UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

ESPACIOS DE FUNCIONES LOCALMENTE INTEGRABLES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO

FERNANDO MAYORAL MASA

Tesis Doctoral

Memoria que presenta
D. Fernando Mayoral Masa
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo: Fernando Mayoral Masa

D. Miguel Florencio Lora, catedrático del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla y D. Pedro J. Paúl Escolano, profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla,

CERTIFICAN: Que la presente memoria " Espacios de funciones localmente integrables con valores en un espacio localmente convexo", ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas

Fernando Mayoral Masa

y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

En Sevilla a 19 de Octubre de 1992.

$V^{\circ}B^{\circ}$: Directores de tesis.

Fdo: Miguel Florencio Lora. Fdo: Pedro J. Paúl Escolano.

Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todos y cada uno de los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales por el ánimo y apoyo recibidos.

En particular, debo especial gratitud a los Profesores Drs. D. Miguel Florencio Lora y D. Pedro J. Paúl Escolano, directores de esta memoria.

A Carmen, Clara y Laura

Contenido

Introducción **i**

Terminología y notación **xiii**

1 MEDIDAS. MEDIBILIDAD. INTEGRACIÓN. **1**

1.1 Introducción. Medibilidades. 1

1.2 Medibilidad de funciones vectoriales. El espacio $L^\infty\{E\}$. 7

1.3 Medidas vectoriales 27

1.4 Los espacios $L^1\{E\}$ y $L^1_{loc}\{E\}$. 32

1.5 La propiedad de Radon–Nikodym 45

2 ESPACIOS DE FUNCIONES INTEGRABLES. **68**

2.1 Introducción. Espacios de funciones escalares 68

2.2 Espacios de funciones $\Lambda\{E\}$. 72

2.3 Espacios fundamentalmente $\Lambda-$acotados. 85

2.4 Algunos casos particulares 102

2.5 Completitud local de los espacios $\Lambda\{E\}$. 114

2.6 El dual de $\Lambda\{E\}$. 118

2.7 Condiciones de tonelación. 133

2.8 Otras propiedades. 143

2.9 Límites inductivos numerables. 152

Referencias **161**

Introducción

> Del laberinto de hechos y conceptos hemos tenido que elegir algún camino real que nos pareció más característico y significativo.
>
> A. Einstein y L. Infeld : *La evolución de la Física.*

Situar con exactitud el estudio de los muy diversos tipos de espacios de funciones, así como sus motivaciones, sería bastante difícil y prolijo. El objeto de esta memoria es el estudio de ciertos espacios de funciones localmente integrables con valores en un espacio localmente convexo, así como su dualidad con otro espacio del mismo tipo. Nuestro punto de partida lo podemos situar en la teoría de α−dualidad de espacios de sucesiones escalares creada por G. Köthe y O. Toeplitz en 1934 [63]. Dicha teoría no sólo actuó como referencia para la concepción general y estudio de la dualidad entre espacios localmente convexos (J. von Neumann [97], G. Mackey [68], [69]), sino que también sirvió, por una parte, de motor de dicho estudio en cuanto que permitió, fundamentalmente a través de los espacios escalonados, una representación cómoda de espacios importantes (de funciones holomorfas, de distribuciones, etc.) y, por otra, como generadora de contraejemplos para separar distintas clases de espacios localmente convexos. Una parte importante de la teoría general de espacios localmente convexos la constituye el estudio de la convergencia de sucesiones. En dicho ámbito, aún cuando con muy distinta perspectiva, los resultados pueden remontarse a los tiempos de la fundamentación de los números reales por Euler, Abel, Cauchy, Weierstrass, etc. y la convergencia de sucesiones y series, fundamentalmente, de funciones continuas. En la teoría general señalemos los teoremas de Orlicz-Pettis, de Banach-Saks, de Banach-Steinhaus, de Dvoretzky–Rogers, etc.

A. Grothendieck, con objeto de *"esclarecer y generalizar las propiedades muy especiales que parecen poseer ciertos espacios de funciones indefinidamente diferenciables"*, estudia, en su magistral y fecunda tesis, el producto tensorial (con diversas topologías) de dos espacios localmente convexos. Asimismo, caracteriza y estudia una nueva clase de estos espacios, los espacios nucleares, aquellos en los que se conserva el teorema de Riemann sobre la equivalencia de la convergencia incondicional y la convergencia absoluta de series. Un pilar fundamental del trabajo de Grothendieck lo constituye el estudio de diversos espacios de formas bilineales y de operadores lineales así como la representación de algunos de ellos a través de sucesiones o funciones con valores vectoriales. A destacar resultan varios resultados, que más adelante comentaremos, sobre el producto tensorial proyectivo de un espacio $L^1(\mu)$ con un espacio localmente convexo arbitrario. Más tarde, siendo λ un espacio de sucesiones perfecto, A. Pietsch [81] y [82], representa el producto tensorial proyectivo $\lambda\hat{\otimes}_\pi E$ como un espacio de sucesiones vectoriales. Con objeto de independizar la definición de espacio nuclear de la maquinaria de productos tensoriales creada por Grothendieck, Piestch [83] basa dicho estudio en las familias sumables y absolutamente sumables en un espacio localmente convexo, y define la *propiedad (B):*

Si M es un conjunto de sucesiones en E tal que para cada seminorma continua q sobre E el conjunto

$$q(M) := \{(q(x_n)) : (x_n)_n \in M\}$$

es acotado en l^1, entonces existe $B \subset E$ acotado absolutamente convexo y cerrado tal que

$$\sum_n p_B(x_n) \leq 1 \quad \text{para cada} \quad (x_n) \in M,$$

que para un espacio nuclear resulta equivalente a que tenga dual fuerte nuclear y juega un papel crucial en el estudio de condiciones de tonelación sobre espacios de sucesiones vectoriales [44], [70], [71], [72]. El estudio general de espacios de sucesiones vectoriales, definidos a partir de un espacio de sucesiones escalares y de un espacio localmente convexo, corresponde a N. De Grande-De Kimpe [26] y R.C. Rosier [85] en el inicio de los setenta. Con objeto de caracterizar el dual de un espacio de sucesiones vectoriales, Rosier generaliza la propiedad (B) de Pietsch, con la que denomina *fundamental* $\lambda-$*acotación* de un espacio localmente convexo E respecto de un espacio normal de sucesiones escalares, y aplica dicha generalización al estudio de algunas propiedades. En [74] Paúl y en [39] Florencio y Paúl estudian esta propiedad para algunos casos importantes de espacios E (espacio de sucesiones de decrecimiento rápido, espacio de distribuciones,...) y de espacios λ, así como su aplicación al estudio de diversos tipos de tonelación.

Paralelamente al desarrollo y estudio de los espacios de sucesiones, tanto escalares como vectoriales, se generalizó la $\alpha-$dualidad a espacios de funciones escalares medibles. Esta generalización nació de interpretar las sucesiones como funciones medibles sobre el conjunto de los números naturales, dotado de la medida cardinal, y sustituir la suma de una serie por la integral de una función [24],[31], [54] y [67]. Concretamente, Dieudonné [31] generaliza dicha teoría a espacios de funciones escalares localmente integrables respecto de una medida de Radon positiva. En la misma linea que Dieudonné, Y. Kōmura estudia espacios de funciones escalares sobre $\mathbb{R}^n$ haciendo uso de las propiedades de la medida de Lebesgue como medida de Haar.

Por otra parte, para funciones con valores en un espacio de Banach se dieron multiples extensiones (Graves, Hildebrand, Dunford, Bochner, Gelfand, Gowurin, Phillips, Rickart, Birkhoff, Pettis, Price, Bartle,...) de la integración creada por

Lebesgue y otros a comienzos de siglo. Según cuenta Pettis [77, p. 342], el elevado número de formas de definir la integral llevó a un *referee* a gritar angustiado al cielo:

Ye gods, is there no end to the making of integrals?

Las diversas generalizaciones de la integral de Lebesgue (y por supuesto de la mediblidad) a funciones con valores en un espacio normado, en especial las integrales de Bochner y Pettis, junto con la $\alpha-$dualidad de espacios de funciones escalares dan lugar a la extensión de ésta a espacios de funciones con valores en un Banach o en general en un normado. En [79] N. Phuong-Các estudia los espacios definidos a partir de la integral de Bochner y en [80] los definidos a partir de la integral de Pettis pero considerando un espacio localmente convexo arbitrario. Considerando la integral de Bochner para funciones con valores en un espacio normado, en [87] C. Sáez estudia espacios de funciones f tales que $\|f(\cdot)\|$ está en un espacio perfecto de funciones escalares.

En [33] L. Drewnowski, M. Florencio y P.J. Paúl prueban que si el espacio de medida es puramente no-atómico dichos espacios son tonelados sin necesidad de que lo sea el espacio normado. Generalizando la construcción utilizada en dicha prueba, los citados autores dan en [34] y [35] condiciones generales que permiten obtener la tonelación a partir de la casi-tonelación y aplican dichos resultados para probar la tonelación del espacio de las funciones integrables-Pettis en un espacio de Banach arbitrario, sobre un espacio de medida positiva arbitrario.

En esta memoria estudiamos dos problemas:

En primer lugar, obtener una buena generalización del espacio de las sucesiones absolutamente sumables en un espacio localmente convexo, es decir, siendo (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (positiva) y $\mathcal{Q}(E)$ una familia de seminormas continuas que defina la topología de E, estudiar el espacio

$$L^1\{E\} := \left\{f : \Omega \to E : f \quad \text{es} \quad \mu-\text{medible y} \quad qf \in L^1(\mu)\ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\right\}$$

dotado de la topología definida por las seminormas

$$f \in L^1\{E\} \to \|qf\|_1 .$$

Si el espacio E tiene la propiedad (B) de Pietsch ¿se comportan los acotados de $L^1\{E\}$ como los acotados del espacio $l^1\{E\}$ de las sucesiones absolutamente sumables en E?, es decir, si M es un subconjunto acotado de $L^1\{E\}$ ¿Existe algún subconjunto acotado, absolutamente convexo y cerrado B en E de forma que, siendo E_B el subespacio generado por B, se verifique

(1) Para cada $f \in M$ se tiene que $f(\Omega \setminus N) \subset E_B$ para algún N de medida nula.

(2) Si $f \in M$, $\|p_B f\|_1 := \int p_B f \, d\mu \leq 1$?

En segundo lugar, siendo Λ un espacio de (clases de) funciones escalares y siendo $\Lambda^\times$ su $\alpha-$dual, estudiar los espacios

$$\Lambda\{E\} := \{f : \Omega \to E : f \text{ es } \mu - \text{medible y } qf \in \Lambda \ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\}$$

dotados de topologías definidas de modo natural a partir de las topologías de E y de Λ y estudiar la dualidad entre $\Lambda\{E\}$ y $\Lambda^\times\{E_b'\}$ definida por

$$(f, g) \in \left(\Lambda\{E\}, \Lambda^\times\{E_b'\}\right) \to \int \langle f, g\rangle \, d\mu$$

donde $\langle f, g\rangle$ es la función definida por

$$t \in \Omega \to \langle f(t), g(t)\rangle \in \mathbb{R}.$$

Por supuesto la resolución de este segundo problema está condicionada por el primero. En relación con éste debemos hacer algunas observaciones.

El primer problema planteado es de características bornológicas y requiere que el tipo de $\mu-$medibilidad que se considere garantice la medibilidad en el sentido de Borel, es decir que la preimagen de un conjunto de Borel sea un conjunto medible. Una vez localizado (esencialmente) el rango de una función en el subespacio generado por un conjunto acotado $B \subset E$ absolutamente convexo y cerrado, siendo p_B el funcional de Minkowski de B, la función

$$p_B f : t \in \Omega \to p_B(f(t)) \in \mathbb{R}$$

debe ser medible, aún sin ser $\mu-$medible la función

$$f : \Omega \to \left(E_{B}, p_{B}\right).$$

Ha sido la consideración de estas dos circunstancias la que nos ha inducido a adoptar un tipo de medibilidad sobre un espacio de medida topológico, medibilidad en el sentido de Lusin respecto de una medida de Radon. En estas circunstancias, G.E.F. Thomas estudia en [94] la propiedad de Radon-Nikodym para un espacio E casi-completo respecto a funciones de densidad medibles en el sentido anterior e integrables en sentido Pettis. En dicho trabajo se prueba un resultado (que el autor denomina Lema de Inclusión, ver el Lema 1.4.3), que nos permitirá trabajar con los valores medios de una función

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu, \qquad A \text{ de medida finita y positiva}$$

de forma análoga a como se trabaja con las secciones de una sucesión vectorial, es decir, que en cierto modo dichos valores nos permiten reconstruir (esencialmente) el rango del integrando. El mismo autor considera en [96] las que denomina funciones totalmente sumables, funciones medibles (Lusin) de forma que su rango está esencialmente en un espacio E_B y la función $p_B f$ es integrable. El espacio $L^1\{E\}$ es, en la terminología de dicho autor, el de las funciones absolutamente sumables, en analogía con las denominaciones que utiliza A. Pietsch [83] para espacios de sucesiones vectoriales.

Expresándolo brevemente, probaremos (Corolario 2.3.8) que si el espacio E es un espacio metrizable o un espacio (df), entonces toda función absolutamente sumable es totalmente sumable. Aún más, que (en los casos anteriores) todo acotado de $L^1\{E\}$ lo podemos localizar como acotado (en el sentido que le hemos dado al plantear el primer problema) en algún E_B. El caso metrizable no es nuevo. A. Grothendieck probó [50, Ch.I, §2, $n^{\underline{o}}$ 2, Prop. 12, p. 68] que, siendo E un espacio de Fréchet, todo acotado en el producto tensorial proyectivo $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ es acotado en algún $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E_B$, y en particular que su *Problema de las topologías* tiene respuesta afirmativa en dichos casos. La demostración dada por Grothendieck no es generalizable a casos no metrizables pues la base de la demostración es que estos espacios verifican la condición estricta de Mackey (para cada acotado C en E existe un acotado $B \supset C$ de forma que la topología de espacio normado de E_B induce sobre C la misma topología que E). Así, en el caso metrizable, las funciones también son $\mu-$medibles respecto a la topología definida por la norma p_B. Grothendieck comprueba que el producto tensorial coincide con la compleción del espacio de funciones $f : \Omega \to E$ tales que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$f : \Omega \to E_q \qquad \text{es absolutamente integrable,}$$

siendo E_q el espacio cociente de E por el núcleo de q, dotado de la norma q. Es decir, la compleción del espacio de funciones $\mu-$medibles e integrables por seminormas. Cuando la topología queda definida por una cantidad numerable de seminormas, esto es equivalente a que sea $\mu-$medible e integrable en el sentido habitual para funciones con valores en un Banach, es decir, existe una sucesión de funciones simples que converge a f en casi todo y que es de Cauchy para la topología definida por las seminormas

$$g \to \int qg \; d\mu, \quad q \in \mathcal{Q}(E).$$

Asimismo también es equivalente a que exista una sucesión de funciones simples que converja a f en casi todo, y que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ la función qf esté en $L^1(\mu)$. En su memoria, Grothendieck no parece comprobar que en el caso Fréchet no hace falta efectuar la compleción por ser ya completo el espacio o, lo que es equivalente, que todos los elementos de $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ son funciones $\mu-$medibles. Nosotros obtendremos el caso metrizable de forma conjunta con el caso *(df)*, sin tener en cuenta la teoría de productos tensoriales.

La memoria consta de dos capítulos más una sección dedicada a las referencias.

En el primer capítulo estudiamos las herramientas básicas: medidas vectoriales, medibilidad Lusin respecto de una medida de Radon e integración. En lo referente a medidas vectoriales hemos incluido los conceptos y resultados imprescindibles para el estudio posterior, aún cuando tanto unos como otros se obtengan directamente del caso Banach. No ha sido así en la medibilidad (sección 1.2) y en la integración (secciones 1.4 y 1.5), en las cuales hemos hecho un estudio breve de la estructura de los espacios $L^{\infty}\{E\}$ y $L^{1}\{E\}$. Hacemos un estudio básico de la medibilidad en el sentido de Lusin y para funciones con valores en un espacio de Banach hemos puesto de manifiesto las diferencias (ejemplo 1.2.12) que pueden aparecer entre esta medibilidad, referida a la topología débil, y la medibilidad en el sentido escalar (para cada $x' \in E'$, $\langle x', f(\cdot)\rangle$ es medible).

En el estudio de $L^{\infty}\{E\}$ hemos probado el buen comportamiento de estos espacios respecto a la acotación (Proposición 1.2.15) y respecto a la completitud sucesional (Teorema 1.2.17). Hemos introducido el concepto de *amplitud numerable* de un subespacio F en E, concepto algo más débil que el de amplitud, que resulta equivalente a la densidad de $L^{\infty}\{F\}$ en $L^{\infty}\{E\}$ (Proposición 1.2.22), aplicando el resultado al caso metrizable, al caso *(df)* y, como consecuencia de esto último, al dual de un espacio de Banach dotado de cualquier topología localmente convexa comprendida entre la de la convergencia uniforme sobre las sucesiones que convergen a cero en la topología fuerte (esta topología coincide con la de la convergencia compacta por el teorema de Banach-Dieudonné, [88, III, 6.3]) y la de Mackey [57, 12.4.1]).

En la sección 1.4 definimos los espacios $L^{1}\{E\}$ y $L^{1}_{loc}\{E\}$ y describimos las características de la integral considerada y establecemos el fundamental Lema de Inclusión 1.4.3. Por otra parte estudiamos la medida vectorial $m : \Sigma \rightarrow E$ y el operador lineal $T : L^{\infty}(\mu) \rightarrow E$, obteniendo de esto los resultados relativos a una función $f \in L^{1}_{loc}\{E\}$.

La sección 1.5 está dedicada a la propiedad de Radon-Nikodym y a la relación de ésta con la representación de operadores $T : L^{1}(\mu) \rightarrow E$. De está relación podremos obtener, para espacios cuyo dual fuerte tiene la propiedad de Radon–Nikodym y en determinadas condiciones, una caracterización del dual topológico de un espacio $\Lambda\{E\}$ (Proposición 2.6.14). También obtendremos, para cierta clase de espacios, un teorema de Radon–Nikodym análogo al establecido por Rieffel [84], que nos permite obtener ejemplos de espacios con esta propiedad.

En el segundo capítulo definimos los espacios $\Lambda\{E\}$

$$\Lambda\{E\} := \{f : \Omega \to E : f \text{ es } \mu-\text{medible y } qf \in \ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\}$$

dotados de topologías definidas a partir de una topología normal sobre Λ y la topología de E. En dichos espacios estudiamos, básicamente, la relación de sus acotados con los acotados de Λ y de E, aplicando dicho estudio a varias propiedades: la completitud local, la tonelación, ser casi–normable, ser (DF), ser (gDF). La técnica para el estudio de alguna de éstas es la identificación del dual de $\Lambda\{E\}$ con el espacio, del mismo tipo, $\Lambda^{\times}\{E'_b\}$.

La sección 2.1 la dedicamos a una breve descripción de la dualidad $(\Lambda, \Lambda^{\times})$ y las topologías normales. Sólo consideramos los hechos básicos sobre dicha dualidad y los aspectos que necesitamos considerar en el resto de la memoria.

En la sección 2.2, además de definir los espacios $\Lambda\{E\}$ consideramos la relación de algunos de ellos $(L^1\{E\}, L^1_{loc}\{E\}, L^{\infty}\{E\}, L^{\infty}_c\{E\})$ con el producto tensorial proyectivo $\Lambda\hat{\otimes}_{\pi}E$ en los dos primeros casos y con el $\varepsilon-$producto tensorial $\Lambda\hat{\otimes}_{\varepsilon}E$ en los dos últimos. También estudiamos, vía el lema de Bourbaki–Robertson, la relación entre la completitud de estos espacios y la de $L^1\{E\}$.

La sección 2.3 constituye el corazón de la memoria. Definimos la propiedad de fundamental acotación de un espacio localmente convexo E respecto de un espacio Λ. Esta propiedad generaliza la propiedad del mismo nombre respecto de un espacio de sucesiones que a su vez es generalización de la propiedad (B) de Piestch. Siendo el espacio E casi–completo, probamos que E es fundamentalmente $L^1(\mu)-$acotado si y sólo si tiene la propiedad (B) de Piestch, es decir reducimos la propiedad respecto de un espacio de funciones a la propiedad respecto de un espacio de sucesiones. En la demostración de este resultado (Teorema 2.3.6) los valores medios de una función nos permiten pasar de funciones a sucesiones y las buenas propiedades de la medibilidad e integración consideradas, en particular el ya citado Lema de Inclusión (Lema 1.4.3) y el Lema 2.3.5 referido a funciones continuas y funciones simples, permiten volver a las funciones después de haber considerado la propiedad relativa a sucesiones. En la misma línea que este resultado está el Teorema 2.3.9 en el que probamos que todo espacio localmente convexo metrizable es fundamentalmente $\Lambda-$acotado y todo espacio (df) es fundamentalmente $\Lambda^{\times}-$acotado, siendo Λ un espacio de funciones perfecto cuyo $\alpha-$dual tiene una sucesión fundamental de acotados. El trasvase que hacemos en el Teorema 2.3.6, entre la propiedad referida a espacio de sucesiones y la referida a espacio de funciones, es posible suponiendo que el espacio localmente convexo es casi–completo para tener definida la integral dentro del espacio. Aplicando el mismo procedimiento a un espacio E que no sea casi–completo para obtener que es fundamentalmente $L^1(\mu)-$acotado tendríamos que suponer que la casi–compleción de E tiene la propiedad (B), hecho que no parece poder obtenerse fácilmente del hecho de tener dicha propiedad el espacio E. Para espacios metrizables y espacios (df) lo anterior no supone ningún problema, pues la compleción de estos espacios es un espacio del mismo tipo y la fundamental acotación se hereda por subespacios arbitrarios (Proposición 2.3.4).

En la sección 2.4, aplicamos el método de pasar de funciones a sucesiones y luego volver a funciones para caracterizar la fundamental acotación de un espacio localmente convexo respecto de los espacios de funciones $L^1_{loc}, L^1_c, L^\infty_{loc}$ y L^∞_c construidos sobre una medida de Radon.

Considerando espacios que sean fundamentalmente $\Lambda-$acotados, estudiamos en la sección 2.5 la completitud local de los espacios $\Lambda\{E\}$, obteniendo como consecuencia que si E es un espacio de Fréchet, entonces también lo es $L^1\{E\}$ y en general todo espacio $\Lambda\{E\}$ con Λ Fréchet. Esto puede obtenerse de forma más directa caracterizando la $\mu-$medibilidad de funciones con valores en un espacio de Fréchet a través de la convergencia en casi–todo de una sucesión de funciones simples. También obtenemos que, siendo E un Fréchet,

$$L^1\hat{\otimes}_\pi E = L^1\{E\} \quad L^1_{loc}\hat{\otimes}_\pi E = L^1\{E\}.$$

Teniendo en cuenta que todo espacio de Fréchet es fundamentalmente L^1-acotado y fundamentalmente L^1_{loc}–acotado (Corolario 2.4.4), obtenemos en particular que el problema de las topologías de Grothendieck tiene respuesta afirmativa para los espacios $L^1\hat{\otimes}_\pi E = L^1\{E\}$ y $L^1_{loc}\hat{\otimes}_\pi E = L^1_{loc}\{E\}$.

La sección 2.6 está dedicada al estudio del dual de un espacio $\Lambda\{E\}$ y su relación con el espacio $\Lambda^\times\{E'_b\}$. Esta relación nos dará la posibilidad de representar los elementos del dual de $\Lambda\{E\}$ como (clases de) funciones de $\Lambda^\times\{E'_b\}$. En el paso de funcionales lineales continuos $\Lambda\{E\} \to \mathbb{R}$ a funciones $g : \Omega \to E'$ de $\Lambda^\times\{E'_b\}$ y viceversa, intervienen varios factores: caracterizar los funcionales a través de operadores $\Lambda \to E'$, identificar estos operadores con medidas vectoriales $m : \mathcal{R} \to E'$ y, por último, representar estas medidas mediante funciones localmente integrables $g : \Omega \to E'$. Este último escalón afecta a la propiedad de Radon–Nikodym y es este hecho el mayor inconveniente de la μ–medibilidad en sentido Lusin, pues impone severas restricciones sobre el espacio localmente convexo. Teniendo en cuenta el esquema anterior, en la Proposición 2.6.14 damos una generalización, a espacios localmente convexos casi–completos y espacios de funciones Λ, del teorema [30, Th. 4.1.1]:

> *Si E es un espacio de Banach, $1 \leq p < \infty$ y q es el exponente conjugado de p, entonces $L^p(E) = L^q(E')$ si y sólo si E' tiene la propiedad de Radon–Nikodym.*

que tiene su origen en el dado por Bochner y Taylor [11] en el caso en que μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Suponiendo que el espacio E' tiene la propiedad de Radon–Nikodym, la representación del dual de $\Lambda\{E\}$ como $\Lambda^\times\{E'_b\}$ permite obtener propiedades de $\Lambda\{E\}$ a partir de las propiedades correspondientes sobre Λ y E. Teniendo en cuenta la caracterización citada, en la sección 2.7 estudiamos propiedades de tonelación de los espacios $\Lambda\{E\}$.

La sección 2.8 la dedicamos al estudio de tres propiedades: ser (DF), ser (gDF) y ser casi-normable, sobre los espacios $\Lambda\{E\}$ suponiendo que Λ es normado. El estudio de estas propiedades lo basamos en una inclusión de conjuntos

(Lema 2.8.1) que es casi la descomposición de un conjunto de la forma

$$[H, V + B] := \left\{ f \in L^1_{loc}\{E\} : p_{V+B} f \in H \right\}$$

en la suma $[H, V] + [H, B]$, siendo H y V entornos en Λ y E respectivamente y siendo B un acotado en E. Descomposiciones de este tipo aparecen ligadas a estas mismas propiedades sobre otros espacios de funciones. Probamos que, bajo determinadas circunstancias, si E es un (DF), (gDF) o casi–normable, entonces $\Lambda\{E\}$, y en particular $L^1\{E\}$ y $L^\infty\{E\}$, también lo es. A. Fernández y M. Florencio realizan en [38] un estudio más detallado del espacio $L^\infty\{E\}$ cuando E es un (DF).

La sección 2.9 la dedicamos a un aspecto puntual, en tanto que se sale un poco del estudio general de los espacios $\Lambda\{E\}$. Considerando un espacio de funciones, en ciertas condiciones, estudiamos el límite inductivo $ind\ \Lambda\{E_n\}$ de una sucesión de espacios de funciones y su coincidencia con $\Lambda\{ind\ E_n\}$. Este estudio lo hacemos en paralelo al realizado por Bonet, Dierolf y Fernández [14] para espacios de sucesiones vectoriales y obtenemos resultados análogos. De nuevo resulta crucial el tipo de $\mu-$medibilidad que se considera al permitirnos obtener una sucesión de compactos (K_n) que recubren Ω salvo un conjunto de medida nula y tal que cada

$$f : K_n \to E$$

es continua, con lo cual $f(K_n)$ es compacto en E y lo podemos separar estrictamente de los cerrados.

Como último comentario de esta introducción, señalar que el motivo de considerar a lo largo de toda la memoria un espacio de medida $\sigma-$finita en lugar de restringirnos desde el principio a un espacio de medida finita, ha sido el poder tener siempre presentes los resultados y situaciones de los espacios de sucesiones vectoriales.

Terminología y notación

La memoria está dividida en dos capítulos que a su vez están divididos en secciones, dentro de cada una de ellas los resultados (definiciones, lemas, teoremas, ejemplos...) están ordenados de forma lineal e indicados por tres dígitos correspondientes de forma correlativa al capítulo, a la sección y al resultado. Las referencias a la bibliografía irán indicada entre corchetes.

Espacios localmente convexos.

A lo largo de toda la memoria consideraremos espacios localmente convexos que supondremos Hausdorff y reales. Para los conceptos y resultados de la teoría general de estos nos remitimos a las monografías de P. Pérez-Carreras y J. Bonet [75], de H. Jarchow [57] y de G. Köthe [61] y [62].

Si E es un espacio localmente convexo denotaremos por E' su dual topológico. Dado un par dual (E,F), $\langle x,y\rangle$ será la forma bilineal asociada. Denotaremos por $s\,(E,F)$, $b(E,F)$ y $m\,(E,F)$ las topologías débil, fuerte y de Mackey respectivamente.

Por otra parte, dado un subconjunto $B \subset E$ de un espacio localmente convexo, $co(B), \overline{co}(B)$, $acx(B)$ y $\overline{acx}(B)$ designarán, respectivamente, las envolventes convexa, convexa y cerrada, absolutamente convexa y absolutamente convexa y cerrada de B. Diremos que $B \subset E$ es un disco si es absolutamente convexo y acotado. El funcional de Minkowski de un conjunto $B \subset E$ lo denotaremos por p_B.

Teoría de la medida.

Para los conceptos y resultados generales sobre medidas positivas y medidas con valores en un espacio de Banach, así como sobre medibilidad e integración de funciones escalares y de funciones con valores en un espacio de Banach nos remitimos a las monografías de P.R. Halmos [53], de D.L. Cohn [23] y de J. Diestel y J.J.Uhl [30].

Usualmente nos referiremos, con las precisiones que haremos en la sección 1.1, a un espacio de medida positiva (Ω, Σ, μ) donde Σ es un $\sigma-$álgebra de conjuntos. Diremos que una propiedad (P), sobre los puntos de Ω, se verifica en casi todo un conjunto medible A si

$$\{t \in A : (P) \text{ no se verifica en } t\}$$

tiene medida nula. En particular, dadas dos funciones

$$f, g : \Omega \to E$$

diremos que son iguales (puntualmente) en casi todo un conjunto medible A, respecto a μ, y lo denotaremos

$$f(t) = g(t) \quad \mu - \text{a.e. en } A$$

si se verifica que

$$\{t \in A : f(t) \neq g(t)\}$$

tiene medida nula.

En relación con el concepto **local** aparecerá una doble significado. En el primer capítulo estará en relación con las medidas y en el segundo estará en relación con la topología. Así, en el primer capítulo estará relacionado con el rango $\mu-$ponderado de una medida vectorial $m : \Sigma \to E$

$$\left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : 0 < \mu(A) < \infty \right\}.$$

En el primer capítulo (definición 1.5.7)

> diremos que el rango $\mu-$ponderado de una medida vectorial m es **localmente** acotado (relativamente compacto...) si para cada conjunto A_1 de medida (μ) finita y positiva (en realidad utilizaremos espacios de medida topológicos y dichos conjuntos serán sustituidos por los compactos), existe $A_2 \subset A_1$ de medida positiva, tal que
>
> $$\left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : A \subset A_2, \mu(A) > 0\right\}$$
>
> es acotado (relativamente compacto...).

En el segundo capítulo nos referiremos a los conceptos de convergencia y completitud **local** o de Mackey, en un espacio localmente convexo.

Puesto que en cada momento estará claro a que concepto **local** nos estamos refiriendo, hemos preferido conservar los dos sin cambiar la terminología.

Capítulo I

MEDIDAS. MEDIBILIDAD. INTEGRACIÓN.

1.1 Introducción. Medibilidades.

Dedicaremos este capítulo a estudiar los requisitos básicos sobre medidas vectoriales, medibilidades e integración referidas a un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y a un espacio localmente convexo E.

Consideraremos funciones $f : \Omega \to E$ donde E es un espacio localmente convexo y Ω es un *espacio de medida de Radon.* Estos espacios de medida, siendo los más usuales, parecen constituir el marco idóneo para estudiar una integración fuerte de la que se puedan esperar resultados de tipo bornológico. Será un hecho básico el tener un espacio de medida topológico así como el que la herramienta fundamental para el concepto de $\mu-$medibilidad que adoptaremos son las funciones continuas. La razón de adoptar un concepto de medibilidad en el sentido de Lusin, en lugar de definirlo a través de sucesiones (o redes) de funciones simples, estriba fundamentalmente en que esto permite garantizar la mediblidad en el sentido de Borel, i.e. la antiimagen de un abierto (o cerrado) es medible. Además, en otro caso, tratando con un espacio de medida topológico, podrían quedar excluidas de la definición de función $\mu-$medible las funciones continuas. Este hecho puede aparecer para espacios localmente convexo no metrizables.

Diversos autores han estudiado la medibilidad e integración de funciones

$$f : \Omega \to E$$

con valores en un espacio localmente convexo, arbitrario en unos casos, de algunas características especiales en otros. Al margen de la medibilidad en el sentido de Borel, que sólo depende del $\sigma-$álgebra, los tipos de medibilidad utilizadas podemos agruparlas de la siguiente forma,

(1) Medilidad de tipo escalar: Para cada $x' \in E'$ la función escalar

$$\langle f(\cdot), x' \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$$

es medible. Phuong-Các [80] y Thomas [95] consideran este tipo de medibilidad, Thomas para funciones con valores en un espacio de Suslin.

(2) Medibilidad por seminormas: Para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$, la función

$$f : \Omega \to E_q$$

con valores en el espacio de Banach E_q qua se obtiene al completar el espacio normado

$$\left(E/q^{-1}(0), q\right),$$

es $\mu-$medible. Garnir, De Wilde y Schmets [45], Gilliam [46] y [47], Blondia [5], [6], [7], [8], [9] y [10].

(3) Medibilidad fuerte a través de funciones simples: Existe una sucesión o una red de funciones simples que converge casi-uniformemente a la función, o puntualmente pero considerando alguna clase especial de espacios localmente convexos. Gilliam [46] y [47], Saab [86], Blondia [5].

(4) Medibilidad en el sentido de Lusin: Considerando un espacio de medida de Radon (Ω, Σ, μ), una función $f : \Omega \to E$ es $\mu-$medible si para cada compacto $K \subset \Omega$ de medida positiva y cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_1 \subset K$ de medida positiva, de forma que $\mu(K \setminus K_1) < \varepsilon$ y la restricción

$$f : K_1 \to E$$

es continua. Bourbaki [16] y Thomas [94] y [96].

(5) Medibilidad en sentido Bochner: El rango de la función se puede localizar, salvo un conjunto de medida nula, en el subespacio que genera un acotado B y la función es $\mu-$medible, respecto de la norma que define este acotado sobre el subespacio. Bombal [12] y [13], Thomas [95] y [96].

Cuando se trabaja con un espacio de Fréchet, todas los tipos de medibilidad anteriores, excepto la medibilidad escalar, coinciden.

A cada uno de estos tipos de medibilidad se pueden asociar uno o varios tipos de integrabilidad, básicamente de tipo Pettis o de tipo Bochner. Resultados que permiten obtener de una medibilidad otra más fuerte, o garantizar la medibilidad en el sentido de Borel, se basan fundamentalmente en las características topológicas del espacio localmente convexo que se considere. Entre éstas: ser Fréchet: Garnir, De Wilde y Schmets [45], Chi [20]; ser Suslin: Thomas [95], Blondia [9]; verificar la condición estricta de Mackey: Gilliam [46]; tener acotados metrizables: Thomas [94], Chi [21] y [22], Saab [86]; etc.

Los teoremas de Radon-Nikodym que se obtienen en algunos de los trabajos citados dependen en su mayor parte del tipo de medibilidad, de la topología del espacio localmente convexo y del teorema de Radon-Nikodym de Rieffel. Es decir, se basan en la construucción de un espacio de Banach sobre el que poder aplicar el teorema de Rieffel. Atendiendo a esto, F. Bombal estudia en [12] y [13] una teoría de medidas vectoriales, medibilidad e integración definidas sobre espacios bornológicos, obteniendo una integral con buenas propiedades, en especial que los valores medios de la integral determinan esencialmente su rango (la envolvente convexa cerrada). También obtiene resultados de Radon-Nikodym que, llevados a espacios localmente convexos, agrupan la mayor parte de los resultados (referidos a una medibilidad de tipo Bochner) de los trabajos citados. Nosotros daremos, en la última sección de este capítulo, un resultado de Radon-Nikodym que está en la línea de los trabajos de Chi [21] y [22], Saab [86] y Bombal [13], es decir, construir sobre el rango de la medida un espacio de Banach apropiado en el que poder aplicar el teorema de Rieffel.

A lo largo de toda la memoria será caso de referencia el de los espacios de sucesiones vectoriales. Siendo éstos un caso particular (el espacio de medida es el de los números naturales con la medida cardinal), en algunos aspectos son capaces de describir el comportamiento de un espacio localmente convexo frente a un espacio de medida más general (como los que consideraremos). No siendo el objeto de esta memoria el estudio de las medidas vectoriales con valores en un espacio localmente convexo arbitrario ni el de los muy diversos tipos de medibilidad de funciones vectoriales $f : \Omega \to E$, nos centraremos fundamentalmente en aquellos aspectos que nos serán de utilidad en el capítulo 2. También consideraremos algunos aspectos que sirvan de referencia para las diferencias y analogías con el caso normado, en cuanto a espacio de valores, y con el caso discreto (sucesiones) en cuanto a espacio de medida.

Como ya hemos indicado, no consideraremos un espacio de medida positiva abstracto sino que los espacios de medida sobre los que construiremos los espacios de funciones vectoriales serán espacios de medida de Radon. El conjunto base será un espacio topológico separado Ω, localmente compacto y σ–compacto (unión numerable de compactos) con lo cual podemos expresar Ω como una unión creciente de compactos Ω_n tales que

$$\Omega_n \subset int\,(\Omega_{n+1})\,.$$

A toda sucesión de compactos en Ω con estas características la denominaremos sucesión fundamental de compactos.

1.1.1 Definición *Consideremos un espacio topológico Ω separado, localmente compacto y $\sigma-$compacto. Se denomina medida de Borel sobre Ω a toda medida positiva definida sobre el $\sigma-$álgebra de los subconjuntos de Borel de Ω*

$$\mu : Borel(\Omega) \to [0, +\infty].$$

Llamaremos medida de Radon sobre Ω a toda medida de Borel que sea *(i) finita sobre los compactos, es decir, si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces*

$$\mu(K) < +\infty.$$

(ii) interiormente regular, es decir, para cada $A \subset \Omega$ de Borel

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \quad \textit{compacto}\} \tag{1.1.1}$$

En las condiciones de la definición anterior, denotaremos por (Ω, Σ, μ) al espacio de medida completado. De esta forma, un subconjunto $A \subset \Omega$ está en Σ si y sólo si existe una sucesión de compactos (K_n) tales que

$$\mu(A \setminus \bigcup K_n) = 0.$$

Además si $A \in \Sigma$ se verifica (1.1.1) y

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \text{ abierto }\}.$$

Dada una función μ−medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ llamaremos soporte de f al complementario del mayor abierto $G \subset \Omega$ tal que

$$\mu(\{t \in G : f(t) \neq 0\}) = 0.$$

Además si dos funciones μ−medibles $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ coinciden μ−a.e., sus soportes coinciden.

Sobre el espacio de medida consideraremos como herramientas fundamentales, además de los espacios de Banach $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$, los espacios $L^1_{loc}(\mu)$ y $L^\infty_c(\mu)$. Identificando funciones que coinciden μ−a.e., $L^1_{loc}(\mu)$ es el espacio de las funciones μ−medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que para cada compacto $K \subset \Omega$

$$f\chi_K \in L^1(\mu),$$

dotado de la topología definida por la familia de seminormas

$$\|f\|_n := \int |f|\chi_{\Omega_n}\, d\mu$$

siendo (Ω_n) una sucesión fundamental de compactos de Ω. Con esta topología, $L^1_{loc}(\mu)$ es un espacio de Fréchet [31].

Siendo $K \subset \Omega$ un compacto, $L^\infty(K,\mu)$ es el subespacio de las funciones de $L^\infty(\mu)$ con soporte en K y $L^\infty_c(\mu)$ es el espacio de las funciones $f \in L^\infty(\mu)$ con soporte compacto, dotado de la topología localmente convexa más fina para la cual todas las inclusiones

$$L^\infty(K,\mu) \hookrightarrow L^\infty_c(\mu)$$

son continuas; es decir, de la topología límite inductivo de los espacios $L^\infty(K,\mu)$. Puesto que dicha topología coincide con el límite inductivo de los espacios

$$L^\infty(\Omega_n,\mu), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$L^\infty_c(\mu)$ es el límite inductivo hiperestricto ($indE_n$ tal que cada E_{n+1} induce sobre E_n la topología de E_n y éste es cerrado en E_{n+1}) de una sucesión de espacios de Banach y por tanto $L^\infty_c(\mu)$ es ultrabornológico y completo. Además, es isomorfo al dual de $L^1_{loc}(\mu)$ dotado de la topología fuerte, es decir, un sistema fundamental de entornos de 0 en $L^\infty_c(\mu)$ lo forman las polares M^o de los acotados M de $L^1_{loc}(\mu)$ [31]. Diremos que $M \subset L^1_{loc}(\mu)$ es normal si para cada $f \in M$ y cada $g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mu-$medible tal que

$$|g| \leq |f| \ \mu - a.e.$$

se tiene que $g \in M$. También constituyen un sistema fundamental de entornos de 0 las polares de los acotados $M \subset L^1_{loc}(\mu)$ absolutamente convexos cerrados y normales. Por tanto, la topología de $L^\infty_c(\mu)$ queda definida por las seminormas

$$\sup\left\{\int |fg| \, d\mu : g \in M\right\}$$

cuando M recorre los acotados absolutamente convexos cerrados normales de $L^1_{loc}(\mu)$.

En $L^1_{loc}(\mu)$ un sistema fundamental de entornos de 0 queda definido por las polares de los acotados absolutamente convexos cerrados normales de $L^\infty_c(\mu)$.

Por su precisión y detalles, [56] es una magnífica referencia para estos resultados sobre los espacios L^p_{loc} y L^p_c, así como para los espacios $L^p_{loc}(E)$ y $L^p_c(E)$ cuando E es un Banach.

1.2 Medibilidad de funciones vectoriales. El espacio $L^\infty\{E\}$.

En esta sección describiremos el pilar básico sobre el que trabajaremos, será éste el concepto de $\mu-$medibilidad de una función vectorial

$$f : \Omega \to E$$

con valores en un espacio localmente convexo arbitrario. Si en nuestro estudio sólo consideraramos funciones con valores en un espacio de Fréchet, en lo que hace referencia a la medibilidad, podríamos considerar un espacio de medida abstracta pues gran parte de los resultados válidos para funciones con valores en un Banach pueden trasladarse a funciones con valores en un Fréchet sin mayores dificultades. En lo que sigue, no iremos enunciando sistemáticamente los resultados más generales que sean ciertos en el caso Fréchet. Sólo a nivel de comentarios consideraremos algunos de dichos resultados. Siempre nos referiremos a un espacio de medida de Radon, en el sentido en que lo hemos definido, y a la $\mu-$medibilidad en el sentido de Lusin que pasamos a describir.

1.2.1 Definición *Diremos que una función $f : \Omega \to E$ es $\mu-$medible si para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_1 \subset K$ de forma que $\mu(K \setminus K_1) < \varepsilon$ y la restricción*

$$f : K_1 \to E$$

es continua.

Equivalentemente, f es $\mu-$medible si existe una sucesión de compactos (K_n) en Ω, que podemos suponer disjunta o creciente (pues si K_1 y K_2 son dos compactos disjuntos tales que $f : K_1 \to E$ y $f : K_2 \to E$ son continuas, entonces $f : K_1 \cup K_2 \to E$ también es continua), de forma que cada restricción

$$f : K_n \to E$$

es continua y $\mu(\Omega \setminus \bigcup K_n) = 0$.

Puesto que cada conjunto medible es, salvo un conjunto de medida nula, una unión numerable de compactos, la anterior caracterización garantiza que $f\chi_A$ es $\mu-$medible si lo es f y A es un conjunto medible.

Por supuesto, la $\mu-$medibilidad no queda afectada al cambiar la función en un conjunto de medida nula, i.e. si f es $\mu-$medible y $g : \Omega \to E$ es tal que

$$\mu(\{t \in \Omega : f(t) \neq g(t)\}) = 0$$

entonces g es $\mu-$medible.

1.2.2 Proposición *Toda función $\mu-$medible $f : \Omega \to E$ es medible-Borel, es decir, para cada conjunto de Borel $G \subset E$*

$$f^{-1}(G) \quad \textit{es medible.}$$

DEMOSTRACIÓN:

Bastará probarlo cuando G es un cerrado de E. Siendo f $\mu-$medible, sea (K_n) una sucesión de compactos en Ω tales que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_n K_n) = 0$ y

$$f : K_n \to E$$

es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. En este caso, cada

$$f^{-1}(G) \cap K_n$$

es cerrado en K_n y por tanto en Ω y siendo $N := \Omega \setminus \cup K_n$ tenemos

$$f^{-1}(G) = \bigcup \left(f^{-1}(G) \cup K_n\right) \cup \left(f^{-1}(G) \cap N\right) \in \Sigma.$$

■

Recordemos la definición de convergencia casi–uniforme

1.2.3 Definición *Diremos que una sucesión de funciones* $(f_n : \Omega \to E)$ *converge casi–uniformemente (respecto a* μ*) a una función* $f : \Omega \to E$ *si para cada compacto* K *de medida positiva y para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un compacto* $K_1 \subset K$ *tal que* $\mu(K \setminus K_1) < \varepsilon$ *y* (f_n) *converge uniformemente a* f *sobre* K_1.

1.2.4 Proposición *Si una sucesión de funciones* $\mu-$*medibles* $(f_n : \Omega \to E)$ *converge casi–uniformemente a una función* $f : \Omega \to E$*, entonces* f *es* $\mu-$*medible.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado $H \subset \Omega$ compacto y $\varepsilon > 0$, sea $K \subset H$ compacto tal que (f_n) converge uniformemente sobre K y $\mu(H \setminus K) < \varepsilon$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $K_n \subset K$ compacto tal que $\mu(K \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $f_n : K_n \to E$ es continua.

Siendo $K' = \bigcap K_n \subset K$, K' es compacto, $\mu(K \setminus K') \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, (f_n) converge uniformemente a f sobre K' y cada

$$f_n : K' \to E$$

es continua. Así pues $\mu(H \setminus K') < 2\varepsilon$ y

$$f : K' \to E \quad \text{es continua.}$$

■

Observaciones

Cuando el espacio E es metrizable, el resultado anterior es cierto sustituyendo la convergencia casi–uniforme por convergencia $\mu-$a.e. (lema de Egoroff) pero no es cierto considerando un espacio localmente convexo general ([16, Chap. IV, §5, Ex. 1, p. 245]). Describamos este ejemplo de Bourbaki. Citemos un resultado de topología de $\mathbb{R}$ que se utiliza en él, ver [18, Chap. IV, §2, Ex. 1], cambiando un poco la terminología original

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un punto adherente a la derecha de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ si α es adherente a A y existe $x > \alpha$ tal que el intervalo (α, x) no contiene ningún punto de A (es decir, si α es límite de una sucesión creciente en A pero no lo es de una sucesión decreciente).
El conjunto de puntos adherentes a la derecha de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es numerable.

1.2.5 Ejemplo *([16, Chap. IV, §5, Ex. 1, p. 245]).*
Sea Ω el intervalo semi-abierto $(a, b]$ dotado de la medida de Lebesgue, sea el conjunto de índices $I = (a, b]$ y sea $E = \mathbb{R}^I$ dotado de la topología producto, i.e. E es el espacio de las funciones $h : I \to \mathbb{R}$ dotado de la topología de la convergencia puntual. Consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{g} & E \\ t & \longrightarrow & g(t) = (|t-x| : x \in I) \end{array}$$

es decir $g(t)(x) = |t - x|$. Esta función es continua y es derivable a la izquierda en cada punto de Ω, es decir, para cada $t_0 \in \Omega$ existe el límite lateral (en la topología de E)

$$f(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

que es

$$f(t)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a < x < t \\ -1 & \text{si} \quad t \le x \le b \end{cases}$$

Esta función f verifica :

(1) Es límite puntual de una sucesión de funciones continuas $f_n : \Omega \to E$

$$f_n(t) = n\left(g(t) - g(t - \frac{1}{n})\right)$$

siendo

$$f_n(t)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a < x \le t - \frac{1}{n} \\ 2n(t-x) - 1 & \text{si} \quad t - \frac{1}{n} \le x \le t \\ -1 & \text{si} \quad t \le x \le b \end{cases}$$

(2) Puesto que la función

$$t \in I \to |f(t)(x)| \in \mathbb{R}$$

es μ−medible para cada $x \in I$ tenemos que para cada seminorma continua q sobre E, también $qf : \Omega \to \mathbb{R}$ es μ−medible.

(3) f no es continua a la derecha en ningún punto de Ω.

(4) f no es μ−medible. Si $K \subset \Omega$ es un compacto de medida positiva, siendo numerable el conjunto de los puntos adherentes a la derecha de K, existe $t_0 \in K$ que no es adherente a la derecha y por tanto existe una sucesión (t_n) en K que converge a t_0 por la derecha con lo cual para $x = t_0$

$$\lim_n f(t_n)(x) = -1 \neq f(t_0)(x) = 0$$

y $f : K \to E$ no puede ser continua y f no puede ser μ−medible.

Normalmente haremos uso de la Proposición 1.2.4 bajo la forma que adopta en los siguientes resultados.

1.2.6 Proposición *Dada una sucesión (E_n) de espacios localmente convexos y una sucesión de funciones μ−medibles $(f_n : \Omega \to E_n)$, se verifican:*

(1) Existe una sucesión (K_m) de compactos de Ω, disjuntos dos a dos y tales que

$$\mu\left(\Omega \setminus \cup_m K_m\right) = 0$$

y para cada n y m, la restricción

$$f_n : K_m \to E_n \quad \textit{es continua.}$$

(2) La función

$$f := (f_n) : \Omega \to E := \prod_n E_n$$

es μ−medible.

1.2.7 Corolario *Dada una sucesión (A_n) de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y una sucesión (f_n) de funciones $\mu-$medibles, la función definida puntualmente por*

$$f := \sum_n f_n \chi_{A_n}$$

es $\mu-$medible.

En la siguiente proposición recogemos algunos resultados elementales que no demostramos

1.2.8 Proposición *Sean E, F y G espacios localmente convexos. Se verifica:*

(1) Si $f : \Omega \to E$ es $\mu-$medible y $u : E \to F$ es continua, la composición

$$uf : \Omega \xrightarrow{f} E \xrightarrow{u} F.$$

también es $\mu-$medible.

(2) Sea $B : E \times F \to G$ una aplicación bilineal continua y sean $f : \Omega \to E$ y $g : \Omega \to F$ $\mu-$medibles, entonces también es $\mu-$medible

$$B(f,g) : \Omega \longrightarrow G$$

definida por $B(f,g)(t) := B(f(t), g(t))$.

(3) Si $f : \Omega \to E$ es $\mu-$medible y $g : E \to \mathbb{R}$ es medible-Borel, entonces la composición

$$gf : \Omega \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

es $\mu-$medible.

La propiedad enunciada en (3) será usada con asiduidad en la situación siguiente:

Si $B \subset E$ es un disco cerrado, sobre el subespacio vectorial E_B generado por B el funcional de Minkowski

$$p_B : E_B \longrightarrow \mathbb{R}$$

define una norma cuya topología es, en general, más fina que la que E_B hereda de E. Comprobaremos que $p_B : E_B \to \mathbb{R}$ es medible–Borel respecto a la topología que E_B hereda de E y por tanto, si $f : \Omega \to E$ tiene rango en E_B (excepto para un conjunto de medida nula), entonces $p_B f$ es μ–medible.

1.2.9 Corolario *Si $f : \Omega \to E$ es μ–medible, $B \subset E$ es absolutamente convexo y cerrado y*

$$f(t) \in E_B \;\; \mu - a.e.$$

entonces $p_B f : \Omega \to \mathbb{R}$ es μ–medible.

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que B es absolutamente convexo y cerrado, si $0 \leq a < b$, tenemos

$$\begin{aligned} p_B{}^{-1}(a, b] &= \left\{x \in E_B : a < p_B(x) \leq b\right\} \\ &= bB \setminus aB \text{ es un Borel en E} \end{aligned}$$

y por tanto p_B es medible–Borel y $p_B f$ es μ–medible.

■

El siguiente resultado parece condensar las ventajas de la μ–medibilidad en el sentido de Lusin frente a otro tipo de μ–medibilidades. Daremos una demostración, algo más explícita que la original, que nos servirá de modelo para otras demostraciones que aparecerán más adelante.

1.2.10 Lema *Lema de Localización.[94, 2.3, p. 31]*

Si $f : \Omega \to E$ es μ–medible y $B \subset E$ es convexo y cerrado, son equivalentes:

(1) $f(t) \in B$ *μ–a.e.*

(2) Para cada semiespacio cerrado

$$H_+ := \{x \in E : \langle x, x' \rangle \leq \alpha\} \quad (x' \in E' \quad \alpha \in \mathbb{R})$$

que contiene a B *se verifica que* $f(t) \in H_+$ *μ–a.e.*

DEMOSTRACIÓN:

Sólo hay que demostrar (2) $\Longrightarrow$ (1). Puesto que Ω es unión numerable de compactos y la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula, bastará probar el resultado suponiendo que Ω es compacto.

Siendo

$$A = \{t \in \Omega : f(t) \notin B\}$$

tenemos que probar que $\mu(A) = 0$. Puesto que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ es compacto }\}$$

si $\mu(A) > 0$ existirá un compacto $K_1 \subset A$ de medida positiva y, al ser f μ–medible, existirá un compacto $K \subset K_1$ de medida positiva y de forma que

$$f : K \rightarrow E \text{ es continua.}$$

Para cada $t_0 \in K$, puesto que $f(t_0) \notin B$ y, por el teorema de Hahn–Banach, B es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen, existe un semiespacio

$$H_+(t_0) \supset B$$

tal que $f(t_0) \notin H_+(t_0)$. Teniendo en cuenta la continuidad de $f : K \rightarrow E$, existe un entorno abierto $G(t_0)$ de t_0 de forma que

$$f(t) \notin H_+(t_0) \quad \forall t \in K \cap G(t_0).$$

Teniendo en cuenta (2), $\mu(G(t_0) \cap K) = 0$.

Por otra parte, puesto que K es compacto, de

$$\{G(t_0) : t_0 \in K\}$$

podemos extraer un subrecubrimiento finito

$$\{G(t_1), G(t_2), \ldots, G(t_n)\}$$

y por tanto $\mu(K) = 0$ en contradicción con la hipótesis.

■

1.2.11 Corolario *Siendo $f : \Omega \to E$ μ−medible son equivalentes:*

(1) $f(t) = 0$ *μ-a.e.*

(2) $qf(t) = 0$ *μ-a.e. para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$.*

(3) $\langle f(t), x' \rangle = 0$ *μ-a.e. para cada $x' \in E'$.*

Sea E un espacio de Banach y denotemos por E_s a dicho espacio dotado de su topología débil. Comprobemos que la μ−medibilidad (en el sentido que hemos considerado) respecto a la topología débil puede no coincidir con la medibilidad respecto a cada seminorma, es decir (en este caso), la μ−medibilidad débil puede no coincidir con la escalar. Teniendo en cuenta el teorema de medibilidad de Pettis [30, 2.1.2] y puesto que estamos considerando medidas σ−finitas, si E es separable toda función escalarmente medible es μ−medible respecto a la norma y, por tanto, a la topología débil. Adaptando el Ejemplo [30, 2.1.5] a nuestros propósitos tenemos

1.2.12 Ejemplo Sea E el espacio de Hilbert no separable $l^2([0,1])$ y sea

$$\{e_t : t \in [0,1]\}$$

una base ortonormal de E. La función

$$f : t \in [0,1] \to f(t) := e_t \in E$$

es escalarmente medible pues para cada $x' \in l^2([0,1])$ tenemos

$$\langle x', f(t)\rangle = 0 \quad \mu - a.e.$$

y sin embargo, puesto que f no se anula, teniendo en cuenta el resultado anterior, f no puede ser $\mu-$medible, ni siquiera respecto a la topología débil.

Identificaremos dos funciones $f, g : \Omega \to E$ $\mu-$medibles si

$$f(t) = g(t) \ \mu - \text{a.e. en } \ \Omega.$$

1.2.13 Lema *Siendo $f : \Omega \to E$ $\mu-$medible, son equivalentes:*

(1) Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, existe $N_q \in \Sigma$ de medida nula tal que

$$(qf)(\Omega \setminus N_q) \subset \mathbb{R} \text{ es acotado.}$$

(2) Existe un conjunto de medida nula $N \in \Sigma$ tal que

$$f(\Omega \setminus N) \text{ es acotado.}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sólo hay que probar (1) $\Longrightarrow$ (2). Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ sea

$$c_q := \sup\{(qf)(t) : t \in \Omega \setminus N_q\} < +\infty$$

y consideremos el conjunto acotado

$$B := \{x \in E : q(x) \leq c_q \ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\}.$$

Veamos que $f(t) \in B$ $\mu-$a.e.. En efecto, si $\mu\{t \in \Omega : f(t) \notin B\} > 0$, entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ de forma que

$$f : K \to E \ \text{ es continua}$$

y $f(K)$ no corta a B. Para cada $t_0 \in K$ existirá por tanto una seminorma, que denotamos por $q(t_0) \in \mathcal{Q}(E)$, de forma que

$$q(t_0)\,(f(t_0)) > c_{q(t_0)}.$$

Siendo $f : K \to E$ continua, existe un entorno abierto $G(t_0)$ de t_0 en K tal que

$$q(t_0)\,(f(t)) > c_{q(t_0)} \quad \forall t \in G(t_0)$$

Extrayendo de $\{G(t) : t \in K\}$ un subrecubrimiento finito de K

$$G_1, G_2, \dots G_n$$

algún G_i tendrá medida positiva y obtenemos una contradicción con la definición de c_q.

■

1.2.14 Definición *Definimos el espacio $L^\infty\{E\}$ de las (clases de) funciones $\mu-$medibles esencialmente acotadas mediante*

$$L^\infty\{E\} := \{f : \Omega \to E : f \text{ es } \mu - \text{medible y } qf \in L^\infty(\mu)\ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\}\,.$$

dotado de la topología localmente convexa separada definida por las seminormas

$$\begin{array}{rll} \|q(\cdot)\|_\infty : & L^\infty\{E\} & \to \mathbb{R} \\ & f & \to \|qf\|_\infty \end{array}$$

Teniendo en cuenta el Lema 1.2.13 tenemos

$$\begin{array}{rcl} L^\infty\{E\} & = & \{f : \Omega \to E : f \ \text{ es } \ \mu - \text{medible y} \\ & \exists & N \ \text{ con } \ \mu(N) = 0 \ \text{ tal que } \ f(\Omega \setminus N) \ \text{ es acotado } \} \end{array}$$

1.2.15 Proposición *Sea M un subconjunto de $L^\infty\{E\}$. Son equivalentes:*

(1) M es acotado, i.e. para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$\{qf : f \in M\} \quad \textit{es acotado en} \quad L^\infty(\mu)$$

(2) Existe un acotado B en E tal que para cada $f \in M$ se verifica

$$f(t) \in B \quad \mu - \text{a.e.}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sigue los mismos pasos que la demostración del Lema 1.2.13

■

Estudiemos la completitud sucesional de los espacios $L^\infty\{E\}$:
Si (K_m) es una sucesión creciente de compactos de Ω tales que

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup K_m\right) = 0$$

la familia de seminormas

$$f \in L^\infty\{E\} \to \|qf\chi_{K_m}\|_\infty \in [0, +\infty)$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$ y m recorre $\mathbb{N}$, definen una topología localmente convexa separada sobre $L^\infty\{E\}$ que es menos fina que la definida por la familia

$$\|q(\cdot)\|_\infty$$

Denotemos estas topologías respectivamente por t_∞ y $t_\infty(K_m)$

1.2.16 Lema *La topología t_∞ tiene un sistema fundamental de entornos de 0 que son cerrados para la topología $t_\infty(K_m)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que

$$V=\left\{f\in L^\infty\{E\}:\|qf\|_\infty\leq 1\right\}=\bigcap_n\left\{f\in L^\infty\{E\}:\|qf\chi_{K_n}\|_\infty\leq 1\right\}$$

tenemos que V es $t_\infty(K_m)$−cerrado.

■

1.2.17 Teorema *Si E es sucesionalmente completo, también lo es $L^\infty\{E\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^\infty\{E\}$. Puesto que tenemos una sucesión de funciones μ−medibles, existe una sucesión de compactos (K_m), que podemos suponer creciente, en Ω tales que

$$\mu\left(\Omega\setminus\bigcup K_m\right)=0$$

y para cada n y cada m

$$f_n:K_m\to E\quad\text{es continua.}$$

Para cada m la sucesión de restricciones $\left(f_n|_{K_m}\right)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio

$$C(K_m,E)$$

de las funciones continuas de K_m en E dotado de la topología de la convergencia uniforme. Sea $g^{(m)}:K_m\to E$ el límite en $C(K_m,E)$ de $\left(f_n|_{K_m}\right)$. La función $g:\Omega\to E$, definida como $g^{(m)}$ en cada K_m y de manera arbitraria en $\Omega\setminus\bigcup K_m$ es μ−medible y está en $L^\infty\{E\}$ pues si $q\in\mathcal{Q}(E)$, para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $n(m)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|qg^{(m)}\|_\infty\leq\|qf_{n(m)}\chi_{K_m}\|_\infty+1$$

y, siendo $\rho(q) := \sup\left\{\|qf_n\|_\infty : n = 1,2,\dots\right\}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|qg\|_\infty &= \sup\left\{\|qg^{(m)}\|_\infty : m = 1,2,\dots\right\}\\ &\le \rho(q) + 1 < +\infty.\end{aligned}$$

Puesto que (f_n) converge a g en la topología definida por las seminormas

$$\|qh\chi_{K_m}\|_\infty \quad h \in L^\infty\{E\}$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$ y m recorre $\mathbb{N}$, teniendo en cuenta el lema de Bourbaki–Robertson [61, §8, 4.(4)] y el Lema 1.2.16, (f_n) converge a g en la topología de $L^\infty\{E\}$. ■

1.2.18 Corolario *Sea E un espacio de Banach y sea E'_s su dual dotado de la topología débil* $s(E',E)$. Entonces $L^\infty\{E'_s\}$ es sucesionalmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

E'_s es sucesionalmente completo.

■

Para estudiar la densidad de un subespacio en $L^\infty\{E\}$, introduzcamos un concepto algo más débil que el de *subespacio amplio* introducido por Grothendieck. Recordemos que un subespacio E de un espacio F se dice que es amplio si todo subconjunto acotado de F está contenido en la adherencia en F de algún acotado de E. Los espacios *(df)* y los espacios metrizables separables son amplios en su compleción [50, p. 62, Cor. 4 y p. 77, Cor. 1] y [57, 12.4.8 (d)].

1.2.19 Definición *Siendo E un subespacio de un espacio localmente convexo F, diremos que E es numerablemente amplio en F si todo subconjunto acotado numerable de F está contenido en la adherencia de algún acotado de E.*

Observaciones

(1) Cuando el espacio E tiene una sucesión fundamental de acotados, decir que es numerablemente amplio en F es equivalente a decir que es amplio en F.

(2) Si E es amplio en F, es numerablemente amplio. Así todo espacio (df) y todo espacio metrizable separable es numerablemente amplio en su compleción.

1.2.20 Definición *Denotaremos por $S_{\mathbb{N}}(E)$ al subespacio vectorial de $L^\infty\{E\}$ formado por las (clases de) funciones $\mu-$medibles con rango numerable y acotado, i.e. las funciones de la forma*

$$f = \sum_n x_n \chi_{A_n}$$

tales que $\{x_n\}$ es un subconjunto acotado de E y (A_n) es una sucesión disjunta de conjuntos medibles.

1.2.21 Proposición *$S_{\mathbb{N}}(E)$ es amplio en $L^\infty\{E\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $M \subset L^\infty\{E\}$ acotado. Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.15, existe un disco cerrado $B \subset E$ de forma que para cada $f \in M$

$$f(t) \in B \quad \mu - \text{a.e.}\ .$$

Podemos suponer que $f(t) \in B \quad \forall t \in \Omega$. Comprobemos que la adherencia del conjunto

$$\left\{ g \in S_{\mathbb{N}}(E) : g(t) \in B \quad \mu - \text{a.e.} \right\}$$

contiene a B. Para cada $f \in M$ existe una sucesión de compactos (K_n) de Ω tales que $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$ y $f : K_n \to E$ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que cada restricción $f : K_n \to E$ la podemos aproximar uniformemente por funciones simples–Borel, dado $U \in \mathcal{U}(E)$, existe

$$s_n : K_n \longrightarrow f(K_n) \subset B \subset E$$

simple–Borel tal que $(f - s_n)(K_n) \subset U$ y siendo

$$s := \sum_n s_n \chi_{K_n}$$

tenemos una función μ–medible, acotada pues

$$s(\Omega) \subset f\left(\bigcup_n K_n\right) \cup \{0\} \subset B$$

y $\|p_U(f - s)\|_\infty < 1$. ■

Consideremos un espacio de medida no trivial, es decir, que no se reduce a una cantidad finita de átomos.

1.2.22 Proposición *Sea E un subespacio de F. Entonces E es numerablemente amplio en F si y sólo si $L^\infty\{E\}$ es denso en $L^\infty\{F\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) La condición es necesaria. Si $f \in L^\infty\{F\}$, $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $\varepsilon > 0$, existe $s \in S_{\mathbb{N}}(F)$ tal que

$$\|q(f - s)\|_\infty < \varepsilon.$$

Siendo $s(\Omega) \subset F$ acotado y numerable existe $B \subset E$ acotado cuya adherencia contiene a $s(\Omega)$. Siendo

$$s = \sum_n x_n \chi_{A_n}$$

con los A_n disjuntos dos a dos, sea $y_n \in B$ tal que

$$q(x_n - y_n) < \varepsilon.$$

Considerando la función

$$g := \sum y_n \chi_{A_n} \in S_{\mathbb{N}}(E) \subset L^\infty\{E\}$$

tenemos $\|q(f-g)\|_\infty < 2\varepsilon$.

(2) La condición es suficiente. Consideremos una partición (A_n) de Ω en conjuntos de medida finita y positiva. Si $B \subset F$ es acotado y numerable, tomando una ordenación (x_n) de B tenemos que

$$f : \sum_n x_n \chi_{A_n}$$

está en $L^\infty\{F\}$. Sin más que obtener para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ una función $g_{q,k} \in L^\infty\{E\}$ tal que $\|q\left(f - g_{q,k}\right)\|_\infty < \varepsilon$ y considerar

$$\left\{x \in \bigcup g_{q,k}(\Omega) : q(x) \leq c_q \quad \forall q \in \mathcal{Q}(E)\right\}$$

con

$$c_q = \|qf\|_\infty = \sup\{q(x_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

tenemos un acotado en E cuya adherencia contiene a B.

■

1.2.23 Lema *Todo espacio metrizable es numerablemente amplio en su compleción.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea E un espacio localmente convexo metrizable y sea F su compleción. Si $B \subset F$ es un acotado numerable, aproximando cada $y \in B$ por una sucesión de E

obtenemos que B está en la adherencia del subespacio G que genera dicha familia numerable de sucesiones de E. Puesto que G es separable, existe algún acotado $B_1 \subset G$ cuya adherencia en la compleción de G, y por tanto en F, contiene a B.

■

1.2.24 Corolario *Sea E un espacio localmente convexo y sea F su compleción.*

(1) Si E es metrizable la compleción de $L^\infty\{E\}$ es $L^\infty\{F\}$.

(2) Si E es un (df), $L^\infty\{E\}$ es denso en $L^\infty\{F\}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Basta tener en cuenta que E es numerablemente amplio en F y que $L^\infty\{E\}$ es metrizable.

(2) Todo (df) es amplio en su compleción.

■

Observaciones

(1) Para obtener que la compleción de $L^\infty\{E\}$ es $L^\infty\left\{\hat{E}\right\}$, si E es un espacio localmente convexo metrizable, podríamos haber seguido un camino muy distinto al de los resultados anteriores.

Dicho camino es válido trabajando con un espacio de medida abstracta. Definiendo la $\mu-$medibilidad a través de la convergencia puntual $\mu-$a.e. de una sucesión de funciones escalonadas (que es equivalente, en el caso metrizable, a la convergencia casi–uniforme de una sucesión de tales funciones) se verifica que una función $f : \Omega \to E$ es $\mu-$medible si y sólo si se verifican:

(a) Existe un conjunto N de medida nula tal que

i. $f(\Omega \setminus N)$ es separable.

ii. La restricción $f : \Omega \setminus N \to E$ es medible, i.e.

$$\forall G \subset E \text{ Borel }, f^{-1}(G) \cap (\Omega \setminus N) \in \Sigma.$$

(b) f se anula fuera de un $\sigma-$finito.

Tomando como base este teorema puede probarse que si E es un espacio localmente convexo metrizable, $L^{\infty}\{E\}$ es denso en el espacio de Fréchet $L^{\infty}\{\hat{E}\}$.

(2) En [2], Bierstedt y Bonet prueban que si E es un espacio (gDF) y F es su compleción, la compleción de $l^{\infty}\{E\}$ es $l^{\infty}\{F\}$. Este resultado también es cierto en el caso más general de un espacio (df).

El Corolario 1.2.24(3) es una generalización de este resultado en el sentido siguiente:

En el Teorema 1.2.17 la necesidad de considerar, en $L^{\infty}\{E\}$, una sucesión de funciones en lugar de una red, viene impuesta por la necesidad de disponer, en Ω, de una sucesión de compactos que recubran Ω salvo un conjunto de medida nula, y de forma que en cada uno de ellos todas las funciones consideradas sean continuas y de esta forma garantizar la $\mu-$medibilidad de la función límite. Si consideramos una red de Cauchy en $L^{\infty}\{E\}$ para la cual existe dicha sucesión de compactos de Ω y E es completo, entonces la red converge en $L^{\infty}\{E\}$. De esta forma, si consideramos una medida puramente atómica ($\sigma-$finita), dicha sucesión de compactos existe para cualquier red de funciones y, por tanto, si E es completo, también lo es $L^{\infty}\{E\}$.

De forma parecida a la construcción que hemos hecho del espacio $L^{\infty}\{E\}$ podemos construir el espacio $L_c^{\infty}\{E\}$ que definimos como el espacio de las (clases de) funciones μ−medibles $f : \Omega \to E$ tales que

$$qf \in L_c^\infty(\mu) \quad \forall q \in \mathcal{Q}(E)$$

dotado de la topología localmente convexa separada definida por las seminormas

$$\sup\left\{\int qf|h|\,d\mu : h \in H\right\}$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$ y H recorre la familia de los acotados absolutamente convexos cerrados normales de $L^1_{loc}(\mu)$. Con esta topología la inclusión

$$L_c^\infty\{E\} \hookrightarrow L^\infty\{E\}$$

es continua. No es cierto en general que este espacio localmente convexo definido sea el límite inductivo de los espacios

$$L^\infty\{\Omega_n, E\}$$

de las funciones $f \in L^\infty\{E\}$ con soporte contenido en Ω_n pues el que toda función qf tenga soporte compacto no implica el que lo tenga f (definiendo el soporte de una función $f : \Omega \to E$ μ−medible de forma análoga al caso escalar). Basta considerar el caso discreto, el espacio de medida es el de los naturales con la medida cardinal y $L_c^\infty(\mu)$ es el espacio φ de las sucesiones escalares con una cantidad finita de términos no nulos. Si E es un espacio localmente convexo metrizable sin normas continuas, existe $x := (x_n) \in \varphi\{E\}$ tal que $x_n \neq 0$ para cada n. Siendo q_n una sucesión creciente de seminormas que defina la topología de E y siendo $x_n \in E$ tal que $x_n \neq 0$ y

$$q_n(x_n) = 0$$

tenemos $x = (x_n)$ en las condiciones indicadas.

No obstante, es fácil comprobar que $L_c^\infty\{E\}$ tiene un sistema fundamental de entornos de 0 que son cerrados para la topología que hereda de $L^\infty\{E\}$ y, aplicando esto y el lema de Bourbaki–Robertson, que si E es sucesionalmente completo, también lo es $L_c^\infty\{E\}$. No daremos aqui la demostración de esto pues es análoga a la del Lema 1.2.16 y más adelante veremos demostraciones del mismo tipo (Proposiciones 2.2.9 y 2.2.10).

1.3 Medidas vectoriales

En principio los conceptos y resultados que consideraremos versarán sobre el $\sigma-$álgebra Σ de nuestro espacio de medida de Radon. Al final de la sección consideraremos las medidas vectoriales definidas sobre el $\delta-$*anillo* $\mathcal{R}$, de los subconjuntos medibles relativamente compactos

1.3.1 Definición *Llamaremos medida vectorial sobre Ω con valores en E a toda aplicación $m : \Sigma \to E$ que sea numerablemente aditiva. Dada una seminorma q sobre E y un subconjunto medible $A \in \Sigma$ llamaremos $q-$variación de m sobre A a*

$$|m|_q(A) := sup\left\{\sum_{B\in\pi} q(m(B)) : \pi \text{ es una partición de } A\right\} \tag{1.3.1}$$

Diremos que una medida vectorial $m : \Sigma \to E$ es de variación acotada si para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$|m|_q(\Omega) < +\infty$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso normado, se puede comprobar que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ la función de conjunto

$$\begin{aligned} |m|_q(\cdot) : \ \Sigma &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\to |m|_q(A) \end{aligned}$$

es numerablemente aditiva, es decir, es una medida positiva, finita si m es de variación acotada. Asimismo, para cada $x' \in E'$, también es una medida la función de conjunto

$$\begin{aligned} \langle m(\cdot), x'\rangle : \ \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\to \langle m(A), x'\rangle \end{aligned}$$

Siendo $cabv\,(\Sigma, E)$ el espacio vectorial de las medidas $m : \Sigma \to E$ de variación acotada, este espacio queda dotado de una topología localmente convexa separada mediante la familia de seminormas variación

$$m \in cabv\,(\Sigma, E) \rightarrow |m|_q(\Omega)$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$.

Como en la Proposición 1.3.5, que veremos más adelante, se puede comprobar que si E es respectivamente completo, casi–completo o sucesionalmente completo, también lo es $cabv\,(\Sigma, E)$.

1.3.2 Definición *Diremos que una medida vectorial $m : \Sigma \rightarrow E$ es $\mu-$continua, y lo denotaremos $m \ll \mu$, si*

$$\lim_{\mu(A)\rightarrow 0} m(A) = 0$$

es decir, si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(A) < \delta \Longrightarrow m(A) \in U.$$

De forma análoga al caso normado [30, 1.2.1], puede probarse

1.3.3 Proposición *Son equivalentes:*

(1) $m \ll \mu$.

(2) Si $\mu(A) = 0$, entonces $m(A) = 0$.

(3) Para cada $x' \in E'$, $\langle m(\cdot), x'\rangle \ll \mu$.

1.3.4 Definición *Denotaremos por $cabv\,(\Sigma, \mu, E)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales $m : \Sigma \rightarrow E$ $\mu-$continuas de variación acotada, dotado de las seminormas variación*

$$|m|_q(\Omega) \qquad q \in \mathcal{Q}(E).$$

1.3.5 Proposición *Si E es completo, casi–completo o sucesionalmente completo, también lo es $cabv\,(\Sigma, \mu, E)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos la demostración sólo para el caso en que E es completo. Si $(m_i : i \in I)$ es una red de Cauchy en $cabv\,(\Sigma, \mu, E)$, para cada $A \in \Sigma, (m_i(A) : i \in I)$ es una red de Cauchy en E y por tanto, existe, en E, el límite

$$m(A) := \lim_i m_i(A).$$

Probemos que la función de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow E$ así definida es numerablemente aditiva, $\mu-$continua y tiene variación acotada.

Notemos en primer lugar que si $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $A \in \Sigma$

$$\left(|m_i|_q(A) : i \in I\right)$$

es una red de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto converge. Para cada partición π medible finita de Ω, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi} q(m(A)) &= \sum_{A\in\pi} \lim_i q(m(A_i)) \leq \sum_{A\in\pi} \lim_i |m_i|_q(A) \\ &= \lim_i \sum_{A\in\pi} |m_i|_q(A) \leq \lim_i |m_i|_q(\Omega) < +\infty\end{aligned}$$

con lo cual m tiene variación acotada y para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$|m|_q(\Omega) \leq \lim_i |m_i|_q(\Omega)$$

Esta última desigualdad también será cierta si en lugar de tomar Ω consideramos un subconjunto medible A arbitrario, i.e.

$$|m|_q(A) \leq \lim_i |m_i|_q(A) \tag{1.3.2}$$

Por otra parte, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ $\left(|m_i|_q(\cdot) : i \in I\right)$ es una red de Cauchy en el espacio de la medidas escalares $cabv(\Sigma, \mu, \mathbb{R})$ dotado de la norma variación, y por tanto, existe

$$F_q := \lim_i |m_i|_q$$

en $cabv(\Sigma, \mu, \mathbb{R})$ pues este espacio es completo. Puesto que la medida F_q es $\mu-$continua y para cada $A \in \Sigma$, $F_q(A) = \lim_i |m_i|_q(A)$, usando (1.3.2), tenemos que $|m|_q$ es numerablemente aditiva y $\mu-$continua y, por tanto, también lo es m.

Probemos por último que $m = \lim_i m_i$ en $cabv(\Sigma, \mu, E)$, es decir, que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$\lim_i |m_i - m|_q(\Omega) = 0.$$

Siendo E_q el espacio de Banach que se obtiene al completar el espacio normado

$$\left(E/q^{-1}(0), q\right)$$

y siendo j_q la aplicación canónica cociente $j_q : E \rightarrow E_q$, tenemos que $(j_q m_i : i \in I)$ es una red de Cauchy en el espacio de Banach $cabv(\Sigma, \mu, E_q)$ y por tanto será convergente a cierta medida $M_q \in cabv(\Sigma, \mu, E_q)$. Puesto que para cada $A \in \Sigma$ debe ser

$$M_q(A) = \lim_i j_q(m_i(A))$$

se tiene que $M_q(A) = j_q(m(A))$ con lo cual $j_q m = \lim_i j_q m_i$. Puesto que

$$|m_i - m|_q(\Omega) = |j_q m_i - j_q m|_q(\Omega)$$

se tiene el resultado.

∎

1.3.6 Definición *Llamaremos medidas vectoriales sobre el δ-anillo $\mathcal{R}$ a las aplicaciones finitamente aditivas*

$$m : \mathcal{R} \rightarrow E$$

que son numerablemente aditivas sobre cada σ-álgebra (sobre K)

$$\Sigma(K) := \{A \subset K : A \text{ es medible } \}$$

cuando K recorre los compactos de Ω. Equivalentemente, si (Ω_n) es una sucesión fundamental de compactos de Ω, m es numerablemente aditiva sobre cada

$$\Sigma_n := \Sigma\left(\Omega_n\right).$$

Las definiciones y resultados dados para medidas sobre Σ se trasladan de forma natural a las medidas sobre $\mathcal{R}$. En particular

1.3.7 Definición *Diremos que una medida vectorial $m : \mathcal{R} \rightarrow E$ es $\mu-$ continua y lo denotaremos $m \ll \mu$, si es $\mu-$continua sobre cada compacto, es decir, si para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$A \subset K \text{ y } \mu(A) < \delta \Longrightarrow m(A) \in U.$$

No entraremos en el estudio de otras propiedades tales como el rango de una medida vectorial, las mejoras que se tienen en el caso metrizable o la conservación de la aditividad numerable cuando se consideran sobre E dos topologías obtenidas del mismo par dual.

1.4 Los espacios $L^1\{E\}$ y $L^1_{loc}\{E\}$.

Para funciones vectoriales con valores en un espacio de Fréchet, no se presentan dificultades al extender la integral de Bochner respecto de una medida arbitraria. La razón fundamental es, al igual que para la $\mu-$medibilidad, que la topología de E está definida por una cantidad numerable de seminormas. En este caso, identificando funciones que coincidan $\mu-$a.e. y siendo (q_n) una sucesión de seminormas que define la topología de E, el espacio $L^1\{\Omega, \mu, E\}$ será el de las funciones $f : \Omega \to E$ para las que exista una sucesión $(s_m : \Omega \to E)$ de funciones simples con soporte de medida finita, que converge puntualmente $\mu-$a.e. a f y de forma que (s_m) es de Cauchy en cada espacio de Banach

$$L^1(\Omega, \mu, E_n)$$

siendo E_n el completado del espacio normado cociente $(E/q_n^{-1}(0), q_n)$. Es decir, siendo $j_n : E \to E_n$ la aplicación canónica cociente, $j_n f$ está en $L^1(\Omega, \mu, E_n)$. Con la topología definida por las seminormas

$$\|q_n(\cdot)\|_1$$

este espacio es un espacio de Fréchet que coincide con el $\pi-$producto tensorial completado $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ y conserva algunos rasgos esenciales del caso en que E es un Banach. Entre estos rasgos que se conservan cabe destacar el teorema de la convergencia dominada y por tanto que $L^1\{\Omega, \mu, E\}$ coincide con

$$\left\{f : \Omega \to E \ \mu-\text{medible } : q_n f \in L^1(\mu) \quad n = 1, 2, \ldots\right\}$$

Si tenemos un espacio localmente convexo E no metrizable, la definición de $\mu-$medibilidad a través del límite puntual $\mu-$a.e. de una sucesión, o red, de funciones simples, no proporciona una buena medibilidad fuerte y por tanto tampoco puede dar lugar a un buen concepto de integral fuerte.

Nuestras funciones integrables $f : \Omega \to E$ serán, las que Thomas [94] y [95] denomina *absolutamente $\mu-$sumables* en analogía con la terminología introducida por Pietsch [83] para sucesiones vectoriales. Si el espacio localmente convexo E es casi–completo, estas funciones también serán las que Thomas denomina μ–sumables y considerando la integral definida en [94] tendremos un buen concepto de integral. La propiedad crucial de esta integral, determinada por el Lema 1.2.10, será el Lema de Inclusión que veremos más adelante y que podemos expresar diciendo que

los valores medios $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu$ determinan μ–a.e. el rango de f.

Pasamos a describir la integral que utilizaremos. Consideremos por supuesto un espacio de medida de Radon (Ω, Σ, μ) y un espacio localmente convexo E. Dado un subconjunto $K \subset \Omega$ compacto y una función continua $f : K \to E$, si E es casi–completo, podemos definir

$$\int_K f \, d\mu \in E$$

mediante sumas de Riemann, sin más que aproximar uniformemente f mediante funciones simples. Este elemento $\int_K f \, d\mu \in E$ está caracterizado por

$$\left\langle \int_K f \, d\mu, x' \right\rangle = \int_K \langle f, x' \rangle \, d\mu \quad \forall x' \in E'$$

([17, §6, Prop. 8]),

Adoptando una terminología distinta a la utilizada por Thomas damos la siguiente

1.4.1 Definición *Sea E casi–completo y sea $f : \Omega \to E$ una función μ–medible. Diremos que f es integrable–Pettis si existe en E el límite*

$$\lim_{K \in \mathcal{C}_f} \int_K f \, d\mu$$

donde $\mathcal{C}_f$ es la familia de los compactos $K \subset \Omega$ tales que

$$f : K \to E \quad \text{es continua,}$$

con el preorden definido por la inclusión. En este caso, definimos la integral de f (sobre Ω) como dicho límite

$$\int f \, d\mu := \lim_{K \in \mathcal{C}_f} \int_K f \, d\mu.$$

1.4.2 Proposición *([94, 1.1])*

Siendo E casi-completo y $f : \Omega \to E$ $\mu-$medible, son equivalentes:

(1) f es integrable-Pettis.

(2) (Criterio de Cauchy) Para cada U entorno de 0 en E existe un compacto $K_0 \in \mathcal{C}_f$ tal que para $K \in \mathcal{C}_f, K \cap K_0 = \emptyset$

$$\int_K f \; d\mu \in U.$$

(3) Para cada sucesión (K_n) de compactos disjuntos en $\mathcal{C}_f$, la sucesión

$$\left(\int_{K_n} f \; d\mu\right)$$

es sumable, i.e. existe $s \in E$ tal que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe un subconjunto finito $F_0 \subset \mathbb{N}$ tal que si $F \supset F_0$ es finito, $\left(s - \sum_{n \in F} \int_{K_n} f \; d\mu\right) \in U$.

(4) (Condición de Orlicz-Pettis)

(a) Para cada $x' \in E', \langle f(\cdot), x' \rangle \in L^1(\mu)$.

(b) Para cada conjunto de Borel $A \subset \Omega$, existe $x_A \in E$ tal que

$$\langle x_A, x' \rangle = \int_A \langle f, x' \rangle \; d\mu \quad \forall x' \in E'.$$

La condición (4.b) de la proposición anterior permite definir la integral de f sobre un Borel A

$$\int_A f \; d\mu := x_A = \lim_{K \in \mathcal{C}_f} \int_{A \cap K} f \; d\mu = \int f \chi_{_A} \; d\mu.$$

y por tanto sobre cualquier conjunto medible pues cada conjunto medible se diferencia de un Borel en un conjunto de medida nula.

El siguiente lema pone de manifiesto la forma en que los valores medios de una función f determinan, salvo un conjunto de medida nula, el rango de f.

1.4.3 Lema *Lema de Inclusión([94, 2.4])*

Si E es un espacio localmente convexo casi-completo, $f : \Omega \to E$ es una función $\mu-$medible integrable-Pettis y $B \subset E$ es convexo y cerrado, son equivalentes :

(1) $f(t) \in B \quad \mu$*–a.e..*

(2) Para cada Borel $A \subset \Omega$ *de medida finita y positiva,*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \; d\mu \in B.$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Teniendo encuenta el teorema de Hahn–Banach, bastará probar que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \; d\mu$$

está en todo semiespacio cerrado que contenga a B. Sea

$$H_+ := \{x \in E : \langle x, x' \rangle \leq \alpha\} \qquad (x' \in E',\ \alpha \in \mathbb{R})$$

uno de dichos semiespacios. Entonces, tenemos

$$\left\langle \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \; d\mu, x' \right\rangle = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle f, x' \rangle \; d\mu \leq \alpha$$

y por tanto

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \; d\mu \in H_+.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Teniendo en cuenta el Lema de Localización 1.2.10 bastará probar que

$$f(t) \in H_+ \qquad \mu - \text{a.e.}$$

para cada semiespacio cerrado H_+ que contenga a B. Asimismo, podemos suponer que el espacio de medida es finita. Con la terminología anterior, para cada $A \subset \Omega$ Borel tenemos

$$\alpha \geq \left\langle \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \; d\mu, x' \right\rangle = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle f, x' \rangle \; d\mu$$

con lo cual $\langle f, x' \rangle \leq \alpha \quad \mu$–a.e. y, por tanto,

$$f(t) \in H_+ \qquad \mu - \text{a.e.}$$

■

1.4.4 Corolario *Si E es casi-completo y $f:\Omega\to E$ es una función $\mu-$medible integrable-Pettis, entonces para cada subconjunto medible A de medida finita se verifica*

$$\int_A f\ d\mu \in \mu(A)\overline{co}\,(f(A))$$

En lugar de A se puede considerar cualquier A_0 que se diferencie de A en un conjunto de medida nula.

1.4.5 Corolario *Si $f_1, f_2 : \Omega \to E$ son $\mu-$medibles integrables-Pettis y*

$$\forall Borel\ A\subset\Omega \qquad \int_A f_1\ d\mu = \int_A f_2\ d\mu,$$

entonces $f_1 = f_2$ $\mu-a.e.$.

Ahora estamos en condiciones de definir nuestro espacio de funciones *integrables*. El conjunto de funciones

$$\mathcal{L}^1\{E\} := \left\{f:\Omega\to E : f \ \text{ es } \ \mu-\text{medible y } \ qf\in L^1(\mu)\ \forall q\in\mathcal{Q}(E)\right\}$$

es un espacio vectorial al cual la familia de seminormas $\left\{\|q(\cdot)\|_1 : q\in\mathcal{Q}(E)\right\}$ definidas por

$$\|q(f)\|_1 := \int qf\ d\mu$$

dota de una topología localmente convexa, no separada si el espacio de medida no es puramente atómico. Puesto que

$$\mathcal{N}_0 := \left\{f\in\mathcal{L}^1\{E\} : \|q(f)\|_1 = 0\ \forall q\in\mathcal{Q}(E)\right\}$$

coincide, en virtud del Corolario 1.2.11, con el conjunto

$$\{f:\Omega\to E : f \ \text{ es } \ \mu-\text{medible y } \ f=0\ \mu-\text{a.e.}\ \},$$

identificando en $\mathcal{L}^1\{E\}$ funciones que coinciden $\mu-$a.e., tenemos

1.4.6 Definición *Siendo E un espacio localmente convexo y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, denotaremos por $L^1\{\Omega, \mu, E\}$, o por $L^1\{E\}$ si no hay posibilidad de confusión, al espacio de (clases de) funciones*

$$L^1\{E\} := \left\{ f : \Omega \to E : f \text{ es } \mu-\text{medible y } qf \in L^1(\mu)\ \forall q \in \mathcal{Q}(E) \right\}$$

dotado de la topología localmente convexa separada definida por

$$\left\{ \|q(\cdot)\|_1 : q \in \mathcal{Q}(E) \right\}.$$

Cuando E es casi-completo, toda $f \in L^1\{E\}$ es integrable–Pettis sin más que aplicar la Proposición 1.4.2(3). Por su sencillez omitimos la demostración del siguiente resultado.

1.4.7 Proposición *Sea E casi-completo y sea $f \in L^1\{E\}$. Se verifica :*

(1) Para cada $A \in \Sigma$ y cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, $q\left(\int_A f\ d\mu\right) \leq \int_A qf\ d\mu$.

(2) $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f\ d\mu = 0$.

(3) Si (A_n) es una partición medible de $A \in \Sigma$, la serie $\sum \int_{A_n} f\ d\mu$ es absolutamente convergente en E y su suma es $\int_A f\ d\mu$.

(4) $m : \Sigma \to E$ definida por $m(A) := \int_A f\ d\mu$ es una medida $\mu-$continua, de variación acotada y para cada $A \in \Sigma$

$$|m|_q(A) = \int_A qf\ d\mu$$

(5) Siendo F otro espacio localmente convexo y $u : E \to F$ lineal y continua, entonces $uf \in L^1\{F\}$ y

$$\int uf\ d\mu = u\left(\int f\ d\mu\right)$$

(6) $L^1\{E\}$ es un subespacio topológico de $cabv(\Sigma, \mu, E)$.

Referente a la medida vectorial y al operador lineal que define cada elemento de $L^1\{E\}$ tenemos

1.4.8 Proposición *Sea E casi-completo, sea $f \in L^1\{E\}$ y sean*

$$m : A \in \Sigma \to m(A) := \int_A f \, d\mu \in E$$

$$T : g \in L^\infty(\mu) \to T(g) := \int gf \, d\mu \in E$$

la medida y el operador lineal asociados a f. Se verifica:

(1) T es un operador compacto.

(2) El rango de m es relativamente compacto.

(3) Para cada compacto $K_1 \subset \Omega$ de medida positiva existe un compacto $K \subset K_1$ de medida positiva tal que

$$\left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : \mu(A) > 0, A \subset K \right\}$$

es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Puesto que f es μ-medible, existe una sucesión creciente de compactos (K_n) de Ω tales que

$$\mu\left(\Omega \setminus \cup_n K_n\right) = 0$$

y cada restricción $f : K_n \to E$ es continua. Los operadores

$$T_n : g \in L^\infty(\mu) \to T_n(g) := \int_{K_n} gf \, d\mu \in E$$

son compactos pues si g está en la bola unidad de $L^\infty(\mu)$

$$T_n(g) = \int_{K_n} gf \, d\mu \in \mu(K_n)\overline{co}\left(gf(K_n)\right) \subset \mu(K_n)\overline{acx}\left(f(K_n)\right)$$

y este último conjunto es compacto por serlo $f\left(K_n\right)$.

Por otra parte, (T_n) converge a T en el espacio $L\left(L^\infty(\mu), E\right)$ de los operadores lineales y continuos $L^\infty(\mu) \to E$ con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados pues si $q \in \mathcal{Q}(E)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sup\{q\left(Tg - T_n g\right) \quad : \quad \|g\|_\infty \leq 1\} &= \sup\left\{q\left(\int_{\Omega\setminus K_n} gf\ d\mu\right) : \|g\|_\infty \leq 1\right\} \\
&\leq \quad \sup\left\{\int_{\Omega\setminus K_n} |g|\ qf\ d\mu : \|g\|_\infty \leq 1\right\} = \int_{\Omega\setminus K_n} qf\ d\mu.
\end{aligned}$$

Puesto que, al ser E casi–completo, el conjunto de los operadores compactos de $L^\infty(\mu)$ en E es cerrado en el de los operadores continuos con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados (Köthe [62, §42.1.(2)]), tenemos que T es compacto.

(2) Basta tener en cuenta que

$$m\left(\Sigma\right) := \{m(A) : A \in \Sigma\} \subset \left\{T(g) : \|g\|_\infty \leq 1\right\}$$

y aplicar lo anterior.

(3) Consideremos un compacto $K \subset K_1$ de medida positiva tal que $f : K \to E$ es continua. Para cada $A \subset K$ de medida positiva tenemos

$$\frac{m(A)}{\mu(A)} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\ d\mu \in \overline{co}\left(f(A)\right) \subset \overline{co}\left(f(K)\right)$$

y éste último compacto por serlo $f(K)$.

■

Observaciones

Cuando se trabaja con espacios de Banach, la demostración de que una función f integrable Bochner define un operador

$$T : g \in L^\infty(\mu) \to T(g) := \int gf\ d\mu \in E$$

compacto [30, 2.3.8(c)] se basa en obtener T como límite (en la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados) de una sucesión de operadores de rango finito (obtenidos de una sucesión de funciones simples que converge a f μ–a.e.). En un espacio casi–completo arbitrario el papel de la sucesión de operadores de rango finito ha pasado a desempeñarlo la sucesión de operadores construidos a partir de una sucesión de compactos que recubre Ω, salvo un conjunto de medida nula, tal que la restricción de f a cada uno de ellos es continua.

1.4.9 Proposición *$S_c(E)$ es denso en $L^1\{E\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f \in L^1\{E\}$ y sean $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos que obtener una función simple $s : \Omega \to E$ de soporte compacto, de forma que

$$\int q(f-s)\, d\mu < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

Al ser f es μ–medible, existe una sucesión creciente de compactos (K_n) en Ω de forma que $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$ y para cada n, $f : K_n \to E$ es continua. Para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$\int qf\, d\mu = \lim_n \int_{K_n} qf\, d\mu$$

y por tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geq n_0$ se verifica

$$\int_{\Omega \setminus K_n} qf\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Puesto que $f : K_{n_0} \to E$ es continua, puede aproximarse uniformemente por funciones simples–Borel $s : K_{n_0} \to E$ y por tanto existe una tal s de forma que

$$\sup\{q(f(t)-s(t)) : t \in K_{n_0}\} < \frac{\varepsilon}{2\mu(K_{n_0})}$$

con lo cual definiendo s como cero en $\Omega \setminus K_{n_0}$ obtenemos (1.4.1).

■

En el teorema anterior no ha sido necesario considerar un espacio E casi–completo para obtener el resultado. Suponiendo que E es casi–completo se puede afinar el resultado dando una red acotada en $S_c(E)$ convergente a un elemento de $L^1\{E\}$ prefijado. Básicamente, dicha red se construye a partir de los *valores medios* de la función que se pretende aproximar. Para ver esto introduzcamos un poco de terminología.

1.4.10 Definición

(1) Llamaremos partición (medible) en Ω a toda familia finita de subconjuntos medibles relativamente compactos disjuntos dos a dos.

(2) Si E es casi–completo y π es una partición en Ω, para cada $f \in L^1\{E\}$ denotaremos por f_π a la función simple

$$f_\pi := \sum_\pi \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \cdot \chi_A$$

(3) Dadas dos particiones π_1, π_2 en Ω denotaremos $\pi_1 \geq \pi_2$ si cada elemento de π_2 es unión de una subfamilia de π_1, salvo conjuntos de medida nula.

1.4.11 Proposición *Si E es casi–completo y $\{\pi\}$ es la familia de particiones en Ω, para cada $f \in L^1\{E\}$ se verifica*

$$f = \lim_\pi f_\pi.$$

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando el teorema anterior, dados $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $\varepsilon > 0$, existe $s \in S_c(E)$ de forma que

$$\int q(f - s) \, d\mu < \varepsilon$$

Siendo $s = \sum_{\pi_0} x_i \chi_{A_i}$, probemos que para cada partición $\pi \geq \pi_0$

$$\|q(s - f_\pi)\|_1 \leq \|q(s - f)\|_1 < \varepsilon$$

con lo cual tendremos $\|q(f - f_\pi)\|_1 < 2\varepsilon$. Puntualmente, sin más que expresar cada A_i como unión, salvo conjuntos de medida nula, de elementos de π, tenemos:

$$\begin{aligned}
q(s - f_\pi) &= q\left(\sum_{\pi_0} x_i \chi_{A_i} - \sum_{\pi} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \cdot \chi_A\right) \\
&= q\left(\sum_{\pi} x_i \chi_A - \sum_{\pi} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \cdot \chi_A\right) \\
&= q\left(\sum_{\pi} \left[x_i - \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu\right] \chi_A\right) \leq \sum_{\pi} \frac{1}{\mu(A)} q\left(\int_A (x_i - f) \, d\mu\right) \chi_A \\
&\leq \sum_{\pi} \frac{1}{\mu(A)} \int_A q(x_i - f) \, d\mu \chi_A = \sum_{\pi} \frac{1}{\mu(A)} \int_A q(s - f) \, d\mu \chi_A
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\|q(s - f_\pi)\|_1 \leq \int_{\cup_\pi A} q(s - f) \, d\mu \leq \int q(s - f) \, d\mu.$$

■

Observaciones

La demostración de la Proposición 1.4.8 la podríamos haber construido sobre el resultado anterior en lugar de hacerlo sobre las propiedades de las funciones continuas. Hemos preferido hacerlo sobre éstas para resaltar la utilización que se hace de la medibilidad en el sentido de Lusin. A fin de cuentas, la proposición anterior también se basa en dicha mediblidad.

1.4.12 Corolario *Si E es casi-completo, $S_c(E)$ es amplio en $L^1\{E\}$.*

Por lo que se refiere a la completitud poco podemos decir por ahora cuando el espacio E no es metrizable. Más adelante probaremos que bajo ciertas hipótesis $L^1\{E\}$ es localmente completo.

Si E es un espacio de Fréchet, usando construcciones similares a las que se utilizan cuando E es un Banach, puede probarse que $L^1\{E\}$ es completo. Más adelante obtendremos este resultado como caso particular de un resultado de completitud en el sentido de Mackey.

No daremos ningún resultado de convergencia del tipo del teorema de la convergencia dominada pues, (saliéndonos del caso metrizable), en los resultados que podríamos dar de este tipo necesitaríamos suponer convergencia casi–uniforme de una sucesión para poder garantizar la $\mu-$medibilidad de la función límite puntual.

Aún cuando más adelante insistiremos sobre ello, notemos que puesto que sobre $S_c(E)$ la topología que induce $L^1\{E\}$ es la topología del $\pi-$producto tensorial $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ (ver Köthe [62, §41.7.(8)]), $L^1\{E\}$ es un subespacio vectorial y topológico de $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ estrictamente más pequeño en general.

De forma parecida a la construcción que hemos hecho del espacio $L^1\{E\}$ podemos construir el espacio $L^1_{loc}\{E\}$ que definimos como el espacio de las (clases de) funciones $\mu-$medibles $f : \Omega \to E$ tales que

$$qf \in L^1_{loc}(\mu) \quad \forall q \in \mathcal{Q}(E)$$

dotado de la topología localmente convexa separada definida por las seminormas

$$\left\|qf\chi_{\Omega_n}\right\|_1 := \int_{\Omega_n} qf \, d\mu$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$ y (Ω_n) recorre una sucesión fundamental de compactos de Ω. Esta topología coincide con la definida por la familia de seminormas

$$\sup\left\{\int qf|h| \, d\mu : h \in H\right\}$$

cuando q recorre $\mathcal{Q}(E)$ y H recorre la familia de los discos normales de $L^\infty_c(\mu)$. Con esta topología la inclusión

$$L^1\{E\} \hookrightarrow L^1_{loc}\{E\}$$

es continua. Es fácil comprobar, teniendo en cuenta lo hecho para $L^1\{E\}$, que se verifica

1.4.13 Proposición

(1) Si $f \in L^1_{loc}\{E\}$, $m : \mathcal{R} \to E$ *definida por* $m(A) := \int_A f \, d\mu$ *es una medida* $\mu-$*continua, de variación acotada (sobre los compactos) y para cada* $A \in \mathcal{R}$

$$|m|_q (A) = \int_A qf \, d\mu$$

(2) $S_c(E)$ *es denso en* $L^1_{loc}\{E\}$.

(3) Si E *es casi–completo y* $\{\pi\}$ *es la famila de particiones en* Ω *de los subconjuntos relativamente compactos, ordenada por refinamiento, entonces*

$$f = \lim_{\pi} f_\pi \qquad \forall f \in L^1_{loc}\{E\}.$$

(4) Si E *es casi–completo,* $S_c(E)$ *es amplio en* $L^1_{loc}\{E\}$.

(5) $L^1_{loc}\{E\}$ *es completo (respect. casi–completo, sucesionalmente completo) si y sólo si lo es* $L^1\{E\}$.

1.5 La propiedad de Radon–Nikodym

El uso que haremos de la propiedad de Radon-Nikodym no será de tipo estructural, sino que sólo será un instrumento para dar una caracterización del dual de un espacio de funciones $\Lambda\{E\}$ como un espacio de funciones del mismo tipo.

Aunque para caracterizar el dual de un espacio $\Lambda\{E\}$ como un espacio de (clases de) funciones $\Omega \to E'_b$ no sea imprescindible que las funciones obtenidas sean $\mu-$medibles en el sentido de Lusin, es de tener precisamente este tipo de medibilidad de donde podremos obtener conclusiones sobre la dualidad

$$\langle \Lambda\{E\}, \Lambda\{E\}' \rangle.$$

Si consideraramos un tipo de $\mu-$medibilidad referido independientemente a cada proyección

$$\Omega \to E'_b \to \left(E'_{B^o}, p_{_{B^o}}\right)$$

siendo B un disco de E, las conclusiones que en este sentido podríamos obtener serían casi nulas. Citemos como muestra de lo anterior el fuerte uso que se hace del tipo de medibilidad en los fundamentales Lemas de Inclusión y de Localización. El citado carácter instrumental de la propiedad de Radon–Nikodym provendrá de su relación con la representación (en el sentido de Riesz) de operadores continuos.

El teorema de Radon–Nikodym que probaremos reduce el problema a la construcción (a través del teorema clásico de Rieffel [84]) de una densidad en un determinado espacio de Banach construido sobre la imagen de la medida.

Como es de esperar, cuando E es un espacio de Fréchet se verifica el análogo al teorema clásico de Rieffel, como prueba G.Y.H. Chi [20].

Antes de estudiar un teorema de Radon-Nikodym referente a nuestra integración consideremos la relación existente entre la propiedad de Radon-Nikodym (en un espacio localmente convexo E arbitrario) y la representación en el sentido de Riesz de operadores continuos

$$T : L^1(\mu) \to E.$$

1.5.1 Definición

(1) Diremos que una medida vectorial $m : \Sigma \to E$ *(resp.* $m : \mathcal{R} \to E$*) tiene una* densidad *si existe* $g \in L^1\{E\}$ *(resp.* $g \in L^1_{loc}\{E\}$*) de forma que para cada* $A \in \Sigma$ *(resp.* $A \in \mathcal{R}$ *) se verifica*

$$m(A) = \int_A g \; d\mu.$$

(2) Diremos que un espacio localmente convexo E *tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de una medida* μ *(de Radon) si toda medida vectorial* $m : \Sigma \to E$ $\mu-$*continua y con variación acotada tiene una densidad. Lo expresaremos diciendo que* E *tiene la* $RNP(\mu)$*.*

(3) Diremos que una aplicación lineal $T : L^1(\mu) \to E$ *es representable (en el sentido de Riesz) si existe* $g \in L^\infty\{\mu, E\}$ *de forma que para cada* $f \in L^1(\mu)$

$$Tf = \int fg \; d\mu.$$

(4) Diremos que una aplicación lineal $T : L^1_{loc}(\mu) \to E$ *es representable (en el sentido de Riesz) si existe* $g \in L^\infty_c\{\mu, E\}$ *de forma que para cada* $f \in L^1_{loc}(\mu)$

$$Tf = \int fg \; d\mu.$$

Teniendo en cuenta el Lema de Inclusión, las funciones g consideradas en la definición anterior están definidas de forma única $\mu-$a.e.. Es inmediato comprobar que se verifica la siguiente proposición

1.5.2 Proposición *Consideremos los siguientes enunciados*

(1) E *tiene la RNP(*μ*).*

(2) Toda medida vectorial $m : \mathcal{R} \to E$*,* $\mu-$*continua y de variación acotada sobre los compactos tiene una densidad en* $L^1_{loc}\{E\}$*.*

(3) Toda aplicación $T : L^1(\mu) \to E$ *lineal y continua es representable.*

(4) Toda aplicación $T : L^1_{loc}(\mu) \to E$ lineal y continua es representable.

Se verifica $(1) \iff (2)$ *y* $(3) \iff (4)$.

Cuando E es un espacio de Banach, los cuatro enunciados anteriores son equivalentes; sin embargo, en el caso de un espacio localmente convexo general necesitamos una hipótesis adicional sobre E para obtener $(1) \iff (3)$. Antes de pasar a estudiar la relación entre RNP y representación de operadores citemos algunas propiedades elementales referidas a la RNP.

1.5.3 Proposición

(1) La RNP(μ) se conserva por:

(a) subespacios cerrados

(b) productos numerables

(c) sumas directas arbitrarias

(d) límites inductivos hiperestrictos.

(2) Si (Ω, Σ, μ) es puramente atómico, i.e. si Ω es unión de una cantidad numerable de átomos, todo espacio localmente convexo tiene la $RNP(\mu)$.

(3) Si E tiene la $RNP(\mu)$ y es completo, casi-completo o sucesionalmente completo, entonces $L^1\{E\}$ también lo es.

(4) El enunciado anterior es cierto para $L^1_{loc}\{E\}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) (a) Sea F un subespacio cerrado de E y sea $m : \Sigma \to F$ una medida vectorial μ−continua y de variación acotada. Puesto que F es subespacio de E, m también es una medida en E, μ−continua de variación acotada. Por tanto, existe $g \in L^1\{E\}$ tal que

$$m(A) = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Bastará probar que $g(t) \in F$ $\mu-$a.e.. Puesto que m toma valores en F, tenemos que para cada Borel $A \subset \Omega$ de medida finita y positiva, se verifica

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in F$$

y aplicando el Lema de Inclusión 1.4.3 tenemos que $g(t) \in F$ $\mu-$a.e. (En el Lema 1.4.3 suponíamos que el espacio E era casi–completo para tener definida la integral. Ahora no necesitamos dicha hipótesis pues esto viene garantizado por la existencia de densidad en E).

(b) Sea $E := \prod_n E_n$ donde cada E_n tiene la $RNP(\mu)$ y sea $m : \Sigma \to E$ una medida vectorial $\mu-$continua de variación acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $j_n : E \to E_n$ la proyección canónica y sea m_n la medida $\mu-$continua de variación acotada

$$m_n := j_n m : \Sigma \xrightarrow{m} E \xrightarrow{j_n} E_n.$$

Puesto que cada E_n tiene la $RNP(\mu)$, existe $g_n \in L^1\{E_n\}$ densidad de m_n. La función

$$g := (g_n) : t \in \Omega \to g(t) := (g_n(t)) \in E$$

es $\mu-$medible. Por otra parte, si q es una seminorma continua sobre E, existe una cantidad finita de índices $J \subset \mathbb{N}$ de forma que para cada $n \in J$ existe $q_n \in \mathcal{Q}(E_n)$ tal que

$$q(x) \leq \sum_{n \in J} q_n(x_n) \quad \forall x = (x_n) \in E.$$

Por tanto $qg \leq \sum_{n \in J} q_n g_n \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1\{E\}$.

(c) Sea I un conjunto de índices arbitrario y sea una suma directa

$$E := \bigoplus_{i \in I} E_i$$

donde cada E_i tiene la $RNP(\mu)$. Denotemos por $u_i : E \to E_i$ las proyecciones canónicas. Si $m : \Sigma \to E$ es una medida $\mu-$continua de variación acotada, también lo es cada

$$m_i := u_i m : \Sigma \xrightarrow{m} E \xrightarrow{u_i} E_i \qquad i \in I,$$

y, además, el conjunto

$$m(\Sigma) := \{m(A) : A \in \Sigma\}$$

es acotado en E. Por tanto, existe un conjunto finito de índices $J \subset I$ tal que $u_i(m(\Sigma)) = \{0\}$ para $i \in I \setminus J$, y $u_i(m(\Sigma))$ es acotado en E_i para $i \in J$. Para cada $i \in J$ sea $g_i \in L^1\{E_i\}$ la densidad de m_i y, para cada $i \in I \setminus J$ sea $g_i = 0 \in L^1\{E_i\}$. La función g definida por

$$g : t \in \Omega \to g(t) := (g_i(t)) \in E.$$

es μ–medible. Además, si $q \in \mathcal{Q}(E)$, para cada $i \in I$ existe $q_i \in \mathcal{Q}(E_i)$ de forma que

$$q(x) \leq \max\{q_i(x_i) : i \in I\} \quad \forall x = (x_i) \in E$$

y, por tanto, puntualmente se verifica

$$qg \leq \max\{q_i g_i : i \in H\} \in L^1(\mu)$$

y obtenemos $g \in L^1\{E\}$. Comprobemos que g es la densidad de m. Tenemos que probar que para cada $x' \in E'$ y cada $A \in \Sigma$ se verifica que

$$\langle x', m(A)\rangle = \int \langle x', g\rangle \; d\mu.$$

Teniendo en cuenta la identidad algebraica de E' y $\prod_{i\in I} E_i'$ asi como su dualidad con E tenemos que $x' = (x_i')$, donde $x_i' \in E_i'$ para cada $i \in I$, y

$$\begin{aligned}
\langle x', m(A)\rangle &= \sum_{i\in I} \langle x_i', m_i(A)\rangle = \sum_{i\in J} \langle x_i', m_i(A)\rangle \\
&= \sum_{i\in J} \int_A \langle x_i', g_i\rangle \; d\mu = \int_A \sum_{i\in J} x_i' g_i \; d\mu \\
&= \int_A \sum_{i\in I} x_i' g_i \; d\mu = \int \langle x', g\rangle \; d\mu.
\end{aligned}$$

(d) Sea E un límite inductivo hiperestricto de una sucesión (E_n) de espacios localmente convexos. Es decir, (E_n) es una sucesión creciente de espacios que recubre E, cada E_{n+1} induce sobre E_n la topología de E_n y éste es cerrado en E_{n+1}. De esta forma, E induce sobre cada E_n la topolgía de E_n y todo acotado en E es acotado en algún E_n.

Supongamos que cada E_n tiene la $RNP(\mu)$ y sea $m : \Sigma \to E$ una medida μ–continua de variación acotada. Puesto que $m(\Sigma)$ es acotado en E, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(\Sigma) \subset E_r \text{ y es acotado en la topología de } E_r.$$

Con respecto a la topología de E_r, $m : \Sigma \to E_r$ es una medida μ–continua de variación acotada y, por tanto, existe $g \in L^1\{E_r\}$ de forma que

$$m(A) = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Puesto que la topología de E_r coincide con la heredada de E, la función g obtenida está en $L^1\{E\}$.

(2) Si $\Omega = \bigcup_n A_n$ es una descomposición de Ω en átomos de medida positiva y $m : \Sigma \to E$ es una medida μ–continua de variación acotada, la función $g : \Omega \to E$ definida por

$$g := \sum_n m(A_n)\chi_{A_n}$$

está en $L^1\{E\}$ y es la densidad de m.

(3) Si E tiene la $RNP(\mu)$, entonces el espacio $L^1\{E\}$ es isomorfo, algebraica y topológicamente, al espacio *cabv* (Σ, μ, E) que es respectivamente completo, casi-completo o sucesionalmente completo si E lo es (Proposición 1.3.5).

(4) Análogo a (3).

■

Para un espacio localmente convexo arbitrario no es cierto el análogo al teorema de Rieffel, es decir siendo $m : \Sigma \to E$ μ–continua, de variación acotada y con rango ponderado localmente relativamente compacto, puede no tener densidad (en el sentido que consideramos).

1.5.4 Ejemplo *[94, 6.11]*

Sea $\Omega := [0,1]$ dotado de la medida de Lebesgue y sea $E := l^\infty(I)$ dotado de la topología $s\left(l^\infty(I), l^1(I)\right)$, siendo I un conjunto de índices no numerable. Si tomamos como I la bola unidad de $L^\infty(\Omega)$ la medida

$$m : A \in \Sigma \to m(A) := \left(\int_A h \, d\mu : h \in I\right)$$

tiene rango μ–ponderado relativamente compacto, en la topología considerada, pero no puede tener densidad (en $L^1\{E\}$), pues si $f := \left(f_h\right) \in L^1\{E\}$ fuera densidad de m, existiría una sucesión de compactos disjuntos (K_n) tales que $\mu\left(\Omega \setminus \cup K_n\right) = 0$ y

$$f : K_n \to E \qquad \text{es continua}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que para cada $h \in I, f_h$ debe estar en la clase de $h \in I$, tenemos que todas las clases de funciones de I tienen un representante continuo sobre cada K_n y esto es imposible.

1.5.5 Lema *Si $T : L^1(\mu) \to E$ es lineal y continua, definimos la medida vectorial $m : \mathcal{R} \to E$ mediante $m(A) = T\left(\chi_A\right)$. Son equivalentes:*

(1) T es representable.

(2) m tiene una densidad g.

En este caso $g \in L^\infty\{E\}$ y para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ se verifica

$$\|qg\|_\infty = \|T\|_q := \sup\left\{\frac{q(Tf)}{\|f\|_1} : f \in L^1(\mu), f \neq 0\right\} < +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Siendo T representable existirá $g \in L^{\infty}\{E\}$ de forma que

$$T(f) = \int fg \, d\mu \text{ para } f \in L^1(\mu)$$

y por tanto,

$$m(A) = \int \chi_A g \, d\mu = \int_A g \, d\mu \quad \text{para} \quad A \in \mathcal{R}.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $m(A) = \int_A g \, d\mu$ con $g \in L^1_{loc}\{E\}$. Puesto que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $A \in \mathcal{R}$ se tiene

$$q(m(A)) = q\left(T\left(\chi_A\right)\right) \leq \|T\|_q \mu(A),$$

m es de variación acotada, $\mu-$continua y además

$$|m|_q(A) \leq \|T\|_q \cdot \mu(A). \tag{1.5.1}$$

Por otra parte, puesto que

$$|m|_q(A) = \int_A qg \, d\mu, \tag{1.5.2}$$

qg está en $L^{\infty}(\mu)$ y $g \in L^{\infty}\{E\}$. La aplicación lineal y continua

$$T_1 : f \in L^1(\mu) \to T_1(f) := \int fg \, d\mu \in E$$

coincide con T sobre las funciones simples de soporte compacto y por tanto sobre todo $L^1(\mu)$. De (1.5.1) y (1.5.2) tenemos $\|qg\|_{\infty} \leq \|T\|_q$ y puesto que si $f \in L^1(\mu)$

$$\begin{aligned} q(Tf) &= q\left(\int fg \, d\mu\right) \\ &\leq \int |f| qg \, d\mu \leq \|f\|_1 \|qg\|_{\infty} \end{aligned}$$

tenemos la otra desigualdad $\|T\|_q \leq \|qg\|_{\infty}$. ■

1.5.6 Corolario *Siendo $T : L^1_{loc}(\mu) \to E$ lineal y continua definimos $m : \Sigma \to E$ por $m(A) := T\left(\chi_A\right)$. Son equivalentes :*

(1) T es representable.

(2) m tiene una densidad g.

En este caso $g \in L^\infty_c\{E\}$ y para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $q(Tf) = q\left(T\left(f\chi_K\right)\right)$ y se verifica

$$\begin{aligned} \|qg\|_\infty &= \|qg\chi_K\|_\infty \\ &:= \sup\left\{\frac{q(Tf)}{\|f\chi_K\|_1} : f \in L^1_{loc}(\mu), f\chi_K \neq 0\right\} < +\infty. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

Si (Ω_n) es una sucesión fundamental de compactos de Ω, la topología de $L^1_{loc}(\mu)$ queda definida por las seminormas

$$p_n(f) := \|f\chi_{\Omega_n}\|_1 := \int_{\Omega_n} |f|\, d\mu.$$

Por tanto, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ existen $n(q) \in \mathbb{N}$ y $C_{n(q)} > 0$ de forma que $\forall f \in L^1_{loc}(\mu)$

$$q(Tf) \leq C_{n(q)} p_{n(q)}(f) \tag{1.5.3}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Como en el lema anterior.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $m(A) = \int_A g\, d\mu$ con $g \in L^1\{E\}$. Tenemos que probar que $g \in L^\infty_c\{E\}$, es decir que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, $qg \in L^\infty_c(\mu)$. Para cada $A \in \Sigma$ tenemos

$$qm(A) = q\left(T\left(\chi_A\right)\right) \leq C_{n(q)} \cdot \mu\left(A \cap \Omega_{n(q)}\right)$$

y por tanto

$$q\left(\int_{A \setminus \Omega_{n(q)}} g\, d\mu\right) = 0.$$

Luego qg se anula μ–a.e. en $\Omega \setminus \Omega_{n(q)}$ y $qg \in L^\infty_c(\mu)$. De esto último se deduce que la aplicación lineal $T_g : L^1_{loc}(\mu) \to E$ definida por

$$T_g(f) := \int gf\, d\mu$$

es continua y, puesto que coincide con T sobre $\left\{\chi_A : A \in \mathcal{R}\right\}$, también lo hace sobre $S_c(\mu)$ y, por densidad, sobre $L^1_{loc}(\mu)$. Puesto que $T = T_g$ y $sop\,(qg) \subset \Omega_{n(q)}$ de (1.5.3) se deduce que

$$q\,(Tf) \;=\; q\left(Tf\chi_{\Omega_{n(q)}}\right) \leq \|qg\|_\infty \int_{\Omega_{n(q)}} |f| \; d\mu$$

Por otra parte, siendo $K = \Omega_{n(q)}$ e $i_K : L^1(K,\mu) \rightarrow L^1_{loc}(\mu)$ la inmersión canónica, Ti_K es continua y aplicando el lema anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|qg\|_\infty &= \|qg\chi_K\|_\infty \\
&= \sup\left\{\frac{qTi_Kf}{\|f\|_1} : f \in L^1(K,\mu),\ f \neq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{qTf}{\|f\chi_K\|_1} : f \in L^1_{loc}(\mu),\ f \cdot \chi_K \neq 0\right\}
\end{aligned}$$

■

1.5.7 Definición

(1) Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ), un espacio localmente convexo E y una medida vectorial $m : \Sigma \longrightarrow E$, se denomina rango μ–ponderado de m sobre un subconjunto A_0 de medida positiva y finita al subconjunto de E

$$m_\mu(A_0) := \left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : \mu(A) > 0, A \subset A_0\right\}$$

(2) Una propiedad de conjunto P sobre Σ se denomina local *si para cada $A_0 \in \Sigma$ de medida finita positiva existe algún $A_1 \in \Sigma, A_1 \subset A_0$ de medida positiva con la propiedad P.*

Así, se dice que m tiene rango μ–ponderado localmente acotado (relativamente compacto,...) si para cada $A_0 \in \Sigma$ de medida finita y positiva, existe $A_1 \subset A_0$ de medida positiva, tal que $m_\mu(A_1)$ es acotado (relativamente compacto,...) Puesto que estamos trabajando con una medida de Radon, en (2) podemos suponer que A_0 y A_1 son compactos.

Es fácil ver, al igual que en el caso Banach [30, 3.2.4], que si P es local, si $A_0 \subset \Sigma$ tiene medida finita y positiva y $\varepsilon > 0$, entonces existe $A_1 \subset A_0$ tal que $\mu(A_0 \setminus A_1) < \varepsilon$ y A_1 tiene la propiedad P. Asimismo puede obtenerse una partición (A_n) de Ω, salvo un conjunto de medida nula, tal que cada A_n verifica P.

1.5.8 Proposición *Siendo E casi–completo son equivalentes:*

(1) Toda aplicación lineal y continua $T : L^1(\mu) \to E$ es representable.

(2) Toda medida vectorial $m : \Sigma \to E$ μ–continua, de variación acotada y con rango μ–ponderado localmente acotado tiene densidad.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sea $m : \Sigma \to E$ en las hipótesis de (2) y sea (K_n) una sucesión disjunta de conjuntos de medida finita tales que

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_n K_n\right) = 0 \quad \text{y} \quad B_n := m_\mu(K_n) n = 1, 2, \ldots$$

es un subconjunto acotado de E. Para cada n obtendremos una densidad

$$g_n \in L^\infty\{E\}$$

de la medida $m_n : \Sigma_n \to E$ que m induce sobre K_n. La función g definida como g_n en cada K_n será la densidad buscada. Sea $T_n : L^1(\mu) \to E$ la aplicación lineal continua definida por

$$T_n(s) := \int_{K_n} s \, d\mu \qquad \text{para} \quad s \in S(\mu),$$

es decir, si $s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$ con los A_i disjuntos dos a dos, es

$$T_n(s) := \sum_i \alpha_i m\left(A_i \cap K_n\right).$$

La continuidad de $T_n : S(\mu) \to E$ se obtiene de forma inmediata de la acotación de B_n. Teniendo en cuenta (1), sea $g_n \in L^\infty \{E\}$ tal que

$$T_n(f) = \int f g_n \, d\mu \qquad \forall f \in L^1(\mu).$$

Trivialmente g_n se anula μ–a.e. en $\Omega \setminus K_n$. Sea g la función definida mediante

$$g := \sum_n g_n \chi_{K_n}$$

vamos a comprobar que g está en $L^1 \{E\}$ y que $m(A) = \int_A g \, d\mu$ para cada $A \subset \Omega$ medible. Puesto que (K_n) es una partición medible de Ω y cada g_n es μ–medible, g es μ–medible. Por otra parte, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $q g_n \chi_{K_n} \in L^1(\mu)$ y puesto que

$$\sum_n \int q g_n \chi_{\Omega_n} \, d\mu = \sum_n |m|_q (K_n) = |m|_q (\Omega) < +\infty$$

aplicando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$qg = \sum_n q g_n \chi_{K_n} \in L^1(\mu)$$

y si $A \in \Sigma$,

$$m(A) = \lim_n \sum_{i=1}^n m(A \cap K_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n \int_A g_i \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $T : L^1(\mu) \to E$ una aplicación lineal continua y sea B la clausura de la imagen mediante T de la bola unidad de $L^1(\mu)$. Sea (K_n) una partición medible de Ω en conjuntos de medida finita y consideremos las medidas

$$m_n : A \in \Sigma \to m_n(A) = T\left(\chi_{A \cap K_n}\right) \in E.$$

Puesto que cada m_n es μ–continua, de variación acotada y con rango μ–ponderado acotado, existe $g_n \in L^1 \{E\}$ de forma que $m_n(A) = \int_A g_n \, d\mu$. Al igual que en la demostración del recíproco, consideremos la función μ–medible

$$g := \sum_n g_n \chi_{K_n}$$

y comprobemos que $g \in L^\infty\{E\}$ y $Tf = \int fg\ d\mu$ para cada $f \in L^1(\mu)$. Para $n = 1, 2, \ldots$ y $A \subset K_n$ medible de medida positiva, puesto que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A g_n\ d\mu = T\left(\frac{1}{\mu(A)}\right) \in B$$

aplicando el Lema de Inclusión (1.4.3), tenemos que para cada n,

$$g_n(t) \in B \quad \mu - \text{a.e. en} \quad K_n$$

y por tanto $g(t) \in B$ μ–a.e. Así pues, $g \in L^\infty\{E\}$ y es fácil comprobar que para cada $f \in L^1(\mu)$ se verifica

$$Tf = \int fg\ d\mu.$$

■

En [21] y [22], G.Y.H. Chi estudia la propiedad de Radon-Nikodym referida a un concepto de integral fuerte que, aunque no coincide con el nuestro, nos permite tener ejemplos de espacios con dicha propiedad, referida a nuestro concepto de integral.

En los trabajos citados las μ–medibilidades que se consideran (hay ligeras diferencias), si bien se refieren a una medida finita y positiva μ abstracta, se definen a través de la convergencia casi-uniforme de una sucesión de funciones simples. Asimismo, se consideran propiedades que de alguna forma sustituyen a las que hemos considerado, tanto para la μ–medibilidad en el sentido de Lusin respecto de una medida de Radon como para la integral.

El teorema de Radon-Nikodym cuya demostración veremos es, en lo esencial, el considerado en los trabajos de Chi [21] y [22], de E. Saab [86], y, desde otro punto de vista, el considerado por G.E.F. Thomas [94, 6.12, p. 93].

Considerando el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ donde μ es la medida cardinal, el espacio $L^1\{E\}$ es el espacio de las sucesiones absolutamente sumables de E

$$l^1\{E\} := \left\{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (q(x_n)) \in l^1\ \forall q \in \mathcal{Q}(E)\right\}$$

dotado de la topología definida por las seminormas

$$\| (q(x_n)) \|_1 := \sum_n q(x_n) \qquad q \in \mathcal{Q}(E).$$

1.5.9 Definición *Se dice que un espacio localmente convexo E tiene la propiedad (B) de Pietsch si todo acotado M de $l^1\{E\}$ es acotado en algún $l^1\left\{E_B\right\}$ siendo $B \subset E$ un disco; es decir, existe un disco cerrado $B \subset E$ tal que*

(a) para cada $x = (x_n) \in M$ se tiene $x_n \in E_B, n = 1, 2, \dots$ y

(b) el conjunto $\left\{\left(p_B(x_n)\right) : (x_n) \in M\right\}$ es acotado en l^1.

Diremos que E tiene la propiedad (BM) si para cada acotado M de $l^1\{E\}$ existe un disco cerrado metrizable $B \subset E$ tal que se cumplen (a) y (b).

Diremos que E tiene la propiedad (CM) si para cada acotado M de $l^1\{E\}$ existe un disco compacto metrizable $B \subset E$ tal que se cumplen (a) y (b).

1.5.10 Ejemplos *[21], [22], [83].*

(1) Los siguientes espacios tienen la propiedad (B):

  (a) los espacios metrizables.

  (b) los espacios (df).

(2) Los siguientes espacios tienen la propiedad (BM):

  (a) los espacios metrizables.

  (b) los límites inductivos hiperestrictos de una sucesión de espacios con dicha propiedad. En particular los (LF) estrictos.

(3) Los siguientes espacios E tienen la propiedad (CM):

  (a) metrizables de Montel.

(b) metrizables nucleares.

(c) (DF) de Montel.

(d) dual nuclear casi-completo. En particular $E = F'_b$ siendo F un tonelado nuclear o un Fréchet nuclear o un (DF) nuclear completo.

(e) Si F es un metrizable separable, su dual F' dotado de la topología precompacta $E = F'_p$ tiene la propiedad (CM). En particular si F es un metrizable Montel o Schwartz.

(f) Si F es un Fréchet separable tal que su dual F' dotado de la topología fuerte es co-Schwartz, entonces $E = F'_b$ tiene la propiedad (CM).

Para espacios con la propiedad (B) de Pietsch tendremos la equivalencia entre representación de operadores y propiedad de Radon-Nikodym.

1.5.11 Lema *Si E tiene la propiedad (B) de Pietsch, toda medida vectorial*

$$m : \Sigma \to E$$

μ–continua y de variación acotada tiene rango μ–ponderado localmente acotado.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $m : \Sigma \to E$ μ–continua de variación acotada y sea M el conjunto de sucesiones en E dado por

$$M := \{(m(A_n)) : (A_n) \subset \Sigma \text{ es disjunta } \}.$$

Puesto que para cada sucesión (A_n) disjunta y cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ tenemos

$$\sum q\,(m(A_n)) \leq |m|_q\,(\Omega) < +\infty$$

M es un subconjunto acotado de $l^1\,\{E\}$ y por tanto existe un disco cerrado $B \subset E$ tal que M es un subconjunto acotado del espacio normado $l^1\left\{E_B\right\}$, es decir existe $\rho < +\infty$ tal que

$$\sum_n p_B\,(m(A_n)) \leq \rho \quad \forall\,(m(A_n)) \in M.$$

Por tanto, respecto a la topología que define la norma p_B, m es una medida vectorial con valores en E_B, pues siendo convergente cada serie

$$\sum_n m(A_n)$$

en el Banach que resulta de completar E_B, su suma tiene que ser $m(\cup_n A_n) \in E_B$ por serlo respecto de una topología menos fina. Además tiene variación acotada respecto a p_B

$$|m|_B(\Omega) = \sup\left\{\sum_n p_B(m(A_n)) : (m(A_n)) \in M\right\} < +\infty$$

y es $\mu-$continua puesto que si $\mu(A) = 0$ entonces $m(A) = 0$. Por tanto

$$|m|_B : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$$

es una medida positiva $\mu-$continua y aplicando el teorema de Radon-Nikodym [23, Th. 4.2.3, p. 135] existe $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$|m|_B(A) = \int_A h\, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Siendo (H_n) una partición de Ω en conjuntos de medida finita y positiva y siendo

$$D_{nk} := \{t \in H_n : k-1 \le h(t) < k\} \quad k = 1, 2, \ldots$$

para cada n y cada k tenemos

$$\left\{\frac{|m|_B(A)}{\mu(A)} : A \subset D_{nk}\right\} \subset [n-1, n]$$

y por tanto $|m|_B$ y m tienen rango $\mu-$ponderado localmente acotado.

∎

Aplicando el lema anterior y la Proposición 1.5.8 tenemos

1.5.12 Corolario *Si E es casi–completo y tiene la propiedad (B) de Pietsch, son equivalentes:*

(1) Todo operador continuo $T : L^1(\mu) \rightarrow E$ es representable.

(2) Todo medida vectorial $m : \Sigma \rightarrow E$ $\mu-$continua y de variación acotada tiene densidad.

Teniendo en cuenta lo demostrado en el Lema 1.5.11 también tenemos una propiedad de estabilidad de la $RNP(\mu)$.

1.5.13 Corolario *Si E tiene la propiedad (B) de Piestch y para cada disco cerrado $B \subset E$, el espacio normado $\left(E_B, p_B\right)$ tiene la $RNP(\mu)$, entonces E también la tiene.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $m : \Sigma \rightarrow E$ es una medida $\mu-$continua de variación acotada, en la demostración del Lema 1.5.11 hemos obtenido un disco cerrado $B \subset E$ tal que

$$m : \Sigma \rightarrow \left(E_B, p_B\right)$$

es una medida $\mu-$continua de variación acotada y por tanto, tiene una densidad $g \in L^1 \left\{E_B\right\}$. Puesto que la topología de la norma es más fina que la que induce E tenemos que $g \in L^1 \left\{E\right\}$.

■

Pasemos a abordar un teorema de Radon-Nikodym. La base fundamental, al igual que para teoremas de Radon-Nikodym referidos a otros tipos de $\mu-$medibilidad será el utilizar el teorema de Rieffel en un espacio de Banach apropiado. Este espacio de Banach se puede construir sobre un disco cerrado metrizable en un espacio localmente convexo arbitrario. Enunciamos sin demostración este resultado que originalmente aparece en el trabajo de Larman y Rogers [66].

Una construcción parecida fue usada anteriormente por Grothendieck [50, Chap. I, p. 69] para probar que siendo E un espacio de Fréchet, todo acotado de $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ es acotado en algún $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E_B$ siendo B un disco cerrado de E. También con anterioridad al resultado de Larman y Rogers, Rieffel [84, Th.5.2] probó un resultado similar (considerando en un espacio localmente convexo un compacto cuya topología tiene una base numerable) con objeto de obtener los teoremas de Dunford y Pettis [36] y Dieudonné [32] a partir de su teorema de Radon-Nikodym [84]. También en el contexto de teoremas de Radon-Nikodym, el resultado de Larman y Rogers ha sido usado por Chi [21] y [22] y por E. Saab [86]. Teniendo en cuenta el carácter bornológico de la construucción citada, Bombal establece los principios de una teoría de la medida e integración en espacios bornológicos convexos [12] y demuestra un teorema de Radon-Nikodym en dichos espacios [13]. Como consecuencia, obtiene un teorema de Radon–Nikodym [13, Th. 3] en espacios E, localmente convexos casi-completos con la *propiedad estricta de Mackey*, es decir tales que si $B \subset E$ es acotado, entonces existe un disco cerrado $C \subset E$ de forma que el espacio normado E_C induce sobre B la topología que este hereda de E. Este último resultado ya había sido obtenido por Gilliam [46]

1.5.14 Lema *[86, Th. 2.1, p. 283]*

Si $B \subset E$ es un disco cerrado metrizable, sobre el subespacio vectorial E_B generado por B existe una norma N tal que la topología inducida por $\left(E_B, N\right)$ sobre B coincide con la que este hereda de E.

La norma citada se construye de la siguiente manera:
Sea (U_n) una sucesión de entornos de 0 en E, absolutamente convexos y cerrados, tales que

(1) $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$.

(2) $\{U_n \cap B\}$ es un sistema fundamental de entornos de 0 en B.

y sean $c_n \geq 1$ tal que $B \subset c_n U_n$. La norma N sobre E_B queda definida por

$$N(x) := \sum \frac{1}{2^n c_n} p_{U_n}.$$

Parafraseando la mayor parte del teorema 3.2 del trabajo de Chi [21] tenemos

1.5.15 Teorema *Sea E un espacio casi-completo con la propiedad (BM) y sea $m : \Sigma \to E$ una medida vectorial. Son equivalentes:*

(1) m tiene densidad (respecto de μ).

(2) m es $\mu-$continua, de variación acotada y tiene rango $\mu-$ponderado localmente relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Basta tener en cuenta que existe una sucesión de compactos (K_n) en Ω de forma que $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$ y

$$f : K_n \to E \text{ es continua.}$$

y que

$$m_\mu(K_n) := \left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : A \subset K_n \text{ es de medida positiva} \right\}$$

es un subconjunto de $\overline{co}(f(K_n))$ que es compacto por serlo $f(K_n)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos en primer lugar que el espacio es de medida finita. El conjunto de sucesiones

$$M := \{(m(A_n)) : (A_n) \subset \Sigma \text{ es disjunta } \}$$

es un subconjunto acotado de $l^1\{E\}$:

$$\forall q \in \mathcal{Q}(E) \quad \sum_n qm(A_n) \leq |m|_q(\Omega)$$

y por tanto existe un disco cerrado metrizable $B \subset E$ tal que

$$\sum_n p_B(m(A_n)) \leq 1 \quad \forall (m(A_n)) \in M.$$

En el espacio de Banach $\left(E_B, p_B\right)$, m es una medida vectorial $\mu-$continua y de variación acotada

$$|m|_B(\Omega) \leq 1$$

y por tanto m tiene rango $\mu-$ponderado localmente p_B-acotado.

Siendo N la norma, sobre E_B, construida en el lema anterior, sea F la compleción del espacio normado $\left(E_B, N\right)$. Entonces

$$m : \Sigma \to F$$

es una medida $\mu-$continua de variación acotada. Comprobemos que tiene rango ponderado localmente relativamente compacto en F.

Si $A_0 \in \Sigma$ tiene medida finita y positiva, puesto que m tiene rango ponderado localmente p_B-acotado, existe $A_1 \subset A_0$ de medida positiva tal que

$$m_\mu(A_1) := \left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : A \in \Sigma, A \subset A_1, \mu(A) > 0 \right\}$$

es p_B-acotado, i.e., para cierto $\rho > 0$

$$m_\mu(A_1) \subset \rho B.$$

Por otra parte, existe $A_2 \subset A_1$ de medida positiva tal que $m_\mu(A_2)$ es relativamente compacto en E, y puesto que

$$m_\mu(A_2) \subset m_\mu(A_1) \subset \rho B,$$

también será relativamente compacto en F. Aplicando el teorema de Radon-Nikodym de Rieffel al Banach F existe $g \in L^1(\mu, F)$ tal que

$$m(A) = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma$$

Además, siendo (π) la familia de las particiones finitas de Ω dirigida por refinamiento, se verifica, en la topología de $L^1(\mu, F)$,

$$g = \lim_\pi g_\pi \qquad g_\pi := \sum_{A \in \pi} \frac{1}{\mu(A)} \int_A g \, d\mu \, \chi_A = \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A$$

y existe una sucesión (π_n) tal que puntualmente

$$g = \lim_{\pi_n} g_{\pi_n} \quad \mu - \text{a.e.}$$

Las funciones simples g_{π_n} toman valores en E_B. Denotemos por g_n a g_{π_n}. Si $t \in \Omega$ es uno de los puntos tales que

$$g_n(t) \text{ converge en } \; F,$$

entonces la sucesión $(g_n(t))$ es acotada y de Cauchy en E, y por ser este casi-completo, convergente. Por tanto existe μ−a.e. el límite en E

$$f(t) = \lim_n g_n(t).$$

Esta función $f : \Omega \longrightarrow E$ definida coincide μ−a.e. con g, es decir $g(t) \in E$ μ−a.e. Puesto que g es una función μ−medible en un Banach, la sucesión (g_n) converge casi-uniformemente a f, en la topología de $\left(E_B, N\right)$ y por tanto en la de E. Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.4 tenemos que $f : \Omega \longrightarrow E$ es μ−medible. Puesto que f toma valores en E_B y N define sobre E_B una topología más fina que la que este hereda de E, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$q(x) \leq \alpha N(x) \quad \forall x \in E_B$$

Por tanto puntualmente $qf \leq \alpha N f \in L^1(\mu)$ y $f \in L^1\{E\}$.

Si el espacio no es de medida finita, podemos expresarlo como una unión numerable disjunta de conjuntos A_n de medida finita y, aplicando lo anterior, tendremos una sucesión $f_n \in L^1\{A_n, E\}$ tal que si $A \subset A_n$ es medible, entonces

$$m(A) = \int_A f_n \, d\mu.$$

La función

$$f := \sum_n f_n \chi_{A_n} : \Omega \to E$$

definida como f_n en cada A_n es μ−medible. Además, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} qf \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} |m|_q(A_i) \leq |m|_q(\Omega)$$

y, por tanto, $qf \in L^1(\mu)$ y $f \in L^1\{E\}$.

■

1.5.16 Corolario *Supongamos que E es casi-completo y tiene la propiedad (CM) y sea $m : \Sigma \to E$ una medida vectorial. Son equivalentes:*

(1) m tiene densidad (respecto de μ).

(2) m es $\mu-$continua de variación acotada.

1.5.17 Corolario *Todo espacio casi-completo con la propiedad (CM) tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

1.5.18 Proposición *Supongamos que E es casi-completo, tiene la propiedad (B) y verifica la condición estricta de Mackey. Si $m : \Sigma \to E$ es una medida vectorial, son equivalentes:*

(1) m tiene densidad (respecto de μ).

(2) m es $\mu-$continua de variación acotada y tiene rango $\mu-$ponderado relativamente débil–compacto.

DEMOSTRACIÓN:

Con las hipótesis consideradas, E tiene la propiedad (BM) y, por tanto, aplicando el Teorema 1.5.15 sólo tenemos que demostrar

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos que el espacio es de medida finita. Consideremos la construcción hecha en el Teorema 1.5.15 del conjunto de sucesiones $M \subset l^1\{E\}$ y del disco cerrado $B \subset E$. Puesto que E verifica la condición estricta de Mackey, existe un disco cerrado $C \supset B$ tal que el espacio de Banach $F := \left(E_C, p_C\right)$ induce sobre B la misma topología que E. Por tanto,

$$m : \Sigma \to F$$

es una medida vectorial $\mu-$continua de variación acotada (respecto a p_C). Comprobemos que el rango $\mu-$ponderado de m es localmente relativamente débil–compacto (en F), con lo cual podremos aplicar el teorema de Radon–Nikodym de Rieffel. Con la misma terminología que en el Teorema 1.5.15, sean $A_0 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_0$ tal que

$$m_\mu(A_1) := \left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : A \in \Sigma, A \subset A_1, \mu(A) > 0 \right\}$$

es p_B –acotado:

$$m_\mu(A_1) \subset \rho B \quad (\rho > 0).$$

Por otra parte, existe $A_2 \subset A_1$ de medida positiva, tal que $\mu(A_0 \setminus A_1) < \varepsilon$ y $m_\mu(A_2)$ es relativamente débil–compacto en E, y puesto que

$$m_\mu(A_2) \subset m_\mu(A_1) \subset \rho B$$

las topologías inducidas por E y por F coinciden sobre $\overline{acx}\,(m_\mu(A_2))$ y éste es débil–compacto en F pues este hecho sólo depende de la topología inducida por F, no por $(F, s(F, F'))$ (Grothendieck [52, Chap. 2, part 8, Ex. 2]). Ahora basta aplicar el teorema de Radon–Nikodym de Rieffel a $m : \Sigma \rightarrow F$ y continuar como en la demostración del Teorema 1.5.15.

■

1.5.19 Corolario *Todo espacio de Fréchet reflexivo tiene la propiedad de Radon–Nikodym.*

DEMOSTRACIÓN:

Si E es un Fréchet, estamos en las hipótesis de la proposición anterior y además toda medida μ–continua de variación acotada tiene rango μ–ponderado localmente acotado (Lema 1.5.11). Siendo E reflexivo todo acotado es relativamente débil–compacto y aplicando la proposición anterior tenemos el resultado.

■

Capítulo II

ESPACIOS DE FUNCIONES INTEGRABLES.

2.1 Introducción. Espacios de funciones escalares

En el Capítulo 1 hemos estudiado, por un lado la medibilidad e integración de funciones vectoriales $f : \Omega \to E$, y por otro, los espacios de funciones $L^\infty \{E\}$ y $L^1 \{E\}$. En lo que sigue, consideraremos espacios de funciones $f : \Omega \to E$ construidos de forma similar a los anteriores, es decir, dado un espacio Λ, de funciones escalares localmente integrables sobre un espacio de medida de Radon (Ω, Σ, μ), y dado un espacio localmente convexo E, $\Lambda \{E\}$ será el espacio de las funciones μ–medibles

$$f : \Omega \to E$$

tales que para cada seminorma continua q sobre E, la función

$$qf : \Omega \to \mathbb{R}$$

está en Λ. Considerando sobre Λ un determinado tipo de topología, definiremos de manera natural una topología sobre $\Lambda \{E\}$.

Siendo λ un espacio *perfecto* (en el sentido de Köthe), de sucesiones escalares, es decir, tal que λ coincide con $\lambda^{\times\times}$, donde

$$\lambda^\times := \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ (a_n b_n) \in l^1 \quad \forall (b_n) \in \lambda\right\}$$

los espacios de sucesiones $\lambda\{E\}$ estudiados por Pietsch quedan definidos como

$$\lambda\{E\} := \left\{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} : \ (q(x_n)) \in \lambda \quad \forall q \in \mathcal{Q}(E)\right\}$$

y se dotan de topolgías definidas a partir de la topología de E y ciertas familias $\mathcal{M}$ de acotados de $\lambda^\times$. El caso general de estos espacios ha sido estudiado por De Grande–De Kimpe [26], Rosier [85] y Florencio y Paúl [39].

Por lo que respecta a funciones escalares, partiremos de la situación considerada por Dieudonné en [31]; es decir, un espacio de medida de Radon en el sentido que lo hemos considerado en el Capítulo 1. Los espacios de funciones Λ que consideraremos serán subespacios normales de $L^1_{loc}(\mu)$, es decir tales que si f está en Λ, y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función $\mu-$ medible tal que

$$|g(t)| \leq |f(t)| \quad \mu - a.e.$$

entonces g también está en Λ. El $\alpha-$dual de Λ es el espacio

$$\Lambda^\times := \left\{g : \Omega \to \mathbb{R} : g \text{ es } \mu - \text{medible y } gf \in L^1(\mu)\ \forall f \in \Lambda\right\}$$

Se dice que Λ es *perfecto* si $\Lambda = \Lambda^{\times\times}$.

Puesto que para cada $g \in L^1_{loc}(\mu)$ existen funciones $h \in S_c(\mu)$ tal que

$$\int gh \; d\mu \neq 0,$$

si $S_c(\mu) \subset \Lambda$, la forma bilineal $\langle f, g\rangle := \int fg \; d\mu$ define una dualidad separada sobre $(\Lambda, \Lambda^\times)$ ($\Lambda^\times$ siempre contiene a $S_c(\mu)$). Además, respecto a cualquier topología compatible con la dualidad, $S_c(E)$ es denso en Λ y en $\Lambda^\times$. Nosotros, trabajando con espacios Λ normales, supondremos que

$$L^\infty_c(\mu) \subset \Lambda \left(\subset L^1_{loc}(\mu)\right).$$

A través de las topologías débiles del par $(L^1_{loc}(\mu), L^\infty_c(\mu))$, Dieudonné [31] obtuvo los resultados básicos sobre la dualidad $(\Lambda, \Lambda^\times)$. En particular, que la *envolvente normal*

$$n(M) := \left\{\alpha f : f \in M, \alpha \in L^\infty(\mu), \ \|\alpha\|_\infty \leq 1\right\}$$

de un conjunto M débil–acotado ($s(\Lambda,\Lambda^\times)$ o $s(\Lambda^\times,\Lambda)$), es débil–acotado.

Dada una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos $s(\Lambda^\times,\Lambda)$ –acotados normales que recubre $\Lambda^\times$ y tal que verifica :

(1) Si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $M_1 \cup M_2 \subset M$.

(2) Si $M \in \mathcal{M}$ y $\rho > 0$, entonces $\rho M \in \mathcal{M}$.

llamaremos $\mathcal{M}$*–topología* sobre Λ a la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $M \in \mathcal{M}$. Así, un sistema fundamental de $\mathcal{M}$–entornos de 0 viene dado por

$$\{M^o : M \in \mathcal{M}\}$$

y un sistema fundamental de seminormas para dicha topología es

$$r_M(f) := p_{M^o} = \sup\left\{\int |fg|\ d\mu : g \in M\right\}.$$

Los casos extremos para la familia $\mathcal{M}$ son

(1) $\mathcal{N}$, la familia generada por las envolventes normales de un sólo elemento de $\Lambda^\times$. Un sistema fundamental de seminormas viene determinado por

$$r_g(f) := \int |fg|\ d\mu$$

cuando g recorre $\Lambda^\times$. Esta topología suele denominarse **la** topología normal de Λ.

(2) $\mathcal{B}$, la familia formada por los subconjuntos normales $s(\Lambda^\times,\Lambda)$ –acotados. La $\mathcal{B}$–topología coincide con la topología fuerte $b(\Lambda,\Lambda^\times)$ pues la envolvente normal de cualquier conjunto débil–acotado es débil–acotada.

A las $\mathcal{M}$–topologías las denominaremos topologías normales. La topología de Mackey $m(\Lambda,\Lambda^\times)$ es una topología normal [31, Prop. 8 y 9] y [87, Cor. 2.6].

De la misma forma se definen las $\mathcal{M}$–topologías sobre $\Lambda^\times$, siendo $\mathcal{M}$ una familia de $s(\Lambda,\Lambda^\times)$ –acotados.

Las dos topologías normales $\mathcal{N}(\Lambda, \Lambda^{\times})$ y $\mathcal{N}(\Lambda^{\times}, \Lambda)$ son compatibles con la dualidad y además $\Lambda^{\times}$ (y, por tanto, cualquier Λ que sea perfecto) es completo para cualquier topología normal.

Un resultado que tendremos en cuenta más adelante es el siguiente:

2.1.1 Proposición *[87, Prop. 3.2 y Th. 3.3].*

Para una $\mathcal{M}$−topología son equivalentes:

(1) Para cada $f \in \Lambda$ se verifican

(a) $\lim_{\mu(A)\to 0} f\chi_{A} = 0$.

(b) Siendo (Ω_n) una sucesión fundamental de compactos de Ω,

$$\lim_{n} f\chi_{\Omega_n} = f.$$

(2) $(\Lambda, \mathcal{M})' = \Lambda^{\times}$, *i.e.* $\mathcal{N} \leq \mathcal{M} \leq m(\Lambda, \Lambda^{\times})$.

Para estos y otros resultados referentes a las topologías normales sobre Λ y $\Lambda^{\times}$, nos remitimos a J. Dieudonné [31], C. Sáez [87] y M. Florencio, P.J. Paúl y C. Sáez [42].

Considerando un espacio de funciones Λ, varios autores han estudiado los espacios $\Lambda\{E\}$ cuando E es un espacio de Banach e incluso siendo sólo un espacio normado, N. Phuong-Các [79], M. Florencio, P.J. Paúl y C. Sáez [40] y [41], L. Drewnowski, M. Florencio y P.J. Paúl [33]. Nosotros consideraremos espacios $\Lambda\{E\}$ donde E es un espacio localmente convexo arbitrario.

2.2 Espacios de funciones $\Lambda\{E\}$.

Considerando los espacios Λ de funciones escalares, dotados de una topología normal, definiremos los espacios $\Lambda\{E\}$ sobre los que tendremos definida una topología de forma natural. La definición tiene cierta similitud con la definición de producto tensorial, pero de ningún modo puede considerarse un caso particular de estos. Como veremos más adelante, hay casos importantes en los que ambas construcciones coinciden.

2.2.1 Definición *Dado un espacio normal Λ de funciones escalares tal que*

$$L_c^\infty(\mu) \subset \Lambda \subset L_{loc}^1(\mu)$$

y un espacio localmente convexo E, denotaremos por $\Lambda\{E\}$ al espacio vectorial de las funciones $f : \Omega \to E$ $\mu-$medibles tales que

$$\forall q \in \mathcal{Q}(E), \ \ qf \in \Lambda.$$

Dada una $\mathcal{M}-$topología sobre Λ, definimos sobre $\Lambda\{E\}$ la $\mathcal{M}-$topología mediante la familia de seminormas

$$q_M(f) := p_{M^o}(qf) := \sup\left\{\int qf|h| \, d\mu : h \in M\right\}$$

cuando M recorre $\mathcal{M}$ y q recorre $\mathcal{Q}(E)$.

Puesto que $S_c(\mu) \subset \Lambda$ y merced al Corolario 1.2.11, identificando en $\Lambda\{E\}$ funciones que coinciden $\mu-$a.e., la topología localmente convexa definida sobre $\Lambda\{E\}$ es separada, pues si $qf = 0 \quad \mu-$a.e. para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, se tiene

$$f = 0 \qquad \mu - \text{a.e.}$$

Dados subconjuntos $G \subset E$ y $R \subset \Lambda$, denotaremos por $[R, G]$ al subconjunto de $\Lambda\{E\}$

$$[R, G] := \left\{f \in \Lambda\{E\} : f(t) \in E_G \ \mu - \text{a.e. y} \quad p_G f \in R\right\}$$

Con esta notación, un sistema fundamental de entornos de 0 en $\Lambda\{E\}$ para la $\mathcal{M}-$topología viene dado por

$$[M^o, U]$$

cuando M recorre $\mathcal{M}$ y U recorre un sistema fundamental de entornos de 0 en E.

2.2.2 Definición *Diremos que un subconjunto H de $L^1_{loc}\{E\}$ es normal si*

$$f \in H \text{ y } \alpha \in L^\infty(\mu) \text{ con } \|\alpha\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \alpha f \in H$$

Denominaremos envolvente normal de H a

$$n(H) := \left\{\alpha f : f \in H, \alpha \in L^\infty(\mu),\ \|\alpha\|_\infty \leq 1\right\}$$

Considerando sobre $L^\infty_c\{E\}$ la topología asociada a la topología límite inductivo de $L^\infty_c(\mu)$ y sobre $L^1_{loc}\{E\}$ la topología asociada a la topología de espacio de Fréchet de $L^1_{loc}(\mu)$ es inmediato comprobar

2.2.3 Proposición *Para cualquier $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda\{E\}$ las siguientes inclusiones son continuas*

$$L^\infty_c\{E\} \subset \Lambda\{E\} \subset L^1_{loc}\{E\}$$

2.2.4 Proposición *Se verifica :*

(1) Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, $I_q : \Lambda\{E\}(\mathcal{M}) \to \Lambda(\mathcal{M})$ definida por $I_q(f) := qf$, es uniformemente continua.

(2) Si E es casi–completo, para cada $A \subset \Omega$ medible relativamente compacto, la aplicación integral sobre A, $\int_A : \Lambda\{E\}(\mathcal{M}) \to E$, es continua.

Usando que todas las topologías normales en Λ (o en $\Lambda^\times$) tienen los mismos acotados obtenemos

2.2.5 Proposición *Sea $H \subset \Lambda\{E\}$. Son equivalentes:*

(1) H es $\mathcal{M}$-acotado para alguna (cualquier) $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda\{E\}$.

(2) $n(H)$ es $\mathcal{M}$-acotado para alguna (cualquier) $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda\{E\}$.

(3) Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, $qH := \{qf : f \in H\}$ es acotado en Λ.

(4) Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $\alpha \in \Lambda^\times$, el conjunto

$$\left\{\int |\alpha| qf \; d\mu : f \in H\right\}$$

es acotado en $\mathbb{R}$.

Veamos la relación existente entre los espacios $\Lambda\{E\}$ y el producto tensorial de los espacios Λ y E. Factorizando la aplicación bilineal

$$\Lambda \times E \longrightarrow \Lambda\{E\}$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$$

a través del producto tensorial $\Lambda \otimes E$, podemos sumergir $\Lambda \otimes E$ en $\Lambda\{E\}$ con la identificación

$$\sum_i \alpha_i \otimes x_i = \sum_i \alpha_i \cdot x_i.$$

Consideremos sobre Λ una $\mathcal{M}-$topología y sobre $\Lambda\{E\}$ la $\mathcal{M}-$topología asociada. Sobre $\Lambda \otimes E$ denotemos por $t(\mathcal{M})$ la topología inducida por la anterior, por $\pi(\mathcal{M})$ y $\varepsilon(\mathcal{M})$ las topologías producto tensorial π y ε que se obtienen al considerar sobre Λ la topología $\mathcal{M}$. Siendo

$$r_H(\alpha) := \sup\left\{\int |\alpha||h| \; d\mu : h \in H\right\} \qquad \alpha \in \Lambda,$$

estas topologías quedan definidas por las siguientes familias de seminormas :

(1) $\pi(\mathcal{M})$ queda definida por

$$\left(r_{_H} \otimes_\pi q\right)(f) := \inf\left\{\sum_i r_{_H}(\alpha_i)q(x_i) : f = \sum_i \alpha_i \otimes x_i\right\}$$

cuando H recorre $\mathcal{M}$ y q recorre $\mathcal{Q}(E)$.

(2) $\varepsilon(\mathcal{M})$ queda definida por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{_{G,U}}(f) &= \varepsilon_{_{G,U}}(\sum_i \alpha_i x_i)\\ &= \sup\left\{|\sum_i \langle\alpha_i, u\rangle \langle x_i, x'\rangle| : u \in G^o, x' \in U^o\right\}\end{aligned}$$

cuando G y U recorren sistemas fundamentales de entornos de 0 de Λ y E respectivamente (G^o y U^o son las polares en Λ' y E' respectivamente).

2.2.6 Proposición *Sobre* $\Lambda \otimes E$, $\mathcal{M} \leq \pi(\mathcal{M})$.

DEMOSTRACIÓN: Siendo $f \in \Lambda \otimes E$, para cada representación

$$f = \sum_i \alpha_i \otimes x_i \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \Lambda, \quad x_i \in E$$

tenemos, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $H \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}r_{_H}(qf) &:= \sup\left\{\int qf|h|\, d\mu : h \in H\right\}\\ &\leq \sup\left\{\int \sum_i q(x_i)|\alpha_i||h|\, d\mu : h \in H\right\}\\ &\leq \sum_i q(x_i) \sup\left\{\int |\alpha_i||h|\, d\mu : h \in H\right\}\\ &= \sum_i q(x_i) r_{_H}(\alpha_i).\end{aligned}$$

y por tanto

$$r_{_H}(qf) \leq \left(r_{_H} \otimes_\pi q\right)(f).$$

■

2.2.7 Proposición *Sobre* $\Lambda \otimes E$, $\varepsilon(\mathcal{M}) \leq \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN:

Un sistema fundamental de entornos de 0 en Λ queda definido por las polares, en Λ, de los conjuntos $H \in \mathcal{M}$ (que podemos suponer absolutamente convexos). Puesto que la polar, en Λ', de H^o es la envolvente absolutamente convexa $s(\Lambda', \Lambda)$ −cerrada de H, tenemos

$$H^{oo} = \overline{H}^{s(\Lambda',\Lambda)}$$

y para cada $U \in \mathcal{U}$, siendo $G = H^o$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{G,U}(f) &= \varepsilon_{G,U}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \\
&= sup\left\{ \Big|\sum_{1}^{n} \langle \alpha_i, u\rangle \langle x_i, x'\rangle \Big| : u \in H^{oo}, x' \in U^o \right\} \\
&= sup\left\{ \Big|\sum_{1}^{n} \langle \alpha_i, h\rangle \langle x_i, x'\rangle \Big| : h \in H, x' \in U^o \right\} \\
&= sup\left\{ \Big|\sum_{1}^{n} \int \alpha_i h \; d\mu \, \langle x_i, x'\rangle \Big| : h \in H, x' \in U^o \right\} \\
&= sup\left\{ \Big|\int \left(\sum_{1}^{n} \langle x_i, x'\rangle \, \alpha_i\right) h \; d\mu\Big| : h \in H, x' \in U^o \right\} \\
&= sup\left\{ \int \Big| \left(\sum_{1}^{n} \langle \alpha_i x_i, x'\rangle\right) \Big| |h| \; d\mu : h \in H, x' \in U^o \right\} \\
&\leq sup\left\{ \int p_U f |h| \; d\mu : h \in H \right\} = r_H(p_U f)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\varepsilon(\mathcal{M}) \leq \mathcal{M}.$$

■

De las dos proposiciones anteriores, tenemos que las inclusiones

$$\Lambda \otimes_\pi E \subset \Lambda \otimes E(\mathcal{M}) \subset \Lambda \otimes_\varepsilon E$$

son continuas y por tanto se verifican las siguientes inclusiones entre los completados

$$\Lambda\hat{\otimes}_\pi E \subset \Lambda\hat{\otimes}E(\mathcal{M}) \subset \Lambda\hat{\otimes}_\varepsilon E.$$

En los casos extremos $\Lambda = L^1_{loc}(\mu)$ y $L^\infty_c(\mu)$ tenemos

2.2.8 Proposición

(1) La topología que induce $L^1\{E\}$ sobre $L^1(\mu)\otimes E$ es la $\pi-$topología.

(2) La topología que induce $L^1_{loc}\{E\}$ sobre $L^1_{loc}(\mu)\otimes E$ es la $\pi-$topología.

(3) La topología que induce $L^\infty\{E\}$ sobre $L^\infty(\mu)\otimes E$ es la $\varepsilon-$topología.

(4) La topología que induce $L^\infty_c\{E\}$ sobre $L^\infty_c(\mu)\otimes E$ es la $\varepsilon-$topología.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Puesto que $S_c(\mu)\otimes E$ es denso en $L^1(\mu)\otimes E$ con respecto a ambas topologías (Jarchow [57, Prop. 15.2.3]), basta probar que estas coinciden sobre dicho subespacio y esto es estándar, ver por ejemplo Jarchow [57, Th. 15.7.1] o Köthe [62, §41, 7.(8)] :
Hemos probado que

$$\|qf\|_1 \le \left(\|\cdot\|_1 \otimes_\pi q\right)(f)$$

y, expresando $f \in S_c(\mu)\otimes E$ de la forma $f = \sum \chi_{A_i}\otimes x_i$ con los A_i disjuntos dos a dos, tenemos

$$\left(\|\cdot\|_1 \otimes_\pi q\right)(f) \le \sum \mu(A_i)\, q(x_i) = \int qf\, d\mu = \|qf\|_1$$

con lo cual

$$\|qf\|_1 = \left(\|\cdot\|_1 \otimes_\pi q\right)(f)$$

(2) Análogo a (1).

(3) Denotemos por $S(\mu)$ al subespacio de $L^\infty(\mu)$ de las funciones que alcanzan un número finito de valores, es decir de las funciones de la forma

$$s := \sum_{finita} c_i \chi_{A_i} \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, A_i \in \Sigma.$$

Puesto que $S(\mu)$ es denso en $L^\infty(\mu)$, $S(\mu) \otimes E$ es denso en el producto $L^\infty(\mu) \otimes E$, tanto para la topología que éste hereda de $L^\infty\{E\}$ como para la $\varepsilon-$topología (Jarchow [57, Prop. 16.2.5]). Así pues, bastará probar que sobre $S(\mu) \otimes E$ coinciden ambas topologías.

Dada $f \in S(\mu) \otimes E$, expresemos f de la forma $f := \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ con los A_i disjuntos dos a dos. Considerando $q \in \mathcal{Q}(E)$, G la bola unidad de $L^\infty(\mu)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$q(x_j) = \|qf\|_\infty = \|\sum q(x_i)\chi_{A_i}\|_\infty$$

tenemos que, siendo $U := \{x \in E : q(x) \leq 1\}$, se verifica

$$\begin{aligned} \|qf\|_\infty &= \sup\{|\langle x_j, x'\rangle| : x' \in U^o\} \\ &\leq \sup\left\{\left|\sum \left\langle \chi_{A_i}, v\right\rangle \langle x_i, x'\rangle\right| : x' \in U^o, v \in G^o\right\} \\ &= \varepsilon_{G,U}(f) \end{aligned}$$

y por tanto las topologías coinciden.

(4) Puesto que $S_c(\mu)$ es denso en $L_c^\infty(\mu)$, $S_c(\mu) \otimes E$ es denso en $L_c^\infty(\mu) \otimes E$ respecto a ambas topologías y bastará probar que estas coinciden sobre $S_c(\mu) \otimes E = S_c(E)$.

Sea $f := \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i} \in S_c(E)$ de forma que los A_i son disjuntos dos a dos. Sea $q \in \mathcal{Q}(E)$ y sea $H \subset L_{loc}^1(\mu)$ acotado y normal. Podemos suponer que H es de la forma

$$H := \left\{h \in L_{loc}^1(\mu) : \|h\chi_{\Omega_n}\|_1 \leq \rho_n \; n = 1, 2 \ldots\right\}$$

donde (Ω_n) es una sucesión fundamental de compactos de Ω y (ρ_n) es una sucesión creciente de números reales positivos. Así, es fácil comprobar que

$$q_H(f) := \sup\left\{\int qf|h| \, d\mu : h \in H\right\} = \sup\left\{\rho_n \|qf\chi_{\Omega_n}\|_\infty : n = 1, 2 \ldots\right\}$$

Puesto que f tiene soporte compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que $f = f\chi_{\Omega_k}$. Por tanto, teniendo en cuenta lo hecho en (3), tenemos

$$q_H(f) = \rho_k \|qf\chi_{\Omega_k}\|_\infty \leq \varepsilon_{G_k,U}(f) \leq \varepsilon_{G,U}(f)$$

siendo $H_k := \left\{h \in L^1_{loc}(\mu) : \|h\chi_{\Omega_k}\|_1 \leq \rho_k\right\}$, $\quad U := \{x \in E : q(x) \leq 1\}$ y

$$G_k = H_k^\circ \quad \text{y} \quad G := H^\circ.$$

■

Observaciones

Para $1 < p < +\infty$, aún siendo E un espacio de Banach (de dimensión infinita por supuesto), la topología de los espacios

$$l^p\{E\},\ L^p\{E\} \quad (L^p(\mu) \text{ de dimensión infinita })$$

no es ninguna de las topologías tensoriales que estamos considerando [51, p. 104]. Tampoco es la topología asociada a una norma razonable sobre $L^p \otimes E$ [65].

2.2.9 Proposición *Consideremos $\Lambda\{E\}$. Se verifica :*

(1) Cualquier $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda\{E\}$ tiene un sistema fundamental de entornos de 0 que son cerrados para la $\mathcal{N}-$topología.

(2) Todo subconjunto de $\Lambda\{E\}$ que sea $\mathcal{N}-$completo (respect. sucesionalmente completo) también es $\mathcal{M}-$completo (respect. sucesionalmente completo).

DEMOSTRACIÓN:

(1) Basta tener en cuenta que para cada $M \in \mathcal{M}$ y cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ se verifica

$$\begin{aligned}\left\{f \in \Lambda\{E\} : q_M(f) \leq 1\right\} &= \left\{f \in \Lambda\{E\} : p_M(qf) \leq 1\right\} \\ &= \bigcap_{\alpha \in M} \left\{f \in \Lambda\{E\} : \int |\alpha| qf \, d\mu \leq 1\right\}\end{aligned}$$

y cada $\{f \in \Lambda\{E\} : \int |\alpha| qf \, d\mu \leq 1\}$ es $\mathcal{N}-$cerrado.

(2) Basta aplicar (1) y el lema de Bourbaki–Robertson.

■

2.2.10 Proposición *Consideremos $\Lambda\{E\}$. Se verifica :*

(1) Cualquier $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda\{E\}$ tiene un sistema fundamental de entornos de 0 que son cerrados para la topología que $\Lambda\{E\}$ hereda de $L^1_{loc}\{E\}$.

(2) Todo subconjunto de $\Lambda\{E\}$ que sea completo (respect. sucesionalmente completo) para la topología de $L^1_{loc}\{E\}$, también es $\mathcal{M}-$completo (respect. sucesionalmente completo).

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea $\mathcal{U}(E)$ un sistema fundamental de entornos de 0 en E y consideremos en $\Lambda\{E\}$ el sistema fundamental de entornos de 0

$$[M^o, U] \, .$$

Probemos que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ y cada $M \in \mathcal{M}$

$$\Lambda\{E\} \setminus [M^o, U]$$

es abierto, en $\Lambda\{E\}$, para la topología inducida por $L^1_{loc}\{E\}$.

Sea $f_0 \in \Lambda\{E\} \setminus [M^o, U]$. Puesto que M es normal, existe $\alpha_0 \geq 0$ en M de forma que

$$\int \alpha_0 \cdot p_U f_0 \; d\mu > 1$$

y teniendo en cuenta que el integrando es $\mu-$medible, existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\alpha_0 : K \to [0, \infty)$ es continua y

$$\rho := \int_K \alpha_0 \cdot p_U f_0 \; d\mu > 1$$

Sean $\delta := \max\{\alpha_0(t) : t \in K\}$ y $\varepsilon := \frac{\rho-1}{2\delta}$ y consideremos el entorno de f_0 para la topología que $\Lambda\{E\}$ hereda de $L^1_{loc}\{E\}$

$$f_0 + \left\{f \in \Lambda\{E\} : \|p_U f \cdot \chi_K\|_1 < \varepsilon\right\}$$

Para cada f en este entorno se verifica

$$\begin{aligned}\int_K \alpha_0 \cdot p_U f\, d\mu &\geq \int_K \alpha_0 \cdot p_U f_0\, d\mu - \int_K \alpha_0 \cdot p_U(f - f_0)\, d\mu \\ &\geq \rho - \delta \cdot \int_K p_U(f - f_0)\, d\mu > \rho - \delta\varepsilon > 1\end{aligned}$$

y por tanto $f \notin [M^o, U]$ y $\Lambda\{E\} \setminus [M^o, U]$ es abierto para la topología que $\Lambda\{E\}$ hereda de $L^1_{loc}\{E\}$.

(2) Basta aplicar (1) y el lema de Bourbaki–Robertson.

■

2.2.11 Teorema *Si $L^1\{E\}$ y $\Lambda(\mathcal{M})$ son completos (respect. sucesionalmente completos o casi-completos), también lo es $\Lambda\{E\}(\mathcal{M})$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea (K_n) una partición de Ω en compactos. Si $(f_i : i \in I)$ es una red de Cauchy en $\Lambda\{E\}(\mathcal{M})$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(f_i \cdot \chi_{K_n} : i \in I\right)$$

es una red de Cauchy en $L^1\{E\}$, pues $\chi_{K_n} \in \Lambda^\times$. Por tanto, existe

$$g_n := L^1\{E\} - \lim_i \left(f_i \cdot \chi_{K_n}\right).$$

La función $g := \sum_n g_n \cdot \chi_{K_n} : \Omega \to E$ es μ–medible por serlo cada g_n. Si probamos que g está en $\Lambda\{E\}$, aplicando el lema de Bourbaki–Robertson tendremos que

$g = (\mathcal{M}) - \lim_i f_i$. Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, la red de funciones escalares $(qf_i : i \in I)$ es de Cauchy en $\Lambda(\mathcal{M})$. Siendo $h := (\mathcal{M}) - \lim_i qf_i$, para cada $n = 1, \ldots$ se verifica que

$$h \cdot \chi_{K_n} = L^1(\mu) - \lim_i qf_i\chi_{K_n}$$

y por tanto puntualmente $\mu-$a.e. se verifica $h\,\chi_{K_n} = qg_n$. Así,

$$h = qg \quad \mu - \text{a.e. y} \quad qg \in \Lambda.$$

■

2.2.12 Corolario *Si $L^1\{E\}$ es completo (respect. sucesionalmente completo o casi-completo), también lo son*

(1) $\Lambda^\times\{E\}(\mathcal{M})$*, para cada $\mathcal{M}-$topología sobre $\Lambda^\times$.*

(2) $\Lambda\{E\}(\mathcal{M})$ *para cada $\mathcal{M}-$topología sobre Λ, siendo Λ perfecto.*

2.2.13 Proposición *Para la topología, sobre $\Lambda\{E\}$, asociada a la topología de Mackey $m(\Lambda, \Lambda^\times)$, se verifica*

(1) Para cada $f \in \Lambda\{E\}$,

$$(a)\ \lim_n f\chi_{\Omega_n} = f \quad \text{y} \quad (b)\ \lim_{\mu(A)\to 0} f\chi_A = 0.$$

(2) $S_c(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Inmediato teniendo en cuenta el resultado escalar (Proposición 2.1.1).

(2) Sea $f \in \Lambda\{E\}$, $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $M \subset \Lambda^\times$ normal absolutamente convexo y $s(\Lambda^\times, \Lambda)$ –compacto. Tenemos que obtener $s \in S_c(E)$ de forma que

$$q_M(f-s) := \sup\left\{\int q(f-s)|g|\, d\mu : g \in M\right\} < 1.$$

Teniendo en cuenta (1)(a), fijado $\varepsilon_1 > 0$, existe un compacto $K \subset \Omega$ de forma que

$$q_M(f - f\chi_K) < \varepsilon_1.$$

Por otra parte, por ser f μ–medible, podemos obtener una sucesión creciente de compactos $K_n \subset K$ tales que cada restricción $f : K_n \to E$ es continua y

$$\mu\left(K \setminus \bigcup K_n\right) = 0.$$

Aplicando (1)(b) tenemos que

$$\lim_n f\chi_{K_n} = f\chi_K$$

y por tanto, fijado $\varepsilon_2 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_M(f\chi_K - f\chi_{K_{n_0}}) < \varepsilon_2.$$

Por ser $f : K_{n_0} \to E$ continua, puede aproximarse uniformemente por funciones simples–Borel

$$s : K_{n_0} \to f(K_{n_0}).$$

Fijado $\varepsilon_3 > 0$ existe, por tanto, una tal $s \in S_c(E)$ que verifica

$$q(f(t) - s(t)) < \varepsilon_3 \qquad \forall t \in K_{n_0}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} q_M(f\chi_{K_{n_0}} - s) &:= \sup\left\{\int q(f\chi_{K_{n_0}} - s)|g|\, d\mu : g \in M\right\} \\ &\leq \varepsilon_3 \sup\left\{\int \chi_{K_{n_0}}|g|\, d\mu : g \in M\right\} \\ &= \varepsilon_3 p_M(\chi_{K_{n_0}}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$q_M(f-s) \leq q_M(f - f\chi_K) + q_M(f\chi_K - f\chi_{K_{n_0}}) + q_M(f\chi_{K_{n_0}} - s)$$

basta considerar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 apropiados para obtener el resultado.

∎

2.3 Espacios fundamentalmente $\Lambda-$acotados.

En [50, Chap. I, §1, $n^{\underline{o}}1$, p. 33] Grothendieck plantea el *problema de las topologías*:

> En un producto tensorial proyectivo $E\hat{\otimes}_{\pi}F$ ¿está contenido todo acotado en la envolvente absolutamente convexa cerrada de un acotado de la forma
>
> $$A \otimes B := \{a \otimes b : a \in A, b \in B\}$$
>
> con A acotado en E y B acotado en F?

con objeto de estudiar la topología fuerte del dual de un producto tensorial a través de las familias de acotados de E y de F. Asimismo, Grothendieck prueba en [50, Chap. I, §2, $n^{\underline{o}}2$, Prop. 12] que, siendo E un espacio de Fréchet y μ una medida de Radon sobre un espacio localmente compacto, todo acotado de $L^1(\mu)\hat{\otimes}_{\pi}E$ está contenido en la imagen de la bola unidad de algún $L^1(\mu) \otimes_{\pi} E_B$, siendo B un disco cerrado de E. Es decir que para cada acotado M de $L^1(\mu)\hat{\otimes}_{\pi}E$ existe un disco cerrado $B \subset E$ tal que para cada $f \in M$, $f(t) \in E_B$ $\mu-$a.e., la función definida $\mu-$a.e.

$$f : \Omega \to E_B$$

es $\mu-$medible en el sentido de la norma p_B y está en la bola unidad de $L^1\left(E_B\right)$, es decir:

$$f \in L^1\left(E_B\right) \quad \text{y} \quad \|p_B f\|_1 := \int p_B f \, d\mu \leq 1.$$

El hecho fundamental que utiliza la demostración es que todo acotado de un espacio metrizable es normable. En [83] A. Pietsch aísla y pone nombre (propiedad (B)) a la propiedad para el caso en que el espacio de medida es el de los números naturales dotado de la medida cardinal. Asímismo prueba [83, Th. 1.5.8] que todo espacio metrizable y todo espacio dual métrico tiene dicha propiedad (el caso metrizable es un caso particular del resultado de Grothendieck). En [85] R.C. Rosier generaliza la propiedad (B) (denominándola fundamental $\lambda-$acotación) sustituyendo el espacio l^1 por un espacio perfecto λ de sucesiones escalares y establece la relación entre dicha propiedad y los espacios metrizables y (DF).

Nuestra generalización, a espacios de funciones Λ, tiene los ingredientes citados excepto que no exigiremos la μ-medibilidad en el sentido de la norma p_B. Probaremos que si E es un espacio localmente convexo casi-completo y con la propiedad (B) de Pietsch, los acotados de $L^1\{E\}$ *están controlados* por los acotados de $L^1(\mu)$ y de E. Será clave el haber considerado la μ-medibilidad en el sentido de Lusin. Para un espacio E arbitrario, $L^1\{E\}$ es un subespacio del producto tensorial proyectivo $L^1\hat{\otimes}_\pi E$.

Así pues, la noción de espacio *fundamentalmente* Λ*-acotado* nos permitirá trabajar con los acotados de un espacio $\Lambda\{E\}$ a partir de los acotados de Λ y E. Si el dual de un espacio de funciones es un espacio de este tipo, esto nos permitirá estudiar la tonelación y otras propiedades del espacio de partida. También nos permitirá estudiar la completitud local de un espacio $\Lambda\{E\}$. Siguiendo la terminología y notación de Pietsch [83] para espacios de sucesiones absolutamente sumables, de Rosier [85] para espacios de sucesiones y de Thomas [96] para los espacios que denomina de funciones totalmente sumables, en analogía con las sucesiones totalmente sumables consideradas por Pietsch [83] damos la siguiente

2.3.1 Definición *Siendo Λ un espacio de funciones normal, E un espacio localmente convexo y B un disco cerrado de E, denotaremos:*

(1) $\Lambda\{E_B, E\} := \{f : \Omega \to E \ \mu - \textit{medible} : f(t) \in E_B \ \ \mu - \textit{a.e. y } p_B f \in \Lambda\}$

(2) $\Lambda < E >= \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \Lambda\{E_B, E\}$ *siendo $\mathcal{B}$ un sistema fundamental de acotados de E (absolutamente convexos y cerrados).*

En el caso en que el espacio de funciones es $L^1(\mu)$ y E_B es completo para la topología de la norma p_B, el espacio de las funciones integrables Bochner

$$f : \Omega \to E_B$$

es un subespacio de $L^1\{E_B, E\}$, en general propio, pues como muestra el siguiente ejemplo de Thomas, ni siquiera una función continua $f : \Omega \to E$ con rango en E_B tiene que ser μ-medible para la topología de E_B.

2.3.2 Ejemplo *[96]* Consideremos el conjunto de índices $I = C([0,1])$, el conjunto de las funciones reales continuas sobre $[0,1]$. Sea $E := \mathbb{R}^I$ con la topología producto y sea f la función

$$f : t \in [0,1] \to f(t) := (i(t))_{i\in I} \in E$$

Esta función f es continua y por tanto $f([0,1])$ es compacto en E. Siendo B un disco cerrado que contiene a $f([0,1])$, f no es $\mu-$medible respecto a la topología que define p_B sobre E_B.

2.3.3 Definición *Diremos que un espacio localmente convexo E es* fundamentalmente $\Lambda-$acotado *si para cada acotado M de $\Lambda\{E\}$ existen acotados R y B, en Λ y E respectivamente, de forma que*

$$M \subset [\, R, B \,]$$

Equivalentemente, para cada acotado M existe un acotado $B \subset E$ de forma que

(1) Para cada $f \in M$, $f(t) \in E_B \quad \mu - a.e.$

(2) $\{p_B f : f \in M\}$ es un subconjunto acotado de Λ.

2.3.4 Proposición *Siendo Λ un espacio normal se verifican :*

(1) Todo espacio normado es fundamentalmente $\Lambda-$acotado.

(2) Sea F un subespacio de E. Si E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado, también lo es F.

(3) Sea F un subespacio de E. Si $\Lambda\{E\} = \Lambda < E >$, entonces

$$\Lambda\{F\} = \Lambda < F > .$$

(4) Si Λ es normado (para una topología normal) y perfecto, y E es fundamentalmente $L^1(\mu)$–acotado, entonces

$$E \text{ es fundamentalmente } \Lambda\text{–acotado.}$$

(5) Todo espacio localmente convexo es fundamentalmente $L^\infty(\mu)$–acotado.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Inmediato.

(2) Si M es un subconjunto acotado de $\Lambda\{F\}$, también es un subconjunto acotado de $\Lambda\{E\}$ y por tanto existe un disco cerrado $B \subset E$ de forma que

(a) $f(t) \in E_B$ $\mu - a.e.$ $\forall f \in M$

(b) $\left\{p_B f : f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de Λ.

Puesto que $B_0 = B \cap F$ es un disco cerrado en F y cada $f \in M$ toma valores en F, obtenemos que para cada $f \in M$, $f(t) \in F_{B_0}$ $\mu - a.e.$ y

$$\left\{p_{B_0} f : f \in M\right\} \quad \text{es acotado en} \quad \Lambda,$$

pues si $x \in F$, $p_B(x) = p_{B_0}(x)$.

(3) Como en (2).

(4) Sea M un subconjunto acotado de $\Lambda\{E\}$. Siendo H la polar, en $\Lambda^\times$, de la bola unidad de Λ, el conjunto

$$H \cdot M := \{\alpha f : \alpha \in H, f \in M\}$$

es acotado en $L^1\{E\}$ y por tanto existe un disco cerrado $B \subset E$ de forma que

(a) $\alpha(t) f(t) \in E_B$ μ – a.e. $\forall f \in M$, $\forall \alpha \in H$.

(b) $\left\{p_B(\alpha f) : \alpha \in H, f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de $L^1(\mu)$.

Puesto que $L_c^\infty(\mu) \subset \Lambda^\times$, de (a) se obtiene que

$$f(t) \in E_B \ \mu - a.e. \ \forall f \in M$$

y de (b) que

$$\sup\left\{\int |\alpha| p_B f \, d\mu : \alpha \in H, f \in M\right\} < +\infty$$

es decir, $\left\{p_B f : f \in M\right\}$ es acotado en Λ.

(5) Consecuencia de la Proposición 1.2.15.

■

Una vez vistas las propiedades elementales, establezcamos la relación existente entre la fundamental acotación y los espacios metrizables y (df). Para ello estableceremos previamente la relación existente entre la fundamental acotación respecto de los espacios $L^p(\mu)$, con μ una medida de Radon arbitraria, y respecto de los espacios l^p, es decir tomando como μ la medida cardinal sobre los naturales. Estableceremos previamente un lema técnico donde se pone de manifiesto la importancia de la medibilidad Lusin. Asimismo, se pone de manifiesto el papel estelar de la integral como interpretación continua de las coordenadas en los espacios de sucesiones.

2.3.5 Lema *Sea K un e.t. compacto, sea $f : K \to E$ una aplicación continua y sea $B \subset E$ un disco cerrado. Se verifica :*

(1) Si $f(K)$ no corta a E_B, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función simple–Borel $s_n : K \to B^o \subset E'$ de forma que, puntualmente, se verifica

$$\langle f, s_n \rangle > n$$

(2) Si $f(K) \subset E_B$ y $p_B f : K \to \mathbb{R}$ es continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función simple–Borel $s : K \to B^o \subset E'$ de forma que, puntualmente, se verifica

$$p_B f < \langle f, s \rangle + \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que $B = B^{oo}$, se tiene que si $x \in E_B$

$$p_B(x) = \sup \{ | \langle x, x' \rangle | : x' \in B^o \}$$

(1) Fijado $t_0 \in K$, puesto que $f(t_0) \notin E_B$,

$$\sup \{ | \langle f(t_0), x' \rangle | : x' \in B^o \} = +\infty$$

y por tanto existe $x'_n(t_0) \in B^o$ de forma que $\langle f(t_0), x'_n(t_0) \rangle > n$. Por otra parte, puesto que

$$\langle f(\cdot), x'_n(t_0) \rangle : K \to E$$

es una función continua, existe un entorno abierto $G(t_0)$ de t_0 en K de forma que si $t \in G(t_0)$

$$\langle f(t), x'_n(t_0) \rangle > n.$$

Consideremos el recubrimiento abierto de K, $\{G(t) : t \in K\}$. Puesto que K es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito

$$\{G(t_1), G(t_2), \ldots, G(t_r)\}$$

Siendo $A_1 = G(t_1), A_i = G(t_i) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})$ para $i = 2, \ldots, r$ obtenemos una partición de K en subconjuntos de Borel. La función

$$s_n := \sum_{i=1}^{r} x'_n(t_i) \chi_{A_i}$$

es simple–Borel y si $t \in A_i$

$$\langle f(t), s_n(t) \rangle = \langle f(t), x'_n(t_i) \rangle > n.$$

(2) Dado $\varepsilon > 0$, para cada $t_0 \in K$ existe algún $x'(t_0) \in B^o$ de forma que

$$p_B f(t_0) < \langle f(t_0), x'(t_0) \rangle + \varepsilon.$$

Puesto que $p_B f(\cdot) - \langle f(\cdot), x'(t_0)\rangle$ es una función continua, existe un entorno abierto $G(t_0)$ de t_0 en el que se verifica que

$$p_B f(t) < \langle f(t), x'(t_0)\rangle + \varepsilon.$$

Procediendo como en (1), obtenemos un subconjunto finito $\{x'(t_i)\}$ de B^o y una partición finita $\{A_i\}$ de K en conjuntos de Borel de forma que en A_i se verifica

$$p_B f(t) < \langle f(t), x'(t_i)\rangle + \varepsilon$$

con lo cual, siendo $s := \sum x'(t_i)\chi_{A_i}$, tenemos en K

$$p_B f(t) < \langle f(t), s(t)\rangle + \varepsilon.$$

■

2.3.6 Teorema *Sea E casi–completo, (Ω, Σ, μ) un espacio de medida no trivial y $1 \le r \le \infty$. Son equivalentes:*

(1) E es fundamentalmente l^r–acotado.

(2) E es fundamentalmente $L^r(\mu)$–acotado.

DEMOSTRACIÓN:

Denotaremos por s al exponente conjugado de r. El caso $r = \infty$ no es necesario considerarlo pues todo espacio localmente convexo es fundamentalmente l^∞–acotado y fundamentalmente L^∞–acotado.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sea M un subconjunto acotado, que podemos suponer normal, de $L^r\{E\}$ y para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ sea

$$c_q := \sup\left\{\int (qf)^r \, d\mu : f \in M\right\}.$$

Consideremos el conjunto M_0, envolvente normal del conjunto de las sucesiones de E de la forma

$$\left(\mu(A_n)^{-1/s}\int_{A_n} f\, d\mu : n = 1,2,\ldots\right)$$

con $f \in M$ y (A_n) una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y de medida finita y positiva. Para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada una de dichas sucesiones tenemos

$$\begin{aligned}
\sum q\left(\mu(A_n)^{-1/s}\int_{A_n} f\, d\mu\right)^r &\leq \sum \mu(A_n)^{-r/s}\left(\int_{A_n} qf\, d\mu\right)^r \\
&\leq \sum \mu(A_n)^{-r/s}\left(\|\chi_{A_n}\|_s \|qf\chi_{A_n}\|_r\right)^r \\
&= \sum \mu(A_n)^{-r/s}\mu(A_n)^{r/s}\int_{A_n} (qf)^r\, d\mu \\
&= \sum \int_{A_n} (qf)^r\, d\mu \leq \int (qf)^r\, d\mu \leq c_q.
\end{aligned}$$

con lo que el conjunto M_0 es acotado en $l^r\{E\}$. Aplicando (1), sea B un disco cerrado de E de forma que

$$x_n \in E_B \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x_n) \in M_0$$

$$\sum p_B(x_n)^r \leq 1 \quad \forall (x_n) \in M_0$$

Comprobemos que para este subconjunto B se verifica :

(i) $f(t) \in E_B$ $\mu - a.e.$ $\forall f \in M$

(ii) $\left\{p_B f : f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de $L^r(\mu)$.

(i) Si para cierta $f \in M$ se verifica que

$$\mu\left\{t \in \Omega : f(t) \notin E_B\right\} > 0$$

existirá un subconjunto compacto $K \subset \Omega$, de medida positiva tal que

$$f : K \to E \text{ es continua y } f(t) \notin E_B \text{ para } t \in K.$$

Aplicando el lema anterior, para cada $n = 1,2,\ldots$ podemos obtener una función simple

$$s_n : K \to B^o \subset E'$$

de forma que $\langle f, s_n\rangle > n$. Siendo

$$s_n := \sum_{i=1}^{m} x_i' \chi_{A_i}$$

donde $\{A_1, \dots, A_m\}$ es una partición medible de K y $\{x_1', \dots, x_m'\}$ es un subconjunto de B^o, la sucesión

$$(x_i) := \left(\mu(A_1)^{-1/s} \int_{A_1} f \, d\mu, \dots, \mu(A_m)^{-1/s} \int_{A_m} f \, d\mu, 0, \dots\right)$$

está en M_0 y sin embargo, puesto que $x_i' \in B^o$,

$$\begin{aligned}
\sum p_{_B}(x_i)^r &= \sum \mu(A_i)^{-r/s} p_{_B}\left(\int_{A_i} f \, d\mu\right)^r \geq \sum \mu(A_i)^{-r/s}\left(\left\langle \int_{A_i} f \, d\mu, x_i' \right\rangle\right)^r \\
&= \sum \mu(A_i)^{-r/s}\left(\int_{A_i} \langle f, x_i'\rangle \, d\mu\right)^r \geq \sum \mu(A_i)^{-r/s}(n\mu(A_i))^r \\
&= n^r \sum \mu(A_i) = n^r \mu(K)
\end{aligned}$$

en contradicción con ser M_0 un subconjunto acotado de $l^r\left\{E_{_B}\right\}$.

(ii) Si para alguna función $f \in M$, $p_{_B} f$ no está en $L^r(\mu)$, considerando compactos $K \subset \Omega$ tales que $p_{_B} f : K \to \mathbb{R}$ y $f : K \to E$ son continuas, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos obtener uno de estos compactos K_n verificando además

$$\|p_{_B} f \chi_{K_n}\|_r > n.$$

Por otra parte, si $\left\{p_{_B} f : f \in M\right\}$ es un subconjunto de $L^r(\mu)$ pero no está acotado, para cierta $f_n \in M$ que verifique $\|p_{_B} f_n\|_r > n$, podremos obtener un compacto $K_n \subset \Omega$ tal que

$$p_{_B} f_n : K_n \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f_n : K_n \to E \quad \text{son continuas y} \quad \|p_{_B} f_n \chi_{K_n}\|_r > n.$$

Así pues, en cualquier caso, si no fuera cierto el enunciado, podríamos obtener una sucesión (f_n) en M y una sucesión de compactos (K_n) de Ω, de forma que para cada $n = 1, 2, \dots$ las funciones

$$f_n : K_n \to E \quad \text{y} \quad p_{_B} f_n : K_n \to \mathbb{R} \qquad \text{son continuas}$$

y $\|p_B f_n \chi_{K_n}\|_r > n$. Puesto que si $g \in L^r(\mu)$ es

$$\|g\|_r = \sup\left\{ \left| \int gh \, d\mu \right| : h : \Omega \to \mathbb{R} \text{ es simple y } \|h\|_s \leq 1 \right\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos obtener una función simple $h_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|h_n\|_s \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \int_{K_n} p_B f_n h_n \, d\mu > n$$

Por otra parte, aplicando el lema anterior, siendo $\varepsilon_n > 0$ arbitrario, existe una función simple $s_n : K_n \to B^o \subset E'$ de forma que en K_n

$$p_B f_n < \langle f_n, s_n \rangle + \varepsilon_n$$

Consideremos representaciones de h_n y s_n de la forma

$$h_n := \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad s_n := \sum_{i=1}^{j} x_i' \chi_{A_i}$$

con los A_i disjuntos dos a dos y de medida positiva. La sucesión en E

$$(x_i)_i := \left(\frac{1}{\mu(A_1)^{1/s}} \int_{A_1} f \, d\mu, \ldots, \frac{1}{\mu(A_j)^{1/s}} \int_{A_j} f \, d\mu, 0, \ldots \right)$$

está en M_0 y por tanto, puesto que

$$\left(\alpha_1 \mu(A_1)^{1/s}, \ldots, \alpha_j \mu(A_j)^{1/s}, 0, \ldots \right)$$

está en la bola unidad de l^s, se verifica

$$\begin{aligned}
1 &\geq \| \left(p_B(x_i) \right) \|_r \geq \sum_i p_B(x_i) \alpha_i \mu(A_i)^{1/s} \\
&= \sum_i \alpha_i p_B \left(\int_{A_i} f_n \, d\mu \right) \geq \sum_i \alpha_i \left\langle \int_{A_i} f_n \, d\mu, x_i' \right\rangle \\
&= \sum_i \alpha_i \int_{A_i} \langle f_n, x_i' \rangle \, d\mu \geq \sum_i \alpha_i \int_{A_i} \left(p_B f_n - \varepsilon_n \right) \, d\mu \\
&= \int_{K_n} h_n p_B f_n \, d\mu - \varepsilon_n \|h_n\|_1 > n - \varepsilon_n \mu(K_n)^{1/r}
\end{aligned}$$

pues $\|h_n\|_1 \leq \|h_n\|_s \|\chi_{K_n}\|_r \leq 1 \cdot \mu(K_n)^{1/r}$. Sin más que tomar ε_n apropiados obtenemos una contradicción.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea (A_n) una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y de medida finita y positiva. Siendo $\alpha_n := \mu(A_n)^{-1/r}$, si M_0 es un subconjunto acotado de $l^r\{E\}$,

$$M := \left\{ \sum_n \alpha_n x_n \chi_{A_n} : (x_n) \in M_0 \right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^r\{E\}$ y por tanto existe un disco $B \subset E$ cerrado tal que

(a) $f(t) \in E_B$ $\mu - a.e.$ $\forall f \in M$.

(b) $\left\{ p_B f : f \in M \right\}$ es un subconjunto acotado de $L^r(\mu)$.

De (a) obtenemos que para cada $(x_n) \in M_0$ y cada $n \in \mathbb{N}, x_n \in E_B$ y de (b) que $\left\{ \left(p_B(x_n) \right) : (x_n) \in M_0 \right\}$ es un subconjunto acotado de l^r, es decir, M_0 es un subconjunto acotado de $l^r \left\{ E_B \right\}$. ■

2.3.7 Corolario *Un espacio E casi–completo tiene la propiedad (B) de Pietsch si y sólo si es fundamentalmente $L^1(\mu)$–acotado, siendo μ cualquier medida de Radon no trivial.*

Observaciones

(1) Siendo (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $H \subset \Omega$ compacto, tal que el espacio de medida inducido $(H, \Sigma(H), \mu_H)$ es no–trivial, un espacio localmente convexo casi–completo es fundamentalmente $L^1(\mu_H)$–acotado si y sólo si es fundamentalmente $L^1(\mu)$–acotado.

(2) En [83, Th. 1.5.8], A. Pietsch prueba que si E es un espacio localmente convexo metrizable o un *dual métrico* (es decir, que tiene una sucesión fundamental de acotados y, en la terminología de [75] y [57], es l^∞-casi-tonelado, es decir, toda sucesión $b(E', E)$-acotada es equicontinua), entonces tiene la propiedad (B).

Generalizando las demostraciones dadas por Pietsch, R.C. Rosier prueba [85, (5)] que siendo E un espacio localmente convexo y siendo Λ un espacio de sucesiones perfecto tal que $\Lambda^\times$ tiene una sucesión fundamental de acotados, se verifican

(a) Si E es metrizable, entonces es fundamentalmente Λ−acotado.

(b) Si E es un (DF), entonces es fundamentalmente $\Lambda^\times$−acotado.

Sin más que repasar la demostración dada por Pietsch para espacios duales métricos se comprueba que es válida suponiendo que el espacio E es c_0–casi–tonelado en lugar de l^∞−casi–tonelado, es decir, suponiendo que toda sucesión $b(E', E)$-nula es equicontinua. Por tanto todo espacio (df) tiene la propiedad (B) de Pietsch. Asímismo, como ha observado J. H. Fourie [43, Prop. (2.2)] la demostración dada por R.C. Rosier es válida para espacios (df) en lugar de espacios (DF). No comprobamos directamente la mejora en el enunciado del citado teorema 1.5.8 de [83] ni del resultado de Rosier pues serán, al igual que el siguiente corolario, un caso particular del Teorema 2.3.9

2.3.8 Corolario *Todo espacio localmente convexo metrizable o (df) es fundamentalmente $L^1(\mu)$−acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

El completado $\hat{E}$ de E es, respectivamente, un espacio de Fréchet o un espacio (df) completo. Por tanto $\hat{E}$ tiene la propiedad (B) de Pietsch y, siendo completo, es fundamentalmente $L^1(\mu)$−acotado con lo cual también lo es E. ■

2.3.9 Teorema *Sea Λ un espacio de funciones perfecto tal que $\Lambda^\times$ tiene una sucesión fundamental de acotados $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ y sea E un espacio localmente convexo. Se verifican:*

(1) Si E es metrizable, entonces es fundamentalmente Λ–acotado.

(2) Si E es un (df), entonces es fundamentalmente $\Lambda^\times$–acotado.

DEMOSTRACIÓN:

Teniendo en cuenta la Proposición 2.3.4(2) y que la compleción de un metrizable es un metrizable y la de un (df) es un (df), basta probar los enunciados suponiendo que E es completo. Podemos suponer que cada N_i es absolutamente convexo cerrado y normal.

(1) Sea M un subconjunto acotado de $\Lambda\{E\}$. Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $i = 1, 2, \ldots$ sea

$$c(q,i) := \sup\left\{\int |h| qf \; d\mu : h \in N_i, f \in M\right\}$$

El conjunto $N_i \otimes M := \{hf : h \in N_i, f \in M\}$ es un subconjunto acotado de $L^1\{E\}$ y por tanto existe un disco cerrado $B_i \subset E$ de forma que siendo R_1 la bola unidad cerrada de $L^1(\mu)$ tenemos

$$N_i \otimes M \subset [R_1, B_i]$$

es decir, si $f \in M$ y $h \in N_i$ se verifican:

$$(i) \quad h(t)f(t) \in E_{B_i} \qquad \mu - \text{a.e.}$$
$$(ii) \quad p_{B_i}(hf) \in L^1(\mu) \text{ y } \|p_{B_i}(hf)\|_1 \leq 1$$

Puesto que E es metrizable, existe una sucesión de escalares (ρ_i) positivos de forma que $B := \bigcup_i \rho_i B_i$ es acotado. Por otra parte, si $A \subset \Omega$ es medible y relativamente compacto, $\chi_A \in \Lambda^\times$ y por tanto χ_A estará en algún N_i. Aplicando (i), para cada $f \in M$ se verifica que

$$f(t) \in E_{B_i} \subset E_B \qquad \mu - \text{a.e. en A.}$$

Sin más que hacer variar A en una sucesión de compactos que recubran Ω obtenemos que para cada $f \in M$ en Ω se verifica que $f(t) \in E_{_B}$ μ–a.e. También se verifica que para cada $h \in N_i$

$$hp_{_B}f \in L^1(\mu) \qquad \text{y} \qquad \|hp_{_B}f\|_1 \leq \frac{1}{\rho_i}$$

pues por ser $\rho_i B_i \subset B$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{_{N_i^o}}\left(p_{_B}f\right) &= \sup\left\{\left|\left\langle p_{_B}f, h\right\rangle\right| : h \in N_i\right\} \\ &= \sup\left\{\int |h| p_{_B}f \, d\mu : h \in N_i\right\} \leq \frac{1}{\rho_i}. \end{aligned}$$

En consecuencia $\left\{p_{_B}f : f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de $\Lambda^{\times\times} = \Lambda$.

(2) Si M es un subconjunto acotado de $\Lambda^\times\{E\}$, para cada $g \in \Lambda$ el conjunto $\{gf : f \in M\}$ es un subconjunto acotado de $L^1\{E\}$ y teniendo en cuenta el Teorema 2.3.6 y que todo espacio (df) tiene la propiedad (B), existirá un disco cerrado $B \subset E$ de forma que para cada $f \in M$ se verifica :

$$g(t)f(t) \in E_{_B} \ \mu - \text{a.e.} \qquad \|gp_{_B}f\|_1 \leq 1$$

Si existe alguna g en Λ que sólo se anula en un conjunto de medida cero, considerando un conjunto acotado B asociado a g de la forma anterior ya tendríamos

$$\forall f \in M \qquad f(t) \in E_{_B} \quad \mu - \text{a.e.}$$

En cualquier caso, probemos por reducción al absurdo que se verifican

(a) Existe $B_0 \subset E$ acotado tal que si $f \in M$, $f(t) \in E_{_{B_0}}$ μ–a.e.

(b) Existe $B \subset E$ acotado tal que $B_0 \subset B$ y

$$\left\{p_{_B}f : f \in M\right\} \text{ es acotado en } \Lambda^\times.$$

(a) Sea $B_1 \subset \ldots \subset B_i \subset \ldots$ una sucesión fundamental de acotados de E siendo cada B_i absolutamente convexo y cerrado. Supongamos que para cada $i = 1, 2, \ldots$ existe $f_i \in M$ tal que $\mu(A_i) > 0$ donde $A_i := \left\{t \in \Omega : f_i(t) \notin E_{_{B_i}}\right\}$. Puesto que f_i es μ-medible, podemos obtener un compacto $K_i \subset A_i$ de medida positiva y tal que $f_i : K_i \to E$ es continua. Por otra parte, puesto que N_i^o es absorbente en $\Lambda = \Lambda^{\times\times}$ y $\chi_{_{K_i}} \in \Lambda$, existe $\rho_i > 0$ de forma que $\rho_i \chi_{_{K_i}} \in N_i^o$. Aplicando el Lema 2.3.5(1) a $\rho_i f_i : K_i \to E$, existe una función simple–Borel $s_i : K_i \to B_i^o$ tal que (puntualmente) en K_i se verifica

$$\langle \rho_i f_i, s_i \rangle > \frac{i}{\mu(K_i)}$$

Puesto que $s_i(K_i) \subset B_i^o$ y (B_i^o) es un sistema fundamental de entornos de cero en E'_b, la sucesión (recordemos que cada $s_i(K_i)$ es finito)

$$\bigcup_i s_i(K_i)$$

converge a cero en E'_b y por ser E un *(df)*, existe un entorno de cero U en E de forma que

$$\bigcup_i s_i(K_i) \subset U^o$$

Al ser $p_{_U}$ es una seminorma continua sobre E, $\left\{p_{_U} f : f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de $\Lambda^\times$ y por tanto estará contenido en algún N_j. Comprobemos que esto es contradictorio con la construcción hecha de $(f_i), (K_i), (\rho_i)$ y (s_i). Para cada $t \in K_j$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{_U} f_j \chi_{_{K_j}}(t) &= \sup\left\{\langle f_j(t), x' \rangle : x' \in U^o\right\} \\ &\geq \langle f_j(t), s_j(t) \rangle . \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta junto con que $f_j \in M$ y $\rho_j \chi_{_{K_j}} \in N_j^o$ llegamos a la contradicción

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int p_{_U} f_j \rho_j \chi_{_{K_j}} \, d\mu \\ &\geq \int \langle \rho_j f_j(t), s_j(t) \rangle \, \chi_{_{K_j}} \, d\mu > j. \end{aligned}$$

En consecuencia se verifica (a).

(b) Sea B_0 un acotado para el que se verifique (a) y sea

$$B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$$

una sucesión fundamental de acotados de E. Supongamos que para cada $i = 0, 1, \ldots$ existe $f_i \in M$ tal que $p_{B_i} f_i \notin N_i$. Para cierta $h_i \in N_i^o, h_i \geq 0$ se verificará

$$\left\langle h_i, p_{B_i} f_i \right\rangle = \int h_i p_{B_i} f_i \; d\mu > 1$$

Teniendo en cuenta que $h_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $p_{B_i} f_i : \Omega \to R$ y $f_i : \Omega \to E$ son μ–medibles, existe algún compacto $K \subset \Omega$ de forma que la restricción de estas funciones a K es continua y además se verifica

$$\int_{K_i} h_i p_{B_i} f_i \; d\mu > 1$$

Aplicando el Lema 2.3.5(2), para cada $\varepsilon_i > 0$ podemos determinar una función simple–Borel

$$s_i : K_i \to B_i^o \subset E'$$

de forma que, puntualmente en K_i, se verifica

$$p_{B_i}(h_i f_i) < \langle h_i f_i, s_i \rangle + \varepsilon_i$$

y por tanto, tomando ε_i apropiado, podemos suponer que

$$\int_{K_i} h_i \langle f_i, s_i \rangle \; d\mu > 1.$$

Como en (a), podemos comprobar que la sucesión $\bigcup_i s_i(K_i)$ converge a 0 en E' para la topología fuerte $b(E', E)$. Teniendo en cuenta que E es c_0–casi–tonelado tenemos que dicha sucesión es equicontinua. Sea U un entorno de 0 en E tal que $\bigcup_i s_i(K_i) \subset U^o$. Puesto que M es un subconjunto acotado de $\Lambda^\times \{E\}$, el conjunto

$$p_U(M) := \left\{ p_U f : f \in M \right\}$$

es un subconjunto acotado de $\Lambda^\times$ y por tanto estará incluido en algún N_n. Esto es una contradicción ya que $h_n \in N_n, f_n \in M$ y siendo (A_j) una partición medible finita de K_n de forma que $s_n := \sum_j x'_j \chi_{A_j}$ tenemos

$$\begin{aligned}
1 &< \int_{K_n} h_n \langle f_n, s_n \rangle \, d\mu = \int_{K_n} h_n \sum_j \left\langle f_n, x'_j \right\rangle \chi_{A_j} \, d\mu \\
&\leq \int_{K_n} h_n \sum_j p_U f_n \chi_{A_j} \, d\mu = \int_{K_n} h_n \, p_U f_n \sum_j \chi_{A_j} \, d\mu \\
&\leq \int h_n p_U f_n \, d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

■

2.4 Algunos casos particulares

En la sección anterior hemos estudiado el concepto de fundamental acotación, respecto de un espacio Λ de funciones escalares localmente integrables, así como su relación con los espacios localmente convexos metrizables y con los de tipo (df). A continuación estudiaremos algunos casos particulares de *fundamental* $\Lambda-$*acotación*. Los resultados que obtendremos reducirán la propiedad considerada respecto de espacios de funciones a espacios de sucesiones. Ya han aparecido las caracterizaciones de fundamental $\Lambda-$acotación para $\Lambda = L^r(\mu)$, $1 \leq r \leq \infty$, ahora estudiaremos los casos

$$\Lambda = L^1_{loc}(\mu), L^1_c(\mu), L^\infty_{loc}(\mu), L^\infty_c(\mu).$$

Debido a la relación que tienen estos espacios de funciones con el espacio ω de todas las sucesiones escalares, el espacio φ de todas las sucesiones escalares finitamente no–nulas y los espacios de funciones $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$, obtendremos la caracterización de la propiedad en función de la referida a los espacios anteriores.

Pretendiendo estudiar la posible relación entre fundamental acotación respecto de espacios de funciones y de espacios de sucesiones, podemos considerar una situación general:

Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ), una partición (H_n) de dicho espacio en conjuntos medibles, un espacio de funciones Λ_n sobre cada espacio de medida inducido (H_n, Σ_n, μ_n), que sea normal y normado (con una topología normal), y un espacio normal de sucesiones escalares λ, podemos definir el espacio de funciones escalares

$$\lambda(\Lambda_n) := \left\{ f : \Omega \to E \ \mu-\text{medible} \ : f\chi_{_{Hn}} \in \Lambda_n \ \forall n \ \text{ y } \ \left(\|f\chi_{_{Hn}}\|_{_n} \right) \in \lambda \right\}$$

donde $\|\cdot\|_{_n}$ es la norma de Λ_n. Si dotamos a λ de una topología normal, podemos definir de una forma natural una topología sobre $\lambda(\Lambda_n)$. Respecto a la $\alpha-$dualidad, es inmediato comprobar que si dotamos a cada $\Lambda_n^\times$ de la norma dual de $\|\cdot\|_{_n}$, se verifica

$$(\lambda(\Lambda_n))^\times = \lambda^\times \left(\Lambda_n^\times \right).$$

Sea $\Lambda := \lambda(\Lambda_n)$ y sea E casi–completo.

Problema:¿ Son equivalentes los siguientes enunciados ?

(1) E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado.

(2) Se verifican

(a) E es fundamentalmente Λ_n-acotado para cada n.

(b) E es fundamentalmente $\lambda-$acotado.

Los resultados que obtendremos responden afirmativamente, de una manera parcial, a la anterior pregunta pues, siendo (Ω_n) una sucesión creciente fundamental de compactos de Ω y siendo $H_n := \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}$, tenemos

$$L^1(\mu) = l^1\left(L^1(\mu_n)\right) \qquad L^1_{loc}(\mu) = \omega\left(L^1(\mu_n)\right) \qquad L^1_c(\mu) = \varphi\left(L^1(\mu_n)\right)$$

$$L^\infty(\mu) = l^\infty\left(L^\infty(\mu_n)\right) \qquad L^\infty_{loc}(\mu) = \omega\left(L^\infty(\mu_n)\right) \qquad L^\infty_c(\mu) = \varphi\left(L^\infty(\mu_n)\right)$$

De todos modos, no parece que la situación sea *generalizable a muchos* espacios de funciones. Como muestra de esta dificultad, si quisiéramos aplicar la técnica utilizada en el Teorema 2.3.6, a un espacio de funciones $\Lambda(\|.\|)$, normal y normado con una topología normal, éste debería verificar las condiciones previas:

(1) Una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$ está en Λ si y sólo si para cada partición, (A_n) de Ω en conjuntos medibles relativamente compactos, la función

$$\sum_n \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f \, d\mu \chi_{A_n}$$

está en Λ.

(2) Dadas dos particiones arbitrarias (A_n) y (C_n) de Ω en conjuntos medibles relativamente compactos, los espacios de sucesiones escalares

$$\left\{(c_n) \in \omega : \sum_n \frac{c_n}{\|\chi_{A_n}\|}\chi_{A_n} \in \Lambda\right\}$$

y

$$\left\{(c_n) \in \omega : \sum_n \frac{c_n}{\|\chi_{C_n}\|}\chi_{C_n} \in \Lambda\right\}$$

coinciden y

$$\|\sum_n \frac{c_n}{\|\chi_{A_n}\|}\chi_{A_n}\| = \|\sum_n \frac{c_n}{\|\chi_{C_n}\|}\chi_{C_n}\|$$

En está situación, siendo E casi–completo y siendo λ el espacio de sucesiones definido en (2) dotado de la norma

$$|||(c_n)||| := \|\sum_n \frac{c_n}{\|\chi_{A_n}\|}\chi_{A_n}\|$$

se verifica que E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado si y sólo si es fundamentalmente $\lambda-$acotado.

Para que los espacios citados, $\Lambda = L^1_{loc}(\mu), L^1_c(\mu), L^\infty_{loc}(\mu), L^\infty_c(\mu)$, no se reduzcan trivialmente, ni a espacios de dimensión finita, ni a espacios de sucesiones, ni a los ya estudiados $L^1(\mu), L^\infty(\mu)$, supondremos que el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es no trivial (Σ no es finita), no es puramente atómico, en cuyo caso estaríamos con un espacio de sucesiones, y no tiene soporte compacto, en cuyo caso tendríamos $L^1(\mu)$ o $L^\infty(\mu)$.

2.4.1 Definición *Se dice que E verifica la condición de acotación numerable si verifica:*
(cbc) Para cada sucesión (B_n) de acotados de E existe una sucesión (ρ_n) de reales positivos tales que

$$\bigcup_n \rho_n B_n$$

es un subconjunto acotado de E.

Los espacios metrizables verifican la condición de acotación numerable.

El siguiente resultado no lo demostraremos pues su demostración está inmersa en la de la Proposición 2.4.3. No obstante, la caracterización que nos da sirve de guía en las caracterizaciones de los casos

$$\Lambda = L^1_{loc}(\mu), \quad L^\infty_{loc}(\mu).$$

2.4.2 Lema *[39, Proposición 2.6]*

E es fundamentalmente $\omega-$acotado si y sólo si verifica la condición de acotación numerable.

2.4.3 Proposición *Supongamos que (Ω, Σ, μ) tiene soporte no compacto y no es puramente atómico. Con los enunciados*

(1) E es fundamentalmente $L^1_{loc}(\mu)-$acotado.

(2) Se verifican :

(a) E tiene la propiedad (B) de Pietsch.

(b) E verifica la condición de acotación numerable.

se verifica que $(1) \Rightarrow (2)$ *y si E es casi–completo se tiene la equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN:

$(1) \Longrightarrow (2)$

(a) Puesto que el espacio de medida es no–trivial, existe algún compacto $K \subset \Omega$ de forma que el espacio de medida inducido es no–trivial. Consideremos dicho K y consideremos una partición medible $(A_1, A_2, \ldots)$ de K en subconjuntos de medida positiva.

Si M_0 es un subconjunto acotado de $l^1\{E\}$, el conjunto

$$M := \left\{ \sum_n \frac{x_n}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} : (x_n) \in M_0 \right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^1_{loc}\{E\}$ y por tanto, existe un disco cerrado $B \subset E$ de forma que

(i) $\forall f \in M,\ f(t) \in E_B \quad \mu-$a.e.

(ii) $\left\{ p_B f : f \in M \right\}$ es un subconjunto acotado de $L^1_{loc}(\mu)$.

De (i) tenemos que para cada $(x_n) \in M_0$ y cada $n = 1, 2, \ldots$ $x_n \in E_{_B}$, y puesto que K es compacto, de (ii) tenemos que

$$\left\{ \sum_n \frac{1}{\mu(A_n)} p_{_B}(x_n) \chi_{_{A_n}} : (x_n) \in M_0 \right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^1(\mu_K)$ y por tanto

$$\left\{ \left(p_{_B}(x_n) \right) : (x_n) \in M_0 \right\}$$

es un subconjunto acotado de l^1.

(b) Consideremos una partición (A_n) de Ω en subconjuntos medibles relativamente compactos de medida positiva. Si (B_n) es una sucesión de acotados de E consideremos el conjunto de funciones

$$M := \left\{ \frac{x_n}{\mu(A_n)} \chi_{_{A_n}} : x_n \in B_n \quad n = 1, \ldots \right\}$$

que es acotado en $L^1_{loc}\{E\}$. Puesto que E es fundamentalmente L^1_{loc}−acotado, existe un disco cerrado $B \subset E$ tal que $x_n \in E_{_B}$ para cada $x_n \in B_n$ y cada $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\left\{ \frac{1}{\mu(A_n)} p_{_B}(x_n) \chi_{_{A_n}} : x_n \in B_n \quad n = 1, 2, \ldots \right\}$$

es acotado en $L^1_{loc}(\mu)$. Así pues, para cada n existe $\rho_n > 0$ de forma que

$$\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} p_{_B}(x_n) \, d\mu \leq \rho_n \qquad \forall x_n \in B_n$$

y, por tanto $\bigcup_n \frac{1}{\rho_n} B_n \subset B$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea (Ω_n) una sucesión fundamental de compactos de Ω. Si M es un subconjunto acotado de $L^1_{loc}\{E\}$, para cada $n = 1, 2, \ldots$,

$$M_n := \left\{ f \chi_{_{\Omega_n}} : f \in M \right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^1\{E\}$ y, teniendo en cuenta el Teorema 2.3.6, existe algún disco cerrado $B_n \subset E$ de forma que

- $f(t) \in E_{B_n}$ $\mu - a.e.(\Omega_n)$ $\forall f \in M$.
- $\left\{p_{B_n}\left(f\,\chi_{\Omega_n}\right) : f \in M\right\}$ es un subconjunto acotado de $L^1(\mu)$.

Sea $c_n := \sup\left\{\|p_{B_n} f\,\chi_{\Omega_n}\|_1 : f \in M\right\} < +\infty$ y sea (ρ_n) una sucesión de reales positivos tales que

$$B := \bigcup_n \rho_n B_n$$

es acotado en E. Para cada $f \in M$ se verifica $f(t) \in E_B$ μ–a.e. y para cada $n = 1, 2, \ldots$

$$\|p_B f\,\chi_{\Omega_n}\|_1 \leq \|\frac{1}{\rho_n} p_{B_n} f\,\chi_{\Omega_n}\|_1 \leq \frac{c_n}{\rho_n}$$

con lo cual, por ser (Ω_n) una sucesión fundamental de compactos de Ω,

$$\left\{p_B f : f \in M\right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$. ■

2.4.4 Corolario *Toda espacio localmente convexo metrizable es fundamentalmente $L^1_{loc}(\mu)$–acotado.*

2.4.5 Proposición *Supongamos que (Ω, Σ, μ) tiene soporte no compacto y no es puramente atómico. Con los enunciados*

(1) E es fundamentalmente $L^1_c(\mu)$–acotado.

(2) Se verifican :

(a) E tiene la propiedad (B) de Pietsch.

(b) E es fundamentalmente φ–acotado.

se verifica $(1) \Rightarrow (2)$ *y si E es casi–completo* $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es análogo a lo hecho en la demostración de (1) $\Rightarrow$ (2) de la proposición anterior.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si M es un subconjunto acotado de $L^1_c\{E\}$, también lo es de $L^1\{E\}$ y por el Teorema 2.3.6 existe algún disco cerrado $B_1 \subset E$ ded manera que para cada $f \in M$, $f(t) \in E_{B_1}$ μ–a.e. y

$$M_1 := \left\{p_{B_1} f : f \in M\right\} \quad \text{es acotado en} \quad L^1(\mu).$$

Por otra parte, el conjunto de sucesiones

$$\left\{\left(\int_{A_n} f \, d\mu\right) : f \in M, A_n \in \Sigma, A_n \subset \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \ \forall n\right\}$$

es un subconjunto acotado de $\varphi\{E\}$ y por tanto, existe un disco cerrado $B_2 \subset E$ tal que

- Para cada $f \in M$ y cada $A \in \Sigma$ subconjunto de algún $\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}$,

$$\int_A f \, d\mu \in E_{B_2} \qquad \text{y}$$

- $M_2 := \left\{\left(p_{B_2}\left(\int_{A_n} f \, d\mu\right)\right) : f \in M, A_n \in \Sigma \ A_n \subset \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \forall n\right\}$ es un subconjunto acotado de φ.

Siendo $B := \overline{acx}\,(B_1 \cup B_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} &(i) \quad f(t) \in E_B \ \mu - \text{a.e. para cada} \quad f \in M \\ &(ii) \quad \left\{p_B f : f \in M\right\} \text{ es acotado en} \quad L^1_c(\mu) \end{aligned}$$

pues por ser M_2 acotado en φ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $f \in M$, si $n > n_0$ y $A \subset \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}$ es medible, se tiene

$$\int_A f \, d\mu = 0$$

y por tanto, teniendo en cuenta el Lema de Inclusión 1.4.3,

$$f(t) = 0 \quad \mu - \text{a.e. en} \quad \Omega \setminus \Omega_{n_0}.$$

Por otra parte, siendo M_1 acotado en $L^1(\mu)$ lo es M en $L^1_c(\mu)$ pues si $f \in M$

$$p_B f = p_B f\chi_{\Omega_{n_0}} \leq p_{B_1} f.$$

■

En el estudio de los casos $\Lambda = L^\infty_{loc}(\mu), L^\infty_c(\mu)$, no necesitaremos tener un espacio E casi–completo para obtener la caracterización.

2.4.6 Proposición *Supongamos que (Ω, Σ, μ) tiene soporte no compacto. Son equivalentes :*

(1) E es fundamentalmente $L^\infty_{loc}(\mu)$–acotado.

(2) E verifica la condición de acotación numerable.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Basta asociar a cada acotado M_0 de $\omega\{E\}$ un acotado

$$M := \left\{ \sum_n x_n \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} : (x_n) \in M_0 \right\}$$

de $L^\infty_{loc}\{E\}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si M es un subconjunto acotado de $L^\infty_{loc}(\mu)$, para cada $n = 1, 2, \ldots$

$$M_n := \left\{ f\chi_{\Omega_n} : f \in M \right\}$$

es un subconjunto acotado de $L^\infty\{E\}$ y por tanto existe un disco cerrado $B_n \subset E$ tal que $f(t) \in E_{B_n}$ μ–a.e. para cada $f \in M$ y

$$\left\{ p_{B_n} f\chi_{\Omega_n} : f \in M \right\} \qquad \text{es acotado en} \quad L^\infty(\mu).$$

Teniendo en cuenta (2) sea (ρ_n) una sucesión de reales positivos tal que

$$B := acx\left(\bigcup_n \rho_n B_n \right)$$

es acotado. Entonces, $f(t) \in E_B$ $\mu-$a.e. para cada $f \in M$ y

$$\left\{p_B f \chi_{\Omega_n} : f \in M\right\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

es acotado en $L^\infty(\mu)$, i.e. $\left\{p_B f : f \in M\right\}$ es acotado en $L^\infty_{loc}(\mu)$. ■

Del caso $\Lambda = L^\infty_c(\mu)$ no damos la demostración por seguir los mismos pasos que la de la proposición anterior.

2.4.7 Proposición *Supongamos que (Ω, Σ, μ) tiene soporte no compacto. Son equivalentes :*

(1) E es fundamentalmente $L^\infty_c(\mu)-$acotado.

(2) E es fundamentalmente $\varphi-$acotado.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y los resultados sobre fundamental $\varphi-$acotación y $\omega-$acotación de [39], tenemos

2.4.8 Corolario *Si E tiene normas continuas, entonces es fundamentalmente $L^\infty_c(\mu)-$acotado, para cualquier medida μ.*

2.4.9 Proposición *Si E es metrizable y (Ω, Σ, μ) tiene soporte no compacto, son equivalentes :*

(1) E es fundamentalmente $L^\infty_c(\mu)-$acotado.

(2) $L^\infty_c\{E\} = L^\infty_c\langle E\rangle$.

(3) E tiene normas continuas.

(4) E es fundamentalmente $\varphi-$acotado.

(5) $\varphi\{E\} = \varphi\langle E\rangle$.

DEMOSTRACIÓN:

Sólo hay que probar (2) $\Rightarrow$ (3) pues según la Proposición 2.4.7 (1) $\Longleftrightarrow$ (4), según [39, Prop. 2.7], (3) $\Rightarrow$ (4) y, teniendo en cuenta [85, 6.(8)], se tiene que (5) $\Rightarrow$ (3). De la definición se obtiene (4) $\Rightarrow$ (5). La demostración sigue los mismos pasos que 5 $\Longleftrightarrow$ 3.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Consideremos una sucesión fundamental de seminormas

$$q_1 \leq q_2 \leq \dots$$

en E y supongamos que ninguna de ellas es norma. Obtendremos una contradicción construyendo una función $f \in L_c^\infty\{E\}$ que sólo se anule en un conjunto de medida 0, con lo cual no podrá obtenerse $B \subset E$ acotado de forma que $p_B f$ tenga soporte compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in E$ tal que $x_n \neq 0$ y $q_n(x_n) = 0$ y consideremos la función

$$f := \sum_n x_n \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \qquad (\Omega_0 := \emptyset).$$

Esta función es $\mu-$medible, no se anula y para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$q_m f = \sum_{n=1}^{m-1} q_m(x_n) \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}}$$

está en $L_c^\infty(\mu)$ con lo cual f está en $L_c^\infty\{E\}$.

■

Guiados por [85, 8.(6)], tenemos

2.4.10 Corolario *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida con soporte no compacto y sea E un espacio (df). Se verifica:*

(1) Si $L^1_{loc}\{E\} = L^1_{loc}\langle E\rangle$, entonces E'_b tiene normas continuas.

(2) Si E es fundamentalmente $L^1_{loc}(\mu)-$acotado, entonces E'_b es normable.

DEMOSTRACIÓN:

Siendo $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ es una sucesión fundamental creciente de acotados de E y q_n el funcional de Minkowski de B_n^o, la topología $b(E', E)$ queda definida por las seminormas $q_1 \leq q_2 \leq \ldots$

(1) Si E' no tiene normas continuas, podemos obtener una función

$$f := \sum_n x'_n \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \in L_c^\infty \{E'\}$$

siendo $(x'_n) \subset E'$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $x'_n \neq 0$ y $q_n(x_n) = 0$ con lo cual para cada $x \in E_{B_n}$, $\langle x, x'_n \rangle = 0$. Sea $(x_n) \subset E$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}, \langle x_n, x'_n \rangle = 1$ y sea

$$g := \sum_n x_n \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}}.$$

Puesto que $g \in L^1_{loc}\{E\}$, debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(t) \in E_{B_m} \ \ \mu - a.e. \text{ y } \ p_{B_m} g \in L^1_{loc}(\mu)$$

es decir, $(x_n) \subset E_{B_m}$ y por tanto, $\langle x_n, x'_m \rangle = 0$ $\forall n$ en contradicción con ser $\langle x_n, x'_n \rangle = 1$.

(2) Puesto que E es fundamentalmente $L^1_{loc}(\mu)$–acotado, verifica la *condición de acotación numerable* (Proposición 2.4.3). Por otra parte, puesto que E tiene una sucesión fundamental de acotados $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, para cierta sucesión (ρ_n) de reales positivos $\bigcup_n \rho_n B_n$ será acotado y existirá $m \in \mathbb{N}$ de forma que $\bigcup_n \rho_n B_n \subset B_m$. El funcional de Minkowski de B_m^o es una norma y define la topología de E'_b.

■

En el estudio intrínseco que hemos hecho de la fundamental acotación ha aparecido de forma intermitente la hipótesis de casi–completitud para el espacio localmente convexo. Queda abierto el estudio del papel real que juega dicha propiedad en la fundamental acotación, tanto respecto de un espacio de funciones como de un espacio de sucesiones. Según vimos en la Proposición 2.3.4, la fundamental acotación se *puede bajar a subespacios* , pero no está ni mucho menos claro que se *pueda subir*, ni siquiera por densidad. El uso que hemos hecho de la casi–completitud ha sido como un instrumento. Al tener definida la integral, hemos asociado sucesiones a un conjunto dado de funciones, de forma que podíamos *volver a obtener los rangos* de las funciones.

2.5 Completitud local de los espacios $\Lambda\{E\}$.

Poco hemos dicho sobre la completitud de los espacios $\Lambda\{E\}$ y poco parece que pueda garantizarse (en el caso de un espacio de medida que no es puramente atómico). Esta parece una de las contrapartidas de trabajar con un concepto de $\mu-$medibiliad tan fuerte como el de Lusin o, si se quiere, de tener a nuestra disposición propiedades de funciones continuas. Entre lo poco que podemos garantizar está lo que se refiere a la completitud local (o completitud en el sentido de Mackey) que es un concepto de completitud más débil que la sucesional. El teorema que probaremos sobre completitud local de los espacios $\Lambda\{E\}$ tiene como base la construcción que haremos en la demostración del Lema 2.5.2. Esta construcción se basa en una que aparece en [96, p. 124].

2.5.1 Definición

(1) Se dice que una sucesión (x_n) en un espacio localmente convexo E es localmente convergente a $x \in E$ si existe un disco $B \subset E$ tal que (x_n) converge a x en el espacio normado $\left(E_{B}, p_{B}\right)$.

(2) Se dice que una sucesión (x_n) en E es localmente Cauchy si existe un disco $B \subset E$ tal que (x_n) es de Cauchy en el espacio normado $\left(E_{B}, p_{B}\right)$.

(3) Se dice que un espacio es localmente completo si toda sucesión localmente Cauchy es localmente convergente.

(4) Se dice que un disco $B \subset E$ es un disco de Banach si $\left(E_{B}, p_{B}\right)$ es un espacio de Banach.

Un espacio localmente convexo E es localmente completo si y sólo si todo disco cerrado en E es un disco de Banach.

2.5.2 Lema *Siendo U_1 la bola unidad cerrada de $L^1(\mu)$, si $B \subset E$ es un disco de Banach, también lo es $[\ U_1, B\ ]$ en $L^1\{E\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Trivialmente $[\ U_1, B\ ]$ es un disco en $L^1(\mu)$. Aplicando [75, p. 83] bastará probar que si (f_n) es una sucesión en $[\ U_1, B\ ]$, la serie $\sum \frac{1}{2^n} f_n$ converge, en $L^1\{E\}$, a un elemento de $[\ U_1, B\ ]$. Puesto que para cada $n = 1, 2, \cdots, f_n(t) \in E_B$ $\mu - a.e.$ y $\|p_B f_n\|_1 \leq 1$, la serie $\sum \frac{1}{2^n} p_B f_n$ converge en $L^1(\mu)$ a una función $h \in L^1(\mu)$. Además se verifica

$$\|h\|_1 = \sum \frac{1}{2^n} \int p_B f_n \, d\mu \leq 1 \quad \text{y} \quad h(t) = \sum \frac{1}{2^n} p_B f_n(t) \quad \mu - \text{a.e.}$$

pues (puntualmente) la sucesión de las sumas parciales es monótona. Sea $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ y en $\Omega \setminus N$ se verifica $h(t) = \sum \frac{1}{2^n} p_B f_n(t)$. Puesto que E_B es un Banach, para cada $t \in \Omega \setminus N$, $\sum \frac{1}{2^n} f_n(t)$ es convergente. Sea f la función definida $\mu-$a.e. por la serie anterior. Sólo queda probar que f es $\mu-$medible pues en este caso tendremos $\mu-$a.e. que

$$p_B f \leq \sum \frac{1}{2^n} p_B f \leq h \in U_1$$

Para cada n, la función definida sobre $\Omega \setminus N$ por

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} f_k(t)$$

es $\mu-$medible y verifica que, puntualmente en $\Omega \setminus N$, $\lim p_B(f - g_n) = 0$. Puesto que $p_B(f - g_n)$ es $\mu-$medible, por ser limite puntual $\mu - a.e.$ de la sucesión de funciones $\mu-$medibles $(p_B(g_j - g_n) : j = 1, 2, \cdots)$, aplicando el Lema de Egoroff, la convergencia de $p_B(f - g_n)$ a 0 es casi–uniforme y por tanto existe una sucesión (K_r) de compactos de Ω disjuntos dos a dos y de forma que

- $\Omega \setminus N = \bigcup K_r \cup N_0 \qquad \mu(N_0) = 0$
- $g_n : K_r \longrightarrow E$ es continua para cada n y cada r
- $\lim p_B(f - g_n) = 0$ uniformemente en K_r.

En consecuencia para cada $r = 1, 2, \ldots, f : K_r \to E$ es continua y por tanto f es μ−medible. ∎

2.5.3 Proposición *Si E es localmente completo y fundamentalmente L^1−acotado (en particular si es casi-completo y tiene la propiedad (B) de Pietsch) se verifica que $L^1\{E\}$ es localmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Si M es un disco cerrado de $L^1\{E\}$, existirá un disco cerrado $B \subset E$, tal que

$$M \subset [\, U_1, B\,]$$

Aplicando el lema anterior y [75, p. 152] obtenemos el resultado. ∎

2.5.4 Corolario *Si E es un espacio de Fréchet se verifica*

(1) $L^1\{E\}$ es un espacio de Fréchet y $L^1\{E\} = L^1\hat{\otimes}_\pi E$.

(2) Si Λ es completo, $\Lambda\{E\}$ también es completo, Fréchet si lo es Λ.

(3) $L^1_{loc}\{E\} = L^1_{loc}\hat{\otimes}_\pi E$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Basta tener en cuenta que un espacio metrizable es localmente completo si y sólo si es completo y aplicar la proposición anterior.

(2) Basta aplicar el Teorema 2.2.11.

∎

2.5.5 Lema *Siendo Λ perfecto, si R y B son discos de Banach en Λ y E respectivamente y R es cerrado se verifica que*

$[\ R, B\ ]$ es un disco de Banach en $\Lambda\{E\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Al igual que en el Lema 2.5.2, teniendo en cuenta [75, p. 83] bastará probar que para cada sucesión (f_n) en $[\ R, B\ ]$, la serie $\sum \frac{1}{2^n} f_n$ converge en $\Lambda\{E\}$ a un elemento de $[\ R, B\ ]$. Siendo R^o la polar de R en $\Lambda^\times$, puesto que

$$R^o[\ R, B\ ] := \{\alpha f : \alpha \in R^o, f \in [\ R, B\ ]\}$$

es un subconjunto del disco de Banach $[\, U_1, B\,]$, para cada $\alpha \in R^o$ la serie $\sum \frac{1}{2^n}\alpha f_n$ converge en $L^1\{E\}$ a un elemento de $[\ U_1, B\ ]$. Además la convergencia es $\mu-$a.e. en (E_B, p_B). Puesto que R^o es absorbente en $\Lambda^\times \supset L_c^\infty(\mu)$, para cada compacto K, de medida positiva, existe un múltiplo (distinto de cero) de χ_K que está en R^o. De esto se deduce que $f := \sum \frac{1}{2^n} f_n$ define puntualmente $\mu - a.e.$ una función y la convergencia puntual de la serie es relativa al espacio (E_B, p_B). Al igual que en el Lema 2.5.2 se obtiene que f es $\mu-$medible y puesto que para cada $\alpha \in R^o$ se verifica

$$p_B(\alpha f) = |\alpha| p_B f \in U_1$$

tenemos que $p_B f \in \Lambda^{\times\times} = \Lambda$ y $p_B f \in R.$

■

2.5.6 Teorema *Si Λ es perfecto (y por tanto completo) y E es localmente completo y fundamentalmente $\Lambda-$acotado, entonces $\Lambda\{E\}$ es localmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta probar que todo acotado de $\Lambda\{E\}$ está contenido en un disco de Banach. Esto es inmediato sin más que aplicar las hipótesis y el lema anterior. ■

2.6 El dual de $\Lambda\{E\}$.

El hilo conductor del estudio del dual (topológico) de los espacios $\Lambda\{E\}$ será la caracterización, para espacios cuyo dual fuerte tiene la propiedad de Radon–Nikodym, de dicho dual como un espacio de funciones del mismo tipo que $\Lambda\{E\}$. Dicha caracterización nos permitirá obtener ciertas propiedades. De nuevo será crucial el tipo de $\mu-$medibilidad con el que trabajamos.

Sobre el dual E' de E consideraremos, salvo mención expresa de lo contrario, la topología fuerte $b(E',E)$ y denotaremos por E'_b a E' dotado de dicha topología.

2.6.1 Definición *Denominaremos $\alpha-$dual de un $\Lambda\{E\}$ al espacio*

$$\Lambda\{E\}^{\times} := \left\{g : \Omega \to E'_b : g \text{ es } \mu-\text{medible y } \forall\ f \in \Lambda\{E\}\ \ \langle f,g\rangle \in L^1(\mu)\right\}.$$

Por $\langle f,g\rangle$ hemos indicado la función definida puntualmente mediante

$$\langle f,g\rangle : t \in \Omega \longrightarrow \langle f(t), g(t)\rangle \in \mathbb{R}$$

que es $\mu-$medible por serlo $f : \Omega \to E$ y $g : \Omega \to E'_b$ y ser continuo el producto en dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E'_b \to \mathbb{R}$. Así, si $g \in \Lambda\{E\}^{\times}$, queda definida una aplicación lineal

$$T : f \in \Lambda\{E\} \to T(f) := \int \langle f,g\rangle\ d\mu \in \mathbb{R}$$

sobre $\Lambda\{E\}$. Estas aplicaciones lineales serán, bajo ciertas condiciones, continuas y tendremos una identificación entre $\Lambda\{E\}^{\times}$ y un subespacio de $\Lambda\{E\}'$. Consideremos en primer lugar la relación de $\Lambda\{E\}^{\times}$ con el espacio $\Lambda^{\times}\{E'_b\}$. Nuevamente establecemos un lema técnico que, basado en las propiedades de las funciones continuas sobre conjuntos compactos, aplicaremos a funciones $\mu-$medibles. No demostraremos este lema por ser su demostración análoga a la del Lema 2.3.5(2).

2.6.2 Lema *Sean K un e.t. compacto, $B \subset E$ un disco cerrado y $g : K \to E'_b$ una función continua. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función simple–Borel*

$s : K \to B$ tal que

$$p_{B^o} g < \langle s, g\rangle + \varepsilon.$$

2.6.3 Proposición

$$\Lambda\{E\}^\times \subset \Lambda^\times\{E_b'\}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $g \in \Lambda\{E\}^\times$. Tenemos que probar que $p_{B^o} g \in \Lambda^\times$ para cada $B \subset E$ acotado. Denotemos por p a p_{B^o}. Puesto que $g : \Omega \to E_b'$ es μ−medible y B^o es entorno de 0 en E_b', la función

$$pg : \Omega \to \mathbb{R}$$

está bien definida y es μ−medible. Sea (K_n) una sucesión de compactos de Ω, disjuntos dos a dos, tales que

$$\Omega = \bigcup_n K_n \cup N \qquad \mu(N) = 0$$

y las funciones

$$g : K_n \to E_b' \qquad\qquad pg : K_n \to \mathbb{R}$$

son continuas. Teniendo en cuenta el lema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\varepsilon_n > 0$ existe una función $s_n : K_n \to B$ simple–Borel de forma que en K_n se verifica

$$pg < \langle s_n, g\rangle + \varepsilon_n.$$

Siendo $s := \sum_n s_n \chi_{K_n}$, en $\Omega \setminus N$ se verifica

$$pg < \langle s, g\rangle + \sum_n \varepsilon_n \chi_{K_n}$$

y por tanto, para cada $h \in \Lambda$

$$|h| pg \leq \langle |h| s, g\rangle + \sum_n \varepsilon_n \chi_{K_n} |h|$$

Puesto que $s \in L^\infty\{E\}$, $|h|s$ está en $\Lambda\{E\}$ y por tanto $\langle |h|s, g\rangle \in L^1(\mu)$. Sin más que considerar una sucesión (ε_n) apropiada, p.ej.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n \|h\chi_{K_n}\|_1} & si \quad \|h\chi_{K_n}\|_1 \neq 0 \\ 1 & si \quad \|h\chi_{K_n}\|_1 = 0 \end{cases}$$

la función $\sum_n \varepsilon_n \chi_{K_n}|h|$ también está en $L^1(\mu)$ y por tanto $pg \in \Lambda^\times$.

■

2.6.4 Proposición *Si $\Lambda\langle E\rangle = \Lambda\{E\}$ y en particular si E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado, se verifica*

$$\Lambda^\times\{E'_b\} = \Lambda\{E\}^\times$$

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta la Proposición 2.6.3 bastará probar

$$\Lambda^\times\{E'_b\} \subset \Lambda\{E\}^\times.$$

Sea $g \in \Lambda^\times\{E'_b\}$. Tenemos que probar que para cada $f \in \Lambda\{E\}$ la función $\langle f, g\rangle$ está en $L^1(\mu)$. Siendo $B \subset E$ un disco cerrado tal que

$$f(t) \in E_B \quad \mu - a.e. \quad \text{y} \quad p_B f \in \Lambda$$

se verifica

$$|\langle f, g\rangle| \leq p_B f p_{B^o} g \in L^1(\mu)$$

pues $p_{B^o} f \in \Lambda^\times$.

■

2.6.5 Lema *Sean E casi–tonelado y E'_b fundamentalmente $\Lambda^\times$–acotado. Dada una función $g \in \Lambda^\times\{E'_b\}$ existe $U \in \mathcal{U}(E)$ tal que*

$$g(t) \in E'_{U^o} \quad \mu - a.e. \quad \text{y} \quad p_{U^o} g \in \Lambda^\times.$$

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que E'_b es fundamentalmente $\Lambda^\times$−acotado, existe $D \subset E'_b$ acotado, y por tanto equicontinuo, de forma que

$$g(t) \in {E'}_D \quad \mu - a.e. \text{ y } \quad p_D g \in \Lambda^\times.$$

Siendo U un entorno de 0, en E, de forma que $D \subset U^o$, tendremos que

$$g(t) \in {E'}_{U^o} \ \mu - a.e. \quad \text{y} \quad p_{U^o} g \in \Lambda^\times$$

y por tanto para cada $f \in \Lambda\{E\}$, $\langle f, g\rangle$ es μ−medible y

$$|\langle f, g\rangle| \leq p_U f \; p_{U^o} g \in L^1(\mu) \tag{2.6.1}$$

pues $p_U f$ está en Λ.

■

2.6.6 Corolario *Si E es casi–tonelado y E'_b es fundamentalmente $\Lambda^\times$−acotado, entonces $\Lambda^\times\{E'_b\} = \Lambda\{E\}^\times$.*

Una vez establecida la relación entre $\Lambda\{E\}^\times$ y $\Lambda^\times\{E'_b\}$, estudiemos la relación, en principio algebraica, de estos espacios con el dual $\Lambda\{E\}'$.

Antes de pasar a estudiar las relaciones de estos espacios con el dual, caractericemos los elementos $g \in \Lambda\{E\}^\times$ que definen elementos de $\Lambda\{E\}'$. Enunciaremos, sin demostración, un lema técnico similar al Lema 2.3.5(1).

2.6.7 Lema *Sean K un e.t. compacto, $U \subset E$ un entorno de 0, absolutamente convexo y cerrado y $g : K \longrightarrow E'_b$ una función continua de forma que $g(K)$ no corta a ${E'}_{U^o}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función simple–Borel $s_n : K \longrightarrow U$ tal que puntualmente se verifica*

$$\langle s_n, g\rangle > n.$$

2.6.8 Lema *Sea* $g \in \Lambda\{E\}^{\times}$. *Son equivalentes:*

(1) La aplicación lineal

$$T : f \in \Lambda\{E\} \to T(f) := \int \langle f, g\rangle \; d\mu \in \mathbb{R}$$

es continua.

(2) Existe un entorno de 0, U en E tal que

$$g(t) \in E'_{U^o} \;\; \mu - \text{a.e. y } \; p_{U^o} g \in \Lambda^{\times}.$$

Demostración:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sean $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $H \subset \Lambda^{\times}$ un disco cerrado y normal tales que

$$|T(f)| \leq \sup\left\{\int qf|h| \; d\mu : h \in H\right\} \quad \forall f \in \Lambda\{E\}.$$

Siendo $U := \{x \in E : q(x) \leq 1\}$ si

$$\mu\left\{t \in \Omega : g(t) \notin E'_{U^o}\right\} > 0$$

podemos obtener un compacto $K \subset \Omega$ de forma que $g(K)$ no corta a E'_{U^o} y

$$g : K \to E'_b \text{ es continua.}$$

Teniendo en cuenta el lema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función simple–Borel $s_n : K \to U \subset E$ tal que puntualmente se verifica en K

$$\langle s_n, g\rangle > n$$

con lo cual tenemos la contradicción

$$\begin{aligned} n\mu(K) \leq T(s_n) &= \int \langle s_n, g\rangle \; d\mu \\ &\leq \sup\left\{\int qs_n|h| \; d\mu : h \in H\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int \chi_K |h| \; d\mu : h \in H\right\} = p_{H^o}\left(\chi_K\right). \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Basta tener en cuenta que puntualmente se verifica

$$\langle f,g\rangle \leq p_{_U}f\ p_{_{U^o}}g.$$

■

2.6.9 Corolario *Si E es casi-tonelado y E'_b es fundamentalmente $\Lambda^{\times}-$acotado, entonces $\Lambda\{E\}^{\times} = \Lambda^{\times}\{E'_b\} \subset \Lambda\{E\}'$.*

DEMOSTRACIÓN:

Dada una función $g \in \Lambda^{\times}\{E'_b\}$, teniendo en cuenta los Lemas 2.6.5 y 2.6.8, tenemos que la aplicación lineal asociada $T_g : \Lambda\{E\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_g(f) := \int \langle f,g\rangle \ d\mu$$

es continua considerando sobre $\Lambda\{E\}$ la topología normal y, por tanto, respecto a cualquier $\mathcal{M}-$topología. ■

En el espacio Ω consideremos una sucesión fundamental de compactos (Ω_n).

2.6.10 Lema *Sea Λ dotado de cierta $\mathcal{M}-$topología tal que*

$$t(\mathcal{M}) \leq m\left(\Lambda, \Lambda^{\times}\right).$$

(equivalentemente, respecto a $t(\mathcal{M})$ se verifica

$$\lim_{\mu(A)\to 0} g\chi_{_A} = 0 \qquad \lim_n g\chi_{\Omega_n} = g \qquad \forall g \in \Lambda).$$

Siendo $u \in \Lambda\{E\}'$, la función de conjunto $m : \mathcal{R} \to E'$ definida por

$$\langle x, m(A)\rangle := u\left(x\chi_{_A}\right) \quad x \in E,$$

es una medida vectorial $\mu-$continua de variación acotada sobre los compactos de Ω.

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que la aplicación $u : \Lambda\{E\} \to \mathbb{R}$ es lineal y continua, existen $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $H \subset \Lambda^{\times}$ normal y $s(\Lambda^{\times}, \Lambda)$ –acotado de forma que para $f \in \Lambda\{E\}$

$$|u(f)| \leq \sup\left\{\int |\alpha| qf \; d\mu : \alpha \in H\right\}$$

Puesto que $L_c^{\infty}(\mu) \subset \Lambda$, para cada $x \in E$ y cada $A \in \mathcal{R}$, $x\chi_{_A}$ está en $\Lambda\{E\}$ y

$$\begin{aligned} |\langle x, m(A)\rangle| &= \left|u\left(x\chi_{_A}\right)\right| \leq \sup\left\{\int_A |\alpha| q(x) \; d\mu : \alpha \in H\right\} \\ &= q(x) \sup\left\{\int_A |\alpha| \; d\mu : \alpha \in H\right\} \end{aligned}$$

es decir, $m(A) \in E'$. Ahora, para cada disco $B \subset E$ se verifica

$$p_{_{B^o}} m(A) \leq \sup\{q(x) : x \in B\} \sup\left\{\int_A |\alpha| \; d\mu : \alpha \in H\right\}$$

Sea $A \in \mathcal{R}$, sea $\pi := \{A_1, \ldots, A_n\}$ una partición medible finita de A y sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto de B con el mismo número de elementos, iguales o distintos, que π. Se verifica

$$\begin{aligned} \sum_i \langle x_i, m(A_i)\rangle &= \sum_i u\left(x_i\chi_{_{A_i}}\right) = u\left(\sum_i x_i\chi_{_{A_i}}\right) \\ &\leq \sup\left\{\int |\alpha| q\left(\sum_i x_i\chi_{_{A_i}}\right) \; d\mu : \alpha \in H\right\} \\ &= \sup\left\{\int |\alpha| \sum_i q(x_i)\chi_{_{A_i}} \; d\mu : \alpha \in H\right\} \\ &\leq \sup\{q(x) : x \in B\} \sup\left\{\int |\alpha| \sum_i \chi_{_{A_i}} \; d\mu : \alpha \in H\right\} \\ &= \sup\{q(x) : x \in B\} \sup\left\{\int_A |\alpha| \; d\mu : \alpha \in H\right\} \\ &= \sup\{q(x) : x \in B\} \; p_{_{H^o}}\left(\chi_{_A}\right) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sum_\pi p_{_{B^o}} m(A_i) \leq \sup\{q(x) : x \in B\} \; p_{_{H^o}}\left(\chi_{_A}\right) \tag{2.6.2}$$

es decir, la $p_{_{B^o}}$–variación de m sobre A es finita y está acotada por el segundo miembro de (2.6.2). Admás, considerando conjuntos medibles $C \subset A$ tenemos

$$\lim_{\mu(C)\to 0} |m|_{_{B^o}}(C) = 0$$

y por tanto m es μ–continua sobre A. Veamos que también es σ–aditiva (sobre los compactos). Si (A_n) es una sucesión en $\mathcal{R}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos tales que $A := \cup_n A_n$ está en $\mathcal{R}$, se tiene que

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\right) = 0$$

y para cada disco $B \subset E$, puesto que $\chi_{_A} \in \Lambda(A \in \mathcal{R})$, tenemos

$$\lim_n p_{_{B^o}}\left(m(A) - m\left(\bigcup_1^n A_i\right)\right) = \lim_n p_{_{B^o}} m\left(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\right)$$
$$\leq \lim_n \sup\left\{\int_{\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i} |\alpha|\ d\mu : \alpha \in H\right\} \sup\{q(x) : x \in B\}$$
$$\lim_n p_{_{H^o}}\left(\chi_{_A}\chi_{_{\bigcup_{n+1}^{\infty}}}\right) \sup\{q(x) : x \in B\} = 0$$

■

2.6.11 Lema *Sea $g \in L^1_{loc}\{E'_b\}$ y sea $T_g : S_c(E) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$T_g(s) := \int \langle s, g\rangle\ d\mu$$

En las hipótesis del lema anterior, si T_g es continua para la topología $t(\mathcal{M})$, entonces $g \in \Lambda\{E\}^{\times}$.

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que en las hipótesis sobre Λ, $S_c(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$, podemos extender T_g a $\Lambda\{E\}$ de forma continua. Comprobemos que $\langle f, g\rangle \in L^1(\mu)$ para cada

$f \in \Lambda\{E\}$.
Puesto que g es μ−medible, podemos obtener una sucesión creciente (K_n) de compactos de Ω, de forma que

$$\Omega = \bigcup_n K_n \cup N \quad \text{con} \quad \mu(N) = 0 \quad \text{y} \quad g : K_n \to E'_b \text{ continua.}$$

Por otra parte, puesto que T_g es continua, existen $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $H \in \mathcal{M}$ tales que

$$|T_g(f)| \leq \sup\left\{\int |\alpha| qf \; d\mu : \alpha \in H\right\}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la aplicación lineal $T_n : \Lambda\{E\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_n(f) := \int \left\langle f, g\chi_{K_n} \right\rangle \; d\mu$$

es continua, pues $g\chi_{K_n}$ está en $L_c^\infty(\mu)$. Además coincide con T_g sobre las funciones $f \in \Lambda\{E\}$ con soporte en K_n. Para cada $f \in \Lambda\{E\}$ tenemos que probar que $\langle f, g \rangle \in L^1(\mu)$.

Puesto que Λ es normal y $f \in \Lambda\{E\}$, la función definida puntualmente por

$$f_1 := signo(\langle f, g \rangle) f$$

está en $\Lambda\{E\}$ y $|\langle f, g \rangle| = \langle f_1, g \rangle$. Además, para cada $n = 1, 2, \ldots$ se verifica

$$\begin{aligned} T_n(f_1) &= \int \left\langle f_1, g\chi_{K_n} \right\rangle \; d\mu = \int |\left\langle f, g\chi_{K_n} \right\rangle| \; d\mu \\ &\leq \sup\left\{\int |\alpha| qf \; d\mu : \alpha \in H\right\} \end{aligned}$$

y aplicando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\langle f_1, g \rangle \in L^1(\mu)$$

y por tanto $\langle f, g \rangle$ también está en $L^1(\mu)$. ■

2.6.12 Proposición *En las hipótesis del Lema 2.6.10 sobre Λ, si E'_b tiene la propiedad de Radon–Nikodym respecto a μ, entoces se verifica que*

$$\Lambda\{E\}' \subset \Lambda\{E\}^\times .$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $u \in \Lambda\{E\}'$ y sea $m : \mathcal{R} \to E'$ la función de conjunto asociada a u es decir

$$m(A)(x) := u\left(x\chi_{A}\right).$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.6.10, m es una medida vectorial μ–continua y de variación acotada sobre los compactos de Ω. Siendo $g \in L^1_{loc}\{E'_b\}$ la densidad de m, la aplicación lineal asociada

$$T_g : s \in S_c(E) \to T_g(s) := \int \langle s, g\rangle \ d\mu$$

coincide con u sobre $S_c(E)$ y por tanto es continua respecto a la topología que éste hereda de $\Lambda\{E\}$. Aplicando el lema anterior tenemos que $g \in \Lambda\{E\}^{\times}$.

■

2.6.13 Corolario *Si* $(\Lambda, t(\mathcal{M}))' = \Lambda^{\times}$ *y se verifica*

(1) E es casi–tonelado.

(2) E'_b *es fundamentalmente* $\Lambda^{\times}$*–acotado y tiene la RNP(*μ*).*

entonces

$$\Lambda\{E\}^{\times} = \Lambda^{\times}\{E'_b\} = \Lambda\{E\}'.$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar el Corolario 2.6.9 y la Proposición 2.6.12

■

Observaciones

Con la identificación que hacemos de elementos de $\Lambda\{E\}'$ con elementos de $\Lambda^{\times}\{E'_b\}$, para obtener ciertas inclusiones concretas tales como

$$L^1_{loc}\{E\}' \subset L^{\infty}_c\{E'_b\}$$

no parece imprescindible suponer que E'_b tenga la RNP(μ) tal y como la hemos definido; bastaría poder representar, como elementos de $L^1_{loc}\{E'_b\}$, no todas las medidas

$$m : \mathcal{R} \longrightarrow E'_b$$

que sean $\mu-$continuas y de variación acotada sobre los compactos de Ω, sino de éstas, las que además tengan rango $\mu-$ponderado localmente acotado, es decir, de forma que podamos descomponer $\Omega = \bigcup A_n$ siendo cada A_n de medida positiva y tal que cada

$$\left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : A \subset A_n,\ A \in \mathcal{R},\ \mu(A) \neq 0\right\}$$

es acotado en E'_b.

Cuando un espacio E tiene la propiedad (B) de Pietsch, según se deduce del Lema 1.5.11, toda medida

$$m : \mathcal{R} \longrightarrow E$$

que sea $\mu-$continua y de variación acotada sobre los compactos tiene rango $\mu-$ponderado localmente acotado.

Si nuestra propiedad de Radon–Nikodym consistiera en representar las medidas citadas, no podríamos garantizar $\Lambda\{E\}' \subset \Lambda\{E\}^{\times}$ para todos los espacios Λ considerados. En cualquier caso tenemos

2.6.14 Proposición *Consideremos los espacios Λ, dotados de las topologías normales*

$$t(\mathcal{M}) \leq m\left(\Lambda, \Lambda^{\times}\right)$$

Si E es casi–tonelado y E'_b tiene la propiedad (B) de Pietsch, son equivalentes

(1) E'_b *tiene la RNP*(μ).

(2) $\Lambda\{E\}' \subset \Lambda^\times\{E'_b\}$ *para cualquier* Λ.

(3) $\Lambda\{E\}' \subset \Lambda^\times\{E'_b\}$ *para algún* Λ.

(4) $L^1_{loc}\{E\}' \subset L^\infty_c\{E'_b\}$.

(5) $L^1\{E\}' \subset L^\infty\{E'_b\}$ *(es decir* $L^1\{E\}' = L^\infty\{E'_b\}$*)*.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Basta aplicar las Proposición 2.6.12.

(2) $\Longrightarrow$ (3) No hay nada que demostrar.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Siendo $J : \Lambda\{E\} \to L^1_{loc}\{E\}$ la inclusión canónica, para cada

$$u \in L^1_{loc}\{E\}'$$

la composición uJ está en $\Lambda\{E\}'$ y por tanto existe $g \in \Lambda^\times\{E'_b\}$ de forma que

$$u(f) = u(J(f)) = \int \langle f, g\rangle \, d\mu \qquad \forall f \in \Lambda\{E\}.$$

Puesto que u es lineal y continua sobre $L^1_{loc}\{E\}$, existen un compacto $K \subset \Omega$ y una seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$ tales que

$$|u(f)| \leq \int_K qf \, d\mu \qquad \forall f \in L^1_{loc}\{E\}$$

y, en particular, para cada $A \in \mathcal{R}$ y cada

$$x \in U := \{x \in E : q(x) \leq 1\} \in \mathcal{U}(E)$$

tenemos

$$|u(x\chi_A)| = |\left\langle x, \int_A g \, d\mu \right\rangle| \leq q(x)\mu(A \cap K) \leq \mu(A \cap K).$$

Por tanto, para cada $A \in \mathcal{R}$ se verifica

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A g \, d\mu \in U^\circ$$

y aplicando el Lema 1.4.3 obtenemos

$$\begin{array}{lll} g(t)=0 & \mu-\text{a.e.} & \text{en } \Omega\setminus K \\ g(t)\in U^{o} & \mu-\text{a.e.} & \text{en } K. \end{array}$$

Así pues, $g \in L_c^{\infty}\{E_b'\}$.

Puesto que las aplicaciones lineales y continuas definidas sobre $L_{loc}^1\{E\}$ por u y por $\int\langle f,g\rangle\ d\mu$ coinciden sobre el subespacio denso $S_c(E)$, coinciden sobre todo el espacio.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Sigue las mismas lineas que $3 \Rightarrow 4$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Teniendo en cuenta el Corolario 1.5.12, puesto que E_b' tiene la propiedad (B) de Pietsch, bastará probar que todo operador continuo

$$T: L^1(\mu)\rightarrow E_b'$$

es representable. Sea $u: S_c(E)\rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida mediante

$$u(s)=u(\sum_i x_i\chi_{A_i}) := \sum_i \left\langle x_i, T(\chi_{A_i})\right\rangle$$

siendo $s=\sum_i x_i\chi_{A_i}\in S_c(E)$ con los A_i disjuntos dos a dos. Considerando sobre $S_c(E)$ la topología de $L^1\{E\}$, comprobemos que la aplicación lineal u es continua. La imagen, mediante T, de la bola unidad de $L^1(\mu)$ es un acotado en E_b' y por tanto es equicontinuo por ser E casi–tonelado. Sea $U\in\mathcal{U}(E)$ tal que U^o contiene a dicho acotado. Se verifica entonces

$$\begin{aligned} |u(s)| &\leq \sum_i \left|\left\langle x_i, T(\chi_{A_i})\right\rangle\right| \leq \sum_i p_U(x_i)p_{U^o}(T(\chi_{A_i})) \\ &= \sum_i p_U(x_i)\mu(A_i)p_{U^o}(T(\frac{1}{\mu(A_i)}\chi_{A_i})) \leq \sum_i p_U(x_i)\mu(A_i) = \|p_U s\|_1 \end{aligned}$$

y por tanto u es continua. Denotemos también por u su extensión lineal y continua a $L^1\{E\}$. Aplicando la hipótesis, existe $g\in L^{\infty}\{E_b'\}$ tal que

$$u(f)=\int\langle f,g\rangle\ d\mu \quad \forall f\in L^1\{E\}.$$

Sólo queda comprobar que esta g representa al operador T considerado inicialmente, i.e. que para cada $\alpha\in L^1(\mu)$

$$T(\alpha)=\int \alpha g\ d\mu.$$

Para comprobar esto bastará comprobarlo para las funciones simples de soporte compacto, pues estas son densas en $L^1(\mu)$ y los dos miembros de la igualdad anterior definen operadores continuos sobre $L^1(\mu)$. Por linealidad bastará probar que para cada $A \in \mathcal{R}$ se verifica

$$T(\chi_A) = \int_A g \, d\mu.$$

Para cada $A \in \mathcal{R}$ y cada $x \in E$ puesto que existe $\int_A g \, d\mu \in E'$, tenemos

$$u(x\chi_A) = \left\langle x, T(\chi_A) \right\rangle = \int \left\langle x\chi_A, g \right\rangle \, d\mu = \left\langle x, \int g\chi_A \, d\mu \right\rangle$$

y por tanto

$$T(\chi_A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{para cada} \quad A \in \mathcal{R}$$

∎

Observaciones

(1) Nótese que en el teorema anterior la hipótesis

- E'_b verifica la propiedad (B) de Pietsch.

sólo se han utilizado en la implicación $(5) \Rightarrow (1)$.

(2) En (5) la inclusión indicada es equivalente a la igualdad por ser fundamentalmente $L^\infty(\mu)-$acotado cualquier espacio localmente convexo (2.6.6). Para que la inclusión dada en (4) sea equivalente a la igualdad, bastará suponer que E'_b es fundamentalmente $L^\infty_c(\mu)-$acotado o, lo que es lo mismo (Proposición 2.4.7), que es fundamentalmente $\varphi-$acotado.

(3) Si suponemos que E'_b es fundamentalmente $\Lambda^\times-$acotado, en (2) y (3) las inclusiones indicadas son equivalentes a la igualdad y el teorema es una generalización del resultado clásico, referido a $L^p(E)$, con E un espacio de Banach ([30, Th. 4.1.1]): Siendo $1 \leq p < \infty$ y q el exponente conjungado de p se verifica:

$L^p(E)' = L^q(E')$ si y sólo si E' verifica la propiedad de Radon–Nikodym respecto a μ.

Asimismo es una generalización del correspondiente resultado para espacios $\Lambda(E)$ con E normado, [41, Th. 1].

2.7 Condiciones de tonelación.

En los resultados de la sección anterior hemos considerado las relaciones existentes entre los espacios

$$\Lambda\{E\}^{\times} \qquad \Lambda^{\times}\{E_b'\} \qquad \Lambda\{E\}'.$$

De estas relaciones obtendremos la coincidencia de estos tres espacios bajo ciertas condiciones. En este caso, al quedar caracterizado el dual de $\Lambda\{E\}$ como $\Lambda^{\times}\{E_b'\}$ bajo la identificación

$$T \in \Lambda\{E\}' \longleftrightarrow g \in \Lambda^{\times}\{E_b'\}$$
$$T(f) = \int \langle f, g\rangle \; d\mu$$

podemos estudiar la relación que hay entre la topología fuerte $b\Big(\Lambda\{E\}', \Lambda\{E\}\Big)$ y la topología de $\Lambda^{\times}\{E_b'\}$ asociada a la topología fuerte $b(\Lambda^{\times}, \Lambda)$. Denotaremos la primera por b y la segunda por β. Tenemos los sistemas fundamentales de entornos de 0

(1) en $\Big(\Lambda\{E\}', b\Big)$

$$\{M^o : M \subset \Lambda\{E\} \;\; \text{es un disco cerrado}\;\}$$

(2) en $(\Lambda^{\times}\{E_b'\}, \beta)$

$$\{\; [H^o, B^o] \;\}$$

donde H recorre los subconjuntos $s(\Lambda, \Lambda^{\times})-$acotados absolutamente convexos normales, B recorre los discos cerrados de E y

$$\begin{aligned} [H^o, B^o] &= \Big\{g \in \Lambda^{\times}\{E_b'\} : p_{B^o} g \in H^o\Big\} \\ &= \Big\{g \in \Lambda^{\times}\{E_b'\} : \sup\{\int |\alpha| p_{B^o} g \; d\mu : \alpha \in H\} \le 1\Big\} \end{aligned}$$

2.7.1 Teorema *Consideremos sobre $\Lambda\{E\}$ la topología definida por la topología fuerte $b(\Lambda, \Lambda^{\times})$ y la topología de E. Si se verifican*

(1) E es casi-tonelado y E_b' tiene la RNP(μ).

(2) El dual de Λ dotado de la topología fuerte $b(\Lambda, \Lambda^\times)$ es $\Lambda^\times$.

(3) E_b' es fundamentalmente $\Lambda^\times-$acotado.

entonces

$$(a) \quad \Lambda^\times \{E_b'\} = \Lambda \{E\}^\times = \Lambda \{E\}'$$

y si además

(4) E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado,

también se verifica

$$(b) \quad b\left(\Lambda \{E\}', \Lambda \{E\}\right) = \beta\left(\Lambda^\times \{E_b'\}, b(\Lambda^\times, \Lambda)\right)$$

DEMOSTRACIÓN:

(a) Se deduce inmediatamente del Corolario 2.6.13 aplicado a la topología fuerte $b(\Lambda, \Lambda^\times)$.

(b) Probemos en primer lugar que $b \leq \beta$. Las seminormas de un sistema fundamental para la topología b son del tipo

$$r_M(g) := \sup\left\{\left| \int \langle f, g\rangle \; d\mu \right| : f \in M\right\}$$

donde M recorre la familia de los discos cerrados de $\Lambda\{E\}$. Teniendo en cuenta (4), dado un conjunto M existen un disco cerrado $B \subset E$ y un subconjunto acotado y normal $R \subset \Lambda$, de forma que

$$\begin{aligned} & f(t) \in E_B \quad \mu-\text{a.e. para cada} \quad f \in M. \\ & \left\{p_B f : f \in M\right\} \subset R. \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} r_M(g) &\leq \sup\left\{\int | \langle f, g\rangle | \; d\mu : f \in M\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int |\alpha| p_{B^o} g \; d\mu : \alpha \in R\right\}. \end{aligned}$$

Puesto que el último miembro de la expresión anterior define una seminorma $\beta-$continua tenemos que $b \leq \beta$.

Probemos que $\beta \leq b$. Sea $B \subset E$ un disco cerrado, sea $H \subset \Lambda$ un disco normal y sea la seminorma $\beta-$continua asociada

$$p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) := \sup\left\{\int |\alpha| p_{B^o} g \, d\mu : \alpha \in H\right\}$$

Comprobaremos que siendo $M := [H, B]$ se verifica

$$p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) \leq r_M(g) \qquad \forall g \in \Lambda^\times \{E_b'\}.$$

Para cada $g \in \Lambda^\times \{E_b'\}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $\alpha \in H$ tal que

$$p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) < \varepsilon + \int |\alpha| p_{B^o} g \, d\mu.$$

Por otra parte, puesto que g es $\mu-$medible, existe una sucesión de compactos (K_n) de Ω tales que

$$\Omega = \bigcup_n K_n \cup N \text{ con } \mu(N) = 0$$

$$g : K_n \to E_b' \quad \text{y} \quad p_{B^o} g : K_n \to \mathbb{R} \text{ son continuas.}$$

Aplicando el Lema 2.3.5(2), dado $\delta_n > 0$ arbitrario existe una función simple–Borel $s : K_n \to B$ de forma que en K_n se verifica puntualmente

$$p_{B^o} g \leq \langle s_n, g\rangle + \delta_n$$

Las funciones $s := \sum_n s_n \chi_{K_n} : \Omega \to B$ y $\delta := \sum_n \delta_n \chi_{K_n} : \Omega \to \mathbb{R}$ son $\mu-$medibles y acotadas sin más que tomar acotada la sucesión (δ_n). Además verifican

$$p_{B^o} g \leq \langle s, g\rangle + \delta \quad \mu-\text{a.e.}$$

y por tanto, considerando

$$\delta_n \leq \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^n \int_{K_n} |\alpha| \, d\mu} & \text{si} \quad \int_{K_n} |\alpha| \, d\mu \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha\chi_{K_n} = 0 \quad \mu - a.e. \end{cases}$$

y siendo $M := [H, B]$, puesto que $|\alpha| s \in M$, tenemos

$$\begin{aligned} p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) &< \varepsilon + \int |\alpha| \langle s, g\rangle \; d\mu + \int |\alpha| \delta \; d\mu \\ &\leq \varepsilon + \int \langle |\alpha| s, g\rangle \; d\mu + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon + \sup \left\{ \int |\langle f, g\rangle| \; d\mu : f \in M \right\} \end{aligned}$$

es decir

$$p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) < 2\varepsilon + r_M(g)$$

y por tanto $p_{H^o}\left(p_{B^o} g\right) \leq r_M(g)$.

■

2.7.2 Corolario *En las hipótesis (1), (2) (3) y (4) del Teorema 2.7.1 se verifica que $\Lambda\{E\}$ es casi–tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $M \subset \Lambda\{E\}'$ es b–acotado, teniendo en cuenta el Teorema 2.7.1, M es un subconjunto acotado de $\Lambda^\times \{E_b'\}$ y por ser E_b' fundamentalmente $\Lambda^\times$–acotado, existe un disco cerrado $D \subset E_b'$ y un subconjunto acotado normal $H \subset \Lambda^\times$ tales que $M \subset [H, D]$, es decir,

$$\begin{aligned} &(i) \quad \forall f \in M \qquad f(t) \in E'_D \quad \mu - \text{a.e.} \\ &(ii) \quad \left\{ p_D f : f \in M \right\} \text{ es acotado en } \Lambda^\times. \end{aligned}$$

Puesto que E es casi–tonelado y Λ es tonelado, existen entornos de 0, U en E y G en Λ, tales que

$$H \subset G^o \qquad D \subset U^o$$

y por tanto,

$$M \subset [G^o, U^o] = [G, U]^o$$

y M es equicontinuo. ■

2.7.3 Corolario *En las hipótesis (1), (2), (3) y (4) del Teorema 2.7.1, si Λ es perfecto y E es localmente completo, $\Lambda\{E\}$ es tonelado.*

Podemos estudiar la tonelación de $\Lambda\{E\}$ desde un punto de vista distinto al de la representación de su dual como $\Lambda^{\times}\{E'_b\}$.

En [29] se demuestra que si F es casi–tonelado y verifica una determinada condición que enunciaremos, entonces es tonelado. En el citado trabajo, siendo (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo, se adopta la siguiente definición

2.7.4 Definición *[29]*

Se dice que una familia $P_{\Sigma} = \left\{P_A : A \in \Sigma\right\}$ de proyecciones lineales continuas en F es un (Ω, Σ, μ)-álgebra de Boole de proyecciones si se verifica

(1) P_{Ω} es la identidad en F.

(2) Si $\mu(A) = 0$, entonces $P_A = 0$.

(3) $P_{A\cap B} = P_A P_B$ si $A, B \in \Sigma$.

(4) $P_{A\cup B} = P_A + P_B$ si $A, B \in \Sigma$ son disjuntos.

2.7.5 Teorema *[29, Corolario 2 del teorema 1]*

Si el espacio de medida no tiene átomos y F es casi–tonelado con un (Ω, Σ, μ)-álgebra de Boole de proyecciones equicontinuas que verifica la siguiente condición (*)

> *Si (A_n) es una sucesión decreciente en Ω con $\mu\left(\bigcap A_n\right) = 0$, (x_n) es una sucesión en E tal que cada x_n está soportado en A_n (es decir, $P_{A_n}(x_n) = x_n$), y $(\alpha_n) \in l^1$, entonces la serie $\sum_n \alpha_n x_n$ converge en E.*

entonces F es tonelado.

Cuando F es un espacio de funciones $\Lambda\{E\}$, dotado de una $\mathcal{M}$−topología por supuesto, el ejemplo canónico de álgebra de Boole de proyecciones equicontinuas está dado por *las secciones según los conjuntos medibles*

$$\begin{aligned} P_A : \ \Lambda\{E\} &\longrightarrow \Lambda\{E\} \\ f &\rightarrow P_A(f) := f\chi_A \end{aligned}$$

Comprobemos que $\Lambda\{E\}$ verifica la condición (*) enunciada en el teorema anterior

2.7.6 Lema *Supongamos que Λ está dotado de una cierta $\mathcal{M}$−topología con la que es localmente completo. Si (f_n) es una sucesión acotada en $\Lambda\{E\}$, (A_n) es una sucesión decreciente de conjuntos medibles tal que $\mu(\cap A_n) = 0$ y (c_n) está en l^1, la serie*

$$\sum_n c_n f_n \chi_{A_n}$$

converge en $\Lambda\{E\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $g_n := f_n\chi_{A_n}$ y sea $A_0 := \cap A_n$. Puesto que cada g_n se anula en $\Omega \setminus A_n$, para cada $t \in \Omega \setminus A_m$, la serie, en E,

$$\sum_n c_n g_n(t)$$

sólo tiene una cantidad finita de sumandos no nulos,

$$\sum_{n=1}^{m} c_n g_n(t)$$

y por tanto, puesto que $\mu(A_0) = 0$, la función

$$f : t \in \Omega \longrightarrow f(t) = \sum_n c_n g_n(t) \in E$$

está definida μ–a.e., en $\Omega \setminus A_0$. Comprobemos que $f \in \Lambda\{E\}$ y que, en $\Lambda\{E\}$, se cumple

$$f = \sum_n c_n g_n.$$

Puesto que $\mu(A_0) = 0$, la función f es límite casi–uniforme de la sucesión de funciones μ–medibles

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$$

y, teniendo en cuenta la Proposición 1.2.4, f es μ–medible.

Por otra parte, si $q \in \mathcal{Q}(E)$, tenemos puntualmente,

$$qf \leq \sum_n |c_n| q g_n$$

y, puesto que $(c_n) \in l^1$ y (qg_n) está acotada en Λ y este es localmente completo, $qf \in \Lambda$ y $f \in \Lambda\{E\}$.

Probemos por último que $f = \lim_n s_n$ en $\Lambda\{E\}$. Para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y cada $H \in \mathcal{M}$, tenemos puntualmente para cada $h \in H$,

$$q(f - s_n)|h| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |c_i| q g_i |h|$$

y por tanto, siendo

$$\rho(q, H) := \sup\left\{\sup\left\{\int q g_i |h| \, d\mu : h \in H\right\} : i = 1, 2, \ldots\right\} < +\infty$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\int q(f - s_n)|h| \, d\mu : h \in H\right\} &\leq \sup\left\{\sum_{i=n+1}^{\infty} |c_i| \int q g_i |h| \, d\mu : h \in H\right\} \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |c_i| \sup\left\{\int q g_i |h| \, d\mu : h \in H\right\} \\
&\leq \rho(q, H) \sum_{i=n+1}^{\infty} |c_i|
\end{aligned}$$

y $f = \sum c_n g_n$ en $\Lambda\{E\}$. ∎

2.7.7 Corolario *Supongamos que el espacio de medida no tiene átomos.*

(1) Si Λ *es localmente completo y* $\Lambda\{E\}$ *es casi–tonelado, entonces* $\Lambda\{E\}$ *es tonelado.*

(2) En las hipótesis (1), (2) (3) y (4) del Teorema 2.7.1 y siendo Λ *perfecto,* $\Lambda\{E\}$ *es tonelado.*

Hagamos algunas consideraciones sobre situaciones en las que podemos considerar espacios normados. Si $B \subset E$ es un disco cerrado en (E,t), sobre los subespacios de $\Lambda\{E\}$

$$\begin{aligned} \Lambda\left\{E_B\right\} &= \left\{f:\Omega\to E_B : f \text{ es } \mu\text{−medible } (p_B) \text{ y } p_B f\in\Lambda\right\} \\ \Lambda\left\{E_B, E\right\} &= \left\{f:\Omega\to E_B : f \text{ es } \mu\text{−medible } (t) \text{ y } p_B f\in\Lambda\right\} \end{aligned}$$

podemos definir una topología a partir de la topología de Λ y de la topología de la norma de E_B. Dicha topología está definida por las seminormas

$$r\left(p_B f\right)$$

cuando r recorre las seminormas continuas sobre Λ. Puesto que la μ−medibilidad respecto de la topología t verifica que si (A_n) es una sucesión disjunta de conjuntos medibles y (g_n) es una sucesión de funciones μ−medibles, entonces la función (definida puntualmente)

$$g := \sum_n g_n \chi_{A_n} \quad \text{es } \mu-\text{medible},$$

toda la demostración del Lema 2.7.6 es aplicable al espacio $\Lambda\left\{E_B, E\right\}$ y por tanto, si éste es casi–tonelado, también es tonelado. Probemos que $\Lambda\left\{E_B, E\right\}$ es casi–tonelado cuando lo es Λ.

2.7.8 Proposición *Sea* Λ *casi–tonelado y sea* $B \subset E$ *un disco cerrado. Entonces* $\Lambda\left\{E_B, E\right\}$ *es casi–tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos $\Lambda[E_B] := \Lambda\left\{E_B, E\right\}$ y sea

$$H \subset \Lambda\left[E_B\right]' \quad b\left(\Lambda\left[E_B\right]', \Lambda\left[E_B\right]\right) - \text{acotado}$$

Tenemos que probar que H es equicontinuo. Puesto que cada $f \in \Lambda\left[E_B\right]$ la podemos expresar, definiendo $\frac{0}{0} := 0$, de la forma

$$f = p_B f \cdot \frac{f}{p_B f}$$

es decir como $f = \alpha \cdot g$ donde $\alpha \in \Lambda$ y $g \in L^\infty\left[E_B\right]$ siendo $p_B g \leq 1$ puntualmente. Denotemos por U_1 a

$$U_1 := \left\{g \in L^\infty\left[E_B\right] : p_B g \leq 1 \;\; \mu - a.e.\right\}$$

Si para cada $g \in L^\infty\left[E_B\right]$ y cada $u \in H$ consideramos la aplicación lineal

$$u \otimes g : \Lambda \to \mathbb{R}$$

definida mediante $(u \otimes g)(\alpha) := u(\alpha \cdot g)$ tenemos una aplicación lineal y continua sobre Λ.

Comprobemos que $H_1 := \{u \otimes g : u \in H, g \in U_1\}$ es $b(\Lambda', \Lambda)$ −acotado.

Si C es un subconjunto acotado de Λ,

$$H_1(C) := \{\langle u, \alpha \cdot g\rangle : u \otimes g \in H_1, \alpha \in C\}$$

es acotado en $\mathbb{R}$ pues H es $b\left(\Lambda\left[E_B\right]', \Lambda\left[E_B\right]\right)$ −acotado y

$$\{\alpha \cdot g : \alpha \in C, g \in U_1\}$$

es un subconjunto acotado de $\Lambda\left[E_B\right]$.

Por tanto, H_1 es $b(\Lambda', \Lambda)$ −acotado y puesto que Λ es casi–tonelado, H_1 es equicontinuo, es decir, existe una seminorma continua r sobre Λ tal que

$$\sup\{|u \otimes g(\alpha)| : u \in H, g \in U_1\} \leq r(\alpha) \qquad \text{para cada } \alpha \in \Lambda.$$

Expresando cada $f \in \Lambda\left[E_{B}\right]$ de la forma $f = \alpha \cdot g$ con $\alpha_0 = p_{B} f \in \Lambda$ y $g_0 \in U_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sup\{|\langle u, f\rangle| : u \in H\} &\leq \sup\{|\langle u, \alpha_0 \cdot g\rangle| : u \in H, g \in U_1\} \\
&\leq r(\alpha_0) = r\left(p_{B} f\right)
\end{aligned}$$

y por tanto H es equicontinuo. ■

2.7.9 Corolario *Sea Λ normal, localmente completo y tonelado. Si el espacio de medida no tiene átomos, entonces $\Lambda\left\{E_{B}, E\right\}$ es tonelado para cada disco cerrado $B \subset E$.*

Puesto que el espacio $\Lambda\{E_{B}\}$ es un subespacio cerrado de $\Lambda\left\{E_{B}, E\right\}$, en las hipótesis del corolario anterior sobre Λ, también es tonelado el cociente

$$\Lambda\left\{E_{B}, E\right\} / \Lambda\{E_{B}\}.$$

Asímismo es tonelado el espacio $\Lambda\left\{E_{B}\right\}$ pues pueden aplicarse a este espacio las demostraciones del Lema 2.7.6 y la Proposición 2.7.8. La tonelación de los espacios $\Lambda\{E\}$ cuando E es un espacio normado está estudiada en [33] suponiendo que el espacio de medida tiene medida finita y que en el espacio Λ se verifica que

$$\lim_{\mu(A)\to 0} g\chi_{A} = 0 \qquad \forall g \in \Lambda.$$

2.8 Otras propiedades.

En términos generales, cabe decir que la mayor parte de las propiedades que se tengan para espacios de sucesiones vectoriales son traducibles, en alguna medida, a nuestros espacios de funciones $\Lambda\{E\}$. La medida en que podemos garantizar esta generalización de resultados vendrá dada por tres herramientas fundamentales:

- La integral.
- La propiedad de Radon–Nikodym.
- La fundamental acotación.

En parte de la sección anterior hemos visto un ejemplo de esta situación : Suponiendo que E'_b tiene la $RNP(\mu)$ (como sucede para cualquier espacio respecto a la medida cardinal sobre los naturales), identificamos el dual de $\Lambda\{E\}$ con $\Lambda^\times\{E'_b\}$ y, suponiendo que E'_b es fundamentalmente $\Lambda^\times-$acotado, aplicamos las hipótesis correspondientes a Λ y E. En este esquema, la integral aparece tanto en E como en E'_b, como sustituto de las coordenadas en las sucesiones, y la $RNP(\mu)$ aparece en E'_b como garantía para representar los elementos de $\Lambda\{E\}'$ como funciones de $L^1_{loc}\{E'_b\}$.

En lo que sigue estudiaremos algunas propiedades sobre $\Lambda\{E\}$ suponiendo que el espacio Λ de funciones escalares es normal y normado para una topología normal del par $(\Lambda, \Lambda^\times)$. Sin esta hipótesis también podríamos estudiar dichas propiedades según el esquema que hemos descrito en el párrafo anterior, es decir considerando sobre E'_b la propiedad de Radon–Nikodym.

La clave de los resultados que obtendremos será un lema, de carácter técnico, cuyo espíritu parece estar en todos los resultados de las mismas características referidos a otros tipos de espacios, principalmente espacios de funciones continuas con diversas topologías. Ver Hollstein [55], Schmets [90, Th. I.5.3], Bierstedt, Bonet y Schmets [4, Lema 2] y Férnandez y Florencio [38, Lema 2]. Las propiedades que estudiaremos son :

ser (DF), ser (gDF) y ser casi–normable.

Curiosamente, al igual que para otros espacios de funciones, la propiedad (df) no parece aceptar un tratamiento análogo.

Dado un espacio $\Lambda\{E\}$ denotaremos por $S\Lambda(E)$ al subespacio de $\Lambda\{E\}$ formado por las (clases de) funciones que alcanzan a lo sumo una cantidad numerable de valores, es decir

$$\begin{aligned} S\Lambda(E) &:= \Big\{f \in \Lambda\{E\} : \text{ existen } (x_n) \subset E, (A_n) \subset \Sigma \\ &\qquad \text{tales que } f = \sum_n x_n \chi_{A_n} \ \mu - \text{a.e.} \Big\} \end{aligned}$$

2.8.1 Lema *Supongamos que $S\Lambda(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$. Si $H \subset \Lambda$ es un entorno de 0 normal absolutamente convexo y cerrado en Λ, $V \subset E$ es un entorno de 0 absolutamente convexo y cerrado en E y $B \subset E$ es un disco cerrado, para cada $\delta > 0$ se verifica que*

$$[H, V + B] \subset (1 + \delta)\left([H, V] + [H, B]\right)$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f \in [H, V + B]$, es decir, sea $f \in \Lambda\{E\}$ tal que $p_{V+B} f \in H$. Puesto que $S\Lambda(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$, dado el entorno de 0 en $\Lambda\{E\}$

$$\frac{\delta}{2}[H, V]$$

existe $s \in S\Lambda(E)$ tal que

$$f - s \in \frac{\delta}{2}[H, V]$$

Siendo $U := V + B$, se verifica puntualmente

$$\begin{aligned} p_U s &\leq p_U(s - f) + p_U f \\ &\leq p_V(s - f) + p_U f \in \frac{\delta}{2} H + H = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) H \end{aligned}$$

y puesto que H es normal,

$$p_{_U} s \in \left(1+\frac{\delta}{2}\right) H.$$

Por otra parte, siendo

$$s := \sum x_i \chi_{_{A_i}} \quad , \text{ con } \; A_i \in \Sigma \text{ disjuntos dos a dos}$$

se tiene que $p_{_U} s = \sum p_{_U}(x_i)\chi_{_{A_i}}$. Por ser U cerrado y absolutamente convexo, $x_i \in p_{_U}(x_i)U$, con lo cual podemos expresar cada x_i en la forma

$$x_i = p_{_U}(x_i)\,(b_i + v_i) \;\text{ con }\; v_i \in V \text{ y } \; b_i \in B$$

Las funciones definidas mediante

$$s_1 := \sum p_{_U}(x_i) v_i \chi_{_{A_i}} \qquad s_2 := \sum p_{_U}(x_i) b_i \chi_{_{A_i}}$$

están en $S\Lambda(E)$ pues si $q \in \mathcal{Q}(E)$, siendo $C_q := \sup\{q(b) : b \in B\}$, se verifica puntualmente

$$q s_2 = \sum p_{_U}(x_i) q(b_i) \chi_{_{A_i}} \leq C_q \; p_{_U} s \in \Lambda$$

y $qs_1 = qs - qs_2$ también está en Λ. Además verifican

$$(i) \quad p_{_V} s_1 \leq p_{_U} s.$$

$$(ii) \quad \text{Si} \;\; t \in \Omega, \; s_2(t) \in E_{_B} \;\text{ y }\; p_{_B} s_2 \leq p_{_U} s.$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
s_1 &\in \left[\left(1+\frac{\delta}{2}\right) H, V\right] = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)[H,V] \\
s_2 &\in \left[\left(1+\frac{\delta}{2}\right) H, B\right] = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)[H,B] \\
f &= s_1 + s_2 + (f - s) \in \left(1+\frac{\delta}{2}\right)([H,V]+[H,B]) + \frac{\delta}{2}[H,V] \\
&\subset (1+\delta)\,([H,V]+[H,B])
\end{aligned}$$

■

2.8.2 Lema *Supongamos que $S\Lambda(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$. Si $H \subset \Lambda$ es un entorno de 0 normal absolutamente convexo y cerrado en Λ, $V \subset E$ es un entorno de 0 absolutamente convexo y cerrado en E y $B_1, \ldots, B_n$ son subconjuntos de E absolutamente convexos y cerrados, para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que*

$$\left[H, V + \sum_{i=1}^{n} B_i\right] \subset (1+\varepsilon)\left([H,V] + \sum_{i=1}^{n} [H, B_i]\right)$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar el lema anterior repetidamente con $\delta > 0$ de forma que

$$(1+\delta)^n \leq 1 + \varepsilon.$$

■

2.8.3 Lema *Sea R la bola unidad de Λ y sean $B, C \subset E$ tales que*

$$[R, B] \subset [R, C]$$

entonces $B \subset C$.

DEMOSTRACIÓN:

Si $x \in B$, basta considerar un conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, y aplicar la hipótesis a

$$f := \frac{1}{\|\chi_A\|} x \chi_A \in [R, B]\,.$$

■

2.8.4 Teorema *Supongamos que $S\Lambda(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$. Se verifican:*

(1) Si E es casi–normable, entonces $\Lambda\{E\}$ también lo es.

(2) Si E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado, en (1) se tiene la equivalencia.

Demostración:

(1) Sea R la bola unidad de Λ. Dado un entorno $[R,U]$ de 0 en $\Lambda\{E\}$, tenemos que probar que existe un entorno $[R,V_1]\subset[R,U]$ de 0 de forma que para cada $\lambda>0$ existe un acotado $M\subset\Lambda\{E\}$ tal que

$$[R,V_1]\subset M+\lambda[R,U]. \tag{2.8.1}$$

Puesto que E es casi–normable y U es un entorno de 0 en E existe $V\in\mathcal{U}(E)$ tal que

$$\forall\rho>0\ \exists B_\rho\subset E \text{ acotado}: V\subset B_\rho+\rho U$$

con lo cual tomando $\varepsilon=1$ en el Lema 2.8.1 obtenemos

$$[R,V]\subset[R,B_\rho+\rho U]\subset 2\left([R,B_\rho]+\rho[R,U]\right)$$

Considerando $V_1:=\frac{1}{2}V$ tenemos (2.8.1).

(2) Si U es un entorno de 0 en E, puesto que $\Lambda\{E\}$ es casi–normable, existe $V\in\mathcal{U}(E)$ tal que

$$\forall\rho>0\quad\exists H_\rho\subset\Lambda\{E\}\quad\text{acotado}\quad:[R,V]\subset H_\rho+\rho[R,U].$$

Por otra parte, al ser E fundamentalmente $\Lambda-$acotado, existe $B_\rho\subset E$ acotado tal que $H_\rho\subset\left[R,B_\rho\right]$ y, por tanto,

$$[R,V]\subset\left[R,B_\rho\right]+\rho[R,U]\subset\left[R,B_\rho+\rho U\right].$$

Aplicando el lema anterior tenemos el resultado

$$V\subset B_\rho+\rho U.$$

■

2.8.5 Teorema *Supongamos que $S\Lambda(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$. Se verifican:*

(1) Si E es un espacio (DF)(resp.(gDF)), entonces $\Lambda\{E\}$ también lo es.

(2) Si E es fundamentalmente $\Lambda-$acotado, en (1) se tiene la equivalencia.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Puesto que en ambos casos E es un espacio (df), teniendo en cuenta el Teorema 2.3.9, $\Lambda\{E\}$ tiene una sucesión fundamental de acotados que viene dada por

$$[R, B_n] := \left\{f \in \Lambda\{E\} : f(t) \in E_{B_n} \ \mu - \text{a.e. y} \quad p_{B_n} f \in R\right\}$$

siendo R la bola unidad cerrada de Λ y (B_n) una sucesión fundamental de acotados de E que podemos suponer creciente. También podemos suponer que los B_n son absolutamente convexos y cerrados.

(a) **Caso (DF)**. Tenemos que probar que $\Lambda\{E\}$ es $\aleph_0-$casi–tonelado, es decir que:

Si (W_n) es una sucesión de entornos de 0 en $\Lambda\{E\}$, absolutamente convexos y cerrados y $W := \bigcap_n W_n$ es bornívoro, entonces W es entorno de 0 en $\Lambda\{E\}$.

Puesto que W_n es entorno de 0, existe $V_n \in \mathcal{U}(E)$ absolutamente convexo cerrado, con funcional de Minkowski q_n, tal que

$$[R, V_n] := \{f \in \Lambda\{E\} : \|q_n f\| \leq 1\} \subset \frac{1}{2} W_n.$$

Además, puesto que W es bornívoro, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n > 0$ de forma que

$$r_n [R, B_n] \subset \frac{1}{2^{n+1}} W$$

y por tanto para cada n se verifica

$$r_1 [R, B_1] + \ldots + r_n [R, B_n] \subset \frac{1}{2} W.$$

Consideremos los entornos de 0 en E definidos por

$$U_n := \frac{1}{2}\left(V_n + \sum_{i=1}^{n} r_i B_i\right)$$

y sea $U = \bigcap U_n$. Probaremos que U es bornívoro y por tanto será entorno de 0. Bastará probar que U absorbe a cada B_m.

Fijado $m \in \mathbb{N}$, para cada $n = 1, 2, \ldots, m-1$ existe $\lambda_n > 0$ tal que $B_m \subset \lambda_n U_n$. Por otra parte, para $n = m, m+1, \ldots,$

$$B_m \subset \frac{2}{r_m} U_n.$$

Siendo

$$\alpha_m := \max\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \frac{2}{r_m}\right\} > 0$$

tenemos $B_m \subset \alpha_m U$ y U absorbe a B_m.

Probemos por último que $[R, U] \subset W$ con lo cual W será entorno de 0 en $\Lambda\{E\}$.

Si $f \in [R, U]$, para cada $n \in \mathbb{N}, f \in [R, U_n]$ y por tanto aplicando el Lema 2.8.2 con $\varepsilon = 1$ podemos expresar f de la forma

$$f := g + \sum_{i=1}^{n} r_i g_i$$

donde

$$g \in (1+\varepsilon)\left[R, \frac{1}{2}V_n\right] = [R, V_n] \quad \text{y} \quad g_i \in (1+\varepsilon)\left[R, \frac{1}{2}B_i\right] = [R, B_i].$$

Por tanto, para cada $n = 1, \ldots,$ $f \in \frac{1}{2}W_n + \frac{1}{2}W \subset W_n$ y $f \in W$.

(b) **Caso (gDF).** Tenemos que probar que $\Lambda\{E\}$ es c–casi–tonelado, es decir se verifica

> Si (W_n) es una sucesión de entornos de 0 en $\Lambda\{E\}$, absolutamente convexos y cerrados tales que para cada $M \subset \Lambda\{E\}$ acotado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $M \subset \bigcap_{n > n_0} W_n$, entonces $W := \bigcap_n W_n$ es entorno de 0 en $\Lambda\{E\}$.

Puesto que cada $[R, B_i]$ es acotado, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$[R, B_i] \subset \bigcap_{n \geq n_i} W_n.$$

Podemos suponer que (n_i) es estrictamente creciente. Consideremos los entornos de 0 en $\Lambda\{E\}$ definidos por

$$G_i := \bigcap_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} W_n \qquad (n_0 = 0)$$

con los cuales se verifica $[R, B_i] \subset \bigcap_{n \geq i} G_n$.

Para cada $n = 1, 2, \ldots$ sea $V_n \in \mathcal{U}(E)$ absolutamente convexo cerrado de forma que

$$[R, V_n] \subset \frac{1}{4} G_n$$

y sea $U_n := V_n + B_n$. Al igual que en el caso (a), probemos que $U := \bigcap U_n$ es entorno de 0 en E para lo cual bastará probar que cada acotado B_i está contenido en alguna intersección de la forma $\bigcap_{n \geq m} U_n$. Esto último es inmediato pues si $n \geq i, B_i \subset B_n \subset U_n$. Por tanto, U es entorno de 0 en E. Probemos por último que $[R, U] \subset W$ con lo cual tendremos que W es entorno de 0 en $\Lambda\{E\}$. Si $f \in [R, U]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, f \in [R, U_i]$. Aplicando el Lema 2.8.2 con $\varepsilon = 1$ obtenemos

$$f \in 2\left([R, V_i] + [R, B_i]\right) \subset 2\left(\frac{1}{4} G_i + \frac{1}{4} G_i\right) = G_i$$

y por tanto $f \in \bigcap G_i = \bigcap W_n = W$.

(2) Siendo E fundamentalmente $\Lambda-$acotado, podemos obtener una sucesión fundamental de acotados de $\Lambda\{E\}$ de la forma

$$[R, B_n] \quad B_n \subset E \text{ acotado }.$$

Aplicando el Lema 2.8.3 tenemos que (B_n) es una sucesión fundamental de acotados de E. Para probar que E es respectivamente $\aleph_0-$casi-tonelado o $c-$casi-tonelado basta aplicar la hipótesis correspondiente sobre $\Lambda\{E\}$ y el Lema 2.8.3.

■

2.8.6 Corolario *Si E es un espacio (DF), (gDF) o casi–normable, también lo es $L^p\{E\}$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

2.8.7 Corolario *Sea E un espacio (DF) tal que E'_b tiene la RNP(μ) y sea $1 \leq p < \infty$. Se verifican:*

(1) Si E es tonelado y localmente completo, entonces $L^p\{E\}$ es un (DF) tonelado localmente completo.

(2) Si el espacio de medida no tiene átomos y E es casi–tonelado, entonces $L^p\{E\}$ es un (DF) tonelado.

DEMOSTRACIÓN:

Basta tener en cuenta los Corolarios 2.7.7 y 2.8.6 y el Teorema 2.5.6 ■

Observaciones

(1) Al ser fundamentalmente $L^\infty(\mu)-$acotado todo espacio localmente convexo, en el resultado anterior se tiene la equivalencia para $p = \infty$ y tenemos el Teorema 1 de [38]. Por supuesto suponiendo que E es fundamentalmente $L^p(\mu)-$acotado, la equivalencia en el resultado anterior se tiene para cualquier p, $1 \leq p \leq \infty$.

(2) Puesto que las propiedades consideradas ($(DF), (gDF)$, casi–normable) son estables por cocientes separados, para tener la equivalencia en los Teoremas 2.8.5 y 2.8.4 no es imprescindible que E sea fundamentalmente $\Lambda-$acotado, bastará que E sea un cociente de $\Lambda\{E\}$ y para esto basta con tener definida la integral, es decir, basta con que E sea casi–completo.

2.9 Límites inductivos numerables.

Dedicaremos esta sección a estudiar la conservación de la topología límite inductivo en los espacios $\Lambda\{E\}$ manteniendo fijo el espacio Λ. Concretamente probaremos que, dado un espacio de Banach Λ de funciones escalares en determinadas condiciones y un límite inductivo separado $E = ind\,E_n$, el límite inductivo $ind\,\Lambda\{E_n\}$ es un subespacio topológico de $\Lambda\{ind\,E_n\}$. Las citadas condiciones bajo las cuales trabajaremos podrían considerarse como la traduccion *continua* del caso *discreto.* De nuevo, jugará un papel fundamental el tipo de $\mu-$medibilidad con el que trabajamos. El desarrollo que sigue se basa en el trabajo de Bonet, Dierolf y Férnandez [14] en el cual se estudia la situación en el caso discreto. A lo largo de todo la sección Λ será un retículo de funciones normal y Banach, es decir un espacio de Banach que verifica

(1) $L^\infty_c(\mu) \subset \Lambda \subset L^1_{loc}(\mu)$, siendo las in clusiones continuas.

(2) Λ es normal y si $f, g \in \Lambda, |g| \leq |f|$ $\mu-$a.e., entonces $\|g\| \leq \|f\|$.

Además supondremos la citada propiedad traducida del caso discreto

(3) Siendo (Ω_n) una sucesión fundamental de compactos de Ω, se verifica

$$\lim_{\mu(A)\to 0} f\chi_A = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f\chi_{\Omega_n} = f \quad \forall f \in \Lambda.$$

Bajo estas condiciones, es fácil comprobar que el dual de Λ es $\Lambda^\times$ y, de forma análoga a la demostración de la Proposición 2.2.13(2), que $S_c(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$. Además

2.9.1 Lema *En las condiciones indicadas sobre Λ si (K_n) es una sucesión de compactos de Ω disjuntos dos a dos y de medida positiva, existe una función ψ_0 de la forma $\psi_0 = \sum c_n\chi_{K_n}$ con $c_n > 0$ para cada n tal que ψ_0 no está en Λ.*

DEMOSTRACIÓN:

El subconjunto de Λ

$$W := \left\{ \psi \in \Lambda : \psi = \sum_n c_n \chi_{K_n} \text{ para alguna sucesión } (c_n) \text{ en } \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio cerrado de Λ y por tanto con la norma inducida es un Banach. Si toda función de la forma $\sum c_n \chi_{K_n}$ estuviera en Λ, estaría definida la aplicación lineal

$$T : \omega \to W, \ T((c_n)) = \sum c_n \chi_{K_n}$$

y teniendo gráfica cerrada sería continua con lo cual tendríamos una norma continua sobre ω, hecho que no es cierto.

■

2.9.2 Proposición *Sea F un subespacio cerrado de E y*

$$\rho : E \to E/F$$

la sobreyección canónica. La aplicación

$$\bar{\rho} : \Lambda\{E\} \to \Lambda\{E/F\}$$

definida por $\bar{\rho}(f) = \rho f$ es abierta sobre su imagen. Si E es un Fréchet, $\bar{\rho}$ es también sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN:

Comprobemos en primer lugar que $\bar{\rho}$ está bien definida. Si f está en $\Lambda\{E\}, \rho f$ es $\mu-$medible. Veamos que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$, $\hat{q}\rho f \in \Lambda$ donde $\hat{q}$ es la seminorma cociente asociada a q

$$\hat{q}(x + F) := \inf \{q(x + y) : y \in F\}.$$

Puesto que para cada $t \in \Omega$ es

$$\hat{q}(\rho(f(t))) = \hat{q}(f(t) + F) = \inf \{q(f(t) + y) : y \in F\} \leq (qf)(t)$$

y Λ es normal, $\hat{q}\rho f$ está en Λ. Por tanto para cada $f \in \Lambda\{E\}$, $\bar{\rho}(f)$ está en $\Lambda\{E/F\}$.

Por otra parte, puesto que $S_c(E)$ es denso en $\Lambda\{E\}$ y

$$\bar{\rho}\left(S_c(E)\right) = S_c\left(E/F\right),$$

aplicando [62, 32.5(3)], sólo nos queda probar que

$$\bar{\rho} : S_c(E) \to S_c\left(E/F\right)$$

es abierta. Sea $G := \{s \in S_c(E) : \|qs\| \leq 1\}$ un entorno de 0 en $S_c(E)$ y comprobemos que se verifica

$$\bar{\rho}(G) \supset \left\{\hat{s} \in S_c\left(E/F\right) : \|\hat{q}\hat{s}\| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

con lo cual tendremos que $\bar{\rho}(G)$ es un entorno de 0 en $S_c\left(E/F\right)$. Sea

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{r}(x_i + F)\chi_{A_i} \in S_c\left(E/F\right)$$

tal que $\|\hat{q}\hat{s}\| \leq \frac{1}{2}$ y consideremos una función simple $\phi = \sum \delta_i \chi_{A_i}$ en Λ tal que $\delta_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$ y $\|\phi\| = 1$. Teniendo en cuenta la definición de $\hat{q}$, para cada $i = 1, \ldots, r$ exitirá $y_i \in F$ de forma que

$$q(x_i + y_i) < \hat{q}(x_i + F) + \varepsilon_i$$

donde $\varepsilon_i = \frac{1}{2}\delta_i > 0$. Definiendo s por

$$s := \sum_{i=1}^{r}(x_i + y_i)\chi_{A_i}$$

obtenemos $s \in S_c\left(E\right), \bar{\rho}(s) = \hat{s}$ y

$$\begin{aligned} \|qs\| &= \|\sum q\left(x_i + y_i\right)\chi_{A_i}\| \leq \|\sum\left(\hat{q}(x_i + F) + \varepsilon_i\right)\chi_{A_i}\| \\ &\leq \|\sum\left(\hat{q}(x_i + F)\right)\chi_{A_i}\| + \|\sum \varepsilon_i \chi_{A_i}\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

con lo cual $\hat{s} \in \bar{\rho}(G)$.

Si E es un espacio de Fréchet, $L^1\{E\}$ es completo y por tanto $\Lambda\{E\}$ y $\bar{\rho}(\Lambda\{E\})$ son espacios de Fréchet. Siendo este último denso en $\Lambda\{E/F\}$, ambos espacios coinciden y $\bar{\rho}$ es sobreyectiva. ∎

2.9.3 Proposición *Sea (E_n) una sucesión de espacios localmente convexos. La aplicación lineal*

$$\theta : \Lambda\left\{\bigoplus E_n\right\} \to \bigoplus \Lambda\{E_n\}$$

definida por $\theta(f) = (f_n)$ está bien definida y es un isomorfismo topológico. Por f_n denotamos la proyección de f sobre E_n, i.e. siendo $j_n : \oplus E_i \to E_n$ la proyección canónica, $f_n := j_n f$.

DEMOSTRACIÓN:

Comprobemos en primer lugar que $(f_n) \in \oplus\Lambda\{E_n\}$ para cada $f \in \Lambda\{\oplus E_n\}$, es decir, cada f_n está en $\Lambda\{E_n\}$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $f_n = 0$ $\mu - a.e.$ para cada $n > n_0$. Lo primero es cierto por ser cada $j_n : \oplus E_i \to E_n$ continua y Λ normal. Supongamos que no existe n_0 en las condiciones citadas, es decir, supongamos que para cada $i = 1, 2, \ldots$ existe $m_i > i$ tal que

$$\mu(\{t \in \Omega : f_{m_i}(t) \neq 0\}) > 0$$

Puesto que f es μ−medible, podemos obtener un compacto $K_i \subset \Omega$ de medida positiva tal que

(1) $f : K_i \to E$ es continua.

(2) $f_{m_i}(t) \neq 0$ si $t \in K_i$.

Construyamos, por recurrencia, una sucesión estrictamente creciente (n_i) en $\mathbb{N}$ y una sucesión de compactos (H_i) de Ω, de medida positiva, disjuntos dos a dos y tales que f_{n_i} no se anula en H_i.

Para $i = 1$, podemos obtener $n_1 > 1$ y un compacto H_1 de medida positiva y tal que $f : H_1 \to E$ es continua y $0 \notin f_{n_1}(H_1)$. Puesto que $f(H_1)$ es compacto, existe $m_1 \geq n_1$ tal que $f(H_1)$ es un subconjunto de una suma finita de compactos de $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$, es decir, para cada $t \in H_1$ y cada $n > m_1, f_n(t) = 0$. De la misma forma, para $i = m_1$, podemos obtener $n_2 > m_1$ y un compacto H_2 de medida positiva tales que $f : H_2 \to E$ es continua y $0 \notin f_{n_2}(H_2)$. De esto último y de ser $n_2 > m_1$ se deduce que H_1 y H_2 son disjuntos. Procediendo sucesivamente obtenemos una sucesión (n_i) en $\mathbb{N}$ y una sucesión de compactos de Ω en las condiciones indicadas.
Consideremos una función $\psi = \sum \lambda_i \chi_{H_i}$ que no esté en Λ y tal que

$$\lambda_i > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Puesto que $f_{n_i} : H_i \to E_{n_i}$ es continua, $f_{n_i}(H_i)$ es compacto y puesto que $0 \notin f_{n_i}(H_i)$, podemos separar estrictamente 0 y $f_{n_i}(H_i)$ es decir, existe una seminorma $q_{n_i} \in \mathcal{Q}(E_{n_i})$ y $\varepsilon > 0$ tales que $q_{n_i}(x) \geq \varepsilon$ para $x \in f_{n_i}(H_i)$. Sin más que multiplicar q_{n_i} por un múltiplo positivo adecuado, podemos suponer que

$$\forall x \in f_{n_i}(H_i), q_{n_i}(x) \geq \lambda_i \tag{2.9.1}$$

Sea $q : \oplus E_n \to [0, +\infty)$ definida por

$$q(x) := \sum_i q_{n_i}(x_{n_i})$$

Puesto que q es una seminorma continua sobre $\oplus E_n$ y $f \in \Lambda\{\oplus E_n\}$, tenemos que $qf \in \Lambda$ y sin embargo

$$qf \geq \sum_i qf\chi_{H_i} \geq \sum_i q_{n_i} f_{n_i} \chi_{H_i} \geq \sum_i \lambda_i \chi_{H_i}$$

en contradicción con que $\psi \notin \Lambda$.

En consecuencia, θ está bien definida y evidentemente es lineal e inyectiva. Comprobemos que es sobreyectiva. Sea $(f_n) \in \oplus_n \Lambda\{E_n\}$ arbitrario. Puesto que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0, f_n = 0$ $\mu-$a.e., la función

$$f : t \in \Omega \to f(t) := (f_n(t)) \in \oplus E_n$$

está definida μ–a.e. y es μ–medible. Si q es una seminorma continua sobre $\oplus E_n$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ podemos obtener seminormas $q_n \in \mathcal{Q}(E_n)$ tales que

$$q(x) \leq \max\{q_n(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x = (x_n) \in \oplus E_n$$

y por tanto,

$$qf \leq \max\{q_1 f_1, \ldots, q_{n_0} f_{n_0}\} \leq \sum_{i=1}^{n_0} q_i f_i \in \Lambda$$

con lo cual $qf \in \Lambda, f \in \Lambda\{\oplus E_n\}$ y $\theta(f) = (f_n)$. Puesto que cada aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Lambda\{E_n\} & \longrightarrow & \Lambda\{\oplus E_i\} \\ f_n & \longrightarrow & (0, \ldots, f_n, 0, \ldots) \end{array}$$

es continua, también lo es $\theta^{-1} : \oplus\Lambda\{E_n\} \to \Lambda\{\oplus E_n\}$.

Comprobemos por último que θ es continua. Si r es una seminorma continua sobre $\oplus\Lambda\{E_n\}$, existen seminormas continuas $\|q_n(\cdot)\|$ en $\Lambda\{E_n\}$ tales que

$$r((f_n)) \leq \max\{\|q_n f_n\| : n = 1, 2, \ldots\} \quad \forall (f_n) \in \oplus\Lambda\{E_n\}$$

y puesto que $\sum q_n f_n$ está en Λ, por reducirse a una suma finita, tenemos,

$$r((f_n)) \leq \|\sum q_n f_n\|.$$

Por tanto $r((f_n)) \leq q(f_n)$, siendo q la seminorma continua sobre $\oplus E_n$ definida por $q((x_n)) = \sum q_n(x_n)$.

■

2.9.4 Teorema *Si $E = ind\, E_n$ es un límite inductivo separado, $ind\,\Lambda\{E_n\}$ es un subespacio topológico de $\Lambda\{ind\, E_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que E es un cociente de $\oplus E_n$ la Proposición 2.9.2 nos proporciona una aplicación $\bar{\rho}_1 : \Lambda\{\oplus E_n\} \to \Lambda\{E\}$ abierta sobre su imagen. Por otra parte, puesto que $ind\,\Lambda\{E\}$ es un cociente de $\bigoplus\Lambda\{E_n\}$, tenemos una sobreyección canónica $\rho_2 : \bigoplus\Lambda\{E_n\} \to ind\,\Lambda\{E_n\}$. Siendo θ la aplicación definida por la Proposición 2.9.3 tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\Lambda\{E_n\} & \xrightarrow{\theta^{-1}} & \Lambda\{\oplus E_n\} \\ \rho_2\downarrow & & \downarrow\bar{\rho_1} \\ ind\,\Lambda\{E_n\} & \xrightarrow{\phi} & \Lambda\{ind\,E_n\} \end{array}$$

siendo ϕ la inyección canónica. Puesto que ρ_2 es continua, θ^{-1} es abierta, $\bar{\rho_1}$ es abierta sobre su imagen y el diagrama es conmutativo, ϕ es abierta sobre su imagen. Por tanto, $ind\,\Lambda\{E_n\}$ es un subespacio topológico de $\Lambda\{ind\,E_n\}$.

■

2.9.5 Corolario *Si $E = ind\,E_n$ es un límite inductivo hiperestricto, los espacios $ind\,\Lambda\{E_n\}$ y $\Lambda\{ind\,E_n\}$ coinciden algebraica y topológicamente.*

DEMOSTRACIÓN:

Teniendo en cuenta el teorema anterior sólo hay que probar la igualdad algebraica, es decir, que cada $f \in \Lambda\{E\}$ está en algún $\Lambda\{E_n\}$. Puesto que la topología de E induce sobre cada E_n la topología de E_n, bastará probar que cada función $f \in \Lambda\{E\}$ está localizada μ–a.e. en algún E_n. Puesto que E_n es cerrado en E y $f : \Omega \to E$ es μ–medible,

$$A_n := \{t \in \Omega : f(t) \notin E_n\}$$

es un conjunto medible. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que cada A_n tiene medida positiva. Construiremos una sucesión estrictamente creciente (n_i) en $\mathbb{N}$ y una sucesión de compactos (K_i) de medida positiva, disjuntos dos a dos y tales que para cada $i = 1, 2, \ldots$

(1) $f : K_i \to E$ es continua.

(2) $f(K_i)$ no corta a E_{n_i}.

Puesto que $\mu(A_1) > 0$, existe un compacto $K_1 \subset A_1$ de medida positiva y tal que $f : K_1 \to E$ es continua. Por tanto $f(K_1)$ es compacto en E y existe $n_2 > n_1$ de forma que $f(K_1) \subset E_{n_2}$. Aplicando el proceso anterior a A_{n_2} en lugar de A_1, obtenemos un compacto de medida positiva $K_2 \subset A_{n_2}$ y un índice $n_3 > n_2$ de forma que $f : K_2 \to E$ es continua y $f(K_2) \subset E_{n_3}$. Puesto que $f(K_1) \subset E_{n_2}$ y $f(K_2) \subset E \setminus E_{n_2}$, K_1 y K_2 son disjuntos. Procediendo por inducción, quedarán construidas sucesiones (n_i) y (K_i) verificando (1) y (2). Aplicando el Lema 2.9.1 a la sucesión (K_i), sea

$$\phi_0 = \sum_i \alpha_i \chi_{K_i}$$

una función estrictamente positiva sobre $\cup K_i$ que no está en Λ. Vamos a construir una sucesión (q_i) de seminormas continuas sobre E tales que $q := \sup\{q_i\}$ también es una seminorma continua sobre E y para cada $i = 1, 2, \ldots$

$$q_i f \chi_{K_i} \geq \alpha_i \chi_{K_i}.$$

Como consecuencia tendremos una contradicción :

$$qf \in \Lambda \quad \text{y} \quad qf \geq \sum_i q_i f \chi_{K_i} \geq \phi_0 \notin \Lambda.$$

Construyamos (q_i). Puesto que E_{n_i} y $f(K_i)$ son disjuntos y uno de ellos es cerrado y el otro compacto, pueden separarse estrictamente, es decir, existe $U_i \in \mathcal{U}(E)$ absolutamente convexo, de forma que $E_{n_i} + U_i$ y $f(K_i)$ son disjuntos. El funcional de Minkowsky p_i del entorno de cero $V_i = U_i + E_{n_i}$ se anula sobre E_{n_i} y es ≥ 1 sobre $f(K_i)$. Sin más que tomar $q_i = \alpha_i p_i$ tenemos una seminorma continua que se anula sobre E_{n_i} y es $\geq \alpha_i$ sobre $f(K_i)$. La función $q : E \to [0, +\infty)$ dada por

$$q(x) = \sup\{q_i(x) : i = 1, 2, \ldots\}$$

está bien definida pues si $x \in E$, existe n_j tal que si $n \geq n_j, x \in E_n$ y por tanto, para $i \geq j, q_i(x) = 0$. Evidentemente q es una seminorma. Comprobemos que es continua. Puesto que $G := \{x \in E : q(x) \leq 1\}$ es absolutamente convexo y puede expresarse como

$$G = \bigcup_j \left\{x \in E_{n_j} : q(x) \leq 1\right\} = \bigcup_j \bigcap_{i=1}^{j-1} \left\{x \in E_{n_j} : q_i(x) \leq 1\right\}$$

siendo cada

$$\bigcap_{i=1}^{j-1} \left\{x \in E_{n_j} : q_i(x) \leq 1\right\}$$

entorno de cero en E_{n_j}, aplicando [75, 0.3.2.(iv)], obtenemos que G es entorno de cero en E.

∎

2.9.6 Corolario *Si $E = ind\, E_n$ es un límite inductivo hiperestricto, entonces se verifica*

$$ind\, L^p\{E_n\} = L^p\{ind\, E_n\}$$

algebraica y topológicamente, para $1 \leq p < \infty$.

Referencias

[1] Bartle, R.G.; Dunford, N.; Schwartz, J.T. *Weak compactness and vector measures.* Canad. J. Math. **7**, pp. 289–305, (1955).

[2] Bierstedt, K.D.; Bonet, J. *Dual density conditions in (DF)-spaces I.* Resultate Math. **14**, pp. 242-274, (1988).

[3] Bierstedt, K.D.; Bonet, J. *Dual density conditions in (DF)-spaces II.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **57**, pp. 567-589, (1988).

[4] Biersted, K.D.; Bonet, J.; Schmets, J. *(DF)-spaces of type $CB(X,E)$ and $C\overline{V}(X,E)$.* Note di Math. (Por aparecer).

[5] Blondia, C. *Integration in locally convex spaces.* Simon Stevin **55** (3), pp. 81–102, (1981).

[6] Blondia, C. *A Radon–Nikodym theorem for vector valued measures.* Bull. Soc. Math. Belg. **33**, fasc. 2, sér. B, pp. 231–249, (1981).

[7] Blondia, C. *The Radon–Nikodym property in locally convex spaces.* Proceedings of the Conferences on Vector Measures and Integral Representations of Operators, and on Functional Analysis/Banach Space Geometry (Essen, 1982).Vorlesungen Fachbereich Math. Univ. Essen, 10, Essen, pp. 107–120, (1983).

[8] Blondia, C. *Locally convex spaces with Radon–Nikodym property.* Math. Nachr. **114**, pp. 335–341, (1983).

[9] Blondia, C. *The Radon–Nikodym property for locally convex Suslin spaces.* Rev. Roumanie Math. Pures Appl. **29** (9), pp. 733–738, (1984).

[10] BLONDIA, C. *The completeness of L^1_E and webbed spaces.* Simon Stevin **55** (1), pp. 93–108, (1985).

[11] BOCHNER, S.; TAYLOR, A.E. *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions.* Ann. of Math. **39** (2), pp. 913–944, (1938).

[12] BOMBAL, F. *Medidas e integración en espacios bornológicos.* Rev. Real Acad. Ci. Madrid **75**, pp. 116–137, (1981).

[13] BOMBAL, F. *El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos.* Rev. Real Acad. Ci. Madrid **75**, pp. 140–154, (1981).

[14] BONET, J.; DIEROLF, S. Y FERNÁNDEZ, C. *Inductive limits of vector valued sequence spaces.* Publ. Mat. **33**, pp. 363–367, (1989)

[15] BONET, J. Y SCHMETS, J. *Bornological spaces of type $C(X) \otimes_\varepsilon E$ or $C(X; E)$.* Funct. Approx. Comment. Math. **17**, pp. 37–44, (1987).

[16] BOURBAKI, N. *Integration. Chap. 1-4, 2ª ed.* Hermann. París. (1965).

[17] BOURBAKI, N. *Integration. Chap 6.* Hermann. París. (1959).

[18] BOURBAKI, N. *Topologie générale. Chap. 1-4.* Hermann. París. (1971).

[19] CHI, G.Y.H. *The Radon–Nikodym theorem for vector measures with values in the duals of some nuclear spaces.* Vector and Operator Valued Measures and Applications (Proc. Sympos., Utah, 1972), Academic Press, Nueva York, pp. 85–95, (1973).

[20] CHI, G.Y.H. *A geometric characterization of Fréchet spaces with the Radon–Nikodym property.* Proc. Amer. Math. Soc. **48**, pp. 371–380, (1975).

[21] CHI, G.Y.H. *On the Radon–Nikodym theorem in locally convex spaces.* Measure theory, (Proc., Oberwolfach, 1975), Springer Lecture Notes in Math. **541**, pp. 199–210, Springer–Verlag, Berlín, Heidelberg, Nueva York, (1976).

[22] CHI, G.Y.H. *On the Radon–Nikodym theorem and locally convex spaces with the Radon–Nikodym property.* Proc. Amer. Math. Soc. **62**, pp. 245–253, (1977).

[23] COHN, D.L. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[24] COOPER, J.L.B. *Coordinated linear spaces.* Proc. London. Math. Soc. **3**, pp. 305–327, (1953).

[25] COOPER, J.L.B. *On a generalization of the Köthe coordinated spaces.* Math. Ann. **162**, pp. 351–363, (1966).

[26] DE GRANDE-DE KIMPE, N. *Generalized sequence spaces,* Bull. Soc. Math. Belg. **23**, pp. 123–166, (1971).

[27] DÍAZ ALCAIDE, J.C.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *A uniform boundedness theorem for $L^\infty(\mu, E)$.* Arch. Math. (Basel). Por aparecer.

[28] DÍAZ, S.; FERNÁNDEZ, A.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *Barrelledness and bornological conditions on spaces of vector-valued μ–simple functions.* Resultate Math. **21**, pp. 289–298, (1992)

[29] DÍAZ, S.; FERNÁNDEZ, A.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *An abstract Banach–Steinhaus theorem and applications to function spaces.* Resultate Math. (Por aparecer).

[30] DIESTEL, J.; UHL, J.J. *Vector Measures.* American Mathematical Society, Rhode Island, (1977).

[31] DIEUDONNÉ, J. *Sur les espaces de Köthe.* J. Analyse Math. **1**, pp. 81–115, (1951).

[32] DIEUDONNÉ, J. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V.* Canad. J. Math. **3**, pp. 129–139, (1951).

[33] DREWNOWSKI, L.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *Barrelled function spaces.* Progress in Functional Analysis. K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth y M. Maestre (Eds.). North–Holland/Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, Nueva York y Oxford, pp. 191–199, (1992).

[34] DREWNOWSKI, L.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *The space of Pettis integrable functions is barrelled.* Proc. Amer. Math. Soc. **48**(3), pp. 687–694, (1992).

[35] DREWNOWSKI, L.; FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *Some new classes of Banach-Mackey spaces.* Manuscripta Math. (Por aparecer).

[36] DUNFORD, N.; PETTIS B.J. *Linear operations on summable functions.* Trans. Amer. Math. Soc. **47**, pp. 323–392, (1940).

[37] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J.T. *Linear Operators (I).* Interscience. Nueva York y Londres. (1958).

[38] FERNÁNDEZ, A.; FLORENCIO, M. *The space of essentially bounded measurable functions with values in a DF-space.* Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A (Por aparecer).

[39] FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. *Barrelledness conditions on certain vector valued sequence spaces.* Arch. Math. **48**, pp.153–164, (1987).

[40] FLORENCIO, M.; PAÚL, P. J. Y SÁEZ, C. *A note on the Köthe dual of Banach–valued echelon spaces.* Collect. Math. **39**, pp. 257–261, (1988).

[41] FLORENCIO, M.; PAÚL, P. J. Y SÁEZ, C. *Duals of vector–valued Köthe function spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **112**, pp. 165–174, (1992).

[42] FLORENCIO, M.; PAÚL, P.J. Y SÁEZ, C. *Köthe echelon spaces à la Dieudonné.* Indag. Math. (Por aparecer).

[43] FOURIE, J.H. *Barrelledness conditions on generalized sequence spaces.* South African J. Science **84**, pp. 346–348, (1988).

[44] FRENICHE, F.J. *Barrellednes of the space of vector-valued and simple functions.* Math. Ann. **267**, pp. 479–486, (1984).

[45] GARNIR, H.G.; DE WILDE, M. Y SCHMETS, J. *Analyse fonctionnelle. Tome II: Mesure et intégration dans l'espace euclidien.* Birkhauser Verlag, Basilea, (1972).

[46] GILLIAM, D. *Geometry and the Radon–Nikodym theorem in strict Mackey convergence spaces.* Pacific J. Math. **65**, pp. 353–364, (1976).

[47] GILLIAM, D. *On integration and the Radon–Nikodym theorem in quasi–complete locally convex topological vector spaces.* J. Reine Angew. Math. **292**, pp. 125–137, (1977).

[48] GROTHENDIECK, A. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K).* Canad. J. Math. **5**, pp. 129–173, (1953)

[49] GROTHENDIECK, A. *Sur les espaces (F) et (DF).* Summa Brasil. Math. **3**, pp. 57–123, (1954)

[50] GROTHENDIECK, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. **16**, (1955).

[51] GROTHENDIECK, A. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le thórème de Dvoretzky–Rogers.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, pp. 81–110, (1956).

[52] GROTHENDIECK, A. *Topological Vector Spaces.* Gordon and Breach, Nueva York, (1973).

[53] HALMOS, P.R. *Measure Theory.* Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York. (1974).

[54] HALPERIN, I. *Function spaces.* Canad. J. Math. **5**, pp. 273–288, (1953)

[55] HOLLSTEIN, R. *Permanence properties of $C(X; E)$.* Manuscripta Math. **38**, pp. 41–58, (1982).

[56] HORVÁTH, J. *Espaces de fonctions localement integrables et de fonctions integrables a support compact.* Rev. Colombiana de Mat. **21**, pp. 167–186, (1987).

[57] JARCHOW, H. *Locally Convex Spaces.* B. G. Teubner. Stuttgart. (1981).

[58] JIMÉNEZ GUERRA, P.; RODRIGUEZ–SALINAS, B. *On the completeness of L^α for locally convex spaces.* Arch. Math. (Basel) **52**, pp. 82–91, (1989).

[59] KŌMURA, Y. *On linear spaces of functions.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1 A Math. **9**, pp. 203–248, (1962).

[60] KŌMURA, Y.; KŌMURA, T. *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations.* J. Math. Soc. Japan **15**, pp. 319–338, (1963).

[61] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces I.* Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York. (1969).

[62] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces II.* Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York. (1979).

[63] KÖTHE, G.; TOEPLITZ, O. *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.* J. Reine Angew. Math. pp. 193–226, (1934).

[64] KUPKA, J. *Radon–Nikodym theorems for vector valued measures.* Trans. Amer. Math. Soc. **169**, pp. 197–217, (1972).

[65] KWAPIEŃ, S. *On operators factorizable through $\mathcal{L}_p$ space.* Bull. Soc. Math. France, Mém. **31-32**, pp. 215–225, (1972).

[66] LARMAN, D.G.; ROGERS, C.A. *The normability of metrizable sets*. Bull. London Math. Soc. **5**, pp. 39–48, (1973).

[67] LORENTZ, G.G. *Some new functional spaces*. Ann. of Math. **51**, pp. 37–55, (1950).

[68] MACKEY, G. *On infinite-dimensional linear spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, pp. 155–207, (1945).

[69] MACKEY, G. *On convex topological spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, pp. 519–537, (1946).

[70] MARQUINA, A.; SANZ SERNA, J.M. *Barrellednes conditions on $c_0(E)$*. Arch. Math. (Basel) **31**, pp. 589–596, (1978).

[71] MARQUINA, A.; SCHMETS, J. *On bornological $c_0(E)$ spaces*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **51**, pp. 170–173, (1982).

[72] MENDOZA, J. *A barrellednes criterion for $c_0(E)$*. Arch. Math. (Basel) **40**, pp. 156–158, (1983).

[73] METIVIER, M. *Martingales a valeurs vectorielles. Applications a la derivation des mesures vectorielles*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **17** (2), pp. 175–208, (1967).

[74] PAÚL, P.J. *Espacios de sucesiones vectoriales*. Tesis Doctoral, Sevilla, (1985).

[75] PÉREZ CARRERAS, P.; BONET, J. *Barrelled Locally Convex Spaces*. North–Holland. Amsterdam, Nueva York, Oxford y Tokyo, (1987).

[76] PETTIS, B.J. *On integration in vector spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, pp. 277–304 (1938).

[77] PETTIS, B.J. *On the Radon-Nikodym theorem*. Vector Space Measures and Applications I. R.M. Aron y S. Dineen (Eds.), (Proc., Dublin, 1977) Springer

Lecture Notes in Math. **644**, pp. 340–355, Springer–Verlag, Berlín, Heidelberg, Nueva York, (1978).

[78] PHUONG–CÁC, N. *On Dieudonné's paper Sur les espaces de Köthe.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **62**, pp. 29–32, (1966).

[79] PHUONG–CÁC, N. *Generalized Köthe function spaces I.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **65**, pp. 601–611, (1969).

[80] PHUONG–CÁC, N. *Generalized Köthe function spaces.* Math. Ann. **192**, pp. 99–106, (1971).

[81] PIETSCH, A. *Verallgemeinerte Vollkommene Folgenräume.* Akademie–Verlag, Berlín, (1962).

[82] PIETSCH, A. *Zur Theorie der topologischen Tensorprodukte,* Math. Nachr. **25**, pp. 19–31, (1963).

[83] PIETSCH, A. *Nuclear Locally Convex Spaces.* Springer–Verlag, Berlín, Heidelberg, Nueva York (1972).

[84] RIEFFEL, M.A. *The Radon–Nikodym theorem for the Bochner integral.* Trans. Amer. Math. Soc. **131**, pp. 466–487, (1968).

[85] ROSIER, R.C. *Dual spaces of certain vector sequence spaces.* Pacific J. Math. **46** (2), pp. 487–501, (1973).

[86] SAAB, E. *On the Radon–Nikodym property in a class of locally convex spaces.* Pacific J. Math. **75** (1), pp. 281–291, (1978).

[87] SÁEZ, C. *Espacios de funciones vectoriales.* Tesis doctoral, Sevilla. (1990).

[88] SCHAEFER, H.H. *Espacios vectoriales topológicos.* Ed. Teide, Barcelona. (1974).

[89] SCHMETS, J. *Espaces de fonctions continues.* Springer Lecture Notes in Math. **519**, Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York. (1976).

[90] SCHMETS, J. *Spaces of Vector–Valued Continuous Functions.* Springer Lecture Notes in Math. **1003**, Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg, Nueva York y Tokyo. (1983).

[91] SCHMETS, J.; ZAFARANI, J. *Strict topologies and (gDF)–spaces.* Arch. Math. (Basel) **49**, pp. 227–231, (1987).

[92] TASKINEN, J. *The projective tensor product of Fréchet–Montel spaces.* Studia Math. **91**, pp. 15–29, (1988).

[93] TASKINEN, J. *(FBa)– and (FBB)–spaces.* Math. Z. **198**, pp. 339–365, (1988).

[94] THOMAS, G.E.F. *The Lebesgue–Nikodym theorem for vector valued Radon measures.* Mem. Amer. Math. Soc. **139**, (1974).

[95] THOMAS, G.E.F. *Integration of functions with values in locally convex Suslin spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **212**, pp. 61–81, (1975).

[96] THOMAS, G.E.F. *Totally summable functions with values in locally convex spaces.* Measure theory, (Proc., Oberwolfach, 1975), Springer Lecture Notes in Math. **541**, pp. 117–131, Springer–Verlag, Berlín, Heidelberg, Nueva York, (1976).

[97] VON NEUMANN, J. *On complete topological linear spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **37**, pp. 1–20, (1935).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. FERNANDO MAYORAL MASA titulada ESPACIOS DE FUNCIONES LOCALMENTE INTEGRABLES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 27 de NOVIEMBRE 1992

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,