$ *es coatómico*

(b) Cualquier jugador $i \in N$ es coátomo en $(N, \mathcal{A})$, es decir, $ca(\mathcal{A}) = N$.

Demostración. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese un elemento $i \in N$. Supóngase que para cada $j \in N$ se tiene $|P_j| = 1$, o lo que es lo mismo, que $P_j = \{j\}$. Ello es equivalente a decir que $\{j \in N : i \in P_j\} = \{i\}$. Por el Lema II.1.3 se tiene entonces la equivalencia con que $\overline{\{i\}} = \{i\}$. De aquí, se verifica que $(N, \mathcal{A})$ es coatómico si, y sólo si $\overline{\{i\}} = \{i\}$ para cada $i \in N$.

El Teorema I.3.23 afirma que $int\,(N \setminus \{i\}) = N \setminus \overline{\{i\}}$; y así, para cada $i \in N$, sucede que $\overline{\{i\}} = \{i\}$ si, y sólo si $int\,(N \setminus \{i\}) = N \setminus \{i\}$.

Debido a la propiedad *(I2)* del operador interior, la igualdad $int\,(N \setminus \{i\}) = N \setminus \{i\}$ es cierta si y sólo si $N \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$ o, equivalentemente, si, y sólo si se verifica que $i \in ca\,(\mathcal{A})$. Se concluye entonces, que $(N, \mathcal{A})$ es coatómico si y sólo si $i \in ca\,(\mathcal{A})$, para cada $i \in N$. ■

Obsérvese que la geometría convexa dual de un antimatroide coatómico contiene a todas las coaliciones unitarias.

Definición 1.6. *Un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ se denomina antimatroide de control si para todo $i \in N \setminus a\,(\mathcal{A})$ se verifica que $|P_i| \geq 2$.*

El siguiente resultado muestra que cualquier poset-antimatroide (ver Definición 3.9 del primer capítulo) es un antimatroide de control.

Proposición 1.7. *La familia de los poset-antimatroides está estrictamente contenida en la familia formada por los antimatroides de control.*

Demostración. En primer lugar se probará que todo poset-antimatroide es un antimatroide de control. Si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, entonces $|A(j)| = 1$, para todo $j \in N$. En particular, si $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$, se verifica que existe un único i-camino, T. Puesto que i no es un átomo, se tiene que $|T| \geq 2$, y por ser T el único i-camino, se tiene que $P_i = T$, siendo $|P_i| = |T| \geq 2$.

Por otra parte, existen antimatroides de control que no son poset-antimatroides, como muestra el siguiente ejemplo. Considérese el antimatroide de búsqueda por puntos $(N, \mathcal{A}')$ construido en el Ejemplo 3.12 del capítulo anterior (ver Figura I.3). En él se observa que todos los caminos contienen al jugador 1, y por tanto, $(N, \mathcal{A}')$ es un antimatroide de control, al ser $1 \in P_i$ para $i = 2, 3, 4$. Sin embargo, $(N, \mathcal{A}')$ no es un poset-antimatroide porque para el jugador 4 existen dos 4-caminos, $A(4) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$. ■

A continuación se demuestran dos propiedades importantes que la función característica de cualquier juego interior posee. La superaditividad permite considerar el juego como un juego cooperativo de beneficios (ver primera sección del Capítulo I).

Proposición 1.8. *Los juegos de operador interior son monótonos y superaditivos.*

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior con $w \in \mathbb{R}_+^N$

Supóngase que S, T son dos coaliciones de jugadores tales que $S \subseteq T \subseteq N$. Puesto que $int(S) \subseteq int(T)$, debido a la propiedad *(I3)* del operador interior se tiene la desigualdad $w(int(S)) \leq w(int(T))$, y equivalentemente que $w_{\mathcal{A}}(S) \leq w_{\mathcal{A}}(T)$.

Para probar que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es superaditivo, considérense $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Al ser $S \subseteq S \cup T$ y $T \subseteq S \cup T$, se verifica que $int(S) \subseteq int(S \cup T)$ e $int(T) \subseteq int(S \cup T)$, y entonces $int(S) \cup int(T) \subseteq int(S \cup T)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{A}}(S \cup T) &= w(int(S \cup T)) \geq w(int(S) \cup int(T)) \\ &= w(int(S)) + w(int(T)) - w(int(S) \cap int(T)) \\ &= w_{\mathcal{A}}(S) + w_{\mathcal{A}}(T), \end{aligned}$$

ya que si $S \cap T = \emptyset$, se tiene que $int(S) \cap int(T) = \emptyset$. ■

Lo anteriormente expuesto confiere a los juegos interior una relativa importancia dentro de la teoría de juegos, ya que permite agrupar diferentes clases de juegos, a veces tratados bajo diferente perspectiva, estudiando, analizando y dando soluciones a dichos juegos bajo una teoría común. El desarrollo de esta nueva teoría simplificará y hará menos tediosa la obtención de soluciones para los juegos que se enmarquen dentro de este contexto.

Seguidamente se relacionan diversos ejemplos de juegos interior; unos ya existen en la literatura de juegos cooperativos y otros son nuevas propuestas, entre las cuales se encuentran algunas variaciones de juegos ya conocidos.

Ejemplo 1.9. *Juegos sobre una Estructura de Autorización: caso conjuntivo.*

Gillles, Owen y van den Brink [24] introdujeron en 1992 las estructuras de autorización. Sea N un conjunto finito de jugadores que constituyen una organización jerarquizada, esto es, existen jugadores que necesitan autorización de ciertos jugadores para formar coaliciones. Esta organización jerarquizada se representa mediante una estructura de autorización sobre N, que es una función $F : N \to 2^N$ que asigna a cada jugador $i \in N$ el conjunto $F(i)$ llamado conjunto de sucesores del jugador i. A los jugadores del conjunto $F^{-1}(i) = \{j \in N : i \in F(j)\}$ se les denomina predecesores del jugador i en la estructura de autorización F. Una estructura de autorización F sobre N se dice que es acíclica cuando para todo $i \in N$, se verifica que en cada lista ordenada $(h_1, \ldots, h_t)$, donde $h_1 = i$ y $h_{k+1} \in F(h_k)$ para $k = 1, \ldots, t-1$, se cumple que $h_t \neq i$.

En el caso conjuntivo, se asume que cada jugador necesita permiso de todos sus predecesores para cooperar con otros jugadores y, por tanto, las coaliciones factibles son las que contienen a todos los predecesores de los jugadores que la forman. Así, como se pone de manifiesto en Algaba, Bilbao, van den Brink y Jiménez-Losada [1], estas coaliciones determinan el poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$, con

$$\mathcal{A} = \left\{S \subseteq N \text{ tal que } F^{-1}(i) \subseteq S, \text{ para todo } i \in S\right\},$$

cuando la estructura F es acíclica.

Un juego aditivo (N, v) con función característica no negativa, definido sobre un conjunto N con una estructura de autorización acíclica F en el caso conjuntivo coincide con el juego restringido sobre el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ mediante la función característica $v_{\mathcal{A}}(S) = v(int(S))$, para $S \subseteq N$, y por tanto, puede ser considerado como juego interior.

Ejemplo 1.10. *Juegos sobre una Estructura de Autorización: caso disyuntivo.*

Van den Brink [13] introdujo en 1997 un aprovechamiento diferente de las estructuras de autorización. Se considera de nuevo un conjunto N de jugadores con una estructura *de autorización, descrita a través de una función F que determina el conjunto $F^{-1}(i)$ de predecesores de cada jugador $i \in N$. En el caso disyuntivo, cada jugador que sea sucesor de algún otro, necesita permiso de al menos uno de sus predecesores para cooperar con otros jugadores. Siendo así, se demuestra que una coalición de jugadores S es factible si, y sólo si, cada jugador $i \in S$ que sea sucesor de otro, tiene algún predecesor suyo contenido en S. En Algaba, Bilbao, van den Brink y Jiménez-Losada [1] los autores demuestran que esta familia de coaliciones factibles,*

$$\mathcal{A} = \left\{ S \subseteq N \text{ tal que } F^{-1}(i) \cap S \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in S \text{ con } F^{-1}(i) \neq \emptyset \right\},$$

cuando la estructura F es acíclica, constituye un antimatroide sobre el conjunto N. De aquí que, cualquier juego aditivo (N, v) con función característica no negativa, definido sobre un conjunto con una estructura de autorización F en el caso disyuntivo coincide con el juego restringido sobre el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ mediante la función $v_{\mathcal{A}}(S) = v(int(S))$, para $S \subseteq N$, pudiendo entonces ser considerado como juego interior.

Ejemplo 1.11. *Juegos "Peer Group".*

Brânzei, Fragnelli y Tijs [12] en 2002 definen juegos "Peer Group". Sea N un conjunto finito de agentes con ciertas características sociales y económicas individuales. La relación social entre los agentes se encuentra estrictamente jerarquizada, y puede describirse a través de un árbol dirigido y enraizado G con $|N|$ nodos, tal que el agente $1 \in N$ se encuentra en la raíz y los agentes de $N \setminus \{1\}$ se reparten uno a uno en los nodos restantes. En estas condiciones, una situación "Peer Group" G-conectada es una terna (N, P, w), donde P es la familia formada por todos los subconjuntos $[1, i]$ de agentes que se encuentran en el único camino del árbol G que conecta 1 con i, para cada $i \in N \setminus \{1\}$; y donde $w \in \mathbb{R}_+^N$ es un vector cuyas componentes describen las posibilidades económicas de cada jugador.

A partir de la situación "Peer Group" (N, P, w), se define el correspondiente juego "Peer Group" (N, v) con función característica dada por

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{\{i \in N \,:\, [1,i] \subseteq S\}} w_i, \qquad \text{para cada } S \subseteq N, S \neq \emptyset; \\ v(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Este juego coincide con el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ definido por w y tal que $(N, \mathcal{A})$ es el *poset-antimatroide con*

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in S} [1, i] : S \subseteq N \right\} \cup \{\emptyset\} ;$$

cuyos caminos son $A(i) = \{[1, i]\}$, *para cada* $i \in N$.

En efecto, el par $(N, \mathcal{A})$ *es un antimatroide, por ser un caso particular de un antimatroide de búqueda por puntos en un grafo dirigido (Ejemplo 3.12 del Capítulo I). Además, hay un único i-camino por cada jugador* $i \in N$, *y por tanto, según el Teorema I.3.11, puede asegurarse que* $(N, \mathcal{A})$ *es un poset-antimatroide. La equivalencia entre ambos juegos está justificada al observar que, para cada coalición* $S \subseteq N$, *en el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *se verifica que*

$$int(S) = \{i \in S : [1, i] \subseteq S\} .$$

Ejemplo 1.12. *Juegos "Peer Group" con una base.*

La idea de situación "Peer Group", expuesta en el ejemplo anterior, puede considerarse sobre un grafo dirigido que sea un árbol con más de un vértice distinguido, en lugar de sobre un árbol con raíz. Supóngase un conjunto de agentes N *tal que la relación social entre ellos se encuentra jerarquizada, de modo que puede describirse a través de un grafo dirigido* $G = (N, E)$ *que es un árbol y tiene un conjunto* $R \subset N$ *de nodos, denominado base, verificando una propiedad especial: para cualquier nodo* $j \in N \backslash R$ *es posible encontrar al menos un agente* $i \in R$ *y un camino* $[i, j]$ *que conecte el nodo* $j \in N$ *con el elemento de la base* $i \in R$, *y de modo que no existen arcos que conecten dos nodos de* R. *La nueva situación "Peer Group" viene dada por* (N, P, w), *donde* $w \in \mathbb{R}^N_+$ *es el vector cuyas componentes describen las posibilidades económicas de cada jugador y* P *es la familia formada por todos los subconjuntos de agentes que intervienen en cada camino de* G *que tenga como nodo inicial un agente de la base y como nodo final un agente que esté fuera de ella.*

Dada la situación "Peer Group" (N, P, w), *se define el correspondiente juego "Peer Group"* (N, v) *con una base, como aquél cuya función característica verifica que:*

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{\{j \in N : \exists i \in R \ con \ [i,j] \subseteq S\}} w_j, \qquad \text{para cada } S \subseteq N, S \neq \emptyset; \\ v(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Este juego coincide con el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ *definido por* w *y el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *de búsqueda por puntos en el grafo* G *con base* R. *Para cada* $j \in N$ *se tiene que* *los j-caminos en tal antimatroide forman la familia*

$$A(j) = \{[i,j] : i \in R_j\},$$

donde R_j representa el subconjunto de elementos de la base $R \subset N$ desde los cuales se puede acceder al jugador j a través de un camino en el árbol G, esto es,

$$R_j = \{i \in R : \exists \text{ un camino } [i,j]\}.$$

En este ejemplo, el antimatroide construido no es necesariamente un poset-antimatroide, puesto que pueden existir jugadores con más de un camino con nodo inicial un elemento de la base y nodo final el propio jugador.

Ejemplo 1.13. *Juegos "Big Boss".*

En 1987 Muto, Nakayama, Potters y Tijs [37] definieron un juego "Big Boss" como un juego cooperativo (N,v), donde el jugador $1 \in N$, denominado Big Boss, es determinante en el valor de las distintas coaliciones, puesto que la función característica del juego v debe satisfacer las siguientes condiciones:

i) $v(S) \geq 0$ *para cada* $S \subseteq N$ *y,* $v(N) \geq v(N \setminus \{i\})$ *para todo* $i \in N$,

ii) $v(S) = 0$ *si* $1 \notin S$,

iii) $v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} [v(N) - v(N \setminus \{i\})]$ *si* $S \subseteq N$ *con* $1 \in S$.

Aunque no todos los juegos "Big Boss" son juegos interior, existen situaciones que corresponden a este tipo de juegos en las que es posible ajustarse a un modelo de juego interior. Son aquéllas en las que la función característica viene definida a partir de un vector $w \in \mathbb{R}^N_+$, de forma que, para toda $S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} w(S), & \text{si } 1 \in S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Siendo así, las componentes del vector $w \in \mathbb{R}^N_+$ representan las aportaciones individuales que cada jugador realiza a las coaliciones en las cuales participa y el juego (N,v) coincide con el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, definido sobre el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, con

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N : 1 \in S\} \cup \{\emptyset\}.$$

Obsérvese que $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, cuyos caminos son

$$A(1) = \{\{1\}\} \qquad y \qquad A(i) = \{\{1,i\}\}, \text{ para cada } i \in N \setminus \{1\}.$$

Ejemplo 1.14. *Juegos de Mercado con Información con varios jugadores informados.*

Los juegos de Mercado con Información (Muto, Potters y Tijs [38]) se introducen de la siguiente forma. Sea N un conjunto de firmas entre las que $1 \in N$ es la única firma inicialmente privilegiada, en el sentido de que dispone de información necesaria para obtener beneficio no nulo. Considérese también una familia de mercados $\{M_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ tal que a cada mercado M_T sólo tienen acceso las firmas de T y no otras. Más aún, con $r_T \in \mathbb{R}_+$ se representará el mayor beneficio que puede obtenerse en M_T, pudiendo ocurrir que exista algún mercado con beneficio nulo, o incluso que algún grupo de firmas no tenga mercado.

Para $\left\langle N, \{1\}, \langle M_T, r_T \rangle_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \right\rangle$, se define el juego de Mercado con Información (N, v), con $v : 2^N \to \mathbb{R}$, donde $v(S)$ representa el beneficio que la coalición S puede ganar sin la ayuda de firmas que no estén en ella. Esto es, para cada $S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} \sum\limits_{\{T \subseteq N : T \cap S \neq \emptyset\}} r_T, & \text{si } 1 \in S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los autores hacen notar que, cuando a cada mercado con beneficio tenga acceso una sola firma, o equivalentemente, cuando $M_T = \emptyset$ para cada coalición T con $|T| \geq 2$, los juegos de Mercado con Información coinciden con un tipo particular de juegos "Big Boss". Precisamente dicho caso coincide con aquellos juegos "Big Boss" que son juegos interior para el vector $w = (r_i)_{i \in N}$ cuando cada jugador $i \in N$ tiene acceso a un único mercado y r_i representa el mayor beneficio que puede obtener en el mercado al cual tiene acceso.

Si se mantiene la hipótesis de que a cada mercado tenga acceso a lo sumo una firma, $M_T = \emptyset$ para cada coalición T con $|T| \geq 2$, y se admite que inicialmente el conjunto de firmas informadas $I \subset N$ verifica que $|I| \geq 2$, se obtiene un nuevo juego interior. En efecto, sea N un conjunto de firmas y $w \in \mathbb{R}^N_+$ un vector cuyas componentes representan los beneficios que cada firma podría obtener si ésta vendiera sus productos. Se supone la existencia de un subconjunto $I \subset N$, con $|I| \geq 2$, que posee ciertos privilegios, de manera que si una coalición S no contiene alguna firma de I, entonces S no consigue vender sus productos. En estas condiciones, se define el juego (N, v), tal que, para cada $S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} w(S), & \text{si } S \cap I \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La situación anterior puede modelarse a través de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, siendo

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N \ : \ S \cap I \neq \emptyset\} \cup \{\emptyset\}.$$

En el Ejemplo 3.15 del anterior capítulo ya se observó que esta familia es un antimatroide, y sus caminos son:

$$A(i) = \begin{cases} \{\{i\}\}, & si\ i \in I \\ \{\{i,j\} \ : \ j \in I\}, & si\ i \notin I. \end{cases}$$

Puesto que existen elementos que son puntos finales de más de un camino, se aprecia que $(N, \mathcal{A})$ *no es un poset-antimatroide; sin embargo, sí puede asegurarse que es un antimatroide coatómico, al haber más de una firma informada,* $|I| \geq 2$.

Ejemplo 1.15. *Juegos Clan.*

Un juego Clan (Muto, Poos, Potters y Tijs [39]) resulta ser una generalización de un juego "Big Boss". Así, un juego cooperativo (N, v) *se dice que es un juego Clan si existe una coalición* $C \subset N, C \neq \emptyset$*, llamada Clan, con una participación en el juego similar a la del jugador relevante en un juego "Big Boss". Esto es, si*

i) $v(S) \geq 0$ *para cada* $S \subseteq N$ *y,* $v(N) \geq v(N \setminus \{i\})$ *para todo* $i \in N$,

ii) $v(S) = 0$ *si* S *no contiene al Clan* C,

iii) $v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} [v(N) - v(N \setminus \{i\})]$ *para cualquier* $S \subseteq N$ *con* $C \subseteq S$.

Considerados un conjunto finito N*, un subconjunto* $C \subset N$ *no vacío y un vector* $w \in \mathbb{R}_+^N$*, el juego* (N, v) *cuya función característica viene dada por*

$$v(S) = \begin{cases} w(S), & si\ C \subseteq S \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

es un juego Clan. Además, puede comprobarse que, en este juego, diferentes conceptos de solución tipo valor conceden a cada uno de los jugadores del Clan idéntico pago. Este hecho permite afrontar el juego a través de un juego interior $(N', w_{\mathcal{A}})$ *en cuyo conjunto de jugadores,* C *es considerado como un solo participante en el juego, y el antimatroide de partida es el formado por todas las coaliciones que contienen a* C*. Así,*

$$N' = (N \setminus C) \cup \{C\} \quad y \quad \mathcal{A} = \{S \subseteq N' \ : \ C \in S\} \cup \{\emptyset\},$$

y el pago recibido por el Clan es repartido a partes iguales entre todos los jugadores que lo conforman. Esquemáticamente, las coaliciones que pueden obtener beneficio no nulo quedan reflejadas en la parte izquierda de la Figura II.3.

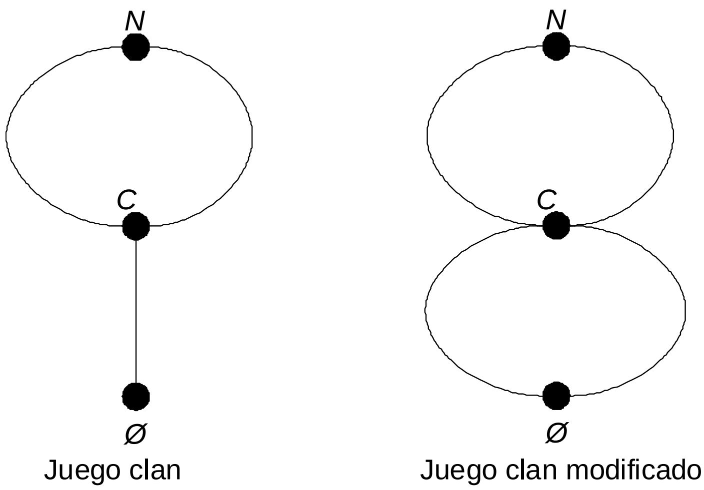

Figura II.3

Ejemplo 1.16. *Juegos Clan Modificados.*

El juego expuesto en el ejemplo anterior y la particularidad de que en él todos los jugadores del Clan consiguen el mismo pago en el reparto de beneficios, sin tener en cuenta sus respectivas aportaciones al juego, hace suponer que, en ocasiones, este modelo de juego pueda generar conflictos entre los jugadores del Clan. Sería necesario, en esos otros casos, determinar un reparto entre los jugadores del Clan más justo, que esté en consonancia con los beneficios aportados por cada jugador. Los juegos que, aquí, se denominan juegos Clan Modificados, dan respuesta a dicho problema. Dado un conjunto finito N *y considerando el vector* $w \in \mathbb{R}_+^N$, *se dirá que* (N, v) *es un juego Clan Modificado si existe una coalición* $C \neq \emptyset$, $C \subset N$, *llamada también Clan, tal que*

$$v(S) = \begin{cases} w(S), & \textit{para cada } S \supseteq C \\ w(S \cap C), & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que este nuevo juego satisface las tres condiciones características de un juego Clan. Sin embargo, da un trato diferente a los jugadores del Clan, al considerar de igual manera a las coaliciones contenidas en el Clan que a las que lo contienen. No obstante, sigue siendo necesaria la conformidad de todo el Clan para que un jugador externo a él pueda participar en el juego. Considerando las componentes del vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ *como el* *beneficio que genera cada jugador al cooperar con otros jugadores, un juego Clan Modificado* (N, v) *puede ser interpretado como un juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$*, donde*

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N \ : \ S \subset C \text{ ó } C \subseteq S\},$$

que es un poset-antimatroide (ver el Ejemplo 3.16 del Capítulo I) y cuyos caminos son

$$A(i) = \begin{cases} \{\{i\}\}, & \text{si } i \in C \\ \{C \cup \{i\}\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, un juego Clan Modificado puede entenderse como una extensión natural del juego interior considerado en el ejemplo anterior. Sin embargo, el tratamiento que se le da al Clan dentro del antimatroide construido en cada caso es diferente. Mientras en la propuesta original de un juego Clan, la coalición C *funciona como una sola entidad (imagen izquierda de la Figura II.3), en la nueva propuesta, de juego Clan Modificado, los jugadores de la coalición* C *adquieren total independencia entre sí (imagen derecha de la Figura II.3), salvo para introducir jugadores externos al Clan.*

Ejemplo 1.17. *Juegos en redes (I).*

Sea una red de comunicación representada mediante la terna (N, r, G)*, donde* N *es un conjunto de clientes abastecidos todos ellos por una fuente* $r \in N$ *y cuya conexión viene determinada a través del digrafo* G *enraizado en* r*. La conexión con la fuente* r *produce un beneficio* $w_i \in \mathbb{R}_+$ *a cada cliente* $i \in N$*. Puesto que se pretende repartir el beneficio total obtenido por los clientes, éstos consideran las distintas posibilidades de cooperación entre sí para obtener un mayor beneficio.*

Esta situación puede modelarse a través de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$*, donde* $(N, \mathcal{A})$ *es el antimatroide cuyas coaliciones factibles son los conjuntos de nodos* $S \subseteq N$ *que inducen en* G *un subgrafo conexo* $G[S]$ *con la siguiente propiedad: cada nodo* $i \in S$ *es el nodo extremo de un camino con nodo inicial la fuente* r *en* $G[S]$*. Obsérvese que la familia* $\mathcal{A}$ *de coaliciones factibles sobre el conjunto* N *constituye un antimatroide de búsqueda por puntos en un grafo (ver el Ejemplo 3.12 del capítulo anterior)*

Ejemplo 1.18. *Juegos en redes (II).*

Considérese una red de operadores representada mediante un grafo $G = (V, E)$*. Cada operador tiene adjudicada una central* $k \in V$ *que, en principio, le reporta un beneficio* $w_k \in \mathbb{R}_+$*. Además, cada vía de comunicación entre dos centrales contiguas* $e = \{i, j\} \in E$

genera un beneficio $w_e \in \mathbb{R}_+$ sólo si ésta presta servicio a alguna de las dos centrales situadas en los extremos de la vía.

Esta situación se corresponde con un juego de beneficios en el que los operadores estudian sus posibilidades de expansión, y para ello, necesitan tener acceso a determinadas vías de comunicación para dar servicio también desde otras centrales y aumentar así sus beneficios. La situación que se presenta, al considerar las distintas posibilidades de cooperación entre los operadores, al igual que en ejemplos anteriores, puede modelarse mediante un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, siendo $N = V \cup E$, y

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N : \forall\ e \in E \cap S \text{ se cumple que, si } e = \{i,j\}\,,\ \text{entonces } i \in S \text{ o bien } j \in S\}\,.$$

Nótese que $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide de búsqueda por puntos-líneas en un grafo, comentado en el Ejemplo 3.14 del Capítulo I. Los caminos en este antimatroide son

$$\begin{array}{ll} A(k) = \{\{k\}\}\,, & \text{si } k \in V, \\ A(e) = \{\{e,i\}\,,\{e,j\}\}\,, & \text{si } e \in E \text{ siendo } e = \{i,j\}\,. \end{array}$$

2. Juegos de operador clausura

En esta sección, se pondrá de manifiesto que los juegos de beneficios denominados juegos de operador interior permiten también estudiar otra gran familia de juegos, esta vez de asignación de costes, a los que se les denominará *juegos de operador clausura.* Para ello, basta tener en cuenta la dualidad existente entre las estructuras de antimatroide y geometría convexa para observar algunas de las importantes propiedades que estos juegos poseen.

Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa. Para cualquier subconjunto $S \subseteq N$, se sabe que su clausura, $\overline{S}$, es un elemento de la familia $\mathcal{L}$. Por tanto, con un razonamiento análogo al realizado en la sección anterior, relativo a los juegos interior, surge la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sean $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa y $w \in \mathbb{R}^N_+$ un vector. Se denomina juego de operador clausura asociado a $(N, \mathcal{L})$ y a $w \in \mathbb{R}^N_+$, al juego cooperativo $(N, w_{\mathcal{L}})$ cuya función característica $w_{\mathcal{L}} : 2^N \to \mathbb{R}$ se define como*

$$w_{\mathcal{L}}(S) = w\left(\overline{S}\right),\ \text{para cada } S \subseteq N.$$

De esta forma, para cada juego aditivo (N, w), y cada geometría convexa $(N, \mathcal{L})$, se considera que el valor de una coalición $S \subseteq N$ en el juego $(N, w_{\mathcal{L}})$, es el que corresponde a los jugadores de la coalición $\overline{S}$ para la geometría convexa en el juego aditivo. Esto es, considerando que cada componente del vector $w \in \mathbb{R}^N_+$ representa la cantidad inicial con la que cada jugador cuenta, el valor $w_{\mathcal{L}}(S)$ coincide con la suma de las cantidades de los jugadores que pertenecen a la coalición de la familia $\mathcal{L}$ de menor cardinal que contiene a S. Así, si cada coordenada del vector $w \in \mathbb{R}^N_+$ representa el coste que a cada jugador $i \in N$ le corresponde por llevar a cabo su parte en un determinado proyecto, el valor $w_{\mathcal{L}}(S)$ se interpreta como el pago que los jugadores de S deben abonar si deciden cooperar juntos y llevar a cabo el proyecto en común sin contar con la intervención de los posibles jugadores de $N \setminus S$ que pudieran ser necesarios para que ese proyecto funcione, asumiendo por tanto, los pagos relativos a estos otros jugadores, externos a la coalición S.

Es conocido que, dada una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$, su estructura dual $(N, \mathcal{A})$, con $\mathcal{A} = \{S \subseteq N : N \setminus S \in \mathcal{L}\}$, es un antimatroide (Teorema I.3.21). Por otra parte, en el Teorema I.3.23 se observó también que el operador dual del operador clausura en la geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ es el operador interior en el antimatroide $(N, \mathcal{A})$. Ambas dualidades ponen de manifiesto una relación similar entre los juegos interior y los juegos de operador clausura.

Teorema 2.2. *Sean $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa y $w \in \mathbb{R}^N_+$ un vector. Si $(N, \mathcal{A})$ es el antimatroide dual de $(N, \mathcal{L})$, se verifica que el juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$ es el juego dual del juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$. Esto es, se verifica que*

$$w_{\mathcal{L}}(S) = w^*_{\mathcal{A}}(S) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Demostración. Sea $S \subseteq N$. Siendo $(N, \mathcal{L})$ y $(N, \mathcal{A})$ sistemas de conjunto duales, por el Teorema I.3.23, se tiene que $N \setminus int\,(N \setminus S) = \overline{S}$. Por otra parte, según (I.5), el juego dual $(N, w^*_{\mathcal{A}})$ del juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es $w^*_{\mathcal{A}}(T) = w_{\mathcal{A}}(N) - w_{\mathcal{A}}(N \setminus T)$, para cada $T \subseteq N$. De aquí que,

$$w^*_{\mathcal{A}}(S) = w(N) - w(int\,(N \setminus S)) = w(N \setminus int\,(N \setminus S)) = w\left(\overline{S}\right) = w_{\mathcal{L}}(S),$$

puesto que N es una coalición factible en el antimatroide. ■

Como consecuencia del teorema anterior, y puesto que son bastantes las relaciones conocidas entre un juego cooperativo y su correspondiente juego dual, se pueden extraer propiedades inmediatas acerca de los juegos de operador clausura. Así, según la Proposición I.1.24, si un juego cooperativo es monótono su dual también y, por tanto, a partir de la Proposición II.1.8, es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.3. *Los juegos de operador clausura son monótonos.*

Sin embargo, no todas las propiedades de juegos se pueden transcribir por dualidad. Por ejemplo, no es cierto en general que, si un juego es superaditivo su dual sea subaditivo. En particular, esto es lo que sucede con los juegos aquí definidos. En la Proposición II.1.8 se probó que cualquier juego interior es superaditivo, y sin embargo, los juegos de operador clausura no son, en general, subaditivos. Así se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Sean $N = \{1,2,3\}$ y $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, N\}$. Si se considera el juego $(N, w_{\mathcal{L}})$, con $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $w_2 > 0$, entonces se verifica que $(N, w_{\mathcal{L}})$ no es subaditivo. En efecto, tomando las coaliciones $S = \{1\}$ y $T = \{3\}$, que son disjuntas y pertenecientes a la familia $\mathcal{L}$, se obtiene que*

$$w_{\mathcal{L}}(S) + w_{\mathcal{L}}(T) = w_1 + w_3 < w(N) = w_{\mathcal{L}}(S \cup T),$$

puesto que $S \cup T = \{1,3\}$ no es una coalición de la familia $\mathcal{L}$ y $\overline{S \cup T} = N$.

Realizada la anterior observación, los juegos de operador clausura pueden interpretarse como juegos de asignación de costes en el sentido comentado anteriormente, pero carecen, en general, de la propiedad más importante que los fundamenta como tales: la subaditividad. Por este motivo, se especifica a continuación la familia de geometrías convexas sobre las cuales cualquier juego de operador clausura es subaditivo y, de esta forma se recupera, en su sentido más amplio, la condición de juego de asignación de costes. Para ello, recuérdese la Proposición I.3.18, según la cual los poset-antimatroides son, en particular, geometrías convexas.

Teorema 2.5. *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa. Se verifica que $(N, w_{\mathcal{L}})$ es subaditivo para todo $w \in \mathbb{R}_+^N$ si, y sólo si $(N, \mathcal{L})$ es poset-antimatroide.*

Demostración. Dada la geometría convexa $(N, \mathcal{L})$, sean $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Puesto que $S, T \subseteq S \cup T$ se tiene, por la propiedad *(C3)* del operador clausura (Proposición I.3.20), que $\overline{S}, \overline{T} \subseteq \overline{S \cup T}$, y así, $\overline{S} \cup \overline{T} \subseteq \overline{S \cup T}$. Además, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que

$$w_{\mathcal{L}}(S) + w_{\mathcal{L}}(T) = w\left(\overline{S}\right) + w\left(\overline{T}\right) = w\left(\overline{S} \cup \overline{T}\right) + w\left(\overline{S} \cap \overline{T}\right).$$

Si $(N, \mathcal{L})$ es, en particular, un poset-antimatroide, se tiene que $\overline{S} \cup \overline{T} \in \mathcal{L}$. Entonces, de la inclusión $S \cup T \subseteq \overline{S} \cup \overline{T}$ y la Definición I.3.19 se deduce que $\overline{S \cup T} \subseteq \overline{S} \cup \overline{T}$. De aquí, al verificarse también que $\overline{S} \cup \overline{T} \subseteq \overline{S \cup T}$, se obtiene la igualdad $\overline{S} \cup \overline{T} = \overline{S \cup T}$. Siendo así, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se concluye que

$$w_{\mathcal{L}}(S) + w_{\mathcal{L}}(T) = w\left(\overline{S} \cup \overline{T}\right) + w\left(\overline{S} \cap \overline{T}\right) \geq w\left(\overline{S \cup T}\right) = w_{\mathcal{L}}(S \cup T),$$

lo que demuestra que $(N, w_{\mathcal{L}})$ es subaditivo.

Para demostrar la condición recíproca, se supondrá que $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa que no es poset-antimatroide y se encontrará un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ para el que $(N, w_{\mathcal{L}})$ no es subaditivo. Si $(N, \mathcal{L})$ no es poset-antimatroide, su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$ tampoco es poset-antimatroide, según el Teorema I.3.21. Por tanto, el Teorema I.3.11 garantiza la existencia de un jugador $i \in N$ con $|A(i)| \geq 2$. Sea $A(i) = \{R_1, ..., R_m\}$ con $m \geq 2$. El Teorema 3.7 del primer capítulo garantiza que existe $j_1 \in R_1 \setminus R_2$, e igualmente, para cada $k \in \{2, ..., m\}$, un jugador $j_k \in R_k \setminus R_1$. Nótese que los jugadores j_k, con $k \in \{2, ..., m\}$, no tienen por qué ser diferentes entre sí, pero que sí serán distintos al jugador j_1. De esta forma, es posible considerar las coaliciones disjuntas $S = \{j_1\}$ y $T = \{j_2, ..., j_m\}$ cumpliendo las siguientes condiciones. Puesto que R_2 es un i-camino que verifica $R_2 \subseteq N \setminus S$, se tiene que $i \in int(N \setminus S)$, y entonces, según el Teorema I.3.23, $i \notin \overline{S}$. Igualmente, $R_1 \subseteq N \setminus T$, por lo que $i \notin \overline{T}$. Además, ningún R_k, con $k \in \{1, ..., m\}$, está contenido en $N \setminus (S \cup T)$, puesto que $S \cup T$ contiene al jugador $j_k \in R_k$, para $k \in \{2, ..., m\}$. Así, $i \notin int(N \setminus (S \cup T))$ y, nuevamente por el Teorema 3.23 del primer capítulo, se obtiene que $i \in \overline{S \cup T}$. Ahora, eligiendo el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ cuyas componentes son nulas excepto la correspondiente al jugador i, que es $w_i = 1$, puesto que $i \notin \overline{S} \cup \overline{T}$ y, evidentemente, también $i \notin \overline{S} \cap \overline{T}$, usando la igualdad conseguida al inicio de la demostración, se tiene que

$$w_{\mathcal{L}}(S) + w_{\mathcal{L}}(T) = w\left(\overline{S} \cup \overline{T}\right) + w\left(\overline{S} \cap \overline{T}\right) = 0.$$

Sin embargo, al ser $i \in \overline{S \cup T}$, se verifica que $w_{\mathcal{L}}(S \cup T) = w\left(\overline{S \cup T}\right) = 1$, con lo que se concluye que el juego $(N, w_{\mathcal{L}})$ no es subaditivo. ■

Sirvan los dos ejemplos siguientes como muestra de estos juegos.

Ejemplo 2.6. *Juegos de Aeropuerto.*

Los juegos de Aeropuerto (Littlechild y Owen [34]) surgieron con el objetivo de asignar los costes ocasionados en la construcción de pistas de aterrizajes entre los diferentes tipos *de aviones que las utilizan. Sin embargo, su uso se ha extendido a otros tipos de problemas, generalizándose del siguiente modo. Sea* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un conjunto de proyectos que deben ejecutarse de forma encadenada, y en el orden establecido según el número cardinal asignado a cada uno de ellos. Esto significa que la realización de* $i \in N$ *conlleva la obligación de realizar los proyectos anteriores, que son* $1, 2, \ldots, i-1$. *Sea* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *un vector, cuya coordenada* w_j, *para cualquier* $j \in N$, *representa el coste que origina la ejecución del proyecto* $j \in N$. *Entonces, un juego de Aeropuerto se define como un par* (N, c), *con*

$$c(S) = \sum_{\{j \in N \,:\, j \leq \max S\}} w_j, \qquad \textit{para cada } S \subseteq N,$$

siendo $\max S$ *el último proyecto que debe realizarse de la coalición* S, *y que coincide con el de mayor número cardinal asignado entre los proyectos contenidos en* S.

Nótese que si se considera el conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *y la familia*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3,\}, ..., \{1,2,3,...,n\}\},$$

el par $(N, \mathcal{L})$ *es una geometría convexa. Por tanto, tomando el vector inicial* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *se construye el juego de operador clausura* $(N, w_{\mathcal{L}})$, *el cual coincide con el juego de Aeropuerto* (N, c). *En efecto,* $w_{\mathcal{L}} = c$, *puesto que, para cada coalición* $S \subseteq N$ *se cumple que su clausura* $\overline{S}$ *es el conjunto* $\{1, 2, \ldots, \max S\}$.

Ejemplo 2.7. *Juegos de Asignación de Costes en Árboles.*

Los juegos de Asignación de Costes en Árboles (Meggido [36]) son una extensión de los juegos de Aeropuerto. Sea $G = (N, E)$ *un árbol dirigido con raíz el nodo* $1 \in N$, *y tal que cada arista* $e \in E$ *tiene asociado un coste* $w_e \in \mathbb{R}_+$. *Para cada* $i \in N \setminus \{1\}$, *se denota con* $P[i]$ *al conjunto de aristas que intervienen en el único camino que une la raíz con el vértice* i. *El juego propuesto por Meggido asocia a cada subconjunto de vértices* $S \subseteq N$ *un determinado coste, que es la suma de los costes de las aristas del subgrafo de* G *inducido por el conjunto de nodos que intervienen en la familia* $\{P[i] : i \in S\}$. *Así, se construye un juego sobre el conjunto de jugadores* N *cuya función característica viene definida, para cada* $S \subseteq N$, *por*

$$c(S) = \sum_{e \in \bigcup\{P[i] \,:\, i \in S\}} w_e.$$

Puesto que G *es un árbol con raíz, a cada arista* $e = (i, j) \in E$ *puede asignársele un único nodo, que será el nodo final* $j \in N$ *de la arista* e. *Si se establece un orden cualquiera* *entre los nodos $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, los pesos de las aristas del árbol G quedan representados a través de un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, de forma que el peso $w_e \in \mathbb{R}_+$ de la arista $e = (i, j) \in E$ es la componente $j-$ésima del vector $w \in \mathbb{R}_+^N$. En estas condiciones, para cada $i \in N \setminus \{1\}$, se denota con $[1, i]$ al conjunto de nodos que se encuentran en el único camino del árbol G que conecta 1 con i, y se considera la familia*

$$\mathcal{L} = \left\{ \bigcup_{i \in S} [1, i] : S \subseteq N \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Así se obtiene que, el juego de asignación de costes de Meggido coincide con el juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$. En efecto, la familia $\mathcal{L}$ constituye el poset-antimatroide sobre el conjunto N (ver Ejemplo 3.12 del Capítulo I) que sirvió para modelar las relaciones entre los jugadores del Ejemplo II.1.11. Por tanto, en virtud del Teorema I.3.11, se puede afirmar que $(N, \mathcal{L})$ es también una geometría convexa. Además, la relación existente entre los conjuntos $P[i]$ y $[1, i]$, para cada $i \in N$, (ver el Ejemplo II.1.11) establece que este juego es un juego de operador clausura. De hecho, obsérvese que $c = w_{\mathcal{L}}$, puesto que, para cualquier coalición no vacía $S \subseteq N$, se tiene que

$$\overline{S} = \bigcup_{i \in S} [1, i].$$

En particular, si el árbol G es una cadena se obtienen los juegos de Aeropuerto.

3. El core de un juego de operador interior

Entre los conceptos de solución tradicionalmente estudiados en juegos cooperativos superaditivos, el core merece una mención especial, debido a que se ajusta bien a los principios de racionalidad individual y de coalición, ya que cualquier vector del core asigna a cada conjunto de jugadores como mínimo el beneficio que obtendrían éstos si formaran conjuntamente una coalición. Además, mediante el core pueden obtenerse diferentes caracterizaciones de algunas clases de juegos, como son los juegos equilibrados, convexos o k-convexos ($k \in \mathbb{N}$) entre otros. Por tanto, estudiando el core de los juegos interior se podrán deducir algunas de las propiedades generales que estos juegos poseen, así como establecer caracterizaciones más precisas de los mismos. Aunque esta idea se pondrá de manifiesto en el capítulo siguiente, en esta sección, y como preámbulo, se formula el conjunto de imputaciones, formado por lo vectores de pago eficientes que verifican el principio de racionalidad individual para el caso particular de un juego interior y después, se estudia el conjunto $Core(w_{\mathcal{A}})$, donde $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego interior.

Proposición 3.1. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Entonces,*

$$I(w_{\mathcal{A}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x(N) = w(N),\ x_i \geq w_i\ \forall i \in a(\mathcal{A})\right\}.$$

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, según la Definición I.1.2, un vector $x \in \mathbb{R}^N$ pertenece al conjunto de imputaciones $I(w_{\mathcal{A}})$ si, y sólo si $x(N) = w_{\mathcal{A}}(N)$ y $x_i \geq w_{\mathcal{A}}(\{i\})$ para cada $i \in N$. Por tanto, puesto que $w_{\mathcal{A}}(N) = w(N)$ al ser N una coalición factible, y verificarse, por definición, que $w_i \in \mathbb{R}_+$ para cada $i \in N$, y también que

$$w_{\mathcal{A}}(\{i\}) = \begin{cases} w_i, & \text{si } i \in a(\mathcal{A}) \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se obtiene la identidad enunciada. ■

En cuanto al core de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, recordando la Definición I.1.4,

$$Core(w_{\mathcal{A}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = w_{\mathcal{A}}(N), x(S) \geq w_{\mathcal{A}}(S)\ \forall S \subseteq N\right\},$$

en el siguiente resultado se demuestra que tanto el core de un juego interior como el core de un subjuego suyo son siempre conjuntos no vacíos.

Teorema 3.2. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. *El vector inicial $w \in \mathbb{R}^N_+$ es un elemento del core, y de aquí, $Core(w_{\mathcal{A}}) \neq \emptyset$.*
2. *Para todo $S \subseteq N$, se verifica que $Core((w_{\mathcal{A}})_S) \neq \emptyset$.*

Demostración. Dado el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, es fácil probar que $Core(w_{\mathcal{A}})$ es un conjunto no vacío, pues el vector inicial $w \in \mathbb{R}^N_+$ pertenece a dicho conjunto. En efecto, al ser $N \in \mathcal{A}$, se verifica que

$$w(N) = w_{\mathcal{A}}(N),$$

y además,

$$w(S) \geq w(int(S)) = w_{\mathcal{A}}(S), \text{ para todo } S \subset N.$$

Considérese ahora un subjuego $(S, (w_{\mathcal{A}})_S)$, con $S \subseteq N$. Para probar que el core del juego $(S, (w_{\mathcal{A}})_S)$ es no vacío, basta considerar el vector $x \in \mathbb{R}^S_+$ cuyas componentes x_i, con $i \in S$, son

$$x_i = \begin{cases} w_i, & \text{si} \quad i \in int(S) \\ 0, & \text{si} \quad i \in S \setminus int(S). \end{cases}$$

Entonces, se tiene que x es un vector de pago eficiente para el juego $(S, (w_{\mathcal{A}})_S)$, pues

$$x(S) = w(int(S)) = (w_{\mathcal{A}})_S\,(S);$$

y además, para $T \subset S$, ocurre que

$$x(T) = w(T \cap int(S)) \geq w(int(T)) = (w_{\mathcal{A}})_S\,(T), \text{ puesto que } int(T) \subseteq int(S).$$

De esta forma, queda probado que $x \in Core\,((w_{\mathcal{A}})_S)$ para $S \subseteq N$, y por tanto, el subjuego $(S, (w_{\mathcal{A}})_S)$ tiene core no vacío. ■

Puesto que el core de cualquier juego interior es un conjunto no vacío, aplicando el Teorema I.1.3, se obtiene de forma inmediata que los juegos interior verifican la propiedad de ser equilibrados. Además, se puede afirmar que también son juegos totalmente equilibrados, al ser habitual utilizar esta denominación para referenciar a los juegos cooperativos cuyos subjuegos tienen core no vacío.

Corolario 3.3. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Entonces $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego totalmente equilibrado, y en particular, equilibrado.*

Aunque haya certeza de que el core de un juego cooperativo sea no vacío, resulta difícil precisar, en general, cuáles son todos y cada uno de sus elementos. Esto es así debido a que, el número de restricciones impuestas a los elementos del core, por definición, aumenta de forma considerable a medida que se incrementa el número de jugadores. No obstante, en un juego interior, es posible reducir, en general, el número de desigualdades que un vector del core debe verificar. De hecho, se observará, en el desarrollo de la demostración del Teorema 3.5 próximo, que el core de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ se puede expresar como

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x\,(N) = w(N), x(S) \geq w(S) \quad \forall S \in \mathcal{A}\right\}; \tag{II.1}$$

y que es posible afinar y disminuir aún más el número de restricciones que aparecen en esta última expresión. Para ello, se tendrá en cuenta que toda coalición factible de un antimatroide puede expresarse como unión de caminos, según se expuso en el Teorema I.3.6, y que estos caminos pueden ser disjuntos o no. Tal circunstancia permite introducir la siguiente notación. Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, así como $P(\mathcal{A})$ denota el conjunto de sus caminos, se denotará con $PN(\mathcal{A})$ a la familia formada por todas las coaliciones factibles que no pueden expresarse como unión de dos o más caminos del antimatroide disjuntos dos a dos, es decir, las coaliciones para las cuales no existe una partición no trivial en caminos. El siguiente resultado muestra que estas coaliciones forman una subfamilia de coaliciones factibles que contiene a los caminos y que, en general, no recubre todo el antimatroide.

Proposición 3.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que:*

1. $P(\mathcal{A}) \subseteq PN(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$.

2. $PN(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ *si, y sólo si,* $|a(\mathcal{A})| = 1$.

Demostración. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide.

Por definición, se tiene que $PN(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Para afirmar la primera parte de la proposición, bastará con observar que todo camino no es unión de dos o más caminos disjuntos dos a dos. Sea $i \in N$, si existiera un i-camino $S \in A(i)$ tal que pudiera expresarse como unión de dos o más caminos, disjuntos dos a dos, ocurriría que uno de esos caminos, T, sería una coalición factible estrictamente contenida en S y tal que $i \in T \subset S$. Pero, siendo así, debido al Lema 3.5 del capítulo anterior, existiría un i-camino $S' \in A(i)$ tal que $S' \subseteq T \subset S$, contradiciendo la hipótesis de que S es un i-camino y por tanto, no puede haber otro i-camino estrictamente contenido en él.

En el supuesto de que $|a(\mathcal{A})| = 1$, se tendría que $a(\mathcal{A}) \subseteq S$, para todo $S \in \mathcal{A}$, por la condición *(A1)* de Accesibilidad. En este caso, sería imposible encontrar una coalición factible que pudiera expresarse como unión de al menos dos caminos del antimatroide que sean disjuntos dos a dos, puesto que todos los caminos contendrían al único átomo del antimatroide. Se deduce así que, si $|a(\mathcal{A})| = 1$ entonces las familias $PN(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}$ coinciden. Recíprocamente, supóngase que existen al menos dos átomos diferentes en el antimatroide. Si $|a(\mathcal{A})| \geq 2$, entonces para cualesquiera dos átomos $i,j \in a(\mathcal{A})$, sucedería que $\{i\}, \{j\} \in \mathcal{A}$, y por el axioma *(A2)* de antimatroide, se tendría que $S = \{i, j\} \in \mathcal{A}$, al tratarse de la unión de dos coaliciones factibles. Pero, puesto que $\{i\}$ y $\{j\}$ son caminos del antimatroide, al ser coaliciones factibles unitarias, se concluye que S es unión disjunta de dos caminos. Por tanto, $S \notin PN(\mathcal{A})$ y entonces $PN(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$. ■

La familia $PN(\mathcal{A})$ permite concretar más cuáles son los vectores que pertenecen al core de un juego interior.

Teorema 3.5. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Entonces*

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x\,(N) = w(N), x(S) \geq w(S) \quad \forall S \in PN(\mathcal{A})\right\}.$$

Demostración. Es inmediato que

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x\,(N) = w(N), x(S) \geq w(S) \quad \forall S \in PN(\mathcal{A})\right\},$$

pues, si $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, entonces $x\,(N) = w_{\mathcal{A}}(N) = w(N)$ y se verifica que $x(S) \geq w_{\mathcal{A}}(S)$ para cualquier coalición $S \subseteq N$; en particular, para $S \in PN(\mathcal{A})$, al ser S una coalición factible, se tiene que $w_{\mathcal{A}}(S) = w(S)$, y entonces $x(S) \geq w(S)$. Además $x \in \mathbb{R}^N_+$, ya que $w \in \mathbb{R}^N_+$.

A continuación, se prueba que

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) \supseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x\,(N) = w(N), x(S) \geq w(S) \quad \forall S \in PN(\mathcal{A})\right\}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $x\,(N) = w(N)$ y $x(S) \geq w(S)$ para todo $S \in PN(\mathcal{A})$. Para probar que $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, bastará con demostrar que para cualquier $T \in \mathcal{A} \setminus PN(\mathcal{A})$ también ocurre que $x(T) \geq w_{\mathcal{A}}(T)$.

En primer lugar, obsérvese que si $T \in \mathcal{A} \setminus PN(\mathcal{A})$, entonces existen caminos disjuntos dos a dos, $S_1, \ldots, S_m \in \mathcal{A}$, tales que $T = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$, y por tanto

$$x(T) = x\left(\bigcup_{k=1}^{m} S_k\right) = \sum_{k=1}^{m} x(S_k) \geq \sum_{k=1}^{m} w(S_k) = w\left(\bigcup_{k=1}^{m} S_k\right) = w\,(T)\,,$$

donde la desigualdad es cierta por ser $S_k \in PN(\mathcal{A})$, para $k = 1, 2, \ldots, m$. De esta forma, queda probado que si $x \in \mathbb{R}^N_+$ es un vector eficiente que satisface que $x(S) \geq w(S)$, para todo $S \in PN(\mathcal{A})$, entonces se verifica que $x(S) \geq w(S)$, para cualquier $S \in \mathcal{A}$.

Así, si $T \subset N$ es una coalición no factible, también se tiene que $x(T) \geq w_{\mathcal{A}}\,(T)$. En efecto,

$$x(T) \geq x(int(T)) \geq w(int(T)) = w_{\mathcal{A}}(T),$$

siendo $x(int(T)) \geq w(int(T))$ cierto por ser $int(T) \in \mathcal{A}$. ■

Obsérvese que, de esta demostración, se deduce la igualdad (II.1).

En el teorema anterior, se aprecia cómo se reduce de forma considerable el número de desigualdades que un vector del core de un juego interior debe satisfacer. Además, se advierte que, si el antimatroide sobre el que se constituye el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ posee un único átomo, el mismo teorema junto a la Proposición II.3.4 aseguran sólo la reducción del número de condiciones a las expresadas en (II.1), ya que, en este caso, $PN(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Puesto que el core de cualquier juego interior asociado a un determinado antimatroide nunca es vacío, cabe plantearse si el reparto de beneficios que proponen sus vectores asignará a algún jugador el valor con el que él mismo colabora en el juego. La definición que se introduce a continuación permitirá obtener algunas características particulares que debe satisfacer este posible jugador.

Definición 3.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se dice que $i \in N$ es un jugador equilibrado en el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ si, para todo juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ que se pueda construir considerando cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que $x_i = w_i$ para cada $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. El conjunto de jugadores equilibrados en el antimatroide dado se denotará por $eq\,(\mathcal{A})$.*

Para proceder a caracterizar a los jugadores equilibrados, se debe tener presente el siguiente lema.

Lema 3.7. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Si $S \in \mathcal{A}$, $N \setminus S \in \mathcal{A}$ y $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, entonces $x\,(S) = w\,(S)$.*

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior y considérese $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. Si $S \in \mathcal{A}$ es tal que $N \setminus S \in \mathcal{A}$, se tiene que $x\,(S) \geq w\,(S)$ y también que $x\,(N \setminus S) \geq w\,(N \setminus S)$. De aquí que se obtenga la igualdad esperada, pues

$$x\,(S) = x\,(N) - x\,(N \setminus S) \leq w\,(N) - w\,(N \setminus S) = w\,(S)\,,$$

al ser $x \in \mathbb{R}_+^N$ un vector eficiente. ■

Este resultado facilita, de forma inmediata, una condición suficiente para que ciertos elementos sean jugadores equilibrados en un antimatroide.

Proposición 3.8. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Si $i \in N$ es tal que $i \in a\,(\mathcal{A}) \cap ca\,(\mathcal{A})$, entonces i es un jugador equilibrado en $(N, \mathcal{A})$.*

Demostración. Si $i \in N$ es tal que $i \in a(\mathcal{A}) \cap ca(\mathcal{A})$, entonces $\{i\} \in \mathcal{A}$ y también $N \backslash \{i\} \in \mathcal{A}$. De aquí, y aplicando el lema anterior, en un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ construido a partir de un vector cualquiera $w \in \mathbb{R}_+^N$, para todo $x \in Core(w_{\mathcal{A}})$ se tiene que $x_i = w_i$. Es decir, i es un jugador equilibrado en $(N, \mathcal{A})$. ■

Ocurre pues que, cualquier elemento que sea átomo y también coátomo de un antimatroide es un jugador equilibrado. En el siguiente ejemplo se muestra que la condición recíproca no es cierta.

Ejemplo 3.9. *Sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, N\}.$$

En este antimatroide ocurre que $PN(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A})$, esto es

$$PN(\mathcal{A}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Para cualquier juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ construido sobre $(N, \mathcal{A})$ se verifica que, debido al Teorema II.3.5, los elementos de $Core(w_{\mathcal{A}})$ son los vectores $x \in \mathbb{R}_+^N$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= w_1 + w_2 + w_3, \\ x_1 &\geq w_1, \qquad x_2 \geq w_2 \\ x_1 + x_3 &\geq w_1 + w_3, \qquad x_2 + x_3 \geq w_2 + w_3. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de inecuaciones se obtiene que $x_i = w_i$ para todo $i \in N$, y se deduce así que $Core(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}$.

De esta forma, en el ejemplo considerado se observa que existe un jugador, $3 \in N$, que es equilibrado pero no es átomo del antimatroide.

A continuación se delimita el conjunto de jugadores equilibrados en un antimatroide dado.

Teorema 3.10. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que:*

$$int(ca(\mathcal{A})) \subseteq eq(\mathcal{A}) \subseteq ca(\mathcal{A}).$$

Demostración. Dado el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se probará en primer lugar que todo jugador equilibrado en $(N, \mathcal{A})$ es coátomo. Para ello, se procede por reducción al absurdo. Sea $i \in N$ un jugador equilibrado tal que $i \notin ca(\mathcal{A})$. Entonces, $N \setminus \{i\} \notin \mathcal{A}$ y, considerando la geometría convexa asociada a $(N, \mathcal{A})$, se tiene que $\overline{\{i\}} \neq \{i\}$. Por tanto, existe un jugador $j \in \overline{\{i\}} \setminus \{i\}$ y, debido al Lema II.1.3, ocurre que $i \in P_j$. En estas condiciones, para cualquier juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, sobre el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se puede definir el vector $x \in \mathbb{R}^N_+$ de componentes

$$x_k = \begin{cases} w_k, & \text{si } k \neq i, j \\ w_i + w_j, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{si } k = j. \end{cases} \tag{II.2}$$

Por definición, $x(N) = w(N)$. Además $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, según la fórmula (II.1), ya que $x(S) \geq w(S)$, para todo $S \in \mathcal{A}$. En efecto, si $S \in \mathcal{A}$ con $j \notin S$, entonces

$$x(S) = \begin{cases} w(S), & \text{si } i \notin S \\ w(S) + w_j, & \text{si } i \in S. \end{cases}$$

En otro caso, si $S \in \mathcal{A}$ es tal que $j \in S$, se tiene que $x(S) = w(S)$, puesto que S contendría un j-camino y entonces $i \in S$ por ser $i \in P_j$.

En definitiva, queda probado que, cualquiera que sea el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ considerado a partir del antimatroide $(N, \mathcal{A})$, para cualquier $i \notin ca(\mathcal{A})$ se puede obtener $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$ verificando las condiciones anteriores. Sin embargo, esta conclusión induce a contradicción si i es un jugador equilibrado en $(N, \mathcal{A})$, pues, si $i \in N \setminus ca(\mathcal{A})$, siempre es posible considerar un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ tal que $w_j > 0$ para un $j \in N \setminus \{i\}$ con $i \in P_j$. Entonces $x_i > w_i$, con lo que el jugador i no sería equilibrado.

Finalmente se probará que $int\,(ca\,(\mathcal{A})) \subseteq eq\,(\mathcal{A})$. Si el conjunto $int\,(ca\,(\mathcal{A}))$ es vacío la inclusión anterior es trivial. Para el resto de los casos, se considerarán todos los elementos del conjunto $int\,(ca\,(\mathcal{A}))$ y se supondrá que $int\,(ca\,(\mathcal{A})) = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq N$, para proceder demostrando que todos los jugadores de $int\,(ca((\mathcal{A})))$ son equilibrados, esto es, que i_k es equilibrado, para $k = 1, \ldots, p$.

Puesto que $int\,(ca\,(\mathcal{A})) \in \mathcal{A}$ y $(N, \mathcal{A})$ verifica la propiedad de Accesibilidad *(A1)*, se verifica que existen $S_k \in \mathcal{A}$, con $k = 1, \ldots, p$, tales que $|S_k| = k$ y

$$\emptyset \subset S_1 \subset \ldots \subset S_p = int(ca\,(\mathcal{A})).$$

A continuación, se considera, sin pérdida de generalidad, que $S_k = \{i_1, \ldots, i_k\}$ para todo $k = 1, \ldots, p$, y se demuestra, por inducción sobre el cardinal de S_k que, para todo juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ construido sobre $(N, \mathcal{A})$ se verifica que $x(S_k) = w(S_k)$ y que $x_{i_k} = w_{i_k}$, para cada $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$.

Sea un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ y considérese $x \in Core(w_{\mathcal{A}})$. Para $k = 1$, nótese que $S_1 \in \mathcal{A}$ y $N \setminus S_1 \in \mathcal{A}$, al ser $i_1 \in ca\,(\mathcal{A})$. Entonces, por aplicación del Lema II.3.7, se tiene que $x(S_1) = w(S_1)$, y así $x_{i_1} = w_{i_1}$. Suponiendo ahora cierto que $x(S_{k-1}) = w(S_{k-1})$ y $x_{i_{k-1}} = w_{i_{k-1}}$ para $k = 2, \ldots, p$, se prueba que $x(S_p) = w(S_p)$ y $x_{i_p} = w_{i_p}$. En efecto, al ser $S_p \in \mathcal{A}$ se verifica que $x(S_p) \geq w(S_p)$. Por otra parte, puesto que $i_p \in ca\,(\mathcal{A})$, se tiene que $N \setminus \{i_p\} \in \mathcal{A}$ y entonces $x_{i_p} \leq w_{i_p}$, pues $x(N) = w(N)$ y $x(N \setminus \{i_p\}) \geq w(N \setminus \{i_p\})$. Con esto, utilizando la hipótesis de inducción, resulta que

$$x(S_p) = x(S_{p-1}) + x_{i_p} \leq w(S_{p-1}) + w_{i_p} = w(S_p).$$

Se concluye así que $x(S_p) = w(S_p)$ y de aquí, que $x_{i_p} = w_{i_p}$. ■

La prueba del teorema anterior permite asegurar que una condición necesaria para que un jugador sea equilibrado, es que no esté controlado por otro jugador.

Corolario 3.11. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Si $j \in eq\,(\mathcal{A})$ entonces $|P_j| = 1$.*

Demostración. Dado $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, sea $j \in eq\,(\mathcal{A})$ un jugador equilibrado. Si existe $i \in P_j \setminus \{j\}$, entonces, por el Lema II.1.3 y teniendo en cuenta la geometría convexa asociada a $(N, \mathcal{A})$, se verifica que $j \in \overline{\{i\}}$. Siendo así, para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, se puede construir el vector $x \in \mathbb{R}_+^N$ expresado en la igualdad (II.2). En la prueba del teorema anterior se demostró que $x \in Core(w_{\mathcal{A}})$, para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ inicialmente elegido. Además, puesto que $x_j = 0$, se contradice la hipótesis inicial, al afirmar que el jugador j es equilibrado, sin más que considerar $w \in \mathbb{R}_+^N$ con $w_j > 0$. ■

Del teorema anterior se deduce también que el conjunto de jugadores equilibrados en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ coincide con el conjunto de coátomos de un antimatroide precisamente cuando el conjunto $ca\,(\mathcal{A})$ es factible. El siguiente ejemplo pone de manifiesto que, en general, el conjunto de jugadores equilibrados en un antimatroide no coincide ni con el conjunto de coátomos ni con el interior de éste, pudiendo ser un conjunto estrictamente contenido entre los dos anteriores.

Ejemplo 3.12. *Sea el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$, *con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y de forma que* $a(\mathcal{A}) = \{1, 2\}$, $A(3) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $A(4) = \{\{1, 4\}\}$, $A(5) = \{\{2, 5\}\}$, *como muestra la Figura II.4. Aplicando el Lema II.3.7 a las coaliciones* $\{1, 3, 4\}$ *y* $\{1, 4\}$ *(cuyos complementarios son también conjuntos factibles) se obtiene que, para cualquier juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *construido sobre el antimatroide dado, se verifica que todo* $x \in Core(w_{\mathcal{A}})$ *satisface lo siguiente:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= w_1 + w_3 + w_4, \\ x_1 + x_4 &= w_1 + w_4. \end{aligned}$$

De ambas ecuaciones se deduce que $x_3 = w_3$. *Sin embargo, el conjunto de coátomos es* $ca(\mathcal{A}) = \{3, 4, 5\}$ *y su interior es* $int(ca(\mathcal{A})) = \emptyset$. *Se concluye así que* 3 *es un jugador equilibrado y en cambio no está en el interior del conjunto formado por los coátomos del antimatroide. Se puede observar también que el resto de los coátomos son jugadores controlados, y en virtud del corolario anterior, no pueden ser jugadores equilibrados. Se tiene pues que*

$$int(ca(\mathcal{A})) = \emptyset, \qquad eq(\mathcal{A}) = \{3\}, \qquad ca(\mathcal{A}) = \{3, 4, 5\},$$

obteniendo, en este caso, inclusiones estrictas entre los tres conjuntos mencionados.

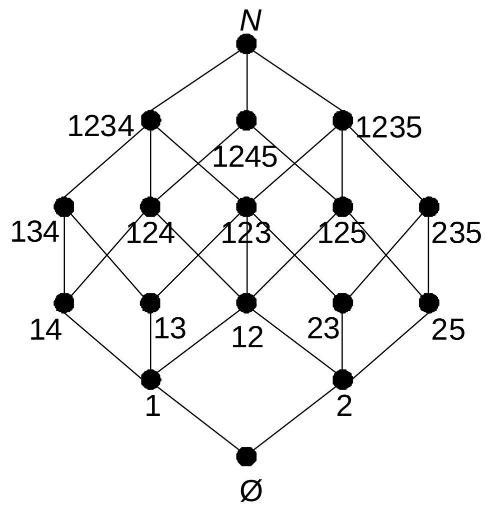

Figura II.4

Teniendo ahora en cuenta la Proposición II.1.5 y el Teorema II.3.10, se deduce de forma inmediata la siguiente relación entre los antimatroides coatómicos, sus respectivos jugadores equilibrados y el core de cualquier juego interior definido sobre ellos.

Corolario 3.13. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $(N, \mathcal{A})$ *es coatómico.*

(b) Todos los jugadores son equilibrados.

(c) Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, *se verifica que* $Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}$.

Como aplicación de este resultado puede afirmarse que el core de cualquier juego de Mercado con Información $(N, w_{\mathcal{A}})$ con dos o más jugadores inicialmente informados, descrito en el Ejemplo II.1.14 como juego interior, es el conjunto unitario $\{w\}$, formado por el vector cuyas componentes representan los beneficios que cada firma obtendría si ésta vendiera sus productos. Esto es así porque estos juegos están construidos sobre antimatroides coatómicos.

Profundizar en otras cuestiones relativas al core de un juego cooperativo, permitirá analizar, en el siguiente capítulo, qué otras propiedades de convexidad alternativas a la convexidad propiamente dicha pueden ser atribuidas a un juego interior. Así, en Driessen [17] se introducen los conceptos de k-convexidad ($k \in \mathbb{N}$) y semiconvexidad después de establecer una cota superior para el core y la función de desfase de un juego cooperativo cualquiera. Las definiciones de vector superior y función de desfase, incorporadas en Definición 1.11 del Capítulo I de este trabajo, conllevan interpretar el desfase de una coalición como el máximo incremento de ganancias al que puede aspirar dicha coalición, tomando de partida el valor de ella en el juego y sin superar la suma de las máximas aspiraciones de los jugadores que la forman. Así, puesto que cualquier vector del core constituye un reparto de beneficios tal que a cada coalición asigna como mínimo su valor en el juego, la función de desfase resulta ser un buen indicador para cuantificar la pérdida de la coalición respecto a la máxima aspiración de sus jugadores si éstos deciden aceptar como reparto un vector del core. En efecto, sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior y considérese $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. Puesto que, por definición, $x(S) \geq w_{\mathcal{A}}(S)$ con $S \subseteq N$, también se verifica que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = \sum_{i \in S} M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - w_{\mathcal{A}}(S) \geq \sum_{i \in S} M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - x(S), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

En este sentido, el vector superior, así como la función de desfase, son conceptos que guardan una estrecha relación con el core del juego, y merecen atención privilegiada. Por este motivo, se obtienen, a continuación, unas expresiones alternativas a las respectivas definiciones de la contribución marginal de un jugador y del desfase de una coalición en un juego interior, que serán utilizadas con asiduidad a partir de su introducción.

Proposición 3.14. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Teniendo en cuenta la geometría convexa asociada al antimatroide $(N, \mathcal{A})$, el vector superior $(M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}})_{i \in N}$ de este juego verifica que*

$$M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right), \text{ para cada } i \in N.$$

Demostración. Dado el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, sea $i \in N$. Por la Definición I.1.11, se tiene que

$$\begin{aligned} M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} &= w_{\mathcal{A}}(N) - w_{\mathcal{A}}(N \setminus \{i\}) = w(N) - w(int(N \setminus \{i\})) \\ &= w(N \setminus int(N \setminus \{i\})) = w\left(\overline{\{i\}}\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida al Teorema I.3.23. ∎

Según este resultado y el Lema II.1.3, la máxima aspiración de un jugador en cualquier juego interior es recuperar su aportación al juego y conseguir además la aportación de todos los jugadores a los cuales controla.

Proposición 3.15. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para cada $S \subseteq N$, se verifica que*

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) + w(S \setminus int(S)) \geq 0.$$

En particular:

1. *Si $S \in \mathcal{A}$ entonces $g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right)$.*

2. *Si $S \notin \mathcal{A}$ entonces $g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = g^{w_{\mathcal{A}}}(int(S)) + \sum_{i \in S \setminus int(S)} w\left(\overline{\{i\}}\right)$.*

3. *Si $S = \{i\}$, con $i \in N$, entonces $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right) - w(int(\{i\}))$.*

Demostración. En el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ se considera una coalición $S \subseteq N$. Debido a la definición de la función de desfase (Definición I.1.11) y a la proposición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} g^{w_{\mathcal{A}}}(S) &= \sum_{i \in S} M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - w_{\mathcal{A}}(S) = \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(int\left(S\right)\right) \\ &= \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}}\right) - w(S) + w\left(S \setminus int\left(S\right)\right) = \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) + w\left(S \setminus int\left(S\right)\right). \end{aligned}$$

Los apartados primero y tercero se obtienen de la expresión anterior, de forma inmediata, sin más que tener en cuenta la condición adicional que debe cumplir la coalición $S \subseteq N$ en sendos apartados (S es factible y S es una coalición individual, respectivamente). Para concluir la demostración, se prueba el segundo apartado. Si $S \notin \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} g^{w_{\mathcal{A}}}(S) &= \sum_{i \in S} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) + w\left(S \setminus int\left(S\right)\right) \\ &= \sum_{i \in int(S)} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) + \sum_{i \in S \setminus int(S)} w\left(\overline{\{i\}}\right) = g^{w_{\mathcal{A}}}\left(int\left(S\right)\right) + \sum_{i \in S \setminus int(S)} w\left(\overline{\{i\}}\right), \end{aligned}$$

puesto que $int\left(S\right) \in \mathcal{A}$, y por tanto $g^{w_{\mathcal{A}}}\left(int\left(S\right)\right) = \sum_{i \in int(S)} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right)$, según afirma el apartado primero, ya demostrado. ■

En los juegos cooperativos en general existe una relación de igualdad entre el desfase de la gran coalición y el desfase de las coaliciones formadas por todos los jugadores excepto uno. Para los juegos interior, también es posible garantizar la igualdad entre el desfase de un camino del antimatroide y el desfase de la coalición factible estrictamente contenida en él de mayor cardinal, siempre y cuando el punto final del camino sea un coátomo.

Proposición 3.16. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para todo $i \in ca\left(\mathcal{A}\right)$ y cada $T \in A\left(i\right)$ se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}\left(T \setminus \{i\}\right) = g^{w_{\mathcal{A}}}\left(T\right)$.*

Demostración. Siendo $i \in ca\left(\mathcal{A}\right)$ y considerando la geometría convexa asociada a $(N, \mathcal{A})$, se tiene que $w\left(\overline{\{i\}}\right) = w_i$ y entonces, para cada $T \in A\left(i\right)$,

$$\begin{aligned} g^{w_{\mathcal{A}}}(T) &= \sum_{j \in T} w\left(\overline{\{j\}}\right) - w(T) \\ &= \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) + w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(T \setminus \{i\}\right) - w_i \\ &= \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) - w\left(T \setminus \{i\}\right) = g^{w_{\mathcal{A}}}\left(T \setminus \{i\}\right), \end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen del apartado primero de la proposición anterior, por ser T y $T \setminus \{i\}$ conjuntos factibles en $(N, \mathcal{A})$. ■

Finaliza este capítulo realizando una observación acerca del conjunto de imputaciones y del core de los juegos de operador clausura que, según el Teorema II.2.5, son subaditivos y que, por tanto, pueden ser interpretados como juegos de costes propiamente dichos. De la igualdad (I.6) y la definición de juego de operador clausura se deduce que el conjunto de imputaciones de un juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$ con $(N, \mathcal{L})$ poset-antimatroide viene dado por

$$I(w_{\mathcal{L}}) = \left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{N} : x(N) = w(N),\ x_i \leq w\left(\overline{\{i\}}\right)\right\}. \tag{II.3}$$

Asimismo, del Teorema 2.2 de este capítulo y la Proposición I.1.24 se deduce el siguiente enunciado.

Teorema 3.17. *Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$. Para cada $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$, se verifica que el core del juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$ coincide con el core del juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

Capítulo III

Propiedades de convexidad

En este capítulo se caracterizan los juegos interior a través de las diversas acepciones de convexidad introducidas en Driessen [17]. En la primera sección se pone de manifiesto que los juegos interior no son, en general, juegos convexos. Esta circunstancia justificará que se continúe explorando sobre otros conceptos cercanos a la convexidad. Los resultados obtenidos facilitarán distintas caracterizaciones de los juegos objeto de estudio, para cada uno de estos tipos de convexidad, además de dar a conocer la familia de antimatroides para los cuales puede asegurarse que todos los juegos interior verifican cada una de esas propiedades.

En el desarrollo de las demostraciones, para un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, la notación $\overline{\{i\}}$ se referirá a la clausura de la coalición individual $\{i\}$ en la geometría convexa dual asociada a $(N, \mathcal{A})$, y representa, en $(N, \mathcal{A})$, al conjunto de jugadores que son controlados por el jugador $i \in N$, según se demostró en el Lema II.1.3, al afirmar que

$$\overline{\{i\}} = \{j \in N : i \in P_j\}.$$

1. Juegos de operador interior convexos

En esta sección, se procede a investigar la propiedad de convexidad en los juegos interior, ya que los juegos convexos constituyen una clase especial de juegos superaditivos que permiten establecer diferentes características de otros conceptos de solución (ver Capítulo V en Driessen [17]) y son de gran utilidad en aplicaciones económicas y sociales. Recuérdese que un juego cooperativo es convexo si, para cualesquiera $S, T \subseteq N$, se verifica la desigualdad $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$. El siguiente teorema permitirá establecer e identificar de forma fácil y breve cuándo un juego interior es convexo.

Teorema 1.1. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Son equivalentes:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego convexo.

(b) Para cada $i \in N$ tal que $|A(i)| \geq 2$, se verifica que $w_i = 0$.

Demostración. Dado $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior convexo, sea $i \in N$ tal que $|A(i)| \geq 2$. Para cualesquiera $S, T \in A(i)$, con $S \neq T$, se verifica que $S \cup T \in \mathcal{A}$. Además,

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{A}}(S \cup T) + w_{\mathcal{A}}(S \cap T) &= w(S \cup T) + w(int(S \cap T)) \\ &= w(S) + w(T) - w(S \cap T) + w(int(S \cap T)) \\ &= w(S) + w(T) - w((S \cap T) \setminus int(S \cap T)) \\ &= w_{\mathcal{A}}(S) + w_{\mathcal{A}}(T) - w((S \cap T) \setminus int(S \cap T)) \\ &\geq w_{\mathcal{A}}(S) + w_{\mathcal{A}}(T), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta porque $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego convexo. Siendo así debe ocurrir que $w((S \cap T) \setminus int(S \cap T)) = 0$, de lo que se deduce que $w_i = 0$, puesto que $i \in S \cap T$ pero $i \notin int(S \cap T)$ debido a que S y T son i-caminos en $(N, \mathcal{A})$.

Recíprocamente, si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego interior con $w_i = 0$ para todo $i \in N$ tal que $|A(i)| \geq 2$, entonces se trata de un juego convexo. En efecto, según la Proposición I.3.3, para cualesquiera dos coaliciones $S, T \subseteq N$ se tiene que $int(S) \cup int(T) \subseteq int(S \cup T)$ y $int(S \cap T) \subseteq int(S) \cap int(T)$, por tanto

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{A}}(S \cup T) + w_{\mathcal{A}}(S \cap T) &= w(int(S \cup T)) + w(int(S \cap T)) \\ &\geq w(int(S) \cup int(T)) + w(int(S \cap T)) \\ &= w(int(S)) + w(int(T)) - w(int(S) \cap int(T)) + w(int(S \cap T)) \\ &= w(int(S)) + w(int(T)) - w((int(S) \cap int(T)) \setminus int(S \cap T)) \\ &= w_{\mathcal{A}}(S) + w_{\mathcal{A}}(T) - w((int(S) \cap int(T)) \setminus int(S \cap T)). \end{aligned}$$

Para demostrar que $w_{\mathcal{A}}$ es convexo, bastará probar que cualquier $j \in int(S) \cap int(T)$ con $j \notin int(S \cap T)$ es el punto final de al menos dos caminos en $(N, \mathcal{A})$. De esa forma, por hipótesis, se tendrá que $w_j = 0$, y por tanto,

$$w((int(S) \cap int(T)) \setminus int(S \cap T)) = 0.$$

Así es, si $j \in int\,(S) \cap int\,(T)$, existen R_1, $R_2 \in A(j)$ tales que $R_1 \subseteq int\,(S)$ y también $R_2 \subseteq int\,(T)$. Además, es imposible que R_1 y R_2 coincidan porque, si esto sucediera, entonces $R_1 \subseteq int\,(S) \cap int\,(T) \subseteq S \cap T$ y j debería pertenecer a $int\,(S \cap T)$, según el Lema I.3.5. ■

Puesto que cualquier juego interior se formula en base a cuáles son las coaliciones factibles y al beneficio que cada jugador aporta al juego, resulta interesante la caracterización que se facilita a continuación, acerca de una clase especial de antimatroides: los poset-antimatroides. Todo juego interior definido sobre un poset-antimatroide es convexo siempre.

Teorema 1.2. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes:*

(a) Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es convexo.

(b) $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide.

Demostración. Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, supóngase que para todo $w \in \mathbb{R}_+^N$ se verifica que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego cooperativo convexo. Si $(N, \mathcal{A})$ no es un poset-antimatroide, entonces, según el Teorema I.3.11, existe un jugador $i \in N$ tal que $|A\,(i)| \geq 2$. Siendo así, bastaría con tomar $w \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $w_i \neq 0$ para concluir que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ no es convexo, sin más que aplicar el teorema anterior, y llegar de este modo a contradecir la suposición inicial.

El recíproco se sigue de forma inmediata debido, de nuevo, a la caracterización de convexidad del teorema anterior y al Teorema I.3.11, el cual asegura que en un poset-antimatroide no hay jugadores que sean el punto final de más de un camino. ■

Una consecuencia inmediata de este teorema es que cualquier juego interior obtenido sobre una Estructura de Autorización acíclica en el caso conjuntivo, todo juego "Peer Group", cualquier juego interior "Big Boss", los juegos interior Clan y los juegos Clan Modificados (ya expuestos en los Ejemplos 1.9, 1.11, 1.12, 1.13, 1.15 y 1.16 del capítulo anterior) son convexos, por tratarse todos ellos de juegos interior constituidos a partir de un poset-antimatroide. Además, del Teorema III.1.1 se deduce que, en general, no todos los juegos interior son convexos. Prueba de ello será el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. *Sea un juego de Mercado con Información $(N, w_{\mathcal{A}})$ (Ejemplo 1.14 del Capítulo II), tal que su coalición de jugadores informados $I \subset N$ verifica que $|I| \geq 2$, y* *el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ satisface que $w_i \neq 0$ para algún $i \in N \setminus I$. Puesto que la familia $A(i)$ de i-caminos en el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ es*

$$A(i) = \{\{i, j\}\,,\ \textit{cuando}\ j \in I\}\,,$$

y existen, al menos, dos jugadores informados, resulta que el jugador i es el punto final de al menos dos caminos. Entonces, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ no es convexo, por no satisfacer la caracterización enunciada en el Teorema III.1.1.

Del Teorema III.1.2 y otros resultados anteriores se obtienen importantes conclusiones acerca de los juegos de operador clausura. Dada una geometría convexa que sea poset-antimatroide, el Teorema I.3.21 garantiza que su antimatroide dual también lo es. Por tanto, considerando el Teorema III.1.2, se deduce que cualquier juego interior constituido sobre este último antimatroide es convexo. De aquí, la Proposición I.1.24 y el Teorema II.2.5 se concluye que todos los juegos de operador clausura que son de costes propiamente dichos (esto es, que son subaditivos) son cóncavos.

Teorema 1.4. *Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide. Todo juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$ es cóncavo.*

2. Juegos de operador interior 1-convexos

Puesto que, en general, no todos los juegos interior son convexos, cabe plantearse qué otras características poseen los juegos interior no convexos. En Driessen [17], se introducen nuevos conceptos relacionados con la noción de convexidad y se definen ciertas familias de juegos cooperativos con interesantes propiedades cercanas a la idea de convexidad, que aportan información precisa acerca de conceptos de solución como son el core del juego y el valor de Tijs.

Así, la definición de la función de desfase (Definición I.1.11) permite considerar aquellos juegos para los que el desfase de la gran coalición es mínimo entre los desfases de cualquier coalición no vacía de jugadores. Son los denominados juegos 1-convexos (Definición I.1.18)

En la tarea de seguir profundizando en el conocimiento de los juegos interior, se procede a caracterizar en esta sección las condiciones en las que los citados juegos son 1-convexos.

Obsérvese en primer lugar que, si $\mathcal{A} = 2^N$, entonces el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^N$. En efecto, si $\mathcal{A} = 2^N$ resulta que $(N, w_{\mathcal{A}})$ coincide con el juego aditivo (N, w) y además todos los jugadores son átomos y también coátomos del antimatroide. Por tanto, se verifica que $\overline{\{i\}} = \{i\}$, para todo $i \in N$, y se obtiene, aplicando la Proposición II.3.15, que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = 0.$$

Puesto que la misma proposición asegura que el desfase de una coalición, factible o no, es un valor no negativo en cualquier juego interior, y se ha obtenido que, en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $\mathcal{A} = 2^N$ y $w \in \mathbb{R}^N_+$, la gran coalición tiene desfase nulo, se concluye que el juego considerado es 1-convexo.

Asimismo, si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego interior donde $|N| = 2$, entonces $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo. Esto es debido a que, en este juego, el desfase de cualquier coalición no vacía es constante, como se observa a continuación. Si $N = \{1, 2\}$, sólo es posible construir dos antimatroides esencialmente diferentes: aquél cuya familia es $\mathcal{A} = 2^N$ y aquel otro, que se convendrá en denominar "*antimatroide cadena*", cuyo diagrama de Hasse se representa en la Figura III.1.

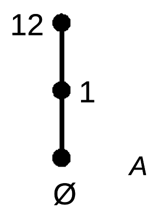

Figura III.1

Para este último, se tiene que $\overline{\{1\}} = \{1, 2\}$ y $\overline{\{2\}} = \{2\}$; y, por tanto, para cualquier $w \in \mathbb{R}^N_+$,

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{1, 2\}) = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{1\}) = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{2\}) = w_2,$$

sin más que considerar la Proposición II.3.15.

El siguiente teorema expresa distintas caracterizaciones de un juego interior 1-convexo para el caso en el que haya más de dos jugadores. Dichas caracterizaciones están basadas en condiciones que deben verificar el antimatroide de partida y la función de desfase en el juego definido. Para su demostración se tendrá en cuenta el Teorema I.1.19, cuyo enunciado en el caso particular de un juego interior, origina el siguiente lema, y mediante el cual se establece también una condición necesaria y suficiente para que un juego interior sea 1-convexo.

Lema 2.1. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

1. $w(T) \geq \sum_{j\in T} w\left(\overline{\{j\}}\right)$ *para cada $T \in \mathcal{L}$ con $T \neq N$ y siendo $(N, \mathcal{L})$ la geometría convexa asociada al antimatroide $(N, \mathcal{A})$.*

2. $w(N) \geq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right)$ *para cada $i \notin a(\mathcal{A})$.*

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, una condición necesaria y suficiente para que $(N, w_{\mathcal{A}})$ sea 1-convexo es, según el Teorema I.1.19, que para cada $i \in N$, el vector $x^i = \left(x^i_j\right)_{j\in N} \in \mathbb{R}^N$ de componentes

$$x^i_j = \begin{cases} M_j^{\tau, w_{\mathcal{A}}}, & \text{si } j \neq i \\ M_j^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - g^{w_{\mathcal{A}}}(N), & \text{si } j = i, \end{cases}$$

pertenezca al core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$. Utilizando las Proposiciones 3.14 y 3.15 del capítulo anterior, se tiene que $M_k^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{k\}}\right)$, para cada $k \in N$, y que

$$M_j^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = w\left(\overline{\{j\}}\right) - \sum_{k\in N} w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) = w(N) - \sum_{k\in N\setminus\{j\}} w\left(\overline{\{k\}}\right), \text{ con } j \in N.$$

Por tanto, para cada $i \in N$, las componentes del vector $x^i \in \mathbb{R}^N$ son:

$$x^i_j = \begin{cases} w\left(\overline{\{j\}}\right), & \text{si } j \neq i \\ w(N) - \sum_{k\in N\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{k\}}\right), & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Puesto que una caracterización del core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, igualdad (II.1), viene dada por

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ : x\,(N) = w(N), x(S) \geq w(S) \quad \forall S \in \mathcal{A}\right\},$$

se tiene que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo si y sólo si, para cada $i \in N$, se verifica que $x^i \in \mathbb{R}^N_+$, $x^i\,(N) = w(N)$ y $x^i(S) \geq w(S)$, para cada $S \in \mathcal{A}$. Ahora bien, por construcción, se observa que los vectores x^i, para $i \in N$ son eficientes. En efecto, sea $i \in N$, entonces

$$x^i\,(N) = \sum_{j\in N\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) + w\,(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) = w\,(N)\,.$$

Además, para una coalición factible $S \in \mathcal{A}$, si $i \notin S$, se tiene que

$$x^i(S) = \sum_{j\in S} w\left(\overline{\{j\}}\right) \geq w(S).$$

En otro caso, si $i \in S$ se verifica que

$$\begin{aligned} x^i(S) &= \sum_{j \in S \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) + w(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}}\right) \\ &= w(N) - \sum_{j \in N \setminus S} w\left(\overline{\{j\}}\right), \end{aligned}$$

y de aquí se obtiene que, $x^i(S) \geq w(S)$ si, y sólo si, $w(N \setminus S) \geq \sum_{j \in N \setminus S} w\left(\overline{\{j\}}\right)$. En términos de la geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ asociada al antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y siendo que $N \setminus S \in \mathcal{L}$, se tiene que

$$x^i(S) \geq w(S), \quad \forall\, S \in \mathcal{A} \text{ con } i \in S \Leftrightarrow w(T) \geq \sum_{j \in T} w\left(\overline{\{j\}}\right), \quad \forall T \in \mathcal{L}, \text{ con } i \notin T.$$

Por otra parte, para que los vectores $\{x^i,\ i \in N\}$ estén en el conjunto $Core\,(w_{\mathcal{A}})$, también debe verificarse que, para cada $i \in N$, el número real x^i_j, para cada $j \in N$ sea no negativo. Si $j \neq i$, la coordenada x^i_j es, por definición, no negativa; en cambio, si $j = i$, se tiene que

$$x^i_i \geq 0 \Leftrightarrow w(N) \geq \sum_{k \in N \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{k\}}\right).$$

No obstante, si $i \in a\,(\mathcal{A})$, entonces $\{i\} \in \mathcal{A}$ y la verificación de la condición $x^i(S) \geq w(S)$, para cada $S \in \mathcal{A}$ llevaría implícito que $x^i_i \geq 0$, pues, en este caso, $x^i_i \geq w_i$.

El razonamiento anterior permite obtener la equivalencia del enunciado. ■

Teorema 2.2. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior tal que $|N| > 2$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo.

(b) Para todo $i \in N$ con $|P_i| \geq 2$ se tiene que $w_i = 0$.

(c) El desfase de cualquier coalición factible en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es nulo. Esto es, $g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = 0$ para todo $S \in \mathcal{A}$.

(d) Se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0$.

Demostración. En primer lugar, y aplicando el lema anterior, se obtendrá la afirmación (b) a partir de (a), de forma que se distinguirán dos casos, dependiendo del número de átomos del antimatroide $(N, \mathcal{A})$. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior 1-convexo, y considérese un jugador $i \in N$ con $|P_i| \geq 2$. Entonces se verifican las dos condiciones del Lema III.2.1 y además, existe un jugador $j \in N \setminus \{i\}$ tal que $j \in P_i$ y también $i \in \overline{\{j\}}$.

Caso 1: $|a(\mathcal{A})| \geq 2$. En este supuesto, $\overline{\{j\}} \neq N$, puesto que, debido al Teorema I.3.23, se tiene que $\overline{\{j\}} = N \setminus int(N \setminus \{j\})$ y, al ser $|a(\mathcal{A})| \geq 2$, se verifica $int(N \setminus \{j\}) \neq \emptyset$. Por tanto, en virtud de la primera condición del lema anterior, y considerando $T = \overline{\{j\}}$, se cumple que $w(\overline{\{j\}}) \geq \sum_{k \in \overline{\{j\}}} w\left(\overline{\{k\}}\right)$, o lo que es lo mismo, $\sum_{k \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}} w\left(\overline{\{k\}}\right) = 0$. Entonces, $w\left(\overline{\{i\}}\right) = 0$, ya que $i \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}$ y en particular, $w_i = 0$.

Caso 2: $|a(\mathcal{A})| = 1$. Siendo así, existe un jugador $j \in N \setminus \{i\}$ tal que $a(\mathcal{A}) = \{j\}$ y entonces, se verifica que $\overline{\{j\}} = N$ y puede afirmarse, también, que no existe ningún otro jugador de N verificando esta igualdad. Puesto que $i \notin a(\mathcal{A})$, aplicando la segunda condición del Lema III.2.1, se obtiene que $w(N) \geq \sum_{k \in N \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{k\}}\right)$. De aquí,

$$w(N) \geq w(N) + \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} w\left(\overline{\{k\}}\right) \geq w(N) + \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} w(\{k\}) = w(N) + w(N \setminus \{i,j\}).$$

Por tanto, al verificarse que $w(N) \geq w(N) + w(N \setminus \{i,j\})$, se tiene que $w(N \setminus \{i,j\}) = 0$ y esta misma igualdad se hace extensiva si se elige, en lugar del jugador i, a otro jugador $k \in N \setminus \{i,j\}$, cuya existencia está garantizada al ser $|N| > 2$. En definitiva, se verifica que $w(N \setminus \{k,j\}) = 0$, para cada $k \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}$, y en particular se obtiene que $w_i = 0$.

Demostrar el apartado (c) a partir del apartado (b) del enunciado es inmediato. Considérese un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $|N| > 2$ y tal que $w_i = 0$ para todo $i \in N$ con $|P_i| \geq 2$. Esta hipótesis, debido al Lema II.1.3, resulta equivalente a asegurar que $w_i = 0$ siempre que exista un elemento $j \in N$ tal que $i \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}$. Esto es, se verifica que $w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) = 0$ para todo $k \in N$, y se deduce que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = \sum_{k \in S} w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) = 0, \text{ para todo } S \in \mathcal{A},$$

con lo que se obtiene (c).

La afirmación (c) implica de forma inmediata el apartado (d), puesto que $N \in \mathcal{A}$ y por tanto $g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0$.

Por último, a partir de (d) se obtiene (a). En efecto, si $g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0$, como la Proposición 3.15 del capítulo anterior asegura que la función de desfase del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es no negativa, se tiene que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0 = \text{mín}\left\{g^{w_{\mathcal{A}}}(S), \text{ con } S \subseteq N,\, S \neq \emptyset\right\},$$

y, por definición, $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego 1-convexo. ■

Obsérvese que, en un juego interior, lo que realmente se cuestiona es el reparto de los beneficios aportados por los jugadores no átomos. Por ello, resulta interesante el siguiente resultado, en el que se demuestra que, la condición de 1-convexidad para estos juegos es equivalente a que la suma de las pérdidas de cada jugador, si cada uno de ellos decidiera no cooperar con el resto, coincide precisamente con la suma de las aportaciones realizadas por los jugadores no átomos.

Corolario 2.3. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior tal que $|N| > 2$. Son equivalentes:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego 1-convexo.

(b) $\sum_{i \in N} g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(N \setminus a\left(\mathcal{A}\right)\right).$

Demostración. Considérese un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$. Debido a la Proposición 3.15 del capítulo anterior, se sabe que, para cada $i \in N$,

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = \begin{cases} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right), & \text{si } i \in a\left(\mathcal{A}\right) \\ w\left(\overline{\{i\}}\right), & \text{si } i \notin a\left(\mathcal{A}\right). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{i \in N} g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right),$$

y, además, por la misma proposicion,

$$g^{w_{\mathcal{A}}}\left(N\right) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(N\right).$$

Con todo ello, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) - g^{w_{\mathcal{A}}}\left(N\right) &= \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right) - \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) + w\left(N\right) \\ &= w\left(N \setminus a\left(\mathcal{A}\right)\right). \end{aligned}$$

Y de aquí, utilizando el teorema anterior, se obtiene la equivalencia del enunciado de este corolario. En efecto, según el citado teorema el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo si y sólo si $g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0$, y entonces, de la expresión obtenida anteriormente, se deduce que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo si, y sólo si se verifica la igualdad *(b)* del enunciado. ■

El Teorema III.2.2 aporta importantes novedades acerca de los vectores que satisfacen las condiciones del core de un juego interior 1-convexo, pues a partir de él, en el siguiente corolario, se demuestra que el core de un juego interior 1-convexo se reduce a un único vector.

Corolario 2.4. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior tal que $|N| > 2$. Son equivalentes:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego 1-convexo.

(b) El único vector del core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es el vector w. Esto es $Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}$.

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior 1-convexo. Debido a las equivalencias demostradas en el Teorema III.2.2, se tiene que $g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = 0$. Además, por la Proposición II.3.15, es conocido que la función de desfase del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es no negativa. Ambos resultados permiten aplicar la Proposición I.1.17, que asegura que $Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{M^{\tau, w_{\mathcal{A}}}\}$. Las componentes del vector superior satisfacen que $M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right)$ para cada $i \in N$, según la Proposición II.3.14. Si se tiene que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego 1-convexo, aplicando de nuevo el teorema anterior, se verifica que $w_i = 0$ para todo $i \in N$ con $|P_i| \geq 2$. Equivalentemente, debido al Lema II.1.3, se verifica que $w_j = 0$, para todo $j \in N$ tal que existe un jugador $i \in N$ con $j \in \overline{\{i\}} \setminus \{i\}$. Por tanto, se verifica que $w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) = 0$, para $k \in N$, y se concluye que

$$Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}.$$

Recíprocamente, sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ tal que $Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}$. Si este juego no es 1-convexo, entonces, aplicando el Teorema III.2.2, existe al menos un jugador $j \in N$ tal que $w_j \neq 0$ y $|P_j| \geq 2$. Esto es, existe $i \in N \setminus \{j\}$ tal que $i \in P_j$. Partiendo de la existencia de estos jugadores $i, j \in N$, tales que j es controlado por el jugador i, es posible construir el vector $x \in \mathbb{R}_+^N$ definido en (II.2), de componentes

$$x_k = \begin{cases} w_k, & \text{si } k \neq i, j \\ w_i + w_j, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{si } k = j. \end{cases}$$

En estas condiciones, según ya se probó en la demostración del Teorema II.3.10, se verifica que $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. De esta forma, se ha encontrado un vector no idéntico al vector inicial $w \in \mathbb{R}_+^N$ que pertenece al core de $(N, w_{\mathcal{A}})$, y por tanto, se llega a contradicción con la hipótesis en la que se afirmaba que $Core\,(w_{\mathcal{A}}) = \{w\}$. ■

El corolario anterior pone de manifiesto cuál es la familia de juegos interior con un único vector en el core. En el Corolario 3.13 del Capítulo II se caracterizaron los antimatroides en los que todo juego interior tiene un único vector en el core. Ambos resultados se fusionan en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide tal que $|N| > 2$. Son equivalentes:*

(a) Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo.

(b) $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide coatómico.

Entre los juegos interior que, mediante la equivalencia del teorema anterior, puede afirmarse que son 1-convexos, se encuentran los juegos de Mercado con Información con varios jugadores informados, introducidos en el Ejemplo 1.14 del capítulo anterior, y también los juegos sobre redes descritos en el Ejemplo 1.18 del mismo capítulo. Esto es así debido a que en la construcción de ambos, como juegos interior, el antimatroide de partida es coatómico. Del Corolario III.2.4 se obtiene otra importante conclusión: existen juegos interior constituidos sobre antimatroides no necesariamente coatómicos cuyo core es un conjunto unitario, y que, por tanto son también juegos 1-convexos; basta considerar un juego interior con más de dos jugadores para el que exista al menos un jugador totalmente controlado y la aportación al juego de todos estos jugadores sea nula.

Además, según se observó en el Ejemplo III.1.3, cualquier juego de Mercado con Información con varios jugadores informados es 1-convexo, pero no es convexo. De hecho, por aplicación del Teorema III.1.1 y del Teorema III.2.2, se verifica que los únicos juegos interior, distintos del juego $\left(N, 2^N\right)$, que son a la vez convexos y 1-convexos son aquellos para los que $w\,(N \setminus a\,(\mathcal{A})) = 0$. Por otra parte, existen juegos interior que no son ni convexos ni 1-convexos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. *Sea $(N, \mathcal{A}')$ el antimatroide expuesto en el Ejemplo 3.12 del primer capítulo, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y cuya familia de coaliciones factibles está representada en la Figura I.3. Se verifica que $(N, \mathcal{A}')$ no es un poset-antimatroide, según se prueba en* *el desarrollo de la demostración de la Proposición II.1.7. Tampoco es un antimatroide coatómico, puesto que todos los jugadores están controlados por el jugador* 1*. Entonces, los Teoremas III.1.2 y III.2.5 demuestran que es posible construir un juego interior sobre el citado antimatroide, de forma que no sea convexo ni* 1*-convexo. Bastará tomar* $w \in \mathbb{R}^N_+$ *con* $w_1 \neq 0$ *y* $w_4 \neq 0$ *para obtener un juego* $(N, w_{\mathcal{A}'})$ *cumpliendo ambas condiciones. En efecto, el jugador* 4 *es el punto final de más de un camino, pues*

$$A(4) = \{\{1,2,4\}, \{1,3,4\}\},$$

y está controlodo por el jugador 1*, al cumplirse que* $P_4 = \{1,4\}$*. Además, como tanto el jugador* 1 *como el jugador* 4 *tienen coordenada no nula en el vector inicial* w*, los teoremas mencionados garantizan el resultado.*

La existencia de juegos interior que no son ni convexos ni 1-convexos pone de manifiesto la necesidad de continuar con el estudio de otras propiedades de convexidad.

3. Juegos de operador interior k-convexos, para $k \geq 2$

La k-convexidad de un juego cooperativo para $k \in \mathbb{N}$, fue introducida en Driessen [17], y puede considerarse como un concepto que generaliza la noción de convexidad. Puesto que en la sección anterior se analizó la 1-convexidad para la familia de juegos interior, esta nueva sección será dedicada a estudiar qué condiciones debe verificar un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ para que éste sea k-convexo, siendo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. La definición de un juego cooperativo k-convexo, para $k \in \mathbb{N}$, así como una caracterización suya, se recordó en la sección primera del Capítulo I. Además, según se observó en la Proposición I.1.23, es conocido que, para $k \geq |N|-1$, la k-convexidad del juego coincide con la convexidad. Este resultado permite afirmar lo siguiente. Todo juego interior con exactamente dos jugadores es un juego k-convexo, para $k \in \mathbb{N}$, pues si $|N| = 2$, cualquier antimatroide definido en N es un poset-antimatroide y por tanto, todos los juegos interior constituidos sobre él son convexos, según se demostró en el Teorema III.1.2. En el caso en el que $|N| = 3$, se tiene que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo para $k \geq 2$ si, y sólo si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es convexo; por tanto, la k-convexidad para $k \geq 2$ en este supuesto también quedó estudiada en la primera sección.

Después de las observaciones realizadas, lo siguiente será indagar acerca de la k-convexidad para $k \in \mathbb{N}$, con $2 \leq k \leq |N| - 2$. Nótese que entonces $|N| \geq 4$, pero esto no supone ninguna restricción al estudio puesto que la k-convexidad, para $k \in \mathbb{N}$ de un juego interior con dos y tres jugadores ya ha sido tratada en el párrafo anterior.

Previo al estudio pertinente, se quiere hacer notar que, fijado $k \in \mathbb{N}$, será usual utillizar en las demostraciones siguientes la caracterización de k-convexidad de un juego expuesta en el Teorema I.1.21, por lo que las propiedades *(K1)-(K4)* de k-convexidad que aparezcan a continuación se refieren a las que se detallan en el mencionado teorema. Entre otras, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, las condiciones *(K2)* y *(K4)* de k-convexidad de un juego $v \in G^N$ permiten obtener la siguiente propiedad:

(K5) Para cada $i \in N$, se verifica que $g^v(\{i\}) \leq g^v(N)$.

En efecto, sea $v \in G^N$ y considérese $i \in N$. Para la demostración de *(K5)*, se procede por inducción sobre k de la siguiente forma. Primero, se observa que, debido a la condición *(K2)* de k-convexidad, dicha propiedad es cierta cuando $k = 2$. Después, suponiendo cierta la desigualdad para $k = 3, \ldots, m-1$, se desea probar que se verifica para $k = m$. Sea T una coalición con $|T| = k-1$ y considérese ahora $i \in T$. Escribiendo $T = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$, con $i_1 = i$, y tomando $j \notin T$ y $S_p = \{i_1, \ldots, i_p\}$ para cada $p = 1, \ldots, k-2$, puede aplicarse la condicion *(K4)* de k-convexidad a S_p, $T' = T \setminus \{i_{p+1}\} \cup \{j\}$ y i_{p+1}, obteniendo que

$$g^v(S_{p+1}) - g^v(S_p) \geq g^v(N) - g^v(T') \geq 0,$$

donde la última desigualdad es debida a la condición *(K2)* de k-convexidad. Entonces, $g^v(S_{p+1}) \geq g^v(S_p)$, para cada $p = 1, \ldots, k-2$, y se deduce que $g^v(T) \geq g^v(\{i\})$. Utilizando, de nuevo, la condición *(K2)* en T se obtiene que $g^v(\{i\}) \leq g^v(N)$.

A continuación, se establece un lema, que será de gran utilidad en la demostración del teorema siguiente.

Lema 3.1. *Sean $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y $(N, \mathcal{L})$ su geometría dual asociada. Si $S \subseteq N$ es una coalición cualquiera e $i, j \in N$ dos jugadores, se verifica que*

1. *$i \in \overline{S}$ si, y sólo si, para todo $T \in A(i)$ se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$.*
2. *$j \in \overline{\{i\}}$ si, y sólo si, $\overline{\{i, j\}} = \overline{\{i\}}$.*

Demostración. Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, considérese la geometría convexa dual $(N, \mathcal{L})$ y sea $S \subseteq N$. Según el Teorema I.3.23, se verifica que $\overline{S} = N \setminus int\,(N \setminus S)$ y por tanto, para cada $i \in N$ se tiene que $i \in \overline{S}$ si y sólo si $i \notin int\,(N \setminus S)$. Además, obsérvese que, $i \notin int\,(N \setminus S)$ si, y sólo si ningún i-camino está contenido en $int\,(N \setminus S)$, debido al Lema I.3.5. Se deduce entonces que

$$i \in \overline{S} \text{ si, y sólo si, para todo } T \in A(i) \text{ se cumple que } T \nsubseteq int\,(N \setminus S)\,.$$

Pero, siendo que $T \in \mathcal{A}$, se tiene que $T \subseteq int(N \setminus S)$ si, y sólo si $T \subseteq N \setminus S$. De aquí, la equivalencia anterior puede expresarse como sigue

$$i \in \overline{S} \text{ si, y sólo si, para todo } T \in A(i) \text{ se cumple que } T \nsubseteq N \setminus S.$$

de donde se extrae como conclusión el primer apartado del lema.

Para demostrar la segunda parte del enunciado, considérense $i, j \in N$. Es inmediato probar que, si $\overline{\{i,j\}} = \overline{\{i\}}$, entonces se verifica que $j \in \overline{\{i\}}$, ya que todo conjunto está contenido en su clausura, según la propiedad *(C1)* del operador clausura. También, debido a la propiedad *(C3)* del mismo operador, es cierto que $\overline{\{i\}} \subseteq \overline{\{i,j\}}$; por tanto, para probar la implicación recíproca bastará probar que si $j \in \overline{\{i\}}$ entonces $\overline{\{i,j\}} \subseteq \overline{\{i\}}$.

Sea $k \in \overline{\{i,j\}}$. Entonces, para todo $T \in A\,(k)$ se tiene que $T \cap \{i,j\} \neq \emptyset$, según el primer apartado de este lema. Es decir, todo k-camino contiene a i o bien a j. Supóngase que $T \in A\,(k)$ es tal que $j \in T$. Al ser $T \in \mathcal{A}$, debe de existir $T' \in A\,(j)$ tal que $T' \subseteq T$. Puesto que $j \in \overline{\{i\}}$, el Lema II.1.3 asegura que $i \in P_j$, y por ello $i \in T' \subseteq T$. Por tanto, queda probado que todo k-camino contiene al elemento i, y con ello, aplicando de nuevo, el Lema II.1.3, se puede afirmar que $k \in \overline{\{i\}}$. ■

Obsérvese que el primer apartado de este lema generaliza al Lema II.1.3. Basta aplicar dicho apartado a cada coalición individual, $S = \{i\}$, $i \in N$, para obtener que $j \in \overline{\{i\}}$ si, y sólo si, para todo $T \in A(j)$ se verifica que $\{i\} \cap T \neq \emptyset$. Es decir,

$$j \in \overline{\{i\}} \text{ si, y sólo si, } i \in \bigcap_{T \in A(j)} T \text{ si, y sólo si } i \in P_j.$$

El segundo apartado del lema anterior facilitará la demostración del siguiente teorema, en el que se recogen condiciones necesarias y suficientes para que un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ sea k-convexo, para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$. Se verá que, en la obtención de tales equivalencias, basta considerar la siguiente propiedad acerca de la función de desfase del juego

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(N) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(S), \text{ para cada } S \subseteq N \text{ tal que } |S| \geq k \text{ y cada } i \in N.$$

Teorema 3.2. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior, con $|N| \geq 4$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo, para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$.

(b) Para todo $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$, se tiene $w_i = 0$.

(c) La función de desfase del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es la función nula. Es decir, $g^{w_{\mathcal{A}}}(S) = 0$ para todo $S \subseteq N$.

(d) Para todo $i \in N$ se tiene que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = 0$.

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior, con $|N| = n$, siendo $n \geq 4$.

En primer lugar se demuestra que el apartado (a) implica (b) . Supóngase que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo, para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq n - 2$. Para probar que el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ se anula en las componentes relativas a los jugadores que no son átomos en $(N, \mathcal{A})$, se procede diferenciando, en relación con el número k, los tres tipos de jugadores que aparecen en el conjunto de elementos que no son átomos en $(N, \mathcal{A})$.

Caso 1. Considérese cada jugador cuyo beneficio en el juego está controlado por algún otro jugador y de manera que este último controla el beneficio de un número no superior a $n - k$ jugadores. Es decir, sea $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ tal que $|P_i| \geq 2$ y existe $j \in P_i \setminus \{i\}$ con $\left|\overline{\{j\}}\right| \leq n - k$.

Por ser $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego k-convexo y $S = N \setminus \overline{\{j\}}$ una coalición de cardinal mayor o igual que k, se verifica, según la condición *(K1)* de k-convexidad, que $g^{w_{\mathcal{A}}}(S) \geq g^{w_{\mathcal{A}}}(N)$. Esto es, aplicando la Proposición 3.15 del capítulo anterior a la coalición $S \in \mathcal{A}$, se obtiene que

$$\sum_{l \in N \setminus \overline{\{j\}}} w\left(\overline{\{l\}} \setminus \{l\}\right) \geq \sum_{l \in N} w\left(\overline{\{l\}} \setminus \{l\}\right)$$

y de aquí,

$$\sum_{l \in \overline{\{j\}}} w\left(\overline{\{l\}} \setminus \{l\}\right) \leq 0.$$

Se deduce así que $w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right)=0$ para todo $l\in\overline{\{j\}}$ y, en particular, también se tiene que $w\left(\overline{\{j\}}\setminus\{j\}\right)=0$. Como consecuencia, $w_i=0$ debido a que $j\in P_i\setminus\{i\}$ y entonces, el Lema II.1.3 asegura que $i\in\overline{\{j\}}\setminus\{j\}$.

Caso 2. Considérese ahora cada jugador cuyo beneficio en el juego está controlado por algún otro jugador y de manera que todos los jugadores que lo controlan, controlan a su vez el beneficio de, al menos, $n-(k-1)$ jugadores. Es decir, sea $i\in N\setminus a(\mathcal{A})$ tal que $|P_i|\geq 2$ y de manera que para todo $j\in P_i\setminus\{i\}$ se tiene que $\left|\overline{\{j\}}\right|\geq n-k+1$.

En esas condiciones, sea $j\in P_i\setminus\{i\}$. Se considera la coalición $T=N\setminus\{i,j\}$, que verifica $|T|=n-2\geq k$. Debido al Teorema I.3.23, se tiene que $int\,(N\setminus\{i,j\})=N\setminus\overline{\{i,j\}}$. Además, como $i\in\overline{\{j\}}$, aplicando el segundo apartado del lema anterior, resulta que $N\setminus\overline{\{i,j\}}=N\setminus\overline{\{j\}}$. Entonces, $T\setminus int\,(T)=\overline{\{j\}}\setminus\{i,j\}$ y, aplicando la condición *(K1)* de k-convexidad a la coalición T, se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(T)\geq g^{w_{\mathcal{A}}}(N)$, o equivalentemente, por la Proposición II.3.15,

$$\sum_{l\in N\setminus\{i,j\}} w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right)+w\left(\overline{\{j\}}\setminus\{i,j\}\right)\geq\sum_{l\in N}w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right),$$

que, al simplificar, queda

$$-w_i\geq w\left(\overline{\{i\}}\setminus\{i\}\right).$$

De aquí, se deduce que $w\left(\overline{\{i\}}\right)=0$, y entonces $w_i=0$.

Caso 3. Considérese, por último, cada uno de los jugadores no átomos cuyo beneficio en el juego no es controlado por ningún otro jugador. Es decir, sea $i\in N\setminus a(\mathcal{A})$ tal que $|P_i|=1$. Para probar que $w_i=0$, se tendrá en cuenta la propiedad *(K5)* y la siguiente observación. De los dos casos estudiados anteriormente, se obtiene que $w_j=0$, para todo $j\in N\setminus a(\mathcal{A})$ tal que $|P_j|\geq 2$. Por tanto, resulta inmediato verificar que $w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right)=0$ para todo $l\in N$ pues, según el Lema II.1.3, se sabe que $\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\subseteq\{j\in N:|P_j|\geq 2\}$, para cada $l\in N$.

Puesto que $(N,w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo, para algún $k\in\mathbb{N}$ tal que $2\leq k\leq n-2$, también se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\})\leq g^{w_{\mathcal{A}}}(N)$. Para ello, utilizando la Proposición II.3.15 y ya que $i\notin a(\mathcal{A})$, esta última desigualdad es equivalente a afirmar que

$$w\left(\overline{\{i\}}\right)\leq\sum_{l\in N}w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right).$$

Como $w\left(\overline{\{l\}}\setminus\{l\}\right)=0$ para todo $l\in N$, se obtiene que $w_i=0$.

Este último caso concluye la prueba de que (a) implica (b).

Se demuestra, a continuación que (b) implica (c). Supóngase que $w_i=0$ para todo $i\in N\setminus a(\mathcal{A})$. Entonces, para cualquier coalición $S\subseteq N$, se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(S)=0$ pues, recordando que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(S)=\sum_{j\in S} w\left(\overline{\{j\}}\setminus\{j\}\right)+w\left(S\setminus int\left(S\right)\right),$$

basta observar que todos los sumandos en esta expresión se anulan, pues $w\left(N\setminus a\left(\mathcal{A}\right)\right)=0$ y un jugador que sea átomo nunca está en la clausura de otro jugador, y siempre se encuentra en el interior de cualquier coalición a la que pertenece.

A continuación, se prueba que (c) implica (a). En efecto, si se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(S)=0$ para todo $S\subseteq N$, es evidente que $(N,w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo, para cualquier $k\in\mathbb{N}$ tal que $2\leq k\leq n-2$, puesto que se satisfacen, trivialmente, las cuatro condiciones de la Definición I.1.20.

El apartado (c) implica, de forma inmediata, el apartado (d). Así pues, para completar la demostración de las equivalencias enunciadas, se procede probando que (d) implica (b). Suponiendo que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\})=0$ para todo $i\in N$, resulta que, por la Proposición II.3.15,

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\})=\begin{cases} w\left(\overline{\{i\}}\setminus\{i\}\right), & \text{si } i\in a\left(\mathcal{A}\right)\\ w\left(\overline{\{i\}}\right), & \text{si } i\in N\setminus a\left(\mathcal{A}\right),\end{cases}$$

y entonces, se tiene que $w\left(\overline{\{i\}}\right)=0$ cuando $i\in N\setminus a\left(\mathcal{A}\right)$. En particular, se verifica que $w_i=0$, para todo $\in N\setminus a\left(\mathcal{A}\right)$. ■

Implícitamente, en la demostración anterior, se obtiene que un juego $(N,w_{\mathcal{A}})$ que es k-convexo, para algún $k\in\mathbb{N}$ tal que $2\leq k\leq|N|-2$, es k-convexo para cualquier otro $k\in\mathbb{N}$ con $2\leq k\leq|N|-2$. También el siguiente resultado se deduce de forma inmediata a partir del Teorema III.3.2 y del Teorema III.2.2, teniendo en cuenta que un jugador que está controlado por otros jugadores no puede ser un átomo del antimatroide.

Corolario 3.3. *Sea $(N,w_{\mathcal{A}})$ un juego interior con $|N|\geq 4$. Si $(N,w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo, para algún $k\in\mathbb{N}$ tal que $2\leq k\leq|N|-2$, entonces $(N,w_{\mathcal{A}})$ es un juego* 1-*convexo.*

A continuación se demostrará que el recíproco del resultado anterior no es cierto en general, observando la existencia de juegos interior 1-convexos que no son k-convexos, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$.

Ejemplo 3.4. *Sea el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y*

$$a(\mathcal{A}) = \{1, 2, 3\}, \qquad A(4) = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\},$$

cuyo diagrama de Hasse puede observarse en la Figura III.2.

Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$*, el juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *es un juego* 1*-convexo, al ser* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide coatómico y tener en cuenta el Teorema III.2.5. Sin embargo, bastaría elegir* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *con* $w_4 \neq 0$ *para asegurar que el juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *no puede ser* k*-convexo para ningún* $k \in \mathbb{N}$*, con* $k = 2, 3, 4$*. En efecto, el juego no es convexo (equivalentemente,* 3*-convexo o* 4*-convexo) porque hay tres* 4*-caminos en el antimatroide y no se verifica la caracterización expresada en el Teorema III.1.1. Tampoco se trata de un juego* 2*-convexo, porque el jugador* 4 *no es un átomo y no cumple el apartado (b) del Teorema III.3.2.*

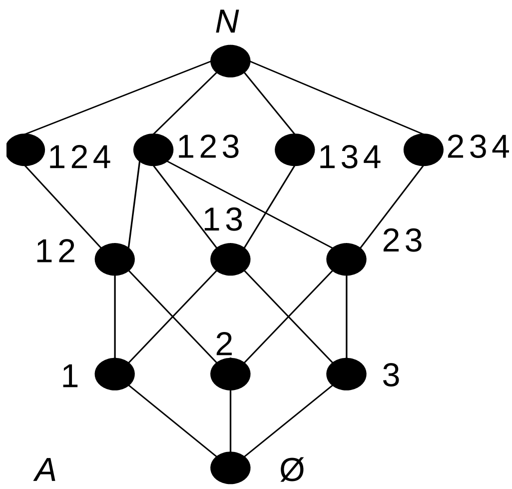

Figura III.2

Sin embargo, la conjugación de las propiedades de 1-convexidad y convexidad en un mismo juego interior con al menos cuatro jugadores garantizan la verificación de las condiciones de k-convexidad para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$.

Corolario 3.5. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior $|N| \geq 4$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$.

(b) $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego convexo y 1-convexo.

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $|N| \geq 4$, la afirmación (b) se obtiene, de forma inmediata, a partir de (a). Según la caracterización (b) de k-convexidad del Teorema III.3.2, si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo para algún $2 \leq k \leq |N| - 2$, se verifica que son nulas todas las coordenadas del vector w correspondientes a los jugadores no átomos en $(N, \mathcal{A})$. Entonces, puesto que los jugadores que son punto final de más de un camino no son átomos, el Teorema III.1.1 asegura que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es convexo. La 1-convexidad del juego es debida al Corolario III.3.3.

Supóngase ahora que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es convexo y también 1-convexo. Debido a la convexidad de $(N, w_{\mathcal{A}})$, según el Teorema III.1.1, cualquier jugador que es punto final de al menos dos caminos tiene coordenada nula en el vector inicial w. Además, aplicando el Lema II.1.3, es conocido que, entre los jugadores que no son átomos en $(N, \mathcal{A})$, aquéllos que son punto final de un único camino están controlados por otro jugador. Al ser $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego 1-convexo, el Teorema III.2.2 garantiza que también son nulas las coordenadas del vector w que corresponden a jugadores controlados. Se obtiene, de este modo, que son nulas las coordenadas del vector w correspondientes a jugadores no átomos, y así, según el Teorema III.3.2, se verifica que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo para cualquier $2 \leq k \leq |N| - 2$. ■

Se concluye esta sección de forma similar a las dos anteriores, caracterizando aquellos antimatroides sobre un conjunto N en los cuales, todos los juegos interior son k-convexos, con $2 \leq k \leq |N| - 2$. Y se advierte que, en este caso, sólo es válido un antimatroide: aquél cuya familia de conjuntos factibles coincide con las partes de la gran coalición.

Teorema 3.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide con $|N| \geq 4$ y sea $k \in \mathbb{N}$, con $2 \leq k \leq |N| - 2$. Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo si y sólo si $\mathcal{A} = 2^N$.*

Demostración. Sea $(N, \mathcal{A})$ antimatroide con $\mathcal{A} = 2^N$. Entonces, cualquiera que sea el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, se cumple que $w_{\mathcal{A}}(S) = w(S)$, para todo $S \subseteq N$. Esto es, $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego aditivo para todo $w \in \mathbb{R}_+^N$. En particular, $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, por definición.

Recíprocamente, sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, con $\mathcal{A} \neq 2^N$. En este caso, existiría un elemento no átomo $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$. Por tanto, eligiendo un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ con $w_i > 0$, se obtiene, según el Teorema III.3.2, que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ no es k-convexo, para ningún $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq |N| - 2$. ■

Sea un conjunto N con $|N| \geq 4$ y considérese $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq |N| - 2$. En realidad, los Teoremas III.3.2 y III.3.6 ponen de manifiesto que la propiedad de k-convexidad no es una propiedad interesante en la familia de los juegos interior constituidos en N. Los únicos antimatroides sobre este conjunto para los que todos los juegos interior son k-convexos convierten a estos juegos en juegos aditivos. Y, en general, los juegos interior con la propiedad de k-convexidad exigen que los jugadores que no sean átomos no tengan ninguna contribución al juego, por lo que se pierde interés por la cooperación entre los jugadores, al ser precisamente estos beneficios el principal reclamo para que los átomos decidan contribuir en la formación de coaliciones.

4. Juegos de operador interior semiconvexos

Al finalizar la sección anterior se observó que la propiedad de k-convexidad, para $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq |N| - 2$, carece de interés en un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$. Además, con el Ejemplo III.2.6, se constata que existen juegos interior que no son convexos y tampoco son 1-convexos. Por tanto, para tratar de dar resultados de convexidad más generales, que permitan obtener una visión más global y también mayor aplicación de los juegos interior, en esta sección, se estudia la semiconvexidad en este tipo de juegos, teniendo en cuenta que esta propiedad abarca también la convexidad en juegos cooperativos, según se afirmó en la Proposición I.1.23.

Al igual que los juegos 1-convexos, los juegos semiconvexos se definen a partir de la función de desfase correspondiente. Como se indicó en la Definición I.1.22, un juego es semiconvexo si al evaluar la función de desfase en el conjunto de coaliciones que contienen a cada jugador, ésta alcanza su valor mínimo en la coalición unitaria. El siguiente resultado establece algunas caracterizaciones de un juego interior semiconvexo.

Teorema 4.1. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Son equivalentes:*

(a) $(N, w_{\mathcal{A}})$ *es semiconvexo.*

(b) $w_i \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right)$, *para cada* $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ *y cada* $T \in A(i)$.

(c) $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T)$, *para cada* $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ *y cada* $T \in A(i)$.

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. La condición (c) se obtiene a partir de (a), de forma inmediata, por la definición de semiconvexidad. Recíprocamente, (c) implica (a). En efecto, considérese un jugador $i \in N$. Para cada coalición $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, se obtiene, utilizando la Proposición II.3.15, que

$$\begin{aligned} g^{w_{\mathcal{A}}}(S) &= g^{w_{\mathcal{A}}}(int(S)) + \sum_{j \in S \setminus int(S)} w\left(\overline{\{j\}}\right); \\ g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) &= w\left(\overline{\{i\}}\right) - w(int(\{i\})). \end{aligned}$$

Si $i \in S \setminus int(S)$, se tiene que $i \notin a(\mathcal{A})$ y, por tanto, $w(int(\{i\})) = 0$. De aquí, se obtiene que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(S).$$

En otro caso, si $i \in int(S)$, entonces, según el Lema I.3.5, existe un i-camino $T \in A(i)$ tal que $T \subseteq int(S)$. Nuevamente, aplicando la Proposición II.3.15, se obtiene que el desfase de las coaliciones factibles T y $int(S)$ verifica que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(T) = \sum_{j \in T} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \leq \sum_{j \in int(S)} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) = g^{w_{\mathcal{A}}}(int(S)),$$

y de aquí, por (c), se obtiene que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(int(S)) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(S),$$

con lo que se concluye que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo.

A continuación, se demuestra la equivalencia entre (b) y (c). Supóngase que es cierta la condición (b) y sea $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$. Para cualquier camino $T \in A(i)$, sumando $w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right)$ a los dos miembros de la desigualdad (b), se obtiene que

$$w_i + w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) + w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right).$$

De aquí,

$$w\left(\overline{\{i\}}\right) \leq \sum_{j\in T} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right).$$

Equivalentemente, debido a la Proposición II.3.15, al ser $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ y $T \in A(i)$, se obtiene que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T),$$

quedando así probado que se verifica (c). De forma recíproca, si para cada $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ y cada i-camino $T \in A(i)$ se verifica que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T)$, sumando y restando w_i en el primer término de esta desigualdad, se tiene que

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) - w_i + w_i \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T),$$

y de aquí, por la Proposición II.3.15 y después de observar que $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ y $T \in \mathcal{A}$, se llega a que

$$w\left(\overline{\{i\}}\right) - w_i + w_i \leq \sum_{j\in T} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right).$$

Simplificando, se concluye que, para cada $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ y cualquier $T \in A(i)$, se verifica la desigualdad $w_i \leq \sum_{j\in T\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right)$. ■

En el Corolario III.3.5 se probó que la verificación conjunta de las condiciones de convexidad y de 1-convexidad en un juego interior equivale a afirmar que el juego considerado es k-convexo, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$. A continuación, se demostrará que, aún debilitando la condición de convexidad a la de semiconvexidad (esta última más general que la primera), se obtiene un resultado similar.

Corolario 4.2. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior y considérese $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq |N| - 2$. Son equivalentes:*

(a) $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego k-convexo.

(b) $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo y semiconvexo.

Demostración. Si para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$, un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo, entonces, debido al Corolario III.3.5, también se puede afirmar que el juego es 1-convexo y convexo. Puesto que, según la Proposición I.1.23, los juegos cooperativos convexos son todos juegos semiconvexos, se concluye que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo y semiconvexo. Queda así probado que (a) implica (b).

Recíprocamente, sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior 1-convexo y semiconvexo, y considérese un jugador $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$. Si el jugador i está controlado por otro jugador, es decir, si se verifica que $|P_i| \geq 2$, entonces, el Teorema III.2.2 permite afirmar que $w_i = 0$. En otro caso, si el jugador i es no controlado, esto es $|P_i| = 1$, entonces es el Teorema III.4.1 el que asegura que

$$w_i \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right),$$

para cualquier i-camino $T \in A(i)$. Obsérvese que, para todo jugador $l \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}$ con $j \in T \setminus \{i\}$ se verifica que $l \notin a(\mathcal{A})$ y además $|P_l| \geq 2$, ya que $j \in P_l$. Teniendo en cuenta esta consideración y el Teorema III.2.2, se obtiene que $w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) = 0$ para todo $j \in T \setminus \{i\}$. Se concluye así que $w_i = 0$ para todo $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ y de aquí, el Teorema III.3.2 garantiza que el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es k-convexo, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq |N| - 2$. ■

A continuación, se caracterizan aquellos antimatroides para los que cada juego interior es un juego semiconvexo. Son los denominados, en la Definición 1.5 del capítulo anterior, antimatroides de control.

Teorema 4.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes:*

(a) Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo.

(b) $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide de control.

Demostración. Para demostrar que (a) implica (b) se procede por reducción al absurdo. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide que no es antimatroide de control, y supóngase que, para todo $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo. Puesto que $(N, \mathcal{A})$ no es un antimatroide de control, existe un jugador $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ tal que $P_i = \{i\}$. Esto es, debido al Lema II.1.3, se tiene que $i \notin \overline{\{j\}}$ para todo $j \in N \setminus \{i\}$. Tomando el vector $e^i = (e^i_k)_{k \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ cuyas componentes, para cada $k \in N$, son

$$e^i_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y considerando $w = e^i$, se tiene que $w_i = 1$ y que, para cada i-camino $T \in A(i)$, se verifica que $\sum_{l \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{l\}} \setminus \{l\}\right) = 0$, ya que la única componente no nula del vector w no aparece en esa suma. Se concluye, de este modo, que el jugador $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ no verifica la condición (b) del Teorema III.4.1, y por tanto, el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ no es semiconvexo, en contradicción con la hipótesis de partida.

Para probar el recíproco, sean $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide de control y $w \in \mathbb{R}^N_+$ un vector cualquiera. Se demostrará que el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo. En efecto, sea $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$ un jugador no átomo. Puesto que $|P_i| \geq 2$, al tratarse de un antimatroide de control, existe $j \in N \setminus \{i\}$ tal que $i \in \overline{\{j\}} \setminus \{j\}$ y entonces, para cualquier camino $T \in A(i)$, se tiene que $j \in T$. De aquí,

$$w_i \leq w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \leq \sum_{l \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{l\}} \setminus \{l\}\right),$$

y en virtud del Teorema III.4.1, se asegura que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego semiconvexo. ■

Del teorema anterior se extrae la siguiente deducción. Puesto que todo juego convexo es también semiconvexo, y el Teorema III.1.2 asegura que todo juego interior construido sobre un poset-antimatroide es convexo, del teorema anterior se deduce que cualquier poset-antimatroide es un antimatroide de control. Este resultado ya fue demostrado en la Proposición 1.7 del capítulo anterior. Además, en la misma proposición, se puso de manifiesto que la relación de inclusión entre las dos familias de antimatroides es estricta. Al existir antimatroides de control que no son poset-antimatroides, se puede deducir también la existencia de juegos interior semiconvexos que no son convexos. Como muestra, sirva el siguiente ejemplo, donde se observa que hay juegos interior para un conjunto N de jugadores que no son k-convexos para ningún $1 \leq k \leq |N|$ y sin embargo sí son semiconvexos.

Ejemplo 4.4. *Considérese el antimatroide $(N, \mathcal{A}')$ expuesto en el Ejemplo I.3.12, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y cuya familia de coaliciones factibles está representada en la Figura I.3. Ya se probó, en el Ejemplo III.2.6, que es posible construir un juego interior sobre este antimatroide, de forma que no sea convexo ni 1-convexo. Concretamente, cualquier juego $(N, w_{\mathcal{A}'})$ con $w \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $w_4 \neq 0$ ni es convexo ni es 1-convexo. Además, se verifica que la misma condición, $w_4 \neq 0$, es suficiente para demostrar que el juego $(N, w_{\mathcal{A}'})$ así construido tampoco es k-convexo, para $2 \leq k \leq |N|-2$. En efecto, obsérvese que el jugador 4 no es un átomo y entonces, el Teorema III.3.2, asegura que $(N, w_{\mathcal{A}'})$ con $w \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $w_4 \neq 0$ no es un juego k-convexo, para $2 \leq k \leq |N|-2$. Por otra parte, basta observar que todos los jugadores están controlados por el jugador 1 en el antimatroide $(N, \mathcal{A}')$, para* *asegurar que se trata de un antimatroide de control y, por tanto, según el Teorema III.4.3, cualquier juego interior construido sobre él es semiconvexo. En particular,* $(N, w_{\mathcal{A}'})$ *con* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *tal que* $w_4 \neq 0$ *es un juego semiconvexo.*

Aún así, existen juegos interior que no verifican ninguna de las propiedades de convexidad estudiadas en este capítulo, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5. *Sea el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *dado por* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y*

$$a(\mathcal{A}) = \{1, 2\}, \quad A(3) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \quad A(4) = N,$$

cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura III.3.

A continuación, se encontrará un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ *de forma que el juego* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *no cumpla ninguna de las propiedades de convexidad descritas en este capítulo. El antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *no coincide con* $\left(N, 2^N\right)$*, pues* $\{3\} \notin \mathcal{A}$*. Entonces, debido al Teorema III.3.6, se puede asegurar que es posible encontrar algún juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *que no sea* 2*-convexo. Según el Teorema III.3.2, basta considerar un vector* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *tal que* $w(\{3, 4\}) \neq 0$*. Por otra parte, recordando la Proposición II.1.5, sucede que* $(N, \mathcal{A})$ *no es un antimatroide coatómico, ya que los jugadores* $1, 2$ *y* 3 *no son coátomos. Siendo así, el Teorema III.2.5 afirma que existen juegos interior no* 1*-convexos construidos sobre* $(N, \mathcal{A})$*. Tales juegos, según el Teorema III.2.2, se consiguen tomando* $w_4 \neq 0$*. Finalmente, se observa que* $(N, \mathcal{A})$ *no es un antimatroide de control (en particular, tampoco es un poset-antimatroide). Puesto que el jugador* 3 *no es un átomo y sin embargo sólo está controlado por sí mismo,* $P_3 = \{3\}$*, el Teorema III.4.3 asegura que existen juegos interior* $(N, w_{\mathcal{A}'})$ *no semiconvexos (y también no convexos, según el Teorema III.1.2). Para ello, es suficiente tomar* $w \in \mathbb{R}_+^N$ *de forma que no se verifiquen todas las desigualdades del apartado (b) del Teorema III.4.1. Esto se consigue tomando* $w_3 > w_4$*, pues* $\overline{\{1\}} = \{1, 4\}$*, y si* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *fuera semiconvexo, para el jugador* 3 *y el* 3*-camino* $\{1, 3\}$*, se tendría que*

$$w_3 \leq w\left(\overline{\{1\}} \setminus \{1\}\right) = w_4.$$

Bastará entonces considerar $w \in \mathbb{R}_+^N$ *con* $w_4 \neq 0$ *y* $w_3 > w_4$ *para concluir que el juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *definido sobre el antimatroide de partida no verifica ninguna de las propiedades de convexidad estudiadas en este capítulo.*

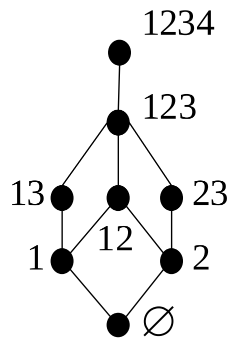

Figure III.3

5. Conclusiones acerca de la convexidad

En esta sección se tratará de sintetizar las relaciones obtenidas entre los diferentes conceptos de convexidad estudiados anteriormente para un juego interior.

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ con $|N| = n$, se introducen, en primer lugar, las notaciones correspondientes a las diferentes familias de juegos interior estudiadas en este capítulo, definidas sobre el citado antimatroide.

- $G_{(N,\mathcal{A})}$ es la familia de todos los juegos interior sobre $(N, \mathcal{A})$.
- $\mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})}$ representa la familia de juegos interior convexos sobre $(N, \mathcal{A})$.
- $\mathcal{C}^k_{(N,\mathcal{A})}$, para un $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$, es la familia de juegos interior k-convexos sobre $(N, \mathcal{A})$.
- $\mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})}$ es la familia de juegos interior semiconvexos sobre $(N, \mathcal{A})$.

A continuación, se ponen de manifiesto distintas relaciones que verifican las familias de juegos anteriores.

1. El Ejemplo III.4.5 permite asegurar que existen juegos interior que no verifican ninguna de las propiedades de convexidad descritas, es decir,

$$\mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{C}^k_{(N,\mathcal{A})} \right) \subset G_{(N,\mathcal{A})}.$$

2. Es conocido que la convexidad de un juego cooperativo es equivalente a la k-convexidad, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n-1$. Entonces, $\mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})} = \mathcal{C}^k_{(N,\mathcal{A})}$, para $k \geq n-1$. Por otra parte, particularizando en los juegos interior, el Teorema III.3.2 determina que las familias $\mathcal{C}^k_{(N,\mathcal{A})}$, para $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n-2$, son idénticas. Es decir,

$$\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})} = \mathcal{C}^3_{(N,\mathcal{A})} = \cdots = \mathcal{C}^{n-2}_{(N,\mathcal{A})};$$

y por tanto, todas estas familias constituyen en realidad una misma familia de juegos interior que será denotada en lo que sigue con $\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})}$.

Este resultado conduce a considerar sólo cuatro subfamilias de juegos interior en relación con las propiedades de convexidad: $\mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})}$, $\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})}$, $\mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})}$ y $\mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})}$.

3. El Corolario III.3.5 demuestra que $\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})} \subset \mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})}$, en general, ya que basta elegir un poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$ diferente a $\left(N, 2^N\right)$ y un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para el que el que alguna de las coordenadas del vector w correspondientes a los jugadores no átomos sea no nula. En estas condiciones, el Teorema III.1.2 garantiza que dicho juego es convexo, mientras que el Teorema III.3.2 asegura que no puede ser 2-convexo.

4. El Corolario III.3.3 y el Ejemplo III.3.4 demuestran que la familia de juegos interior k-convexos para $2 \leq k \leq n-2$ está estrictamente contenida en la formada por los juegos interior que son 1-convexos. Esto es, $\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})} \subset \mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})}$.

5. Por aplicación directa de los Teoremas III.1.2 y III.2.5 se puede asegurar que los juegos de Mercado con Información, introducidos en el Ejemplo II.1.14, son ejemplos de juegos interior 1-convexos que pueden no ser convexos. Los juegos Clan modificados, expuestos en el Ejemplo II.1.16, constituyen ejemplos de juegos interior que son convexos y pueden no ser 1-convexos. Por tanto, no existe ninguna relación de inclusión general entre las familias $\mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})}$ y $\mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})}$. Sin embargo, el Corolario III.3.5 permite afirmar que

$$\mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})} \bigcap \mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})} = \mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})}.$$

6. El Ejemplo III.4.4, junto a la relación de inclusión conocida entre las familias de juegos cooperativos convexos y semiconvexos, establecen que $\mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})} \subset \mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})}$. Además, con el Corolario III.4.2 y el Ejemplo III.4.4 se demuestra que los juegos interior 2-convexos son todos semiconvexos pero que existen juegos interior semiconvexos que no son 2-convexos. Esto es, $\mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})} \subset \mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})}$.

7. El Ejemplo III.4.4 muestra también que existen juegos interior semiconvexos que no son 1-convexos. Los juegos de Mercado con Información, del Ejemplo II.1.14, pueden ser considerados juegos interior construidos sobre antimatroides coatómicos, y por tanto, son juegos 1-convexos; sin embargo, no tienen por qué ser juegos semiconvexos, pues el antimatroide de partida puede no ser un antimatroide de control. Las observaciones anteriores, que han sido obtenidas a partir del Teorema III.2.5 y del Teorema III.4.3, permiten concluir que, en general, no existe una relación de inclusión entre las familias $\mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})}$ y $\mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})}$. No obstante, el Corolario III.4.2 conduce a

$$\mathcal{C}^1_{(N,\mathcal{A})} \bigcap \mathcal{C}^s_{(N,\mathcal{A})} = \mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})}.$$

Finalmente, en la Figura III.4, se muestran las distintas relaciones encontradas entre las propiedades de convexidad para juegos interior que han sido comentadas en los puntos anteriores. Para su interpretación, basta recordar las notaciones introducidas al comienzo de la sección y que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2_{(N,\mathcal{A})} &= \mathcal{C}^3_{(N,\mathcal{A})} = \cdots = \mathcal{C}^{n-2}_{(N,\mathcal{A})} \\ \mathcal{C}_{(N,\mathcal{A})} &= \mathcal{C}^n_{(N,\mathcal{A})} = \mathcal{C}^{n-1}_{(N,\mathcal{A})} \end{aligned}$$

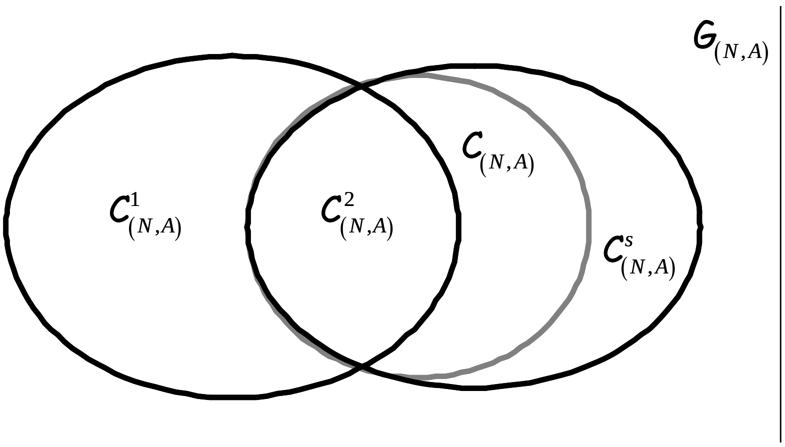

Figura III.4

Capítulo IV

Valor de Shapley y valor de Tijs

En este capítulo, se estudia el valor de Shapley y el valor de Tijs en un juego interior. Entre las razones que han motivado su estudio cabe destacar que se trata de dos valores clásicos en la teoría de juegos cooperativos y que aparecen posteriormente, en sendos capítulos, como casos particulares de valores que, aún siendo muy generales, consideran las características propias de los juegos interior.

1. El valor de Shapley de un juego de operador interior

Entre los valores más considerados en juegos cooperativos se encuentra el valor de Shapley, introducido en Shapley [46], y su elección está justificada porque este concepto de solución satisface importantes requisitos que debe cumplir un reparto razonable. En el primer capítulo se expusieron varias caracterizaciones del valor de Shapley de un juego cooperativo, entre ellas, la siguiente. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, el valor de Shapley de $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un vector $Sh^{\mathcal{A}}(w) = \left(Sh_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ tal que, para cada $i \in N$,

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{S \subseteq N \,:\, i \in S\}} \frac{\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S)}{|S|},$$

donde $\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S)$ representa el dividendo de Harsanyi, fórmula (I.2), de la coalición $S \subseteq N$ en el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$. A continuación se generan unas fórmulas, que facilitarán los cálculos del vector anterior. Dichas fórmulas se consiguen a partir de los dividendos de

Harsanyi, por lo que es necesario comenzar exponiendo algunos conceptos y resultados previos.

En primer lugar, se introduce una definición que, posteriormente, permitirá caracterizar aquellas coaliciones con dividendos de Harsanyi no nulos en un juego interior cualquiera.

Definición 1.1. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina bloque de $(N, \mathcal{A})$ a toda coalición factible $S \in \mathcal{A}$ para la que existe algún elemento $i \in S$ tal que, o bien S es un i-camino o bien S puede ser expresado como unión de i-caminos. A menudo, para concretar el elemento que le otorga tal denominación, se dirá que S es un i-bloque.*

Obsérvese que, para un jugador $i \in N$ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, el i-bloque con mayor cardinal es la coalición formada por la unión de todos los i-caminos, esto es, el conjunto P^i. Además, por definición, cualquier camino de un antimatroide es también un bloque. En la siguiente proposición, se demuestra además que, la familia de caminos y la familia de bloques del antimatroide $(N, \mathcal{A})$ coinciden sólo si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide.

Proposición 1.2. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Son equivalentes:*

(a) $(N, \mathcal{A})$ *es un poset-antimatroide*

(b) Cada bloque de $(N, \mathcal{A})$ *es un camino.*

Demostración. Dado un poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se verifica, según el Teorema I.3.11, que existe un único i-camino, para cada $i \in N$. Por tanto, los únicos bloques que hay en $(N, \mathcal{A})$ son caminos.

Recíprocamente, si $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide en el que cada bloque es un camino, se prueba que cada elemento $i \in N$ posee un único i-camino, y por tanto, debido nuevamente al Teorema I.3.11, se deduce que $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide. En efecto, sea $j \in N$. De existir más de un j-camino, la unión de estos caminos sería un j-bloque pero no camino del antimatroide, contradiciendo así la hipótesis de partida. ■

El siguiente ejemplo permitirá entender mejor el concepto de bloque de un antimatroide.

Ejemplo 1.3. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *el antimatroide, con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, y cuyos caminos son*

$$A(1) = \{\{1\}\}, \quad A(2) = \{\{2\}\}, \quad A(3) = \{\{1,3\}, \{2,3\}\}$$
$$A(4) = \{\{2,3,4\}, \{1,3,4,5\}\}, \quad A(5) = \{\{1,3,5\}, \{2,3,4,5\}\},$$

como muestra la Figura IV.1.

En este antimatroide se aprecian, además de los caminos, sólo dos bloques más. La coalición factible $\{1, 2, 3\}$ *es un* 3*-bloque y la gran coalición* N *es un* 4*-bloque y también un* 5*-bloque.*

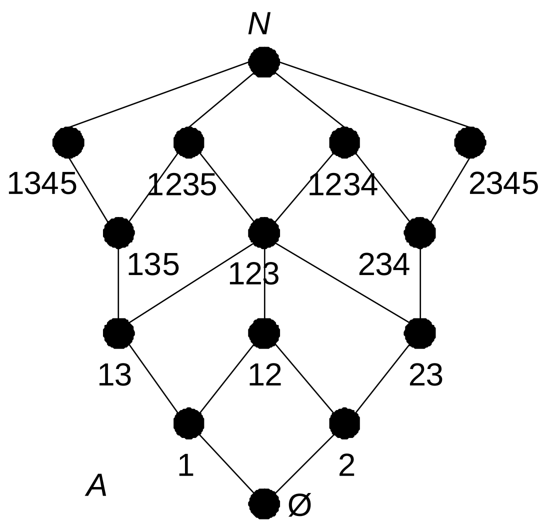

Figura IV.1

Se observa en el ejemplo anterior que, en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, una misma coalición puede ser bloque para varios jugadores, es decir puede ser i-bloque y j-bloque con $i \neq j$. Este hecho justifica la siguiente notación. Si S es un bloque del antimatroide, se denotará con Q_S al conjunto de todos los elementos $i \in N$ para los que S es un i-bloque. Esto es,

$$Q_S := \{i \in S : S \text{ es un } i\text{-bloque}\}.$$

Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese un jugador $i \in N$. Si $S \subseteq N$ es un i-bloque, se denotará con $n_k^{i,S}$ al número de formas de expresar S como la unión de exactamente un número k de i-caminos sin que haya repetición de alguno de ellos. Formalmente,

$$n_k^{i,S} := \left| \left\{ \{S_1, \ldots, S_k\} : S_1, \ldots, S_k \in A(i), \ \bigcup_{j=1}^{k} S_j = S \right\} \right|.$$

La introducción de este parámetro, basado en los bloques del antimatroide, facilitará una formulación de los dividendos de Harsanyi de un juego interior. Para ello, será necesario considerar el resultado que se prueba a continuación, y en el que se utiliza la notación que sigue. A partir de ahora, dado un conjunto finito N y dos subconjuntos $S, T \subseteq N$ tales que $T \subseteq S$, se denotará con $[T, S]$ al conjunto

$$[T, S] := \{R \subseteq N : T \subseteq R \subseteq S\}.$$

Lema 1.4. *Sea N un conjunto finito y considérense $R, S \subseteq N$ tales que $R \subseteq S$. Entonces,*

$$\sum_{T \in [R,S]} (-1)^{|S|-|T|} = \begin{cases} 0, & si\ R \neq S \\ 1, & si\ R = S. \end{cases}$$

Demostración. Considerando las notaciones $r = |R|$ y $s = |S|$, sea $t \in [r, s]$ un número fijo. Puesto que el número de conjuntos $T \in [R, S]$ que tienen t elementos es el número combinatorio $\binom{s-r}{t-r}$, se tiene que

$$\sum_{T \in [R,S]} (-1)^{|S|-|T|} = \sum_{t=r}^{s} \binom{s-r}{t-r} (-1)^{s-t} = \sum_{t=0}^{s-r} \binom{s-r}{t} (-1)^{s-r-t}$$
$$= (-1)^{s-r} \sum_{t=0}^{s-r} \binom{s-r}{t} (-1)^{t}.$$

Por tanto, si $r \neq s$, se verifica que

$$\sum_{T \in [R,S]} (-1)^{s-t} = (-1)^{s-r} (1-1)^{s-r} = 0.$$

Queda así demostrado el enunciado del lema, sin más que observar que en otro caso, si $r = s$, se sigue de forma inmediata que $\sum_{T \in [R,S]} (-1)^{s-t} = 1$. ■

Teorema 1.5. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. El dividendo de Harsanyi de una coalición $S \subseteq N$ viene dado por*

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) = \begin{cases} \sum_{i \in Q_S} \lambda_i^S w_i, & \textit{si } S \textit{ es un bloque} \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

donde, si q_i^S es el número de i-caminos contenidos en S, entonces

$$\lambda_i^S = \sum_{k=1}^{q_i^S} (-1)^{k-1} n_k^{i,S}.$$

Demostración. Considerado el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, sea $S \subseteq N$ una coalición. Por la igualdad (I.2),

$$\begin{aligned} \Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) &= \sum_{T \in [\emptyset, S]} (-1)^{|S|-|T|} w_{\mathcal{A}}(T) = \sum_{T \in [\emptyset, S]} (-1)^{|S|-|T|} \sum_{i \in int(T)} w_i \\ &= \sum_{i \in int(S)} \left[\sum_{\{T \in [\emptyset, S] \,:\, i \in int(T)\}} (-1)^{|S|-|T|} \right] w_i, \end{aligned}$$

puesto que $i \in int(T)$ para algún $T \in [\emptyset, S]$ si, y sólo si, $i \in int(S)$. Así, si en la expresión obtenida, para cada $i \in int(S)$, se denota con λ_i^S al coeficiente correspondiente a w_i,

$$\lambda_i^S = \sum_{\{T \in [\emptyset, S] \,:\, i \in int(T)\}} (-1)^{|S|-|T|},$$

se obtiene que

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) = \sum_{i \in int(S)} \lambda_i^S w_i. \tag{IV.1}$$

Sea ahora un jugador $i \in int(S)$. Debido al Lema I.3.5, se verifica que $T \in [\emptyset, S]$ es tal que $i \in int(T)$ si, y sólo si, T contiene algún i-camino. Por tanto, si $R_1, \ldots, R_{q_i^S}$ son todos los i-caminos contenidos en S, se tiene que

$$\{T \in [\emptyset, S] : i \in int(T)\} = \bigcup_{m=1}^{q_i^S} [R_m, S].$$

Entonces, puede afirmarse que

$$\begin{aligned}
\lambda_i^S &= \sum_{T\in\bigcup_{m=1}^{q_i^S}[R_m,S]} (-1)^{|S|-|T|} \\
&= \sum_{m=1}^{q_i^S} \sum_{T\in[R_m,S]} (-1)^{|S|-|T|} - \sum_{m=1}^{q_i^S} \sum_{l=m+1}^{q_i^S} \sum_{T\in[R_m\cup R_l,S]} (-1)^{|S|-|T|} \\
&+ \sum_{m=1}^{q_i^S} \sum_{l=m+1}^{q_i^S} \sum_{h=l+1}^{q_i^S} \sum_{T\in[R_m\cup R_l\cup R_h,S]} (-1)^{|S|-|T|} - \cdots \\
&+ (-1)^{q_i^S-1} \sum_{T\in\left[\bigcup_{m=1}^{q_i^S} R_m,S\right]} (-1)^{|S|-|T|},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del siguiente razonamiento. Supóngase que la coalición $T \in \bigcup_{m=1}^{q_i^S} [R_m, S]$ contiene sólo p de los i-caminos $R_1, \ldots, R_{q_i^S}$ contenidos en S. Entonces, el sumando $(-1)^{|S|-|T|}$ correspondiente aparece una única vez en la fórmula del primer miembro de la igualdad y se verá a continuación que igualmente ocurre en el segundo miembro de dicha igualdad. El término $(-1)^{|S|-|T|}$ aparece p veces en el primero de sus sumatorios y, puesto que la coalición T pertenece a todos aquellos intervalos $[R_m \cup R_l, S]$ tales que R_m y R_l están contenidos en T, se tiene también que $(-1)^{|S|-|T|}$ aparece $\binom{p}{2}$ veces en el segundo. De igual forma se puede apreciar que $(-1)^{|S|-|T|}$ aparece $\binom{p}{3}$ en el tercer sumatorio, y así sucesivamente hasta que en la p-ésima suma –la última, puesto que T contiene sólo p de aquellos i-caminos– dicho coeficiente aparece una única vez. Se concluye así que, dada una coalición $T \in \bigcup_{m=1}^{q_i^S} [R_m, S]$ que se encuentre en p de dichos intervalos, el número de veces que $(-1)^{|S|-|T|}$ aparece en el desarrollo del segundo miembro de la igualdad anterior es también uno, al cumplirse que

$$\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{k-1} = -\left[\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k\right) - 1\right] = -\left[(1-1)^p - 1\right] = 1.$$

La última expresión del número λ_i^S, justificada mediante el argumento anterior, puede reescribirse de la siguiente manera. Sea $H_k^{i,S}$ la familia formada por un número k de coaliciones elegidas entre los i-caminos contenidos en S, $R_1, \ldots, R_{q_i^S}$. Los q_i^S sumatorios de la expresión de λ_i^S pueden escribirse como

$$\lambda_i^S = \sum_{k=1}^{q_i^S} (-1)^{k-1} \sum_{H\in H_k^{i,S}} \sum_{T\in\left[\bigcup_{R\in H} R,S\right]} (-1)^{|S|-|T|}.$$

Ahora bien, según el Lema IV.1.4, se cumple que

$$\sum_{T\in\left[\bigcup_{R\in H} R,S\right]} (-1)^{|S|-|T|} = \begin{cases} 1, & \text{si } \bigcup_{R\in H} R = S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, por definición del parámetro $n_k^{i,S}$, si S es un i-bloque,

$$\lambda_i^S = \sum_{k=1}^{q_i^S} (-1)^{k-1} n_k^{i,S}.$$

En otro caso, si S es una coalición que no es i-bloque de $(N,\mathcal{A})$, se tiene que S no es un i-camino ni puede ser expresada como unión de i-caminos, y por tanto, se verifica que $\lambda_i^S = 0$ y entonces $\Delta_{w_\mathcal{A}}(S) = 0$. Además, se obtiene que la suma que aparece en la fórmula (IV.1) puede restringirse a aquellos sumandos correspondientes a los jugadores para los que S es bloque de $(N,\mathcal{A})$. Esto es,

$$\Delta_{w_\mathcal{A}}(S) = \sum_{i\in Q_S} \lambda_i^S w_i.$$

Por último, si S no es un bloque del antimatroide, sucede que $Q_S = \emptyset$, y por tanto $\Delta_{w_\mathcal{A}}(S) = 0$. ■

El enunciado del teorema anterior expresa los dividendos de Harsanyi como combinaciones lineales de ciertas componentes del vector inicial del juego interior dado. Esto permite el cálculo de los coeficientes de tales combinaciones lineales de forma recurrente, tal como se muestra en el siguiente resultado.

Corolario 1.6. *Sea $(N,w_\mathcal{A})$ un juego interior. Para cada $i\in N$, se verifica que:*

1. *Si S es un i-bloque del antimatroide $(N,\mathcal{A})$, entonces*

$$\lambda_i^S = 1 - \sum_{\{T\subset S\,:\,i\in Q_T\}} \lambda_i^T.$$

En particular, si S es un i-camino de $(N,\mathcal{A})$ se tiene que $\lambda_i^S = 1$.

2. *Si $S\subseteq N$ con $i\in int(S)$ no es un i-bloque del antimatroide $(N,\mathcal{A})$, entonces*

$$\sum_{\{T\subset S\,:\,i\in Q_T\}} \lambda_i^T = 1.$$

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, sean $i \in N$ y $S \subseteq N$. Siguiendo el desarrollo de la demostración del Teorema IV.1.5 se observa que los coeficientes que determinan los dividendos de Harsanyi de la coalición $S \subseteq N$ aparecen cuando $i \in int(S)$, según indica la fórmula (IV.1). Además, dichos coeficientes son independientes del vector inicial $w \in \mathbb{R}^N_+$ y son nulos cuando $i \notin Q_S$. Esta apreciación es fundamental en la demostración del enunciado, puesto que permite considerar otro juego interior y tener la certeza de que el coeficiente λ_i^S coincide para ambos juegos. Así, considérese el juego interior $(N, e^i_{\mathcal{A}})$ tal que las coordenadas del vector $e^i = \left(e^i_j\right)_{j\in N}$ son:

$$e^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, el teorema anterior asegura que el dividendo de Harsanyi de una coalición $T \subseteq N$ en dicho juego viene dado por

$$\Delta_{e^i_{\mathcal{A}}}(T) = \begin{cases} \sum_{j\in Q_T} \lambda_j^T e^i_j = \lambda_i^T, & \text{si } T \subseteq N \text{ es tal que } i \in Q_T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte, para una coalición cualquiera $S \subseteq N$ con $i \in int(S)$, utilizando la fórmula recurrente recordada en la Proposición I.1.9, se tiene que

$$\Delta_{e^i_{\mathcal{A}}}(S) = e^i_{\mathcal{A}}(S) - \sum_{T\subset S} \Delta_{e^i_{\mathcal{A}}}(T) = 1 - \sum_{\{T\subset S: i\in Q_T\}} \lambda_i^T,$$

puesto que $e^i_{\mathcal{A}}(S) = e^i(int(S)) = 1$.

De las expresiones obtenidas se concluyen los distintos apartados enunciados en el corolario. Así, si S es un i-bloque de $(N, \mathcal{A})$ entonces $i \in Q_S$ y por tanto $\Delta_{e^i_{\mathcal{A}}}(S) = \lambda_i^S$. Igualando este resultado al valor obtenido a partir de la fórmula recurrente se obtiene el primero,

$$\lambda_i^S = 1 - \sum_{\{T\subset S\,:\, i\in Q_T\}} \lambda_i^T.$$

En particular, si S es un i-camino de $(N, \mathcal{A})$, entonces, por definición, S es un i-bloque y no existe ningún otro i-bloque estrictamente contenido en él. La expresión anterior queda reducida, en este caso, a $\lambda_i^S = 1$. Por último, si S no es un i-bloque, entonces se tiene que $i \notin Q_S$, y por tanto $\Delta_{e^i_{\mathcal{A}}}(S) = 0$. De nuevo, igualando con el resultado obtenido a través de la fórmula recurrente, se sigue que

$$\sum_{\{T\subset S\,:\, i\in Q_T\}} \lambda_i^T = 1,$$

con lo que queda también probado el segundo apartado. ■

En el siguiente ejemplo se pondrá de manifiesto lo útil que resulta el corolario anterior en el cálculo de los dividendos de Harsanyi, al generarse con él un método más rápido que el procedimiento de cálculo indicado en el teorema que le precede.

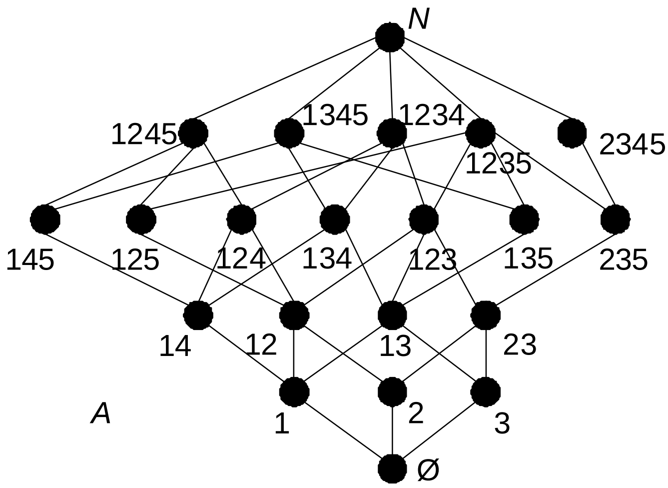

Figura IV.2

Ejemplo 1.7. *Sea* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *un juego interior, donde* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $w \in \mathbb{R}^5_+$, *y el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *es el representado en la Figura IV.2, que viene definido por*

$$\begin{aligned} a(\mathcal{A}) &= \{1,2,3\}, \qquad A(4) = \{\{1,4\},\{2,3,4,5\}\}, \\ A(5) &= \{\{1,2,5\},\{1,3,5\},\{2,3,5\},\{1,4,5\}\}. \end{aligned}$$

Con el propósito de poner en práctica los resultados obtenidos anteriormente, se calcula el dividendo de Harsanyi de cada coalición $S \subseteq N$ *en el juego* $(N, w_{\mathcal{A}})$*. En primer lugar hay que precisar cuáles son los coeficientes que intervienen en la fórmula obtenida para su cálculo en el Teorema IV.1.5. Esto se conseguirá por recurrencia, utilizando el Corolario IV.1.6, a partir de los caminos del antimatroide* $(N, \mathcal{A})$*. Así, en el último resultado se garantiza que, para cada jugador* $i \in N$, *se verifica que* $\lambda_i^S = 1$ *si* S *es un* i*-camino.*

La Figura IV.3 representa la formación de bloques por cada jugador y traza la recurrencia a seguir para calcular el resto de coeficientes. Se encierra en un círculo el coeficiente

λ_i^S de cada i-bloque S, para cada $i \in N$. Obsérvese que la única coalición que es bloque para más de un jugador es N, siendo $Q_N = \{4, 5\}$.

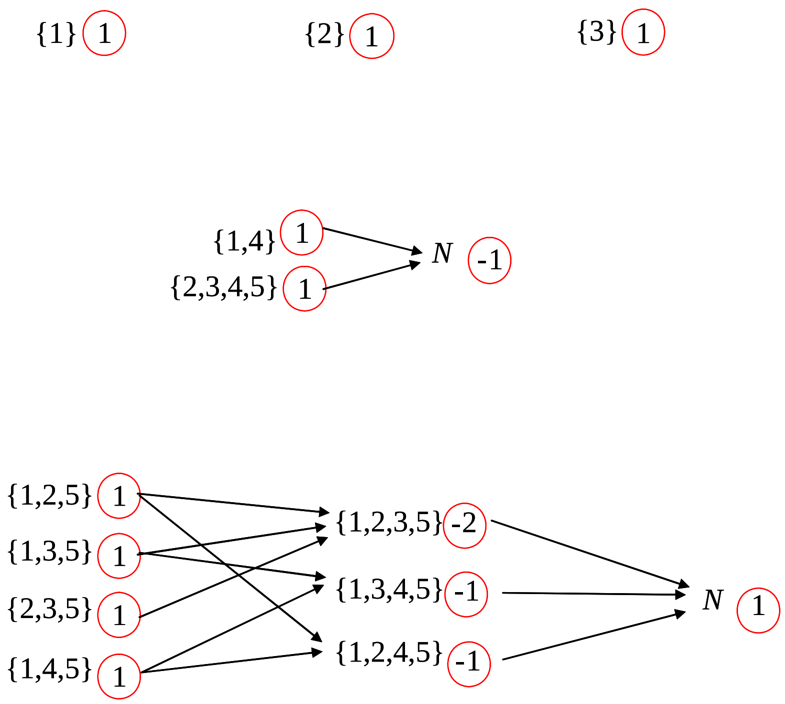

Figura IV.3

Para cada $i \in N$ ocurre que, salvo los 5-bloques $\{1, 2, 3, 5\}$ y N, cada i-bloque que no es camino, S, contiene dos i-bloques que son dos i-caminos, por ello $\lambda_i^S = 1-2 = -1$. En cambio, se verifica que $\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} = 1 - 3 = -2$, pues el 5-bloque $\{1, 2, 3, 5\}$ contiene otros tres 5-bloques que son en particular 5-caminos. Considerado como 5-bloque, el coeficiente de la gran coalición sería

$$\begin{aligned} \lambda_5^N &= 1 - \left[\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,4,5\}} + \lambda_5^{\{1,2,4,5\}} + \lambda_5^{\{1,2,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,5\}} + \lambda_5^{\{2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,4,5\}}\right] \\ &= 1 - [-2 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1] = 1. \end{aligned}$$

En la siguiente tabla se muestra el dividendo de Harsanyi $\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S)$ de cada bloque $S \subseteq N$, *junto a su correspondiente conjunto Q_S y los respectivos coeficientes λ_i^S, para cada $i \in Q_S$.*

bloque S	Q_S	λ_i^S, para $i \in Q_S$	$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S)$
$\{1\}$	$\{1\}$	1	w_1
$\{2\}$	$\{2\}$	1	w_2
$\{3\}$	$\{3\}$	1	w_3
$\{1,4\}$	$\{4\}$	1	w_4
$\{2,3,4,5\}$	$\{4\}$	1	w_4
$\{1,2,5\}$	$\{5\}$	1	w_5
$\{1,3,5\}$	$\{5\}$	1	w_5
$\{2,3,5\}$	$\{5\}$	1	w_5
$\{1,4,5\}$	$\{5\}$	1	w_5
$\{1,2,3,5\}$	$\{5\}$	-2	$-2w_5$
$\{1,3,4,5\}$	$\{5\}$	-1	$-w_5$
$\{1,2,4,5\}$	$\{5\}$	-1	$-w_5$
N	$\{4,5\}$	$-1, 1$	$-w_4 + w_5$

Para observar mejor las ventajas de la utilización del Corolario IV.1.6 en el cálculo de los dividendos de Harsanyi, se calcula a continuación el dividendo de Harsanyi de la gran coalición mediante la fórmula directa obtenida en el Teorema IV.1.5. Puesto que $Q_N = \{4,5\}$, se tiene que $\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(N) = \lambda_4^N w_4 + \lambda_5^N w_5$. En la nueva tabla se describen los distintos elementos necesarios para hallar los coeficientes λ_4^N y λ_5^N. La gran coalición contiene dos 4-caminos y se puede poner como la unión de esos dos 4-caminos. Por otra parte, la gran coalición también contiene cuatro 5-caminos y, siguiendo la Figura IV.3, N puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
N &= \{2,3,5\} \cup \{1,4,5\}, \quad N = \{1,2,5\} \cup \{2,3,5\} \cup \{1,4,5\}, \\
N &= \{1,2,5\} \cup \{1,3,5\} \cup \{1,4,5\}, \quad N = \{1,3,5\} \cup \{2,3,5\} \cup \{1,4,5\}, \\
N &= \{1,2,5\} \cup \{1,3,5\} \cup \{2,3,5\} \cup \{1,4,5\}.
\end{aligned}
$$

$i=4$	$q_4^N = 2$	$n_1^{4,N} = 0,$	$n_2^{4,N} = 1$		
$i=5$	$q_5^N = 4$	$n_1^{5,N} = 0,$	$n_2^{5,N} = 1,$	$n_3^{5,N} = 3,$	$n_4^{5,N} = 1$

Así pues, $\lambda_4^N = n_1^{4,N} - n_2^{4,N} = -1$ y $\lambda_5^N = n_1^{5,N} - n_2^{5,N} + n_3^{5,N} - n_4^{5,N} = 1$, lo que determina *que*

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(N) = \lambda_4^N w_4 + \lambda_5^N w_5 = -w_4 + w_5.$$

En el siguiente teorema se facilita una nueva expresión para determinar el valor de Shapley de un juego interior. Aunque en su obtención intervienen los dividendos de Harsanyi asociados al juego, de las distintas coaliciones, el resultado que finalmente se consigue es una fórmula en la que sólo aparecen los coeficientes λ_i^S para cada bloque S del antimatroide de partida e $i \in Q_S$, además de otros elementos relativos al juego cuyo conocimiento es inmediato.

Teorema 1.8. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para cada $i \in N$, el valor de Shapley en $(N, w_{\mathcal{A}})$ viene dado por*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P^j\}} \left[\sum_{\{S \in \mathcal{A} \,:\, i \in S,\ j \in Q_S\}} \frac{\lambda_j^S}{|S|} \right] w_j.$$

Demostración. Sea el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ y considérese $i \in N$. Según la Proposición I.1.8, el valor de Shapley puede expresarse a través de los dividendos de Harsanyi, por tanto, siguiendo la fórmula obtenida para dichos dividendos en el Teorema IV.1.5, se consigue, para cada $i \in N$, que

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{S \subseteq N \,:\, i \in S\}} \frac{\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S)}{|S|} = \sum_{\{S \subseteq N \,:\, i \in S,\ S \text{ bloque en } \mathcal{A}\}} \frac{1}{|S|} \sum_{j \in Q_S} \lambda_j^S w_j.$$

Si $S \subseteq N$ es un bloque de $(N, \mathcal{A})$ tal que $i \in S$, y se considera $j \in Q_S$, entonces S es un j-bloque que contiene al jugador i, y por tanto, S puede expresarse como la unión de j-caminos tal que uno de ellos contiene al jugador i. Esto es, se verifica que $i \in P^j$. Ahora bien, si $j \in N$ es tal que $i \in P^j$ entonces i pertenece a algún j-camino, que, a su vez, también es un j-bloque. Siendo así, los dos sumatorios en la expresión anterior se intercambian de la siguiente forma

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P^j\}} \left[\sum_{\{S \in \mathcal{A} \,:\, i \in S,\ j \in Q_S\}} \frac{\lambda_j^S}{|S|} \right] w_j,$$

obteniendo la fórmula buscada. ■

Este resultado da fundamento a las relaciones de dependencia entre los jugadores que se encuentran intrínsecas en el antimatroide, y que fueron comentadas en el Capítulo II.

Así, se ha obtenido que la asignación del valor de Shapley a un jugador es una combinación lineal de las aportaciones de todos aquellos jugadores que tienen alguna dependencia con él. Los coeficientes que determinan el beneficio que debe recibir cada jugador se calculan en base a la aparición del jugador en los bloques de los jugadores que dependen de él, considerando de este modo la capacidad de influencia que el jugador tiene sobre ellos.

En los dos ejemplos siguientes se aplicará la fórmula obtenida anteriormente para calcular el valor de Shapley en un juego interior.

Ejemplo 1.9. *Sea $(N, \mathcal{A})$ el antimatroide considerado en el Ejemplo IV.1.7 y representado en la Figura IV.2. Considérese un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, constituido sobre $(N, \mathcal{A})$ a partir de un vector $w \in \mathbb{R}^5_+$. Para calcular el valor de Shapley de cada jugador utilizando el teorema anterior, se necesita conocer cada bloque S del antimatroide y sus respectivos coeficientes λ_i^S para cada $i \in Q_S$. Puesto que estos elementos ya fueron calculados en el Ejemplo IV.1.7, se remitirá a la primera tabla del citado ejemplo cuando haya que hacer uso de ellos.*

Observando que

$$P^1 = \{1\}, \qquad P^2 = \{2\}, \qquad P^3 = \{3\}, \qquad P^4 = P^5 = N,$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} Sh_1^{\mathcal{A}}(w) &= \lambda_1^{\{1\}} w_1 + \left[\frac{\lambda_4^{\{1,4\}}}{2} + \frac{\lambda_4^N}{5} \right] w_4 + \\ &+ \left[\frac{\lambda_5^{\{1,2,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,4,5\}}}{3} + \frac{\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,2,4,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_5^N}{5} \right] w_5 \\ &= w_1 + \frac{3}{10} w_4 + \frac{1}{5} w_5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_2^{\mathcal{A}}(w) &= \lambda_2^{\{2\}} w_2 + \left[\frac{\lambda_4^{\{2,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_4^N}{5} \right] w_4 + \\ &+ \left[\frac{\lambda_5^{\{1,2,5\}} + \lambda_5^{\{2,3,5\}}}{3} + \frac{\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,2,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_5^N}{5} \right] w_5 \\ &= w_2 + \frac{1}{20} w_4 + \frac{7}{60} w_5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_3^{\mathcal{A}}(w) &= \lambda_3^{\{3\}} w_3 + \left[\frac{\lambda_4^{\{2,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_4^N}{5}\right] w_4 + \\
&+ \left[\frac{\lambda_5^{\{1,3,5\}} + \lambda_5^{\{2,3,5\}}}{3} + \frac{\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_5^N}{5}\right] w_5 \\
&= w_3 + \frac{1}{20} w_4 + \frac{7}{60} w_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_4^{\mathcal{A}}(w) &= \left[\frac{\lambda_4^{\{1,4\}}}{2} + \frac{\lambda_4^{\{2,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_4^N}{5}\right] w_4 + \\
&+ \left[\frac{\lambda_5^{\{1,4,5\}}}{3} + \frac{\lambda_5^{\{1,2,4,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_5^N}{5}\right] w_5 \\
&= \frac{11}{20} w_4 + \frac{1}{30} w_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_5^{\mathcal{A}}(w) &= \left[\frac{\lambda_4^{\{2,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_4^N}{5}\right] w_4 + \left[\frac{\lambda_5^{\{1,2,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,4,5\}} + \lambda_5^{\{2,3,5\}}}{3} + \right. \\
&\left. + \frac{\lambda_5^{\{1,2,3,5\}} + \lambda_5^{\{1,2,4,5\}} + \lambda_5^{\{1,3,4,5\}}}{4} + \frac{\lambda_5^N}{5}\right] w_5 \\
&= \frac{1}{20} w_4 + \frac{8}{15} w_5.
\end{aligned}$$

En estos resultados puede apreciarse que los jugadores átomos mantienen sus aportaciones individuales, y los que no son átomos consiguen mantener más de la mitad de su aportación personal. El jugador 1 *se lleva la mayor parte del beneficio a repartir, procedente de los jugadores* 4 *y* 5*, mientras que los jugadores* 2 *y* 3 *obtienen, además de sus respectivas aportaciones, idéntica parte adicional en el reparto, puesto que tienen una situación bastante similar en relación con los bloques a los que pertenecen.*

El siguiente ejemplo muestra la formulación del valor de Shapley para un caso particular de juegos interior: los juegos de Mercado con Información con varios jugadores informados.

Ejemplo 1.10. *Sea* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *un juego de Mercado con Información como los descritos en el Ejemplo 1.14 del Capítulo II, y cuya coalición de jugadores informados es* $I \subset N$*,* *con $|I| \geq 2$. El valor de Shapley de este juego, para cada $i \in N$, viene dado por*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N \setminus I)}{(|I|+1)|I|}, & si\ i \in I \\ \dfrac{|I|}{|I|+1} w_i, & si\ i \notin I. \end{cases}$$

Su demostración es como sigue.

Puesto que en este tipo de juegos, los jugadores informados son los átomos del antimatroide, sucede que $a(\mathcal{A}) = I$ y se verifica que $\lambda_i^{\{i\}} = 1$ para todo $i \in I$.

Sea $i \in N \setminus I$ un jugador no informado. Los i-caminos entonces son las distintas coaliciones de dos jugadores que pueden formarse con el jugador i y otro jugador que sí esté informado. Esto es, $A(i) = \{\{i,j\} : j \in I\}$. Por tanto, los i-bloques son todos los subconjuntos que pueden formarse con jugadores informados y el jugador i, esto es, $\{S \cup \{i\} : S \subseteq I, S \neq \emptyset\}$. Así, el i-bloque de mayor cardinal es la coalición $P^i = I \cup \{i\}$. Además, se prueba a continuación que, para cualquier coalición $S \subseteq I$, $S \neq \emptyset$, se tiene que $\lambda_i^{S\cup\{i\}} = (-1)^{|S|+1}$. Para ello se procederá por inducción sobre $|S|$. Si $|S| = 1$, entonces $S \cup \{i\}$ es un i-camino y, según el Corolario IV.1.6, se sabe que $\lambda_i^{S\cup\{i\}} = 1$.

Sea $S \subseteq I$, $S \neq \emptyset$ y supóngase cierta la igualdad para todo $T \subset S$, con $T \neq \emptyset$. Del mismo corolario junto al Lema IV.1.4 se deduce que

$$\begin{aligned} \lambda_i^{S\cup\{i\}} &= 1 - \sum_{\emptyset \subset T \subset S} (-1)^{|T|+1} = 1 + \sum_{\emptyset \subset T \subset S} (-1)^{|T|} = -(-1)^{|S|} + \sum_{T \in [\emptyset, S]} (-1)^{|T|} \\ &= \left[-1 + \sum_{T \in [\emptyset, S]} (-1)^{|T|-|S|} \right] (-1)^{|S|} = (-1)^{|S|+1}. \end{aligned}$$

Obsérvese entonces que, si $i \notin I$, el único jugador que tiene alguna dependencia con él es él mismo, y según el Teorema IV.1.8,

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \left[\sum_{\{S \subseteq I, S \neq \emptyset\}} \frac{\lambda_i^{S\cup\{i\}}}{|S|+1} \right] w_i.$$

Al sustituir los coeficientes en la fórmula, queda

$$\begin{aligned}\sum_{\{S\subseteq I, S\neq\emptyset\}} \frac{\lambda_i^{S\cup\{i\}}}{|S|+1} &= \sum_{\{S\subseteq I, S\neq\emptyset\}} \frac{(-1)^{|S|+1}}{|S|+1} = \sum_{k=1}^{|I|} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{|I|}{k} \\ &= \frac{1}{|I|+1}\left[\sum_{k=1}^{|I|}(-1)^{k+1}\binom{|I|+1}{k+1}\right] = \frac{1}{|I|+1}\left[\sum_{k=2}^{|I|+1}(-1)^{k}\binom{|I|+1}{k}\right] \\ &= \frac{1}{|I|+1}\left[\sum_{k=0}^{|I|+1}(-1)^{k}\binom{|I|+1}{k} - 1 + |I| + 1\right] = \frac{|I|}{|I|+1}.\end{aligned}$$

Para un jugador $i \in I$ se tiene, de nuevo según el Teorema IV.1.8, que

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \lambda_i^{\{i\}} w_i + \sum_{j\in N\setminus I}\left[\sum_{S\in[\{i\},I]} \frac{\lambda_j^{S\cup\{j\}}}{|S|+1}\right] w_j.$$

Ahora bien, puesto que $\lambda_i^{\{i\}} = 1$ para todo $i \in I$ y cada coeficiente $\lambda_j^{S\cup\{j\}}$ para cualquier coalición $S \subseteq I$, $S \neq \emptyset$ y $j \notin I$ verifica que $\lambda_i^{S\cup\{i\}} = (-1)^{|S|+1}$, este valor es independiente del jugador j y sólo depende del cardinal de la coalición S. Se tiene, entonces, que

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = w_i + \left[\sum_{S\in[\{i\},I]} \frac{(-1)^{|S|+1}}{|S|+1}\right] w(N\setminus I).$$

Teniendo en cuenta que el valor de Shapley satisface el principio de eficiencia y observando en la fórmula anterior que todos los jugadores informados reciben idéntica parte adicional a su contribución en el juego, resulta lógico admitir que la suma de todo lo que los jugadores no informados dejan de percibir se corresponde precisamente con la cantidad adicional que reciben entre todos los jugadores informados, y que dicha cantidad ha sido dividida en partes iguales y repartida entre los jugadores informados. Así, cada jugador $j \notin I$ deja de percibir $(|I|+1)^{-1} w_j$ de su propia contribución. Al repartir esta cantidad entre los jugadores informados de forma equitativa, cada jugador $i \in I$ se llevaría la cantidad $(|I|+1)^{-1}|I|^{-1} w_j$, y esta cantidad debe coincidir justamente con la parte de la contribución del jugador j que recibe cada jugador informado según la fórmula del valor de Shapley antes obtenida. Este argumento justifica la igualdad

$$\sum_{S\in[\{i\},I]} \frac{(-1)^{|S|+1}}{|S|+1} = \frac{1}{(|I|+1)|I|}.$$

El protagonismo que adquieren los bloques de un antimatroide en los resultados expuestos en esta sección consigue que la Proposición IV.1.2 adquiera mayor importancia, ya que en ella se pone de manifiesto que los únicos bloques que posee un poset-antimatroide son sus caminos. Esta circunstancia permitirá formular de forma más sencilla los dividendos de Harsanyi y el valor de Shapley de cualquier juego interior constituido a partir de un poset-antimatroide.

Teorema 1.11. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior asociado a un poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$. El dividendo de Harsanyi de una coalición $S \subseteq N$ en el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es*

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) = \begin{cases} w_i, & \textit{si } S = P_i \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, el valor de Shapley del juego, para cada $i \in N$, viene dado por

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P_j\}} \frac{w_j}{|P_j|}.$$

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior, siendo $(N, \mathcal{A})$ un poset-antimatroide. Puesto que para cada jugador $i \in N$ existe un único i-camino, los conjuntos P_i y P^i coinciden y el único i-camino es $P_i = P^i$. Además, según la Proposición IV.1.2, P_i es el único i-bloque del antimatroide. Entonces, $Q_{P_i} = \{i\}$ y, debido al Corolario IV.1.6, se tiene que $\lambda_i^{P_i} = 1$. Basta pues considerar el Teorema IV.1.5 para obtener el dividendo $\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(P_i) = \lambda_i^{P_i} w_i = w_i$ y concluir que

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) = \begin{cases} w_i, & \text{si } S = P_i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para determinar el valor de Shapley de un jugador $i \in N$ se tendrá en cuenta el Teorema IV.1.8. Puesto que $P^j = P_j$ para todo $j \in N$ y sólo hay un j-bloque para cada $j \in N$ tal que $i \in P_j$, se tiene que

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P_j\}} \left[\frac{\lambda_j^{P_j}}{|P_j|} \right] w_j = \sum_{\{j \in N : i \in P_j\}} \frac{w_j}{|P_j|},$$

con lo que se finaliza la demostración. ■

En realidad, este resultado puede extenderse a toda la familia de juegos interior convexos. Para ello, no hay más que repetir la prueba del teorema anterior teniendo en cuenta que, según el Teorema III.1.1, en un juego interior convexo todos los jugadores que son el punto final de más de un camino deben tener coordenada nula en el vector inicial.

Teorema 1.12. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior convexo. El dividendo de Harsanyi de una coalición $S \subseteq N$ es*

$$\Delta_{w_{\mathcal{A}}}(S) = \begin{cases} w_i, & \text{si } S = P_i \text{ y } |A(i)| = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, el valor de Shapley del juego, para cada $i \in N$, es

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P_j,\ |A(j)|=1\}} \frac{w_j}{|P_j|}.$$

Como aplicación del Teorema IV.1.11, sirva el siguiente ejemplo en el que se calcula el valor de Shapley de un juego Clan Modificado.

Ejemplo 1.13. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego Clan Modificado (ver el Ejemplo 1.16 del Capítulo II), en el que la coalición Clan es $C \subset N$, $C \neq \emptyset$. El valor de Shapley de un jugador $i \in N$ es*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N \setminus C)}{|C|+1}, & \text{si } i \in C \\ \dfrac{w_i}{|C|+1}, & \text{si } i \notin C. \end{cases}$$

En efecto, como ya se observó en el segundo capítulo, el antimatroide sobre el que se constituye un juego Clan Modificado es un poset-antimatroide, y por tanto, aplicando el Teorema IV.1.11 al juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, se obtiene la igualdad anterior, sin más que observar que $a(\mathcal{A}) = C$ y que, si $i \notin C$ el único i-camino es $P_i = C \cup \{i\}$.

El cálculo del valor de Shapley para juegos de operador interior permite el cálculo de este valor para juegos de operador clausura. Así, siguiendo el Teorema II.2.2 y la Proposición I.1.24 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.14. *Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que el valor de Shapley del juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$ coincide con el valor de Shapley del juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

2. El valor de Tijs de un juego de operador interior

En esta sección se demuestra que cualquier juego interior pertenece a la familia de juegos cuasi-equilibrados, y como tal, existe su valor de Tijs. Además, se obtendrán interesantes apreciaciones sobre el valor de Tijs para los juegos interior estudiados en el Capítulo III, sin más que considerar los resultados obtenidos en el citado capítulo.

Proposición 2.1. *Si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego interior, entonces $(N, w_{\mathcal{A}})$ es cuasi-equilibrado y, por tanto, existe su valor de Tijs.*

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Por el Corolario 3.3 del Capítulo II se puede asegurar que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego equilibrado, y en particular cuasi-equillibrado, puesto que los juegos equilibrados son todos juegos cuasi-equilibrados. ■

Esta proposición, junto a la Definición I.1.16, permite definir el valor de Tijs para un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ como el vector $\tau^{\mathcal{A}}(w) = \left(\tau_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\tau^{\mathcal{A}}(w) := m^{\tau,w_{\mathcal{A}}} + \alpha\left(M^{\tau,w_{\mathcal{A}}} - m^{\tau,w_{\mathcal{A}}}\right), \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ verifica que } \sum_{i\in N}\tau_i^{\mathcal{A}}(w) = w(N).$$

En esta expresión, $M^{\tau,w_{\mathcal{A}}}$ y $m^{\tau,w_{\mathcal{A}}}$ son los vectores superior e inferior, respectivamente, del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, y su formulación será fundamental para determinar el valor de Tijs sobre la familia de juegos interior. En la Proposición 3.14 del Capítulo II, se especificó el vector superior de $(N, w_{\mathcal{A}})$, que viene dado, para cada $i \in N$, por

$$M_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right),$$

donde $\overline{\{i\}}$ es la clausura de la coalición individual $\{i\}$ en la geometría convexa asociada a $(N, \mathcal{A})$. Al igual que en aquel capítulo, en los siguientes resultados, se considerará con mucha frecuencia el conjunto $\overline{\{i\}}$ que, según el Lema II.1.3, coincide con este otro $\{j \in N : i \in P_j\}$. Con todo ello, el objetivo más inmediato ahora será describir el vector inferior en la familia de juegos interior.

La aportación de Driessen acerca del vector inferior de un juego cooperativo, introducida en la Definición I.1.12, permite establecer la definición del vector inferior de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ a través del vector de concesión $\lambda^{w_{\mathcal{A}}} \in \mathbb{R}^N$, cuya coordenada $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}}$, para cada $i \in N$, representa la máxima concesión que el jugador i está dispuesto a realizar respecto a su contribución marginal $M_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}}$. La siguiente proposición constituye una primera simplificación en el cálculo del vector inferior de un juego interior, puesto que reduce, en general, el número de coaliciones que intervienen en la determinación del vector de concesión del juego, según la fórmula (I.4). Así, para cada $i \in N$, el valor $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}}$ se determina calculando el mínimo alcanzado en el conjunto formado por los desfases de la coalición unitaria $\{i\}$ y todos los i-caminos.

Proposición 2.2. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para cada $i \in N$, se verifica que*

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = \text{mín} \left\{ g^{w_{\mathcal{A}}} \left(\{i\} \right), \, g^{w_{\mathcal{A}}} \left(T \right) : T \in A \left(i \right) \right\}.$$

En particular:

1. $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = g^{w_{\mathcal{A}}} \left(\{i\} \right)$*, para cada* $i \in a \left(\mathcal{A} \right)$.

2. $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = 0$*, para cada* $i \in a \left(\mathcal{A} \right) \cap ca \left(\mathcal{A} \right)$.

Demostración. Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior y considérense una coalición $S \subseteq N$ y un elemento $i \in S$.

Si $i \in S \backslash int \left(S \right)$, entonces $i \notin a \left(\mathcal{A} \right)$, puesto que i no pertenece a $int \left(S \right)$ y, en particular, a ninguna coalición factible de $(N, \mathcal{A})$ contenida en S. Además, al ser $S \neq int \left(S \right)$, la propiedad *(I2)* del operador interior asegura que $S \notin \mathcal{A}$. Por tanto, debido a la Proposición II.3.15,

$$g^{w_{\mathcal{A}}} \left(S \right) = g^{w_{\mathcal{A}}} \left(int \left(S \right) \right) + \sum_{j \in S \backslash int(S)} w \left(\overline{\{j\}} \right) \geq w \left(\overline{\{i\}} \right) = g^{w_{\mathcal{A}}} \left(\{i\} \right).$$

En otro caso, si $i \in int \left(S \right)$, debido al Lema I.3.5, existe un i-camino $T \in A \left(i \right)$ con $T \subseteq S$, y en particular, $T \subseteq int \left(S \right)$. Aplicando, de nuevo, la Proposición II.3.15, se sigue que

$$\begin{aligned} g^{w_{\mathcal{A}}} \left(S \right) &= g^{w_{\mathcal{A}}} \left(int \left(S \right) \right) + \sum_{j \in S \backslash int(S)} w \left(\overline{\{j\}} \right) \\ &\geq g^{w_{\mathcal{A}}} \left(int \left(S \right) \right) = \sum_{j \in int(S)} w \left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\} \right) \geq \sum_{j \in T} w \left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\} \right) = g^{w_{\mathcal{A}}} \left(T \right). \end{aligned}$$

Se obtiene entonces que, para cualquier coalición $S \subseteq N$ y un elemento $i \in S$,

$$g^{w_{\mathcal{A}}} \left(S \right) \geq \text{mín} \left\{ g^{w_{\mathcal{A}}} \left(\{i\} \right), \, g^{w_{\mathcal{A}}} \left(T \right) : T \in A \left(i \right) \right\}.$$

Y, puesto que, por definición, $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = \text{mín}\{g^{w_{\mathcal{A}}}(S) : S \subseteq N,\, i \in S\}$, se concluye la igualdad deseada,

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = \text{mín}\left\{g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}),\, g^{w_{\mathcal{A}}}(T) : T \in A(i)\right\}.$$

En particular, si $i \in a(\mathcal{A})$, la coalición $\{i\}$ es el único i-camino en $(N, \mathcal{A})$ y así, por la igualdad anterior se afirma que

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}).$$

Por otra parte, en el supuesto de que $i \in ca(\mathcal{A})$, se tiene que $\overline{\{i\}} = \{i\}$. Por tanto, si $i \in a(\mathcal{A}) \cap ca(\mathcal{A})$ se verifica que

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right) - w(int(S)) = w_i - w_i = 0.$$

Con ello se obtienen los dos apartados del enunciado. ■

Como consecuencia de este resultado, dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, se consigue una caracterización de las coordenadas del vector inferior, $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}}$ para cada $i \in N$, en la que intervienen los caminos del antimatroide.

Teorema 2.3. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para cada $i \in N$, se verifica que*

$$m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = \begin{cases} w_i, & si \quad i \in a(\mathcal{A}) \\ \text{máx}\{0, w_i - c_i\}, & en\ otro\ caso; \end{cases}$$

siendo $c_i = \text{mín}\{g^{w_{\mathcal{A}}}(T \setminus \{i\}) \ : \ T \in A(i)\}$, o equivalentemente,

$$c_i = \text{mín}\left\{\sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \ : \ T \in A(i)\right\}.$$

Demostración. Dado el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, considérese $i \in N$ y su coordenada correspondiente en el vector inferior, $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - \lambda_i^{w_{\mathcal{A}}}$.

Si $i \in a(\mathcal{A})$, puesto que $M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right)$ y $\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\})$, se tiene que

$$m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right) - g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = w_i.$$

En otro caso, si $i \notin a(\mathcal{A})$, se observa que

$$w\left(\overline{\{i\}}\right) - g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(\overline{\{i\}}\right) = 0,$$

y para cada $T \in A(i)$,

$$\begin{aligned} w\left(\overline{\{i\}}\right) - g^{w_{\mathcal{A}}}(T) &= w\left(\overline{\{i\}}\right) - \sum_{j\in T} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \\ &= w_i + w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) - \sum_{j\in T} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \\ &= w_i - \sum_{j\in T\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando la proposición anterior y las Proposiciones II.3.14 y II.3.15, se tiene que,

$$\begin{aligned} m_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} &= w\left(\overline{\{i\}}\right) - \text{mín}\left\{g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}), g^{w_{\mathcal{A}}}(T) : T \in A(i)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{w\left(\overline{\{i\}}\right) - g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}), w\left(\overline{\{i\}}\right) - g^{w_{\mathcal{A}}}(T) : T \in A(i)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{0,\, w_i - \sum_{j\in T\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) : T \in A(i)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{0, w_i - \text{mín}\left\{\sum_{j\in T\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) : T \in A(i)\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Considerando $c_i = \text{mín}\left\{\sum_{j\in T\setminus\{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \ : \ T \in A(i)\right\}$, o lo que es lo mismo, $c_i = \text{mín}\left\{g^{w_{\mathcal{A}}}(T \setminus \{i\}) \ : \ T \in A(i)\right\}$, al ser $T \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$ y considerar la Proposición II.3.15, se concluye que $m_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = \text{máx}\{0, w_i - c_i\}$. ■

Mediante el teorema anterior se afirma que cualquier jugador que sea átomo en un juego interior consigue un beneficio no inferior a su aportación individual en el juego a través de un valor de compromiso. En contraposición se demuestra a continuación que, el beneficio asignado a través de un valor de compromiso puede ser nulo si el jugador es totalmente controlado.

Corolario 2.4. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Para cada $i \in N$ tal que $|P_i| \geq 2$, se verifica que $m_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = 0$.*

Demostración. Dado el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, si $i \in N$ es tal que $|P_i| \geq 2$, se verifica que $i \notin a(\mathcal{A})$ y, cualquier i-camino tiene al menos dos jugadores. Sea $T \in A(i)$ tal que

$c_i = \sum_{k \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right)$ y considérese $j \in P_i \setminus \{i\}$. Entonces, $i \in \overline{\{j\}}$ y se tiene que

$$w_i - c_i = w_i - \sum_{k \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) = -\sum_{k \in T \setminus \{i,j\}} w\left(\overline{\{k\}} \setminus \{k\}\right) - \left[w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) - w_i\right] \leq 0.$$

Por tanto, $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = \text{máx}\{0, w_i - c_i\} = 0$. ■

El siguiente ejemplo constituye una aplicación directa de los dos resultados anteriores.

Ejemplo 2.5. *Sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ considerado en el Ejemplo IV.1.3 y representado en la Figura IV.1. Dado un vector $w \in \mathbb{R}^5_+$, se constituye el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

Puesto que $ca(\mathcal{A}) = \{1, 2, 4, 5\}$, se verifica que $\overline{\{i\}} = \{i\}$ para $i = 1, 2, 4, 5$. Además, el jugador 3 se encuentra en todos los 4-caminos y 5-caminos, luego $\overline{\{3\}} = \{3, 4, 5\}$, según el Lema II.1.3. Entonces, por la Proposición II.3.14, el vector superior de $(N, w_{\mathcal{A}})$ es

$$M^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = (w_1, w_2, w_3 + w_4 + w_5, w_4, w_5).$$

El Teorema IV.2.3 permite asegurar que $m_1^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_1$ y que $m_2^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_2$, al tenerse $a(\mathcal{A}) = \{1, 2\}$. Por el corolario anterior también se tiene que $m_4^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = m_5^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = 0$, pues los conjuntos $P_4 = \{3, 4\}$ y $P_5 = \{3, 5\}$ tienen más de un elemento. Para calcular el valor de $m_3^{\tau, w_{\mathcal{A}}}$ se procede, según el Teorema IV.2.3, hallando el valor de c_3,

$$c_3 = \text{mín}\left\{w\left(\overline{\{1\}} \setminus \{1\}\right), w\left(\overline{\{2\}} \setminus \{2\}\right)\right\} = 0;$$

y se obtiene que $m_3^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = \text{máx}\{0, w_3\} = w_3$. Entonces, el vector inferior de $(N, w_{\mathcal{A}})$ es

$$m^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = (w_1, w_2, w_3, 0, 0).$$

Una vez precisado cuáles son los vectores superior e inferior del juego, los vectores que constituyen un valor de compromiso en $(N, w_{\mathcal{A}})$ son todos de la forma

$$(w_1, w_2, w_3 + \alpha(w_4 + w_5), \alpha w_4, \alpha w_5) : \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si además se exige el principio de eficiencia, se obtiene un único vector, que es el vector de Tijs para el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, y que se consigue para $\alpha = \frac{1}{2}$. Esto es,

$$\tau^{\mathcal{A}}(w) = \left(w_1, w_2, w_3 + \frac{1}{2}w_4 + \frac{1}{2}w_5, \frac{1}{2}w_4, \frac{1}{2}w_5\right).$$

Considerando todo lo expuesto hasta ahora en este apartado y las caracterizaciones estudiadas en el Capítulo III, se pueden extraer importantes conclusiones acerca del valor de Tijs para ciertos juegos interior. A continuación se expresa una caracterización de la propiedad de 1-convexidad de un juego interior a través de los vectores superior e inferior del juego, y esto repercutirá en conocer el valor de Tijs para los juegos interior que sean 1-convexos, sin necesidad de realizar cálculos previos.

Teorema 2.6. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior tal que $|N| > 2$. Son equivalentes:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo.

(b) El vector superior y el vector inferior del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ coinciden con el vector $w \in \mathbb{R}_+^N$. Esto es, $M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_i$, para cada $i \in N$.

Demostración. Si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego interior 1-convexo, el Teorema 2.2 del capítulo anterior asegura que $w_i = 0$ para todo $i \in N$ tal que $|P_i| \geq 2$. Según el Lema II.1.3, esto significa que $w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = 0$ para todo $i \in N$ y, entonces, por la Proposición II.3.14, puesto que $M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right)$ para $i \in N$, se obtiene que

$$M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_i, \text{ para cada } i \in N.$$

Además, debido al Teorema IV.2.3, también se verifica que $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_i$, para cada $i \in N$, puesto que si $i \notin a(\mathcal{A})$, se tiene que $c_i = \min \left\{ \sum_{j \in T \setminus \{i\}} w\left(\overline{\{j\}} \setminus \{j\}\right) \ : \ T \in A(i) \right\} = 0$. Y así, se concluye que $M^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = m^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w$.

Recíprocamente, supóngase que el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ verifica que $M^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w$. Entonces, para cada $i \in N$, se tiene que $M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w\left(\overline{\{i\}}\right) = w_i$ o, equivalentemente, que $w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = 0$. para todo $i \in N$. Debido a la Proposición II.3.15,

$$g^{w_{\mathcal{A}}}(N) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}} \setminus \{i\}\right) = 0,$$

y, entonces, el Teorema III.2.2 permite asegurar que el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo. ■

Obsérvese que, en un juego interior 1-convexo $(N, w_{\mathcal{A}})$ con $|N| > 2$, el vector de concesión es nulo, pues $\lambda^{w_{\mathcal{A}}} = M^{\tau, w_{\mathcal{A}}} - m^{\tau, w_{\mathcal{A}}}$, según la fórmula (I.4), y los vectores $M^{\tau, w_{\mathcal{A}}}$ y $m^{\tau, w_{\mathcal{A}}}$ coinciden, según se ha demostrado en el teorema anterior. La igualdad

$\lambda^{w_{\mathcal{A}}} = 0$ viene a significar que los jugadores no están dispuestos a ceder ninguna parte de su contribución marginal en el juego, y puesto que $M^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = m^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = w$, se deduce que el valor de Tijs coincide con el vector inicial. Esta última apreciación también puede obtenerse a partir de un resultado más general, expuesto en la Proposición I.1.17 e introducido en Driessen [17], ya que, la función de desfase de un juego interior 1-convexo es no negativa y el desfase de la gran coalición es nulo. Además, por el Teorema III.2.5, cuando se considera un antimatroide coatómico, los juegos interior constituidos sobre él tienen como valor de Tijs al vector que los origina.

Teorema 2.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide tal que $|N| > 2$. Se verifica que:*

1. *Si un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es 1-convexo, entonces $\tau^{\mathcal{A}}(w) = w$.*
2. *Si $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide coatómico, entonces, para todo $w \in \mathbb{R}^N_+$, se tiene que $\tau^{\mathcal{A}}(w) = w$.*

Entre los juegos interior cuyo valor de Tijs coincide con el vector inicial están los juegos de Mercado con Información con varios jugadores informados (Ejemplo 1.14 del Capítulo II) y los juegos en redes II (Ejemplo 1.18 del mismo capítulo), puesto que son juegos que pueden modelarse como juegos interior constituidos sobre antimatroides coatómicos, y por tanto, son juegos 1-convexos.

La condición de semiconvexidad también permitirá simplificar la formulación del valor de Tijs para un juego interior. En el siguiente teorema, se introduce una caracterización de un juego interior semiconvexo a través de su vector inferior. A partir de este resultado, el valor de Tijs se podrá expresar como una combinación lineal convexa entre el vector cuyas coordenadas son los interiores de las coaliciones unitarias en el antimatroide y el vector cuyas coordenadas son las clausuras de las coaliciones unitarias en la geometría convexa asociada. Para determinar el valor de Tijs de un juego interior semiconvexo, bastará calcular el valor del coeficiente que interviene en esa combinación.

Teorema 2.8. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior. Son equivalentes:*

(a) El juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo.

(b) $m_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = w(int(\{i\}))$, para cada $i \in N$. Esto es,

$$m_i^{\tau,w_{\mathcal{A}}} = \begin{cases} w_i, & si \quad i \in a(\mathcal{A}) \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, debido al Teorema IV.2.3, se tiene que $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w_i$ si $i \in a(\mathcal{A})$. Si además el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo, y se considera un jugador $i \in N \setminus a(\mathcal{A})$, se cumple que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(T)$ para todo $T \in A(i)$. De aquí, por la Proposición IV.2.2, se verifica que

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = \min \{g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}), g^{w_{\mathcal{A}}}(T) : T \in A(i)\} = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right) = M_i^{w_{\mathcal{A}}},$$

donde las dos últimas igualdades se siguen de las Proposiciones 3.14 y 3.15 del segundo capítulo. Y así,

$$m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = M_i^{w_{\mathcal{A}}} - \lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = 0.$$

Recíprocamente, sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego interior tal que $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w(int(\{i\}))$, para cada $i \in N$. Cuando $i \notin a(\mathcal{A})$ sucede que $m_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = 0$ y $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right)$. Entonces,

$$\lambda_i^{w_{\mathcal{A}}} = M_i^{w_{\mathcal{A}}} - 0 = w\left(\overline{\{i\}}\right) = g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}).$$

De aquí, la Proposición IV.2.2 permite afirmar que $g^{w_{\mathcal{A}}}(\{i\}) \leq g^{w_{\mathcal{A}}}(\{T\})$ para todo $T \in A(i)$ y, por el Teorema III.4.1, se concluye que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego semiconvexo. ■

De esta forma, se aprecia que el vector de concesión y el vector superior para un juego interior semiconvexo coinciden. Esto es, los jugadores están dispuestos a ceder su máxima aspiración en el juego. En este sentido, la semiconvexidad de un juego interior puede interpretarse como una propiedad opuesta a la 1-convexidad.

El valor de Tijs para un juego interior semiconvexo, en particular, para un juego interior constituido sobre un antimatroide de control, puede formularse como sigue.

Teorema 2.9. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$. Si se denota por*

$$\chi(\mathcal{A}) = \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) \quad y \quad p^{w_{\mathcal{A}}} = \frac{w(N) - w(a(\mathcal{A}))}{\chi(\mathcal{A}) - w(a(\mathcal{A}))},$$

se satisface que, para cada $i \in N$,

1. *Si $(N, w_{\mathcal{A}})$ es un juego semiconvexo, entonces*

$$\tau_i^{\mathcal{A}}(w) = p^{w_{\mathcal{A}}} w\left(\overline{\{i\}}\right) + (1 - p^{w_{\mathcal{A}}}) w(int(\{i\})).$$

2. Si $(N,\mathcal{A})$ es un antimatroide de control, entonces

$$\tau_i^{\mathcal{A}}(w) = p^{w_{\mathcal{A}}} w\left(\overline{\{i\}}\right) + \left(1 - p^{w_{\mathcal{A}}}\right) w\left(int\left(\{i\}\right)\right).$$

Demostración. Considerado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, si éste es semiconvexo, por el teorema anterior y la Proposición II.3.14, para cada $i \in N$, se tiene que

$$\tau_i^{\mathcal{A}}(w) = w\left(int\left(\{i\}\right)\right) + \alpha\left(w\left(\overline{\{i\}}\right) - w\left(int\left(\{i\}\right)\right)\right) = \alpha w\left(\overline{\{i\}}\right) + (1-\alpha)\, w\left(int\left(\{i\}\right)\right),$$

y donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $\sum_{i \in N} \tau_i^{\mathcal{A}}(w) = w(N)$. Entonces,

$$\alpha \sum_{i \in N} w\left(\overline{\{i\}}\right) + (1-\alpha) \sum_{i \in N} w\left(int\left(\{i\}\right)\right) = w(N).$$

De aquí, utilizando las notaciones del enunciado, se tiene que

$$\alpha \chi(\mathcal{A}) + (1-\alpha)\, w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right) = w(N),$$

y despejando α se obtiene que

$$\alpha = p^{w_{\mathcal{A}}} = \frac{w(N) - w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)}{\chi(\mathcal{A}) - w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)}.$$

Además, si $(N,\mathcal{A})$ es un antimatroide de control, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es semiconvexo, según se demostró en el Teorema 4.3 del Capítulo III, y entonces, se obtiene la misma fórmula del valor de Tijs para este juego. ■

El valor de Tijs de los juegos interior convexos, en particular, el de aquéllos que se han constituido sobre un poset-antimatroide, puede formularse en la forma en que expresa el teorema anterior, ya que todo juego convexo es semiconvexo.

Ejemplo 2.10. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego Clan Modificado cuyo Clan es el conjunto $C \subset N$ (ver Ejemplo 1.16 del Capítulo II). Puesto que $(N,\mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, en particular, según la Proposición II.1.7, es un antimatroide de control. En este antimatroide, se tiene que $a(\mathcal{A}) = C$ y la clausura de cada jugador $i \in N$ en la geometría asociada, determinada en el Ejemplo II.1.16, viene dada por*

$$\overline{\{i\}} = \begin{cases} (N \setminus C) \cup \{i\}, & si \quad i \in C \\ \{i\}, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces,

$$w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)=w\left(C\right) \qquad y \qquad \chi\left(\mathcal{A}\right)=w\left(N\right)+\left|C\right|w\left(N\setminus C\right).$$

Por lo que, sustituyendo en la expresión del coeficiente $p^{w_{\mathcal{A}}}$ *que proporciona el teorema anterior, se obtiene que*

$$p^{w_{\mathcal{A}}}=\frac{w\left(N\right)-w\left(C\right)}{w\left(N\right)+\left|C\right|w\left(N\setminus C\right)-w\left(C\right)}=\frac{1}{\left|C\right|+1},$$

y se observa que el valor de $p^{w_{\mathcal{A}}}$ *no depende del vector inicial* w.

Finalmente, se concluye que el valor de Tijs de un juego Clan Modificado $(N, w_{\mathcal{A}})$ *para cada* $i \in N$, *viene dado por*

$$\tau_i^{\mathcal{A}}\left(w\right)=\begin{cases} w_i+\frac{w(N\setminus C)}{|C|+1}, & si \quad i\in C \\ \frac{w_i}{|C|+1}, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Con el cálculo del valor de Tijs para un juego Clan Modificado y el resultado obtenido para el valor de Shapley de un juego Clan Modificado, determinado en el Ejemplo IV.1.13, se pone de manifiesto que ambos conceptos de solución coinciden en esta clase de juegos. Siendo así, se podría pensar que esta coincidencia entre los valores de Shapley y de Tijs es cierta para todos los juegos interior que están constituidos sobre un poset-antimatroide o, incluso, sobre un antimatroide de control. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se observa que esta suposición no es cierta en general.

Ejemplo 2.11. *A partir del árbol dirigido* G *representado en la Figura IV.4, enraizado en* $1 \in N$ *y con* $N = \{1,2,3\}$, *se considera una situación "Peer Group"* (N, P, w) *para el vector* $w = (0,1,1)$. *Esta determinada situación genera un juego "Peer Group"* $(N, w_{\mathcal{A}})$, *en el que* $(N, \mathcal{A})$ *es el poset-antimatroide cuyo diagrama de Hasse se representa también en la Figura IV.4. En el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$ *se puede apreciar que el único átomo es la raíz del árbol* G *y en la geometría convexa asociada a* $(N, \mathcal{A})$ *se tiene que*

$$\overline{\{1\}}=N, \quad \overline{\{2\}}=\{2{,}3\}, \quad \overline{\{3\}}=\{3\}.$$

Mediante el Teorema IV.1.11 se obtiene que el valor de Shapley de $(N, w_{\mathcal{A}})$ *es*

$$Sh^{\mathcal{A}}\left(w\right)=\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right).$$

Y, sin embargo, puesto que $w(a(\mathcal{A})) = 0$ *y* $\chi(\mathcal{A}) = 5$*, se tiene que* $p^{w_{\mathcal{A}}} = 2/5$*. Entonces, por el Teorema IV.2.9, el valor de Tijs de* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *es*

$$\tau^{\mathcal{A}}(w) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

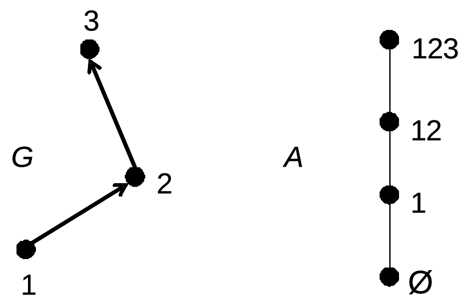

Figura IV.4

Para terminar se hace mención a una aplicación del cálculo del valor de Tijs de un juego interior en la obtención de un concepto de solución para juegos de operador clausura subaditivos. Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que el valor de Tijs para el juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ pertenece al conjunto de imputaciones del juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$. En efecto, el valor de Tijs para $(N, w_{\mathcal{A}})$, $\tau^{\mathcal{A}}(w) = \left(\tau_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$, es un vector eficiente satisfaciendo que $\tau_i^{\mathcal{A}}(w) \leq w\left(\overline{\{i\}}\right)$ para cada $i \in N$. Por tanto, puesto que $(N, w_{\mathcal{A}})$ es el juego dual de $(N, w_{\mathcal{L}})$ y este último es, según el Teorema II.2.5, un juego subaditivo, de la fórmula (II.3) se deduce que $\tau^{\mathcal{A}}(w) \in I(w_{\mathcal{L}})$. Esto permite definir un valor para la familia de juegos de operador clausura constituidos sobre un poset-antimatroide, calculando el valor de Tijs en el juego dual correspondiente.

Definición 2.12. *Sea* $(N, \mathcal{L})$ *un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual* $(N, \mathcal{A})$*. Para cada* $w \in \mathbb{R}_+^N$*, se define el valor dual de Tijs en el juego de operador clausura* $(N, w_{\mathcal{L}})$ *a través de la expresión* $T^{\mathcal{L}}(w) = \tau^{\mathcal{A}}(w)$*, siendo* $\tau^{\mathcal{A}}(w)$ *el valor de Tijs en el juego interior* $(N, w_{\mathcal{A}})$*.*

Capítulo V

Valores directos

En este capítulo, fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se estudia cómo distribuir el valor de la gran coalición entre los jugadores de un juego interior perteneciente a la familia $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_{+}^{N}\right\}$. Para ello, a través de una familia de aplicaciones denominadas valores razonables directos, se define una colección de vectores de pago eficientes que verifican ciertos criterios de reparto satisfactorios para todos los jugadores. Entre ellos se encuentra el valor de Shapley, del cual se hizo un amplio desarrollo en el capítulo anterior. Después, en la segunda sección del capítulo, se desvela una subfamilia de los valores razonables directos, los valores directos de localización, que surgen a partir de la creación de un juego sobre la familia de caminos del antimatroide, dándose la circunstancia que este nuevo juego es también un juego interior.

1. Valores razonables directos

En esta sección, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se define una aplicación denominada *valor razonable directo* en $(N, \mathcal{A})$ que, a cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$, le hace corresponder un valor. Entre las soluciones obtenidas a través de un valor razonable directo se encuentra el valor de Shapley. Después de observar que la familia de valores razonables directos en un antimatroide es muy extensa pero que, sin embargo, puede ser identificada con un conjunto convexo y acotado, se imponen distintos axiomas que permitirán obtener nuevos conjuntos convexos cuyos extremos se encuentran entre los extremos del primero. De cada una de las subfamilias de valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$ así obtenidas, se especificará un valor razonable directo, que se distinguirá del resto por las propiedades geométricas que posee dentro del conjunto convexo que lo representa. Entre esas distinciones, cabe destacar el *valor de Shapley*.

Así, el concepto de valor razonable directo, gracias a su interpretación en forma matricial, permitirá generar de forma sencilla una amplia familia de soluciones en un juego interior, constituyendo al mismo tiempo, un método eficaz de obtener soluciones que dan generalidad a otros conceptos de solución clásicamente estudiados en juegos cooperativos.

Un comportamiento razonable de cada jugador sugiere que, antes de constituirse un juego, cada individuo considere las posibilidades reales de cooperación con otros jugadores y realice una estimación racional e individual del pago que podría recibir por su participación en el juego. Así, conocidas las posibilidades de cooperación entre los jugadores de un conjunto finito N a través de un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y antes de constituirse un juego interior, cada jugador realiza una estimación individual y razonable del pago que podría recibir por su participación en cada juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, para $w \in \mathbb{R}_+^N$. En tal estimación, cada individuo espera obtener un beneficio no negativo e inferior o igual a la suma de las aportaciones individuales de los jugadores que tienen alguna dependencia con él y además, exige que la relación entre su aportación y el beneficio al que aspira sea lineal. Tomando estas consideraciones como criterios de reparto satisfactorios para todos los jugadores, y recordando que en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, para cada $j \in N$, los conjuntos

$$P^j = \bigcup_{T \in A(j)} T \qquad \text{y} \qquad P_j = \bigcap_{T \in A(j)} T,$$

representan los jugadores con los que j tiene dependencia y aquéllos que controlan a j, respectivamente, se define el siguiente concepto.

Definición 1.1. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese $i \in N$. Una estimación razonable individual para $i \in N$ en $(N, \mathcal{A})$ es una aplicación $\Psi_i^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ que verifica:*

1. *Axioma de Linealidad: $\Psi_i^{\mathcal{A}}(\alpha w' + \beta w'') = \alpha \Psi_i^{\mathcal{A}}(w') + \beta \Psi_i^{\mathcal{A}}(w'')$, para cualesquiera $w', w'' \in \mathbb{R}_+^N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.*

2. *Axioma de Positividad: $\Psi_i^{\mathcal{A}}(w) \geq 0$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$.*

3. *Axioma de Dependencia: $\Psi_i^{\mathcal{A}}(w) \leq w(\{j \in N : i \in P^j\})$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$.*

Serán consideradas de forma especial las estimaciones razonables que, una por cada jugador, constituyan un reparto exacto del valor de la gran coalición. Son precisamente éstas las que originan la siguiente definición.

Definición 1.2. *Sea* $(N,\mathcal{A})$ *un antimatroide. Una aplicación* $\Psi^{\mathcal{A}}:\mathbb{R}_{+}^{N}\rightarrow\mathbb{R}^{N}$*, tal que* $\Psi^{\mathcal{A}}(w)=\left(\Psi_{i}^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N}$ *para cada* $w\in\mathbb{R}_{+}^{N}$*, se denomina valor razonable directo en* $(N,\mathcal{A})$ *si verifica:*

1. *Para cada* $i\in N$*, la aplicación* $\Psi_{i}^{\mathcal{A}}:\mathbb{R}_{+}^{N}\rightarrow\mathbb{R}$ *describe una estimación razonable individual en* $(N,\mathcal{A})$ *.*

2. *Axioma de Eficiencia: Para cualquier* $w\in\mathbb{R}_{+}^{N}$*, el vector* $\Psi^{\mathcal{A}}(w)\in\mathbb{R}^{N}$ *es un vector de pago eficiente para el juego* $(N,w_{\mathcal{A}})$ *, esto es,* $\sum\limits_{i\in N}\Psi_{i}^{\mathcal{A}}(w)=w(N)$*.*

En lo que sigue, se suprimirá la referencia al antimatroide $(N,\mathcal{A})$ en la notación $\Psi_{i}^{\mathcal{A}}$, y se escribirá Ψ_{i} para denotar a una estimación razonable para $i\in N$ en $(N,\mathcal{A})$, por entender que se trata del único antimatroide fijado con anterioridad sobre el conjunto N, salvo cuando haya posibilidad de equívoco.

Dado un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, a través de un valor razonable directo, para cada vector $w\in\mathbb{R}_{+}^{N}$ se obtiene un vector de pago eficiente en el juego $(N,w_{\mathcal{A}})$, cuyas componentes corresponden a beneficios que cada jugador puede percibir sin considerar la intervención del resto de jugadores y teniendo en cuenta sólo las aportaciones de aquellos jugadores que tienen dependencia con él.

Al igual que una aplicación lineal puede ser representada de forma única (elegida la base canónica de $\mathbb{R}^{N}$) a través de una matriz cuyas columnas son los vectores imágenes de los vectores de la base canónica, se demuestra a continuación que cada valor razonable directo puede ser representado mediante una matriz de orden $|N|\times|N|$. Con el fin de caracterizar estas matrices, se tendrá en cuenta lo siguiente.

Los vectores que forman la base canónica de $\mathbb{R}^{N}$ serán denotados con e^{j}, para cada $j\in N$. Por tanto, la notación e^{j} representa el vector $\left(e_{i}^{j}\right)_{i\in N}\in\mathbb{R}^{N}$ tal que $e_{i}^{j}=0$ para $i\neq j$ y $e_{i}^{i}=1$. Una matriz se denomina estocástica si todos sus términos son números reales del intervalo cerrado $[0,1]$ y la suma de todos los términos de cualquiera de sus columnas es uno.

Además, se introduce el siguiente concepto. Para un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, una matriz $A=[a_{ij}]$ de orden $|N|\times|N|$ se denomina *esencial* si verifica la siguiente propiedad: $a_{ij}=0$ para cualesquiera $i,j\in N$ tales que $i\notin P^{j}$.

Teorema 1.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese una aplicación $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$. Son equivalentes*

(a) La aplicación Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$.

(b) Existe una única matriz A que es estocástica, esencial para $(N, \mathcal{A})$ y tal que verifica $Aw = \Psi(w)$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$.

Demostración. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$. Puesto que cualquier vector de $\mathbb{R}_+^N$ puede expresarse de forma única como una combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^N$, considérese un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ escrito de esta manera

$$w = w_1 e^1 + \ldots + w_n e^n,$$

siendo $w_1, \ldots, w_n$ los únicos números reales que hacen posible esa expresión, y $|N| = n$. Por el Axioma de Linealidad se tiene, para cada $i \in N$, que

$$\Psi_i(w) = w_1 \Psi_i\left(e^1\right) + \ldots + w_n \Psi_i\left(e^n\right).$$

Si se define la matriz $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} := \Psi_i\left(e^j\right), \text{ para cualesquiera } i, j \in N,$$

se comprueba que $\Psi(w) = Aw$. La definición de la matriz A, junto a los Axiomas de Positividad y Dependencia de cada estimación razonable individual Ψ_i, para $i \in N$ en $(N, \mathcal{A})$, permiten afirmar que cada término $a_{ij} \in A$, con $i, j \in N$, verifica que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \Psi_i\left(e^j\right) \geq 0, \\ a_{ij} &= \Psi_i\left(e^j\right) \leq e^j\left(\left\{k \in N : i \in P^k\right\}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in P^j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De ahí que A sea una matriz esencial para $(N, \mathcal{A})$. Además, por el Axioma de Eficiencia aplicado a cada vector e^j, con $j \in N$, se tiene que

$$\sum_{i \in N} \Psi_i\left(e^j\right) = e^j(N) = 1,$$

al ser e^j el vector de $\mathbb{R}^N$ cuyas componentes son todas nulas excepto la j-ésima que vale uno. De aquí se sigue que la suma de los términos de cada columna de la matriz A es igual a uno, y por tanto, la matriz A es también estocástica.

Recíprocamente, dada una aplicación $\Psi : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, sea una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $|N| \times |N|$, estocástica, esencial para $(N, \mathcal{A})$ y que verifica $Aw = \Psi(w)$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. En estas condiciones, la aplicación Ψ representa un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$, por lo siguiente. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, puesto que $\Psi(w) = Aw$ y también $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i \in N}$, igualando término a término, se obtiene que

$$\Psi_i(w) = \sum_{j \in N} a_{ij} w_j, \text{ para cada } i \in N.$$

Por tanto, si $w', w'' \in \mathbb{R}_+^N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$,

$$\Psi_i(\alpha w' + \beta w'') = \sum_{j \in N} a_{ij} \left(\alpha w'_j + \beta w''_j\right) = \alpha \sum_{j \in N} a_{ij} w'_j + \beta \sum_{j \in N} a_{ij} w''_j = \alpha \Psi_i(w') + \beta \Psi_i(w'').$$

Además, puesto que A es una matriz estocástica, en particular $a_{ij} w_j \geq 0$ para cualesquiera $i, j \in N$, y entonces, $\Psi_i(w) \geq 0$ para todo $i \in N$. También, por ser A una matriz esencial para el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y siendo que cada término de la matriz A es un número real no negativo y menor o igual que uno, se sigue que

$$\Psi_i(w) = \sum_{j \in N} a_{ij} w_j = \sum_{\{j \in N : i \in P^j\}} a_{ij} w_j \leq w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right).$$

Finalmente, se concluye que la aplicación Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ probando que $\sum_{i \in N} \Psi_i(w) = w(N)$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. Esto es así debido a que la matriz A es estocástica, y por tanto, todos los términos de cualquiera de sus columnas suman uno,

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(w) = \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in N} a_{ij} w_j\right) = \sum_{j \in N} \left(\sum_{i \in N} a_{ij}\right) w_j = w(N).$$

Queda pues probado el enunciado del teorema. ■

Demostrada la equivalencia entre la familia de valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$ y la familia de matrices estocásticas y esenciales de orden $|N| \times |N|$, se denotará, indistintamente, con $V[\mathcal{A}]$ a cualquiera de ellas.

Para determinar cuál es el conjunto $V[\mathcal{A}]$ dentro del espacio vectorial real formado por todas las matrices de orden $|N| \times |N|$ con términos en $\mathbb{R}$, se considera la siguiente definición.

Definición 1.4. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina selector en $(N,\mathcal{A})$ a una aplicación $\sigma : N \to N$ que asigna a cada elemento $j \in N$ un único elemento $\sigma(j) \in N$ tal que $\sigma(j) \in P^j$.*

Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Puesto que existe más de un selector que puede ser definido en $(N,\mathcal{A})$ siempre que $\mathcal{A} \neq 2^N$, la familia formada por todos los selectores en $(N,\mathcal{A})$ se denotará con $\sigma[\mathcal{A}]$. Además, cada selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ tendrá asociada una única matriz $M^\sigma = \left(m_{ij}^\sigma\right)$ de orden $|N| \times |N|$ cuyos términos, para cada $i,j \in N$, son

$$m_{ij}^\sigma := \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{V.1}$$

Por definición, la matriz M^σ es estocástica y esencial para $(N,\mathcal{A})$. Por tanto, según el Teorema V.1.3, existe un único valor razonable directo en $(N,\mathcal{A})$, $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i\in N}$, asociado a la matriz M^σ. Así, se advierte que

$$\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\} \subseteq V[\mathcal{A}].$$

Aún más, se demuestra que la envolvente convexa del conjunto de matrices asociadas a los elementos de $\sigma[\mathcal{A}]$ constituye el conjunto de matrices $V[\mathcal{A}]$. Para ello, se tendrán en cuenta los siguientes resultados de índole geométrico.

Sea $x \in \mathbb{R}^k$. Se denomina *soporte de x*, y se denotará con $s(x)$, al conjunto

$$s(x) = \{i \in \{1,\ldots,k\} : x_i \neq 0\}.$$

Dado un subconjunto no vacío $F \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que $F = \left\{x \in \mathbb{R}^k : Bx = b\right\}$, para alguna matriz B de orden $m \times k$ de rango m y algún vector $b \in \mathbb{R}^m$, el conjunto F es un poliedro convexo y sus puntos extremos vienen caracterizados a través de sus respectivos soportes, según se expresa en el siguiente enunciado.

Lema 1.5. *Sea el conjunto $F = \left\{x \in \mathbb{R}_+^k : Bx = b\right\}$, para alguna matriz B de orden $m \times k$ de rango m y algún vector $b \in \mathbb{R}^m$. Dado un vector $x \in F$, se verifica que x es un punto extremo del conjunto F si, y sólo si el soporte de x es minimal; es decir, si, y sólo si para cualquier vector $y \in F$, con $y \neq x$, sucede que $s(y)$ no está contenido en $s(x)$.*

Demostración. Considérese un conjunto $F = \left\{x \in \mathbb{R}_+^k : Bx = b\right\}$, para alguna matriz B de orden $m \times k$ con rango m y algún vector $b \in \mathbb{R}^m$. Sea $x \in F$ un vector cuyo soporte es minimal. Si x no es un punto extremo del conjunto F, existen dos vectores $y, z \in F$, con $y \neq z$, y un número $\lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < 1$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda) z$. Por definición de x, al ser y, z dos vectores de coordenadas no negativas, se verifica que $s(y) \subseteq s(x)$, contradiciendo así que $s(x)$ es minimal. Recíprocamente, sea $x \in F$ un punto extremo del conjunto F, y supóngase que su soporte $s(x)$ no es minimal. Entonces, existe un vector $y \in F$, con $y \neq x$, tal que $s(y) \subseteq s(x)$. En estas condiciones, eligiendo un número real $\lambda \in (0,1)$ que verifique la relación $x \geq \lambda y$, se define el vector $z := \frac{x-\lambda y}{1-\lambda}$. Así se tiene que $z \in F$, puesto que $z \in \mathbb{R}^k_+$ y verifica que

$$Bz = \frac{1}{1-\lambda}(Bx - \lambda By) = \frac{1}{1-\lambda}(b - \lambda b) = b.$$

De aquí se llega a contradicción, al deducirse que x no es un punto extremo del conjunto F, por verificar la igualdad $x = \lambda y + (1-\lambda) z$. ■

Utilizando el resultado anterior, se determina cuál es el conjunto de matrices asociadas a la familia de valores razonables directos.

Teorema 1.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que*

$$V[\mathcal{A}] = conv\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}.$$

Demostración. Dado el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $|N| = n$ y considérese el conjunto de matrices de orden $n \times n$ estocásticas y esenciales en $(N, \mathcal{A})$ que definen algún valor razonable directo,

$$V[\mathcal{A}] = \left\{ A = [a_{ij}]_{n\times n} : a_{ij} \geq 0 \ \forall i,j \in N, \ \sum_{i \in N} a_{ij} = 1 \ \forall j \in N, \ a_{ij} = 0 \ \forall i \notin P^j \right\}.$$

Para demostrar el enunciado, se procederá de la siguiente manera. En primer lugar, se identifica el conjunto $V[\mathcal{A}]$ con un poliedro convexo; concretamente, se verá que $V[\mathcal{A}]$ coincide con $\left\{x \in \mathbb{R}^k_+ : Bx = b\right\}$, para alguna matriz B y algún vector b, elegidos convenientemente. A continuación, utilizando el lema anterior, se demostrará que todos los elementos del conjunto $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$ son puntos extremos del conjunto $V[\mathcal{A}]$, y además son los únicos que verifican esta condición. Después, observando que el conjunto $V[\mathcal{A}]$ es acotado, se tendrá que $V[\mathcal{A}] = conv\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$, al considerar que un poliedro convexo y acotado coincide con la envolvente convexa de sus puntos extremos.

Si cada matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in V[\mathcal{A}]$ se identifica con un vector $x \in \mathbb{R}^{n^2}_+$, cuyas componentes son los términos de A, colocados éstos siguiendo el orden natural que presentan dentro de la matriz A, columna tras columna y en la misma disposición en que éstas se encuentren, la identidad

$$V[\mathcal{A}] \equiv \left\{x \in \mathbb{R}_+^{n^2} : Bx = b\right\}$$

está garantizada sin más que elegir la matriz B y el vector columna b de la siguiente forma. El vector b tendrá al menos n componentes, tantas como número de filas posea la matriz B. Además, las n primeras componentes del vector b son iguales a uno y el resto son cero. La matriz B tiene n^2 columnas y un número de filas mayor o igual a n. Concretamente, el número de filas que excede de n coincide con el número de parejas $i, j \in N$ que verifican que $i \notin P^j$ en $(N, \mathcal{A})$. La matriz B se define de forma que, la primera fila posee sus n primeros términos iguales a uno y el resto cero; la segunda fila tiene sus $n+1, \ldots, 2n$ términos iguales a uno y el resto cero; así sucesivamente, hasta su n-ésima fila, que tiene sus n últimos términos iguales a uno y el resto cero; las demás filas de B poseen cada una un solo término no nulo e igual a uno. Estas últimas filas de B son tales que la fila correspondiente a un par $i, j \in N$ tal que $i \notin P^j$ tendrá su 1 colocado en la columna que ocupa el mismo lugar que el elemento a_{ij} de A en el vector asociado $x \in \mathbb{R}_+^{n^2}$.

Puesto que $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\} \subseteq V[\mathcal{A}]$, se prueba a continuación que, los elementos del conjunto $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$ son puntos extremos del conjunto $V[\mathcal{A}]$, y además los únicos que verifican esta condición. En efecto, en cada matriz M^σ, asociada a un selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$, uno y sólo uno de los términos de cada columna es distinto de cero, mientras que cada columna de cualquier otra matriz $A \in V[\mathcal{A}]$ que no esté asociada a un selector verifica que la suma de sus términos es uno, y por tanto, posee al menos un término no nulo, pero no es el único distinto de cero. Esta observación permite afirmar que los elementos del conjunto $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$, considerados como vectores del conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}_+^{n^2} : Bx = b\right\}$, tienen soporte minimal; y por tanto, aplicando el lema anterior, se tiene que $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$ son puntos extremos de $V[\mathcal{A}]$. Además $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$ son los únicos puntos extremos de $V[\mathcal{A}]$, pues cualquier matriz $A \in V[\mathcal{A}]$ considerada como vector del conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}_+^{n^2} : Bx = b\right\}$ tiene al menos n componentes no nulas, siendo $\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$ el único subconjunto formado por vectores con exactamente n componentes no nulas.

El poliedro $V[\mathcal{A}]$ es además acotado. Para su demostración se procede por reducción al absurdo. Si $V[\mathcal{A}]$ no es acotado, para cada $A = [a_{ij}] \in V[\mathcal{A}]$ existe $A' = \left[a'_{ij}\right] \in V[\mathcal{A}]$ con $A' > A$. Entonces, hay dos términos, a'_{lk} de A' y su homólogo a_{lk} de A, tales que $a'_{lk} > a_{lk}$.

Puesto que A' y A son matrices estocásticas, sus términos son todos no negativos y los términos de las columnas donde se encuentran a'_{lk} y a_{lk} en A' y A, respectivamente, verifican que $\sum_{i\in N} a'_{ik} = \sum_{i\in N} a_{ik} = 1$. Siendo así, existe un término a'_{mk} y a_{mk} en A' y A, respectivamente, con $m \neq l$, verificando que $a'_{mk} < a_{mk}$, y contradicciendo que $A' > A$.

Puesto que un poliedro convexo y acotado coincide con la envolvente convexa de sus puntos extremos, se tiene que $V[\mathcal{A}] = conv\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$. ■

Según se ha expuesto anteriormente, cada selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ definido en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ tiene asociada una única matriz que representa un valor razonable directo. Además, a través del valor razonable directo generado por σ, se obtiene un vector de pago eficiente para cada juego $(N, w_\mathcal{A})$ con la siguiente propiedad: la aportación de cada jugador es asignada, de forma íntegra, a un único jugador. En particular, el selector identidad, $\sigma = id$, genera el valor razonable directo $\Psi(w) = w$, para cada vector $w \in \mathbb{R}^N_+$. Este valor se denomina *valor identidad.*

Por otra parte, en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y como consecuencia del teorema anterior, otro valor razonable directo surge al considerar la única combinación lineal convexa de las matrices asociadas a todos los posibles selectores que puedan ser definidos en $(N, \mathcal{A})$ cuyos coeficientes son iguales entre sí. Esto es, se trata del valor razonable directo cuya matriz asociada $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ es el centro de la familia de matrices estocásticas y esenciales $V[\mathcal{A}]$, que es

$$A = \frac{1}{|\sigma[\mathcal{A}]|} \sum_{\sigma\in\sigma[\mathcal{A}]} M^\sigma.$$

Considerando este valor razonable directo, se genera un vector de pago en cada juego interior constituido sobre $(N, \mathcal{A})$ que proporciona un reparto imparcial entre los jugadores que tienen dependencia con cada jugador. En efecto, recordando que cada selector definido en un antimatroide asigna a cada jugador $i \in N$ otro elemento de P^i, se tiene que existen tantos selectores diferentes como posibilidades distintas de asociar a cada jugador un elemento del conjunto P^i. Es decir,

$$|\sigma[\mathcal{A}]| = \prod_{k\in N} |P^k|.$$

Por tanto, si $i, j \in N$ son tales que $i \in P^j$, usando (V.1), se verifica que

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{1}{|\sigma[\mathcal{A}]|}\sum_{\sigma\in\sigma[\mathcal{A}]} m_{ij}^{\sigma} = \frac{1}{\prod_{k\in N}|P^k|}\sum_{\{\sigma\in\sigma[\mathcal{A}]\,:\,\sigma(j)=i\}} 1 \\
&= \frac{1}{\prod_{k\in N}|P^k|}\left|\{\sigma\in\sigma[\mathcal{A}]:\sigma(j)=i\}\right| = \frac{\prod_{k\in N\setminus\{j\}}|P^k|}{\prod_{k\in N}|P^k|} \\
&= \frac{1}{|P^j|},
\end{aligned}$$

En otro caso, si $i \notin P^j$, se tiene que $a_{ij} = 0$, puesto que no existe ningún selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ tal que $\sigma(j) = i$. De aquí, se deduce que, para cualesquiera $i, j \in N$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|P^j|}, & \text{si } i \in P^j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este argumento induce la siguiente definición y el teorema posterior.

Definición 1.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor igualitario en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable directo $Eg^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ definido sobre $(N, \mathcal{A})$ tal que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ e $i \in N$, se tiene*

$$Eg_i^{\mathcal{A}}(w) := \sum_{\{j\in N: i\in P^j\}} \frac{1}{|P^j|} w_j.$$

Asímismo, se denomina matriz asociada al valor igualitario en $(N, \mathcal{A})$, y se denota con $A^{Eg^{\mathcal{A}}}$, a la única matriz estocástica y esencial de orden $|N| \times |N|$ que verifica la igualdad $Eg_i^{\mathcal{A}}(w) = A^{Eg^{\mathcal{A}}} w$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. Es decir, la matriz $A^{Eg^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{Eg^{\mathcal{A}}}\right]_{|N|\times|N|}$ es tal que

$$a_{ij}^{Eg^{\mathcal{A}}} = \begin{cases} \frac{1}{|P^j|}, & \textit{si } i \in P^j \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 1.8. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El valor igualitario $Eg^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ es el centro del conjunto convexo $V[\mathcal{A}]$ que constituye la familia de valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$.*

Obsérvese que, para cada juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, derivados de sendos valores razonables directos, se han conseguido dos conceptos de solución que son valores, en principio diferentes, uno de ellos originado a partir del valor razonable directo asociado al selector identidad en $(N, \mathcal{A})$, y otro, obtenido a partir del valor igualitario. Ambos valores coinciden sólo cuando $\mathcal{A} = 2^N$, al verificarse en este caso, que $|P^i| = 1$ para cada $i \in N$.

La obtención de diferentes vectores de pago para un juego interior a partir de la definición de valores razonables directos en un antimatroide, exige cuestionarse qué requisitos debe cumplir el valor razonable directo que da origen a un vector de pago con una determinada propiedad. La mayoría de los vectores de pago eficientes propuestos para juegos cooperativos de beneficios verifican el principio de racionalidad individual, por tanto, parece lógico determinar qué valores razonables directos definidos en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ generan una imputación para cada juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}^N_+$. La siguiente proposición pone de manifiesto que el principio de racionalidad individual no impone ninguna restricción sobre el conjunto $V[\mathcal{A}]$.

Proposición 1.9. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$. Para cualquier $w \in \mathbb{R}^N_+$, el vector $\Psi(w) \in \mathbb{R}^N$ es una imputación para el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

Demostración. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$. Por definición, se verifica que $\Psi(w) \in \mathbb{R}^N$ es un vector de pago eficiente y positivo en $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cualquier $w \in \mathbb{R}^N_+$. Entonces, dado un vector $w \in \mathbb{R}^N_+$ y siguiendo la Proposición II.3.1, para demostrar que $\Psi(w) \in \mathbb{R}^N$ es una imputación en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ bastará con probar que $\Psi_i(w) \geq w(\{i\})$ para todo $i \in a(\mathcal{A})$. Si $i \in a(\mathcal{A})$, se tiene que $P^i = \{i\}$. Por tanto, considerando la única matriz $A = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ que es estocástica, esencial para $(N, \mathcal{A})$ y cumple que $Aw = \Psi(w)$, se verifica que $a_{ij} \geq 0$ para $j \in N$, y también que $a_{ii} = 1$. De aquí que

$$\Psi_i(w) = \sum_{j \in N} a_{ij} w_j \geq w_i = w_{\mathcal{A}}(\{i\}).$$

Así pues, los valores razonables directos en un antimatroide siempre generan imputaciones para juegos interior. ■

Acerca de la aplicación de los valores razonables directos en juegos de operador clausura, cabe decir lo siguiente para el caso de un poset-antimatroide. Puesto que un poset-antimatroide es, en particular, geometría convexa y el dual de un poset-antimatroide también es poset-antimatroide, se verifica que, si $(N, \mathcal{L})$ es un poset-antimatroide y

$(N, \mathcal{A})$ su antimatroide dual, todo valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ determina, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, un vector del conjunto de imputaciones del juego de operador clausura $(N, w_{\mathcal{L}})$.

Proposición 1.10. *Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$. Para todo $\Psi \in V[\mathcal{A}]$ y cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que $\Psi(w) \in I(w_{\mathcal{L}})$.*

Demostración. Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$ así como un valor razonable directo $\Psi \in V[\mathcal{A}]$ en $(N, \mathcal{A})$. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, por definición, se verifica que $\Psi(w)$ es un vector de pago eficiente y no negativo. Por tanto, para probar que $\Psi(w) \in I(w_{\mathcal{L}})$ basta demostrar que $\Psi_i(w) \leq w\left(\overline{\{i\}}\right)$ para todo $i \in N$, según la expresión (II.3) y al ser $(N, w_{\mathcal{L}})$ un juego subaditivo. En efecto, puesto que $(N, \mathcal{A})$ también es poset-antimatroide, por el Lema II.1.3 se tiene que

$$\overline{\{i\}} = \{j \in N : i \in P_j\} = \left\{j \in N : i \in P^j\right\}.$$

Y entonces, el Axioma de Dependencia permite afirmar que $\Psi_i(w) \leq w\left(\overline{\{i\}}\right)$. ■

Por tanto, la definición de un valor razonable directo en un poset-antimatroide permite obtener imputaciones en la familia de juegos de operador clausura constituidos sobre la geometría convexa dual, que también es poset-antimatroide. Esto induce la siguiente definición.

Definición 1.11. *Sea $(N, \mathcal{L})$ un poset-antimatroide y considérese su antimatroide dual $(N, \mathcal{A})$. Para cada valor razonable directo $\Psi^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$, se denomina valor dual de $\Psi^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{L})$ a la aplicación $\Psi^{\mathcal{L}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ tal que $\Psi^{\mathcal{L}}(w) := \Psi^{\mathcal{A}}(w)$ para todo $w \in \mathbb{R}_+^N$.*

2. Subfamilias de valores directos

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, la identificación de la familia $V[\mathcal{A}]$ con el conjunto $conv\{M^\sigma : \sigma \in \sigma[\mathcal{A}]\}$, demostrada en el Teorema V.1.6, no sólo aporta una nueva forma de generar valores en un juego interior, sin más que considerar combinaciones lineales convexas de las matrices asociadas a un conjunto de selectores, sino que además permite caracterizar los valores razonables directos que determinan vectores de pago pertenecientes a importantes conceptos de solución en juegos cooperativos. Así, una forma de restringir el conjunto $V[\mathcal{A}]$ a aquellos valores razonables directos que determinen vectores de pago correspondientes a un determinado concepto de solución, es exigir un nuevo axioma en $V[\mathcal{A}]$, para después considerar, entre todos los extremos del conjunto convexo $V[\mathcal{A}]$, sólo aquéllos que verifican el axioma impuesto. Esta elección determinará un subconjunto de $V[\mathcal{A}]$ también convexo satisfaciendo la condición requerida en el axioma.

Puesto que cualquier valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ genera un valor en el conjunto de imputaciones para cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, otro criterio de reparto útil y más exigente en un juego cooperativo de beneficios es el que satisfacen los vectores del core.

Definición 2.1. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$ verifica el Axioma de Core si cumple:*

$$\Psi(w) \in Core(w_{\mathcal{A}}), \text{ para cada } w \in \mathbb{R}_+^N.$$

Obsérvese que, según la expresión (II.1) del Capítulo II, se tiene que $\Psi \in V[\mathcal{A}]$ verifica el Axioma de Core si, y sólo si $\sum_{k\in S} \Psi_k(w) \geq w(S)$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $S \in \mathcal{A}$. Equivalentemente, en términos matriciales, $A \in V[\mathcal{A}]$ verifica el Axioma de Core si, y sólo si $(Aw)(S) \geq w(S)$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $S \in \mathcal{A}$. La familia de valores razonables directos que verifican el Axioma de Core, así como el conjunto de matrices asociadas a estos valores, serán denotados, indistintamente, con $V_c[\mathcal{A}]$.

Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, puesto que $w \in Core(w_{\mathcal{A}})$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se tiene que el valor identidad verifica el Axioma de Core. Sin embargo, bastará tener en cuenta el siguiente ejemplo para demostrar que no todo vector de pago obtenido mediante la definición de un valor razonable directo en un antimatroide es un vector del core en el juego interior generado.

Ejemplo 2.2. *Considérese $(N, \mathcal{A})$, con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$A(1) = \{1\}, \qquad A(2) = \{2\}, \qquad A(3) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

representado mediante su diagrama de Hasse en la Figura V.1. En él se observa que

$$P^1 = P_1 = \{1\}; \qquad P^2 = P_2 = \{2\} \qquad P^3 = N, \; P_3 = \{3\}.$$

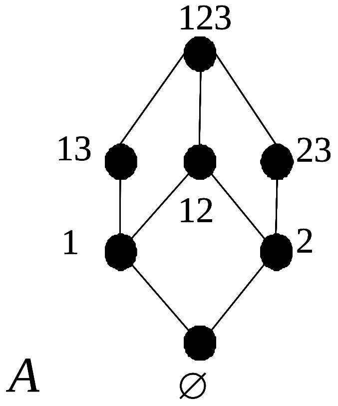

Figura V.1

Atendiendo a la Definición V.1.7 del valor igualitario en $(N, \mathcal{A})$, *se obtiene que*

$$\begin{aligned}
Eg_1^{\mathcal{A}}(w) &= \sum_{\{j \in N : 1 \in P^j\}} \frac{1}{|P^j|} w_j = w_1 + \frac{1}{3} w_3; \\
Eg_2^{\mathcal{A}}(w) &= \sum_{\{j \in N : 2 \in P^j\}} \frac{1}{|P^j|} w_j = w_2 + \frac{1}{3} w_3; \\
Eg_3^{\mathcal{A}}(w) &= \sum_{\{j \in N : 3 \in P^j\}} \frac{1}{|P^j|} w_j = \frac{1}{3} w_3.
\end{aligned}$$

y su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que, considerada la coalición factible $S = \{1, 3\}$, *para cada* $w \in R_+^N$ *con* $w_3 \neq 0$, *el vector* $Eg^{\mathcal{A}}(w) = \left(Eg_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$ *verifica que*

$$Eg^{\mathcal{A}}(w)(S) = Eg_1^{\mathcal{A}}(w) + Eg_3^{\mathcal{A}}(w) = w_1 + \frac{1}{3} w_3 + \frac{1}{3} w_3 < w_1 + w_3 = w(S),$$

con lo que se deduce que $Eg^{\mathcal{A}}(w) \notin Core(w_{\mathcal{A}})$, *por no cumplirse la expresión (II.1) del Capítulo II.*

Para precisar cuáles son los valores razonables directos en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ que originan vectores del core de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}_+^N$, se escogerán selectores cuyas matrices asociadas definan valores que pertenezcan al core de $(N, w_{\mathcal{A}})$. En base a esta idea, considérense un selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ y un vector $w \in \mathbb{R}_+^N$. Para que $M^\sigma w$ pertenezca al $Core\,(w_{\mathcal{A}})$, debe verificarse que $M^\sigma w\,(S) \geq w\,(S)$, para cada $S \in \mathcal{A}$. Esto es, recordando (V.1), para cada $S \in \mathcal{A}$,

$$M^\sigma w\,(S) = \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in N : \sigma(j) = i\}} w_j = \sum_{\{j \in N : \sigma(j) \in S\}} w_j,$$

y entonces,

$$\sum_{\{j \in N : \sigma(j) \in S\}} w_j \geq w\,(S)\,.$$

Ahora bien, se demuestra que el conjunto de selectores que hacen posible esta condición, coincide con el conjunto $\{\sigma \in \sigma[\mathcal{A}] : \sigma(j) \in P_j,\ \forall j \in N\}$. En efecto, sea $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ selector y considérese $j \in N$. Si $\sigma(j) \notin P_j$, entonces $\sigma(j) \in P^j \setminus P_j$ y, por tanto, existe un camino $T \in A(j)$ tal que $\sigma(j) \notin T$. En estas condiciones, considerando el vector $e^j \in \mathbb{R}_+^N$, cuyas coordenadas son nulas excepto la j-ésima que vale uno, no se verificaría la condición necesaria para que $M^\sigma w \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, siendo $w = e^j$, pues $\sum_{\{k \in N : \sigma(k) \in T\}} e_k^j = 0$ y en cambio $e^j(T) = 1$. De otra parte, sea un selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ tal que $\sigma(j) \in P_j$, para cada $j \in N$ y considérese una coalición $S \in \mathcal{A}$. Para cada $j \in S$ se tiene que $\sigma(j) \in S$, puesto que $P_j \subseteq S$, al ser S una coalición factible que contiene a j. Entonces, $\sum_{\{j \in N : \sigma(j) \in S\}} w_j \geq w\,(S)$.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, surge la siguiente subfamilia de selectores.

Definición 2.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Un selector $\sigma : N \to N$ se denomina selector de control en $(N, \mathcal{A})$ si asigna a cada elemento $j \in N$ un elemento $\sigma(j) \in P_j$.*

El conjunto de selectores de control en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ será denotado con $\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$. Puesto que $\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}] \subseteq \sigma[\mathcal{A}]$, al cumplirse que $P_j \subseteq P^j$ para cada $j \in N$, también existe, para cada selector $\sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$, una única matriz asociada $M^\sigma = \left(m_{ij}^\sigma\right)$ de orden $|N| \times |N|$. A partir de esta matriz, existe un único valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$, $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i \in N}$, asociado a ella que verifica el Axioma de Core. En efecto, para cada coalición $S \in \mathcal{A}$, considérese un elemento $j \in N$. Si $j \in S$, al existir un j-camino T contenido en S, se verifica que $P_j \subseteq S$, y entonces, $\sigma(j) \in S$ y $\sum_{k \in S} \Psi_k(e^j) \geq e^j(S)$. De igual modo, si $j \notin S$, se verifica de forma trivial que $\sum_{k \in S} \Psi_k(e^j) \geq e^j(S)$. De aquí, para cada coalición $S \in \mathcal{A}$ y cada elemento $j \in N$, se sigue que $\sum_{k \in S} \Psi_k (e^j) \geq e^j (S)$. Por tanto, $\sum_{k \in S} \Psi_k (w) \geq w (S)$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$ y cada $S \in \mathcal{A}$, y se advierte así que

$$\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma} [\mathcal{A}]\} \subseteq V_c [\mathcal{A}] .$$

Aún más, en el siguiente teorema se demuestra que $V_c [\mathcal{A}]$ es la envolvente convexa del conjunto de matrices asociadas a la familia formada por los selectores de control en $(N, \mathcal{A})$.

Teorema 2.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El conjunto de matrices asociadas a la familia de valores razonables directos que verifican el Axioma de Core es la envoltura convexa de las matrices asociadas a los selectores de control en $(N, \mathcal{A})$. Esto es,*

$$V_c [\mathcal{A}] = conv \{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma} [\mathcal{A}]\} .$$

Demostración. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, con $|N| = n$, y supóngase que existe $j \in N$ tal que $P^j \neq P_j$. Obsérvese que, si Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ que verifica el Axioma de Core, entonces su matriz asociada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es tal que $a_{ij} = 0$ para cada $i \in P^j \setminus P_j$. En efecto, si $j \in N$ es tal que $P^j \neq P_j$, se tiene que, para cada $i \in P^j \setminus P_j$ existe un j-camino $S \in A (j)$ tal que $i \notin S$ y para el que, debido a que $a_{kj} := \Psi_k (e^j)$ para cualquier $k \in N$ y a la verificación del Axioma de Core, se cumple que

$$\sum_{k \in S} a_{kj} = \sum_{k \in S} \Psi_k \left(e^j\right) \geq e^j (S) = 1,$$

pues $j \in S$ y el vector $e^j \in \mathbb{R}^N$ tiene todas sus coordenadas nulas excepto la que ocupa el lugar j, que vale uno. Por tanto, al ser $A = [a_{ij}]$ una matriz estocástica, los elementos de cada una de sus columnas son números reales no negativos que suman uno. Entonces,

$$\sum_{k \notin S} a_{kj} = 0 \text{ y, en particular, } a_{ij} = 0, \text{ al ser } i \notin S.$$

Recíprocamente, si Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ y su matriz $A = [a_{ij}]$ verifica que $a_{ij} = 0$ para cada par de elementos $i, j \in N$ tales que $i \in P^j \setminus P_j$, se tiene que $\Psi \in V_c [\mathcal{A}]$. Esto es así debido a que, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$ y cada subconjunto $S \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
(Aw) (S) &= \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P^j\}} a_{ij} w_j = \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P_j\}} a_{ij} w_j \\
&= \sum_{j \in N} \left[\sum_{\{i \in S \,:\, i \in P_j\}} a_{ij} \right] w_j \geq \sum_{j \in S} \left[\sum_{\{i \in N \,:\, i \in P_j\}} a_{ij} \right] w_j = w (S) ,
\end{aligned}$$

puesto que si $j \in S$ entonces $P_j \subseteq S$ ya que $S \in \mathcal{A}$ y $\sum_{\{i \in N\,:\, i \in P_j\}} a_{ij} = 1.$

Con la observación anterior, y teniendo en cuenta el Teorema V.1.3, se tiene que

$$V_c[\mathcal{A}] = \left\{ A = [a_{ij}]_{n \times n} : a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j \in N, \ \sum_{i \in N} a_{ij} = 1 \ \forall j \in N, a_{ij} = 0 \ \forall i \notin P_j \right\}.$$

Esta igualdad permite describir el conjunto $V_c[\mathcal{A}]$ como un poliedro convexo y acotado en $\mathbb{R}^{n^2}$, de forma que

$$V_c[\mathcal{A}] \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{n^2} : Bx = b \right\}$$

para una matriz B y un vector columna b elegidos convenientemente, sin más que seguir un argumento análogo al utilizado en la demostración del Teorema V.1.6.

Además, utilizando el Lema V.1.5, se demuestra que las matrices asociadas a los selectores de $\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$ son los puntos extremos del convexo anterior. Para ello, puesto que se verifica que $\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\} \subseteq V_c[\mathcal{A}]$, bastará con observar que, para cualquier matriz M^σ asociada a un selector $\sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$ no existe ninguna otra matriz $A = [a_{ij}] \in V_c[\mathcal{A}]$, tales que, entendidas ambas como vectores de $\mathbb{R}_+^{n^2}$, el soporte de A esté contenido en el soporte de M^σ. En efecto, en cada columna de la matriz $M^\sigma = \left(m_{ij}^\sigma\right)$ asociada a un selector $\sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$ existe un único término $m_{i_j j}^\sigma \neq 0$, para cada $j \in N$, y es tal que $\sigma(j) = i_j \in P_j$. Puesto que los términos de cada columna de cualquier matriz $A = [a_{ij}]$ de $V_c[\mathcal{A}]$ que no pertenezca al conjunto $\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$ son no negativos y suman uno, sucede, en particular, que existe al menos una columna de A en la cual hay más de un término no nulo. Este argumento permite asegurar que los elementos del conjunto $\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$, considerados como vectores de $\mathbb{R}_+^{n^2}$, tienen soporte minimal, y por tanto, cada matriz M^σ asociada a un selector $\sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$ es un punto extremo del conjunto convexo $V_c[\mathcal{A}]$. Además, $\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$ son los únicos puntos extremos de $V_c[\mathcal{A}]$. Finalmente, puesto que todo conjunto convexo y acotado es la envoltura convexa de sus puntos extremos, se verifica que $V_c[\mathcal{A}] = conv\{M^\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$. ■

De forma análoga al procedimiento seguido en la obtención del valor igualitario, se genera un valor razonable directo si, en lugar de considerar todos los selectores de la familia $\sigma[\mathcal{A}]$, se eligen todos los selectores de control en $(N, \mathcal{A})$. Éste será el centro del conjunto $V_c[\mathcal{A}]$. Así, la combinación lineal convexa

$$\frac{1}{|\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]|} \sum_{\sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]} M^\sigma,$$

da lugar a la matriz $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ asociada a un valor razonable directo en $(N,\mathcal{A})$ tal que, para cualesquiera $i,j \in N$ con $i \in P_j$, verifica que, usando la igualdad (V.1),

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{|\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]|}\sum_{\sigma\in\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]} m_{ij}^{\sigma} = \frac{1}{\prod_{k\in N}|P_k|}\sum_{\{\sigma\in\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\,:\,\sigma(j)=i\}} 1 \\ &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|P_k|}\left|\{\sigma\in\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}] : \sigma(j)=i\}\right| = \frac{\prod_{k\in N\setminus\{j\}}|P_k|}{\prod_{k\in N}|P_k|} \\ &= \frac{1}{|P_j|}, \end{aligned}$$

donde se ha sustituido $|\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]|$ por $\prod_{k\in N}|P_k|$, al observar que existen tantos selectores en la familia $\widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$ como posibilidades distintas de asignar a cada jugador un elemento del conjunto de jugadores que lo controlan. En otro caso, si $i,j\in N$ son tales que $i\notin P_j$, se tiene que $a_{ij}=0$.

Asociado a la matriz anterior, se origina entonces un valor razonable directo que genera un vector de pago en cada juego interior constituido sobre $(N,\mathcal{A})$ mediante el cual se consigue un reparto equitativo entre todos los jugadores que controlan a un determinado jugador; es el denominado *valor igualitario de control*.

Definición 2.5. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor igualitario de control en $(N,\mathcal{A})$ al valor razonable directo $\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ definido en $(N,\mathcal{A})$, tal que $\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}(w) = \left(\widetilde{Eg}_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N}$ para cada $w\in\mathbb{R}_+^N$, siendo*

$$\widetilde{Eg}_i^{\mathcal{A}}(w) := \sum_{\{j\in N: i\in P_j\}} \frac{1}{|P_j|} w_j.$$

Asímismo, se denomina matriz asociada al valor igualitario de control en $(N,\mathcal{A})$, y se denota con $A^{\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}}$, a la única matriz estocástica y esencial de orden $|N|\times|N|$ que verifica $\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}(w) = A^{\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}} w$, para cada $w\in\mathbb{R}_+^N$. Es decir, la matriz $A^{\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}}\right]_{|N|\times|N|}$ es tal que

$$a_{ij}^{\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}} := \begin{cases} \frac{1}{|P_j|}, & si\ i\in P_j \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El argumento que precede a la definición anterior puso de manifiesto que el valor igualitario de control es el centro de la familia $V_c[\mathcal{A}]$, al generarse mediante la combinación lineal convexa de las matrices asociadas a todos los selectores de control definidos en el antimatroide y de forma que los coeficientes que aparecen en la combinación son iguales entre sí. Esto es lo que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El valor igualitario de control $\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ es el centro del conjunto convexo $V_c[\mathcal{A}]$ que constituye la familia de valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$ que verifican el Axioma de Core.*

Derivado de un valor razonable directo en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ que verifica el Axioma de Core, se obtiene un concepto de solución en cada juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, en principio diferente a los que se obtendrían a partir del valor identidad y del valor igualitario en $(N, \mathcal{A})$. Sin embargo, obsérvese que si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, el valor igualitario $Eg^{\mathcal{A}}$ y el valor igualiario de control $\widetilde{Eg}^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ coinciden, al verificarse que $P^i = P_i$ y considerar sus respectivas definiciones.

Dado un valor razonable directo Ψ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, una condición menos exigente a la impuesta por el Axioma de Core es que el concepto de solución que genere Ψ en cualquier juego interior de $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ sea un vector del conjunto de Weber. Esto justifica la siguiente definición, en la que se impone un axioma, ya introducido por Weber [53] en el conjunto de soluciones, mediante el cual se restringe la familia de valores obtenida a un subconjunto del conjunto de Weber.

Definición 2.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$ verifica el Axioma de Orden Aleatorio si cumple*

$$\Psi(w) = \sum_{\theta \in \Theta^N} \lambda_\theta x^{\theta, w_{\mathcal{A}}}, \text{ para cada } w \in \mathbb{R}_+^N,$$

siendo Θ^N la familia de permutaciones del conjunto N, $\left\{x^{\theta, w_{\mathcal{A}}} \in \mathbb{R}_+^N : \theta \in \Theta^N\right\}$ el conjunto de vectores de contribución marginal para $(N, w_{\mathcal{A}})$ y $\left\{\lambda_\theta \in \mathbb{R} : \theta \in \Theta^N\right\}$ números reales independientes del vector w tales que $0 \leq \lambda_\theta \leq 1$, para cada $\theta \in \Theta^N$, con $\sum_{\theta \in \Theta^N} \lambda_\theta = 1$.

Así, un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ verifica el Axioma de Orden Aleatorio si, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, el vector $\Psi(w)$ pertenece al conjunto $Weber(N, w_{\mathcal{A}})$ y cumple que, al ser expresado como combinación lineal convexa de los vectores de contribución marginal en $(N, w_{\mathcal{A}})$, los coeficientes reales que aparecen en esa expresión no dependen del vector w. En definitiva, un valor razonable directo que verifica el Axioma de Orden Aleatorio origina en la familia de juegos interior $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}^N_+\right\}$ un valor de orden aleatorio, según la igualdad (I.3). Tanto la familia de valores razonables directos que verifican el Axioma de Orden Aleatorio en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ como la familia formada por sus respectivas matrices asociadas serán denotadas, a partir de ahora, con $V_o[\mathcal{A}]$.

Siguiendo en la misma línea de investigación llevada a cabo con las subfamilias de valores razonables directos definidas anteriormente, se pretende encontrar una familia de selectores que determinen al conjunto $V_o[\mathcal{A}]$. Este objetivo se consigue después de observar que los vectores de contribución marginal en un juego interior se pueden expresar mediante una nueva subfamilia de selectores, a través de la cual será posible identificar también al conjunto $V_o[\mathcal{A}]$ con la envolvente convexa de sus matrices asociadas. La introducción de este nuevo tipo de selector, denominado *selector primer último*, se justifica por lo siguiente. Obsérvese que los caminos de un antimatroide que tienen a un mismo jugador como punto final representan las distintas posibilidades de participación en el juego que tiene el jugador formando coaliciones con el menor número posible de jugadores. Siendo así, fijada una ordenación en la gran coalición, cada jugador asegura su participación eligiendo aquel jugador que antes le asegura la formación de uno de sus caminos, según la ordenación preestablecida de los jugadores. Formalmente, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, para cada permutación $\theta \in \Theta^N$ del conjunto N, y siguiendo el orden $\leq_\theta$ definido por la permutación θ entre los elementos de N, el selector primer último asigna a cada $j \in N$ otro jugador $\sigma^\theta(j)$, obtenido éste al considerar el elemento de cada j-camino $T \in A(j)$ que ocupa el último lugar; y de entre todos estos últimos, uno por cada j-camino, selecciona el primero que aparece en la ordenación θ. Obsérvese que, al finalizar este proceso, se obtiene un jugador que se encuentra en algún j-camino y por tanto, $\sigma^\theta(j) \in P^j$ para cada $j \in N$. Por tanto, el selector primer último es un selector en $(N, \mathcal{A})$ y puede definirse de la siguiente forma.

Definición 2.8. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Para cada permutación $\theta \in \Theta^N$ del conjunto N, se denomina selector primer último en $(N, \mathcal{A})$ a un selector $\sigma^\theta : N \to N$ que asigna a cada elemento $j \in N$ un único elemento $\sigma^\theta(j) \in P^j$ tal que*

$$\sigma^\theta(j) := \text{mín}_\theta \left\{\text{máx}_\theta T : T \in A(j)\right\},$$

donde $\max_\theta$ *y* $\min_\theta$ *de un conjunto se refiere al jugador del conjunto considerado que ocupa el último y primer lugar, respectivamente, según la ordenación* θ*.*

La siguiente proposición incluye algunas propiedades del selector anteriormente definido.

Proposición 2.9. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide y considérese una permutación* $\theta \in \Theta^N$ *del conjunto* N*. El selector primer último* σ^θ *en* $(N, \mathcal{A})$ *verifica:*

1. *Si* $j \in N$, $i \in P_j$ *entonces* $\sigma^\theta(j) \geq_\theta i$*. En particular, si existe algún* $T \in A(j)$ *donde* $\max_\theta T = i$ *entonces* $\sigma^\theta(j) = i$*.*

2. $\sigma^\theta\left(\sigma^\theta(j)\right) = \sigma^\theta(j)$*, para cada* $j \in N$*.*

3. *Si* $(N, \mathcal{A})$ *es un poset-antimatroide, entonces* $\sigma^\theta(j) = \max_\theta P_j$*, para cada* $j \in N$*. En particular, se verifica que* $\sigma^\theta \in \{\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$*.*

Demostración. Fijado el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y considerada una permutación $\theta \in \Theta^N$ del conjunto N, sea $j \in N$.

Puesto que $\sigma^\theta(j)$ es, por definición, el último jugador según la ordenación θ en algún j-camino T y se tiene que $P_j \subseteq T$, se verifica que $\sigma^\theta(j) \geq_\theta i$ para cada $i \in P_j$. En particular, si $i \in P_j$ es tal que existe $T \in A(j)$ con $\max_\theta T = i$, por definición de selector primer último, también se cumple la desigualdad $\sigma^\theta(j) \leq_\theta i$ que, junto a la obtenida anteriormente, equivale a afirmar que $\sigma^\theta(j) = i$.

El apartado segundo se prueba teniendo en cuenta que existe un j-camino donde $\sigma^\theta(j)$ es el último jugador según el orden θ, es decir, existe $T \in A(j)$ tal que $\max_\theta T = \sigma^\theta(j)$. Puesto que $T \in \mathcal{A}$ y $\sigma^\theta(j) \in T$, existe un $\sigma^\theta(j)$-camino $S \in A\left(\sigma^\theta(j)\right)$ con $S \subseteq T$. Por tanto, $\max_\theta T \geq \max_\theta S$, o, equivalentemente, $\sigma^\theta(j) \geq \max_\theta S$. De aquí se obtiene la igualdad $\sigma^\theta(j) = \max_\theta S$, al considerar que $\sigma^\theta(j) \in S$. Utilizando el apartado anterior y observando que $\sigma^\theta(j) \in P_{\sigma^\theta(j)}$, se concluye finalmente que $\sigma^\theta\left(\sigma^\theta(j)\right) = \sigma^\theta(j)$.

El apartado tercero se demuestra de forma inmediata. Si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, se tiene que cada jugador es el punto final de un único camino, y por tanto, por definición, cualquier selector primer último σ^θ verifica que $\sigma^\theta(j) = \max_\theta P_j$, cualquiera que sea $j \in N$. De aquí, se obtiene además que, cualquier selector primer último es un selector de control. ■

Con el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que, en general, y aunque $(N, \mathcal{A})$ sea un poset-antimatroide, la familia de selectores primer último $\left\{\sigma^{\theta} : \theta \in \Theta^{N}\right\}$ en $(N, \mathcal{A})$ y la familia de selectores de control $\{\sigma : \sigma \in \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]\}$ son diferentes.

Ejemplo 2.10. *Sea el poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$, con*

$$N = \{1, 2, 3\} \qquad y \qquad \mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, N\},$$

y considérese el selector $\sigma : N \to N$ en $(N, \mathcal{A})$ tal que

$$\sigma(1) = 1, \qquad \sigma(2) = 1, \qquad \sigma(3) = 2.$$

Obsérvese que σ es un selector de control, pues $\sigma(j) \in P_j$, para cada $j \in N$. Además, σ no coincide con ningún selector primer último $\sigma^{\theta} : N \to N$, cualquiera que sea la permutación $\theta \in \Theta^{N}$ del conjunto N. En efecto, si σ coincidiera con σ^{θ}, para algún $\theta \in \Theta^{N}$, en particular, debería verificar el segundo enunciado de la proposición anterior, es decir, cumpliría que $\sigma(\sigma(j)) = \sigma(j)$, para cada $j \in N$. Sin embargo, no es así, pues $\sigma(\sigma(3)) = \sigma(2) = 1 \neq \sigma(3) = 2$.

A continuación se encuentra una expresión general para los vectores de contribución marginal en un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, que permitirá identificar la familia de matrices asociadas al conjunto de valores razonables directos que verifican el Axioma de Orden Aleatorio en $(N, \mathcal{A})$ con la envolvente convexa de las matrices asociadas a la familia de selectores primer último en el citado antimatroide.

Teorema 2.11. *Sea un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ y considérese una permutación $\theta \in \Theta^{N}$ del conjunto N. El vector de contribución marginal $x^{\theta, w_{\mathcal{A}}} = \left(x_i^{\theta, w_{\mathcal{A}}}\right)_{i \in N}$ en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ es tal que, para cada jugador $i \in N$,*

$$x_i^{\theta, w_{\mathcal{A}}} = \sum_{\left\{j \in N \,:\, \sigma^{\theta}(j) = i\right\}} w_j.$$

Demostración. Dado un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, sean $\theta \in \Theta^{N}$ e $i \in N$ y téngase en cuenta la igualdad (I.1). Siendo $S_i^{\theta} = \{j \in N : j \leq_{\theta} i\}$, la coordenada $x_i^{\theta, w_{\mathcal{A}}}$ del vector de contribución marginal $x^{\theta, w_{\mathcal{A}}}$ verifica, por definición, que

$$\begin{aligned} x_i^{\theta, w_{\mathcal{A}}} &= w_{\mathcal{A}}\left(S_i^{\theta}\right) - w_{\mathcal{A}}\left(S_i^{\theta} \setminus \{i\}\right) \\ &= w\left(int\left(S_i^{\theta}\right)\right) - w\left(int\left(S_i^{\theta} \setminus \{i\}\right)\right). \end{aligned}$$

Puesto que, por la propiedad *(I2)* de operador interior, $int\left(S_i^\theta \setminus \{i\}\right) \subseteq int\left(S_i^\theta\right)$, se tiene que los jugadores cuyos beneficios aparecen en la diferencia anterior son los que pertenecen al conjunto $int\left(S_i^\theta\right) \setminus int\left(S_i^\theta \setminus \{i\}\right)$. Además, teniendo en cuenta que un elemento $j \in N$ verifica que $j \in int\left(S_i^\theta\right)$ si, y sólo si existe un camino $T \in A(j)$ contenido en S_i^θ, se observa que $j \in int\left(S_i^\theta\right) \setminus int\left(S_i^\theta \setminus \{i\}\right)$ si para todo j-camino $T \subseteq S_i^\theta$ se verifica que $i \in T$. Por tanto, según la definición de S_i^θ, el último elemento según la permutación θ en cualquiera de estos j-caminos es i. Es decir, para todo $T \in A(j)$ con $j \in N$ y $T \subseteq S_i^\theta$ se tiene que $\max_\theta T = i$. En otro caso, si $T \in A(j)$ con $j \in N$ y $T \nsubseteq S_i^\theta$, existe $k \in T \setminus S_i^\theta$; por lo que $\max_\theta T >_\theta i$. Se concluye pues que $j \in int\left(S_i^\theta\right) \setminus int\left(S_i^\theta \setminus \{i\}\right)$ si, y sólo si $\sigma^\theta(j) = i$. Por ello,

$$x_i^{\theta, w_{\mathcal{A}}} = \sum_{\left\{j \in N \,:\, \sigma^\theta(j) = i\right\}} w_j,$$

con lo que queda probado el enunciado del teorerma. ■

Según la fórmula obtenida en el teorema anterior, fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y considerada una ordenación $\theta \in \Theta^N$, la matriz asociada a $\Psi^\theta : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$, tal que $\Psi^\theta(w) := x^{\theta, w_{\mathcal{A}}}$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ es la matriz M^{σ^θ} correspondiente al selector primer último σ^θ. Por tanto, teniendo en cuenta la Definición V.2.7, se tiene que la matriz asociada a cualquier valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ que verifica el Axioma de Orden Aleatorio es una combinación lineal y convexa de las matrices asociadas al conjunto $\left\{\Psi^\theta : \theta \in \Theta^N\right\}$. Esta importante deducción es la que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.12. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El conjunto de matrices asociadas a la familia de valores razonables directos que verifican el Axioma de Orden Aleatorio es la envoltura convexa del conjunto de matrices asociadas a la familia de selectores primer último en $(N, \mathcal{A})$. Esto es,*

$$V_o[\mathcal{A}] = conv\left\{M^{\sigma^\theta} : \theta \in \Theta^N\right\}.$$

Obsérvese que, si se considera un poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$, cualquier valor razonable directo definido en él verifica el Axioma de Core, al ser $P_i = P^i$, para cada $i \in N$, y por tanto, $\sigma[\mathcal{A}] = \widetilde{\sigma}[\mathcal{A}]$. A su vez, según se constata con el Ejemplo V.2.10, existen selectores en $(N, \mathcal{A})$ que no son selectores primer último, aún siendo $(N, \mathcal{A})$ un poset-antimatroide. Estas consideraciones permiten afirmar el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un poset-antimatroide. Se verifica que*

$$V_o[\mathcal{A}] \subseteq V_c[\mathcal{A}] = V[\mathcal{A}].$$

El centro de la subfamilia $V_o[\mathcal{A}]$ se obtendrá teniendo en cuenta que los selectores primer último vienen determinados por la ordenación preestablecida de los jugadores. No obstante, obsérvese que esta relación no es biyectiva, puesto que pueden existir distintos órdenes entre los jugadores que determinen el mismo selector.

Ahora, recordando que el valor de Shapley de un juego cooperativo es una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores a las distintas coaliciones, cabe esperar que el valor razonable directo en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ que origina el valor de Shapley en la familia de juegos $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ sea el centro de la familia $V_o[\mathcal{A}]$. En efecto, esta afirmación es lo que se demuestra en el siguiente teorema. Aún más, recordando la Proposición 1.10 del primer capítulo, en la que se caracteriza el valor de Shapley, $Sh^{\mathcal{A}}(w) = \left(Sh_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$, a través del centro de los vectores de contribución marginal, este teorema no hará más que corroborar lo que allí se afirmó. Así, la Proposición I.1.10 junto al Teorema V.2.11 aseguran que, para cada jugador $i \in N$,

$$\begin{aligned}
Sh_i^{\mathcal{A}}(w) &= \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in\Theta^N} x^{\theta,w_{\mathcal{A}}} = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in\Theta^N}\left(\sum_{\left\{j\in N\,:\,\sigma^\theta(j)=i\right\}} w_j\right)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\{j\in N\,:\,i\in P^j\}}\left(\sum_{\left\{\theta\in\Theta^N\,:\,\sigma^\theta(j)=i\right\}} w_j\right)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\{j\in N\,:\,i\in P^j\}}\left|\left\{\theta\in\Theta^N : \sigma^\theta(j)=i\right\}\right| w_j.
\end{aligned}$$

A partir de esta caracterización, para cada antimatroide $(N, \mathcal{A})$ se define, de forma alternativa, el valor de Shapley de los juegos interior, que ya fue estudiado en la primera sección del capítulo anterior.

Definición 2.14. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor de Shapley en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable directo $Sh^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ definido en $(N, \mathcal{A})$, con $Sh^{\mathcal{A}}(w) = \left(Sh_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, siendo*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w) := \frac{1}{n!}\sum_{\{j\in N\,:\,i\in P^j\}}\left|\left\{\theta\in\Theta^N : \sigma^\theta(j)=i\right\}\right| w_j.$$

Asímismo, se denomina matriz asociada al valor de Shapley en $(N, \mathcal{A})$*, y se denota con* $A^{Sh^{\mathcal{A}}}$*, a la única matriz estocástica y esencial que verifica* $Sh_i^{\mathcal{A}}(w) = A^{Sh^{\mathcal{A}}}w$*, para cada* $w \in \mathbb{R}_+^N$*. Es decir, la matriz* $A^{Sh^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{Sh^{\mathcal{A}}}\right]_{|N|\times|N|}$ *es tal que*

$$a_{ij}^{Sh^{\mathcal{A}}} := \begin{cases} \frac{\left|\left\{\theta\in\Theta^N \,:\, \sigma^\theta(j)=i\right\}\right|}{n!}, & si\ i \in P^j \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Teorema 2.15. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. Teniendo en cuenta todas las permutaciones del conjunto* N*, el valor de Shapley en* $(N, \mathcal{A})$ *es el centro del conjunto convexo* $V_o[\mathcal{A}]$ *constituido por la familia de valores razonables directos en* $(N, \mathcal{A})$ *que verifican el Axioma de Orden Aleatorio.*

Demostración. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, debido al Teorema V.2.12, se verifica que $V_o[\mathcal{A}] = conv\left\{M^{\sigma^\theta} : \theta \in \Theta^N\right\}$. Por tanto, el centro del conjunto $V_o[\mathcal{A}]$ es una matriz $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ tal que

$$A = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in\Theta^N} M^{\sigma^\theta}.$$

Entonces, si $i, j \in N$ son tales que $i \in P^j$, se verifica que

$$a_{ij} = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in\Theta^N} m_{ij}^{\sigma^\theta} = \frac{1}{n!}\sum_{\left\{\theta\in\Theta^N \,:\, \sigma^\theta(j)=i\right\}} 1 = \frac{\left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^\theta(j) = i\right\}\right|}{n!} = a_{ij}^{Sh^{\mathcal{A}}}.$$

En otro caso, si $i \notin P^j$, se tiene que $a_{ij} = 0$. ■

Nótese que la definición anterior recoge un nuevo procedimiento para calcular el valor de Shapley en un juego interior. Sin embargo, esta formulación requiere considerar, para cada $i \in N$, todas las permutaciones del conjunto $\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^\theta(j) = i\right\}$, con $j \in N$ tal que $i \in P^j$. Esta circunstancia realza la utilidad de la exposición realizada en el capítulo anterior, mediante la cual se obtuvo una forma alternativa y más agilizada de obtener el valor de Shapley en un juego de la familia $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$, sin oscurecer los resultados ahora obtenidos, por complementar con ellos el conocimiento adquirido acerca del valor de Shapley en juegos interior, y poder considerar este valor formando parte de una gran familia de vectores eficientes destacables en los juegos que están siendo objeto de estudio.

Así, comparando la expresión del valor de Shapley en un juego interior obtenida en el Teorema IV.1.8 con la formulada en la definición anterior, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese el conjunto de permutaciones Θ^N del conjunto N. Si $j \in N$ e $i \in P^j$, se verifica que*

$$\left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^\theta(j) = i\right\}\right| = \sum_{\{S \in \mathcal{A} \,:\, i \in S, j \in Q_S\}} \frac{n!}{|S|} \lambda_j^S.$$

Como consecuencia de esta proposición, la matriz $A^{Sh} = \left[a_{ij}^{Sh}\right]_{|N| \times |N|}$ asociada al valor de Shapley en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ verifica, según la Definición V.2.14, que

$$a_{ij}^{Sh^{\mathcal{A}}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\{S \in \mathcal{A} \,:\, i \in S,\ j \in Q_S\}} \frac{\lambda_j^S}{|S|}, & \text{si } i \in P^j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hasta aquí se han considerado tres grandes familias de valores razonables directos, que han resultado ser conjuntos convexos, y de cada uno de estos conjuntos convexos se ha identificado su centro. Así, considerando el Ejemplo IV.1.10, en el que se calculó el valor de Shapley en un juego de Mercado con Información con varios jugadores informados, obsérvese que el valor de Shapley en este juego, no coincide ni con el valor igualitario ni con el valor igualitario de control, pues, para cada $i \in N$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Eg}_i^{\mathcal{A}}(w) &= w_i. \\
Eg_i^{\mathcal{A}}(w) &= \begin{cases} w_i + \frac{w(N \setminus I)}{|I|+1}, & \text{si } i \in I \\ \frac{1}{|I|+1} w_i, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
Sh_i^{\mathcal{A}}(w) &= \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N \setminus I)}{(|I|+1)|I|}, & \text{si } i \in I \\ \dfrac{|I|}{|I|+1} w_i, & \text{si } i \notin I. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sin embargo, a continuación, se establece una propiedad que tienen en común los tres valores centrales obtenidos. Para su interpretación, obsérvese que el reparto de beneficios en un juego de la familia $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ se origina a partir de las dependencias existentes entre los jugadores. Por tanto, si un jugador controla a otro, este último tendrá mayor dependencia con el primero que con otro jugador del que sólo dependa pero por el que no sea controlado. Así, la distribución de beneficios se hará de acorde a esos diferentes grados de dependencia entre jugadores.

Definición 2.17. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$. Se afirma que Ψ verifica la Propiedad de Grupo Fundamental si se tiene que, para cada $k \in N$ con $\left|P^k\right| > 1$,*

$$\Psi_j\left(e^k\right) \leq \Psi_i\left(e^k\right), \textit{ para cada } j \in P^k \textit{ y cada } i \in P_k.$$

Un valor razonable directo Ψ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ que verifica la Propiedad de Grupo Fundamental proporciona, en cada juego interior de la familia $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}^N_+\right\}$, un vector de pago que asigna igual beneficio a los jugadores que controlan a un mismo jugador. Esto es,

$$\Psi_j\left(e^k\right) = \Psi_i\left(e^k\right), \text{ para cualesquiera } i, j \in P_k.$$

En efecto, sea $k \in N$ tal que $|P_k| > 1$. Puesto que $P_k \subseteq P^k$, si $i, j \in P_k$ se obtiene que $\Psi_j\left(e^k\right) \leq \Psi_i\left(e^k\right)$ y también que $\Psi_i\left(e^k\right) \leq \Psi_j\left(e^k\right)$. De ahí, que sea cierta la igualdad $\Psi_j\left(e^k\right) = \Psi_i\left(e^k\right)$. Obsérvese además que, por definición, la matriz $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ asociada a Ψ verifica, para cada $k \in N$, que

$$a_{jk} \leq a_{ik}, \text{ para cada } j \in P^k \text{ y cada } i \in P_k.$$

Al respecto, conviene resaltar que el valor razonable identidad, $\Psi(w) = w$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ no verifica, en general, la Propiedad de Grupo Fundamental. Si así fuera, todos los jugadores que controlan a un mismo jugador deberían recibir la misma cantidad en el reparto asignado; sin embargo, basta considerar, para cada $i \in N$ tal que $|P_i| > 1$, un jugador $j \in P_i$ y elegir un vector $w = (w_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N_+$ con $w_i \neq w_j$ para observar que $\Psi_i(w) \neq \Psi_j(w)$.

Dado un antimatroide, entre los valores razonables directos que, por su definición, verifican la Propiedad de Grupo Fundamental se encuentran el valor igualitario y el valor igualitario de control. En la siguiente proposición se demuestra además que el valor de Shapley en $(N, \mathcal{A})$ también verifica tal propiedad.

Proposición 2.18. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El valor de Shapley en $(N, \mathcal{A})$ verifica la Propiedad de Grupo Fundamental.*

Demostración. Para un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y una permutación $\theta \in \Theta^N$ del conjunto N, considérese el selector primer último σ^θ en $(N, \mathcal{A})$ atribuido a la permutación θ. Por definición de selector primer último, para cada terna de jugadores $k, i, j \in N$ tales que $\sigma^{\theta}(k) = j \in P^k$ e $i \in P_k$, se verifica que existe un k-camino $S \in A(k)$ en el que $j \in S$ ocupa la posición más avanzada en θ, esto es, $\max_{\theta} S = j$. Además, puesto que $i \in P_k$, se tiene también que $i \in S$. Por otra parte, considerando una segunda permutación $\theta' \in \Theta^N$ originada al intercambiar las posiciones de los jugadores $i, j \in N$ en la permutación anterior, se obtiene que $\max_{\theta'} S = i$ y, por tanto, $\sigma^{\theta'}(k) = i$, según se enunció en el primer apartado de la Proposición V.2.9. Se demuestra así que, para cada terna de jugadores $k, i, j \in N$ tales que $j \in P^k$ e $i \in P_k$, a partir de una permutación $\theta \in \Theta^N$ tal que $\sigma^{\theta}(k) = j$, siempre es posible encontrar otra permutación $\theta' \in \Theta^N$, con $\theta' \neq \theta$, tal que $\sigma^{\theta'}(k) = i$. Esta conclusión permite asegurar que, en esas condiciones,

$$\left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^{\theta}(k) = j\right\}\right| \leq \left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^{\theta}(k) = i\right\}\right|$$

y, por tanto,

$$\frac{\left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^{\theta}(k) = j\right\}\right|}{n!} \leq \frac{\left|\left\{\theta \in \Theta^N : \sigma^{\theta}(k) = i\right\}\right|}{n!},$$

de donde se obtiene que $a_{jk}^{Sh} \leq a_{ik}^{Sh}$ o, equivalentemente, que $\Psi_j\left(e^k\right) \leq \Psi_i\left(e^k\right)$. ■

Además de la identidad, existen otros valores razonables directos que no cumplen la Propiedad de Grupo Fundamental. Para constatar este hecho, basta considerar un selector $\sigma \neq id$ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$. En efecto, si existen $i, j \in N$ tales que $i \neq j$, el valor razonable directo Ψ determinado por un selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ tal que $\sigma(j) = i \in P^j$ verifica que $\Psi_i(e^j) = 1$ y $\Psi_j(e^j) = 0$, por lo que se observa que $\Psi \neq id$ y que Ψ no verifica la Propiedad de Grupo Fundamental, ya que $i \in P^j$ y $j \in P_j$ y sucede que $\Psi_i(e^j) > \Psi_j(e^j)$.

Obsérvese también que si $(N, \mathcal{A})$ es un antimatroide en el que existe $j \in N$ tal que $|P_j| > 1$, la matriz asociada a un selector no se corresponde con la matriz asociada a ningún valor razonable directo Ψ en $(N, \mathcal{A})$ que verifique la Propiedad de Grupo Fundamental, puesto que $\Psi_j(e^j) = \Psi_i(e^j)$, para cada $i \in P_j$ y su matriz asociada $A^{\Psi} = \left(a_{lk}^{\Psi}\right)$ debe verificar que $a_{jj}^{\Psi} = a_{ij}^{\Psi}$ para cada $i \in P_j$. Sin embargo, la matriz asociada a un selector $\sigma \in \sigma[\mathcal{A}]$ no puede coincidir con la anterior, pues σ asigna al jugador j uno y sólo uno de los jugadores del conjunto P^j, con lo que no puede ocurrir que $a_{jj}^{\Psi} = a_{ij}^{\Psi}$, para cada $i \in P_j$. Por tanto, al no existir selectores cuyas matrices asociadas verifiquen la Propiedad de Grupo Fundamental, no es posible escribir los valores razonable directos que verifiquen dicha propiedad como una combinación lineal convexa de selectores.

El siguiente resultado pone de manifiesto que, en un poset-antimatroide, los respectivos valores centrales de las familias $V_o[\mathcal{A}]$, $V_c[\mathcal{A}]$ y $V[\mathcal{A}]$ no sólo coinciden entre sí, sino que además, cualquier valor razonable directo con la Propiedad de Grupo Fundamental coincide también con ellos.

Teorema 2.19. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un poset-antimatroide. Entonces, existe un único valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ que verifica la Propiedad de Grupo Fundamental.*

Demostración. Dado un poset-antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se tiene que $P_k = P^k$, para cada $k \in N$. Por tanto, si Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ que verifica la Propiedad de Grupo Fundamental, su matriz asociada, $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$, cumple que $a_{jk} = a_{ik}$, para cualesquiera $i, j \in P_k$. Puesto que A es una matriz estocástica y esencial para $(N, \mathcal{A})$, se tiene también que

$$\sum_{i\in N} a_{ik} = \sum_{\{i\in N\,:\,i\in P_k\}} a_{ik} = |P_k|\, a_{ik} = 1,$$

y que

$$\sum_{j\in N} a_{jk} = \sum_{\{j\in N\,:\,j\in P_k\}} a_{jk} = |P_k|\, a_{jk} = 1.$$

Entonces, para cada par $i, j \in P_k$, se verifica que

$$a_{ik} = a_{jk} = \frac{1}{|P_k|},$$

y se tiene que, si Ψ es un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ con la Propiedad de Grupo Fundamental, su matriz asociada $A = [a_{ij}]$ viene dada, para cualesquiera $i, j \in N$, por

$$a_{ij} := \begin{cases} \dfrac{1}{|P_j|}, & \text{si } i \in P_j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con ello queda probado el enunciado del teorema. ■

3. Valores directos de localización

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, una forma de obtener un vector de pago eficiente en un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cada vector $w \in \mathbb{R}^N_+$, surge a través de la definición de un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$, según se observó en las secciones anteriores. Con la misma finalidad, y aprovechando los conocimientos antes expuestos, en esta nueva sección se establecen una serie de acciones que permitirán generar una familia de valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$, denominados *valores directos de localización*, que se obtendrá de una forma diferente a la estudiada hasta ahora. La definición de valores directos de localización facilitará la obtención de nuevos vectores de pago eficientes en un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, atendiendo a una idea fundamental: los beneficios que obtendrán los jugadores estarán condicionados por las relaciones de dependencia establecidas por los caminos en el antimatroide.

Recordando que para cada jugador $i \in N$ siempre existe algún i-camino en $(N, \mathcal{A})$, el concepto de valor directo de localización en $(N, \mathcal{A})$ aparece al considerar el poset-antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ constituido sobre la familia formada por todos los caminos de $(N, \mathcal{A})$ y cuyos conjuntos factibles son los ideales del orden parcial generado al establecer una relación de inclusión en la familia $P(\mathcal{A})$. Así, para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, se constituye un juego interior sobre $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y se obtienen vectores de pago eficientes en este nuevo juego. Posteriormente, se realiza un reparto equitativo del beneficio recibido por cada camino $S \in P(\mathcal{A})$ entre los elementos de N que pertenecen al camino. Finalizado el proceso, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se consiguen vectores de pago eficientes $(x_i)_{i \in N}$ en $(N, w_{\mathcal{A}})$, tales que, para $i \in N$, el valor x_i es la suma de los pagos obtenidos por el jugador i en cada uno de los caminos de $(N, \mathcal{A})$ a los cuales pertenece.

Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese la familia formada por todos los caminos de $(N, \mathcal{A})$,

$$P(\mathcal{A}) = \{S \in \mathcal{A} : S \in A(i)\text{, para algún } i \in N\}.$$

Para constituir un juego interior sobre $P(\mathcal{A})$, es fundamental observar que sobre la familia $P(\mathcal{A})$ se puede considerar el orden parcial $\preceq$ tal que para $T, S \in P(\mathcal{A})$ se verifica que

$$T \preceq S \text{ si, y sólo si } T \subseteq S.$$

Por tanto, según la Definición I.3.9, la familia $\mathcal{P}$ de ideales del par $(P(\mathcal{A}), \preceq)$ genera sobre el conjunto $P(\mathcal{A})$ un poset-antimatroide. Este antimatroide será denotado con $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y se denominará *poset-antimatroide de caminos*. Además, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ es posible definir un nuevo vector, $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, mediante el cual se consigue un reparto eficiente del valor $w(N)$ entre todos los caminos del antimatroide. Para definir el vector $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, se asigna una determinada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N\right\} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ en el conjunto $P(\mathcal{A})$; esto es, se elige, para cada $i \in N$, una distribución de probabilidad sobre la familia $A(i)$ de i-caminos o, equivalentemente, un vector $(\delta_S)_{S\in A(i)} \in \mathbb{R}_+^{A(i)}$ tal que $\delta_S \in [0,1]$ y $\sum_{S\in A(i)} \delta_S = 1$. Así, con las notaciones anteriores, y puesto que cada camino del antimatroide tiene un único punto final, asociado a cada vector $w = (w_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$ se define el vector $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, cuya componente w_S^Δ, para cada $S \in P(\mathcal{A})$, se corresponde con la parte proporcional del valor w_i para el único $i \in N$ tal que S es un i-camino, según la distribución de probabilidad $(\delta_S)_{S\in A(i)}$ definida sobre la familia $A(i)$.

Puesto que, dado un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, la determinación del vector $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ depende de la distribución de probabilidad considerada sobre cada familia de conjuntos $A(i)$, para $i \in N$, se denotará con $\Delta[\mathcal{A}]$ al conjunto de todas las familias de distribuciones de probabilidad que puedan generarse, en este sentido, en el conjunto $P(\mathcal{A})$. De esta forma, considerada $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, cada componente del vector w^Δ representa una asignación de la aportación w_i, con $i \in N$, entre todos los i-caminos del antimatroide inicial, quedando la definición del vector w^Δ como sigue.

Definición 3.1. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S\in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ en el conjunto $P(\mathcal{A})$. Para $w \in \mathbb{R}_+^N$ se define el vector $w^\Delta = \left(w_S^\Delta\right)_{S\in P(\mathcal{A})} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ tal que, para cada $i \in N$ y cada $S \in A(i)$,*

$$w_S^\Delta = \delta_S w_i.$$

Para cada juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, dada una familia $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, las componentes del vector w^Δ representan una distribución de la aportación de cada jugador entre los conjuntos de jugadores con los que tiene dependencia. Además, esta distribución constituye un reparto eficiente del valor de la gran coalición entre todos los caminos del antimatroide.

Proposición 3.2. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese la familia $P(\mathcal{A})$ formada por todos sus caminos. Si $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ es una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ se verifica que*

$$w^\Delta(P(\mathcal{A})) = w(N).$$

Demostración. Dado un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, y considerada en él la familia $P(\mathcal{A})$, sea $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S\in A(i)} : i \in N\right\} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$. Para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que

$$w^\Delta(P(\mathcal{A})) = \sum_{S\in P(\mathcal{A})} w_S^\Delta = \sum_{i\in N}\sum_{S\in A(i)} \delta_S w_i = \sum_{i\in N} w_i \sum_{S\in A(i)} \delta_S = \sum_{i\in N} w_i = w(N),$$

sin más que tener en cuenta que $(\delta_S)_{S\in A(i)}$ es una distribución de probabilidad sobre $A(i)$, para cada $i \in N$ y que una coalición S pertenece a la familia $P(\mathcal{A})$ si, y sólo si existe un único $i \in N$ tal que $S \in A(i)$. ■

Una vez conocido el antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y considerada una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S\in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ en el conjunto $P(\mathcal{A})$, la determinación de un vector $w^\Delta = \left(w_S^\Delta\right)_{S\in P(\mathcal{A})} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, a partir de cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, origina el juego interior $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta\right)$.

El estudio realizado en la sección primera de este capítulo permite identificar, según se justificó en el Teorema V.1.3, cualquier valor razonable directo Υ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ con una matriz A^Υ de orden $|P(\mathcal{A})| \times |P(\mathcal{A})|$, que es estocástica, esencial para $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y tal que verifica $A^\Upsilon w^\Delta = \Upsilon\left(w^\Delta\right)$ para cada $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$. Por tanto, encontrar un vector de pago en un determinado juego $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta\right)$ a través de un valor razonable directo en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, se traduce en realizar la operación $A^\Upsilon w^\Delta$, con una matriz A^Υ que tenga las características citadas.

Por último, el pago asignado a cada jugador en un juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se consigue realizando un reparto equitativo del beneficio obtenido por cada camino del antimatroide $(N, \mathcal{A})$ en el juego $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta\right)$ entre todos los jugadores que pertenecen al camino y sumando después las cantidades que corresponden a cada jugador. Puesto que la asignación de beneficios a cada camino del antimatroide coincide con cada componente del vector columna $A^\Upsilon w^\Delta$, para determinar la asignación de beneficios a cada jugador $i \in N$, basta considerar la matriz $R = [r_{iS}]_{|N|\times|P(\mathcal{A})|}$, denominada *matriz de reparto* en $P(\mathcal{A})$, que viene dada, para cada $i \in N$ y cada $S \in P(\mathcal{A})$ por

$$r_{iS} := \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{V.2}$$

y realizar la operación $RA^\Upsilon w^\Delta$. Como resultado se obtiene una matriz columna, con un término por cada jugador del conjunto N, que se corresponde con el pago que debe recibir éste.

Por otra parte, en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, cada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S\in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ en $P(\mathcal{A})$ tiene asociada una matriz $D^\Delta = [d_{Si}]$ de orden $|P(\mathcal{A})| \times |N|$, cuyos términos, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$, vienen dados por

$$d_{Si}^{\Delta} := \begin{cases} \delta_S, & \text{si } S \in A(i) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{V.3}$$

De esta forma, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, su vector asociado $w^\Delta = \left(w_S^\Delta\right)_{S \in P(\mathcal{A})} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, según la familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, verifica que

$$w^\Delta = D^\Delta w.$$

Por tanto, se tiene que $RA^\Upsilon w^\Delta$ coincide con $RA^\Upsilon D^\Delta w$.

Conviene advertir, no obstante, que, las matrices A^Υ, D^Δ y R son únicas sólo si se establece un orden en la familia de caminos del antimatroide $(N, \mathcal{A})$, al igual que se introduce un orden natural entre los elementos de N, mediante la identificación $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. En cualquier caso, la matriz resultado de la operación $RA^\Upsilon D^\Delta w$ sólo depende del orden inicial elegido entre los jugadores.

A continuación se demuestra que la matriz $RA^\Upsilon D^\Delta$, de orden $|N| \times |N|$, es la matriz asociada a un valor razonable directo, en $(N, \mathcal{A})$.

Teorema 3.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ sobre los caminos del antimatroide, con matriz asociada D^Δ. Si Υ es un valor razonable directo en el poset-antimatroide de caminos $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, siendo A^Υ su matriz asociada y R la matriz de reparto correspondiente, se verifica que $A := RA^\Upsilon D^\Delta$ es una matriz estocástica y esencial para $(N, \mathcal{A})$.*

Demostración. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea Υ un valor razonable directo en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ con matriz asociada A^Υ y considérese la matriz D^Δ asociada a una determinada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$. Si R es la matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$, obsérvese que el producto $RA^\Upsilon D^\Delta$ es una matriz de orden $|N| \times |N|$, definida no negativa. Además, denotando con $A = [a_{ij}]$ a la matriz $RA^\Upsilon D^\Delta$, y teniendo en cuenta (V.2), (V.3) y el Teorema V.1.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} a_{ij} &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in P(\mathcal{A})} r_{iS} \sum_{T \in P(\mathcal{A})} a_{ST}^\Upsilon d_{Tj}^\Delta \\
&= \sum_{i \in N} \sum_{S \in P(\mathcal{A})} r_{iS} \sum_{T \in A(j)} a_{ST}^\Upsilon \delta_T = \sum_{T \in A(j)} \delta_T \sum_{S \in P(\mathcal{A})} a_{ST}^\Upsilon \sum_{i \in N} r_{iS} \\
&= \sum_{T \in A(j)} \delta_T \sum_{S \in P(\mathcal{A})} a_{ST}^\Upsilon = \sum_{T \in A(j)} \delta_T = 1,
\end{aligned}$$

puesto que, por definición, A^Υ es una matriz estocástica, $\sum_{i\in N} r_{iS} = 1$ y $(\delta_S)_{S\in A(i)}$, para cada $i \in N$, es una distribución de probabilidad sobre la familia $A(i)$. De aquí, se concluye que A es una matriz estocástica.

Para probar que A es esencial para $(N, \mathcal{A})$, bastará tener en cuenta lo siguiente. La matriz A^Υ es esencial para $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y, por tanto, al ser $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ un poset-antimatroide, se tiene que, para cualquier $T \in P(\mathcal{A})$ se verifica que $a^\Upsilon_{ST} = 0$ para toda coalición $S \in P(\mathcal{A})$ que no esté contenida en el único T-camino del antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$. Esto, por definición del antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, significa que $a^\Upsilon_{ST} = 0$ para cualquier coalición $S \in P(\mathcal{A})$ tal que $S \nsubseteq T$. Considérense $i, j \in N$ con $i \notin P^j$. Puesto que $i \notin P^j$, se tiene que i no pertenece a ningún j-camino y, en particular, obsérvese que, para cualquier $S \subseteq T$, siendo $T \in A(j)$, se verifica que $i \notin S$ y, por tanto, $r_{iS} = 0$. De aquí, se obtiene que

$$a_{ij} = \sum_{S\in P(\mathcal{A})} r_{iS} \sum_{T\in A(j)} a^\Upsilon_{ST}\delta_T = \sum_{T\in A(j)} \sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\, S\subseteq T\}} r_{iS} a^\Upsilon_{ST}\delta_T = 0,$$

y con ello que la matriz A es esencial para el antimatroide $(N, \mathcal{A})$. ■

El resultado anterior da lugar a la siguiente definición.

Definición 3.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor directo de localización en $(N, \mathcal{A})$ a un valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$ cuya matriz asociada A^Ψ viene determinada por el producto $RA^\Upsilon D^\Delta$, siendo D^Δ la matriz asociada a una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, A^Υ la matriz asociada a un valor razonable directo Υ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y R la correspondiente matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$.*

En el siguiente ejemplo se detalla cómo determinar la matriz asociada a un valor directo de localización en un antimatroide dado. Además, se podrá observar también que, para un mismo antimatroide, existen valores razonables directos que no son valores directos de localización.

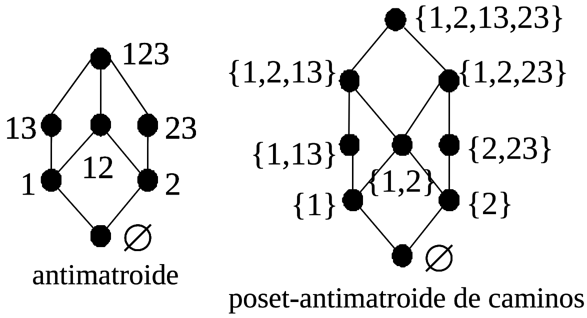

Figura V.2

Ejemplo 3.5. *Sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$A(1) = \{1\}, \qquad A(2) = \{2\}, \qquad A(3) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

representado en la Figura V.2 junto al poset-antimatroide de caminos $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ correspondiente.

Para establecer un valor directo de localización Ψ en $(N, \mathcal{A})$, basta determinar su matriz asociada A^{Ψ}, que viene dada por el producto $RA^{\Upsilon}D^{\Delta}$, siendo D^{Δ} la matriz correspondiente a una determinada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, y recordando que A^{Υ} es la matriz asociada a un valor razonable directo Υ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ y R es la matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$. A continuación, se detallan cómo son cada una de las matrices que intervienen en la obtención de A^{Ψ}.

Eligiendo una distribución de probabilidad sobre $A(i)$, para cada $i \in N$, y tomando la ordenación de los caminos en $(N, \mathcal{A})$ como se detalla, $P(\mathcal{A}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, se obtiene que:

$$\Delta[\mathcal{A}] = \left\{(1, 1, \delta, 1 - \delta) \in \mathbb{R}^4 : \delta \in [0, 1]\right\}.$$

Además, para cada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ en $P(\mathcal{A})$ su matriz asociada, según (V.3), es

$$D^{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 - \delta \end{bmatrix}.$$

Considerando el poset-antimatroide de caminos $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$*, representado también en la Figura V.2, cada valor razonable directo* Υ *en* $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ *tiene asociada una matriz* A^{Υ} *de orden* 4×4*, según el Teorema V.1.3, de la forma*

$$A^{\Upsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix},$$

definida a partir de unos números reales $a, b, c, d \geq 0$*, tales que* $a + b = 1 = c + d$*.*

Por otra parte, usando (V.2), la matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$ *es la matriz de orden* 3×4 *siguiente*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

La definición de los elementos anteriores permite obtener un valor directo de localización Ψ *en* $(N, \mathcal{A})$*, cuya matriz asociada es* $A^{\Psi} = RA^{\Upsilon}D^{\Delta}$*. Por tanto, se verifica que la matriz asociada a cualquier valor directo de localización en* $(N, \mathcal{A})$ *viene dada por*

$$A^{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(a + \frac{1}{2}b\right)\delta \\ 0 & 1 & \left(c + \frac{1}{2}d\right)(1-\delta) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(b\delta + d(1-\delta)\right) \end{bmatrix},$$

donde a, b, c, d *son números reales no negativos tales que* $a + b = 1 = c + d$ *y* $\delta \in [0, 1]$*.*

En el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ *considerado se puede observar también que existen valores razonables directos que no son valores directos de localización. En efecto, si así fuera, la matriz identidad de orden tres, asociada al valor identidad, verificaría las condiciones anteriormente impuestas a la matriz* A^{Ψ}*. Esto es, se cumplirían las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{2}b\right)\delta &= 0, \\ \left(c + \frac{1}{2}d\right)(1-\delta) &= 0, \\ \frac{1}{2}\left(b\delta + d(1-\delta)\right) &= 1, \end{aligned}$$

siendo a, b, c, d *números reales no negativos tales que* $a + b = 1 = c + d$ *y* $\delta \in [0, 1]$*. Sin embargo, basta observar que no existe una familia de distribuciones de probabilidad*

$\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ *que verifique las condiciones anteriores para demostrar que esto es imposible. Así es, si* $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ *es tal que* $\delta > 0$, *entonces la matriz* A^{Ψ} *no podría ser la identidad, pues*

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)\delta = 0 \Leftrightarrow a = b = 0,$$

y entonces, no se verificaría la condición $a + b = 1$, *necesaria para que* A^{Ψ} *represente un valor directo de localización en el antimatroide* $(N, \mathcal{A})$. *En otro caso, si* $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ *es tal que* $\delta = 0$, *sucede que*

$$c + \frac{1}{2}d = 0,$$

con lo que $c = d = 0$, *por lo que, de nuevo es imposible que* A^{Ψ} *sea la identidad, al deber cumplirse que* $c + d = 1$ *para que se trate de la matriz asociada a un valor directo de localización en el antimatroide de partida.*

De las observaciones realizadas en el ejemplo anterior se deduce la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. La familia de valores directos de localización en* $(N, \mathcal{A})$ *está contenida en la familia de valores razonables directos en* $(N, \mathcal{A})$ *y en general, ambas familias no coinciden.*

Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y elegida una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ en $P(\mathcal{A})$, la definición de valor directo de localización conlleva la obtención de distintos valores razonables directos en $(N, \mathcal{A})$, según sea el valor razonable directo considerado en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$. La peculiaridad de conocer que $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ es un poset-antimatroide, cualquiera que sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y la consideración del Teorema V.2.19, hacen que, a continuación, se preste una atención especial a dos valores razonables directos en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$: el valor identidad y el único valor razonable directo que verifica la Propiedad de Grupo Fundamental, que coincide con el valor de Shapley. Así, para el valor identidad $\Upsilon = Id^{\mathcal{P}}$, se obtiene un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$, denominado *valor de situación* en $(N, \mathcal{A})$, cuya matriz asociada A^{Ψ} es $RA^{Id^{\mathcal{P}}}D^{\Delta}$, siendo D^{Δ} la matriz asociada a $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, $A^{Id^{\mathcal{P}}}$ la matriz asociada a $Id^{\mathcal{P}}$ y R la correspondiente matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$. Puesto que, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, se verifica que $\Psi(w) = A^{\Psi}w$ y también se tiene que $RA^{Id^{\mathcal{P}}}D^{\Delta}$ es RD^{Δ} y que $w^{\Delta} = D^{\Delta}w$, la definición de un valor de situación en $(N, \mathcal{A})$ queda como sigue.

Definición 3.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese la familia $P(\mathcal{A})$ formada por todos los caminos del antimatroide. Se denomina valor de situación en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$, tal que $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, con*

$$\Psi_i(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\, :\, i \in S\}} \frac{1}{|S|} w_S^{\Delta}, \text{ para cada } i \in N,$$

siendo $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$.

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, la definición de un valor de situación en $(N, \mathcal{A})$ depende de la familia de distribuciones de probabilidad elegida. Por tanto, se denotará con $V_s[\mathcal{A}]$ a la familia de todos los valores de situación que pueden ser definidos en $(N, \mathcal{A})$.

A continuación se demuestra que los valores directos de situación en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, al igual que los valores de Shapley, igualitario e igualitario de control, son valores razonables directos que verifican la Propiedad de Grupo Fundamental. En particular, si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, según el Teorema V.2.19, existe un único valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$ con la Propiedad de Grupo Fundamental, por lo que se puede afirmar que existe un único valor de situación en $(N, \mathcal{A})$ y éste es el valor de Shapley.

Proposición 3.8. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese un valor de situación Ψ en $(N, \mathcal{A})$. Entonces,*

1. *La matriz $A^{\Psi} = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ asociada a Ψ verifica que, para cada $i, j \in N$,*

$$a_{ij} = \sum_{\{S \in A(j)\, :\, i \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|},$$

siendo $\Delta = \left\{ (\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N \right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$.

2. *El valor de situación Ψ verifica la Propiedad de Grupo Fundamental.*

Demostración. Sea Ψ un valor de situación en el antimatroide $(N, \mathcal{A})$. A partir de una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{ (\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N \right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$, se obtiene, para cada $i \in N$, que

$$\begin{aligned} \Psi_i(w) &= \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\, :\, i \in S\}} \frac{1}{|S|} w_S^{\Delta} = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\, :\, i \in S\}} \frac{1}{|S|} \sum_{\{j \in N\, :\, S \in A(j)\}} \delta_S w_j \\ &= \sum_{\{j \in N\, :\, i \in P^j\}} \left[\sum_{\{S \in A(j)\, :\, i \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|} \right] w_j. \end{aligned}$$

De aquí, puesto que $\Psi(w) = A^{\Psi}w$, se sigue que los términos de la matriz asociada a Ψ, para cada $i, j \in N$, son
$$a_{ij} = \sum_{\{S \in A(j)\,:\, i \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|}.$$

Para demostrar que Ψ verifica la Propiedad de Grupo Fundamental, considérense $k, i, j \in N$, tales que $k \in N$, $i \in P_k$ y $j \in P^k$. Puesto que, por hipótesis, el jugador i pertenece a todos los k-caminos de $(N, \mathcal{A})$, en particular, todos los k-caminos que contienen a j, contienen también al jugador i. Esto es,

$$\{S \in A(k) : j \in S\} \subseteq \{S \in A(k) : i \in S\}.$$

De aquí, la desigualdad

$$\sum_{\{S \in A(k)\,:\, j \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|} \leq \sum_{\{S \in A(k)\,:\, i \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|},$$

y, por tanto, si $A^{\Psi} = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ es la matriz asociada a Ψ, se obtiene que $a_{jk} \leq a_{ik}$ o, equivalentemente, que $\Psi_j\left(e^k\right) \leq \Psi_i\left(e^k\right)$. ■

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la familia de valores de situación en un antimatroide está estrictamente contenida en la familia de valores razonables directos en el mismo antimatroide que verifican la Propiedad de Grupo Fundamental.

Ejemplo 3.9. *Sea $(N, \mathcal{A})$ el antimatroide considerado en el Ejemplo V.3.5, cuyo diagrama de Hasse se representa en la Figura V.2. Eligiendo una distribución de probabilidad sobre $A(i)$, para cada $i \in N$, y el orden $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ de los caminos en $(N, \mathcal{A})$, se obtiene que*
$$\Delta[\mathcal{A}] = \left\{(1, 1, \delta, 1-\delta) \in \mathbb{R}^4 : \delta \in [0,1]\right\},$$
donde,

$$\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = 1, \qquad \delta_{\{1,3\}} = \delta \qquad y \qquad \delta_{\{2,3\}} = 1-\delta, \qquad \text{para un } \delta \in [0,1].$$

Según la proposición anterior, cualquier valor de situación Ψ en $(N, \mathcal{A})$ tiene una matriz asociada $A^{\Psi} = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ tal que, para cada $i, j \in N$,

$$a_{ij} = \sum_{\{S \in A(j)\,:\, i \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|}.$$

En particular, se tiene que

$$a_{33} = \sum_{\{S \in A(3)\,:\,3 \in S\}} \frac{\delta_S}{|S|} = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(1-\delta) = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, es conocido, según se observó en la primera sección de este capítulo, que el valor igualitario $Eg^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ también verifica la Propiedad de Grupo Fundamental; sin embargo, su matriz asociada $A^{Eg^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{Eg^{\mathcal{A}}}\right]$ no coincide con la de ningún valor de situación en el antimatroide considerado. En efecto, aplicando la Definición V.1.7,

$$A^{Eg^{\mathcal{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

de donde se observa que

$$a_{33} \neq a_{33}^{Eg^{\mathcal{A}}}.$$

Otra forma diferente de obtener valores directos de localización en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ es considerar el valor de Shapley en el poset-antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$. En este caso, los valores directos de localización generados se denominan *valores de posición.* Así, la matriz asociada a un valor de posición $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$ viene determinada por el producto $RA^{Sh^{\mathcal{P}}} D^{\Delta}$, siendo D^{Δ} la matriz asociada a una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, $A^{Sh^{\mathcal{P}}}$ la matriz asociada al valor razonable directo $Sh^{\mathcal{P}}$ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, y R la correspondiente matriz de reparto en $P(\mathcal{A})$. Puesto que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que $\Psi(w) = A^{\Psi} w$ y también se tiene que $w^{\Delta} = D^{\Delta} w$, un valor de posición en $(N, \mathcal{A})$ se define de la siguiente forma.

Definición 3.10. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese la familia $P(\mathcal{A})$ formada por todos los caminos del antimatroide. Se denomina valor de posición en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable directo $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$, tal que $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, con*

$$\Psi_i(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\,:\,i \in S\}} \frac{1}{|S|} Sh_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right), \text{ para cada } i \in N,$$

siendo $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$.

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, la definición de un valor de posición en $(N, \mathcal{A})$ depende de la familia de distribuciones de probabilidad elegida. Por tanto, se denotará con $V_p[\mathcal{A}]$

a la familia de todos los valores de posición que pueden ser definidos en $(N, \mathcal{A})$. Además, considerada la familia $P(\mathcal{A})$ formada por todos los caminos de $(N, \mathcal{A})$, en lo que sigue, dados $S, T \in P(\mathcal{A})$ tales que $T \subseteq S$, se denotará con $[T, S]_P$ al conjunto

$$[T, S]_P := \{R \in P(\mathcal{A}) : T \subseteq R \subseteq S\}.$$

Proposición 3.11. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese un valor de posición Ψ en $(N, \mathcal{A})$ generado a partir de una familia $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$. La matriz $A^\Psi = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ asociada a Ψ, es tal que, para cada $i, j \in N$,*

$$a_{ij} = \sum_{\{T \in A(j)\,:\, i \in T\}} \left[\frac{\delta_T}{|[\emptyset, T]_P|} \sum_{S \in \bigcup_{R \in A(i)} [R,T]_P} \frac{1}{|S|}\right].$$

Demostración. Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérense una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ y el valor de posición Ψ en $(N, \mathcal{A})$ generado a partir de ésta. Puesto que $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ es un poset-antimatroide, al aplicar el Teorema IV.1.11, se verifica, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, que el valor de Shapley en $\left(P(\mathcal{A}), w^\Delta_{\mathcal{P}}\right)$, para cada $S \in P(\mathcal{A})$, es

$$Sh^{\mathcal{P}}_S\left(w^\Delta\right) = \sum_{\{T \in P(\mathcal{A})\,:\, S \subseteq T\}} \frac{1}{|[\emptyset, T]_P|} w^\Delta_T.$$

Entonces, si $i \in S$,

$$\begin{aligned}
\Psi_i(w) &= \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\,:\, i \in S\}} \frac{1}{|S|} Sh^{\mathcal{P}}_S\left(w^\Delta\right) \\
&= \sum_{\{S \in P(\mathcal{A})\,:\, i \in S\}} \frac{1}{|S|} \sum_{\{T \in P(\mathcal{A})\,:\, S \subseteq T\}} \frac{1}{|[\emptyset, T]_P|} w^\Delta_T \\
&= \sum_{\{T \in P(\mathcal{A})\,:\, i \in T\}} \left[\frac{1}{|[\emptyset, T]_P|} \sum_{S \in \bigcup_{R \in A(i)} [R,T]_P} \frac{1}{|S|}\right] w^\Delta_T \\
&= \sum_{\{j \in N\,:\, i \in P^j\}} \left[\sum_{\{T \in A(j)\,:\, i \in T\}} \left[\frac{\delta_T}{|[\emptyset, T]_P|} \sum_{S \in \bigcup_{R \in A(i)} [R,T]_P} \frac{1}{|S|}\right]\right] w_j.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que la matriz $A^\Psi = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ asociada al valor de posición Ψ viene dada, para cada par $i, j \in N$, por la expresión del enunciado. ∎

En el siguiente ejemplo, como aplicación de la proposición anterior, se calcula la matriz asociada a un valor de posición en un antimatroide concreto. Además, en el mismo ejemplo se constata que los valores de posición, en general, no verifican la Propiedad de Grupo Fundamental. Recordando que todos los valores de situación sí verifican tal propiedad, la observación anterior permite deducir que, dado un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, las subfamilias de valores razonables directos $V_s[\mathcal{A}]$ y $V_p[\mathcal{A}]$ no son idénticas. Sin embargo, si $(N,\mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, existe un único valor razonable directo en $(N,\mathcal{A})$ con la Propiedad de Grupo Fundamental, por lo que, en este caso, si existe un valor de posición que verifica la Propiedad de Grupo Fundamental, éste es el valor de Shapley.

Ejemplo 3.12. *Sea, de nuevo, el antimatroide $(N,\mathcal{A})$ considerado en el Ejemplo V.3.5, cuyo diagrama de Hasse se representa en la Figura V.2. Una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$ verifica que*

$$\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = 1, \qquad \delta_{\{1,3\}} = \delta \qquad y \qquad \delta_{\{2,3\}} = 1-\delta, \qquad \textit{siendo } \delta \in [0,1]\,.$$

Por tanto, puesto que $A(3) = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$, para $j=3$ se verifica que

$$|[\emptyset,\{1,3\}]_P| = |[\emptyset,\{2,3\}]_P| = 2.$$

Además, $\{T \in A(3) : 1 \in T\} = \{\{1,3\}\}$, y para $T = \{1,3\}$,

$$\sum_{S \in \bigcup_{R\in A(1)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \sum_{S\in[\{1\},T]_P} \frac{1}{|S|} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Luego,

$$a_{13} = \frac{\delta_T}{|[\emptyset,T]_P|} \sum_{S \in \bigcup_{R\in A(1)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\delta.$$

De igual modo, $\{T \in A(3) : 2 \in T\} = \{\{2,3\}\}$, y para $T = \{2,3\}$,

$$\sum_{S \in \bigcup_{R\in A(2)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \sum_{S\in[\{2\},T]_P} \frac{1}{|S|} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$a_{23} = \frac{\delta_T}{|[\emptyset,T]_P|} \sum_{S \in \bigcup_{R\in A(2)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \frac{1-\delta}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(1-\delta)\,.$$

Finalmente, $\{T \in A(3) : 3 \in T\} = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$*, y entonces,*

$$\begin{aligned} \text{Para } T &= \{1,3\}\text{, se verifica que } \bigcup_{R\in A(3)} [R,T]_P = \{\{1,3\}\}, \text{ y } \sum_{S\in\bigcup_{R\in A(3)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}. \\ \text{Para } T &= \{2,3\}\text{, se verifica que } \bigcup_{R\in A(3)} [R,T]_P = \{\{2,3\}\}, \text{ y } \sum_{S\in\bigcup_{R\in A(3)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$a_{33} = \sum_{\{T\in A(3)\,:\,3\in T\}} \left[\frac{\delta_T}{|[\emptyset,T]_P|} \sum_{S\in\bigcup_{R\in A(3)}[R,T]_P} \frac{1}{|S|} \right] = \frac{\delta}{2}\frac{1}{2} + \frac{1-\delta}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Así, la matriz $A^{\Psi} = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ *asociada a un valor de posición* Ψ *en el antimatroide considerado es*

$$A^{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4}\delta \\ 0 & 1 & \frac{3}{4}(1-\delta) \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

para algún valor $\delta \in [0,1]$.

Obsérvese que ningún valor de posición Ψ *en el antimatroide* $(N,\mathcal{A})$*, verifica la Propiedad de Grupo Fundamental. En efecto, si* $k = 3$*, se tiene que* $P_3 = \{3\}$ *y* $P^3 = N$*. Si la matriz* $A^{\Psi} = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ *asociada a* Ψ *verificara tal propiedad, tendría que suceder que* $a_{j3} \leq a_{33}$*, para cada* $j \in N$*. Sin embargo, esto no sucede así, pues*

$$\begin{aligned} a_{13} &\leq a_{33} \Longleftrightarrow \frac{3}{4}\delta \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \delta \leq \frac{1}{3}; \\ a_{23} &\leq a_{33} \Longleftrightarrow \frac{3}{4}(1-\delta) \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \delta \geq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

y es imposible encontrar un valor δ *que verifique ambas desigualdades,* $\delta \leq \frac{1}{3}$ *y* $\delta \geq \frac{2}{3}$*, simultáneamente.*

La forma en que han sido originados, no garantiza que los valores directos de localización en un antimatroide constituyan, por sí mismos, un poliedro convexo. Sin embargo, el estudio en la sección anterior, de los valores identidad y de Shapley, así como las definiciones de los valores de situación y posición, permitirán que así sea en estos casos particulares. Para ello, será fundamental considerar la siguiente definición, que permitirá identificar la familia $\{D^{\Delta} : \Delta \in \Delta[\mathcal{A}]\}$ con un poliedro convexo.

Definición 3.13. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. Se denomina selector de caminos en* $(N, \mathcal{A})$ *a una aplicación* $\eta : N \to P(\mathcal{A})$ *que asigna, a cada elemento* $i \in N$*, un único conjunto* $S \in P(\mathcal{A})$ *tal que* S *es un* i*-camino en* $(N, \mathcal{A})$*.*

De la definición se deduce que, cada selector de caminos en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ asigna, a cada jugador, uno y sólo uno de los caminos que lo tienen como punto final; y, además, cada coalición de la familia de caminos del antimatroide sólo puede ser asignada al jugador que es su punto final. Teniendo en cuenta estas consideraciones, y dado que cada jugador $i \in N$ posee, en general, más de un i-camino, la familia de selectores de caminos que pueden definirse en $(N, \mathcal{A})$ se denotará con $\eta[\mathcal{A}]$. Además, cada selector de caminos $\eta \in \eta[\mathcal{A}]$ tiene asociada una única matriz $M^\eta = (m^\eta_{Si})$ de orden $|P(\mathcal{A})| \times |N|$ cuyos términos, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$, son

$$m^\eta_{Si} := \begin{cases} 1, & \text{si } \eta(i) = S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{V.4}$$

A continuación se demuestra que, la familia de matrices asociadas al conjunto de distribuciones $\Delta[\mathcal{A}]$ coincide con la envolvente convexa de las matrices asociadas a la familia $\eta[\mathcal{A}]$ de selectores de caminos en el antimatroide.

Teorema 3.14. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. Se verifica que*

$$\left\{D^\Delta : \Delta \in \Delta[\mathcal{A}]\right\} = conv\left\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\right\}.$$

Demostración. Dado el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, considérese una matriz D perteneciente al conjunto $conv\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}$. Siendo así, existe una familia $(\lambda_\eta)_{\eta \in \eta[\mathcal{A}]}$ de números reales, con $\lambda_\eta \geq 0$ y $\sum_{\eta \in \eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta = 1$, tales que

$$D = \sum_{\eta \in \eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta M^\eta.$$

Entonces, por la igualdad (V.4), si $D = [d_{Si}]_{|P(\mathcal{A})| \times |N|}$, se verifica, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$, que

$$d_{Si} = \begin{cases} \sum\limits_{\{\eta \in \eta[\mathcal{A}] \,:\, \eta(i) = S\}} \lambda_\eta, & \text{si } \eta(i) = S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denotando con δ_S al número $\sum\limits_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\,:\,\eta(i)=S\}} \lambda_\eta$ para cada $i \in N$ tal que $\eta(i) = S$, se observa trivialmente que $\delta_S \geq 0$ y que $S \in A(i)$. También se tiene que $\sum\limits_{S\in A(i)} \delta_S = 1$, para cada $i \in N$. En efecto, si $i \in N$ se cumple que

$$\sum_{S\in A(i)} \delta_S = \sum_{S\in A(i)} \sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\,:\,\eta(i)=S\}} \lambda_\eta = \sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta = 1.$$

Queda así probado que, para cada $i \in N$, la familia de números reales $(\delta_S)_{S\in A(i)}$ es una distribución de probabilidad sobre $A(i)$ y entonces, se verifica que la matriz D pertenece a la familia de matrices asociadas al conjunto de distribuciones $\Delta[\mathcal{A}]$. Esto es, se obtiene que

$$conv\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\} \subseteq \left\{D^\Delta : \Delta \in \Delta[\mathcal{A}]\right\}.$$

Para completar la demostración del teorema, se considera una matriz $D^\Delta = [d_{Si}]$, con $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S\in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ y se procede expresando esta matriz como una combinación lineal convexa de matrices del conjunto $\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}$. Con tal fin, para cada selector de caminos $\eta \in \eta[\mathcal{A}]$, se elige el número real

$$\lambda_\eta := \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)},$$

donde

$$\delta_{\eta(j)} := \begin{cases} \delta_S, & \text{si } \eta(j) = S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y se observa que $\lambda_\eta \geq 0$, para cada $\eta \in \eta[\mathcal{A}]$. Además, recordando que cada selector de caminos asigna a cada jugador una única coalición $S \in P(\mathcal{A})$ y que cualquier coalición $S \in P(\mathcal{A})$ sólo puede ser asignada al único jugador que es extremo suyo, se demuestra que $\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta = 1$. En efecto, si $|N| = n$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta &= \sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)} = \sum_{S_1\in A(1)} \left[\sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(1)=S_1}} \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)} \right] = \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(1)=S_1}} \prod_{j\in N\setminus\{1\}} \delta_{\eta(j)} \right] \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(1)=S_1,\eta(2)=S_2}} \prod_{j\in N\setminus\{1,2\}} \delta_{\eta(j)} \right]\right] = \cdots \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \cdots \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \cdots \sum_{S_{n-1}\in A(n-1)} \left[\delta_{S_{n-1}} \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(1)=S_1,\eta(2)=S_2,\cdots,\eta(n-1)=S_{n-1}}} \prod_{j\in N\setminus\{1,2,\ldots,n-1\}} \delta_{\eta(j)} \right]\right]\right] \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \cdots \sum_{S_{n-1}\in A(n-1)} \left[\delta_{S_{n-1}} \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(1)=S_1,\eta(2)=S_2,\cdots,\eta(n-1)=S_{n-1}}} \delta_{\eta(n)} \right]\right]\right] \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \cdots \sum_{S_{n-1}\in A(n-1)} \left[\delta_{S_{n-1}} \sum_{S_n\in A(n)} \delta_{S_n} \right]\right]\right],
\end{aligned}$$

puesto que, seleccionado un camino para $n-1$ jugadores, los selectores de caminos quedan determinados por la elección del jugador al que aún no le ha sido asignado uno de sus caminos. Ahora bien, puesto que $\left(\delta_{S_j}\right)_{S_j\in A(j)}$, para cada $j \in N$, es una distribución de probabilidad sobre la familia de j-caminos en $(N, \mathcal{A})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta &= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \cdots \sum_{S_{n-1}\in A(n-1)} \left[\delta_{S_{n-1}} \sum_{S_n\in A(n)} \delta_{S_n} \right]\right]\right] \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \left[\delta_{S_2} \cdots \sum_{S_{n-1}\in A(n-1)} \delta_{S_{n-1}} \right]\right] = \cdots \\
&= \sum_{S_1\in A(1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{S_2\in A(2)} \delta_{S_2} \right] = \sum_{S_1\in A(1)} \delta_{S_1} = 1.
\end{aligned}$$

Una vez probado que $\sum\limits_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta = 1$, siendo $\lambda_\eta := \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)} \geq 0$, se finaliza la prueba expresando la matriz $D^\Delta = [d_{Si}]$ como una combinación lineal convexa de matrices del conjunto $\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}$ en la que los coeficientes que intervienen son precisamente los valores $\{\lambda_\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}$. Se considera $D = [d_{Si}]_{|P(\mathcal{A})|\times|N|} \in conv\,\{M^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}$ tal que, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$ con $\eta(i) = S$, usando (V.4),

$$d_{Si} = \sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(i)=S\}} \lambda_\eta,$$

siendo

$$\lambda_\eta := \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)}, \text{ donde } \delta_{\eta(j)} := \begin{cases} \delta_S, & \text{si } \eta(j) = S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se demuestra que cada término de la matriz D, así definida, coincide con su término homólogo en la matriz D^Δ. Así es, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$ con $\eta(i) = S$, se tiene que

$$d_{Si} = \sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(i)=S\}} \lambda_\eta = \sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(i)=S\}} \prod_{j\in N} \delta_{\eta(j)} = \delta_S \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(i)=S}} \prod_{j\in N\setminus\{i\}} \delta_{\eta(j)},$$

por lo que, procediendo con un argumento análogo al seguido en la demostración de $\sum\limits_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} \lambda_\eta = 1$ y después de suponer que $N \setminus \{i\} = \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$, se sigue que

$$\begin{aligned} d_{Si} &= \delta_S \sum_{S_1\in A(j_1)} \left[\delta_{S_1} \sum_{\substack{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\\ \eta(i)=S,\eta(j_1)=S_1}} \prod_{j\in N\setminus\{i,j_1\}} \delta_{\eta(j)} \right] \\ &= \delta_S \sum_{S_1\in A(j_1)} \left[\delta_{S_1} \cdots \sum_{S_{n-2}\in A(j_{n-2})} \left[\delta_{S_{n-2}} \sum_{S_{n-1}\in A(j_{n-1})} \delta_{S_{n-1}} \right]\right] \\ &= \delta_S = d^\Delta_{Si}. \end{aligned}$$

Y, en otro caso, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$ con $\eta(i) \neq S$, es inmediato observar que $d_{Si} = 0 = d^\Delta_{Si}$. ■

Como consecuencia del teorema anterior, y considerando la definición de valor de situación en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se deduce que la familia de valores de situación también se puede expresar como un poliedro convexo determinado a partir de sus puntos extremos.

Teorema 3.15. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que*

$$V_s[\mathcal{A}] = conv\{RM^\eta : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}.$$

Este teorema induce a generar los valores de situación en un antimatroide $(N,\mathcal{A})$ realizando combinaciones lineales convexas de los selectores de camino en $(N,\mathcal{A})$ y repartiendo equitativamente el beneficio obtenido por cada camino entre los jugadores que pertenecen a él. Entre las muchas posibilidades de generar valores de situación de esta forma, cabe destacar la que origina el reparto más generoso procedente de un valor de situación, que consiste en tomar una combinación lineal convexa de todos los posibles selectores de camino que pueden establecerse en el antimatroide, para después hacer un primer reparto que sea equitativo entre todos los caminos seleccionados por un mismo jugador, y posteriormente, un segundo reparto, también equitativo, entre los jugadores que pertenecen al mismo camino. Así, puesto que la cantidad de selectores de camino $|\eta[\mathcal{A}]|$ que es posible definir en $(N,\mathcal{A})$ es $\prod_{k\in N}|A(k)|$, la matriz asociada al valor de situación generado de esta forma, considerando el teorema anterior, sería

$$A = \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} RM^\eta.$$

Ahora bien, sean $i,j \in N$. El término $(RM^\eta)_{ij}$ de la matriz RM^η, según (V.2) y (V.4), verifica que, si $i \in \eta(j)$,

$$(RM^\eta)_{ij} = \sum_{S\in P(\mathcal{A})} r_{iS} m^\eta_{Sj} = \sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\}} \frac{1}{|S|} m^\eta_{Sj} = \frac{1}{|\eta(j)|},$$

puesto que $m^\eta_{Sj} = 1$ si $S = \eta(j)$ y $m^\eta_{Sj} = 0$ si $S \neq \eta(j)$. En otro caso, si $i \notin \eta(j)$, por definición de las matrices M^η y R, se tiene que $(RM^\eta)_{ij} = 0$.

De aquí, la matriz $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ verifica que, si $i \in \eta(j)$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\,:\,i\in\eta(j)\}} \frac{1}{|\eta(j)|} \\ &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{S\in A(j)\,:\,i\in S\}} \frac{|\{\eta\in\eta[\mathcal{A}] : \eta(j) = S\}|}{|S|} \\ &= \frac{1}{|A(j)|}\sum_{\{S\in A(j)\,:\,i\in S\}} \frac{1}{|S|}, \end{aligned}$$

puesto que para camino $S \in A(j)$, se tiene que

$$\left|\{\eta \in \eta[\mathcal{A}] : \eta(j) = S\}\right| = \prod_{k \in N \setminus \{j\}} |A(k)|.$$

En otro caso, si $i \notin \eta(j)$, se verifica que $a_{ij} = 0$. Por tanto,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|A(j)|} \sum_{\{S \in A(j) \,:\, i \in S\}} \frac{1}{|S|}, & \text{si } i \in P^j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz obtenida es la matriz asociada a un valor de situación que es denominado *valor directo de situación central*. En realidad, este valor de situación es aquél que determina la familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(j)} : j \in N\right\}$ tal que, para cada $j \in N$ y $S \in A(j)$,

$$\delta_S = \frac{1}{|A(j)|}.$$

Definición 3.16. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor directo de situación central en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable directo $Sc^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ definido en $(N, \mathcal{A})$, tal que $Sc^{\mathcal{A}}(w) = \left(Sc_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, siendo*

$$Sc_i^{\mathcal{A}}(w) = \sum_{\{j \in N \,:\, i \in P^j\}} \left[\frac{1}{|A(j)|} \sum_{\{S \in A(j) \,:\, i \in S\}} \frac{1}{|S|}\right] w_j.$$

Asímismo, se denomina matriz asociada al valor directo de situación central en $(N, \mathcal{A})$, y se denota con $A^{Sc^{\mathcal{A}}}$, a la única matriz estocástica y esencial de orden $|N| \times |N|$ que verifica $Sc^{\mathcal{A}}(w) = A^{Sc^{\mathcal{A}}} w$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. Es decir, la matriz $A^{Sc^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{Sc^{\mathcal{A}}}\right]_{|N| \times |N|}$ es tal que

$$a_{ij}^{Sc^{\mathcal{A}}} := \begin{cases} \frac{1}{|A(j)|} \sum_{\{S \in A(j) \,:\, i \in S\}} \frac{1}{|S|}, & \textit{si } i \in P^j \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

El argumento que precede a la definición anterior permite afirmar el siguiente resultado.

Teorema 3.17. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El valor directo de situación central $Sc^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ es el centro del conjunto convexo $V_s[\mathcal{A}]$ que constituye la familia de valores de situación en $(N, \mathcal{A})$.*

Teniendo en cuenta la definición de valor de posición y siguiendo un proceso análogo al considerado en la demostración del Teorema V.3.15, también se consigue identificar la familia de valores de posición en un antimatroide $(N,\mathcal{A})$ con la envoltura convexa de un conjunto de matrices asociadas a los selectores de caminos en el antimatroide.

Teorema 3.18. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que*

$$V_p[\mathcal{A}] = conv\left\{RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta} : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\right\}.$$

Este resultado permite obtener valores de posición a partir de diferentes combinaciones convexas de los selectores de caminos en $(N,\mathcal{A})$. En particular, el centro del convexo anterior será la matriz $A = [a_{ij}]$ asociada a un determinado valor de posición que será denominado *valor de posición central*. Así, la matriz $A = [a_{ij}]$ es tal que

$$A = \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]} RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta},$$

puesto que la cantidad de selectores de camino $|\eta[\mathcal{A}]|$ que es posible definir en $(N,\mathcal{A})$ es $\prod_{k\in N}|A(k)|$. Por tanto, considerados $i,j\in N$ y, usando (V.2) y (V.4), se verifica que si $i\in\eta(j)$, el término $\left(RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta}\right)_{ij}$ de la matriz $RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta}$ verifica que

$$\begin{aligned}\left(RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta}\right)_{ij} &= \sum_{S\in P(\mathcal{A})} r_{iS}\sum_{\{T\in P(\mathcal{A})\,:\,S\subseteq T\}} a^{Sh}_{ST}m^{\eta}_{Tj}\\ &= \sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\}}\frac{1}{|S|}\sum_{\{T\in P(\mathcal{A})\,:\,S\subseteq T\}} a^{Sh}_{ST}m^{\eta}_{Tj}\\ &= \frac{1}{|[\emptyset,\eta(j)]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|},\end{aligned}$$

puesto que $a^{Sh}_{ST} = \frac{1}{|[\emptyset,\eta(j)]|}$, al ser $(P(\mathcal{A}),\mathcal{P})$ un poset-antimatroide, y suceder que $m^{\eta}_{Tj} = 1$ sólo si $T = \eta(j)$ y $m^{\eta}_{Tj} = 0$ cuando $T \neq \eta(j)$. En otro caso, si $i \notin \eta(j)$, se obtiene que

$\left(RA^{Sh^{\mathcal{P}}}M^{\eta}\right)_{ij} = 0$. De aquí que, la matriz $A = [a_{ij}]_{|N|\times|N|}$ verifica que, si $i \in \eta(j)$,

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\,:\,i\in\eta(j)\}}\frac{1}{|[\emptyset,\eta(j)]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|}\\
&= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{T\in A(j)\,:\,i\in T\}}\sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]\,:\,\eta(j)=T\}}\frac{1}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|}\\
&= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{T\in A(j)\,:\,i\in T\}}\frac{|\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(j)=T\}|}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|}\\
&= \frac{1}{|A(j)|}\sum_{\{T\in A(j)\,:\,i\in T\}}\frac{1}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A})\,:\,i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|},
\end{aligned}$$

puesto que para cada j-camino T, se tiene que

$$|\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(j)=T\}| = \prod_{k\in N\setminus\{j\}}|A(k)|.$$

En otro caso, si $i \notin \eta(j)$, se verifica que $a_{ij} = 0$. Por tanto,

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{|A(j)|}\displaystyle\sum_{\{T\in A(j):i\in T\}}\frac{1}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A}):i\in S\subseteq\eta(j)\}}\frac{1}{|S|}, & \text{si } i\in P^j\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

En definitiva, la exposición anterior origina la siguiente definición y el teorema posterior.

Definición 3.19. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Se denomina valor de posición central en $(N,\mathcal{A})$ al valor razonable directo $Pc^{\mathcal{A}}:\mathbb{R}_+^N\to\mathbb{R}^N$ en $(N,\mathcal{A})$, con $Pc^{\mathcal{A}}(w) = \left(Pc_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N}$ para cada $w\in\mathbb{R}_+^N$, siendo*

$$Pc_i^{\mathcal{A}}(w) := \sum_{\{j\in N\,:\,i\in P^j\}}\left[\frac{1}{|A(j)|}\sum_{\{T\in A(j)\,:\,i\in T\}}\left[\frac{1}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{S\in\bigcup_{R\in A(i)}[R,T]_P}\frac{1}{|S|}\right]\right]w_j.$$

Asímismo, se denomina matriz asociada al valor de posición central en $(N,\mathcal{A})$, y se denota con $A^{Pc^{\mathcal{A}}}$, a la única matriz estocástica y esencial que verifica $Pc^{\mathcal{A}}(w) = A^{Pc^{\mathcal{A}}}w$ para cada $w\in\mathbb{R}_+^N$. Es decir, la matriz $A^{Pc^{\mathcal{A}}} = \left[a_{ij}^{Pc^{\mathcal{A}}}\right]_{|N|\times|N|}$ es tal que

$$a_{ij}^{Pc^{\mathcal{A}}} := \frac{1}{|A(j)|}\sum_{\{T\in A(j)\,:\,i\in T\}}\left[\frac{1}{|[\emptyset,T]_P|}\sum_{S\in\bigcup_{R\in A(i)}[R,T]_P}\frac{1}{|S|}\right].$$

Teorema 3.20. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. El valor de posición central $Pc^{\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ es el centro del conjunto convexo $V_p[\mathcal{A}]$ que constituye la familia de valores de posición en $(N, \mathcal{A})$.*

Para finalizar la sección, se calculan, a continuación, los valores directos de situación central y de posición central que generan vectores de pago en un juego de Mercado con Información (Ejemplo II.1.14). Recuérdese que tras la Proposición 2.16 del capítulo actual ya se formuló el valor de Shapley para estos juegos y se expuso el valor igualitario y el valor igualitario de control de los mismos.

Ejemplo 3.21. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego de Mercado con Información como los descritos en el Ejemplo II.1.14, y cuya coalición de jugadores informados es $I \subseteq N$, con $|I| \geq 2$. Puesto que este tipo de juegos es modelado por un antimatroide de los considerados en el Ejemplo I.3.15, los jugadores informados son los átomos del antimatroide y sucede que $a(\mathcal{A}) = I$. Además, si $i \in N \setminus I$ es un jugador no informado, se verifica que los i-caminos son las distintas coaliciones de dos jugadores que pueden formarse con el jugador i y cualquier otro jugador que sí esté informado. Esto es,*

$$A(i) = \begin{cases} \{\{i\}\}, & si\ i \in I \\ \{\{i,j\} : j \in I\}, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Por tanto,

$$|A(i)| = \begin{cases} 1, & si\ i \in I \\ |I|, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así, si $i \in I$, se verifica que

$$\left\{j \in N : i \in P^j\right\} = \{i\} \cup (N \setminus I),$$

por lo que, teniendo en cuenta la Definición V.3.16, se obtiene que

$$Sc_i^{\mathcal{A}}(w) = w_i + \sum_{j \in N \setminus I} \frac{1}{2|I|} w_j = w_i + \frac{1}{2|I|} w(N \setminus I).$$

En otro caso, si $i \notin I$, se tiene que

$$\left\{j \in N : i \in P^j\right\} = \{i\}$$

y entonces,

$$Sc_i^{\mathcal{A}}(w) = \left[\frac{1}{|I|} \sum_{j \in I} \frac{1}{2}\right] w_i = \frac{1}{2} w_i.$$

Con lo que, se obtiene que el valor directo de situación central $Sc^{\mathcal{A}}(w) = \left(Sc^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$ *en* $(N, \mathcal{A})$ *viene dado, para cada* $i \in N$*, por*

$$Sc_i^{\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{1}{2|I|} w(N \setminus I), & \text{si } i \in I \\ \dfrac{1}{2} w_i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Atendiendo a la Definición V.3.19, se determina a continuación el valor de posición central en $(N, \mathcal{A})$*. Puesto que cualquier camino del antimatroide con cardinal dos contiene estrictamente a uno y sólo un camino, que es de cardinal uno, si* $i \in I$*, se verifica que,*

$$Pc_i^{\mathcal{A}}(w) = w_i + \sum_{j \in N \setminus I} \left[\frac{1}{|I|} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right] w_j = w_i + \frac{3}{4|I|} w(N \setminus I).$$

En otro caso, si $i \notin I$*, se tiene que*

$$Pc_i^{\mathcal{A}}(w) = \left[\frac{1}{|I|} \sum_{j \in I} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right] w_i = \frac{1}{4} w_i.$$

por lo que el valor de posición central $Pc^{\mathcal{A}}(w) = \left(Pc_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$ *en* $(N, \mathcal{A})$ *viene dado, para cada* $i \in N$*, por*

$$Pc_i^{\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{3}{4|I|} w(N \setminus I), & \text{si } i \in I \\ \dfrac{1}{4} w_i, & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$

Obsérvese que, en este juego, todos los valores formulados expresamente a lo largo del capítulo son diferentes, pues recuérdese que, para cada $i \in N$*,*

$$\begin{aligned} Sh_i^{\mathcal{A}}(w) &= \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N \setminus I)}{(|I|+1)|I|}, & \text{si } i \in I \\ \dfrac{|I|}{|I|+1} w_i, & \text{si } i \notin I. \end{cases} \\ \widetilde{Eg}_i^{\mathcal{A}}(w) &= w_i. \\ Eg_i^{\mathcal{A}}(w) &= \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N \setminus I)}{|I|+1}, & \text{si } i \in I \\ \dfrac{1}{|I|+1} w_i, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Capítulo VI

Valores indirectos

La consideración del conjunto de estimaciones razonables individuales para cada jugador en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y la posterior elección de sólo aquellas estimaciones que determinan repartos eficientes en la gran coalición llevaron a la definición de valor razonable directo en el antimatroide. Con ello, se alcanzaba el objetivo de encontrar soluciones satisfactorias para la familia de juegos interior. En este capítulo, se pretende el mismo fin, pero considerando, inicialmente, estimaciones razonables individuales en $(N, \mathcal{A})$ tales que el pago esperado por los jugadores sea una cota superior para el core del juego interior constituido. A partir de estas estimaciones, se definen, mediante un razonado proceso, unas aplicaciones denominadas valores razonables indirectos en $(N, \mathcal{A})$ que generan valores en cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para $w \in \mathbb{R}_+^N$, y que constituyen un compromiso por parte de todos los jugadores para el reparto real de la cantidad disponible. Entre estos valores destaca, por su tradicional importancia en juegos cooperativos, el valor de Tijs, al que se dedicó la segunda sección del Capítulo IV.

Después, fijado un antimatroide y utilizando los resultados obtenidos en el capítulo anterior, en la segunda sección se obtendrán valores razonables indirectos siguiendo un método similar al desarrollado en la obtención de valores directos de localización, y a los que se convendrá en denominar valores indirectos de localización.

1. Valores razonables indirectos

La finalidad fundamental en un juego cooperativo de beneficios es distribuir exactamente el valor de la gran coalición entre todos los jugadores, de forma que haya un buen entendimiento entre éstos. En la familia de juegos donde se conoce, a través de un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, las coaliciones verdaderamente interesantes para todos los individuos, este objetivo se alcanza mediante la definición de un valor razonable directo en $(N, \mathcal{A})$. Sin embargo, existen estimaciones razonables individuales interesantes para los jugadores que no son consideradas por ningún valor razonable directo, al no generar un vector de pago eficiente en cualquier juego de la familia $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$. Éste es el motivo por el que se consideran, a continuación, algunas de esas otras estimaciones razonables individuales, concretamente aquéllas que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, aseguran a cada jugador al menos el beneficio que éste obtendría a través de cualquier vector del core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$. A partir de las estimaciones razonables individuales con esta propiedad, se define una aplicación denominada *estimación superior razonable* en $(N, \mathcal{A})$, que genera, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, una cota superior del core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, y esta aplicación, a su vez, da lugar a otra, que será *su estimación inferior razonable asociada.* Finalmente, se define un *valor razonable indirecto* como una aplicación que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, genera el único valor de compromiso que existe entre los vectores que establecen la estimación superior razonable considerada y la estimación inferior razonable asociada a ésta. Obsérvese que, este proceso es una generalización del seguido en la obtención del valor de Tijs en Driessen [17] y que, por tanto, el valor de Tijs en la familia de juegos $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ se convierte en un caso particular de los valores generados a partir de un valor razonable indirecto en $(N, \mathcal{A})$.

Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Puesto que cada vector del core de un juego cooperativo $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}_+^N$, constituye uno de los vectores de pago más satisfactorios para todos los jugadores, entre las estimaciones razonables individuales en $(N, \mathcal{A})$ destacan aquéllas que suponen una actitud optimista de cualquier jugador, en el sentido de que, mediante ellas, cada jugador, no sólo pretende al menos el beneficio que obtendría por sí mismo en el juego, sino que, además, desea que cualquier coalición a la que él pertenezca reciba un beneficio no inferior al que pudiera obtener por ella misma. Para $i \in N$, una estimación razonable individual $\Psi_i^{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ con estas características verifica que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$,

$$\Psi_i^{\mathcal{A}}(w) \geq x_i, \text{ para cada } x = (x_k)_{k \in N} \in Core\,(w_{\mathcal{A}})\,.$$

Sin embargo, que se satisfagan estas desigualdades para todos los jugadores no garantiza un reparto $\Psi^{\mathcal{A}}(w) = \left(\Psi_i^{\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$ eficiente del valor de la gran coalición, puesto que

$$\sum_{i \in N} \Psi_i^{\mathcal{A}}(w) \geq x(N) = w(N)\,.$$

En base a la consideración de estas estimaciones razonables individuales y a la intención de encontrar un vector de pago eficiente a partir de ellas, se define un nuevo concepto. En su definición y en lo que sigue, se suprimirá la mención al antimatroide en la notación utilizada cuando no haya posibilidad de confusión con el antimatroide al que se refiere la aplicación.

Definición 1.1. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$, tal que $U(w) = (U_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se denomina estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$ si verifica:*

1. *Para cada $i \in N$, la aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ describe una estimación razonable individual en $(N, \mathcal{A})$.*
2. *Axioma de Optimismo: Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^N$, el vector $U(w) = (U_i(w))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ verifica, para todo $x = (x_i)_{i \in N} \in Core(w_{\mathcal{A}})$, que $U_i(w) \geq x_i$ para cada $i \in N$.*

Una estimación superior razonable en un antimatroide puede ser caracterizada de la siguiente forma.

Proposición 1.2. *Sea $(N, \mathcal{A})$ antimatroide y considérese una aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$, con $U = (U_i)_{i \in N}$. Son equivalentes:*

(a) La aplicación U es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$.

(b) Para cada $i \in N$, la aplicación $U_i : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ verifica el Axioma de Linealidad y es tal que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$,

$$w(\{j \in N : i \in P_j\}) \leq U_i(w) \leq w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right).$$

Demostración. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, tal que $U = (U_i)_{i \in N}$. Considérese $i \in N$. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, puesto que U_i es una estimación razonable individual para $i \in N$ en $(N, \mathcal{A})$, se tiene que

$$U_i(w) \leq w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right).$$

Para demostrar que $w(\{j \in N : i \in P_j\}) \leq U_i(w)$, se procede por reducción al absurdo. Supóngase que $i \in N$ es tal que $U_i(w) < w(\{j \in N : i \in P_j\})$, o equivalentemente, considerando la geometría convexa dual de $(N, \mathcal{A})$ y el Lema II.1.3, que $U_i(w) < w\left(\overline{\{i\}}\right)$.

Siendo así, para todo vector $x = (x_k)_{k\in N} \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, el Axioma de Optimismo permite afirmar que $x_i \leq U_i\,(w)$, y entonces, también se tiene que $x_i < w\left(\overline{\{i\}}\right)$. En particular, $w_i < w\left(\overline{\{i\}}\right)$, puesto que $w \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. De aquí, puesto que $i \in \overline{\{i\}}$, se tiene que $\overline{\{i\}} \setminus \{i\} \neq \emptyset$ y es posible definir el vector $y = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N_+$ que viene dado, para cada $k \in N$, por

$$y_k := \begin{cases} w\left(\overline{\{k\}}\right), & \text{si } k = i \\ w_k, & \text{si } k \in N \setminus \overline{\{i\}} \\ 0, & \text{si } k \in \overline{\{i\}} \setminus \{i\}\,. \end{cases}$$

Obsérvese que, por la expresión (II.1), se tiene que $y \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$. En efecto, y es un vector eficiente, pues $y\,(N) = w\left(\overline{\{i\}}\right) + w\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right)$. Además, si se considera una coalición $S \in \mathcal{A}$ tal que $S \cap \overline{\{i\}} = \emptyset$, entonces $y\,(S) = w\,(S)$. En otro caso, si $S \in \mathcal{A}$ es tal que $S \cap \overline{\{i\}} \neq \emptyset$, se tiene que $i \in S$, puesto que existe un jugador $j \in S$ para el que todos los j-caminos contienen al jugador i, y en particular, debido a que $S \in \mathcal{A}$, existe un j-camino contenido en S, y se tiene que $i \in P_j \subseteq S$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y\,(S) = w\left(\overline{\{i\}}\right) + y\,(S \setminus \{i\}) &= w\left(\overline{\{i\}}\right) + w\left(\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right) \cap S\right) \\ &= w\left(\overline{\{i\}}\right) + w\left(S \setminus \overline{\{i\}}\right) = w\,(S)\,. \end{aligned}$$

Se obtiene así un vector del core de $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, que no verifica las condiciones de la hipótesis, pues nótese que $y_i = w\left(\overline{\{i\}}\right)$, y por las condiciones impuestas, se debería verificar que $y_i < w\left(\overline{\{i\}}\right)$. Esta contradicción lleva a afirmar que $w\,(\{j \in N : i \in P_j\}) \leq U_i\,(w)$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$.

Recíprocamente, considérese una aplicación $U : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$, con $U = (U_i)_{i\in N}$ tal que, para cada $i \in N$, la aplicación $U_i : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ verifica el Axioma de Linealidad y es tal que, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$,

$$w\,(\{j \in N : i \in P_j\}) \leq U_i\,(w) \leq w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right).$$

En estas condiciones, se justifica a continuación que U es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$. Bajo las hipótesis, se verifica, de forma inmediata, que cada aplicación U_i, para $i \in N$, es una estimación razonable individual para $i \in N$ en $(N, \mathcal{A})$. Para demostrar que U verifica el Axioma de Optimismo, considérese, para cada jugador $i \in N$, su correspondiente coalición $\overline{\{i\}}$ en la geometría convexa dual de $(N, \mathcal{A})$. Puesto que

$N \setminus \overline{\{i\}} \in \mathcal{A}$, se cumple, para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada vector $x \in Core\,(w_{\mathcal{A}})$, que $x\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right) \geq w\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right)$. Por tanto,

$$x(N) - x\left(\overline{\{i\}}\right) = x\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right) \geq w\left(N \setminus \overline{\{i\}}\right) = w(N) - w\left(\overline{\{i\}}\right).$$

Y de aquí se obtiene que

$$x\left(\overline{\{i\}}\right) \leq w\left(\overline{\{i\}}\right).$$

Ahora bien, puesto que, por hipótesis, $w(\{j \in N : i \in P_j\}) \leq U_i(w)$ y también es cierto, según el Lema II.1.3, que $w(\{j \in N : i \in P_j\}) = w\left(\overline{\{i\}}\right)$, se deduce que se tiene $x\left(\overline{\{i\}}\right) \leq U_i(w)$; en particular, $x_i \leq U_i(w)$. ■

Recuérdese que para cualquier juego cooperativo, el vector superior constituye una cota superior para el core. Además, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, el vector superior de un juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$ es, según la Proposición II.3.14 y el Lema II.1.3, el vector $M^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = \left(M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}}\right)_{i \in N}$ tal que, para cada $i \in N$,

$$M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}} = w(\{j \in N : i \in P_j\}).$$

Por tanto, la aplicación $M : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ con $M(w) = (M_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, que viene dada, para cada $i \in N$, por

$$M_i(w) := M_i^{\tau, w_{\mathcal{A}}},$$

define una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$ que, como consecuencia de la Proposición VI.1.2, constituye una cota inferior del conjunto de todas las estimaciones superiores razonables en $(N, \mathcal{A})$, y que se denomina *estimación superior minimal* en $(N, \mathcal{A})$. De igual modo, como consecuencia de la misma proposición, la aplicación $D : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$, tal que $D(w) = (D_i(w))_{i \in N}$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, con

$$D_i(w) := w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right),$$

para cada $i \in N$, define una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$ denominada *estimación superior maximal* en $(N, \mathcal{A})$.

Las consideraciones anteriores permiten expresar el enunciado de la proposición anterior de otra forma. Para ello, se tendrá en cuenta que dos aplicaciones, $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ y $\bar{U} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$, verifican que

$$U \leq \bar{U} \Leftrightarrow U_i(w) \leq \bar{U}_i(w) \text{ para cada } w \in \mathbb{R}_+^N \text{ y todo } i \in N.$$

Teorema 1.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ es una estimación superior razonable si, y sólo si, para cada $i \in N$, la aplicación $U_i : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ verifica el Axioma de Linealidad y $U \in [M, D]$.*

Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, mediante la definición de una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, se genera, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, un vector de pago. Puesto que en un juego cooperativo, las componentes de una estimación superior pueden ser consideradas como las aspiraciones máximas de los jugadores, para cada estimación superior es posible determinar el pago mínimo razonable de cada jugador, considerando todas las dependencias entre los jugadores (que vendrán dadas por los caminos del antimatroide). Mediante un argumento similar al que dio origen al vector inferior, y que fue expuesto en el Capítulo I, cada jugador calcula las expectativas mínimas que espera alcanzar en cada uno de sus caminos, cediendo las respectivas aspiraciones máximas al resto de jugadores que forman la coalición. Con esta consideración, eligiría, entre todas las posibilidades de entrar en el juego (que se corresponden con la formación de sus caminos), aquélla a través de la cual lograría un mayor beneficio. El resultado de esta elección le asegura un beneficio que representa la aspiración mínima razonable del jugador. En el caso de que ésta fuera un número negativo, el jugador podría obtener un beneficio nulo en la cooperación. Surge así, la siguiente definición.

Definición 1.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Si $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, tal que $U(w) = (U_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se denomina estimación inferior razonable en $(N, \mathcal{A})$ asociada a U a la aplicación $u : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$, con $u(w) = (u_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, tal que, si $i \in N$, se verifica que*

$$u_i(w) = \text{máx}\left\{0, \max_{S \in A(i)} \left[\ w(S) - [U(w)](S \setminus \{i\})\ \right]\right\}.$$

Mediante la definición de una estimación inferior razonable en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, se genera, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, un vector de pago para el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$ que, en el caso de la estimación inferior razonable en $(N, \mathcal{A})$ asociada a la estimación superior minimal, establece una cota inferior para el core del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$.

Obsérvese además que, cualquiera que sea la estimación superior razonable U, su estimación inferior razonable u verifica que, para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$,

$$u_i(w) = w_i, \quad \text{si } i \in a(\mathcal{A}).$$

En la siguiente proposición, se destacan dos importantes propiedades referidas a estimaciones superior e inferior asociadas en un antimatroide.

Proposición 1.5. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese una estimación superior razonable $U : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$ y la estimación inferior razonable $u : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ asociada a U, con $U(w) = (U_i(w))_{i \in N}$ y $u(w) = (u_i(w))_{i \in N}$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$. Se verifica que, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$,*

1. *$u_i(w) \leq w_i \leq U_i(w)$, cualquiera que sea $i \in N$.*
2. *Existe un único vector de pago eficiente del juego interior $(N, w_{\mathcal{A}})$, $\phi^U(w) \in \mathbb{R}^N$, que se encuentra en el segmento que une $U(w)$ y $u(w)$. El vector $\phi^U(w)$ se denomina vector de compromiso asociado a la estimación superior razonable U y es, además, una imputación del juego $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

Demostración. Considerada una estimación superior razonable $U : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y la estimación inferior razonable $u : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ asociada a U, sea $w \in \mathbb{R}^N_+$. Puesto que $U(w) \in \mathbb{R}^N$ es un vector que verifica el Axioma de Optimismo, para cada $i \in N$, se tiene que $w_i \leq U_i(w)$. Además, si $i \in N$ es tal que $u_i(w) = 0$, entonces es inmediato que $u_i(w) \leq w_i$. En otro caso, si existe $T \in A(i)$ de forma que $u_i(w) = w(T) - [U(w)](T \setminus \{i\}) > 0$, se tiene que

$$u_i(w) = \sum_{j \in T} w_j - \sum_{j \in T \setminus \{i\}} U_j(w) = w_i - \sum_{j \in T \setminus \{i\}} [U_j(w) - w_j],$$

y por tanto, se cumple que

$$u_i(w) \leq w_i,$$

puesto que $U_j(w) - w_j \geq 0$, para cada $j \in N$. Se obtiene así que $u_i(w) \leq w_i \leq U_i(w)$, para cada $i \in N$.

De la conclusión anterior se deduce que, si a partir de los vectores $w, U(w)$ y $u(w)$ de $\mathbb{R}^N_+$, se consideran las sumas de sus respectivas componentes, $w(N)$, $U(w)(N)$ y $u(w)(N)$, los hiperplanos

$$\begin{aligned} H &: = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = w(N)\right\}, \\ H_U &: = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = U(w)(N)\right\}, \text{ y} \\ H_u &: = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = u(w)(N)\right\} \end{aligned}$$

son paralelos y además, H divide a $\mathbb{R}^N$ en dos semiespacios que contienen a H_U y H_u, respectivamente. Trazando el segmento que une $U(w) \in H_U$ y $u(w) \in H_u$, se observa que este segmento interseca al hiperplano H en un punto. Esto es, existe un único vector $\phi^U(w) \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $\phi^U(w)(N) = w(N)$, siendo $u_i(w) \leq \phi^U_i(w) \leq U_i(w)$.

Finalmente, se demuestra que $\phi^U(w) \in I(w_{\mathcal{A}})$ teniendo en cuenta la Proposición II.3.1. Basta probar que, si $i \in a(\mathcal{A})$ entonces $\phi^U_i(w) \geq w_i$, puesto que $\phi^U(w) \in \mathbb{R}^N_+$ es un vector eficiente. En efecto, se observó antes del teorema que, para $i \in a(\mathcal{A})$ se verifica que $u_i(w) = w_i$, por lo que $\phi^U_i(w) \geq u_i(w) = w_i$. ■

Considerada una estimación superior razonable U en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y demostrada la existencia de una única imputación comprendida entre una estimación superior $U(w)$ y la estimación inferior asociada a U en $(N, \mathcal{A})$, se define el valor razonable indirecto en $(N, \mathcal{A})$ correspondiente como la aplicación $\phi^U : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ que asigna a cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, el vector de compromiso $\phi^U(w)$ asociado a $U(w)$.

Definición 1.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese una estimación superior razonable $U : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$. Una aplicación $\phi^U : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ se denomina valor razonable indirecto en $(N, \mathcal{A})$ correspondiente a U si verifica las siguientes condiciones:*

1. *$u(w) \leq \phi^U(w) \leq U(w)$, para cada $w \in \mathbb{R}^N_+$, si u es la estimación inferior razonable en $(N, \mathcal{A})$ asociada a U.*
2. *$\phi^U(w)$ es un vector eficiente en $(N, w_{\mathcal{A}})$.*

Así, a partir de los conocimientos anteriores, se establecen los siguientes ejemplos de valores razonables indirectos en cualquier antimatroide.

Definición 1.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide.*

1. *Considérese la estimación superior minimal $M : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$. Se denomina valor minimal en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable indirecto $\phi^{M,\mathcal{A}} : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ correspondiente a M en $(N, \mathcal{A})$.*
2. *Considérese la estimación superior maximal $D : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ en $(N, \mathcal{A})$. Se denomina valor maximal en $(N, \mathcal{A})$ al valor razonable indirecto $\phi^{D,\mathcal{A}} : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ correspondiente a D en $(N, \mathcal{A})$.*

3. *Considérese la estimación superior* $G : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ *en* $(N, \mathcal{A})$*, tal que*

$$G := \frac{M + D}{2},$$

donde M, D *son las estimaciones superiores minimal y maximal respectivamente. Se denomina valor intermedio en* $(N, \mathcal{A})$ *al valor razonable indirecto* $\phi^{G,\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ *correspondiente a* G *en* $(N, \mathcal{A})$.

Obsérvese que la definición del valor minimal en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ determina, en cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, el valor de Tijs, a cuyo estudio se dedicó la segunda sección del Capítulo IV. Por tanto, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.8. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. El valor minimal en* $(N, \mathcal{A})$ *coincide con el valor de Tijs de los juegos interior constituidos sobre* $(N, \mathcal{A})$*. Esto es*

$$\phi^{M,\mathcal{A}}(w) = \tau^{\mathcal{A}}(w), \text{ para cada } w \in \mathbb{R}_+^N.$$

Además, a partir del Teorema VI.1.3 se deduce una importante conclusión cuando el antimatroide fijado es un poset-antimatroide. Si $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, se verifica que $P^i = P_i$ para cada $i \in N$, con lo que, según el mencionado teorema, sólo es posible definir una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, y como consecuencia, todos los valores razonables indirectos en $(N, \mathcal{A})$ coinciden con el valor minimal. En definitiva, se verifica el siguiente enunciado.

Teorema 1.9. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un poset-antimatroide. Cualquier valor razonable indirecto en* $(N, \mathcal{A})$ *genera el valor de Tijs en la familia de juegos* $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$.

Puesto que, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, el vector eficiente que genera el valor minimal en $(N, \mathcal{A})$, para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$ ya ha sido estudiado, al coincidir éste con el valor de Tijs para el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, a continuación se obtiene una expresión precisa del valor maximal en un antimatroide, y de esta forma, se muestra el procedimiento a seguir para la formulación de cualquier otro valor razonable indirecto en un antimatroide dado.

Proposición 1.10. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. El valor maximal en* $(N, \mathcal{A})$ *es la aplicación* $\phi^{D,\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$*, tal que* $\phi^{D,\mathcal{A}}(w) = \left(\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w)\right)_{i \in N}$*, siendo, para cada* $i \in N$*,*

$$\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w) = (1 - p)\, w\,(int(\{i\})) + pw\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right),$$

con

$$p=\frac{w(N)-w(a(\mathcal{A}))}{\sum_{j\in N\setminus a(\mathcal{A})}|P^j|\,w_j}.$$

Demostración. Fijado un antimatroide $(N,\mathcal{A})$, el valor maximal $\phi^{D,\mathcal{A}}$ en $(N,\mathcal{A})$, por definición, asigna a cada $w\in\mathbb{R}_+^N$ la única imputación, $\phi^{D,\mathcal{A}}(w)$ correspondiente al juego $(N,w_{\mathcal{A}})$, que se encuentra en el segmento que une a la estimación superior $D(w)$ con la estimación inferior asociada $d(w)$. Dado $w\in\mathbb{R}_+^N$, para obtener la expresión del vector $\phi^{D,\mathcal{A}}(w)\in\mathbb{R}_+^N$, se procede, en primer lugar, a determinar, a partir de la estimación superior maximal, el vector $d(w)$. Si $i\in a(\mathcal{A})$, es ya conocido que $d_i(w)=w_i$. En otro caso, si $i\notin a(\mathcal{A})$, cualquier camino $S\in A(i)$ verifica que existe $j\in S\setminus\{i\}$ y entonces $i\in\{N\setminus\{j\}:j\in P^i\}$. Además, puesto que $D_i(w):=w(\{j\in N:i\in P^j\})$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\max_{S\in A(i)}\left[w(S)-[D(w)](S\setminus\{i\})\right] &= \max_{S\in A(i)}\left[w(S)-\sum_{j\in S\setminus\{i\}}\sum_{\left\{k\in N:j\in P^k\right\}}w_k\right]\\ &= \max_{S\in A(i)}\left[w_i-\sum_{j\in S\setminus\{i\}}\sum_{\left\{k\in N\setminus\{j\}:j\in P^k\right\}}w_k\right]\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $d_i(w)=0$. Con ello se deduce que $d_i(w)=w(int(\{i\}))$, para cada $i\in N$.

Se procede ahora a determinar el único vector $\phi^{D,\mathcal{A}}(w)$ perteneciente al segmento de extremos $D(w)$ y $d(w)$, que verifica la igualdad $\phi^{D,\mathcal{A}}(w)(N)=w(N)$. Puesto que, por estar en el citado segmento, verifica para cada $i\in N$, que

$$\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w)=(1-p)\,w(int(\{i\}))+pw\left(\left\{j\in N:i\in P^j\right\}\right),\text{ siendo }p\in[0,1],$$

bastará con encontrar el único número real $p\in[0,1]$ para el que se cumple la igualdad $\sum_{i\in N}\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w)=w(N)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w) &= \sum_{i\in N}\left[(1-p)\,w\left(int\left(\{i\}\right)\right)+pw\left(\left\{j\in N: i\in P^j\right\}\right)\right] \\
&= w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)-pw\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)+p\sum_{i\in N} w\left(\left\{j\in N: i\in P^j\right\}\right) \\
&= w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)-pw\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)+p\left[w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)+\sum_{i\in N\setminus a(\mathcal{A})} w\left(\left\{j\in N: i\in P^j\right\}\right)\right] \\
&= w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)+p\left[\sum_{i\in N\setminus a(\mathcal{A})} w\left(\left\{j\in N: i\in P^j\right\}\right)\right] \\
&= w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)+p\sum_{j\in N\setminus a(\mathcal{A})}\left|P^j\right| w_j.
\end{aligned}$$

Por tanto, despejando p en la igualdad $\sum_{i\in N}\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w)=w(N)$ se obtiene que

$$p=\frac{w(N)-w\left(a\left(\mathcal{A}\right)\right)}{\sum_{j\in N\setminus a(\mathcal{A})}\left|P^j\right| w_j},$$

como se quería demostrar. ■

Como aplicación de lo expuesto anteriormente, en el siguiente ejemplo, se muestra el vector de pago eficiente que proporciona cada uno de los valores razonables indirectos establecidos en la Definición VI.1.7 para un juego de Mercado con Información con varios jugadores informados. Recuérdese que este tipo de juegos se introdujo en el Ejemplo II.1.14, y después fue considerado en el capítulo anterior para mostrar en él los valores razonables directos más destacados.

Ejemplo 1.11. *Sea $(N, w_{\mathcal{A}})$ un juego de Mercado con Información con un conjunto I de jugadores informados, tal que $|I|\geq 2$. Recuérdese que el antimatroide $(N,\mathcal{A})$ verifica que $a(\mathcal{A})=I$ y es tal que*

$$A(i)=\begin{cases}\{\{i\}\}, & si\ i\in I\\ \{\{i,j\}: j\in I\}, & en\ otro\ caso.\end{cases}$$

De aquí se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\{j\in N: i\in P^j\right\} &= \begin{cases}\{i\}\cup(N\setminus I), & si\ i\in I\\ \{i\}, & en\ otro\ caso,\end{cases} \\
\{j\in N: i\in P_j\} &= \{i\},\ para\ cada\ i\in N.
\end{aligned}$$

Puesto que, según la Proposición VI.1.8, el valor minimal y el valor de Tijs coinciden, y se conoce, por el Teorema 2.7 del cuarto capítulo, que este último es el valor identidad para antimatroides coatómicos, se tiene que

$$\phi_i^{M,\mathcal{A}}(w) = w_i, \text{ para cada } i \in N.$$

También, según la Proposición VI.1.10, se obtiene que el valor maximal en $(N, \mathcal{A})$ proporciona en $(N, w_{\mathcal{A}})$ el vector de pago eficiente $\phi^{D,\mathcal{A}}(w) = \left(\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$, tal que, para cada $i \in N$,

$$\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w) = (1-p)\, w\left(int\left(\{i\}\right)\right) + pw\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right),$$

con

$$p = \frac{w(N) - w(I)}{\sum_{j\in N\setminus I} |P^j|\, w_j} = \frac{w(N\setminus I)}{w(N\setminus I)(|I|+1)} = \frac{1}{|I|+1},$$

pues si $j \in N \setminus I$, entonces $|P^j| = |I| + 1$. Por tanto, se concluye, para cada $i \in N$, que

$$\phi_i^{D,\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N\setminus I)}{|I|+1}, & \text{si } i \in I \\ \dfrac{1}{|I|+1} w_i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De aquí y el Ejemplo V.3.21, se aprecia que, mientras el valor minimal coincide con el valor igualitario de control, que es la identidad, el valor maximal coincide con el valor igualitorio.

Finalmente, se determina el vector $\phi^{G,\mathcal{A}}(w)$ generado por el valor intermedio $\phi^{G,\mathcal{A}}$ en $(N, \mathcal{A})$ teniendo en cuenta la estimación superior razonable $G := \frac{M+D}{2}$ que lo genera. Así, $G = (G_i(w))_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$ es tal que, para cada $i \in N$,

$$G_i(w) = w\left(\{j \in N : i \in P_j\}\right) + \sum_{\{j\in N: i\in P^j\setminus P_j\}} w_j = \begin{cases} w_i + \dfrac{w(N\setminus I)}{2}, & \text{si } i \in I \\ w_i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La estimación razonable inferior g asociada a G, es tal que, por definición, para cada $i \in I$, $g_i(w) = w_i$. En otro caso, si $i \notin I$,

$$\begin{aligned} g_i(w) &= g_i(w) = \max\left\{0, \max_{S\in A(i)} \left[\ w(S) - [G(w)](S\setminus\{i\})\ \right]\right\} \\ &= \max\left\{0, \max_{j\in I}\left[w(\{i,j\}) - w_j - \frac{1}{2} w(N\setminus I)\right]\right\} = \max\left\{0, w_i - \frac{1}{2} w(N\setminus I)\right\}. \end{aligned}$$

Así, se obtiene que, para cada $i \in N$,

$$g_i(w) = \begin{cases} w_i, & i \in I \\ w_i - \frac{1}{2}w(N \setminus I), & si\ i \in N \setminus I\ es\ tal\ que\ w_i > \frac{1}{2}w(N \setminus I) \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Obsérvese que, de existir un jugador $k \in N \backslash I$ con $g_k(w) \neq 0$, ese jugador sería el único que podría verificar esta condición en el juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, y se trata del único jugador capaz de obtener más de la mitad de las aportaciones del conjunto de jugadores no informados. En tal caso, el vector $\phi^{G,\mathcal{A}}(w) = \left(\phi_i^{G,\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$ es tal que existe un número real $\alpha \in [0,1]$ para el que $\sum_{i\in N} \phi_i^{G,\mathcal{A}}(w) = w(N)$, con

$$\phi_i^{G,\mathcal{A}}(w) = \alpha G_i(w) + (1-\alpha) g_i(w) = w(N), \text{ para cada } i \in N.$$

Puesto que

$$\phi_i^{G,\mathcal{A}}(w) = \alpha G_i(w) + (1-\alpha) g_i(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{\alpha}{2} w(N \setminus I), & si\ i \in I \\ \\ w_k - \dfrac{1-\alpha}{2} w(N \setminus I), & si\ i = k \\ \alpha w_i, & si\ i \notin I \cup \{k\}, \end{cases}$$

se cumple que $\sum_{i\in N} \phi_i^{G,\mathcal{A}}(w) = w(N)$ si y sólo si

$$\alpha = \frac{3w(N \setminus I) - 2w_k}{(|I|+3)\, w(N \setminus I) - 2w_k}.$$

En otro caso, si $g_i(w) = 0$ para todo $i \in N \setminus I$, exigiendo la eficiencia del vector $\phi^{G,\mathcal{A}}(w)$, se tiene que

$$\alpha = \frac{2}{2+|I|}.$$

En este último caso, el vector $\phi^{G,\mathcal{A}}(w) = \left(\phi_i^{G,\mathcal{A}}(w)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}_+^N$ queda, para cada $i \in N$, como sigue

$$\phi_i^{G,\mathcal{A}}(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{1}{2+|I|} w(N \setminus I), & si\ i \in I \\ \dfrac{2}{2+|I|} w_i, & si\ i \notin I. \end{cases}$$

En general, es difícil determinar la expresión de un valor razonable indirecto en un antimatroide, puesto que su definición depende de una estimación superior razonable y de la estimación inferior razonable correspondiente a ésta. No obstante, el teorema siguiente, en el que se caracteriza de forma matricial cualquier estimación superior razonable en un antimatroide, simplificará la obtención de cualquiera de ellos.

Teorema 1.12. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$. Son equivalentes*

(a) La aplicación U es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$.

(b) Existe una única matriz $A = [a_{ij}]_{|N| \times |N|}$ que es esencial para $(N, \mathcal{A})$, con $a_{ij} \in [0,1]$ para cualesquiera $i, j \in N$, y tal que verifica $Aw = U(w)$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. Además, se tiene que $a_{ij} = 1$ si $i \in P_j$.

Demostración. Parte de la demostración será similar a la desarrollada para probar el Teorema V.1.3. Fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$. Para cada vector $w \in \mathbb{R}_+^N$, es posible considerar una única expresión de w mediante los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Así, si $w = w_1 e^1 + \ldots + w_n e^n$, por el Axioma de Linealidad, para cada $i \in N$, se tiene que

$$U_i(w) = w_1 U_i\left(e^1\right) + \ldots + w_n U_i\left(e^n\right).$$

Se define la matriz $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} := U_i\left(e^j\right), \text{ para cualesquiera } i, j \in N.$$

y se demuestra, de forma inmediata, que $Aw = U(w)$.

De igual modo, la definición de la matriz A, junto a los Axiomas de Positividad y Dependencia de cada estimación razonable individual U_i, para $i \in N$ en $(N, \mathcal{A})$, permiten afirmar que cada término $a_{ij} \in A$, con $i, j \in N$, verifica que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= U_i\left(e^j\right) \geq 0, \\ a_{ij} &= U_i\left(e^j\right) \leq e^j\left(\left\{k \in N : i \in P^k\right\}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in P^j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así queda probado que A es una matriz esencial para $(N, \mathcal{A})$ y que $a_{ij} \in [0,1]$, cualesquiera que sean $i, j \in N$. Además, puesto que U es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, aplicando la Proposición VI.1.2 se tiene, para cada $i \in N$, que

$U_i(e^j) \geq e^j(\{j \in N : i \in P_j\})$, para cada vector de la base canónica $e^j \in \mathbb{R}_+^N$; y por tanto, para cualesquiera $i, j \in N$ tales que $i \in P_j$, se tiene que

$$a_{ij} = U_i\left(e^j\right) \geq e^j(\{j \in N : i \in P_j\}) = 1.$$

Con lo anterior se deduce, al ser $P_j \subseteq P^j$, que

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i \in P_j.$$

Recíprocamente, dada una aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, sea una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $|N| \times |N|$ esencial para $(N, \mathcal{A})$, con $a_{ij} \in [0,1]$ para cualesquiera $i, j \in N$, y $a_{ij} = 1$ si $i \in P_j$, que verifica $Aw = U(w)$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$. En estas condiciones, la aplicación U representa una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, por lo siguiente. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, puesto que $U(w) = Aw$ y también $U(w) = (U_i(w))_{i \in N}$, igualando término a término, se obtiene que

$$U_i(w) = \sum_{j \in N} a_{ij} w_j, \qquad \text{para cada } i \in N.$$

Por tanto, si $w', w'' \in \mathbb{R}_+^N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} U_i(\alpha w' + \beta w'') &= \sum_{j \in N} a_{ij}\left(\alpha w'_j + \beta w''_j\right) = \alpha \sum_{j \in N} a_{ij} w'_j + \beta \sum_{j \in N} a_{ij} w''_j \\ &= \alpha U_i(w') + \beta U_i(w''). \end{aligned}$$

Además, por ser A una matriz esencial para el antimatroide $(N, \mathcal{A})$, y siendo que cada término de la matriz A es un valor real no negativo y menor o igual que uno, se sigue que, para cada $i \in N$,

$$U_i(w) = \sum_{j \in N} a_{ij} w_j = \sum_{\{j \in N : i \in P^j\}} a_{ij} w_j \leq w\left(\left\{j \in N : i \in P^j\right\}\right).$$

Finalmente, se concluye que la aplicación U es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, mediante la equivalencia establecida en la Proposición VI.1.2, teniendo en cuenta que $a_{ij} = 1$ si $i \in P_j$ y por tanto, observando también que, para cada $i \in N$,

$$U_i(w) = \sum_{\{j \in N : i \in P^j\}} a_{ij} w_j \geq \sum_{\{j \in N : i \in P_j\}} a_{ij} w_j = w(\{j \in N : i \in P_j\}).$$

Con ello termina la demostración de la equivalencia enunciada. ■

Como corolario del teorema anterior, fijado un antimatroide, se describen, a continuación, las matrices de las estimaciones superiores minimal y maximal, así como de una estimación superior intermedia a las anteriores.

Corolario 1.13. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide.*

1. *La matriz $A^M = \left[a_{ij}^M\right]_{|N|\times|N|}$ asociada a la estimación superior minimal M en $(N, \mathcal{A})$ es tal que, para cada $i, j \in N$,*

$$a_{ij}^M = \begin{cases} 1, & si\ i \in P_j \\ 0, & si\ i \notin P_j. \end{cases}$$

2. *La matriz $A^D = \left[a_{ij}^D\right]_{|N|\times|N|}$ asociada a la estimación superior maximal D en $(N, \mathcal{A})$ es tal que, para cada $i, j \in N$,*

$$a_{ij}^D = \begin{cases} 1, & si\ i \in P^j \\ 0, & si\ i \notin P^j. \end{cases}$$

3. *La matriz $A^G = \left[a_{ij}^G\right]_{|N|\times|N|}$ asociada a la estimación superior intermedia G en $(N, \mathcal{A})$, con $G := \frac{M+D}{2}$, es tal que, para cada $i, j \in N$,*

$$a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & si\ i \in P_j \\ \dfrac{1}{2}, & si\ i \in P^j \setminus P_j \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

2. Valores indirectos de localización

Hasta aqui, para un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ se han obtenido diferentes vectores de pago eficientes en los juegos $\left\{(N, w_{\mathcal{A}}) : w \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ a través de la familia de valores razonables indirectos en $(N, \mathcal{A})$, la cual ha sido generada a partir de estimaciones razonables individuales que aseguran a cada jugador un beneficio no inferior al que obtendría éste en cualquier coalición a la que perteneciera. Una forma diferente de obtener vectores eficientes para cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}_+^N$, utilizando las mismas estimaciones razonables individuales pero cediendo mayor protagonismo a los caminos del antimatroide, se consigue mediante un proceso similar al realizado en la sección segunda del capítulo anterior. Así, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ se considera una determinada familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{ (\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N \right\} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ en el conjunto $P(\mathcal{A})$ y se define un nuevo vector $w^\Delta = \left(w_S^\Delta \right)_{S \in P(\mathcal{A})} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, tal que $w_S^\Delta = \delta_S w_i$, para cada $i \in N$ y cada $S \in A(i)$. La determinación del vector $w^\Delta \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$, a partir de cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, origina el juego interior $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta \right)$. Puesto que $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ es un poset-antimatroide, según el Teorema VI.1.9, cualquier valor razonable indirecto en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ genera el valor de Tijs de $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta \right)$. Entonces, después de considerar el valor de Tijs $\tau^{\mathcal{P}}\left(w^\Delta \right)$, si se realiza un reparto equitativo del beneficio recibido por cada camino $S \in P(\mathcal{A})$ entre los jugadores de N que se encuentran en él, cada jugador $i \in N$ recibe, finalmente, la suma de los pagos que ha obtenido en cada uno de los caminos de $(N, \mathcal{A})$ a los cuales pertenece. Esta forma de reparto conduce a establecer la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ tal que $\Psi(w) = (\Psi_i(w))_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se denomina valor indirecto de localización en $(N, \mathcal{A})$ si existe una familia $\Delta = \left\{ (\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N \right\} \in \Delta(\mathcal{A})$ de forma que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $i \in N$,*

$$\Psi_i(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A}) : i \in S\}} \frac{1}{|S|} \tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^\Delta \right),$$

siendo $\tau^{\mathcal{P}}\left(w^\Delta \right) = \left(\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^\Delta \right) \right)_{S \in P(\mathcal{A})} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ el valor de Tijs en el juego $\left(P(\mathcal{A}), w_{\mathcal{P}}^\Delta \right)$.

Efectivamente, en la siguiente proposición se demuestra que el reparto generado por un valor indirecto de localización es una imputación de cada juego $(N, w_{\mathcal{A}})$, con $w \in \mathbb{R}_+^N$.

Proposición 2.2. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide, y considérese en él un valor indirecto de localización $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$. Para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se verifica que $\Psi(w) \in I(w_{\mathcal{A}})$.*

Demostración. Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, sea $\Psi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ un valor indirecto de localización. Entonces, existe una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{ (\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N \right\} \in \mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ de forma que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $i \in N$,

$$\Psi_i(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A}) : i \in S\}} \frac{1}{|S|} \tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^\Delta \right),$$

siendo $\tau^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)=\left(\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)\right)_{S\in P(\mathcal{A})}\in\mathbb{R}_+^{P(\mathcal{A})}$ el valor de Tijs en el juego $\left(P\left(\mathcal{A}\right),w_{\mathcal{P}}^{\Delta}\right)$. De aquí,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\Psi_i\left(w\right) &= \sum_{i\in N}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A}):i\in S\}}\frac{1}{|S|}\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)=\sum_{S\in P(\mathcal{A})}\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)\sum_{i\in S}\frac{1}{|S|}\\ &= \sum_{S\in P(\mathcal{A})}\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)=w^{\Delta}\left(P\left(\mathcal{A}\right)\right)=w\left(N\right),\end{aligned}$$

puesto que el valor de Tijs genera un vector eficiente en el juego $\left(P\left(\mathcal{A}\right),w_{\mathcal{P}}^{\Delta}\right)$ y el vector w^{Δ} constituye un reparto eficiente del valor de la gran coalición entre todos los caminos del antimatroide, según se observó en la Proposición 3.2 del capítulo anterior.

Sea ahora $i\in a\left(\mathcal{A}\right)$. En ese caso, $w_{\{i\}}^{\Delta}=w_i$ puesto que $A\left(i\right)=\{\{i\}\}$. Como el valor de Tijs genera imputaciones en cada juego al que se le aplica, ocurre que

$$\Psi_i\left(w\right)=\sum_{\{S\in P(\mathcal{A}):i\in S\}}\frac{1}{|S|}\tau_S^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)\geq\tau_{\{i\}}^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)\geq w_{\{i\}}^{\Delta}=w_i.$$

Siguiendo la Proposición II.3.1, como $\Psi\left(w\right)$ es un vector no negativo por construcción, se prueba que $\Psi\left(w\right)\in I\left(w_{\mathcal{A}}\right)$. ■

Puesto que en la definición de valor indirecto de localización en un antimatroide no interviene ninguna estimación superior razonable, no es posible garantizar a priori que la familia de valores indirectos de localización en un antimatroide $(N,\mathcal{A})$ esté contenida en la familia de valores razonables indirectos en $(N,\mathcal{A})$. En un intento de encontrar una estimación superior razonable a través de la cual pueda tratarse un valor indirecto de localización como valor razonable indirecto en $(N,\mathcal{A})$, se inicia un proceso análogo al seguido para definir un valor indirecto de localización, sólo que esta vez tomando la única estimación superior razonable que es posible definir en el poset-antimatroide $\left(P\left(\mathcal{A}\right),\mathcal{P}\right)$. Así, para cada $w\in\mathbb{R}_+^N$, siguiendo el procedimiento de antes, primero se determina un vector w^{Δ} para una familia de distribuciones $\Delta\in\Delta\left[\mathcal{A}\right]$, luego se considera el juego interior $\left(P\left(\mathcal{A}\right),w_{\mathcal{P}}^{\Delta}\right)$ constituido sobre el poset-antimatroide $\left(P\left(\mathcal{A}\right),\mathcal{P}\right)$ y a continuación, después de considerar la única estimación superior razonable $M^{\mathcal{P}}$ que es posible definir en $\left(P\left(\mathcal{A}\right),\mathcal{P}\right)$, se realiza un reparto equitativo de las estimaciones superiores entre los jugadores de cada camino de $(N,\mathcal{A})$. Finalmente, la estimación superior $M^{\mathcal{P}}\left(w^{\Delta}\right)$ se reparte equitativamente entre los jugadores de cada camino. Expresando la estimación superior razonable $M^{\mathcal{P}}$ en forma matricial, $A^{M^{\mathcal{P}}}$, según el Teorema VI.1.12, y considerando las matrices D^{Δ} y R tal como fueron definidas en el capítulo anterior, se obtiene que el resultado del proceso anterior es la matriz $A := RA^{M^{\mathcal{P}}}D^{\Delta}$. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se observa que la matriz A no se corresponde, en general, con una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$ y por tanto, la construcción anterior no es válida para definir a partir de ella a la familia de valores indirectos de localización.

Ejemplo 2.3. *Sea $(N, \mathcal{A})$ el antimatroide cadena cuyo diagrama de Hasse se representa en la Figura III.1.*

Al ser $(N, \mathcal{A})$ un poset-antimatroide y considerar sus caminos en el orden en el que se exponen a continuación, $P(\mathcal{A}) = \{\{1\}, \{1,2\}\}$, se tiene que

$$D^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{1,2\}} = 1$ y $\Delta = \{1,1\}$ es la única familia de distribuciones de probabilidad de $\Delta[\mathcal{A}]$. Además, la única estimación superior razonable $M^{\mathcal{P}}$ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ tiene como matriz asociada, según el Teorema VI.1.12, la matriz

$$A^{M^{\mathcal{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordando también la definición de la matriz R, se tiene que

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como resultado de $RA^{M^{\mathcal{P}}}D^{\Delta}$, se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

y se observa que la matriz A no corresponde a ninguna estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$, al no verificar la caracterización expresada en el Teorema VI.1.12.

En un nuevo intento de encontrar estimaciones superiores razonables en un antimatroide a partir de las cuales se generen valores indirectos de localización, se realiza un procedimiento parecido al seguido anteriormente para la obtención de un valor directo de localización, pero esta vez sin considerar un reparto equitativo entre los jugadores pertenecientes al mismo camino, sino suponiendo que cada jugador pueda conseguir todo el beneficio que obtenga cada camino en el que se encuentre. Así, dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se determina, en primer lugar, un vector w^Δ para una familia de distribuciones de probabilidad sobre los caminos $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$. Seguidamente, se considera el juego interior $\left(P(\mathcal{A}), w_\mathcal{P}^\Delta\right)$ sobre el poset-antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, para encontrar en él un vector de pago a través de un valor razonable directo $\Upsilon^\mathcal{P}$ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$. Finalmente, los pagos asignados a cada camino $S \in P(\mathcal{A})$ según el vector $\Upsilon^\mathcal{P}\left(w^\Delta\right)$ son tomados por los jugadores de forma optimista, en el sentido de considerar que van a recibir todo el beneficio obtenido por los caminos a los cuales pertenece.

Definición 2.4. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $U : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ tal que $U(w) = (U_i(w))_{i\in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$, se denomina estimación superior de localización en $(N, \mathcal{A})$ si existe una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ y un valor razonable directo $\Upsilon^\mathcal{P}$ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ de forma que, para cada $w \in \mathbb{R}_+^N$ y cada $i \in N$,*

$$U_i(w) = \sum_{\{S\in P(\mathcal{A}):i\in S\}} \Upsilon_S^\mathcal{P}\left(w^\Delta\right).$$

Obsérvese que una estimación superior de localización en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ puede ser representada matricialmente de la siguiente forma. Sea la matriz $Q = [q_{iS}]$, de orden $|N| \times |P(\mathcal{A})|$, que viene dada por

$$q_{iS} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Entonces, para una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ y un valor razonable directo $\Upsilon^\mathcal{P}$ en $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, la matriz $A^U := QA^{\Upsilon^\mathcal{P}}D^\Delta$ define una estimación superior de localización en $(N, \mathcal{A})$.

No obstante, en el siguiente ejemplo puede constatarse que una estimación superior de localización en un antimatroide dado no es, en general, una estimación superior razonable.

Ejemplo 2.5. *Sea el antimatroide $(N, \mathcal{A})$ cuyo diagrama de Hasse está representado en la Figura VI.1, con $N = \{1, 2, 3\}$. Puesto que $(N, \mathcal{A})$ es un poset-antimatroide, considerando sus caminos en el orden en el que se exponen a continuación, $P(\mathcal{A}) = \{\{1\}, \{2\}, N\}$, se tiene que existe una única familia de distribuciones de probabilidad de $\Delta[\mathcal{A}]$, que es*

$\Delta = \{1,1,1\}$ *y cuya matriz asociada* D^{Δ} *es la matriz identidad de tercer orden. Además, puesto que el valor de Shapley en* $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ *viene dado por la matriz*

$$A^{Sh^{\mathcal{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

y se tiene que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la estimación superior de localización en $(N, \mathcal{A})$ *generada a partir de* Δ *y el valor de Shapley* $Sh^{\mathcal{P}}$ *en* $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$ *viene determinada por la matriz*

$$A^{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

resultado de realizar la operación $QA^{Sh^{\mathcal{P}}}D^{\Delta}$.

También aquí se observa que la matriz $A^{U} = \left[a_{ij}^{U}\right]$ *no corresponde a ninguna estimación superior razonable en* $(N, \mathcal{A})$*, puesto que no verifica la caracterización expresada en el Teorema VI.1.12, ya que* $1 \in P_3$ *y debería cumplirse que* $a_{13}^{U} = 1$.

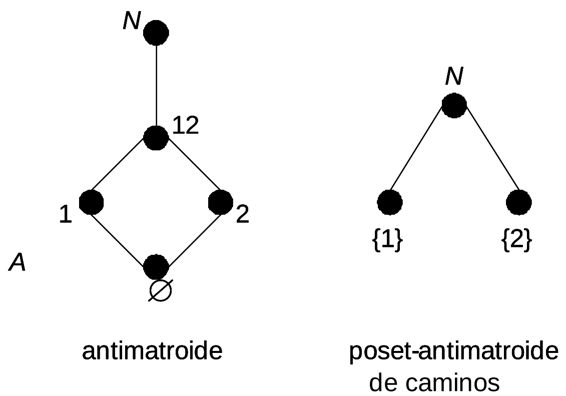

Figura VI.1

Sin embargo, recordando que en un poset-antimatroide todos los valores razonables directos que verifican la Propiedad de Grupo Fundamental coinciden con el valor de Shapley y que el valor identidad no verifica, en general, tal propiedad, se observará a continuación que siguiendo el mismo proceso anterior, pero eligiendo el valor identidad en el poset-antimatroide $(P(\mathcal{A}), \mathcal{P})$, sí se consigue una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$.

Definición 2.6. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $U^{\Delta} : \mathbb{R}_{+}^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$ tal que $U^{\Delta}(w) = \left(U_i^{\Delta}(w)\right)_{i \in N}$ para cada $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$, se denomina estimación superior de situación en $(N, \mathcal{A})$ si existe una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ de forma que, para cada $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$ y cada $i \in N$,*

$$U_i^{\Delta}(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A}) : i \in S\}} w_S^{\Delta}.$$

Teorema 2.7. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide y considérese en él una estimación superior de situación $U^{\Delta} : \mathbb{R}_{+}^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$. Entonces, la aplicación U^{Δ} es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$. Concretamente, su matriz asociada $A^{U^{\Delta}} = \left[a_{ij}^{U^{\Delta}}\right]_{|N| \times |N|}$ viene dada, para cualesquiera $i, j \in N$, por*

$$a_{ij}^{U^{\Delta}} = \sum_{\{S \in A(j) : i \in S\}} \delta_S,$$

siendo $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ una familia de distribuciones de probabilidad en $P(\mathcal{A})$.

Demostración. Dado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$, considérese en él una estimación superior de situación $U^{\Delta} : \mathbb{R}_{+}^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$. Entonces, por definición, existe una familia de distribuciones de probabilidad $\Delta = \left\{(\delta_S)_{S \in A(i)} : i \in N\right\} \in \Delta[\mathcal{A}]$ en $P(\mathcal{A})$ de forma que, para cada $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$ y cada $i \in N$,

$$U_i^{\Delta}(w) = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A}) : i \in S\}} w_S^{\Delta}.$$

Esto es, existe una matriz $A^{U^{\Delta}} = \left[a_{ij}^{U^{\Delta}}\right]_{|N| \times |N|}$ asociada a U^{Δ}, tal que

$$A^{U^{\Delta}} = QD^{\Delta},$$

siendo $D^{\Delta} = [d_{Si}]$ la matriz, de orden $|P(\mathcal{A})| \times |N|$, asociada a $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$, cuyos términos, para cada $S \in P(\mathcal{A})$ y cada $i \in N$, vienen dados por

$$d_{Si}^{\Delta} := \begin{cases} \delta_S, & \text{si } S \in A(i) \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y $Q = (q_{iS})$ la matriz de orden $|N| \times |P(\mathcal{A})|$ tal que, para cada $i \in N$ y $S \in P(\mathcal{A})$,

$$q_{iS} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

De aquí, se sigue que, para cualesquiera $i, j \in N$,

$$0 \leq a_{ij}^{U^{\Delta}} = \sum_{S \in P(\mathcal{A})} q_{iS} d_{Sj}^{\Delta} = \sum_{\{S \in P(\mathcal{A}): i \in S\}} d_{Sj}^{\Delta} = \sum_{\{S \in A(j): i \in S\}} \delta_S \leq \sum_{S \in A(j)} \delta_S = 1.$$

Además, si $i, j \in N$ son tales que $i \notin P^j$, se verifica que no existe ningún j-camino $S \in A(j)$ tal que $i \in S$, con lo que $a_{ij}^{U^{\Delta}} = 0$. Por tanto, la igualdad $A^{U^{\Delta}} = QD^{\Delta}$ permite afirmar que la matriz $A^{U^{\Delta}} = \left[a_{ij}^{U^{\Delta}}\right]_{|N| \times |N|}$ es una matriz esencial en $(N, \mathcal{A})$, con $a_{ij}^{U^{\Delta}} \in [0, 1]$ y tal que$A^{U^{\Delta}} w = U^{\Delta}(w)$, para cada $w \in \mathbb{R}_{+}^{N}$. De aquí, mediante la caracterización enunciada en el Teorema VI.1.12, se deduce que la aplicación U^{Δ} es una estimación superior razonable en $(N, \mathcal{A})$. ■

Aún más, fijado un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ y recordando el Teorema V.3.14, en el que se demostró que las matrices asociadas al conjunto de distribuciones de probabilidad $\Delta \in \Delta[\mathcal{A}]$ coincide con la envolvente convexa de las matrices asociadas a la familia $\eta[\mathcal{A}]$ de selectores de camino en el antimatroide, el resultado anterior conlleva a expresar la familia $U_s[\mathcal{A}]$ de matrices asociadas a las estimaciones superiores de situación en un antimatroide como sigue.

Teorema 2.8. *Sea $(N, \mathcal{A})$ un antimatroide. Se verifica que*

$$U_s[\mathcal{A}] = conv\{QM^{\eta} : \eta \in \eta[\mathcal{A}]\}.$$

De esta forma, cada estimación superior de situación en un antimatroide $(N, \mathcal{A})$ determina un valor razonable indirecto en el antimatroide y en particular, si se considera el centro del conjunto convexo $U_s[\mathcal{A}]$, se obtiene un valor razonable indirecto en $(N, \mathcal{A})$, que será denominado *valor indirecto de situación central.* Puesto que el número de selectores de camino $|\eta[\mathcal{A}]|$ que es posible definir en $(N,\mathcal{A})$ es $\prod_{k\in N}|A(k)|$, la matriz $A=(a_{ij})$ que constituye el centro del conjunto $U_s[\mathcal{A}]$ viene dada por

$$A=\frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]}QM^{\eta}.$$

Teniendo en cuenta la definición de la matriz $M^{\eta}=(m^{\eta}_{Si})$ de orden $|P(\mathcal{A})|\times|N|$ asociada a cada selector de camino $\eta\in\eta[\mathcal{A}]$, cuyos términos, para cada $S\in P(\mathcal{A})$ y cada $i\in N$, son

$$m^{\eta}_{Si}:=\begin{cases}1, & \text{si } \eta(i)=S\\ 0, & \text{en otro caso;}\end{cases}$$

y considerando la matriz $Q=(q_{iS})$ de orden $|N|\times|P(\mathcal{A})|$, se verifica que, para cualesquiera $i,j\in N$ tales que $i\in\eta(j)$,

$$\begin{aligned}a_{ij} &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:i\in\eta(j)}\sum_{S\in P(\mathcal{A})}q_{iS}m^{\eta}_{Sj}=\frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:i\in\eta(j)}\sum_{\{S\in P(\mathcal{A}):i\in S\}}m^{\eta}_{Sj}\\ &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:i\in\eta(j)}1=\frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{S\in A(j):i\in S\}}\sum_{\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(j)=S\}}1\\ &= \frac{1}{\prod_{k\in N}|A(k)|}\sum_{\{S\in A(j):i\in S\}}|\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(j)=S\}|\\ &= \frac{1}{|A(j)|}\sum_{\{S\in A(j):i\in S\}}1=\frac{|\{S\in A(j):i\in S\}|}{|A(j)|},\end{aligned}$$

puesto que, para cada $S\in A(j)$,

$$|\{\eta\in\eta[\mathcal{A}]:\eta(j)=S\}|=\prod_{k\in N\setminus\{j\}}|A(k)|.$$

En otro caso, para $i,j\in N$ tales que $i\notin\eta(j)$, se tiene que $a_{ij}=0$.

De aquí se extrae la siguiente definición y el enunciado posterior.

Definición 2.9. *Sea $(N,\mathcal{A})$ un antimatroide. Una aplicación $K:\mathbb{R}^N_+\to\mathbb{R}^N$ tal que $K(w)=(K_i(w))_{i\in N}$ para cada $w\in\mathbb{R}^N_+$, se denomina estimación superior de situación central en $(N,\mathcal{A})$ si, para cada $w\in\mathbb{R}^N_+$ y cada $i\in N$,*

$$K_i(w)=\sum_{\{j\in N:i\in P^j\}}\frac{|\{S\in A(j):i\in S\}|}{|A(j)|}w_j.$$

Equivalentemente, la estimación superior de situación central en $(N, \mathcal{A})$ *es una estimación superior razonable, cuya matriz asociada* $A^K = \left[a_{ij}^K\right]_{|N|\times|N|}$ *viene dada, para cualesquiera* $i, j \in N$*, por*

$$a_{ij}^K := \begin{cases} \frac{|\{S\in A(j): i\in S\}|}{|A(j)|}, & si\ i \in P^j \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Teorema 2.10. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide. La estimación superior de situación central en* $(N, \mathcal{A})$ *es el centro de la familia* $U_s[\mathcal{A}]$ *de matrices asociadas a las estimaciones superiores de situación en un antimatroide.*

A partir de la estimación superior de situación central en un antimatroide se define el siguiente valor razonable indirecto.

Definición 2.11. *Sea* $(N, \mathcal{A})$ *un antimatroide, y considérese la estimación superior de situación central* $K : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ *en* $(N, \mathcal{A})$*. Se denomina valor indirecto de situación central en* $(N, \mathcal{A})$ *al valor razonable indirecto* $\phi^{K,\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$ *correspondiente a* K *en* $(N, \mathcal{A})$*.*

Finalmente se considera un juego de Mercado con Información con varios jugadores informados para completar, en este juego, el recorrido por los valores en juegos interior más destacados introducidos en esta memoria.

Ejemplo 2.12. *Sea* $(N, w_{\mathcal{A}})$ *un juego de Mercado con Información con varios jugadores informados, según el Ejemplo II.1.14. Se determina, a continuación, el valor que origina, para este juego, el valor indirecto de situación central.*

Recuérdese que los jugadores informados son los átomos del antimatroide y que los caminos en $(N, \mathcal{A})$ *son*

$$A(i) = \begin{cases} \{\{i\}\}, & si\ i \in I \\ \{\{i,j\} : j \in I\}, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Según la Definición VI.2.9, la estimación superior de situación central, $K(w)$*, viene dada, para cada* $i \in N$*, por*

$$K_i(w) = \begin{cases} w_i + \dfrac{1}{|I|} w(N \setminus I), & si\ i \in I \\ w_i, & si\ i \notin I. \end{cases}$$

Para esta estimación superior, su etimación inferior, $k_i(w)$, para cada $i \notin I$, verifica que

$$k_i(w) = \text{máx}\left\{0, \text{máx}_{j\in I}\left[w(\{i,j\}) - w_j - \frac{1}{|I|}w(N\setminus I)\right]\right\} = \text{máx}\left\{0, w_i - \frac{1}{|I|}w(N\setminus I)\right\},$$

por tanto,

$$k_i(w) = \begin{cases} w_i, & \text{si } i \in I \\ \text{máx}\left\{0, w_i - \frac{1}{|I|}w(N\setminus I)\right\}, & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$

Denotando con $gb^{\mathcal{A}}(w)$ al conjunto de jugadores $\left\{k \in N\setminus I : w_k > \frac{1}{|I|}w(N\setminus I)\right\}$, se tiene que

$$k_i(w) = \begin{cases} w_i, & \text{si } i \in I \\ w_i - \frac{1}{|I|}w(N\setminus I), & \text{si } i \in gb^{\mathcal{A}}(w) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Según la Definición VI.2.11, el valor indirecto de situación central proporciona en $(N, w_{\mathcal{A}})$ el vector de pago eficiente, $\phi^{K,\mathcal{A}}(w) \in \mathbb{R}^N_+$, que verifica

$$\phi^{K,\mathcal{A}}(w) = \alpha K(w) + (1-\alpha)k(w),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto es,

$$w(I) + 2\alpha w(N\setminus I) + (1-\alpha)w\left(gb^{\mathcal{A}}(w)\right) - (1-\alpha)\frac{\left|gb^{\mathcal{A}}(w)\right|}{|I|}w(N\setminus I) = w(N).$$

Y de aquí,

$$\alpha = 1 - \left[\frac{|I|\,w(N\setminus I)}{2\,|I|\,w(N\setminus I) - |I|\,w(gb^{\mathcal{A}}(w)) + |gb^{\mathcal{A}}(w)|\,w(N\setminus I)}\right].$$

Obsérvese que $\left|gb^{\mathcal{A}}(w)\right| \leq |I| - 1$. Un caso particular, en este juego, sucede cuando $gb^{\mathcal{A}}(w) = \emptyset$; en este caso, $\alpha = 1/2$ y, teniendo en cuenta el Ejemplo V.3.21, se obtiene que el valor indirecto de situación central coincide con el valor directo de situación central. Esto es, $\phi^{K,\mathcal{A}}(w) = Pc(w)$.

Bibliografía

[1] Algaba, E., Bilbao, J.M., Brink, R. van den, and Jiménez-Losada, A. (2004). Cooperative games on antimatroids. *Discrete Math.* 282, 1-15.

[2] Aumann, R. and Mashler, M. (1964). The bargaining set for cooperative games. *Advances in Game Theory.* M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443-476.

[3] Banzhaf, J.F. (1965). Weighted voting doesn´t work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19, 317-343.

[4] Bergantiños, G., Carreras, F., García-Jurado, I. (1993). Cooperation when some players are incompatible, *ZOR-Methods and Models of Oper. Res.* 38, 187-201.

[5] Bilbao J.M., Jiménez-Losada, A, Lebrón E, Chacón C. (2005). Values for interior operator games. *Ann. Oper. Res.* 137, 141-160.

[6] Bilbao J.M., Jiménez-Losada, A, Lebrón E, Chacón C. (2008). Convexity properties for interior operator games. *Ann. Oper. Res.* 158, 117-131.

[7] Bilbao, J.M., Fernández, F.R. (1999). *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales.* Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla.

[8] Bilbao, J.M. (2000). *Cooperative games on combinatorial structures.* Theory and Decision Library (series C). Kluwer Academic Publishers.

[9] Bondareva, O.N. (1963). Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. *Problemy Kibernet* 10, 119-139.

[10] Borel, É. (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau simétrique gauche. *C. R. Acad. Sci. Paris* 173, 1304-1308

[11] Borm, P., Owen G., Tijs. S. (1992). The position value for comunication situations. *SIAM J. Discrete Math.* 5, 305-320.

[12] Brânzei, R., Fragnelli, V., Tijs, S. (2002). Tree-connected peer group situations and peer group games. *Math. Meth. Oper. Res.* 55, 93-106.

[13] Brink, R van den (1997). An axiomatization of the disjuntive permission value for games with a permission structure. *Intern. J. Game Theory* 26, 27-43.

[14] Calvo, E., Lasaga, J. (1997). Probabilistic graphs and power indices: an application to the spanish parliament. *Journal of Theorical Politics* 9 (4), 477-501.

[15] Carreras, F. (1991). Restriction of simple games. *Math. Social Sciences* 21, 245-260.

[16] Dilworth, R.P. (1940). Lattices with unique irreducible descompositions. *Ann. Math.* 41, 771-777.

[17] Driessen, T.S.H. (1988). *Cooperative games. solutions and applications.* Dordrecht: Kluwer Academic.

[18] Driessen, T.S.H., Tijs, S.H. (1983). The τ-valor, the nucleolus and the core for a subclass of games. *Meth. Oper. Res.* 46, 395-406.

[19] Driessen, T.S.H., Tijs, S.H. (1991). k-convexity of big boss games and clan games. *Meth. Oper. Res.* 64, 267-275.

[20] Driessen, T.S.H., Tijs, S.H. (1995). A bankruptcy problem and an information trading problem: aplications to k-convex games. *ZOR-Methods and Models of Oper. Res.* 41, 313-324.

[21] Edelman, P.H. (1980). Meet-distributive lattices and the anti-exchange closure. *Algebra Universalis* 10, 290-299.

[22] Edelman, P.H., Jamison, R.E. (1985). The theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata* 19, 247-270.

[23] Faigle, U. (1989). Cores of games with restricted cooperation. *ZOR-Methods and Models of Oper. Res.* 33, 402-405.

[24] Gilles, R.P., Owen, R., Brink, R. van den (1992). Games with permission structures: the conjunctive approach. *Int. J. Game Theory* 20, 277-293.

[25] Gillies, D.B. (1953). *Some theorems on n-person games.* Ph. D. Thesis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[26] Goecke, O., Korte, B., Lovász, L. (1986). *Examples and algorithmic properties of greedoids.* In B. Simeone (Eds), Combinatorial Optimization. Berlin: Springer.

[27] Harsanyi, J.C., R. Selten. (1988). *A general theory of equilibrium selection in games.* Cambridge, Massachusets: The MIT Press.

[28] Jiménez Jiménez, N. (1998). *Conceptos de solución para juegos sobre espacios de clausura.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

[29] Jiménez Losada, A. (1998). *Valores para juegos sobre estructuras combinatorias.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, España.

[30] Jungnickel, D. (2005). Basic graph theory. *Graphs, networks and algorithms.* M. Bronstein, A.M.Cohen, H. Cohen, D. Eisenbud, B. Sturmfels (eds.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[31] Kannai, Y. (1992). The core and balancedness. *Handbook of game theory.* R. J. Aumann, S. Hart (eds.). North-Hallen, Amsterdam, 355-395.

[32] Korte, B., Lovász, L., Schrader, R. (1991). *Greedoids.* Berlin, Heidelberg, New york. Spinger-Verlag.

[33] Kuipers, J. (1994). *Combinatorial methods in cooperative game theory.* Ph. D. Thesis, University of Maastricht, The Netherlands.

[34] Littlechild, S.C., G. Owen (1973). A simple expression for the shapley value in a special case. *Management Sci.* 20, 370-372.

[35] López, J. (1996). *Cooperación parcial en juegos de n-personas.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

[36] Meggido, N. (1978). Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree. *Math. Oper. Res.* 3, 189-196.

[37] Muto, S., Nakayama, M., Potters, J., Tijs, S. (1987). On big boss games. *Economic Studies Quarterly* 39, 303-321.

[38] Muto, S., Potters, J., Tijs, S. (1989). Information market games. *Int. J. Game Theory* 18, 209-226.

[39] Muto, S., Poos, R., Potters, J., Tijs, S. (1989). Clan games. *Games and Economic Behavior* 1, 275-293.

[40] Myerson, R. B. (1977). Graphs and coperation in games. *Math. Oper. Res.* 2, 225-229.

[41] Myerson, R. B. (1991). *Game theory.* Analysis of Conflict, Harvard University Press, Cambridge.

[42] Nouweland, A. Van den, Borm, P. (1991). On the convexity of communication games. *Int. J. Game Theory* 19, 421-430.

[43] Nouweland, A. Van den, Borm, P., Tijs, S. (1992). Allocation rules for hypergraph communication situations. *Int. J. Game Theory* 20, 255-268.

[44] Nouweland, A. Van den (1992). *Games and graphs in economic situations.* Ph. D. Thesis, University of Tilburg, The Netherlands.

[45] Owen, G. (1986). Values of graph-restricted games. *SIAM J. of Algebraic and Discrete Methods* 7, 210-220.

[46] Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. *Contributions.to the Theory of Games*, vol 2. H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds.). Princeton, New Jersey, 307-317.

[47] Shapley, L. S. (1967). On balanced sets and cores. *Naval Res. Logist. Quart.* 14, 453-460.

[48] Shapley, L.S., Shubik, M. (1969). On market games. *J. Economic Theory* 1, 9-25.

[49] Tijs, S.H. (1981). Bounds for the core and the τ-value. *Game Theory and Mathematical Economics.* O. Moeschlin and D. Pallaschke (eds.). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 123-132.

[50] Tijs, S.H., Otten, G. (1993). Compromise values in cooperative games theory. *TOP* 1 (1), 1-51.

[51] Von Neumann, J. (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* 100, 295-320.

[52] Von Neumann, J., Morgenstern , O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[53] Weber, R. J. (1988). Probabilistic values for games. *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*. A.E. Roth (eds.). Cambridge University Press.