

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO
DE SISTEMAS AUTÓNOMOS TRIDIMENSIONALES
LINEALES A TROZOS**

**FRANCISCO JAVIER ROS PADILLA
TESIS DOCTORAL**

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SISTEMAS AUTÓNOMOS TRIDIMENSIONALES LINEALES A TROZOS

Memoria presentada por FRANCISCO JAVIER ROS PADILLA para optar al
grado de Doctor en Ingeniería Industrial por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº de los Directores:



Fdo. EMILIO FREIRE MACÍAS
Catedrático de Universidad
Dpto. de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla



Fdo. ENRIQUE PONCE NÚÑEZ
Catedrático de Universidad
Dpto. de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

Sevilla, 29 de Mayo de 2003



Agradecimientos

A los directores de esta tesis, Emilio Freire y Enrique Ponce, por el tema sugerido y su ayuda, imprescindible, para llegar a buen puerto.

A Victoriano Carmona, Francisco Torres y Francisco Rodrigo porque siempre me ofrecieron sus conocimientos científicos de forma desinteresada. Algunos aspectos relevantes de esta memoria son el resultado de largas charlas mantenidas con ellos, de forma individual o en grupo.

A Francisco Naranjo, Jose Miguel Díaz Báñez y Ana Beatriz Sánchez con los que compartí despacho durante la realización de la tesis.

A los demás compañeros del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, y en especial a los pertenecientes al Grupo de Sistemas Dinámicos.

*A Marga, Javier y Juan por el tiempo dedicado a la tesis y no a
ellos.*

*A mis padres y hermanos.
A la memoria de mis abuelos.*

Índice general

1. Introducción	3
2. Formas canónicas	7
2.1. Definición y primeras propiedades	7
2.2. Sistemas planos y tridimensionales	13
3. Análisis de órbitas periódicas	23
3.1. Equilibrios	25
3.2. Las ecuaciones de cierre	27
3.3. Aplicación de Poincaré	31
3.4. Balance armónico	40
4. La Bifurcación foco-centro-ciclo límite	49
4.1. Caso S3CPL ₂ observable	50
4.1.1. Ecuaciones de cierre y estabilidad	59
4.1.2. Comparación con el método de balance armónico	76
4.1.3. El oscilador en puente de Wien	80
4.2. Caso S3CPL ₃ observable	88
4.2.1. Degeneración de la bifurcación foco-centro-ciclo límite	110
4.2.2. Balance armónico	137
4.2.3. El circuito de Chua	143
4.3. Caso S3CPL ₃ no observable	160
5. La Bifurcación de Hopf en el infinito	163
5.1. Caso plano	164

5.2. Caso tridimensional	174
5.2.1. Degeneración de la bifurcación	194
Conclusiones	215

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas lineales a trozos aparecen con frecuencia en el modelado matemático de ciertos problemas en ingeniería, y en particular cuando aparecen fenómenos en los que se producen saturaciones en los dispositivos involucrados, como pueden ser sistemas electrónicos, sistemas de control y dispositivos con regímenes de funcionamiento con zonas de activa y de corte. Es interesante destacar que si bien los sistemas polinomiales proporcionan excelentes modelos locales, los sistemas lineales a trozos, en los que la separación entre lo local y lo global se difumina, representan buenos modelos globales para muchos fenómenos no lineales.

La falta de diferenciabilidad de estos sistemas hace que, para la detección y caracterización de sus posibles bifurcaciones, no se puedan aplicar los resultados propios de la dinámica diferenciable y haya que desarrollar herramientas específicas. Es en este contexto donde se sitúa el trabajo que se describe en esta memoria.

La moderna teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos tiene su origen en los trabajos de H. Poincaré al final del siglo XIX motivados, como es bien conocido, por el estudio de problemas de mecánica celeste.

Es menos conocido que las primeras aplicaciones de las ideas de Poincaré se producen en el campo de la investigación básica en ingeniería, concretamente en la teoría de circuitos eléctricos y de control. Citemos a este respecto el descubrimiento por Van der Pol en los años 20 de la existencia de oscilaciones periódicas automantenidas (concepto definido por Poincaré como ciclo límite)

en circuitos electrónicos con triodos, los resultados teóricos de Cartan y Liénard que prueban dicha existencia y caracterizan su estabilidad (motivados por la dinámica de circuitos eléctricos y publicados en muchos casos en revistas de la especialidad, ver [L28]) y los trabajos pioneros de Andronov y Pontriaguin y su escuela que extienden las ideas y métodos de Poincaré y comienzan a introducirlos en el estudio de oscilaciones de sistemas eléctricos, mecánicos y de control.

En el libro seminal de Andronov, Vitt y Khaikin “Teoría de Oscilaciones” publicado en 1937 podemos encontrar abundantes ejemplos de tales aplicaciones [AVK66]. En particular, hay que hacer notar el uso de funciones lineales a trozos (continuas y discontinuas) en el modelado de las no linealidades presentes: características estáticas de los dispositivos electrónicos, mecánicos y de control.

Hay pues una tradición en el ámbito de la ingeniería, que ha continuado hasta nuestros días, de considerar las funciones lineales a trozos como las aproximaciones más adecuadas a ciertos comportamientos no lineales: saturación, zona muerta, limitador de pendiente, etc. Por consiguiente, el estudio del comportamiento dinámico de los sistemas dinámicos lineales a trozos es de gran interés.

En los sistemas lineales a trozos tenemos regiones del espacio de estado donde la dinámica es puramente lineal y por tanto integrables explícitamente. La dificultad surge cuando nos planteamos unir dichos flujos lineales a lo largo de las fronteras comunes a las correspondientes regiones de comportamiento lineal. En este punto, queremos señalar, como ya se ha dicho, que la no diferenciabilidad de las funciones lineales a trozos impide usar, en principio, los resultados y técnicas de la dinámica diferenciable y que el análisis de la dinámica lineal a trozos está lejos de ser trivial.

Con referencia a los dispositivos electrónicos, un conjunto de sistemas lineales a trozos que presentan un especial interés lo constituyen aquellos que poseen dos o tres variables de estado y dos o tres zonas de linealidad separadas por variedades lineales paralelas. Como ejemplos de tales sistemas podemos destacar el oscilador en puente de Wien como sistema plano con tres zonas, el circuito de Chua como sistema de tres zonas tridimensional y el circuito de Colpitts como sistema tridimensional con dos zonas.

Los sistemas lineales a trozos presentan una dinámica de gran riqueza, incluyendo la existencia de comportamiento caótico, como se pone de manifiesto en la gran cantidad de publicaciones sobre el circuito de Chua como ejemplo de sistema trizonal y el oscilador de Colpitts como ejemplo de sistema bizonal. La variedad de comportamiento exhibido por los sistemas lineales a trozos nos lleva a pensar que estos sistemas son capaces de reproducir los fenómenos dinámicos que cabe esperar, en general, de un sistema dinámico.

En la tesis doctoral [Ca02] se consideraban principalmente los sistemas continuos planos y tridimensionales con dos zonas lineales. Aquí nos limitaremos exclusivamente a los sistemas con tres zonas y con simetría respecto del origen, si bien una parte de los resultados alcanzados podría extenderse sin demasiada dificultad a sistemas sin simetría y, en particular, a sistemas con sólo dos zonas lineales. Aunque nuestro objetivo son los sistemas tridimensionales, presentamos primero los correspondientes resultados para sistemas planos, lo que facilitará la comprensión de los mismos, y dejamos la puerta abierta a futuras generalizaciones a dimensión mayor que tres.

En los trabajos [FPT96], [FPT97], [FPRT98] y [FPR99], todos relativos a sistemas lineales a trozos, se explotaba la utilidad de contar con una forma canónica para su posterior análisis. Recientemente en [CFPT02] se han propuesto distintas formas canónicas para sistemas con dos zonas y sistemas simétricos con tres zonas, aplicando ideas propias de la teoría de control y consiguiendo formas canónicas en las que la no linealidad del sistema se manifiesta en una sola de sus ecuaciones. Para los objetivos de nuestro trabajo, ha resultado más conveniente considerar, sin embargo, la forma canónica que llamamos forma generalizada de Liénard, en la que el carácter no lineal está presente en todas y cada una de las ecuaciones del modelo. Los hechos básicos que precisamos sobre formas canónicas son revisados en el Capítulo 2 de esta memoria, donde se usan ideas muy similares a las que pueden verse en [CFPT02].

El análisis del comportamiento dinámico de los sistemas se realiza con frecuencia definiendo una adecuada aplicación de Poincaré. Para los sistemas lineales a trozos, esta definición implica comúnmente la composición de diferentes aplicaciones parciales. En particular, el análisis de las citadas aplicaciones permite describir las bifurcaciones que presentan estos sistemas y dar resultados sobre la existencia y estabilidad de ciclos límite, órbitas homoclinas y

heteroclinas.

En esta memoria, nuestro interés se ceñirá al análisis de bifurcaciones que dan lugar a la aparición de ciclos límite con simetría respecto al origen. Así, en el Capítulo 3 se presentan, junto con algunos resultados sobre los equilibrios del sistema, las técnicas de análisis de órbitas periódicas que utilizaremos en el resto de la memoria, todo ello con la mayor generalidad posible, es decir, en sistemas simétricos con tres zonas y en dimensión n . El uso de las aplicaciones de Poincaré permite introducir las llamadas ecuaciones de cierre, cuya adecuada explotación será clave en los sucesivos capítulos. Además, se obtiene un lema de carácter técnico que será vital para determinar la estabilidad de las eventuales órbitas periódicas. En la última parte del Capítulo 3 se hace una revisión del método de balance armónico. Este método aproximado es frecuentemente utilizado en ingeniería, ya que proporciona mucha información con poco esfuerzo de cálculo. Más adelante será posible calibrar la bondad de sus aproximaciones al compararlas con nuestros resultados analíticos.

Los resultados principales de esta memoria aparecen en los Capítulos 4 y 5. Se aborda en ellos el análisis de las dos principales bifurcaciones responsables de la creación o desaparición de ciclos límites en los sistemas que nos ocupan. En el Capítulo 4, se considera en primer lugar la bifurcación foco-centro-ciclo límite, que tiene ciertas similitudes, pero también diferencias, con la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf propia de los sistemas diferenciables. Una parte de los resultados relativos al caso plano ya había aparecido en [FPR99]. Tras el análisis de los casos plano y tridimensional, junto con las posibles degeneraciones de este último, se aborda la comparación de los resultados analíticos con las predicciones del método de balance armónico. Por último, se presentan aplicaciones a dos circuitos electrónicos concretos: el oscilador en puente de Wien y el circuito de Chua.

Estudiamos, finalmente en el Capítulo 5, la bifurcación de Hopf del punto del infinito (de nuevo para los casos de dimensión 2 y 3) y sus posibles degeneraciones en el caso tridimensional. Se observa cierta dualidad paramétrica al comparar las condiciones para la existencia de la bifurcación con las correspondientes a la bifurcación foco-centro-ciclo límite del Capítulo 4.

En un último Capítulo, se ofrecen las principales conclusiones del trabajo junto con algunas ideas para futuros desarrollos.

Capítulo 2

Formas canónicas

En este Capítulo estudiaremos formas canónicas para sistemas continuos lineales a trozos de dimensión n , simétricos con tres zonas que abreviaremos como S3CPL $_n$, como un paso previo para facilitar su análisis. Se presentan procedimientos para determinar sistemas equivalentes al inicial (obtenidos por cambios lineales) con menor número de parámetros y que, por tanto, resultan más simples y al mismo tiempo recogen todo su comportamiento dinámico.

Las formas canónicas se obtienen analizando distintas propiedades de las matrices que rigen a estos sistemas. En particular, se considerarán los sistemas S3CPL $_n$ escritos en forma de control y se utilizarán los conceptos de observabilidad y controlabilidad propios de la Teoría de Control para obtener determinadas formas canónicas.

2.1. Definición y primeras propiedades

Definición 2.1 *Una ecuación diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

se dice que es un sistema lineal a trozos con tres zonas y se denota por 3CPL $_n$, si existen tres vectores \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 y un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n , dos escalares

$\delta_1 < \delta_2$ y tres matrices $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de forma que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0, & \text{para } \mathbf{v}^T\mathbf{x} < \delta_1, \\ A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1, & \text{para } \delta_1 \leq \mathbf{v}^T\mathbf{x} \leq \delta_2, \\ A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2, & \text{para } \delta_2 < \mathbf{v}^T\mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

y \mathbf{f} es continua, es decir, para cualquier \mathbf{x} tal que $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = \delta_i$ se verifica

$$A_{i-1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{i-1} = A_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2.$$

Usaremos I para la matriz identidad de orden adecuado, y \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_i^p para el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^p respectivamente, donde $p < n$. Además, el símbolo $\mathbf{0}$ denotará un bloque de ceros de dimensiones adecuadas.

Los hiperplanos $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = \delta_i$, $i = 1, 2$, pueden ser transformados mediante un cambio lineal de variables en los hiperplanos $x_1 = \pm 1$. Por tanto, en lo que sigue asumiremos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$, $\delta_1 = -1$ y $\delta_2 = 1$ en (2.1), es decir, consideramos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0, & \text{para } \mathbf{e}_1^T\mathbf{x} < -1, \\ A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1, & \text{para } |\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}| \leq 1, \\ A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2, & \text{para } 1 < \mathbf{e}_1^T\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Definición 2.2 Un sistema $3CPL_n$ se denominará simétrico, y se denotará mediante $S3CPL_n$, si verifica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Obviamente, un sistema de la forma (2.2), es simétrico si y sólo si $A_0 = A_2$, $\mathbf{b}_0 = -\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$. La continuidad del campo implica que, si definimos $A = A_0 = A_2$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_0$, se tiene que

$$A_1 = A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T,$$

con lo que concluimos que los sistemas $3CPL_n$ simétricos responden a la formulación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} A\mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{para } \mathbf{e}_1^T\mathbf{x} < -1, \\ (A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T)\mathbf{x}, & \text{para } |\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}| \leq 1, \\ A\mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{para } 1 < \mathbf{e}_1^T\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Para trabajar de una manera más sistemática con los sistemas S3CPL_n, introducimos la no linealidad canónica denominada saturación normalizada definida por

$$\text{sat}(\sigma) = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma), & \text{si } |\sigma| > 1, \\ \sigma, & \text{si } |\sigma| \leq 1, \end{cases}$$

que nos permitirá expresar los sistemas S3CPL_n en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

y que representan un caso particular de la forma de Luré

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(\mathbf{c}^T \mathbf{x}), \quad (2.5)$$

donde φ es una función no lineal dada.

Por otra parte, los sistemas del tipo (2.5) son un caso particular de los sistemas de control

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde y es la salida y $u = \varphi(y)$ es la señal de control. Debido a esto, algunos conceptos de la teoría de control se pueden usar para obtener formas canónicas reducidas para sistemas S3CPL_n con fronteras paralelas. En particular, las siguientes definiciones son de utilidad.

Definición 2.3 Decimos que el sistema (2.6) es observable si la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

tiene rango completo.

Definición 2.4 Decimos que el sistema (2.6) es controlable si la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid A^2\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b}]^T,$$

tiene rango completo.

Como es sabido, los rangos de las matrices de observabilidad y controlabilidad son invariantes frente a cambios lineales de variable. A continuación, obtenemos una forma canónica para sistemas observables, que llamaremos forma generalizada de Liénard, y que será el punto de partida de los sistemas considerados en esta memoria. La prueba que incluimos es ligeramente distinta de la que se expone en [Ch84].

Proposición 2.5 (*Forma canónica generalizada de Liénard*) Si el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(\mathbf{c}^T\mathbf{x}), \quad \text{con } \mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \text{ y } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$

es observable, existe una transformación lineal regular $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$, de forma que en las nuevas variables el sistema se escribe como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} d_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{b}}\varphi(y_1), \quad (2.8)$$

donde $\bar{\mathbf{b}} = T^{-1}\mathbf{b}$.

Demostración. Si T es una matriz regular, el cambio de variables $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ transforma el sistema (2.7) en

$$\dot{\mathbf{y}} = T^{-1}A T\mathbf{y} + T^{-1}\mathbf{b}\varphi(\mathbf{c}^T T\mathbf{y}). \quad (2.9)$$

Veamos que mediante una adecuada elección de la transformación T , el sistema (2.9) toma la forma (2.8). Por la hipótesis de observabilidad, existirá un único vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Si definimos la matriz S por columnas de la siguiente forma

$$S = [A^{n-1}\mathbf{v} \mid \cdots \mid A\mathbf{v} \mid \mathbf{v}],$$

se tiene que

$$\mathbf{c}^T S = [\mathbf{c}^T A^{n-1} \mathbf{v} \mid \cdots \mid \mathbf{c}^T A \mathbf{v} \mid \mathbf{c}^T \mathbf{v}] = [1, 0, \dots, 0].$$

Si D es la matriz cuadrada definida de la siguiente forma

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1} \end{bmatrix},$$

eligiendo $T = SD$ se tendrá

$$\mathbf{c}^T T = \mathbf{c}^T S D = [1, 0, \dots, 0],$$

quedando $\varphi(\mathbf{c}^T T \mathbf{y}) = \varphi(y_1)$ tal como aparece en (2.8).

Veamos que la matriz S es regular. Si no lo fuera, existiría una combinación lineal de columnas, distinta de la trivial, tal que

$$\mu_1 A^{n-1} \mathbf{v} + \cdots + \mu_{n-1} A \mathbf{v} + \mu_n \mathbf{v} = 0. \quad (2.11)$$

Premultiplicando por \mathbf{c}^T , queda

$$\mu_1 \mathbf{c}^T A^{n-1} \mathbf{v} + \cdots + \mu_{n-1} \mathbf{c}^T A \mathbf{v} + \mu_n \mathbf{c}^T \mathbf{v} = 0,$$

y recordando (2.10) se obtiene $\mu_1 = 0$. Si en la igualdad (2.11) premultiplicamos por $\mathbf{c}^T A$, se deduce análogamente $\mu_2 = 0$. Repitiendo este proceso premultiplicando (2.11) por $\mathbf{c}^T A^2, \mathbf{c}^T A^3, \dots, \mathbf{c}^T A^{n-1}$, obtenemos

$$\mu_3 = \cdots = \mu_{n-1} = \mu_n = 0.$$

Por tanto, llegamos a una contradicción con la hipótesis de combinación lineal distinta de la trivial, lo que implica que S es regular. Dado que D también lo es, el producto $T = SD$ es regular.

Falta probar que $\bar{A} = T^{-1} A T$ es de la forma indicada en (2.8). Para ello, consideramos la igualdad equivalente $T \bar{A} = A T$, escrita por columnas

$$[A^{n-1} \mathbf{v} \mid \cdots \mid A \mathbf{v} \mid \mathbf{v}] D \bar{A} = [A^n \mathbf{v} \mid \cdots \mid A^2 \mathbf{v} \mid A \mathbf{v}] D,$$

o lo que es lo mismo

$$\left[A^{n-1}\mathbf{v} \mid \cdots \mid (-1)^{n+1}\mathbf{v} \right] \bar{A} = \left[A^n\mathbf{v} \mid \cdots \mid (-1)^{n+1}A\mathbf{v} \right].$$

Considerando las últimas $n - 1$ columnas de la igualdad matricial anterior deducimos que la matriz \bar{A} tiene la estructura indicada en (2.8). ■

Las entradas de la primera columna en (2.8) tienen estrecha relación con los coeficientes del polinomio característico $p_A(\lambda)$ de la matriz A . En concreto, se tiene que

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} d_1 \lambda^{n-1} + \dots - d_{n-1} \lambda + d_n.$$

Nótese que para determinar completamente un sistema del tipo (2.4) son necesarios $n^2 + n$ parámetros, y que la forma canónica de Liénard permite reducir dicho número hasta $2n$. No obstante, la no linealidad expresada por φ aparecerá en general en las n ecuaciones del sistema canónico de Liénard.

Si la matriz de observabilidad no tiene rango completo entonces son válidos ciertos resultados de descomposición. En particular, para el sistema (2.4) se establece el siguiente resultado (ver [CFPT02]).

Proposición 2.6 *Si la matriz de observabilidad del sistema (2.4) tiene rango igual a $p < n$, entonces el sistema puede ser transformado por un cambio lineal de variables en*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{x}_1, N_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_2, N_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ y M_{11}, M_{21} y M_{22} son matrices de órdenes adecuados. Además, el sistema de dimensión p

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = M_{11}\mathbf{x}_1 + N_1 u, \quad y = (\mathbf{e}_1^p)^T \mathbf{x}_1,$$

es observable.

Es posible obtener formas canónicas para los sistemas 3CPL_n simétricos donde la no linealidad está concentrada en una única ecuación, véase por ejemplo las formas canónicas de Van der Pol y de Duffing estudiadas en [Ca02] y

[CFPT02]. Sin embargo, no serán objeto de análisis en esta memoria ya que la forma generalizada de Liénard se ha mostrado la más adecuada para nuestros propósitos.

De [CFPT02] extraemos el siguiente resultado, que considera la pérdida de controlabilidad del sistema (2.4), y que será de utilidad más adelante.

Proposición 2.7 *Si la matriz de controlabilidad del sistema (2.4) tiene rango igual a $p < n$, entonces el sistema puede ser transformado por un cambio lineal de variables en*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \mathbf{d}^T \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_1, N_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_2, N_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ y M_{11}, M_{12} y M_{22} son matrices de órdenes adecuados. Además, las matrices A y $A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T$ comparten $n - p$ autovalores.

2.2. Formas canónicas para sistemas planos y tridimensionales

A continuación se presentan otros resultados relacionados con la Proposición 2.5 para dimensión $n = 2$ y $n = 3$.

Empezamos considerando el caso $n = 2$. La forma de Luré para los sistemas S3CPL₂ es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}), \quad (2.12)$$

con \mathbf{b} arbitrario y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

El siguiente resultado asegura que genéricamente los sistemas (2.12) pueden ser escritos en forma de Liénard; la única hipótesis que se necesita es la condición de observabilidad.

Proposición 2.8 Si se satisface que $a_{12} \neq 0$, el sistema (2.12) puede ser expresado en la forma canónica de Liénard

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} T - t \\ D - d \end{bmatrix} \text{sat}(y_1),$$

donde los cuatro parámetros básicos t , T , d , D son los valores de las trazas y determinantes en las zonas exteriores y central, respectivamente.

Demostración. El sistema (2.12) será observable, ver Definición 2.3, cuando su matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

tenga rango completo. Esto se consigue siempre que $a_{12} \neq 0$. Entonces es inmediata la aplicación de la proposición 2.5, de manera que usando la matriz de cambio de variables

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}/a_{12} & -1/a_{12} \end{bmatrix},$$

obtenemos el resultado del enunciado. ■

En el caso plano no observable, se verifica que $a_{12} = 0$, con lo que la primera ecuación del sistema

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_1 \text{sat}(x_1),$$

queda desacoplada, lo que imposibilita la aparición de oscilaciones periódicas en el sistema (2.12).

Por tanto, el caso plano no observable no presenta interés para el objetivo de esta memoria y no será tratado más.

En el caso tridimensional partimos del sistema (2.4) con $n = 3$, para el que se verifica el siguiente resultado.

Proposición 2.9 Si para la matriz A del sistema (2.4) con $n = 3$ utilizamos la notación por bloques

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{s} & \mathcal{A} \end{bmatrix},$$

donde $a_{11} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, entonces el sistema es observable si y sólo si

$$rg \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix} = 2.$$

Además en dicho caso, el cambio de variables dado por $\mathbf{x} = T\bar{\mathbf{x}}$ con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & Q \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{1}^T = [\operatorname{tr}(\mathcal{A}) \quad \det(\mathcal{A})]$, y

$$Q = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \mathcal{A} - \operatorname{tr}(\mathcal{A})\mathbf{r}^T \end{bmatrix},$$

lleva el sistema a la forma canónica

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}\varphi(x_1), \quad (2.14)$$

donde $t = \operatorname{tr}(A)$, $d = \det(A)$, m es la suma de los menores diagonales de orden 2 de A y $\bar{\mathbf{b}} = T^{-1}\mathbf{b}$.

Demostración. La matriz de observabilidad \mathcal{O} para el sistema (2.4) es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T A \\ \mathbf{e}_1^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a_{11} & \mathbf{r}^T \\ a_{11} + \mathbf{r}^T \mathbf{s} & a_{11}\mathbf{r}^T + \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix}.$$

El rango de \mathcal{O} será igual a 3, si y sólo si el rango de la submatriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ a_{11}\mathbf{r}^T + \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix},$$

es igual a 2. Dado que $a_{11}\mathbf{r}^T$ es un múltiplo de \mathbf{r}^T , el rango de dicha submatriz es igual al rango de la submatriz del enunciado, con lo que la condición equivalente de observabilidad se deduce de inmediato.

Supuesto el rango máximo para \mathcal{O} , por la proposición 2.5 podemos asegurar la existencia de un cambio lineal $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ que da lugar al sistema (2.14). El cambio propuesto en la Proposición 2.5 verifica la relación $\mathbf{e}_1^T T = (1, 0, 0)$, lo que nos permite asegurar la estructura dada en (2.13) para la matriz T^{-1} .

Para el cálculo de \mathbf{g} y Q consideramos la igualdad

$$\begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g} & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{s} & \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

con $\mathbf{r}^T = (r_1, r_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ y $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}$.

Al ser T regular, las matrices A y $T^{-1}AT$ son semejantes y por tanto se conserva la traza t y la suma m de los menores diagonales de orden 2:

$$t = a_{11} + \text{tr}(\mathcal{A}),$$

$$m = \det(\mathcal{A}) + \begin{vmatrix} a_{11} & r_2 \\ s_2 & \mathcal{A}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & r_1 \\ s_1 & \mathcal{A}_{11} \end{vmatrix} = \det(\mathcal{A}) + a_{11}\text{tr}(\mathcal{A}) - \mathbf{r}^T \mathbf{s}.$$

Realizando operaciones por bloques en (2.15) obtenemos:

$$\begin{aligned} g_1 &= \text{tr}(\mathcal{A}), \\ g_2 &= \det(\mathcal{A}), \\ (q_{11}, q_{12}) &= -\mathbf{r}^T, \\ (q_{21}, q_{22}) &= \mathbf{r}^T \mathcal{A} - \text{tr}(\mathcal{A})\mathbf{r}^T, \end{aligned}$$

con lo que queda probado el enunciado. ■

Seguidamente se analizan algunas caracterizaciones de la pérdida de observabilidad en sistemas S3CPL₃. Comenzamos considerando que la matriz de observabilidad tiene rango 2, lo que nos lleva a considerar la situación descrita en el siguiente resultado.

Lema 2.10 *Si para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se verifica*

$$rg \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix} = 1,$$

entonces las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) Existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{r}^T \mathcal{A} = \lambda_1 \mathbf{r}^T$, con $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
- (b) Los autovalores de \mathcal{A} son λ_1 y λ_2 , ambos reales, de manera que el vector $\mathbf{v} = [-r_2, r_1]^T$ verifica $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}$.

Demostración. (a) Es inmediato dado que los vectores \mathbf{r}^T y $\mathbf{r}^T \mathcal{A}$ han de ser proporcionales y no nulos simultáneamente.

(b) Del apartado anterior, se deduce que λ_1 es autovalor de \mathcal{A} y que el otro autovalor λ_2 (no necesariamente distinto) ha de ser también real. Definiendo el subespacio

$$\mathcal{R} = L\{\mathbf{v}\} = L\{\mathbf{r}\}^\perp,$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{r}^T \mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{r}^T \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

se deduce que $\mathcal{A}\mathbf{v} \in \mathcal{R}$, y por tanto existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Obviamente λ es un autovalor de \mathcal{A} . Si los dos autovalores son iguales, entonces $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ y la demostración se termina.

Si por el contrario, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se tiene que existe $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, tal que $\mathcal{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, y premultiplicando por \mathbf{r}^T nos quedaría la igualdad

$$\lambda_1 \mathbf{r}^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{r}^T \mathcal{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{r}^T \mathbf{v}_2,$$

que lleva a $\mathbf{r}^T \mathbf{v}_2 = 0$. Entonces $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{R}$, con lo que \mathcal{R} es el autoespacio asociado a λ_2 , y se concluye la demostración. ■

Nótese que en las condiciones del anterior lema podemos asegurar que el vector $[0, -r_2, r_1]^T$ es autovector asociado al autovalor λ_2 de la matriz A , con lo que las matrices A y \mathcal{A} comparten un autovalor real.

Proposición 2.11 Si para el sistema tridimensional (2.4) utilizamos la notación por bloques

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{s} & \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

donde $a_{11} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, y se verifica $\text{rg}(\mathcal{O}) = 2$, entonces existe un cambio lineal de variables $\mathbf{x} = T\bar{\mathbf{x}}$, con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -r_1 & -r_2 \\ -\mu/\rho & -r_2/\rho & r_1/\rho \end{bmatrix},$$

donde $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ y $\mu = a_{32} - a_{23}$, que lleva el sistema a la forma canónica

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} t_2 & -1 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}} \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{x}}),$$

donde

$$\begin{aligned} t_2 &= a_{11} + \lambda_1, \\ d_2 &= a_{11}\lambda_1 - r_1s_1 - r_2s_2, \\ \bar{\mathbf{b}} &= T^{-1}\mathbf{b}, \\ c_2 &= [\mu(\lambda_2 - a_{11}) + r_1s_2 - r_2s_1]/\rho, \end{aligned}$$

y λ_1, λ_2 son los autovalores de \mathcal{A} , siendo el último también autovalor de A .

Demostración. La matriz de observabilidad para el sistema tridimensional (2.4) es

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T A \\ \mathbf{e}_1^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a_{11} & \mathbf{r}^T \\ a_{11} + \mathbf{r}^T \mathbf{s} & a_{11}^T \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix}.$$

Es evidente que el rango de \mathcal{O} será igual a 2, si y sólo si el rango de la submatriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ a_{11}\mathbf{r}^T + \mathbf{r}^T \mathcal{A} \end{bmatrix},$$

es igual a 1. Aplicando ahora el Lema 2.10 obtenemos que los autovalores de \mathcal{A} son λ_1 y λ_2 , ambos reales, siendo \mathbf{r}^T autovector izquierdo asociado a λ_1 y $\mathbf{v} = [-r_2, r_1]^T$ autovector asociado a λ_2 .

Al sistema tridimensional (2.4) le aplicamos ahora el cambio lineal ortogonal de variables $\mathbf{x} = T_1\tilde{\mathbf{x}}$, con

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1/\rho & -r_2/\rho \\ 0 & r_2/\rho & r_1/\rho \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

obteniendo tras un sencillo cálculo los siguientes valores para el sistema (2.4)

$$\tilde{A} = T_1^T A T_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \rho & 0 \\ \sigma_1 & \lambda_1 & 0 \\ \sigma_2 & \mu & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = T_1^T \mathbf{b},$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (r_1 s_1 + r_2 s_2) / \rho, \\ \sigma_2 &= (r_1 s_2 - r_2 s_1) / \rho, \\ \mu &= \mathbf{v}^T \mathcal{A} \mathbf{r} / \rho^2 = (-r_1 r_2 \mathcal{A}_{11} + r_1^2 \mathcal{A}_{21} - r_2^2 \mathcal{A}_{12} + r_1 r_2 \mathcal{A}_{22}) / \rho^2. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{r}^T \mathcal{A} = \lambda_1 \mathbf{r}^T$, y multiplicamos la primera componente por r_2 y la segunda por r_1 , se tiene que

$$\begin{aligned} r_1 r_2 \mathcal{A}_{11} + r_2^2 \mathcal{A}_{21} &= \lambda_1 r_1 r_2, \\ r_1^2 \mathcal{A}_{12} + r_1 r_2 \mathcal{A}_{22} &= \lambda_1 r_1 r_2. \end{aligned}$$

Despejando ahora $r_1 r_2 \mathcal{A}_{11}$ y $r_1 r_2 \mathcal{A}_{22}$, y sustituyendo en μ , obtenemos $\mu = \mathcal{A}_{21} - \mathcal{A}_{12} = a_{32} - a_{23}$.

Si al sistema (2.4) resultante con \tilde{A} y $\tilde{\mathbf{b}}$ le aplicamos la Proposición 2.6, podemos descomponerlo mediante un cambio lineal de variables en un sistema bidimensional observable

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = M_{11} \mathbf{x}_1 + N_1 \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_1), \quad (2.17)$$

más un sistema unidimensional

$$\dot{x}_2 = M_{21} \mathbf{x}_1 + m_{22} x_2 + n_2 \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_1).$$

Por otra parte, la Proposición 2.5 aplicada al subsistema (2.17), nos asegura que existe otro cambio lineal de variables que permite escribirlo en la forma canónica de Liénard. Efectuamos los cambios de la Proposición 2.6 y Proposición 2.5 en un solo paso mediante $\tilde{\mathbf{x}} = T_2 \bar{\mathbf{x}}$ con

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g} & Q \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Para determinar \mathbf{g} y Q imponemos que se cumpla la igualdad

$$\bar{A}T_2^{-1} = T_2^{-1}\tilde{A}.$$

Si elegimos

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda_1, \\ g_2 &= -\mu/\rho, \\ q_{11} &= -\rho, \\ q_{21} &= 0, \\ q_{12} &= 0, \\ q_{22} &= 1, \end{aligned}$$

obtenemos para \bar{A} el valor que figura en el enunciado. Por tanto, el cambio $\mathbf{x} = T\bar{\mathbf{x}}$ con $T = T_1T_2$ realizado sobre el sistema tridimensional (2.4), lo transforma en la forma canónica del enunciado. ■

A la vista de este resultado y tal como ya se predecía en la Proposición 2.6, el subsistema de las dos primeras variables sería independiente y determinaría la complejidad dinámica de todo el sistema.

Por último, enunciaremos un resultado relativo al sistema (2.4) cuando la matriz de observabilidad tiene rango igual a 1.

Proposición 2.12 *Para el sistema tridimensional (2.4) con*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{s} & \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

donde $a_{11}, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{A} \in M_2(\mathbb{R})$, se tiene $rg(\mathcal{O}) = 1$, si y sólo si $\mathbf{r}^T = \mathbf{0}$. En dicho caso, el sistema no posee ciclos límite.

Demostración. La primera afirmación es trivial observando la matriz de observabilidad \mathcal{O} del sistema (2.4), que aparece en la demostración de la Proposición 2.9.

Los sistemas S3CPL₃ con rango de la matriz de observabilidad \mathcal{O} igual a uno, cumplen que $r = \mathbf{0}$, y se pueden descomponer en dos subsistemas de la forma

$$\dot{x} = a_{11}x + b_1 \text{sat}(x), \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{sat}(x). \quad (2.20)$$

El sistema (2.19) es unidimensional autónomo y puede presentar equilibrios, pero no órbitas periódicas. Si el sistema tridimensional posee una órbita periódica, se ha de tener un valor constante de la coordenada x en todos los puntos de dicha órbita, por lo que dicho valor ha de ser un equilibrio \bar{x} de (2.19). El sistema (2.20) con $x = \bar{x}$ es bidimensional lineal autónomo, y por tanto, puede tener órbitas periódicas pero no ciclos límites. ■

En consecuencia, los sistemas S3CPL₃ con $rg(\mathcal{O}) = 1$, no pueden experimentar bifurcaciones que den lugar a ciclos límite y no serán analizados en esta memoria, aunque pudieran tener interés como casos degenerados, que mediante perturbaciones podrían proporcionar dinámica interesante.

Capítulo 3

Análisis de órbitas periódicas en sistemas lineales a trozos

En este Capítulo, se consideran varias técnicas de análisis de órbitas periódicas que son útiles cuando se trabaja con sistemas lineales a trozos. Sin ánimo de ser exhaustivos, se describen principalmente tres de tales técnicas: el método de las ecuaciones de cierre, el análisis de la aplicación de Poincaré asociada a una órbita periódica y, por último, el método de balance armónico también llamado a veces método de la función descriptiva.

Este último método es muy usado en ingeniería pero frecuentemente sin contar con una garantía de su validez. Es precisamente en este sentido por lo que será aquí considerado.

Analizaremos primero los equilibrios del sistema y demostraremos a lo largo de este Capítulo, algunos resultados en dimensión n para los sistemas lineales a trozos objeto de nuestro interés. En capítulos posteriores particularizaremos estos resultados a los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Partimos del sistema escrito en forma de Liénard

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(x_1),$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} c_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

con

$$\text{sat}(x_1) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_1 < 1, \\ x_1, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ 1, & \text{si } x_1 > 1. \end{cases}$$

En estas condiciones, el espacio \mathbb{R}^n queda dividido en tres zonas donde el sistema es lineal, separadas por las fronteras $\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$ y $\Sigma_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = -1\}$. Llamaremos zona L a la región de \mathbb{R}^n donde se verifique $x_1 < -1$, zona C donde $|x_1| \leq 1$ y zona R cuando $x_1 > 1$.

En cada una de dichas regiones, el sistema queda como sigue:

$$\begin{aligned} \text{zona } L : \quad \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \\ \text{zona } C : \quad \dot{\mathbf{x}} &= (A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T)\mathbf{x}, \\ \text{zona } R : \quad \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Denotamos la matriz del sistema en las zonas L y R como $A_L = A$, ya que coincide en los dos casos, y en la zona central como $A_C = A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T$.

Definiendo $C_i = b_i + e_i$, podemos expresar \mathbf{b} de la forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} C_1 - c_1 \\ C_2 - c_2 \\ \vdots \\ C_n - c_n \end{bmatrix},$$

y obtenemos

$$A_C = \begin{bmatrix} C_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ C_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

y el sistema podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A_L \mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{si } x_1 < -1, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A_C \mathbf{x}, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A_R \mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{si } x_1 > 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Los sistemas (3.1) son de clase C^1 en $\mathbb{R}^n \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_{-1})$, pero sólo de clase C^0 en \mathbb{R}^n . Sin embargo, satisfacen una condición de Lipschitz en todo \mathbb{R}^n , como se demuestra en [Ro97] y, para sistemas bizonales, en [Ca02]. Esto hace que se puedan aplicar a estos sistemas los teoremas clásicos de existencia, unicidad, continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales y parámetros, y prolongación de soluciones $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Sus curvas solución, son en general de clase C^1 pero no C^2 .

3.1. Equilibrios

El conocimiento de la estructura de los equilibrios es un paso previo para el posterior análisis de las órbitas periódicas. Un primer resultado sobre equilibrios es el siguiente.

Proposición 3.1 *Para el sistema (3.1) las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) Si $C_n \neq 0$, y $c_n C_n \geq 0$, entonces el origen es el único punto de equilibrio.
- (b) Si $c_n C_n < 0$, entonces el sistema tiene tres puntos de equilibrio: el origen, el punto

$$\bar{\mathbf{x}}_L = \frac{1}{c_n} \begin{bmatrix} C_n - c_n \\ C_n c_1 - c_n C_1 \\ \vdots \\ C_n c_{n-1} - c_n C_{n-1} \end{bmatrix},$$

en la zona L y su simétrico $\bar{\mathbf{x}}_R = -\bar{\mathbf{x}}_L$ en la zona R .

- (c) Si $C_n = 0$, entonces los puntos del segmento $\bar{\mathbf{x}}_C(\mu) = \mu [1, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}]^T$ con $|\mu| \leq 1$ son puntos de equilibrio del sistema y se tienen los siguientes casos:

(i) Si $c_n = 0$, los puntos de las semirrectas

$$\bar{x}_L(\mu) = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{\mu}{|\mu|} \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 - c_1 \\ C_2 - c_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} - c_{n-1} \end{bmatrix},$$

para todo valor de μ con $|\mu| > 1$, son también puntos de equilibrio del sistema.

(ii) Si $c_n \neq 0$, el sistema no posee puntos de equilibrio en las zonas L y R .

Demostración. Es evidente que el origen es un punto de equilibrio para todos los valores de los parámetros.

(a) Si $c_n C_n > 0$, entonces $\det(A_L) = c_n \neq 0$ y $\det(A_C) = C_n \neq 0$, y por tanto A_L y A_C son regulares. En la zona C el único equilibrio es el origen, mientras que usando las ecuaciones de la zona L , tendríamos como posible equilibrio el que aparece como \bar{x}_L en el apartado (b) del enunciado, pero entonces

$$\frac{C_n - c_n}{c_n} > -1,$$

con lo que el equilibrio quedaría fuera de la zona L . Debido a la simetría, tampoco hay equilibrios en la zona R .

Si se tiene que $C_n \neq 0$, $c_n = 0$, la existencia de equilibrios en la zona L viene determinada por la ecuación

$$A_L \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

que resulta ser un sistema incompatible. Por tanto, para $C_n \neq 0$ no existen equilibrios en las zonas L y R .

(b) En el caso $c_n C_n < 0$ con el mismo razonamiento que en (a), al ser ahora

$$x_1 = \frac{C_n}{c_n} - 1 < -1,$$

obtenemos el equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_L$ en la zona L , y el simétrico $\bar{\mathbf{x}}_R = -\bar{\mathbf{x}}_L$ en la zona R .

(c) Si $C_n = 0$, la condición de equilibrio en la zona C es $A_C \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y este sistema compatible indeterminado tiene por solución los puntos del segmento $\mu [1, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}]^T$ con $|\mu| \leq 1$.

Si $C_n = 0$ y $c_n = 0$, la existencia de equilibrios en la zona L viene determinada por

$$A_L \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

que resulta ser un sistema compatible indeterminado que tiene como solución las semirrectas de equilibrios que figuran en el enunciado.

Si $C_n = 0$ y $c_n \neq 0$, en la zona L el sistema $A_L \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, se convierte en

$$\begin{bmatrix} c_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 - c_1 \\ C_2 - c_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} - c_{n-1} \\ -c_n \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

y la última ecuación del sistema implica que $x_1 = -1$, solución que coincide con el extremo del segmento de equilibrios de la zona C para $\mu = -1$, por lo que no existen equilibrios en las zonas L y R . ■

3.2. Las ecuaciones de cierre

Con la denominación “método de las ecuaciones de cierre”, queremos indicar un método de estudio de órbitas periódicas cuya idea principal consiste en integrar el sistema (3.1) en cada zona lineal y obtener un sistema de ecuaciones, las llamadas ecuaciones de cierre, cuyas soluciones se corresponden con las órbitas periódicas del sistema (3.1). Esta idea ya aparece en [AVK66] y fue recogida por Minorsky [Mi74]. Sin embargo, fue Kriegsmann (ver la sección dedicada al oscilador en puente de Wien del Capítulo 4) quien tuvo la intuición en su trabajo [Kr87] de utilizar desarrollos en serie en las ecuaciones de cierre para aproximar la amplitud y el periodo de órbitas periódicas de sistemas lineales a trozos de forma satisfactoria. Precisamente, la justificación rigurosa

de los resultados de Kriegsmann constituyó el estímulo inicial de los trabajos relacionados en esta memoria.

El sistema (3.1) puede tener tres tipos de órbitas periódicas, atendiendo a las intersecciones de dichas órbitas con los hiperplanos de separación. En primer lugar, pueden aparecer órbitas periódicas que intersecan a uno sólo de los hiperplanos Σ_1 o Σ_{-1} , que denominaremos órbitas periódicas de dos zonas. Debido a la simetría del sistema, cada una de estas órbitas tendrá su correspondiente simétrica.

En segundo lugar, podrían existir órbitas periódicas que intersecan transversalmente a los dos hiperplanos Σ_1 y Σ_{-1} , y que por tanto pasan por las tres zonas L , C y R , a las que llamaremos órbitas periódicas de tres zonas.

Y finalmente, pueden aparecer órbitas periódicas contenidas completamente en cada una de las zonas donde el sistema es lineal. Debido a esta linealidad, estas órbitas sólo pueden aparecer formando parte de un centro lineal.

Estamos interesados en el análisis de órbitas periódicas de tres zonas con simetría respecto del origen. Admitiremos, como hipótesis de partida, la existencia de una de estas órbitas, que presentará intersecciones $\hat{\mathbf{x}}^0$, $\hat{\mathbf{x}}^1$ con Σ_1 y $\hat{\mathbf{x}}^2$, $\hat{\mathbf{x}}^3$ con Σ_{-1} :

$$\hat{\mathbf{x}}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{x}_2^0 \\ \hat{x}_3^0 \\ \vdots \\ \hat{x}_n^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \hat{x}_2^1 \\ \hat{x}_3^1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n^1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \hat{x}_2^2 \\ \hat{x}_3^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{x}_2^3 \\ \hat{x}_3^3 \\ \vdots \\ \hat{x}_n^3 \end{bmatrix},$$

según se ilustra en la Figura 3.1. La simetría de la órbita periódica del sistema (3.1) hace que $\hat{\mathbf{x}}^2 = -\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^3 = -\hat{\mathbf{x}}^1$, y que sea suficiente el estudio de la trayectoria entre $\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ para determinar completamente la órbita.

Definimos el tiempo de vuelo de la zona C , $\hat{\tau}_C$, como el tiempo empleado por una órbita de (3.1) en pasar de $\hat{\mathbf{x}}^0$ a $\hat{\mathbf{x}}^1$. De manera análoga, denotamos el tiempo de vuelo de la zona L con $\hat{\tau}_L$, que es el tiempo empleado por la trayectoria en pasar de $\hat{\mathbf{x}}^1$ a $\hat{\mathbf{x}}^2$.

Nos interesará estudiar el comportamiento de las órbitas cercanas a la órbita periódica cuya existencia hemos asumido, y cuyos puntos de intersección con los hiperplanos Σ_1 y Σ_{-1} han sido denotados con " $\hat{\mathbf{x}}^i$ ".

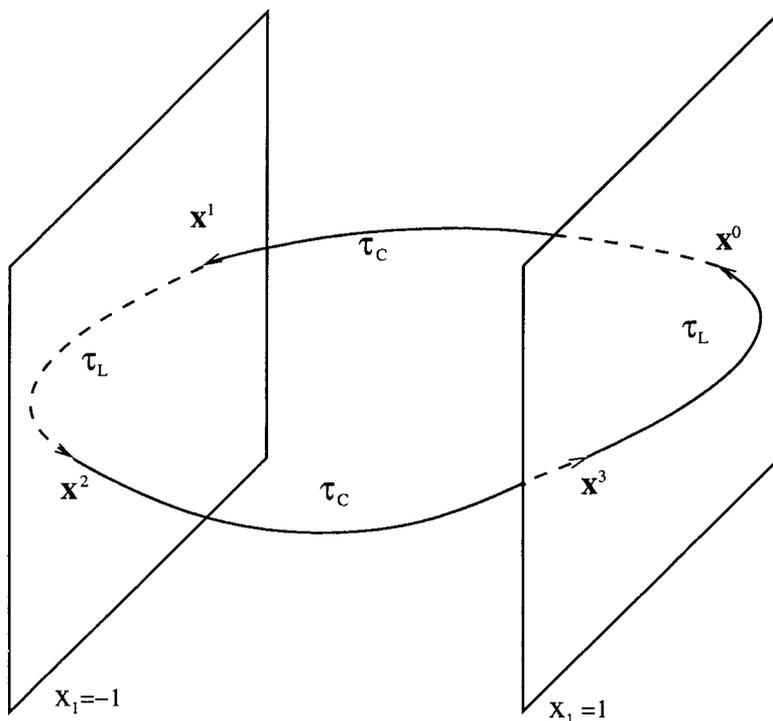


Figura 3.1: Configuración utilizada para el estudio de órbitas periódicas de tres zonas, con simetría respecto del origen.

Dado que el sistema (3.1) es lineal en cada una de las zonas, podemos escribir explícitamente la solución del mismo en un entorno de la órbita periódica.

La solución general de un sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ con condición inicial $\mathbf{x}(0)$ toma la forma

$$\mathbf{x}(\tau) = e^{A\tau}\mathbf{x}(0) + \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}\mathbf{b}ds. \quad (3.2)$$

Siempre que el sistema $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ sea compatible y si $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución del mismo, podemos transformar $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ en un sistema homogéneo y expresar su solución como

$$\mathbf{x}(\tau) = \bar{\mathbf{x}} + e^{A\tau}(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}). \quad (3.3)$$

En la zona C , tendremos $\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x}$, con la condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0]^T, \quad (3.4)$$

de forma que la solución correspondiente de (3.1) en la zona C es

$$\mathbf{x}(\tau) = e^{A_C \tau} \mathbf{x}^0. \quad (3.5)$$

Ahora sea $\mathbf{x}^1 \in \Sigma_{-1}$ el punto que la trayectoria alcanza para $\tau = \tau_C$, con lo que se cumple

$$e^{A_C \tau_C} \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1 = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

y denominaremos a esta ecuación primera ecuación de cierre del sistema (3.1).

En la zona L el sistema es no homogéneo y tomando como condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^1 = [-1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1]^T$, aplicando (3.2) obtenemos que la solución es

$$\mathbf{x}(\tau) = e^{A_L \tau} \mathbf{x}^1 + \int_0^\tau e^{A_L(\tau-s)} (-\mathbf{b}) ds. \quad (3.7)$$

Si llamamos $\mathbf{x}^2 \in \Sigma_{-1}$ al punto que la trayectoria alcanza en el instante $\tau = \tau_L$, se cumplirá

$$e^{A_L \tau_L} \mathbf{x}^1 + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} (-\mathbf{b}) ds - \mathbf{x}^2 = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Por la simetría de la órbita periódica es necesario que se cumpla $\mathbf{x}^2 = -\mathbf{x}^0$, y la ecuación (3.8) se convierte en

$$e^{A_L \tau_L} \mathbf{x}^1 + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} (-\mathbf{b}) ds + \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Llamaremos a la ecuación (3.9) segunda ecuación de cierre del sistema (3.1), y junto con (3.6) forma un sistema no lineal de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, a saber, τ_L , τ_C , x_2^0 , x_3^0 , \dots , x_n^0 , x_2^1 , x_3^1 , \dots , x_n^1 .

Resumimos las ideas anteriores en el siguiente enunciado cuya demostración es inmediata a partir de los razonamientos anteriores. La hipótesis de transversalidad se incluye por conveniencia para el desarrollo de lo que sigue.

Proposición 3.2 *Supongamos que el sistema (3.1) tiene una órbita periódica simétrica de tres zonas, que interseca transversalmente a los hiperplanos Σ_1 y Σ_{-1} en los puntos $\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^1$ respectivamente, con unos tiempos de vuelo $\hat{\tau}_L > 0$ y $\hat{\tau}_C > 0$ en las zonas L y C , entonces los valores $\hat{\tau}_L$, $\hat{\tau}_C$, $\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^1$ verifican las ecuaciones de cierre (3.6) y (3.9).*

3.3. Aplicación de Poincaré

En este apartado, recordamos las ideas básicas sobre la aplicación de Poincaré y obtenemos algunos resultados específicos para los sistemas lineales a trozos de nuestro interés.

Sea Γ una órbita periódica de tres zonas, simétrica respecto del origen, del sistema (3.1), que interseca transversalmente el hiperplano Σ_1 en los puntos $\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^3$, y a Σ_{-1} en $\hat{\mathbf{x}}^1$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ (ver Figura 3.1).

La condición de transversalidad de Γ respecto de Σ_1 en $\hat{\mathbf{x}}^0$ se traduce en

$$\langle (1, 0, \dots, 0)^T, A_C \hat{\mathbf{x}}^0 \rangle = C_1 - \hat{x}_2^0 \neq 0. \quad (3.10)$$

Análogamente, la transversalidad respecto de Σ_{-1} conduce a

$$\langle (1, 0, \dots, 0)^T, A_C \hat{\mathbf{x}}^1 \rangle = -C_1 - \hat{x}_2^1 \neq 0. \quad (3.11)$$

Denotamos con ϕ el flujo del sistema (3.1) y asumimos que $\phi(\tau_0, \hat{\mathbf{x}}^0) = \hat{\mathbf{x}}^1$ para cierto $\tau_0 > 0$.

Bajo la hipótesis de transversalidad anterior, podemos asegurar la existencia de un entorno abierto de $\hat{\mathbf{x}}^0$, U_0 , de otro entorno U_1 de $\hat{\mathbf{x}}^1$, y de una aplicación $\tau_C : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\tau_C(\hat{\mathbf{x}}^0) = \tau_0$, $\phi(\tau_C(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^0) \in U_1 \cap \Sigma_{-1}$ para todo $\mathbf{x}^0 \in U_0 \cap \Sigma_1$.

Denominamos con Π_C la aplicación de Poincaré en la zona C asociada a la órbita periódica Γ , es decir

$$\begin{aligned} \Pi_C : U_0 \cap \Sigma_1 &\longrightarrow U_1 \cap \Sigma_{-1} \\ \mathbf{x}^0 &\longrightarrow \phi(\tau_C(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^0). \end{aligned}$$

De forma análoga procedemos con la zona L , asegurando la existencia de V_0 , entorno abierto de $\hat{\mathbf{x}}^1$, de otro entorno V_1 de $\hat{\mathbf{x}}^2$, y de una aplicación $\tau_L : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\tau_L(\hat{\mathbf{x}}^1) = \tau_1$, $\phi(\tau_L(\mathbf{x}^1), \mathbf{x}^1) \in V_1 \cap \Sigma_{-1}$ para todo $\mathbf{x}^1 \in V_0 \cap \Sigma_{-1}$.

Denominamos con Π_L la aplicación de Poincaré en la zona L asociada a la órbita periódica Γ , es decir

$$\begin{aligned} \Pi_L : V_0 \cap \Sigma_{-1} &\longrightarrow V_1 \cap \Sigma_{-1} \\ \mathbf{x}^1 &\longrightarrow \phi(\tau_L(\mathbf{x}^1), \mathbf{x}^1). \end{aligned}$$

Asociado a todo punto $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ y $\mathbf{x}^1 \in \Sigma_{-1}$, existen unos únicos $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ que denominamos coordenadas reducidas de \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 respectivamente y que verifican:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \in \Sigma_1, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} \in \Sigma_{-1}.$$

Supongamos que $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ y $\mathbf{x}^1 \in \Sigma_{-1}$, de forma que $\mathbf{x}^1 = \Pi_C(\mathbf{x}^0)$, y sean \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 las coordenadas reducidas de \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 respectivamente, entonces podemos definir la función π_C que proporciona las coordenadas reducidas de la aplicación de Poincaré Π_C asociada a la órbita periódica Γ en la zona C , como

$$\begin{aligned} \pi_C : \mathbb{P}_{n-1}(U_0 \cap \Sigma_1) &\longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}(U_1 \cap \Sigma_{-1}) \\ \mathbf{p}_0 &\longrightarrow \pi_C(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_1, \end{aligned}$$

donde \mathbb{P}_{n-1} representa la proyección canónica asociada a las últimas $n - 1$ coordenadas. Definimos el tiempo de vuelo $\bar{\tau}_C$ en la zona central C en función de las coordenadas reducidas como

$$\bar{\tau}_C(\mathbf{p}_0) = \tau_C(\mathbf{x}^0).$$

Supongamos que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \Sigma_{-1}$, de forma que $\mathbf{x}^2 = \Pi_L(\mathbf{x}^1)$, y sean \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 las coordenadas reducidas de \mathbf{x}^1 y \mathbf{x}^2 respectivamente. Definimos la función π_L que proporciona las coordenadas reducidas de la aplicación de Poincaré Π_L asociada a la órbita Γ periódica en la zona L , como

$$\begin{aligned} \pi_L : \mathbb{P}_{n-1}(V_0 \cap \Sigma_{-1}) &\longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}(V_1 \cap \Sigma_{-1}) \\ \mathbf{p}_1 &\longrightarrow \pi_L(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2, \end{aligned}$$

y definimos el tiempo de vuelo $\bar{\tau}_L$ en la zona izquierda L en función de las coordenadas como

$$\bar{\tau}_L(\mathbf{p}_1) = \tau_L(\mathbf{x}^1).$$

El comportamiento de las aplicaciones de Poincaré π_i en el caso plano ha sido ampliamente estudiado en el Capítulo 3 de [Te00].

En las condiciones anteriores y escogiendo V_0 tal que $V_0 \subset U_1$, definimos la semiaplicación de Poincaré Π_1 como

$$\begin{aligned} \Pi_1 : U_0 \cap \Sigma_1 &\longrightarrow V_1 \cap \Sigma_{-1} \\ \mathbf{x}^0 &\longrightarrow \Pi_1(\mathbf{x}^0) = (\Pi_L \circ \Pi_C)(\mathbf{x}^0). \end{aligned}$$

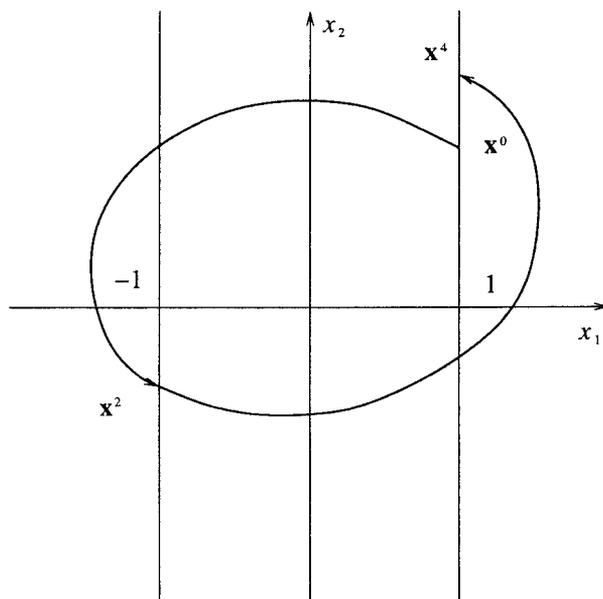


Figura 3.2: Aplicación de Poincaré completa del sistema (3.1).

Se comprueba fácilmente que

$$\Pi_1(\mathbf{x}^0) = \phi(\tau_C(\mathbf{x}^0) + \tau_L(\Pi_C(\mathbf{x}^0)), \mathbf{x}^0).$$

Asimismo, definimos la función que da las coordenadas reducidas de la semiaplicación de Poincaré π_1 como

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{P}_{n-1}(U_0 \cap \Sigma_1) &\longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}(V_1 \cap \Sigma_{-1}) \\ \mathbf{p}_0 &\longrightarrow \pi_1(\mathbf{p}_0) = (\pi_L \circ \pi_C)(\mathbf{p}_0). \end{aligned}$$

Definimos la aplicación de Poincaré completa

$$\begin{aligned} \Pi : U_0 \cap \Sigma_1 &\longrightarrow \Sigma_1 \\ \mathbf{x}^0 &\longrightarrow \Pi(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^4, \end{aligned}$$

ver Figura 3.2, que proporciona el transformado de un punto $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ mediante el flujo del sistema en otro punto \mathbf{x}^4 de Σ_1 .

Debido a la simetría del sistema se verifica que $\mathbf{x}^4 = -\Pi_1(-\mathbf{x}^2) = -\Pi_1(-\Pi_1(\mathbf{x}^0))$, luego $\Pi = (-\Pi_1) \circ (-\Pi_1)$. Podemos definir la función π que proporciona las

coordenadas reducidas de la aplicación de Poincaré completa Π como

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}_{n-1}(U_0 \cap \Sigma_1) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \mathbf{p}_0 &\longrightarrow \pi(\mathbf{p}_0) = (-\pi_1) \circ (-\pi_1)(\mathbf{p}_0). \end{aligned}$$

Para el estudio de la estabilidad de la órbita periódica utilizando los multiplicadores característicos, resultará de utilidad el siguiente lema.

Lema 3.3 *Sea Γ una órbita periódica simétrica de tres zonas del sistema (3.1), que interseca transversalmente las fronteras Σ_1 en los puntos $\hat{\mathbf{x}}^0$ y $\hat{\mathbf{x}}^3$, y Σ_{-1} en $\hat{\mathbf{x}}^1$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ (ver Figura 3.1), y sean $\hat{\mathbf{p}}_0, \hat{\mathbf{p}}_3, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ sus respectivas coordenadas reducidas. Sean $\hat{\tau}_C > 0$ y $\hat{\tau}_L > 0$ los tiempos de vuelo de Γ en la zona C y zonas laterales respectivamente. Sean las matrices*

$$Q_L = \begin{bmatrix} 1 & \nabla \bar{\tau}_L(\hat{\mathbf{p}}_1) \\ \mathbf{0} & D\pi_L(\hat{\mathbf{p}}_1) \end{bmatrix}, \quad Q_C = \begin{bmatrix} -1 & \nabla \bar{\tau}_C(\hat{\mathbf{p}}_0) \\ \mathbf{0} & D\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0) \end{bmatrix},$$

entonces el producto de matrices $e^{A_L \hat{\tau}_L} e^{A_C \hat{\tau}_C}$ es semejante a la matriz

$$Q_L Q_C = \begin{bmatrix} -1 & \nabla \bar{\tau}_C + \nabla \bar{\tau}_L D\pi_C \\ \mathbf{0} & D\pi_1 \end{bmatrix}_\Gamma$$

Demostración. Sean $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ las coordenadas reducidas respectivas de $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$, y reescribamos la primera ecuación de cierre (3.6), en la forma

$$\mathbf{F}_C(\tau_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0) = e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

En lo que sigue denotaremos a la matriz jacobiana de \mathbf{F}_C respecto de (τ_C, \mathbf{p}_1) mediante

$$B_1 = \frac{D\mathbf{F}_C(\tau_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\tau_C, \mathbf{p}_1)} \Big|_\Gamma = \frac{D\mathbf{F}_C(\tau_C, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)}{D(\tau_C, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1)} \Big|_\Gamma,$$

evaluada sobre la órbita periódica Γ . Utilizando la ecuación de cierre (3.6) se comprueba que dicha matriz es

$$B_1 = \left[A_C e^{A_C \hat{\tau}_C} \hat{\mathbf{x}}^0 \mid \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -I_{n-1} \end{bmatrix} \right] = \left[A_C \hat{\mathbf{x}}^1 \mid \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -I_{n-1} \end{bmatrix} \right],$$

y su determinante resulta ser $\det(B_1) = (-1)^n (C_1 + \hat{x}_2^1) \neq 0$, debido a la hipótesis de transversalidad (3.11).

De forma análoga, en la zona L reescribimos la ecuación (3.8) como

$$\mathbf{F}_L(\tau_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} - \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \mathbf{b} ds - \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

y se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{F}_L(\tau_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{\partial \tau_L} \right|_{\Gamma} &= \left[A_L e^{A_L \tau_L} \mathbf{x}^1 - A_L \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \mathbf{b} ds - \mathbf{b} \right]_{\Gamma} = \\ &= [A_L \mathbf{x}^2 - \mathbf{b}]_{\Gamma} = -A_L \hat{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{b}, \end{aligned}$$

donde se ha usado de nuevo (3.8) y la simetría de la órbita periódica respecto del origen.

Calculamos ahora la matriz jacobiana de \mathbf{F}_L evaluada sobre la órbita periódica Γ . Teniendo en cuenta la continuidad del campo obtenemos su valor

$$B_0 = \left. \frac{D\mathbf{F}_L(\tau_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\tau_L, \mathbf{p}_2)} \right|_{\Gamma} = \left[-A_L \hat{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{b} \mid \begin{matrix} \mathbf{0} \\ -I_{n-1} \end{matrix} \right] = \left[-A_C \hat{\mathbf{x}}^0 \mid \begin{matrix} \mathbf{0} \\ -I_{n-1} \end{matrix} \right],$$

siendo su determinante $(-1)^n (C_1 - x_2^0)$, distinto de cero por la hipótesis de transversalidad (3.10).

Aplicando el Teorema de la Función Implícita a la ecuación (3.12), obtenemos la existencia de funciones $\Psi_1(\mathbf{p}_0), \dots, \Psi_n(\mathbf{p}_0)$, tales que, en un entorno abierto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ del punto $\hat{\mathbf{p}}_0$, verifican

$$\mathbf{F}_C(\Psi_1(\mathbf{p}_0), \dots, \Psi_n(\mathbf{p}_0), \mathbf{p}_0) = \mathbf{0},$$

es decir $\bar{\tau}_C = \Psi_1(\mathbf{p}_0)$, $x_2^1 = \Psi_2(\mathbf{p}_0)$, \dots , $x_n^1 = \Psi_n(\mathbf{p}_0)$. Nótese que la función $\Psi_1(\mathbf{p}_0)$ no es otra que la anteriormente definida como $\bar{\tau}_C(\mathbf{p}_0)$, tiempo de vuelo de la zona C en función de las coordenadas reducidas, y que $\pi_C = (\Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_n)$.

Derivando implícitamente la ecuación (3.12) respecto de cada componente $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ de \mathbf{p}_0 , obtenemos las siguientes $n-1$ ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{\partial x_2^0} + \frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_2^0} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0},$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{\partial x_n^0} + \frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1)} \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_n^0} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_n^0} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_n^0} \end{array} \right]^T & = & \mathbf{0}. \end{array}$$

Evaluando estas ecuaciones sobre la órbita periódica Γ y agrupándolas en un sistema matricial, donde denotamos a la matriz jacobiana mediante

$$\frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\mathbf{p}_0)} = \frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)},$$

tendremos la siguiente igualdad a lo largo de la órbita periódica Γ

$$\frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\mathbf{p}_0)} \Big|_{\Gamma} + \frac{D\mathbf{F}_C(\bar{\tau}_C, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)}{D(\tau_C, \mathbf{p}_1)} \Big|_{\Gamma} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_n^0} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_n^0} \end{bmatrix} \Big|_{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Ahora, al ser $\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0) = \hat{\mathbf{p}}_1$ sobre la órbita periódica Γ , resulta la ecuación equivalente

$$B_1 \begin{bmatrix} \nabla \bar{\tau}_C(\hat{\mathbf{p}}_0) \\ D\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0) \end{bmatrix} = e^{A_C \hat{\tau}_C} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$B_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -A_C e^{A_C \hat{\tau}_C} \hat{\mathbf{x}}^0,$$

y que A_C conmuta con $e^{A_C \hat{\tau}_C}$, obtenemos finalmente la expresión

$$B_1 Q_C = e^{A_C \hat{\tau}_C} B_0. \quad (3.14)$$

Utilizando de nuevo la hipótesis de transversalidad podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación (3.13), para obtener la existencia de las funciones $\Phi_1(\mathbf{p}_1), \dots, \Phi_n(\mathbf{p}_1)$, tales que, en un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ del punto $\hat{\mathbf{p}}_1$, verifican

$$\mathbf{F}_L(\Phi_1(\mathbf{p}_1), \dots, \Phi_n(\mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

y se tiene que $\bar{\tau}_L = \Phi_1(\mathbf{p}_1)$, $x_2^2 = \Phi_2(\mathbf{p}_1)$, \dots , $x_n^2 = \Phi_n(\mathbf{p}_1)$. Nótese que la función $\Phi_1(\mathbf{p}_1)$ no es otra que la anteriormente definida como $\bar{\tau}_L(\mathbf{p}_1)$, tiempo de vuelo de la zona L en función de las coordenadas reducidas, y que $\pi_L = (\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n)$.

Derivando implícitamente la ecuación (3.15) respecto de cada componente de \mathbf{p}_1 , $x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1$, obtenemos los siguientes $n - 1$ sistemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{\partial x_2^1} + \frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2^1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2^1} \end{bmatrix}^T &= \mathbf{0}, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{\partial x_n^1} + \frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n^1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n^1} \end{bmatrix}^T &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Evaluando estas ecuaciones sobre la órbita periódica Γ y agrupándolas en un sistema matricial, donde denotamos a la matriz jacobiana mediante

$$\frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\mathbf{p}_2)} = \frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2)},$$

tendremos la siguiente igualdad a lo largo de la órbita periódica Γ

$$\left. \frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\mathbf{p}_2)} \right|_{\Gamma} + \left. \frac{D\mathbf{F}_L(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)}{D(\bar{\tau}_L, \mathbf{p}_2)} \right|_{\Gamma} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n^1} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n^1} \end{bmatrix}_{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Al ser $\pi_L(\hat{\mathbf{p}}_1) = \hat{\mathbf{p}}_2 = -\hat{\mathbf{p}}_0$ sobre la órbita periódica, resulta la ecuación equivalente

$$B_0 \begin{bmatrix} \nabla \bar{\tau}_L(\hat{\mathbf{p}}_1) \\ D\pi_L(\hat{\mathbf{p}}_1) \end{bmatrix} = e^{A_L \hat{\tau}_L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -A_C \hat{\mathbf{x}}^0,$$

aplicando la continuidad del campo y que A_L conmuta con $e^{A_L \hat{\tau}_L}$, resulta

$$\begin{aligned} -A_C \hat{\mathbf{x}}^0 &= -A_L \hat{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{b} = A_L \left(e^{A_L \hat{\tau}_L} \hat{\mathbf{x}}^1 - \int_0^{\hat{\tau}_L} e^{A_L(\hat{\tau}_L-s)} \mathbf{b} ds \right) - \mathbf{b} = \\ &= e^{A_L \hat{\tau}_L} A_L \hat{\mathbf{x}}^1 - A_L \int_0^{\hat{\tau}_L} e^{A_L(\hat{\tau}_L-s)} \mathbf{b} ds - \mathbf{b}, \\ &= e^{A_L \hat{\tau}_L} A_L \hat{\mathbf{x}}^1 - [e^{A_L \hat{\tau}_L} - \mathbf{I}] \mathbf{b} - \mathbf{b} = \\ &= e^{A_L \hat{\tau}_L} (A_L \hat{\mathbf{x}}^1 - \mathbf{b}) = e^{A_L \hat{\tau}_L} A_C \hat{\mathbf{x}}^1, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad

$$A \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} ds = e^{A\tau} - \mathbf{I}.$$

Por tanto, podemos expresar los resultados anteriores en la forma

$$B_0 Q_L = e^{A_L \hat{\tau}_L} B_1. \quad (3.16)$$

Premultiplicando (3.14) por $e^{A_L \hat{\tau}_L}$ y teniendo en cuenta (3.16) resulta

$$e^{A_L \hat{\tau}_L} e^{A_C \hat{\tau}_C} B_0 = e^{A_L \hat{\tau}_L} B_1 Q_M = B_0 Q_L Q_C,$$

con lo que se obtiene el resultado del enunciado. ■

Resulta conveniente señalar que la semejanza enunciada en el Lema 3.3 para sistemas continuos diferenciables a trozos bizonales, ha sido probada utilizando una técnica diferente en [Ca02].

Para estudiar la estabilidad de la órbita periódica es preciso contar con los autovalores de $D\pi(\hat{\mathbf{p}}_0)$, y ahora gracias al Lema 3.3 podemos concluir con el siguiente resultado.

Corolario 3.4 *En las condiciones del Lema 3.3, un autovalor de*

$$e^{A_L \hat{\tau}_L} e^{A_C \hat{\tau}_C}$$

es -1 y los cuadrados de los otros $n - 1$ autovalores son los multiplicadores característicos de la órbita periódica Γ .

Demostración. Sean $\hat{\mathbf{p}}_0, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ las coordenadas reducidas de $\hat{\mathbf{x}}^0, \hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2, \hat{\mathbf{x}}^3 \in \Gamma$ respectivamente. Por pertenecer dichos puntos a la órbita periódica se cumple

$$\hat{\mathbf{x}}^0 = \Pi(\hat{\mathbf{x}}^0), \quad \hat{\mathbf{p}}_0 = \pi(\hat{\mathbf{p}}_0),$$

además por la simetría de dicha órbita se verifica $\hat{\mathbf{p}}_2 = \pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0) = -\hat{\mathbf{p}}_0$.

La derivada de la aplicación de Poincaré π_1 vale

$$D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0) = D(\pi_L \circ \pi_C)(\hat{\mathbf{p}}_0) = D\pi_L[\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0)] D\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0),$$

siendo el valor de la misma sobre la órbita periódica igual a

$$D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0) = D\pi_L(\hat{\mathbf{p}}_1) D\pi_C(\hat{\mathbf{p}}_0),$$

por tanto, la derivada de la aplicación de Poincaré completa π sobre la órbita periódica es igual a

$$\begin{aligned} D\pi(\hat{\mathbf{p}}_0) &= D(-\pi_1 \circ -\pi_1)(\hat{\mathbf{p}}_0) = -D\pi_1[-\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0)] [-D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0)] = \\ &= -D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0) [-D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0)] = [D\pi_1(\hat{\mathbf{p}}_0)]^2, \end{aligned}$$

y ahora a partir del Lema 3.3 la conclusión es inmediata. ■

En capítulos posteriores usaremos el Corolario 3.4 para deducir las condiciones de estabilidad de órbitas periódicas obtenidas a partir de la resolución de las ecuaciones de cierre.

3.4. El método de balance armónico

El método de balance armónico es una herramienta aproximada muy usada en el análisis de sistemas no lineales para la búsqueda de órbitas periódicas y la determinación de su estabilidad. Para ello, se utiliza una serie de Fourier truncada y se ajustan la amplitud, frecuencia y fase hasta el número de armónicos prefijados.

Haremos aquí una revisión de las ideas en que se basa este método, en su versión correspondiente al caso llamado de la función descriptiva y cuando la no linealidad es una saturación, y más adelante efectuaremos su comparación con la técnica de las ecuaciones de cierre desarrollada en este trabajo, de manera que podremos establecer de manera rigurosa el grado de calidad de las predicciones de balance armónico en ciertos casos.

En el caso de sistemas de clase de diferenciabilidad alta, este método ha sido propuesto como una alternativa para el estudio de ciertas bifurcaciones relacionadas con órbitas periódicas. Así podemos citar el estudio de la bifurcación de Hopf mediante balance armónico ([Al82], [MC79], [Me81]), y el análisis de la bifurcación de Hopf degenerada efectuada por Moiola y otros [MDR91]. El balance armónico ha sido utilizado también para detectar bifurcaciones de duplicación de periodo [GT92].

Cuando el sistema dinámico no es diferenciable, resulta muy común limitar la serie a un solo armónico, dada la gran dificultad existente en manejar un número superior. Este caso ha sido también denominado método de la función descriptiva, y es ampliamente usado en ingeniería.

Los sistemas lineales a trozos con simetría respecto del origen y con tres zonas han sido estudiados en [LP96], donde se obtiene el diagrama global de bifurcación del primer armónico para dimensiones dos y tres, bajo ciertas hipótesis restrictivas (se asume que el equilibrio del origen es asintóticamente estable).

Para la revisión de este método seguiremos básicamente la formulación de [LP96] y [Kh96], aplicada a nuestro sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(\mathbf{c}^T \mathbf{x}), \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Estamos interesados en investigar la existencia de órbitas periódicas simétricas de (3.17) y que ocupen las tres zonas de \mathbb{R}^n , delimitadas por los hiperplanos $x_1 = 1$ y $x_1 = -1$.

La idea del método es representar la solución periódica por una serie de Fourier, y buscar una frecuencia ω y unos coeficientes de Fourier que cumplan la ecuación del sistema. Si $\mathbf{x}(\tau)$ es una solución periódica del sistema (3.17), sea $\sigma(\tau) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, que también será una función periódica y sea su desarrollo en serie de Fourier

$$\sigma(\tau) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega\tau},$$

donde a_k son coeficientes complejos, con $a_k = \bar{a}_{-k}$.

Dado que la función saturación sat es una no linealidad invariante frente al tiempo, $\text{sat}(\mathbf{c}^T \mathbf{x})$ es periódica con la misma frecuencia ω y podrá ser expresada como

$$\text{sat}(\sigma(\tau)) = \text{sat}(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega\tau},$$

donde cada coeficiente complejo c_k es función de todos los a_i .

Denotemos el operador derivada respecto del tiempo por

$$p = \frac{d}{d\tau},$$

y por $\text{adj}(A)$, la matriz adjunta de la matriz cuadrada A .

Teniendo en cuenta la identidad

$$\det(pI - A)I = \text{adj}(pI - A)(pI - A),$$

y aplicando el operador $\det(pI - A)$ a $\sigma(\tau)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \det(pI - A)\sigma(\tau) &= \mathbf{c}^T \det(pI - A)I\mathbf{x}(\tau) = \\ &= \mathbf{c}^T \text{adj}(pI - A)(pI - A)\mathbf{x}(\tau) = \\ &= \mathbf{c}^T \text{adj}(pI - A)\mathbf{b} \text{sat}(\sigma(\tau)). \end{aligned}$$

Nótese que

$$\det(pI - A)\sigma(\tau) = \mathbf{c}^T \text{adj}(pI - A)\mathbf{b} \text{sat}(\sigma(\tau)), \quad (3.18)$$

es una ecuación diferencial escalar de orden n , donde se utiliza la variable $\sigma(\tau)$ en lugar de x y es equivalente al sistema (3.17).

Podemos escribir (3.18) como

$$d(p)\sigma(\tau) - n(p) \text{sat}(\sigma(\tau)) = 0, \quad (3.19)$$

donde

$$d(p) = \det(pI - A), \quad (3.20)$$

$$n(p) = \mathbf{c}^T \text{adj}(pI - A)\mathbf{b}. \quad (3.21)$$

El cociente

$$G(p) = \frac{n(p)}{d(p)}, \quad (3.22)$$

es la llamada función de transferencia de (3.17), cuando se considera (3.17) como un sistema de control siendo la entrada $\text{sat}(\sigma(\tau))$ y la salida $\sigma(\tau)$, es decir

$$\sigma(\tau) = G(p) \text{sat}(\sigma(\tau)).$$

Utilizando la notación de la teoría de control, podemos expresar el sistema (3.17) dividiéndolo en una parte lineal dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\tau) &= A\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{b}\xi(\tau), \\ \sigma(\tau) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(\tau), \end{aligned} \quad (3.23)$$

y otra no lineal que responde a

$$\xi(\tau) = \text{sat}(\sigma(\tau)).$$

El sistema (3.17) así escrito puede representarse con el diagrama de bloques típico de un sistema realimentado como el de la Figura 3.3. En nuestro caso, la referencia r es siempre nula y la no linealidad del sistema está situada en el lazo de realimentación.

Utilizando los desarrollos en serie de $\sigma(\tau)$ y de $\text{sat}(\sigma(\tau))$, y que

$$p e^{ik\omega\tau} = \frac{d}{d\tau} e^{ik\omega\tau} = ik\omega e^{ik\omega\tau},$$

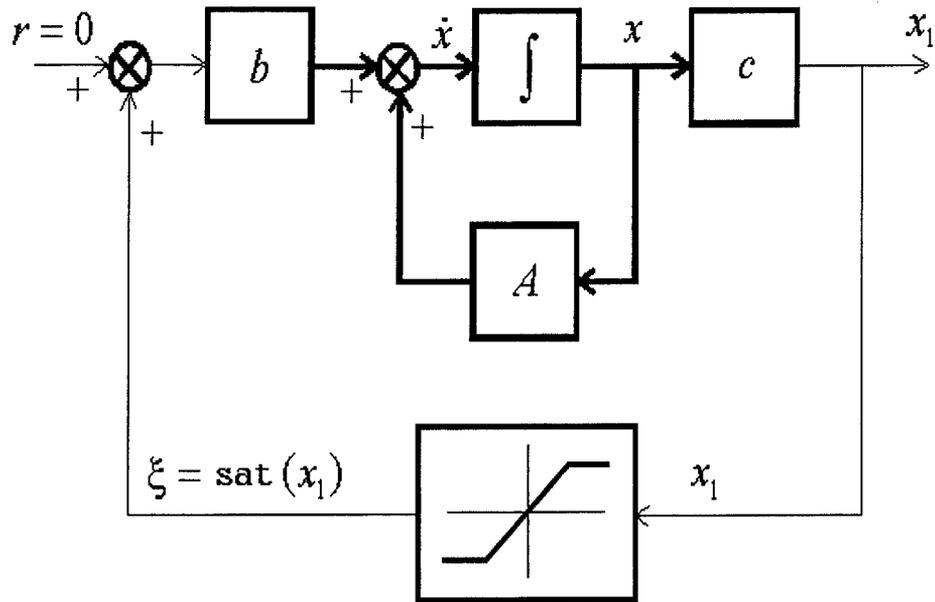


Figura 3.3: Diagrama de bloques de un sistema lineal con una saturación normalizada en el lazo de realimentación.

se tiene

$$d(p)\sigma(\tau) = d(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(ik\omega)a_k e^{ik\omega\tau},$$

$$n(p) \text{sat}(\sigma(\tau)) = n(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(ik\omega)c_k e^{ik\omega\tau},$$

cuya sustitución en (3.19) exige

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [d(ik\omega)a_k - n(ik\omega)c_k] e^{ik\omega\tau} = 0.$$

La ortogonalidad de las funciones $\exp(ik\omega\tau)$ para distintos k , asegura ahora que los coeficientes de Fourier deben cumplir

$$d(ik\omega)a_k - n(ik\omega)c_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.24)$$

Como cada coeficiente c_k es función de todos los a_i , el sistema no lineal de dimensión infinita (3.24) es, en general, imposible de resolver. Consecuentemente, se plantea su resolución aproximada.

Como el grado del numerador de la función de transferencia $n(p)$ es menor que el del denominador $d(p)$, si escribimos (3.24) en la forma

$$G(ik\omega)c_k = a_k,$$

es seguro que $G(ik\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. Por tanto, es razonable asumir que existe un entero q tal que para $k > q$, $|G(ik\omega)|$ es suficientemente pequeño y se puede reemplazar $G(ik\omega)$ (y por tanto a_k) por 0 (es lo que se suele llamar hipótesis de filtrado).

Esta aproximación convierte (3.24) en

$$d(ik\omega)\hat{a}_k - n(ik\omega)\hat{c}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q. \quad (3.25)$$

donde con la tilde queremos significar que los coeficientes solución de (3.25) son sólo una aproximación de la solución de (3.24) y \hat{c}_k son funciones calculables de \hat{a}_k con $k = 0, 1, 2, \dots, q$.

El sistema (3.25) es todavía difícil de resolver para valores de q grandes debido a su carácter fuertemente no lineal. El método de la función descriptiva toma $q = 1$, quedando (3.25) reducido a las ecuaciones

$$d(0)\hat{a}_0 - n(0)\hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0, \quad (3.26)$$

$$d(i\omega)\hat{a}_1 - n(i\omega)\hat{c}_1(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0. \quad (3.27)$$

Notemos que la ecuación (3.26) es real, mientras que (3.27) es compleja, y que como incógnitas aparecen ω y \hat{a}_0 reales y \hat{a}_1 compleja. El sistema formado por (3.26) y (3.27) equivale a tres ecuaciones reales con cuatro incógnitas.

El carácter autónomo del sistema nos permite tomar el origen de tiempos para que la fase del primer armónico sea cero, y por tanto

$$\sigma(\tau) = \hat{a}_0 + a \operatorname{sen}(\omega\tau) = \hat{a}_0 + \frac{a}{2i} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}), \quad a > 0,$$

de manera que

$$\hat{a}_1 = \frac{a}{2i}.$$

Además, debido al carácter impar de la función no lineal sat , se tiene que $\hat{a}_0 = 0$ y $\hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0$ son solución de (3.26), por ser

$$\hat{c}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sat}(\hat{a}_0 + a \text{sen}(\omega\tau)) d\tau.$$

Para estos valores de \hat{a}_0 y \hat{c}_0 , el coeficiente del primer armónico \hat{c}_1 vendrá determinado por

$$\hat{c}_1 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sat}(a \text{sen}(\omega\tau)) e^{-i\omega\tau} d\tau = -\frac{i\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \text{sat}(a \text{sen}(\omega\tau)) \text{sen}(\omega\tau) d\tau.$$

El cambio de variable $\theta = \omega\tau$, permite escribir

$$\hat{c}_1 = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sat}(a \text{sen} \theta) \text{sen} \theta d\theta,$$

y definiendo ahora la función $N(a)$ (la llamada función descriptiva) como

$$N(a) = \frac{2i}{a} \hat{c}_1,$$

resulta para $\text{sat}(\sigma(\tau))$ la aproximación $N(a)a \text{sen}(\omega\tau)$.

La función $N(a)$ (que en general puede ser compleja y depender de a y ω) para el sistema (3.17) toma pues el siguiente valor real:

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \text{sat}(a \text{sen} \theta) \text{sen} \theta d\theta = & (3.28) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < a < 1, \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsen\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right), & \text{si } a \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Con la notación introducida, la ecuación (3.27) puede ser reescrita como

$$d(i\omega) \frac{a}{2i} - n(i\omega) N(a) \frac{a}{2i} = 0,$$

o equivalentemente como

$$d(i\omega) - n(i\omega) N(a) = 0, \quad (3.29)$$

y utilizando la función de transferencia definida en (3.22), se convierte en

$$1 - G(i\omega)N(a) = 0. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) equivale a dos ecuaciones en el campo real que permiten obtener los valores de $a > 0$ y de $\omega > 0$. Cada par $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ solución de (3.30) corresponde a una órbita periódica predicha por el método de la función descriptiva, que denominaremos "órbita periódica de primer armónico".

El desarrollo del criterio de estabilidad lineal que a continuación describimos puede encontrarse en [LP96].

Se puede comprobar que el método de la función descriptiva es equivalente a considerar como una aproximación para la ecuación no lineal (3.19), el siguiente problema lineal

$$d(p)\sigma(\tau) - n(p)N(a)\sigma(\tau) = 0. \quad (3.31)$$

Este problema tiene para cada par $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ solución de (3.30) con $\tilde{a} > 0$ y $\tilde{\omega} > 0$, la solución exacta $\sigma(\tau) = \tilde{a} \sin \tilde{\omega}\tau$. Realmente, la ecuación lineal (3.31) tiene para $a = \tilde{a}$ el par de autovalores $\pm i\tilde{\omega}$ y por tanto, presenta una dinámica de tipo centro, por ello posee soluciones con amplitud arbitraria y frecuencia $\tilde{\omega}$, pero sólo la órbita con amplitud $a = \tilde{a}$ tiene sentido como aproximación para el problema no lineal (3.19). Este par $\pm i\tilde{\omega}$ es transformado por G en $1/N(\tilde{a})$ al verificar (3.30). Si reescribimos la ecuación (3.30) como

$$f(a, \lambda) = 1 - N(a)G(\lambda) = 0, \quad (3.32)$$

ésta resulta ser equivalente a la ecuación característica de (3.31) para $a = \tilde{a}$

$$d(\lambda) - N(a)n(\lambda) = 0. \quad (3.33)$$

Si suponemos $\left| \frac{d}{d\omega} G(i\omega) \right| \neq 0$ se tiene que

$$\left. \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(a, \lambda) = (\tilde{a}, i\tilde{\omega})} \neq 0,$$

y la aplicación del Teorema de la Función Implícita nos asegura que la ecuación (3.32) define implícitamente una función compleja de variable real $\lambda(a)$ en un entorno de $(a, \lambda) = (\tilde{a}, i\tilde{\omega})$.

Si se verifica

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{da} \Big|_{(a,\lambda)=(\tilde{a},i\tilde{\omega})} < 0, \quad (3.34)$$

y además, las $n - 2$ raíces restantes de (3.33) para $a = \tilde{a}$ tienen parte real negativa, diremos que la *órbita periódica de primer armónico* del sistema no lineal (3.17) es *linealmente estable*. Si no se cumple alguna de las condiciones dicha órbita se denomina *linealmente inestable*.

Un razonamiento heurístico en apoyo de la definición anterior es el siguiente. Recordamos que el par $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ es solución de (3.30) con $\tilde{a} > 0$ y $\tilde{\omega} > 0$ y la ecuación (3.33) tiene el par de autovalores $\pm i\tilde{\omega}$. Supongamos además que se cumple (3.34) y las $n - 2$ raíces restantes de la ecuación (3.33) tienen parte real negativa. Si una perturbación aumenta a en la ecuación (3.31), entonces los autovalores $\pm i\tilde{\omega}$ se moverán hacia la parte del plano complejo con parte real negativa. En caso contrario, si a disminuye, los autovalores se desplazan hacia el semiplano con parte real positiva. En ambos casos, la respuesta del sistema (3.31) tiende a contrarrestar las variaciones de a . Si la desigualdad (3.34) se cumpliera en sentido contrario, con un razonamiento análogo obtendríamos que las perturbaciones en la amplitud tenderían a aumentar.

Derivando implícitamente la ecuación (3.32) respecto de a , se tiene

$$\frac{d\lambda}{da} = -\frac{N'(a) G(\lambda)}{N(a) G'(\lambda)},$$

donde aplicando que para $a = \tilde{a}$ y $\lambda = i\tilde{\omega}$ se verifica la ecuación (3.30) y operando obtenemos finalmente

$$\frac{d\lambda}{da} \Big|_{(a,\lambda)=(\tilde{a},i\tilde{\omega})} = -i \frac{N'(\tilde{a}) \frac{d}{d\omega} \operatorname{Re} G(i\tilde{\omega}) - i \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} G(i\tilde{\omega})}{N(\tilde{a})^2 \left| \frac{d}{d\omega} G(i\tilde{\omega}) \right|^2} \Big|_{(a,\omega)=(\tilde{a},\tilde{\omega})}$$

Teniendo ahora en cuenta que para las órbitas periódicas de tres zonas se tiene que $a > 1$, y en ese caso

$$N'(a) = -\frac{4}{\pi a \sqrt{a^2 - 1}} < 0,$$

tomando la parte real comprobamos que la condición (3.34) es equivalente a

$$\left. \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} G(i\omega) \right|_{\omega=\tilde{\omega}} < 0. \quad (3.35)$$

A continuación procedemos al cálculo de $N(a)$ de una forma alternativa que nos va a permitir simplificar los cálculos posteriores. Puesto que buscamos órbitas periódicas de tres zonas, sólo trataremos el caso $a \geq 1$, lo que implica que existen valores θ_1 y θ_2 tales que $a \operatorname{sen} \theta_1 = 1$ y $a \operatorname{sen} \theta_2 = 1$, con $0 < \theta_1 < \pi/2$ y $\pi/2 < \theta_2 < \pi$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\theta_2} a \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \frac{2}{\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen} \theta d\theta + \frac{2}{\pi a} \int_{\theta_2}^{\pi} a \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} (\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1 + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\pi) + \frac{2}{\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \end{aligned}$$

utilizando relaciones trigonométricas, esta expresión la podemos escribir como

$$\frac{1}{\pi} (\pi - \theta_2 + \theta_1 + 2 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) \cos (\theta_1 + \theta_2)) + \frac{4}{\pi a} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right).$$

Si definimos $q = \theta_2 - \theta_1$, y teniendo en cuenta que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, comprobamos que para $a \geq 1$ se verifica $0 \leq q < \pi$ y que $a \cos(q/2) = 1$, con lo que expresando $N(a)$ en función de q queda finalmente

$$N(q) = 1 - \frac{q}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} q}{\pi}. \quad (3.36)$$

Cuando tengamos asegurado que $a \geq 1$ podemos emplear la ecuación

$$1 - G(i\omega)N(q) = 0, \quad (3.37)$$

siendo aplicable todo lo descrito aquí, manejando el par $(\tilde{q}, \tilde{\omega})$ solución de (3.37), y utilizando q en lugar de a .

Claramente, el método es de carácter aproximado y puede predecir falsamente la existencia para el sistema (3.17) de soluciones periódicas o, por el contrario, no detectarlas, ver [RM77]. Sin embargo, como veremos en el estudio de la bifurcación foco-centro-ciclo límite para dimensiones $n = 2$ y $n = 3$, proporciona información de indudable interés.

Capítulo 4

La Bifurcación foco-centro-ciclo límite

En este capítulo, utilizando los métodos descritos en el Capítulo 3, analizaremos la bifurcación foco-centro-ciclo límite en sistemas con dimensiones $n = 2$ y $n = 3$. Esta bifurcación tiene una notable similitud con la bifurcación de Hopf de los sistemas diferenciables ya que, en ambos casos, nace un ciclo límite cuando un par de autovalores complejos de la matriz que define la dinámica del equilibrio cruza el eje imaginario. Sin embargo, en los sistemas lineales a trozos, el cambio de estabilidad de un foco necesariamente lleva a pasar por un centro lineal en el valor crítico del parámetro de la bifurcación y la bifurcación que da lugar al ciclo límite, es en algunos aspectos diferente de la citada bifurcación de Hopf. Por citar uno de ellos, en la bifurcación de Hopf la amplitud evoluciona con la raíz cuadrada del parámetro, mientras que en la bifurcación foco-centro-ciclo límite lo hace, como veremos, con la raíz cúbica del mismo.

Aunque la situación más genérica donde se produce esta bifurcación, en el contexto de los sistemas lineales a trozos, sólo necesitaría de dos zonas lineales, en esta memoria nos centraremos principalmente en el caso de sistemas con simetría respecto al origen de coordenadas, que es el que más frecuentemente aparece en las aplicaciones. En dicho caso, cuando el equilibrio asociado a la bifurcación es el origen, son tres las zonas cuya dinámica interviene en la bifurcación.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la primera sección abordamos el estudio de la citada bifurcación en los sistemas planos, para lo cuál empleamos el método de las ecuaciones de cierre (se determinan expresiones analíticas para la amplitud, periodo y logaritmos de los multiplicadores característicos del ciclo límite que bifurca) y el de balance armónico, aplicando los resultados del primero para comprobar la bondad de la predicción de balance armónico. Por último, aplicamos los resultados teóricos obtenidos a un circuito electrónico clásico: el oscilador en puente de Wien.

En la segunda sección, analizamos los sistemas tridimensionales utilizando en primer lugar el método de las ecuaciones de cierre para la caracterización de la bifurcación y su primera degeneración, comparando ambos resultados con los proporcionados por balance armónico, para posteriormente terminar aplicándolos al circuito de Chua. También se presenta un cuadro resumen donde se referencian los diferentes resultados de esta sección.

Finalmente, en la tercera sección se analiza el caso tridimensional no observable cuando el rango de la matriz de observabilidad es 2.

4.1. Caso plano simétrico con tres zonas observable

Bajo la hipótesis de observabilidad, partimos del sistema (2.12) ya escrito en forma de Liénard, es decir

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(x_1), \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{b} = (T - t, D - d)^T$, y

$$A = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}.$$

El plano \mathbb{R}^2 queda dividido en las tres zonas L , C y R donde el sistema es lineal, separadas por las fronteras $\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\}$ y $\Sigma_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -1\}$. Ver Figura 4.1.

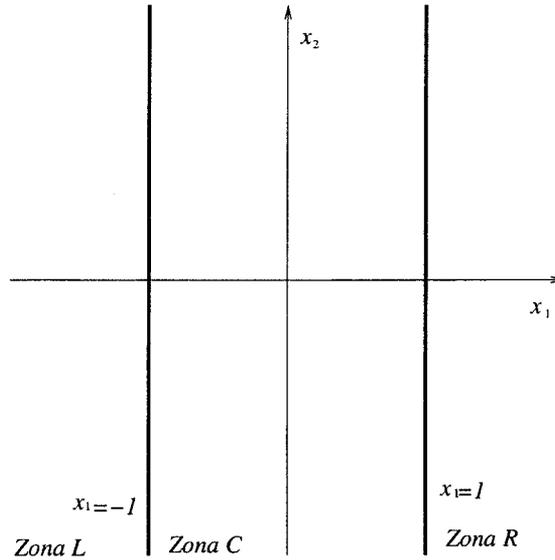


Figura 4.1: Zonas de comportamiento lineal en que queda dividido el plano de fases.

Usando la notación descrita en el Capítulo 3, tenemos

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T - t \\ D - d \end{bmatrix}.$$

Damos un primer resultado, cuya demostración es inmediata, que hace relación a una propiedad de simetría adicional a la de las variables de estado respecto del origen.

Lema 4.1 *El sistema (4.1) es invariante a la simetría*

$$(x_1, x_2, \tau, t, d, T, D) \rightarrow (x_1, -x_2, -\tau, -t, d, -T, D).$$

Como consecuencia directa de la Proposición 3.1, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 4.2 *Para el sistema (4.1) las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) Si $D \neq 0$, y $dD \geq 0$, entonces el origen es el único punto de equilibrio.

(b) Si $dD < 0$, entonces el sistema tiene tres puntos de equilibrio: el origen, el punto

$$\bar{\mathbf{x}}_L = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} D - d \\ Dt - dT \end{bmatrix},$$

en la zona L y $\bar{\mathbf{x}}_R = -\bar{\mathbf{x}}_L$ en la zona R .

(c) Si $D = 0$, entonces los puntos del segmento $\bar{\mathbf{x}}_C(\mu) = \mu [1, T]^T$ con $|\mu| \leq 1$ son puntos de equilibrio del sistema y se tienen los siguientes casos:

(i) Si $d = 0$, los puntos de las semirrectas

$$\bar{\mathbf{x}}_L(\mu) = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ T \end{bmatrix} + \frac{\mu}{|\mu|} \begin{bmatrix} 0 \\ T - t \end{bmatrix}, \quad \text{con } |\mu| > 1,$$

son puntos de equilibrio del sistema.

(ii) Si $d \neq 0$, el sistema no posee puntos de equilibrio en las zonas L y R .

A continuación, antes de afrontar el resultado principal de esta sección, presentamos una serie de resultados elementales sobre existencia de órbitas periódicas cuando $D > 0$, que pueden obtenerse mediante hechos básicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Proposición 4.3 *El sistema (4.1) con $Tt > 0$, no presenta ninguna órbita periódica.*

Demostración. El caso $T < 0$ y $t < 0$ es consecuencia directa de la Proposición 3 de [LS96], mientras el caso $T > 0$ y $t > 0$ se puede reducir al anterior utilizando la simetría indicada en el Lema 4.1. ■

Proposición 4.4 *El sistema (4.1) con $D > 0$ y $T = t = 0$, es un sistema conservativo y presenta en torno al origen una estructura de centro lineal en la región C , que se extiende (de forma no lineal cuando $d \neq D$) a las regiones adyacentes. Si además $d \geq 0$, dicho centro es global y, si $d < 0$, el centro está limitado por una conexión heteroclina entre un par simétrico de equilibrios inestables (puntos de silla).*

Demostración. Para $T = t = 0$, el sistema (4.1) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1),\end{aligned}\tag{4.2}$$

con

$$f(x_1) = \begin{cases} dx_1 - (D - d), & \text{si } x_1 < 1, \\ Dx_1, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ dx_1 + (D - d), & \text{si } x_1 > 1. \end{cases}$$

El sistema (4.1) es conservativo y por tanto, una primera integral es

$$F(x_1, x_2) = V(x_1) + x_2^2,\tag{4.3}$$

donde

$$V(x_1) = 2 \int_0^{x_1} f(z) dz = \begin{cases} dx_1^2 - 2(D - d)x_1 + d - D, & \text{si } x_1 < 1, \\ Dx_1^2, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ dx_1^2 + 2(D - d)x_1 + d - D, & \text{si } x_1 > 1. \end{cases}$$

Se verifica que la función potencial V presenta un mínimo relativo en el origen, al ser $V'(0) = 0$ y $V''(0) = 2D > 0$, y por tanto se obtiene que el origen es un centro. Dicho centro es global para $d \geq 0$, al no existir más puntos de equilibrio, ver Figuras 4.2 y 4.3.

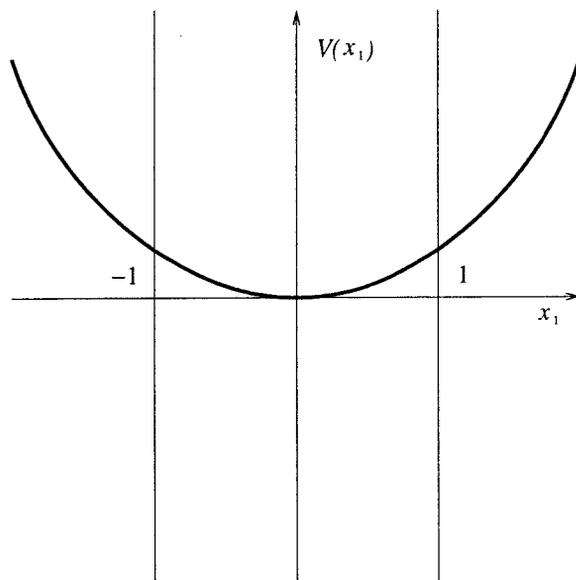
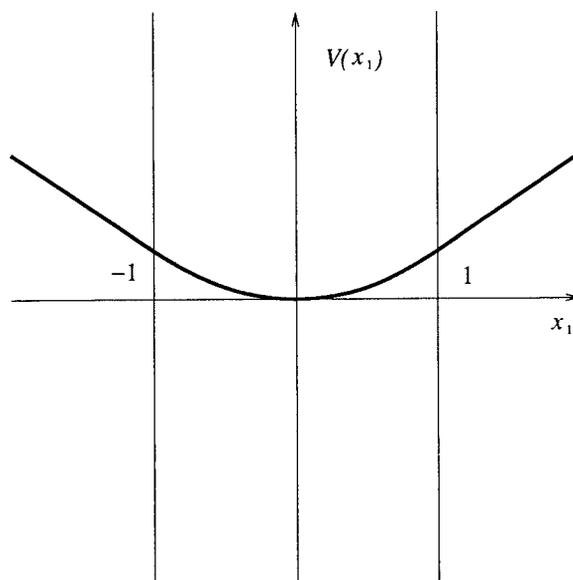
Cuando $d < 0$, la función $V(x)$ tiene máximos relativos en $\bar{x}_1 = \pm(1 - D/d)$, con $V''(\bar{x}_1) = 2d < 0$, y por tanto el sistema (4.1) tiene dos puntos de silla en $(\bar{x}_1, 0)$ (ver Figura 4.4), y se obtiene el resultado del enunciado. ■

Lema 4.5 *El sistema (4.1) con $D > 0$, $T = 0$ y $t \neq 0$ tiene un centro lineal restringido a la zona C .*

Demostración. La existencia de un centro lineal en la zona C es inmediata. ■

La estructura en forma de Liénard del sistema (4.1) permite enunciar el siguiente resultado.

Proposición 4.6 *El sistema (4.1) con $D > 0$, $Tt < 0$ y $d \geq 0$ tiene un único ciclo límite.*

Figura 4.2: Función potencial para $D > 0$ y $d > 0$.Figura 4.3: Función potencial para $D > 0$ y $d = 0$.

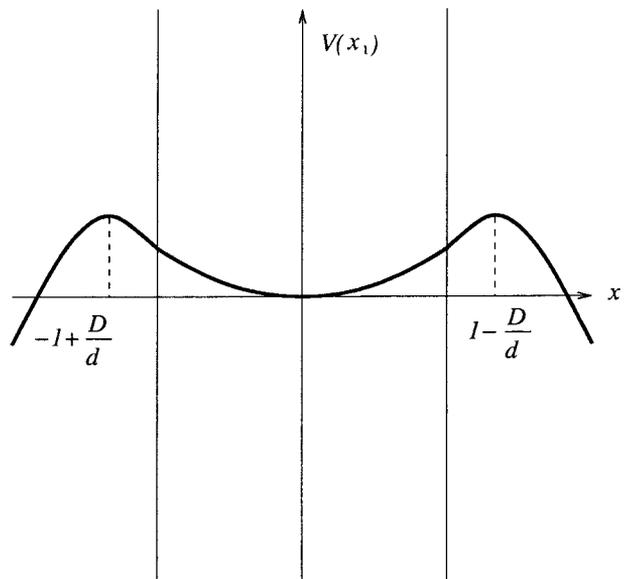


Figura 4.4: Función potencial para $D > 0$ y $d < 0$.

Demostración. El caso $T < 0$ con $t > 0$ se encuentra probado en el Teorema C de [LS96], mientras que cuando $T > 0$ y $t < 0$ se puede reducir al caso anterior utilizando la simetría descrita en el Lema 4.1. ■

Proposición 4.7 *El sistema (4.1) con $D > 0$, $Tt < 0$ y $d < 0$ tiene al menos un ciclo límite para T suficientemente pequeño.*

Demostración. Asumiremos para fijar ideas que $t < 0$, el caso $t > 0$ se demuestra de forma análoga. Bajo las hipótesis de la proposición nuestro sistema tiene tres equilibrios.

Construiremos para $T = 0$ un conjunto W positivamente invariante, y veremos que persiste para T suficientemente pequeño.

Consideremos primero la variedad inestable que sale del equilibrio $\bar{x}_R = [1 - D/d, T - tD/d]^T$ (cfr. Proposición 4.2) con x_1 decreciente, y que alcanza la frontera Σ_1 . Como la matriz de linealización del sistema en las zonas L y R tiene como autovalores

$$\lambda_1 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4d}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4d}}{2} < 0,$$

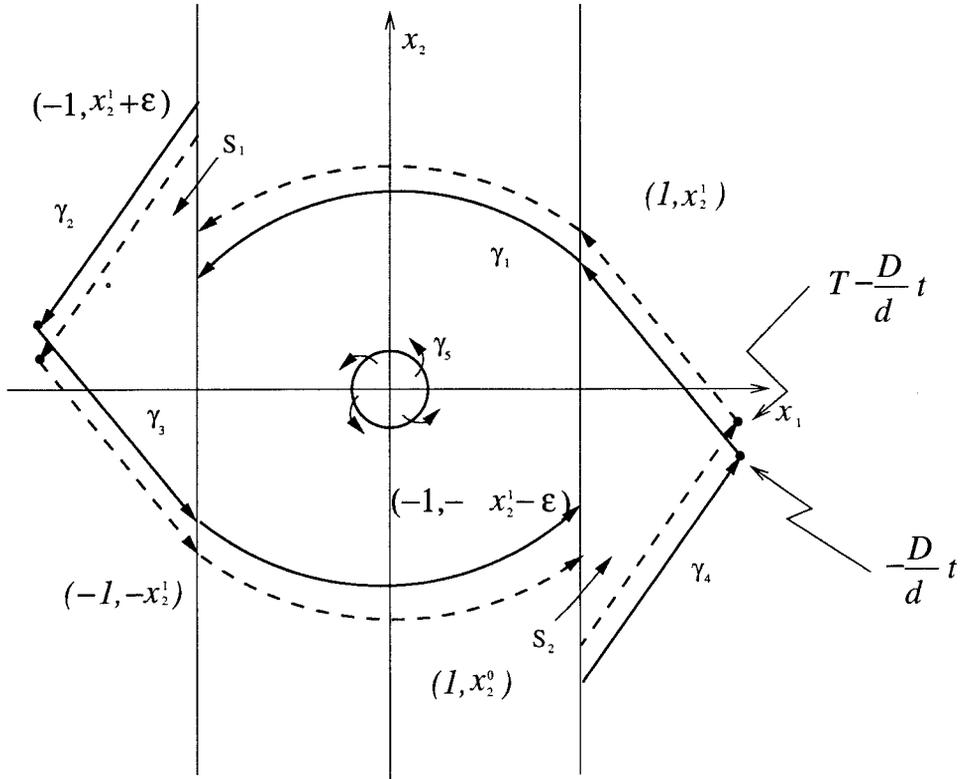


Figura 4.5: Esquema de las trayectorias usadas en la demostración de la Proposición 4.7.

con los correspondientes autovectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix},$$

la trayectoria sobre la variedad inestable se puede parametrizar con

$$\begin{bmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - D/d - \mu \\ T - tD/d - \mu\lambda_2 \end{bmatrix},$$

con $0 \leq \mu \leq -D/d$. Claramente, para $\mu = -D/d > 0$ se obtiene el punto $(1, x_2^1)$, donde $x_2^1 = T - \lambda_1 D/d > 0$, ver Figura 4.5.

Análogamente, la variedad estable que entra en el equilibrio \bar{x}_R con x_1 creciente admite la parametrización

$$\begin{bmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - D/d + \mu \\ T - tD/d + \mu\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

con $D/d \leq \mu \leq 0$, obteniendo para $\mu = D/d < 0$, el punto $(1, x_2^0)$, donde $x_2^0 = T - \lambda_2 D/d < 0$.

El argumento que seguiremos es la construcción de un conjunto positivamente invariante para $T = 0$, que conserva esta propiedad al variar ligeramente T . Asumamos por el momento que $T = 0$, para este valor las trayectorias del sistema en la región C son de la forma

$$D(x_1)^2 + (x_2)^2 = K,$$

y podemos asegurar que la variedad inestable que parte de $\bar{x}_R|_{T=0}$ interseca a Σ_1 en el punto $(1, -\lambda_1 D/d)$ y posteriormente a Σ_{-1} en el punto $(-1, -\lambda_1 D/d)$. Denotemos a esta trayectoria con γ_1 .

Llamaremos γ_2 a la trayectoria que partiendo del punto $(-1, \lambda_2 D/d) \in \Sigma_{-1}$ llega a $\bar{x}_L|_{T=0}$ y que corresponde a la variedad estable de dicho equilibrio, simétrica de la considerada en (4.4). Llamaremos S_1 al segmento contenido en Σ_{-1} que va del punto final de γ_1 al punto inicial de γ_2 , y que podemos parametrizar como

$$\begin{bmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\lambda_1 D/d + \mu \end{bmatrix},$$

con

$$0 \leq \mu \leq -x_2^0 - x_2^1 = tD/d,$$

a lo largo del segmento se tendrá

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^1 - \mu = \lambda_1 D/d - \mu < 0, \\ \dot{x}_2 &= -D < 0. \end{aligned}$$

Sean ahora γ_3 la trayectoria (simétrica respecto del origen a γ_1) que partiendo de $\bar{x}_L|_{T=0}$ alcanza Σ_1 en el punto $(1, \lambda_1 D/d)$, y γ_4 la simétrica de γ_2

que va desde $(1, -\lambda_2 D/d)$ a $\bar{x}_R|_{T=0}$. Llamaremos S_2 al segmento contenido en Σ_1 que va del punto final de γ_3 al punto inicial de γ_4 .

Denominaremos con γ_5 a una de las órbitas periódicas existentes para $T = 0$, de ecuación $Dx_1^2 + x_2^2 = \delta$, con δ elegido para que la órbita no se salga de la región C . El valor de la derivada orbital de $V(x_1, x_2)$ sobre la trayectoria γ_5 es

$$\dot{V}(x_1, x_2) = Dx_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = DTx_1^2, \quad (4.5)$$

por lo que para $T = 0$ no entra ni sale flujo a través de γ_5 .

Sea W el conjunto doblemente conexo de puntos del plano delimitado por la frontera exterior formada por $\gamma_1, S_1, \gamma_2, \gamma_3, S_2$ y γ_4 , y por la frontera interior γ_5 . Ahora, es fácil ver que W es positivamente invariante al flujo del sistema (4.1) para $T = 0$, debido a que a través de las trayectorias $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ y γ_5 no entra ni sale flujo en W , y a través de los segmentos S_1 y S_2 sólo entra flujo en W .

Ajustándonos ya a las hipótesis de la proposición, asumiremos en lo que sigue que $T > 0$ y suficientemente pequeño.

Construiremos ahora un conjunto semejante a W , que llamaremos \tilde{W} , y veremos que sigue siendo positivamente invariante. Sea ahora $\tilde{\gamma}_1$ la trayectoria que, partiendo de \bar{x}_R interseca a Σ_1 en el punto $(1, T - \lambda_1 D/d)$ y evoluciona en la región C hasta intersectar a Σ_{-1} . Por la dependencia continua de las soluciones respecto de las condiciones iniciales y parámetros, el punto de intersección con Σ_{-1} (el punto final de $\tilde{\gamma}_1$) será de la forma $(1, T - \lambda_1 D/d + \varepsilon)$, para un valor $\varepsilon = \varepsilon(T)$ apropiado que verifica $\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon(T) = 0$. La trayectoria análoga a γ_2 , que llamaremos $\tilde{\gamma}_2$, arranca ahora del punto $(-1, -T + \lambda_2 D/d)$ para llegar a la correspondiente posición del equilibrio \bar{x}_L . Notemos que la diferencia de ordenadas entre el punto inicial de $\tilde{\gamma}_2$ y el final de $\tilde{\gamma}_1$ verifica

$$T + \frac{D}{d}\lambda_2 - \left(T - \frac{D}{d}\lambda_1 + \varepsilon \right) = \frac{D}{d}t - 2T - \varepsilon,$$

esta cantidad es positiva, si T es suficientemente pequeño, con lo que podemos definir el segmento \tilde{S}_1 análogo a S_1 que une esos dos puntos citados. Por simetría, podemos completar la frontera exterior de \tilde{W} con $\tilde{\gamma}_3, \tilde{S}_2$ y $\tilde{\gamma}_4$, mientras que la frontera interior sigue siendo γ_5 .

Para $T > 0$ la derivada orbital sobre γ_5 es positiva, ver (4.5), por lo que todo el flujo que atraviesa γ_5 entra en \tilde{W} . A través de las trayectorias $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_3$ y $\tilde{\gamma}_4$ no entra ni sale flujo en \tilde{W} , mientras que análogamente a lo ocurrido en W , el flujo entra en \tilde{W} a través de los segmentos \tilde{S}_1 y \tilde{S}_2 .

Por tanto, el conjunto \tilde{W} es positivamente invariante para $T > 0$ y suficientemente pequeño, y aplicando el Teorema de Poincaré-Bendixson obtenemos la existencia de al menos un ciclo límite contenido en \tilde{W} . ■

Comparando lo afirmado en la Proposición 4.3 con lo indicado en las Proposiciones 4.6 y 4.7, podemos asegurar que para todo valor de d y bajo las hipótesis $D > 0$ y $t \neq 0$ (parámetros que consideraremos fijos) el paso de la condición $Tt > 0$ a $Tt < 0$, al mover el parámetro T (que consideramos el parámetro de la bifurcación), lleva asociado la aparición de un ciclo límite, bifurcación que debe tener lugar precisamente para $T = 0$.

En efecto, supongamos para fijar ideas que $t < 0$. Entonces, para $T < 0$ y pequeño el origen es un foco estable y no hay órbitas periódicas por la Proposición 4.3. Sin embargo, para $T > 0$ y pequeño, por las Proposiciones 4.6 y 4.7 tenemos garantía de la existencia de un ciclo límite. Como para $T = 0$ (cfr. Lema 4.5) tenemos un centro al menos en la región C , es por lo que hemos llamado a esta bifurcación foco-centro-ciclo límite.

4.1.1. Uso de las ecuaciones de cierre y análisis de la estabilidad de la órbita periódica

Comenzamos por un Lema técnico, cuya prueba es directa, para simplificar cálculos posteriores.

Lema 4.8 Para el sistema (4.1), con $D > 0$, el cambio

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_2}{\sqrt{D}}, \quad \tilde{\tau} = \sqrt{D}\tau,$$

pone el sistema en la forma normalizada

$$\frac{d}{d\tilde{\tau}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{T} - \tilde{t} \\ 1 - \tilde{d} \end{bmatrix} \text{sat}(x_1) \quad (4.6)$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{D}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{D}}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{D}, \quad (4.7)$$

Dado que en lo que sigue vamos a trabajar con $D > 0$, el lema anterior nos permite reducir el estudio del sistema original al sistema (4.6). Prescindimos de las tildes para abreviar la notación.

Nuestra hipótesis de partida en el estudio de la bifurcación foco-centro-ciclo límite es la existencia de una órbita periódica del sistema (4.1), con simetría respecto del origen y que ocupe las tres regiones L , C y R , del plano \mathbb{R}^2 . Dicha órbita presentará intersecciones \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 con la recta $x_1 = 1$, \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 con la recta $x_1 = -1$, y tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en las zonas L y R . (Ver Figura 4.6). Debido a la simetría se tendrá

$$\mathbf{x}^0 = -\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{x}^1 = -\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo los razonamientos del Capítulo 3, obtenemos las ecuaciones de cierre del sistema (4.6), ver Figura 4.6, que son las siguientes:

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} t-T \\ d-1 \end{bmatrix} ds - \begin{bmatrix} -1 \\ -x_2^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

donde

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fijados los parámetros básicos, las ecuaciones de cierre (4.8)-(4.9) forman un sistema de 4 ecuaciones que dependen de τ_C , τ_L , x_2^0 , x_2^1 y T . El sistema (4.6) presenta una estructura de centro lineal en la zona C , para $T = 0$,

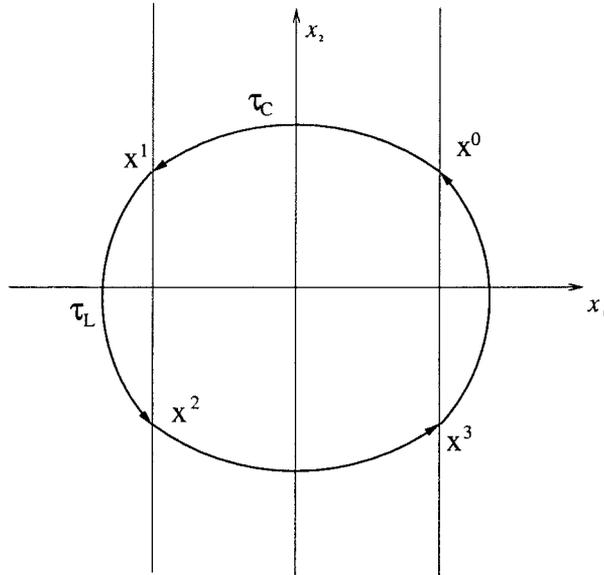


Figura 4.6: Configuración utilizada para la determinación del ciclo límite.

como se indica en el Lema 4.5. Tomando T como parámetro de bifurcación, queremos estudiar las soluciones de (4.8)-(4.9) en un entorno de los valores correspondientes a $T = 0$. Para ello expresaremos las ecuaciones de cierre (4.8)-(4.9) en la forma más compacta

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} = (\tau_C, \tau_L, x_2^0, x_2^1, T), \quad (4.10)$$

que representa un sistema no lineal de 4 ecuaciones a estudiar en un entorno del punto $\bar{\mathbf{z}} = (\pi, 0, 0, 0, 0)$, que es solución de dichas ecuaciones, ya que representa la órbita más externa del centro lineal que aparece en la zona C . Nos interesa obtener la parametrización local de la rama de soluciones que pase por este punto y que, como veremos, para $T \neq 0$, va a corresponder a ciclos límite del sistema.

Para $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}$, el sistema de ecuaciones (4.10) no verifica las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, debido a que aparece otra rama de soluciones (que llamaremos espuria) que también pasa por $\bar{\mathbf{z}}$. Esta rama espuria puede

ser parametrizada como

$$\mathbf{z}(\mu) = (\pi, 0, \mu, -\mu, 0), \quad (4.11)$$

para cualquier valor real de μ , de manera que en todos los puntos de la rama el valor del parámetro T es constante e igual a 0. Es fácil ver que estas soluciones no se corresponden con órbitas periódicas del sistema (4.6), sino que representan a las órbitas periódicas del centro lineal (ahora ya no restringido a la zona central) que se obtendría para $T = 0$ integrando el sistema como si las ecuaciones de la zona C fueran válidas para todo el plano. Todas las órbitas de esta rama tienen tiempos de vuelo constantes $\tau_C = \pi$ y $\tau_L = 0$. En consecuencia, el punto $\bar{\mathbf{z}}$ es un punto singular para el sistema (4.10), como queda corroborado al comprobar que la matriz Jacobiana de \mathbf{F} en $\bar{\mathbf{z}}$ no es de rango completo.

El siguiente lema nos permite eliminar la singularidad que aparece para el sistema (4.10) en el punto $\bar{\mathbf{z}}$, mediante la consideración particular de la tercera ecuación que compone las ecuaciones de cierre.

Lema 4.9 *Para las ecuaciones de cierre (4.10), las siguientes afirmaciones son válidas.*

- (a) *Se verifica que $F_3(\mathbf{z}) = 0$, para todo $\mathbf{z} = (z_1, 0, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{R}^5$.*
- (b) *La función $\tilde{F}_3(\mathbf{z})$ definida mediante $F_3(\mathbf{z}) = \tau_L \tilde{F}_3(\mathbf{z})$, es una función analítica en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$.*
- (c) *Si definimos unas nuevas ecuaciones de cierre a partir de (4.10) como*

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

donde $G_i = F_i$ para $i \neq 3$ y $G_3 = \tilde{F}_3$, entonces la ecuación (4.12) tiene como conjunto de soluciones en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ las soluciones de (4.10) que no corresponden con la rama espuria (4.11).

- (d) *Para el sistema (4.12) el punto $\bar{\mathbf{z}}$ es un punto no singular. El Teorema de la Función Implícita asegura la existencia y unicidad, en un entorno*

\mathcal{N} del punto \bar{z} , de cuatro funciones analíticas $\varphi_i : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, definidas en un entorno apropiado \mathcal{N}_0 de $\tau_L = 0$, tales que

$$\mathbf{G}(\varphi_1(\tau_L), \tau_L, \varphi_2(\tau_L), \varphi_3(\tau_L), \varphi_4(\tau_L)) = \mathbf{0},$$

y de manera que toda solución \mathbf{z} de (4.12) en \mathcal{N} con $\tau_L \in \mathcal{N}_0$ admite la parametrización

$$\mathbf{z} = (\varphi_1(\tau_L), \tau_L, \varphi_2(\tau_L), \varphi_3(\tau_L), \varphi_4(\tau_L)).$$

Dichas funciones tienen los siguientes desarrollos en serie de Taylor en el punto $\tau_L = 0$:

$$\begin{aligned} \tau_C = \varphi_1(\tau_L) &= \pi - \tau_L + \frac{1-d}{12}\tau_L^3 - \frac{9-15d-5t^2-6d^2-dt^2}{720}\tau_L^5 - \\ &- \frac{t^2}{96\pi}\tau_L^6 + \frac{135-315d-210t^2+231d^2+112dt^2-14t^4-51d^3}{60480}\tau_L^7 + \\ &+ \frac{20d^2t^2-2dt^4}{60480}\tau_L^7 + \frac{25t^2-12dt^2+t^4}{2880\pi}\tau_L^8 + O(\tau_L^9), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} x_2^0 = \varphi_2(\tau_L) &= \frac{\tau_L}{2} + \frac{t}{12}\tau_L^2 + \frac{\pi d - 4t}{24\pi}\tau_L^3 + \frac{7dt - t^3}{720}\tau_L^4 + \frac{60t - 48dt}{1440\pi}\tau_L^5 + \\ &+ \frac{4t^3 - \pi dt^2 + 6\pi d^2}{1440\pi}\tau_L^5 - \frac{840t - 31\pi^2 d^2 t + 11\pi^2 dt^3 - \pi^2 t^5}{30240\pi^2}\tau_L^6 + \\ &+ \frac{-1260t - 1848dt + 56t^3 - 612d^2 t + 144dt^3 + 8t^5 + 51\pi d^3}{120960\pi}\tau_L^7 + \\ &+ \frac{-20\pi d^2 t^2 + 2\pi dt^4}{120960\pi}\tau_L^7 + \frac{55440t - 45360dt - 6720t^3 + 381\pi^2 d^3 t}{3628800\pi^2}\tau_L^8 + \\ &+ \frac{-226\pi^2 d^2 t^3 + 45\pi^2 dt^5 - 3\pi^2 t^7}{3628800\pi^2}\tau_L^8 + O(\tau_L^9). \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} x_2^1 = \varphi_3(\tau_L) &= \frac{\tau_L}{2} - \frac{t}{12}\tau_L^2 + \frac{\pi d + 4t}{24\pi}\tau_L^3 - \frac{7dt - t^3}{720}\tau_L^4 + \frac{-60t + 48dt}{1440\pi}\tau_L^5 + \\ &+ \frac{-4t^3 - \pi dt^2 + 6\pi d^2}{1440\pi}\tau_L^5 + \frac{840t - 31\pi^2 d^2 t + 11\pi^2 dt^3 - \pi^2 t^5}{30240\pi^2}\tau_L^6 + \\ &+ \frac{1260t - 1848dt - 56t^3 + 612d^2 t - 144dt^3 - 8t^5 + 51\pi d^3}{120960\pi}\tau_L^7 + \\ &+ \frac{-20\pi d^2 t^2 + 2\pi dt^4}{120960\pi}\tau_L^7 - \frac{55440t - 45360dt - 6720t^3 + 381\pi^2 d^3 t}{3628800\pi^2}\tau_L^8 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{-226\pi^2 d^2 t^3 + 45\pi^2 dt^5 - 3\pi^2 t^7}{3628800\pi^2} \tau_L^8 + O(\tau_L^9). \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} T = \varphi_4(\tau_L) = & -\frac{t}{6\pi} \tau_L^3 + \frac{15t - 12dt + t^3}{360\pi} \tau_L^5 - \frac{t}{36\pi^2} \tau_L^6 - \\ & - \frac{315t - 462dt + 153d^2t - 14t^3 - 36dt^3 + 2t^5}{30240\pi} \tau_L^7 + \frac{33t - 27dt - 4t^3}{2160\pi^2} \tau_L^8 \\ & + O(\tau_L^9), \end{aligned} \quad (4.16)$$

Demostración. A partir de (4.12), observamos que las dos últimas ecuaciones de cierre se reducen para $\tau_L = 0$ a

$$\begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -x_2^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

luego la afirmación **(a)** es inmediata. Es inmediato, además que el miembro izquierdo de (4.9) define una función analítica por ser composición de funciones analíticas, y su primera componente F_3 también lo será. Del apartado **(a)** deducimos, por tanto, que se puede realizar la descomposición $F_3 = \tau_L \tilde{F}_3$, con \tilde{F}_3 también analítica, como se afirma en **(b)**.

Del apartado **(b)** podemos ahora deducir, a partir de (4.9), que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(\mathbf{z}) \Big|_{\tau_L=0} = & \lim_{\tau_L \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_L} \left(e_1^T e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + 1 \right) + \\ & + \lim_{\tau_L \rightarrow 0} \left(e_1^T e^{A_L \tau_L} \frac{1}{\tau_L} \int_0^{\tau_L} e^{-A_L s} \begin{bmatrix} t - T \\ d - 1 \end{bmatrix} ds \right), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a concluir que

$$\tilde{F}_3(\mathbf{z}) \Big|_{\tau_L=0} = e_1^T A_L \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + e_1^T \begin{bmatrix} t - T \\ d - 1 \end{bmatrix} = -t - x_2^1 + t - T = -x_2^1 - T.$$

Se comprueba entonces que

$$\tilde{F}_3(\pi, 0, \mu, -\mu, 0) = \mu$$

lo que implica que la rama espuria no pertenece al conjunto solución de $\tilde{F}_3 = 0$ (salvo en el valor $\mu = 0$, que corresponde a $\bar{\mathbf{z}}$), tal y como se afirma en **(c)**. Es

obvio además que toda solución \mathbf{z} de (4.10) con $\tau_L \neq 0$ sigue siendo solución de (4.12).

El cálculo de la matriz jacobiana

$$D_{\mathbf{z}}\mathbf{G}(\mathbf{z})|_{\bar{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

nos permite asegurar que tiene rango 4, pues el determinante que se obtiene suprimiendo la segunda columna (que corresponde a τ_L) resulta valer $-\pi/2$. Ahora la aplicación del Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas [CH82] sobre (4.12) se realiza de manera directa, obteniendo lo enunciado en el apartado (d). Una vez asegurada la existencia de desarrollos para τ_C , x_2^0 , x_2^1 y T centrados en $\tau_L = 0$, utilizamos la técnica de coeficientes indeterminados para obtenerlos. Trabajando de forma sucesiva para cada grado de τ_L , y ayudados por un programa de cálculo simbólico, obtenemos las series que figuran en el enunciado. ■

En lo que sigue, nos referiremos a las ecuaciones (4.12) como ecuaciones de cierre desingularizadas.

Ya que la traza de la zona central resulta ser el parámetro natural de bifurcación, nos habría interesado obtener la parametrización de las soluciones respecto a T en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$. Sin embargo, a la vista de la matriz (4.17) esto no es posible de manera directa por ser singular la submatriz jacobiana correspondiente. El siguiente Lema, relativo a la inversión de series de potencias, nos ayudará a conseguir nuestro objetivo.

Lema 4.10 *Sea la ecuación $\eta f(\eta) = \xi^n g(\xi)$ para n impar, donde f y g son funciones reales analíticas en 0 y tales que $f(0) = f_0 \neq 0$ y $g(0) = g_0 \neq 0$.*

Entonces existe una función real h , analítica para la variable $\eta^{1/n}$ en 0, con $h(0) \neq 0$ y tal que $\xi = \eta^{\frac{1}{n}} h(\eta^{\frac{1}{n}})$.

Demostración. Haciendo el cambio de variables $\xi = \zeta w$, donde $\zeta = \eta^{1/n}$ obtenemos la ecuación

$$\eta f(\zeta^n) = \eta w^n g(\zeta w),$$

y, después de simplificar, llegamos a la ecuación

$$H(\zeta, w) = w^n g(\zeta w) - f(\zeta^n) = 0,$$

que analizamos en un entorno de $(\zeta, w) = (0, (f_0/g_0)^{1/n})$.

Es inmediato ver que

$$\left[(f_0/g_0)^{1/n} \right]^n g_0 - f(0) = 0.$$

Ahora podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno de $(\zeta, w) = (0, (f_0/g_0)^{1/n})$, para asegurar la existencia de una función analítica h con $h(0) = (f_0/g_0)^{1/n}$ y tal que $H(\zeta, h(\zeta)) = 0$, por ser

$$\begin{aligned} H_w(0, (f_0/g_0)^{1/n}) &= \left[(nw^{n-1}g(\zeta w) + w^n g'(\zeta w)\zeta) \right]_{(0, (f_0/g_0)^{1/n})} = \\ &= n (f_0/g_0)^{(n-1)/n} g_0 \neq 0, \end{aligned}$$

y el resultado se obtiene haciendo $w = h(\zeta)$. ■

Observación 4.11 Si n es par, el resultado anterior sigue siendo válido para $\eta > 0$, si se exigen signos adecuados para $f(\eta)$ y $g(\xi)$; más concretamente, se necesitaría que $f_0 g_0 > 0$.

Enunciamos a continuación dos resultados referentes a la estabilidad de las posibles órbitas periódicas que usan las tres zonas y son simétricas respecto del origen. Trabajaremos con las aplicaciones de Poincaré π_C , π_L , π_1 y π , definidas en el Capítulo 3. Para empezar, es inmediato reescribir el Lema 3.3 en dimensión $n = 2$. Nótese que en este Capítulo y sucesivos, no es necesario diferenciar las variables “ $\hat{\mathbf{x}}^i$ ” de las “ \mathbf{x}^i ”, ya que todas las variables “ \mathbf{x}^i ” que manejamos pertenecen a una órbita periódica del sistema.

Lema 4.12 Sea Γ una órbita periódica de tres zonas del sistema (4.1), que interseca transversalmente la frontera Σ_1 en los puntos \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^3 , y a Σ_{-1} en \mathbf{x}^1 y \mathbf{x}^2 , según Figura 4.6, y sean $p_0, p_3, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ sus respectivas coordenadas reducidas. Sean $\tau_C > 0$ y $\tau_L > 0$ los tiempos de vuelo de Γ en la

zona C y zonas laterales, respectivamente. Entonces, el producto de matrices $\exp(A_L\tau_L)\exp(A_C\tau_C)$ es semejante a la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{d\bar{\tau}_C(p_0)}{dp_0} + \frac{d\bar{\tau}_L(p_1)}{dp_1} \frac{d\pi_C(p_0)}{dp_0} \\ 0 & \frac{d\pi_1(p_0)}{dp_0} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Con este resultado podemos caracterizar la estabilidad de cualquier órbita periódica simétrica respecto al origen, calculando el multiplicador característico correspondiente. Hacemos notar que el siguiente resultado (que relaciona las soluciones de las ecuaciones de cierre desingularizadas con órbitas periódicas) nos permitirá analizar la estabilidad del ciclo límite que bifurca en todos los casos, y en particular en el caso correspondiente a la Proposición 4.7, es decir, cuando $d < 0$.

Proposición 4.13 *Sea z la solución de las ecuaciones de cierre (4.12) con $t \neq 0$ que corresponde a un valor $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

- (a) *El sistema (4.6) posee un ciclo límite con simetría respecto del origen que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} , y tiene tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en la zona L .*
- (b) *El valor correspondiente de T verifica*

$$Tt < 0.$$

- (c) *El logaritmo del multiplicador característico del ciclo límite es*

$$\rho = 2t\tau_L + 2T\tau_C = 2t\tau_L + O(\tau_L^3),$$

de manera que el ciclo límite es hiperbólico y para $t < 0$ (resp. $t > 0$) es orbitalmente asintóticamente estable (resp. inestable).

Demostración. Dada una solución de las ecuaciones de cierre, veremos que para $\tau_L > 0$ el flujo de la zona central que parte de $(1, x_2^0)^T$ lleva a $(-1, x_2^1)^T$,

y el flujo de la zona L transforma el punto $(-1, x_2^1)^T$ al simétrico del origen de $(1, x_2^0)^T$, luego los puntos anteriores pertenecerán a una solución periódica del sistema.

Por otra parte, si τ_L es suficientemente pequeño dicha órbita periódica está en un entorno U de la órbita periódica más externa del centro, que se tiene para $\tau_L = 0$.

Por construcción, las ecuaciones de cierre han de ser satisfechas por cualquier órbita periódica simétrica respecto al origen que utilice las tres zonas. Por el apartado (d) del Lema 4.9 no hay otras soluciones de las ecuaciones de cierre que correspondan a órbitas periódicas en el entorno U para el mismo valor de τ_L , de manera que tal órbita periódica es aislada y se trata de un ciclo límite.

Veamos que la órbita periódica es transversal y para ello estudiaremos la trayectoria del sistema (4.6) correspondiente a la solución de las ecuaciones de cierre (4.12) dada por las series del Lema 4.9. Comenzamos el razonamiento estudiando la trayectoria que pasa por $(1, x_2^0)^T \in \Sigma_1$, tomando en este punto el origen de tiempos de la órbita de la zona C

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0)} = T x_1(0) - x_2(0) = T - x_2^0,$$

utilizando los desarrollos (4.16) de T y (4.14) de x_2^0 obtenemos para $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño,

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0)} = -\frac{1}{2}\tau_L - \frac{t}{12}\tau_L^2 + O(\tau_L^3) < 0,$$

verificando que dicha trayectoria entra en la zona C y lo hace de forma transversal a Σ_1 . Por otra parte, como $\tau_C = \pi - \tau_L + O(\tau_L^2)$, deducimos que para $\tau_L > 0$, suficientemente pequeño, $\tau_C < \pi$ y por tanto la órbita que va de $(1, x_2^0)^T$ a $(-1, x_2^1)^T$ se mantiene en todo momento en la región C .

Procedemos con un razonamiento análogo para la trayectoria que parte de $(-1, x_2^1)^T \in \Sigma_{-1}$, considerando en este punto el origen de tiempos de la zona L . Se tiene

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1)} = t x_1(0) - x_2(0) - T + t = -x_2^1 - T,$$

y utilizando los desarrollos (4.16) de T y (4.15) de x_2^1 obtenemos para $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño que

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1)} = -\frac{1}{2}\tau_L + \frac{t}{12}\tau_L^2 + O(\tau_L^3) < 0,$$

por lo que la trayectoria entra en la zona L y de forma transversal a Σ_{-1} .

Además, es fácil probar que la órbita que va de $(-1, x_2^1)^T$ a $(-1, x_2^2)^T$ se mantiene en todo momento en la zona L .

Debido a la simetría del problema, la repetición del razonamiento para las trayectorias que parten de $(-1, -x_2^0)^T \in \Sigma_{-1}$ y de $(1, -x_2^1)^T \in \Sigma_1$ asegura que éstas entran en las zonas C y R respectivamente. Concluimos que las trayectorias forman una órbita periódica del sistema (4.6), que se corresponde con la solución de las ecuaciones de cierre (4.12) dada por los desarrollos (4.13) a (4.16). Así hemos demostrado lo indicado en **(a)**.

Del desarrollo (4.16) de T obtenemos que

$$Tt = -\frac{t^2}{6\pi}\tau_L^3 + O(\tau_L^5),$$

y teniendo en cuenta el signo positivo de τ_L el apartado **(b)** se deduce inmediatamente.

Por la semejanza de matrices enunciada en el Lema 4.12, y utilizando la misma notación, los autovalores de $\exp(A_C\tau_C)\exp(A_L\tau_L)$ son -1 y $\frac{d\pi_1(\hat{p}_0)}{dp_0}$.

En realidad, el valor que nos interesa es

$$\frac{d\pi(\hat{p}_0)}{dp_0} = \left(\frac{d\pi_1(\hat{p}_0)}{dp_0}\right)^2 = \det[\exp(A_L\tau_L)\exp(A_C\tau_C)]^2.$$

A partir de la igualdad

$$\det[\exp(A\tau)] = \exp[\tau \text{ traza}(A)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(\hat{p}_0)}{dp_0} &= \exp(2\tau_L \text{ traza}(A_L)) \exp(2\tau_C \text{ traza}(A_C)) \\ &= \exp(2\tau_C T + 2\tau_L t), \end{aligned} \tag{4.19}$$

luego el logaritmo del multiplicador característico de la órbita periódica es

$$\rho = 2t\tau_L + 2T\tau_C.$$

Ahora utilizando los desarrollos del Lema 4.9 obtenemos

$$\begin{aligned} \rho &= 2t\tau_L + 2 \left(\pi - \tau_L + \frac{1-d}{12}\tau_L^3 + O(\tau_L^5) \right) \left(-\frac{t}{6\pi}\tau_L^3 + O(\tau_L^5) \right) = \\ &= 2t\tau_L + O(\tau_L^3). \end{aligned}$$

Al ser $t \neq 0$ por hipótesis, se tiene que $\rho \neq 0$ y por tanto el multiplicador característico de la órbita periódica es distinto de 1 y el ciclo límite es hiperbólico. Queda así probado el apartado (c). ■

Observación 4.14 Nótese que la expresión (4.19) es válida para cualquier órbita periódica de tres zonas transversal a las fronteras de separación con tiempos de vuelo τ_C y τ_L .

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, donde hacemos jugar a T el papel de parámetro de bifurcación.

Teorema 4.15 *Consideremos el sistema (4.1) con $D > 0$, $T^2 < 4D$ y $t \neq 0$. Para $T = 0$ el sistema experimenta una bifurcación foco-centro-ciclo límite, es decir, a partir de la configuración de foco en el origen, existente cuando $Tt > 0$, el sistema presenta una estructura de centro lineal restringida a la zona central cuando $T = 0$, que da lugar a un ciclo límite hiperbólico para $tT < 0$ y T suficientemente pequeño, simétrico respecto del origen y que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} .*

Cuando $t < 0$, el ciclo límite que bifurca aparece para $T > 0$ y es orbitalmente asintóticamente estable, mientras que cuando $t > 0$, el ciclo límite que bifurca aparece para $T < 0$ y es orbitalmente inestable.

La amplitud a (medida como el máximo en $|x_1|$), el periodo P y el logaritmo del multiplicador característico ρ de la oscilación periódica son funciones analíticas en 0, en la variable $T^{1/3}$, es decir

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(T^{1/3}\right)^j, \quad P = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \left(T^{1/3}\right)^j, \quad \rho = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \left(T^{1/3}\right)^j.$$

Además, los primeros coeficientes de las series son, para la amplitud

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{8t^{\frac{2}{3}}}, \quad a_3 = 0,$$

$$a_4 = \frac{(6\pi^4)^{\frac{1}{3}}(120D - 2t^2 - 21d)}{960Dt^{\frac{4}{3}}}, \quad a_5 = \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{12t^{\frac{5}{3}}},$$

$$a_6 = \frac{\pi^2(12600D^2 + 3360Dt^2 - 2520Dd + 318dt^2 + 1557d^2 + 8t^4)}{134400D^2t^2},$$

$$a_7 = \frac{(6\pi^4)^{\frac{1}{3}}(102D + 34t^2 - 3d)}{720Dt^{\frac{7}{3}}},$$

para el periodo

$$P_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = \frac{\pi(d - D)}{D^{\frac{3}{2}}t}, \quad P_4 = 0,$$

$$P_5 = -\frac{(6^2\pi^5)^{\frac{1}{3}}((d - D)^2 + t^2D)}{10D^{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{3}}}, \quad P_6 = \frac{\pi(4(d - D) - 3t^2)}{4D^{\frac{3}{2}}t^2},$$

$$P_7 = \frac{(6\pi^7)^{\frac{1}{3}}(-15D^3 + 63D^2d - 14D^2t^2 - 81Dd^2 + 31Ddt^2 + Dt^4 + d^2t^2 + 33d^3)}{420D^{\frac{7}{2}}t^{\frac{7}{3}}},$$

$$P_8 = -\frac{(6^2\pi^5)^{\frac{1}{3}}(7(d - D)^2 + t^2(D - 6d))}{60D^{\frac{5}{2}}t^{\frac{8}{3}}},$$

y para el logaritmo del multiplicador característico

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = -2(6\pi)^{1/3}t^{2/3}, \quad \rho_2 = 0,$$

$$\rho_3 = \frac{\pi}{15}(12d + 15 - t^2), \quad \rho_4 = \frac{4(6\pi)^{1/3}}{3t^{1/3}},$$

$$\rho_5 = \frac{6^{2/3}\pi^{5/3} (3150d - 1050t^2 - 1737d^2 + 132dt^2 + 2t^4 - 1575)}{18900 t^{2/3}},$$

$$\rho_6 = \frac{2\pi}{5} \frac{2d - t^2 - 2}{t},$$

Demostración. La existencia de la configuración de foco en el origen es inmediata al comprobar que los autovalores de A_C

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2},$$

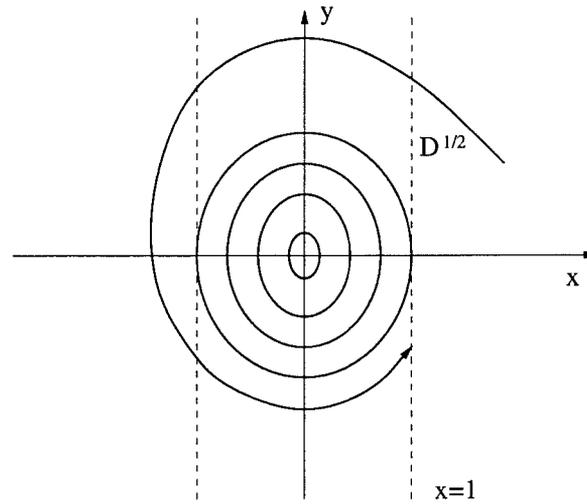
son complejos cuando $T^2 > 4D$. En lo que sigue asumimos que hemos aplicado el Lema 4.8, con lo que trabajamos con el sistema en la forma (4.6). La existencia de la bifurcación ya ha sido deducida anteriormente a partir de las proposiciones 4.3 a 4.7. Sólo demostramos las afirmaciones que no están contenidas en la Proposición 4.13.

La existencia de un centro lineal en la zona C para $T = 0$ ya se demostró en el Lema 4.5. De este centro, ver Figura 4.7-(a), bifurca el ciclo límite cuya existencia se demuestra en la Proposición 4.13 –en particular, de la órbita periódica más externa del centro, que corresponde con el punto \bar{z} solución de las ecuaciones de cierre (4.12)–.

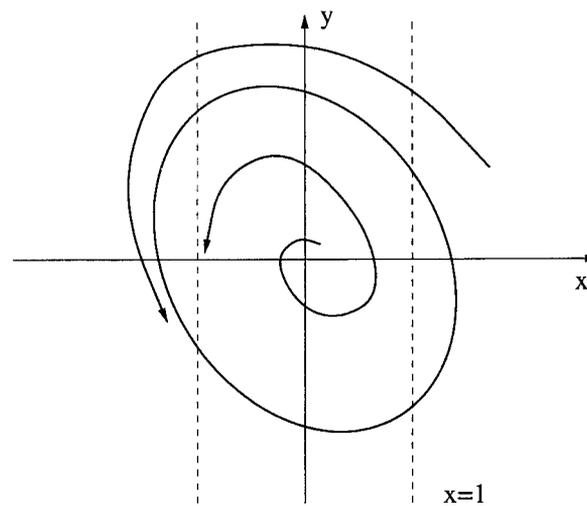
A partir de la ecuación (4.16) y aplicando el Lema 4.10 con $n = 3$, podemos asegurar la existencia de una función χ analítica en 0 con $\chi(0) \neq 0$, tal que $\tau_L = T^{1/3}\chi(T^{1/3})$. Utilizando de nuevo un manipulador simbólico, procedemos a la inversión de la serie (4.16), obteniendo

$$\begin{aligned} \tau_L = & -\frac{(6\pi)^{1/3} T^{1/3}}{t^{1/3}} + \frac{\pi}{30} \frac{12d - t^2 - 15}{t} T - \frac{(6\pi)^{1/3} T^{4/3}}{3t^{4/3}} + \\ & + \frac{6^{2/3}\pi^{5/3}}{37800} (-1575 + 3150d - 1050t^2 - 1737d^2 + 132dt^2 + 2t^4) \frac{T^{3/5}}{t^{3/5}} + \\ & + \frac{\pi}{30} \frac{-12 + 9d - 7t^2}{t^2} T^2 + O(T^{7/3}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Debido a la simetría, el periodo de la órbita periódica es $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Sustituyendo (4.20) en (4.13), y deshaciendo el cambio del Lema 4.8 obtenemos la serie para el periodo que figura en el enunciado del Teorema.



(a)



(b)

Figura 4.7: (a) Plano de fases del sistema lineal a trozos para $T = 0$. La estructura de centro está limitada a la zona central.

(b) Plano de fases para $T > 0$ mostrando un ciclo límite que pasa por las tres zonas y proviene de la órbita más externa del centro.

Definimos la amplitud a de la órbita periódica como el máximo valor de $|x_1|$ alcanzado por el sistema (4.6). Supongamos que dicho máximo se alcanza en un tiempo τ^* en la zona R del plano. Se cumplirá

$$\dot{x}_1(\tau^*) = tx_1(\tau^*) - x_2(\tau^*) + T - t = 0. \quad (4.21)$$

Utilizando la fórmula de variación de las constantes (3.7) para $\mathbf{x}(\tau)$ en la zona R con $n = 2$, podemos expresar la ecuación (4.21) como $G(\tau_L, \tau^*) = 0$, siendo

$$G(\tau_L, \tau^*) = \begin{bmatrix} t & -1 \end{bmatrix} \left(e^{A_L \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_2^1(\tau_L) \end{bmatrix} + \int_0^{\tau^*} e^{A_L(\tau^*-s)} \begin{bmatrix} T(\tau_L) - t \\ 1 - d \end{bmatrix} ds \right) + T - t.$$

Esta ecuación sólo depende de τ^* y de τ_L , y se cumple $G(0, 0) = 0$. Desarrollando $G(\tau_L, \tau^*)$ en serie de Taylor alrededor de $\tau_L = 0$ y $\tau^* = 0$, obtenemos

$$G(\tau_L, \tau^*) = \frac{1}{2}\tau_L - \tau^* - \frac{t}{12}\tau_L^2 + \frac{t}{2}\tau_L\tau^* - \frac{t}{2}\tau^{*2} + O(\tau_L, \tau^*)^3,$$

y por tanto, al ser $G_{\tau^*}(0, 0) = -1$, la ecuación $G(\tau_L, \tau^*) = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(0, 0)$, una función $\psi(\tau_L)$, tal que $G(\tau_L, \psi(\tau_L)) = 0$. Utilizando de nuevo un manipulador simbólico obtenemos el desarrollo en serie de $\tau^* = \psi(\tau_L)$, que resulta ser

$$\tau^* = \frac{1}{2}\tau_L + \frac{t}{24}\tau_L^2 + \frac{(2d - t^2)}{2880}\tau_L^4 + O(\tau_L^5).$$

Sustituyendo la serie anterior (completada hasta $O(\tau_L^{10})$) junto con (4.16) y (4.15) en la siguiente expresión de la amplitud

$$a = x_1(\tau^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(e^{A_L \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_2^1(\tau_L) \\ -x_3^1(\tau_L) \end{bmatrix} + \int_0^{\tau^*} e^{A_L(\tau^*-s)} \begin{bmatrix} T(\tau_L) - t \\ 1 - m \\ D - d \end{bmatrix} ds \right),$$

obtenemos

$$a = 1 + \frac{1}{8}\tau_L^2 + \frac{1}{1152}(15d - t^2)\tau_L^4 + \frac{1}{414720}(549d^2 - 186dt^2 + 16t^4)\tau_L^6 +$$

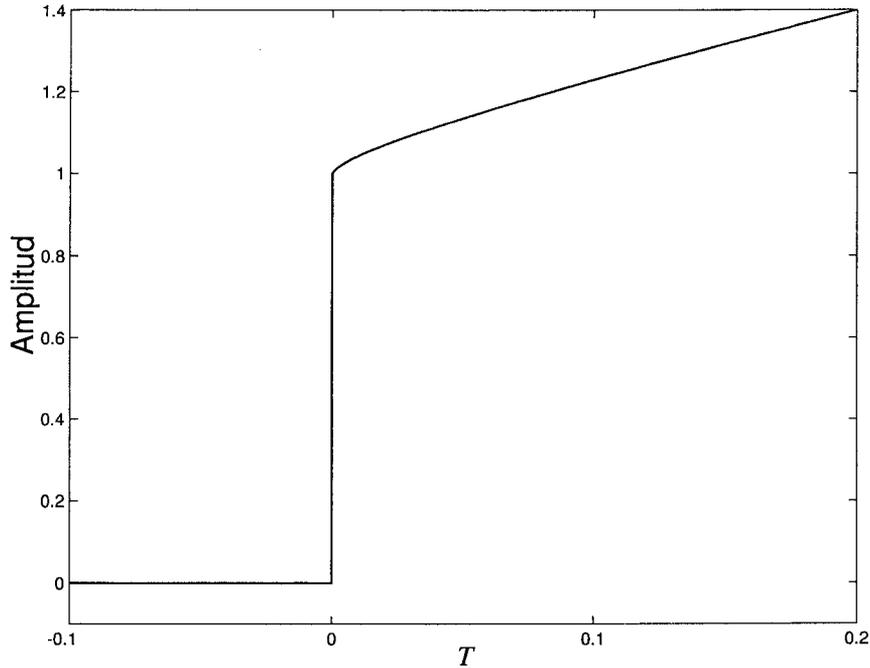


Figura 4.8: Amplitud del ciclo límite (medida como el máximo en $|x_1|$) en función del parámetro de bifurcación T , considerando los tres primeros términos no nulos de la serie del Teorema 4.15. Se ha dibujado el caso $D = d = 1$, $t = -1$. El segmento vertical representa la configuración de centro de la Figura 4.7-(a).

$$+ \frac{1}{154828800} (20775d^3 - 11916d^2t^2 + 2276dt^4 - 144t^6) \tau_L^8 + O(\tau_L^{10}),$$

donde utilizando ahora la serie (4.20) y deshaciendo el cambio del Lema (4.8) obtenemos el resultado del enunciado.

Los resultados para el multiplicador característico se deducen del apartado (c) de la Proposición 4.13. ■

Para el caso $d > 0$ podemos asegurar aplicando la Proposición 4.6 que el ciclo límite bifurcante es el único existente en todo el plano de fases.

Igualmente el ciclo límite es único cuando $d < 0$, ya que su existencia queda asegurada por la Proposición 4.7, mientras que la unicidad del mismo

se encuentra probada en el Teorema 5 de [LS96].

Se observa que el comportamiento de la amplitud frente al parámetro de bifurcación, $a = 1 + (6\pi)^{\frac{2}{3}}T^{2/3} / (8t^{\frac{2}{3}}) + O(T^{4/3})$, es muy diferente al de la bifurcación de Hopf de los sistemas diferenciables, donde ésta evoluciona con $O(T^{\frac{1}{2}})$, sin presentar el salto observado en sistemas lineales a trozos, ver Figura 4.8. Por otro lado, el periodo tiene un comportamiento muy similar en ambas bifurcaciones al evolucionar en la bifurcación de Hopf como $2\pi/\sqrt{D} + O(T)$.

4.1.2. Comparación con el método de balance armónico

En esta sección aplicaremos el método de balance armónico formulado en la Sección 3.2 para el estudio del ciclo límite simétrico de tres zonas existente en el sistema (4.1) bajo las hipótesis del Teorema 4.15. Siguiendo punto por punto el razonamiento de la Sección 3.2, tendremos que la función de transferencia $G(p)$ del sistema (4.1) es

$$G(p) = \mathbf{c}^T(pI - A)^{-1}\mathbf{b} = \frac{(T-t)p - D + d}{p^2 - tp + d},$$

y asumiremos que

$$\sigma(\tau) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = x_1(\tau) = a \operatorname{sen}(\omega\tau),$$

donde $\omega > 0$ y $a \geq 1$ por ser el ciclo límite de tres zonas. En lo que sigue utilizamos la formulación alternativa en la variable q en lugar de la variable a , el método de balance armónico nos conduce entonces a la ecuación (3.37), que para nuestro sistema queda

$$1 - \frac{(T-t)i\omega - D + d}{d - \omega^2 - it\omega} N(q) = 0,$$

y puede ser reescrita separando las partes real e imaginaria como

$$d - \omega^2 + (D - d)N(q) = 0, \quad (4.22)$$

$$\omega [t + (T - t)N(q)] = 0, \quad (4.23)$$

donde

$$N(q) = 1 - \frac{q}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} q}{\pi}.$$

Amplitud y periodo de la órbita periódica

El sistema de ecuaciones (4.22)-(4.23) es equivalente al sistema

$$N(q) = \frac{t}{t - T}, \quad (4.24)$$

$$\omega^2 = \frac{Dt - dT}{t - T}, \quad (4.25)$$

de donde obtendremos aproximaciones para la amplitud a y el periodo $\hat{P} = 2\pi/\omega$ de la órbita periódica.¹

Primeramente, estudiamos la ecuación (4.24) sustituyendo $N(q)$ por su valor y la ecuación se convierte en

$$1 - \frac{q}{\pi} + \frac{\sin q}{\pi} = \frac{t}{t - T}, \quad (4.26)$$

cuya solución nos proporcionará para cada valor de t y T , un valor para q que nos proporciona una aproximación global a la amplitud $a = 1/\cos(q/2)$ de la órbita periódica.

Como estamos interesados en comparar este resultado con el desarrollo obtenido con el método de las ecuaciones de cierre, lo que sigue es un análisis local de la ecuación (4.26) en un entorno de $T = 0$, $q = 0$. Notemos en primer lugar que la hipótesis $tT < 0$ con T suficientemente pequeño del Teorema 4.15 asegura que

$$0 < \frac{t}{t - T} < 1,$$

lo que implica que (4.26) tiene una solución única con $0 < q < \pi$, al ser $N(0) = 1$ y $N(\pi) = 0$. Además la ecuación (4.26) es invariante al cambio $(t, T) \rightarrow (-t, -T)$ por lo que supondremos en lo que sigue, sin pérdida de generalidad que $t < 0$ y $T > 0$.

La ecuación (4.26) admite la solución $q = 0$ y $T = 0$, que se corresponde con la última órbita periódica del centro existente para $T = 0$. Nos interesa

¹La expresión (4.25), que se puede escribir como $\omega^2 = (D - dT/t)/(1 - T/t)$, en el caso $Tt < 0$, $D > 0$, $d < 0$, da valores positivos de ω^2 para $\frac{D}{d} < \frac{T}{t} \leq 0$, pero para $\frac{T}{t} \rightarrow \frac{D}{d}$ se tiene que $\omega^2 \rightarrow 0$ lo que parece indicar la existencia de una bifurcación heteroclina en la que el periodo tiende a ∞ . Tal bifurcación realmente aparece como se describe en [LP96] y [LS96].

estudiar las soluciones con $T > 0$, y $0 < q < \pi$ (que son las que se corresponden con $a > 1$) y obtener un desarrollo local de a en función de T .

Si en la ecuación (4.26) hacemos el cambio $\eta = T/t$ y despejamos η queda

$$\eta = \frac{-q + \operatorname{sen} q}{\pi - q + \operatorname{sen} q},$$

y desarrollando en serie de Taylor en $q = 0$ obtenemos

$$\eta = -\frac{1}{6\pi}q^3 + \frac{1}{120\pi}q^5 + O(q^6), \quad (4.27)$$

de manera que la aplicación del Lema 4.10 con $n = 3$ nos permite asegurar que existe una función h analítica en 0 con $h(0) \neq 0$ y tal que

$$q = \eta^{1/3}h(\eta^{1/3}).$$

Para invertir la serie (4.27) utilizamos coeficientes indeterminados para el desarrollo de h y llegamos a

$$q = (6\pi)^{1/3}\eta^{1/3} + \frac{\pi}{10}\eta + O(\eta^{4/3}).$$

Si ahora sustituimos dicha expresión en el desarrollo de Taylor de a

$$a = \frac{1}{\cos(q/2)} = 1 + \frac{1}{8}q^2 + \frac{5}{384}q^4 + O(q^5),$$

y deshacemos el cambio de η obtenemos

$$a = 1 + \frac{(6\pi)^{2/3}}{8} \left(\frac{T}{t}\right)^{2/3} + \frac{11(6\pi)^{4/3}}{640} \left(\frac{T}{t}\right)^{4/3} + O\left(\frac{T}{t}\right)^{5/3}. \quad (4.28)$$

Si comparamos esta expresión obtenida por el método de la función descriptiva con la obtenida para la amplitud en el Teorema 4.15, comprobamos que coinciden los dos primeros términos no nulos mientras que el tercero no es correcto. Esto se podía haber comprobado a priori, porque el término calculado de forma exacta depende de D y d , véase el coeficiente a_4 del Teorema 4.15, mientras que esta dependencia no existe en la ecuación (4.26).

Partiendo ahora de la ecuación (4.25), obtenemos la siguiente expresión para el periodo

$$\hat{P} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{t-T}{Dt-dT}}.$$

Esta ecuación proporciona una aproximación al periodo de la órbita periódica. Para compararlo con el resultado del Teorema 4.15, desarrollamos la expresión anterior en serie de Taylor en $T = 0$, y obtenemos

$$\hat{P} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} + \frac{\pi(d-D)T}{D^{3/2}t} + \frac{\pi(d-D)(3d+D)T^2}{4D^{5/2}t^2} + O(T^3). \quad (4.29)$$

Se comprueba que los dos primeros términos coinciden con el desarrollo del Teorema 4.15, mientras que el tercero ya es diferente.

Queremos resaltar que las expresiones (4.28) y (4.29) para amplitud y periodo obtenidas por el método de balance armónico son aproximaciones que tienen carácter global respecto a los parámetros, mientras que a pesar de que los resultados obtenidos mediante el método de las ecuaciones de cierre son analíticos, dado que el número de términos calculados es necesariamente limitado, la aproximación resultante tiene carácter local.

Nuestro análisis nos dice que localmente (en un entorno del valor de bifurcación $T = 0$) el método de balance armónico predice correctamente hasta dos términos de las series correspondientes.

Estabilidad de la órbita periódica

Para determinar la estabilidad de la órbita periódica utilizamos el criterio de estabilidad lineal (3.35) descrito en la Sección 3.4. Es fácil ver que

$$G(i\omega) = \frac{(T-t)i\omega - D + d}{d - \omega^2 - it\omega} = \frac{[(T-t)i\omega - D + d][d - \omega^2 + it\omega]}{(d - \omega^2)^2 + t^2\omega^2},$$

de donde

$$\text{Im } G(i\omega) = \omega \frac{(T-t)(d - \omega^2) - t(D-d)}{(d - \omega^2)^2 + t^2\omega^2}.$$

Derivando la expresión anterior, tras un cálculo directo obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\omega} \text{Im } G(i\omega) \right|_{\omega=\tilde{\omega}} = \tilde{\omega} \frac{-2\tilde{\omega}(T-t)}{(d - \tilde{\omega}^2)^2 + t^2\tilde{\omega}^2},$$

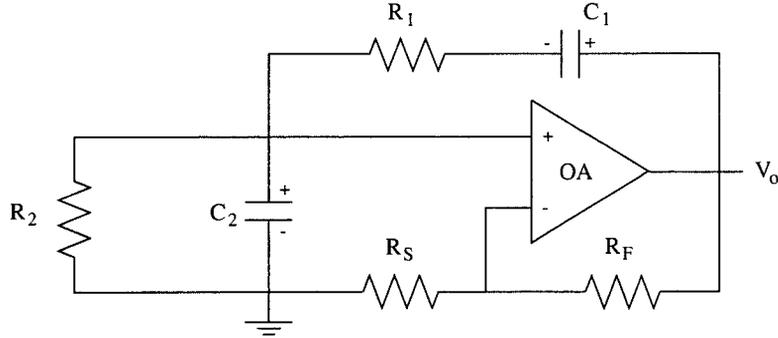


Figura 4.9: Esquema del oscilador en puente de Wien

por lo que su signo vendrá dado por

$$\operatorname{sgn} \left[\frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} G(i\omega) \Big|_{\omega=\tilde{\omega}} \right] = \operatorname{sgn}(t - T).$$

En consecuencia, para T suficientemente pequeño, el criterio (3.35) nos asegura que el ciclo límite es linealmente estable (resp. inestable) si se verifica que $t < 0$ (resp. $t > 0$). Comparando con el Teorema 4.15 observamos que para el sistema (4.1) el criterio de estabilidad lineal resulta ser exacto a primer orden.

4.1.3. El oscilador en puente de Wien

En este apartado aplicamos los resultados obtenidos en la Sección 4.1.1 a la familia de osciladores en puente de Wien basados en amplificador operacional, ver Figura 4.9.

Aplicando las Leyes de Kirchhoff al circuito obtenemos el sistema dinámico dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} R_1 C_1 \dot{V}_{C_1} &= -V_{C_1} - V_{C_2} + V_O, \\ C_1 \dot{V}_{C_1} - C_2 \dot{V}_{C_2} &= V_{C_2}/R_2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $V_O = f(V_{C_2})$ es una función no lineal con saturación (curva característica del circuito equivalente del amplificador operacional realimentado en montaje no inversor), y R_1, R_2, C_1, C_2 son los valores de las resistencias y condensadores del circuito.

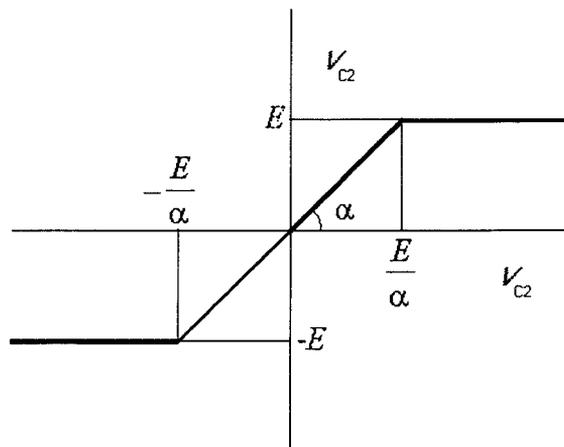


Figura 4.10: Relación entre la entrada y la salida de un amplificador operacional realimentado en montaje no inversor.

Varias alternativas han aparecido en la literatura para modelar la no linealidad f . En [MC79] se utilizó la siguiente función diferenciable

$$f(V_{C2}) = \frac{2E}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi\alpha}{2E} V_{C2}\right), \quad (4.31)$$

donde E es la tensión de saturación del amplificador operacional, y $\alpha = 1 + R_F/R_S$ es la ganancia del circuito equivalente del amplificador operacional polarizado. Una aproximación más realista es, como veremos, la siguiente formulación usada por Kriegsmann en [Kr87]

$$f(V_{C2}) = \begin{cases} E \operatorname{sign}(\alpha V_{C2} - E), & \text{if } |\alpha V_{C2}| > E, \\ \alpha V_{C2}, & \text{if } |\alpha V_{C2}| \leq E, \end{cases} \quad (4.32)$$

y que se ilustra en la Figura 4.10.

En lo que sigue utilizaremos el modelo lineal a trozos de Kriegsmann, y al final del análisis comprobaremos la bondad de ambos modelos comparando los resultados con datos obtenidos en el circuito real.

Las ecuaciones (4.30) y (4.32), se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} R_1 C_2 \dot{V}_{C2} &= -(1 + R_1/R_2) V_{C2} - V_{C1} + f(V_{C2}), \\ R_1 C_1 \dot{V}_{C1} &= -V_{C2} - V_{C1} + f(V_{C2}). \end{aligned}$$

Mediante el reescalado

$$x_1 = \frac{\alpha V_{C_2}}{E}, \quad x_2 = \frac{\alpha V_{C_1}}{E},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{E} f\left(\frac{E}{\alpha} x_1\right) = \text{sat}(x_1),$$

llegamos al siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ \frac{\alpha}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \text{sat}(x_1),$$

que cumple las hipótesis necesarias para aplicarle la Proposición 2.8. El cambio de variables

$$u = x_1, \quad v = \frac{x_2}{R_1 C_2} - \frac{x_1}{R_1 C_1}, \quad (4.33)$$

pone al sistema (4.30) en forma de Liénard con

$$d = D = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, \quad t = -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right), \quad T = t + \frac{\alpha}{R_1 C_2}.$$

Por tanto, el valor crítico del parámetro de bifurcación ($T = 0$) se alcanza para

$$\alpha_C = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

Realizando a continuación la normalización del Lema 4.8

$$x = u, \quad y = \frac{v}{\omega}, \quad \tau = \omega s, \quad \text{con } \omega = \sqrt{D} = (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-\frac{1}{2}},$$

ponemos el sistema en la forma de la ecuación (4.6), obteniendo

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \alpha_C & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(x_1). \quad (4.34)$$

Nótese que el oscilador en puente de Wien, cuando se reescribe en las variables adecuadas, no es sino un oscilador de Van der Pol lineal a trozos, ver [FPT96] y [FPRT98].

Para comparar nuestros resultados con los obtenidos por [Kr87] usaremos el parámetro

$$\mu = -\frac{\tilde{T}}{\tilde{t}} = \frac{\alpha}{\alpha_C} - 1,$$

de forma que el sistema (4.6) se escribe de manera equivalente como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \tilde{t}x - \tilde{t}(1 + \mu) \text{sat}(x) - y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= x. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Aplicando ahora el Teorema 4.15, obtenemos que el sistema (4.35) tiene en la región central un centro lineal para $\mu = 0$, que da lugar a un único ciclo límite asintóticamente estable para $\mu > 0$. Además, la amplitud a (medida como el máximo valor de $|x|$), el periodo P , y el logaritmo del multiplicador característico ρ de la oscilación tienen los siguientes desarrollos en serie de Taylor en $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{8} \mu^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{2} \tilde{t} \mu + \frac{(99 + 28\tilde{t}^2)(6\pi)^{\frac{4}{3}}}{5760} \mu^{\frac{4}{3}} - \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{12} \mu^{\frac{5}{3}} + \\ &+ \frac{(-99 + 26\tilde{t}^2)(6\pi)^{\frac{4}{3}}}{4320} \mu^{\frac{7}{3}} + O(\mu^{\frac{8}{3}}), \\ P &= 2\pi + \frac{(6\pi)^{\frac{5}{3}}}{60} \tilde{t}^2 \mu^{\frac{5}{3}} - \frac{3\pi}{4} \tilde{t}^2 \mu^2 - \frac{(6\pi)^{\frac{7}{3}}}{15120} (18 + \tilde{t}^2) \tilde{t}^2 \mu^{\frac{7}{3}} + \frac{(6\pi)^{\frac{5}{3}}}{72} \tilde{t}^2 \mu^{\frac{8}{3}} + O(\mu^3), \\ \rho &= 2(6\pi)^{\frac{1}{3}} t \mu^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{15} t(t^2 - 27) \mu + \frac{4(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{3} t \mu^{\frac{4}{3}} + O(\mu^{\frac{5}{3}}). \end{aligned}$$

El logaritmo del multiplicador característico representa una medida de la “robustez” de la oscilación, siendo ésta mayor cuanto más negativo sea el exponente, en nuestro caso, cuanto más negativo sea t .

Es interesante hacer notar que, en este caso, al ser $D = d = 1$, para el periodo se obtiene una expresión del tipo $P = 2\pi + O(\mu^{\frac{5}{3}})$ debido a la cancela-

ción del término de orden 1 en μ , a diferencia de lo que predice genéricamente el Teorema 4.15.

En su trabajo, Kriegsmann partió de la ecuación (4.30) eliminando V_{C1} y haciendo un reescalado y normalización del tiempo similares a los anteriores. Pero al no usar el cambio (4.33), obtuvo una ecuación diferencial de segundo orden discontinua en la variable $x = \alpha V_{C2}/E$, a saber

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \tilde{t}\mu \frac{dx}{d\tau} + x &= 0, \quad \text{para } |x| \leq 1, \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} - \tilde{t}\frac{dx}{d\tau} + x &= 0, \quad \text{para } |x| > 1. \end{aligned}$$

Para esta ecuación diferencial lineal a trozos, el autor citado determinó sus soluciones dependiendo de los valores iniciales y tiempos de vuelo de cada zona. Uniendo adecuadamente estas soluciones, Kriegsmann llegó a unas ecuaciones cuyas soluciones correspondían a ciclos límite, equivalentes a las ecuaciones que a lo largo de la memoria hemos denominado como ecuaciones de cierre. La idea proviene de [AVK66], y como se ha visto constituye el punto de partida de nuestro análisis anterior. Con una intuición nada desdeñable, Kriegsmann asumió series en potencias de $\mu^{\frac{1}{3}}$ para la amplitud y el periodo obteniendo

$$\begin{aligned} a &\simeq 1 + \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}{4} \mu^{\frac{2}{3}}, \\ P &= 2\pi + O(\mu^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

Comparando nuestros resultados con los obtenidos por Kriegsmann, se concluye, que aparte del mayor orden de nuestras series, existía un pequeño error en su segundo término de la amplitud. La existencia de los citados desarrollos en potencias de $\mu^{\frac{1}{3}}$ que requería una justificación rigurosa, fue precisamente lo que supuso el estímulo inicial de los trabajos relacionados en esta memoria.

Hemos utilizado el circuito de la Figura 4.9 para verificar la bondad del modelo lineal a trozos aprovechando los resultados teóricos anteriores, comparando los valores predichos de la amplitud y periodo con los medidos en el laboratorio. Para ello, hemos escogido el amplificador operacional LF412CN con una fuente de alimentación de 9 voltios, de manera que la tensión de saturación es $E = 8,2V$. Otros parámetros fijos del circuito son $R_1 = R_2 =$

$R_F(\Omega)$	μ	max V_{C_2} (Volts)	a	Freq. (Hz)	P
19566	0	2.72	0.9951	227	6.2575
20000	0.0148	2.84	1.0544	225	6.3131
20500	0.0318	2.92	1.1023	224	6.3413
21000	0.0489	2.96	1.1358	223	6.3698
21500	0.0659	2.98	1.1621	221	6.4274
22000	0.0829	3.00	1.1886	220	6.4566
22500	0.1000	3.04	1.2234	219	6.4861
23000	0.1170	3.06	1.2505	217	6.5459
23500	0.1340	3.10	1.2862	216	6.5762
24000	0.1511	3.12	1.3139	214	6.6376
24500	0.1681	3.14	1.3419	212	6.7003
25000	0.1852	3.16	1.3702	210	6.7641
25500	0.2022	3.18	1.3986	208	6.8291

Tabla 4.1: Datos experimentales medidos en laboratorio.

2,2 k Ω , $C_1 = C_2 = 320$ kpF, $R_S = 9,78$ k Ω , de forma que $\alpha_C = 3$, $\tilde{t} = -3$, y variamos R_F para conseguir distintos valores de α , y consecuentemente variar μ . Dado que el rango significativo es $\mu \geq 0$, debemos elegir $R_F \geq 2R_S$. Los resultados obtenidos en el laboratorio están resumidos en la Tabla 4.1.

En la Figura 4.11, se comparan los valores de la amplitud y periodo de oscilación calculados numéricamente con el modelo lineal a trozos a partir de las ecuaciones de cierre, los valores numéricos obtenidos con el modelo diferenciable de [MC79], ver (4.31), y los datos experimentales de laboratorio. Coincidimos con Kriegsmann (quien también realizó experimentación en laboratorio) en que el modelo lineal a trozos es muy satisfactorio para este circuito electrónico.

Por último, en la Figura 4.12, comparamos los valores experimentales de amplitud y periodo con aquellos calculados utilizando los desarrollos del Teorema 4.15. Como se observa en la figura, se consigue una aproximación excelente considerando sólo los tres primeros términos no nulos de las series.

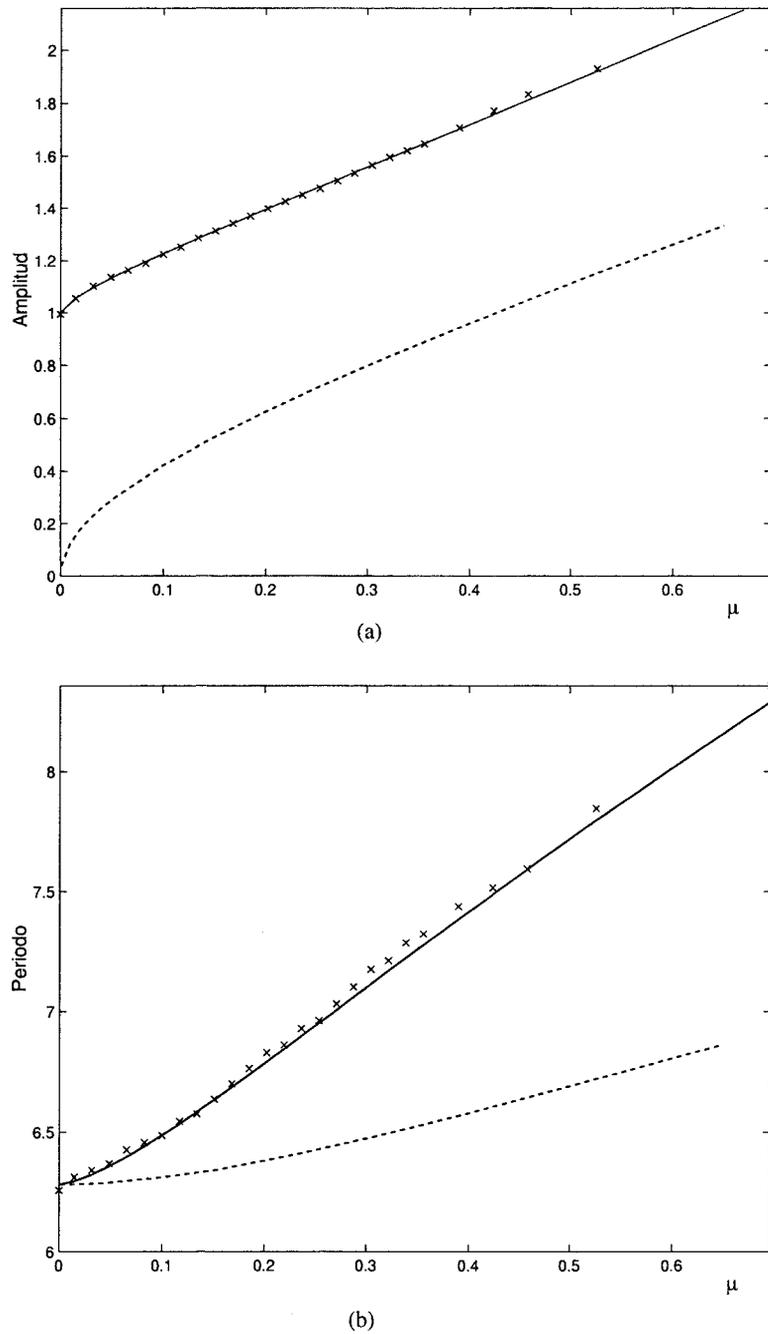
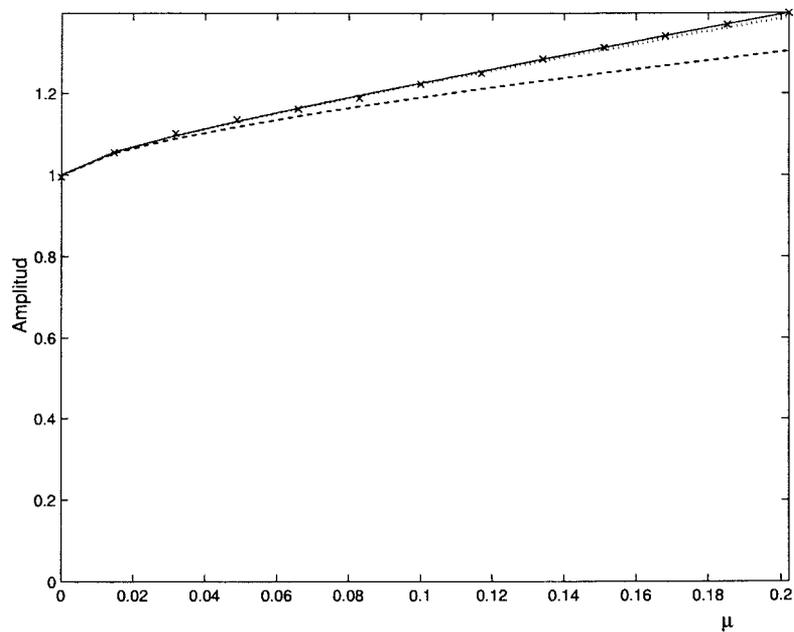
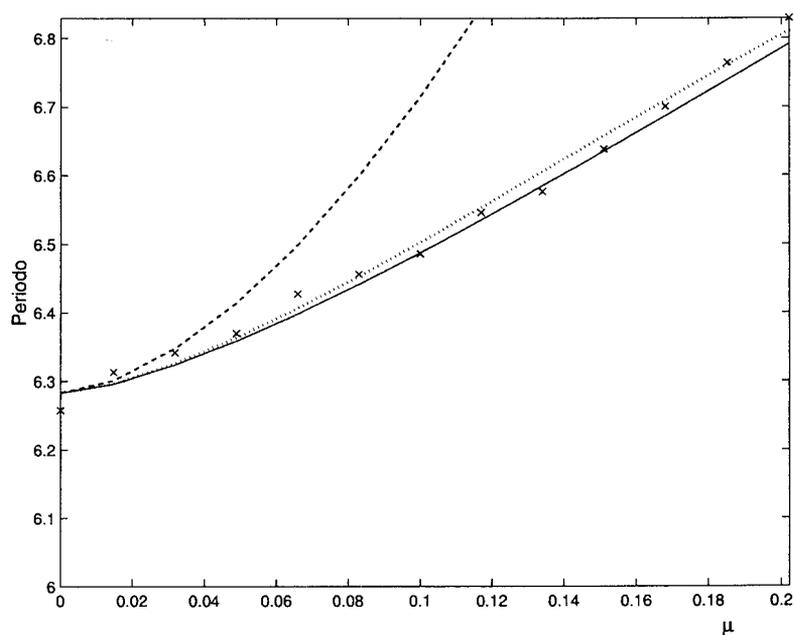


Figura 4.11: Comparación entre el modelo lineal a trozos calculado numéricamente (—), el modelo diferenciable (- - -) de [Mees & Chua, 1979], y resultados experimentales ($\times \times \times$). (a) Amplitud. (b) Periodo.



(a)



(b)

Figura 4.12: Comparación entre el modelo lineal a trozos calculado numéricamente (—), resultados experimentales ($\times \times \times$), dos términos no nulos en las series del Teorema 4.15 (- - -) y tres términos no nulos en las series (· · ·). (a) Amplitud. (b) Periodo.

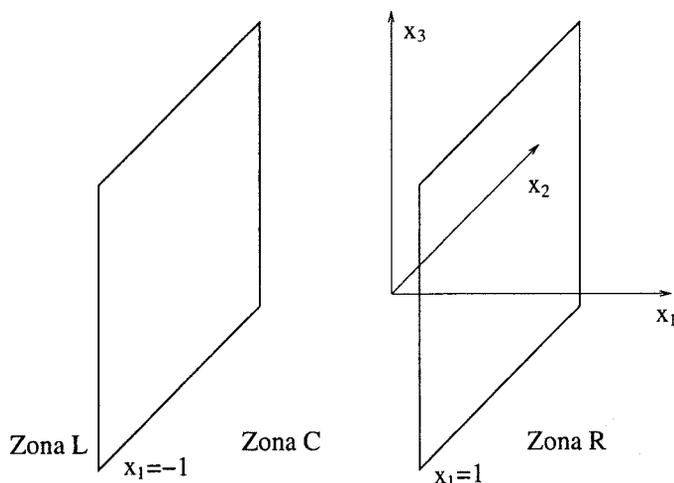


Figura 4.13: Zonas de comportamiento lineal en que queda dividido el espacio de fases.

4.2. Caso tridimensional simétrico con tres zonas observable

Una vez estudiada la bifurcación foco-centro-ciclo límite para el caso de dimensión 2, veremos a continuación la situación correspondiente al caso, más complejo, de dimensión 3. Seguiremos, con cierto abuso del lenguaje, utilizando el mismo nombre para la bifurcación, sin distinguir los posibles tipos de foco en \mathbb{R}^3 . Consideramos la situación básica constituida por tres zonas lineales separadas por las fronteras planas $\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}$ y $\Sigma_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -1\}$, que delimitan las zonas L , C y R , ver Figura 4.13.

Bajo la hipótesis de observabilidad, la Proposición 2.9 nos permite escribir el sistema en forma de Liénard

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T - t \\ M - m \\ D - d \end{bmatrix} \text{sat}(x_1), \quad (4.36)$$

donde D es el determinante de la matriz del sistema en la zona central C , M la suma de menores diagonales de orden dos y T la traza, mientras que d , m ,

t son los valores correspondientes de las zonas laterales L y R . Este sistema presenta simetría respecto del origen, es decir, si lo expresamos en la forma $d\mathbf{x}/d\tau = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, se verifica $\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

La forma canónica anterior es equivalente a la “forma canónica de observación” de la teoría de control, y por tanto, para llegar a ella a partir de un sistema genérico de \mathbb{R}^3 simétrico continuo y lineal a trozos con tres zonas, sería necesario y suficiente que el sistema fuera observable (ver Teorema 3 del Capítulo 2).

Para comprobar esta afirmación, basta escribir las variables en orden inverso y usar como segunda variable $Y = -y$. En efecto, quedaría

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_3 \\ X_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ X_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D-d \\ m-M \\ T-t \end{bmatrix} \text{sat}(x_1)$$

que es la forma canónica de observación.

Podemos expresar el problema utilizando la notación del Capítulo 3, ver (3.1), con

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T-t \\ M-m \\ D-d \end{bmatrix}.$$

De manera análoga al caso plano, a partir de la Proposición 3.1 podemos enunciar el siguiente resultado referente a los puntos de equilibrio.

Proposición 4.16 *El sistema (4.36) tiene para todos los valores de los parámetros un punto de equilibrio en el origen.*

- (a) Si $dD > 0$, el origen es el único punto de equilibrio.
- (b) Si $dD < 0$, además del origen aparecen otros dos puntos de equilibrio, a saber:

$$\bar{\mathbf{x}}_L = \begin{bmatrix} D/d - 1 \\ tD/d - T \\ mD/d - M \end{bmatrix},$$

en la zona L y $\bar{\mathbf{x}}_R = -\bar{\mathbf{x}}_L$ en la zona R .

(c) Si $dD = 0$, hay que distinguir tres casos:

(i) Si $D \neq 0$, $d = 0$, el origen es el único punto de equilibrio.

(ii) Si $D = 0$, $d \neq 0$, existe un segmento de equilibrios en la zona C , que podemos parametrizar como

$$\bar{x}_C(\mu) = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu T \\ \mu M \end{bmatrix}, \quad \text{con } \mu \in [-1, 1].$$

(iii) Si $D = 0$, $d = 0$, al segmento del caso anterior hay que añadir las dos semirrectas de equilibrios

$$\bar{x}_R(\mu) = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu t + T - t \\ \mu m + M - m \end{bmatrix}, \quad \text{con } \mu > 1,$$

$$\bar{x}_L(\mu) = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu t - T + t \\ \mu m - M + m \end{bmatrix}, \quad \text{con } \mu < -1.$$

En la situación objeto de nuestro estudio, el sistema (4.36) posee una configuración de foco en la zona C , lo que implica que la matriz A_C tiene una pareja de autovalores complejos conjugados que denotaremos mediante $\alpha \pm i\beta$.

Si $\delta \in \mathbb{R}$ es el tercer autovalor, entonces el polinomio característico de A_C tendrá la forma

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\delta - \lambda) [(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2] = \\ &= -\lambda^3 + (\delta + 2\alpha)\lambda^2 - (2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2)\lambda + \delta(\alpha^2 + \beta^2), \end{aligned}$$

y como

$$\det(A_C - \lambda I) = -\lambda^3 + T\lambda^2 - M\lambda + D,$$

es inmediato deducir que

$$T = \delta + 2\alpha,$$

$$\begin{aligned} M &= 2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2, \\ D &= \delta(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para esta configuración de autovalores de la matriz A_C , tenemos que su forma canónica real de Jordan J_C y la matriz de paso P correspondiente vienen dadas por

$$J_C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \beta & \alpha + \delta & 2\alpha \\ \beta\delta & \alpha\delta & \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Los siguientes resultados nos proporcionan más información sobre el sistema (4.36).

Lema 4.17 *El sistema (4.36) presenta una configuración de centro lineal contenida en la zona C si y sólo si $D = MT$ con $M > 0$.*

Demostración. Asumiendo la existencia de centro, a partir de (4.37) con $\alpha = 0$, la tesis es evidente. Ahora si partimos de $D = MT$ y $M > 0$, haciendo $M = \beta^2$, es inmediato ver que $\pm i\beta$ y T son autovalores de la matriz A_C y el Lema queda probado. ■

Partiendo del centro lineal existente en la zona C , bajo las hipótesis $MT - D = 0$ y $M > 0$, queremos estudiar si bifurca un ciclo límite de dicha estructura de órbitas periódicas no hiperbólicas (obviamente, debería hacerlo en su caso de la órbita periódica más externa del centro, que es la que puede recoger la dinámica no lineal). Escogeremos T como parámetro de bifurcación y estudiaremos su paso por el valor D/M . Comenzamos planteando las ecuaciones que se deberían cumplir para que dicho ciclo límite exista.

Suponemos que el referido ciclo límite del sistema (4.36) tiene simetría \mathbb{Z}_2 y ocupa las tres zonas L , C y R , del espacio \mathbb{R}^3 . Dicha órbita presentará intersecciones \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 , con los planos Σ_1 y Σ_{-1} , y tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en las zonas L y R . Debido a la simetría se cumple $\mathbf{x}^0 = -\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3 = -\mathbf{x}^1$. Ver Figura 3.1.

Dichas intersecciones son de la forma

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{bmatrix},$$

y siguiendo el razonamiento de la sección 3,1, cumplen las siguientes ecuaciones de cierre

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.40)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} T-t \\ M-m \\ D-d \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.41)$$

Proposición 4.18 *El sistema (4.36), con $M > 0$, presenta para $\alpha = 0$ una configuración de centro lineal en la zona C contenida en el plano de ecuación*

$$\delta^2 x_1 - \delta x_2 + x_3 = 0,$$

donde δ es el autovalor real de A_C . Dicho plano es invariante al flujo de la zona central y lo denominaremos plano focal. Además, la órbita periódica más externa del centro es tangente a los hiperplanos Σ_1 y Σ_{-1} en los puntos $[1, \delta, 0]^T$ y $[-1, -\delta, 0]^T$ respectivamente, y sus tiempos de vuelo son $\tau_C = \pi/\sqrt{M}$ en la zona C y $\tau_L = 0$ en la zonas L y R .

Demostración. Bajo las hipótesis de la proposición, la matriz del sistema (4.36) en la zona C es de la forma

$$A_C = \begin{bmatrix} 2\alpha + \delta & -1 & 0 \\ 2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2 & 0 & -1 \\ \delta(\alpha^2 + \beta^2) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y tiene autovalores $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ y $\lambda_3 = \delta$, con los autovectores correspondientes

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta\delta \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha + \delta \\ \alpha\delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Para $\alpha = 0$, los autovalores complejos $\lambda_{1,2}$ se convierten en imaginarios puros apareciendo una estructura de centro lineal restringida a la zona C . Esta estructura está contenida en el plano focal. Los vectores normales a dicho plano focal coinciden con los autovectores de A_C^T correspondientes a δ , y se pueden calcular resolviendo

$$(A_C^T - \delta I)\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2 & \delta(\alpha^2 + \beta^2) \\ -1 & -\delta & 0 \\ 0 & -1 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de donde una solución es $\mathbf{n} = [\delta^2, -\delta, 1]^T$. Por tanto, la ecuación de dicho plano invariante es

$$\delta^2 x_1 - \delta x_2 + x_3 = 0.$$

Se comprueba que para $\alpha = 0$ los puntos $[1, \delta, 0]^T$ y $[-1, -\delta, 0]^T$ pertenecen a la órbita periódica más externa del centro, al verificar sus valores correspondientes $x_2^0 = \delta$, $x_3^0 = 0$, $x_2^1 = -\delta$, $x_3^1 = 0$ las ecuaciones de cierre (4.40) y (4.41) con tiempos de vuelo $\tau_C = \pi/\sqrt{M} = \pi/\beta$ en la zona C y $\tau_L = 0$ en la zonas L y R .

La segunda ecuación de cierre se cumple de forma trivial, mientras que la primera se verifica al ser

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \delta & -1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & -1 \\ \delta\beta^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\pi}{\beta}\right) = -I.$$

El vector campo del sistema en $[1, \delta, 0]^T$ vale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & -1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & -1 \\ \delta\beta^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta^2 \\ \beta^2\delta \end{bmatrix},$$

y es paralelo al plano Σ_1 , por lo que la trayectoria en ese punto es tangente a dicho plano. De manera análoga se razonaría con $[-1, -\delta, 0]^T$ y Σ_{-1} . ■

Dado que en el estudio de esta bifurcación supondremos siempre $M > 0$, el siguiente Lema nos permite simplificar algo más el problema reescalando las variables x_2 , x_3 y el tiempo τ . La demostración es inmediata y se omite.

Lema 4.19 Si $M > 0$, el sistema (4.36) puede ser transformado mediante el cambio de variables lineal

$$x_2 = \sqrt{M}\hat{x}_2, \quad x_3 = M\hat{x}_3,$$

y la reparametrización temporal

$$\tau = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{M}},$$

en el sistema equivalente

$$\frac{d}{d\hat{\tau}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & -1 & 0 \\ \tilde{m} & 0 & -1 \\ \tilde{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{T} - \tilde{t} \\ 1 - \tilde{m} \\ \tilde{D} - \tilde{d} \end{bmatrix} \text{sat}(x_1), \quad (4.42)$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{M}}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{M}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{M^{3/2}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{M}}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{M^{3/2}}.$$

El espacio natural de estudio de la bifurcación es el formado por los parámetros T , M y D , en el entorno de un punto de la superficie $MT - D = 0$, con $M > 0$. En particular estudiaremos en dicho entorno la variación de T manteniendo M y D constantes. Sin embargo, es más cómodo trabajar con los autovalores de A_C , es decir, $\alpha \pm \beta i$ y δ en un entorno de $(\alpha, \beta, \delta) = (0, \sqrt{M}, D/M)$, lo que nos permite utilizar la forma canónica real de Jordan J_C (4.38) para expresar la solución del sistema en la zona C .

Para estudiar la evolución del sistema al variar únicamente T , añadimos dos ecuaciones auxiliares a las ecuaciones de cierre que mantienen constantes a los valores M y D

$$\begin{aligned} 2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2 &= M, \\ \delta(\alpha^2 + \beta^2) &= D, \end{aligned}$$

y dos nuevas variables: β y δ con valores respectivos de \sqrt{M} y D/M en el punto crítico $\alpha = 0$.

El Lema 4.19 nos permite reducir el estudio del sistema original al sistema (4.42). Nótese que la condición $M = 1$ junto con $MT - D = 0$ es equivalente

a $\beta = 1$ cuando $\alpha = 0$. En lo que sigue suponemos $M = 1$, trabajando con el sistema (4.42) y prescindimos de las tildes para abreviar la notación.

Las ecuaciones de cierre para el sistema (4.42) quedan finalmente

$$\begin{aligned}
 e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\
 e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} t - 2\alpha - \delta \\ m - 1 \\ d - D \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\
 2\alpha\delta + \alpha^2 + \beta^2 - 1 &= 0, \\
 \delta(\alpha^2 + \beta^2) - D &= 0,
 \end{aligned}$$

que expresamos de manera compacta como

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

donde

$$\mathbf{z} = (\alpha, \beta, \delta, \tau_C, \tau_L, x_2^0, x_3^0, x_2^1, x_3^1).$$

La ecuación (4.43) representa un sistema de 8 ecuaciones con 9 incógnitas y posee la solución

$$\bar{\mathbf{z}} = (0, 1, D, \pi, 0, D, 0, -D, 0), \quad (4.44)$$

correspondiente a la órbita periódica más externa del centro referido en el Lema 4.17. Estudiaremos si existe una rama de soluciones que pase por este punto y que dé lugar a ciclos límite del sistema.

El sistema (4.43) contiene una rama espuria de soluciones que pasan por $\bar{\mathbf{z}}$, que puede ser parametrizada como

$$\mathbf{z}(\mu) = (0, 1, D, \pi, 0, D + \mu, \mu D, -D - \mu, -\mu), \quad (4.45)$$

para cualquier valor real de μ . Es fácil ver que estas soluciones no corresponden a órbitas periódicas del sistema (4.42), y que de existir otra rama de soluciones con $\tau_L > 0$ (que sí serían de interés), el punto $\bar{\mathbf{z}}$ sería un punto singular para el sistema (4.43). Esto queda corroborado al comprobar que la matriz Jacobiana de \mathbf{F} en $\bar{\mathbf{z}}$ no es de rango completo, al ser nula la cuarta fila de la misma.

Los siguientes resultados permiten resolver este inconveniente.

Lema 4.20 Para las ecuaciones de cierre (4.43), las siguientes afirmaciones son válidas.

- (a) Se verifica que $F_4(\mathbf{z}) = 0$ para todo \mathbf{z} con $\tau_L = 0$.
- (b) La función $\tilde{F}_4(\mathbf{z})$ tal que $F_4(\mathbf{z}) = \tau_L \tilde{F}_4(\mathbf{z})$, es una función analítica en un entorno de $\bar{\mathbf{z}} = (0, 1, D, \pi, 0, D, 0, -D, 0)$.
- (c) Si definimos las ecuaciones de cierre desingularizadas a partir de (4.43) como

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

donde $G_i = F_i$ para $i \neq 4$ y $G_4 = \tilde{F}_4$, entonces la ecuación (4.46) tiene como conjunto de soluciones en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ las soluciones de (4.43) que no se corresponden con la rama espuria (4.45).

- (d) Para el sistema (4.46) el punto $\bar{\mathbf{z}}$ es un punto no singular. Sea $\gamma_1 = D - Dm + d - t$. La aplicación del Teorema de la Función Implícita conduce a la expresión local de las soluciones de (4.46) como funciones analíticas, que presentan los siguientes desarrollos en serie de Taylor en $\tau_L = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\gamma_1}{12\pi(D^2 + 1)} \tau_L^3 + \frac{6dm - dt^2 - 10dtD + 11dD^2 - 9d - 6m^2D}{720\pi(D^2 + 1)} \tau_L^5 + \\ & + \frac{mt^2D + 4mtD^2 - 12mt - 5mD^3 + 21mD + t^3 + 9t^2D}{720\pi(D^2 + 1)} \tau_L^5 + \\ & + \frac{-15tD^2 + 15t + 5D^3 - 15D}{720\pi(D^2 + 1)} \tau_L^5 + O(\tau_L^6), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \beta = & 1 - \frac{D\gamma_1}{12\pi(D^2 + 1)} \tau_L^3 + \frac{-6dm + dt^2 + 10Ddt - 11D^2d + 9d +}{720\pi(D^2 + 1)} D\tau_L^5 + \\ & + \frac{6Dm^2 - Dmt^2 - 4D^2mt + 12mt + 5D^3m - 21Dm - t^3}{720\pi(D^2 + 1)} D\tau_L^5 + \\ & + \frac{-9Dt^2 + 15D^2t - 15t - 5D^3 + 15D}{720\pi(D^2 + 1)} D\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \delta = & D + \frac{D^2\gamma_1}{6\pi(D^2 + 1)} \tau_L^3 + \frac{6dm - dt^2 - 10dtD + 11dD^2 - 9d - 6m^2D}{360\pi(D^2 + 1)} D^2\tau_L^5 + \\ & + \frac{mt^2D + 4mtD^2 - 12mt - 5mD^3 + 21mD + t^3}{360\pi(D^2 + 1)} D^2\tau_L^5 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{9t^2D - 15tD^2 + 15t + 5D^3 - 15D}{360\pi(M^3 + D^2)M^{5/2}} D^2 \tau_L^5 + O(\tau_L^6), \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \tau_C = \pi - \tau_L + \frac{1-m}{12} \tau_L^3 + \frac{-6dt + 6dD - 6m^2 + mt^2 + 4mtD}{720} \tau_L^5 + \\ + \frac{-5mD^2 + 15m + 5t^2 - 10tD + 5D^2 - 9}{720} \tau_L^5 + O(\tau_L^6), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} x_2^0 = D + \frac{1}{2} \tau_L + \frac{t-D}{12} \tau_L^2 + \frac{4d - 4mD + \pi m}{24\pi} \tau_L^3 + \\ + \frac{-\pi tD - 4t + \pi D^2 + 4D}{24\pi} \tau_L^3 + O(\tau_L^4), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} x_2^1 = -D + \frac{1}{2} \tau_L - \frac{t-D}{12} \tau_L^2 + \frac{-4d + 4mD + \pi m}{24\pi} \tau_L^3 + \\ + \frac{-\pi tD + 4t + \pi D^2 - 4D}{24\pi} \tau_L^3 + O(\tau_L^4), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$x_3^0 = \frac{D}{2} \tau_L + \frac{(t-D)D}{12} \tau_L^2 + O(\tau_L^3), \quad (4.53)$$

$$x_3^1 = \frac{D}{2} \tau_L - \frac{(t-D)D}{12} \tau_L^2 + O(\tau_L^3). \quad (4.54)$$

Demostración. A partir de (4.43) comprobamos que para $\tau_L = 0$ la cuarta ecuación de cierre se convierte en

$$e_1^T \left(I \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0},$$

verificándose de forma trivial, de forma que lo afirmado en (a) es inmediato. Es obvio, además que el miembro izquierdo de (4.46) define una función analítica por ser composición de funciones analíticas, y su primera componente F_4 también lo será. Del apartado (a) deducimos, por tanto, que se puede realizar la factorización $F_4 = \tau_L \tilde{F}_4$, con \tilde{F}_4 también analítica, como se afirma en (b).

Del apartado (b) podemos ahora deducir a partir de (4.43) que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_4(\mathbf{z}) \Big|_{\tau_L=0} = \lim_{\tau_L \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_L} \left(e_1^T e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + 1 \right) + \\ + \lim_{\tau_L \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_L} \left(e_1^T e^{A_L \tau_L} \int_0^{\tau_L} e^{-A_L s} \begin{bmatrix} t - 2\alpha - \delta \\ m - 1 \\ d - D \end{bmatrix} ds \right), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a concluir que

$$\tilde{F}_4(\mathbf{z})\Big|_{\tau_L=0} = e_1^T A_L \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + e_1^T \begin{bmatrix} t - 2\alpha - \delta \\ m - 1 \\ d - D \end{bmatrix} = -x_2^1 - 2\alpha - \delta.$$

Se comprueba entonces que

$$\tilde{F}_4(0, 1, D, \pi, 0, D + \mu, \mu D, -D - \mu, -\mu) = \mu,$$

lo que implica que la rama espuria no pertenece al conjunto solución de $\tilde{F}_4 = 0$, salvo en el valor $\mu = 0$ que corresponde a $\bar{\mathbf{z}}$, tal y como se afirma en (c). Es obvio además que toda solución \mathbf{z} de (4.43) con $\tau_L \neq 0$ sigue siendo solución de (4.46).

La matriz jacobiana $D_{\mathbf{z}}\mathbf{G}(\mathbf{z})\Big|_{\bar{\mathbf{z}}}$ resulta ser

$$\begin{bmatrix} -\pi & 0 & D\frac{1+e^{\pi D}}{D^2+1} & 0 & 0 & -D\frac{1+e^{\pi D}}{D^2+1} & \frac{1+e^{\pi D}}{D^2+1} & 0 & 0 \\ -\pi D & -\pi & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\pi D & D\frac{1+e^{\pi D}}{D^2+1} & -D & 0 & -D\frac{1+e^{\pi D}}{D^2+1} & \frac{e^{\pi D}-D^2}{D^2+1} & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2D & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y tiene rango 8, al ser el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la quinta columna (correspondiente a τ_L) igual a

$$-2\pi(1 + e^{\pi D}) \neq 0.$$

La aplicación del Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas [CH82] sobre (4.46) se realiza de manera directa obteniendo el enunciado del apartado (d).

Los desarrollos en serie anteriores han sido obtenidos a partir de las ecuaciones de cierre (4.46), con el programa de cálculo simbólico Maple y utilizando el método de los coeficientes indeterminados. ■

Nótese, que al haber escogido T como parámetro de bifurcación, habría interesado más obtener los desarrollos en serie en función de α ó de δ , para calcular $T = 2\alpha + \delta$ con mayor facilidad, pero esto no es posible al ser singulares las matrices jacobianas

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z})}{\partial(\beta, \delta, \tau_C, \tau_L, x_2^0, x_3^0, x_2^1, x_3^1)} \right|_{\bar{\mathbf{z}}},$$

y

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z})}{\partial(\alpha, \beta, \tau_C, \tau_L, x_2^0, x_3^0, x_2^1, x_3^1)} \right|_{\bar{\mathbf{z}}},$$

con lo que no se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita respecto a esas variables.

Reescribimos a continuación el Lema 3.3 para dimensión $n = 3$, que permite estudiar la estabilidad del ciclo límite que bifurca. Es preciso primero analizar el comportamiento de la aplicación de retorno en las proximidades de las posibles órbitas periódicas simétricas de tres zonas. Bastará, por la simetría, utilizar la semiórbita correspondiente que partiendo de $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ atraviesa Σ_{-1} en el punto \mathbf{x}^1 y vuelve a dicha sección en el punto $\mathbf{x}^2 = -\mathbf{x}^0 \in \Sigma_{-1}$. Siguiendo la notación de la Sección 3.3, denotamos con $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^2$, las coordenadas de \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 en las respectivas secciones, y con π_C, π_L las funciones que verifican $\pi_C(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_1, \pi_L(\mathbf{p}_1) = -\mathbf{p}_0$; con un ligero abuso de notación, usaremos τ_C y τ_L para denotar las funciones escalares que proporcionan el tiempo de vuelo en cada región. En los siguientes resultados utilizamos también la función que da las coordenadas de la semiaplicación de Poincaré $\pi_1(\mathbf{p}_0) = (\pi_L \circ \pi_C)(\mathbf{p}_0)$ así como la función que proporciona las coordenadas de la aplicación de Poincaré completa $\pi(\mathbf{p}_0) = (-\pi_1) \circ (-\pi_1)(\mathbf{p}_0)$.

Lema 4.21 *Dada una órbita periódica Γ simétrica de tres zonas para el sistema (4.36), que partiendo de $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ con coordenadas $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^2$ pasa por $\mathbf{x}^1 \in \Sigma_{-1}$ con coordenadas $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^2$ y es transversal a ambas secciones, la siguiente matriz, donde $D\pi_1$ denota la derivada de la semiaplicación de Poincaré correspondiente,*

$$\begin{bmatrix} -1 & \nabla\tau_C(\mathbf{p}_0) + \nabla\tau_L(\mathbf{p}_1)D\pi_C(\mathbf{p}_0) \\ 0 & D\pi_1(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix}$$

es semejante a la matriz $e^{A_L \tau_L(\mathbf{p}_1)} e^{A_C \tau_C(\mathbf{p}_0)}$.

Los ciclos límite simétricos del sistema (4.42) corresponden a soluciones de las ecuaciones de cierre y gracias al Lema 4.21 podemos estudiar su estabilidad. Recíprocamente, las soluciones de las ecuaciones de cierre corresponden a ciclos límite simétricos y si los parámetros del sistema están cerca de los valores correspondientes a la configuración de centro descrita en el Lema 4.17 podemos también usar el Lema 4.21, como se refleja en el siguiente resultado.

Proposición 4.22 *Asumamos que $\gamma_1 = D - Dm + d - t \neq 0$ y sea \mathbf{z} una solución de las ecuaciones de cierre (4.46) en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ definido en (4.44) que corresponde a un valor $\tau_L > 0$ suficientemente pequeño. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

- (a) *El sistema (4.42) posee un ciclo límite simétrico respecto del origen que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} , y tiene tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en la zona L.*
- (b) *El valor correspondiente de T verifica*

$$(T - D)\gamma_1 > 0.$$

- (c) *Los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son*

$$\begin{aligned} \mu_I &= -\frac{2\gamma_1}{D^2 + 1}\tau_L + \Psi\tau_L^2 + O(\tau_L^3), \\ \mu_{II} &= 2\pi D + 2\left(t - D + \frac{\gamma_1}{D^2 + 1}\right)\tau_L - \Psi\tau_L^2 + O(\tau_L^3), \end{aligned}$$

donde

$$\Psi = \frac{(t - D)(D^2 + 1) + \gamma_1}{(D^2 + 1)^2} \gamma_1 \tanh(\pi D/2).$$

Demostración. Por construcción, las ecuaciones de cierre han de ser satisfechas por cualquier órbita periódica simétrica respecto al origen que utilice las tres zonas.

Dada una solución de las ecuaciones de cierre, en las hipótesis del enunciado veremos que el flujo de la zona central que parte de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$ lleva a $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$, y el flujo de la zona L transforma el punto $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ en el simétrico respecto del origen de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$, luego los puntos anteriores pertenecerán a una solución periódica del sistema.

Estudiamos la trayectoria del sistema (4.42) correspondiente a la solución (4.47) a (4.54) de las ecuaciones de cierre (4.46) válida para $\tau_L > 0$ suficientemente pequeño y comprobemos que representa una órbita periódica transversal a las fronteras. Por las hipótesis, podemos utilizar los desarrollos del apartado (d) del Lema 4.20.

En primer lugar, determinamos $T(\tau_L)$ utilizando que $T = 2\alpha + \delta$, $\gamma_1 = D - Dm + d - t$ y los desarrollos (4.47) de α y (4.49) de δ , obteniendo

$$T = D + \frac{\gamma_1}{6\pi}\tau_L^3 + \Theta_5\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \quad (4.55)$$

con

$$\begin{aligned} \Theta_5 = & (5M - 5m)D^3 + (4Mtm - 15M^2t + 11Md)D^2 + \\ & + (-15M^4 + 21M^3m - 10M^2dt - 6M^2m^2 + M^2t^2m + 9M^3t^2)D - \\ & - 12M^4mt + M^4t^3 + 6M^3dm - M^3dt^2 - 9M^4d + 15M^5t. \end{aligned}$$

Tomamos como origen de tiempo de la zona C el punto $(1, x_2^0, x_3^0)^T \in \Sigma_1$. La trayectoria del sistema (4.42) que pasa por dicho punto, verifica

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0, x_3^0)} = Tx_1(0) - x_2(0) = T - x_2^0.$$

Utilizando los desarrollos de T (4.55) y de x_2^0 (4.51) obtenemos que para $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0, x_3^0)} = -\frac{1}{2}\tau_L - \frac{t-D}{12}\tau_L^2 + O(\tau_L^3) < 0,$$

con lo que se comprueba que dicha trayectoria entra en la zona C y lo hace de forma transversal a Σ_1 .

Por otra parte, como $\tau_C = \pi - \tau_L + O(\tau_L^2)$, deducimos que para $\tau_L > 0$, suficientemente pequeño, $\tau_C < \pi$ y no es difícil probar que la órbita que va de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$ a $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ se mantiene en todo momento en la región C .

Procedemos con un razonamiento análogo para la trayectoria que parte de $(-1, x_2^1, x_3^1)^T \in \Sigma_{-1}$ de manera que

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1, x_3^1)} = tx_1(0) - x_2(0) - T + t = -x_2^1 - T,$$

y utilizando los desarrollos de T (4.55) y de x_2^1 (4.52), obtenemos para $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño,

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1, x_3^1)} = -\frac{1}{2}\tau_L + \frac{t-D}{12}\tau_L^2 + O(\tau_L^3) < 0,$$

comprobando que la trayectoria entra en la zona L , y no resulta difícil probar que la órbita que va de $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ a $(-1, x_2^2, x_3^2)^T$ se mantiene en todo momento en la zona L .

Debido a la simetría del problema la repetición del razonamiento para la trayectoria que parte de $(-1, -x_2^0, -x_3^0)^T \in \Sigma_{-1}$ y de $(1, -x_2^1, -x_3^1)^T \in \Sigma_1$ asegura que ésta entra en las zonas C y R , respectivamente.

Concluimos que las trayectorias forman una órbita periódica del sistema (4.42), que se corresponde con la solución de las ecuaciones de cierre (4.46) dada por los desarrollos (4.47) a (4.54). Además, la unicidad de la solución obtenida por el Teorema de la Función Implícita en el Lema 4.20 asegura que dicha órbita periódica simétrica y de tres zonas es única en un entorno del punto solución \mathbf{z} , de donde se deduce que es una órbita periódica aislada, es decir, un ciclo límite. Así hemos demostrado lo indicado en (a).

A partir de (4.55) y dado que τ_L es positivo, es obvio que $T - D$ tiene el mismo signo que γ_1 quedando probado el apartado (b) del enunciado.

Debido a la semejanza establecida en el Lema 4.21, sabemos que el producto $e^{A_L\tau_L}e^{A_C\tau_C}$, para el valor de \mathbf{z} solución de (4.46) correspondiente a una órbita periódica, tiene un autovalor igual a -1 . Los otros dos autovalores que corresponden a los autovalores de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, los denotaremos por λ_I y λ_{II} . Si multiplicamos los tres autovalores, se tendrá claramente

$$-\lambda_I\lambda_{II} = \det(e^{A_L\tau_L}) \det(e^{A_C\tau_C}).$$

Usando que $\det(e^{A\tau}) = e^{\tau \text{traza}(A)}$, deducimos que

$$-\lambda_I\lambda_{II} = e^{\tau_L t + \tau_C T}.$$

A continuación, analizamos uno de los autovalores distintos de -1 de $e^{A_L \tau_L} e^{A_C \tau_C}$ empleando técnicas de perturbación en un entorno de \bar{z} , mientras que el otro se deducirá de la igualdad anterior. Nos moveremos sobre la rama solución de (4.46) correspondiente a la órbita periódica, utilizando el Lema 4.20 y las parametrizaciones de α , β , δ , τ_C , x_2^0 , x_3^0 , x_2^1 , y x_3^1 en función de τ_L que allí se dan. Si hacemos

$$\begin{aligned} E_0 &= e^{A_C(0)\tau_C(0)}, \\ e_0 &= e^{\pi D}, \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta la dependencia respecto de τ_L , podemos desarrollar el producto de exponenciales

$$e^{A_L \tau_L} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)}$$

en serie de MacLaurin respecto de τ_L ,

$$\begin{aligned} &\left(I + A_L \tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + \dots \right) \times \\ &\times \left(E_0 + \tau_L \frac{d}{d\tau_L} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} \Big|_{\tau_L=0} + \frac{\tau_L^2}{2!} \frac{d}{d\tau_L^2} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} \Big|_{\tau_L=0} + \dots \right) \end{aligned}$$

y sustituyendo queda

$$\begin{aligned} &\left(I + A_L \tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + \dots \right) \times E_0 \left\{ I + \tau_L [A'_C \tau_C + A_C \tau'_C]_{\tau_L=0} + \right. \\ &\left. + \frac{\tau_L^2}{2!} (A''_C \tau_C + 2A'_C \tau'_C + A_C \tau''_C + [A'_C \tau_C + A_C \tau'_C]^2) \Big|_{\tau_L=0} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\tau_L = 0$ en los desarrollos (4.47)-(4.54) obtenemos $\tau_C(0) = \pi$, $\tau'_C(0) = -1$, $\tau''_C(0) = 0$, $A'_C(0) = A''_C(0) = \mathbf{0}$ y la expresión anterior, usando que E_0 conmuta con $A_C(0)$, se convierte en

$$\begin{aligned} &\left(I + A_L \tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + \dots \right) \times \left(E_0 - \tau_L A_C(0) E_0 + \frac{\tau_L^2}{2} A_C^2(0) E_0 + \dots \right) \\ &= E_0 + \tau_L [A_L - A_C(0)] E_0 + \frac{\tau_L^2}{2} [A_L^2 - 2A_L A_C(0) + A_C^2(0)]^2 E_0 + \dots \end{aligned}$$

El producto de exponenciales es pues de la forma

$$e^{A_L \tau_L} e^{A_C(\tau_L) \tau_C(\tau_L)} = H_0 + \tau_L H_1 + \tau_L^2 H_2 + \dots$$

donde

$$H_0 = E_0 = \frac{1}{D^2 + 1} \begin{bmatrix} e_0 D^2 - 1 & -(e_0 + 1) D & e_0 + 1 \\ 0 & -(D^2 + 1) & 0 \\ (e_0 + 1) D^2 & -(e_0 + 1) D & e_0 - D^2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \frac{1}{D^2 + 1} \begin{bmatrix} t - D \\ m - 1 \\ d - D \end{bmatrix} [e_0 D^2 - 1 \quad -(e_0 + 1) D \quad e_0 + 1],$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (t - D)^2 + 1 - m & t - D & 0 \\ mt - d + 2D(1 - m) & m - 1 & 0 \\ (d - D)^2 + d(t - d) & d - D & 0 \end{bmatrix} E_0.$$

La matriz H_0 tiene autovalores -1 doble y $\lambda_0 = e^{\pi D} = e_0$, este último con autovector asociado $v_0 = (1, 0, 1)^T$. Denotaremos con λ_{II} al autovalor de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$ que para $\tau_L = 0$ coincide con λ_0 y que tiene el desarrollo

$$\lambda_{II} = \lambda_0 + \tau_L \lambda_1 + \tau_L^2 \lambda_2 + \dots$$

Como hay garantías de que λ_0 es un autovalor simple de H_0 , podemos utilizar teoría de perturbación, ver Sección 2.8 de [Wi65], para afirmar que se verifica

$$\begin{aligned} (H_0 + \tau_L H_1 + \tau_L^2 H_2 + \dots) (v_0 + \tau_L v_1 + \tau_L^2 v_2 + \dots) &= \\ &= \lambda_{II} (v_0 + \tau_L v_1 + \tau_L^2 v_2 + \dots), \end{aligned} \quad (4.56)$$

para ciertos vectores v_1, v_2, \dots

Igualando potencias de orden 1 en τ_L en (4.56), obtenemos

$$H_1 v_0 + H_0 v_1 = \lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_0, \quad (4.57)$$

y si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por

$$w_0^T = (D^2, -D, 1),$$

autovector izquierdo de H_0 correspondiente a λ_0 , se tendrá

$$w_0^T H_1 v_0 + w_0^T H_0 v_1 = \lambda_0 w_0^T v_1 + \lambda_1 w_0^T v_0.$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta que $w_0^T H_0 = \lambda_0 w_0^T$ determinamos

$$\lambda_1 = \frac{w_0^T H_1 v_0}{w_0^T v_0},$$

y sustituyendo los valores de λ_0 , v_0 y w_0 , obtenemos

$$\lambda_1 = \left(t - D + \frac{\gamma_1}{D^2 + 1} \right) e_0.$$

Igualando potencias de orden 2 en τ_L en (4.56), obtenemos

$$H_2 v_0 + H_1 v_1 + H_0 v_2 = \lambda_0 v_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_0, \quad (4.58)$$

si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por w_0^T , se tendrá

$$w_0^T H_2 v_0 + w_0^T H_1 v_1 + w_0^T H_0 v_2 = \lambda_0 w_0^T v_2 + \lambda_1 w_0^T v_1 + \lambda_2 w_0^T v_0.$$

Usando ahora la igualdad $w_0^T H_0 = \lambda_0 w_0^T$, podemos reducir la expresión anterior a

$$w_0^T H_2 v_0 + w_0^T H_1 v_1 = \lambda_1 w_0^T v_1 + \lambda_2 w_0^T v_0. \quad (4.59)$$

Para poder despejar λ_2 es necesario calcular previamente v_1 de la ecuación (4.57), que es equivalente al sistema compatible indeterminado

$$(H_0 - \lambda_0 I) v_1 = -(H_1 - \lambda_1 I) v_0,$$

con solución

$$v_1 = \xi v_0 - \frac{e_0}{(e_0 + 1)} \begin{bmatrix} d - t \\ m - 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cualquier valor real del parámetro ξ .

La dependencia del parámetro ξ desaparece al sustituir en la ecuación (4.59), quedando λ_2 determinado de forma única mediante

$$\lambda_2 = \frac{w_0^T (H_2 v_0 + (H_1 - \lambda_1 I) v_1)}{w_0^T v_0} =$$

$$= \frac{(t-D)(D^2+1)+\gamma}{2(D^2+1)^2(e_0+1)} [(t-D)[(D^2+1)e_0+D^2-1]+2d-2Dm] e_0$$

Una vez calculados los autovalores de la derivada de la semiaplicación de Poincaré $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica, μ_I , μ_{II} han de verificar

$$e^{\mu_I} = \lambda_I^2, \quad e^{\mu_{II}} = \lambda_{II}^2, \quad (4.60)$$

y además, se tiene que

$$e^{\mu_I+\mu_{II}} = \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 = e^{2t\tau_L+2T\tau_C},$$

de donde obtenemos la relación

$$\mu_I + \mu_{II} = 2t\tau_L + 2T\tau_C. \quad (4.61)$$

A partir de (4.60), para el autovalor simple λ_{II} ya calculado se cumplirá

$$\begin{aligned} \mu_{II} &= 2 \log [\lambda_0 + \lambda_1 \tau_L + \lambda_2 \tau_L^2 + O(\tau_L^3)] = \\ &= 2\pi D + 2 \log [1 + e^{-\pi D} \lambda_1 \tau_L + e^{-\pi D} \lambda_2 \tau_L^2 + O(\tau_L^3)] = \\ &= 2\pi D + 2e^{-\pi D} \lambda_1 \tau_L + [2\lambda_2 e^{-\pi D} - \lambda_1^2 e^{-2\pi D}] \tau_L^2 + O(\tau_L^3), \end{aligned}$$

y sustituyendo λ_1 y λ_2 , se obtiene la expresión del enunciado para μ_{II} .

Utilizando ahora la ecuación (4.61), junto con los desarrollos de τ_C y de T , determinamos μ_I y se completa la demostración. ■

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, donde se supone que todos los parámetros son fijos salvo la traza T de la zona central que actúa como parámetro de bifurcación.

Teorema 4.23 *Consideremos el sistema (4.36) con $M > 0$ y $\gamma = DM - Dm + dM - tM^2 \neq 0$, y sea $T_0 = D/M$. Para $T = T_0$ el sistema experimenta una bifurcación foco-centro-ciclo límite, es decir, a partir de la estructura de centro lineal restringida a la zona central que existe para $T = T_0$, aparece un ciclo límite simétrico respecto del origen y transversal a las fronteras Σ_1 y Σ_{-1} , para $(T - T_0)\gamma > 0$ y suficientemente pequeño*

La amplitud a (medida como el máximo en $|x_1|$), el periodo P de la oscilación periódica y los logaritmos de los multiplicadores característicos son funciones analíticas en 0, en la variable $(T - T_0)^{1/3}$, y sus desarrollos son

$$\begin{aligned}
 a &= 1 + \frac{(6\pi)^{2/3} M^{4/3}}{8\gamma^{2/3}} (T - T_0)^{2/3} + \frac{(6\pi^4)^{1/3} a_4}{960M^{1/3}\gamma^{7/3}} (T - T_0)^{4/3} + O(T - T_0)^{5/3}, \\
 P &= \frac{2\pi}{\sqrt{M}} + \frac{\pi(M - m)\sqrt{M}}{\gamma} (T - T_0) - \frac{6^{2/3}\pi^{5/3}M^{5/6}P_5}{10\gamma^{8/3}} (T - T_0)^{5/3} + O(T - T_0)^2, \\
 \mu_I &= -\frac{(48\pi)^{1/3} M^{7/6}\gamma^{2/3}}{D^2 + M^3} (T - T_0)^{1/3} + O(T - T_0)^{2/3}, \\
 \mu_{II} &= \frac{2\pi D}{M^{3/2}} + \frac{(48\pi)^{1/3}}{M^{5/6}} \left(\frac{Mt - D}{\gamma^{1/3}} + \frac{M^2\gamma^{2/3}}{D^2 + M^3} \right) (T - T_0)^{1/3} + O(T - T_0)^{2/3},
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_4 &= -120tM^5 + (120D + 2t^3 + 21mt + 72d) M^4 + \\
 &\quad + [-(93m + 27t^2) D + (27m - 2t^2) d] M^3 + (2t^2m + 25dt - 27m^2) DM^2 \\
 &\quad + [25D^3 + 23(mt - d) D^2] M - 25mD^3, \\
 P_5 &= tM^4 + (t^3 - 2mt - D) M^3 + [(-t^2 + 2m) D - 2dt^2 + m^2t] M^2 \\
 &\quad + [(2dt - m^2) D + d^2t] M - d^2D.
 \end{aligned}$$

En particular, el ciclo límite es orbitalmente asintóticamente estable cuando $\gamma > 0$ y $D < 0$.

Demostración. La existencia del centro lineal en la zona C para $T = T_0$ está asegurada a partir del Lema 4.17, y entonces $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{M}$, $\delta = T_0$.

Aplicando el cambio del Lema 4.19 trabajaremos en lo que sigue con el sistema (4.42), con lo que la condición $\gamma = DM - Dm + dM - tM^2 \neq 0$ se convierte en $\gamma_1 = D - Dm + d - t \neq 0$, y ahora se tendrá que para el valor crítico $T = T_0$ resulta $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\delta = D$.

Considerando la órbita más externa del centro que existe en la zona C para $T = T_0$, obtenemos que las correspondientes ecuaciones de cierre (4.46) admiten la solución \bar{z} dada en (4.44) y estamos en condiciones de aplicar el Lema 4.20 y la Proposición 4.22. Deshaciendo el cambio del Lema 4.19 se concluye lo afirmado en el primer párrafo del enunciado.

Para obtener una expresión de τ_L en función de T , para las soluciones de las ecuaciones de cierre, podemos aplicar ahora el Lema 4.10 a la ecuación (4.55), haciendo $n = 3$, $\eta = T - T_0$ y $\xi = \tau_L$, y asegurar la existencia de una función χ analítica en el origen para la variable $(T - T_0)^{1/3}$ con $\chi(0) \neq 0$, tal que $\tau_L = (T - T_0)^{1/3} \chi((T - T_0)^{1/3})$, y que posee el siguiente desarrollo en serie de Taylor

$$\tau_L = \frac{(6\pi)^{1/3} (T - T_0)^{1/3}}{\gamma_1^{1/3}} - \frac{\pi\Phi}{30\gamma^2} (T - T_0) + O(T - T_0)^{4/3}, \quad (4.62)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi = & 5(-m + 1)D^3 + (11d + 4mt - 15t)D^2 + (-10dt - 6m^2)D + \\ & + (mt^2 + 21m + 9t^2 - 15)D + 6dm - dt^2 - 9d - 12mt + t^3 + 15t. \end{aligned}$$

Debido a la simetría, el periodo de la órbita es igual a $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Usando entonces (4.50), sustituyendo (4.62) y deshaciendo el cambio del Lema 4.19 obtenemos el desarrollo en serie del periodo que figura en el enunciado.

Sea τ^* el tiempo en que se alcanza el máximo valor de $|x_1|$ de la órbita periódica en la zona R . Se cumplirá

$$\dot{x}_1(\tau^*) = tx_1(\tau^*) - x_2(\tau^*) + T - t = 0,$$

y utilizando la fórmula de variación de las constantes (3.7) para $\mathbf{x}(\tau)$ en la zona R con $n = 3$, podemos expresar la ecuación anterior como $G(\tau_L, \tau^*) = 0$, siendo

$$\begin{aligned} G(\tau_L, \tau^*) = & [t \quad -1 \quad 0] \left(e^{A_L \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_2^1(\tau_L) \\ -x_3^1(\tau_L) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\tau^*} e^{A_L(\tau^* - s)} \begin{bmatrix} T(\tau_L) - t \\ 1 - m \\ D - d \end{bmatrix} ds \right) + T(\tau_L) - t. \end{aligned}$$

Esta ecuación sólo depende de τ^* y de τ_L y verifica $G(0, 0) = 0$. Desarrollando $G(\tau_L, \tau^*)$ en serie de Taylor alrededor de $(\tau_L, \tau^*) = (0, 0)$, obtenemos

$$G(\tau_L, \tau^*) = \frac{1}{2}\tau_L - \tau^* + \frac{D-t}{12}\tau_L^2 + \frac{t-D}{2}\tau_L\tau^* + \frac{D-t}{2}\tau^{*2} + O(\tau_L, \tau^*)^3.$$

Por tanto, al ser $G_{\tau^*}(0,0) = -1 \neq 0$, la ecuación $G(\tau_L, \tau^*) = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(0,0)$, una función $\psi(\tau_L)$, tal que $G(\tau_L, \psi(\tau_L)) = 0$. Dicha función $\tau^* = \psi(\tau_L)$ posee el siguiente desarrollo en serie

$$\tau^* = \frac{1}{2}\tau_L + \frac{t-D}{24}\tau_L^2 + O(\tau_L^4).$$

Sustituyendo la serie anterior junto con (4.52), (4.54) y (4.55) en la siguiente expresión de la amplitud a

$$a = x_1(\tau^*) = [1 \ 0 \ 0] \left(e^{A_L \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_2^1(\tau_L) \\ -x_3^1(\tau_L) \end{bmatrix} + \int_0^{\tau^*} e^{A_L(\tau^*-s)} \begin{bmatrix} T(\tau_L) - t \\ 1 - m \\ D - d \end{bmatrix} ds \right),$$

obtenemos

$$a = 1 + \frac{1}{8}\tau_L^2 + \frac{1}{1152}(13D^2 - 11Dt + 15m - 2t^2)\tau_L^4 + O(\tau_L^5).$$

Utilizando ahora la serie (4.62) y deshaciendo el cambio del Lema 4.19 obtenemos el resultado del enunciado.

Sustituyendo el valor (4.62) de τ_L en las expresiones de los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica que proporciona la Proposición 4.22, deshaciendo el cambio del Lema 4.19 y operando, obtenemos para μ_I y μ_{II} los valores que figuran en el enunciado.

A partir de esos valores es inmediato observar que si $D < 0$ se tendrá $\mu_{II} < 0$ para $MT - D$ suficientemente pequeño. Por otro lado, es fácil comprobar que μ_I tiene signo opuesto a $\gamma^{2/3}(MT - D)^{1/3}$, es decir a $MT - D$, lo que implica que cuando existe el ciclo límite, es decir para $\gamma(MT - D) > 0$, entonces μ_I tiene signo contrario a γ , y por tanto si $\gamma > 0$ se tiene $\mu_I < 0$. La estabilidad orbital asintótica del ciclo límite la obtenemos pues cuando $D < 0$ y $\gamma > 0$, lo que hace que los multiplicadores sean menores que la unidad para $MT - D$ suficientemente pequeño. ■

A la vista del Teorema 4.23 podemos afirmar que el signo de γ caracteriza criticalidad de la bifurcación foco-centro-ciclo límite. La anulación de γ es una situación no contemplada en el Teorema 4.23 que parece conducir a una degeneración de la bifurcación. Estudiaremos dicha condición en la siguiente Sección, pero antes examinaremos dos situaciones específicas con $\gamma \neq 0$, que se deducen fácilmente del Teorema 4.23.

Corolario 4.24 *Para el sistema (4.36) con $M > 0$, $T_0 = D/M$ y $T - T_0$ suficientemente pequeño, las siguientes afirmaciones son válidas.*

(a) *Si $M - m = 0$ y $d - mt \neq 0$, el ciclo límite bifurcante predicho por el Teorema 4.23 existe para*

$$(d - mt)(D - MT) < 0.$$

Esto hace que la bifurcación sea supercrítica si $d - mt > 0$ y subcrítica si $d - mt < 0$. La situación se ilustra en las Figuras 4.14 y 4.15.

(b) *Si $d - mt = 0$ y $M - m \neq 0$, el ciclo límite bifurcante existe para*

$$(M - m)(D - Mt)(D - MT) < 0.$$

Esto hace que la bifurcación sea supercrítica si $(M - m)(D - Mt) > 0$ y subcrítica si $(M - m)(D - Mt) < 0$.

Demostración. Utilizando el desarrollo (4.55) de T y la igualdad

$$\gamma = DM - Dm + dM - tM^2 = (D - Mt)(M - m) + M(d - mt),$$

la tesis es evidente. ■

4.2.1. Degeneración de la bifurcación foco-centro-ciclo límite

En esta sección abordamos la posibilidad de la anulación de γ . Comenzamos con una proposición de carácter auxiliar.

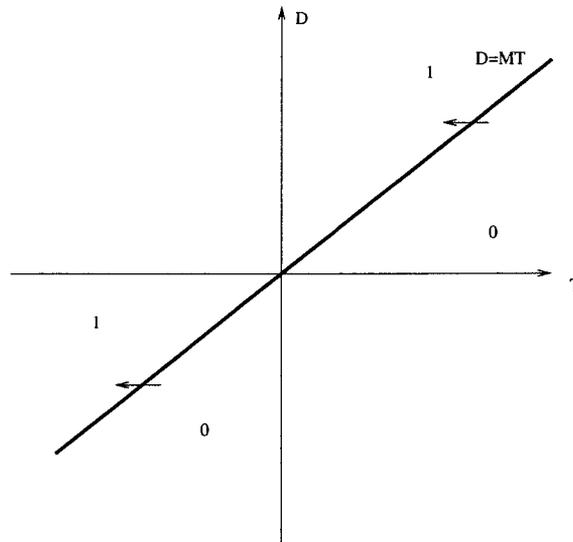


Figura 4.14: Número de órbitas periódicas del sistema (4.36) en el plano (T, D) cuando $M = m > 0$ para el caso $d - mt < 0$. La bifurcación es siempre subcrítica respecto al parámetro T .

Proposición 4.25 Si $b_5 \neq 0$ y consideramos la función $h(x) = b_0 + b_3x^3 + b_5x^5$, la ecuación

$$h(x) = 0, \quad (4.63)$$

tiene, en cuanto sus soluciones reales y positivas, el siguiente comportamiento en función de los valores de los parámetros b_0 y b_3 .

- (a) Para $b_0 = 0$, la ecuación posee siempre la solución nula, no tiene soluciones positivas si $b_3b_5 > 0$, y posee la solución $x = \sqrt{-b_3/b_5} > 0$, cuando $b_3b_5 < 0$.
- (b) Si $b_3 = 0$, la ecuación no tiene soluciones positivas para $b_0b_5 > 0$, y tiene una solución positiva para $b_0b_5 < 0$, que tiende a 0 cuando $b_0 \rightarrow 0$.
- (c) Si $b_0b_5 > 0$ y $b_0b_3 > 0$, no existen soluciones positivas.
- (d) Cuando $b_0b_5 < 0$, existe una única solución positiva.

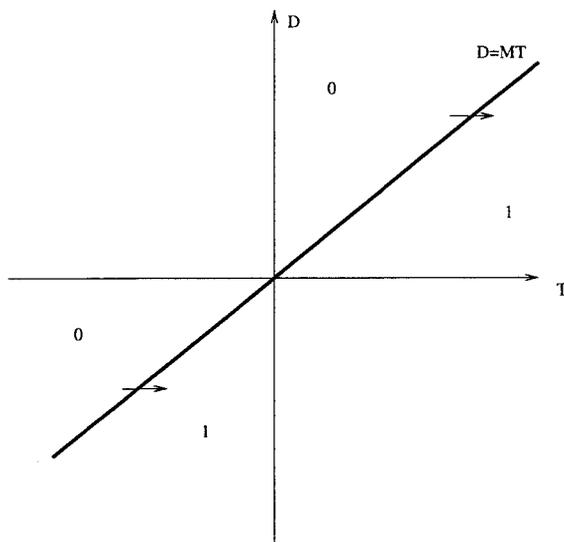


Figura 4.15: Número de órbitas periódicas del sistema (4.36) en el plano (T, D) cuando $M = m > 0$ para el caso $d - mt > 0$. La bifurcación es siempre subcrítica respecto al parámetro T .

(e) Para $b_0 b_5 > 0$ y $b_0 b_3 < 0$, podemos definir en el plano de parámetros (b_0, b_3) , la expresión dada por

$$h^*(b_0, b_3) = b_0 + \frac{2}{5} b_3 \left(\frac{-3b_3}{5b_5} \right)^{3/2}, \quad (4.64)$$

verificándose lo siguiente.

- (i) Si $b_0 h^*(b_0, b_3) < 0$, la ecuación tiene dos soluciones positivas; cuando $b_0 \rightarrow 0$ una de ellas tiende a 0, mientras que la otra tiende a $\sqrt{-b_3/b_5}$. Ambas soluciones tienden al valor común $\sqrt{-3b_3/5b_5}$ cuando $b_0 \rightarrow -\frac{2}{5} b_3 \left(\frac{-3b_3}{5b_5} \right)^{3/2}$.
- (ii) Si $h^*(b_0, b_3) = 0$, la ecuación sólo tiene la solución positiva $x = \sqrt{-3b_3/5b_5}$.
- (iii) Si $b_0 h^*(b_0, b_3) > 0$, la ecuación no tiene soluciones positivas.

Demostración. Las afirmaciones relativas al comportamiento límite de las soluciones se deducen inmediatamente de la continuidad de las soluciones de un polinomio respecto a sus coeficientes.

Los apartados **(a)** y **(b)** son inmediatos.

En el apartado **(c)**, si $b_0b_5 > 0$ y $b_0b_3 > 0$, se comprueba que todos los coeficientes tienen el mismo signo y obviamente no pueden existir raíces positivas.

En cuanto al apartado **(d)**, al haber sólo una variación en el signo de los coeficientes de $h(x)$, por la regla de los signos de Descartes se tiene que existe una única solución positiva.

En el apartado **(e)**, es inmediato comprobar que $b_3b_5 < 0$ y la función $h(x)$ tiene un extremo relativo para $x^* = \sqrt{-3b_3/5b_5} > 0$, donde toma el valor

$$h(x^*) = b_0 + \frac{2}{5}b_3 \left(\frac{-3b_3}{5b_5} \right)^{3/2} = h^*(b_0, b_3).$$

Al ser $h''(x^*) = -6b_3x^*$, el extremo es un mínimo para $b_3 < 0$, y un máximo si $b_3 > 0$. Además para $b_3 < 0$, $h(x)$ es monótona decreciente en el intervalo $[0, x^*)$ (creciente si $b_3 > 0$) y monótona creciente (decreciente si $b_3 > 0$) en el intervalo $(x^*, +\infty)$ al tener $h'(x) = x^2(3b_3 + 5b_5x^2)$ signo definido en dichos intervalos.

Asumimos en lo que sigue que $b_0 > 0$, siendo las demostraciones para el caso $b_0 < 0$ totalmente análogas. Con esta hipótesis, en el apartado **(e)-(i)** tendremos $h^*(b_0, b_3) < 0$, lo que implica que si $b_3 < 0$, entonces $h(x)$ presenta un mínimo absoluto en el intervalo $[0, +\infty)$ para $x = x^*$, tomando el valor $h(x^*) = h^*(b_0, b_3) < 0$. Es inmediato deducir que hay exactamente dos soluciones con $x > 0$ para la ecuación (4.63).

En el caso **(e)-(ii)**, la condición $h^*(b_0, b_3) = 0$ hace que el extremo que $h(x)$ alcanza para $x = x^*$ sea a la vez un cero de h y la monotonía de $h(x)$ en los intervalos $[0, x^*)$ y $(x^*, +\infty)$ hace que este cero sea único.

En el apartado **(e)-(iii)**, al ser $b_0 > 0$, $b_5 > 0$ y $b_3 < 0$, tendremos que $h(x)$ presenta un mínimo absoluto en el intervalo $[0, +\infty)$ para $x = x^*$, tomando el valor $h(x^*) = h^*(b_0, b_3) > 0$, por ello $h(x)$ no tiene ningún cero con $x > 0$. ■

Las diferentes situaciones de los apartados **(d)** y **(e)** de la proposición anterior se ilustran en la Figura 4.16 para diversos valores de b_0 .

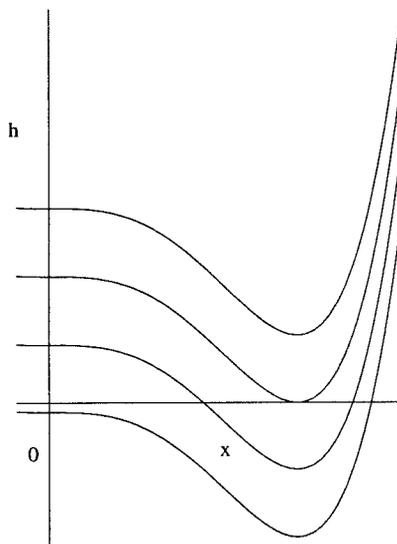


Figura 4.16: Gráfica de la función $h(x)$ con $b_3 < 0$ y $b_5 > 0$ para distintos valores de b_0 , que se corresponde con la ordenada en el origen.

En la Figura 4.17 se ha representado para el caso $b_5 > 0$ el número de soluciones positivas de (4.63) en las distintas regiones del plano de parámetros (b_0, b_3) .

Las diferentes situaciones de los apartados (c) y (e) de la proposición anterior se ilustran en la Figura (4.16).

Para el análisis de la degeneración de la bifurcación, partimos del desarrollo (4.55) de T completándolo hasta orden 6 y deshaciendo el cambio del Lema 4.19; es decir, de la expresión:

$$T = \frac{D}{M} + a_3(D)\tau^3 + a_5(D)\tau^5 + a_6(D)\tau^6 + O(\tau^7), \quad (4.65)$$

donde los coeficientes de orden 3 y 5 resultan ser

$$\begin{aligned} a_3(D) &= \frac{\gamma}{6\pi M^{1/2}}, \\ a_5(D) &= \frac{5(M-m)D^3 + (11d + 4mt - 15Mt)MD^2}{360\pi M^{5/2}} + \\ &+ \frac{(9Mt^2 - 15M^2 + 21Mm + t^2m - 6m^2 - 10dt)M^2D}{360\pi M^{5/2}} + \end{aligned}$$

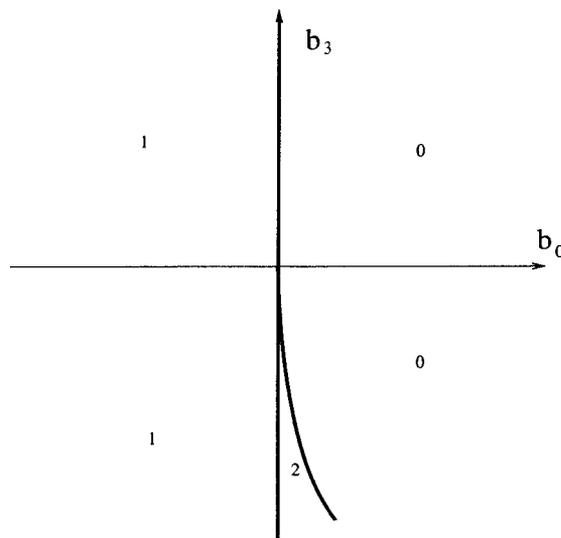


Figura 4.17: Curva $h^*(b_0, b_3) = 0$ y número de soluciones positivas de $h(x) = 0$ para $b_3 > 0$.

$$+ \frac{(15tM^2 - 9dM + 6dm + Mt^3 - 12Mmt - dt^2)M^3}{360\pi M^{5/2}},$$

con

$$\gamma = DM - Dm + dM - tM^2.$$

Por sencillez en la notación hemos usado τ en lugar de τ_L y se ha omitido el coeficiente $a_6(D)$. La expresión (4.65) resume toda la información local de la bifurcación en términos de los parámetros originales del problema.

En lo que sigue estudiamos el caso en que a_3 puede anularse, pero no así a_5 . Por tanto, supondremos ahora que trabajamos con un valor constante del parámetro M , y moviéndonos en el plano de parámetros (T, D) sobre la línea $D = MT$ buscamos un valor crítico del parámetro D donde $a_3 = 0$ y $a_5 \neq 0$.

A la vista de la demostración del Corolario 4.24, asumimos en lo que sigue $M - m \neq 0$, y denotamos con D^* el valor para el cual γ vale cero y por tanto $a_3(D)$ se anula, y con T^* el correspondiente valor de T sobre la línea $D = MT$,

es decir,

$$D^* = M \frac{Mt - d}{M - m}, \quad T^* = \frac{Mt - d}{M - m}. \quad (4.66)$$

Esto nos permite definir unos nuevos parámetros locales \tilde{D} y \tilde{T} en torno al punto (T^*, D^*) como

$$\tilde{D} = D - D^*, \quad \tilde{T} = T - T^*, \quad (4.67)$$

de manera que la ecuación (4.65) se convierte en

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{D}}{M} + \tilde{a}_3(\tilde{D})\tau^3 + \tilde{a}_5(\tilde{D})\tau^5 + \tilde{a}_6(\tilde{D})\tau^6 + O(\tau^7), \quad (4.68)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_3(\tilde{D}) &= a_{31}\tilde{D}, \\ \tilde{a}_5(\tilde{D}) &= a_{50} + a_{51}\tilde{D} + a_{52}\tilde{D}^2 + a_{53}\tilde{D}^3, \\ \tilde{a}_6(\tilde{D}) &= a_{60} + O(\tilde{D}), \end{aligned}$$

y los coeficientes indicados son:

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{1}{6\pi} \frac{M - m}{M^{1/2}}, \\ a_{50} &= \frac{(d - mt)(T^{*2} + M)M^{1/2}}{60\pi}, \\ a_{51} &= \frac{1}{360\pi} \frac{3(5M - 2m)(M - m)^2 + 6(d - Mt)^2 + (d - mt)^2}{(M - m)M^{1/2}}, \\ a_{52} &= -\frac{1}{90\pi} \frac{d - mt}{M^{3/2}}, \\ a_{53} &= \frac{1}{72\pi} \frac{M - m}{M^{5/2}}, \\ a_{60} &= -\frac{(d - mt)(T^{*2} + M)M^{1/2}}{144\pi} T^* \tanh(\pi T^*/2M^{1/2}). \end{aligned}$$

Necesitamos a partir de este momento, introducir la hipótesis adicional de que $a_{50} \neq 0$ (de no ser así, la degeneración sería de orden mayor) lo que equivale a imponer $d - mt \neq 0$.

Nótese que

$$\tilde{D} = \frac{\gamma}{M - m},$$

con lo que el signo de \tilde{D} y de γ coinciden o son opuestos según el signo de $M - m$.

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección donde utilizamos la Proposición 4.25 para obtener información (que necesariamente será local) respecto al número de órbitas periódicas relacionadas con la bifurcación que estamos estudiando en torno a su punto de degeneración.

Teorema 4.26 *Consideremos el sistema (4.36) con $M > 0$, $M - m \neq 0$ y $d - mt \neq 0$. Sean (\tilde{T}, \tilde{D}) los parámetros definidos en (4.67) en un entorno del origen, que indican las coordenadas respecto al punto crítico (T^*, D^*) en el plano (T, D) . Entonces, el número de soluciones de la ecuación (4.68) con τ positivo y suficientemente pequeño es el siguiente.*

- (a) *Si $(d - mt)(\tilde{D} - M\tilde{T}) < 0$, la ecuación (4.68) tiene una única solución positiva, correspondiente a una órbita periódica de la ecuación (4.36),*
- (b) *Cuando $(d - mt)(\tilde{D} - M\tilde{T}) > 0$ y $\tilde{D}(M - m)(d - mt) > 0$, no hay soluciones positivas,*
- (c) *Cuando $(d - mt)(\tilde{D} - M\tilde{T}) > 0$ y $\tilde{D}(M - m)(d - mt) < 0$, existe una curva de expresión local*

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{SN} = & \frac{\tilde{D}}{M} + \frac{2\sqrt{6}}{5\pi} \frac{(M - m)\tilde{D}}{M^2(T^{*2} + M)^{3/2}} \left(-\frac{M - m}{d - mt} \tilde{D} \right)^{3/2} + \\ & - \frac{3}{2\pi} \frac{(M - m)^3 T^*}{M^{5/2} (d - mt)^2 (T^{*2} + M)^2} \tanh(\pi T^*/2M^{1/2}) \tilde{D}^3 + \\ & + O(\tilde{D}^{7/2}), \end{aligned} \quad (4.69)$$

de manera que se verifica lo siguiente,

- (i) *Si \tilde{T} está comprendido entre \tilde{T}_{SN} y \tilde{D}/M , la ecuación (4.68) tiene dos soluciones positivas, correspondientes a sendas órbitas periódicas de (4.36),*

- (ii) Cuando $\tilde{T} = \tilde{T}_{SN}$, la ecuación (4.68) tiene una única solución positiva, correspondiente a una órbita periódica de (4.36),
- (iii) Si $\tilde{T} \cdot \operatorname{sgn}[(M - m)\tilde{D}] > \tilde{T}_{SN} \cdot \operatorname{sgn}[(M - m)\tilde{D}]$ no existen soluciones positivas.

Demostración. La idea general de la prueba será partir de la ecuación (4.68) y hacer algunas manipulaciones sobre ella para poder aplicar la Proposición 4.25. Para dicho fin, comenzamos definiendo los parámetros

$$v_1 = \frac{\tilde{D}}{M} - \tilde{T}, \quad v_2 = \tilde{D}, \quad (4.70)$$

con lo que la ecuación (4.68) toma la forma

$$v_1 + \tilde{a}_3(v_2)\tau^3 + \tilde{a}_5(v_2)\tau^5 + \tilde{a}_6(v_2)\tau^6 + O(\tau^7) = 0. \quad (4.71)$$

Limitamos el estudio de esta ecuación a un entorno del punto $(v_1, v_2, \tau) = (0, 0, 0)$ suficientemente pequeño. En dicho entorno, podemos admitir que el número de soluciones con $\tau > 0$ de la ecuación (4.71) truncada a orden 5 en v_1, v_2 y τ , es decir,

$$g(\tau) = v_1 + a_{31}v_2\tau^3 + a_{50}\tau^5 = 0, \quad (4.72)$$

coincidirá para $a_{50} \neq 0$ con el número de soluciones de la ecuación (4.65), que se corresponde con el de las órbitas periódicas del sistema (4.36) en un entorno de (T^*, D^*) .

A partir de las definiciones de a_{50}, a_{31}, v_1 y v_2 en (4.68) y (4.70), y teniendo en cuenta que $M > 0$ se comprueba que sus signos son los siguientes

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(a_{50}) &= \operatorname{sgn}(d - mt), \\ \operatorname{sgn}(a_{31}) &= \operatorname{sgn}(M - m), \\ \operatorname{sgn}(v_1) &= \operatorname{sgn}(\tilde{D} - M\tilde{T}), \\ \operatorname{sgn}(v_2) &= \operatorname{sgn}(\tilde{D}). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Si identificamos $h(x) = g(\tau)$, $b_0 = v_1$, $b_3 = a_{31}v_2$ y $b_5 = a_{50}$, y aplicamos a la ecuación (4.72) la Proposición 4.25, por el apartado (d) obtenemos que la

ecuación (4.72) tiene una única solución positiva si $a_{50}v_1 < 0$. Si tenemos en cuenta las igualdades (4.73), esta condición equivale a $(d - mt)(\tilde{D} - M\tilde{T}) < 0$, de manera que bajo esta hipótesis y para puntos del plano (T, D) suficientemente próximos al punto crítico (T^*, D^*) , la ecuación (4.71) tiene también una única solución positiva, con lo que queda probado el apartado (a) del teorema.

Si $a_{50}v_1 > 0$ y $a_{31}v_1v_2 > 0$, del apartado (c) de la Proposición 4.25 se sigue que la ecuación (4.72) no tiene soluciones positivas, y utilizando de nuevo (4.73) se demuestra de forma análoga el apartado (b) del enunciado.

Si se cumple $a_{50}v_1 > 0$ y $a_{31}v_1v_2 < 0$, el apartado (e) de la Proposición 4.25 asegura la existencia de la curva $h^*(b_0, b_3) = 0$, que expresada en las variables v_1 y v_2 , y en un entorno del origen $(v_1, v_2) = (0, 0)$, toma la forma

$$v_1 = -\frac{2}{5}a_{31}v_2 \left(\frac{-3a_{31}v_2}{5a_{50}} \right)^{3/2}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.73), deducimos para $(d - mt)(\tilde{D} - M\tilde{T}) > 0$ y $\tilde{D}(M - m)(d - mt) < 0$ la existencia en el plano (T, D) de una curva, donde el número de soluciones positivas de (4.72) es igual a 1 y que marca la transición de 2 soluciones a ninguna. Dicha curva viene dada por la expresión

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{D}}{M} + \tilde{T}_{NL},$$

con

$$\tilde{T}_{NL} = \frac{2\sqrt{6}}{5\pi} \frac{(M - m)\tilde{D}}{M^2(T^{*2} + M)^{3/2}} \left(-\frac{M - m}{d - mt} \tilde{D} \right)^{3/2},$$

La condición $b_0h^*(b_0, b_3) < 0$ se traduce en las variables \tilde{T} y \tilde{D} cerca del punto crítico como

$$\left(\frac{\tilde{D}}{M} - \tilde{T} \right) \left(\frac{\tilde{D}}{M} - \tilde{T} + \tilde{T}_{NL} \right) < 0,$$

es decir, si \tilde{T} está comprendido entre \tilde{D}/M y $\tilde{D}/M + \tilde{T}_{NL}$, la ecuación (4.72) tiene dos soluciones positivas. La condición $b_0h^*(b_0, b_3) > 0$ depende del signo de \tilde{T}_{NL} , siendo equivalente a $\tilde{T} > \tilde{D}/M + \tilde{T}_{NL}$ si $(M - m)\tilde{D} > 0$ y a $\tilde{T} < \tilde{D}/M + \tilde{T}_{NL}$ si $(M - m)\tilde{D} < 0$. De nuevo, teniendo en cuenta que nos movemos en un entorno suficientemente pequeño del punto crítico, queda probado el punto (c)-(iii).

Mediante el razonamiento anterior obtenemos la existencia de una curva donde hay una bifurcación pliegue de soluciones positivas, así como una aproximación local a la misma hasta orden $\tilde{D}^{5/2}$. Para aumentar el grado de la aproximación utilizamos que sobre dicha curva no se verifican las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, y en particular la derivada de \tilde{T} respecto de τ se anula. Por tanto, derivamos (4.68) respecto de τ e igualamos a 0, obteniendo

$$3\tilde{a}_3(\tilde{D})\tau^2 + 5\tilde{a}_5(\tilde{D})\tau^4 + 6\tilde{a}_6(\tilde{D})\tau^5 + O(\tau^6) = 0,$$

que, eliminando las soluciones de la forma $\tau = 0$, es equivalente a

$$\begin{aligned} G(\tilde{D}, \tau) &= 3a_{31}\tilde{D} + 5(a_{50} + a_{51}\tilde{D} + a_{52}\tilde{D}^2 + a_{53}\tilde{D}^3)\tau^2 \\ &\quad + 6[a_{60} + O(\tilde{D})]\tau^3 + O(\tau^4) = 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Al ser $G_{\tilde{D}}(0, 0) = 3a_{31} = (M - m)/6\pi M^{1/2} \neq 0$ por hipótesis, la aplicación del Teorema de la Función Implícita nos asegura la existencia de una función $\psi(\tau)$, tal que $G(\psi(\tau), \tau) = 0$. Suponiendo un desarrollo con coeficientes indeterminados para la función $\psi(\tau)$ e igualando términos del mismo orden llegamos a

$$\tilde{D} = -\frac{5a_{50}}{3a_{31}}\tau^2 - \frac{2a_{60}}{a_{31}}\tau^3 + O(\tau^4).$$

Siempre bajo la condición $\tilde{D}(M - m)(d - mt) < 0$, hipótesis contemplada en el apartado (c), se tiene $a_{50}a_{31} > 0$ y es posible aplicar el Lema 4.10 con $n = 2$ a la ecuación anterior. Haciendo $\eta = \tilde{D}$ y $\xi = \tau$ podemos asegurar la existencia de una función χ analítica en 0 con $\chi(0) \neq 0$, tal que $\tau = \tilde{D}^{1/2}\chi(\tilde{D}^{1/2}) > 0$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en la variable $\tilde{D}^{1/2}$ es

$$\tau = \left(-\frac{3a_{31}}{5a_{50}}\right)^{1/2} \tilde{D}^{1/2} + \frac{9a_{31}a_{60}}{25a_{50}^2}\tilde{D} + O(\tilde{D}^{3/2}).$$

En función de los parámetros originales resulta la expresión

$$\begin{aligned} \tau &= \left(-\frac{6}{M(T^{*2} + M)} \frac{(M - m)}{(d - mt)} \tilde{D}\right)^{1/2} + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{d - Mt}{d - mt} \frac{1}{T^{*2} + M} \frac{e^{\pi T^*/M^{1/2}} - 1}{e^{\pi T^*/M^{1/2}} + 1} \tilde{D} + O(\tilde{D}^{3/2}), \end{aligned}$$

y sustituyéndola en (4.68) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & \frac{\tilde{D}}{M} + \frac{2\sqrt{6}}{5\pi} \frac{(M-m)\tilde{D}}{M^2(T^{*2}+M)^{3/2}} \left(-\frac{M-m}{d-mt} \tilde{D} \right)^{3/2} - \\ & - \frac{3}{2\pi} \frac{T^*(M-m)^3}{M^{5/2}(d-mt)^2(T^{*2}+M)^2} \frac{e^{\pi T^*/M^{1/2}} - 1}{e^{\pi T^*/M^{1/2}} + 1} \tilde{D}^3 + O(\tilde{D}^{7/2}). \end{aligned}$$

■

En las Figuras 4.18 a 4.21 se resume la información proporcionada por el teorema (4.26). Cada figura corresponde con uno de los cuatro casos que determinan los signos de $M-m$ y $d-mt$. El número que figura en cada región expresa el número de soluciones de la ecuación (4.68), mientras que las flechas indican el sentido del movimiento del parámetro de bifurcación que corresponde a la aparición del ciclo límite. En todos los casos existen 0, 1 ó 2 soluciones, siendo la curva $\tilde{T}_{SN} = \tilde{T}$ la frontera entre las regiones con 0 y 2 soluciones, y existiendo sobre ella una única solución. Al ser en el segundo término de la expresión (4.69) el exponente de \tilde{D} igual a $5/2$, la curva representada por la ecuación $\tilde{T}_{SN} = \tilde{T}$ es tangente a la recta de pendiente M en el punto crítico (T^*, D^*) . Se observa como en dicha recta, y razonando respecto al parámetro T , el carácter de la bifurcación cambia al superar dicho punto crítico.

Situándonos de nuevo en el contexto correspondiente a haber aplicado el Lema 4.19, la siguiente proposición es análoga a la Proposición 4.22 para el caso $\gamma_1 = 0$, es decir, se estudia la bifurcación para el caso en que D toma el valor D^* , que corresponde a la transición siguiendo el eje horizontal en las figuras anteriores. Sólo demostramos los apartados para los cuales la prueba de la Proposición 4.22 no es válida.

Proposición 4.27 *Asumamos que $m \neq 1$, $d - mt \neq 0$, y que D toma el valor D^* tal que $\gamma_1 = D - Dm + d - t = 0$, y sea \mathbf{z} una solución de las ecuaciones de cierre (4.46) en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ definido en (4.44), que corresponde a un valor $\tau_L > 0$ suficientemente pequeño. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

- (a) *El sistema (4.42) posee un ciclo límite con simetría respecto del origen que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} , y tiene tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en la zona L .*

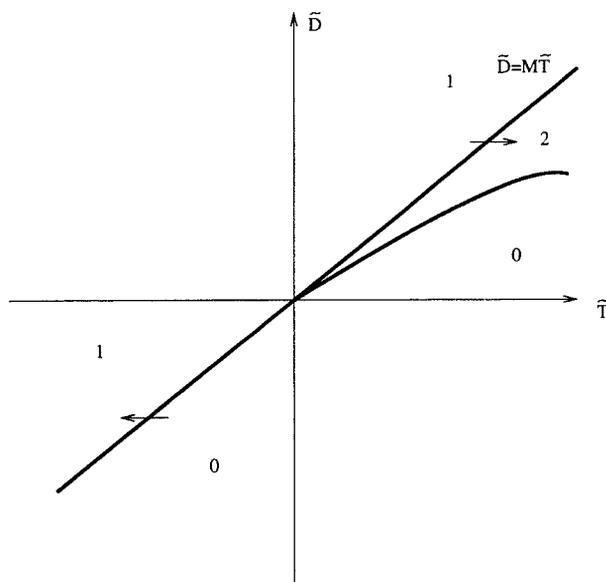


Figura 4.18: Número de órbitas periódicas en un entorno del punto crítico (T^*, D^*) para el caso $M - m > 0$, $d - mt < 0$

(b) El ciclo límite existe cuando $(d - mt)(T - T^*) > 0$.

(c) Los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son

$$\mu_I = -\frac{(d - mt)}{3} \tau_L^3 + O(\tau_L^4),$$

$$\mu_{II} = 2\pi D^* + 2(t - D^*) \tau_L + \frac{(1 - m)(2t - D^*)}{6} \tau_L^3 + O(\tau_L^4),$$

Demostración. La demostración del apartado (a) es igual que la del apartado (a) de la Proposición 4.22 y se omite.

En lo que respecta al apartado (b), a partir de la ecuación (4.65), haciendo $\gamma = 0$, que es equivalente a $D = D^*$, se tiene

$$T = \frac{D^*}{M} - \frac{(D^2 + M^3)(M - m)(D - Mt)}{60\pi M^{5/2}} \tau_L^5 + O(\tau_L^6).$$

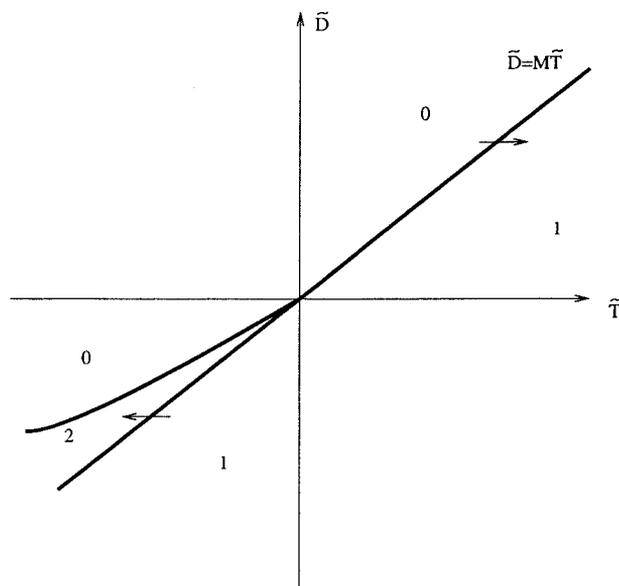


Figura 4.19: Número de órbitas periódicas en un entorno del punto crítico (T^*, D^*) para el caso $M - m > 0$, $d - mt > 0$

Teniendo en cuenta la igualdad

$$\gamma = (D - Mt)(M - m) + M(d - mt) = 0 \quad (4.75)$$

que lleva a

$$(D - Mt)(M - m) = -M(d - mt),$$

y la definición de T^* , obtenemos

$$MT - D^* = \frac{M^{3/2}(d - mt)(T^{*2} + M)}{60\pi} \tau_L^5 + O(\tau_L^6). \quad (4.76)$$

Haciendo ahora $M = 1$, es obvio que, para $\tau_L > 0$ y suficientemente pequeño, el signo de $T - D^*$ debe coincidir con el de $d - mt$, obteniendo la correspondiente conclusión del enunciado.

Respecto al apartado (c), no es difícil ver que si sustituimos $\gamma_1 = 0$ en la Proposición 4.22, los términos significativos de μ_I son todos nulos. Por tanto, nos vemos obligados a repetir la parte de la prueba de la Proposición 4.22

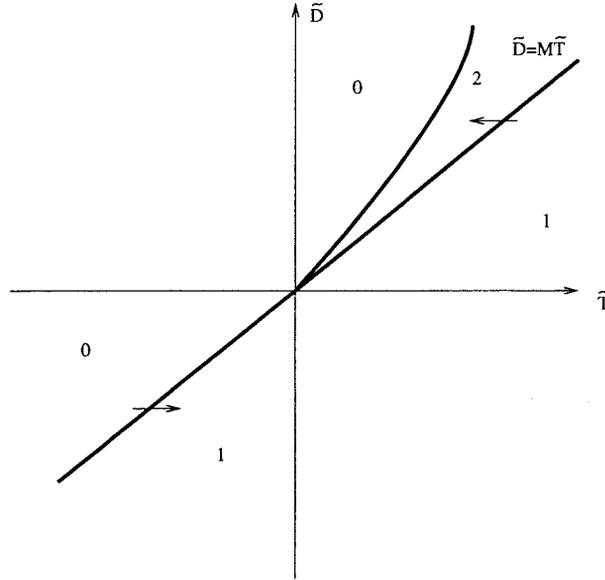


Figura 4.20: Número de órbitas periódicas en un entorno del punto crítico (T^*, D^*) para el caso $M - m < 0$, $d - mt > 0$

referente a los desarrollos de λ_I y λ_{II} , los autovalores de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, aumentando el grado de los mismos hasta orden 3. Recordamos la notación $E_0 = e^{A_C(0)\tau_C(0)}$ y $e_0 = e^{\pi D}$ y recalculamos el desarrollo en serie de MacLaurin respecto de τ_L del siguiente producto de exponenciales:

$$\begin{aligned}
 & e^{A_L\tau_L} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} = \\
 & = \left(I + A_L\tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + A_L^3 \frac{\tau_L^3}{3!} + \dots \right) \left(E_0 + \tau_L \frac{d}{d\tau_L} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} \Big|_{\tau_L=0} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_L^2}{2!} \frac{d}{d\tau_L^2} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} \Big|_{\tau_L=0} + \frac{\tau_L^3}{3!} \frac{d}{d\tau_L^3} e^{A_C(\tau_L)\tau_C(\tau_L)} \Big|_{\tau_L=0} + \dots \right) \\
 & = \left(I + A_L\tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + A_L^3 \frac{\tau_L^3}{3!} + \dots \right) \times \left\{ E_0 + \tau_L E_0 [A'_C\tau_C + A_C\tau'_C]_{\tau_L=0} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_L^2}{2!} E_0 [A''_C\tau_C + 2A'_C\tau'_C + A_C\tau''_C + (A'_C\tau_C + A_C\tau'_C)^2]_{\tau_L=0} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_L^3}{3!} E_0 [(A'_C\tau_C + A_C\tau'_C)^3 + 3(A'_C\tau_C + A_C\tau'_C)(A''_C\tau_C + 2A'_C\tau'_C + A_C\tau''_C)]_{\tau_L=0} + \right.
 \end{aligned}$$

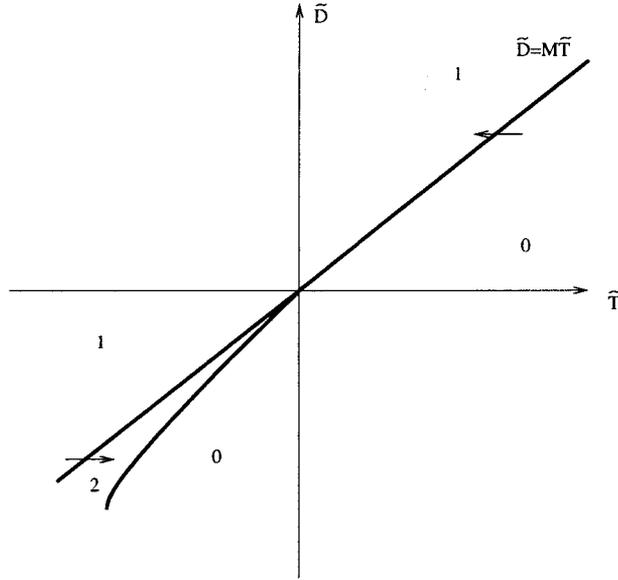


Figura 4.21: Número de órbitas periódicas en un entorno del punto crítico (T^*, D^*) para el caso $M - m < 0$, $d - mt < 0$

$$+ \frac{\tau_L^3}{3!} E_0 [A_C''' \tau_C + 3A_C'' \tau_C' + 3A_C' \tau_C'' + A_C \tau_C''']_{\tau_L=0} + \dots \}$$

Sustituyendo $\tau_L = 0$ en los desarrollos (4.47)-(4.54) obtenemos $\tau_C(0) = \pi$, $\tau_C'(0) = -1$, $\tau_C''(0) = 0$, $\tau_C'''(0) = (1 - m)/2$, $A_C'(0) = A_C''(0) = A_C'''(0) = \mathbf{0}$, y usando que E_0 conmuta con $A_C(0)$, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} & \left(I + A_L \tau_L + A_L^2 \frac{\tau_L^2}{2!} + A_L^3 \frac{\tau_L^3}{3!} + \dots \right) \times \\ & \times \left(E_0 - \tau_L E_0 A_C(0) + \frac{\tau_L^2}{2} E_0 A_C^2(0) + \frac{\tau_L^3}{6} E_0 \left[\frac{(1-m)}{2} A_C(0) - A_C^3(0) \right] + \dots \right) \\ & = E_0 + \tau_L [A_L - A_C(0)] E_0 + \frac{\tau_L^2}{2} [A_L^2 - 2A_L A_C(0) + A_C^2(0)] E_0 + \\ & + \frac{\tau_L^3}{6} \left(A_L^3 - 3A_L^2 A_C(0) + 3A_L A_C^2(0) - A_C^3(0) + \frac{(1-m)}{2} A_C(0) \right) E_0 + \dots \end{aligned}$$

El producto de exponenciales queda finalmente

$$e^{A_L \tau_L} e^{A_C(\tau_L) \tau_C(\tau_L)} = H_0 + \tau_L H_1 + \tau_L^2 H_2 + \tau_L^3 H_3 + \dots$$

donde

$$H_0 = E_0 = \frac{1}{D^2 + 1} \begin{bmatrix} e_0 D^2 - 1 & -(e_0 + 1)D & e_0 + 1 \\ 0 & -(D^2 + 1) & 0 \\ (e_0 + 1)D^2 & -(e_0 + 1)D & e_0 - D^2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \frac{1}{D^2 + 1} \begin{bmatrix} t - D \\ m - 1 \\ d - D \end{bmatrix} [e_0 D^2 - 1 \quad -(e_0 + 1)D \quad e_0 + 1],$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (t - D)^2 + 1 - m & t - D & 0 \\ mt - d + 2D(1 - m) & m - 1 & 0 \\ (d - D)^2 + d(t - d) & d - D & 0 \end{bmatrix} E_0,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} h_{11} & 2D(t - D) + 3(1 - m) & 2(-D + t) \\ h_{21} & 2(m - 1)(2t - 5D) & 3(m - 1) \\ h_{31} & D^2(8 - 6m) + D(4mt - 10t) & -4D + 2Dm + 2t \end{bmatrix} \frac{E_0}{12},$$

$$h_{11} = 2(t - D)^3 + 2t(1 - 2m) + D(7m - 5),$$

$$h_{21} = (m - 1)(12D^2 - 8Dt - 2m + 2t^2 - 3),$$

$$h_{31} = D^3(6m - 8) + D^2(-6mt + 12t) + D(-2m^2 + 2mt^2 + m - 8t^2 + 3) + 2t(-m + t^2),$$

La matriz H_0 tiene autovalores -1 doble y $\lambda_0 = e^{\pi D} = e_0$, este último con autovector asociado $v_0 = (1, 0, 1)^T$. Asumiremos que λ_{II} es el autovalor de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$ que para $\tau_L = 0$ coincide con λ_0 y que tiene el desarrollo

$$\lambda_{II} = \lambda_0 + \tau_L \lambda_1 + \tau_L^2 \lambda_2 + \tau_L^3 \lambda_3 + \dots$$

Como hay garantías de que λ_0 es un autovalor simple de H_0 , podemos utilizar teoría de perturbación, ver Sección 2.8 de [Wi65], para afirmar que se verifica

$$\begin{aligned} (H_0 + \tau_L H_1 + \tau_L^2 H_2 + \tau_L^3 H_3 + \dots) (v_0 + \tau_L v_1 + \tau_L^2 v_2 + \tau_L^3 v_3 + \dots) = \\ = \lambda_{II} (v_0 + \tau_L v_1 + \tau_L^2 v_2 + \tau_L^3 v_3 + \dots). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Igualando potencias de orden 1 en τ_L en (4.77), obtenemos

$$H_1 v_0 + H_0 v_1 = \lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_0, \quad (4.78)$$

si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por $w_0^T = (D^2, -D, 1)$, autovector izquierdo de H_0 correspondiente a λ_0 , se tendrá

$$w_0^T H_1 v_0 + w_0^T H_0 v_1 = \lambda_0 w_0^T v_1 + \lambda_1 w_0^T v_0.$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta que $w_0^T H_0 = \lambda_0 w_0^T$ determinamos

$$\lambda_1 = \frac{w_0^T H_1 v_0}{w_0^T v_0},$$

y sustituyendo los valores de λ_0 , v_0 y w_0 , obtenemos

$$\lambda_1 = (t - D) e_0.$$

Igualando potencias de orden 2 en τ_L en (4.77), obtenemos

$$H_2 v_0 + H_1 v_1 + H_0 v_2 = \lambda_0 v_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_0, \quad (4.79)$$

si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por w_0^T , se tendrá

$$w_0^T H_2 v_0 + w_0^T H_1 v_1 + w_0^T H_0 v_2 = \lambda_0 w_0^T v_2 + \lambda_1 w_0^T v_1 + \lambda_2 w_0^T v_0. \quad (4.80)$$

Para poder despejar λ_2 es necesario calcular previamente v_1 de la ecuación (4.78), que es equivalente al sistema compatible indeterminado

$$(H_0 - \lambda_0 I) v_1 = -(H_1 - \lambda_1 I) v_0,$$

con solución

$$v_1 = \xi_1 v_0 + \frac{e_0(1-m)}{(e_0+1)} \begin{bmatrix} D \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cualquier valor real del parámetro ξ_1 .

La dependencia del parámetro ξ_1 desaparece al sustituir en la ecuación (4.80), quedando λ_2 determinado de forma única

$$\lambda_2 = \frac{w_0^T (H_2 v_0 + (H_1 - \lambda_1 I) v_1)}{w_0^T v_0} =$$

$$= \frac{(t-D)^2}{2} e_0$$

Igualando potencias de orden 3 en τ_L en (4.77), obtenemos

$$H_3 v_0 + H_2 v_1 + H_1 v_2 + H_0 v_3 = \lambda_0 v_3 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_0,$$

si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por w_0^T , se tendrá

$$w_0^T H_3 v_0 + w_0^T H_2 v_1 + w_0^T H_1 v_2 + w_0^T H_0 v_3 = \lambda_0 w_0^T v_3 + \lambda_1 w_0^T v_2 + \lambda_2 w_0^T v_1 + \lambda_3 w_0^T v_0. \quad (4.81)$$

Para poder despejar λ_3 es necesario calcular previamente v_2 de la ecuación (4.79), que es equivalente al sistema compatible indeterminado

$$(H_0 - \lambda_0 I) v_2 = - (H_1 - \lambda_1 I) v_1 - (H_2 - \lambda_2 I) v_0,$$

con solución

$$v_2 = \xi_2 v_0 + \xi_1 \begin{bmatrix} D \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(m-1)e_0}{2(e_0+1)^2} \begin{bmatrix} (e_0-1)(tD-1) + 2(D^2-1) \\ e_0(t+D) + 3D-t \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cualesquiera valores reales de los parámetros ξ_1 y ξ_2 .

La dependencia de los parámetros ξ_1 y ξ_2 desaparece al sustituir en la ecuación (4.81), quedando λ_3 determinado de forma única

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{w_0^T (H_3 v_0 + (H_2 - \lambda_2 I) v_1 + (H_1 - \lambda_1 I) v_2)}{w_0^T v_0} = \\ &= \frac{2(t-D)^3 + (1-m)(2t-D)}{12} e_0 \end{aligned}$$

A partir de (4.60), para el autovalor simple λ_{II} ya calculado se cumplirá

$$\begin{aligned} \mu_{II} &= 2 \log (\lambda_0 + \lambda_1 \tau_L + \lambda_2 \tau_L^2 + \lambda_3 \tau_L^3 + O(\tau_L^4)) = \\ &= 2\pi D + 2 \log (1 + e^{-\pi D} \lambda_1 \tau_L + e^{-\pi D} \lambda_2 \tau_L^2 + e^{-\pi D} \lambda_3 \tau_L^3 + O(\tau_L^4)) = \\ &= 2\pi D + 2e^{-\pi D} \lambda_1 \tau_L + (2\lambda_2 e^{-\pi D} - \lambda_1^2 e^{-2\pi D}) \tau_L^2 + \\ &+ (2\lambda_3 e^{-\pi D} - 2\lambda_1 \lambda_2 e^{-2\pi D} + (2/3) \lambda_1^3 e^{-3\pi D}) \tau_L^3 + O(\tau_L^4), \end{aligned}$$

sustituyendo λ_1 y λ_2 , se obtiene la expresión del enunciado para μ_{II} .

Utilizando ahora la ecuación (4.61), junto con los desarrollos de τ_C y de T , y teniendo en cuenta la igualdad

$$\gamma_1 = (D - t)(1 - m) + (d - mt) = 0,$$

que lleva a

$$(D - t)(1 - m) = -(d - mt),$$

determinamos μ_I completando finalmente el enunciado de la Proposición. ■

El siguiente teorema completa el Teorema 4.23 para el caso $\gamma = 0$. Su demostración es similar y se demuestran sólo las diferencias con aquél.

Teorema 4.28 *Consideremos el sistema (4.36) con $M > 0$, $M - m \neq 0$, $d - mt \neq 0$, y sean $T^* = (Mt - d) / (M - m)$, y $D = D^* = MT^*$, de manera que $\gamma = 0$. Para $T = T^*$ el sistema experimenta una bifurcación foco-centro-ciclo límite, es decir, a partir de la estructura de centro lineal restringida a la zona central que existe para $T = T^*$, aparece un ciclo límite simétrico respecto del origen y transversal a las fronteras Σ_1 y a Σ_{-1} , para $(d - mt)(T - T^*) > 0$ y suficientemente pequeño.*

La amplitud a (medida como el máximo en $|x_1|$), el periodo P de la oscilación periódica y los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son funciones analíticas en 0 en la variable $(T - T^*)^{1/5}$ y sus desarrollos son

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{(60\pi)^{2/5}}{8} \frac{M^{4/5}}{(d - mt)^{2/5} (T^{*2} + M)^{2/5}} (T - T^*)^{2/5} + \\ &+ \left(\frac{125\pi^3}{147456} \right)^{1/5} \frac{M^{7/10} T^* \tanh(\pi T^* / 2M^{1/2})}{(d - mt)^{3/5} (T^{*2} + M)^{3/5}} (T - T^*)^{3/5} + O(T - T^*)^{4/5}, \\ P &= \frac{2\pi}{\sqrt{M}} + \frac{(60\pi)^{3/5}}{6} \frac{(M - m)}{M^{3/10} (d - mt)^{3/5} (T^{*2} + M)^{3/5}} (T - T^*)^{3/5} + \\ &+ \left(\frac{625\pi^4}{384} \right)^{1/5} \frac{(M - m) T^* \tanh(\pi T^* / 2M^{1/2})}{M^{1/10} (d - mt)^{4/5} (T^{*2} + M)^{4/5}} (T - T^*)^{4/5} + O(T - T^*), \\ \mu_I &= -\frac{(60\pi)^{3/5}}{3} \frac{(d - mt)^{2/5}}{M^{3/10} (T^{*2} + M)^{3/5}} (T - T^*)^{3/5} + O(T - T^*)^{4/5}, \end{aligned}$$

$$\mu_{II} = \frac{2\pi D^*}{M^{3/2}} + \frac{2(60\pi)^{1/5} (d - mt)^{4/5}}{M^{1/10} (M - m)} (T - T^*)^{1/5} + O(T - T^*)^{2/5}.$$

Demostración. La existencia del ciclo límite es consecuencia inmediata de la Proposición 4.27, tras deshacer el cambio del Lema 4.19.

Para obtener τ_L en función de T , reescribimos la ecuación (4.76) en la forma

$$T - T^* = \frac{M^{1/2}(d - mt)(T^{*2} + M)}{60\pi} \tau_L^5 + O(\tau_L^6),$$

y le aplicamos el Lema 4.10. Haciendo $n = 5$, $\eta = T - T^*$ y $\xi = \tau_L$ podemos asegurar la existencia de una función χ analítica en 0 con $\chi(0) \neq 0$ siempre que $d - mt \neq 0$, tal que $\tau_L = (T - T^*)^{1/5} \chi \left[(T - T^*)^{1/5} \right]$, cuyo desarrollo en serie de Taylor en la variable $(T - T^*)^{1/5}$ es

$$\tau_L = \left[\frac{60\pi (T - T^*)}{(d - mt)(T^{*2} + M) M^{1/2}} \right]^{1/5} + O \left[(T - T^*)^{2/5} \right]. \quad (4.82)$$

Debido a la simetría, el período de la órbita es igual a $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Deshaciendo el cambio del Lema 4.19 en (4.50) y utilizando (4.82), obtenemos la serie para el período que figura en el enunciado.

Para el cálculo de la amplitud de la órbita periódica es válido el razonamiento efectuado en la demostración del Teorema 4.23 que conduce hasta

$$a = 1 + \frac{1}{8} \tau_L^2 + O(\tau_L^4),$$

donde deshaciendo el cambio del Lema 4.19 y utilizando ahora la serie (4.62) obtenemos los dos primeros términos de la serie del enunciado. El tercer término se ha calculado empleando más términos de las series implicadas y usando cálculo simbólico.

Si en la expresión de los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica proporcionada por la Proposición 4.27 sustituimos el desarrollo de τ_L (4.82) y utilizamos la igualdad (4.75), tras operar obtenemos los valores que figuran en el enunciado. ■

Haciendo un balance de los resultados obtenidos hasta el momento para la bifurcación objeto de este Capítulo, el resumen de los diversos casos puede esquematizarse en la tabla 4.2.

$M - m \neq 0$	$d - mt \neq 0$	$\gamma \neq 0$	Teorema 4.23
		$\gamma = 0$	Teorema 4.28
	$d - mt = 0$	$D - Mt \neq 0$	Corolario 4.24 (b)
		$D - Mt = 0$	Autovalor real compartido en el punto crítico, $rg(\mathcal{C}) = 2$
$M - m = 0$	$d - mt \neq 0$	Corolario 4.24 (a)	
	$d - mt = 0$	Pareja autovalores complejos compartida en el punto crítico, $rg(\mathcal{C}) = 1$	

Tabla 4.2: Caso S3CPL₃ observable: tabla resumen de la bifurcación foco-centro-ciclo límite con $M > 0$.

Como se ve, aparecen dos casos de degeneración no analizados hasta ahora en la memoria en los que como veremos falla la controlabilidad para el valor crítico del parámetro de bifurcación. A continuación se presenta un breve análisis de los mismos.

Caso $M - m \neq 0$, $d - mt = 0$ y $D - Mt = 0$ (con $M > 0$)

De la última hipótesis, obtenemos que para el valor crítico del parámetro de bifurcación $MT - D = 0$ se verifica que $T = t$ y el sistema (4.36) se convierte en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ mt & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (M - m) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} \text{sat}(x_1). \quad (4.83)$$

Las matrices del sistema en las zonas C y L son

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ mt & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ Mt & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que es fácil concluir que ambas matrices comparten el autovalor real t .

La matriz de controlabilidad de este sistema es

$$\mathcal{C} = (M - m) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t & -m \\ t & 0 & -mt \end{bmatrix},$$

y tiene rango 2, por lo que aplicando la proposición 2.7 con $p = 2$, tenemos garantizada la existencia de un cambio lineal de variables, concretamente $x_1 = x$, $x_2 = tx + y$ y $x_3 = ty + z$ (igual que el efectuado en la Proposición 2.2 de [CFPT03] para sistemas bizonales), que permite reducir el sistema a

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (M - m) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(x). \quad (4.84)$$

En el sistema (4.84) observamos que la tercera variable aparece desacoplada con solución $z(\tau) = z(0) \exp(t\tau)$, con lo que llevando esta expresión a las otras dos ecuaciones, nuestro sistema se reduce a un sistema bidimensional no autónomo.

Para el caso particular $t = 0$, la variable z permanece constante, igual a $z(0)$, de forma que la dinámica es básicamente bidimensional autónoma en las variables x e y . Además, nótese que $T = t = D = d = 0$. Si escribimos (4.84) como una ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -z(0) - mx + (M - m) \text{sat}(x),$$

comprobamos que es un sistema conservativo, con un comportamiento análogo al del sistema plano analizado en la Proposición 4.4, lo que confirma la existencia de un continuo de órbitas periódicas de tres zonas. Todas estas órbitas periódicas de tres zonas son, obviamente, soluciones de las ecuaciones de cierre (4.43) y corresponden a un mismo valor de los parámetros T , M y D .

En cualquier otro caso, el plano $z = 0$ es invariante para el flujo del sistema (4.84), siendo una variedad atractiva para $t < 0$ y repulsiva para $t > 0$. La dinámica en dicho plano invariante es la del sistema conservativo anterior con $z(0) = 0$.

Si aplicamos el Lema 4.20 a las ecuaciones de cierre (4.43) y deshacemos el cambio de variables del Lema 4.19, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha &= O(\tau_L^9), \\ \beta &= \sqrt{M} + O(\tau_L^9), \\ \delta &= t + O(\tau_L^9), \\ \tau_C &= \frac{\pi}{\sqrt{M}} - \tau_L + \frac{M-m}{12}\tau_L^3 + \frac{1}{240}(M-m)(2m-3M)\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \\ x_2^0 &= t + \frac{M}{2}\tau_L + \frac{Mm}{24}\tau_L^3 + \frac{Mm^2}{240}\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \\ x_2^1 &= -t + \frac{M}{2}\tau_L + \frac{Mm}{24}\tau_L^3 + \frac{Mm^2}{240}\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \\ x_3^0 &= \frac{Mt}{2}\tau_L + \frac{Mmt}{24}\tau_L^3 + \frac{Mm^2t}{240}\tau_L^5 + O(\tau_L^6), \\ x_3^1 &= \frac{Mt}{2}\tau_L + \frac{Mmt}{24}\tau_L^3 + \frac{Mm^2t}{240}\tau_L^5 + O(\tau_L^6).\end{aligned}$$

Fijándonos en las tres primeras igualdades, y usando la unicidad garantizada por el Teorema de la Función Implícita en el Lema 4.20, podemos ahora asegurar que estas series, solución de las ecuaciones de cierre (4.43), se corresponden con el continuo de órbitas periódicas del razonamiento anterior y, por tanto, los desarrollos de α , β y δ se reducen a los términos constantes. Entonces, al variar $\tau_L > 0$, $MT - D$ permanece localmente constante e igual a 0. Esto indica que la técnica de las ecuaciones de cierre sólo proporciona información para el valor crítico del parámetro de la bifurcación foco-centro-ciclo límite, pero no en un entorno del mismo.

Los desarrollos en serie de x_2^0 , x_2^1 , x_3^0 y x_3^1 nos proporcionan las intersecciones con Σ_1 y Σ_{-1} de las infinitas órbitas periódicas existentes para $MT - D = 0$ parametrizadas en τ_L , que forman un centro no lineal contenido en el plano focal del origen.

Caso $M = m > 0$ y $d - mt = 0$

Ahora, para el valor crítico del parámetro de bifurcación $T = D/M$, el sistema (4.36) se convierte en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ Mt & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (T - t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} \text{sat}(x_1).$$

Las matrices del sistema en las zonas C y L son

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ Mt & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ MT & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y se comprueba que ambas matrices comparten la pareja de autovalores complejos conjugados $\pm i\sqrt{M}$.

La matriz de controlabilidad de este sistema es

$$C = (T - t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ M & Mt & Mt^2 \end{bmatrix},$$

y tiene rango 1, por lo que aplicando la Proposición 2.7 con $p = 1$, tenemos garantizada la existencia de un cambio lineal de variables, concretamente $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = Mx + z$ (análogo al efectuado en la Proposición 2.4 de [CFPT03]), que permite reducir el sistema a

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (T - t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(x). \quad (4.85)$$

Es fácil comprobar que $My\dot{y} + z\dot{z} = 0$, por lo que el sistema posee cilindros invariantes de la forma $My^2 + z^2 = K$, para todo valor de $K \geq 0$ constante.

Observamos que el sistema (4.85), integrando las dos últimas ecuaciones, puede ser reducido a la ecuación diferencial no autónoma y periódica

$$\frac{dx}{d\tau} = tx + (T - t) \text{sat}(x) - y_0 \cos \sqrt{M}\tau - \frac{z_0}{\sqrt{M}} \text{sen} \sqrt{M}\tau.$$

Esta ecuación recuerda a la estudiada en [CFPT03]. Su estudio requiere un análisis pormenorizado que, hasta donde sabemos, no ha sido realizado, por lo que constituye un problema abierto. Conjeturamos que la situación corresponde a la existencia, para el valor crítico del parámetro de bifurcación, de al menos una variedad invariante no acotada, foliada por órbitas periódicas no hiperbólicas.

Si aplicamos el Lema 4.20 con estas hipótesis a las ecuaciones de cierre (4.43) y deshacemos el cambio de variables del Lema 4.19, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha &= O(\tau_L^6), \\ \beta &= \sqrt{M} + O(\tau_L^6), \\ \delta &= \frac{D}{M} + O(\tau_L^6), \\ \tau_C &= \frac{\pi}{\sqrt{M}} - \tau_L + O(\tau_L^6), \\ x_2^0 &= \frac{D}{M} + \frac{M}{2}\tau_L - \frac{D-Mt}{12}\tau_L^2 + \frac{D^2-DMt+M^3}{24M}\tau_L^3 + O(\tau_L^4), \\ x_2^1 &= -\frac{D}{M} + \frac{M}{2}\tau_L + \frac{D-Mt}{12}\tau_L^2 + \frac{D^2-DMt+M^3}{24M}\tau_L^3 + O(\tau_L^4), \\ x_3^0 &= \frac{D}{2}\tau_L - \frac{(D-Mt)D}{12M}\tau_L^2 + O(\tau_L^3), \\ x_3^1 &= \frac{D}{2}\tau_L + \frac{(D-Mt)D}{12M}\tau_L^2 + O(\tau_L^3).\end{aligned}$$

Estos resultados corroboran la anterior conjetura, ya que las tres primeras expresiones parecen indicar que $MT - D$ permanece constante e igual a 0, y los desarrollos en serie de x_2^0 , x_2^1 , x_3^0 y x_3^1 nos proporcionan las intersecciones con Σ_1 y Σ_{-1} de infinitas órbitas periódicas parametrizadas en τ_L . De nuevo, esto indica que la técnica de las ecuaciones de cierre sólo proporciona información para el valor crítico del parámetro de la bifurcación foco-centro-ciclo límite, pero no en un entorno del mismo.

De ser cierta la conjetura, es inmediato asegurar que el periodo de todas estas órbitas es el mismo e igual a $2\pi/\sqrt{M}$, no tanto por la expresión de τ_C , que así lo sugiere, sino por la dinámica en cada cilindro (gobernada por un

oscilador armónico en las variables y, z) de manera que el continuo de órbitas periódicas formaría un centro isócrono.

4.2.2. El método de balance armónico

En esta sección aplicamos el método de balance armónico descrito en la Sección 3.2 de esta memoria al sistema (4.36) bajo las hipótesis del Teorema 4.23, es decir $M > 0$ y $\gamma = DM - Dm + dM - tM^2 \neq 0$, para el estudio de la bifurcación foco-centro-ciclo límite en el caso tridimensional. La función de transferencia $G(p)$ del sistema (4.36) es

$$G(p) = \mathbf{c}^T(pI - A)^{-1}\mathbf{b} = \frac{(T - t)p^2 - (M - m)p + D - d}{p^3 - tp^2 + mp - d},$$

y asumiremos que

$$\sigma(\tau) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = x_1(\tau) = a \operatorname{sen}(\omega\tau),$$

donde $\omega > 0$ y $a \geq 1$ por ser el ciclo límite de tres zonas. En lo que sigue utilizamos la formulación alternativa en la variable q en lugar de la variable a , con lo que se tiene

$$N(q) = 1 - \frac{q}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} q}{\pi}.$$

Para nuestro sistema la ecuación (3.37) toma la forma

$$1 - N(q) \frac{D - d - \omega^2(T - t) - i\omega(M - m)}{t\omega^2 - d + i\omega(m - \omega^2)} = 0,$$

ecuación compleja equivalente a las dos ecuaciones reales siguientes

$$[D - d - \omega^2(T - t)]N(q) = t\omega^2 - d, \quad (4.86)$$

$$-(M - m)N(q) = m - \omega^2. \quad (4.87)$$

Como se ha descrito en la Sección 3.2, un par $(\tilde{q}, \tilde{\omega})$ solución del sistema (4.86)-(4.87), se corresponde con una órbita periódica de primer armónico predicha por este método.

De la ecuación (4.87) podemos despejar

$$\omega^2 = m + (M - m)N(q), \quad (4.88)$$

que una vez sustituida en (4.86) nos permite obtener

$$T = \frac{t(M - m)N(q)^2 + [mt + D - d - t(M - m)]N(q) + d - mt}{[m + (M - m)N(q)]N(q)}. \quad (4.89)$$

Sustituyendo el valor $N(q) = 1 - q/\pi + \sin q/\pi$ en (4.89) y desarrollando en serie de Taylor en la variable q en 0, valor correspondiente a $a = 1$ para el que tiene lugar el nacimiento del ciclo límite de la bifurcación, obtenemos

$$T = \frac{D}{M} + \frac{\gamma}{6\pi M^2} q^3 - \frac{\gamma}{120\pi M^2} q^5 - \frac{2\gamma + (Dm - dM)(M - m)}{36\pi^2 M^3} q^6 + O(q^7). \quad (4.90)$$

Si ahora aislamos $MT - D$ y hacemos el cambio $\eta = MT - D$ resulta

$$\eta = \frac{\gamma}{6\pi M^2} q^3 - \frac{\gamma}{120\pi M^2} q^5 - \frac{2\gamma + (Dm - dM)(M - m)}{36\pi^2 M^3} q^6 + O(q^7). \quad (4.91)$$

de manera que la aplicación del Lema 4.10 con $n = 3$ nos permite asegurar que existe una función h analítica en 0 con $h(0) \neq 0$ y tal que

$$q = \eta^{1/3} h(\eta^{1/3}).$$

Para invertir la serie (4.91) utilizamos coeficientes indeterminados para el desarrollo de h y llegamos a

$$q = - \left(\frac{6\pi M}{\gamma} \right)^{1/3} \eta^{1/3} - \frac{\pi M}{10 \gamma} \eta + O(\eta^{4/3}). \quad (4.92)$$

Si ahora sustituimos dicha expresión en el desarrollo de Taylor de la amplitud

$$a = \frac{1}{\cos(q/2)} = 1 + \frac{1}{8} q^2 + \frac{5}{384} q^4 + O(q^5),$$

y deshacemos el cambio de η obtenemos

$$a = 1 + \frac{(6\pi)^{2/3} (MT - D)^{2/3}}{8\gamma^{2/3}} + \frac{33(6\pi)^{4/3} (MT - D)^{4/3}}{1920\gamma^{4/3}} + O((MT - D)^{5/3}).$$

Si comparamos esta expresión con la obtenida para la amplitud en el Teorema 4.23, comprobamos que coinciden los dos primeros términos no nulos y el siguiente es incorrecto.

Para calcular el periodo utilizamos (4.88) sustituyendo $N(q)$ por su valor, lo que resulta

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{m + (M - m)(1 - q/\pi + \sin q/\pi)}},$$

expresión analítica en $q = 0$ y que presenta el siguiente desarrollo en serie de Taylor en dicho punto

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{M}} + \frac{1}{6M^{3/2}}(M - m)q^3 - \frac{(M - m)}{120M^{3/2}}q^5 + O(q^6),$$

utilizando ahora (4.92) y deshaciendo el cambio de η , finalmente queda

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{M}} - \frac{\pi(M - m)(MT - D)}{M^{3/2}\gamma} + O((MT - D)^2),$$

Si comparamos esta expresión con la obtenida para el periodo en el Teorema 4.23 comprobamos que coinciden los dos primeros términos no nulos, y no escribimos el siguiente término que es incorrecto, al predecir balance armónico que es de orden $(MT - D)^2$ cuando por el Teorema 4.23 sabemos que realmente su orden es $(MT - D)^{4/3}$.

En lo que sigue realizamos, a partir de los resultados que ofrece balance armónico, un análisis de la degeneración de la bifurcación foco-centro-ciclo límite similar al efectuado en la Sección 4.2.1 mediante el método de las ecuaciones de cierre.

Partimos de la relación existente entre T y D parametrizada en la variable q :

$$T = \frac{D}{M} + a_3(D)q^3 + a_5(D)q^5 + a_6(D)q^6 + O(q^7), \quad (4.93)$$

donde los coeficientes de orden 3 y 5 resultan ser

$$\begin{aligned} a_3(D) &= \frac{\gamma}{6\pi M^2}, \\ a_5(D) &= -\frac{\gamma}{120\pi M^2}, \\ a_6(D) &= \frac{M\gamma + (Md - Dm)(M - m)}{36\pi^2 M^3}, \end{aligned}$$

con

$$\gamma = DM - Dm + dM - tM^2.$$

A partir de los coeficientes anteriores, se observa que la anulación de a_3 implica la de a_5 también. Supondremos un valor constante para el parámetro M , y moviéndonos en el plano de parámetros (T, D) sobre la línea $D = MT$ buscaremos un valor crítico del parámetro D donde se anule γ .

Utilizaremos los valores D^* y T^* , así como los parámetros locales \tilde{D} y \tilde{T} entorno al punto (T^*, D^*) ya definidos en (4.66) y (4.67) respectivamente. Expresando la ecuación (4.93) en función de dichos parámetros obtenemos

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{D}}{M} + \tilde{a}_3(\tilde{D})q^3 + \tilde{a}_5(\tilde{D})q^5 + \tilde{a}_6(\tilde{D})q^6 + O(q^7), \quad (4.94)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_3(\tilde{D}) &= a_{31}\tilde{D}, \\ \tilde{a}_5(\tilde{D}) &= a_{51}\tilde{D}, \\ \tilde{a}_6(\tilde{D}) &= a_{60} + a_{61}\tilde{D}, \end{aligned}$$

y los coeficientes indicados son:

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{M - m}{6\pi M^2}, \\ a_{51} &= -\frac{M - m}{120\pi M^2}, \\ a_{60} &= \frac{(d - mt)}{36\pi^2 M}, \\ a_{61} &= \frac{(M - m)^2}{36\pi^2 M^3}. \end{aligned}$$

En el Teorema 4.26 se demostró la existencia de una curva en el plano (T, D) donde había una bifurcación pliegue de soluciones positivas. Para comparar dicho resultado con la predicción de balance armónico utilizamos que sobre la citada curva no se verifican las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, y en particular que la derivada de \tilde{T} respecto de q se anula. Por tanto, derivamos la ecuación (4.94) respecto de q e igualamos a 0, resultando

$$3\tilde{a}_3(\tilde{D})q^2 + 5\tilde{a}_5(\tilde{D})q^4 + 6\tilde{a}_6(\tilde{D})q^5 + O(q^6) = 0,$$

que, eliminando las soluciones de la forma $q = 0$, es equivalente a

$$G(q, \tilde{D}) = 3a_{31}\tilde{D} + 5a_{51}\tilde{D}q^2 + 6(a_{60} + a_{61}\tilde{D})q^3 + O(q^4) = 0.$$

Al ser $G_{\tilde{D}}(0, 0) = 3a_{31} = (M - m)/6\pi M^2 \neq 0$ por hipótesis, la aplicación del Teorema de la Función Implícita nos asegura la existencia de una función

$\psi(q)$, tal que $G(q, \psi(q)) = 0$. Suponiendo un desarrollo con coeficientes indeterminados para la función $\psi(q)$ e igualando términos del mismo orden llegamos a

$$\tilde{D} = -\frac{d - mt}{3\pi(M - m)}q^3 + O(q^4). \quad (4.95)$$

Aplicando ahora el Lema 4.10 con $n = 3$ a la ecuación (4.95) y haciendo $\eta = \tilde{D}$ y $\xi = q$ podemos asegurar la existencia de una función χ analítica en 0 con $\chi(0) \neq 0$, tal que $q = \tilde{D}^{1/3}\chi(\tilde{D}^{1/3}) > 0$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es

$$q = \left(-\frac{3\pi(M - m)}{d - mt}\right)^{1/3} \tilde{D}^{1/3} + O(\tilde{D}^{2/3}),$$

y sustituyéndola en (4.94) obtenemos finalmente

$$\tilde{T} = \frac{D}{M} + \frac{1}{4M^3} \frac{(M - m)^2}{(d - mt)} \tilde{D}^2 + O(\tilde{D}^3), \quad (4.96)$$

Comparando la expresión (4.96) con la expresión (4.69), comprobamos que el método de balance armónico proporciona correctamente el primer término, mientras que en el segundo aparece una potencia de \tilde{D}^2 cuando lo correcto sería una potencia de $\tilde{D}^{5/2}$.

Estabilidad de las órbitas periódicas de primer armónico

Para estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas de primer armónico detectadas aplicaremos el criterio (3.35) y habrá que tener en cuenta el signo de una tercera raíz real de la ecuación (3.32), que para el sistema (4.36) vale

$$\lambda^3 - [t + N(q)(T - t)]\lambda^2 + [m + N(q)(M - m)]\lambda - [d + N(q)(D - d)] = 0. \quad (4.97)$$

Sea el par $(\tilde{q}, \tilde{\omega})$ solución de (3.37) con $\tilde{q} > 0$ y $\tilde{\omega} > 0$ correspondiente a una órbita periódica de primer armónico. En esas condiciones la ecuación (4.97) debe tener las raíces $\pm i\tilde{\omega}$ (ver Sección 5 de [LP96]). Si denominamos mediante ρ la raíz real de (4.97), podemos factorizar dicha ecuación de la forma siguiente

$$(\lambda - \rho)(\lambda^2 + \tilde{\omega}^2) = \lambda^3 - \rho\lambda^2 + \tilde{\omega}^2\lambda - \rho\tilde{\omega}^2 = 0.$$

Identificando el coeficiente de segundo orden en λ , obtenemos que $\rho = t + N(\tilde{q})(T - t)$. Por tanto, la órbita periódica de primer armónico del sistema tridimensional (4.36) será linealmente estable si $\rho < 0$ y

$$\left. \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} G(i\omega) \right|_{\omega=\tilde{\omega}} > 0.$$

Sustituyendo ahora los valores de T (4.90) y $N(a)$ (3.36) en función de q en ρ y desarrollando en serie de Taylor en la variable q en 0 obtenemos

$$\rho = \frac{D}{M} + \frac{dM - Dm}{6\pi M^2} q^3 + O(q^5),$$

utilizando ahora la expresión (4.92) para q en función de $MT - D$ queda finalmente

$$\rho = \frac{D}{M} + \frac{dM - Dm}{M\gamma} (MT - D)^3 + O(MT - D)^5.$$

En un entorno del valor crítico del parámetro de bifurcación $MT - D = 0$, se tendrá que $\rho < 0$ cuando $D < 0$.

Por otra parte, para el sistema (4.36) se tiene

$$\operatorname{Im} G(i\omega) = \frac{(t - T)\omega^5 + (D - d + mT - Mt)\omega^3 + (dM - Dm)\omega}{(d - \omega^2)^2 + \omega^2(m - \omega^2)^2},$$

computando su derivada respecto de ω y sustituyendo los valores de T (4.90) y de ω^2 (4.88) en función de q y desarrollando en serie de Taylor en la variable q en 0 obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} G(i\omega) \right|_{\omega=\tilde{\omega}} = -\frac{2\gamma}{(d - Mt)^2 + M(M - m)^2} + O(q^3).$$

Teniendo en cuenta que en el nacimiento del ciclo límite se verifica que $q > 0$ y suficientemente pequeño, se tiene que el signo de la expresión anterior será positivo cuando γ sea negativo. Combinando ambas condiciones tendremos estabilidad lineal del ciclo límite cuando $D < 0$ y $\gamma < 0$, por lo que la predicción de balance armónico está de acuerdo con la estabilidad asintótica del Teorema 4.23.

En esta situación de la bifurcación foco-centro-ciclo límite, hemos establecido que el método de balance armónico es un procedimiento válido a primer orden para estudiar y caracterizar dicha bifurcación.

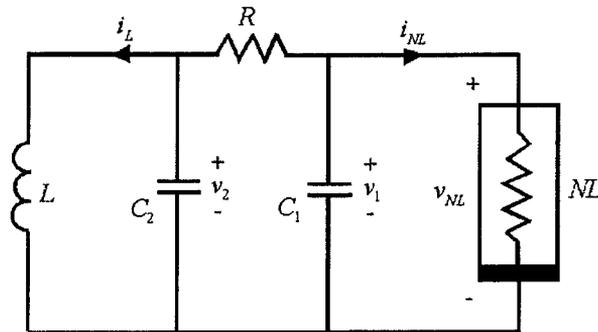


Figura 4.22: Circuito de Chua

4.2.3. El circuito de Chua

El circuito de Chua (Figura 4.22) es un sistema electrónico que ha recibido una gran atención, particularmente en estudios sobre bifurcación y caos, debido a que este circuito es uno de los más simples que reúne las condiciones necesarias para comportarse como un sistema caótico, véase [Ke93I] y [Ke93II], aunque con anterioridad ya se había descubierto comportamiento caótico en un circuito electrónico autónomo muy similar, véase [FFA84].

El circuito está formado por una bobina L , dos condensadores C_1 y C_2 , una resistencia R y un dispositivo no lineal NL , que es conocido como el diodo de Chua, véase [Hu96] y [LD96]. Las tres variables de estado serán las tensiones en los condensadores y la intensidad en la bobina. En el circuito de Chua se considera que la bobina es un elemento ideal, es decir, una autoinducción pura.

Sin embargo, cuando se considera que se trata de una bobina real hablaremos del oscilador de Chua (figura 4.23) siguiendo a Morgül [Mo95] y a Kennedy [Ke93II]. Como es sabido una bobina real se modela como una autoinducción pura L en serie con una resistencia R_o .

Para modelar el diodo de Chua consideramos que el dispositivo presenta una curva característica lineal a trozos, formada por tres tramos simétricos

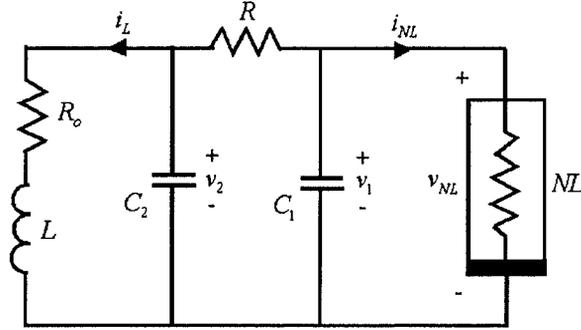


Figura 4.23: Oscilador de Chua

asociados a un umbral de tensión dado E_o , definida como sigue:

$$i_{NL} = \begin{cases} G_b v_{NL} + (G_b - G_a) E_o, & \text{si } v_{NL} < -E_o, \\ G_a v_{NL}, & \text{si } -E_o \leq v_{NL} \leq E_o, \\ G_b v_{NL} + (G_a - G_b) E_o, & \text{si } v_{NL} > E_o. \end{cases} \quad (4.98)$$

En la mayoría de los trabajos consultados, como por ejemplo [Hu96], [LD96] y [Ke93II] tanto G_a como G_b toman valores negativos. Ello es debido a que estos autores están principalmente interesados en estudiar la aparición de caos en el circuito de Chua. Sin embargo, nuestro interés aquí es más bien el mecanismo de generación de ciclos límites en el oscilador de Chua y, en particular, estudiar si corresponden a una bifurcación foco-centro-ciclo límite. Por ello el dispositivo no lineal de nuestro circuito tendrá una característica dada por la ecuación (4.98) pero con G_a negativo y G_b positivo como la que Kennedy utiliza en [Ke93I]. La característica del dispositivo será por tanto como se muestra en la figura 4.24.

La realización física del dispositivo no lineal (figura 4.25) puede llevarse a cabo mediante un montaje basado en un amplificador operacional AO realimentado en montaje no inversor y una resistencia que une los terminales de salida y entrada del amplificador. Este esquema se ha tomado del dispositivo no lineal que utilizaron Freire, Franquelo y Aracil en [FFA84].

De esta forma se consigue un dispositivo de dos terminales que se comporta como una resistencia negativa para valores de tensión en un intervalo simétrico

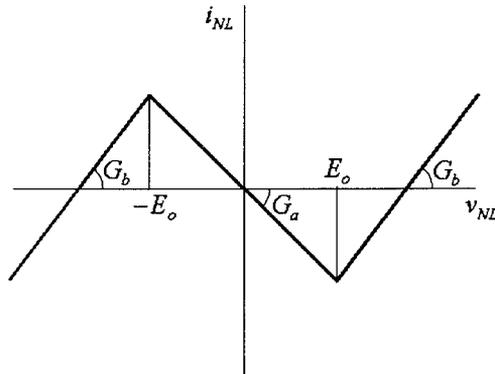


Figura 4.24: Característica tensión - intensidad del dispositivo no lineal.

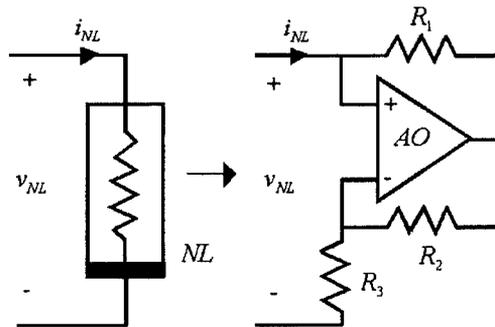


Figura 4.25: Realización física del dispositivo no lineal.

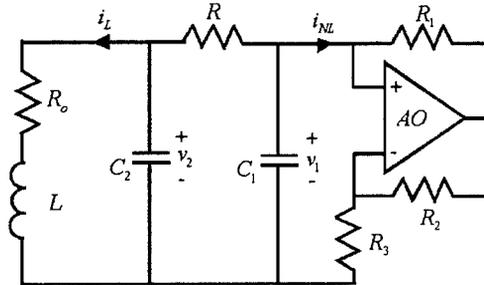


Figura 4.26: Modelo implementado del oscilador

respecto al origen, es decir, en la zona central con comportamiento lineal del amplificador operacional, donde se comprueba que el valor de la conductancia es

$$G_a = -\frac{R_2}{R_1 R_3}.$$

Fuera de ese intervalo el amplificador operacional funciona en saturación, y el dispositivo no lineal se comporta como una resistencia positiva en serie con una fuente de tensión continua cuyo valor viene dado por la tensión de saturación E del amplificador operacional, siendo la conductancia igual a

$$G_b = \frac{1}{R_1}.$$

Utilizando la realización física anterior, llegamos por tanto a que el circuito que nos ocupa es el que se muestra en la figura 4.26.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura 4.26, se llega a las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\tau} &= -\left(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{R_1 C_1}\right)v_1 + \frac{v_2}{RC_1} + \frac{f(v_1)}{R_1 C_1}, \\ \frac{dv_2}{d\tau} &= \frac{v_1}{RC_2} - \frac{v_2}{RC_2} - \frac{i_L}{C_2}, \\ \frac{di_L}{d\tau} &= \frac{v_2}{L} - \frac{R_o}{L}i_L, \end{aligned} \tag{4.99}$$

donde

$$f(v_1) = \begin{cases} E \operatorname{sign}(v_1), & \text{si } |v_1| > E/\alpha, \\ \alpha v_1, & \text{si } |v_1| \leq E/\alpha, \end{cases}$$

con $\alpha = 1 + R_2/R_3$.

A continuación procedemos a la adimensionalización de (4.99), para ello, tomamos la tensión base igual a E/α . La intensidad base la definimos como el cociente de la tensión base y una impedancia base a la que por el momento llamaremos Z .

Con este criterio, hacemos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 E/\alpha, \\ v_2 &= x_2 E/\alpha, \\ i_L &= x_3 \frac{1}{Z} E/\alpha, \end{aligned} \tag{4.100}$$

y es fácil comprobar que la función $f(v_1)$ queda

$$f(v_1) = \begin{cases} E \operatorname{sign}(x_1), & \text{si } |x_1| > 1, \\ E x_1, & \text{si } |x_1| \leq 1, \end{cases} = E \operatorname{sat}(x_1), \tag{4.101}$$

mientras que el sistema (4.99) en función de las nuevas variables y expresado en forma matricial resulta

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{R_1 C_1}\right) & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{ZC_2} \\ 0 & \frac{Z}{L} & -\frac{R_e}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sat}(x_1). \tag{4.102}$$

A la vista de la expresión obtenida, parece razonable tomar Z de tal forma que

$$\frac{Z}{L} = \frac{1}{ZC_2},$$

de donde

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C_2}}. \tag{4.103}$$

Sustituyendo (4.103) en (4.102), llegamos a

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{R_1C_1}\right) & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{\sqrt{LC_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{LC_2}} & -\frac{R_o}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(x_1). \quad (4.104)$$

El sistema (4.104) puede escribirse en la formulación compacta del Capítulo 3 (2.7) siendo

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{R_1C_1}\right) & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{\sqrt{LC_2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{LC_2}} & -\frac{R_o}{L} \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para simplificar nuestro análisis, supondremos los dos condensadores iguales $C = C_1 = C_2$. Después de adimensionalizar el tiempo mediante el cambio

$$\tau = RC\bar{\tau},$$

y de la introducción de los cuatro parámetros adimensionales

$$\mu = (\alpha - 1) \frac{R}{R_1} = \frac{RR_2}{R_1R_3}, \quad \beta = \frac{R^2C}{L}, \quad \kappa = \frac{RR_oC}{L}, \quad r = \frac{R}{R_1}, \quad (4.105)$$

el sistema queda

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta} \\ 0 & \sqrt{\beta} & -\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu + r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(x_1), \quad (4.106)$$

donde tomaremos μ como parámetro principal de bifurcación, cuyo valor cambiaremos mediante el potenciómetro R_1 , que tiene resistencia variable.

Si aplicamos ahora la Proposición 2.9 al sistema (4.106), obtenemos que dicho sistema es observable y, por tanto, se puede poner en forma de Liénard al cumplirse

$$rg \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{\beta} \end{bmatrix} = 2,$$

para cualquier valor de los componentes del circuito. Por tanto, el sistema (4.106) se puede expresar en la forma (4.36) con los siguientes valores

$$\begin{aligned} T &= \mu - 2 - \kappa, & t &= -r - 2 - \kappa < 0, \\ M &= 2\kappa + \beta - (1 + \kappa)\mu, & m &= 2\kappa + \beta + (1 + \kappa)r > 0, \\ D &= \beta\mu + \kappa\mu - \beta, & d &= -\beta r - \kappa r - \beta < 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Estamos ya en condiciones de aplicar los resultados anteriores de este capítulo y determinar si el sistema presenta la bifurcación foco-centro-ciclo límite. Observemos que los seis coeficientes de (4.107) están expresados en términos de los cuatro parámetros adimensionales definidos en (4.105). En el siguiente resultado se utilizan β y μ como parámetros principales de bifurcación mientras que κ y r juegan un papel auxiliar.

Proposición 4.29 *El sistema (4.106) experimenta la bifurcación foco-centro-ciclo límite descrita en el Teorema 4.23, supuesto que*

$$0 < \kappa < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0,207. \quad (4.108)$$

En dicho caso, la citada bifurcación tiene lugar en los puntos del plano (μ, β) situados en el arco de la curva parabólica definida por

$$(1 + \kappa)\mu^2 - (\kappa^2 + 4\kappa + 2)\mu + 2\kappa(2 + \kappa) + (1 + \kappa)\beta = 0, \quad (4.109)$$

para el rango de valores positivos de μ

$$\mu_1 = \frac{2\kappa + 1 - \sqrt{1 - 4\kappa - 4\kappa^2}}{2(1 + \kappa)} < \mu < \mu_2 = \frac{2\kappa + 1 + \sqrt{1 - 4\kappa - 4\kappa^2}}{2(1 + \kappa)}, \quad (4.110)$$

y es siempre no degenerada, sea cual sea el valor del cuarto parámetro r . En particular, en todos los puntos de bifurcación se tiene que $D < 0$, el coeficiente $\gamma > 0$, y el ciclo límite que bifurca para valores supercríticos de μ , cuando se considera fijado el valor de β , es orbitalmente asintóticamente estable.

Demostración. La ecuación (4.109) es simplemente el resultado de sustituir los valores de (4.107) en la condición $MT - D = 0$ del Teorema 4.23. Se necesita

también que $M > 0$, o equivalentemente que $\beta > (1 + \kappa)\mu - 2\kappa$. Si se sustituye esta desigualdad en (4.109) y escribimos

$$(1 + \kappa)\mu^2 - (\kappa^2 + 4\kappa + 2)\mu + 2\kappa(2 + \kappa) = -(1 + \kappa)\beta < -(1 + \kappa)^2\mu + 2\kappa(1 + \kappa),$$

se llega a la condición

$$(1 + \kappa)\mu^2 - (2\kappa + 1)\mu + 2\kappa < 0,$$

que sólo es posible si el correspondiente discriminante $1 - 4\kappa - 4\kappa^2$ es positivo. Esta última condición conduce a (4.108), y es inmediato entonces llegar a (4.110).

Para ver que la bifurcación no es nunca degenerada razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un valor de μ en el rango y condiciones del enunciado donde $\gamma = D(M - m) + M(d - tM)$ se anula. Entonces, usando la condición $MT - D = 0$, en dicho punto se tendría

$$\gamma = MT(M - m) + M(d - tM) = M[T(M - m) + d - tM] = 0,$$

y como por hipótesis $M > 0$ se llegaría a $T(M - m) + d - tM = 0$. Esta igualdad conduce, tras sustituir (4.107), a la ecuación

$$-(1 + \kappa)\mu^2 - 2r(1 + \kappa)\mu + (\kappa^2 + 4\kappa + 2)r + 2\kappa(\kappa + 2) + (1 + \kappa)\beta = 0,$$

a la que podemos restar (4.109) y obtener la condición (ya no dependiente de β)

$$-2(1 + \kappa)\mu^2 + (\kappa^2 + 4\kappa + 2)\mu - 2r(1 + \kappa)\mu + (\kappa^2 + 4\kappa + 2)r = 0.$$

Eliminando el factor evidente $r + \mu > 0$, queda ahora

$$\kappa^2 + 4\kappa + 2 - 2(1 + \kappa)\mu = 0, \quad (4.111)$$

y concluimos que el valor posible de degeneración de la bifurcación sería

$$\mu^* = \frac{\kappa^2 + 4\kappa + 2}{2(1 + \kappa)} > \frac{4\kappa + 2}{2(1 + \kappa)} = \mu_1 + \mu_2 > \mu_2,$$

Parámetro	Valor
$C = C_1 = C_2$	100 nF
L	220 mH
R_2	10 k Ω
R_3	2200 Ω
R	1 k Ω
R_0	220 Ω

Tabla 4.3: Elementos pasivos del oscilador.

y se llega a una contradicción evidente con el hecho de que debería estar entre los dos valores extremos. Además, se deduce que para todos los valores de μ menores que μ^* la expresión del miembro izquierdo de (4.111) es positiva, con lo que yendo hacia atrás en nuestro razonamiento se llega a que $\gamma > 0$ en todos los puntos de bifurcación.

El signo negativo de T en todos los puntos de bifurcación se deduce de la desigualdad

$$2 + \kappa = \frac{\kappa^2 + 3\kappa + 2}{1 + \kappa} > \frac{2\kappa + 1}{1 + \kappa} = \mu_1 + \mu_2 > \mu_2,$$

que, junto con la condición $MT - D = 0$, obliga a que también $D < 0$, y la estabilidad orbital asintótica es una consecuencia más del Teorema 4.23. ■

Este resultado mejora apreciablemente algunas de las conclusiones alcanzadas en [Ro00], trabajo del que tomaremos ciertos datos experimentales. Así, usaremos los valores normalizados para resistencias y condensadores que figuran en la tabla 4.3, mientras que el amplificador operacional escogido es el LM324.

Para estos valores, se tiene que

$$\kappa = \frac{RR_oC}{L} = \frac{10^3 \times 220 \times 10^{-7}}{220 \times 10^{-3}} = 0,1,$$

con lo que podemos aplicar la Proposición 4.29. Teniendo en cuenta que

$$\mu = \frac{RR_2}{R_1R_3} = \frac{10^7}{2,2 \times 10^3 \times R_1} = \frac{10^4}{2,2 \times R_1},$$

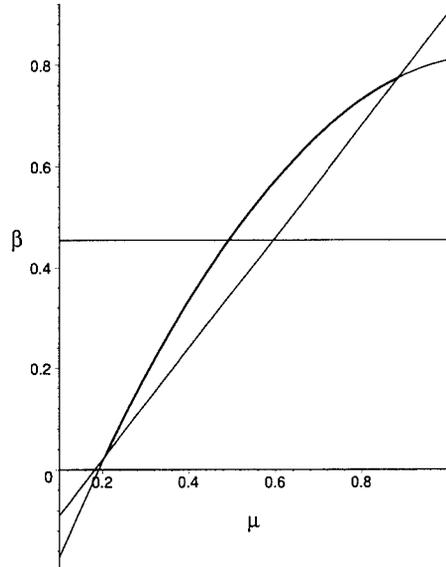


Figura 4.27: Se muestra en el plano (μ, β) el arco de parábola –en trazo grueso que está por encima de la recta inclinada donde $M = 0$ – que predice la Proposición 4.29 para $\kappa = 0,1$ y la línea horizontal para el valor de β que se recorre de izquierda a derecha al disminuir R_1 .

$$\beta = \frac{R^2 C}{L} = \frac{10^6 \times 10^{-7}}{220 \times 10^{-3}} = \frac{1}{2,2} \approx 0,45,$$

la curva que corresponde al lugar geométrico de los puntos de bifurcación aparece en la figura, donde se señala con trazo más grueso el arco de parábola predicho por la proposición anterior.

Para el anterior valor de β la bifurcación se ha de producir para el valor de $\bar{\mu} \approx 0,4924147252$, de acuerdo con (4.109), que corresponde con el valor

$$R_1 = \frac{10^4}{2,2 \times \bar{\mu}} \approx 9231 \Omega.$$

Las oscilaciones aparecen cuando disminuyendo el valor de la resistencia alcanzamos el valor anterior, por lo que un rango de variación de R_1 interesante es

$$7639 \Omega < R_1 < 9231 \Omega.$$

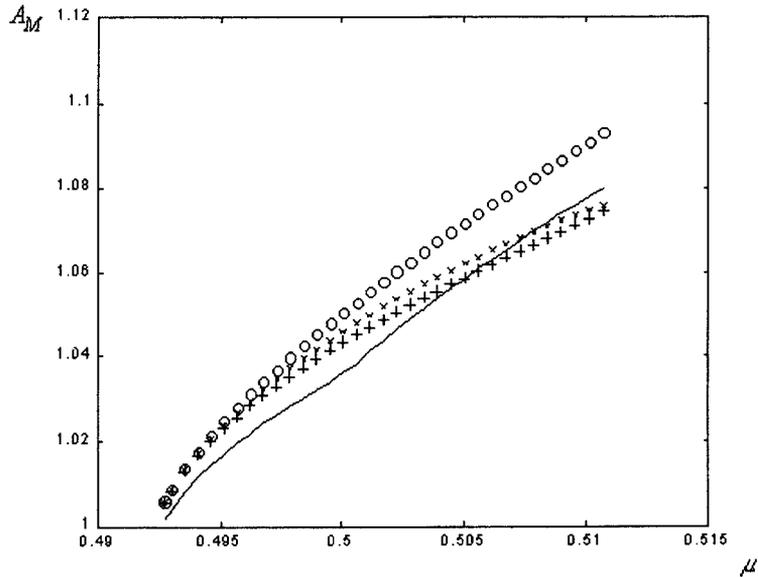


Figura 4.28: Resultados para la amplitud en la primera serie: A_M (—), A_{BA} (o o o), A_{02} (× × ×), A_{024} (+++).

Con el simulador de circuitos electrónicos PSPICE es posible obtener datos experimentales y compararlos con los valores que se obtienen utilizando los resultados teóricos del Teorema 4.23.

Dentro del rango de R_1 indicado anteriormente se han obtenido dos series de datos, la primera con R_1 en el subrango 8900Ω - 9225Ω , es decir, en un entorno muy próximo al punto de bifurcación y la segunda, con R_1 en el subrango 8100Ω - 9225Ω , abarcando un intervalo más amplio para estudiar como afecta la distancia al punto de bifurcación a la bondad de la aproximación. Para ambas series de datos hemos calculado la amplitud y el periodo de las oscilaciones utilizando los desarrollos proporcionados por el teorema (4.23) con los dos primeros términos no nulos y las series con los tres primeros términos no nulos. Se han añadido los valores calculados con el método de la función descriptiva (balance armónico con un sólo término) para una comparación más amplia.

La notación utilizada es la siguiente:

R_1	μ	A_M	A_{BA}	A_{02}	A_{024}	\tilde{P}	\tilde{P}_{BA}	\tilde{P}_{03}	\tilde{P}_{035}
Ω	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8900	0.5107	1.080	1.093	1.076	1.074	5.776	5.695	5.701	5.731
8910	0.5102	1.078	1.091	1.075	1.073	5.795	5.714	5.720	5.749
8920	0.5096	1.076	1.089	1.073	1.071	5.813	5.734	5.739	5.767
8930	0.5090	1.074	1.087	1.072	1.069	5.832	5.753	5.757	5.784
8940	0.5084	1.072	1.085	1.071	1.068	5.851	5.772	5.776	5.802
8950	0.5079	1.070	1.082	1.069	1.066	5.869	5.791	5.794	5.819
8960	0.5073	1.067	1.080	1.068	1.065	5.888	5.810	5.813	5.837
8970	0.5067	1.065	1.078	1.066	1.063	5.906	5.828	5.831	5.854
8980	0.5062	1.063	1.076	1.065	1.062	5.924	5.847	5.849	5.871
8990	0.5056	1.061	1.074	1.063	1.060	5.942	5.865	5.867	5.888
9000	0.5051	1.058	1.072	1.062	1.059	5.960	5.884	5.886	5.905
9010	0.5045	1.056	1.069	1.060	1.057	5.978	5.902	5.904	5.922
9020	0.5039	1.054	1.067	1.059	1.055	5.996	5.920	5.922	5.939
9030	0.5034	1.051	1.065	1.057	1.054	6.013	5.938	5.939	5.956
9040	0.5028	1.049	1.062	1.055	1.052	6.031	5.956	5.957	5.972
9050	0.5023	1.046	1.060	1.053	1.050	6.048	5.974	5.975	5.989
9060	0.5017	1.044	1.058	1.052	1.049	6.066	5.992	5.993	6.006
9070	0.5012	1.041	1.055	1.050	1.047	6.083	6.010	6.010	6.022
9080	0.5006	1.038	1.053	1.048	1.045	6.100	6.027	6.028	6.038
9090	0.5001	1.036	1.050	1.046	1.043	6.117	6.045	6.045	6.055
9100	0.4995	1.034	1.048	1.044	1.041	6.134	6.062	6.063	6.071
9110	0.4990	1.032	1.045	1.042	1.039	6.151	6.080	6.080	6.088
9120	0.4984	1.030	1.043	1.039	1.037	6.168	6.097	6.097	6.104
9130	0.4979	1.028	1.040	1.037	1.035	6.185	6.114	6.114	6.120
9140	0.4973	1.026	1.037	1.035	1.033	6.201	6.131	6.131	6.136
9150	0.4968	1.024	1.034	1.032	1.031	6.218	6.148	6.148	6.152
9160	0.4962	1.022	1.031	1.030	1.028	6.234	6.165	6.165	6.169
9170	0.4957	1.020	1.028	1.027	1.026	6.251	6.182	6.182	6.185
9180	0.4951	1.017	1.025	1.024	1.023	6.267	6.199	6.199	6.201
9190	0.4946	1.015	1.021	1.021	1.020	6.284	6.216	6.216	6.217
9200	0.4941	1.012	1.018	1.017	1.017	6.300	6.232	6.232	6.233
9210	0.4935	1.008	1.014	1.013	1.013	6.316	6.249	6.249	6.249
9220	0.4930	1.004	1.009	1.009	1.009	6.333	6.265	6.265	6.265
9225	0.4927	1.001	1.006	1.006	1.006	6.341	6.273	6.273	6.274

Tabla 4.4: Resultados obtenidos para la primera serie de datos.

R_1	μ	A_M	A_{BA}	A_{02}	A_{024}	\tilde{P}	\tilde{P}_{BA}	\tilde{P}_{03}	\tilde{P}_{035}
Ω	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8100	0.5612	1.212	1.243	1.095	1.743	3.715	3.610	4.061	3.208
8150	0.5577	1.205	1.233	1.098	1.597	3.894	3.789	4.166	3.494
8200	0.5543	1.197	1.224	1.101	1.487	4.063	3.958	4.272	3.750
8250	0.5510	1.189	1.215	1.103	1.403	4.223	4.118	4.378	3.980
8300	0.5476	1.182	1.206	1.105	1.337	4.374	4.270	4.484	4.188
8350	0.5444	1.174	1.197	1.105	1.284	4.519	4.415	4.590	4.377
8400	0.5411	1.166	1.188	1.106	1.243	4.656	4.554	4.695	4.549
8450	0.5379	1.158	1.179	1.105	1.209	4.788	4.687	4.800	4.708
8500	0.5348	1.150	1.170	1.104	1.181	4.914	4.816	4.905	4.853
8550	0.5316	1.142	1.161	1.103	1.159	5.035	4.939	5.009	4.988
8600	0.5285	1.134	1.151	1.101	1.140	5.152	5.058	5.111	5.114
8650	0.5255	1.125	1.142	1.098	1.125	5.265	5.173	5.213	5.231
8700	0.5225	1.117	1.132	1.095	1.112	5.374	5.284	5.313	5.341
8750	0.5195	1.108	1.123	1.091	1.101	5.479	5.391	5.413	5.446
8800	0.5165	1.099	1.113	1.087	1.091	5.581	5.496	5.510	5.545
8850	0.5136	1.090	1.103	1.082	1.082	5.680	5.597	5.607	5.640
8900	0.5107	1.080	1.093	1.076	1.074	5.776	5.695	5.701	5.731
8950	0.5079	1.070	1.082	1.069	1.066	5.869	5.791	5.794	5.819
9000	0.5051	1.059	1.072	1.062	1.059	5.960	5.884	5.886	5.905
9050	0.5023	1.046	1.060	1.053	1.050	6.048	5.974	5.975	5.989
9100	0.4995	1.034	1.048	1.044	1.041	6.134	6.062	6.063	6.071
9150	0.4968	1.024	1.034	1.032	1.031	6.218	6.148	6.148	6.152
9200	0.4941	1.012	1.018	1.017	1.017	6.300	6.232	6.232	6.233
9225	0.4927	1.001	1.006	1.006	1.006	6.341	6.273	6.273	6.274

Tabla 4.5: Resultados obtenidos para la segunda serie de datos.

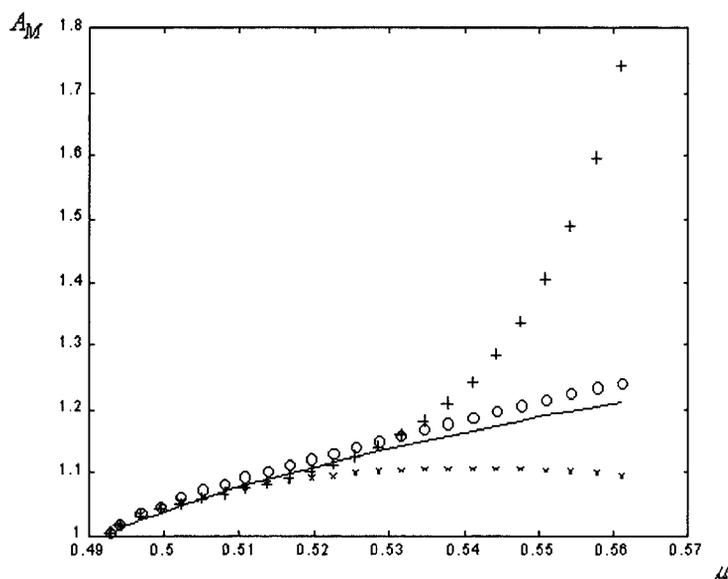


Figura 4.29: Resultados para la amplitud en la segunda serie: A_M (—), A_{BA} (o o o), A_{02} (x x x), A_{024} (+++).

a) Para la amplitud:

a.1) A_M es la amplitud adimensional obtenida a partir de las simulaciones con PSPICE.

a.2) A_{BA} es la amplitud adimensional que obtenemos aplicando las técnicas de balance armónico (método de la función descriptiva).

a.3) A_{02} es la amplitud adimensional que se obtiene utilizando el método de las ecuaciones de cierre con los dos primeros términos no nulos (el término independiente y el de grado dos en la variable $(MT - D)^{1/3}$) del desarrollo en serie de potencias para la amplitud.

a.4) A_{024} es la amplitud adimensional que se obtiene utilizando el método de las ecuaciones de cierre con los tres primeros términos no nulos (el término independiente, el de grado dos y el de grado cuatro) del desarrollo en serie de potencias para la amplitud.

b) Para el periodo:

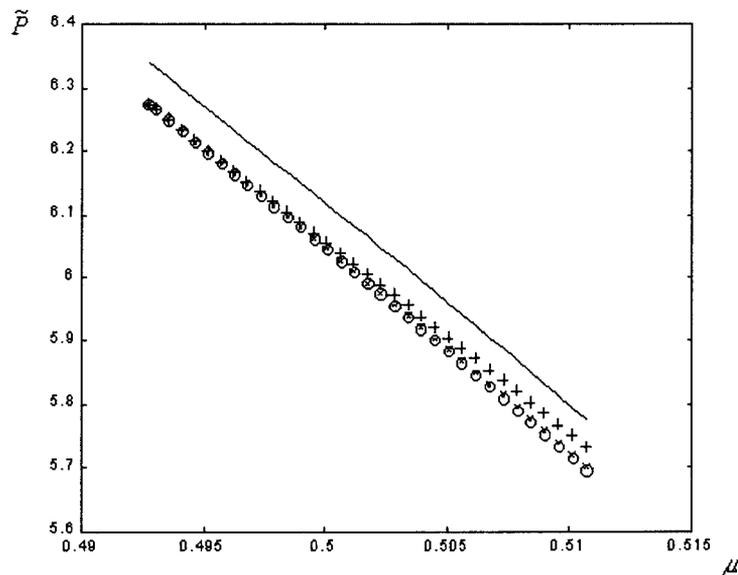


Figura 4.30: Resultados para el periodo en la primera serie: \tilde{P} (—), \tilde{P}_{BA} (o o), \tilde{P}_{03} (× × ×), \tilde{P}_{035} (+++).

b.1) \tilde{P} es el periodo adimensional obtenido a partir de las simulaciones con PSPICE.

b.2) \tilde{P}_{BA} es el periodo adimensional que obtenemos aplicando las técnicas de balance armónico (método de la función descriptiva).

b.3) \tilde{P}_{03} es el periodo adimensional que se obtiene utilizando el método de las ecuaciones de cierre con los dos primeros términos no nulos (el término independiente y el de grado tres en la variable $(MT - D)^{1/3}$) del desarrollo en serie de potencias para el periodo.

b.4) \tilde{P}_{035} es el periodo adimensional que se obtiene utilizando el método de las ecuaciones de cierre con los tres primeros términos no nulos (el término independiente, el de grado tres y el de grado cinco) del desarrollo en serie de potencias para el periodo.

Para la primera serie de datos obtenemos los resultados que muestra la Tabla 4.4.

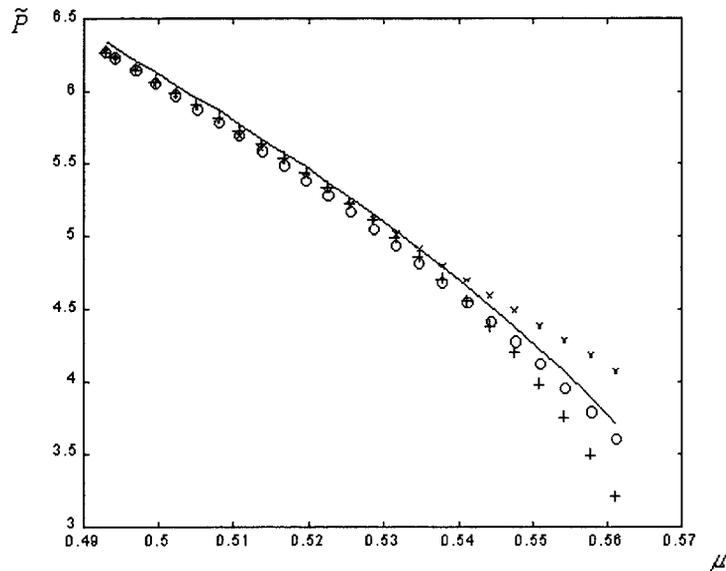


Figura 4.31: Resultados para el periodo en la segunda serie: \tilde{P} (—), \tilde{P}_{BA} (o o o), \tilde{P}_{03} (× × ×), \tilde{P}_{035} (+++).

Los resultados correspondientes a la segunda serie de datos (que como hemos visto cubre un rango más amplio a partir del punto de bifurcación) quedan reflejados en la Tabla 4.5.

Para una mejor comparación se han colocado superpuestas la evolución de la amplitud adimensional obtenida por los diferentes métodos (A_M , A_{BA} , A_{02} y A_{024}) frente al parámetro μ , en la Figura 4.28 para la primera serie de datos y en la Figura 4.29 para la segunda.

En las Figuras 4.30 y 4.31 se muestra la evolución del periodo adimensional obtenido por los diferentes métodos (\tilde{P} , \tilde{P}_{BA} , \tilde{P}_{03} y \tilde{P}_{035}) frente al parámetro μ para la primera y segunda series de datos respectivamente.

En las gráficas, se comprueba que las aproximaciones proporcionadas por el truncamiento de las series provenientes del Teorema (4.23) son excelentes cerca del punto de bifurcación, empeorando a medida que nos separamos del mismo. En contraposición, el método de balance armónico consigue una aproximación

local algo más pobre, pero aceptable en todo el rango estudiado debido al carácter global del mismo.

4.3. Caso tridimensional simétrico con tres zonas no observable

Estudiamos aquí el caso de pérdida de observabilidad mínima, es decir, cuando el rango de la matriz de observabilidad es igual a 2. El caso en que $rg(\mathcal{O}) = 1$ no presenta interés, al no tener el sistema ciclos límite, como se demuestra en la Proposición 2.12.

Aplicando la Proposición 2.11 podemos escribir un sistema S3CPL₃ no observable con $rg(\mathcal{O}) = 2$ en la forma siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} t_2 & -1 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} T_2 - t_2 \\ D_2 - d_2 \\ C_2 - c_2 \end{bmatrix} \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}). \quad (4.112)$$

El sistema (4.112) contiene al subsistema continuo bidimensional lineal a trozos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= t_2 x - y + (T_2 - t_2) \text{sat}(x), \\ \dot{y} &= d_2 x + (D_2 - d_2) \text{sat}(x), \end{aligned} \quad (4.113)$$

que evoluciona de forma independiente y además es observable (ver Proposición 2.8). Por tanto, se le puede aplicar el Teorema 4.15 para garantizar la existencia de la bifurcación foco-centro-ciclo límite bajo las correspondientes hipótesis.

La existencia de ciclo límite en el sistema tridimensional (4.112) es establecida en el siguiente Teorema enunciado en [Ca02] para sistemas lineales a trozos bizonales.

Teorema 4.30 *Dado el sistema (4.112) con $\lambda_2 \neq 0$, se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) *Si el sistema bidimensional (4.113) posee un ciclo límite estable y $\lambda_2 < 0$, (respectivamente $\lambda_2 > 0$), entonces el sistema tridimensional (4.112) posee un ciclo límite estable (respectivamente inestable).*
- (b) *Si el sistema bidimensional (4.113) posee un ciclo límite inestable, entonces el sistema tridimensional (4.112) posee un ciclo límite inestable.*

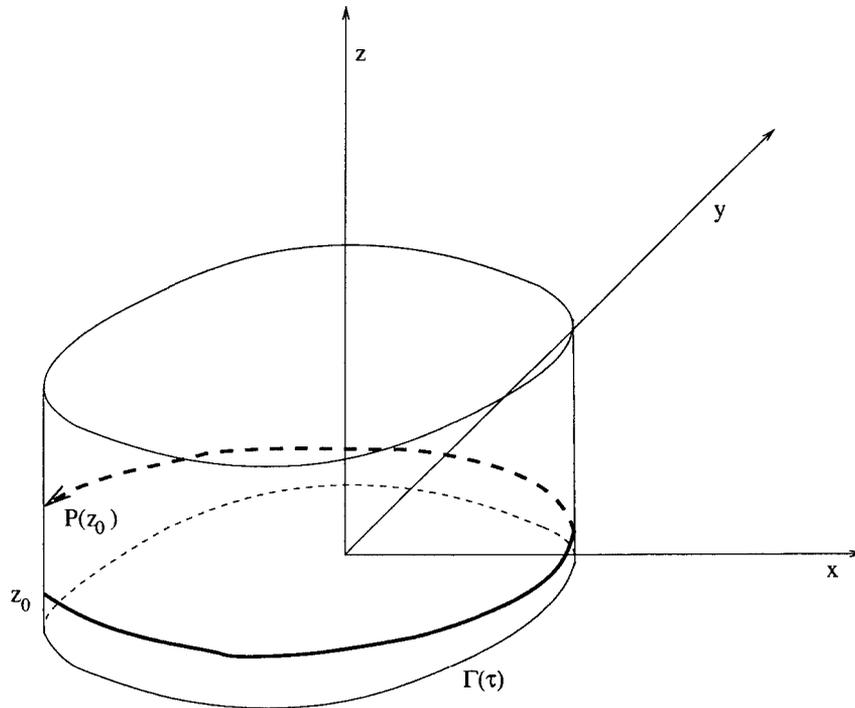


Figura 4.32: Cilindro invariante del sistema tridimensional (4.112)

Demostración. Si el sistema (4.113) posee un ciclo límite $\Gamma(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, con periodo T , entonces el cilindro ortogonal al plano $z = 0$ generado por $\Gamma(\tau)$ es una superficie invariante del sistema tridimensional (4.112). Ver Figura 4.32.

De esta manera, el sistema no observable (4.112) poseerá ciclos límite cuando la ecuación lineal unidimensional no autónoma

$$\dot{z}(\tau) = c_2 x(\tau) + \lambda_2 z(\tau) + (C_2 - c_2) \text{sat}(x(\tau)), \quad (4.114)$$

posea soluciones periódicas aisladas.

Es decir, el sistema tridimensional (4.112) sólo puede tener órbitas periódicas sobre el cilindro invariante y el periodo de todas ellas es T .

Para determinar la existencia y estabilidad de ciclos límite de la ecuación (4.114), construimos la aplicación de Poincaré P asociada. Si $z(\tau, z_0)$ denota la solución de la ecuación diferencial (4.114) con condición inicial $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$,

definimos la aplicación de Poincaré P mediante

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z_0 &\longrightarrow P(z_0) = z(T, z_0). \end{aligned}$$

En la Figura 4.32 se visualiza el significado geométrico de la aplicación de Poincaré P sobre el cilindro invariante del sistema (4.112). Un cálculo directo nos permite escribir

$$P(z_0) = e^{\lambda_2 T} z_0 + e^{\lambda_2 T} \int_0^T e^{-\lambda_2 \tau} [c_2 x(\tau) + (C_2 - c_2) \text{sat}(x(\tau))] d\tau.$$

En el caso $\lambda_2 \neq 0$, es obvio que la aplicación de Poincaré P tiene un único punto fijo

$$\bar{z}_0 = \frac{e^{\lambda_2 T} \int_0^T e^{-\lambda_2 \tau} [c_2 x(\tau) + (C_2 - c_2) \text{sat}(x(\tau))] d\tau}{1 - e^{\lambda_2 T}},$$

correspondiente al único ciclo límite de (4.112) existente sobre el cilindro invariante. Además, al ser $P'(z_0) = e^{\lambda_2 T}$ para cualquier z_0 , y teniendo en cuenta la hipótesis de estabilidad correspondiente del ciclo límite del sistema bidimensional, resulta que la única órbita periódica de la ecuación unidimensional (4.114) es orbitalmente asintóticamente estable si $\lambda_2 < 0$ e inestable si $\lambda_2 > 0$. De donde, las conclusiones sobre la estabilidad del ciclo límite existente en el sistema tridimensional (4.112) son inmediatas. ■

Si se verifica $\lambda_2 = 0$ y el sistema bidimensional (4.113) tiene una órbita periódica, entonces el sistema tridimensional (4.112) posee un cilindro invariante y la aplicación de Poincaré es

$$P(z_0) = z_0 + \int_0^T [c_2 x(\tau) + (C_2 - c_2) \text{sat}(x(\tau))] d\tau.$$

Si la integral

$$\int_0^T [c_2 x(\tau) + (C_2 - c_2) \text{sat}(x(\tau))] d\tau,$$

se anula, cualquier z_0 es punto fijo de la aplicación de Poincaré P y el sistema (4.112) posee un continuo de órbitas periódicas sobre el cilindro invariante. Si la citada integral no se anula, la aplicación de Poincaré P no tiene ningún punto fijo y el sistema (4.112) no posee ninguna órbita periódica.

Capítulo 5

La Bifurcación de Hopf en el infinito

En este capítulo, extenderemos los métodos descritos en el Capítulo 3 para conseguir analizar bifurcaciones de órbitas periódicas en el punto del infinito. Hablando sin demasiada precisión, se trata de ver si para algún valor de los parámetros una órbita periódica aparece (o desaparece) como si viniera del (o se fuera al) infinito. En ciertos casos, el fenómeno corresponde a la existencia de una órbita periódica en el infinito que para el valor crítico de los parámetros pierde su hiperbolicidad y da lugar a un ciclo límite de gran amplitud. Se dice entonces que el sistema ha experimentado una bifurcación de Hopf en el infinito. Como se verá, la bifurcación aparece asociada al cruce de un par de autovalores complejos conjugados de la matriz de las zonas externas a través del eje imaginario del plano complejo.

Trabajaremos en dimensiones $n = 2$ y $n = 3$ y determinaremos la amplitud, periodo y estabilidad del ciclo límite que eventualmente llega a bifurcar a partir de dichas órbitas periódicas no hiperbólicas. Estudiaremos primero el caso plano, y posteriormente el caso tridimensional, del que también consideramos una posible degeneración en la bifurcación. Una vez más, se comprueba que el método diseñado es susceptible de ser utilizado en problemas de dimensión arbitraria, si bien la complejidad de los cálculos aumenta lógicamente con la dimensión.

Si excluimos los sistemas planos (ver sección siguiente), el estudio de la

bifurcación de Hopf en el infinito para sistemas no polinomiales ha sido abordado, entre otras referencias, en [Gl89], que adapta las ideas de la bifurcación de Hopf del origen de [KK87], en [He91] y últimamente en [DKR01]. Parece que los trabajos anteriores tienen su origen en [Yu82], citado en [KKY95], y todos tienen en común el recurso a técnicas de punto fijo en teoría de operadores. El resultado que aporta más información cualitativa es el que aparece en [DKR01], donde los autores obtienen la existencia de la bifurcación de Hopf en el infinito y la estabilidad del ciclo límite que bifurca para cualquier dimensión. Nuestra técnica proporciona condiciones equivalentes a las suyas, para dimensión $n = 2$ y $n = 3$, y además estimaciones cuantitativas del período, amplitud y logaritmos de los multiplicadores característicos del ciclo límite que bifurca, y las posibles degeneraciones de la bifurcación.

5.1. Caso plano

El caso más simple de bifurcación de Hopf en el infinito corresponde al caso de dimensión 2, cuando en el infinito se tiene una órbita periódica no hiperbólica. Entendemos por punto del infinito el ecuador de la esfera que resulta de la compactificación de Poincaré de nuestros sistemas planos lineales a trozos. El ecuador de dicha esfera es siempre un conjunto invariante para el flujo definido sobre la esfera mediante la compactificación, aunque no en todos los casos resulta ser una órbita periódica. Nos interesará el caso en que se trate de una órbita periódica que para ciertos valores de los parámetros pierde su hiperbolicidad.

Partimos del sistema observable escrito en forma de Liénard,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(x_1), \quad (5.1)$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{b} = (T - t, D - d)^T \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$A = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

con

$$\text{sat}(x_1) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_1 < -1, \\ x_1, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ 1, & \text{si } x_1 > 1. \end{cases}$$

Como ya se ha dicho, el plano \mathbb{R}^2 queda dividido en tres zonas donde el sistema es lineal, separadas por las fronteras $\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\}$ y $\Sigma_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -1\}$. Llamaremos zona L a la región de \mathbb{R}^2 donde se verifique $x_1 < -1$, zona C donde $|x_1| \leq 1$ y zona R cuando $x_1 > 1$.

La bifurcación de Hopf del infinito para este sistema ya ha sido estudiada en [LP97] y [LP99], donde los autores no recurrieron a la compactificación de Poincaré, sino que usaron otras técnicas. Volveremos a estudiar aquí este problema para poner de manifiesto la potencia del método de las ecuaciones de cierre, que nos permitirá calcular aproximaciones de orden más alto que los dados en las referencias anteriores para amplitud y periodo, así como obtener el desarrollo del logaritmo del multiplicador característico de la órbita periódica e información sobre los puntos de corte con las fronteras Σ_1 y Σ_{-1} .

Como es obvio, los resultados de la Sección 4.1, desde la Proposición 4.2 hasta la 4.7, son de aplicación en este caso. Con objeto de que la memoria sea autocontenida, a continuación, transcribimos dos resultados ya conocidos.

Lema 5.1 [LP97]. *El sistema (5.1) tiene una órbita periódica en el infinito si y sólo si se verifica la condición*

$$4d - t^2 > 0.$$

Hacemos notar que, si bien los autores enunciaron este lema para un sistema expresado en forma canónica de observación, con el cambio de variables $x = -Y$, $y = X$ podemos transformar nuestro sistema (5.1) en dicha forma.

Teorema 5.2 [LP97]. *Para los sistemas (5.1) que tengan una órbita periódica en el infinito las siguientes afirmaciones son válidas:*

- (a) *Si $T \neq 0$ entonces para $t = 0$ bifurca un único ciclo límite de la órbita periódica del infinito.*

- (b) Si $T < 0$ entonces para $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño, el ciclo límite que bifurca existe para $t \in (0, \varepsilon)$ y es inestable, mientras que no existe para $t \in (-\varepsilon, 0)$.
- (c) Si $T > 0$ entonces para $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño, el ciclo límite que bifurca existe para $t \in (-\varepsilon, 0)$ y es orbitalmente asintóticamente estable, mientras que no existe para $t \in (0, \varepsilon)$.
- (d) El ciclo límite que bifurca está cerca de la elipse cuyo semieje 'x' tiene longitud

$$a = \frac{Td - tD}{d} \left(\frac{1 + e^{-\pi t/\sqrt{4d-t^2}}}{1 - e^{\pi t/\sqrt{4d-t^2}}} \right),$$

mientras que la del semieje 'y' es $b = a/\sqrt{d}$.

- (e) Si $t = 0$ entonces para $t = 0$ no bifurca ningún ciclo límite de la órbita periódica del infinito.
- (f) Para $t \neq 0$ no bifurca ningún ciclo límite de la órbita periódica del infinito.
- (g) El periodo del ciclo límite que bifurca es, en primera aproximación,

$$P = \frac{4\pi}{\sqrt{4d-t^2}} + \frac{2(D-d) \left(e^{\pi t/\sqrt{4d-t^2}} - 1 \right)}{Td - tD}$$

Dejamos constancia de que para completar la información del Teorema 2 de [LP97], aquí se ha añadido el apartado (g) que apareció en [PR99] para sistemas sin simetría, particularizándolo para sistemas simétricos.

Dado que en lo que sigue vamos a trabajar con $d > 0$, el lema siguiente nos permite reescalar, lo que equivale a trabajar suponiendo $d = 1$, y luego deshacer el cambio. Usaremos en adelante el sistema (5.2) y prescindimos de las tildes para abreviar la notación.

Lema 5.3 Para el sistema (5.1), con $d > 0$, el cambio

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_2}{\sqrt{d}}, \quad \tilde{\tau} = \sqrt{d}\tau,$$

pone el sistema en la forma normalizada

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\tilde{\tau}} \\ \frac{dx_2}{d\tilde{\tau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{T} - \tilde{t} \\ \hat{D} - 1 \end{bmatrix} \text{sat}(x_1) \quad (5.2)$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{d}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{d}}, \quad \hat{D} = \frac{D}{d},$$

Siguiendo los razonamientos del Capítulo 3, obtenemos las ecuaciones de cierre del sistema (5.2), que son las siguientes:

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.3)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} t-T \\ 1-D \end{bmatrix} ds - \begin{bmatrix} -1 \\ -x_2^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

donde

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones de cierre (5.3)-(5.4) forman un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas, que son τ_C , τ_L , x_2^0 , x_2^1 y t , siendo este último el parámetro de bifurcación. Nos interesa estudiar las soluciones de (5.3)-(5.4) que corresponden a valores grandes de x_2^1 y x_2^0 . Con el cambio de variable

$$r = \frac{1}{x_2^0}, \quad u = \frac{x_2^1}{x_2^0},$$

dichas soluciones corresponden a valores pequeños de r y a valores próximos a la unidad para u . En las nuevas variables, el sistema queda en la forma

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ u/r \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -1 \\ u/r \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} t-T \\ 1-D \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Un sistema equivalente a (5.5)-(5.6) para $r > 0$, que además admite soluciones para $r = 0$, es el que resulta de multiplicar todas las ecuaciones por r

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -r \\ u \end{bmatrix} + r \int_0^{\tau_L} e^{A_L(\tau_L-s)} \begin{bmatrix} t-T \\ 1-D \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Expresaremos las ecuaciones de cierre (5.7)-(5.8) de forma compacta como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

siendo

$$\mathbf{z} = (\tau_C, \tau_L, r, u, t).$$

Observamos que el sistema (5.9) presenta la solución

$$\bar{\mathbf{z}} = (0, \pi, 0, 1, 0),$$

que como demostraremos es además un punto no singular. La rama solución correspondiente con $r > 0$ y pequeño representa órbitas periódicas del sistema original.

Lema 5.4 *Para las ecuaciones de cierre (5.9), el punto $\bar{\mathbf{z}}$ es un punto no singular. Cuando $T \neq 0$, la aplicación del Teorema de la Función Implícita asegura la existencia y unicidad, en un entorno \mathcal{N} del punto $\bar{\mathbf{z}}$, de cuatro funciones analíticas $\varphi_i : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, definidas en un entorno apropiado \mathcal{N}_0 de $t = 0$, tales que*

$$\mathbf{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), t) = \mathbf{0},$$

y de manera que toda solución \mathbf{z} de (5.9) en \mathcal{N} con $\tau_L \in \mathcal{N}_0$ admite la parametrización

$$\mathbf{z} = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), t),$$

y que presentan los siguientes desarrollos en serie de Taylor en $t = 0$:

$$\tau_C = -\frac{\pi t}{2T} - \frac{\pi D}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{\pi}{96} ((3\pi^2 + 48) D^2 - 2\pi^2 D + 6T^2) \left(\frac{t}{T}\right)^3$$

$$-\frac{\pi D}{96} ((10\pi^2 + 48) D^2 - 7\pi^2 D + 6T^2) \left(\frac{t}{T}\right)^4 + O(t^5), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_L = & \pi + \frac{\pi D}{2} \frac{t}{T} + \frac{\pi}{8} (4D^2 + T^2) \left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{\pi D}{96} ((2\pi^2 + 48) D^2 - \pi^2 D) \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \\ & + \frac{\pi D}{96} (2\pi^2 + 6) T^2 \left(\frac{t}{T}\right)^3 + O(t^4), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} r = & -\frac{\pi}{4} \frac{t}{T} - \frac{\pi D}{4} \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{\pi D}{192} ((3\pi^2 + 48) D^2 - \pi^2 D + (6 - \pi^2) T^2) \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \\ & + O(t^4), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$u = 1 - \frac{\pi^3 D}{96} \frac{t^3}{T^2} - \frac{\pi^3 D^2}{32} \frac{t^4}{T^3} + O(t^5), \quad (5.13)$$

Demostración. La matriz jacobiana

$$D_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}) \Big|_{\bar{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2T & -1 & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

tiene rango 4, y la submatriz cuadrada correspondiente a las columnas de τ_C , τ_L , r y u tiene determinante $-2T \neq 0$, y la aplicación del Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas [CH82] sobre (5.9) se realiza de manera directa. Por tanto, tenemos asegurada la existencia de desarrollos en función de t para τ_C , τ_L , r y u centrados en $\bar{\mathbf{z}}$. Utilizando de nuevo la técnica de coeficientes indeterminados, se llega a las series del enunciado. ■

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, donde hacemos jugar a t el papel de parámetro de bifurcación.

Teorema 5.5 *Consideremos el sistema (5.1) con $d > 0$ y $T \neq 0$. Para $t = 0$, y a partir de la órbita periódica del punto del infinito existente para $4d - t^2 > 0$, bifurca un ciclo límite simétrico respecto del origen, que existe para $tT < 0$ con t suficientemente pequeño, y que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} .*

Cuando $T > 0$, el ciclo límite que bifurca aparece para $t < 0$ y es orbitalmente asintóticamente estable, mientras que cuando $T < 0$, el ciclo límite que bifurca aparece para $t > 0$ y es inestable.

El periodo P y el logaritmo del multiplicador característico ρ de la oscilación periódica son funciones analíticas de la variable t en 0. Además los primeros coeficientes de las series

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} P_j t^j,$$

$$\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j t^j.$$

son

$$P_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{d}}, \quad P_1 = \frac{\pi(D-d)}{d^3 T},$$

$$P_2 = \frac{\pi}{4d^{5/2} T^2} (4D(D-d) + dT^2),$$

$$P_3 = \frac{\pi}{24d^{7/2} T^3} [3(D-d)(8D^2 + dT^2) + D((D-d)^2 + dT^2)],$$

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \frac{\pi}{\sqrt{d}}, \quad \rho_2 = 0,$$

$$\rho_3 = \frac{\pi}{48d^{5/2} T^2} (2\pi^2 dD - 3\pi^2 D^2 + 6dT^2),$$

$$\rho_4 = \frac{\pi^3 D^2}{24d^{7/2} T^3} (3d - 4D).$$

La amplitud a (medida como el máximo en $|x_2|$) posee el siguiente desarrollo en serie en $t = 0$

$$a = -\frac{4\sqrt{d}T}{\pi} t^{-1} + \frac{4D}{\pi\sqrt{d}} + \frac{6\pi^2 D^2 - 5\pi^2 dD + (12 - 2\pi^2) dT^2}{24\pi d^{3/2}} t +$$

$$+ \frac{(8\pi^2 D^2 - 7\pi^2 dD + (2\pi^2 - 12) dT^2) D}{24\pi d^{5/2} T^2} t^2 + O(t^3).$$

Demostración. La existencia de la bifurcación ha sido demostrada en el Teorema 2 de [LP97], donde también se caracteriza la existencia del ciclo límite bifurcante y su estabilidad.

Veamos que el ciclo límite es transversal a las fronteras Σ_1 y Σ_{-1} , para ello estudiaremos la trayectoria del sistema (5.2) correspondiente a la solución de las ecuaciones de cierre (5.9) dada por las series del Lema 5.4. Comenzamos el

razonamiento estudiando la trayectoria que pasa por $(1, x_2^0)^T = (1, 1/r)^T \in \Sigma_1$, tomando en este punto el origen de tiempos de la órbita de la zona C . Para dicho punto se tiene

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0)} = Tx_1(0) - x_2(0) = T - x_2^0 = T - 1/r,$$

y utilizando el desarrollo (5.12) de r , obtenemos que para $t \neq 0$ y suficientemente pequeño, se cumple

$$\dot{x}_1|_{(1, x_2^0)} = T + \frac{4T}{\pi t} + O(1) < 0,$$

de manera que dicha trayectoria entra en la zona C de forma transversal a Σ_1 .

Procedemos con un razonamiento análogo para la trayectoria que parte de $(-1, x_2^1)^T = (-r, u)^T \in \Sigma_{-1}$, considerando en este punto el origen de tiempos de la zona L . Se tiene

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1)} = tx_1(0) - x_2(0) - T + t = -x_2^1 - T = -u/r - T,$$

y utilizando los desarrollos (5.13) de u y (5.12) de r , obtenemos para $t \neq 0$ y suficientemente pequeño que

$$\dot{x}_1|_{(-1, x_2^1)} = -[1 + O(t^3)] / \left[-\frac{\pi t}{4T} + O(t^2) \right] - T = \frac{4T}{\pi t} + O(1) < 0,$$

de manera que la trayectoria entra en la zona L y de forma transversal a Σ_{-1} .

Debido a la simetría del problema la repetición del razonamiento para las trayectorias que parten de $(-1, -x_2^0)^T \in \Sigma_{-1}$ y de $(1, -x_2^1)^T \in \Sigma_1$ asegura que éstas entran en las zonas C y R respectivamente.

Según la observación 4.14 se tiene que

$$\rho = 2\tau_C T + 2\tau_L t,$$

y utilizando las expresiones (5.10) y (5.11), vemos que el logaritmo del multiplicador característico del ciclo límite presenta el siguiente desarrollo en $t = 0$

$$\rho = 2t\tau_L + 2T\tau_C = 2t \left(\pi + \frac{\pi D}{2} \frac{t}{T} + \frac{\pi}{8} (4D^2 + T^2) \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2t \left(\frac{\pi D}{96} ((2\pi^2 + 48) D^2 - \pi^2 D + (2\pi^2 + 6) T^2) \left(\frac{t}{T} \right)^3 + O(t^4) \right) + \\
& + 2T \left(-\frac{\pi t}{2T} - \frac{\pi D}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - \frac{\pi}{96} ((3\pi^2 + 48) D^2 - 2\pi^2 D + 6T^2) \left(\frac{t}{T} \right)^3 - \right. \\
& \left. - \frac{\pi D}{96} ((10\pi^2 + 48) D^2 - 7\pi^2 D + 6T^2) \left(\frac{t}{T} \right)^4 + O(t^5) \right) \\
& = \pi t + \frac{\pi (-3\pi^2 D^2 + 2\pi^2 D + 6T^2)}{48T^2} t^3 + \frac{\pi^3 D^2 (-4D + 3)}{24T^3} t^4 + O(t^5).
\end{aligned}$$

Deshaciendo ahora el cambio del Lema 5.3, obtenemos el resultado del enunciado.

Debido a la simetría, el período de la órbita periódica es igual a $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Sustituyendo las expresiones (5.10) y (5.11) en la fórmula anterior, y deshaciendo el cambio del Lema (5.3) obtenemos la serie para el período que figura en el enunciado del Teorema. Además, el Lema 5.4 nos asegura la analiticidad de P y de ρ , al obtener ambas mediante composición de funciones analíticas.

El máximo valor de $|x_2|$ correspondiente a la amplitud a de la órbita periódica se alcanzará en un tiempo τ^* en la zona C del plano. Se cumplirá

$$\dot{x}_2(\tau^*) = Dx_1(\tau^*) = D \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{Ac\tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r(t) \end{bmatrix} = 0,$$

donde $0 < \tau^* \leq \tau_C$. Multiplicando por $r(t) \neq 0$, podemos expresar la ecuación anterior como

$$G(t, \tau^*) = D \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{Ac\tau^*} \begin{bmatrix} r(t) \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.14)$$

En la ecuación (5.14) las variables a considerar son τ^* y t , y dicha ecuación se verifica para $\tau^* = 0$ y $t = 0$. Desarrollando $G(t, \tau^*)$ en serie de Taylor en $t = 0$ y $\tau^* = 0$, obtenemos

$$G(t, \tau^*) = -\tau^* - \frac{\pi t}{4T} - \frac{\pi D}{4T^2} t^2 - \frac{\pi}{4} t\tau^* - \frac{T}{2} \tau^{*2} + O(\tau_L, \tau^*)^3, \quad (5.15)$$

y por tanto, al ser $G_{\tau^*}(0, 0) = -1$, la ecuación $G(\tau_L, \tau^*) = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(0, 0)$, una función $\psi(t)$, tal que $G(t, \psi(t)) = 0$.

Utilizando coeficientes indeterminados para el desarrollo de $\psi(t)$, a partir de (5.15) obtenemos

$$\tau^* = -\frac{\pi}{4T}t + \frac{\pi}{32} \frac{\pi T - 8D}{T^2} t^2 + \frac{\pi}{192} \frac{12\pi DT + 2\pi^2 D - (48 + 3\pi^2)D^2 - 6T^2}{T^3} t^3 + O(t^4).$$

Sustituyendo la serie anterior junto con (5.12) en la siguiente expresión de la amplitud

$$a = x_2(\tau^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_C \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r(t) \end{bmatrix},$$

obtenemos

$$a = -\frac{4T}{\pi} t^{-1} + \frac{4D}{\pi} + \frac{6\pi^2 D^2 - 5\pi^2 D + (12 - 2\pi^2) T^2}{24\pi} t + \frac{(8\pi^2 D^2 - 7\pi^2 D + (2\pi^2 - 12) T^2) D}{24\pi T^2} t^2 + O(t^3),$$

donde utilizando ahora la serie (4.20) y deshaciendo el cambio del Lema (4.8) obtenemos el resultado del enunciado. ■

Para poder comparar los resultados del Teorema 5.5 con las aproximaciones proporcionadas en el Teorema 5.2, calculamos los desarrollos en $t = 0$, de las expresiones del período y amplitud que aparecen en dicho resultado

$$P = 2 \frac{\pi}{\sqrt{d}} + (D - d) \frac{\pi}{d^{3/2} T} t + \frac{\pi}{4d^{5/2} T^2} [(4D + \pi d^{1/2} T) (D - d) + dT^2] t^2 + O(t^3),$$

$$a = -4 \frac{T}{\pi} \sqrt{d} t^{-1} + 2 \left(T + \frac{2D}{\pi \sqrt{d}} \right) + \frac{1}{12\pi d} [(6 - 7\pi^2) \sqrt{d} T - 24D\pi] t + O(t^2),$$

Se comprueba que en la expresión del período coinciden los dos primeros términos, mientras que en la de la amplitud sólo coincide el primero.

Como se puede observar, el Teorema 5.5 proporciona más información cuantitativa del ciclo límite que bifurca que la del Teorema 5.2.

5.2. Caso tridimensional

En esta sección, se aborda el análisis de ciclos límites simétricos respecto del origen, asociados a la bifurcación de una órbita periódica del infinito. Llamamos órbita periódica del infinito a toda órbita periódica situada sobre la superficie de la correspondiente esfera S^2 que resulta de la compactificación de Poincaré del espacio de fases. Como los sistemas lineales no pueden tener ciclos límites, todo ciclo límite simétrico respecto del origen que aparezca debido a una bifurcación debe ocupar las tres zonas del espacio de fases. Así pues, consideramos de nuevo la situación básica descrita en la Sección 4.2, es decir,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_L \mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{si } x_1 < -1, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A_C \mathbf{x}, & \text{si } |x_1| \leq 1, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A_L \mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{si } x_1 > 1,\end{aligned}\tag{5.16}$$

donde

$$A_L = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T - t \\ M - m \\ D - d \end{bmatrix},$$

y trabajaremos con las ecuaciones de cierre correspondientes a órbitas periódicas simétricas respecto del origen que ocupan las tres zonas. La órbita periódica que buscamos presentará intersecciones \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 , con los planos Σ_1 y Σ_{-1} , t tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en las zonas L y R . Debido a la simetría se cumple $\mathbf{x}^0 = -\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3 = -\mathbf{x}^1$.

Utilizaremos la misma nomenclatura que en la Sección 4.2. Con la hipótesis $d \neq 0$, las ecuaciones de cierre (4.40)-(4.41) se convierten en

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{5.17}$$

$$e^{A_L \tau_L} \left(\begin{bmatrix} -D/d \\ x_2^1 - tD/d + T \\ x_3^1 - mD/d + M \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} D/d \\ x_2^0 + tD/d - T \\ x_3^0 + mD/d - M \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{5.18}$$

Para el estudio de órbitas periódicas de gran tamaño, que provengan de una órbita periódica del infinito del sistema anterior, efectuamos el cambio de variables (para dichas órbitas podemos asumir que $x_2^0 > 0$)

$$r = \frac{1}{x_2^0}, \quad u = \frac{x_2^1}{x_2^0}, \quad v_0 = \frac{x_3^0}{x_2^0}, \quad v_1 = \frac{x_3^1}{x_2^0}, \quad (5.19)$$

con lo que obtenemos

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r \\ v_0/r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ u/r \\ v_1/r \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -rD/d \\ u/r + T - tD/d \\ v_1/r + M - mD/d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D/d \\ 1/r - T + tD/d \\ v_0/r - M + mD/d \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando ahora todas las ecuaciones por $r > 0$, después de simplificar queda finalmente

$$e^{A_C \tau_C} \begin{bmatrix} r \\ 1 \\ v_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r \\ u \\ v_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} -rD/d \\ u + rT - rtD/d \\ v_1 + rM - rmD/d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rD/d \\ 1 - rT + rtD/d \\ v_0 - rM + rmD/d \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

A partir de las ecuaciones de cierre anteriores, estudiamos primero ciertas soluciones correspondientes a soluciones periódicas en el infinito ($r = 0$) de las que pueden bifurcar órbitas periódicas.

Lema 5.6 *La única solución del sistema (5.20)-(5.21) con $\tau_C = 0$, $d \neq 0$ y $\tau_L > 0$ es la formada por $r = 0$, $u = 1$, $v_0 = v_1 = t$, $d = mt$, $\tau_C = 0$ y $\tau_L = \pi/\sqrt{m}$, con $m > 0$.*

Demostración. Al hacer $\tau_C = 0$ la ecuación (5.20) es equivalente a

$$2r = 0,$$

$$\begin{aligned} 1 - u &= 0, \\ v_0 - v_1 &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $r = 0$, $u = 1$ y $v_1 = v_0$. Sustituyendo estos valores en (5.21) obtenemos

$$e^{A_L \tau_L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

lo que nos dice que la matriz $\exp(A_L \tau_L)$ tiene como autovector a $(0, 1, v_0)^T$ con el autovalor correspondiente -1 . Si λ_L es el autovalor de A_L que corresponde con el autovalor -1 de la exponencial, y dado que los autovalores de la exponencial de una matriz son iguales a la exponencial de los autovalores de dicha matriz, se cumplirá que

$$e^{\lambda_L \tau_L} = -1,$$

de donde $\lambda_L \tau_L = \pi i$. Por tanto, para los valores $\tau_C = 0$, $r = 0$, $u = 1$ y $v_1 = v_0$, la matriz A_L tiene una pareja de autovalores imaginarios puros que denotaremos por $\pm \omega i$. Esto hace que el tercer autovalor sea real, en adelante λ , y que se verifiquen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} t &= \lambda, \\ m &= \omega^2, \\ d &= \lambda \omega^2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Las igualdades anteriores equivalen a la condición $d = mt$ con $m = \omega^2 > 0$, y por tanto se tiene $\tau_L = \pi/\omega = \pi/\sqrt{m}$.

Sustituyendo estos valores en la exponencial de A_L , ésta se convierte en

$$e^{A_L \tau_L} = \begin{bmatrix} \frac{Wd^2 - m^3}{m^3 + d^2} & -\frac{md(W+1)}{m^3 + d^2} & \frac{m^2(W+1)}{m^3 + d^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{md^2(W+1)}{m^3 + d^2} & -\frac{m^2d(W+1)}{m^3 + d^2} & \frac{Wm^3 - d^2}{m^3 + d^2} \end{bmatrix},$$

donde $W = e^{\pi d/m^{3/2}}$, y utilizando estos valores, la primera componente de la ecuación (5.21) se convierte en

$$-\frac{md(W+1)}{m^3+d^2} + \frac{m^2(W+1)}{m^3+d^2}v_0 = 0,$$

lo que implica $v_0 = d/m$, quedando demostrado el enunciado. ■

Si a partir de la solución anterior variamos τ_C en un entorno de 0, con $\tau_C > 0$, $\tau_L > 0$ y $r > 0$, los autovalores de A_L serán un cierto λ real y cierta pareja de complejos conjugados $\sigma \pm \omega i$, y se cumplirá que

$$\begin{aligned} t &= 2\sigma + \lambda, \\ m &= 2\sigma\lambda + \sigma^2 + \omega^2, \\ d &= \lambda(\sigma^2 + \omega^2). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Nótese que el caso $d = 0$ implica que, para el valor crítico del parámetro de bifurcación, se tendría $\lambda = 0$, situación degenerada que no abordaremos en la memoria.

Para la configuración de autovalores de (5.23), tenemos asegurada para A_L la siguiente forma canónica real de Jordan J_L y matriz de paso P_L , de manera que $A_L = P_L J_L P_L^{-1}$ con

$$J_L = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

$$P_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega & \sigma + \lambda & 2\sigma \\ \omega\lambda & \sigma\lambda & \sigma^2 + \omega^2 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

Utilizando los parámetros σ , ω y λ podemos expresar la solución proporcionada por el Lema 5.6 como

$$\bar{\mathbf{z}} = (\sigma, \omega, \lambda, r, u, v_0, v_1, \tau_L, \tau_C) = (0, \sqrt{m}, d/m, 0, 1, d/m, d/m, \pi/\sqrt{m}, 0).$$

Obviamente, las soluciones de (5.20)-(5.21) en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ con $\tau_C > 0$, $\tau_L > 0$ y $r > 0$ corresponden a órbitas periódicas de gran amplitud del

sistema original (5.16). Nuestra estrategia será verificar que es posible aplicar el Teorema de la Función Implícita al sistema (5.20)-(5.21) en el punto \bar{z} y detectar en un entorno de dicho punto una rama de soluciones que pasa por \bar{z} . Las correspondientes soluciones con $\tau_C > 0$, $\tau_L > 0$ y $r > 0$ representan órbitas periódicas que para un valor concreto de los parámetros llevan a la solución \bar{z} , y están asociadas a dicha solución a través de una bifurcación que se produce para dichos valores de los parámetros.

El espacio natural de estudio de esta bifurcación es el formado por los parámetros t , m y d , en el entorno de un punto de la superficie $mt - d = 0$, con $m > 0$. En particular, estudiaremos en dicho entorno la variación de t manteniendo m y d constantes. Sin embargo, es más cómodo trabajar con los autovalores de A_L en un entorno de $(\sigma, \omega, \lambda) = (0, \sqrt{m}, d/m)$ y utilizar la forma canónica real de Jordan J_L , obteniendo

$$e^{A_L \tau_L} = P_L e^{J_L \tau_L} P_L^{-1},$$

siendo J_L y P_L las definidas en (5.24) y (5.25), respectivamente.

Además, para simplificar algo más el problema, reescalamos las variables x_2 , x_3 y el tiempo τ mediante el siguiente lema, cuya demostración se omite por ser inmediata.

Lema 5.7 *Si $m > 0$, el sistema (5.16) puede ser transformado mediante el cambio de variables lineal*

$$x_2 = \sqrt{m} \hat{x}_2, \quad x_3 = m \hat{x}_3,$$

y la reparametrización temporal

$$\tau = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{m}},$$

en el sistema equivalente

$$\frac{d}{d\hat{\tau}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \tilde{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{T} - \tilde{t} \\ \tilde{M} - 1 \\ \tilde{D} - \tilde{d} \end{bmatrix} \text{sat}(x_1), \quad (5.26)$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{m}}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{m}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{m^{3/2}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{m}}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{m^{3/2}}.$$

Por tanto, siempre que $m > 0$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $m = 1$. Nótese que la condición $m = 1$ junto con $mt - d = 0$ es equivalente a $\omega = 1$ cuando $\sigma = 0$. En lo que sigue suponemos $m = 1$, trabajando con el sistema (5.26) y prescindimos de las tildes para abreviar la notación.

Para estudiar la evolución del sistema al variar solamente t , añadimos a las ecuaciones de cierre dos ecuaciones que mantienen constantes los valores de m y d , a saber:

$$\begin{aligned} 2\sigma\lambda + \sigma^2 + \omega^2 &= 1, \\ \lambda(\sigma^2 + \omega^2) &= d. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de cierre quedan finalmente

$$\begin{aligned} e^{A_C\tau_C} \begin{bmatrix} r \\ 1 \\ v_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r \\ u \\ v_1 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\ e^{A_L\tau_L} \begin{bmatrix} -rD/d \\ u + rT - rtD/d \\ v_1 + rM - rD/d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rD/d \\ 1 - rT + rtD/d \\ v_0 - rM + rD/d \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\ 2\sigma\lambda + \sigma^2 + \omega^2 - 1 &= 0, \\ \lambda(\sigma^2 + \omega^2) - d &= 0, \end{aligned}$$

que expresamos de manera compacta como

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (5.27)$$

donde

$$\mathbf{z} = (\sigma, \omega, \lambda, r, u, v_0, v_1, \tau_L, \tau_C).$$

La ecuación (5.27) representa un sistema de 8 ecuaciones con 9 incógnitas y posee la solución

$$\bar{\mathbf{z}} = (0, 1, d, 0, 1, d, d, \pi, 0),$$

que como veremos a continuación es un punto no singular.

Lema 5.8 *Para las ecuaciones de cierre (5.27) con $d \neq 0$, las siguientes afirmaciones son válidas.*

(a) Las funciones $F_i(\mathbf{z})$ son funciones analíticas en un entorno de

$$\bar{\mathbf{z}} = (0, 1, d, 0, 1, d, d, \pi, 0).$$

(b) Para el sistema (5.27) el punto $\bar{\mathbf{z}}$ es un punto no singular. La aplicación del Teorema de la Función Implícita conduce a la expresión local de las soluciones de (5.27) como funciones analíticas de τ_C en 0, que presentan los siguientes desarrollos en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\bar{\gamma}_1}{\pi(d^2 + 1)}\tau_C - \frac{\Phi_1}{2\pi^2 d(d^2 + 1)^3}\tau_C^2 + \\ &\quad - \frac{\Phi_2}{\pi d(d^2 + 1)^2(e^{\pi d} + 1)}\tau_C^2 + O(\tau_C^3), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\omega = 1 - \frac{\bar{\gamma}_1 d}{\pi(d^2 + 1)}\tau_C + O(\tau_C^2), \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= d + \frac{2\bar{\gamma}_1 d^2}{\pi(d^2 + 1)}\tau_C - \frac{\Phi_3}{\pi^2(d^2 + 1)^3}\tau_C^2 + \\ &\quad - \frac{2d\Phi_2}{\pi(d^2 + 1)^2(e^{\pi d} + 1)}\tau_C^2 + O(\tau_C^3), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$r = \frac{\tau_C}{2} - \frac{d}{4}\tau_C^2 + O(\tau_C^3), \quad (5.31)$$

$$u = 1 - d\tau_C + O(\tau_C^2), \quad (5.32)$$

$$v_0 = d + \left(\frac{\Phi_4}{2\pi d(d^2 + 1)} + \frac{\Phi_5}{d(e^{\pi d} + 1)} \right) \tau_C + O(\tau_C^2), \quad (5.33)$$

$$v_1 = d + \left(\frac{\Phi_4}{2\pi d(d^2 + 1)} + \frac{\Phi_5}{d(e^{\pi d} + 1)} \right) \tau_C + O(\tau_C^2),$$

$$\begin{aligned} \tau_L &= \pi - M\tau_C - \frac{\bar{\gamma}_1}{(d^2 + 1)d} \left(\frac{\Phi_6}{2\pi(d^2 + 1)} + \frac{\Phi_5}{(e^{\pi d} + 1)} \right) \tau_C^2 + \\ &\quad + O(\tau_C^3), \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde

$$\bar{\gamma}_1 = D - T + d(1 - M),$$

y las expresiones Φ_i , $i = 1 \dots 6$ aparecen en la Tabla 5.1.

Demostración. La computación de la matriz jacobiana

$$D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z})|_{\bar{\mathbf{z}}}$$

proporciona la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & -\frac{e^{\pi d}+1}{d^2+1} & \phi & -\frac{(e^{\pi d}+1)d}{d^2+1} & 0 & \frac{e^{\pi d}+1}{d^2+1} & 1 & 0 \\ -\pi & \pi d & 0 & 2D - 2T & -1 & 0 & 0 & d & 0 \\ -\pi d & 0 & -\frac{e^{\pi d}+1}{d^2+1} & \phi - 2M & -\frac{(e^{\pi d}+1)d}{d^2+1} & 1 & \frac{e^{\pi d}-d^2}{d^2+1} & 0 & 0 \\ 2d & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\phi = \frac{2D}{d} - \frac{(e^{\pi d} + 1)(D - dM + d^2T)}{(d^2 + 1)d}.$$

El cálculo anterior nos permite afirmar que dicha matriz tiene rango 8, al ser el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la última columna (correspondiente a τ_C) igual a $-4\pi(1 + e^{\pi d}) \neq 0$. La aplicación del Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas [CH82] sobre (5.27) nos permite obtener el enunciado.

Los desarrollos en serie $\sigma(\tau_C)$, $\omega(\tau_C)$, $\lambda(\tau_C)$, $r(\tau_C)$, $u(\tau_C)$, $v_0(\tau_C)$, $v_1(\tau_C)$ y $\tau_L(\tau_C)$, han sido obtenidos a partir de las ecuaciones de cierre (5.27), con el programa de cálculo simbólico Maple y utilizando el método de los coeficientes indeterminados. ■

Para analizar el comportamiento de la aplicación de retorno en las proximidades de las posibles órbitas periódicas simétricas de tres zonas, bastará, por la simetría, utilizar la semiórbita correspondiente que partiendo de $\mathbf{x}^0 \in \Sigma_1$ atraviesa Σ_{-1} en el punto \mathbf{x}^1 y vuelve a dicha sección en el punto $\mathbf{x}^2 = -\mathbf{x}^0 \in \Sigma_{-1}$. Siguiendo la notación de la Sección 3.3, denotamos con $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^2$, las coordenadas de \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 en las respectivas secciones, y con π_C, π_L las funciones que verifican $\pi_C(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_1$, $\pi_L(\mathbf{p}_1) = -\mathbf{p}_0$; con un ligero abuso de notación,

Φ_1	$\begin{aligned} & \pi d^7 M + 6d^6 M^2 - \pi d^6 MT - \pi d^7 - 2\pi d^6 D - 16d^6 M + 3\pi d^6 T - 12d^5 DM \\ & + 2\pi d^5 DT + \pi d^5 M^2 + 20d^5 MT - 2\pi d^5 T^2 + 10d^6 + 16d^5 D - \pi d^5 M - 24d^5 T \\ & + 6d^4 D^2 - 3\pi d^4 DM - 20d^4 DT - 6d^4 M^2 + 2\pi d^4 MT + 14d^4 T^2 - \pi d^4 D \\ & 12d^4 M + 2\pi d^4 T + 2\pi d^3 D^2 + 16d^3 DM - 8d^3 MT - 2\pi d^3 T^2 - 6d^4 - 16d^3 D \\ & - \pi d^3 M + 8d^3 T - 10d^2 D^2 - 2\pi d^2 DM + 12d^2 DT + 4d^2 M^2 + 3\pi d^2 MT \\ & - 2d^2 T^2 + \pi d^3 - 4d^2 M - \pi d^2 T + 2\pi d D^2 - 4d DM - 2\pi d DT - \pi d M^2 \\ & + 4d MT + \pi d M + \pi DM - \pi D, \end{aligned}$
Φ_2	$(d^2 M - d^2 - 2dD + 2dT - M + 1)(d^3 - d^2 T + dM - D),$
Φ_3	$\begin{aligned} & \pi d^7 M - 2d^6 M^2 - \pi d^6 MT - \pi d^7 - 2\pi d^6 D + 3\pi d^6 T + 4d^5 DM + 2\pi d^5 DT \\ & + \pi d^5 M^2 + 4d^5 MT - 2\pi d^5 T^2 + 2d^6 - \pi d^5 M - 8d^5 T - 2d^4 D^2 - 3\pi d^4 DM \\ & + 4d^4 DT - 14d^4 M^2 + 2\pi d^4 MT + 6d^4 T^2 - \pi d^4 D + 28d^4 M + 2\pi d^4 T + 2\pi d^3 D^2 \\ & + 32d^3 DM - 24d^3 MT - 2\pi d^3 T^2 - 14d^4 - 32d^3 D - \pi d^3 M + 24d^3 T - 18d^2 D^2 \\ & + 2\pi d^2 DM + 28d^2 DT + 4d^2 M^2 + 3\pi d^2 MT - 10d^2 T^2 + \pi d^3 - 4d^2 M - \pi d^2 T \\ & + 2\pi d D^2 - 4d DM - 2\pi d DT - \pi d M^2 + 4d MT + \pi d M + \pi DM - \pi D, \end{aligned}$
Φ_4	$\begin{aligned} & -2\pi d^5 - 4d^4 M + \pi d^4 T + 4d^4 + 4d^3 D - \pi d^3 M - 4d^3 T - 2\pi d^3 + \pi d^2 D \\ & + \pi d^2 T - \pi d M + \pi D, \end{aligned}$
Φ_5	$d^3 - d^2 T + dM - D,$
Φ_6	$\begin{aligned} & -\pi d^5 + d^4 M + \pi d^4 T + 3d^4 - d^3 D - \pi d^3 M - 3d^3 T - \pi d^3 + \pi d^2 D + 5d^2 M \\ & + \pi d^2 T - d^2 - 5dD - \pi dM + dT + \pi D, \end{aligned}$

Tabla 5.1: Valores de los coeficientes Φ_i

usaremos τ_C y τ_L para denotar las funciones escalares que proporcionan el tiempo de vuelo en cada región.

En los siguientes resultados utilizamos también la función que da las coordenadas de la semiaplicación de Poincaré $\pi_1(\mathbf{p}_0) = (\pi_L \circ \pi_C)(\mathbf{p}_0)$, de manera que la función que proporciona las coordenadas de la aplicación de Poincaré completa es $\pi(\mathbf{p}_0) = (-\pi_1 \circ -\pi_1)(\mathbf{p}_0)$.

A partir del Lema 5.8, es fácil garantizar que las soluciones de las ecuaciones de cierre corresponden con ciclos límite del sistema (5.26) y gracias al Lema 4.21 podemos estudiar su estabilidad, como se refleja en el siguiente resultado.

Proposición 5.9 *Asumamos que $d \neq 0$, y $\bar{\gamma}_1 = -dM + d + D - T \neq 0$. Sea \mathbf{z} una solución de las ecuaciones de cierre (5.27) en un entorno del punto $\bar{\mathbf{z}}$ definido en el Lema 5.4 que corresponde a un valor suficientemente pequeño de $\tau_C > 0$. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

(a) *El sistema (5.26) posee un ciclo límite con simetría respecto del origen*

que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} , y tiene tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en la zona L .

(b) El valor correspondiente de t verifica

$$(t - d)\bar{\gamma}_1 > 0.$$

(c) Los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son

$$\begin{aligned}\mu_I &= \frac{2\bar{\gamma}_1}{d^2 + 1}\tau_C + O(\tau_C^2), \\ \mu_{II} &= 2\pi d + 2 \left[\frac{\bar{\gamma}_1(2d^2 + 1)}{d^2 + 1} + T - dM \right] \tau_C + O(\tau_C^2).\end{aligned}$$

Demostración. Para una solución de las ecuaciones de cierre con $\tau_C > 0$ y $\tau_L > 0$, veremos que el flujo de la zona central que parte de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$ lleva a $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$, y el flujo de la zona L transforma el punto $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ al simétrico del origen de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$; por tanto, los puntos anteriores pertenecerán a una solución periódica simétrica del sistema.

Estudiaremos la órbita del sistema (5.26) correspondiente a la solución (5.28)-(5.34) de las ecuaciones de cierre (5.27) válida para $\tau_C > 0$ suficientemente pequeño y comprobaremos que representa una órbita periódica simétrica transversal a las fronteras.

Primeramente determinamos $t(\tau_C)$ utilizando que $t = 2\sigma + \lambda$, y los desarrollos de σ (5.28) y λ (5.30), obteniendo

$$t = d + \frac{2bargamma_1}{\pi}\tau_C - \frac{1}{\pi d(d^2 + 1)} \left(\frac{t_{21}}{\pi(d^2 + 1)} + \frac{2t_{22}}{\exp(\pi d) + 1} \right) \tau_C^2 + O(\tau_C^3). \quad (5.35)$$

donde

$$\begin{aligned}t_{21} &= \pi d^7 M - 2d^6 M^2 - \pi d^6 M T - \pi d^7 - 2\pi d^6 D + 3\pi d^6 T + 4d^5 DM + 2\pi d^5 DT + \\ &+ \pi d^5 M^2 + 4d^5 MT - 2\pi d^5 T^2 + 2d^6 - \pi d^5 M - 8d^5 T - 2d^4 D^2 - 3\pi d^4 DM - \\ &- 4d^4 DT - 6d^4 M^2 + 2\pi d^4 MT + 6d^4 T^2 - \pi d^4 D + 12d^4 M + 2\pi d^4 T + 2\pi d^3 D^2 + \\ &+ 16d^3 DM - 8d^3 MT - 2\pi d^3 T^2 - 6d^4 - 16d^3 D - \pi d^3 M + 8d^3 T - 10d^2 D^2 - \\ &- 2\pi d^2 DM + 12d^2 DT + 4d^2 M^2 + 3\pi d^2 MT - 2d^2 T^2 + \pi d^3 - 4d^2 M - \pi d^2 T + \\ &+ 2\pi d D^2 - 4d DM - 2\pi d DT - \pi d M^2 + 4d MT + \pi d M + \pi DM - \pi D, \\ t_{22} &= (d^2 M - d^2 - 2dD + 2dT - M + 1)(d^3 - d^2 T + dM - D),\end{aligned}$$

Comenzamos el razonamiento estudiando la órbita del sistema (5.26) que pasa por $(1, x_2^0, x_3^0)^T \in \Sigma_1$, donde tomamos el origen de tiempo de la zona C ; en dicho punto la velocidad en la dirección x_1 vale

$$\dot{x}_1|_{(x_1, x_2, x_3)=(1, x_2^0, x_3^0)} = Tx_1(0) - x_2(0) = T - x_2^0 = T - 1/r,$$

teniendo en cuenta que $r > 0$ y a la vista de (5.31), $1/r$ será arbitrariamente grande para τ_C suficientemente pequeño y por tanto,

$$\dot{x}_1|_{(x_1, x_2, x_3)=(1, x_2^0, x_3^0)} < 0,$$

verificando que dicha órbita entra en la zona C y lo hace de forma transversal a Σ_1 . Al ser $\tau_C > 0$ y suficientemente pequeño la órbita que va de $(1, x_2^0, x_3^0)^T$ a $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ se mantiene en todo momento en la región C .

Procedemos con un razonamiento análogo para la órbita que parte de $(-1, x_2^1, x_3^1)^T \in \Sigma_{-1}$ y es el origen de tiempos de la zona L

$$\dot{x}_1|_{(x_1, x_2, x_3)=(-1, x_2^1, x_3^1)} = tx_1(0) - x_2(0) - T + t = -x_2^1 - T,$$

utilizando el cambio (5.19) se tiene que $x_2^1 = u/r$ y teniendo en cuenta los desarrollos (5.31) y (5.32) y que $\tau_C > 0$ es arbitrariamente pequeño, resulta

$$\dot{x}_1|_{(x_1, x_2, x_3)=(-1, x_2^1, x_3^1)} < 0,$$

comprobando que la órbita entra en la zona L . Por otra parte, como $\tau_L = \pi - \tau_C + O(\tau_C^2)$, deducimos que para $\tau_C > 0$, suficientemente pequeño, se tiene $\tau_L < \pi$ y por tanto la órbita que va de $(-1, x_2^1, x_3^1)^T$ a $(-1, -x_2^0, -x_3^0)^T$ se mantiene en todo momento en la región L donde la dinámica es de tipo foco.

Debido a la simetría del problema, la repetición del razonamiento para las órbitas que parten de $(-1, -x_2^0, -x_3^0)^T \in \Sigma_{-1}$ y de $(1, -x_2^1, -x_3^1)^T \in \Sigma_1$ asegura que éstas entran transversalmente en las zonas C y R respectivamente. Concluimos que las cuatro órbitas forman una órbita periódica del sistema (5.26), que se corresponde con la solución de las ecuaciones de cierre (5.27) dada por los desarrollos (5.28) a (5.34). Además, la unicidad de la solución obtenida por el Teorema de la Función Implícita en el Lema 5.8 asegura que dicha órbita periódica simétrica y de tres zonas es única en un entorno del

punto solución \mathbf{z} , de donde se deduce que es una órbita periódica aislada, es decir, un ciclo límite. Así hemos demostrado lo indicado en **(a)**.

Dado que τ_C es positivo, de (5.35) se deduce que para τ_C suficientemente pequeño $\bar{\gamma}_1$ tiene el mismo signo de $t - d$. Utilizando ahora (5.23) con $\omega = 1$ y considerando que σ también es pequeño, obtenemos que $\bar{\gamma}_1$ tiene el mismo signo que σ en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ quedando probado el apartado **(b)** del enunciado.

En el apartado **(c)**, por la semejanza del Lema 4.21, sabemos que el producto $e^{A_L \tau_L} e^{A_C \tau_C}$, para el valor de \mathbf{z} solución de (5.27) correspondiente a una órbita periódica, tiene un autovalor igual a -1 , mientras que los otros dos, que corresponden a los autovalores de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, los denotaremos por λ_I y λ_{II} . Usando que

$$\det(e^{A\tau}) = e^{\tau \operatorname{traza}(A)},$$

deducimos que el producto de los tres autovalores citados verifica

$$-\lambda_I \lambda_{II} = e^{\tau_L t + \tau_C T}. \quad (5.36)$$

A continuación, analizamos los autovalores de $e^{A_L \tau_L} e^{A_C \tau_C}$ por técnicas de perturbación a partir de $\bar{\mathbf{z}}$. Nos moveremos sobre la rama solución de (5.27) correspondiente a una órbita periódica; para ello utilizamos el Lema 5.8 y parametrizamos σ , ω , λ , r , u , v_0 , v_1 y τ_L en función de τ_C . Si hacemos

$$\begin{aligned} E_0 &= e^{A_L(0)\tau_L(0)}, \\ e_0 &= e^{\pi d}, \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta la dependencia respecto de τ_C , podemos desarrollar el citado producto de exponenciales en serie de MacLaurin respecto τ_C ,

$$\begin{aligned} &e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)} e^{A_C \tau_C} = \\ &= \left(E_0 + \tau_C \frac{d}{d\tau_C} \left(e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)} \right) \Big|_{\tau_C=0} + \dots \right) (I + A_C \tau_C + \dots) \\ &= [E_0 + \tau_C E_0 A'_L(0) \tau_L(0) + \tau_C E_0 A_L(0) \tau'_L(0) + \dots] (I + A_C \tau_C + \dots). \end{aligned}$$

Sustituyendo $\tau_C = 0$ en los desarrollos (5.28) a (5.34) obtenemos

$$\tau_L(0) = \pi, \quad \tau'_L(0) = -M,$$

$$A'_L(0) = \begin{bmatrix} \frac{2\bar{\gamma}_1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando los valores anteriores, el producto de exponenciales se convierte en

$$e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)}e^{A_C\tau_C} = H_0 + \tau_C H_1 + \dots$$

donde

$$H_0 = E_0 = \frac{1}{d^2 + 1} \begin{bmatrix} e_0 d^2 - 1 & -(e_0 + 1)d & e_0 + 1 \\ 0 & -(d^2 + 1) & 0 \\ (e_0 + 1)d^2 & -(e_0 + 1)d & e_0 - d^2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \frac{1}{d^2 + 1} \begin{bmatrix} e_0\Phi + \Theta & (e_0 d^2 - 1)(M - 1) & -(e_0 + 1)(M - 1)d \\ 0 & 0 & -(d^2 + 1)(M - 1) \\ e_0\Phi - d^2\Theta & (e_0 + 1)(M - 1)d^2 & -(e_0 + 1)(M - 1)d \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \Phi &= d^3(2 - 3M) + d^2(2D - T) - dM + D, \\ \Theta &= T - D + 2d(M - 1). \end{aligned}$$

La matriz H_0 tiene autovalores -1 doble y $\lambda_0 = e_0 = e^{\pi d}$, este último con autovector asociado $v_0 = (1, 0, 1)^T$. Sea λ_{II} el autovalor que para $\tau_C = 0$ coincide con λ_0 , y que tiene el desarrollo

$$\lambda_{II} = \lambda_0 + \lambda_1 \tau_C + \dots$$

Como hay garantías de que $e^{\pi d}$ es un autovalor simple de H_0 se verifica (ver Sección 2.8 de [Wi65])

$$(H_0 + \tau_C H_1 + \dots)(v_0 + \tau_C v_1 + \dots) = \lambda_{II}(v_0 + \tau_C v_1 + \dots) \quad (5.37)$$

Igualando potencias de orden 1 en τ_C en (5.37), obtenemos

$$H_1 v_0 + H_0 v_1 = \lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_0, \quad (5.38)$$

y si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por $w_0^T = (d^2, -d, 1)$, autovector izquierdo de H_0 correspondiente a λ_0 , se tendrá

$$w_0^T H_1 v_0 + w_0^T H_0 v_1 = \lambda_0 w_0^T v_1 + \lambda_1 w_0^T v_0.$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta que $w_0^T H_0 = \lambda_0 w_0^T$ determinamos

$$\lambda_1 = \frac{w_0^T H_1 v_0}{w_0^T v_0},$$

y sustituyendo los valores de λ_0 , v_0 y w_0 , obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\zeta}{d^2 + 1} e_0,$$

con

$$\zeta = d^3(2 - 3M) + d^2(2D - T) + d(1 - 2M) + D.$$

Una vez calculados los autovalores de la derivada de la semiaplicación de Poincaré $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita han de verificar

$$e^{\mu_I} = \lambda_I^2, \quad e^{\mu_{II}} = \lambda_{II}^2, \quad (5.39)$$

además, usando (5.36) se tiene que

$$e^{\mu_I + \mu_{II}} = \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 = e^{2t\tau_L + 2T\tau_C},$$

de donde obtenemos la relación

$$\mu_I + \mu_{II} = 2t\tau_L + 2T\tau_C. \quad (5.40)$$

A partir de (5.39), para el autovalor simple λ_{II} ya calculado se cumplirá

$$\begin{aligned} \mu_{II} &= 2 \log [e_0 + \lambda_1 \tau_C + O(\tau_C^2)] = \\ &= 2\pi d + 2 \log [1 + e^{-\pi d} \lambda_1 \tau_C + O(\tau_C^2)] = \\ &= 2\pi d + 2e^{-\pi d} \lambda_1 \tau_C + O(\tau_C^2), \end{aligned}$$

y sustituyendo λ_1 se obtiene el valor de μ_{II} del enunciado.

Utilizando ahora la ecuación (5.40), junto con los desarrollos de τ_L (5.34) y de t (5.35), determinamos el otro logaritmo del multiplicador característico de la órbita periódica completando finalmente el enunciado de la Proposición.

■

A la vista de la Proposición 5.9, diremos que el sistema (5.16) experimenta una bifurcación de Hopf en el infinito para el valor de los parámetros que corresponden al punto \bar{z} , por el que pasa la rama de soluciones predicha por el Lema 5.8. Estamos ya en condiciones de enunciar a continuación el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.10 *Consideremos el sistema (5.16) con $d \neq 0$, $m > 0$ y $\bar{\gamma} = dm - dM + Dm - m^2T \neq 0$, y sea $t_0 = d/m$. Para $t = t_0$ el sistema experimenta una bifurcación de Hopf a partir de una órbita periódica del infinito, apareciendo un ciclo límite transversal a las fronteras Σ_1 y a Σ_{-1} , simétrico respecto del origen, para $\bar{\gamma}(t - t_0) > 0$ y suficientemente pequeño.*

El periodo P de la oscilación periódica es una función analítica en 0, en la variable $t - t_0$, y su desarrollo es

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} + \frac{\pi\sqrt{m}(m - M)}{\bar{\gamma}}(t - t_0) + \frac{\pi}{d(d^2 + m^3)\bar{\gamma}^3} \left[\frac{mp_{21}}{4(d^2 + m^3)} + \frac{\pi m^3 p_{22}}{2(e^{\pi d/m^{3/2}} + 1)} \right] (t - t_0)^2 + O(t - t_0)^3,$$

donde los coeficientes p_{21} y p_{22} son los que figuran en la Tabla 5.2.

La amplitud a (medida como el máximo en $|x_3|$) posee el desarrollo en serie para la variable $t - t_0$ en un entorno de 0,

$$a = -\frac{4d\bar{\gamma}}{\pi m^{5/2}}(t - t_0)^{-1} + \frac{1}{dm(d^2 + m^3)\bar{\gamma}} \left[\frac{a_1}{\pi m(d^2 + m^3)} + \frac{2a_2}{(e^{\pi d/m^{3/2}} + 1)} \right] + O(t - t_0),$$

donde los coeficientes a_1 y a_2 son los que figuran en la Tabla 5.3.

Además, los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son

$$\mu_I = \frac{\pi m^{5/2}}{d^2 + m^3}(t - t_0) + O(t - t_0)^2,$$

p_{21}	$ \begin{aligned} & -d^6 m^{7/2} + 3d^6 m^{5/2} M - 3d^6 m^{3/2} M^2 + d^6 \sqrt{m} M^3 + \pi d^5 m^5 + d^5 m^{9/2} T - 2\pi d^5 m^4 M \\ & + \pi d^5 m^4 T^2 - 5d^5 m^{7/2} D + 2d^5 m^{7/2} MT - 2\pi d^5 m^3 DT + \pi d^5 m^3 M^2 + 6d^5 m^{5/2} DM \\ & - 3d^5 m^{5/2} M^2 T + \pi d^5 m^2 D^2 - d^5 m^{3/2} DM^2 - 5d^4 m^{13/2} - \pi d^4 m^6 T + 11d^4 m^{11/2} M \\ & - 3d^4 m^{11/2} T^2 + 2\pi d^4 m^5 MT - \pi d^4 m^5 T^3 + 6d^4 m^{9/2} DT - 7d^4 m^{9/2} M^2 - d^4 m^{9/2} MT^2 \\ & + 2\pi d^4 m^4 DT^2 - \pi d^4 m^4 M^2 T - 3d^4 m^{7/2} D^2 + 2d^4 m^{7/2} DMT + d^4 m^{7/2} M^3 \\ & - \pi d^4 m^3 D^2 T - d^4 m^{5/2} D^2 M + \pi d^3 m^8 + 5d^3 m^{15/2} T - \pi d^3 m^7 M + \pi d^3 m^7 T^2 \\ & - 9d^3 m^{13/2} D - 2d^3 m^{13/2} MT + 3d^3 m^{13/2} T^3 - 2\pi d^3 m^6 DT - \pi d^3 m^6 M^2 + \pi d^3 m^6 MT^2 \\ & + 10d^3 m^{11/2} DM - 5d^3 m^{11/2} DT^2 - 3d^3 m^{11/2} M^2 T + \pi d^3 m^5 D^2 - 2\pi d^3 m^5 DMT \\ & + \pi d^3 m^5 M^3 + d^3 m^{9/2} D^2 T - d^3 m^{9/2} DM^2 + \pi d^3 m^4 D^2 M + d^3 m^{7/2} D^3 - \pi d^2 m^9 T \\ & - 4d^2 m^{17/2} M + d^2 m^{17/2} T^2 - \pi d^2 m^8 D + 2\pi d^2 m^8 MT - \pi d^2 m^8 T^3 - 2d^2 m^{15/2} DT \\ & + 8d^2 m^{15/2} M^2 - 5d^2 m^{15/2} MT^2 + 2\pi d^2 m^7 DM + \pi d^2 m^7 DT^2 - \pi d^2 m^7 M^2 T \\ & + d^2 m^{13/2} D^2 + 10d^2 m^{13/2} DMT - 4d^2 m^{13/2} M^3 + \pi d^2 m^6 D^2 T - \pi d^2 m^6 DM^2 \\ & - 5d^2 m^{11/2} D^2 M - \pi d^2 m^5 D^3 + \pi dm^{10} M + 4dm^{19/2} MT - dm^{19/2} T^3 - 2\pi dm^9 M^2 \\ & + \pi dm^9 MT^2 - 4dm^{17/2} DM + 7dm^{17/2} DT^2 - 4dm^{17/2} M^2 T - 2\pi dm^8 DMT \\ & + \pi dm^8 M^3 - 11dm^{15/2} D^2 T + 4dm^{15/2} DM^2 DT^2 + \pi dm^7 D^2 M + 5dm^{13/2} D^3 \\ & - \pi m^{11} D + 2\pi m^{10} DM - \pi m^{10} + 2\pi m^9 D^2 T - \pi m^9 DM^2 - \pi m^8 D^3, \end{aligned} $
p_{22}	$ \begin{aligned} & -d^3 m^3 + 2d^3 m^2 M - d^3 m^2 T^2 + 2d^3 m DT - d^3 m M^2 - d^3 D^2 + d^2 m^4 T - 2d^2 m^3 MT + d^2 m^3 T^3 \\ & - 2d^2 m^2 DT^2 + d^2 m^2 M^2 T + d^2 m D^2 T - dm^5 M + 2dm^4 M^2 - dm^4 MT^2 + 2dm^3 DMT \\ & - dm^3 M^3 - dm^2 D^2 M + m^6 D - 2m^5 DM + m^5 DT^2 - 2m^4 D^2 T + m^4 DM^2 + m^3 D^3. \end{aligned} $

Tabla 5.2: Valores de los coeficientes p_{2i}

a_1	$ \begin{aligned} & 2d^7 m^{5/2} - \pi d^7 m^2 T - 8d^7 m^{3/2} M + \pi d^7 m D + 6d^7 \sqrt{m} M^2 - 2\pi d^6 m^4 + 2\pi d^6 m^3 M \\ & + \pi d^6 m^3 T^2 + 8d^6 m^{5/2} D + 4d^6 m^{5/2} MT - \pi d^6 m^2 DT - 12d^6 m^{3/2} DM + 10d^5 m^{11/2} \\ & + 2\pi d^5 m^5 T - 20d^5 m^{9/2} M - 2d^5 m^{9/2} T^2 - 3\pi d^5 m^4 MT - 4d^5 m^{7/2} DT + 10d^5 m^{7/2} M^2 \\ & + \pi d^5 m^3 DM + 6d^5 m^{5/2} D^2 - 2\pi d^4 m^7 - 16d^4 m^{13/2} T + 24d^4 m^{11/2} D + 16d^4 m^{11/2} MT \\ & + \pi d^4 m^5 DT + 2\pi d^4 m^5 M^2 - 24d^4 m^{9/2} DM - \pi d^4 m^4 D^2 + 3\pi d^3 m^8 T + 4d^3 m^{15/2} M \\ & + 6d^3 m^{15/2} T^2 + \pi d^3 m^7 D - 2\pi d^3 m^7 MT - 20d^3 m^{13/2} DT - 4d^3 m^{13/2} M^2 - 2\pi d^3 m^6 DM \\ & + 14d^3 m^{11/2} D^2 - 2\pi d^2 m^9 M - \pi d^2 m^9 T^2 - 4d^2 m^{17/2} MT + \pi d^2 m^8 DT + 2\pi d^2 m^8 M^2 \\ & + 4d^2 m^{15/2} DM + 2\pi dm^{10} D + \pi dm^{10} MT - 3\pi dm^9 DM - \pi m^{11} D + \pi m^{10} D^2, \end{aligned} $
a_2	$ \begin{aligned} & d^5 m T - d^5 D + 2d^4 m^3 - 2d^4 m^2 M - d^4 m^2 T^2 + d^4 m DT - 3d^3 m^4 T + d^5 m T - d^5 D + 2d^4 m^3 \\ & - 2d^4 m^2 M - d^4 m^2 T^2 + d^4 m DT - 3d^3 m^4 T + d^3 m^3 D + 3d^3 m^3 MT - d^3 m^2 DM + 2d^2 m^5 M \\ & + d^2 m^5 T^2 - 2d^2 m^4 DT - 2d^2 m^4 M^2 + d^2 m^3 D^2 - 2dm^6 D - dm^6 MT + 3dm^5 DM + m^7 DT \\ & - m^6 D^2. \end{aligned} $

Tabla 5.3: Valores de los coeficientes a_i

$$\mu_{II} = \frac{2\pi d}{m^{3/2}} + \frac{\pi}{m^{1/2}} \left(\frac{2d^2 + m^3}{d^2 + m^3} + \frac{Tm^2 - dM}{\bar{\gamma}} \right) (t - t_0) + O(t - t_0)^2.$$

En particular, el ciclo límite es orbitalmente asintóticamente estable cuando $\bar{\gamma} < 0$ y $d < 0$.

Demostración. Aplicando el cambio del Lema 5.7, trabajaremos en lo que sigue con el sistema (5.26), mientras que la condición $\bar{\gamma} = dm - dM + Dm - Tm^2 \neq 0$ se convierte en $\bar{\gamma}_1 = d - dM + D - T \neq 0$.

La existencia de la bifurcación para $t = t_0$ se deduce del hecho de que para dicho valor se da la igualdad $mt - d = 0$ que corresponde al punto \bar{z} del Lema 5.8. Para $mt - d$ suficientemente pequeño con $m > 0$ y considerando que $mt - d = 2\sigma [(\sigma + \lambda)^2 + \omega^2]$, es fácil demostrar que la parte real del par de autovalores complejos conjugados σ está en un entorno de 0. La variable σ toma el valor 0 para $\tau_C = 0$, por lo que haciendo que σ sea suficientemente pequeño conseguimos que τ_C esté en un entorno apropiado de 0 donde podemos aplicar los desarrollos obtenidos en el Lema 5.8.

A partir de esos desarrollos y recordando la ecuación (5.35) obtenemos

$$t - d = \frac{\bar{\gamma}_1}{\pi} \tau_C + O(\tau_C^2), \quad (5.41)$$

donde deshaciendo el cambio del Lema 5.7 y teniendo en cuenta la definición de t_0 , queda

$$t - t_0 = \frac{2\bar{\gamma}}{\pi m^{3/2}} \tau_C + O(\tau_C^2). \quad (5.42)$$

Para $\tau_C > 0$ y suficientemente pequeño, se concluye de la igualdad anterior que el signo de $t - t_0$ debe coincidir con el de $\bar{\gamma}$, obteniendo la correspondiente afirmación del enunciado.

Por último, la Proposición (5.9) nos relaciona la existencia de solución de (5.27) con la correspondiente órbita periódica simétrica respecto del origen del sistema (5.26) quedando demostrada la existencia del ciclo límite.

Seguimos la demostración con $m = 1$ para deshacer el cambio al final. Para obtener τ_C en función de $(t - t_0)$, aplicamos ahora el Lema 4.10 a la ecuación (5.35), sustituyendo d por t_0 , y haciendo $n = 1$, $\eta = t - t_0$ y $\xi = \tau_C$ podemos asegurar, puesto que $\bar{\gamma}_1 \neq 0$, la existencia de una función χ analítica en 0 con $\chi(0) \neq 0$ tal que $\tau_C = (t - t_0) \chi(t - t_0)$ cuyo desarrollo en serie de Taylor es

$$\tau_C = \frac{\pi}{2\bar{\gamma}_1} (t - t_0) + \frac{\pi}{8} \left[\frac{\Omega_1 \tanh(\pi d/2)}{\Omega_2 d} + \Omega_3 \right] (t - t_0)^2 + O(t - t_0)^3, \quad (5.43)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \pi(M-1)d^7 + (-2\pi D - 2M^2 - \pi MT + 3\pi T + 2)d^6 + \\ &+ (4DM + 2\pi DT + \pi M^2 + 4MT - \pi M - 2\pi T^2 - 8T)d^5 + \\ &+ (-2D^2 - 3\pi DM - 4DT - \pi D - 6M^2 + 2\pi MT + 12M + 6T^2 + 2\pi T - 6)d^4 + \\ &+ (2\pi D^2 + 16DM - 16D - 8MT - \pi M - 2\pi T^2 + 8T + \pi)d^3 + \\ &+ (-10D^2 - 2\pi DM + 12DT + 4M^2 + 3\pi MT - 4M - 2T^2 - \pi T)d^2 + \\ &+ (2\pi D^2 - 4DM - 2\pi DT - \pi M^2 + 4MT + \pi M)d + \pi DM - \pi D, \\ \Omega_2 &= (1-M)^3 d^7 + (3DM^2 - 6DM + 3D - 3M^2 T + 6MT - 3T)d^6 + \\ &+ (-3D^2 M + 3D^2 + 6DMT - 6DT - 2M^3 + 6M^2 - 3MT^2 - 6M + 3T^2 + 2)d^5 + Dd^4 + \\ &+ (-6D^2 M + 6D^2 + 12DMT - 12DT - M^3 + 3M^2 - 6MT^2 - 3M + 6T^2 + 1)d^3 + \\ &+ (2D^3 - 6D^2 T + 3DM^2 - 6DM + 6DT^2 + 3D - 3M^2 T + 6MT - 2T^3 - 3T)d^2 + \\ &+ (-3D^2 M + 3D^2 + 6DMT - 6DT - 3MT^2 + 3T^2)d + D^3 - 3D^2 T + 3DT^2 - T^3, \\ \Omega_3 &= 4(1-M^2)d^5 + (8DM + 8MT - 16T)d^4 + \\ &+ (-4D^2 - 8DT - 12M^2 + 24M + 12T^2 - 12)d^3 + (32DM - 32D - 16MT + 16T)d^2 + \\ &+ (-20D^2 + 24DT + 8M^2 - 8M - 4T^2)d - 8DM + 8MT. \end{aligned}$$

Debido a la simetría, el período de la órbita es igual a $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Sustituyendo (5.43) en (5.34), utilizando la fórmula anterior y deshaciendo el cambio del Lema 5.7 obtenemos la serie para el período que figura en el enunciado.

El máximo valor de $|x_3|$ correspondiente a la amplitud a de la órbita periódica se alcanzará en un tiempo τ^* en la zona C del plano. Se cumplirá

$$\dot{x}_3(\tau^*) = Dx_1(\tau^*) = 0,$$

y expresando $x_1(\tau)$ en función de la matriz exponencial, la ecuación anterior queda de la forma

$$G(\tau_C, \tau^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{A_C \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^0(\tau_C) \\ x_3^0(\tau_C) \end{bmatrix} = 0.$$

Haciendo el cambio (5.19) y multiplicando por r se convierte en

$$G(\tau_C, \tau^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{Ac\tau^*} \begin{bmatrix} r(\tau_C) \\ 1 \\ v_0(\tau_C) \end{bmatrix} = 0.$$

En esta ecuación las únicas variables que consideramos son τ^* y τ_C , y se cumple $G(0,0) = 0$. Desarrollando $G(\tau_C, \tau^*)$ en serie de Taylor alrededor de $\tau_C = 0$ y $\tau^* = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} G(\tau_C, \tau^*) = & \frac{\tau_C}{2} - \tau^* + \frac{d-T}{2}\tau^{*2} + \frac{T}{2}\tau_C\tau^* - \frac{d}{4}\tau_C^2 + \\ & + \frac{(\Phi_1 + e^{\pi d}\Phi_2)}{\pi d(d^2+1)(e^{\pi d}+1)}\tau_C\tau^{*2} - \frac{dT}{4}\tau^*\tau_C^2 + \\ & \frac{(dT+M-T^2)}{6}\tau^{*3} + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & d^4 - 1/4\pi d^4 T - d^4 M - d^3 T + 1/4\pi d^3 M + d^3 D - 1/4\pi d^2 T - 1/4\pi d^2 D + 1/4\pi d M + \\ & - 1/4\pi D - 1/4M + 1/4T^2, \\ \Phi_2 = & -1/2\pi d^5 + d^4 + 1/4\pi d^4 T - d^4 M - 1/2\pi d^3 - d^3 T - 1/4\pi d^3 M + d^3 D + 1/4\pi d^2 T + \\ & + 1/4\pi d^2 D - 1/4\pi d M + 1/4\pi D. \end{aligned}$$

Por tanto, al ser $G_{\tau^*}(0,0) = -1 \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita la ecuación $G(\tau_C, \tau^*) = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(0,0)$, una función $\psi(\tau_C)$, tal que $G(\tau_C, \psi(\tau_C)) = 0$. Utilizando coeficientes indeterminados para $\psi(\tau_C)$, y ayudados por un programa de cálculo simbólico, obtenemos

$$\tau^* = \frac{\tau_C}{2} + \frac{(T-d)}{8}\tau_C^2 + \frac{(\Theta_1 + \Theta_2 e^{\pi d})}{48\pi d(d^2+1)(1+e^{\pi d})}\tau_C^3 + O(\tau_C^4),$$

donde

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & -3\pi d^5 + 12d^4 - 5\pi d^4 T - 12d^4 M - 3\pi d^3 - 12d^3 T + \pi d^3 M + 2\pi d^3 T^2 + 12d^3 D - \\ & - 5\pi d^2 T - 3\pi d^2 D + \pi d M + 2\pi d T^2 - 3\pi D, \\ \Theta_2 = & -9\pi d^5 + 12d^4 + \pi d^4 T - 12d^4 M - 9\pi d^3 - 12d^3 T - 5\pi d^3 M + 2\pi d^3 T^2 + 12d^3 D + \end{aligned}$$

$$+ \pi d^2 T + 3\pi d^2 D - 5\pi d M + 2\pi d T^2 + 3\pi D.$$

Sustituyendo la serie anterior junto con (5.31), (5.33) y (5.35) en la siguiente expresión de $x_3(\tau)$

$$x_3(\tau^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_C \tau^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/r \\ v_0/r \end{bmatrix},$$

obtenemos

$$a = \frac{2d}{\tau_C} + \frac{a_1 + a_2 e^{\pi d}}{\pi d (1 + d^2) (1 + e^{\pi d})} + O(\tau_C),$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \pi d^5 - 4d^4 M - \pi d^4 T + 4d^4 + \pi d^3 M - 4d^3 T + \pi d^3 + 4d^3 D - \pi d^2 T - \pi d^2 D + \pi d M - \pi D, \\ a_2 &= -\pi d^5 - 4d^4 M + \pi d^4 T + 4d^4 - \pi d^3 M - 4d^3 T + 4d^3 D - \pi d^3 + \pi d^2 T + \pi d^2 D - \pi d M + \pi D. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la serie (5.43) y deshaciendo el cambio del Lema 5.7 obtenemos el resultado del enunciado.

Por la Proposición 5.9 tenemos que los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica valen

$$\begin{aligned} \mu_I &= \frac{2\bar{\gamma}_1}{d^2 + 1} \tau_C + O(\tau_C^2), \\ \mu_{II} &= 2\pi d + \frac{2\zeta}{d^2 + 1} \tau_C + O(\tau_C^2), \end{aligned}$$

donde

$$\zeta = d^3(2 - 3M) + d^2(2D - T) + d(1 - 2M) + D.$$

Para τ_C suficientemente pequeño se tendrá $\mu_I < 0$ si $\bar{\gamma}_1 < 0$, y si $d < 0$ también será $\mu_{II} < 0$, con lo que concluimos que el ciclo límite es orbitalmente asintóticamente estable cuando $d < 0$ y $\bar{\gamma} < 0$. Para finalizar, sustituyendo τ_C por su valor (5.43) en las expresiones anteriores de μ_I y μ_{II} , y deshaciendo ahora el cambio del Lema 4.19, obtenemos los valores que figuran en el enunciado. ■

A la vista del Teorema 5.10 podemos afirmar que el signo de $\bar{\gamma}$ caracteriza la bifurcación de Hopf del infinito. La anulación de $\bar{\gamma}$ es una situación no contemplada en el Teorema 5.10 que parece conducir a una degeneración de la bifurcación. Estudiaremos esta condición en la siguiente Sección, pero antes

examinaremos dos situaciones en las que no es posible la anulación de $\bar{\gamma}$. Las afirmaciones que se hacen a continuación, se deducen fácilmente del Teorema 5.10, utilizando la igualdad

$$\bar{\gamma} = (d - mT)(m - M) + m(D - MT)$$

y el desarrollo de t que aparece en (5.42).

Corolario 5.11 *Para el sistema (5.16) con $d \neq 0$, $m > 0$, $t_0 = d/m$ y $t - t_0$ suficientemente pequeño, las siguientes afirmaciones son válidas*

- (a) *Si $m - M = 0$ y $D - MT \neq 0$, el ciclo límite bifurcante predicho por el Teorema 5.10 existe para*

$$(D - MT)(d - mt) < 0,$$

y esto hace que la bifurcación sea supercrítica si $D - MT > 0$, y subcrítica si $D - MT < 0$. La situación se ilustra en las Figuras 5.1 y 5.2, donde las flechas indican el sentido de movimiento del parámetro correspondiente a la aparición del ciclo límite.

- (b) *Si $D - MT = 0$, $mT - d \neq 0$ y $m - M \neq 0$, el ciclo límite bifurcante existe para*

$$(m - M)(d - mT)(d - mt) < 0,$$

y esto hace que la bifurcación sea supercrítica si $(m - M)(d - mT) > 0$, y subcrítica si $(m - M)(d - mT) < 0$.

Como ya se dijo al comienzo del capítulo, un trabajo relacionado con la bifurcación de Hopf del infinito ha aparecido recientemente en [DKR01]. En dicho trabajo, se considera una clase de sistemas de control en dimensión n , que incluye los sistemas observables de dimensión 2 y 3 considerados en esta memoria, y se caracteriza cualitativamente la bifurcación de Hopf del infinito bajo ciertas hipótesis. Hacemos notar que los resultados de esta memoria más estrechamente relacionados con lo obtenido en [DKR01], es decir, los Teoremas 5.5 y 5.10, no sólo caracterizan de forma cualitativa y en todos los casos

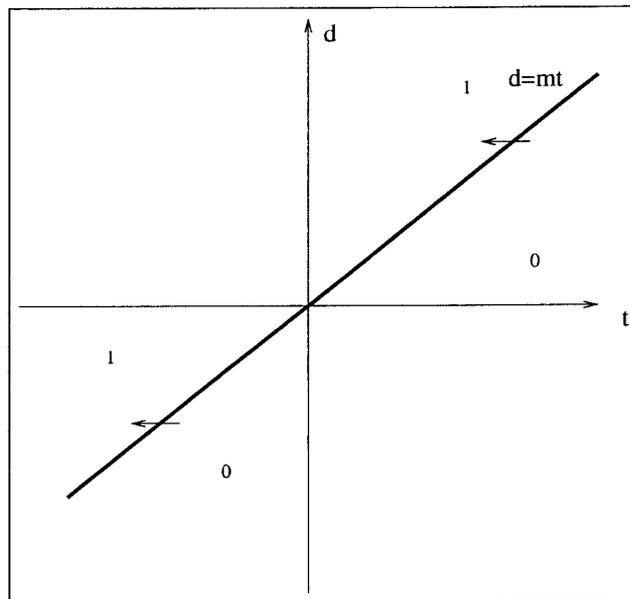


Figura 5.1: Número de soluciones positivas de (5.44) para $D - MT > 0$ y $m = M > 0$.

la bifurcación, sino que contienen información cuantitativa de indudable interés. Además, sus hipótesis son algo más restrictivas que las nuestras, como se comenta a continuación para el caso tridimensional.

Situándonos en el contexto del Teorema 5.10, para poder aplicar los resultados de [DKR01] necesitaríamos las hipótesis $d < 0$ (algo más restrictiva) y $m > 0$, y el papel de nuestro coeficiente $\bar{\gamma}$ es jugado por un coeficiente κ cuya definición es la siguiente. Se tiene que (salvo constantes multiplicativas)

$$\kappa = \mathbf{c}^T P_E \mathbf{b},$$

donde \mathbf{c} y \mathbf{b} son los vectores asociados a la forma de Luré del sistema en el punto crítico, es decir, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = (T - t_0, M - m, D - d)^T$, y P_E es la matriz de proyección sobre el autoespacio asociado al par de autovalores complejos imaginarios puros $(\pm i\sqrt{m})$ que, para el valor crítico de los parámetros, posee la matriz correspondiente a la parte lineal en el infinito (A_L , en nuestro caso). Dicha proyección ha de tomarse de forma que la descomposición corres-

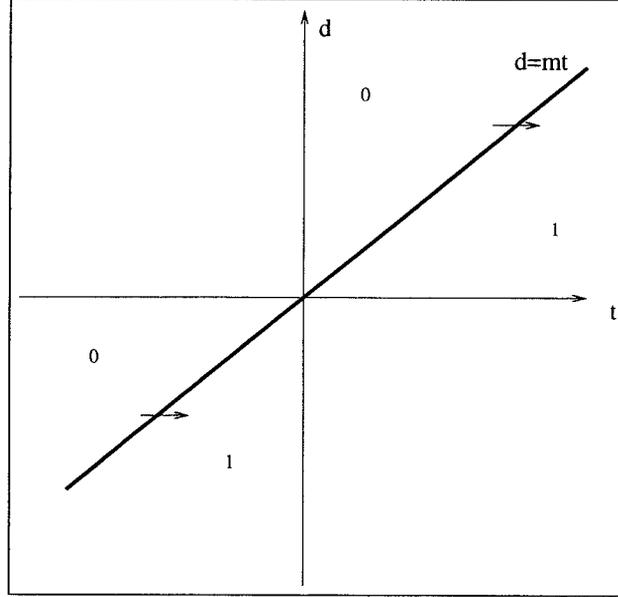


Figura 5.2: Número de soluciones positivas de (5.44) para $D - MT < 0$ y $m = M > 0$.

pendiente origine vectores pertenecientes a los espacios invariantes del sistema lineal asociado.

Resulta pues pertinente obtener la relación entre nuestro coeficiente $\bar{\gamma}$ y el coeficiente κ introducido en [DKR01]. Para tal fin, calculamos a continuación el valor de P_E , utilizando la descomposición

$$v = v_E + v_{E'},$$

donde E' es el autoespacio invariante complementario de E , y los vectores $v_E \in E$ y $v_{E'} \in E'$ representan las correspondientes proyecciones de $v \in \mathbb{R}^3$. Es fácil ver que E' viene generado por el autovector asociado al autovalor real t_0 , es decir, por el vector $v_0 = (1, 0, m)^T$. Definiendo $w_0^T = (t_0^2, -t_0, 1)$, autovector izquierdo de A_L para el valor crítico t_0 , que es ortogonal a todos los vectores de E , y premultiplicando la igualdad anterior por w_0^T , se llega a

$$P_{E'} = \frac{v_0 w_0^T}{w_0^T v_0},$$

de manera que

$$P_E = I - \frac{v_0 w_0^T}{w_0^T v_0}.$$

Finalmente, se tiene

$$\kappa = \mathbf{e}_1 P_E \mathbf{b} = \frac{1}{t_0^2 + m} [m(T - t_0) + t_0(M - m) - (D - d)],$$

y después de simplificar y usar la igualdad $d = mt_0$, queda

$$\kappa = \frac{1}{t_0^2 + m} (mT + \frac{d}{m}M - d - D) = -\frac{\bar{\gamma}}{m(t_0^2 + m)},$$

igualdad que establece la relación entre los signos de κ y $\bar{\gamma}$.

5.2.1. Degeneración de la bifurcación

Estudiamos ahora la posibilidad de que el coeficiente $\bar{\gamma}$ pueda anularse en un contexto biparamétrico. Antes de presentar los resultados principales de esta sección, enunciamos el siguiente lema de carácter auxiliar.

Lema 5.12 *Sea la función $h(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación*

$$h(x) = 0 \tag{5.44}$$

con $a \neq 0$, posee el número de soluciones positivas dadas en la Tabla 5.4 en función de a , b y c , donde $\bar{c} = b^2 / (4a)$. Además, para $ab < 0$ y $bc < 0$ podemos definir en el plano de parámetros (b, c) , la expresión dada por

$$h^*(b, c) = c - \frac{b^2}{4a}, \tag{5.45}$$

verificándose lo siguiente.

(i) *Cuando $c \cdot h^* < 0$, la ecuación (5.44) tiene dos soluciones positivas.*

(ii) *Cuando $h^* = 0$, la ecuación (5.44) sólo tiene la solución positiva $x = -b / (2a)$.*

$a > 0$	$b \geq 0$	$c \geq 0$	0
		$c < 0$	1
	$b < 0$	$c > \bar{c}$	0
		$c = \bar{c} > 0$	1
		$0 < c < \bar{c}$	2
		$c \leq 0$	1
$a < 0$	$b \leq 0$	$c \leq 0$	0
		$c > 0$	1
	$b > 0$	$c < \bar{c}$	0
		$c = \bar{c} < 0$	1
		$\bar{c} < c < 0$	2
		$c \geq 0$	1

Tabla 5.4: Número de soluciones positivas de $h(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, en función de a , b y c .

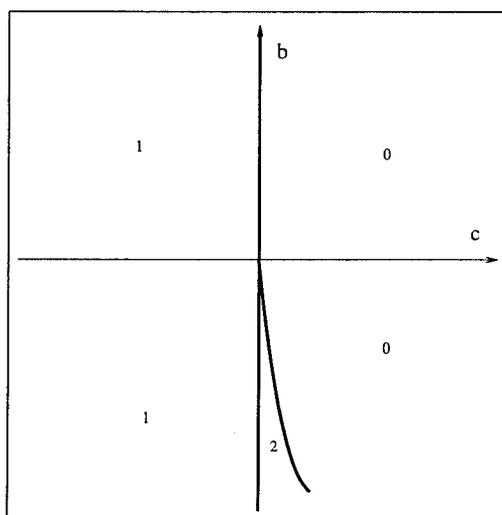


Figura 5.3: Curva $h^*(b, c) = 0$ y número de soluciones positivas de $h(x) = 0$ para $a > 0$.

(iii) Cuando $c \cdot h^* > 0$, la ecuación (5.44) no tiene soluciones positivas.

Demostración. La demostración es inmediata utilizando la expresión de las soluciones de la ecuación de segundo grado. ■

En la Figura 5.3 se ha representado el número de soluciones positivas de (5.44) para las distintas regiones del plano de parámetros (b, c) para el caso $a > 0$.

Para el análisis de la degeneración de la bifurcación, partimos del desarrollo de t (5.35) en función del tiempo de vuelo τ_C en la zona central. Deshaciendo el cambio del Lema 5.7 tenemos la expresión:

$$t = \frac{d}{m} + \frac{2\bar{\gamma}}{\pi m^{3/2}} \tau_C + \frac{1}{\pi d m^{5/2} (d^2 + m^3)} \left(\frac{t_{21}}{\pi m^{1/2} (d^2 + m^3)} + \frac{2t_{22}}{\exp(\pi d/m^{3/2}) + 1} \right) \tau_C^2 + O(\tau_C^3). \quad (5.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= dm - dM + Dm - m^2T, \\ t_{21} &= 2d^2m^8T^2 - 4dm^9MT + 2\pi d^3m^{13/2}T^2 + \pi d^2m^{17/2}T - 3\pi d^2m^{15/2}MT - \pi dm^{19/2}M \\ &\quad + 2\pi dm^{17/2}DT + \pi dm^{17/2}M^2 + \pi m^{21/2}D - \pi m^{19/2}DM - 6d^4m^5T^2 - 8d^3m^7T \\ &\quad + 8d^3m^6MT + 4d^2m^8M - 12d^2m^7DT - 4d^2m^7M^2 + 4dm^8DM + 2\pi d^5m^{7/2}T^2 \\ &\quad - 2\pi d^4m^{11/2}T - 2\pi d^4m^{9/2}MT - \pi d^3m^{15/2} + \pi d^3m^{13/2}M + 2\pi d^2m^{13/2}DM \\ &\quad - 2\pi dm^{15/2}D^2 + 8d^5m^4T - 4d^5m^3MT + 6d^4m^6 - 12d^4m^5M + 4d^4m^4DT \\ &\quad + 6d^4m^4M^2 + 16d^3m^6D - 16d^3m^5DM + 10d^2m^6D^2 - 3\pi d^6m^{5/2}T + \pi d^6m^{3/2}MT, \\ t_{22} &= (d\bar{\gamma} + m^3(M - m) + dm(D - mT)) (d^2(mT - d) + m^2(mD - dM)). \end{aligned}$$

La expresión (5.46) resume toda la información local de la bifurcación en términos de los parámetros originales del problema, ya que proporciona para cada punto del plano (t, d) y en función del resto de parámetros, la existencia o no de soluciones con $\tau_C > 0$, que corresponden a órbitas periódicas del sistema (5.16).

En lo que sigue estudiamos la primera degeneración de la bifurcación, es decir, el caso en que $\bar{\gamma}$ se anula pero se tiene un valor no nulo del coeficiente de orden 2 en τ_C dado en (5.46). Así pues, supondremos ahora que trabajamos con un valor constante del parámetro m , y moviéndonos en el plano de parámetros (t, d) sobre la línea $d = mt$ buscamos un valor crítico del parámetro $d \neq 0$ donde lo anterior sea posible.

A la vista del Corolario 4.24 asumimos en lo que sigue que $m - M \neq 0$, y denotamos con $d^* \neq 0$ el valor para el cual $\bar{\gamma}$ se anula y mediante $t^* \neq 0$ el correspondiente valor de t sobre la línea $d = mt$, es decir,

$$d^* = m \frac{mT - D}{m - M}, \quad t^* = \frac{mT - D}{m - M}. \quad (5.47)$$

Esto nos permite definir unos nuevos parámetros locales \tilde{d} y \tilde{t} entorno al punto (t^*, d^*) como

$$\tilde{d} = d - d^*, \quad \tilde{t} = t - t^*, \quad (5.48)$$

de forma que la ecuación (5.46) se convierte en

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{d}}{m} + b_1(\tilde{d})\tau_C + b_2(\tilde{d})\tau_C^2 + O(\tau_C^3) \quad (5.49)$$

donde

$$\begin{aligned} b_1(\tilde{d}) &= b_{11}\tilde{d}, \\ b_2(\tilde{d}) &= b_{20} + O(\tilde{d}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{2m - M}{\pi m^{3/2}}, \\ b_{20} &= \frac{(D - MT)(t^{*2} + m) \tanh[\pi t^* / (2m^{1/2})]}{\pi (m - M)^4 t^*}. \end{aligned}$$

Necesitamos a partir de este momento, introducir la hipótesis adicional de que b_{20} no sea nulo (de no ser así, la degeneración sería de orden mayor) lo que equivale a imponer $D - MT \neq 0$.

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, donde utilizamos el Lema 5.12 para obtener información respecto al número de órbitas periódicas relacionadas con la bifurcación que estamos estudiando en torno a su punto de degeneración.

Teorema 5.13 Consideremos el sistema (5.16) con $d^* \neq 0$, $m > 0$, $m - M \neq 0$ y $D - MT \neq 0$. Sean (\tilde{t}, \tilde{d}) los parámetros anteriormente definidos en (5.48) en un entorno del origen, que indican las coordenadas respecto al punto crítico (t^*, d^*) del plano (t, d) . Entonces, el número de soluciones de la ecuación (5.49) con τ_C positivo y suficientemente pequeño es el siguiente.

- (a) Si $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) < 0$ la ecuación (5.49) tiene una única solución positiva, correspondiente a una órbita periódica de la ecuación (5.16),
- (b) Cuando $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) > 0$ y $(m - M)(\tilde{d} - m\tilde{t})\tilde{d} > 0$, no hay soluciones positivas,
- (c) Cuando $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) > 0$ y $(m - M)(\tilde{d} - m\tilde{t})\tilde{d} < 0$, existe una curva de expresión local

$$\tilde{t}_{SN} = \frac{\tilde{d}}{m} + \frac{(m - M)^6 t^* \coth[\pi t^* / (2m^{1/2})]}{\pi m^3 (t^{*2} + m)(D - MT)} \tilde{d}^2 + O(\tilde{d}^3),$$

de manera que se verifica lo siguiente:

- (i) Si \tilde{t} está comprendido entre \tilde{t}_{SN} y \tilde{d}/m , la ecuación (5.49) tiene dos soluciones positivas, correspondientes a sendas órbitas periódicas de (5.16),
- (ii) Cuando $\tilde{t} = \tilde{t}_{SN}$, la ecuación (5.49) tiene una única solución positiva, correspondiente a una órbita periódica de (5.16),
- (iii) Si $\tilde{t} \cdot \text{sgn}(D - MT) > \tilde{t}_{SN} \cdot \text{sgn}(D - MT)$ no existen soluciones positivas.

Demostración. La idea general de la prueba será partir de la ecuación (5.49) y hacer algunas manipulaciones sobre ella para poder aplicar el Lema 5.12. Para dicho fin, comenzamos definiendo los parámetros

$$v_1 = \frac{\tilde{d}}{m} - \tilde{t}, \quad v_2 = \tilde{d}, \quad (5.50)$$

con lo que la ecuación (5.49) toma la forma

$$v_1 + b_1(v_2)\tau_C + b_2(v_2)\tau_C^2 + O(\tau_C^3) = 0. \quad (5.51)$$

Limitamos nuestro estudio de esta ecuación a un entorno suficientemente pequeño del origen $(v_1, v_2, \tau_C) = (0, 0, 0)$. En dicho entorno, podemos aproximar $b_2(v_2)$ por $b_{20} \neq 0$, de manera que el número de soluciones con $\tau_C > 0$ de la ecuación (5.51) truncada a orden 2 en v_1, v_2 y τ_C , es decir,

$$g(\tau) = v_1 + b_{11}v_2\tau_C + b_{20}\tau_C^2 = 0, \quad (5.52)$$

coincide con el número de soluciones de la ecuación (5.46), que se corresponde con el de las órbitas periódicas del sistema (5.16).

A partir de las definiciones de b_{20}, b_{11}, v_1 y v_2 en (5.49) y (5.50), y teniendo en cuenta que $m > 0$ se comprueba que sus signos son los siguientes

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(b_{20}) &= \operatorname{sgn}(D - MT), \\ \operatorname{sgn}(b_{11}) &= \operatorname{sgn}(m - M), \\ \operatorname{sgn}(v_1) &= \operatorname{sgn}(\tilde{d} - m\tilde{t}) = \operatorname{sgn}(d - mt), \\ \operatorname{sgn}(v_2) &= \operatorname{sgn}(\tilde{d}). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Si identificamos $h(x) = g(\tau)$, $c = v_1$, $b = b_{11}v_2$ y $a = b_{20}$, y aplicamos el Lema 5.12 a la ecuación (5.52), a la vista de la Tabla 5.4 tenemos que la ecuación (5.52) tiene una única solución positiva si $b_{20}v_1 < 0$ y no tiene soluciones positivas si $b_{20}v_1 > 0$ y $b_{11}v_1v_2 > 0$. Si tenemos en cuenta las igualdades de signos (5.53), estas condiciones equivalen a $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) < 0$, y a $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) > 0$ junto con $\tilde{d}(m - M)(D - MT) < 0$, respectivamente. Para puntos del plano (t, d) suficientemente próximos al punto crítico (t^*, d^*) y por el razonamiento del principio de la prueba, el número de soluciones positivas de (5.51) coincide con el de (5.52), quedando probados los apartados **(a)** y **(b)** del teorema.

Si se cumple $b_{20}v_1 > 0$ y $b_{11}v_1v_2 < 0$, o equivalentemente $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) > 0$ y $\tilde{d}(m - M)(D - MT) < 0$, el Lema 5.12 asegura la existencia de la curva $h^*(b, c) = 0$, que expresada en las variables v_1 y v_2 , y en un entorno del origen $(v_1, v_2) = (0, 0)$, toma la forma

$$v_1 = \frac{b_{11}^2}{4b_{20}}v_2^2.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (5.53), si $(D - MT)(\tilde{d} - m\tilde{t}) > 0$ y $\tilde{d}(m - M)(D - MT) < 0$, obtenemos la existencia en el plano (t, d) de la curva

$$\tilde{t}_{SN} = \frac{\tilde{d}}{m} + \tilde{t}_{NL},$$

con

$$\tilde{t}_{NL} = \frac{(m - M)^6 t^* \coth [\pi t^* / (2m^{1/2})]}{\pi m^3 (t^{*2} + m)(D - MT)} \tilde{d}^2,$$

donde el número de soluciones positivas de (5.52) es igual a 1. La condición $c \cdot h^* < 0$ se traduce, para las variables \tilde{t} y \tilde{d} cerca del punto crítico, como

$$\left(\frac{\tilde{d}}{m} - \tilde{t} \right) \left(\frac{\tilde{d}}{m} - \tilde{t} + \tilde{t}_{NL} \right) < 0;$$

es decir, si \tilde{t} está comprendido entre \tilde{d}/m y $\tilde{d}/m + \tilde{t}_{NL}$, la ecuación (5.52) tiene dos soluciones positivas. La condición $c \cdot h^* > 0$ depende del signo de \tilde{t}_{NL} , siendo equivalente a $\tilde{t} > \tilde{d}/m + \tilde{t}_{NL}$ si $(m - M)\tilde{d} > 0$, y a $\tilde{t} < \tilde{d}/m + \tilde{t}_{NL}$ si $(m - M)\tilde{d} < 0$. De nuevo, teniendo en cuenta que nos movemos en un entorno suficientemente pequeño del punto crítico queda probado el punto (c)-(iii). ■

Las hipótesis de este teorema hacen que nos encontremos en uno de los siguientes casos:

1. $D - MT > 0, m - M > 0,$
2. $D - MT > 0, m - M < 0,$
3. $D - MT < 0, m - M > 0,$
4. $D - MT < 0, m - M < 0.$

Para cada uno de estos cuatro casos, la información que proporciona el teorema se resume en las Figuras 5.4-5.7. El número que figura en cada región expresa el número de soluciones de la ecuación (5.49). En todos los casos existen regiones con 0, 1 ó 2 soluciones, y la curva $\tilde{t} = \tilde{t}_{SN}(\tilde{d})$ del plano (\tilde{t}, \tilde{d}) es la frontera entre las regiones con 0 y 2 soluciones, de manera que sobre ella hay una única solución. Esta curva es tangente a la recta $d - mt = 0$ en el punto de degeneración.

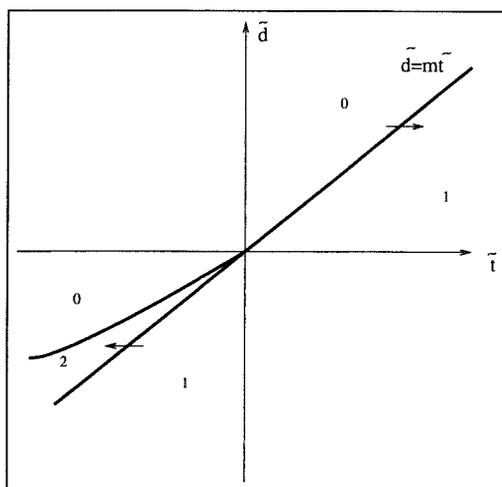


Figura 5.4: Número de soluciones positivas de (5.49) para $D - MT > 0$ y $m - M > 0$.

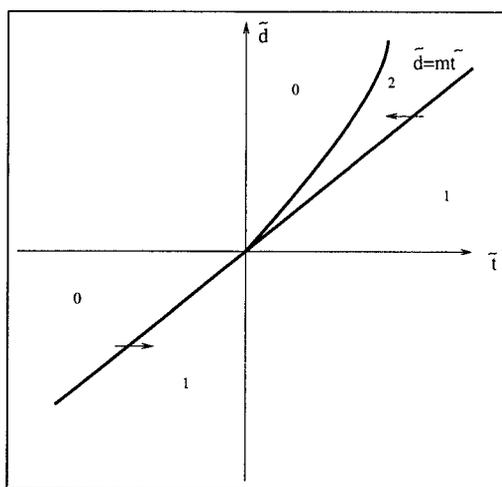


Figura 5.5: Número de soluciones positivas de (5.49) para $D - MT > 0$ y $m - M < 0$.

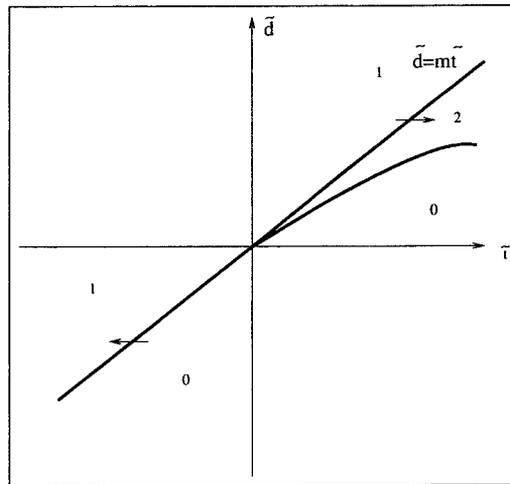


Figura 5.6: Número de soluciones positivas de (5.49) para $D - MT < 0$ y $m - M > 0$.

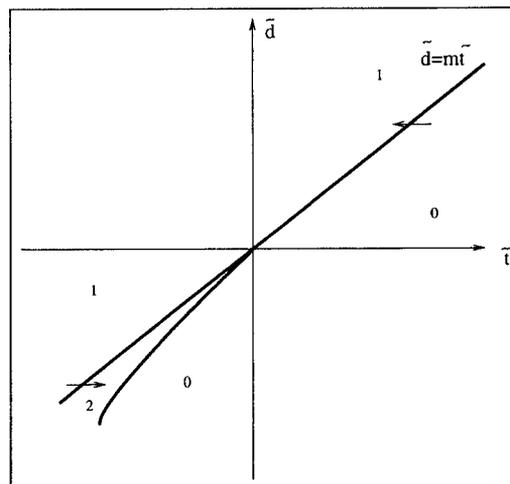


Figura 5.7: Número de soluciones positivas de (5.49) para $D - MT < 0$ y $m - M < 0$.

La siguiente proposición es análoga a la Proposición 5.9 cuando $\bar{\gamma}_1$ vale cero, por lo que se demuestran los apartados que requieren una prueba distinta a la allí efectuada.

Con relación a las figuras anteriores, el resultado que se enuncia estudia la transición correspondiente al eje horizontal $\tilde{d} = 0$.

Proposición 5.14 *Asumamos que $M \neq 1$, $D - MT \neq 0$, y que $d = d^* \neq 0$, tal que $\bar{\gamma}_1 = 0$. Sea \mathbf{z} una solución de las ecuaciones de cierre (5.27) en un entorno de $\bar{\mathbf{z}}$ definido en el Lema 5.8, que corresponde a un valor $\tau_C > 0$ y suficientemente pequeño. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

(a) *El sistema (5.26) posee un ciclo límite con simetría respecto del origen que interseca transversalmente a Σ_1 y a Σ_{-1} , y tiene tiempos de vuelo τ_C en la zona C y τ_L en la zona L.*

(b) *El valor correspondiente de t verifica*

$$(D - MT)(t - d^*) > 0.$$

(c) *Los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son*

$$\begin{aligned} \mu_I &= -2(D - MT) \frac{\tanh(\pi d^*/2)}{d^*} \tau_C^2 + O(\tau_C^3), \\ \mu_{II} &= 2\pi d^* + 2(T - d^*M) \tau_C + \\ &\quad + 2(D - MT) d^* \tanh(\pi d^*/2) \tau_C^2 + O(\tau_C^3). \end{aligned}$$

Demostración. Para el apartado (a) ver la prueba de la Proposición 5.9.

Respecto al apartado (b), en primer lugar determinamos $t(\tau_C)$ sustituyendo $\bar{\gamma}_1$ por cero en la expresión (5.46) obteniendo

$$t = d^* - (d^{*2} + 1)(M - 1)(T - d^*) \frac{\tanh(\pi d^*/2)}{\pi d^*} \tau_C^2 + O(\tau_C^3). \quad (5.54)$$

Teniendo en cuenta que

$$\bar{\gamma}_1 = (M - 1)(T - d^*) + D - MT$$

se anula por hipótesis, deducimos que $(M - 1)(T - d^*)$ tiene signo opuesto a $D - MT$. Usando ahora que $\tanh(\pi d/2)/d$ siempre es positivo, de la ecuación (5.54) se deduce que, para τ_C suficientemente pequeño, la expresión $t - d^*$ tiene el mismo signo que $D - MT$ cuando existe el ciclo límite, con lo que queda probado el apartado (b).

No es difícil ver que si sustituimos $\bar{\gamma}_1 = 0$ en la Proposición 5.9, los términos significativos de μ_I son todos nulos, por ello repetimos la prueba aumentando el grado de los desarrollos de λ_I y λ_{II} , los autovalores de $D\pi_1(\mathbf{p}_0)$, hasta orden 2. Recordamos la notación $E_0 = e^{A_L(0)\tau_L(0)}$ y $e_0 = e^{\pi d}$ y recalculamos el desarrollo en serie de MacLaurin respecto τ_C del producto de exponenciales

$$e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)} e^{A_C\tau_C}$$

escribiendo

$$\begin{aligned} & \left(E_0 + \tau_C \frac{d}{d\tau_C} \left(e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)} \right) \Big|_{\tau_C=0} + \frac{\tau_C^2}{2} \frac{d^2}{d\tau_C^2} \left(e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)} \right) \Big|_{\tau_C=0} + \dots \right) \times \\ & \times \left(I + A_C\tau_C + A_C^2 \frac{\tau_C^2}{2} + \dots \right) \\ & = E_0 \left\{ I + \tau_C [A'_L\tau_L + A_L\tau'_L]_{\tau_C=0} + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_C^2}{2!} [A''_L\tau_L + 2A'_L\tau'_L + A_L\tau''_L + (A'_L\tau_L + A_L\tau'_L)^2]_{\tau_C=0} + \dots \right\} \times \\ & \times \left(I + A_C\tau_C + A_C^2 \frac{\tau_C^2}{2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo $\tau_C = 0$ en los desarrollos (5.28) a (5.34), obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_L(0) &= \pi, \\ \tau'_L(0) &= -M, \\ \tau''_L(0) &= 0, \\ A'_L(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$A''_L(0) = -2(d^2 + 1)(M - 1)(T - d) \frac{\tanh(\pi d^*/2)}{\pi d^*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando los valores anteriores, el producto de exponenciales se convierte en

$$e^{A_L(\tau_C)\tau_L(\tau_C)}e^{A_C\tau_C} = H_0 + \tau_C H_1 + \frac{\tau_C^2}{2} H_2 + \dots$$

donde

$$H_0 = E_0 = \frac{1}{d^2 + 1} \begin{bmatrix} e_0 d^2 - 1 & -(e_0 + 1)d & e_0 + 1 \\ 0 & -(e_0 + 1) & 0 \\ (e_0 + 1)d^2 & -(e_0 + 1)d & e_0 - d^2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \frac{1}{d^2 + 1} \begin{bmatrix} \Phi_1 e_0 + \Phi_2 & (e_0 d^2 - 1)(M - 1) & -(e_0 + 1)(M - 1)d \\ 0 & 0 & -(d^2 + 1)(M - 1) \\ \Phi_1 e_0 - d^2 \Phi_2 & (e_0 + 1)(M - 1)d^2 & (e_0 + 1)(M - 1)d \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \frac{1}{d^2 + 1} \begin{bmatrix} \Theta_1 e_0^2 + \Theta_2 e_0 + \Theta_3 & \Theta_7 e_0 + \Theta_8 & (e_0 d^2 - 1)(M - 1)^2/2 \\ \Theta_4 & (d^2 + 1)(M - 1)M/2 & 0 \\ \Theta_5 e_0 + \Theta_6 & \Theta_7 e_0 + \Theta_9 & d^2 (e_0 + 1)(M - 1)^2/2 \end{bmatrix},$$

con

$$\Phi_1 = Md^3 - Td^2 + d - T,$$

$$\Phi_2 = d(1 - M),$$

$$\Theta_1 = (M^2 + 2M - 2)d^5 + 2(-2M + 1)Td^4 + (4M + T^2 - 3)d^3 + 2(-2M + 1)Td^2 + dT^2,$$

$$\Theta_2 = (M^2 - 2M + 2)d^5 - 2d^4T + (-2M^2 + M + T^2 + 2)d^3 + 2(M - 2)Td^2 + (-M^2 - M + T^2 + 2)d + 2(M - 1)T,$$

$$\Theta_3 = (-2M^2 + 5M - 3)d^3 + 2(-M + 1)Td^2 + (-M^2 + 3M - 2)d - 2(M - 1)T,$$

$$\Theta_4 = -(d^2 + 1)(M - 1)(2dM - d + T)/2,$$

$$\Theta_5 = (M^2 + 2M - 2)d^4 + 2(-M + 1)Td^3 + (4M + T^2 - 3)d^2 + 2(-2M + 1)Td + T^2,$$

$$\Theta_6 = (-2M + 2)d^4 + (M - 1)Td^3 + (-M^2 + 1)d^2 + (M - 1)Td,$$

$$\Theta_7 = M(2 - M)d^3 - Td^2 + d - T,$$

$$\Theta_8 = (M - 1)^2 d,$$

$$\Theta_9 = (M - 1)d^3 + M(M - 1)d.$$

La matriz H_0 tiene autovalores -1 doble y $\lambda_0 = e_0 = e^{\pi d}$, este último con autovector asociado $v_0 = (1, 0, 1)^T$. Asumiremos que es λ_{II} el autovalor que

para $\tau_C = 0$ coincide con λ_0 , y que tiene el desarrollo

$$\lambda_{II} = \lambda_0 + \lambda_1 \tau_C + \lambda_2 \tau_C^2 + \dots$$

Como hay garantías de que $e^{\pi d}$ es un autovalor simple se verifica (ver Sección 2.8 de [Wi65])

$$(H_0 + \tau_C H_1 + \tau_C^2 H_2 + \dots) (v_0 + \tau_C v_1 + \tau_C^2 v_2 + \dots) = \lambda_{II} (v_0 + \tau_C v_1 + \tau_C^2 v_2 + \dots) \quad (5.55)$$

Igualando potencias de orden 1 en τ_C en (5.55), obtenemos

$$H_1 v_0 + H_0 v_1 = \lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_0, \quad (5.56)$$

y si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por $w_0^T = (d^2, -d, 1)$, autovector izquierdo de H_0 correspondiente a λ_0 , se tendrá

$$w_0^T H_1 v_0 + w_0^T H_0 v_1 = \lambda_0 w_0^T v_1 + \lambda_1 w_0^T v_0.$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta que $w_0^T H_0 = \lambda_0 w_0^T$ determinamos

$$\lambda_1 = \frac{w_0^T H_1 v_0}{w_0^T v_0},$$

y sustituyendo los valores de λ_0 , v_0 y w_0 , obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\zeta}{d^2 + 1} e_0,$$

con

$$\zeta = -Md^3 + Td^2 - Md + T.$$

Igualando potencias de orden 2 en τ_C en (5.55), obtenemos

$$H_2 v_0 + H_1 v_1 + H_0 v_2 = \lambda_0 v_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_0,$$

y si multiplicamos ahora la anterior igualdad por la izquierda por w_0^T , se tendrá

$$w_0^T H_2 v_0 + w_0^T H_1 v_1 + w_0^T H_0 v_2 = \lambda_0 w_0^T v_2 + \lambda_1 w_0^T v_1 + \lambda_2 w_0^T v_0. \quad (5.57)$$

Para poder despejar λ_2 es necesario calcular previamente v_1 de la ecuación (5.56), que es equivalente al sistema compatible indeterminado

$$(H_0 - \lambda_0 I) v_1 = -(H_1 - \lambda_1 I) v_0,$$

con solución

$$v_1 = \mu v_0 + \frac{M-1}{(e_0+1)} \begin{bmatrix} -d \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cualquier valor real del parámetro μ .

La dependencia del parámetro μ desaparece al sustituir en la ecuación (5.57), quedando λ_2 determinado de forma única por la igualdad

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{w_0^T (H_2 v_0 + (H_1 - \lambda_1 I) v_1)}{w_0^T v_0} = \frac{e_0^2 (-dM + T)^2}{e_0 + 1} + \\ &+ (-d^2 M^2 + 2d^2 M - 2d^2 + 2dT - T^2) \frac{e_0 (e_0 - 1)}{2(e_0 + 1)}. \end{aligned}$$

A partir de (5.39), para el autovalor simple λ_{II} ya calculado se cumplirá

$$\begin{aligned} \mu_{II} &= 2 \log (\lambda_0 + \lambda_1 \tau_C + \lambda_2 \tau_C^2 + O(\tau_C^2)) = \\ &= 2\pi D + 2 \log (1 + e^{-\pi d} \lambda_1 \tau_C + e^{-\pi d} \lambda_2 \tau_C^2 + O(\tau_C^3)) = \\ &= 2\pi D + 2e^{-\pi d} \lambda_1 \tau_C + (2\lambda_2 e^{-\pi d} - \lambda_1^2 e^{-2\pi d}) \tau_C^2 + O(\tau_C^3), \end{aligned}$$

y sustituyendo λ_1 y λ_2 , se obtiene el valor de μ_{II} del enunciado.

Utilizando ahora la ecuación (5.40), junto con los desarrollos de τ_L (5.34) y de t (5.35), determinamos el otro exponente característico de la órbita periódica completando finalmente el enunciado de la Proposición. ■

Gracias a la proposición anterior, se obtiene el siguiente resultado, que es análogo al Teorema 5.10 para el caso $\bar{\gamma} = 0$. Su demostración es similar y se demuestran sólo las diferencias con aquél.

Teorema 5.15 *Consideremos el sistema (5.16) con $m > 0$, $m - M \neq 0$, y $D - MT \neq 0$. Sean*

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{mT - D}{m - M}, \\ d^* &= m \frac{mT - D}{m - M}, \end{aligned}$$

y supongamos que $d = d^ \neq 0$, de manera que $\bar{\gamma} = 0$. Para $t = t^*$ el sistema experimenta una bifurcación de Hopf a partir de una órbita periódica del infinito,*

apareciendo un ciclo límite transversal a las fronteras Σ_1 y Σ_{-1} , simétrico respecto del origen, para $(D - MT)(t - t^*) > 0$ y $t - t^*$ suficientemente pequeño.

El periodo P de la oscilación periódica es una función analítica en 0, en la variable

$$\left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{1/2},$$

y su desarrollo es

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} + \left(\frac{\pi m^{1/2} t^* \coth [\pi t^* / (2m^{1/2})]}{t^{*2} + m} \right)^{1/2} \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{1/2} + O \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right),$$

mientras que la amplitud a (medida como el máximo en $|x_3|$) posee el siguiente desarrollo en serie en la misma variable:

$$a = \left(\frac{(t^{*2} + m) \tanh [\pi t^* / (2m^{1/2})]}{\pi m^{3/2} t^*} \right)^{1/2} \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{-1/2} + O(1),$$

Los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica son

$$\begin{aligned} \mu_I &= \frac{2m^{1/2}}{t^{*2} + m} (t - t^*) + O \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{3/2}, \\ \mu_{II} &= \frac{2\pi d^*}{m^{3/2}} + \frac{2\pi^{1/2} (mT - Mt^*)}{m^{3/4} (t^{*2} + m)^{1/2}} \left(\frac{t^*}{\tanh [\pi t^* / (2m^{1/2})]} \right)^{1/2} \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{1/2} \\ &+ O \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right). \end{aligned}$$

Demostración. A partir de la ecuación (5.46), haciendo $d = d^*$, obtenemos

$$t - t^* = \frac{(t^{*2} + m) \tanh [\pi t^* / (2m^{1/2})]}{\pi m^{1/2} t^*} (D - MT) \tau_C^2 + O(\tau_C^3). \quad (5.58)$$

Teniendo en cuenta que la expresión

$$\frac{(t^{*2} + m) \tanh [\pi t^* / (2m^{1/2})]}{m^{1/2} t^*}$$

es siempre positiva, es obvio que, para $\tau_C > 0$ y suficientemente pequeño, el signo de $t - t^*$ debe coincidir con el de $D - MT$, obteniendo la correspondiente conclusión del enunciado.

Para obtener $\tau_C > 0$ en función de t , asumiendo ya que $(D - MT)(t - t^*) > 0$, es posible aplicar el Lema 4.10 con $n = 2$ a la ecuación (5.58) (ver Observación 4.11). Haciendo

$$\eta = \frac{t - t^*}{D - MT}$$

y $\xi = \tau_C$, podemos asegurar la existencia de una función χ , analítica en 0 para la variable $\eta^{1/2}$, con $\chi(0) \neq 0$, y tal que $\tau_C = \eta^{1/2}\chi(\eta^{1/2}) > 0$, cuyo desarrollo en serie de Taylor es

$$\tau_C = \left(\frac{\pi m^{1/2} t^*}{(t^{*2} + m) \tanh[\pi t^*/(2m^{1/2})]} \right)^{1/2} \left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right)^{1/2} + O\left(\frac{t - t^*}{D - MT} \right). \quad (5.59)$$

Debido a la simetría, el período de la órbita es igual a $P = 2(\tau_C + \tau_L)$. Deshaciendo el cambio del Lema 5.7 en (5.34), sustituyendo en ella (5.59) y utilizando la fórmula anterior para el período, obtenemos la serie que figura en el enunciado.

Siguiendo la demostración del Teorema 5.10 para el caso $d = d^*$, tenemos para la amplitud a de la órbita periódica la siguiente expresión

$$a = \frac{2d^*}{\tau_C} + O(1),$$

donde utilizando ahora la serie (5.59) y deshaciendo el cambio del Lema 5.7, se llega al resultado del enunciado.

Deshaciendo ese mismo cambio en las expresiones obtenidas en la Proposición 5.14 para los logaritmos de los multiplicadores característicos de la órbita periódica, resulta

$$\begin{aligned} \mu_I &= 2(m - M)(mT - d^*) \frac{\tanh(\pi d^*/2m^{3/2})}{d^*} \tau_C^2 + O(\tau_C^3), \\ \mu_{II} &= \frac{2\pi d^*}{m^{3/2}} + 2 \frac{(m^2 T - d^* M)}{m^2} \tau_C + O(\tau_C^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora τ_C por (5.59), obtenemos los valores que figuran en el enunciado. ■

$M - m \neq 0$	$D - MT \neq 0$	$\bar{\gamma} \neq 0$	Teorema 5.10
		$\bar{\gamma} = 0$	Teorema 5.15
	$D - MT = 0$	$d - mT \neq 0$	Corolario 5.11 (b)
		$d - mT = 0$	Autovalor real compartido en el punto crítico, $rg(\mathcal{C}) = 2$
$M - m = 0$	$D - MT \neq 0$	Corolario 5.11 (a)	
	$D - MT = 0$	Pareja de autovalores complejos compartida en el punto crítico, $rg(\mathcal{C}) = 1$	

Tabla 5.5: Caso S3CPL₃ observable: tabla resumen de la bifurcación de Hopf del infinito con $m > 0$ y $d \neq 0$.

Haciendo ya un balance de los resultados obtenidos para la bifurcación objeto de este Capítulo, presentamos el resumen de los diversos casos en la Tabla 5.5.

Como se ve en la tabla, aparecen dos casos de degeneración no analizados hasta ahora. Como veremos enseguida, en esos casos falla la controlabilidad para el valor crítico del parámetro de bifurcación. No entraremos en un análisis en profundidad de estos casos, pues serán objeto de futuras investigaciones.

Caso $M - m \neq 0$, $D - MT = 0$ y $d - mT = 0$ (con $m > 0$ y $d \neq 0$)

Para el valor crítico del parámetro de bifurcación $mt - d = 0$ se verifica que $T = t$ y el sistema (5.16) se convierte en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ mt & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (M - m) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} \text{sat}(x_1).$$

Este sistema degenerado ya ha aparecido en 4.83 para la bifurcación foco-centro-ciclo límite, en el caso $M - m \neq 0$, $d - mt = 0$ y $D - Mt = 0$ (con $M > 0$), al final de la Sección 4.2.1. La única diferencia con aquel caso estriba en que allí se exigía la hipótesis $M > 0$, mientras que aquí necesitamos $m > 0$.

De todas formas, la conclusión allí obtenida es similar para este caso, en el sentido de poder asegurar la existencia de un continuo de órbitas periódicas de tres zonas (ahora de gran amplitud).

Cuando en las hipótesis anteriores se verifican $M > 0$ y $m > 0$ simultáneamente, los parámetros alcanzan su valor crítico tanto para la bifurcación foco-centro-ciclo límite como para la Hopf del infinito a la vez, y se verifica la igualdad

$$\frac{D}{M} = T = t = \frac{d}{m} \neq 0,$$

por lo que $Dd > 0$ y la Proposición 3.1 asegura que no existen equilibrios en las zonas externas. Entonces, se puede probar que el continuo de órbitas periódicas que se inicia en la órbita más externa del centro se extiende hasta la órbita periódica del infinito. Todas estas órbitas periódicas de tres zonas son, obviamente, soluciones de las ecuaciones de cierre para distintos valores de $\tau_C \in (0, \pi)$, permaneciendo constantes los valores de t , m y d . En particular, nótese que en ese caso $\sigma = 0$, $\omega = \sqrt{m}$ y $\lambda = T$.

Si aplicamos el Lema 5.8 a las ecuaciones de cierre (5.27) con $D = MT$ y $d = mT$, y deshacemos el cambio de variables del Lema 5.7, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= O(\tau_C^5), \\ \omega &= \sqrt{m} + O(\tau_C^5), \\ \lambda &= T + O(\tau_C^5), \\ r &= \frac{\tau_C}{2} - \frac{T}{4}\tau_C^2 + \frac{M + 3T^2}{24}\tau_C^3 - \frac{2M + 3T^2}{48}T\tau_C^4 + O(\tau_C^5), \\ u &= 1 - T\tau_C + \frac{T^2}{2}\tau_C^2 - \frac{M + 3T^2}{12}T\tau_C^3 + \frac{2M + 3T^2}{24}T^2\tau_C^4 + O(\tau_C^5), \\ v_0 &= T - \frac{T^2}{2}\tau_C + \frac{T^3}{4}\tau_C^2 - \frac{M + 3T^2}{24}T^2\tau_C^3 + \frac{2M + 3T^2}{48}T^3\tau_C^4 + O(\tau_C^5), \\ v_1 &= T - \frac{T^2}{2}\tau_C + \frac{T^3}{4}\tau_C^2 - \frac{M + 3T^2}{24}T^2\tau_C^3 + \frac{2M + 3T^2}{48}T^3\tau_C^4 + O(\tau_C^5), \\ \tau_L &= \frac{\pi}{\sqrt{m}} - \frac{M}{m}\tau_C + \frac{M^2(M - m)}{12m^2}\tau_C^3 + O(\tau_C^5), \end{aligned}$$

Fijándonos en las tres primeras igualdades, el resultado es coherente con la afirmación anterior y al variar $\tau_C > 0$, el valor $mt - d$ permanecería constante

e igual a 0. Esto nos vuelve a decir que, para este caso degenerado, la técnica de las ecuaciones de cierre sólo proporciona información para el valor crítico del parámetro de la bifurcación, pero no en un entorno del mismo.

A partir de r , u , v_0 y v_1 podemos obtener series para x_2^0 , x_2^1 , x_3^0 y x_3^1 , que nos proporcionarían las intersecciones con Σ_1 y Σ_{-1} de las infinitas órbitas periódicas existentes para $mt - d = 0$, parametrizadas en τ_C .

Caso $M = m > 0$ y $D - MT = 0$ (con $d \neq 0$)

Para el valor crítico del parámetro de bifurcación, se tiene $d - mt = 0$, de forma que este caso coincide con el estudiado al final de la Sección 4.2.1 y todo lo dicho allí es válido.

Si aplicamos el Lema 5.8 a las ecuaciones de cierre (5.27) con $D = MT$ y $M = m$, y deshacemos el cambio de variables del Lema 5.7, obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma &= O(\tau_C^6), \\ \omega &= \sqrt{m} + O(\tau_C^6), \\ \lambda &= \frac{d}{m} + O(\tau_C^6), \\ r &= \frac{\tau_C}{2} - \frac{d}{4m}\tau_C^2 + O(\tau_C^3), \\ u &= 1 - \frac{d}{m}\tau_C - \Phi\tau_C^2 + O(\tau_C^3), \\ v_0 &= \frac{d}{m} + \Phi\tau_C + O(\tau_C^2), \\ v_1 &= \frac{d}{m} + \Phi\tau_C + O(\tau_C^2), \\ \tau_L &= \frac{\pi}{\sqrt{m}} - \tau_C + O(\tau_C^6),\end{aligned}$$

donde

$$\Phi = \frac{m(m^3T - dm^2 + d^2T)(e^{\pi d/m^{3/2}} - 1) - 2d^3e^{\pi d/m^{3/2}}}{2dm^2(e^{\pi d/m^{3/2}} + 1)}.$$

Recordemos que, al tratar este caso en el Capítulo 4, ya conjeturamos que todos los coeficientes (y no sólo los calculados) de los desarrollos para los

autovalores de la matriz que determina la bifurcación son nulos. Lo mismo cabe decir en este caso.

A partir de r , u , v_0 y v_1 podemos obtener desarrollos en serie para x_2^0 , x_2^1 , x_3^0 y x_3^1 , que nos proporcionarían las intersecciones con Σ_1 y Σ_{-1} de las infinitas órbitas periódicas existentes para $mt - d = 0$ parametrizadas en τ_C . Al variar $\tau_C > 0$, el valor $mt - d$ permanecería constante e igual a 0, y de nuevo la técnica de las ecuaciones de cierre sólo proporciona información para el valor crítico del parámetro de la bifurcación, pero no en un entorno del mismo.

Conclusiones

En las siguientes líneas intentamos resumir y sintetizar los resultados que consideramos más relevantes en esta memoria que, tras el primer capítulo introductorio, se han desarrollado en los Capítulos 2 a 5.

En primer lugar, se ha hecho una breve revisión de las ideas y resultados necesarios para llegar a una forma canónica conveniente para el desarrollo de nuestro análisis. Hemos introducido así la forma generalizada de Liénard, que se ha caracterizado en términos del concepto clásico de observabilidad de la teoría de control. Se consigue una primera clasificación de los sistemas simétricos lineales a trozos en forma de Luré, y se especifican las formas canónicas en dimensión 2 y 3 que utilizamos en el resto de la memoria.

La aportación principal desde el punto de vista metodológico aparece ya en el Capítulo 3, con la introducción de las ecuaciones de cierre. El análisis de estas ecuaciones ha resultado ser muy fructífero, al proporcionar (como se ha visto en los restantes capítulos) resultados cuantitativos relativos a las soluciones periódicas del sistema. El estudio de las soluciones periódicas en ingeniería electrónica y de control se realiza comúnmente mediante el método de balance armónico, que es revisado a continuación con idea de validar posteriormente sus predicciones en base a nuestros resultados obtenidos con las ecuaciones de cierre.

En el Capítulo 4, la aplicación del método de las ecuaciones de cierre permite obtener gran cantidad de información, tanto cualitativa como cuantitativa, de la bifurcación foco-centro-ciclo límite. Esta bifurcación es especialmente importante por dos motivos. Por un lado, es la que más frecuentemente explica la existencia de comportamiento dinámico caracterizado por oscilaciones periódicas; por otra parte, es fácil de reproducir y detectar en sistemas propios

de la ingeniería. En la memoria se desarrolla el análisis correspondiente tanto al caso plano (Teorema 4.15) como al tridimensional (Teoremas 4.23 y 4.28), donde era más necesario disponer de nuevas técnicas. De hecho, la herramienta introducida (las ecuaciones de cierre) es susceptible de ser aplicada a problemas de cualquier dimensión, aunque la complejidad de los cálculos aumentaría considerablemente. En ambos casos, los resultados caracterizan completamente dicha bifurcación, en un contexto uniparamétrico; para el caso tridimensional se analiza también una de sus degeneraciones en un contexto bi-paramétrico (Teorema 4.26). Es posible así predecir la existencia de hasta dos soluciones periódicas en un entorno de los valores críticos de los parámetros.

Para ilustrar la eficacia y utilidad de los resultados anteriores, se incluyen también dos interesantes aplicaciones a osciladores electrónicos: el oscilador en puente de Wien y el circuito de Chua. Este último, muy estudiado por su condición de sistema capaz de generar caos, no contaba sin embargo con una justificación rigurosa (nos referimos al Teorema 4.23) del fenómeno asociado a la aparición de oscilaciones periódicas.

Los resultados de este Capítulo se aplican también para cualificar la bondad de las aproximaciones que se obtienen mediante balance armónico. Podemos concluir que, para la amplitud, dichas aproximaciones son exactas hasta orden $2/3$ del parámetro de bifurcación y, en cuanto al periodo, son exactas hasta orden uno. Este tipo de afirmaciones son de gran interés práctico en ingeniería, donde se suele usar el método de balance armónico, a veces sin contar con las suficientes garantías.

En el Capítulo 5 se estudia otra bifurcación importante a la hora de estudiar el comportamiento dinámico relacionado con la existencia de órbitas periódicas, a saber: la bifurcación de Hopf en el punto del infinito (Teoremas 5.5, 5.10, 5.13 y 5.15). Aunque no podrá ser observada en sistemas físicos en la práctica, su conocimiento es de gran relevancia, al establecer fronteras paramétricas de estabilidad y/o existencia de soluciones periódicas. Los resultados conseguidos mejoran cuantitativamente algunos resultados previos para el caso plano y suponen nuevas aportaciones en el caso tridimensional.

Como se ha visto a lo largo de la memoria, el coeficiente γ juega un papel decisivo en la bifurcación foco-centro-ciclo límite. Si en su expresión hacemos

el cambio

$$\begin{aligned} D &\leftrightarrow d, \\ M &\leftrightarrow m, \\ T &\leftrightarrow t, \end{aligned}$$

observamos que se obtiene el coeficiente $\bar{\gamma}$ de la bifurcación de Hopf del infinito. Existe pues una dualidad entre ambas bifurcaciones, que abarca tanto las hipótesis necesarias en el punto crítico ($D - MT = 0 \leftrightarrow d - mt = 0$, $M > 0 \leftrightarrow m > 0$), como en su degeneración ($\gamma = 0 \leftrightarrow \bar{\gamma} = 0$). Esta dualidad es parcial, ya que existen características de ambas bifurcaciones en las que no se da (por ejemplo, la diferencia en los órdenes del parámetro de bifurcación presentes en los desarrollos de la amplitud, período y multiplicadores característicos).

Conviene añadir, antes de finalizar, algunas consideraciones para futuros desarrollos. La mayoría de las aportaciones de la memoria tienen un carácter local en cuanto se refiere a los parámetros de los sistemas estudiados. Además, nos hemos limitado a las bifurcaciones que dan lugar a órbitas periódicas simétricas respecto al origen: es patente que todo el contenido del Capítulo 4 puede extenderse sin demasiado esfuerzo adicional a sistemas con sólo dos zonas lineales. Igualmente se pueden aplicar a sistemas de tres zonas sin simetría. Quedan para un inmediato futuro esas tareas, junto con la de conectar en el adecuado espacio de parámetros dichos resultados con los ya obtenidos en los Capítulos 4 y 5, estableciendo con métodos de carácter global las diversas superficies de bifurcación. La información local alcanzada aquí será de vital importancia para el arranque de dichos métodos.

Hemos encontrado varias situaciones en los sistemas tridimensionales observables no controlables donde el método de las ecuaciones de cierre no permite desplegar la correspondiente bifurcación (pero que han sido detectadas precisamente gracias a dicho método). La más interesante sin duda se corresponde con nuestra conjetura acerca de la existencia de una variedad invariante no acotada en la que el sistema se comporta como un centro isócrono. Surge de forma natural la cuestión acerca de cuántas soluciones periódicas persisten ante las diversas perturbaciones que rompen la estructura señalada. La situación

indicada es de mayor riqueza dinámica en el caso de existir tres equilibrios y, por lo que intuimos, en ese caso no se estaría lejos (ante perturbaciones adecuadas) de la dinámica caótica.

Bibliografía

- [AKN95] Afanas'ev, V. N. ; Kolmanosvskii, V. B. ; Nosov, V. R. "*Mathematical Theory of Control Systems Design*". Kluwer Academic Publisher (1995).
- [AVK66] Andronov, A. A.; Vitt, A. A.; Khaikin, S. E. "*Theory of Oscillators*". Dover (1966).
- [Al82] Allwright, D. J., "*Harmonic Balance and the Hopf Bifurcation Theorem*", Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 82, 453-467.
- [BC85] Barnett, S.; Cameron, R. G. "*Introduction to Mathematical Control Theory*", Oxford University Press, (1985).
- [Ca02] Carmona, V. "*Bifurcaciones en sistemas dinámicos lineales a trozos*". Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, (2002).
- [CFPT02] Carmona, V.; Freire E.; Ponce E.; Torres F. "*On Simplifying and Classifying Piecewise-Linear Systems*". IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 49, No. 5, 609-620 (2002).
- [CFPT03] Carmona, V.; Freire E.; Ponce E.; Torres F. "*Invariants Manifolds of Periodic Orbits for Piecewise Linear Three-Dimensional Systems*". Aparecerá en IMA Journal of Applied Mathematics.
- [Ch84] Chen, Chi-Tsong "*Linear System Theory and Design*". Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1984).

- [CH82] Chow S. N.; Hale J. K. *“Methods of Bifurcation Theory”*. Springer-Verlag (1982).
- [DKR01] Diamond, P.; Kuznetsov, N. A.; Rachinskii, D. *“On the Hopf Bifurcation in Control Systems with a Bounded Nonlinearity Asymptotically Homogeneous at Infinity”*, Journal of Differential Equations, 175, 1–26, (2001).
- [FFA84] Freire E.; G. Franquelo, L.; Aracil J. *“Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic System”*. IEEE Transactions on Circuits and Systems Vol. CAS-31, No. 3, 237-247 (1984).
- [FPR99] Freire E.; Ponce E.; Ros J. *“Limit Cycle Bifurcation from Center in Symmetric Piecewise-Linear Systems”*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 5, 895-907 (1999).
- [FPRT98] Freire E.; Ponce E.; Rodrigo F.; Torres F. *“Bifurcations Sets of Continuous Piecewise-Linear Systems with two zones”*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11, 2073-2097 (1998).
- [FPRT02] Freire E.; Ponce E.; Rodrigo F.; Torres F. *“Bifurcations Sets of Symmetrical Continuous Piecewise Linear Systems with three zones”*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 12, 1675-1702 (2002).
- [FPT96] Freire E.; Ponce E.; Torres F. *“Hopf Bifurcations in Piecewise-Linear Planar Dynamical Systems”*. Proc. NDES'96, 129-134, (1996).
- [FPT97] Freire E.; Ponce E.; Torres F. *“Hopf-like Bifurcations in Piecewise-Linear Planar Dynamical Systems”*. Publicacions Matemàtiques Vol. 41. 135-148, (1997).
- [Gl89] Glover, J. N. *“Hopf Bifurcations at Infinity”*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol 13, No. 12, 1393-1398, (1989).
- [GL61] Golubitsky, M.; Landford, W. F. *“Classification and Unfolding of Degenerate Hopf Bifurcations”*. J. Diff. Eq. 41, 445-466, (1961).

- [GT92] Genesio, R. and Tesi, A., “*Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems*”, *Automatica* 28, 531–548, (1992).
- [HK91] Hale, J. K.; Kocak, H. “*Dynamics and bifurcations*”, Springer-Verlag, (1991).
- [He91] Xiangjian He. “*Hopf Bifurcation at Infinity with Discontinuous Nonlinearities*”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 33, 133–148, (1991).
- [Hu96] Anshan Huang. “*On Bounds of the Parametric Range of Bifurcation of Chua’s Circuit*”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 43, No. 8 (1996), 691–695.
- [JS99] Jordan, D. W.; Smith, P. “*Nonlinear Ordinary Differential Equations*”, (third edition), Oxford University Press, (1999).
- [Ke93I] Michael Peter Kennedy. “*Three Steps to Chaos—Part I: Evolution*”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 10, (1993), 640–656.
- [Ke93II] Michael Peter Kennedy. “*Three Steps to Chaos—Part II: A Chua’s Circuit Premier*”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 10, (1993), 657–674.
- [Kh96] Khalil, H. K. “*Nonlinear systems*”, Prentice-Hall, New Jersey (1996).
- [KK87] Kozjakin, V. S.; Krasnosel’skii, M. A. “*The Method of Parameter Functionalization in the Hopf Bifurcation problem*”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol 11, No. 2, 149–161, (1987).
- [KKY95] Krasnosel’skii, M. A.; Kuznetsov, N. A.; Yumagulov, M. G. “*Localization and Construction of Cycles in Hopf’s Bifurcation at Infinity*”, *Doklady Mathematics*, Vol 52, No. 2, 223–226, (1995).

- [Kr87] Kriegsmann, G. A. "*The Rapid Bifurcation of the Wien Bridge Oscillator*". IEEE Transactions on Circuits and Systems Vol. CAS-34, 237-247 (1987).
- [LBS92] Leonov, G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi, A. I. "*Frequency Methods in Oscillation Theory*". Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (1992).
- [L28] Liénard, A. "*Etude des oscillations entretenues*". Revue Générale d'Electricité XXIII 21, 901-912; XXIII 23, p. 946. (1928).
- [LD96] J. M. Lipton & K. P. Dabke. "*Softening the Nonlinearity in Chua's Circuit*". International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, No. 1 (1996), 179-183.
- [LP96] Llibre, J.; Ponce E. "*Global First Harmonic Bifurcation Diagram for Odd Piecewise Linear Control Systems*". Dynamics and Stability of Systems, Vol. 11, No. 1, 49-88, (1996).
- [LP97] Llibre, J.; Ponce E. "*Hopf Bifurcation from Infinity in Planar Control Systems*", Publicacions Matemàtiques, Vol 41, 181-198, (1997).
- [LP99] Llibre, J.; Ponce E. "*Bifurcation of a Periodic Orbit from Infinity in Planar Piecewise Linear Vector Fields*", Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol 36, 623-653, (1999).
- [LS96] Llibre, J.; Sotomayor, J. "*Phase Portraits of Planar Control Systems*". Nonlinear Analysis. Theory Meth. and Appl. Vol. 27, No. 10, 1177-1197, (1996).
- [MC79] Mees, A.; Chua, L. O. "*The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems*". IEEE Transactions on Circuits and Systems Vol. CAS-26, 235-257, (1979).
- [MDR91] Moiola, J.L.; Desages, A and Romagnoli, J. , "*Degenerate Hopf bifurcations via feedback system theory: higher-order harmonic balance*", Chemical Engineering Science 46, 1475-1490, (1991).

- [Me81] Mees, A. I. *"Dinamics of feedback systems"*, John Wiley & Sons, (1981).
- [Mi74] Minorsky, N. *"Nonlinear Oscillations"*. Robert E. Krieger Publishing Company (1974).
- [Mo95] Ö. Morgül. *"Inductorless realization of Chua oscillator"*. Electronics Letters Vol. 31 No. 17, (1995), 1403-1404.
- [PR99] Ponce, E.; Ros J. *"Bifurcación de Hopf en el infinito para sistemas de Liénard lineales a trozos no simétricos"*. Actas de XVI CEDYA, VI CMA (1999).
- [RM77] Rapp, P. E.; Mees, A. I. *"Spurious predictions of limit cycles in a non-linear feedback system by the describing function method"*, Int. J. Control, Vol. 26, No. 6, 821-829, (1977).
- [Ro97] Rodrigo, F. *"Comportamiento dinámico de osciladores electrónicos del tipo Van der Pol-Duffing"*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, (1997).
- [Ro00] Manuel Román Gutiérrez. *"Estudio Cuantitativo de la Generación de Oscilaciones en un Circuito Electrónico con Tres Variables de Estado"*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Sevilla (2000).
- [So81] Sotomayor, J. *"Licoes de ecuacoes diferenciais ordinárias"*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1981).
- [Te00] Teruel, A. *"Clasificación topológica de una familia de campos vectoriales lineales a trozos simétricos en el plano"*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, (2000).
- [Wi65] Wilkinson, J. H. *"The Algebraic Eigenvalue Problem"*. Oxford University Press (1965).

- [Yu82] Yumagulov, M. G. "Trajectories of autonomous systems in the neighborhood of a point at infinity". Dokl. Akad. Nauk Tadzh. SSR, Vol 24, No. 11, 648-651, (1982).

D. FRANCISCO SÁLVADO ROS PADILLA
 ESTUDIO DE LOS CONDUCTORES DINÁMICOS DE
 SISTEMAS AUTÓNOMOS TRIDIMENSIONALES LINEALES
 Y NO LINEALES

SOBRESALIENTE CON LAUDE

TORRE URBANA UNIDADA
 Sevilla, 18 de JULIO de 2023

El Vocal,  El Vocal,  El Vocal, 
 El Presidente  El Secretario  El Decanado 