UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

DESCOMPOSICIONES DE TOEPLITZ EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

JUAN MANUEL VIRUÉS GAVIRA

TESIS DOCTORAL

Memoria que presenta
Juan M. Virués Gavira
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo: Juan M. Virués Gavira.

D. Pedro J. Paúl Escolano, Catedrático de la Universidad de Sevilla, y
Dª. Carmen Sáez Agulló, Profesora Titular de la Universidad de Sevilla

CERTIFICAN: Que la presente memoria "Descomposiciones de Toeplitz en espacios localmente convexos", ha sido realizada bajo la dirección de ambos por el Licenciado en Ciencias Matemáticas D. Juan Manuel Virués Gavira y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Fdo: D. Pedro J. Paúl Escolano. Fdo: Dª. Carmen Sáez Agulló.

Sevilla, Mayo de 1.996.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Juan Carlos Díaz Alcaide y a la Dra. María Angeles Miñarro del Moral por habernos brindado su apoyo y su colaboración. Nuestra memoria también se ha beneficiado de las sugerencias del Dr. José Bonet Solves cuya ayuda también agradecemos.

No quiero dejar pasar la oportunidad de manifestar mi mayor gratitud a los directores de esta memoria, Pedro J. Paúl Escolano y Carmen Sáez Agulló, que desde hace varios años orientan y dirigen toda mi labor investigadora. El resultado final de esta memoria, fruto de una infatigable labor de mejora continua llevada a cabo en innumerables sesiones de trabajo, nunca hubiera sido posible sin su colaboración.

También agradezco a los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla el ánimo y apoyos recibidos. En especial, a los Drs. Miguel Florencio Lora, Antonio Fernández Carrión, Santiago Díaz Madrigal, José Oliveros Troncoso, Fernando Mayoral Masa y Manuel D. Contreras Márquez.

A mis padres.

A Marisa

y a nuestros hijos.

Contenido

Introducción.

Está generalmente aceptado que la teoría de las series divergentes comenzó en 1890 con un artículo de Cesàro sobre multiplicación de series. Aunque ya pasaba la época de la caza de brujas (iniciada por Cauchy 57 años antes al encontrar una serie infinita cuya suma se modificaba al cambiar el orden en el proceso de suma) los severos juicios que sobre las series divergentes pronunciaron matemáticos de enorme influencia como Abel, hicieron que el trabajo de Cesàro permaneciese ignorado durante algún tiempo. En el trabajo de Cesàro se define por primera vez el concepto de *suma simplemente indeterminada* para una serie, que hoy conocemos como *suma de Cesàro*:

> "Sea $\sum a_n$ una serie de números reales o complejos cuya sucesión de sumas parciales es (s_n). Sea (t_n) la sucesión de las medias aritméticas de (s_n)
> $$t_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}.$$
> Si existe $s = \lim t_n$ entonces se dice que la serie $\sum a_n$ es *sumable por el método de Cesàro con suma* s, y se escribe $\sum a_n = s \ (C, 1)$."

La ventaja del método de Cesàro es su *regularidad*, o sea, que suma todas las series convergentes por el método clásico de Cauchy, conserva su suma y, además, es capaz de sumar otras series divergentes en el sentido clásico y les da, como mostraremos a continuación, su "suma esperada".

Parte del ímpetu que dirigió el desarrollo de la teoría de la sumabilidad en sus comienzos fue proporcionado por dos resultados muy importantes, el primero de los cuales es el de Cesàro sobre multiplicación de series. Era conocido que el producto de Cauchy de dos series convergentes no tiene por qué ser convergente. Sin embargo, Mertens había probado que si una de las dos es absolutamente convergente entonces el producto converge al producto de las sumas. Cesàro estableció que dadas dos series convergentes, su producto de Cauchy converge $(C,1)$ al producto de las dos sumas. El otro resultado al que nos referimos es el teorema de Fejér sobre la convergencia en el sentido de Cesàro de las series de Fourier. Era conocido (y este hecho causó bastante sorpresa en esa época) que la serie de Fourier de una función continua f en un punto $x \in [0, 2\pi]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\big(n(t-x)\big)\ \mathrm{d}t\Big\},$$

no tiene por qué converger a $f(x)$. De hecho, Du Bois–Reymond había construido en 1876 un ejemplo de una serie de Fourier para una función continua, divergente en un conjunto denso de $[0, 2\pi]$. Fejér demostró en 1904 que la serie de Fourier de una función continua f es sumable $(C,1)$ en cada punto x y su $(C,1)$-suma es el correspondiente valor $f(x)$.

La sumabilidad $(C,1)$ es un caso particular de lo que se llama un método matricial de sumabilidad:

> "Un *método matricial de sumabilidad* para una serie $\sum a_n$ es una transformación
>
> $$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k;$$
>
> de manera que si (t_n) converge, entonces se dice que la serie $\sum a_n$ *converge según la matriz* (c_{nk})."

Cuando (c_{nk}) es la matriz identidad se obtiene la sumabilidad ordinaria y cuando (c_{nk}) es la matriz definida por

$$c_{nk} = \begin{cases} n^{-1}, & \text{si } n \geq k\ ; \\ 0, & \text{si } n < k\ ; \end{cases}$$

se obtiene el método de Cesàro. La teoría de la sumabilidad abstracta mediante transformaciones matriciales comenzó en 1911 con el teorema de Silverman–Toeplitz que caracterizaba las matrices triangulares regulares (en realidad, la contribución de Toeplitz fue más importante: probó que las condiciones necesarias de regularidad dadas por Silverman eran también suficientes). Este resultado se considera el precursor del teorema de Banach–Steinhaus. El teorema de Silverman–Toeplitz fue generalizado para matrices arbitrarias por Kojima en 1917 e, independientemente, por Schur en 1920. A partir de 1930 la teoría de la sumabilidad seguiría desarrollándose ampliando su radio de acción a los espacios de sucesiones vectoriales; aunque, esencialmente, ya desde el punto de vista del análisis funcional. Caben destacar los trabajos de Köthe y Toeplitz de 1934 que, paralelamente a la creación de la teoría general de los espacios normados por Banach, Hahn y Wiener y de los espacios localmente convexos por Mackey y Von Neumann, desarrollaron la teoría de la α-dualidad en espacios de sucesiones escalares.

Aunque es muy antigua la idea de escribir una función como un desarrollo infinito, la idea de la convergencia de esos desarrollos en un espacio cuyos puntos son funciones cristaliza a principios de este siglo propiciado por la aparición de cuatro trabajos fundamentales: el trabajo de Fredholm de 1900 sobre ecuaciones integrales, la tesis de Lebesgue de 1902 sobre integración, el artículo de Hilbert de 1906 sobre teoría espectral y la tesis de Fréchet en el mismo año sobre espacios métricos. El impulso definitivo lo daría Schmidt en 1908; en este trabajo ya aparecen explícitamente la notación actual y las propiedades del espacio l^2 de las sucesiones de cuadrado absolutamente sumable (considerado por Hilbert dos años antes), la noción de producto escalar, de norma con su notación actual $\|\ \|$, de ortogonalidad, conjuntos cerrados, subespacios vectoriales, operadores y la prueba de la existencia de la proyección ortogonal de un punto sobre un subespacio cerrado. El trabajo de Schmidt junto con los de Riesz y Fischer en 1906 y 1907, respectivamente, sobre los espacios L^p abrirían definitivamente el camino a la potente maquinaria del análisis funcional con la teoría general de los espacios normados. La feliz coincidencia del desarrollo por Lebesgue de la teoría de la medida con el comienzo de los trabajos de Hilbert permitieron a Riesz y Fischer definir $L^2[a,b]$, el espacio de las clases de funciones de cuadrado integrable Lebesgue en $[a,b]$, y probar que a cada punto $f \in L^2[a,b]$ se le puede asociar una única sucesión de números: la formada por sus coeficientes de Fourier con respecto a un sistema ortonormal completo. Ésto define un isomorfismo isométrico entre $L^2[a,b]$ y l^2. Este hallazgo constituye la primera definición de base topológica y rompe radicalmente con la concepción del álgebra lineal de Cayley como una teoría de n-tuplas predominante en esa época.

Partiendo de los trabajos de Schmidt, Riesz, Fischer y de un trabajo de Helly de 1921 sobre espacios de sucesiones normados se produce la generalización sistemática del concepto de norma sobre espacios vectoriales arbitrarios. Esta extensión fue hecha independientemente por Banach, Hahn y Wiener a comienzos de la década de los 20 y aparece ya totalmente modelada en el famoso libro de Banach de 1932. Los primeros ejemplos de base topológica en espacios de Banach se deben a Schauder quien en 1927, aparte de señalar que los vectores coordenados unitarios forman una base de los espacios de sucesiones c_0 (de las sucesiones convergentes a cero con la norma del supremo) y l^p $(1 \leq p < \infty)$ (de las sucesiones de potencia p sumable con su norma $\| \ \|_p$), construyó una base en el espacio $C[0,1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. En su honor Banach en 1932 definió axiomáticamente el concepto de *base de Schauder* en un espacio de Banach:

> "Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach E se llama *base de Schauder* o simplemente *base*, si para cada $x \in E$ existe una única sucesión (α_n) de escalares tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$."

El propio Banach observó que los funcionales $x'_k(x) := \alpha_k$ eran continuos en E, condición que había sido exigida explícitamente por Schauder.

La base (φ_n) de $C[0,1]$ construida por Schauder es lo que hoy se conoce como el sistema de Faber–Schauder (Faber, independientemente, ya lo había definido en 1910 y probado la convergencia uniforme de la serie): para cada $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ se define $\varphi_1 \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$,

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 2t\ , & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]\ ; \\ 2 - 2t\ , & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]\ ; \end{cases}$$

$$\varphi_{2^n+k+1}(t) = \begin{cases} \varphi_3(2^n t + 1 - k)\ , & \text{si } 2^n t + 1 - k \in [0,1]\ ; \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Haar introdujo en 1910 un sistema ortonormal de funciones y probó que el desarrollo de Fourier de una función continua en $[0,1]$, con respecto a dicho sistema, era uniformemente convergente a la función. El sistema de Haar (χ_n) es uno de los sistemas ortonormales más importantes en el Análisis: para cada $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ se definen $\chi_1 \equiv 1$,

$$\chi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ -1, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

$$\chi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \chi_2(2^n t + 1 - k), & \text{si } 2^n t + 1 - k \in [0,1]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, $\chi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(s)\, ds$, para cada $n \geq 2$. El sistema de Franklin se define como el que aparece al aplicarle al sistema de Faber–Schauder el método de ortogonalización de Gram–Schmidt en $L^2[0,1]$. Schauder también probó en 1928 que el sistema de Haar es una base de $L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$.

Dado que todos los espacios de Hilbert separables son topológicamente isomorfos a l^2 y por lo tanto poseen una base, Banach planteó en 1932 el *problema de la base*: ¿posee base todo espacio de Banach separable?

Un resultado de Banach y Mazur de 1933 afirma que todo espacio de Banach separable es isométrico a un subespacio cerrado de $C[0,1]$. Como, partiendo de este resultado y usando que $C[0,1]$ tiene base, Banach no pudo deducir que todo espacio de Banach separable tuviese base, lo más que llegó a afirmar (aunque no a probar) es que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene un subespacio cerrado con base (la primera prueba rigurosa de este resultado no apareció hasta 1958 publicada por Gelbaum, Bessaga y Pełczyński).

Aunque el problema de la base fue resuelto en forma negativa en 1972 con el célebre contraejemplo de Enflo, sirvió para que la teoría de bases despegara definitivamente. Hoy en día puede decirse que la teoría de bases ha alcanzado gran brillantez y que mantiene su vitalidad debido, en parte, a los múltiples problemas de gran interés y dificultad que aún permanecen abiertos. No podemos glosar todos los descubrimientos que se han producido en la teoría porque la lista es muy extensa, aunque sí mencionaremos los que sean más interesantes o tengan más relación con el contenido de esta memoria. Las referencias completas de todos los trabajos pueden encontrarse en las excelentes monografías de Marti [71] y Singer [104] [105]; así como en los libros de Diestel [24], Dieudonné [25] y Wojtaszczyk [117]. También puede consultarse un artículo de James [51] que contiene los resultados más importantes descubiertos en la teoría de bases en espacios de Banach hasta 1982.

El propio Banach sabía de la existencia de espacios métricos no normables, completos, separables y sin base: $L_0[0,1]$, el espacio de las clases de funciones medibles en $[0,1]$ con la distancia

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,\mathrm{d}t.$$

Este hecho le llevó a considerar generalizaciones del concepto de base de Schauder, como por ejemplo el de *sistema biortogonal completo* (completo aquí tiene el sentido de densidad). Fue Markushevich en 1943 quien proporcionó el primer ejemplo de un sistema de este tipo que no es una base: Sea $C_{2\pi}$ el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ y 2π-periódicas con la norma del supremo. En $(C_{2\pi}, C'_{2\pi})$ Markushevich consideró una sucesión doble (u_k, u'_k) tal que $u'_n(u_k) = \delta_{nk}$ (la delta de Kronecker) y de manera que la envoltura lineal de la sucesión (u_k) es densa en $C_{2\pi}$:

$$u_0(t) \equiv \frac{1}{2}\ ,\quad u_{2n-1}(t) = \operatorname{sen}(nt)\ ,\quad u_{2n}(t) = \cos(nt) \quad \text{para } n \geq 1,\ t \in \mathbb{R};$$

$$u'_{2n}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\ ,\qquad u'_{2n+1}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\operatorname{sen}\big((n+1)t\big)\,\mathrm{d}t;$$

para $n \geq 0$ y $u \in C_{2\pi}$. En su honor, a los sistemas biortogonales completos se les llama bases de Markushevich. La otra condición que se podía generalizar en la definición de Banach era la del tipo de espacio donde se consideraba la base. De hecho, el propio Banach consideró bases en espacios métricos y estableció sin prueba que en un espacio de Banach toda base débil es una base. Una prueba completa de este resultado no apareció hasta 1953 publicada por Newns (para espacios de Fréchet). En 1959 Bessaga y Pełczyński prolongaron el alcance de la prueba de Newns. En 1960 Arsove y Edwards extendieron el resultado a límites inductivos de espacios de Fréchet y lo llamaron el *teorema de la base débil.* En 1961 Mitiagin observó que el teorema de la base débil es cierto en todo espacio donde se verifique el teorema de la aplicación abierta o el teorema de la gráfica cerrada. En ese mismo año De Wilde publicó su *teorema de continuidad*, el resultado de tipo base débil más general que se conoce para bases (de Schauder) en espacios vectoriales topológicos.

El primer resultado sobre bases en productos tensoriales aparece publicado en 1961 por Gelbaum y Gil de Lamadrid. Ellos construyeron explícitamente una base en un producto tensorial proyectivo de dos espacios de Banach con base. En 1965, Gil de Lamadrid prueba que la base puede construirse si se dota al producto $E \otimes F$ de cualquier norma tensorial. Como caso particular del resultado de Gelbaum y Gil de Lamadrid se obtenían sistemáticamente bases para ciertos espacios de funciones vectoriales absolutamente integrables donde la existencia había sido probada directamente por Gurevich (1961) y Semadeni (1963).

El concepto de *base acotadamente completa* aparece desde el comienzo de la teoría en un trabajo de Dunford y Morse de 1936 y otro de Alaoglu de 1940 que afirma que todo espacio de Banach con una base acotadamente completa es un dual. Una base en un espacio de Banach cuya sucesión de coeficientes funcionales genera por linealidad un subespacio denso en el dual, es considerada por primera vez por Grinblium y Gurevich en 1941 y es lo que hoy se conoce como base *contractiva* (del término *shrinking*). En esos trabajos se consideraban sólo los conceptos porque los nombres *base acotadamente completa* y *base contractiva* no aparecieron hasta la publicación de la primera edición del libro de Day sobre espacios normados en 1958. La relación de este tipo de bases con la reflexividad no aparece hasta 1948 con un trabajo de Karlin y otro mucho más famoso de James en 1950. Son los primeros resultados que relacionan propiedades vectoriales topológicas de un espacio de Banach con base con propiedades de la base. El resultado de James establece que un espacio de Banach con base es reflexivo si y sólo si la base es acotadamente completa y contractiva. En el mismo trabajo, James estudió la relación de dualidad que existe entre los conceptos de base contractiva y acotadamente completa. En 1964 Singer generalizó el teorema de James para conseguir una caracterización de los espacios de Banach (con base) que son reflexivos de orden k. En relación con esto cabe destacar un bello resultado de Zippin de 1968: "Si E es un espacio de Banach separable y posee base, entonces E es reflexivo si y sólo si toda base de E es contractiva y si y sólo si toda base de E es acotadamente completa."

La primera idea de aplicar un método de sumabilidad (con matrices finitas por filas) a los desarrollos biortogonales aparece en un trabajo de Frink de 1941. La generalización del teorema de Silverman–Toeplitz a espacios de Banach se debe a Gelbaum (1950) quien, independientemente de Kozlov en el mismo año, definió el concepto de T-base y extendió las caracterizaciones del concepto de base en espacios de Banach al caso de T-bases. De 1953 es el trabajo de Zeller en el que considera esta propiedad de convergencia seccional generalizada en FK-espacios de sucesiones escalares y la obtiene en ciertos dominios de sumabilidad (como los de Cesàro). En 1958 Gaposhkin prueba que toda T-base T-incondicional en un espacio de Banach es una base incondicional. El concepto de base operacional se debe a Kadec y aparece en 1961. En 1962 Singer considera los conceptos de T-base T-acotadamente completa y T-contractiva. En 1963 Wilansky y Zeller publican un ejemplo en c, el espacio de todas la sucesiones convergentes con la norma del supremo, de una base de Markushevich que no es una T-base para ninguna matriz T de sumabilidad. Otros conceptos obtenidos al fortalecer la idea de base de Markushevich fueron estudiados por Ruckle (1970) quien obtuvo en 1974 una clasificación de los sistemas biortogonales. En 1970 Johnson extendió los resultados de James y Singer para bases de Markushevich en espacios localmente convexos separables.

La noción de descomposición en un espacio de Banach fue introducida por Grinblium en 1950 e, independientemente, por Fage (en el mismo año) quien la estudió en los espacios de Hilbert:

> "Una descomposición de un espacio de Banach E es una sucesión (E_k) de subespacios de E (no necesariamente cerrados) tal que, para cada $x \in E$ existe una única sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, verificando
> $$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
> Si, además, cada E_k es cerrado en E se dice que (E_k) es una *descomposición de Schauder.*"

Este concepto también fue analizado en un seminario impartido por Mazur en Varsovia en 1953, aunque sus resultados nunca fueron publicados. En los años 60 McArthur impartió una serie de cursos doctorales sobre este tema a sus alumnos de la Universidad de Florida, con lo que se convirtió en el principal impulsor de esta rama de la teoría de bases. Por ejemplo, McArthur fue el primero en considerar la sucesión de proyecciones en el dual, establecer sus relaciones de ortogonalidad, así como distinguir entre los conceptos de descomposición y descomposición de Schauder. El problema de la base aún estaba abierto, aunque había indicios de que no tendría solución y, por lo tanto, lo que se buscaba era una noción generalizada de base con buenas propiedades de existencia, incluso en espacios no separables. El concepto de descomposición tiene esa propiedad pero su contenido topológico es muy pobre; por contra, el de descomposición de Schauder no la tiene — Dean probó en 1967 que l^∞ no admite ninguna descomposición de Schauder — pero, como se vería más tarde, constituye una buena herramienta para inducir en un espacio propiedades vectoriales topológicas a partir de sus subespacios. Por ejemplo, Sanders en su tesis de 1965 consiguió una caracterización análoga a la de James para espacios de Banach reflexivos con descomposición de Schauder. Otros pioneros de este concepto fueron Ruckle (1964) que lo definió y estudió en F-espacios, Retherford (1966) que extendió el teorema de James a espacios localmente convexos tonelados y Cook (1969) que hizo lo propio en espacios localmente convexos arbitrarios (esta vez, caracterizando la semi-reflexividad). En esta década se probaron también teoremas de base débil para descomposiciones: Ruckle (1964) para F-espacios y McArthur (1967) para espacios tonelados. La extensión del concepto de base de Markushevich al de descomposición de Markushevich se debe a Bachelis y Rosenthal (1971).

En la década de los 70 aparece el célebre contraejemplo de Enflo (1972) de un espacio de Banach separable sin base. Esto hizo que las generalizaciones de los conceptos de base y, más generalmente, de independencia lineal, cobraran aún mayor importancia. La lista de autores y contribuciones importantes es ahora mucho más amplia; entre ellos destacamos (por orden alfabético) a Bessaga, Bourgain, Bochkariev, Carleson, Casazza, Chadwick, Dubinsky, Godefroy, Johnson, Kalton, Maurey, Mitiagin, Ovsepian, Peck, Pełczyński, Read, Rolewicz, Rosenthal, Saab, Szarek, Webb, Wojtaszczyk, Zippin y Zobin. En un ciclo de conferencias en 1983 en honor de Day, Casazza presentó una recopilación de resultados sobre descomposiciones finito-dimensionales en espacios de Banach. El uso y estudio de estas estructuras más débiles era justificado por Casazza, argumentando que contienen casi tanta información geométrica y estructural como la que puede ser extraída de una base. Al mismo tiempo, aportó toda una gama de teoremas que eran desconocidos, falsos o, simplemente, no tenían sentido para bases. Por ejemplo, Kalton y Peck en 1979 construyeron un espacio de Banach sin base incondicional que admite una descomposición de Schauder incondicional con subespacios de dimensión dos. Durante algún tiempo estuvo abierta la cuestión de si la palabra incondicional puede quitarse del resultado anterior. En 1987 Szarek demostró que existe un espacio de Banach superreflexivo sin base y con una descomposición de Schauder finito-dimensional. Destacamos también un trabajo de Mitiagin y Zobin de 1974, en el que se construye un espacio de Fréchet nuclear sin base. Este trabajo creó una secuela de artículos que culminan con uno de Bessaga y Dubinsky de 1978 en el cual se prueba que todo espacio de Fréchet nuclear no isomorfo a ω contiene un subespacio y un cociente que no admiten ninguna descomposición de Schauder finito-dimensional en la cual la dimensión de los subespacios esté acotada. Otro resultado interesante, debido a Bourgain, publicado en 1980 afirmaba que un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon–Nikodym si y sólo si cualquier subespacio suyo con descomposición de Schauder finito-dimensional la tiene.

Otros trabajos que han tenido para nosotros mucha influencia a la hora de plantearnos problemas y elaborar esta memoria aparecen citados en cada momento dentro de la misma. El título hace referencia a los dos aspectos fundamentales que la dominan: la teoría de la sumabilidad de las matrices de Toeplitz y el concepto de descomposición en espacios localmente convexos. Con ambos hemos desarrollado un concepto que extiende estrictamente al de descomposición de Schauder y, sistemáticamente, hemos extendido muchos de los resultados conocidos hasta el momento en la teoría general de las descomposiciones de Schauder. Entre todos destacamos la tesis de María Angeles Miñarro [74] cuyo contenido nos ha mostrado una parte importante del camino a seguir.

El contenido de esta memoria está distribuido en tres capítulos. El primero de ellos es introductorio y no contiene resultados originales. Nuestra aportación está contenida en los dos capítulos siguientes. Cada capítulo está dividido en secciones cuya numeración hace referencia al capítulo donde se encuentra. A su vez, cada sección está dividida en párrafos o resultados numerados con su capítulo, su sección y su orden dentro de la sección. Las fórmulas o resultados intermedios fuera de texto se encuentran etiquetados atendiendo sólo al capítulo donde se encuentran y por su orden de aparición.

Pasamos a describir el contenido de esta memoria. Para poder comentar y resumir con más comodidad los resultados de cada sección presentamos algunas definiciones; no obstante, las notaciones que empleamos se hallan al comienzo del primer capítulo.

Un *sistema ortogonal de proyecciones* en un espacio localmente convexo E es una sucesión (P_k) de proyecciones, $P_k : E \to E$, continuas y ortogonales dos a dos. Denotaremos por E_k al subespacio imagen de E por P_k.

Un sistema ortogonal de proyecciones (P_k) en E, se llama *descomposición de Schauder* de E si para cada $x \in E$ se tiene $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k x = x$ en la topología de E.

Sean E un espacio localmente convexo, (P_k) un sistema ortogonal de proyecciones en E y A un triángulo regular. Se dice que (P_k) es una *descomposición de Toeplitz de* E *con respecto a la matriz* A si para cada $x \in E$ se tiene $T\text{-}\lim(P_k x) = x$ en la topología de E, donde $T = A\Sigma$, siendo Σ la matriz de sumabilidad ordinaria. Cuando la matriz A esté fijada de antemano o se deduzca claramente del contexto, diremos simplemente que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E. Si tenemos una descomposición de Toeplitz de E entonces la identidad en E está aproximada puntualmente por la sucesión de operadores $(T_n) : E \to E$, siendo

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P_k.$$

Toda base de Toeplitz de un espacio localmente convexo induce una descomposición en subespacios E_k de dimensión uno.

Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Diremos que (P_k)

(1) es *equicontinua* si la sucesión de operadores $T(P_k)$, o lo que es igual (T_n), es equicontinua;

(2) es *contractiva* si (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$;

(3) tiene la *propiedad* (M) si $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ uniformemente en cada acotado de E;

(4) tiene la *propiedad* (S) si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sup\{q_U(T_n x - x) : x \in V\} = 0$;

(5) es *completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que la sucesión $T(x_k)$ es de Cauchy en E se tiene que $T(x_k)$ es convergente en E;

(6) es *β-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que la sucesión $T(x_k)$ es $\sigma(E, E')$-de Cauchy se tiene que $T(x_k)$ converge en E;

(7) es *γ-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que la sucesión $T(x_k)$ es acotada en E se tiene que $T(x_k)$ es convergente en E.

La mayor parte de los resultados que hemos obtenido en la memoria son ciertos para triángulos regulares arbitrarios. Sin embargo, en otros ha sido necesario imponer una condición adicional: que las coordenadas formen una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T con respecto a la matriz A. En ellos subyace la necesidad de usar una propiedad de las descomposiciones de Schauder equicontinuas la cual extendemos (en la tercera sección del tercer capítulo) para descomposiciones de Toeplitz equicontinuas con respecto a una matriz que verifique la condición anteriormente mencionada. La propiedad sobre las descomposiciones de Schauder equicontinuas a la que nos referimos es la siguiente:

Sea (P_k) una descomposición de Schauder equicontinua de un espacio localmente convexo E. Entonces existe una familia de seminormas $\mathcal{Q}$ que define la topología de E tal que

$$q(\sum_{k=1}^{n} P_k x) \leq q(x);$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ y $q \in \mathcal{Q}$.

En el capítulo segundo, en la primera sección, se define el concepto de descomposición de Toeplitz y se ofrecen ejemplos no triviales.

En la segunda sección se introducen y comentan las propiedades sobre una descomposición de Toeplitz que aparecen arriba listadas. También se estudia la consistencia de estas propiedades cuando hay dos métodos de sumabilidad.

En la tercera sección se estudian algunas de las relaciones que existen entre ellas, aunque las relaciones de dualidad aparecen en el siguiente capítulo.

En la cuarta sección se estudian dos espacios de sucesiones vectoriales asociados a un espacio localmente convexo E con descomposición de Toeplitz, uno de los cuales (el β-dual) define con E un par dual. Se introduce una topología, denotada por $\sigma\gamma(E, E')$, que resulta tener ciertas propiedades muy importantes. Estudios previos en casos particulares ya existían y son debidos, fundamentalmente, a Garling [37], Kalton [55] y Florencio [29] [30].

En la última sección estudiamos el problema de las descomposiciones débiles que ya hemos comentado en las notas históricas anteriores. El enfoque que le hemos dado está basado en un tratamiento similar de Webb [112] en el caso de las descomposiciones de Schauder.

El tercer capítulo está dedicado al estudio de la información estructural que contiene una descomposición de Toeplitz sobre un espacio localmente convexo E. El problema que se plantea en cada caso tiene una formulación común: ¿Cómo tiene que ser una descomposición (P_k) de un espacio E para que una determinada propiedad sobre los subespacios E_k pase al espacio E?

En la primera sección se estudia la completitud. La equicontinuidad, las propiedades de completitud de la descomposición y la completitud de los subespacios E_k resultan ser las condiciones que intervienen. Como aplicación caracterizamos la completitud de E con la topología $\sigma\gamma(E, E')$.

En la segunda sección se estudia el problema de la reflexividad usando técnicas relacionadas con las de Cook [18] y Kalton [55]. La contractivividad, la β-completitud, la γ-completitud y la reflexidad de los E_k serán aquí las hipótesis claves. También ampliamos el estudio de las relaciones de dualidad que existen entre la contractividad de una descomposición de Toeplitz y la γ-completitud de la descomposición dual.

En la sección tercera hacemos lo propio con la tonelación y propiedades relacionadas. En la sección anterior, dualizando el teorema que caracteriza la semireflexividad, se ha obtenido ya un resultado general que caracteriza la tonelación de un espacio con una descomposición de Toeplitz para su topología de Mackey. En esta sección se analiza en profundidad cuánto contenido de tonelación posee la condición de igualdad entre el dual y el β-dual basándonos en un trabajo de Schaefer [100] para espacios de sucesiones escalares. Hasta ahora el marco adoptado para probar resultados de tonelación sobre espacios con descomposición de Toeplitz ha sido el de exigir fuertes condiciones a la descomposición para deducir la tonelación del espacio total a partir de la tonelación de los subespacios en los cuales se proyecta. Una alternativa a este estudio es restringir la clase de los espacios a considerar y obtener resultados de tonelación modificando las propiedades que se exigen a la descomposición. En la clase de los espacios normados, la condición de que (P_k) sea una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$ puede ser sustituida por la de que (P_k) sea contractiva. Bajo esta condición, Noll y Stadler [80] probaron que un espacio normado, con una descomposición de Schauder contractiva (P_k), es tonelado si y sólo si su β-dual coincide con su dual y cada E_k es tonelado. Nosotros hemos extendido el teorema de Noll y Stadler al caso de una descomposición de Toeplitz y lo hemos aplicado en situaciones donde no podía usarse el resultado original de Noll y Stadler. Obtenemos otro resultado importante sobre tonelación, esta vez en el marco de los espacios (DF) y sin pedir ninguna condición a la descomposición, salvo la tonelación de los subespacios E_k.

En la cuarta sección se estudia la relación entre la propiedad (M) sobre (P_k)

y la propiedad de Montel sobre E.

En la quinta sección se estudia la relación entre la propiedad (S) sobre (P_k) y la casi-normabilidad, la casi-normabilidad por operadores y la propiedad de Schwartz sobre E.

En la sexta sección se aplican los resultados de todas la secciones anteriores al estudio de la estabilidad del producto tensorial proyectivo de dos espacios, uno de los cuales posee descomposición de Toeplitz.

Por útimo, en la séptima sección se recopilan los resultados más significativos que hemos obtenido para un caso particular muy importante: el de los espacios localmente convexos con base de Cesàro.

Capítulo I

Sumabilidad.

1.1 Terminología y notación.

Como regla general, a lo largo de toda la memoria, una expresión del tipo

$$\textit{relación} \qquad [\textit{propiedad}]$$

significa que la *relación* se tiene siempre que la *propiedad* sea cierta. En el párrafo siguiente aparece ya un ejemplo. Como es habitual, la notación ":=" será utilizada para definir el símbolo que aparezca a su izquierda como la expresión que aparezca a su derecha.

Denotaremos por ω al conjunto de todas la sucesiones de escalares, por c al conjunto de todas las sucesiones convergentes, por c_0 al conjunto de todas las sucesiones convergentes a cero y por φ al conjunto de todas las sucesiones nulas a partir de un término. Los espacios l^p, $1 \leq p \leq \infty$, serán los espacios de sucesiones usuales dotados de la correspondiente norma $|| \ ||_p$. El espacio c de las sucesiones convergentes dotado de la norma del supremo es un espacio de Banach. La expresión general de un elemento de su dual topológico es

$$f(x) = \mu \lim x + \langle \alpha, x \rangle \qquad [x \in c],$$

donde μ es un escalar, $\alpha \in l^1$ y $\langle \alpha, x \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Además la norma dual en c' es $||f|| = |\mu| + ||\alpha||_1$.

Las sucesiones, las matrices y las redes las denotaremos con paréntesis; mientras que para designar un término particular de una sucesión o red usaremos corchetes. Por ejemplo, a una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ la denotaremos por $x = (x_n)$ y a una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

como $A = (a_{nk})$; sin embargo, una notación del tipo $[Ax]_n$ indica el n-ésimo elemento del producto Ax (ver 1.2.1). Si n, $m \in \mathbb{N}$ denotaremos por $n \wedge m := \min\{n, m\}$.

Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo, denotaremos por E^* a su dual algebraico, por E' a su dual topológico, por $\widehat{E}$ a su completación, por q_U al funcional de Minkowski asociado a un conjunto convexo U, por E_U al espacio seminormado en el cual los múltiplos escalares de U forman una base local de entornos de cero, por $\mathcal{U}(E)$ a una base local de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en E y por $\mathcal{Q}(E)$ a una familia de seminormas continuas que definen la topología de E. El símbolo $\text{lin}(G)$ denotará la envoltura lineal de G y $\text{acx}(G)$ la envoltura absolutamente convexa de G. Como es habitual, denotaremos por $\overline{G}$ a la clausura de G en E. Si E y F son dos espacios localmente convexos, denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio vectorial formado por los operadores lineales y continuos de E en F; si $E = F$ escribiremos simplemente $\mathcal{L}(E)$.

La terminología, notación y resultados de la teoría general de espacios localmente convexos será estándar y nos remitiremos a las monografías de Jarchow [52], Köthe [61] [62], Maddox [70], Pérez Carreras y Bonet [84] o Wilansky [113] [114].

1.1.1 A lo largo de esta memoria usaremos a menudo el concepto de *topología de Hellinger-Toeplitz* [114, p. 167, 11-2] así como las propiedades más importantes de este tipo de topologías. Comentamos aquí estos aspectos y de paso fijamos la notación que en lo sucesivo usaremos para los pares duales y las topologías polares que a ellos están asociadas.

Sea τ una topología polar definida para todos los pares duales; es decir, dado un par dual arbitrario (E, F), la topología $\tau(E, F)$ está bien definida, es más fina que la topología débil $\sigma(E, F)$ y existe una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos $\sigma(F, E)$-acotados tal que $\tau(E, F)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos que están en $\mathcal{D}$; en otras palabras, la topología τ es de tipo polar y está definida exclusivamente en términos de un par dual arbitrario. Por ejemplo, la topología débil $\sigma(E,F)$, la topología de Mackey $\mu(E,F)$, la topología fuerte $\beta(E,F)$ y la topología $\beta^*(E,F)$, son topologías de este tipo. Sin embargo, la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de F, no lo es porque depende de la topología que se haya fijado en principio sobre F.

Sea τ una topología definida para todos los pares duales (en el sentido anteriormente señalado). Se dice que τ es una *topología de Hellinger-Toeplitz* si, cualesquiera que sean (E_i, F_i) $[i = 1,2]$ y $g : E_1 \to E_2$ un operador continuo para alguna topología compatible con (E_i, F_i) $[i = 1,2]$, se tiene que g es $\tau(E_1, F_1)$-$\tau(E_2, F_2)$-continuo.

El siguiente resultado caracteriza este tipo de topologías.

Teorema. [114, p. 168, Theorem 11.2.2]. *Sea τ una topología definida para todos los pares duales. Entonces τ es una topología de Hellinger-Toeplitz si y sólo si cualesquiera que sean los pares duales (E_i, F_i) $[i = 1,2]$ y el operador $\sigma(E_1, F_1)$-$\sigma(E_2, F_2)$-continuo $g : E_1 \to E_2$ se tiene que $D \in \mathcal{D}_2$ implica que $g'(D) \in \mathcal{D}_1$; donde $\mathcal{D}_i$ $[i = 1,2]$ es una familia saturada de subconjuntos $\sigma(F_i, E_i)$-acotados tal que $\tau(E_i, F_i)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos que están en $\mathcal{D}_i$ y g' denota el operador adjunto de g.*

Como consecuencia del resultado anterior las topologías $\mu(E,F)$, $\beta(E,F)$ y $\beta^*(E,F)$ son topologías de Hellinger-Toeplitz [114, p. 168, Example 3, 4, etc.].

1.2 Sumabilidad.

En esta memoria, como ya hemos apuntado en la Introducción, vamos a trabajar con un concepto más general que el de descomposición de Schauder, que se obtiene al relajar la convergencia de las series involucradas y sustituirla por una convergencia más débil, definida a través de ciertas transformaciones matriciales. Para ello necesitaremos algunos resultados clásicos de la teoría de la sumabilidad. En esta sección recordaremos, en el caso escalar, los más importantes y, de paso, introduciremos la notación sobre matrices, sucesiones y productos que seguiremos a lo largo de toda la memoria. Los conceptos y resultados de esta sección relativos a la sumabilidad han sido extraídos del libro de Wilansky [115], aunque puede obtenerse más información de otros tales como Hardy [45], Knopp [59], Maddox [69] [70] o Shawyer y Watson [102], por citar algunos.

1.2.1 Definiciones. Sea $A = (a_{nk})$ una matriz infinita. Si $x = (x_k)$ es una sucesión de escalares, se define Ax como la sucesión cuyo término n-ésimo es

$$[Ax]_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

siempre que todas estas series sean convergentes. Esto ocurre, por ejemplo, cuando las filas de A están en φ; en cuyo caso se dice que la matriz A es *finita por filas.*

El espacio $\omega_A := \{x \in \omega : Ax \text{ está definida}\}$ se llama *dominio de* A. Si la matriz A es finita por filas entonces $\omega_A = \omega$.

El espacio $c_A := \{x \in \omega_A : Ax \in c\}$ se llama *dominio de convergencia de* A. Los elementos $x \in c_A$ se denominan sucesiones *convergentes con respecto a la matriz* A, o A*-convergentes*; en ese caso escribimos

$$A\text{-}\lim x := \lim_{n\to\infty} [Ax]_n .$$

Naturalmente, cuando A sea I, la matriz identidad, escribiremos solamente $\lim x$.

Análogamente, se dice que una sucesión x es *sumable con respecto a la matriz* A, o simplemente A*-sumable*, si la sucesión s, formada por las sumas parciales de x, es A-convergente; en ese caso escribimos $A\text{-}\sum x := A\text{-}\lim s$.

Sea $\Sigma = (\sigma_{nk})$ la matriz tal que $\sigma_{nk} = 1$, si $n \geq k$ y $\sigma_{nk} = 0$, si $n < k$; esto es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Observemos que $s = \Sigma x$ es la sucesión de sumas parciales de x. Si ahora construimos la matriz infinita $T := A\Sigma$, entonces está claro que una sucesión x es A-sumable si y sólo si x es T-convergente. Así pues, el conjunto de todas las sucesiones A-sumables es c_T. Se dice que una serie de números $\sum x_n$ tiene sumas parciales A-acotadas si para $x = (x_n)$ la sucesión $Tx = A\Sigma x$ está acotada.

En adelante, las expresiones $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$, etc., denotarán matrices infinitas. La expresión $T = (t_{nk})$ estará reservada para la matriz $T = A\Sigma$.

1.2.2 Definiciones. Se dice que una matriz A es *conservativa* si toda sucesión convergente es A-convergente; o sea, si $c \subset c_A$.

Se dice que A es *regular* si es conservativa y además mantiene el límite de las sucesiones convergentes; es decir, si $c \subset c_A$ y

$$A\text{-}\lim x = \lim x \qquad [x \in c].$$

1.2.3 Ejemplo. La matriz de Cesàro

$$C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es, quizá, el ejemplo más importante y clásico de matriz regular. Más generalmente, las matrices de Cesàro de orden $\alpha > 0$, que denotaremos por $C_\alpha = (a_{nk}^{[\alpha]})$ con

$$a_{nk}^{[\alpha]} := \frac{\binom{\alpha+n-k}{n-k}}{\binom{\alpha+n-1}{n-1}} \quad [n \geq k] \qquad a_{nk}^{[\alpha]} := 0 \quad [n < k],$$

son otros ejemplos de matrices regulares. La matriz C_α suele llamarse matriz de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a sucesiones de orden α. En este caso, los términos de la correspondiente matriz $T_\alpha = C_\alpha \Sigma$ son

$$t_{nk}^{[\alpha]} := \frac{\binom{\alpha+n-k-1}{n-k-1}}{\binom{\alpha+n-1}{n-1}} \quad [n \geq k] \qquad t_{nk}^{[\alpha]} := 0 \quad [n < k].$$

La matriz T_α se suele llamar matriz de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a series de orden α.

Los teoremas de Kojima-Schur y Silverman-Toeplitz caracterizan, respectivamente, las matrices conservativas y las matrices regulares en función de sus términos. A continuación vamos a enunciar dichos resultados; para una demostración de los mismos puede consultarse [45, p. 43], [70, p. 221] y [115, p. 6].

1.2.4 Teorema. (Kojima-Schur). *Una matriz A es conservativa si y sólo si se verifican las condiciones:*

(1) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$*; o sea, las filas de A forman un conjunto acotado de l^1, y*

(2) *para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $a_p := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}$.*

Observemos que la condición (1) en el teorema anterior es equivalente a decir que el operador $A : l^\infty \to l^\infty$ está bien definido y es acotado pues

$$||A|| := \sup\{||Ax||_\infty : ||x||_\infty \leq 1\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

Las matrices que verifican esta condición se llaman *matrices de norma finita.* Si λ es uno de los espacios c_0, c o l^∞ y $A : \lambda \to \lambda$ es un operador matricial acotado entonces $||A||$ es precisamente su norma de operador subordinada a la norma del supremo en λ. En adelante llamaremos *norma-fila* a esta norma matricial.

1.2.5 Teorema. (Silverman-Toeplitz). *Una matriz A es regular si y sólo si se verifican las condiciones:*

(1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ *para cada $k \in \mathbb{N}$ (las columnas convergen a cero),*

(2) *la matriz A es de norma finita y*

(3) *si $c_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.*

Merece la pena algún comentario sobre el significado de las condiciones del teorema de Silverman-Toeplitz. En primer lugar, la condición (1) significa que $A\text{-}\lim e^{[k]} = 0$ para cada k, siendo $e^{[k]}$ el vector coordenado k-ésimo, es decir, la sucesión que tiene todos sus términos nulos, salvo el k-ésimo que es 1. Por otro lado, la condición (3) equivale a decir que $A\text{-}\lim e = 1$, donde e es la sucesión $e := (1, 1, \ldots)$.

1.2.6 Cuando A es una matriz regular, se deduce del teorema de Silverman-Toeplitz que la matriz $T = A\Sigma$ verifica las siguientes condiciones:

(i) las columnas de T convergen a uno y

(ii) $\sup\{|t_{nk}| : n, k \in \mathbb{N}\} \leq ||A|| < +\infty$.

En la terminología de Zeller [118], la clase de las matrices que verifican la condición (i) se denota por Sp_1.

Terminamos esta sección recordando la definición de la relación "ser más fuerte" entre dos métodos de sumabilidad.

1.2.7 Definición. Sean A y B dos matrices infinitas. Se dice que el método de sumabilidad definido por B es *más fuerte* que el definido por A, lo que se escribe simplemente $A \subset B$, si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $c_A \subset c_B$ y

(2) $B\text{-}\lim x = A\text{-}\lim x$ para cada $x \in c_A$.

1.3 Triángulos.

En nuestra memoria todas las matrices que vamos a considerar son triángulos. La ventaja de trabajar con triángulos está, por un lado, en las buenas propiedades que mantiene el producto de este tipo de matrices y, por otro, en las buenas propiedades de su dominio de convergencia. Somos conscientes de que muchos de las resultados que obtendremos continúan siendo válidos para matrices más generales, como por ejemplo las matrices finitas por filas, o incluso para sucesiones de matrices que son nulas salvo, a lo sumo, una cantidad finita de términos y convergentes término a término a la matriz identidad (como las usadas en [97]). Sin embargo, por simplicidad y uniformidad en las hipótesis, hemos preferido trabajar exclusivamente en el contexto de las matrices triangulares.

1.3.1 Definición. Se dice que una matriz A es *triangular (inferior)* si $a_{nk} = 0$, para $k > n$. Por comodidad, si A es triangular y además todos sus elementos diagonales son no nulos entonces diremos que A es un *triángulo.*

Las propiedades sobre el producto de matrices que enunciamos a continuación pueden encontrarse en [115] y son las que permitirían extender muchos de nuestros resultados al caso de matrices no triangulares.

1.3.2 Proposición. *Sean y una matriz fila, A una matriz y x una matriz columna. La igualdad $y(Ax) = (yA)x$ es cierta en los siguientes casos:*

(1) *si $y \in \varphi$ y $x \in \omega_A$, o bien*

(2) *si $y \in l^1$, A tiene norma finita y $x \in l^\infty$.*

Como consecuencia, la multiplicación de matrices es una operación interna asociativa en cada uno de los siguientes conjuntos:

– *el de las matrices de norma finita,*

– *el de las matrices finitas por filas, y*

– *el de los triángulos.*

1.3.3 Observación. En el caso de dimensión finita, sabemos que las condiciones "inversa por la izquierda", "inversa por la derecha" y "existencia y unicidad de solución del sistema $Ax = y$" son equivalentes para una matriz cuadrada A. En el caso de matrices infinitas esto deja de ser cierto en general.

Por otra parte, un triángulo siempre tiene una única inversa por la derecha la cual es, además, inversa por la izquierda. Para ver esto, sea A un triángulo, entonces para cada $y \in \omega$, el sistema $Ax = y$ tiene solución única, dada por

$$x_n := \frac{1}{a_{nn}} \left(y_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} x_k \right) \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Por tanto, si $b^{[k]}$ es la única solución de $Ax = e^{[k]}$, se tiene que la matriz B, cuya k-ésima columna es $b^{[k]}$, es la única que verifica la igualdad $AB = I$. Así pues, de manera natural, se tiene que todo triángulo tiene una única inversa por la derecha. Obviamente, dicha matriz es también un triángulo. La asociatividad del producto en este caso permite ver, fácilmente, que la inversa por la derecha es también inversa por la izquierda:

$$A(BA - I) = A(BA) - A = (AB)A - A = A - A = 0.$$

Como A es un triángulo, la condición $Ax = 0$ implica que $x = 0$ y por lo tanto $BA = I$.

No obstante, con respecto a la unicidad de la inversa por la izquierda lo más que se puede asegurar es que B es la única matriz finita por filas que es inversa de A por la izquierda. En efecto, si C es finita por filas y $CA = I$ entonces por la Proposición 1.3.2 se tiene que

$$B = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

Sin embargo, un triángulo, aun siendo regular, puede tener más de una inversa por la izquierda. El siguiente ejemplo, tomado de [115], nos lo muestra. Sea A el triángulo

$$A := \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 2 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Por ser A un triángulo, tiene una única inversa por la derecha B que es también inversa por la izquierda. Puede comprobarse que $tA = 0$, donde t es la matriz fila

$$t := \left(2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots\right).$$

Por tanto, si se suma t a una fila cualquiera de B, la matriz así obtenida es también una inversa por la izquierda para A.

Si $A = (a_{nk})$ es un triángulo, denotaremos, como es habitual, por A^{-1} al único triángulo que es inversa de A por ambos lados.

Podemos resumir todas estas propiedades referentes a la multiplicación de triángulos en el siguiente resultado.

1.3.4 Proposición. *Los triángulos forman un grupo multiplicativo.*

Recordamos ahora una caracterización de la condición $A \subset B$ cuando A y B son triángulos [115, p. 13].

1.3.5 Teorema. *Sean A y B dos triángulos. Entonces $A \subset B$ si y sólo si la matriz BA^{-1} es regular.*

1.3.6 A continuación recordamos algunos resultados importantes sobre la estructura vectorial topológica de los dominios de convergencia; éstos pueden encontrarse en [113, p. 76] y [115, p. 40].

Cuando A es un triángulo, la aplicación $A : c_A \to c$ es un isomorfismo algebraico. Si definimos

$$||x||_A := ||Ax||_\infty \qquad [x \in c_A],$$

entonces

$$A : c_A \to c \quad \text{y} \quad A^{-1} : c \to c_A$$

son isometrías lineales. Por tanto, c_A es un espacio de Banach y los elementos de su dual son de la forma

$$f(x) = \mu(A\text{-}\lim x) + \langle \alpha, Ax \rangle = \mu \lim Ax + \langle \alpha, Ax \rangle \qquad [x \in c_A],$$

donde μ es un escalar y $\alpha \in l^1$. Además la norma dual en c'_A es $||f|| = |\mu| + ||\alpha||_1$.

1.4 Generalizaciones del concepto de base.

En 1927 Schauder [101] construyó una sucesión (f_n) en $C[0,1]$ tal que, para cada $f \in C[0,1]$ existe una única sucesión de escalares (α_n) verificando

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \Big| f(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(t) \Big| = 0;$$

en su honor, una sucesión de este tipo recibe el nombre de base de Schauder. Desde entonces, la teoría de bases ha alcanzado un desarrollo considerable, fundamentalmente en el marco de los espacios de Banach. El concepto de base de

Schauder ha sido generalizado en múltiples direcciones: ampliando la clase de espacios, permitiendo que los sumandos de la serie varíen en subespacios (cerrados o no) de dimensión mayor que 1 (descomposiciones o bases de subespacios), permitiendo que las sumas sean no numerables (bases generalizadas o extendidas) o que se transformen en procesos de integración (bases integrales), permitiendo que la convergencia de la serie se tenga en un sentido de sumabilidad generalizado (bases operacionales y bases de Toeplitz) o incluso que la aproximación se verifique en un sentido totalmente desordenado (bases de Markushevich). Como siempre, cada generalización ha venido provocada por situaciones o planteamientos en los cuales el concepto de base de Schauder es demasiado restrictivo para dar respuestas satisfactorias. El siguiente puede ser un buen ejemplo que explique por qué aparece el concepto de base de Toeplitz.

En el espacio $cs := c_{\Sigma}$ de las sucesiones cuya serie converge, los vectores coordenados forman una base de Schauder; es decir, si $x \in cs$ y

$$x^{[n]} := \sum_{k=1}^{n} x_k e^{[k]}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} x^{[n]} = x,$$

en la norma de cs.

Si tomamos $T = C_1 \Sigma$, donde C_1 es la matriz de Cesàro, entonces $cs_1 := c_T$ es el espacio de las sucesiones sumables en el sentido de Cesàro. En cs_1 las coordenadas no forman una base de Schauder. Sin embargo, la sucesión de las medias aritméticas de $(x^{[n]})$ converge a x en la norma de cs_1 [120]; es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x^{[k]} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k e^{[k]} = x \qquad [x \in cs_1].$$

En este sentido se dice que los vectores coordenados forman una base de Cesàro de cs_1.

Para definir un concepto de base que esté relacionado con el método de sumabilidad definido por una matriz infinita A se necesita, en primer lugar, extender la definición de sucesión A-convergente al caso de sucesiones en un espacio vectorial topológico. Sin duda, no es nueva la idea de generalizar la teoría de la sumabilidad clásica al caso, incluso, de matrices infinitas de operadores en espacios vectoriales topológicos y aparece en trabajos como el de Ramanujan [87] y Robinson [90], en los cuales se obtienen teoremas de tipo Kojima–Schur y Silverman–Toeplitz en espacios de Fréchet. Muchos resultados relativos a la sumabilidad generalizada aparecen recopilados en la monografía de Maddox [69].

1.4.1 Definiciones. Sea E un espacio localmente convexo y A una matriz infinita. Si (x_k) es una sucesión en E, se define la sucesión $A(x_k)$ como aquella cuyos términos vienen dados por

$$[A(x_k)]_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

siempre que todas estas series sean convergentes en E. Se dice que la sucesión (x_k) es *A-convergente* en E si $A(x_k)$ está definida y converge en E. En ese caso escribiremos

$$A\text{-}\lim(x_k) := \lim_{n\to\infty} [A(x_k)]_n.$$

Análogamente, se dice que (x_k) es *A-sumable* si es T-convergente para $T = A\Sigma$.

Se dice que una matriz A es *regular para* E si toda sucesión (x_k) que sea convergente en E es también A-convergente a su límite, o sea

$$A\text{-}\lim(x_k) = \lim(x_k).$$

Si $E = \mathbb{K}$ este concepto coincide con el de matriz regular dado en la Definición 1.2.2.

A continuación veremos que este concepto en realidad no depende de E (al menos en los casos que más nos interesan) y que las matrices regulares para E son, sencillamente, las matrices regulares. Una demostración directa para espacios de Banach puede ser consultada en [105, Ch. III, §11. Lema 11.1]. En el caso de espacios de Fréchet dicha conclusión puede ser extraída de [87] y en el caso de espacios localmente convexos la prueba se deduce de los resultados de [75, Cap. 1]. No obstante, a partir del caso escalar se puede dar una prueba más sencilla, distinta de las anteriormente mencionadas.

1.4.2 Proposición. *Sea E un espacio localmente convexo no trivial y A una matriz infinita. Supongamos que E es sucesionalmente completo o bien que A es finita por filas. Entonces A es regular para E si y sólo si es regular.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que A es regular para E. Sea $(\alpha_k) \in c$ con límite α. Sea $x \in E$, no nulo y $q \in \mathcal{Q}(E)$, una seminorma que no se anule sobre x. Como A es regular para E tenemos que $A(\alpha_k x)$ está definida (en consecuencia $A(\alpha_k)$ también) y

$$A\text{-}\lim(\alpha_k x) = \alpha x;$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\alpha_k\right| q(x) = 0.$$

Por lo tanto $A\text{-}\lim(\alpha_k) = \alpha$.

Recíprocamente, supongamos que A es regular y sea (x_k) una sucesión que converge a x en E. En primer lugar, si A es finita por filas es evidente que las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \qquad [n \in \mathbb{N}]$$

son convergentes en E. Por otra parte, si E es sucesionalmente completo entonces dichas series convergen en E porque son de Cauchy. Para ver esto, basta tener en cuenta que la sucesión (x_k) es acotada y que las filas de A son, por el teorema de Silverman–Toeplitz, absolutamente sumables. A continuación, veamos que la sucesión $A(x_k)$ también converge a x en E. Para ello, fijamos $\varepsilon > 0$ y $q \in \mathcal{Q}(E)$. Como A es regular y la sucesión (x_k) converge a x se tiene que existen k_0 y $n_0 > k_0$ en $\mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned}
q(x - x_k) &< \frac{\varepsilon}{3(\|A\|+1)} \qquad [k > k_0],\\
\left|1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right| q(x) &< \frac{\varepsilon}{3} \qquad [n > n_0] \quad \text{y}\\
|a_{nk}|q(x - x_k) &< \frac{\varepsilon}{3k_0} \qquad [k = 1, 2, \ldots, k_0] \quad [n > n_0].
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}
q\Big(x - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\Big) &= q\left(\Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\Big)x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x - x_k)\right)\\
&\le \left|1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right| q(x) + \sum_{k=1}^{k_0} |a_{nk}|q(x - x_k) + \sum_{k>k_0} |a_{nk}|q(x - x_k)\\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad [n > n_0],
\end{aligned}$$

con lo cual queda probado que (x_k) es A-convergente a x en E. ∎

La consistencia de dos métodos de sumabilidad en un espacio localmente convexo se puede definir de manera análoga al caso escalar.

1.4.3 Definición. Sean A y B dos matrices infinitas y E un espacio localmente convexo. Se dice que el método de sumabilidad definido por B es *más fuerte en* E que el definido por A, lo que se escribe simplemente de la forma $A \subset_E B$, si toda sucesión A-convergente en E es B-convergente a su A-límite.

El siguiente resultado muestra que esta definición no depende del espacio E en el caso en que A y B son triángulos. En la prueba usaremos un resultado análogo a la Proposición 1.3.2 que es válido (con los cambios oportunos) en el caso en que la columna x sea de vectores, en lugar de escalares.

1.4.4 Proposición. *Sean A y B dos triángulos y E un espacio localmente convexo no trivial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $A \subset B$.

(2) *La matriz* BA^{-1} *es regular.*

(3) $A \subset_E B$.

DEMOSTRACIÓN:

Ya se estableció en el Teorema 1.3.5 que las condiciones (1) y (2) son equivalentes.

Veamos que (3) $\Rightarrow$ (1). Sean $(\alpha_k) \in c_A$, $\alpha := A\text{-}\lim(\alpha_k)$ y $x \in E$, no nulo. Igual que hicimos al comienzo de la demostración de 1.4.2, puede comprobarse que $(\alpha_k x)$ es A-convergente a αx en E. Como $A \subset_E B$ se tiene que $(\alpha_k x)$ es B-convergente a αx en E. Tomando una seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$ tal que $q(x) \neq 0$ se deduce que (α_k) es B-convergente a α. Esto prueba que $A \subset B$.

Veamos que (2) $\Rightarrow$ (3). Sea (x_k) una sucesión A-convergente a x en E. Entonces, usando la asociatividad del producto en el caso de los triángulos (1.3.2) es inmediato comprobar

$$B(x_k) = (BA^{-1})\big(A(x_k)\big).$$

Ahora, como x es el límite de $A(x_k)$, la Proposición 1.4.2 asegura que $B(x_k)$ también converge a x en E. ∎

Volviendo al problema de las generalizaciones del concepto de base vemos que relajando la sumabilidad de las series se puede definir un concepto más general que el de base de Schauder y que engloba también al de base de Cesàro. Las siguientes definiciones están tomadas de [115]. Otras definiciones equivalentes pueden encontrarse en la monografía de Singer [105].

1.4.5 Definiciones. Sea E un espacio localmente convexo. Un *sistema biortogonal* en E es una pareja de sucesiones $\{(u_k),(u'_k)\}$ de tal manera que $u_k \in E$, $u'_k \in E'$ y $\langle u_n, u'_k\rangle = \delta_{nk}$ $\quad [n,k \in \mathbb{N}]$; donde δ_{nk} es la función delta de Kronecker.

Sea A una matriz regular. Se dice que una sucesión (u_k) en E es una *base de Toeplitz de E con respecto a la matriz A* si existe una sucesión (u'_k) en E' tal que $\{(u_k),(u'_k)\}$ es un sistema biortogonal en E y para cada $x \in E$ se tiene que la sucesión $\big(\langle x, u'_k\rangle u_k\big)$ es A-sumable y su A-suma es x. O sea,

$$T\text{-}\lim\big(\langle x, u'_k\rangle u_k\big) = x \qquad [x \in E]$$

en la topología de E, siendo $T = A\Sigma$.

Cuando la matriz A esté fijada de antemano o se deduzca del contexto diremos simplemente que (u_k) es una base de Toeplitz de E. La correspondiente sucesión (u'_k) se llama *sucesión de coeficientes funcionales* asociados a (u_k).

Como casos particulares, las bases de Schauder y de Cesàro son las bases de Toeplitz con respecto a la matriz identidad y a la matriz C_1, respectivamente. Usando la Proposición 1.4.4 también se ve que toda base de Schauder es una base de Toeplitz con respecto a cualquier triángulo regular A. A continuación recordamos algunos ejemplos importantes de espacios con base de Toeplitz.

1.4.6 Ejemplos.

(1) [105, Ch. 3, §11. Example 11.1]. En el espacio $C[0,2\pi]$, formado por las funciones continuas en el intervalo $[0,2\pi]$ y dotado de la topología de la norma del supremo, se tiene que la sucesión $(x_k)_{k\geq 0}$ dada por

$$x_0(t) = \frac{1}{2}, \quad x_{2k-1}(t) = \operatorname{sen}((2k-1)t), \quad x_{2k}(t) = \cos(2kt) \quad [0 \leq t \leq 2\pi, k \geq 1],$$

no es una base de Schauder de $C[0, 2\pi]$ [104, Ch. 1, §4. Example 4.1]. Sin embargo, como consecuencia del teorema de Fejér [122, Ch. III, Theorem (3.4)] se tiene que (x_k) es una base de Toeplitz de $C[0, 2\pi]$ con respecto a la matriz de Cesàro. Aún más, una extensión de Riesz del teorema de Fejér [122, Ch. III, Theorem (5.1)] permite probar que (x_k) es una base de Toeplitz de $C[0, 2\pi]$ con respecto a la matriz de sumación de Cesàro de orden α, para cada $\alpha > 0$. Para obtener más información sobre este tema pueden consultarse [45], [104] y [105]. Otros sistemas de tipo trigonométrico, que constituyen bases de Cesàro de orden α en ciertos espacios de funciones de potencia integrable, fueron estudiados por Gapoškin [36].

(2) [105, Ch. 3, §11. Example 11.2]. El espacio $A(D)$, formado por las funciones complejas de una variable que son analíticas en $|z| < 1$ y continuas en $|z| \leq 1$, se llama *álgebra del disco* y es un espacio de Banach con la norma del supremo. Lo mismo ocurre con el espacio $A(\Omega)$ formado por las funciones analíticas en Ω y continuas en la clausura de Ω, para cada subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ que sea abierto, acotado y equilibrado. Casos particulares de conjuntos de este tipo son el *n-disco* D^n (producto cartesiano de n discos) y la *n-bola* $B^n := \{(z_j) \in \mathbb{C}^n : \sum |z_j|^2 \leq 1\}$. La sucesión (x_k) dada por

$$x_k(z) := z^k \qquad [|z| \leq 1] \quad [k \geq 0]$$

es una base de Cesàro del álgebra del disco pero no es una base Schauder. El resultado clásico de Fejér establece además que los operadores $T_n := [T(x_k)]_n$ son de norma uno, donde T es la matriz de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a series. Este ejemplo ilustra el hecho de que, a veces, puede resultar extremadamente difícil encontrar bases de Schauder en un espacio. En este caso, fue Bochkariev [13] en 1974 el primero en probar que el sistema de Franklin (la ortogonalización de Gram–Schmidt del sistema de Schauder en el espacio de Hilbert $L^2[0, 1]$) es una base de Schauder del álgebra del disco. Como consecuencia, el álgebra del n-disco también posee base de Schauder [83, Corollary 10.2 p. 68]. En 1989 Bourgain [14] respondió afirmativamente (sin dar una construcción explícita) a una cuestión planteada por Pełczyński en 1977 [83, Problem 10.1 p. 68]: ¿Posee base de Schauder el álgebra de la n-bola $A(B^n)$?

Actualmente el problema de la existencia de una base de Schauder en el espacio $A(\Omega)$ permanece abierto.

(3) [17] Sea $\alpha \in (0, 1)$, $f_h(x) := f(x+h)$ y $\|\ \|$ la norma del supremo en $L^\infty[0, 2\pi]$.

Se definen los espacios de funciones que satisfacen una condición de Lipschitz

$$\text{Lip } \alpha := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es } 2\pi\text{–periódica y } ||f_h - f|| = O(|h|^\alpha)\ (h \to 0)\}$$

$$\text{lip } \alpha := \{f \in \text{Lip } \alpha : ||f_h - f|| = o(|h|^\alpha)\ (h \to 0)\}.$$

Entonces Lip α y lip α con la norma

$$||f||_\alpha := \max\Big\{||f||,\ \sup_{h \neq 0} \frac{||f_h - f||}{|h|^\alpha}\Big\}$$

son espacios de Banach y, además, Lip α es el bidual de lip α. En el trabajo al que hacemos referencia, Buntinas prueba que lip α y (lip $\alpha)'$ tienen base de Cesàro. Como consecuencia el espacio $\big[\text{Lip } \alpha, \sigma\big(\text{Lip } \alpha, (\text{lip } \alpha)'\big)\big]$ también tiene base de Cesàro.

(3) Otros ejemplos aparecen cuando se estudian espacios obtenidos como imagen inversa de espacios de sucesiones mediante transformaciones matriciales. Por ejemplo, consideremos el espacio $\big[\text{ces}^{-1}(l^p), ||\ ||\big]$ dado por

$$\text{ces}^{-1}(l^p) := \left\{x = (x_k) \in \omega : ||x||^p := \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{S_n x}{n}\right|^p < \infty\right\};$$

donde $S_n x := x_1 + \cdots + x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En este espacio las coordenadas no forman una base de Schauder [54, Theorem 5] pero sí una base de Cesàro [31, Proposición 2.5].

1.4.7 Observación. Sea λ un espacio de sucesiones escalares que contiene a φ y tal que la inclusión $\lambda \subset \omega$ es continua (un K-espacio en la terminología de [95]). Es importante observar que si los vectores coordenados $(e^{[k]})$ forman una base de Toeplitz de λ con respecto a una matriz regular A entonces, por ser T una matriz de tipo Sp_1 (1.2.6), se puede comprobar [16] que la sucesión de funcionales asociada es la de las coordenadas. Por lo tanto, la sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz de λ con respecto a la matriz A si y sólo si

$$T\text{-}\lim(x_k e^{[k]}) = x \qquad [x = (x_k) \in \lambda]$$

en la topología de λ, donde $T = A\Sigma$.

En el caso particular en que A es un triángulo regular, es muy sencillo comprobar que c_T es un K-espacio que contiene a φ y por lo tanto es válida la caracterización anterior. En efecto, si $x = (x_k) \in c_T$ entonces

$$|x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}^{-1}[Tx]_k\right| \leq ||x||_T \sum_{k=1}^{n} |t_{nk}^{-1}|$$

donde (t_{nk}^{-1}) denota la matriz T^{-1}; luego c_T es un K-espacio. El motivo de que contenga a φ es la regularidad de la matriz A.

Sabemos que la sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Schauder de cs y una base de Cesàro de cs_1 [120]. En otras palabras, la sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz de c_Σ con respecto a la matriz I y de c_T con respecto a la matriz C_1, siendo $T = C_1\Sigma$. Ahora la pregunta natural es: ¿Cómo tiene que ser A para que $(e^{[k]})$ sea una base de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A, con $T = A\Sigma$?

En lo que resta de sección, A es un triángulo regular fijo y $T = A\Sigma$. Cuando digamos que una sucesión es una base de Toeplitz, se sobreentiende que lo es con respecto a la matriz A. La notación y los comentarios que siguen no son sino una reformulación de lo anterior y nos muestran que el concepto de descomposición de Toeplitz, que estudiaremos en el siguiente capítulo, aparece de manera natural.

1.4.8 Definición. Se definen los operadores $\pi_k, \tau_n : \omega \longrightarrow \varphi$ $[k, n \in \mathbb{N}]$, como

$$\begin{aligned} \pi_k x &:= x_k e^{[k]} \\ \tau_n x &:= \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\pi_k x = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k e^{[k]} \qquad [x = (x_k) \in \omega]. \end{aligned}$$

1.4.9 Observaciones.

(1) $\{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ es una sucesión de proyecciones continuas (para la topología de la convergencia coordenada a coordenada) y ortogonales dos a dos.

(2) Para cada $x \in \omega$, la sucesión $(x^{[n]})$ de las secciones de x viene dada, precisamente, por $(x^{[n]}) = \Sigma(\pi_k x)$.

(3) Si $x \in \omega$ entonces $(\tau_n x)$ puede expresarse de diversas formas:

$$(\tau_n x) = T(\pi_k x) = A\Sigma(\pi_k x) = A(x^{[n]}).$$

(4) Los operadores π_k y τ_n son matriciales. En concreto, nos interesará la matriz de τ_n que denotaremos igualmente por τ_n. Como

$$\tau_n x = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k e^{[k]} \qquad [x = (x_k) \in \omega],$$

se ve inmediatamente que $\tau_n = \operatorname{diag}(t_{n1}, t_{n2}, \ldots)$; es decir, τ_n es una matriz diagonal y su diagonal es precisamente la fila n-ésima de la matriz T.

(5) Decir que la sucesión $(e^{[k]})$ es una base de de Toeplitz de un K-espacio λ que contiene a φ es equivalente a decir que la sucesión de operadores (τ_n) converge puntualmente a la identidad en λ. En el caso particular $\lambda = c_T$, tenemos un espacio de Banach. Por consiguiente, si $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz de c_T entonces el teorema de Banach-Steinhaus asegura que (τ_n) es una sucesión equicontinua de operadores sobre c_T. El recíproco también es cierto como muestra el siguiente resultado que usaremos a menudo en la memoria para el caso particular que nos interesa. Más adelante, cuando definamos el concepto de descomposición de Toeplitz, probaremos un resultado análogo en el caso vectorial.

1.4.10 Teorema. [16, Theorem 8] y [15, (3.4) Corollary]. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz de c_T.*

(2) *La sucesión de operadores (τ_n) es equicontinua sobre c_T.*

(3) *Si denotamos por (t^{-1}_{nk}) a la matriz T^{-1} entonces*

$$\sup_{m,n} \sum_j \Big| \sum_k t_{mk} t_{nk} t^{-1}_{kj} \Big| < +\infty.$$

Otras caracterizaciones del hecho de que las coordenadas formen una base de Toeplitz de ciertos dominios de sumabilidad, más generales que c_T, pueden encontrarse en [49]. En este trabajo se obtienen también otros ejemplos de bases de Toeplitz, distintos de las coordenadas, en dominios de sumabilidad de Cesàro de orden arbitrario y con pesos de variación lenta.

Terminamos este capítulo recogiendo algunos resultados importantes, relativos a la posibilidad de que $(e^{[k]})$ sea una base de Toeplitz de c_T. Antes vamos a recordar la definición de dos importantes espacios de sucesiones asociados a este espacio. Abundante información sobre este tema puede ser consultada en [15], [16], [93], [113] y [115].

1.4.11 Definiciones. Se definen los espacios

$$c_T^\phi := \left\{ y = (y_k) \in \omega : \text{ existe } f \in c_T' \text{ tal que } y_k = f(e^{[k]}) \quad [k \in \mathbb{N}] \right\}$$

$$(c_T \to c_T) := \left\{ y \in \omega : xy \in c_T \quad [x \in c_T] \right\}$$

donde xy denota el producto coordenada a coordenada.

El espacio c_T^ϕ se llama *dual sucesional* de c_T y es una representación del dual de $(\varphi, ||\cdot||_T)$ y de su clausura con la topología inducida por c_T.

El espacio $(c_T \to c_T)$ se llama *álgebra de multiplicadores.*

En nuestro caso particular tenemos los siguientes resultados que pueden encontrarse en el trabajo de Buntinas [16]. Otras aportaciones relacionadas con estas propiedades se deben a Ruckle [93] que utiliza la terminología de *espacio suma* para designar a los dominios de sumabilidad que verifican el Teorema 1.4.10.

1.4.12 Proposición. *Si A es un triángulo regular entonces $c_T^\phi \subset c$.*

1.4.13 Teorema. [16, Theorem 8]. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A.*

(2) $c_T^\phi = (c_T \to c_T)$.

1.4.14 Teorema. [16, Theorem 10]. *Sea A un triángulo regular tal que la sucesión $(e^{[k]})$ es una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces $(c_T \to c_T)$ representa al dual de c_T, la norma dual hace de $(c_T \to c_T)$ un álgebra de Banach bajo la multiplicación coordenada a coordenada y la expresión general de una forma lineal y continua sobre c_T es*

$$\langle x, y\rangle_{(c_T, c_T')} = T\text{-}\lim xy \qquad \left[y \in (c_T \to c_T)\right] \quad [x \in c_T].$$

En el caso particular en que A es la matriz C_α de Cesàro de orden $\alpha \geq 0$, es ya conocido [120] que las coordenadas forman una base de Cesàro (de orden α) del correspondiente espacio de sucesiones c_{T_α} y se suelen utilizar las notaciones

$$cs_\alpha := c_{T_\alpha} \qquad bv_\alpha := c'_{T_\alpha} \qquad [\alpha > 0];$$

(para $\alpha = 0$ se escriben, simplemente, cs y bv). Además, el criterio de Hardy–Bohr–Bosanquet caracteriza los elementos de bv_α:

$$bv_\alpha = \left\{ y = (y_k) \in \omega \ : \ \sum_k k^\alpha |\Delta^{\alpha+1} y_k| + \sup_k |y_k| < \infty \right\};$$

donde $\Delta^{\alpha+1}$ es el operador diferencia de orden $\alpha + 1$. Se sabe también que la norma dual en bv_α viene dada por la expresión

$$||y||_{bv_\alpha} := \sum_k k^\alpha |\Delta^{\alpha+1} y_k| + \lim_k |y_k| \qquad [y \in bv_\alpha].$$

1.5 Algunos resultados sobre límites dobles.

Antes de comenzar con nuestro estudio de las descomposiciones de Toeplitz necesitamos algunos resultados previos sobre límites dobles. Aunque estos resultados son bien conocidos para el caso de sucesiones, no conocemos ninguna referencia en la que puedan encontrarse para el caso de redes. No obstante, las pruebas que damos son extensiones de las del caso de sucesiones.

1.5.1 Lema. *Sea E un espacio localmente convexo y $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ una red doble en E tal que para cada $i \in I$ y $j \in J$ existen, respectivamente, los límites*

$$y_i := \lim_{j \in J} x_{ij} \qquad z_j := \lim_{i \in I} x_{ij}.$$

Si la convergencia de alguna de estas colecciones de límites es uniforme, entonces las redes

$$(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}\,, \quad (y_i)_{i \in I}\,, \quad (z_j)_{j \in J}$$

son de Cauchy en E.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos, por ejemplo, que la convergencia es uniforme en I. Entonces, dada $q \in \mathcal{Q}(E)$ existe $j_0 \in J$ tal que

$$q(x_{ij} - y_i) \leq \frac{1}{3} \qquad [j \geq j_0] \quad [i \in I].$$

Por otro lado, la red $(x_{ij_0})_{i \in I}$ converge; en particular dicha red es de Cauchy y por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que

$$q(x_{i_1 j_0} - x_{i_2 j_0}) \leq \frac{1}{3} \qquad [i_1, i_2 \geq i_0].$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned} q(y_{i_1} - y_{i_2}) &\leq q(y_{i_1} - x_{i_1 j_0}) + q(x_{i_1 j_0} - x_{i_2 j_0}) + q(x_{i_2 j_0} - y_{i_2}) \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \qquad [i_1, i_2 \geq i_0]. \end{aligned}$$

Con esto queda probado que la red $(y_i)_{i \in I}$ es de Cauchy en E.

En segundo lugar se tiene que

$$\begin{aligned} q(x_{i_1 j_1} - x_{i_2 j_2}) &\leq q(x_{i_1 j_1} - y_{i_1}) + q(y_{i_1} - y_{i_2}) + q(y_{i_2} - x_{i_2 j_2}) \\ &\leq \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} \leq 2 \qquad [i_1, i_2 \geq i_0] \quad [j_1, j_2 \geq j_0]. \end{aligned}$$

Por tanto $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ es una red de Cauchy.

Finalmente, por la continuidad de la seminorma q, basta tomar límites en la desigualdad anterior (en los índices $\{i_1 \in I : i_1 \geq i_0\}$ y $\{i_2 \in I : i_2 \geq i_0\}$) para ver que

$$q(z_{j_1} - z_{j_2}) \leq 2 \qquad [j_1, j_2 \geq j_0].$$

Por consiguiente la red (z_j) también es de Cauchy. ∎

1.5.2 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo completo y $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ una red doble en E tal que, para cada $i \in I$ y $j \in J$ existen, respectivamente, los límites*

$$y_i = \lim_{j \in J} x_{ij} \qquad z_j = \lim_{i \in I} x_{ij}.$$

Si la convergencia de alguna de estas colecciones de límites es uniforme, entonces las redes

$$(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}\,, \quad (y_i)_{i \in I}\,, \quad (z_j)_{j \in J}$$

convergen en E y lo hacen al mismo límite.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos, por ejemplo, que la convergencia es uniforme en I. Entonces la red $(y_i)_{i\in I}$ es de Cauchy por el lema anterior. Como E es completo, la red $(y_i)_{i\in I}$ converge a un cierto $y \in E$. Veamos que la red $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ también converge a y en E. Para ello tomamos una seminorma $q \in \mathcal{Q}(E)$; entonces existen $i_0 \in I$ y $j_0 \in J$ tales que

$$\begin{aligned} q(y_i - y) &\leq \frac{1}{2} \qquad [i \geq i_0] \quad \text{y} \\ q(x_{ij} - y_i) &\leq \frac{1}{2} \qquad [j \geq j_0] \quad [i \in I]. \end{aligned}$$

Así pues, usando estas dos desigualdades, se deduce que

$$\begin{aligned} q(x_{ij} - y) &\leq q(x_{ij} - y_i) + q(y_i - y) \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad [i \geq i_0] \quad [j \geq j_0] \end{aligned}$$

y por lo tanto la red $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ converge a y en E.

Por último, dada la continuidad de la seminorma q, para obtener la convergencia de la red $(z_j)_{j\in J}$ a y basta tomar límites en la desigualdad anterior en el conjunto $\{i \in I : i \geq i_0\}$. ■

Capítulo II

Descomposiciones de Toeplitz.

2.1 Descomposiciones de Toeplitz.

En esta sección introducimos el concepto de descomposición de Toeplitz, que extiende al ya conocido de descomposición de Schauder de una manera análoga a como el concepto de base de Toeplitz extiende al de base de Schauder.

2.1.1 Definición. [105, Ch. III, § 15. Definitions 15.3 y 15.4]. Un *sistema ortogonal de proyecciones* en un espacio localmente convexo E es una sucesión (P_k) de proyecciones, $P_k : E \to E$, no triviales, continuas y ortogonales dos a dos. Denotaremos por E_k al subespacio imagen de E por P_k. Como P_k es una proyección continua sobre E, se tiene que cada E_k es un subespacio cerrado complementado de E.

Un sistema ortogonal de proyecciones (P_k) en E, se llama *descomposición de Schauder* de E si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k x = x \qquad [x \in E]$$

en la topología de E.

2.1.2 Definición. Sean E un espacio localmente convexo, (P_k) un sistema ortogonal de proyecciones en E y A un triángulo regular. Se dice que (P_k) es una *descomposición de Toeplitz de E con respecto a la matriz A* si

$$T\text{-}\lim(P_k x) = x \qquad [x \in E]$$

en la topología de E, donde $T = A\Sigma$. Cuando la matriz A esté fijada de antemano o se deduzca claramente del contexto, diremos simplemente que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E.

Si tenemos una descomposición de Toeplitz de E entonces la identidad en E está aproximada puntualmente por la sucesión de operadores $(T_n) : E \to E$, siendo

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P_k \qquad [n \in \mathbb{N}]$$

y si definimos $\varphi(E) := \operatorname{lin}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}$, entonces $\varphi(E)$ es denso en E.

Toda base de Toeplitz de un espacio localmente convexo induce una descomposición en subespacios E_k de dimensión uno.

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de la Proposición 1.4.4 y establece que el concepto de descomposición de Toeplitz es más débil que el de descomposición de Schauder.

2.1.3 Proposición. *Sean A y B dos triángulos regulares tales que $A \subset B$. Entonces toda descomposición de Toeplitz de E con respecto a la matriz A lo es también con respecto a la matriz B. En particular, toda descomposición de Schauder es una descomposición de Toeplitz con respecto a cualquier triángulo regular.*

2.1.4 Observaciones. El hecho de que un espacio E posea una descomposición de Toeplitz implica la existencia de una sucesión (E_k) de subespacios cerrados de E verificando la siguiente propiedad:

Si (x_k) es tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$ entonces $x_k = 0$ $[k \in \mathbb{N}]$.

En este caso, en el que sólo la suma de ceros puede ser cero, se dice que (E_k) es una sucesión *ω-linealmente independiente* [104, Ch. I, § 6. Definition 6.1.(b)]. Otras terminologías usadas para este concepto por diversos autores son *fuertemente* *linealmente independiente* [92] (aquí el término fuerte se refiere a la convergencia de la serie en la topología fuerte de un F-espacio) o *topológicamente linealmente independiente* [63].

Un concepto más restrictivo que el de ω-independencia es el de *sistema biortogonal generalizado* o *sistema de Markushevich* [105, Ch. III, § 15. Definition 15.4]. Un sistema de Markushevich en un espacio localmente convexo E es una sucesión (E_k, P_k) donde (P_k) es un sistema ortogonal de proyecciones en E y $E_k = P_k(E)$ $[k \in \mathbb{N}]$. Si además (P_k) es *total* en E, es decir,

$$P_k x = 0 \qquad [k \in \mathbb{N}] \quad \text{implica que} \quad x = 0 \qquad [x \in E];$$

y *completo*, o sea, $\overline{\varphi(E)} = E$; entonces se dice que (E_k, P_k) es una *descomposición de Markushevich* o *M-descomposición* de E [105, Ch. III, § 15. Definition 15.20].

Una *descomposición fuerte de Markushevich* o *M-descomposición fuerte* [105, Ch. III, § 8. Definition 8.4] es un sistema de Markushevich (E_k, P_k) tal que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus S} \ker(P_k) = \overline{\operatorname{lin}}\Big\{\bigcup_{k\in S} E_k\Big\} \qquad [S \subset \mathbb{N}].$$

El concepto de descomposición de Toeplitz es intermedio entre el de descomposición de Markushevich fuerte y el de descomposición de Schauder. En efecto, si $P_k x = 0$ $[k \in \mathbb{N} \setminus S]$ entonces

$$x = T\text{-}\lim(P_k x) \in \overline{\operatorname{lin}}\Big\{\bigcup_{k\in S} E_k\Big\}.$$

Recientemente, Giménez, y López-Molina [41] han introducido el concepto de $\mathcal{F}$-descomposición de Schauder que engloba los conceptos de descomposición de Schauder y también sus extensiones vía sumabilidad, no sólo en el sentido de Toeplitz sino también en otros sentidos como el de Abel o el de Borel. En el trabajo al que hacemos referencia el objetivo principal es obtener teoremas de continuidad de tipo De Wilde en diversas clases de espacios vectoriales topológicos, no necesariamente localmente convexos.

2.1.5 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Entonces $T_n(E) = F_{n1} \oplus F_{n2} \oplus \cdots \oplus F_{nn}$ $[n \in \mathbb{N}]$, donde*

$$F_{nk} = \begin{cases} E_k & si\ t_{nk} \neq 0 \\ \{0\} & si\ t_{nk} = 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, si $x \in T_n(E)$ entonces podremos escribir

$$x = T_n y = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P_k y,$$

para algún $y \in E$. Es inmediato comprobar que $x \in \bigoplus_{k=1}^{n} F_{nk}$.

Para ver la otra inclusión, sea

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \in \bigoplus_{k=1}^{n} F_{nk}.$$

Basta comprobar, usando la ortogonalidad dos a dos de (P_k) que

$$T_n\Big(\sum_{k=1}^{n} s_{nk} x_k\Big) = x,$$

donde cada s_{nk} se elige de tal manera que $s_{nk} t_{nk} = 1 \quad [t_{nk} \neq 0]$. ■

Una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E induce siempre una descomposición de Toeplitz en su dual topológico E', dotado de la topología $\sigma(E', E)$; a saber, la formada por los conjugados de las proyecciones (P_k). Recordemos que $P'_k : E' \rightarrow E'$ definida por

$$\langle x, P'_k x' \rangle := \langle P_k x, x' \rangle \qquad [x \in E] \quad [x' \in E'] \quad [k \in \mathbb{N}]$$

es $\sigma(E', E)$-continua si P_k es continua y es una proyección si P_k lo es. Aún más, si (P_k) es un sistema ortogonal de proyecciones sobre E entonces (P'_k) es un sistema ortogonal de proyecciones sobre $[E', \sigma(E', E)]$. Recogemos este importante resultado en la siguiente proposición.

2.1.6 Proposición. *Sea E un espacio localmente convexo y (P_k) una descomposición de Toeplitz de E. Entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E', \sigma(E', E)]$. Además los espacios $P'_k(E')$ en que se descompone E' pueden identificarse con los correspondientes E'_k y se tiene que las topologías débil, de Mackey y fuerte inducidas por E sobre los E_k coinciden, respectivamente, con las topologías débil, de Mackey y fuerte de los pares duales (E_k, E'_k).*

DEMOSTRACIÓN:

Este resultado puede encontrarse, para descomposiciones de Schauder en [55]. Dado que en la última parte del mismo sólo se usa el hecho de que P_k es una proyección continua sobre E, lo único que tenemos que probar es que para cada $x' \in E'$ se verifica que

$$T\text{-}\lim(P_k' x') = x'$$

en la topología $\sigma(E', E)$. Pero eso se deduce inmediatamente del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, T_n' x'\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n x, x'\rangle = \langle x, x'\rangle \qquad [x \in E] \quad [x' \in E'].$$

donde $T_n' := \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P_k'$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ∎

2.1.7 Observación. Si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E, $x \in E$ y $x' \in E'$ entonces

$$\langle P_k x, x'\rangle = \langle P_k^2 x, x'\rangle = \langle P_k x, P_k' x'\rangle \qquad [k \in \mathbb{N}]$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\langle x, x'\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T_n x, x'\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} \langle P_k x, x'\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} \langle P_k x, P_k' x'\rangle = T\text{-}\lim\big(\langle P_k x, P_k' x'\rangle\big).\end{aligned}$$

Es decir, para cada $x \in E$ y $x' \in E'$ se tiene que la sucesión $(\langle P_k x, P_k' x'\rangle)$ es un elemento de c_T cuyo T-límite es precisamente $\langle x, x'\rangle$.

Recordemos la Definición 1.4.8 y las observaciones hechas en 1.4.7 y 1.4.9. En ellas se pone de manifiesto que (π_k) es un sistema ortogonal de proyecciones sobre cualquier K-espacio de sucesiones. Además, el Teorema 1.4.10 caracteriza los triángulos regulares A para los cuales (π_k) es una descomposición de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A. Aquí son los (τ_n) los que hacen el papel de (T_n) en la definición anterior. Asimismo, todos los ejemplos de bases de Toeplitz presentados en el capítulo anterior son, evidentemente, descomposiciones de Toeplitz. Antes de pasar a ofrecer otros ejemplos y comentarios sobre la definición anterior establecemos un sencillo resultado que, sin embargo, tendrá importantes consecuencias.

2.1.8 Lema. *Sea E un espacio localmente convexo, (P_k) un sistema ortogonal de proyecciones en E y A un triángulo regular. Si $x \in \varphi(E)$ entonces $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$, en cualquier topología vectorial definida sobre E.*

Como consecuencia, si la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua para alguna topología localmente convexa τ definida sobre E entonces (P_k) es una descomposición de Toeplitz de (E, τ) si y sólo si $\varphi(E)$ es denso en (E, τ).

DEMOSTRACIÓN:

Cualquier $x \in \varphi(E)$ puede escribirse como una suma finita $x = \sum_{k=1}^{m} x_k$ donde cada $x_k \in E_k$. Por la ortogonalidad de las proyecciones se tiene que

$$T_n x = \sum_{k=1}^{m} t_{nk} x_k \qquad [n \geq m],$$

es una combinación lineal finita de vectores fijos en la cual cada uno de los coeficientes converge a 1 con n (ver 1.2.6).

Para ver la segunda afirmación basta tener en cuenta que la convergencia puntual de una sucesión equicontinua de operadores se tiene sobre todo el espacio si se tiene sobre un conjunto total (un conjunto se dice que es total si su envoltura lineal es densa) [62, Ch. 8, § 39.4.(1)]. La continuidad de la sucesión de proyecciones (P_k) para la topología τ se puede deducir fácilmente de la continuidad de la sucesión (T_n) ya que $(P_k) = T^{-1}(T_n)$ y la matriz T^{-1} es triangular. ∎

Un resultado análogo ha sido profusamente utilizado en el contexto de los espacios de sucesiones escalares [95, 2.4 Theorem] y era ya conocido por Zeller.

En un trabajo muy reciente de Ruckle y Saxon [97, Theorem 3.3] aparece también un resultado del mismo tipo ligado a un concepto de convergencia seccional generalizada de tipo Toeplitz en espacios de sucesiones que describimos a continuación:

> Supongamos que (T_n) es una sucesión de matrices infinitas tal que cada T_n tiene, a lo sumo, una cantidad finita de términos no nulos y converge término a término a la matriz identidad. Se dice que un K-espacio λ de sucesiones tiene la propiedad $AK(T_n)$ si $\lim T_n x = x$ $[x \in \lambda]$ en la topología de λ.

En este trabajo se da un ejemplo de un espacio de sucesiones de Banach en el cual φ es denso pero no existe ningún esquema de convergencia seccional generalizada (T_n) de tal forma que el espacio posea la propiedad $AK(T_n)$ [97, Example 3.7]. Asimismo, se trata también un problema de tipo base débil [97, Theorem 3.8] (este problema lo trataremos nosotros al final de este capítulo en el contexto de las descomposiciones de Toeplitz).

Para dar ejemplos de descomposiciones de Toeplitz que no sean bases vamos a recordar en las dos secciones siguientes algunos aspectos sobre ciertos espacios de sucesiones vectoriales que hemos extraído de [39, p. 463], [66] y [81, Cap. II, § 5.1,2,3,4].

2.1.9 Sea (E_k) una sucesión de espacios localmente convexos. Por $\Pi\{E_k\}$ denotaremos al conjunto de todas las sucesiones cuyo término n-ésimo está en el correspondiente E_n, es decir

$$\Pi\{E_k\} := \Big\{x = (x_n) : x_n \in E_n \quad [n \in \mathbb{N}]\Big\} = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$$

y estará dotado de la topología producto. Si $\alpha \in \omega$ y $x \in \Pi\{E_k\}$ el producto $\alpha \cdot x$ denota la sucesión obtenida mediante el producto coordenada a coordenada. Asimismo, se denota por $\oplus\{E_k\}$ al subespacio de $\Pi\{E_k\}$ formado por las sucesiones nulas a partir de un término; o lo que es lo mismo, la suma directa algebraica de (E_k). Análogamente al caso escalar, se definen los sistemas de proyecciones (P_k) e inyecciones (I_k) de la forma

$$\begin{array}{rccc} P_n : & \Pi\{E_k\} & \longrightarrow & \Pi\{E_k\} \\ & (x_k) & \longrightarrow & (\delta_{nk}x_k)_k \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} I_n : & E_n & \longrightarrow & \Pi\{E_k\} \\ & x_n & \longrightarrow & (\delta_{nk}x_n)_k \end{array} \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Un espacio de sucesiones vectoriales $\Lambda\{E_k\}$ es un subespacio vectorial de $\Pi\{E_k\}$ que contiene a $\oplus\{E_k\}$ y está dotado de una topología localmente convexa separada. Si, además, las proyecciones (P_k) y las inyecciones (I_k) son continuas entonces se dice que $\Lambda\{E_k\}$ es un K-espacio; en este caso, cada E_n es topológicamente isomorfo al subespacio

$$P_n\Big(\Lambda\{E_k\}\Big) = I_n(E_n) = \{(x_k) \in \Lambda\{E_k\} : x_k = 0 \quad [k \neq n]\}$$

con la topología inducida. Si A es un triángulo regular y $T = A\Sigma$ se dice que un K-espacio $\Lambda\{E_k\}$ tiene la propiedad T-AK (en la terminología de [16]) si las secciones de Toeplitz con respecto a la matriz T convergen puntualmente a la identidad sobre $\Lambda\{E_k\}$; es decir, si $(T_n) := T(P_k)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = x \qquad [x \in \Lambda\{E_k\}],$$

en la topología de $\Lambda\{E_k\}$; con lo cual (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $\Lambda\{E_k\}$. Nótese que en este caso, con la notación introducida en 2.1.2, queda $\varphi\big(\Lambda\{E_k\}\big) = \oplus\{E_k\}$. Observemos también que si un espacio localmente convexo E posee una descomposición de Toeplitz (P_k), entonces puede identificarse con un K-espacio de sucesiones vectoriales $\Lambda\{E_k\}$ que tiene la propiedad T-AK; basta tomar

$$\Lambda\{E_k\} := \{x := (P_k y) : y \in E\}$$

con la topología trasladada por el isomorfismo algebraico

$$\begin{array}{cccccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & \Lambda\{E_k\} \\ & & y & \longrightarrow & x = (P_k y). \end{array}$$

Abusando de la notación, podemos identificar las proyecciones P_k en el espacio $\Lambda\{E_k\}$ con las proyecciones P_k en E, así como los correspondientes operadores T_n. En otras palabras, la teoría de espacios localmente convexos con descomposiciones (respectivamente, bases) de Toeplitz corre totalmente paralela a la teoría de espacios de sucesiones vectoriales (respectivamente, escalares) con la propiedad T-AK; nosotros utilizaremos en esta memoria, esencialmente, el primer punto de vista.

Volviendo a los espacios de tipo $\Lambda\{E_k\}$, en [81] se supone que todos los E_k son iguales (y se usa la notación $\Lambda(E)$) aunque, con las extensiones naturales, los resultados que se obtienen, y en los que sólo intervienen las propiedades de los espacios $\Lambda\{E_k\}$ que nos interesan aquí, son ciertos en este caso más general. Por citar algún trabajo en el cual se hayan analizado este tipo de espacios de sucesiones vectoriales, diremos que en [33] han sido estudiadas propiedades de tonelación, reflexividad, bornología, distinción, etc., sobre un espacio $\lambda\{E_k\}$. Aquí, se supone que λ es un K-espacio normal de sucesiones escalares (en el sentido de Köthe [61, § 30]) y se impone que los E_k sean normados. La topología sobre $\lambda\{E_k\}$ se define a partir de la norma en cada E_k y de una familia de seminormas en λ.

En [81] se dedica un capítulo completo al estudio de las aplicaciones diagonales completamente continuas en espacios de sucesiones vectoriales y a obtener condiciones, vía multiplicadores, para que un FK-espacio $\Lambda(E)$ (o sea, un K-espacio con una topología localmente convexa metrizable y completa) posea la propiedad T-AK (secciones de Toeplitz convergentes) o la propiedad T-BS (secciones de Toeplitz acotadas). Como muestra de ello enunciamos el siguiente resultado, aunque ya para espacios del tipo $\Lambda\{E_k\}$.

2.1.10 Teorema. [81, Cap. 2, § 7.26 Corolario]. *Sea $\Lambda\{E_k\}$ un FK-espacio y T un triángulo Sp_1 verificando la condición (3) del Teorema 1.4.10 (equivalentemente, tal que c_T tiene la propiedad T-AK). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\Lambda\{E_k\}$ posee la propiedad T-AK.*

(2) *$\Lambda\{E_k\} = S(c_T) \cdot \Lambda\{E_k\}$, donde $S(c_T) := (c_T \to c_T) \cap c_0$.*

En una parte de dicho trabajo, el esfuerzo está concentrado en estudiar cuándo un K-espacio posee la propiedad T-AK. Nosotros, en esta memoria, supondremos que un espacio localmente convexo E la tiene, en forma de descomposición de Toeplitz, y concentraremos nuestro esfuerzo en obtener beneficios de esa condición, en forma de propiedades estructurales sobre el espacio E.

2.1.11 Dado E un espacio localmente convexo, se define el espacio de sucesiones $c_0(E)$ como

$$c_0(E) := \{x = (x_k) \subset E : \lim(x_k) = 0, \text{ en } E\},$$

dotado de la topología localmente convexa dada por las seminormas

$$q_\infty(x) := \sup_k q(x_k) \qquad [x = (x_k) \in c_0(E)] \quad [q \in \mathcal{Q}(E)].$$

Las proyecciones (P_k) forman una descomposición de Schauder de $c_0(E)$ con lo que, en particular, el espacio $\oplus\{E\}$, de todas las sucesiones en E que son nulas a partir de un número finito de términos, es denso en $c_0(E)$. Observemos que, con la notación introducida en 2.1.2, podemos identificar $\oplus\{E\}$ con $\varphi\big(c_0(E)\big)$.

Si se denota por $\mathcal{U}(E')$ a la familia formada por los subconjuntos absolutamente convexos, $\sigma(E', E)$-cerrados y equicontinuos de E', entonces el dual $c_0(E)'$ se puede identificar algebraicamente con el espacio $l^1\{\mathcal{U}(E')\}$ que viene dado por

$$l^1\{\mathcal{U}(E')\} := \Big\{x' = (x'_k) \subset E' : \text{ existe } U \in \mathcal{U}(E') \text{ tal que } \sum_k p_U(x'_k) < \infty\Big\},$$

donde p_U es el funcional de Minkowski asociado a U. La forma bilineal del par dual $\big(c_0(E), c_0(E)'\big)$ actúa como sigue

$$\langle x, x'\rangle := \sum_{k\geq 1}\langle x_k, x'_k\rangle \qquad [x = (x_k) \in c_0(E)] \quad [x' = (x'_k) \in c_0(E)'].$$

El espacio $c_0(E)$ fue introducido por Pietsch [86] y estudiado en [39], [66] y [91], entre otros.

Análogamente a como se hace en el caso escalar, el espacio $c(E)$

$$c(E) := \{x = (x_k) \subset E : (x_k) \text{ converge en } E\},$$

dotado con la misma familia de seminormas de $c_0(E)$, es topológicamente isomorfo a $c_0(E) \oplus E$ y los elementos de $c(E)'$ se pueden representar de la forma

$$\langle x, x'\rangle := \langle \lim x, x'_0\rangle + \sum_{k\geq 1}\langle x_k, x'_k\rangle \quad \Big[x \in c(E), \quad x' = (x'_k)_{k\geq 0} \in l^1\{\mathcal{U}(E')\}\Big].$$

A su vez, para un triángulo regular A y $T = A\Sigma$, se define el espacio $c_T(E)$

$$c_T(E) := \{x = (x_k) \subset E : Tx \in c(E)\}.$$

La topología sobre $c_T(E)$ se obtiene trasladando la topología de $c(E)$ mediante cualquiera de las biyecciones

$$\begin{array}{rccc} T : & c_T(E) & \longrightarrow & c(E) \\ & x & \longrightarrow & Tx \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T^{-1} : & c(E) & \longrightarrow & c_T(E) \\ & x & \longrightarrow & T^{-1}x \end{array}.$$

Por lo tanto, la topología de $c_T(E)$ vendrá dada por la familia de seminormas

$$q_{\infty,T}(x) := q_\infty(Tx) \qquad \Big[q_\infty \in \mathcal{Q}\big(c(E)\big)\Big];$$

y los elementos de $c_T(E)'$ se pueden representar de la forma

$$\langle x, x'\rangle := \langle T\text{-}\lim x, x'_0\rangle + \sum_{n\geq 1}\langle [Tx]_n, x'_n\rangle \quad \Big[x \in c_T(E), \quad x' \in l^1\{\mathcal{U}(E')\}\Big].$$

De forma análoga a como se recordó en 1.4.7 y 1.4.8 es fácil ver que la sucesión (P_k), definida como es habitual

$$\begin{array}{rccc} P_k : & c_T(E) & \longrightarrow & c_T(E) \\ & (x_n) & \longrightarrow & (\delta_{nk}x_n)_n \end{array} \qquad [k \in \mathbb{N}],$$

verifica $P_kP_j = \delta_{kj}P_k$ $[k, j \in \mathbb{N}]$ y además, si (t_{nk}^{-1}) denota la matriz T^{-1}, se tiene, usando 1.2.6(ii), que

$$\begin{aligned} q_{\infty,T}(P_n x) &= \sup_m q\Big(\sum_k t_{mk}\delta_{nk}x_k\Big) = \sup_m |t_{mn}| q(x_n) \le ||A|| q\Big(\sum_{k=1}^{n} t_{nk}^{-1}[Tx]_k\Big) \\ &\le ||A||\Big(\sum_{k=1}^{n} |t_{nk}^{-1}|\Big) q_{\infty,T}(x) \quad [x = (x_k) \in c_T(E),\ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathcal{Q}(E)]; \end{aligned}$$

es decir, se tiene que (P_k) es un sistema ortogonal de proyecciones en $c_T(E)$.

A continuación vamos a probar que el hecho de que (P_k) sea una descomposición de Toeplitz de $c_T(E)$ no depende del espacio E y se puede caracterizar en términos de la matriz T (y por tanto en términos de A) de manera análoga a como se caracteriza en el caso escalar (ver Teorema 1.4.10).

2.1.12 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo no trivial, A un triángulo regular y $T = A\Sigma$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El sistema (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $c_T(E)$.*

(2) *La sucesión de operadores (T_n) es equicontinua sobre $c_T(E)$.*

(3) *Si denotamos por (t_{nk}^{-1}) a la matriz T^{-1} entonces*

$$\sup_{m,n} \sum_j \Big|\sum_k t_{mk}t_{nk}t_{kj}^{-1}\Big| < +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN:

Veamos, en primer lugar, que las condiciones (2) y (3) son equivalentes. Como los operadores

$$T : c_T(E) \to c(E) \quad \text{y} \quad T^{-1} : c(E) \to c_T(E)$$

son isomorfismos topológicos, se tiene que la sucesión (T_n) es equicontinua sobre $c_T(E)$ si y sólo si la sucesión (TT_nT^{-1}) es equicontinua sobre $c(E)$.

Usando un argumento análogo al de la Observación (4) de 1.4.9 se ve que, para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n es un operador matricial diagonal sobre $c_T(E)$ cuya matriz tiene en la diagonal la fila n-ésima de la matriz T. Por la asociatividad del producto de matrices en este caso (Proposición 1.3.2), el operador TT_nT^{-1} sobre $c(E)$ es matricial, su matriz es el producto de las tres matrices y es continuo si y sólo si la norma fila de dicha matriz es finita. Esto último puede verse fácilmente restringiéndose al caso escalar. En efecto, si $B = (b_{nk})$ denota una matriz tal que

$$\begin{array}{rccc} B : & c(E) & \longrightarrow & c(E) \\ & x & \longrightarrow & Bx \end{array}$$

y $||B|| < +\infty$, entonces $q_\infty(Bx) \leq ||B||q_\infty(x)$ $[q \in \mathcal{Q}(E)]$. Recíprocamente, fijado $y \in E$, no nulo, el subespacio $F := \{(\alpha_k y) : (\alpha_k) \in c\}$ es una copia de c en $c(E)$. Si B es continuo entonces $B|_F : F \rightarrow F$ también lo es y en el caso escalar es ya conocido que B debe tener norma fila acotada. Por la misma razón, una sucesión de matrices de $c(E)$ a $c(E)$ es equicontinua si y sólo si la sucesión de sus normas es acotada.

Puede verse, sin más que multiplicar las tres matrices, que el elemento (m, j) de la matriz TT_nT^{-1} es

$$[TT_nT^{-1}]_{m,j} = \sum_k t_{mk}t_{nk}t_{kj}^{-1} \qquad [m, j, n \in \mathbb{N}]$$

y por lo tanto queda probado que (2) es equivalente a (3).

Veamos ahora que (1) implica (3). Para ello consideremos de nuevo $y \in E$, no nulo, y una copia $F_T := \{(\alpha_k y) : (\alpha_k) \in c_T\}$ de c_T en $c_T(E)$. Razonando sobre F_T es sencillo comprobar que si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $c_T(E)$ entonces (π_k) es una descomposición de Toeplitz de c_T. Ahora basta aplicar el Teorema 1.4.10.

Para concluir bastará probar que (2) implica (1). Para ello, vamos a ver que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $\left[c_T(E), \sigma(c_T(E), c_T(E)')\right]$. Un razonamiento posterior permitirá levantar la convergencia débil a una convergencia en la topología de $c_T(E)$. Así pues, fijamos $x' = (x'_n)_{n\geq 0} \in l^1\{\mathcal{U}(E')\}$ de manera que

$$\langle x, x' \rangle = \langle T\text{-}\lim x, x'_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle [Tx]_n, x'_n \rangle \qquad [x \in c_T(E)].$$

Entonces

$$\langle T_m x, x' \rangle = \langle T\text{-}\lim T_m x, x'_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle [TT_m x]_n, x'_n \rangle \qquad [x \in c_T(E)] \quad [m \in \mathbb{N}].$$

Como $T = A\Sigma$ es triangular y A es regular, se tiene que

$$\begin{aligned}[Tx]_m &= \sum_k t_{mk}x_k = \sum_k [T_m x]_k \\ &= A\text{-}\sum_k [T_m x]_k = T\text{-}\lim T_m x \qquad [x = (x_k) \in c_T] \quad [m \in \mathbb{N}]\end{aligned}$$

y por lo tanto $T\text{-}\lim x = \lim_{m\to\infty}\left(T\text{-}\lim T_m x\right)$ en la topología de $c_T(E)$. Dado que $x'_0 \in E'$ se deduce, en particular, que

$$\lim_{m\to\infty}\langle T\text{-}\lim T_m x, x'_0\rangle = \langle T\text{-}\lim x, x'_0\rangle \qquad [x \in c_T]. \tag{2.1}$$

Por otro lado, como $x' \in l^1\{\mathcal{U}(E')\}$ existe $U \subset E'$, un subconjunto absolutamente convexo, $\sigma(E', E)$-cerrado y equicontinuo, tal que

$$\sum_{n\geq 0} p(x'_n) < +\infty, \tag{2.2}$$

donde p denota el funcional de Minkowski asociado a U. Si denotamos por q al funcional de Minkowski asociado a U° entonces q es una seminorma continua en E y se tiene que

$$|\langle y, y'\rangle| \leq p(y')q(y) \qquad [y \in E] \quad [y' \in E']. \tag{2.3}$$

Ahora, fijado $x = (x_k)$ en $c_T(E)$, consideramos la matriz de escalares $(\gamma_{nm}) := \left(q\left([TT_m x - Tx]_n\right)\right)$; entonces, por la equicontinuidad de la sucesión de operadores (T_n), se tiene que

$$\sup_{n,m}|\gamma_{nm}| = q_{\infty,T}(T_m x - x) < +\infty. \tag{2.4}$$

En segundo lugar, el carácter Sp_1 de la matriz T nos asegura que

$$\lim_{m\to\infty}[TT_m x - Tx]_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m\wedge n} t_{nk}t_{mk}x_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k = 0 \quad \text{en } E \qquad [n \in \mathbb{N}]$$

y por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty}\gamma_{nm} = 0 \qquad [n \in \mathbb{N}]. \tag{2.5}$$

Si denotamos por $\nu^{[n]} := (\gamma_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ a la fila n-ésima de la matriz (γ_{nk}) entonces, usando las igualdades (2.4) y (2.5), se tiene que $(\nu^{[n]})_n$ es una sucesión acotada en c_0. Como c_0 es un espacio de Banach deducimos, teniendo en cuenta la desigualdad (2.2), que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p(x'_n)\nu^{[n]}$ converge a un cierto elemento de c_0. La aplicación que a cada elemento de c le hace corresponder su límite es una forma lineal continua sobre c y de ello deducimos que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p(x'_n)\gamma_{nm} = 0.$$

Si usamos la desigualdad (2.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\langle [TT_m x - Tx]_n, x'_n\rangle\Big| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\langle [TT_m x - Tx]_n, x'_n\rangle\Big| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x'_n)\gamma_{nm} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad [x \in c_T(E)];\end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\langle [TT_m x]_n, x'_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle [Tx]_n, x'_n\rangle \qquad [x \in c_T(E)]. \tag{2.6}$$

Usando las igualdades (2.1) y (2.6) deducimos finalmente que

$$\lim_{m\to\infty}\langle T_m x, x'\rangle = \langle x, x'\rangle \qquad [x \in c_T(E)] \quad [x' \in c_T(E)'];$$

o sea, para cada $x \in c_T(E)$, la sucesión $(T_m x)$ converge a x en la topología débil de $c_T(E)$.

Como T es triangular se deduce de lo anterior que $\oplus\{E\}$ es débilmente denso en $c_T(E)$ y por lo tanto (se trata de un conjunto convexo) es denso en la topología de $c_T(E)$. La equicontinuidad de (T_n) y el Lema 2.1.8 permiten probar sin dificultad que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $c_T(E)$. ∎

Las matrices de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a series T_α $[\alpha > 0]$ poseen la propiedad (3) del teorema anterior [16]. En el caso vectorial, la propiedad T_α-AK de $c_{T_\alpha}(E)$ fue obtenida por Paúl [81, Cap. 2 § 8.17 Corolario]. En dicho resultado, la densidad de $\oplus\{E\}$ se prueba usando razonamientos no extensibles al caso general, puesto que se utiliza el hecho de que las columnas de la matriz T_α^{-1} son finitas, cosa que no es cierta para todos los triángulos.

Recogemos otras propiedades de interés sobre los espacios $c_T(E)$ en el siguiente resultado. La demostración es exactamente la misma que la que aparece en [81] para el caso en que T es una matriz de sumación de Cesàro de sucesiones a series.

2.1.13 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo. Entonces $c_T(E)$ es*

(1) *(sucesionalmente) completo si y sólo si E lo es;*

(2) *(casi-) tonelado si y sólo si E es (casi-) tonelado y $[E', \beta(E', E)]$ tiene la propiedad (B) de Pietsch;*

(3) *(de Banach) de Fréchet si y sólo si E lo es.*

2.1.14 Ejemplo. Ya recordamos en el capítulo anterior que el álgebra del disco posee una base de Cesàro. Ahora, sea Ω un subconjunto abierto, acotado y equilibrado de $\mathbb{C}^m$ (a lo largo de esta sección m será un entero positivo fijo). Consideremos $A(\Omega)$ el espacio de todas las funciones de Ω en $\mathbb{C}$ holomorfas en Ω que pueden ser extendidas a una función continua en $\overline{\Omega}$, la clausura de Ω. En esta ocasión vamos a probar que $A(\Omega)$ (dotado de la topología τ_∞ inducida por la norma del supremo) es un espacio de Banach con una descomposición de Cesàro finito-dimensional. Este resultado aparece enunciado sin prueba en [83]. Nosotros lo obtendremos aplicando el Lema 2.1.8. Antes introduciremos alguna notación.

Denotaremos por $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por $H(\Omega)$ al espacio de todas las funciones holomorfas de Ω en $\mathbb{C}$, dotado de la topología τ_c de la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω. Cada $f \in H(\Omega)$ admite un desarrollo en serie de Taylor en el origen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(f)(z) \qquad [z \in \Omega],$$

donde cada $P_k(f)$ es un polinomio k-homogéneo y la serie converge en la topología τ_c. Hay que hacer notar que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el conjunto de todos los polinomios k-homogéneos es un subespacio de dimensión finita de $H(\Omega)$. Las aplicaciones

$$P_k : f \in H(\Omega) \mapsto P_k(f) \in H(\Omega) \qquad [k \in \mathbb{N}_0]$$

forman una descomposición de Schauder de $H(\Omega)$, pero la convergencia de la serie no siempre se tiene en la topología τ_∞ cuando se restringe a $A(\Omega)$.

Veamos que (P_k) es una descomposición de Cesàro de $A(\Omega)$. Denotaremos por $(T_n) := T(P_k)$, donde T es en este caso la matriz de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a series. La notación que usamos no hace referencia a m, la dimensión de $\mathbb{C}^m$ y, sin peligro de confusión, denotaremos de igual manera a la descomposición de Cesàro del álgebra del disco unidad $A(D)$ (ver 1.4.6(2)). La equicontinuidad de (T_n) se sigue del siguiente resultado que puede ser encontrado en [6, 1.1 Lemma] y [78, 5.2 Proposition] (incluimos aquí la prueba de [6]).

Si $f \in H(\Omega)$ y $z \in \Omega$ entonces

$$\left|T_n(f)(z)\right| \leq \max_{|\lambda|=1}\left|f(\lambda z)\right| \qquad [n \in \mathbb{N}_0].$$

En efecto, fijado $z \in \Omega$, la función $g(\lambda) := f(\lambda z)$ $[\lambda \in \overline{D}]$ pertenece al álgebra del disco. Si el desarrollo de Taylor de f en el origen es

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(f)(z) \qquad [z \in \Omega]$$

entonces, por la k-homogeneidad de $P_k(f)$, se tiene que

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(f)(z)\lambda^k \qquad [\lambda \in \overline{D}]$$

ha de ser el desarrollo de Taylor de g en el origen y por lo tanto

$$P_k(g)(\lambda) = P_k(f)(z)\lambda^k \qquad [\lambda \in \overline{D}] \quad [k \in \mathbb{N}_0].$$

En particular, $P_k(g)(1) = P_k(f)(z)$ $[k \in \mathbb{N}_0]$ y $T_n(g)(1) = T_n(f)(z)$ $[n \in \mathbb{N}_0]$. Ahora, como T_n tiene norma uno en el álgebra del disco, se deduce que

$$\begin{aligned} \left|T_n(f)(z)\right| &= \left|T_n(g)(1)\right| \leq \max_{|\lambda|=1}\left|T_n(g)(\lambda)\right| \\ &\leq \max_{|\lambda|=1}\left|g(\lambda)\right| = \max_{|\lambda|=1}\left|f(\lambda z)\right| \qquad [n \in \mathbb{N}_0]. \end{aligned}$$

Como Ω es equilibrado tenemos que

$$\max_{|\lambda|=1}\left|f(\lambda z)\right| \leq \sup_{z\in\Omega}\left|f(z)\right|;$$

con lo cual, usando las desigualdades anteriores,

$$\sup_{z\in\Omega}\left|T_n(f)(z)\right| \leq \sup_{z\in\Omega}\left|f(z)\right|.$$

Esto prueba que la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua, aún más, prueba que $||T_n||_{\mathcal{L}(A(\Omega))} \leq 1$.

Para finalizar, teniendo en cuenta el Lema 2.1.8, bastará probar que el conjunto de todos los polinomios k-homogéneos $[k \in \mathbb{N}_0]$ es denso en $A(\Omega)$. La prueba que incluimos apareció en una versión preliminar de [6] pero no en la versión definitiva. Se define

$$f_r(z) := f(rz) \qquad [r \in (0,1)] \quad [f \in A(\Omega)] \quad [z \in r^{-1}\Omega]$$

y resulta inmediato que $f_r \in A(\Omega)$. Además, al ser $\overline{\Omega}$ compacto y f continua en $\overline{\Omega}$, la función f es uniformemente continua en $\overline{\Omega}$. Por lo tanto, fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \overline{\Omega}$ verifican $||z - w|| < \delta$ entonces $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Si $M := \max_{z \in \overline{\Omega}} ||z||$ y $r \in (0,1)$ es tal que $|1 - r| < \dfrac{\delta}{M}$ entonces

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \Big| f(z) - f(rz) \Big| < \varepsilon;$$

es decir,

$$\lim_{r \to 1^-} f_r = f \text{ en } \tau_\infty \qquad [f \in A(\Omega)].$$

Pero $\overline{\Omega}$ es un compacto contenido en $r^{-1}\Omega$ y por lo tanto la serie de Taylor de f_r converge a f_r uniformemente en $\overline{\Omega}$. En consecuencia, podemos aproximarnos a f en la topología τ_∞ tanto como queramos mediante polinomios de Taylor. Con esto queda probado que (P_k) es una descomposición de Cesàro de $A(\Omega)$.

2.2 Propiedades relevantes de las descomposiciones de Toeplitz.

Una parcela importante dentro del estudio de las descomposiciones de espacios localmente convexos está ocupada por cuestiones de estabilidad. El problema que se plantea en cada caso tiene una estructura común: ¿Cómo tiene que ser una descomposición (P_k) de un espacio E para que una determinada propiedad sobre los subespacios E_k pase al espacio E?

Para concretar pongamos como ejemplo uno de los problemas más clásicos: la propiedad "ser reflexivo" para un espacio localmente convexo E con una descomposición de Schauder (P_k). En este caso la pregunta es ¿Cómo tiene que ser (P_k) para que E sea reflexivo si todos los subespacios E_k son reflexivos?

James [50] obtuvo una caracterización para un espacio de Banach con una base de Schauder. Más tarde, Sanders [99] mejoró el resultado de James reemplazando la hipótesis de una base por la de una descomposición de Schauder y Retherford [88] lo probó para espacios tonelados con base de Schauder. Finalmente, Cook [18] caracterizó las descomposiciones de Schauder de un espacio localmente convexo semi-reflexivo. Otras condiciones equivalentes fueron obtenidas por Kalton [55]. Para mostrar el resultado de Kalton recordamos primero la definición de las condiciones γ-completa, β-completa y contractiva sobre una descomposición de Schauder.

2.2.1 Definiciones. Sea (P_k) una descomposición de Schauder de un espacio localmente convexo E.

(1) Se dice que (P_k) es *β-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ tal que la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_n$ es $\sigma(E, E')$-de Cauchy se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente en la topología de E.

(2) Se dice que (P_k) es *γ-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ tal que la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_n$ es acotada se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente en la topología de E.

(3) Se dice que (P_k) es *contractiva* si (P_k') es una descomposición de Schauder de $[E', \beta(E', E)]$.

2.2.2 Teorema. [55, Teorema 3.2]. *Sea E un espacio localmente convexo con una descomposición de Schauder (P_k). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es semi-reflexivo.*

(2) *(P_k) es β-completa, contractiva y E_k es semi-reflexivo* $[k \in \mathbb{N}]$.

(3) *(P_k) es γ-completa, contractiva y E_k es semi-reflexivo* $[k \in \mathbb{N}]$.

Nuestro objetivo en esta memoria es extender, de manera natural, éste y otros resultados ya conocidos para espacios con una descomposición de Schauder al caso de espacios con una descomposición de Toeplitz. Para ello necesitamos extender de manera paralela las condiciones que usualmente se exigen a una descomposición de Schauder de un espacio localmente convexo en el estudio de la estabilidad de propiedades topológicas sobre los subespacios en los que se descompone. Muchas de estas condiciones afectan sólamente a los operadores $\Sigma(P_k) = \left\{\sum_{k=1}^{n} P_k \, : n \in \mathbb{N}\right\}$ que convergen puntualmente a la identidad. Por ejemplo, una descomposición de Schauder se dice que es equicontinua si la sucesión de operadores $\Sigma(P_k)$ es equicontinua. La extensión de dichas condiciones al caso de una descomposición de Toeplitz se hará de forma natural y para ello consideraremos la correspondiente propiedad sobre los operadores $T(P_k)$. En las siguientes definiciones recogemos las condiciones más importantes que consideraremos sobre una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo.

2.2.3 Definiciones. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a un triángulo regular A. Como es habitual denotamos por $T = A\Sigma$. Diremos que (P_k)

(1) es *equicontinua* si la sucesión de operadores $T(P_k)$, o lo que es igual (T_n), es equicontinua;

(2) es *simple* si para cada $x' \in E'$ la sucesión $(T_n'x')$ es $\beta(E', E)$-acotada;

(3) es *contractiva* si (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$;

(4) tiene la *propiedad* (M) si $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ uniformemente en cada acotado de E;

(5) tiene la *propiedad* (S) si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ (podemos suponer que $V \subset U$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_U(T_n x - x) : x \in V\} = 0\,;$$

(6) es *completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ tal que la sucesión $T(x_k)$ es de Cauchy en E se tiene que $T(x_k)$ es convergente en E;

(7) es *β-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ tal que la sucesión $T(x_k)$ es $\sigma(E, E')$-de Cauchy se tiene que $T(x_k)$ converge en E;

(8) es *γ-completa* si para cada sucesión (x_k) con $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ tal que la sucesión $T(x_k)$ es acotada en E se tiene que $T(x_k)$ es convergente en E.

2.2.4 Observaciones.

(1) En las definiciones anteriores, por simplicidad en la notación, cada condición que se exige a una descomposición de Toeplitz no hace referencia a la matriz de sumabilidad empleada. Esto podría dar lugar a confusiones en el caso en que estemos considerando un sistema de proyecciones que sea una descomposición de Toeplitz con respecto a dos matrices regulares distintas. Si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E con respecto a una matriz regular A y es necesario hacer énfasis en la matriz A, diremos, por ejemplo, que (P_k) es A-equicontinua, A-simple, etc.; o bien equicontinua con respecto a la matriz A, etc.

(2) Ya hemos apuntado que toda descomposición de Schauder de un espacio localmente convexo es una descomposición de Toeplitz con respecto a cualquier triángulo regular A. Para determinar la relación que existe entre nuestros resultados para descomposiciones de Toeplitz y los ya conocidos para descomposiciones de Schauder tendremos que estudiar la consistencia de las condiciones contenidas en la definición anterior. Más generalmente, contestaremos a la siguiente pregunta: Si $A \subset B$ son dos triángulos regulares y (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E con respecto a la matriz A que verifica alguna de las condiciones definidas en 2.2.3, ¿verifica (P_k) la correspondiente condición con respecto a la matriz B?

(3) Hemos visto en la Proposición 2.1.6 que si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E', \sigma(E', E)]$; es decir, para cada $x' \in E'$ la sucesión $(T'_n x')$ converge a x' en la topología $\sigma(E', E)$ y, en particular, siempre se tiene que $(T'_n x')$ es $\sigma(E', E)$-acotada. Esto da una idea de lo que se exige en las condiciones (2) y (3) de la definición anterior. Por otra parte, es obvio que toda descomposición de Toeplitz contractiva es simple.

(4) Si un sistema de proyecciones (P_k) en un espacio localmente convexo E es una descomposición de Toeplitz de E con dos topologías compatibles con el par dual (E, E') entonces cada una de las condiciones simple, contractiva, β-completa o γ-completa se tiene para una topología si y sólo si se tiene para la otra. En este sentido, dichas propiedades sólo están determinadas por la dualidad y no por alguna topología compatible concreta. En propiedades tales como la semi-reflexividad de un espacio con descomposición de Toeplitz son este tipo de condiciones las que intervienen.

(5) Se puede comprobar que la condición (S) definida anteriormente no depende de la base local empleada, de manera que se puede suponer que $\mathcal{U}(E)$ está formada por todos los entornos del origen absolutamente convexos y cerrados en E. Si $\mathcal{Q}(E)$ es una familia de seminormas que define la topología de E y (P_k) es una

descomposición de Toeplitz de E entonces (P_k) satisface la condición (S) si y sólo si para cada $q_1 \in \mathcal{Q}(E)$ existe $q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ (podemos suponer que $q_1 \leq q_2$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_1(T_n x - x) : q_2(x) \leq 1\} = 0.$$

(6) Las tres definiciones de completitud terminan asegurando que, en determinadas condiciones para una sucesión $(x_k) \in \Pi\{E_k\}$, la sucesión $T(x_k)$ debe ser convergente en E. Eso es equivalente a pedir que exista $x \in E$ tal que $x_k = P_k x$ $[k \in \mathbb{N}]$. Por otro lado, es inmediato comprobar que toda descomposición de Toeplitz γ-completa es también β-completa y ésta, a su vez, es completa. También puede comprobarse que una descomposición de Toeplitz es β-completa si y sólo si es completa para la topología $\sigma(E, E')$.

A continuación vamos a estudiar la consistencia de las condiciones definidas en 2.2.3, en el sentido expuesto en la observación (2) anterior, y para ello necesitamos probar que la condición (S) implica la equicontinuidad. En la siguiente sección nos ocuparemos de establecer las demás relaciones que existen entre ellas.

2.2.5 Proposición. *Si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con la propiedad (S) entonces es equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que (P_k) tiene la propiedad (S). Entonces para cada $q_1 \in \mathcal{Q}(E)$ existe $q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ (podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $q_2 \geq q_1$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_1(T_n x - x) : q_2(x) \leq 1\} = 0.$$

Así pues, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_1(T_n x - x) \leq q_2(x) \qquad [x \in E] \quad [n > n_0].$$

Por lo tanto,

$$q_1(T_n x) \leq q_1(T_n x - x) + q_1(x) \leq q_2(x) + q_2(x) = 2q_2(x) \qquad [x \in E] \quad [n > n_0].$$

Por otro lado, la continuidad de T_n $[n = 1, 2, \ldots, n_0]$ permite elegir $q_3 \in \mathcal{Q}(E)$ (podemos suponer que $q_3 \geq 2q_2$) tal que

$$q_1(T_n x) \leq q_3(x) \qquad [x \in E] \quad [n = 1, 2, \ldots, n_0].$$

Teniendo en cuenta las dos desigualdades anteriores se concluye que

$$q_1(T_n x) \leq q_3(x) \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}]$$

y en consecuencia (P_k) es equicontinua. ∎

2.2.6 Teorema. *Sean A y B dos triángulos regulares tales que $A \subset B$. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a la matriz A. Si (P_k) es equicontinua, simple, contractiva o verifica alguna de las propiedades (M) o (S) con respecto a la matriz A entonces tiene la misma propiedad con respecto a la matriz B.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos $T = A\Sigma$ y $R = B\Sigma$. Vamos a denotar por $C := BA^{-1} = RT^{-1} = (c_{nk})$, la cual es, por el Teorema 1.3.5, un triángulo regular. Asimismo denotamos por $T_n := \sum_{k=1}^{n} t_{nk}P_k$ y por $R_n := \sum_{k=1}^{n} r_{nk}P_k \quad [n \in \mathbb{N}]$; es decir, $(T_n) = T(P_k)$ y $(R_n) = R(P_k)$. Aplicando la asociatividad del producto de matrices triangulares (Proposición 1.3.2) tenemos que

$$(R_n) = R(P_k) = (RT^{-1})\big(T(P_k)\big) = C(T_k)$$

y por tanto $R_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}T_k \quad [n \in \mathbb{N}]$.

(i) Equicontinuidad : Dada $q \in \mathcal{Q}(E)$ y $x \in E$ tenemos

$$q(R_n x) = q\Big(\sum_{k=1}^{n} c_{nk}T_k x\Big) \leq ||C|| \sup_{k \in \mathbb{N}} q(T_k x) \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Por lo tanto, si la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua se tiene que la sucesión (R_n) también lo es.

(ii) Simple : Análogamente, si $x \in E$ y $x' \in E'$ entonces

$$\big|\langle x, R_n' x'\rangle\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \big|\langle x, T_k' x'\rangle\big| \leq ||C|| \sup_{k \in \mathbb{N}} \big|\langle x, T_k' x'\rangle\big| \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Por lo tanto, para cada $x' \in E'$ se tiene que la sucesión $(R_n' x')$ es $\beta(E', E)$-acotada si $(T_n' x')$ lo es.

(iii) Contractividad : En este caso basta usar la Proposición 2.1.3.

Para el resto de propiedades usaremos la siguiente desigualdad, válida para cada $k_0, n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ y $q \in \mathcal{Q}(E)$

$$
\begin{aligned}
q(x - R_n x) &= q\Big(x - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} T_k x\Big) = q\left(\Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\Big)x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}(x - T_k x)\right) \\
&\leq q\Big(\sum_{k=1}^{k_0} c_{nk}(x - T_k x)\Big) + q\Big(\sum_{k>k_0} c_{nk}(x - T_k x)\Big) + \Big|1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\Big| q(x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} |c_{nk}| q(x - T_k x) + ||C|| \sup_{k>k_0} q(x - T_k x) + \Big|1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\Big| q(x). \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

(iv) Propiedad (M) : Para probar que (P_k) tiene la propiedad (M) con respecto a la matriz B veremos que cada uno de los tres sumandos que aparecen en el último miembro de la desigualdad anterior puede hacerse pequeño uniformemente en cada acotado D de E. En primer lugar, usando la hipótesis de que (P_k) tiene la propiedad (M) con respecto a la matriz A, se tiene que para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q(x - T_k x) \leq \frac{1}{3||C||} \qquad [k > k_0] \quad [x \in D].$$

En segundo lugar, como D es acotado existe $\eta > 0$ tal que

$$q(x) \leq \eta \quad \text{y} \quad q(x - T_k x) \leq \eta \qquad [k = 1, \ldots, k_0] \quad [x \in D].$$

En tercer lugar, dado que C es regular, aplicamos el teorema de Silverman-Toeplitz y deducimos que existe $n_0 > k_0$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$
\begin{aligned}
|c_{nk}| &\leq \frac{1}{3k_0\eta} \qquad [k = 1, 2, \ldots, k_0] \quad [n > n_0] \quad \text{y} \\
\Big|1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\Big| &\leq \frac{1}{3\eta} \qquad [n > n_0].
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando la desigualdad (2.7) concluimos que

$$q(x - R_n x) \leq \frac{1}{3k_0\eta} k_0 \eta + ||C|| \frac{1}{3||C||} + \frac{1}{3\eta}\eta = 1 \qquad [n > n_0] \quad [x \in D];$$

con lo cual queda probado que (P_k) tiene la propiedad (M) con respecto a la matriz B.

(v) Propiedad (S) : Supongamos que (P_k) tiene la propiedad (S) con respecto a la matriz A. Por la Proposición 2.2.5 se tiene que (P_k) es equicontinua con respecto a dicha matriz. Así pues, dada $q_1 \in \mathcal{Q}(E)$ existe $q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ (podemos suponer que $q_2 \geq q_1$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_1(x - T_n x) : q_2(x) \leq 1\} = 0 \tag{2.8}$$

y además

$$q_1(T_n x) \leq q_2(x) \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}]. \tag{2.9}$$

Análogamente al caso anterior, veremos que cada uno de los tres sumandos que aparecen en el último miembro de la desigualdad (2.7) puede hacerse pequeño uniformemente en $\{x \in E : q_2(x) \leq 1\}$. En primer lugar, usando la igualdad (2.8) tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_1(x - T_k x) \leq \frac{\varepsilon}{3||C||} \qquad [k > k_0] \quad [q_2(x) \leq 1].$$

En segundo lugar, usando la desigualdad (2.9) tenemos que

$$q_1(x - T_k x) \leq q_1(x) + q_1(T_k x) \leq q_2(x) + q_2(x) \leq 2 \qquad [k \in \mathbb{N}] \quad [q_2(x) \leq 1].$$

En tercer lugar, como C es regular se tiene que existe $n_0 > k_0$ tal que

$$\begin{aligned} |c_{nk}| &\leq \frac{\varepsilon}{6k_0} \qquad [k = 1, 2, \ldots, k_0] \qquad [n > n_0] \quad \text{y} \\ \left|1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad [n > n_0]. \end{aligned}$$

Por último, usando la desigualdad (2.7) concluimos que

$$q_1(x - R_n x) \leq \frac{\varepsilon}{6k_0} 2k_0 + ||C|| \frac{\varepsilon}{3||C||} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad [n > n_0] \quad [q_2(x) \leq 1];$$

o sea, (P_k) tiene la propiedad (S) con respecto a la matriz B. ∎

El siguiente ejemplo, sugerido por J. C. Díaz Alcaide, muestra que el recíproco del teorema anterior no es cierto, en el sentido de que una descomposición de Toeplitz de un espacio E sin una propiedad de las que aparecen mencionadas en el resultado anterior puede tener esa misma propiedad con respecto a una matriz de sumabilidad más fuerte.

2.2.7 Ejemplo. Consideremos los operadores

$$\begin{array}{rccl} P_j & : & l^1 & \rightarrow & l^1 \\ & & (x_k) & \rightarrow & (x_j - x_{j+1}) \sum_{k=1}^{j} e^{[k]} \qquad [j \in \mathbb{N}]. \end{array}$$

Como las coordenadas en l^1 son continuas se tiene que cada P_j es continua. Para ver que (P_k) es un sistema ortogonal de proyecciones observamos que

$$P_n e^{[j]} = (\delta_{nj} - \delta_{n+1,j}) \sum_{k=1}^{n} e^{[k]} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n, n+1 \\ \sum_{k=1}^{n} e^{[k]} & \text{si } j = n \\ -\sum_{k=1}^{n} e^{[k]} & \text{si } j = n+1 \end{cases} \qquad [n, j \in \mathbb{N}].$$

Así pues, en primer lugar, para cada $x \in l^1$

$$\begin{aligned} P_n^2 x &= P_n\Big((x_n - x_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} e^{[j]}\Big) = (x_n - x_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} P_n e^{[j]} \\ &= (x_n - x_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} e^{[k]} = P_n x \qquad [n \in \mathbb{N}]. \end{aligned}$$

En segundo lugar,

$$P_n P_m x = (x_m - x_{m+1}) \sum_{j=1}^{m} P_n e^{[j]} = 0 \qquad [n \neq m].$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $Q_n := \sum_{m=1}^{n} P_m$, entonces $Q_n x$ se comporta como una suma telescópica y se tiene que

$$\begin{aligned} Q_n x &= \sum_{m=1}^{n} (x_m - x_{m+1}) \Big(\sum_{j=1}^{m} e^{[j]}\Big) \\ &= x_1 e^{[1]} + \sum_{m=2}^{n} x_m \Big(\sum_{j=1}^{m-1} e^{[j]}\Big) + \sum_{m=2}^{n} x_m e^{[m]} - \sum_{m=2}^{n} x_m \Big(\sum_{j=1}^{m-1} e^{[j]}\Big) - x_{n+1} \sum_{j=1}^{n} e^{[j]} \\ &= \sum_{m=1}^{n} (x_m - x_{n+1}) e^{[m]}; \end{aligned}$$

es decir, $Q_n x = (x_1 - x_{n+1}, \ldots, \overset{(n)}{x_n - x_{n+1}}, 0, 0, \ldots)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si $x \in \varphi$ es obvio que $Q_n x = x$ para n suficientemente grande y por lo tanto (P_k) es una descomposición de Schauder de $(\varphi, ||\cdot||_1)$, la cual no puede ser equicontinua porque

$$\left|\left|Q_n e^{[n+1]}\right|\right|_1 = \left|\left|(-1,\ldots,\overset{(n)}{-1},0,\ldots)\right|\right|_1 = n \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Sin embargo, (P_k) es una descomposición equicontinua de l^1 con respecto a la matriz de Cesàro. Para ver esto calculamos

$$\begin{aligned}
T_n x &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_k x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}(x_m - x_{k+1})e^{[m]} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} x_m e^{[m]} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} x_{k+1}e^{[m]}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}(n-m+1)x_m e^{[m]} - \sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k=m+1}^{n+1} x_k\Big)e^{[m]}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{n-m+1}{n}x_m - \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n+1} x_k\right)e^{[m]}.
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\left|\left|T_n x\right|\right|_1 \leq \sum_{m=1}^{n}\left|\frac{n-m+1}{n}\right||x_m| + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k=m+1}^{n+1}|x_k|\Big) \leq ||x||_1 + ||x||_1 = 2||x||_1.$$

Esto prueba que la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua sobre l^1 y como φ es denso en l^1 se deduce del Lema 2.1.8 que (P_k) es una descomposición de Cesàro equicontinua de l^1.

Otros ejemplos relacionados con el anterior incluyendo, además de la de Cesàro, otros tipos de sumabilidad como la de Abel se encuentran en los trabajos de Montes [75] y [76, Ejemplo 2, p. 16].

Sean A y B dos triángulos regulares tales que $A \subset B$. El comportamiento de las condiciones de completitud que hemos definido para una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a la matriz A no aparece reflejado en el teorema anterior, supuesto que (P_k) se considere como descomposición de Toeplitz de E con respecto a la matriz B. De hecho, en este caso lo que ocurre es que ese comportamiento es justamente el opuesto.

2.2.8 Teorema. *Sean A y B dos triángulos regulares tales que $A \subset B$. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a la matriz A. Si (P_k) es completa, β-completa o γ-completa con respecto a la matriz B entonces verifica la misma propiedad con respecto a la matriz A.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos $T = A\Sigma$ y $R = B\Sigma$. Sea $(x_k) \subset E$ tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Entonces podemos escribir

$$R(x_k) = (RT^{-1})\big(T(x_k)\big) = C\big(T(x_k)\big) \tag{2.10}$$

donde $C := BA^{-1} = RT^{-1}$ es una matriz regular.

(i) Completitud : Si $T(x_k)$ es de Cauchy en E entonces es convergente a un cierto $\widehat{x}$ en $\widehat{E}$. Usando la Proposición 1.4.4 tenemos que $R(x_k)$ también converge a $\widehat{x}$ en $\widehat{E}$. Por lo tanto $R(x_k)$ es de Cauchy en E. Como (P_k) es completa con respecto a la matriz B se tiene que $R(x_k)$ es convergente a un cierto x en E. Por la unicidad del límite deducimos que $T(x_k)$ converge a x.

(ii) β-Completitud : Este caso es totalmente análogo al anterior tomando la completación de $[E, \sigma(E, E')]$.

(iii) γ-Completitud : Si $T(x_k)$ es acotada en E entonces $R(x_k)$ también lo es puesto que ambas matrices están relacionadas mediante C en la igualdad (2.10) y C es una matriz de norma finita. Así pues, para cada $q \in \mathcal{Q}(E)$ se tiene

$$\begin{aligned} q\Big([R(x_k)]_n\Big) &= q\Big(\sum_{j=1}^{\infty} c_{nj}[T(x_k)]_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |c_{nj}| q\Big([T(x_k)]_j\Big) \\ &\leq ||C|| \sup_{j\in\mathbb{N}} q\Big([T(x_k)]_j\Big) \qquad [n \in \mathbb{N}]. \end{aligned}$$

Como (P_k) es γ-completa con respecto a la matriz B se tiene que $R(x_k)$ es convergente a un cierto x en E. Ahora usamos que las columnas de la matriz R convergen a 1, así como la continuidad y la ortogonalidad de las proyecciones para ver que

$$P_j x = P_j\big(\lim R(x_k)\big) = \lim_{n\to\infty} P_j\Big(\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} x_k\Big) = \lim_{n\to\infty} r_{nj} x_j = x_j \qquad [j \in \mathbb{N}].$$

Por tanto $T(x_k) = T(P_k x)$. Como (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E con respecto a la matriz A deducimos que $T(x_k)$ converge a x en E. ∎

Para algunas de las propiedades cuya consistencia hemos estudiado en los dos teoremas anteriores es cierto, bajo una condición añadida, un resultado de consistencia recíproco.

2.2.9 Proposición. *Sean A y B dos triángulos regulares tales que $A \subset B$ y (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de un espacio localmente convexo E con respecto a la matriz A.*

(1) *Si (P_k) es B-contractiva entonces es A-contractiva.*

(2) *Si (P_k)es γ-completa (respectivamente completa) con respecto a A entonces también es γ-completa (respectivamente completa) con respecto a B.*

DEMOSTRACIÓN:

Como antes, sean $T = A\Sigma$ y $R = B\Sigma$.

(1) Contractividad : Por hipótesis (P_k) es A-equicontinua, es decir, (T_n) es una sucesión equicontinua de operadores. En particular, la sucesión de los adjuntos (T'_n) es $\beta(E', E)$-equicontinua. Si (P_k) es B-contractiva entonces el conjunto $\cup E'_k$ es total en $[E', \beta(E', E)]$ y por el Lema 2.1.8 se deduce que (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$ con respecto a la matriz A; es decir, (P_k) es A-contractiva.

(2) γ-Completitud : Para probar que (P_k) es γ-completa con respecto a la matriz B, sea $(x_k) \in \Pi\{E_k\}$ tal que la sucesión $R(x_k)$ es acotada. Si denotamos por $(w_n) := R(x_k)$ y por $(z_n) := T(x_k)$, o sea

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} r_{nk} x_k \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

entonces, usando la ortogonalidad de las proyecciones y el carácter Sp_1 de la matriz R se ve que

$$\lim_{n\to\infty} T_m w_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n\wedge m} t_{mk} r_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{m} t_{mk} x_k = z_m \quad [m \in \mathbb{N}].$$

Como, por hipótesis, (T_n) es equicontinua y (w_n) es acotada se deduce que $(z_n) = T(x_k)$ es acotada. Ahora, dado que (P_k) es γ-completa con respecto a A, debe existir $x \in E$ tal que $P_k x = x_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Finalmente, usando que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E con respecto a B deducimos que $R(x_k) = R(P_k x)$ converge a x en E.

Completitud : Análogamente al caso anterior, sea $(x_k) \in \Pi\{E_k\}$ tal que la sucesión $R(x_k)$ es de Cauchy en E. De nuevo, por la equicontinuidad de (T_n) se deduce que cada sucesión $(T_m w_n)_n$ es de Cauchy, uniformemente en $m \in \mathbb{N}$. Como $(T_m w_n)_n$ converge a z_m, la convergencia será uniforme en $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, cada sucesión $(T_m w_n)_m$ converge a w_n. Por lo tanto tenemos una sucesión doble $(T_m w_n)_{m,n}$ en la condiciones del Lema 1.5.1 y de ahí deducimos que $(z_n) = T(x_k)$ es de Cauchy en E. El resto de la prueba es como en el caso anterior. ∎

Los siguientes ejemplos muestran que la hipótesis de equicontinuidad en la proposición anterior no puede ser omitida.

2.2.10 Ejemplos.

(1) Sea A un triángulo regular tal que (π_k) es una descomposición de Toeplitz de c_T con respecto a A pero no es de Schauder (por ejemplo la matriz de Cesàro). Consideremos el espacio

$$E := \{x \in c_T : \Sigma(\pi_k x) \text{ converge a } x \text{ en } \sigma(c_T, c_T')\}$$

dotado de la topología $\sigma(E, c_T')$. Vamos a ver que (π_k) es una descomposición de Schauder completa de E, usando los resultados conocidos sobre la dualidad entre c_T y c_T' (1.4.12, 1.4.13 y 1.4.14). En efecto, si tenemos una sucesión de escalares $x := (x_k)$ tal que $\Sigma(x_k e^{[k]})$ es $\sigma(E, c_T')$-de Cauchy y tomamos $e = (1, 1, \ldots)$. Puesto que

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e^{[k]}, e \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

deducimos que $x \in cs$ y por lo tanto $x \in c_T$. Sólo falta probar que $x \in E$. Como $x \in cs$ y $c_T' \subset c$ se tiene que $xy \in cs$ para cada $y \in c_T'$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e^{[k]}, y \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \\ &= A\text{-}\sum x_k y_k = T\text{-}\lim xy = \langle x, y \rangle \qquad [y \in c_T']; \end{aligned}$$

es decir, $x \in E$.

Sin embargo, (π_k) es una descomposición de Toeplitz con respecto a A (por ser de Schauder) que es no completa para E. El motivo de este comportamiento es que E está estrictamente contenido en c_T. Así pues, basta tomar $x = (x_k) \in c_T \setminus E$ y se tiene que $T(x_k e^{[k]})$ es $\sigma(E, c_T')$-de Cauchy porque $T(x_k e^{[k]}) \subset \varphi \subset E$.

(2) Consideramos el sistema $(x^{[k]})$ en l^2 dado por

$$x^{[k]} := e^{[k]} - e^{[k+1]} \qquad [k \in \mathbb{N}].$$

Entonces $(x^{[k]})$ es una base de Cesàro de l^2 pero no es una base de Schauder [105, Ch. II, § 11. Example 11.3]. Sea (P_k) el sistema de proyecciones asociado a $(x^{[k]})$. Al igual que en el ejemplo anterior, consideramos el espacio

$$F := \{x \in l^2 : \Sigma(P_k x) \text{ converge a } x \text{ en } \sigma(l^2, l^2)\}$$

dotado de la topología $\sigma(F, l^2)$. Es inmediato comprobar que $\varphi \subset F$. Vamos a ver que (P_k) es una descomposición de Cesàro contractiva de F. En efecto, usando la densidad de F es fácil probar que la topología $\beta(l^2, F)$ es la de la norma de l^2 y por lo tanto la contractividad se deduce usando la reflexividad de l^2 (ver el Teorema 3.2.2). Sin embargo, si (P_k) fuera contractiva como descomposición de Schauder de F entonces (P_k') sería una descomposición de Schauder del dual fuerte, o sea, de l^2. En consecuencia, volviendo a usar la reflexividad de l^2, la sucesión $(P_k'') = (P_k)$ tendría que ser una descomposición de Schauder de l^2, cosa que no es cierta.

En la relación de propiedades relevantes que sobre una descomposición de Toeplitz hemos definido en esta sección no aparece una que juega un papel importante en la teoría de las descomposiciones de Schauder, a saber, la incondicionalidad. Una muestra de esta relevancia es el siguiente resultado que hemos extraído de [74]. Para comprenderlo mejor tengamos en cuenta que las bases canónicas de c_0 y l^1 son ambas incondicionales, la primera es contractiva y no γ-completa mientras que la segunda es γ-completa pero no es contractiva. Recordemos también que un espacio localmente convexo E con una descomposición de Schauder (P_k) se dice que contiene una *copia asintótica de* l^1 (respectivamente, de c_0) si contiene una *sucesión de bloques* equivalente a la base canónica de l^1 (respectivamente, de c_0). Una sucesión $(x_k) \subset E$ se dice que es una *sucesión de bloques* si existe una sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ tal que

$$x_j \in \bigoplus_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} E_i \qquad [j \in \mathbb{N}].$$

Teorema. [74, Cap. 1, Teorema 1.24] *Una descomposición de Schauder incondicional de un espacio de Fréchet E es contractiva (respectivamente, γ-completa) si y sólo si E no contiene copias asintóticas de l^1 (respectivamente, de c_0) con respecto a su descomposición.*

Para saber si un espacio contiene copias de c_0 o de l^1 no parece que sea lo más adecuado pedirle que posea una descomposición de Toeplitz, cuya sumabilidad estará relacionada con el par (c_T, c_T'). Aún más, ya para la matriz de Cesàro sabemos que si en una serie se altera el orden de sumación la serie obtenida no tiene porqué ser convergente. Lo que ocurre es que la incondicionalidad es un lujo que una matriz de sumabilidad arbitraria no se puede permitir, como muestra el siguiente resultado. Una descomposición de Toeplitz (P_k) de un espacio localmente convexo E se dice que es *incondicional* si cualquier permutación $(P_{\pi(k)})$ es una descomposición de Toeplitz de E con respecto a la misma matriz de sumabilidad.

Teorema. [105, Ch. III, Theorem 11.9] *Toda base de Toeplitz incondicional de un espacio de Banach E es una base de Schauder incondicional.*

Pensamos que este comportamiento se debe a que la extensión de la idea de incondicionalidad al caso de una base de Toeplitz no es "natural". Existen otras caracterizaciones del concepto de incondicionalidad para bases de Schauder, vía multiplicadores en l^∞, cuya extensión natural al caso de bases de Toeplitz no es a través de permutaciones; más bien, lo que hay que intentar es reemplazar el espacio l^∞ por otro que juege un papel análogo en el par dual (c_T, c_T'). Para el futuro nos planteamos estudiar si la definición de *espacios T-sólidos* considerada por Grosse–Erdmann [42] puede jugar el papel de la incondicionalidad en espacios con descomposiciones de Toeplitz.

Un resultado muy conocido de McArthur y Retherford afirma que una base de Schauder de un espacio de Banach E es una base de Schauder no equicontinua de $[E, \sigma(E, E')]$ [68] (véase también [104, Ch. I, § 15, Proposition 15.1]). Este resultado es un caso particular del que enunciamos a continuación.

2.2.11 Teorema. *Sean E un espacio normado (de dimensión infinita) y (P_k) un sistema ortogonal de proyecciones en E. Entonces la sucesión de operadores $(T_n) = T(P_k)$, correspondiente a cualquier método de sumabilidad definido por un triángulo regular A y $T = A\Sigma$, no puede ser equicontinua para la topología $\sigma(E, E')$. En particular, si (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E entonces (P_k) es una descomposición de Toeplitz no equicontinua de $[E, \sigma(E, E')]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Fijamos un triángulo regular A y denotamos por $\|\ \|$ a la norma dual de E'. En esta demostración todos los entornos que aparecen son entornos básicos del origen para la topología $\sigma(E, E')$, así que simplemente les llamamos entornos.

Para probar que (T_n) no es equicontinua, bastará construir un entorno V tal que dado cualquier otro entorno W, existe un cierto elemento $z \in W$ y algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $T_N z \notin V$. Para ello, en cada E'_k fijamos un vector u'_k tal que $\|u'_k\| = 1$ y como E' es un espacio de Banach, se tiene que el vector x'_0 dado por

$$x'_0 := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u'_k \in E' \ ,$$

está bien definido. Sea $V := \{x'_0\}^\circ$ (polar en E) y fijamos $W := \{x'_1, \ldots, x'_m\}^\circ$ cualquier otro entorno. Como la sucesión (u'_k) genera en E' un subespacio de dimensión infinita, por el teorema de Hahn–Banach en $[E', \sigma(E', E)]$, se tiene que existe un vector $x_0 \in E$ y un natural n tales que

$$\langle x_0, x'_i \rangle = 0 \qquad [i = 1, \ldots, m] \ , \qquad \langle x_0, u'_n \rangle \neq 0 \ .$$

Sea N el mínimo natural para el cual $\langle x_0, u'_N \rangle \neq 0$. Obsérvese que al ser P_N una proyección y $u'_N \in E'_N$, se tiene que $\langle x_0, u'_N \rangle = \langle P_N x_0, u'_N \rangle$.

Ahora, definimos el escalar

$$\alpha := \frac{2^{N+1}}{|\langle x_0, u'_N \rangle| |t_{NN}|}$$

y tomamos como z el vector $z := \alpha x_0$. En primer lugar, es obvio que $z \in W$. Por otro lado, usando la continuidad y la ortogonalidad de las proyecciones así como la minimalidad de N se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \langle T_N z, x'_0 \rangle \right| &= \alpha \left| \left\langle \sum_{k=1}^{N} t_{Nk} P_k x_0, \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u'_k \right\rangle \right| \\ &= \alpha \left| 2^{-N} t_{NN} \langle P_N x_0, u'_N \rangle \right| \\ &= \frac{2^{N+1}}{|t_{NN}| |\langle x_0, u'_N \rangle|} \frac{|t_{NN}| |\langle x_0, u'_N \rangle|}{2^N} = 2 \ , \end{aligned}$$

con lo cual $T_N z \notin V$. ∎

2.3 Relaciones entre las propiedades.

Ya hemos visto que las descomposiciones de Toeplitz con la propiedad (S) son equicontinuas. En esta sección vamos a ver qué otras relaciones existen entre las condiciones que hemos definido en la sección anterior para una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo.

Para ello, recordamos brevemente la definición de espacio tonelado y otras condiciones más débiles de tonelación, así como algunos resultados preliminares. Realmente, más que las definiciones lo que enunciamos son condiciones equivalentes [84]. Un espacio localmente convexo E es

- *tonelado* si y sólo si todo subconjunto $\sigma(E',E)$-acotado es equicontinuo;
- *casi-tonelado* si y sólo si todo subconjunto $\beta(E',E)$-acotado es equicontinuo;
- *c-tonelado* si y sólo si toda sucesión $\sigma(E',E)$-convergente es equicontinua;
- *l^∞-tonelado* si y sólo si toda sucesión $\sigma(E',E)$-acotada es equicontinua;
- *l^∞-casi-tonelado* si y sólo si toda sucesión $\beta(E',E)$-acotada es equicontinua;
- $\aleph_0$-casi-tonelado si y sólo si todo subconjunto $\beta(E',E)$-acotado de E' que pueda expresarse como unión numerable de equicontinuos, es equicontinuo.

A continuación estudiaremos la condición de *ser simple* para una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo. Esta propiedad tendrá consecuencias importantes sobre el comportamiento de la descomposición dual y estos resultados permitirán más tarde tratar fácilmente el problema de las descomposiciones de Toeplitz débiles. El siguiente lema puede encontrarse sin demostración en [55]. No obstante, la prueba consiste en un sencillo argumento de dualidad que incluimos por razones de completitud.

2.3.1 Lema. *Sea (E,F) un par dual y $\{h_i : i \in I\}$ una familia de operadores lineales $h_i : E \to E$ que son $\sigma(E,F)$-$\sigma(E,F)$-continuos. Si $\{h_i x : i \in I\}$ es $\beta(E,F)$-acotado para cada $x \in E$, entonces $\{h_i\}_{i\in I}$ es $\beta(E,F)$-$\beta(E,F)$-equicontinuo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea D un subconjunto $\sigma(F,E)$-acotado. Para cada $x \in E$ se tiene, por hipótesis,

$$\sup\Big\{|\langle x, h_i'x'\rangle| : i \in I,\, x' \in D\Big\} = \sup\Big\{|\langle h_i x, x'\rangle| : i \in I,\, x' \in D\Big\} < \infty;$$

luego el conjunto $N := \{h_i'x' : i \in I,\, x' \in D\}$ es $\sigma(F,E)$-acotado. Ahora, es claro que

$$\bigcup_{i\in I} h_i(N^\circ) \subset D^\circ$$

y eso prueba que $\{h_i : i \in I\}$ es $\beta(E,F)$-$\beta(E,F)$-equicontinuo. ∎

Algunos autores, como Webb [112], llaman *uniformemente acotadas* a las descomposiciones de Schauder simples. La siguiente proposición justifica esta terminología.

2.3.2 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La descomposición (P_k) es simple.*

(2) *Si D es acotado en E entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es acotado en E.*

(3) *La sucesión de operadores (T_n') es $\beta(E',E)$-$\beta(E',E)$-equicontinua.*

(4) *Si D' es $\beta(E',E)$-acotado entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n'(D')$ es $\beta(E',E)$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(2): Sea $D \subset E$ acotado. Como $\{T_n'x' : n \in \mathbb{N}\}$ es $\beta(E',E)$-acotado para cada $x' \in E'$, se tiene que

$$\sup\Big\{|\langle T_n x, x'\rangle| : n \in \mathbb{N},\, x \in D\Big\} = \sup\Big\{|\langle x, T_n'x'\rangle| : n \in \mathbb{N},\, x \in D\Big\} < +\infty; \tag{2.11}$$

con lo cual vemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es $\sigma(E,E')$-acotado y en consecuencia es acotado en E.

(2)$\Rightarrow$(3): Sea $D \subset E$ acotado. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es acotado en E se tiene de nuevo la relación (2.11). Aplicando el Lema 2.3.1 al par dual (E', E) se tiene que la sucesión de operadores (T'_n) es $\beta(E', E)$-$\beta(E', E)$-equicontinua.

(3)$\Rightarrow$(4) y (4)$\Rightarrow$(1) son inmediatas. ∎

Usando las caracterizaciones de las descomposiciones de Toeplitz simples del resultado anterior, pueden conseguirse condiciones necesarias en términos de otras condiciones sobre la descomposición o de propiedades topológicas (estructurales) del espacio.

2.3.3 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(1) *la topología de Mackey $\mu(E, E')$ es sucesionalmente completa,*

(2) *la topología de Mackey $\mu(E', E)$ es sucesionalmente completa,*

(3) *el espacio E es c-tonelado,*

(4) *la descomposición (P_k) es equicontinua o*

(5) *la descomposición (P_k) es contractiva;*

entonces (P_k) es simple.

DEMOSTRACIÓN:

Para ver que (1) o (2) implican que (P_k) es simple basta usar el teorema de Banach-Mackey [84, Theorem 3.4.1].

Ya sabemos que la sucesión $(T'_n x')$ es $\sigma(E', E)$-convergente para cada $x' \in E'$. Si E es c-tonelado entonces dicha sucesión es equicontinua y por lo tanto es $\beta(E', E)$-acotada [89, Ch. 4, § 3. Lemma 2].

Por otro lado, si (P_k) es equicontinua entonces se verifica la condición (2) de la Proposición 2.3.2 y por lo tanto (P_k) es simple.

Finalmente, si (P_k) es contractiva entonces es obvio que (P_k) es simple. ∎

2.3.4 Teorema. *Sea E un espacio $\aleph_0$-casi-tonelado. Entonces toda descomposición de Toeplitz simple de E es equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN:

Vimos en la Proposición 2.3.2 que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es acotado en E para cada subconjunto D que sea acotado en E. Ahora basta usar [52, Ch. 12, § 12.2.1 Theorem].

■

2.3.5 Observación. Si E es $\aleph_0$-casi-tonelado y (P_k) es una descomposición de Toeplitz simple de E, el teorema anterior asegura que dicha descomposición es equicontinua. El sistema de proyecciones (P_k) se extiende por densidad a un sistema de proyecciones sobre $\widehat{E}$ y lo que se obtiene es, por la equicontinuidad, una descomposición de Toeplitz de $\widehat{E}$. Estamos diciendo que toda descomposición de Toeplitz simple de un espacio $\aleph_0$-casi-tonelado se puede obtener como restricción de una descomposición de Toeplitz de su completado.

2.3.6 Notación. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Se definen los subespacios de E'

$$\begin{aligned} \varphi(E') &:= \operatorname{lin}\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k\} \\ H &:= \{x' \in E' : x' = \lim_{n\to\infty} T'_n x' \text{ en la topología } \beta(E',E)\}. \end{aligned}$$

Si denotamos por $\overline{\varphi(E')}^{\beta(E',E)}$ a la clausura de $\varphi(E')$ en la topología $\beta(E',E)$ entonces, usando el Lema 2.1.8, es inmediato ver que

$$\varphi(E') \subset H \subset \overline{\varphi(E')}^{\beta(E',E)}.$$

En adelante supondremos que H está dotado de la topología inducida por la topología fuerte $\beta(E',E)$.

2.3.7 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si (P_k) es simple entonces (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de H y además $\overline{\varphi(E')}^{\beta(E',E)} = H$.*

DEMOSTRACIÓN:

La continuidad de las proyecciones (P_k') se deduce del teorema de Hellinger-Toeplitz (ver 1.1.1). Si aplicamos el Lema 2.3.1 a la sucesión (T_n') se deduce que (T_n') es $\beta(E', E)$-equicontinua. Por tanto queda probado que (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de H.

Para concluir la prueba bastará ver que H es $\beta(E', E)$-cerrado. Esto se puede deducir inmediatamente usando que la sucesión de operadores (T_n') es equicontinua. ∎

2.3.8 Corolario. *Si (P_k) es una descomposición de Toeplitz contractiva de E entonces (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $[E', \beta(E', E)]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si la descomposición es contractiva entonces es simple y además $H = E'$. Ahora basta aplicar el resultado anterior. ∎

El subespacio H del dual fuerte que se ha definido para un espacio con descomposición de Toeplitz juega un papel importante en la teoría de bases y de los espacios de sucesiones. Para mostrar la situación en el primer caso consideremos el par dual (c_0, l^1). La base de c_0 es la de las coordenadas y la base dual en l^1 también es la de las coordenadas. La primera es contractiva y la segunda es γ-completa. El subespacio H que corresponde a c_0 es l^1 y el subespacio H que corresponde a l^1 es precisamente c_0 con la base bidual formada por las coordenadas. En un caso (considerando $E = l^1$) el dual de H ha regresado a E (la base de E era γ-completa) mientras que en el otro (considerando como $E = c_0$) el dual de H es l^∞ que contiene estrictamente a c_0 (la base de E no era γ-completa). Además la base dual de la que es γ-completa es contractiva y la base dual de la que es contractiva es γ-completa. Este tipo de propiedades se conocen con el nombre de relaciones de dualidad, son generales en la teoría de bases en espacios de Banach y fueron estudiadas por primera vez por James [50] y Singer [103]. En ellas interviene de manera efectiva el comportamiento de H y en el caso general de las descomposiciones en espacios localmente convexos también interviene la estructura topológica de E y de los subespacios E_k. Nosotros abordaremos este problema en el capítulo siguiente en el marco de las descomposiciones de Toeplitz.

Para mostrar la situación en la teoría general de espacios de sucesiones, consideremos el espacio l^1. En la teoría de la α-dualidad de Köthe y Toeplitz [61, Ch. 6, § 30] el espacio l^1 se utiliza para definir lo que se llama el α-dual λ^α de un espacio de sucesiones λ conteniendo a φ

$$\lambda^\alpha := \Big\{x \in \omega : xy \in l^1 \text{ para todo } y \in \lambda\Big\}.$$

De este modo se obtiene un par dual $(\lambda, \lambda^\alpha)$ a partir del cual se pueden definir topologías localmente convexas sobre λ. Una de ellas es la que se conoce con el nombre de topología normal. Un espacio de Köthe es un espacio de sucesiones que coincide con su bi-α-dual $\lambda^{\alpha\alpha}$ y está dotado de su topología normal. Pues bien, un espacio de Köthe λ tiene la propiedad de Schwartz si y sólo si

$$\lambda^\alpha = c_0 \cdot \lambda^\alpha =: \Big\{xy : x \in c_0,\ y \in \lambda^\alpha\Big\}.$$

Este resultado se debe a Ruckle y Swart [92] aunque se conoce con el nombre de "criterio de Grothendieck–Pietsch" para espacios de Schwartz (por su similitud con un resultado análogo para espacios nucleares y debido a esos dos autores). En otras teorías, surgidas al reemplazar el espacio l^1 por otro, se han probado resultados análogos reemplazando c_0 por el espacio H correspondiente. Por ejemplo, en el caso de cs_1 se sabe que sus coordenadas forman una base de Cesàro, el subespacio H que le corresponde está en bv_1 y viene dado por

$$H = \Big\{x \in bv_1 : \lim x = 0\Big\} = bv_1 \cap c_0.$$

Criterios análogos al de Grothendieck–Pietsch pero considerando la dualidad de Cesàro fueron obtenidos por Florencio [29, Cap. 3, § 3]. En el siguiente capítulo estudiaremos otras condiciones que garantizan que un espacio con descomposición de Toeplitz tiene la propiedad de Schwartz.

En el Teorema 2.3.7 se ha probado que la descomposición dual de una descomposición de Toeplitz simple es una descomposición de Toeplitz equicontinua de H. Esto es un caso particular de un resultado más amplio que veremos a continuación.

2.3.9 Notación. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y τ una topología sobre E', de convergencia uniforme sobre una cierta familia de subconjuntos acotados en E. Denotaremos por $\overline{\varphi(E')}^{\tau}$ a la clausura de $\varphi(E')$ en E' para la topología τ. En adelante supondremos que τ está fija o se deduce del contexto y que $\overline{\varphi(E')}^{\tau}$ está dotado de la topología inducida por τ.

2.3.10 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Sea τ la topología sobre E' de la convergencia uniforme sobre una cierta familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos acotados en E. Si para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D) \in \mathcal{D}, \tag{2.12}$$

entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $\overline{\varphi(E')}^{\tau}$ y además

$$\overline{\varphi(E')}^{\tau} = \left\{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T'_n x' = x' \text{ en la topología } \tau\right\}. \tag{2.13}$$

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, la τ-equicontinuidad de (T'_n) se deduce usando un argumento estándar de dualidad. En efecto,

$$\bigcap_{n\geq 1} (T'_n)^{-1}(D^\circ) = \bigcap_{n\geq 1} T_n(D)^\circ = \Big(\bigcup_{n\geq 1} T_n(D)\Big)^\circ \qquad [D \in \mathcal{D}]$$

es, por hipótesis, un entorno del origen en E' para τ. Como T^{-1} es triangular y $(P'_k) = T^{-1}(T'_n)$ se tiene que las proyecciones P'_k son τ-continuas.

Por otro lado, usando la Proposición 2.1.6 y el Lema 2.1.8 vemos que (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de $\overline{\varphi(E')}^{\tau}$.

Para concluir la prueba, vamos a comprobar que se verifica la igualdad (2.13). Por un lado, la τ-equicontinuidad de (T'_n) implica que el subespacio

$$\{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T'_n x' = x' \text{ en } \tau\}$$

es τ-cerrado. Por lo tanto se tiene la inclusión

$$\overline{\varphi(E')}^{\tau} \subset \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T'_n x' = x' \text{ en } \tau\}.$$

La otra inclusión es inmediata a partir de la Proposición 2.1.5. ∎

Este resultado se puede aplicar sistemáticamente; por ejemplo, si consideramos sobre E' la topología τ_{pc} de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de E; si tomamos la topología $\beta(E',E)$ (respectivamente $\beta_0(E',E)$) sobre E' de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos (respectivamente sucesiones) acotados de E; o también si tomamos la topología $\beta^*(E',E)$ (respectivamente $\beta_0^*(E',E)$) sobre E' de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos (respectivamente sucesiones) $\beta(E,E')$-acotados de E. Algunos de los resultados así obtenidos nos serán de mucha utilidad cuando tratemos el tema de las descomposiciones de Toeplitz débiles.

2.3.11 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es precompacto para cada precompacto $D \subset E$ entonces (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $\overline{\varphi(E')}^{\tau_{pc}}$ y además*

$$\overline{\varphi(E')}^{\tau_{pc}} = \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T_n' x' = x' \text{ en la topología } \tau_{pc}\}.$$

2.3.12 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz simple de un espacio localmente convexo E. Entonces (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $\overline{\varphi(E')}^{\beta(E',E)}$ y de $\overline{\varphi(E')}^{\beta_0(E',E)}$. Además,*

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(E')}^{\beta(E',E)} &= \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T_n' x' = x' \text{ en la topología } \beta(E',E)\} \quad y \\ \overline{\varphi(E')}^{\beta_0(E',E)} &= \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T_n' x' = x' \text{ en la topología } \beta_0(E',E)\}.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

Como (P_k) es una descomposición de Toeplitz simple de E usamos la condición (2) de la Proposición 2.3.2 y deducimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es acotado para cada subconjunto acotado $D \subset E$. Ahora basta aplicar el Teorema 2.3.10. ∎

2.3.13 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E tal que (P_k') es simple para la topología $\sigma(E',E)$. Entonces (P_k')*

es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $\overline{\varphi(E')}^{\beta^*(E',E)}$ *y de* $\overline{\varphi(E')}^{\beta_0^*(E',E)}$. *Además,*

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(E')}^{\beta^*(E',E)} &= \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T_n'x' = x' \textit{ en la topología } \beta^*(E',E)\} \quad y \\ \overline{\varphi(E')}^{\beta_0^*(E',E)} &= \{x' \in E' : \lim_{n\to\infty} T_n'x' = x' \textit{ en la topología } \beta_0^*(E',E)\}.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis, la descomposición de Toeplitz dual (P_k') es simple para $\sigma(E',E)$. Si usamos la condición (4) de la Proposición 2.3.2, aplicada a la descomposición (P_k') y al par dual (E',E), deducimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(D)$ es $\beta(E,E')$-acotado para cada subconjunto $\beta(E,E')$-acotado $D \subset E$. Ahora basta aplicar el Teorema 2.3.10. ■

A continuación vamos a probar que la propiedad (S) es más fuerte que la propiedad (M) y que ésta, a su vez, implica la contractividad. En determinadas condiciones, la propiedad (M) también implica la γ-completitud. También veremos que la contractividad es precisamente la propiedad (M) para la topología débil.

2.3.14 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si (P_k) tiene la propiedad (S) entonces también tiene la propiedad (M).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea D un acotado de E y $U \in \mathcal{U}(E)$. Como (P_k) tiene la propiedad (S), existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_U\big(T_nx - x\big) : q_V(x) \leq 1\} = 0.$$

Por las propiedades de las seminormas se tiene, más generalmente, que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{q_U\big(T_nx - x\big) : q_V(x) \leq r\} = 0,$$

para cada $r > 0$. Como D es acotado y V es un entorno del origen, existe $r > 0$ tal que $D \subset rV$. Por lo tanto, la sucesión (T_nx) converge a x uniformemente en D. ■

2.3.15 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Entonces (P_k) es contractiva si y sólo si tiene la propiedad (M) para la topología $\sigma(E,E')$.*

DEMOSTRACIÓN:

En efecto, (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E',\beta(E',E)]$ si y sólo si para todo subconjunto acotado $D \subset E$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, T_n'x' - x'\rangle = 0 \qquad [x' \in E'],$$

uniformemente en $x \in D$. Como $\langle x, T_n'x' - x'\rangle = \langle T_n x - x, x'\rangle$ deducimos que (P_k) es contractiva si y sólo si para todo subconjunto acotado $D \subset E$ se tiene que

$$\sigma(E,E')\text{-} \lim_{n\to\infty} T_n x = x \qquad [x \in E]$$

uniformemente en D. ∎

2.3.16 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si (P_k) tiene la propiedad (M) entonces es contractiva. Si, además, E es sucesionalmente completo entonces (P_k) es γ-completa (y, en particular, también es completa y β-completa).*

DEMOSTRACIÓN:

La contractividad se deduce inmediatamente del hecho de que si (P_k) tiene la propiedad (M) entonces

$$\langle x - T_n x, x'\rangle = \langle x, x' - T_n'x'\rangle \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \qquad [x \in E] \quad [x' \in E'], \tag{2.14}$$

uniformemente en acotados de E y en equicontinuos de E'.

Por otro lado, consideremos una sucesión (x_k) tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y supongamos que la sucesión $T(x_k)$ es acotada. Si denotamos por $z_n := [T(x_k)]_n$ entonces es fácil comprobar las igualdades

$$\langle z_n, T_p'x'\rangle = \langle z_p, T_n'x'\rangle = \sum_{k=1}^{n\wedge p} t_{nk}t_{pk}\langle x_k, x'\rangle \qquad [n,p \in \mathbb{N}] \quad [x' \in E']. \tag{2.15}$$

Como (P_k) tiene la propiedad (M) y la sucesión (z_n) es acotada sabemos que cada sucesión $(T_p z_n)_p$ converge a z_n, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$. Así pues, fijados

$\varepsilon > 0$ y $D \subset E'$ equicontinuo se tiene, en primer lugar, que existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que que para todos $x' \in D$, $p \geq p_0$ y $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left|\langle (z_n - T_p z_n) - (z_m - T_p z_m), x' \rangle\right| = \left|\langle z_n - z_m, x' - T_p' x' \rangle\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En segundo lugar, teniendo en cuenta la condición (2.14) y las igualdades (2.15) también se deduce que

$$\langle z_n - z_m, T_p' x' \rangle = \langle z_p, T_n' x' - T_m' x' \rangle \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformemente en $p \in \mathbb{N}$ y en $x' \in D$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\langle z_n - z_m, T_p' x' \rangle\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad [x' \in D] \quad [p \in \mathbb{N}] \quad [n, m \geq n_0].$$

Las dos desigualdades anteriores implican que

$$\left|\langle z_n - z_m, x' \rangle\right| \leq \varepsilon \qquad [x' \in D] \quad [n, m \geq n_0];$$

es decir, la sucesión $T(x_k)$ es de Cauchy en E. Si E es sucesionalmente completo entonces es convergente y como consecuencia (P_k) es γ-completa. ■

Resumimos en un esquema las relaciones obtenidas entre las propiedades de una descomposición de Toeplitz en las que las propiedades del espacio no hayan jugado ningún papel. Las implicaciones están numeradas para, a continuación, indicar las referencias de los resultados en que se encuentran.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (S) & \overset{(1)}{\Longrightarrow} (M) \overset{(2)}{\Longrightarrow} & (\text{Contractiva}) \\ \Downarrow {\scriptstyle (3)} & & \Downarrow {\scriptstyle (5)} \\ (\text{Equicontinua}) & \overset{(4)}{\Longrightarrow} & (\text{Simple}) \end{array}}$$

Las referencias son:

– (1) : Proposición 2.3.14;

– (2) : Proposición 2.3.16;

– (3) : Proposición 2.2.5;

– (4) y (5) : Proposición 2.3.3.

Ninguna de las implicaciones recíprocas en el cuadro anterior es cierta, como puede apreciarse en el siguiente esquema. Ahora los números indican los contraejemplos que a continuación se darán.

$$\begin{tikzcd}
(S) & (M) \arrow[l, "(6)", "/" marking] \arrow[dr, "(8)", "/" marking] & & (\text{Contractiva}) \arrow[ll, "(7)", "/" marking] \\
& & (\text{Equicontinua}) \arrow[ur, "(9)", "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Basta considerar los ejemplos:

– (6) : un espacio escalonado de Köthe con la propiedad de Montel pero sin la propiedad de Schwartz [43, p. 95];

– (7) : cualquiera de los espacios l^p $(1 < p < \infty)$;

– (8) : $\left[l^p, \sigma(l^p, l^q)\right]$, con $1 < p < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$; la base natural tiene la propiedad (M) por la Proposición 2.3.15, pero no es equicontinua por el Teorema 2.2.11 (véase también 3.1.9). En general, se puede tomar cualquier espacio de Banach pue posea una descomposición de Toeplitz contractiva (por el Teorema 3.2.2, las descomposiciones de los espacios reflexivos siempre verifican esa condición) y dotado de su topología débil.

– (9) : l^1.

2.4 β- y γ-dualidad.

Cuando un espacio localmente convexo E posee una descomposición de Toeplitz la dualidad entre E y E' puede ser extendida a lo que se llama el *β-dual* de E con respecto a dicha descomposición. Este concepto fue introducido por Garling [37] para espacios de sucesiones escalares y ha dado lugar a importantes problemas, entre ellos el estudio de la propiedad de Wilansky. La generalización al caso de espacios localmente convexos con descomposición de Schauder es debida a Kalton [55]. En espacios de sucesiones vectoriales con convergencia seccional clásica la definición de β-dual puede ser consultada por ejemplo en [12]. En espacios de sucesiones escalares con convergencia seccional generalizada, Buntinas [16] también definió la correspondiente noción de β-dualidad con respecto a una matriz de sumabilidad.

En el marco de las descomposiciones de Toeplitz la definición de β-dual que damos a continuación extiende de manera natural a todas las mencionadas anteriormente. En el capítulo siguiente veremos que la igualdad entre el β-dual y el dual está estrechamente relacionada con la tonelación del espacio.

2.4.1 Definiciones. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a un triángulo regular A. Se definen los espacios *β-dual* y *γ-dual* de E con respecto al método de sumabilidad definido por A como sigue:

$$E^\beta := \Big\{(x'_k) \in \prod_{k=1}^{\infty} E'_k : \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, x'_k\rangle \text{ es } A\text{-convergente } \ [x \in E]\Big\} \quad \text{y}$$

$$E^\gamma := \Big\{(x'_k) \in \prod_{k=1}^{\infty} E'_k : \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, x'_k\rangle \text{ tiene sumas parciales } A\text{-acotadas } \ [x \in E]\Big\}.$$

Suprimiremos la referencia a la matriz A cuando esté clara en el contexto.

A partir de esta definición podemos escribir, obviamente,

$$E^\beta := \Big\{(x'_k) : \ x'_k \in E'_k \quad [k \in \mathbb{N}] \text{ y } T(x'_k) \text{ es } \sigma(E', E)\text{-de Cauchy } \Big\};$$

$$E^\gamma := \Big\{(x'_k) : \ x'_k \in E'_k \quad [k \in \mathbb{N}] \text{ y } T(x'_k) \text{ es } \sigma(E', E)\text{-acotada } \Big\}.$$

Es inmediato comprobar que $E^\beta \subset E^\gamma$. También podemos considerar que E' es un subespacio de E^β identificándolo con su imagen mediante la inyección

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E^\beta \\ x' & \longrightarrow & (P'_k x'). \end{array}$$

2.4.2 Observaciones. Supongamos que (P_k) es una descomposición de Toeplitz fija de un espacio localmente convexo E, la cual define los correspondientes espacios E^β y E^γ.

(1) Se puede definir una dualidad entre los espacios E y E^β que extiende la dualidad entre E y E':

$$\begin{aligned}\langle x, (x'_k)\rangle_{(E,E^\beta)} &:= A\text{-} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x'_k\rangle_{(E,E')} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x, x'_k\rangle_{(E,E')} \qquad [x\in E] \quad \left[(x'_k)\in E^\beta\right].\end{aligned}$$

Así pues, cada $(x'_k) \in E^\beta$ define un elemento $x^* \in E^*$, el dual algebraico de E, que actúa como

$$\langle x, x^*\rangle_{(E,E^*)} := \langle x, (x'_k)\rangle_{(E,E^\beta)}$$

y tal que $P^*_m x^* \in E'_m$ $[m \in \mathbb{N}]$. En efecto,

$$\begin{aligned}\langle x, P^*_m x^*\rangle_{(E,E^*)} &= \langle P_m x, x^*\rangle_{(E,E^*)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle P_m x, \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x'_k\rangle_{(E,E')} = \lim_{n\to\infty}\langle x, t_{nm}x'_m\rangle_{(E,E')} \\ &= \langle x, x'_m\rangle_{(E,E')} \qquad [x\in E] \quad [m\in\mathbb{N}].\end{aligned}$$

Recíprocamente, todo elemento $x^* \in E^*$ tal que $P^*_k x^* \in E'$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y, además, verifique

$$\langle x, x^*\rangle_{(E,E^*)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x, P^*_k x^*\rangle_{(E,E')} \qquad [x\in E],$$

define un elemento de E^β, a saber, $(P^*_k x^*)$. Por lo tanto, se puede identificar E^β con el subespacio de E^* dado por

$$\left\{x^* \in E^* : \ P^*_k x^* \in E' \quad [k\in\mathbb{N}] \text{ y } \langle x, x^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x, P^*_k x^*\rangle \quad [x\in E]\right\}.$$

(2) (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $\left[E, \sigma(E, E^\beta)\right]$. Para ver esto, bastará probar la continuidad de las proyecciones en esa topología pues la convergencia puntual a la identidad de la sucesión de operadores (T_n) se tiene por la identificación anterior. Para ello consideremos $(z_i)_{i\in I}$ una red $\sigma(E, E^\beta)$-convergente a cero. Como $E' \subset E^\beta$, la topología $\sigma(E, E^\beta)$ es más fina que $\sigma(E, E')$. Por lo tanto (z_i) converge a cero en $\sigma(E, E')$. Ahora concluimos que

$$\langle P_k z_i, x^*\rangle_{(E,E^*)} = \langle z_i, P^*_k x^*\rangle_{(E,E')} \xrightarrow{i\in I} 0 \qquad [k\in\mathbb{N}] \quad [x^*\in E^\beta].$$

(3) La igualdad $E^\beta = E'$ se tiene si y sólo si (P'_k) es β-completa para la topología $\sigma(E', E)$. En efecto, si $x^* \in E^\beta$ entonces $(P^*_k x^*)$ es tal que $P^*_k x^* \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y la sucesión $T(P^*_k x^*)$ es $\sigma(E', E)$-de Cauchy. Si (P'_k) es β-completa para $\sigma(E', E)$ entonces existe $x' \in E'$ tal que $T(P^*_k x^*)$ converge a x' en la topología $\sigma(E', E)$. Así pues,

$$\langle x, x^* \rangle_{(E,E^*)} = \lim_{n\to\infty} \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P^*_k x^* \right\rangle_{(E,E')} = \langle x, x' \rangle_{(E,E')} \qquad [x \in E],$$

y por lo tanto $x^* = x' \in E'$. Recíprocamente, si (x'_k) es tal que $x'_k \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E', E)$-de Cauchy, entonces $(x'_k) \in E^\beta$. Ahora, si $E' = E^\beta$ existe $x' \in E'$ tal que $x'_k = P'_k x'$ $[k \in \mathbb{N}]$ y por tanto $T(x'_k) = T(P'_k x')$ converge a x' en $[E', \sigma(E', E)]$. Esto prueba que (P'_k) es β-completa para la topología $\sigma(E', E)$.

(4) No podemos identificar E^γ con un subespacio de E^*, al igual que hemos hecho con E^β, porque, en general, no es posible definir una dualidad entre E y E^γ que extienda la dualidad entre E y E' (ni siquiera en espacios de sucesiones con la convergencia seccional clásica [37]). No obstante, dada (P_k) una descomposición de Toeplitz de E, se puede afirmar que $E^\gamma = E'$ si y sólo si (P'_k) es γ-completa para la topología $\sigma(E', E)$. Para ver esto, tomamos (x'_k) tal que $x'_k \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E', E)$-acotada. Si $(x'_k) \in E'$, o sea, si existe $x' \in E'$ tal que $(x'_k) = (P'_k x')$ entonces $T(x'_k)$ converge débilmente a x'. Recíprocamente, si (x'_k) es tal que $x'_k \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E', E)$-acotada entonces existe $x' \in E'$ tal que $T(x'_k)$ converge débilmente a x'. Por lo tanto (x'_k) es la imagen de x' por la inyección de E' en E^γ.

Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a un triángulo regular A y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T con respecto a la matriz A. En esta sección veremos que existe la topología polar del par dual (E, E') menos fina bajo la cual la descomposición (P_k) es equicontinua. Veremos también de qué manera esta topología está relacionada con la β-dualidad y de esta relación podremos obtener condiciones equivalentes a que dicha topología sea compatible con el par dual (E, E'). Antes, vamos a introducir una notación que nos resultará muy útil en esta sección y a lo largo de secciones posteriores.

2.4.3 Notación. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con respecto a un triángulo regular A. Fijado $x' \in E'$, denotaremos por $\Delta_{x'}$ a la aplicación

$$\begin{aligned} \Delta_{x'} \ : \ & E \longrightarrow c_T \\ & x \longrightarrow \Big(\langle P_k x, x'\rangle\Big)_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

donde $T = A\Sigma$. Es inmediato ver, por la definición de $||\cdot||_T$ dada en 1.3.6, que

$$||\Delta_{x'}x||_T = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\langle T_n x, x'\rangle\Big| \qquad [x \in E] \quad [x' \in E']. \tag{2.16}$$

Otra propiedad importante de este operador es que

$$\Delta_{x'}T_n = \tau_n \Delta_{x'} \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x' \in E'], \tag{2.17}$$

donde los τ_n son las secciones de Toeplitz de una sucesión de escalares (ver la Definición 1.4.8). En efecto, como $P_k T_n x = t_{nk} P_k x$ para cada $k, n \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que

$$\Delta_{x'}T_n x = \Big(\langle P_k T_n x, x'\rangle\Big)_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle P_k x, x'\rangle e^{[k]} = \tau_n \Delta_{x'} x,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in E$.

2.4.4 Definición. Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Sabemos (Proposición 2.1.6) que (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E', \sigma(E', E)]$. Por consiguiente, para cada $x' \in E'$, la sucesión $(T_n' x')$ es $\sigma(E', E)$-acotada y su polar en E está contenido en $\{x'\}^{\circ}$. Por esta razón, la familia $\{(T_n' x') : x' \in E'\}$ genera una topología localmente convexa sobre E la cual será, en general, más fina que la débil. Dicha topología se denota por $\sigma\gamma(E, E')$ y viene dada por la familia de seminormas

$$||\Delta_{x'}(\cdot)||_T = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\langle T_n(\cdot), x'\rangle\Big| \qquad [x' \in E'].$$

La notación no hace referencia a la descomposición ni a la matriz de sumabilidad porque cuando la usemos tanto una cosa como la otra estarán fijadas.

El siguiente resultado es una curiosa caracterización de las descomposiciones de Toeplitz simples en términos de la topología $\sigma\gamma(E, E')$.

2.4.5 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Entonces (P_k) es simple si y sólo si las topologías $\sigma(E,E')$ y $\sigma\gamma(E,E')$ definen los mismos acotados sobre E.*

DEMOSTRACIÓN:

La descomposición (P_k) es simple si y sólo si la sucesión $(T_n'x')$ es $\beta(E',E)$-acotada para cada $x' \in E'$; es decir, si y sólo si

$$\sup\Big\{|\langle x, T_n'x'\rangle| : \ n \in \mathbb{N}, \ x \in D\Big\} = \sup_{x\in D} ||\Delta_{x'}x||_T < +\infty,$$

para todo $x' \in E'$ y para todo subconjunto $\sigma(E,E')$-acotado $D \subset E$. Deducimos que (P_k) es simple si y sólo si todo subconjunto $\sigma(E,E')$-acotado de E es $\sigma\gamma(E,E')$-acotado. Como la topología $\sigma\gamma(E,E')$ es más fina que $\sigma(E,E')$ siempre se tiene que todo $\sigma(E,E')$-acotado de E es $\sigma\gamma(E,E')$-acotado. ∎

En lo que resta de esta sección supondremos que A es un triángulo regular y que las coordenadas forman una base de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A, donde $T = A\Sigma$ (ver Teorema 1.4.10). Por lo tanto existe una constante $M > 0$ tal que

$$||\tau_n||_{\mathcal{L}(c_T)} \leq M \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

2.4.6 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces $\sigma\gamma(E,E')$ es la topología polar de (E,E') menos fina para la cual (P_k) es una descomposición de Toeplitz equicontinua de E.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos en primer lugar que (T_n) es una sucesión equicontinua de operadores sobre E con la topología $\sigma\gamma(E,E')$. Por las propiedades del operador $\Delta_{x'}$ se tiene que

$$||\Delta_{x'}(T_n x)||_T = ||\tau_n(\Delta_{x'}x)||_T \leq M||\Delta_{x'}x||_T \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Como $(P_k) = T^{-1}(T_n)$ y T^{-1} es triangular se tiene que cada P_k también es continua con respecto a $\sigma\gamma(E,E')$.

En segundo lugar, la sucesión (T_n) converge puntualmente a la identidad para la topología $\sigma\gamma(E,E')$. El motivo es, como siempre, la convergencia puntual a la identidad de (τ_n) en c_T y las propiedades de $\Delta_{x'}$:

$$||\Delta_{x'}(x - T_n x)||_T = ||\Delta_{x'}x - \Delta_{x'}(T_n x)||_T = ||\Delta_{x'}x - \tau_n(\Delta_{x'}x)||_T \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Veamos, por último, que cualquier otra topología polar ν con respecto a (E,E'), para la cual (P_k) es una descomposición de Toeplitz equicontinua de (E,ν), es más fina que la topología $\sigma\gamma(E,E')$. Para ello, fijado $x' \in E'$, usamos que la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua para ν. Así pues, dado $\{x'\}$ existe otro subconjunto equicontinuo D del dual de (E,ν) tal que

$$\begin{aligned} ||\Delta_{x'}x||_T &= \sup\Big\{|\langle T_n x, x'\rangle| : \ n \in \mathbb{N}\Big\} \\ &\leq \sup\Big\{|\langle x, y'\rangle| : \ n \in \mathbb{N}, \ y' \in D\Big\} \qquad [x \in E]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todo entorno de cero para la topología $\sigma\gamma(E,E')$ es un entorno de cero para ν. ∎

2.4.7 Ejemplo. La topología $\sigma\gamma(c_T, c'_T)$ es la topología normada de c_T. En efecto: estamos en el caso en que las coordenadas forman una base de Toeplitz equicontinua para c_T con respecto a la matriz A; luego usando los teoremas 1.4.10 y 2.4.6 se tiene que la topología $\sigma\gamma(c_T, c'_T)$ es menos fina que la topología de la norma. Recíprocamente, tomando $e = (1,1,\ldots) \in c'_T$ se tiene que

$$||\Delta_e x||_T = \sup_n \Big|\langle \tau_n x, e\rangle_{(c_T, c'_T)}\Big| = \sup_n \Big|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k\Big| = ||x||_T \qquad [x \in c_T];$$

luego la topología de la norma es menos fina que la topología $\sigma\gamma(c_T, c'_T)$ y por lo tanto coinciden. Este resultado también aparece recogido en [30, Proposición 7] para la matriz de sumabilidad de Cesàro.

La topología $\sigma\gamma(E,E')$ no siempre es compatible con el par dual (E,E'). A continuación veremos que el dual de E con la topología $\sigma\gamma(E,E')$ se puede caracterizar como un cierto subespacio de E^β. Recordemos (ver Teorema 1.4.14) que cuando las coordenadas forman una base de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A, entonces el dual de c_T verifica la igualdad

$$c'_T = (c_T \to c_T) := \Big\{a \in \omega : \ ab \in c_T \quad [b \in c_T]\Big\},$$

donde ab es el producto coordenada a coordenada y la forma bilineal viene dada por $\langle b, a\rangle_{(c_T, c'_T)} = T\text{-}\lim(a_k b_k)$. En este caso (ver Proposición 1.4.12), se tiene que $c'_T \subset c$.

2.4.8 Definición. Dados $a \in c'_T$ y $x^* \in E^\beta$ se define $a \cdot x^*$ como un nuevo elemento de E^β dado por

$$\langle x, a \cdot x^*\rangle_{(E,E^*)} := T\text{-}\lim\Big(a_k \langle x, P_k^* x^*\rangle_{(E,E')}\Big).$$

Si $G \subset c'_T$ y $F \subset E^\beta$ se define

$$G \cdot F := \{a \cdot x^* : \ a \in G, \ x^* \in F\}.$$

2.4.9 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces el dual de $[E, \sigma\gamma(E, E')]$ es $c'_T \cdot E'$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $a \in c'_T$ y $x' \in E'$; entonces

$$\langle x, a \cdot x'\rangle_{(E,E^*)} = T\text{-}\lim\Big(a_k \langle P_k x, x'\rangle_{(E,E')}\Big) = \langle \Delta_{x'} x, a\rangle_{(c_T, c'_T)}.$$

Por lo tanto, $a \cdot x'$ es la composición del operador $\Delta_{x'}$ con el funcional sobre c_T definido por a. Por la propia definición de la topología $\sigma\gamma(E, E')$, el operador $\Delta_{x'}$ es $\sigma\gamma(E, E')$-$||\cdot||_T$-continuo. Esto prueba que el funcional $a \cdot x'$ es $\sigma\gamma(E, E')$-continuo.

Recíprocamente, sea x^* un funcional $\sigma\gamma(E, E')$-continuo sobre E. Entonces existe $x' \in E'$ tal que

$$\Big|\langle x, x^*\rangle_{(E,E^*)}\Big| \leq ||\Delta_{x'} x||_T \qquad [x \in E].$$

Así pues, si $\Delta_{x'} x = 0$ entonces $\langle x, x^*\rangle = 0$. Esto implica que el funcional

$$\begin{array}{cccc} a \ : & \Delta_{x'}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \Delta_{x'} x & \longrightarrow & \langle x, x^*\rangle \end{array}$$

está bien definido. En segundo lugar se tiene que

$$\left|\langle \Delta_{x'}x, a\rangle_{(c_T,c_T^*)}\right| = \left|\langle x, x^*\rangle_{(E,E^*)}\right| \leq ||\Delta_{x'}x||_T \qquad [x \in E].$$

Por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión continua de a a todo c_T, que seguimos denotando de la misma forma. Ahora vemos que

$$\begin{aligned}\langle x, x^*\rangle_{(E,E^*)} &= \langle \Delta_{x'}x, a\rangle_{(c_T,c_T')} = T\text{-}\lim\Big(a_k\langle P_k x, x'\rangle_{(E,E')}\Big)\\ &= \langle x, a\cdot x'\rangle_{(E,c_T'\cdot E')} \qquad [x \in E];\end{aligned}$$

con lo cual queda probado que $x^* \in c_T' \cdot E'$. ∎

2.4.10 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $E' = c_T' \cdot E'$.

(2) *$\sigma\gamma(E, E')$ es una topología compatible con el par dual (E, E').*

(3) *Existe una topología ν sobre E, compatible con el par dual (E, E'), tal que (P_k) es una descomposición de Toeplitz equicontinua de (E, ν).*

(4) *Para cada $x' \in E'$, la sucesión $(T_n'x')$ es $\mu(E, E')$-equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN:

La equivalencia de las condiciones (1), (2) y (3) se sigue inmediatamente de los resultados anteriores (Teoremas 2.4.6 y 2.4.9). También es inmediata la equivalencia de las condiciones (2) y (4) porque la topología $\sigma\gamma(E, E')$ está generada precisamente por la familia de sucesiones $\sigma(E', E)$-acotadas dada por $\{(T_n'x') : x' \in E'\}$. ∎

2.4.11 Observaciones.

(i) La condición (1) del corolario anterior equivale a exigir que $B_{T,0} \cdot E' \subset E'$, donde

$$B_{T,0} := \Big\{a \in c_T' : ||a|| = 1\Big\} \cap c_0.$$

Para ver esto, sean $a = (a_k) \in c'_T$, no nulo, y $x' \in E'$. Si denotamos por $\hat{a} := \lim(a_k)$ y por $e := (1, 1, \ldots)$ entonces

$$a \cdot x' = \hat{a}x' + (a - \hat{a}e) \cdot x' \in E' + B_{T,0} \cdot E'.$$

Algunos autores, como Garling [37] [38] o Kalton [55], llaman *B_T-invariancia de E'* a esta condición.

(ii) Recordemos que una descomposición de Toeplitz (P_k) de un espacio localmente convexo E se dice que es simple si $(T_n'x')$ es $\beta(E', E)$-acotada para cada $x' \in E'$. Como todos los subconjuntos equicontinuos de E' son $\beta(E', E)$-acotados se sigue que cuando E' es B_T-invariante entonces (P_k) es simple. El recíproco se tiene, por ejemplo, si E es l^∞-casi-tonelado.

2.5 Descomposiciones débiles.

Terminamos este capítulo tratando el problema de las descomposiciones de Toeplitz débiles. En esta sección daremos condiciones para que una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E con la topología $\sigma(E, E')$ sea una descomposición de Toeplitz de E con una topología más fina. Usando el Lema 2.1.8 es fácil adelantar un resultado de este tipo: si se tiene una descomposición de Toeplitz débil entonces se tiene la densidad de $\varphi(E)$ y basta asegurar la equicontinuidad de (T_n) mediante alguna hipótesis de tonelación. Los resultados que veremos a continuación no son más que un refinamiento de esta idea.

La línea que seguimos está inspirada en el tratamiento que Webb [112] da a este problema en el caso de las descomposiciones de Schauder. También es viable intentar demostraciones directas tal y como hace McArthur [67].

2.5.1 Lema. [112, 2.7 Lemma]. *Si E es un espacio localmente convexo entonces*

(1) *las topologías $\beta^*(E', E)$ y $\beta_0^*(E', E)$ definen las mismas sucesiones convergentes en E y*

(2) *las topologías $\beta(E', E)$ y $\beta_0(E', E)$ definen las mismas sucesiones convergentes en E.*

2.5.2 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo l^∞-casi-tonelado. Entonces, toda descomposición de Toeplitz simple de $[E,\sigma(E,E')]$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $[E,\beta^*(E,E')]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si (P_k) es una descomposición de Toeplitz simple de $[E,\sigma(E,E')]$ entonces cada P_k es $\beta^*(E,E')$-continua por el teorema de Hellinger–Toeplitz (ver 1.1.1). Si consideramos (P_k') como descomposición de Toeplitz de $[E',\sigma(E',E)]$ tenemos que su descomposición dual (P_k) es, por hipótesis, simple para la topología $\sigma(E,E')$. Usando el Corolario 2.3.13 se deduce que (P_k) es una descomposición de Toeplitz equicontinua del correspondiente $\overline{\varphi(E)}^{\beta_0^*(E,E')}$.

Por otro lado, la topología $\beta_0^*(E,E')$ es compatible con el par dual (E,E') porque E es l^∞-casi-tonelado. Como la clausura de los conjuntos convexos es la misma para todas las topologías compatibles [89, Ch. II, § 3. Proposition 8] y $\varphi(E)$ es un subespacio vectorial $\sigma(E,E')$-sucesionalmente denso se tiene que $\overline{\varphi(E)}^{\beta_0^*(E,E')} = E$. Ahora basta usar la primera parte del lema anterior. ∎

Todo espacio casi-tonelado es, en particular, l^∞-casi-tonelado y tiene la topología $\beta^*(E,E')$. Por tanto el siguiente resultado es inmediato a partir del anterior.

2.5.3 Corolario. *Sea E un espacio localmente convexo casi-tonelado. Entonces, toda descomposición de Toeplitz simple de $[E,\sigma(E,E')]$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua de E.*

2.5.4 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo l^∞-tonelado. Entonces, toda descomposición de Toeplitz de $[E,\sigma(E,E')]$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $[E,\beta(E,E')]$.*

DEMOSTRACIÓN:

De nuevo, cada P_k es $\beta(E,E')$-continua por el teorema de Hellinger-Toeplitz. Si E es l^∞-tonelado, en particular es c-tonelado y en esta clase de espacios toda descomposición de Toeplitz es simple por la Proposición 2.3.3.

El resto de la demostración es totalmente análoga a la del Teorema 2.5.3, pero utilizando esta vez la segunda parte del Lema 2.5.1. ∎

2.5.5 Observación. La condición de que E sea l^∞-tonelado en el teorema anterior no puede ser excesivamente debilitada tal y como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo, dado para el caso particular de una base de Schauder:

Sea $E := C[0,1]$ el espacio formado por todas las funciones reales continuas sobre el intervalo $[0,1]$. El espacio $[E', \mu(E', E)]$ tiene base de Schauder débil pero no tiene base de Schauder [57, § 3.]. Por otro lado, $[E', \mu(E', E)]$ es c-tonelado pero no es l^∞-tonelado [110, Proposition 4.2].

Todo espacio tonelado es, en particular, l^∞-tonelado y tiene la topología $\beta(E, E')$. Por tanto el siguiente resultado es inmediato a partir del anterior.

2.5.6 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo tonelado. Entonces, toda descomposición de Toeplitz de $[E, \sigma(E, E')]$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua de E.*

Capítulo III

Propiedades inducidas por una descomposición de Toeplitz.

Como ya comentamos al comienzo del capítulo anterior, uno de los objetivos que nos hemos marcado en esta memoria es estudiar propiedades topológicas estructurales sobre un espacio localmente convexo con una descomposición de Toeplitz. Usaremos las propiedades que sobre este tipo de descomposiciones hemos definido en el capítulo anterior para garantizar que el espacio es completo, reflexivo, tonelado, Montel, casi-normable, Schwartz, etc. Una parte de los resultados que hemos obtenido eran ya conocidos para espacios de Fréchet con una descomposición de Schauder y pueden encontrarse en la tesis doctoral de M. A. Miñarro [74]. En algunos casos la extensión al caso general de una descomposición de Toeplitz arbitraria resulta sencilla y natural, en otros las pruebas y las hipótesis de los resultados han sido simplificadas y, finalmente, en otros el esfuerzo ha sido mayor, hasta el punto de que algunos resultados dejan de ser válidos para cierto tipo de matrices.

3.1 Completitud.

En lo que sigue, cada vez que hablemos de una descomposición de Toeplitz en un espacio localmente convexo E será con respecto a un triángulo regular fijo A y con $T = A\Sigma$.

En esta sección veremos que la completitud sucesional, la casi-completitud y la completitud de un espacio localmente convexo con una descomposición de

Toeplitz equicontinua está relacionada de una manera sencilla con las propiedades de la descomposición. El resultado principal de esta sección establece esta relación y como aplicación caracterizaremos el caso en que la topología $\sigma\gamma(E, E')$ es sucesionalmente completa, casi-completa o completa. En el caso particular de una descomposición de Schauder, estos resultados pueden ser encontrados en los trabajos de Kalton [55] y [56].

3.1.1 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo).*

(2) *(P_k) es completa y cada E_k es completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo).*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2): Cada E_k es un subespacio cerrado de E. Si E es completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo) entonces cada E_k es completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo). Por otro lado, si E es completo o casi-completo, en particular es sucesionalmente completo y bajo esta hipótesis se deduce inmediatamente que toda descomposición de Toeplitz de E es completa.

(2) $\Rightarrow$ (1): Daremos la prueba sólo para espacios completos. Para el resto, es válido el mismo razonamiento con los cambios oportunos (red de Cauchy por, respectivamente, red de Cauchy acotada o sucesión de Cauchy). Sea $(z_i)_{i\in I}$ una red de Cauchy en E. Entonces, por ser cada P_k una proyección continua y cada E_k completo, se tiene que $(P_k z_i)_{i\in I}$ converge en E a un cierto elemento $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Tomando límite en i en la expresión

$$T_n z_i = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} P_k z_i$$

vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la red $(T_n z_i)_{i\in I}$ converge a $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k = [T(x_k)]_n$. Veamos que la convergencia es uniforme en $\mathbb{N}$. Para ello fijamos $q_1 \in \mathcal{Q}(E)$. Como la descomposición (P_k) es equicontinua existe $q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ tal que

$$q_1(T_n x) \leq q_2(x) \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x \in E].$$

Además, dado que la red $(z_i)_{i\in I}$ es, por hipótesis, de Cauchy en E, existe $i_0 \in I$ tal que

$$q_2(z_i - z_j) \leq 1 \qquad [i, j \geq i_0].$$

Teniendo en cuenta las dos desigualdades anteriores se deduce que

$$q_1(T_n z_i - T_n z_j) \leq 1 \qquad [i, j \geq i_0] \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Tomando límite en $\{j \in I : j \geq i_0\}$ en la desigualdad anterior se tiene ahora que

$$q_1\Big(T_n z_i - \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k\Big) \leq 1 \qquad [i \geq i_0] \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Esto prueba que la convergencia de $(T_n z_i)_i$ a $[T(x_k)]_n$ es uniforme en $\mathbb{N}$. Por otro lado, (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E. En consecuencia, la sucesión $(T_n z_i)_{n\geq 1}$ converge a z_i, para cada $i \in I$. Ahora tenemos una red doble

$$(T_n z_i)_{(n,i)\in\mathbb{N}\times I}$$

para la cual existen los límites unidireccionales

$$\lim_{n\to\infty} T_n z_i = z_i \qquad [i \in I] \quad \text{y} \quad \lim_{i\in I} T_n z_i = [T(x_k)]_n \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

siendo la convergencia de la segunda de estas colecciones de límites uniforme en $\mathbb{N}$. Aplicando el Lema 1.5.1 se deduce que la sucesión $T(x_k)$ es de Cauchy en E. Como (P_k) es completa se tiene que $T(x_k)$ converge a un cierto elemento $z \in E$. La red $(z_i)_{i\in I}$ es convergente en el espacio completado de E, por ser de Cauchy, y por el Teorema 1.5.2 se tiene que su límite coincide con el de la sucesión $T(x_k)$. Como ésta última converge a un punto de E deducimos finalmente que la red $(z_i)_{i\in I}$ es convergente en E. ∎

Como todo espacio localmente convexo de dimensión finita es completo y las descomposiciones de Toeplitz de espacios tonelados siempre son equicontinuas, los siguientes resultados son ya una consecuencia directa del teorema anterior.

3.1.2 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua y finito-dimensional de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es completo.*

(2) *E es casi-completo.*

(3) *E es sucesionalmente completo.*

(4) *(P_k) es completa.*

3.1.3 Corolario. *Si E es tonelado, sucesionalmente completo y posee una descomposición de Toeplitz finito-dimensional entonces es completo.*

Una *base extendida* de un espacio localmente convexo E es una familia $(x_i)_{i\in I}$ de vectores de E tal que, para cada $x \in E$ existe una única familia de escalares (α_i) de manera que

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$

en la topología de E (la convergencia es a través de la clase de las partes finitas de I dirigida por la inclusión). Cuando los funcionales $x \longrightarrow \alpha_i$ son continuos se dice que (x_i) es una *base de Schauder extendida*. Podemos complementar la conclusión de Webb [111] que afirma que un espacio localmente convexo separable, no completo y con la propiedad de Montel (ejemplos de tales espacios aparecen en [60]) no puede tener base de Schauder extendida. El Corolario 3.1.3 establece que tampoco puede poseer una descomposición de Toeplitz finito-dimensional.

Como aplicación del Teorema 3.1.1 veremos a continuación una caracterización de la completitud de la topología $\sigma\gamma(E, E')$ en términos de la β-completitud de (P_k) y de la completitud de cada E_k. Para ello extendemos el operador $\Delta_{x'}$ (ver 2.4.3).

3.1.4 Notación. En esta sección vamos a denotar por X al espacio de sucesiones vectoriales dado por

$$X := \Big\{(x_k) : x_k \in E_k \quad [k \in \mathbb{N}] \;\text{ y }\; T(x_k) \text{ es } \sigma(E, E')\text{-de Cauchy} \Big\};$$

o sea, X es el β-dual de $[E', \sigma(E', E)]$ con respecto a la descomposición dual (P'_k). Denotaremos por $\Delta_{x'}$ al operador

$$\begin{array}{cccc} \Delta_{x'} : & X & \longrightarrow & c_T \\ & (x_k) & \longrightarrow & \Big(\langle x_k, x'\rangle\Big)_{k=1}^{\infty}. \end{array}$$

Naturalmente, como E está inyectado en X mediante $x \to (P_k x)$, la restricción de $\Delta_{x'}$ a E coincide con el operador definido en 2.4.3. Observemos también que si $(x_k) \in X$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(T_n x_k)_k$ es un elemento de X. Para comprobarlo basta usar la ortogonalidad de las proyecciones. Por último, es fácil comprobar que $X = E$ si y sólo si (P_k) es β-completa.

En el siguiente lema enumeramos las propiedades más relevantes de este operador. Su demostración es totalmente análoga a las que ya vimos para $\Delta_{x'}$ definido en E y por tanto se omite.

3.1.5 Lema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y $(x_k) \in X$. Entonces se verifican las siguientes igualdades.*

$$||\Delta_{x'}(x_k)||_T = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k, x' \right\rangle \right| \qquad [x' \in E']. \tag{3.1}$$

$$\Delta_{x'}(T_n x_k)_k = \tau_n \Delta_{x'}(x_k) \qquad [x' \in E'] \quad [n \in \mathbb{N}]. \tag{3.2}$$

3.1.6 Lema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Si (x_k) es una sucesión tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ entonces $(x_k) \in X$ si y sólo si $T(x_k)$ es $\sigma\gamma(E, E')$-de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN:

La implicación hacia la izquierda es obvia porque la topología $\sigma\gamma(E, E')$ es más fina que $\sigma(E, E')$.

Recíprocamente, supongamos que $(z_n) := T(x_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k\right)_n$ es $\sigma(E, E')$-de Cauchy. Es fácil comprobar que

$$\langle T_n z_m, x' \rangle = \sum_{k=1}^{m\wedge n} t_{mk} t_{nk} \langle x_k, x' \rangle = \langle T_m z_n, x' \rangle \qquad [m, n \in \mathbb{N}].$$

Entonces, usando las igualdades (3.1) y (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
\Big\|\Delta_{x'}(z_n - z_m)\Big\|_T &= \sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\langle T_p(z_m - z_n), x'\rangle\Big| \\
&= \sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\langle T_p z_n, x'\rangle - \langle T_p z_m, x'\rangle\Big| = \sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\langle T_n z_p, x'\rangle - \langle T_m z_p, x'\rangle\Big| \\
&= \sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\langle (T_n - T_m) z_p, x'\rangle\Big| = \Big\|\Delta_{x'}\Big((T_n - T_m)x_k\Big)_k\Big\|_T \\
&= \Big\|\tau_n\Delta_{x'}(x_k) - \tau_m\Delta_{x'}(x_k)\Big\|_T \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad [x' \in E']
\end{aligned}$$

ya que, por hipótesis, (τ_n) converge puntualmente a la identidad en c_T. Esto prueba que la sucesión $T(x_k)$ es de Cauchy para la topología $\sigma\gamma(E, E')$. ∎

3.1.7 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. La topología $\sigma\gamma(E, E')$ es completa (respectivamente, casi-completa o sucesionalmente completa) si y sólo si (P_k) es β-completa para la topología original y cada E_k es $\sigma(E_k, E'_k)$-completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo).*

DEMOSTRACIÓN:

En virtud de los teoremas 2.4.6 y 3.1.1 bastará probar las siguientes equivalencias:

(i) (P_k) es completa para la topología $\sigma\gamma(E, E')$ si y sólo si es β-completa para la topología original.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, el subespacio E_k es $\sigma(E_k, E'_k)$-completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo) si y sólo si es $\sigma\gamma(E, E')|_{E_k}$-completo (respectivamente, casi-completo o sucesionalmente completo).

De (i) probamos la implicación hacia la derecha (la implicación hacia la izquierda es totalmente análoga). Para ello, sea $(x_k) \in X$; entonces, por el Lema 3.1.6, la sucesión $T(x_k)$ es $\sigma\gamma(E, E')$-de Cauchy. Por hipótesis, (P_k) es completa para la topología $\sigma\gamma(E, E')$ y en consecuencia dicha sucesión converge a un cierto $x \in E$ en la topología $\sigma\gamma(E, E')$. Entonces se tiene que $x_k = P_k x \quad [k \in \mathbb{N}]$ y por lo tanto $T(x_k)$ coincide con $T(P_k x)$. Como (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E deducimos finalmente que la sucesión $T(x_k)$ converge a x en la topología original de E.

Veamos (ii): como $\sigma(E_k, E'_k)$ coincide con la topología inducida sobre E_k por la topología débil de E (ver la Proposición 2.1.6), bastará probar que las topologías $\sigma\gamma(E, E')$ y $\sigma(E, E')$ coinciden sobre cada E_k. En efecto, comparando las seminormas que definen cada una de las topologías se ve que para cada $x_k \in E_k$ y $x' \in E'$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||\Delta_{x'}x_k||_T &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T_n x_k, x'\rangle| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle t_{nk}x_k, x'\rangle| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_{nk}||\langle x_k, x'\rangle| \leq ||A|||\langle x_k, x'\rangle|. \end{aligned}$$

Esto prueba que la topología inducida por $\sigma\gamma(E, E')$ sobre E_k es menos fina que la inducida por la topología débil de E y por lo tanto ambas coinciden. ■

La condición de completitud para la topología débil es muy restrictiva (ningún espacio de Banach de dimensión infinita lo es). El siguiente resultado caracteriza las propiedades de completitud de la topología $\sigma\gamma(E, E')$ en esta clase de espacios.

3.1.8 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio de Banach E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T.*

(1) *La topología $\sigma\gamma(E, E')$ es completa si y sólo si (P_k) es una descomposición de Toeplitz finito-dimensional β-completa para la topología original.*

(2) *La topología $\sigma\gamma(E, E')$ es casi-completa si y sólo si (P_k) es β-completa para la topología original y cada E_k es reflexivo.*

3.1.9 Ejemplos. Si un espacio localmente convexo $[E, \tau]$ tiene una descomposición de Toeplitz equicontinua (P_k) y las coordenadas forman base de Toeplitz del correspondiente c_T entonces se tiene la cadena de inclusiones

$$\sigma(E, E') \leq \sigma\gamma(E, E') \leq \tau. \tag{3.3}$$

En el Ejemplo 2.4.7 vimos que la topología $\sigma\gamma(c_T, c'_T)$ es precisamente la de la norma de c_T y por lo tanto, en este caso, la primera desigualdad de la cadena (3.3) es estricta, mientras que la segunda es una igualdad. A continuación mostramos otros ejemplos interesantes en los cuales se comparan estas topologías.

(1) Si E es un espacio de Banach entonces, por el Teorema 2.2.11, la primera desigualdad en la cadena (3.3) es estricta.

(2) En el caso vectorial $E := c_T(F)$ estudiado en el capítulo anterior no ocurre lo mismo, en general, que en el caso escalar. Si F es un espacio de Banach, el Teorema 2.1.13 afirma que $c_T(F)$ es también un espacio de Banach con su topología habitual. Por otra parte, usando los teoremas 2.1.12 y 3.1.8 se deduce que la igualdad entre la topología $\sigma\gamma\big(c_T(F), c_T(F)'\big)$ y la de la norma de $c_T(F)$ implica que F es de dimensión finita. Por lo tanto, si F es de dimensión infinita entonces ambas desigualdades en la cadena (3.3) son estrictas.

(3) Si tomamos $E := \omega$ con la base de las coordenadas entonces $\sigma(\omega, \varphi) = \beta(\omega, \varphi)$ y por lo tanto, las dos desigualdades en la cadena (3.3) son igualdades. Este ejemplo muestra también que la hipótesis de normabilidad en el Teorema 2.2.11 es fundamental.

(4) Sean $E := [l^p, \|\ \|_p]$, con $1 < p < \infty$ y $l^q = E'$. Como E es reflexivo se tiene que su base natural es equicontinua, contractiva y β-completa por el teorema de James–Kalton (2.2.2; véase también 3.2.2). Usando el teorema anterior se tiene que la topología $\sigma\gamma(l^p, l^q)$ es completa. Por otro lado, se tiene que las coordenadas forman una base de Schauder no equicontinua de $G := \big[l^p, \sigma(l^p, l^q)\big]$. Sin embargo, de la Observación 2.2.4(4) y la Proposición 2.3.15 se deduce que la base de G sí verifica la propiedad (M).

3.2 Reflexividad.

Estudiar la reflexividad de un espacio con base o con una propiedad de aproximación más débil es, sin duda, uno de los problemas más estudiados en la teoría de bases después de que James [50] probara que un espacio de Banach con base de Schauder es reflexivo si y sólo si la base es acotadamente completa y contractiva. Parte de este resultado era ya conocido por Grimblium, Gurevich y Karlin. Los conceptos de base *contractiva* y *acotadamente completa* aparecen definidos en el trabajo de James aunque no con esos nombres. Esos dos términos fueron sugeridos por Day [19]. El resultado de James fue extendido por Singer considerando propiedades más generales que la reflexividad [104, Ch. II, § 4,6]. La extensión para descomposiciones de Schauder en espacios localmente convexos se debe, cronológicamente, a Sanders [99], Retherford [88], Cook [18], Kalton [55] y Webb [112], entre otros. Este resultado también ha sido generalizado al caso en que el espacio admite incluso una base de Markushevich. En esta línea destacamos los trabajos de Johnson [53] y Jain y Kaushik [47]. Muchos de los trabajos a los que hemos hecho referencia contienen un estudio de la relación que existe entre la contractividad de una descomposición y la γ-completitud de la descomposición dual. Todas estas cuestiones serán abordadas a lo largo de esta sección en el caso de que un espacio localmente convexo posea una descomposición de Toeplitz.

3.2.1 Lema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Supongamos que (x_k) es una sucesión tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Si la sucesión $T(x_k)$ es acotada entonces existe $x \in E''$ tal que $P_k''x = x_k$ $[k \in \mathbb{N}]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Como en el capítulo anterior, denotamos $\varphi(E') := \text{lin}\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k'\}$. Vamos a definir un funcional lineal $\beta(E',E)$-continuo sobre $\varphi(E')$. El teorema de Hahn-Banach permitirá considerar una extensión a todo E'. Dicha extensión será el elemento $x \in E''$ que buscamos. Sea f el funcional lineal definido sobre cada E_k' por

$$f : x_k' \in E_k' \mapsto f(x_k') := \langle x_k, x_k' \rangle_{(E,E')} \qquad [k \in \mathbb{N}]$$

y extendido por linealidad a todo $\varphi(E')$. Veamos que f, así definido, es continuo sobre $[\varphi(E'), \beta(E',E)]$. Para ello, nos bastará probar que f está acotado en el polar en $\varphi(E')$ de algún acotado de E. Sea U el polar en $\varphi(E')$ de la sucesión $T(x_k)$. Si $x' \in U$ existen $x_k' \in E_k'$ $[k = 1, \ldots, m]$ tales que $x' = \sum_{k=1}^{m} x_k'$ y además

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k, \sum_{k=1}^{m} x_k' \right\rangle_{(E,E')} \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n\wedge m} \langle t_{nk} x_k, x_k' \rangle_{(E,E')} \right| \leq 1.$$

Como la suma es finita y las columnas de T convergen a 1, tomamos límite en $n \in \mathbb{N}$ y resulta que

$$\left| f(x') \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \langle x_k, x_k' \rangle_{(E,E')} \right| \leq 1 \qquad [x' \in U].$$

Con esto queda probado que $f|_{\varphi(E')}$ es $\beta(E',E)$-continuo.

Por el teorema de Hahn-Banach existe un elemento $x \in E''$ que coincide con f sobre $\varphi(E')$. Para ver que $P_k''x = x_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ vamos a comprobar que coinciden en cada elemento $x' \in E'$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle P_k''x, x'\rangle_{(E'',E')} &= \langle x, P_k'x'\rangle_{(E'',E')} = \langle x_k, P_k'x'\rangle_{(E,E')} \\ &= \langle P_k x_k, x'\rangle_{(E,E')} = \langle x_k, x'\rangle_{(E,E')} \qquad [k \in \mathbb{N}]. \end{aligned}$$

■

3.2.2 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es semi-reflexivo.*

(2) *(P_k) es γ-completa, contractiva y cada E_k es semi-reflexivo.*

(3) *(P_k) es β-completa, contractiva y cada E_k es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2): La semi-reflexividad es hereditaria para subespacios cerrados. Por tanto, si E es semi-reflexivo entonces cada E_k es semi-reflexivo.

En segundo lugar, si E es semi-reflexivo, es decir $E'' = E$ algebraicamente, entonces $[E', \mu(E', E)]$ es tonelado [61, Ch.5, §23.3.(4)]. Por el Teorema 2.5.6 se tiene que (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$, es decir, (P_k) es contractiva.

Por último, supongamos que (x_k) es una sucesión tal que $x_k \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y la sucesión $T(x_k)$ es acotada. Al ser E semi-reflexivo, usando el Lema 3.2.1, se tiene que existe $x \in E$ tal que $P_k x = x_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Por lo tanto $T(x_k) = T(P_k x)$ converge a x en E. Con esto queda probado que (P_k) es γ-completa.

(2) $\Rightarrow$ (3) es trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1): Para ver que E es semi-reflexivo sea $x'' \in E''$. Como cada E_k es semi-reflexivo se tiene que $x_k := P_k''x'' \in E_k$ $[k \in \mathbb{N}]$. Por otro lado, (P_k) es contractiva, es decir, (P_k') es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$; entonces la sucesión dual, (P_k''), es una descomposición de Toeplitz de $[E'', \sigma(E'', E')]$.

Por consiguiente se tiene que $T(x_k) = T(P_k''x'')$ es $\sigma(E, E')$-de Cauchy. Como (P_k) es β-completa, la sucesión $T(x_k)$ converge a un cierto $x \in E$. Ahora vemos que

$$\langle x'', x' \rangle_{(E'',E')} = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k, x' \right\rangle_{(E,E')} = \langle x, x' \rangle_{(E,E')} \qquad [x' \in E'].$$

Con esto queda probado que E es semi-reflexivo. ∎

Como dualización del resultado anterior podemos obtener condiciones necesarias y suficientes para que un espacio localmente convexo dotado con su topología de Mackey y que posea una descomposición de Toeplitz sea tonelado.

3.2.3 Corolario. *Sea E un espacio localmente convexo y (P_k) una descomposición de Toeplitz de $[E, \mu(E, E')]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$[E, \mu(E, E')]$ es tonelado.*

(2) *(P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$, (P_k') es γ-completa para $[E', \sigma(E', E)]$ y cada E_k es tonelado.*

(3) *(P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$, (P_k') es β-completa para $[E', \sigma(E', E)]$ y cada E_k es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si denotamos por $F := [E', \sigma(E', E)]$ y por $(Q_k) := (P_k')$ entonces se tienen las siguientes equivalencias:

(i) $[E, \mu(E, E')]$ es tonelado si y sólo si F es semi-reflexivo.

(ii) (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$ si y sólo si (Q_k) es contractiva para F.

(iii) (P_k') es β-completa (respectivamente γ-completa) para $[E', \sigma(E', E)]$ si y sólo si (Q_k) es β-completa (respectivamente γ-completa) para F.

Ahora basta aplicar el teorema anterior al espacio F con la descomposición de Toeplitz (Q_k) y tener en cuenta las equivalencias anteriores. ∎

Como consecuencia de los dos resultados anteriores y usando que un espacio localmente convexo E es reflexivo si y sólo si es semi-reflexivo y tonelado, tenemos los dos siguientes que caracterizan las descomposiciones de Toeplitz de un espacio localmente convexo reflexivo.

3.2.4 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo tonelado E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es reflexivo.*

(2) *(P_k) es γ-completa, contractiva y cada E_k es reflexivo.*

(3) *(P_k) es β-completa, contractiva y cada E_k es reflexivo.*

3.2.5 Corolario. *Sea E un espacio localmente convexo y (P_k) una descomposición de Toeplitz de $[E, \mu(E, E')]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es reflexivo.*

(2) *(P_k) y (P_k') son γ-completas y contractivas para las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$, respectivamente, y cada E_k es reflexivo.*

(3) *(P_k) y (P_k') son β-completas y contractivas para las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$, respectivamente, y cada E_k es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2): Como $[E, \sigma(E, E')]$ es semi-reflexivo, por el Teorema 3.2.2, se tiene que (P_k) es γ-completa y contractiva para la topología $\sigma(E, E')$. Por otro lado, como $[E, \mu(E, E')]$ es tonelado, por el Corolario 3.2.3, se tiene que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$ y (P_k') es γ-completa para $\sigma(E', E)$; o sea, se tiene que (P_k') es una descomposición de Toeplitz γ-completa y contractiva de $[E', \sigma(E', E)]$.

(2) $\Rightarrow$ (3) es trivial y (3) $\Rightarrow$ (1) se prueba análogamente usando las correspondientes implicaciones en los teoremas 3.2.2 y 3.2.3. ∎

Para descomposiciones de Schauder, Webb [112] probó un resultado análogo al Teorema 3.2.2 para una clase más general que la de los espacios semi-reflexivos: la formada por los espacios numerablemente semi-reflexivos. Recordemos que un espacio localmente convexo es semi-reflexivo si y sólo si todo acotado es débilmente relativamente compacto [61, Ch. 5, § 23.3.(1)]. Así pues, la siguiente definición aparece de manera natural. Un espacio localmente convexo E se dice que es *numerablemente semi-reflexivo* si todo subconjunto acotado separable de E es débilmente relativamente compacto o, equivalentemente, si toda sucesión acotada en E es débilmente relativamente compacta o, equivalentemente, si el dual de $F := [E', \beta_0(E', E)]$ puede ser identificado con E mediante la dualidad

$$\langle x'', x' \rangle_{(F', E')} = \langle x, x' \rangle_{(E, E')}.$$

3.2.6 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es numerablemente semi-reflexivo.*

(2) *(P_k) es γ-completa, contractiva y cada E_k es numerablemnte semi-reflexivo.*

(3) *(P_k) es β-completa, contractiva y cada E_k es numerablemente semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

La demostración del Teorema 3.2.2 es válida en este caso con los cambios adecuados. No obstante, vamos a dar una prueba distinta para (1) $\Rightarrow$ (2) que es algo más sencilla.

(1) $\Rightarrow$ (2): La propiedad de ser numerablemente semi-reflexivo es hereditaria para subespacios cerrados. Por tanto, si E es numerablemente semi-reflexivo entonces cada E_k también lo es.

Por otro lado, si E es numerablemente semi-reflexivo entonces $[E', \beta_0(E', E)]$ es l^∞-tonelado con dual E. Por el Teorema 2.5.4 se tiene que (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E', \beta(E', E)]$, es decir, (P_k) es contractiva.

Para ver que (P_k) es γ-completa supongamos que (x_k) es una sucesión tal que $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y la sucesión $T(x_k)$ es acotada en E. Ya hemos visto que (P_k) es contractiva, luego la sucesión $(T'_m x')$ converge a x' para cada $x' \in E'$, uniformemente sobre cada subconjunto acotado de E; en particular,

$$\lim_{m\to\infty}\langle [T(x_k)]_n, T'_m x'\rangle = \lim_{m\to\infty}\left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, T'_m x'\right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, x'\right\rangle,$$

uniformemente en $\mathbb{N}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, T'_m x'\right\rangle &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n\wedge m} t_{mk}t_{nk}\langle x_k, P'_k x'\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} t_{mk}\langle x_k, P'_k x'\rangle \qquad [m\in\mathbb{N}].\end{aligned}$$

Así pues, tenemos una sucesión doble,

$$\Big(\langle [T(x_k)]_n, T'_m x'\rangle\Big)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

para la cual existen los límites unidireccionales

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, x'\right\rangle \qquad [n\in\mathbb{N}] \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{m} t_{mk}\langle x_k, P'_k x'\rangle \qquad [m\in\mathbb{N}],$$

siendo uniforme en $\mathbb{N}$ la convergencia de la primera de estas colecciones de límites. Aplicando el Teorema 1.5.2 deducimos que la sucesión

$$\langle [T(x_k)]_n, x'\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, x'\right\rangle \qquad n = 1, 2, \ldots$$

converge para cada $x \in E'$. Esto prueba que $T(x_k)$ es una sucesión $\sigma(E,E')$-de Cauchy. Por ser E numerablemente semi-reflexivo dicha sucesión debe tener un punto de acumulación débil, llamémosle x, el cual, necesariamente tiene que ser su límite en la topología $\sigma(E,E')$. Como (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E,\sigma(E,E')]$ se deduce que $T(x_k) = T(P_k x)$ y por lo tanto $T(x_k)$ converge a x en E. ■

3.2.7 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si cada E_k es semi-reflexivo entonces E es semi-reflexivo si y sólo si es numerablemente semi-reflexivo.*

3.2.8 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz finito-dimensional de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es semi-reflexivo.*

(2) *E es numerablemente semi-reflexivo.*

(3) *(P_k) es γ-completa y contractiva.*

(4) *(P_k) es β-completa y contractiva.*

Supongamos que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E en subespacios (E_k). Esta descomposición define el correspondiente subespacio H de $[E', \beta(E', E)]$ (ver 2.3.6). Como H separa puntos de E podemos identificar E con un subespacio de H' y seguir denotando por (P'_k) a su restricción a H. Entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz de H en subespacios que se identifican con los (E'_k). Su descomposición dual con la topología $\sigma(H', H)$, que seguimos denotando por (P''_k), rompe H' en subespacios que se identifican con los (E''_k). Por lo tanto, si partimos de que cada E_k es semi-reflexivo entonces los subespacios en que H' se proyecta pueden identificarse con los (E_k).

En lo que resta de esta sección estudiaremos, respectivamente, la relación que existe entre las condiciones

(P_k) *es γ-completa* y (P'_k) *es contractiva para H.*

(P_k) *es contractiva* y (P'_k) *es γ-completa para $[E', \beta(E', E)]$.*

Esta relación ha sido ya estudiada para bases de Schauder en espacios de Banach por James [50] y Singer [103] y para descomposiciones de Schauder de ciertos espacios localmente convexos por Kalton [55]. Puede compararse la relación que existe entre las condiciones "simple" y "contractiva" y se comprende la semejanza que existe entre el siguiente resultado y el Teorema 3.2.2.

3.2.9 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $H' = E$.

(2) (P_k) *es* γ*-completa y simple y cada* E_k *es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que todo funcional continuo sobre H puede ser representado mediante un elemento de E. Veamos en primer lugar que cada E_k es semi-reflexivo. Para ello, fijamos x_k'' un funcional $\beta(E_k', E_k)$-continuo sobre E_k'. Entonces, por el teorema de Hellinger-Toeplitz (1.1.1), se tiene que $x_k''P_k'|_H$ es un funcional continuo sobre H. Por lo tanto existe $x \in E$ tal que

$$\langle x_k''P_k'|_H, x'\rangle_{(H',H)} = \langle x, x'\rangle_{(E,H)} \qquad [x' \in H].$$

Como P_k es una proyección se tiene ahora que

$$\begin{aligned}\langle x_k'', x_k'\rangle_{(E_k'',E_k')} &= \langle x_k''P_k'|_H, x_k'\rangle_{(H',H)} = \langle x, x_k'\rangle_{(E,H)} \\ &= \langle P_k x, x_k'\rangle_{(E_k,E_k')} \qquad [x_k' \in E_k'].\end{aligned}$$

Esto prueba que x_k'' está representado mediante un elemento de E_k, a saber, por $P_k x$.

En segundo lugar veamos que (P_k) es simple, es decir, que para cada $x' \in E'$ la sucesión $(T_n'x')$ es $\beta(E', E)$-acotada. Sabemos que $(T_n'x')$ es $\sigma(E', E)$-acotada. Como $(T_n'x') \subset H$ entonces $(T_n'x')$ es $\sigma(H, E)$-acotada. Por hipótesis $H' = E$ y como todas las topologías compatibles definen los mismos acotados se deduce que $(T_n'x')$ es acotada en H. Ahora basta usar que H está dotado de la topología inducida por $\beta(E', E)$.

Por último se tiene que (P_k) es γ-completa. Para ver esto, sea (x_k) con $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que la sucesión $T(x_k)$ es acotada en E. Por el Lema 3.2.1 existe $x'' \in E''$ tal que

$$\langle P_k''x'', x'\rangle_{(E'',E')} = \langle x_k, x'\rangle_{(E,E')} \qquad [x' \in E'].$$

Sea $x := x''|_H$. Como $H' = E$ se tiene que $x \in E$ y deducimos que

$$\begin{aligned}\langle P_k x, x'\rangle_{(E,E')} &= \langle x, P_k'x'\rangle_{(E,E')} = \langle x'', P_k'x'\rangle_{(E'',E')} \\ &= \langle P_k''x'', x'\rangle_{(E'',E')} = \langle x_k, x'\rangle_{(E,E')} \qquad [x' \in E'].\end{aligned}$$

Por lo tanto $T(x_k) = T(P_k x)$ converge a x en E.

(2) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que (P_k) es γ-completa, simple y que cada E_k es semi-reflexivo. Para ver que $H' = E$ basta probar que todo funcional x'' continuo sobre

H puede ser representado mediante un elemento de E. Como E_k es semi-reflexivo existe $x_k \in E_k$ tal que

$$\langle x''|_{E'_k}, x'_k\rangle_{(E''_k,E'_k)} = \langle x_k, x'_k\rangle_{(E_k,E'_k)} \qquad [x'_k \in E'_k].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, x'\right\rangle_{(E,E')} &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x_k, x'\rangle_{(E,E')} = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x_k, P'_k x'\rangle_{(E_k,E'_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\langle x'', P'_k x'\rangle_{(E''_k,E'_k)} = \langle x'', T'_n x'\rangle_{(H',E')} \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x' \in E'].\end{aligned}$$

Como (P_k) es simple se tiene que $(T'_n x')$ es una sucesión acotada en H y, por continuidad, su imagen por x'' es acotada. Así pues, la sucesión $T(x_k)$ es acotada en E. Como (P_k) es γ-completa existe $x \in E$ tal que $P_k x = x_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y $T(x_k) = T(P_k x)$ converge a x en E. Finalmente, para cada $x' \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x'', x'\rangle_{(H',H)} &= \lim_{n\to\infty}\langle x'', T'_n x'\rangle_{(H',H)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k, x'\right\rangle_{(E,E')} = \langle x, x'\rangle_{(E,E')}\end{aligned}$$

y por lo tanto $x'' = x \in E$. ∎

3.2.10 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Si (P_k) es simple entonces las topologías $\beta^*(E,E')$ y $\beta(H',H)$ coinciden sobre E.*

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos que H está dotado de la topología inducida por $\beta(E',E)$. Así pues, todo subconjunto $\sigma(H,H')$-acotado es $\beta(E',E)$-acotado. Por tanto, es evidente que la topología $\beta^*(E,E')$ es más fina que $\beta(H',H)|_E$.

Recíprocamente, sea $D \subset E'$ un subconjunto $\beta(E',E)$-acotado. Veamos que su polar en E es un entorno de cero para la topología $\beta(H',H)|_E$. Para ello consideremos el conjunto

$$D_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} T'_n(D) \subset H.$$

Por la Proposición 2.3.2 se tiene que D_1 es $\beta(E', E)$-acotado y por lo tanto acotado en H. Bastará probar que

$$D_1^\circ \subset D^\circ$$

donde los polares están tomados en E. En efecto,

$$\left\{x \in E : \sup\{|\langle x, T_n' x'\rangle| : x' \in D, n \in \mathbb{N}\} \leq 1\right\} \subset \left\{x \in E : \sup_{x' \in D} |\langle x, x'\rangle| \leq 1\right\}.$$

■

3.2.11 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo sucesionalmente completo y (P_k) una descomposición de Toeplitz simple de E tal que cada E_k es semi-reflexivo. Si (P_k') es contractiva para H entonces:*

(1) *(P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$.*

(2) *$H' = E$.*

(3) *(P_k) es γ-completa para la topología original de E.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos (1): Por la Proposición 3.2.10 se tiene que $\beta^*(E, E') = \beta(H', H)|_E$. Por el teorema de Banach-Mackey [61, Ch. 4, § 20.11.(8)] se tiene que $\beta^*(E, E') = \beta(E, E')$. De ambas igualdades se deduce que $\beta(H', H)|_E = \beta(E, E')$; esto y la contractividad de (P_k') implican (1).

(2): Sea $x'' \in H'$. Entonces $T(P_k'' x'')$ es una sucesión (contenida en E) que converge a x'' en la topología $\beta(H', H)$. Teniendo en cuenta el razonamiento anterior se tiene que dicha sucesión es $\beta(E, E')$-de Cauchy y, en particular, es de Cauchy en E. Como E es sucesionalmente completo es convergente a un elemento de E. Esto prueba que x'' está en E.

(3): Es una consecuencia inmediata de (2) y del Teorema 3.2.9. ■

3.2.12 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo casi-tonelado y (P_k) una descomposición de Toeplitz simple de E tal que cada E_k es semi-reflexivo. Si (P_k) es γ-completa para E entonces $H' = E$ y (P_k') es contractiva para H.*

DEMOSTRACIÓN:

Por la Proposición 3.2.10 se tiene que $\beta^*(E,E') = \beta(H',H)|_E$. Por el Teorema 3.2.9 se tiene que $H' = E$. Como E es casi-tonelado, su topología es $\beta^*(E,E')$. Por lo tanto (P_k) es una descomposición de Toeplitz de H' con la topología $\beta(H',H)$, es decir, (P'_k) es contractiva para H. ∎

Hay que hacer notar que, aunque H' sea igual a E, no se puede deducir del teorema anterior que el espacio E sea reflexivo: basta tomar l^1 con la descomposición de las coordenadas, la cual es γ-completa y verifica $H' = c'_0 = l^1$.

3.2.13 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

(1) *Si E es l^∞-tonelado entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz γ-completa de $[E', \sigma(E',E)]$.*

(2) *Si E es l^∞-casi-tonelado y (P_k) es contractiva entonces (P'_k) es una descomposición de Toeplitz γ-completa para $[E', \beta(E',E)]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos (1): Sea $(x'_k) \subset E'$ con $x'_k \in E'_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E',E)$-acotada. Veamos que dicha sucesión es convergente en la topología $\sigma(E',E)$. En primer lugar, como E es l^∞-tonelado, la sucesión $T(x'_k)$ es equicontinua. Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \langle T_m x, [T(x'_k)]_n \rangle = \langle x, [T(x'_k)]_n \rangle \qquad [x \in E]$$

uniformemente en $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, usando la ortogonalidad de las proyecciones se puede comprobar que

$$\langle T_m x, [T(x'_k)]_n \rangle = \langle T_n x, [T(x'_k)]_m \rangle = \sum_{k=1}^{n\wedge m} t_{nk} t_{mk} \langle P_k x, x'_k \rangle.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_m x, [T(x'_k)]_n \rangle = \langle x, [T(x'_k)]_m \rangle \qquad [x \in E]$$

uniformemente en $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.5.2 se tiene que la sucesión

$$\left(\langle x, [T(x'_k)]_n \rangle \right)_n$$

converge para cada $x \in E$. Dicho límite define un elemento $x' \in E^*$. Como

$$\left\{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\langle x, [T(x'_k)]_n\rangle\right| \leq 1\right\} \subset \left\{x \in E : |\langle x, x'\rangle| \leq 1\right\}$$

y la sucesión $T(x'_k)$ es equicontinua se deduce que $x' \in E'$. Ahora es fácil ver que $T(x'_k)$ converge a x' en la topología $\sigma(E', E)$ pues $x'_k = P'_k x'$ $[k \in \mathbb{N}]$.

(2): Es totalmente análoga a (1). ■

3.2.14 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz simple de un espacio localmente convexo E. Si (P'_k) es γ-completa para H entonces (P_k) es contractiva.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x' \in E'$. Como (P_k) es simple la sucesión $(T'_n x')$ es $\beta(E', E)$-acotada. En particular, es acotada en H. Como (P'_k) es γ-completa para H, la sucesión $(T'_n x')$ converge en la topología $\beta(E', E)$ a un elemento de H, el cual no puede ser otro que x'. Esto prueba que $H = E'$, es decir, (P_k) es contractiva. ■

3.3 Tonelación.

Como dualización del Teorema 3.2.2 se obtuvo en la sección anterior una caracterización de la tonelación, el Corolario 3.2.3, en espacios localmente convexos, dotados con su topología de Mackey y que posean una descomposición de Toeplitz. Escribiremos de nuevo este resultado en términos de E^β y E^γ, teniendo en cuenta las observaciones (3) y (4) efectuadas en el párrafo 2.4.2.

3.3.1 Teorema. *Sea E un espacio localmente convexo y (P_k) una descomposición de Toeplitz de $[E, \mu(E, E')]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $[E, \mu(E, E')]$ *es tonelado.*

(2) $E' = E^\beta$, (P_k) *es una descomposición de Toeplitz de* $[E, \beta(E, E')]$ *y cada* E_k *es tonelado.*

(3) $E' = E^{\gamma}$, (P_k) *es una descomposición de Toeplitz de* $[E, \beta(E, E')]$ *y cada* E_k *es tonelado.*

La hipótesis de igualdad entre el dual y el β-dual de un espacio localmente convexo con descomposición de Toeplitz ha aparecido de manera natural en el resultado anterior al intentar caracterizar la tonelación del espacio dotado de su topología de Mackey. Lo que ocurre es que esta condición es, de hecho, una propiedad de tonelación débil tal y como se muestra en [100, Proposition 3] para la β-dualidad clásica en espacios de sucesiones:

Sean λ *y* η *dos espacios de sucesiones conteniendo a* φ *tales que* $\lambda \subset \eta^{\beta}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\lambda = \eta^{\beta}$.

(2) *Todo subconjunto* $D \subset \lambda$ *tal que para cada* $x = (x_k) \in \eta$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ *converge uniformemente en* $y = (y_k) \in D$, *es* $\sigma(\lambda, \eta)$*-relativamente compacto.*

(3) *Todo tonel* $V \subset \eta$ *que absorba la sucesión de las secciones* $(x^{[n]})$ *de* x *para cada* $x \in \eta$, *es un entorno del origen para la topología de Mackey* $\mu(\eta, \lambda)$.

En nuestro caso, con algunas restricciones, puede ser formulado un resultado que recoge esta relación. Para ello necesitamos establecer previamente condiciones que garanticen la compacidad de ciertos subconjuntos en espacios dotados de una descomposición de Toeplitz; este resultado extiende lo que se conoce como el criterio de compacidad de Mazur para espacios con base.

3.3.2 Teorema. *Sea* (P_k) *una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo* E. *Sea* D *un subconjunto de* E *y supongamos que* $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ *uniformemente en* D. *Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

(1) *Si* $P_k(D)$ *es precompacto para cada* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* D *es precompacto.*

(2) *Si* (P_k) *es completa y* $P_k(D)$ *es relativamente compacto para cada* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* D *es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

Para ver (1), sea $(z_i)_{i\in I}$ una red en D. Sea $\widehat{E}$ el espacio completado de E. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por $D_k := P_k(D)$ y por $\overline{D}_k$ a la clausura de D_k en $\widehat{E}$. Como D_k es precompacto en E se tiene que $\overline{D}_k$ es compacto en $\widehat{E}$ [52, Ch. I, § 3.5.1 Theorem]. Por consiguiente el espacio

$$Z := \prod_{k=1}^{\infty} \overline{D}_k$$

es compacto para la topología producto (de la convergencia coordenada a coordenada) sin más que aplicar el teorema de Tychonoff [61, Ch. I, § 3.3.(1)]. Como $\left((P_k z_i)_k\right)_{i\in I}$ es una red en Z, existe una subred $\left((P_k z_j)_k\right)_{j\in J}$ convergente a un cierto elemento $(x_k) \in Z$ en la topología producto. En consecuencia

$$\lim_{j\in J} P_k z_j = x_k \qquad [k \in \mathbb{N}]$$

y por lo tanto

$$\lim_{j\in J} T_n z_j = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k = [T(x_k)]_n \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Por otro lado, dado que $(z_j)_{j\in J}$ es una red en D, se tiene, por hipótesis, que

$$\lim_{n\to\infty} T_n z_j = z_j \qquad [j \in J],$$

uniformemente en J. Tenemos, por tanto, una red doble

$$(T_n z_j)_{(n,j)\in\mathbb{N}\times J}$$

para la cual existen los límites unidireccionales

$$\lim_{n\to\infty} T_n z_j = z_j \qquad [j \in J] \quad \text{y} \quad \lim_{j\in J} T_n z_j = [T(x_k)]_n \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

siendo la convergencia de la primera de estas colecciones de límites uniforme en J. Usando el Lema 1.5.1 se deduce que $(z_j)_{j\in J}$ es una red de Cauchy en E, con lo cual queda probado que D es precompacto.

Para probar (2), procedemos de forma análoga a (1) tomando una red $(z_i)_{i\in I}$ en D. Como D_k es relativamente compacto, su clausura en E coincide con su clausura en $\widehat{E}$ y es compacta, para cada $k \in \mathbb{N}$. Haciendo el mismo razonamiento anterior se llega a que existe una sucesión $(x_k) \in Z$ y una subred $(z_j)_{j\in J}$ tales que

$$\lim_{j\in J} T_n z_j = [T(x_k)]_n \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} T_n z_j = z_j \qquad [j \in J].$$

uniformemente en J. De nuevo, por el Lema 1.5.1 se tiene que la red $(z_j)_{j\in J}$ y la sucesión $T(x_k)$ son de Cauchy en E. Como $x_k \in E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por ser E_k cerrado, y (P_k) es completa se deduce que la sucesión $T(x_k)$ es convergente a un cierto $x \in E$.

Ahora observamos que las redes $(T_n z_j)_{(n,j)\in\mathbb{N}\times J}$, $(z_j)_{j\in J}$ y $T(x_k)$ son convergentes en $\widehat{E}$, por ser de Cauchy en E. Usando el Teorema 1.5.2 vemos que las tres convergen al mismo límite. Como ya hemos probado que una de ellas converge en E, deducimos finalmente que $(z_j)_{j\in J}$ converge en E. Con esto queda probado que D es relativamente compacto. ∎

3.3.3 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Supongamos que cada E_k es tonelado y que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $E' = E^\beta$.

(2) *Todo subconjunto $\sigma(E',E)$-acotado $D \subset E'$ tal que $\lim_{n\to\infty} T'_n x' = x'$ en la topología $\sigma(E',E)$, uniformemente en D, es $\sigma(E',E)$-relativamente compacto.*

(3) *Todo tonel $V \subset E$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ en E_V para todo $x \in E$, es un entorno del origen para la topología $\mu(E,E')$.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2): En primer lugar, tenemos que la igualdad $E' = E^\beta$ equivale, por la Observación 2.4.2(3), a decir que la descomposición (P'_k) es β-completa para la topología $\sigma(E',E)$. Por tratarse de la topología débil eso equivale a decir que (P'_k) es completa para dicha topología. Por otro lado, si $D \subset E'$ es $\sigma(E',E)$-acotado entonces la tonelación de cada E_k, la continuidad de (P_k) y el hecho de que $\sigma(E'_k, E_k) = \sigma(E',E)|_{E'_k}$ implican que $P'_k(D)$ es $\sigma(E',E)$-relativamente compacto $[k \in \mathbb{N}]$. Finalmente, para obtener esta implicación, basta usar la segunda parte del teorema anterior.

(2) $\Rightarrow$ (1) Veamos que (P'_k) es β-completa para la topología $\sigma(E',E)$. Para ello, supongamos que $(x'_k) \subset E'$ verifica $x'_k \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ y que la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E',E)$-de Cauchy.

Usando un razonamiento análogo al de la prueba del Lema 3.1.6 definimos, para cada $x \in E$

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_x & : & E^\beta & \longrightarrow & c_T \\ & & (x'_k) & \longrightarrow & \left(\langle x, x'_k\rangle\right)_{k=1}^\infty . \end{array}$$

Entonces Δ_x está bien definido, es lineal y verifica, además, las siguientes propiedades:

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\sum_k t_{pk}\langle x, x'_k\rangle\Big| = ||T(\langle x, x'_k\rangle)||_\infty = ||\Delta_x(x'_k)||_T,$$

$$\Delta_x(t_{nk}x'_k)_k = \tau_n\Delta_x(x'_k) \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Ahora, si denotamos por $z'_p := \sum_{k=1}^{p} t_{pk}x'_k$ el elemento p-ésimo de la sucesión $T(x'_k)$, entonces se tiene que

$$\langle x, z'_p - T'_n z'_p\rangle = \sum_k t_{pk}\langle x, x'_k - t_{nk}x'_k\rangle \qquad [n, p \in \mathbb{N}],$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sup_{p\in\mathbb{N}} |\langle x, z'_p - T'_n z'_p\rangle| &= \sup_{p\in\mathbb{N}}\Big|\sum_k t_{pk}\langle x, x'_k - t_{nk}x'_k\rangle\Big| \\ &= ||T(\langle x, x'_k - t_{nk}x'_k\rangle)||_\infty \\ &= ||\Delta_x(x'_k - t_{nk}x'_k)_k||_T \\ &= ||\Delta_x(x'_k) - \Delta_x(t_{nk}x'_k)_k||_T \\ &= ||\Delta_x(x'_k) - \tau_n\Delta_x(x'_k)||_T \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ya que, por hipótesis, las coordenadas forman una base de Toeplitz de c_T. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} T'_n z'_p = z'_p$ en la topología $\sigma(E',E)$, uniformemente en $p \in \mathbb{N}$. Usando (2) se deduce que la sucesión $(z'_p) = T(x'_k)$ es $\sigma(E',E)$-relativamente compacta y por lo tanto puede extraerse una subsucesión

$$\Big(\sum_{k=1}^{m_n} t_{m_n k}x'_k\Big)_n$$

que converge a un cierto $x' \in E'$ en la topología $\sigma(E',E)$. Ahora, usando la ortogonalidad de las proyecciones (P'_k) y el carácter Sp_1 de la matriz T se ve que

$$P'_j x' = \lim_{n\to\infty} P'_j\Big(\sum_{k=1}^{m_n} t_{m_n k}x'_k\Big) = \lim_{n\to\infty} t_{m_n j}x'_j = x'_j \qquad [j \in \mathbb{N}]$$

y por lo tanto $T(x'_k)$ converge a x' en la topología $\sigma(E', E)$.

Con esto queda probado que las condiciones (1) y (2) son equivalentes. Por otro lado, es fácil ver que las condicicones (2) y (3) son duales. Mostramos, por ejemplo, la implicación en un sentido. La implicación en sentido contrario sería análoga y la omitimos

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea V un tonel en E tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ en E_V para todo $x \in E$. Por lo tanto, dados $\varepsilon > 0$ y $x \in E$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - T_n x \in \varepsilon V \qquad [n \geq n_0].$$

En consecuencia, se tendrá que, fijado $x \in E$

$$\left|\langle x, x' - T'_n x'\rangle\right| = \left|\langle x - T_n x, x'\rangle\right| \leq \varepsilon \qquad [\varepsilon > 0] \quad [n \geq n_0(\varepsilon)] \quad [x' \in V^\circ].$$

Ahora, por ser V un tonel se tiene que V° es $\sigma(E', E)$-acotado y, usando la desigualdad anterior, que $\lim_{n\to\infty} T'_n x' = x'$ en la topología $\sigma(E', E)$, uniformemente en V°. Usando (2) y que V° es $\sigma(E', E)$-cerrado deducimos que V° es $\sigma(E', E)$-compacto. Por lo tanto $V^{\circ\circ} = V$ es un entorno del origen para la topología $\mu(E, E')$. ■

Hasta ahora el marco adoptado para probar resultados de tonelación sobre espacios con descomposición de Toeplitz ha sido el de exigir fuertes condiciones a la descomposición para deducir la tonelación del espacio total a partir de la tonelación de los subespacios en los cuales se proyecta. Una alternativa a este estudio es restringir la clase de los espacios a considerar y obtener resultados de tonelación modificando las propiedades que se exigen a la descomposición. En la clase de los espacios normados, la condición de que (P_k) sea una descomposición de Toeplitz de $[E, \beta(E, E')]$ en el Teorema 3.3.1 o, equivalentemente, que (P'_k) sea contractiva para la topología $\sigma(E', E)$, puede ser sustituida por la de que (P_k) sea contractiva en las implicaciones (2) $\Rightarrow$ (1) y (3) $\Rightarrow$ (1). Bajo esta condición, Noll y Stadler [80] probaron que un espacio normado con una descomposición de Schauder contractiva (P_k) es tonelado si y sólo si su β-dual coincide con su dual y cada E_k es tonelado. A continuación extendemos el resultado de Noll y Stadler al caso de una descomposición de Toeplitz. Antes necesitamos el siguiente lema de carácter técnico.

3.3.4 Lema. *Sea I un conjunto de índices y para cada $x \in I$ supongamos que $(a_{nj}^{[x]})$ es una matriz de escalares. Sean (j_n) una sucesión de números naturales* *tal que* $\lim_{n\to\infty} j_n = \infty$ *y* (a_j) *una sucesión de escalares no negativos cuya serie converge. Si además se verifican las condiciones:*

(1) *para cada* $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}(a_{nj}^{[x]})_n = 0$ *uniformemente en* I,

(2) $\left|a_{nj}^{[x]}\right| \leq a_j \qquad [j = 1,\dots,j_n] \quad [x \in I]$;

entonces las sucesiones

$$\left(\sum_{j=1}^{j_n} a_{nj}^{[x]}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.4}$$

convergen uniformemente en I.

DEMOSTRACIÓN:

Bastará probar que cada una de las sucesiones que aparece en la expresión (3.4) es de Cauchy, uniformemente en I. Fijado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j>j_0} a_j \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j_n > j_0$ para todo $n > n_0$. Usando la condición (2) del enunciado y la desigualdad anterior se tiene que

$$\sum_{j=j_0+1}^{j_n} \left|a_{nj}^{[x]}\right| \leq \sum_{j=j_0+1}^{j_n} a_j \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad [n > n_0].$$

Por otro lado, usando la condición (1) del enunciado se deduce que existe $n_1 > n_0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{j_0}\left|a_{nj}^{[x]}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad [n > n_1] \quad [x \in I].$$

Finalmente, usando las dos desigualdades anteriores concluimos que si $n_2, n_3 > n_1$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{j_{n_2}} a_{n_2 j}^{[x]} - \sum_{j=1}^{j_{n_3}} a_{n_3 j}^{[x]}\right| &\leq \sum_{j=1}^{j_0}\left|a_{n_2 j}^{[x]}\right| + \sum_{j=1}^{j_0}\left|a_{n_3 j}^{[x]}\right| + \sum_{j=j_0+1}^{j_{n_2}}\left|a_{n_2 j}^{[x]}\right| + \sum_{j=j_0+1}^{j_{n_3}}\left|a_{n_3 j}^{[x]}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \qquad [x \in I].\end{aligned}$$

■

3.3.5 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz contractiva de un espacio normado E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es tonelado.*

(2) *$E' = E^{\gamma}$ y cada E_k es tonelado.*

(3) *$E' = E^{\beta}$ y cada E_k es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2) está ya probado en 3.3.1 y (2) $\Rightarrow$ (3) es trivial.

Sólo tendremos que probar que (3) $\Rightarrow$ (1). Por reducción al absurdo, supongamos que existe un subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado $D \subset E'$, el cual no es acotado en la topología de la norma dual de E'. Por lo tanto, existe una sucesión $(v_m) \subset D$ tal que $||v_m|| \geq m2^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $(y_m) := (m^{-1}v_m)$ es tal que

$$||y_m|| \geq 2^m \qquad [m \in \mathbb{N}] \quad \text{e} \quad y_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en la topología} \quad \sigma(E', E).$$

Vamos a construir dos sucesiones de enteros, $m_0 < m_1 < \cdots$ y $n_1 < n_2 < \cdots$, verificando las desigualdades

$$\begin{aligned} ||y_m - T_n' y_m|| &\leq 2^{-j} \qquad [m = 1, 2, \ldots, m_{j-1}] \;\; [n \geq n_j] \;\; [j \in \mathbb{N}] \qquad (3.5)\\ ||T_n' y_m|| &\leq 2^{-j} \qquad [n = 1, 2, \ldots, n_j] \;\; [m \geq m_j] \;\; [j \in \mathbb{N}]. \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Para ello, procederemos por inducción en el índice j. Si tomamos, por ejemplo, $m_0 = 0$ y $n_1 = 1$ entonces la desigualdad (3.5) se tiene de forma vacía. Como la sucesión (v_m) es $\sigma(E', E)$-acotada se tiene que $(T_1' v_m)_m$ es $\sigma(T_1'(E'), T_1(E))$-acotada. Como cada E_k es tonelado se tiene, por la Proposición 2.1.5, que cada $T_n(E)$ es tonelado. Deducimos entonces que la sucesión $(T_1' v_m)_m$ está acotada en norma. En consecuencia

$$||T_1' y_m|| = \frac{1}{m} ||T_1' v_m|| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esto hace posible elegir $m_1 \in \mathbb{N}$ de tal manera que la desigualdad (3.6) se tiene para $n = n_1 = 1$ y $m \geq m_1$. Ahora, supongamos construidos $m_1 < m_2 < \ldots < m_j$ y $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$ verificando las desigualdades (3.5) y (3.6). Como (P_k) es contractiva se tiene, en particular, que

$$\lim_{n\to\infty} ||y_m - T_n' y_m|| = 0 \qquad [m = 1, 2, \ldots, m_j].$$

Esto permite elegir $n_{j+1} > n_j$ de tal manera que la desigualdad (3.5) se tiene para $m = 1, 2, \ldots, m_j$ y $n \geq n_{j+1}$. Empleando el mismo razonamiento que hicimos anteriormente para construir m_1, obtenemos que cada sucesión $(T'_n v_m)_m$ está acotada en norma. En consecuencia

$$||T'_n y_m|| = \frac{1}{m}||T'_n v_m|| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad [n = 1, 2, \ldots, n_{j+1}].$$

Esto hace posible elegir $m_{j+1} > m_j$ de tal manera que la desigualdad (3.6) se tiene para $n = 1, 2, \ldots, n_{j+1}$ y $m \geq m_{j+1}$.

Si denotamos por $\alpha_j := ||y_{m_j}||^{-1}$ entonces $0 < \alpha_j \leq 2^{-m_j}$ $[j \in \mathbb{N}]$. Por otro lado, fijado $n \in \mathbb{N}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq n_{j_0}$. Ahora, por la desigualdad (3.6), es claro que

$$\sum_{j\geq j_0} \alpha_j ||T'_n y_{m_j}|| \leq 2^{-j_0} \sum_{j\geq j_0} 2^{-m_j} < +\infty;$$

con lo cual cada serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T'_n y_{m_j} \qquad [n \in \mathbb{N}] \tag{3.7}$$

es de Cauchy para la norma inducida en $T'_n(E')$. Como E' es completo y $T'_n(E')$ es un subespacio cerrado de E' se tiene que cada serie en (3.7) converge en la norma dual a un cierto $z_n \in T'_n(E')$. Sea $(x'_k) := T^{-1}(z_n)$, donde T^{-1} es la matriz inversa de T. Vamos a probar que $(x'_k) \in E^\beta$. Para ello veamos, en primer lugar, que $x'_k \in E'_k$ $[k \in \mathbb{N}]$ o, equivalentemente, que $P'_s x'_k = 0$ $[s \neq k]$. En efecto,

$$P'_s x'_k = \sum_n t^{-1}_{kn} P'_s z_n = \sum_n t^{-1}_{kn} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j P'_s T'_n y_{m_j}.$$

Como T^{-1} es triangular, la suma en n es finita y usando que $P'_s T'_n = t_{ns} P'_s$ resulta que

$$P'_s x'_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \Big(\sum_n t^{-1}_{kn} t_{ns}\Big) P'_s y_{m_j} = 0 \qquad [s \neq k].$$

En segundo lugar, veamos que $T(x'_k) = (z_n)$ es $\sigma(E', E)$-de Cauchy, es decir, la sucesión $(\langle x, z_n\rangle)$ converge para cada $x \in E$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $||x|| \leq 1$). Fijado $n \in \mathbb{N}$ existe $j = j(n) \in \mathbb{N}$ tal que $n_j \leq n < n_{j+1}$. Ahora se descompone cada $\langle x, z_n\rangle$ de la forma

$$\begin{aligned}\langle x, z_n\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle x, T'_n y_{m_j}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{j(n)-1} \alpha_j \langle x, T'_n y_{m_j}\rangle + \alpha_{j(n)} \langle x, T'_n y_{m_{j(n)}}\rangle + \sum_{j=j(n)+1}^{\infty} \alpha_j \langle x, T'_n y_{m_j}\rangle.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Bastará probar que cada uno de los tres sumandos de la igualdad (3.8) converge cuando $n \to \infty$.

El primer sumando en la igualdad (3.8) se descompone en otros dos

$$\sum_{j=1}^{j(n)-1} \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} \rangle = \sum_{j=1}^{j(n)-1} \alpha_j \langle x, y_{m_j} \rangle + \sum_{j=1}^{j(n)-1} \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} - y_{m_j} \rangle. \tag{3.9}$$

A su vez, el primer sumando converge porque (y_{m_j}) es $\sigma(E', E)$-acotada y $0 < \alpha_j \leq 2^{-m_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. El segundo sumando en la igualdad (3.9) también converge ya que, usando la desigualdad (3.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} - y_{m_j} \rangle \right| &\leq 2^{-m_j} ||x|| \cdot ||T_n' y_{m_j} - y_{m_j}|| \\ &\leq 2^{-m_j} 2^{-j(n)} ||x|| \qquad [j = 1, \ldots, j(n) - 1] \end{aligned}$$

y podemos usar el Lema 3.3.4 tomando

$$\begin{aligned} I &:= \left\{ x \in E : ||x|| \leq 1 \right\}, \\ a_{nj}^{[x]} &:= \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} - y_{m_j} \rangle, \\ a_j &:= 2^{-m_j} \quad \text{y} \\ j_n &:= j(n) - 1. \end{aligned}$$

Para ver que el segundo sumando de la igualdad (3.8) converge escribimos

$$\begin{aligned} \left| \alpha_{j(n)} \langle x, T_n' y_{m_{j(n)}} \rangle \right| &= \left| \alpha_{j(n)} \langle T_n x, y_{m_{j(n)}} \rangle \right| \\ &\leq \left| \langle T_n x - x, \alpha_{j(n)} y_{m_{j(n)}} \rangle \right| + \left| \langle x, \alpha_{j(n)} y_{m_{j(n)}} \rangle \right|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A su vez, el primer sumando converge a cero porque $||\alpha_{j(n)} y_{m_{j(n)}}|| = 1$ y la sucesión $(T_n x)$ converge a x en E. El segundo sumando en la desigualdad (3.10) también converge a cero porque la sucesión $(\alpha_{j(n)} y_{m_{j(n)}})_n$ converge a cero en la topología $\sigma(E', E)$.

Sólo resta ver la convergencia del tercer sumando en la igualdad (3.8). Usando la desigualdad (3.6) se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=j(n)+1}^{\infty} \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} \rangle \right| &\leq \sum_{j=j(n)+1}^{\infty} \left| \alpha_j \langle x, T_n' y_{m_j} \rangle \right| \\ &\leq \sum_{j=j(n)+1}^{\infty} 2^{-m_j} 2^{-j(n)} ||x|| \leq 2^{-j(n)} ||x|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que dicho sumando también converge a cero.

Ahora tenemos una sucesión (x'_k), tal que $x'_k \in E'_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y la sucesión $T(x'_k)$ es $\sigma(E', E)$-de Cauchy; es decir, (x'_k) es un elemento de E^β. Por hipótesis, ha de existir $x' \in E'$ tal que $x'_k = P'_k x'$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por ser (P_k) contractiva se tiene que $(z_n) = T(x'_k) = T(P'_k x')$ converge en la norma dual a x'. En particular, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, z_n\rangle = \langle x, x'\rangle,$$

uniformemente en la esfera unidad de E. Sin embargo, tomando $n = n_j$ tenemos que $j(n_j) = j$ y, de manera análoga a como se procedió en la igualdad (3.8), podemos descomponer $\langle x, z_{n_j}\rangle$ de la forma

$$\begin{aligned}
\langle x, z_{n_j}\rangle &= \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \langle x, T'_{n_j} y_{m_i}\rangle + \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i \langle x, T'_{n_j} y_{m_i}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \langle x, y_{m_i}\rangle + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \langle x, T'_{n_j} y_{m_i} - y_{m_i}\rangle + \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i \langle x, T'_{n_j} y_{m_i}\rangle.
\end{aligned}$$

De los tres últimos sumandos en la igualdad anterior, el segundo es convergente cuando $j \to \infty$ por la desigualdad (3.5) y el Lema 3.3.4; el tercero es convergente a cero cuando $j \to \infty$ por la desigualdad (3.6) y ambos uniformemente en la esfera unidad de E. De todo esto se deduce que el sumando restante

$$\left(\sum_{i=1}^{j-1} \langle x, \alpha_i y_{m_i}\rangle \right)_{j\in\mathbb{N}}$$

converge cuando $j \to \infty$, uniformemente para $||x|| = 1$. Esto se contradice con el hecho de que

$$||\alpha_i y_{m_i}|| = 1 \qquad [i \in \mathbb{N}].$$

Por lo tanto, en contra de lo que se suponía en un principio, todo subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado es acotado en la norma dual de E', es decir, E es tonelado. ∎

3.3.6 Observaciones.

(1) En las hipótesis del teorema anterior basta suponer que (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \sigma(E, E')]$ ya que todo espacio normado es casi-tonelado y toda descomposición de Toeplitz contractiva es simple. Una descomposición de

Toeplitz débil y simple de un espacio casi-tonelado siempre es, por el Corolario 2.5.3, una descomposición de Toeplitz de dicho espacio con su topología original.

(2) Noll y Stadler [80] afirman que el resultado anterior (para descomposiciones de Schauder) no es cierto, en general, si la hipótesis de contractividad es suprimida sin más. Para demostrarlo proponen el siguiente contraejemplo: el espacio l^1 (con la descomposición de las coordenadas) es separable y no tiene la propiedad de Wilansky. Recordamos que un FK-espacio F tiene la *propiedad de Wilansky* si cualquier subespacio $E \subset F$, con $E^\beta = F^\beta$, es tonelado. En el caso en que F sea separable basta comprobar esta propiedad con los subespacios densos. Por lo tanto, existe un subespacio denso $E \subset l^1$, tal que su β-dual es l^∞ pero E no es tonelado. Otros espacios sin la propiedad de Wilansky son (dotados de su topología habitual) ω, bv (de la sucesiones de variación acotada), l^∞, etc. (ver [2]).

(3) El resultado anterior o, más concretamente, la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) tampoco puede ser cierta, en general, sin la hipótesis de normabilidad. La razón es que las condiciones que se exigen a la descomposición sólo dependen del par dual. Por tanto, bastará tomar un espacio de Banach con descomposición finito-dimensional contractiva y dotarlo de la topología débil. Por ejemplo, $E := [c_0, \sigma(c_0, l^1)]$ con la descomposición de las coordenadas verifica todas las hipótesis del teorema anterior, excepto la de ser normado y, evidentemente, no es tonelado. Otro ejemplo podría ser $E := [\varphi, \sigma(\varphi, \omega)]$. Aún más, la condición de normabilidad no puede ser sustituida por la de metrizabilidad. Para obtener un contraejemplo, tengamos en cuenta que ω posee base de Schauder contractiva (la de las coordenadas), es separable y no tiene la propiedad de Wilansky. Por lo tanto existe un subespacio denso $E \subset \omega$ tal que $E^\beta = E' = \varphi$ y E no es tonelado en ω; de hecho se puede tomar (ver [2])

$$E := \{x \in \omega : \sup_n n|x_{2n} - x_{2n+1}| < \infty\}.$$

No obstante, existen clases de espacios de sucesiones no normados para los cuales la igualdad entre el β-dual y el dual es condición suficiente para la tonelación. Por ejemplo, un resultado en esta línea es el siguiente:

Proposición. [101, Prop. 2]. *Si $\varphi \subset F \subset \omega$ es invariante bajo multiplicación (coordenada a coordenada) por sucesiones decrecientes positivas entonces $F^\beta = \varphi$ si y sólo si F es tonelado con la topología relativa de ω.*

(ver también el teorema citado en la Observación (7) siguiente).

(4) Para intentar generalizar el Teorema 3.3.5 a una clase más amplia de espacios una opción podría ser sustituir la hipótesis de normado por otra más débil, como por ejemplo la de ser un espacio (DF) casi-tonelado. Para un espacio (DF) casi-tonelado E, su dual fuerte F es un espacio de Fréchet, y podría intentarse la misma construcción sustituyendo la norma dual por una familia creciente de seminormas que definan la topología de F. Sin embargo, la construcción efectuada en la demostración del Teorema 3.3.5 no es posible porque, en general, en un espacio de Fréchet no normado no es cierto el siguiente hecho en el cual se basa dicha demostración:

(∗) *Si (x_n) es una sucesión no acotada, entonces existe una subsucesión (x_{n_j}) no acotada y (α_j) una sucesión de escalares convergente a cero tal que $(\alpha_j x_{n_j})$ es acotada pero separada del origen.*

De hecho, la propiedad anterior caracteriza la condición de ser normable en los espacios de Fréchet. Esto es bien conocido pero, según comunicación personal de J. C. Díaz Alcaide, no sabemos de ninguna referencia que contenga este resultado. Para mostrarlo, sea F un espacio de Fréchet no normable. Vamos a ver que existe una sucesión de seminormas $(||\cdot||_k)$ definiendo la topología de F y una sucesión $(x_n) \subset F$ no acotada tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||x_n||_k}{||x_n||_{k+1}} = 0 \qquad [k \in \mathbb{N}]. \tag{3.11}$$

Esto probaría que la propiedad (∗) no puede ser cierta para la sucesión (x_n). En efecto, si (x_{n_j}) es una subsucesión y (α_j) es una sucesión cualquiera de escalares tales que $(\alpha_j x_{n_j})$ es acotada entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $M_k > 0$ verificando

$$||\alpha_j x_{n_j}||_k = ||\alpha_j x_{n_j}||_{k+1} \frac{||x_{n_j}||_k}{||x_{n_j}||_{k+1}} \le M_k \frac{||x_{n_j}||_k}{||x_{n_j}||_{k+1}} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \qquad [k \in \mathbb{N}];$$

es decir, la sucesión $(\alpha_j x_{n_j})$ no puede separarse del origen.

Para ver que en todo espacio de Fréchet no normable F existe una sucesión de seminormas definiendo su topología y una sucesión no acotada verificando la condición (3.11) distinguimos varios casos. En primer lugar, si $F = \omega$ denotamos a sus elementos de la forma $x := ([x]_j)$ y tomamos la sucesión $(x_n) \subset \omega$ dada por

$$[x_n]_j := j^n \qquad [n, j \in \mathbb{N}].$$

Como la topología de ω (de la convergencia coordenada a coordenada) viene dada por la sucesión de seminormas

$$||x||_k := \max\Big\{\big|[x]_j\big| : j = 1, 2, \ldots, k\Big\} \qquad [k \in \mathbb{N}].$$

es inmediato que $||x_n||_k = k^n$ $[n, k \in \mathbb{N}]$; por lo tanto (x_n) no está acotada en ω y, además

$$\left(\frac{||x_n||_k}{||x_n||_{k+1}}\right)_n = \left(\frac{k^n}{(k+1)^n}\right)_n$$

es una sucesión nula para todo $k \in \mathbb{N}$. En segundo lugar, si F es un espacio de Fréchet isomorfo a un producto cartesiano de la forma $G \times \omega$ con G un espacio de Banach, entonces la misma construcción que hemos hecho en ω es válida en este caso sin más que añadir ceros en el primer complemento. Por último, si no estamos en el caso anterior; es decir, F no es isomorfo a ningún producto cartesiano de un espacio de Banach por ω entonces usando directamente los resultados de Bessaga, Pełczyński y Rolewicz [3, Theorem 1 y Lemma 2] aseguramos la existencia de una sucesión de seminormas $(||\cdot||_k)$ definiendo la topología de F tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in F$ verificando

$$||x||_1 > 1 \ ; \quad \frac{||x||_k}{||x||_{k+1}} < \varepsilon \qquad [k \in \mathbb{N}].$$

De esta forma siempre podemos seleccionar una sucesión $(x_n) \subset F$ verificando

$$||x_n||_1 > 1 \ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{||x_n||_k}{||x_n||_{k+1}} = 0 \qquad [k \in \mathbb{N}].$$

Si (x_n) fuese acotada podemos tomar (nx_n) de manera que la condición (3.11) sigue verificándose y ahora la sucesión es no acotada porque

$$||nx_n||_1 > n \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

(5) Desconocemos si el Teorema 3.3.5 es cierto si se sustituye la hipótesis de normable por (DF) casi-tonelado.

(6) Ruckle [96] da condiciones de tonelación en un espacio de sucesiones λ tal que φ es denso en λ y en $\left[\lambda', \beta(\lambda', \varphi)\right]$ (hipótesis que, más o menos, se correspondería con la de contractividad en el Teorema 3.3.5); su conclusión es que λ es tonelado si y sólo está dotado de la topología fuerte $\beta(\lambda, \varphi)$.

Dejamos para posteriores investigaciones el estudio de la relación entre la tonelación de un espacio localmente convexo E con una descomposición de Toeplitz y el hecho de que E esté dotado de la topología $\beta\big(E, \varphi(E')\big)$.

(7) Una descomposición de Schauder (P_k) de un espacio localmente convexo E se dice que es *monótona* si para todo $x \in E$ y $D \subset \mathbb{N}$ existe $x_D \in E$ tal que $P_k x_D = \chi_D(k) P_k x$ para todo $k \in \mathbb{N}$; donde χ_D denota la función característica del conjunto D, que toma el valor 1 en D y el valor 0 en $\mathbb{N} \setminus D$. En el caso de una descomposición de Schauder monótona, las hipótesis del teorema anterior sí pueden ser considerablemente debilitadas como puede apreciarse en el siguiente resultado que por simplicidad hemos extraído como un caso particular de [26, § 2. Corollary 3].

Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Schauder monótona de un espacio localmente convexo casi-tonelado E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es tonelado.*

(2) *$E' = E^\gamma$ y cada E_k es tonelado.*

(3) *$E' = E^\beta$ y cada E_k es tonelado.*

En espacios de sucesiones con convergencia seccional generalizada de tipo Toeplitz ha sido definida también una propiedad análoga a la de Wilansky [79]:

Un FK-espacio λ tiene la *T-propiedad de Wilansky* si cualquier subespacio $\mu \subset \lambda$, con $\mu^\beta = \lambda^\beta$, es tonelado. Aquí T es un triángulo Sp_1 y

$$\lambda^\beta := \left\{ y \in \omega : xy \in c_T \quad [x \in \lambda] \right\}.$$

Si E es un espacio localmente convexo con una descomposición de Toeplitz (P_k) y F es un subespacio de E conteniendo a $\varphi(E)$, entonces F es denso en E; con lo cual podemos identificar F' con E' y escribir

$$F^\beta = \left\{ (x'_k) \in \Pi\{E'_k\} : T(x'_k) \text{ es } \sigma(E', F)\text{-de Cauchy} \right\}.$$

Como aplicación del Teorema 3.3.5 obtenemos una condición suficiente para que un BK-espacio de sucesiones posea la T-propiedad de Wilansky. En general, también se pueden obtener condiciones de tonelación para subespacios de un espacio localmente convexo E con descomposición de Toeplitz (cuando contienen a $\varphi(E)$), sin más que comparar los β-duales.

3.3.7 Teorema. *Sea λ un BK-espacio de sucesiones con la propiedad T-AK y supongamos que λ' también posee la propiedad T-AK con la topología $\beta(\lambda', \lambda)$. Entonces todo subespacio $\mu \subset \lambda$ tal que $\mu^\beta = \lambda^\beta$, es tonelado; es decir, λ tiene la T-propiedad de Wilansky.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $\varphi \subset \mu$ entonces μ es denso en λ y el espacio $\left[\lambda', \beta(\lambda', \lambda)\right]$ se identifica con $\left[\mu', \beta(\mu', \mu)\right]$. Por lo tanto $\mu' = \lambda' = \lambda^\beta = \mu^\beta$. La tonelación de μ se deduce ya del Teorema 3.3.5.

Si μ no contiene a φ, consideramos $\mu_1 = \operatorname{lin}\{\mu, \varphi\}$ y se tiene que $\mu_1^\beta = \mu^\beta$. En efecto, si tomamos $y \in \mu^\beta$ entonces

$$y(x + x_0) = yx + yx_0 \in c_T + \varphi = c_T \qquad [x \in \mu] \quad [x_0 \in \varphi];$$

luego $\mu_1^\beta = \mu^\beta$ (la otra inclusión es obvia). Ahora estamos en el caso anterior y por lo tanto μ_1 es tonelado. Finalmente, usando [84, Theorem 4.3.6], deducimos que μ es tonelado porque tiene codimensión numerable en μ_1. ∎

3.3.8 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz contractiva de un espacio de Banach E. Entonces todo subespacio F tal que $\varphi(E) \subset F \subset E$ y $F^\beta = E^\beta$, es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si F es un subespacio de E tal que $\varphi(E) \subset F$ entonces F es denso en E y $F^\beta = E^\beta = E' = F'$. Como la restricción de (P_k) a F sigue siendo contractiva, la tonelación de F se obtiene sin más que aplicar el Teorema 3.3.5. ∎

Otra muestra de cómo pueden obtenerse condiciones de tonelación en ciertas clases de espacios con descomposición es el siguiente resultado de Miñarro. Otros resultados relacionados han sido obtenidos por Bonet, Díaz y Taskinen [11, Proposition 5] motivados por el problema de la estabilidad de ciertas propiedades vectoriales topológicas en la formación de productos tensoriales.

Teorema. [74, Cap. II, § 2. Teorema 2.1]. *Sea E un espacio localmente convexo (DF) con una descomposición de Schauder equicontinua (P_k). Si cada E_k es casi-tonelado entonces E es casi-tonelado.*

Desconocemos si este resultado es cierto para descomposiciones de Toeplitz arbitrarias aunque como ya hemos hecho en anteriores ocasiones, hemos conseguido extenderlo para todos los triángulos regulares A, tales que las coordenadas forman una base de Toeplitz de c_T con respecto a la matriz A, donde $T = A\Sigma$. Antes necesitaremos algunos resultados previos.

Recordamos el concepto de espacio (DF), introducido por Grothendieck [43] para estudiar las propiedades del dual fuerte de un espacio localmente convexo metrizable.

Se dice que un espacio localmente convexo E es un espacio (DF) [84, Definition 8.3.1] si se verifican las condiciones

(1) posee una sucesión fundamental de acotados, es decir, posee una sucesión de acotados tal que cualquier otro acotado de E está contenido en alguno de la sucesión y

(2) cualquier tonel bornívoro que pueda expresarse como una intersección numerable de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en E es también un entorno de cero en E; es decir, es $\aleph_0$-casi-tonelado.

3.3.9 Proposición. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de un espacio localmente convexo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces existe una familia de seminormas $\mathcal{Q}$ que define la topología de E y una constante $M > 0$ tales que*

$$q(T_n x) \le M q(x) \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x \in E] \quad [q \in \mathcal{Q}].$$

DEMOSTRACIÓN:

El Teorema 1.4.10 asegura que las coordenadas forman una base de Toeplitz de c_T si y sólo si la sucesión de operadores (τ_n) es equicontinua sobre c_T. Así pues, sea $M > 0$ tal que

$$||\tau_n a||_T \le M||a||_T \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [a \in c_T].$$

Sea $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$ una familia de seminormas que defina la topología de E. Para cada $i \in I$ definimos una nueva seminorma sobre E de la forma

$$q_i(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} p_i(T_n x).$$

Sea $\mathcal{Q} := \{q_i : i \in I\}$. Vamos a probar que

$$q_i(T_n x) \leq M q_i(x) \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x \in E] \quad [i \in I].$$

Fijado $i \in I$ existe un subconjunto equicontinuo $D_i \subset E'$ tal que

$$p_i(x) = \sup_{x' \in D_i} |\langle x, x' \rangle| \qquad [x \in E].$$

Usando la igualdad (2.16) (véase 2.4.3) tenemos que

$$q_i(x) = \sup\Big\{ |\langle T_n x, x' \rangle| : x' \in D_i,\ n \in \mathbb{N} \Big\} = \sup_{x' \in D_i} ||\Delta_{x'} x||_T \qquad [x \in E] \quad [i \in I]$$

y esto junto con la igualdad (2.17) nos permite deducir que

$$\begin{aligned} q_i(T_n x) &= \sup_{x' \in D_i} \Big|\Big|\Delta_{x'}(T_n x)\Big|\Big|_T = \sup_{x' \in D_i} \Big|\Big|\tau_n(\Delta_{x'} x)\Big|\Big|_T \\ &\leq M \sup_{x' \in D_i} \Big|\Big|\Delta_{x'} x\Big|\Big|_T = M q_i(x) \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}] \quad [i \in I]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathcal{Q}$ es un sistema de seminormas equivalente a $\mathcal{P}$. Para ello, supongamos en primer lugar que $p_i \in \mathcal{P}$. Si $q_i(x) \leq 1$ entonces $p_i(T_n x) \leq 1$ $[n \in \mathbb{N}]$. Por otro lado, como $(T_n x)$ converge a x en E y $\mathcal{P}$ define la topología de E se tiene, tomando límite en n, que $p_i(x) \leq 1$. Por lo tanto

$$p_i(x) \leq q_i(x) \qquad [x \in E].$$

Esto prueba que la topología que define $\mathcal{Q}$ es más fina que la que define $\mathcal{P}$.

Recíprocamente, por la equicontinuidad de la descomposición, dado $i \in I$ existe $j \in I$ tal que

$$p_i(T_n x) \leq p_j(x) \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Por lo tanto,

$$q_i(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_i(T_n x) \leq p_j(x) \qquad [x \in E].$$

Esto prueba que la topología definida por $\mathcal{P}$ es más fina que la que define $\mathcal{Q}$. ■

3.3.10 Lema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada acotado $D_1 \subset T_n(E)$ existe un acotado $D_2 \subset E$ tal que $D_1 = T_n(D_2)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Ya vimos en la Proposición 2.1.5 que $T_n(E) = F_{n1} \oplus F_{n2} \oplus \cdots \oplus F_{nn}$, donde

$$F_{nk} = \begin{cases} E_k & \text{si } t_{nk} \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } t_{nk} = 0. \end{cases}$$

Así pues, cada $x \in T_n(E)$ es de la forma $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, donde cada x_k es precisamente $P_k x$. Si definimos

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} 1/t_{nk} & \text{si } t_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{si } t_{nk} = 0. \end{cases}$$

entonces $\alpha_{nk} t_{nk} P_k x = P_k x$ para todos $k = 1, \ldots, n$ y $x \in T_n(E)$.

Sea $D_1 \subset T_n(E)$ acotado y consideremos el conjunto

$$D_2 := \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} P_k x \; : \; x \in D_1 \Big\}.$$

Evidentemente, D_2 es acotado y sólo nos queda comprobar que $D_1 = T_n(D_2)$. Para ello, fijado $x \in D_1$ se tiene que

$$x = \sum_{k=1}^{n} P_k x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} t_{nk} P_k x = T_n\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} P_k x \Big) \in T_n(D_2).$$

Recíprocamente, si $y \in T_n(D_2)$ entonces existe $x \in D_1$ tal que $y = T_n\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} P_k x \Big)$. Por tanto

$$y = T_n\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} P_k x \Big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} t_{nk} P_k x = \sum_{k=1}^{n} P_k x = x \in D_1.$$

■

3.3.11 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz simple de un espacio (DF) E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Si cada E_k es casi-tonelado entonces E es casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, por el Teorema 2.3.4 se tiene que (P_k) es equicontinua porque todo espacio (DF) es, en particular, $\aleph_0$-casi-tonelado.

Sea $\mathcal{Q}$ un sistema de seminormas que define la topología de E y que cumple las condiciones de la Proposición 3.3.9, para una cierta constante $M > 0$.

Por ser E un espacio (DF), posee una sucesión fundamental de acotados (D_k) y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dicha sucesión verifica que

$$T_n(D_k) \subset MD_k \qquad [n, k \in \mathbb{N}]. \tag{3.12}$$

En caso contrario definimos

$$D'_k := \{x \in E : q(x) \leq \sup_{y \in D_k} q(y) := M_{kq} \text{ para cada } q \in \mathcal{Q}\} \qquad [k \in \mathbb{N}];$$

con lo cual cada D'_k es un acotado de E que contiene a D_k y por lo tanto es inmediato que (D'_k) es una nueva sucesión fundamental de acotados en E. Además, para cada $x \in D'_k$ se tiene que

$$q(T_n x) \leq Mq(x) \leq MM_{kq} \qquad [n \in \mathbb{N}]$$

de donde $T_n x \in MD'_k$ o, equivalentemente, $T_n(D'_k) \subset MD'_k$.

Veamos ahora que E es casi-tonelado. Para ello, sea W un tonel bornívoro; debemos probar que W es un entorno del origen. Dado que W es bornívoro, en particular absorbe a cada uno de los acotados de la sucesión fundamental y por tanto existe (r_k) una sucesión de escalares positivos tales que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k \subset W.$$

Por ser W un conjunto absolutamente convexo y cerrado se tiene además que

$$U := \overline{\mathrm{acx}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k\Big) \subset W.$$

Nos bastará probar que U es un entorno de cero. Para ello observemos que U es bornívoro por ser (D_k) una sucesión fundamental de acotados; entonces para cada acotado D de E existe $r > 0$ tal que $rD \subset U$, con lo cual

$$rT_n(D) \subset T_n(U) \subset \overline{T_n(U)}. \tag{3.13}$$

Como $T_n(E)$ es cerrado en E, da lo mismo tomar la clausura de $T_n(U)$ en E que tomarla en $T_n(E)$. Usando la inclusión (3.13) y el Lema 3.3.10 deducimos que $\overline{T_n(U)}$ es un tonel bornívoro en $T_n(E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, cada $T_n(E)$ es casi-tonelado, por ser una suma directa finita de espacios casi-tonelados, y en consecuencia cada $\overline{T_n(U)}$ es un entorno de cero absolutamente convexo y cerrado en $T_n(E)$.

Ahora consideramos los conjuntos

$$U_n := T_n^{-1}(\overline{T_n U}) \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Por continuidad y linealidad, cada U_n es un entorno de cero absolutamente convexo y cerrado en E. Es obvio que

$$T_n x \in T_n U \subset \overline{T_n U} \qquad [x \in U] \quad [n \in \mathbb{N}]$$

y por lo tanto $U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Como U es bornívoro, tenemos una intersección numerable y bornívora de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en E. Por ser E un espacio (DF) dicha intersección es un entorno de cero en E. Para ver que U es un entorno de cero en E será suficiente comprobar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset MU.$$

En efecto, usando la inclusión (3.12) y la continuidad de T_n se ve que

$$\begin{aligned} T_n(U) &= T_n\Big(\overline{\mathrm{acx}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k\Big)\Big) \subset \overline{\mathrm{acx}}\Big(T_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k\Big)\Big) \\ &\subset \overline{\mathrm{acx}}\Big(M \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k\Big) = M\,\overline{\mathrm{acx}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} r_k D_k\Big) = MU. \end{aligned}$$

Por ser U cerrado, se tiene que $\overline{T_n(U)} \subset MU$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ entonces

$$T_n x \in \overline{T_n U} \subset MU \qquad [n \in \mathbb{N}].$$

Finalmente, como MU es cerrado y $x = \lim_{n\to\infty} T_n x$ deducimos que $x \in MU$. ■

3.3.12 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio (DF) sucesionalmente completo E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces E es tonelado si y sólo si cada E_k es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Una propiedad de completitud para una topología polar implica la misma propiedad para otra topología polar más fuerte. Por lo tanto la completitud sucesional de E con la topología original implica la completitud sucesional con la topología $\mu(E, E')$ y usando la Proposición 2.3.3 se deduce que (P_k) es simple. Si (P_k) es simple y cada E_k es tonelado entonces, por el teorema anterior se tiene que E es casi-tonelado y como es sucesionalmente completo es tonelado. La implicación en sentido contrario es inmediata. ∎

Un espacio localmente convexo E se dice que es *distinguido* si $[E', \beta(E', E)]$ es tonelado. Dado que el dual fuerte de un espacio localmente convexo metrizable es un (DF) completo [61, Ch. 6, § 29.2.(1) p. 396] [84, Theorem 8.3.9], el Corolario 3.3.12 nos permite caracterizar la distinción de un espacio localmente convexo metrizable con una descomposición de Toeplitz.

3.3.13 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz contractiva de un espacio localmente convexo metrizable E y supongamos que las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. Entonces E es distinguido si y sólo si cada E_k es distinguido.*

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos, por el Corolario 2.3.8, que si (P_k) es contractiva entonces (P_k') es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $[E', \beta(E', E)]$ y aplicando la Proposición 2.3.3 deducimos que (P_k') es una descomposición de Toeplitz simple de $[E', \beta(E', E)]$. Como el dual fuerte de un espacio localmente convexo metrizable es un (DF) completo, estamos en las condiciones del corolario anterior y por lo tanto E es distinguido.

Recíprocamente, si E es distinguido entonces cualquier subespacio cerrado complementado de E es distinguido. ∎

Desconocemos si alguno de los tres resultados anteriores es cierto para matrices tales que las coordenadas no formen una base de Toeplitz de c_T. Conjeturamos que, al menos, la Proposición 3.3.9 no lo es, en general.

La hipótesis de que E es un espacio (DF) no puede ser suprimida sin más en los dos resultados anteriores, tal y como se pone de manifiesto en los siguientes ejemplos de espacios con base de Schauder.

3.3.14 Ejemplos.

(1) Consideremos $E := [l^\infty, \mu(l^\infty, l^1)]$ el espacio de las sucesiones acotadas dotado de la topología de Mackey inducida por el par dual (l^∞, l^1) con la forma bilineal usual. Usando [109, Ch. 2, § 1.4.(26)(28) y § 1.5.(7)(8)] se deduce que las coordenadas forman un base de Schauder equicontinua de E. Sin embargo E no es casi-tonelado [109, Ch. 2, § 1.6.(7)].

(2) Las coordenadas forman una base de Schauder equicontinua del espacio de Fréchet $[\omega, \sigma(\omega, \varphi)]$. En particular, forman una base equicontinua del subespacio $[\varphi, \sigma(\varphi, \varphi)]$, el cual no es tonelado.

3.4 Propiedad de Montel.

La propiedad (M) para descomposiciones de Schauder en espacios de Fréchet fue introducida por Miñarro [74, Definición 3.6] aunque es análoga a la condición que se exige en el criterio de compacidad de Mazur para bases. En este trabajo se prueba, por ejemplo, que en presencia de la condición (M) la reflexividad, la distinción y la propiedad de Montel pasa de los E_k a E. La propiedad (M) está relacionada con ciertas condiciones utilizadas anteriormente por diversos autores para obtener la propiedad de Montel en espacios escalonados de Köthe [8]. Recordemos que un espacio localmente convexo E se dice que es *semi-Montel* si todos sus acotados son relativamente compactos. Nuestra aportación al estudio de la reflexividad y la distinción la hemos presentado ya en secciones anteriores. En esta sección vamos a ver la relación que existe entre la propiedad (M) sobre una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y la propiedad de Montel sobre E. Un resultado en esta línea fue ya avanzado en la sección anterior (ver Teorema 3.3.2). De éste se deduce el siguiente.

3.4.1 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz con la propiedad (M) de un espacio localmente convexo E. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

(1) *Si cada P_k transforma acotados en precompactos, entonces E tiene los acotados precompactos.*

(2) *Si (P_k) es completa y cada P_k transforma acotados en relativamente compactos, entonces E tiene los acotados relativamente compactos.*

(3) *Si (P_k) es completa y cada E_k es un espacio semi-Montel entonces E es semi-Montel.*

DEMOSTRACIÓN:

Las implicaciones (1) y (2) se obtienen inmediatamente aplicando el Teorema 3.3.2.

Para demostrar la implicación (3) observemos que, por la continuidad de P_k, si $D \subset E$ es acotado, cada $P_k(D)$ es acotado. Como E_k es semi-Montel entonces sus acotados son relativamente compactos. Ahora basta usar la implicación (2) del Teorema 3.3.2 para deducir que E tiene los acotados relativamente compactos y por tanto es semi-Montel. ∎

3.4.2 Observación. Recordemos el Teorema 3.2.2, que asegura que un espacio localmente convexo E con descomposición de Toeplitz (P_k) es semi-reflexivo si y sólo si (P_k) es β-completa, contractiva y cada E_k es semi-reflexivo. Una parte de este hecho, la implicación hacia la izquierda, puede ser obtenido como una consecuencia del Teorema 3.4.1. Para ver esto empezamos recordando que una de las caracterizaciones de la semi-reflexividad de un espacio localmente convexo E es que todo acotado de E debe ser $\sigma(E, E')$-relativamente compacto [61, Ch. 5, § 23.3(1)]. Como la clase de los conjuntos acotados es la misma para todas las topologías compatibles con el par dual (E, E'), lo que estamos diciendo es que un espacio localmente convexo E es semi-reflexivo si y sólo si $[E, \sigma(E, E')]$ es semi-Montel.

Ahora, supongamos que (P_k) es una descomposición de Toeplitz β-completa y contractiva de E y que cada E_k es semi-reflexivo. Veamos que E es semi-reflexivo:

En primer lugar, (P_k) es una descomposición de Toeplitz de $[E, \sigma(E, E')]$ y, por la Observación (6) del párrafo 2.2.4, decir que es β-completa es equivalente a decir que es completa para la topología $\sigma(E, E')$. En segundo lugar, por la Proposición 2.3.15 sabemos que (P_k) es contractiva si y sólo si tiene la propiedad (M) para la topología $\sigma(E, E')$. Por último, si $D \subset E$ es acotado entonces $P_k(D)$ es, por continuidad, acotado en E_k para cada $k \in \mathbb{N}$. Como cada E_k es semi-reflexivo se tiene que cada $P_k(D)$ es $\sigma(E_k, E_k')$-relativamente compacto. Usando la Proposición 2.1.6 concluimos que cada $P_k(D)$ es $\sigma(E, E')$-relativamente compacto. Estamos, por lo tanto, en condiciones de aplicar la afirmación (2) del Teorema 3.3.2 y deducir que todos los acotados de E son $\sigma(E, E')$-relativamente compactos; es decir, E es semi-reflexivo.

En este sentido, no parece posible suprimir, en las implicaciones (2) y (3) del Teorema 3.4.1, la hipótesis sobre completitud de la descomposición.

A continuación veremos que, cuando la descomposición es equicontinua, es cierto un resultado recíproco del Teorema 3.4.1.

3.4.3 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de un espacio localmente convexo E. Si E tiene los acotados precompactos (en particular, si E es semi-Montel) entonces (P_k) tiene la propiedad (M).*

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis, la sucesión de operadores (T_n) es equicontinua y converge puntualmente a la identidad sobre E. Como las topologías sobre $\mathcal{L}(E)$, de la convergencia puntual y de la convergencia uniforme sobre los precompactos de E, coinciden sobre los subconjuntos equicontinuos de $\mathcal{L}(E)$ [62, § 39.4.(2)], se tiene que la sucesión (T_n) converge a la identidad uniformemente sobre los subconjuntos precompactos de E. Si E tiene los acotados precompactos es ya inmediato que (P_k) tiene la propiedad (M). ■

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos dar sendas caracterizaciones para que un espacio localmente convexo E con una descomposición de Toeplitz (P_k) sea semi-Montel o Montel, en términos de la correspondiente propiedad para los subespacios E_k y de la propiedad (M) para (P_k).

3.4.4 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

(1) *Si E es semi-Montel y (P_k) es equicontinua entonces (P_k) tiene la propiedad (M).*

(2) *Si (P_k) es completa, tiene la propiedad (M) y cada E_k es semi-Montel entonces E es semi-Montel.*

En la clase de los espacios localmente convexos semi-Montel, las propiedades de reflexividad, tonelación y casi-tonelación son equivalentes. Un espacio semi-Montel satisfaciendo cualquiera de ellas se conoce con el nombre de espacio de Montel (consultar [52, Ch. 11, § 6] para más detalles).

Toda descomposición de Toeplitz (P_k) de un espacio tonelado E es equicontinua. Si además, E es sucesionalmente completo entonces (P_k) es completa. El siguiente corolario se deduce ya inmediatamente a partir de los anteriores.

3.4.5 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio E tonelado y sucesionalmente completo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es Montel.*

(2) *(P_k) tiene la propiedad (M) y cada E_k es Montel.*

3.5 Espacios casi-normables y de Schwartz.

El concepto de *espacio de Schwartz* fue acuñado por Grothendieck [43], quien probó la mayor parte de los resultados básicos sobre esta clase de espacios. Un espacio localmente convexo E es un *espacio de Schwartz* si y sólo si es casi-normable y tiene los acotados precompactos. A su vez, un espacio localmente convexo E se dice que es *casi-normable* si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto acotado $D \subset E$ verificando $V \subset D+\varepsilon U$ [52, § 10.7. Proposition 1 y Corollary 3]. Otras condiciones equivalentes a la casi-normabilidad en el marco de los espacios de Fréchet pueden encontrarse en [72].

La propiedad (S) para una descomposición de Schauder de un espacio de Fréchet fue introducida por Miñarro [74] y está relacionada con ciertas condiciones utilizadas por diversos autores para obtener casi-normabilidad en espacios escalonados de Köthe [8]. Otras condiciones mucho más fuertes habían sido utilizadas anteriormente para obtener casi-normabilidad en ciertos espacios de aplicaciones holomorfas con una descomposición de Schauder [46].

A continuación veremos la relación que existe entre la casi-normabilidad de un espacio localmente convexo E y la propiedad (S) sobre una descomposición de Toeplitz de dicho espacio. Nuestro punto de referencia ha sido el siguiente resultado, válido para espacios de Fréchet con una descomposición de Schauder normable (o sea, cada E_k es normable).

Teorema. [74, Cap. II, § 4.12]. *Sea E un espacio de Fréchet con una descomposición de Schauder normable (P_k) y sea (U_n) una sucesión fundamental de entornos del origen absolutamente convexos y cerrados en E tales que $P_k(U_n) = U_n$ $[n, k \in \mathbb{N}]$. Denotamos por $||\cdot||_n$ al funcional de Minkowski de U_n y supongamos que $||\cdot||_{n_k}$ es la seminorma que define la topología de E_k. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n' > n$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \Big\| \sum_{k=m}^{\infty} P_k x \Big\|_n \ : \ ||x||_{n'} \leq 1 \right\} = 0$$

y para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$U_{n'} \cap E_k \subset (\lambda U_{n_k} + \varepsilon U_n) \cap E_k.$$

Entonces E es casi-normable.

Como se aprecia en el siguiente resultado, las hipótesis del teorema anterior pueden ser considerablemente debilitadas y se sigue obteniendo la misma tesis. Hay que observar que la igualdad $P_k(U_n) = U_n$ $[n, k \in \mathbb{N}]$ para cierta base de 0-entornos siempre puede ser obtenida en el caso en que (P_k) sea una descomposición de Schauder equicontinua, aunque no parece posible que sea cierta la misma conclusión en el caso de una descomposición de Toeplitz (aun siendo ésta equicontinua).

3.5.1 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E tal que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $W \in \mathcal{U}(E)$ verificando*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\Big\{ q_U(T_n x - x) \ : \ x \in W \Big\} = 0 \tag{3.14}$$

y para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto acotado $D_k \subset E_k$ tal que

$$W \cap E_k \subset D_k + \varepsilon\Big(U \cap E_k\Big). \tag{3.15}$$

Entonces E es casi-normable.

Antes de comenzar la prueba hacemos algunas observaciones:

(i) Si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $W \in \mathcal{U}(E)$ tal que se tiene la igualdad (3.14), esto es, por definición, la condición (S) sobre la descomposición de Toeplitz (P_k).

(ii) Si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $W \in \mathcal{U}(E)$ tal que se tienen las inclusiones (3.15) entonces se verifica que, en particular, cada E_k es casi-normable.

(iii) La hipótesis clave en estos resultados es que la casi-normabilidad de los E_k ha de ser *uniforme*, en el sentido de que el entorno W que existe para cada $U \cap E_k$ no depende de k, sólo de U.

(iv) Las hipótesis del teorema al que antes hemos hecho referencia son más fuertes que las del teorema anterior. En efecto, supongamos que E es un espacio de Fréchet con una descomposición normable (P_k) que satisface la propiedad (S). Si (U_n) es una sucesión de entornos del origen tal que $P_k(U_n) = U_n$ $[n, k \in \mathbb{N}]$ y está en las condiciones de dicho teorema entonces puede comprobarse que

$$(\lambda U_{n_k} + \varepsilon U_n) \cap E_k = P_k(\lambda U_{n_k}) + \varepsilon(U_n \cap E_k) \qquad [n, k \in \mathbb{N}].$$

Si $||\cdot||_k$ es la seminorma que define la topología de E_k, de manera que el entorno relativo $U_{n_k} \cap E_k$ es acotado en E_k, entonces $D_k := P_k(\lambda U_{n_k}) = \lambda(U_{n_k} \cap E_k)$ es un acotado en E_k de tal forma que la condición (3.15) se verifica para los mismos entornos que proceden de la condición (S).

DEMOSTRACIÓN:

Si (t^{-1}_{kn}) es la matriz inversa de T denotaremos por $\alpha_k := \sum_{n=1}^{k} |t^{-1}_{kn}|$ $[k \in \mathbb{N}]$. Fijado $U \in \mathcal{U}(E)$, sea $W \in \mathcal{U}(E)$, $W \subset U$, verificando la igualdad (3.14) y las inclusiones (3.15). En particular, fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_U(x - T_{n_0}x) \leq \frac{\varepsilon}{2} q_W(x) \qquad [x \in E] \tag{3.16}$$

y existen $D_k \subset E_k$ acotados tales que

$$(W \cap E_k) \subset D_k + \frac{\varepsilon}{||A||\alpha_k 2^{k+1}}(U \cap E_k) \qquad [k \in \mathbb{N}]. \tag{3.17}$$

Recordemos (ver 1.2.6) que los elementos de la matriz T verifican la desigualdad

$$|t_{nk}| \leq ||A|| \qquad [n, k \in \mathbb{N}]. \tag{3.18}$$

Por otro lado sabemos, por la Proposición 2.2.5, que toda descomposición de Toeplitz con la propiedad (S) es equicontinua. Así pues, dado W existe $V \in \mathcal{U}(E)$, $V \subset W$, tal que

$$q_W(T_n x) \leq q_V(x) \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x \in E]$$

y por lo tanto se tienen las desigualdades

$$q_W(P_k x) = q_W\Big(\sum_{n=1}^{k} t_{kn}^{-1} T_n x\Big) \leq \alpha_k q_V(x) \qquad [k \in \mathbb{N}] \quad [x \in E]. \tag{3.19}$$

Si denotamos por $D := \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0 k} \alpha_k D_k$, entonces D es un acotado de E. Para comprobar que $V \subset D + \varepsilon U$, fijamos $x \in V$. Usando la igualdad (3.16) deducimos que $x - T_{n_0} x \in \frac{\varepsilon}{2} U$ y por lo tanto sólo nos basta probar que $T_{n_0} x \in D + \frac{\varepsilon}{2} U$. En efecto, usando las desigualdades (3.19) tenemos que $\frac{1}{\alpha_k} P_k x \in \Big(W \cap E_k\Big)$ y usando las inclusiones (3.17) concluimos que para cada $k = 1, \ldots, n_0$ existen $d_k \in D_k$, $u_k \in \Big(U \cap E_k\Big)$ verificando

$$\frac{1}{\alpha_k} P_k x = d_k + \frac{\varepsilon}{||A|| \alpha_k 2^{k+1}} u_k \qquad [k = 1, \ldots, n_0].$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} T_{n_0} x &= \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0 k} P_k x = \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0 k} \alpha_k \Big(d_k + \frac{\varepsilon}{||A|| \alpha_k 2^{k+1}} u_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0 k} \alpha_k d_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{t_{n_0 k}}{||A|| 2^k} u_k. \end{aligned}$$

El primer sumando está en D y el segundo en $\frac{\varepsilon}{2} U$ puesto que, por las desigualdades (3.18),

$$q_U\Big(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{t_{n_0 k}}{||A|| 2^k} u_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{|t_{n_0 k}|}{||A||} \frac{1}{2^k} q_U(u_k) \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^k} < 1.$$

■

Una subclase de espacios casi-normables es la de los espacios casi-normables por operadores. Un espacio localmente convexo E se dice que es *casi-normable por operadores* si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que para cada $\varepsilon > 0$

existe $f \in \mathcal{L}(E)$ de tal manera que $f(V)$ es un acotado de E y $(id_E - f)(V) \subset \varepsilon U$. Esta clase de espacios fue introducida por Peris [85] para garantizar ciertas propiedades de estabilidad que no tenían, en general, los espacios casi-normables. En particular, se tiene que si X es un espacio de Banach y E es un espacio localmente convexo casi-normable por operadores entonces $\mathcal{L}_b(X, E)$ tiene la misma propiedad que E [85].

Un resultado análogo al Teorema 3.5.1 puede ser obtenido ahora para los espacios casi-normables por operadores.

3.5.2 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E tal que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $W \in \mathcal{U}(E)$ verificando*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\Big\{q_U(T_n x - x) \,:\, x \in W\Big\} = 0 \tag{3.20}$$

y para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ existe $f_k \in \mathcal{L}(E_k)$ tal que

$$f_k(W \cap E_k) \text{ es acotado y } \quad \Big(id_{E_k} - f_k\Big)\Big(W \cap E_k\Big) \subset \varepsilon\Big(U \cap E_k\Big). \tag{3.21}$$

Entonces E es casi-normable por operadores.

(Análogamente al caso casi-normable, ahora se tiene que si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $W \in \mathcal{U}(E)$ tal que se tienen las condiciones (3.21) entonces, en particular, se verifica que cada E_k es casi-normable por operadores).

DEMOSTRACIÓN:

El razonamiento es análogo al de la prueba del teorema anterior con los cambios oportunos.

Fijado $U \in \mathcal{U}(E)$, sea $W \in \mathcal{U}(E)$, $W \subset U$, verificando la igualdad (3.20) y las condiciones (3.21). En particular, fijado $\varepsilon > 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $f_k \in \mathcal{L}(E_k)$ tales que se tiene la desigualdad (3.16), los subconjuntos $f_k\Big(W \cap E_k\Big)$ son acotados y además

$$(id_{E_k} - f_k)(W \cap E_k) \subset \frac{\varepsilon}{||A||\alpha_k 2^{k+1}}(U \cap E_k) \qquad [k \in \mathbb{N}], \tag{3.22}$$

donde α_k está definido como en la prueba del teorema anterior. Si tomamos $V \in \mathcal{U}(E)$, $V \subset W$, verificando las desigualdades (3.19) entonces tendremos que

$$P_k(V) \subset \alpha_k(W \cap E_k) \qquad [k \in \mathbb{N}]. \tag{3.23}$$

Ahora definimos $f := \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} f_k P_k$. En primer lugar, es obvio que $f \in \mathcal{L}(E)$. Por otro lado, usando las inclusiones (3.23) se ve que

$$f(V) \subset \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} f_k P_k(V) \subset \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} \alpha_k f_k(W \cap E_k)$$

y por lo tanto $f(V)$ es un acotado de E.

En segundo lugar comprobamos que $(id_E - f)(V) \subset \varepsilon U$. Fijado $x \in V$ descomponemos

$$x - fx = \Big(x - T_{n_0}x\Big) + \Big(T_{n_0}x - fx\Big).$$

Como $V \subset W \subset U$, sabemos, por las desigualdades (3.16), que $x - T_{n_0}x \in \frac{\varepsilon}{2}U$. Para finalizar la demostración, bastará comprobar que $(T_{n_0}x - fx) \in \frac{\varepsilon}{2}U$. En efecto, usando las inclusiones (3.22) y (3.23) se deduce que

$$\begin{aligned} T_{n_0}x - fx &= \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} P_k x - \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} f_k P_k x = \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} \Big(id_E - f_k\Big)(P_k x) \\ &\in \sum_{k=1}^{n_0} t_{n_0k} \alpha_k \Big(id_E - f_k\Big)\Big(W \cap E_k\Big) \\ &\subset \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^k}\Big(t_{n_0k}\alpha_k \frac{1}{||A||\alpha_k}\Big)\Big(U \cap E_k\Big) \subset \frac{\varepsilon}{2}U. \end{aligned}$$

■

A continuación mostramos la relación que existe entre la propiedad (S) sobre una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E y la propiedad de Schwartz sobre E.

3.5.3 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de un espacio localmente convexo E. Si E es un espacio de Schwartz entonces (P_k) tiene la propiedad (S).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $U \in \mathcal{U}(E)$. Por ser (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de E, existe $W \in \mathcal{U}(E)$, $W \subset U$, tal que

$$q_U(T_n x) \leq q_W(x) \qquad [x \in E] \quad [n \in \mathbb{N}]. \tag{3.24}$$

Como E es un espacio de Schwartz, en particular es casi-normable. Por tanto, dado W existe $V \in \mathcal{U}(E)$, $V \subset W$, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un acotado $D \subset E$ tal que

$$V \subset D + \frac{\varepsilon}{6} W. \tag{3.25}$$

La prueba quedará concluida si vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\Big\{ q_U(T_n x - x) \ : \ x \in V \Big\} = 0.$$

Para ello, fijamos $\varepsilon > 0$. Por ser E de Schwartz el conjunto acotado D es precompacto. Por lo tanto, existe una cantidad finita $x_1, \ldots, x_m$ de elementos de E tales que

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{m} \Big(x_j + \frac{\varepsilon}{6} W \Big). \tag{3.26}$$

Ahora, aplicando las inclusiones (3.25) y (3.26) deducimos que

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{m} \Big(x_j + \frac{\varepsilon}{3} W \Big). \tag{3.27}$$

Por otro lado, (P_k) es una descomposición de Toeplitz de E y por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_U(x_j - T_n x_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad [j = 1, 2, \ldots, m] \quad [n \geq n_0]. \tag{3.28}$$

Usando las desigualdades (3.24) y (3.28) y la inclusión (3.27) vemos finalmente que para cada $x \in V$ existe un cierto $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$\begin{aligned} q_U(x - T_n x) &\leq q_U(x - x_j) + q_U(x_j - T_n x_j) + q_U(T_n x_j - T_n x) \\ &\leq q_W(x - x_j) + \frac{\varepsilon}{3} + q_W(x - x_j) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad [n \geq n_0]; \end{aligned}$$

con lo cual queda probado que (P_k) tiene la propiedad (S). ■

3.5.4 Teorema. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo E tal que para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ verificando las condiciones*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\Big\{ q_U(T_n x - x) \ : \ x \in V \Big\} = 0 \tag{3.29}$$

y para cada $\varepsilon > 0$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $D_k \subset E_k$ *acotado tal que*

$$V \cap E_k \subset D_k + \varepsilon(U \cap E_k). \tag{3.30}$$

Si además cada E_k *tiene los acotados precompactos entonces* E *es un espacio de Schwartz.*

Observemos que si para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que se tienen las inclusiones (3.30) entonces, en particular, cada E_k es casi-normable. Si, además, cada E_k tiene los acotados precompactos entonces E_k es un espacio de Schwartz para cada $k \in \mathbb{N}$ [52, Ch. II, § 10.7.3. Corollary].

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, E es casi-normable por el Teorema 3.5.1. En segundo lugar, la propiedad (S) para (P_k) implica la propiedad (M) y por el Teorema 3.4.1 se tiene que todos los acotados de E son precompactos. Por lo tanto, E es un espacio de Schwartz. ∎

La relación, exigida como hipótesis en el teorema anterior, entre la propiedad (S) para (P_k) y la casi-normabilidad de los subespacios E_k siempre se tiene en el caso en que la descomposición es finito-dimensional, es decir, cuando cada E_k tiene dimensión finita. Para ver esto necesitamos el siguiente resultado técnico.

3.5.5 Lema. [52, Ch. II, § 10.6.2. Lemma]. *Sea* $D \subset \mathbb{K}^n$ *un conjunto absolutamente convexo. Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *existen* $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}^n$ *con* $m \leq n$, *tales que*

$$D \subset \operatorname{acx}\{x_1, \ldots, x_m\} + \varepsilon D.$$

Estamos ahora en condiciones de probar que la propiedad (S) para una descomposición de Toeplitz finito-dimensional de un espacio localmente convexo E implica que E es un espacio de Schwartz.

3.5.6 Corolario. *Sea* (P_k) *una descomposición de Toeplitz de un espacio localmente convexo* E. *Si* (P_k) *es finito-dimensional y tiene la propiedad (S) entonces* E *es un espacio de Schwartz.*

DEMOSTRACIÓN:

Bastará probar que (P_k) satisface las hipótesis del Teorema 3.5.4. Como (P_k) tiene la propiedad (S), fijado $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $V \in \mathcal{U}(E)$, $V \subset U$, tal que se tiene la igualdad (3.29). En segundo lugar, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $V \cap E_k$ es un subconjunto absolutamente convexo de E_k y E_k tiene dimensión finita. Por el lema anterior, fijado $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una cantidad finita de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ en E_k tales que

$$\begin{aligned} V \cap E_k &\subset \operatorname{acx}\{x_1, \ldots, x_m\} + \varepsilon\big(V \cap E_k\big) \\ &\subset \operatorname{acx}\{x_1, \ldots, x_m\} + \varepsilon\big(U \cap E_k\big). \end{aligned}$$

Si definimos $D_k := \operatorname{acx}\{x_1, \ldots, x_m\}$ entonces se satisfacen las inclusiones (3.30). Por último, todo espacio vectorial topológico de dimensión finita tiene los acotados precompactos. Esto prueba que estamos en las hipótesis del Teorema 3.5.4 y por lo tanto E es un espacio de Schwartz. ∎

El siguiente resultado es ya una consecuencia inmediata de los anteriores.

3.5.7 Corolario. *Sea (P_k) una descomposición de Toeplitz finito-dimensional y equicontinua de un espacio localmente convexo E. Entonces E es un espacio de Schwartz si y sólo si (P_k) tiene la propiedad (S).*

A continuación vamos a dar ejemplos de espacios escalonados de Köthe que tienen una base de Toeplitz y que, bajo determinadas condiciones, son Montel o Schwartz.

3.5.8 Ejemplo. Sea λ un FK-espacio de sucesiones tal que las coordenadas forman una base de Toeplitz de λ; es decir, λ es un FK-espacio con la propiedad T-AK (en la terminología de Buntinas). Sea $\{a^{(n)} : n \geq 1\}$ un sistema de escalones sobre λ; esto es, cada $a^{(n)}$ es una sucesión tal que $a_k^{(n)} \neq 0$ $[n, k \in \mathbb{N}]$ y

$$\frac{a^{(n)}}{a^{(n+1)}} x \in \lambda \qquad [n \in \mathbb{N}] \quad [x \in \lambda].$$

De esta forma, cada $\dfrac{1}{a^{(n+1)}}\lambda$ está inyectado de manera continua en $\dfrac{1}{a^{(n)}}\lambda$. Consideremos el espacio escalonado

$$E := \bigcap_n \frac{1}{a^{(n)}} \lambda$$

con la topología límite proyectivo que viene dada por la familia de seminormas

$$q_{m,n}(x) := q_m(a^{(n)}x) \qquad [m, n \in \mathbb{N}] \quad [x \in \lambda];$$

donde (q_n) es una sucesión de seminormas que genera la topología de λ. Es conocido que E es un FK-espacio. Vamos a probar que las coordenadas forman una base de Toeplitz de E. Para ello tengamos en cuenta que λ tiene esa propiedad y que, además,

$$\tau_m(a^{(n)}x) = (t_{mk}a_k^{(n)}x_k)_k = a^{(n)}(\tau_m x) \qquad [m, n \in \mathbb{N}] \quad [x \in \lambda].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_{k,n}(x - \tau_m x) &= q_k\Big(a^{(n)}(x - \tau_n x)\Big) \\ &= q_k\Big(a^{(n)}x - a^{(n)}(\tau_n x)\Big) \\ &= q_k\Big(a^{(n)}x - \tau_n(a^{(n)}x)\Big) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad [n, k \in \mathbb{N}] \quad [x \in E]. \end{aligned}$$

Recordemos que $M(\lambda)$, el espacio de los multiplicadores asociado a λ, está definido por

$$M(\lambda) := \{y \in \omega : \ xy \in \lambda \text{ para todo } x \in \lambda\}$$

y puede ser considerado como un subespacio de $\mathcal{L}(\lambda)$. Sabemos que $M(\lambda)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_b(\lambda)$ y que el conjunto $S(\lambda)$ de todas las aplicaciones diagonales completamente continuas sobre λ (que aplican acotados en relativamente compactos) es la clausura de φ en $\mathcal{L}_b(\lambda)$ [32]. En estas condiciones destacamos los dos resultados siguientes por su relación con el contenido de esta sección.

Teorema. [32, § 2. Corollary 3]. *En las condiciones anteriores, si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $\dfrac{a^{(n)}}{a^{(m)}} \in S(\lambda)$ entonces E es de Montel.*

Teorema. [32, § 2. Corollary 3]. *En las condiciones anteriores, si además λ es un BK-espacio entonces E es un espacio de Schwartz si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $\dfrac{a^{(n)}}{a^{(m)}} \in S(\lambda)$.*

En el primero de los dos resultados anteriores puede comprobarse que la condición que se da implica la propiedad (M) sobre las coordenadas. En el segundo, dicha condición es por el Corolario 3.5.7 equivalente a la propiedad (S) sobre la descomposición de las coordenadas.

3.5.9 Ejemplo. Mostraremos ciertas condiciones exigidas por Bierstedt, Bonet y Galbis [6] es espacios de funciones holomorfas con pesos que garantizan la propiedad de Schwartz. La notación que usamos es la misma que la del ejemplo 2.1.14 aunque en este caso Ω puede ser todo $\mathbb{C}^m$.

Denotaremos por v a una *función de peso radial que se anula en el infinito de* Ω; es decir, una función continua de Ω en $\mathbb{R}^+$ tal que $v(tz) = v(z)$ para todos $z \in \Omega$ y $|t| = 1$ que se puede hacer tan pequeña como se quiera fuera de los compactos de Ω; o sea, para cada $\varepsilon > 0$ existe $K \subset \Omega$ tal que $v(z) < \varepsilon$ en $\Omega \setminus K$. La letra V denotará una sucesión de pesos es estas condiciones.

Denotaremos por $H_v(\Omega)$ y $H_{v_0}(\Omega)$ a los espacios

$$H_v(\Omega) := \Big\{ f \in H(\Omega) : p_v(f) := \sup_{z\in\Omega} v(z)|f(z)| < \infty \Big\},$$

$$H_{v_0}(\Omega) := \Big\{ f \in H_v(\Omega) : vf \text{ se anula en el infinito de } \Omega \Big\};$$

los cuales, dotados de la norma p_v, son espacios de Banach. A través de estos espacios se definen, para una sucesión creciente de pesos V, los espacios

$$HV(\Omega) := \bigcap_{v\in V} H_v(\Omega) , \qquad HV_0(\Omega) := \bigcap_{v\in V} H_{v_0}(\Omega);$$

dotados de la topología límite proyectivo que viene dada por la familia de seminormas $(p_v)_{v\in V}$. Análogamente, si V es decreciente, se definen los espacios

$$\mathcal{V}H(\Omega) := \bigcup_{v\in V} H_v(\Omega) , \qquad \mathcal{V}H_0(\Omega) := \bigcup_{v\in V} H_{v_0}(\Omega);$$

dotados de la topología límite inductivo (para ésta no hay una buena descripción de las seminormas).

Tomando como sistema de proyecciones (P_k) el dado por los polinomios de Taylor tal como se hizo en $A(\Omega)$, se prueba que (P_k) es una descomposición de Cesàro equicontinua de $HV_0(\Omega)$ y de $\mathcal{V}H_0(\Omega)$ [6].

El sistema de pesos V se dice que es *regularmente decreciente* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que v_m/v_n se anula en el infinito de Ω. Si $V^{-1} := \Big\{1/v : v \in V\Big\}$ es regularmente decreciente entonces se dice que V es *regularmente creciente*.

Pues bien, en [6] se prueban los dos siguientes resultados.

Teorema. *Si V es regularmente creciente entonces $HV_0(\Omega) = HV(\Omega)$ y es un espacio de Fréchet con la propiedad de Schwartz.*

Teorema. *Si V es regularmente creciente entonces $VH_0(\Omega) = VH(\Omega)$ y es un espacio (DF), completo, reflexivo, con la propiedad de Schwartz.*

Como las descomposiciones que tienen son finito-dimensionales, cada una de las propiedades "regularmente decreciente" y "regularmente creciente" sobre V implica que la descomposición de Cesàro dada por los polinomios de Taylor verifican la propiedad (S) con la correspondiente topología. El recíproco no es cierto (comunicación personal del profesor J. Bonet Solves).

3.6 Descomposiciones en un producto tensorial proyectivo.

En esta sección nos ocuparemos de estudiar la estabilidad de propiedades vectoriales topológicas de espacios localmente convexos mediante la formación de productos tensoriales proyectivos. Más concretamente, estudiaremos problemas del siguiente tipo: *Sean E y F espacios localmente convexos con una cierta propiedad (P). ¿Hereda su producto tensorial proyectivo $E\hat{\otimes}_\pi F$ la propiedad (P)?*

Este tema fue tratado por primera vez por Grothendieck [44] dando respuesta afirmativa al caso Schwartz y casi-normable. Algún tiempo después del trabajo de Grothendieck aparecieron los primeros contraejemplos, que hacían referencia a las propiedades de ser distinguido y Montel, y paralelamente surgían algunas respuestas positivas a los problemas de estabilidad cuando a los espacios E y F se les exigían condiciones adicionales a la propiedad (P). En este sentido cabe destacar, entre otros, los trabajos de Bierstedt y Bonet [4] [5], Bierstedt y Meise [7], Bonet y Defant [9], Bonet y Díaz [10], Díaz y López Molina [21], Díaz y Miñarro [22] [23], Peris [85] y Taskinen [107] [108]. Son precisamente Díaz y Miñarro quienes utilizan la técnica de las descomposiciones de Schauder para dar resultados de carácter positivo en relación a las propiedades de ser distinguido y Montel. Nuestro propósito es, siguiendo esta línea, obtener resultados más generales utilizando la teoría de las descomposiciones de Toeplitz desarrollada a lo largo de esta memoria. Para ello vamos a empezar recordando algunas definiciones relacionadas con los productos tensoriales.

Sean E y F espacios localmente convexos cuyas topologías vienen dadas, respectivamente, por las familias de seminormas $\mathcal{Q}(E)$ y $\mathcal{Q}(F)$. Sobre el producto tensorial algebraico $E \otimes F$ consideramos la topología generada por la familia de seminormas

$$\pi_{p,q}(z) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)q(y_i) \ : \ z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\} \qquad [p \in \mathcal{Q}(E)] \quad [q \in \mathcal{Q}(F)],$$

donde el ínfimo se toma en todas las posibles representaciones de $z \in E \otimes F$. La topología localmente convexa definida por la familia de seminormas $(\pi_{p,q})$ se llama topología tensorial proyectiva (o también π-topología). Escribiremos $E \otimes_\pi F$ para denotar al espacio $E \otimes F$ dotado de la π-topología. Asimismo, denotaremos por $E\widehat{\otimes}_\pi F$ a su espacio completado. Dados dos conjuntos $U \subset E$ y $V \subset F$ denotaremos por $U \otimes V$ al conjunto

$$U \otimes V := \{x \otimes y : x \in U, \ y \in V\}.$$

Esta notación podría provocar confusión si U y V son subespacios, sin embargo en la práctica siempre quedará claro su significado. Por último, recordamos el concepto de producto tensorial de aplicaciones. Dados dos operadores $f \in \mathcal{L}(E)$ y $g \in \mathcal{L}(F)$ se define el operador $f \otimes g \in \mathcal{L}(E \otimes_\pi F)$ por

$$(f \otimes g)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes g(y_i).$$

Su extensión a $E\widehat{\otimes}_\pi F$ se denota de igual forma. Para más detalles sobre el producto tensorial proyectivo de espacios localmente convexos pueden consultarse los libros de Jarchow [52], Köthe [61] y Pérez Carreras y Bonet [84].

El siguiente lema nos permite introducir, de manera natural, una descomposición de Toeplitz en $E\widehat{\otimes}_\pi F$ a partir de una descomposición de Toeplitz sobre E y, por tanto, nos pone en condiciones de aplicar la teoría de las descomposiciones al estudio del producto tensorial proyectivo.

3.6.1 Lema. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de E. Entonces $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua de $E\widehat{\otimes}_\pi F$.*

DEMOSTRACIÓN:

Empezamos comprobando que $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz de $E \otimes_\pi F$. Dado $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ se verifica

$$(P_k \otimes id_F)(P_j \otimes id_F)z = \sum_{i=1}^{m}(P_k P_j x_i) \otimes y_i.$$

Por lo tanto, si (P_k) es un sistema de proyecciones sobre E entonces $(P_k \otimes id_F)$ es un sistema de proyecciones sobre $E \otimes_\pi F$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} z - (T_n \otimes id_F)z &= \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i - \sum_{i=1}^{m} T_n x_i \otimes y_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_i - T_n x_i) \otimes y_i. \end{aligned}$$

Como los primeros factores de cada tensor convergen a cero en E y están en cantidad finita se tiene que toda la expresión converge a cero en la π-topología. Esto prueba que $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz de $E \otimes_\pi F$. Además, dado que (T_n) es equicontinua en E es fácil probar que $(T_n \otimes id_F)$ es equicontinua en $E \otimes_\pi F$. Finalmente, es inmediato deducir que las extensiones a $E \widehat{\otimes}_\pi F$ siguen siendo una descomposición de Toeplitz equicontinua. ∎

Dada la importancia de la contractividad y de la propiedad (M) en el estudio de la reflexividad, la distinción y la propiedad de Montel (ver Teorema 3.2.2, Corolario 3.3.13 y Corolario 3.4.4), cabe plantearse la cuestión de bajo qué condiciones dichas propiedades para la descomposición (P_k) de E son heredadas por la descomposición $(P_k \otimes id_F)$ de $E \widehat{\otimes}_\pi F$. Puesto que la propiedad (M) afecta a los acotados y los acotados de $E \widehat{\otimes}_\pi F$ no siempre se representan a partir de los acotados de E y F (este es el "Problema de las topologías de Grothendieck" resuelto de manera negativa por Taskinen [106]), ocurre que la propiedad (M) puede desaparecer al formar el producto tensorial. Para superar este inconveniente se impone al par (E, F) lo que se conoce como la propiedad (BB) (por *bi-bounded*) introducida por Taskinen.

Se dice que un par (E, F) de espacios localmente convexos satisface la propiedad (BB) si para cada acotado $D \subset E \widehat{\otimes}_\pi F$ existen acotados $D_1 \subset E$ y $D_2 \subset F$ tales que

$$D \subset \overline{\mathrm{acx}(D_1 \otimes D_2)}.$$

Por lo que respecta a la contractividad, ésta no se traslada de la descomposición (P_k) a $(P_k \otimes id_F)$, ni siquiera en presencia de la propiedad (BB) [74, p. 89]. Sin embargo, la propiedad (S) (que implica la propiedad (M) y por tanto la contractividad) afecta a los entornos y dado que los entornos básicos de $E \widehat{\otimes}_\pi F$ admiten una buena representación en términos de los entornos de E y F se tendrá que la propiedad (S) se traslada de (P_k) a $(P_k \otimes id_F)$. El siguiente resultado recoge lo que hemos comentado anteriormente.

3.6.2 Proposición. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (P_k) una descomposición de Toeplitz equicontinua de E.*

(1) *Si el par (E, F) tiene la propiedad (BB) y (P_k) verifica la propiedad (M) entonces $(P_k \otimes id_F)$ verifica la propiedad (M).*

(2) *Si (P_k) verifica la propiedad (S) entonces $(P_k \otimes id_F)$ también verifica la propiedad (S).*

DEMOSTRACIÓN:

(1) En primer lugar veamos que la convergencia puntual a la identidad de $(T_n \otimes id_F)$ es uniforme sobre conjuntos de la forma $\operatorname{acx}(D_1 \otimes D_2)$, donde D_1 y D_2 son acotados de E y F, respectivamente. En efecto, para cada $z \in \operatorname{acx}(D_1 \otimes D_2)$ escogemos una representación $z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \otimes y_i$ con $\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leq 1$. Entonces, dada una seminorma $\pi_{p,q}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_{p,q}\Big(z - (T_n \otimes id_F)z\Big) &= \pi_{p,q}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - T_n x_i) \otimes y_i\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| p(x_i - T_n x_i) q(y_i) \\ &\leq \sup_{y \in D_2} q(y) \sup_{x \in D_1} p(x - T_n x). \end{aligned}$$

Ahora, usando la equicontinuidad de $(T_n \otimes id_F)$ se deduce inmediatamente que la convergencia también es uniforme en la adherencia de $\operatorname{acx}(D_1 \otimes D_2)$. La condición (BB) asegura que variando D_1 y D_2 en la clase de los acotados de E y F, respectivamente, lo que se obtiene es una familia fundamental de acotados en $E \hat{\otimes}_\pi F$ y esto concluye la prueba.

(2) Como (P_k) verifica la propiedad (S) se tiene que para cada $p_1 \in \mathcal{Q}(E)$ existe $p_2 \in \mathcal{Q}(E)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sup\Big\{p_1(x - T_n x) : \ p_2(x) \leq 1\Big\} = 0.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_1(x - T_n x) \leq \varepsilon p_2(x) \qquad [x \in E] \quad [n \geq n_0].$$

Ahora, dado $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ y $q \in \mathcal{Q}(F)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_{p_1,q}\Big(z - (T_n \otimes id_F)z\Big) &= \pi_{p_1,q}\Big(\sum_{i=1}^{m}(x_i - T_n x_i) \otimes y_i\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} p_1(x_i - T_n x_i) q(y_i) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{m} p_2(x_i) q(y_i); \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \sup \Big\{ \pi_{p_1,q}\Big(z - (T_n \otimes id_F)z\Big) \ : \ \pi_{p_2,q}(z) \leq 1 \ , \ z \in E \otimes F \Big\} = 0.$$

Esto prueba que $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz de $E \otimes_\pi F$ con la propiedad (S). El mismo resultado se obtiene en el completado razonando por paso al límite. ∎

Con todo esto podemos obtener los resultados de estabilidad que mencionamos al comienzo de la sección.

3.6.3 Teorema. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (P_k) una descomposición de Toeplitz de E que es finito-dimensional, equicontinua y satisface la propiedad (M). Supongamos que el par (E, F) tiene la propiedad (BB).*

(1) *Si F es semi-reflexivo o semi-Montel entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ tiene la misma propiedad.*

(2) *Si E y F son metrizables, F es distinguido y las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente c_T, entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es distinguido.*

DEMOSTRACIÓN:

Por la proposición anterior $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz equicontinua que satisface la propiedad (M) para $E\widehat{\otimes}_\pi F$. Cada subespacio $E_k \otimes F$ es isomorfo a un producto finito de copias de F y por lo tanto tiene las mismas propiedades que F.

Por la Proposición 2.3.16, toda descomposición de Toeplitz con la propiedad (M) de un espacio completo es contractiva y γ-completa. La semi-reflexividad de $E\widehat{\otimes}_\pi F$ se tiene ahora sin más que aplicar el Teorema 3.2.2. La propiedad de Montel para $E\widehat{\otimes}_\pi F$ se obtiene aplicando el Corolario 3.4.4 y la distinción aplicando el Corolario 3.3.13 (téngase en cuenta que el producto tensorial proyectivo de espacios metrizables es metrizable [52, 15.1(4) p. 326]). ∎

3.6.4 Teorema. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (P_k) una descomposición de Toeplitz finito-dimensional de E que satisface la propiedad (S).*

(1) *Si F es semi-reflexivo o semi-Montel entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ tiene la misma propiedad.*

(2) *Si E y F son metrizables, F es distinguido y las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente c_T entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es distinguido.*

DEMOSTRACIÓN:

Por la Proposición 3.6.2 tenemos ahora que $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Toeplitz que satisface la propiedad (S) para $E\widehat{\otimes}_\pi F$. Por la Proposición 2.3.14, toda descomposición de Toeplitz con la propiedad (S) satisface también la propiedad (M). El resto de la prueba es exactamente la misma que la del teorema anterior.

∎

3.7 Un caso particular interesante: Espacios con base de Cesàro.

En esta sección vamos a recopilar y resumir los resultados más importantes que hemos obtenido en nuestra memoria para el caso particular de la matriz de sumabilidad de Cesàro y especialmente para bases. El motivo es que se trata del caso particular más importante. Además, podemos comparar resultados ya conocidos sobre sumabilidad o de la teoría de bases de Cesàro, teniendo en cuenta que muchas de las hipótesis que aparecen en nuestros resultados previos se tienen ahora de forma inmediata. En particular, todas las hipótesis de carácter vectorial topológico que hemos tenido que imponer a los subespacios E_k se verifican, porque son espacios de dimensión finita. Otra hipótesis bajo la cual hemos obtenido algunos de nuestros resultados es que A sea un triángulo regular para el cual las coordenadas forman una base de Toeplitz del correspondiente espacio de sucesiones c_T. En este caso las coordenadas forman una base de Cesàro de cs_1 [120] y por lo tanto esta condición siempre se tiene.

Para hacer más cómoda la lectura, cada resultado de esta sección irá acompañado de la referencia al resultado general para una descomposición de Toeplitz; por ejemplo, la etiqueta **3.7.a Teorema. [b.c.d]**. significa que ese resultado es el caso particular, para espacios localmente convexos con una base de Cesàro, del que aparece en el párrafo **b.c.d** de esta memoria.

Si λ es un espacio de sucesiones que contiene a φ se define su c-dual λ^c como el espacio de sucesiones

$$\lambda^c := \Big\{x = (x_k) \in \omega : xy \in cs_1 \text{ para todo } y = (y_k) \in \lambda\Big\}.$$

Es conocido que (λ, λ^c) es un par dual. Esta dualidad fue estudiada por Florencio y Pérez Carreras [29] [30] [34] [35] quienes probaron que las coordenadas forman una base de Cesàro de $\Big[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^c)\Big]$.

Si E es un espacio localmente convexo y (u_k, u_k') es un sistema biortogonal tal que (u_k) es una base de Cesàro de E cuya sucesión de coeficientes funcionales es (u_k') entonces E y E' pueden identificarse de manera natural, respectivamente, con los espacios de sucesiones

$$\lambda := \Big\{(\langle x, u_k'\rangle) : x \in E\Big\} \quad \text{y} \quad \lambda' := \Big\{(\langle u_k, x'\rangle) : x' \in E'\Big\}.$$

En particular, tanto u_k como u_k' se identifican con el vector coordenado k-ésimo $e^{[k]}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si a λ se le dota de la topología trasladada por el isomorfismo entonces resulta que las coordenadas forman una base de Cesàro de λ; además, el dual de λ es λ' con la forma bilineal

$$\langle (x_k), (y_k)\rangle_{(\lambda,\lambda')} := T\text{-}\lim(x_k y_k);$$

donde T denota la matriz de sumabilidad de Cesàro de sucesiones a series.

Así pues, el lenguaje de espacios localmente convexos con base de Cesàro equivale al lenguaje de espacios de sucesiones con convergencia seccional de Cesàro.

Hemos definido el β-dual de un espacio E con respecto a una descomposición de Toeplitz y argumentando que no habría confusión, lo hemos denotado, por simplicidad, por E^{β}; aunque en rigor deberíamos haberlo denotado por E^{β_T} tal y como hace Buntinas [16]. En el lenguaje de los espacios de sucesiones la terminología λ^{β} para el β-dual está lo suficientemente extendida desde los trabajos de Garling [37] [38] como para que en esta sección, para no dar lugar a confusiones, denotemos por E^c al β_T-dual de E con respecto a su base de Cesàro. En adelante escribiremos c-dual en lugar de β_T-dual. La identificación que existe entre E y λ se extiende de manera obvia a los c-duales y resulta que $z \in E^c$ si y sólo si la sucesión (z_k) definida por $z_k := \langle u_k, z\rangle$; $k = 1, 2, \ldots$, está en λ^c.

Muchos de los conceptos usuales en los espacios de sucesiones con convergencia seccional de Cesàro son equivalentes a conceptos que nosotros hemos considerado para una descomposición de Toeplitz, particularizados al caso de bases. Por ejemplo, se dice λ es c-perfecto si $\lambda^{cc} = \lambda$. Este concepto fue introducido por Florencio [30] para poder efectuar un estudio sistemático de la c-dualidad de manera análoga a como se hace en el caso de la α-dualidad de Köthe [61, Ch. 6, § 30]. La separación entre una y otra viene dada por el hecho de que todo espacio α-perfecto es c-perfecto pero existen espacios c-perfectos que no son α-perfectos; aún más, ni siquiera son normales. Pues bien, decir que λ es c-perfecto es lo mismo que decir que la base de Cesàro de E es β-completa.

Por otro lado, nosotros hemos definido la topología $\sigma\gamma_c(E, E')$ (2.4.4) y lo que Florencio [30] llama la c-topología de λ no es otra cosa que la topología $\sigma\gamma_c(E, E')$ trasladada por el isomorfismo entre E y λ. El dual de cs_1 verifica

$$(cs_1)' = (cs_1)^c = bv_1 := \Big\{x = (x_k) \in \omega : x \in c \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 x_k| < \infty\Big\};$$

donde Δ denota el operador diferencia. Un espacio λ conteniendo a φ se dice que es bv_1-invariante si $\lambda = bv_1 \cdot \lambda$. Por lo tanto λ^c siempre es bv_1-invariante. En nuestro caso, también es inmediato el hecho de que E^c es B_T-invariante (véase 2.4.8 y 2.4.11(i)) y usando el Corolario 2.4.10 se deduce que la topología $\sigma\gamma_c(E, E')$ siempre es compatible con el par dual (E, E^c). Por lo tanto el resultado [30, Proposición 6] que afirma que las coordenadas forman una base de Cesàro de $[\lambda, c\text{-topología}]$ es un caso particular de nuestro Teorema 2.4.6.

Otro resultado conocido en c-dualidad [30, Teorema 1] es la caracterización de los espacios c-perfectos como aquellos para los cuales las coordenadas forman una base de Cesàro β-completa, lo cual se deduce inmediatamente de nuestros teoremas 3.1.1 y 3.1.7.

En resumen, la necesidad de considerar distintos tipos de dualidad entre espacios de sucesiones procede del hecho de que existen distintos tipos de bases. Si un espacio posee una base de Schauder incondicional, su dualidad se extiende a la α-dualidad de Köthe–Toeplitz del par (l^1, l^∞); si posee una base de Schauder condicional, su dualidad es como la β-dualidad de Garling del par (cs, bv); si posee una base de Cesàro será útil conocer la c-dualidad del par (cs_1, bv_1) y, en general, si posee una base de Toeplitz la dualidad que le acompaña es la del par (c_T, c_T').

Los resultados obtenidos en esta memoria para el caso particular de bases de Cesàro son los que aparecen a continuación. En todos ellos (salvo indicación expresa) E es un espacio localmente convexo con base de Cesàro (u_k) y (P_k) es la correspondiente sucesión de proyecciones

$$P_k x = \langle x, u_k' \rangle u_k \qquad [k \in \mathbb{N}].$$

Para evitar confusiones hacemos notar que cuando atribuimos a la base (u_k) alguna propiedad quiere decir que (P_k) verifica como descomposición de Cesàro dicha propiedad, en los términos en que ha sido definida en esta memoria.

Bases débiles.

3.7.1 Teorema. **[2.5.6]**. *Si E es tonelado y tiene una base de Cesàro (u_k) para la topología débil entonces (u_k) es una base de Cesàro equicontinua de E.*

El resultado anterior es lo que se conoce como el teorema de la base débil. En este contexto existen otros resultados en los cuales a la base no se le pide que las proyecciones sean continuas y se exigen condiciones al espacio, más fuertes que la tonelación, para que una base de este tipo sea una base para la topología original y las proyecciones sean continuas. Los resultados que contienen estas condiciones son el teorema de continuidad de De Wilde [20] para descomposiciones con la sumabilidad ordinaria, dos teoremas de Montes y de Montes y Pérez Carreras para bases con la sumabilidad de Cesàro [76] y de Abel [77], así como un teorema de Giménez y López Molina para $\mathcal{F}$-bases que engloba a todos los anteriores [41].

Completitud.

3.7.2 Teorema. **[3.1.2]**. *Sea (u_k) una base de Cesàro equicontinua de E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es completo.*

(2) *E es casi-completo.*

(3) *E es sucesionalmente completo.*

(4) *La base es completa.*

(5) *Dada una sucesión $(x_k) \in \omega$, si la sucesión $x := (x_k u_k)$ verifica que Tx es de Cauchy en E, entonces $(x_k) \in cs_1$.*

Reflexividad.

3.7.3 Teorema. [3.2.2]. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *E es semi-reflexivo.*

(2) *La base es γ-completa y contractiva.*

(3) *La base es β-completa y contractiva.*

Ahora vamos a denotar por E'_c al correspondiente subespacio H definido en 2.3.6 dotado de la topología inducida por $\beta(E', E)$.

3.7.4 Teorema. [3.2.9, 3.2.12, 3.2.13, 3.2.14]. *Sea (u_k) una base de Cesàro de un espacio tonelado y sucesionalmente completo E. Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(E'_c)' = E$.

(2) *(u_k) es γ-completa para E.*

(3) *(u'_k) es contractiva para E'_c.*

(4) *(u'_k) es γ-completa para E'_c.*

(5) *(u_k) es contractiva para E.*

Entonces se tienen las equivalencias: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) *y* (4) $\Leftrightarrow$ (5).

Tonelación.

3.7.5 Teorema. **[3.3.1]**. *Sea E un espacio localmente convexo y (u_k) una base de Cesàro de $[E, \mu(E, E')]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $[E, \mu(E, E')]$ *es tonelado.*

(2) $E' = E^c$ *y* (u_k) *es una base de Cesàro de* $[E, \beta(E, E')]$.

3.7.6 Teorema. **[3.3.5]**. *Sea (u_k) una base de Cesàro contractiva de un espacio normado E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) E *es tonelado.*

(2) $E' = E^c$.

3.7.7 Teorema. **[3.3.8]**. *Sea (u_k) una base de Cesàro contractiva de un espacio de Banach E. Entonces todo subespacio $F \subset E$ tal que $F^c = E^c$, es tonelado; es decir, E tiene la T-propiedad de Wilansky.*

3.7.8 Teorema. **[3.3.12]**. *Si E es un espacio (DF), sucesionalmente completo y posee base de Cesàro entonces es tonelado.*

3.7.9 Teorema. **[3.3.13]**. *Si (u_k) es una base de Cesàro contractiva de un espacio localmente convexo metrizable E, entonces E es distinguido.*

Propiedad de Montel.

3.7.10 Teorema. **[3.4.5]**. *Si (u_k) una base de Cesàro de un espacio de Fréchet E, entonces E es Montel si y sólo si (u_k) tiene la propiedad (M).*

Propiedad de Schwartz.

3.7.11 Teorema. **[3.5.7]**. *Si (u_k) es una base de Cesàro equicontinua de E. entonces E es un espacio de Schwartz si y sólo si (u_k) tiene la propiedad (S).*

Productos Tensoriales.

3.7.12 Lema. **[3.6.1]**. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (u_k) una base de Cesàro equicontinua de E. Entonces $(P_k \otimes id_F)$ es una descomposición de Cesàro equicontinua de $E\widehat{\otimes}_\pi F$.*

En el caso de bases de Schauder se tienen otros resultados relacionados con el anterior. Por ejemplo, Gelbaum y Gil de Lamadrid [40] probaron que el producto tensorial proyectivo de dos espacios de Banach con base de Schauder también posee base de Schauder. Este resultado fue extendido para espacios localmente convexos por Montes [75].

3.7.13 Teorema. **[3.6.3]**. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (u_k) una base de Cesàro de E que es equicontinua y tiene la propiedad (M). Supongamos que el par (E, F) tiene la propiedad (BB).*

(1) *Si F es semi-reflexivo o semi-Montel entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ tiene la misma propiedad.*

(2) *Si E y F son metrizables y F es distinguido entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es distinguido.*

3.7.14 Teorema. **[3.6.4]**. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y (u_k) una base de Cesàro de E que satisface la propiedad (S).*

(1) *Si F es semi-reflexivo o semi-Montel entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ tiene la misma propiedad.*

(2) *Si E y F son metrizables y F es distinguido entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es distinguido.*

Referencias.

[1] BACHELIS, G. F. y ROSENTHAL, H. P.: *On unconditionally converging series and biorthogonal sistems in a Banach space.* Pacific J. Math. **37** (1971) 1–5.

[2] BENNET, G.: *Sequence spaces with small β-duals,* Math. Z. **194** (1987) 321–329.

[3] BESSAGA, C.; PEŁCZYŃSKI, A. y ROLEWICZ, S.: *On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **9** (1961) 677–683.

[4] BIERSTEDT, K. D. y BONET, J.: *Stefan Heinrich's density condition for Fréchet spaces and the characterization of the distinguished Köthe echelon spaces.* Math. Nachr. **135** (1988) 149–180.

[5] BIERSTEDT, K. D. y BONET, J.: *Density conditions in Fréchet and (DF)-spaces.* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989) 59–76.

[6] BIERSTEDT, K. D.; BONET, J. y GALBIS, A.: *Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains.* Michigan Math. J. **40** (1993) 271–297.

[7] BIERSTEDT, K. D. y MEISE, R.: *Distinguished echelon spaces and projective descriptions of weighted inductive limits of type $\mathcal{V}C(X)$* en *Aspects of Mathematics and Applications:* Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1986) 169–226.

[8] BIERSTEDT, K. D.; MEISE, R. H. y SUMMERS, W. H.: *Köthe sets and Köthe sequence spaces* en *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory.* North–Holland Mathematical Studies **71**. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1982) 27–91.

[9] BONET, J. y DEFANT, A.: *Projective tensor products of distinguished Fréchet spaces.* Proc. Royal Irish Acad. **85A** (1985) 193–199.

[10] BONET, J. y DÍAZ, J. C.: *The problem of topologies of Grothendieck and the class of Fréchet T-spaces.* Math. Nachr. **150** (1991) 109–118.

[11] BONET, J.; DÍAZ, J. C. y TASKINEN, J.: *Tensor stable Fréchet and (DF)-spaces.* Collect. Math. **42** (1991) 199–236.

[12] BOOS, J. y LEIGER, T.: *Some distiguished subspaces of domains of operator valued matrices.* Results Math. **16** (1989) 199–211.

[13] BOCHKARIEV, S. V.: *Existence of a basis in the space of functions analytic in the disc and some properties of the Franklin system.* Mat. Sbornik **95** (1974) 3–18.

[14] BOURGAIN, J.: *Homogeneous polynomials on the ball and polynomials bases.* Israel J. Math. **68** (1989) 327–347.

[15] BUNTINAS, M.: *On sectionally dense summability fields.* Math. Z. **132** (1973) 141–149.

[16] BUNTINAS, M.: *On Toeplitz sections in sequence spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **78** (1975) 451–460.

[17] BUNTINAS, M.: *The spaces* lip α *and certain other spaces have duals with Cesàro bases.* Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976) 233–237.

[18] COOK, T. A.: *Schauder decompositions and semi-reflexive spaces.* Math. Ann. **182** (1969) 232–235.

[19] DAY, M. M.: *Normed Linear Spaces.* Springer. Berlín, Gotinga y Heidelberg (1958).

[20] DE WILDE, M.: *On weak and Schauder decompositions.* Studia Math. **41** (1972) 145–148.

[21] DÍAZ, J. C. y LÓPEZ MOLINA, J. A.: *On the projective tensor products of Fréchet spaces.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **34** (1991) 169–178.

[22] DÍAZ, J. C. y MIÑARRO, M. A.: *Distinguished Fréchet spaces and projective tensor product.* Doğa Math. **14** (1990) 191–208.

[23] DÍAZ, J. C. y MIÑARRO, M. A.: *On Fréchet Montel spaces and their projective tensor product.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **113** (1993) 335–341.

[24] DIESTEL, J.: *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg, Nueva York y Tokyo (1984).

[25] DIEUDONNÉ, J.: *History of Functional Analysis.* North–Holland Mathematical Studies **49**. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1981).

[26] DREWNOWSKI, L.; FLORENCIO, M. y PAÚL, P. J.: *Barrelled subspaces of spaces with subseries decompositions or Boolean rings of projections.* Glasgow Math. J. **36** (1994) 57–69.

[27] DUBINSKY, E. y RETHERFORD, J. R.: *Schauder bases and Köthe sequence spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968) 265–280.

[28] ENFLO, P.: *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. **130** (1973) 309–317.

[29] FLORENCIO, M.: *Sumabilidad Cesàro en espacios de sucesiones.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1980).

[30] FLORENCIO, M.: *Sobre c-dualidad y espacios c-perfectos.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **75** (1981) 1221–1234.

[31] FLORENCIO, M.: *Sobre la propiedad AK y AK-C en algunos espacios de sucesiones.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **76** (1982) 1221–1234.

[32] FLORENCIO, M. y PAÚL P. J.: *Some results on diagonal maps.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **55** (1986) 569–580.

[33] FLORENCIO, M.; PAÚL P. J. y SÁEZ, C.: *Barrelledness in λ-sums of normed spaces.* Simon Stevin **63** (1989) 209–217.

[34] FLORENCIO, M. y PÉREZ CARRERAS, P.: *Sobre sumabilidad Cesàro en el espacio cs I.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **75** (1981) 1185–1197.

[35] FLORENCIO, M. y PÉREZ CARRERAS, P.: *Sobre sumabilidad Cesàro en el espacio cs II.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **76** (1982) 531–546.

[36] GAPOŠKIN, V. F.: *Trigonometric Cesàro bases in the spaces of functions integrable with power weight.* Analysis **8** (1982) 103–124.

[37] GARLING, D. J. H.: *The β- and γ-duality of sequence spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967) 963–981.

[38] GARLING, D. J. H.: *On topological sequence spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967) 997–1019.

[39] GARNIR, H. G.; DE WILDE, M. y SCHMETS, J.: *Analyse Fonctionelle I.* Birkhäuser-Verlag. Basilea y Stuttgart (1968).

[40] GELBAUM, B. R. y GIL DE LAMADRID, J.: *Bases of tensor products of Banach spaces.* Pacific J. Math. **11** (1961) 297–310.

[41] GIMÉNEZ, I. y LÓPEZ MOLINA, J. A.: *On weak and Schauder $\mathcal{F}$-bases in topological vector spaces.* Arch. Math. **51** (1988) 561–569.

[42] GROSSE-ERDMANN, K.-G.: *T-solid sequence spaces.* Results Math. **23** (1993) 303–321.

[43] GROTHENDIECK, A.: *Sur les espaces (F) et (DF).* Summa Brasil. Math. **3** (1954) 57–123.

[44] GROTHENDIECK, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. **16.** American Mathematical Society. Providence, R. I. (1955).

[45] HARDY, G. H.: *Divergent Series.* Oxford University Press. Oxford (1973).

[46] ISIDRO, J. M.: *Quasinormability of some spaces of holomorphic mappings.* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **3** (1990) 57–123.

[47] JAIN, P. K. y KAUSHIK, S. K.: *On k-shrinking and k-boundedly complete M-bases in Banach spaces.* J. Indian Math. Soc. **54** (1989) 147–154.

[48] JAIN, P. K. y SINHA, D. P.: *On strong Markushevich decompositions of Banach spaces.* J. Indian Math. Soc. **55** (1990) 117–126.

[49] JAKIMOVSKI, A.; RUSSELL, D. y STIEGLITZ, M.: *Toeplitz bases in matrix fields.* Analysis **8** (1988) 377–389.

[50] JAMES, R. C.: *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. Math. **52** (1950) 518–527.

[51] JAMES, R. C.: *Bases in Banach spaces.* Amer. Math. Monthly **89** (1982) 625–640.

[52] JARCHOW, H.: *Locally Convex Spaces*. B.G. Teubner. Stuttgart (1981).

[53] JOHNSON, W. B.: *Markushevich bases and duality theory*. Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970) 171–177.

[54] JOHNSON, M. D. y MOHAPATRA, R. N.: *Sectional convergence in spaces obtained as inverse images of sequence spaces under matrix transformations*. Math. Japonica **24** (1979) 179–185.

[55] KALTON, N. J.: *Schauder decompositions of locally convex spaces*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **68** (1970) 377–392.

[56] KALTON, N. J.: *Schauder decompositions and completeness*. Bull. London Math. Soc. **2** (1970) 34–36.

[57] KALTON, N. J.: *Mackey dual and almost shrinking bases*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **74** (1973) 73–81.

[58] KALTON, N. J.: *On summability domains*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973) 327–338.

[59] KNOPP, K.: *Theory and Application of Infinite Series*. Blackie & Son, Ltd. Glasgow (1944).

[60] KNOWLES, R. J. y COOK, T. A.: *Non-complete reflexive spaces without Schauder bases*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **74** (1973) 83–86.

[61] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I*. Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1969).

[62] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces II*. Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1979).

[63] LABUDA, I. y LIPECKI, Z.: *On subseries convergent and m-quasibases in topological linear spaces*. Manuscripta Math. **38** (1982) 87–98.

[64] LIPECKI, Z. y TERENZI, P.: *Subsequences of independent sequences in topological linear spaces*. Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Ser. V **9** (1985) 25–32.

[65] LINDENSTRAUSS, J. y TZAFRIRI, L.: *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*. Springer–Verlag. Berlín y Nueva York (1977).

[66] MARQUINA, A. y SANZ, J. M.: *Barrelledness conditions on* $c_0(E)$. Arch. Math. **31** (1978) 589–596.

[67] McARTHUR, C. W.: *The weak basis theorem*. Colloq. Math. **16** (1967) 71–76.

[68] McARTHUR, C. W. y RETHERFORD, J. R.: *Uniform and equicontinuous Schauder bases of subspaces*. Canad. J. Math. **17** (1965) 207–212.

[69] MADDOX, I. J.: *Infinite Matrices of Operators*. Lecture Notes in Mathematics **786**. Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1980).

[70] MADDOX, I. J.: *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press. Segunda edición. Cambridge (1988).

[71] MARTI, J. T.: *Introduction to the Theory of Bases*. Springer–Verlag New York Inc., Nueva York (1969).

[72] MEISE, R. y VOGT, D.: *A characterization of quasinormable Fréchet spaces*. Math. Nachr. **122** (1985) 141–150.

[73] MEYERS, G.: *On Toeplitz sections in* FK*-spaces*. Studia Math. **51** (1974) 23–33.

[74] MIÑARRO, M. A.: *Descomposiciones de espacios de Fréchet. Aplicación al producto tensorial proyectivo*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1991).

[75] MONTES, C.: *Sobre ciertos tipos de bases en espacios localmente convexos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1982).

[76] MONTES, C.: C*-bases en espacios localmente convexos*. Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **83** (1989) 9–24.

[77] MONTES, C. y PÉREZ CARRERAS, P.: *A note on basis in the sense of Abel in locally convex spaces*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **5** (1983) 323–328.

[78] MUJICA, J.: *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991) 867–887.

[79] NOLL, D.: *Toeplitz sections and the Wilansky property*. Analysis **10** (1990) 27–43.

[80] NOLL, D. y STADLER, W.: *Abstract sliding hump technique and characterization of barrelled spaces*. Studia Math. **94** (1989) 103–120.

[81] PAÚL, P. J.: *Espacios de sucesiones vectoriales*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1985).

[82] PAÚL P. J. y FLORENCIO, M.: *Sobre multiplicadores entre espacios de Cesàro* en *Actas VII Congreso G.M.E.L. vol. II*. Universidad de Coimbra (1985) 167–170.

[83] PEŁCZYNSKI, A.: *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*. CBMS Regional Conference Series **30**. American Mathematical Society. Providence R. I. (1977).

[84] PÉREZ CARRERAS, P. y BONET, J.: *Barrelled Locally Convex Spaces*. North–Holland Mathematical Studies **131**. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1987).

[85] PERIS, A.: *Quasinormable spaces and the problem of topologies of Grothendieck*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **19** (1994) 167–203.

[86] PIETSCH, A.: *Zur Theorie der topologischen tensor Produkte*. Math. Nachr. **25** (1963) 19–31.

[87] RAMANUJAN, M. S.: *Generalised Kojima–Toeplitz matrices in certain linear topological spaces*. Math. Ann. **159** (1965) 365–373.

[88] RETHERFORD, J. R.: *Bases, basic sequences and reflexivity in Banach spaces*. Math. Ann. **164** (1966) 280–285.

[89] ROBERTSON, A. P. y ROBERTSON, W. J.: *Topological Vector Spaces*. Segunda edición. Cambridge University Press. Cambridge (1973).

[90] ROBINSON, A.: *On functional transformations and summability*. Proc. London Math. Soc. **52** (1950) 132–160.

[91] ROSIER, R. C.: *Dual spaces of certain vector sequences spaces*. Pacific. J. Math. **46** (1973) 487–501.

[92] RUCKLE, W. H.: *The infinite sum of closed subspaces of an F-space*. Duke Math. J. **31** (1965) 543-554.

[93] RUCKLE, W. H.: *An abstract concept of the sum of a numerical series*. Can. J. Math. **4** (1970) 863–874.

[94] RUCKLE, W. H.: *Representation and series summability of complete biorthogonal sequences*. Pacific. J. Math. **34** (1970) 511–528.

[95] RUCKLE, W. H.: *Sequence Spaces*. Research Notes in Math. **49**. Pitman. Londres (1981).

[96] RUCKLE, W. H.: *Generalized sectional convergence and barrelledness*. (Manuscrito) (1992).

[97] RUCKLE, W. H. y SAXON, S. A.: *Generalized sectional convergence and multipliers*. J. Math. Anal. Appl. **193** (1995) 680-705.

[98] RUCKLE, W. H. y SWART, J.: *Schwartz topologies on sequence spaces*. Math. Ann. **230** (1978) 505–513.

[99] SANDERS, B. L.: *Decompositions and reflexivity in Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 204–208.

[100] SCHAEFER, H. H.: *Sequence spaces with a given Köthe β-dual*. Math. Ann. **189** (1970) 235–241.

[101] SCHAUDER, J.: *Zur Theorie stetige Abbildungen in Funftionalräumen*. Math. Z. **26** (1927) 47–65.

[102] SHAWYER, B. y WATSON, B.: *Borel's Methods of Summability. Theory and Applications*. Clarendon Press. Oxford (1994).

[103] SINGER, I.: *Basic sequences and reflexivity of Banach Spaces*. Studia Math. **21** (1962) 351–369.

[104] SINGER, I.: *Bases in Banach Spaces I*. Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1970).

[105] SINGER, I.: *Bases in Banach Spaces II*. Springer–Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1981).

[106] TASKINEN, J.: *Counterexamples to "Problème des topologies" of Grothendieck*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes **63** (1986) 75–88.

[107] TASKINEN, J.: *The projective tensor products of Fréchet Montel spaces*. Studia Math. **91** (1988) 17-30.

[108] TASKINEN, J.: *Examples of non distinguished Fréchet spaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **14** (1989) 75–88.

[109] VALDIVIA, M.: *Topics in Locally Convex Spaces.* North–Holland Mathematical Studies **67**. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1982).

[110] WEBB, J. H.: *Sequential convergence in locally convex spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1964) 341–364.

[111] WEBB, J. H.: *Extended Schauder decompositions of locally convex spaces.* Glasgow Math. J. **15** (1974) 166–171.

[112] WEBB, J. H.: *Schauder basis and decompositions in locally convex spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **76** (1974) 145–152.

[113] WILANSKY, A. : *Functional Analysis.* Blaisdell Publishing Co. Nueva York, Toronto y Londres (1964).

[114] WILANSKY, A.: *Modern Methods in Topological Vector Spaces.* McGraw-Hill International Book Co. Nueva York (1978).

[115] WILANSKY, A.: *Summability through Functional Analysis.* North–Holland Mathematical Studies **85**. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1984).

[116] WILANSKY, A. y ZELLER, K.: *The inverse matrix in summability: reversible matrices.* J. London. Math. Soc. **32** (1957) 397–408.

[117] WOJTASZCZYK, P.: *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **25.** Cambridge University Press. Cambridge (1991).

[118] ZELLER, K.: *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfarhem.* Math. Z. **53** (1951) 463–487.

[119] ZELLER, K.: *Abschnittskonvergenz in FK-Raümen.* Math. Z. **55** (1951) 55–70.

[120] ZELLER, K.: *Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren.* Arch. Math. **4** (1953) 425–431.

[121] ZELLER, K.: *Theorie der Limitierungsverfarhen.* Springer Lecture Notes in Mathematics **15.** Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1970).

[122] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series.* Cambridge University Press. Cambridge (1959).